Ecuaciones Diferenciales II

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

Índice general

1. Movimiento de partículas en un fluido

Fijado un espacio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, supondremos siempre que será abierto[1] y conexo[2].

Notación. A cada punto de Ω lo notaremos normalmente por $p \in \Omega$, que tendrá coordenadas:

$$p = (x, y, z)$$

El fluido suele llevar en cada punto una dirección y una velocidad, por lo que en cada punto $p \in \Omega$ tendremos un vector v que determina la velocidad del fluido, la cual supondremos conocida siempre. Este vector no tiene por qué ser constante sino que puede depender del tiempo, por lo que generalmente v será una función $v = v(t, p)$, es decir, $v : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación que a cada momento t y posición p le asigna un vector $v(t, p)$.

Si tenemos una partícula en el fluido que se mueve esta determinará una trayectoria, que podemos modelar como una curva parametrizada $p(t)$.

Podremos medir la velocidad de la partícula de dos formas: observando la velocidad de la partícula de forma interna (como el cuentakilómetros de un coche) o suponiendo que es una partícula que se deja llevar por la corriente y que su velocidad es la del fluido. La velocidad es la derivada de p.

En el segundo caso:

$$\dot{p}(t) = V(t, p(t))$$

Estamos ante una ecuación diferencial. Observemos que es un sistema de primer orden en forma normal, puesto que las coordenadas de p son funciones del tiempo. Si escribimos $V = (u, v, w)$ tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = u(t, x, y, z) \\ \dot{y} = v(t, x, y, z) \\ \dot{z} = w(t, x, y, z) \end{array} \right.$$

Un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas, que conocidas las velocidades del fluido determina la trayectoria de la partícula.

[1]Queremos estudiar movimientos de partículas en un fluido y pasan cosas no deseadas en la frontera.

[2]Por comodidad.

Observación. Observemos que en la notación primera hemos escrito explícitamente que $\dot{p}$ está en función de t. En la segunda notación estamos usando la notación habitual en las ecuaciones diferenciales, omitiendo la dependencia de t y pensándola de forma implícita. Podemos así reescribir la primera ecuación como:

$$\dot{p} = V(t, p)$$

Una vez denotamos $\dot{p}(t)$ estamos diciendo que es una solución concreta, por lo que será una variable dependiente de t. Sin embargo, cuando hablamos de $V(t, p)$ vemos p como una variable independiente.

Aparecerán sistemas autónomos, que representan fluidos estacionarios, donde la velocidad $V(t, p)$ no depende del tiempo.

Ejemplo. Comenzamos primero con dos ejemplos de fluidos estacionarios (el vector en cada posición no depende del tiempo):

- Consideramos $\Omega = \mathbb{R}^3$ y tomamos:

  $$V(t, x, y, z) = (0, 1, 0)$$

  Observamos que es un sistema autónomo (no depende del tiempo) y en el que la velocidad tampoco depende de la posición:

  $$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 1 \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

  Con lo que las soluciones son de la forma:

  $$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \\ y(t) &= t + c_2 \\ z(t) &= c_3 \end{aligned}$$

  Es una familia que depende de 3 parámetros.

- Tomamos la ecuación de un vórtice lineal, $\Omega = \mathbb{R}^3$ y:

  $$V(t, x, y, z) = (y, -x, 0)$$

  Tenemos el sistema:

  $$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

  Es un sistema lineal homogéneo, que nos da las soluciones:

  $$z(t) = c_3$$

  Reducimos a una ecuación de segundo orden, derivando en la primera:

  $$\ddot{x} + \dot{x} = 0$$

Por lo que:

$$x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t)$$

Y también tendremos:

$$y(t) = -c_1 \operatorname{sen}(t) + c_2 \cos(t)$$

Para ciertas condiciones iniciales $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Nuestro objetivo ahora es tratar de probar que el sistema:

$$\dot{p} = V(t, p)$$

con la condición inicial $p(t_0) = p_0$ tiene una solución. Luego trataremos de ver que en cada condición inicial tenemos una única solución. Demostraremos el Teorema de existencia y unicidad en cualquier número de dimensiones.

Notación. Notaremos a los puntos por $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ y al campo que define la ecuación diferencial por X, que será función de t y de x, que estará definido en un conjunto $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ y exigiremos que sea abierto y conexo. Así, tendremos

$$\begin{array}{rrcl} X: & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ & (t,x) & \longmapsto & X(t,x) \end{array}$$

donde el campo X tiene d coordenadas:

$$X = (X_1, \dots, X_d)$$

donde tratamos de resolver la ecuación $\dot{x} = X(t, x)$, que en realidad es un sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x_1} = X_1(t, x_1, \dots, x_d) \\ \vdots \\ \dot{x_d} = X_d(t, x_1, \dots, x_d) \end{array} \right.$$

Supondremos siempre que X es una función continua.

Tomaremos $(t_0, x_0) \in D$ y queremos resolver el problema de condiciones iniciales

$$\dot{x} = X(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

que consiste en resolver la ecuación diferencial superior mediante una solución que cumpla la condición enunciada.

1.1. Problema a resolver

Así, queremos resolver el problema:

$$\dot{x} = X(t, x) \tag{1.1}$$

con $X : D \to \mathbb{R}^d$ continuo, donde $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ es un subconjunto abierto y conexo. La condición de que X sea continuo es equivalente a que cada una de sus coordenadas

$$X = (X_1, \dots, X_d)$$

sea una aplicación continua.

Definición 1.1. Una **solución** del problema (1.1) es una aplicación $x : I \to \mathbb{R}^d$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo[3] de forma que $x(t) \subset D$:

i) $x(t)$ es derivable.

ii) $(t, x(t)) \in D \qquad \forall t \in I.$

iii) $\dot{x}(t) = X(t, x(t)) \qquad \forall t \in I.$

Observación. Observemos que la definición de solución del problema planteado anteriormente es equivalente si sustituimos la condición de que x sea derivable por la condición de que x sea de clase 1, puesto que la condición *iii)* nos da automáticamente la continuidad de la derivada de x.
Así, la condición *i)* se puede sustituir por la condición *i')* $x \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Ejemplo. Veamos un par de ejemplos para fijar las ideas:

1. Consideramos $\dot{x} = x^2$ y la aplicación $x(t) = \dfrac{1}{1-t}$. Vamos a analizar el marco del problema.

   Tenemos en este caso $d = 1$ y $D = \mathbb{R}^2$, puesto que tenemos el campo vectorial $X(t, x) = x^2$, que es continuo en todo $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   Tenemos una primera solución en $I_1 =]-\infty, 1[$, $x_1(t) = \frac{1}{1-t}$.

   Y otra solución en $I_2 =]1, +\infty[$, $x_2(t) = \frac{1}{1-t}$.

   Son <u>dos soluciones distintas</u>, con la misma fórmula.

2. Consideramos ahora $\dot{x} = \frac{x}{t}$ y la aplicación $x(t) = -7t$.

   Tenemos $d = 1$ y el campo es $X(t, x) = \frac{x}{t}$, que tiene dos posibles dominios de definición:
   $$D_1 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}, \qquad D_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

   Tenemos en realidad dos ecuaciones diferenciales.

   Para discutir una de sus soluciones, si consideramos:

   $$I_1 = \mathbb{R}^-, \qquad I_2 = \mathbb{R}^+$$

   tenemos que $x\big|_{I_1}$ es solución de la ecuación diferencial considerando el dominio D_1 y análogamente para $x\big|_{I_2}$ con el dominio D_2.

[3] No necesariamente abierto.

Para una ecuación $\dot{x} = X(t, x)$ definida en un dominio $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ abierto y conexo, acompañaremos usualmente la ecuación de una **condición inicial**, que es fijar un punto $(t_0, x_0) \in D$ y obligaremos a la solución $x(t)$ de la ecuación que verifique la condición:

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

Cuando nos refiramos próximamente al problema (1.1) nos estaremos refiriendo usualmente a un problema de valores iniciales dado por la fórmula destacada y por la condición (1.2).

Ejemplo. En el primer ejemplo anterior tenemos para la condición inicial $x(0) = 1$ que la solución de $\dot{x} = x^2$ es $x :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ dada por:

$$x(t) = \frac{1}{1-t}$$

Teorema 1.1 (Cauchy-Peano, Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales.)**.** *Todo problema de valores iniciales admite una solución definida en algún intervalo*[4] *I con $t_0 \in \mathring{I}$.*

Observación. El ejepmlo anterior nos demuestra que el Teorema de Cauchy-Peano no puede generalizarse a otro que resuelva el problema de forma global, puesto que tenemos una solución para la ecuación que no puede extenderse a todo $\mathbb{R}$; a pesar de ser el dominio de la ecuación todo $\mathbb{R}^2$.

Lo que venga a continuación estará destinado a probar el Teorema anterior.

El primer paso será pasar el problema de valores iniciales a una ecuación integral, puesto que la ecuación diferencial y el problema de condiciones iniciales son muy intuitivos pero difíciles de manipular desde el punto de vista de las demostraciones.

1.2. Ecuación integral de Volterra

La ecuación integral de Volterra es:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(s, x(s))\ ds \tag{1.3}$$

Es la ecuación que obtenemos al integrar $\dot{x} = X(t, x)$. Así, a cada ecuación diferencial podemos asociarle una ecuación de Volterra y a cada ecuación de Volterra podemos asociarle una ecuación diferencial.

Ejemplo. El problema de valores iniciales $\dot{x} = 3x$ con la condición inicial $x(2) = -5$ tiene ecuación integral de Volterra:

$$x(t) = -5 + \int_{2}^{t} 3x(s)\ ds \tag{1.4}$$

Definición 1.2. Una solución de (1.3) es una función $x : I \to \mathbb{R}^d$ con I un intervalo que contiene a t_0 en su interior y:

[4] Por tanto, el Teorema nos da una solución local.

i) x es continua.

ii) $(t, x(t)) \in D \qquad \forall t \in I$.

iii) Se cumple la condición (1.3) para todo $t \in I$.

Ejemplo. Una solución de la ecuación integral de Volterra (1.4) es:

$$x(t) = -5e^{3(t-2)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

La estrategia será enunciar los Teoremas como ecuaciones diferenciales y realizar sus demostraciones con ecuaciones integrales.

Proposición 1.2. *Los problemas* (1.1) *y* (1.3) *son equivalentes*[5]*.*

Demostración. Supondremos que tenemos una solución de una ecuación y tendremos que probar entonces que tenemos una solución de la otra ecuación. Basta aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo en un caso y la Regla de Barrow en el otro.

- Supuesto que $x : I \to \mathbb{R}^d$ es solución de la ecuación (1.1), tenemos entonces que x es una aplicación derivable que verifica[6]:

  $$\dot{x}(t) = X(t, x(t)) \qquad \forall t \in I$$

  Por lo que $\dot{x}$ es una primitiva de la aplicación $t \mapsto X(t, x(t))$ definida en I, que sabemos que es continua. La Regla de Barrow nos dice entonces que fijado $t_0 \in I$ se tiene:

  $$\int_{t_0}^{t} X(s, x(s))\ ds = x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0 \qquad \forall t \in I$$

  Y despejando obtenemos (1.3).

- Supuesto que $x : I \to \mathbb{R}^d$ es solución de la ecuación (1.3), tenemos en este caso que x es una aplicación continua que verifica:

  $$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(s, x(s))\ ds \qquad \forall t \in I$$

  Como x es continua, la aplicación $s \mapsto X(s, x(s))$ y de dominio I será también continua. Bajo estas hipótesis, el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la aplicación

  $$t \longmapsto \int_{t_0}^{t} X(s, x(s))\ ds$$

  de dominio I es derivable, por lo que también lo será la aplicación x, y su derivada es:

  $$\dot{x}(t) = X(t, x(t)) \qquad \forall t \in I$$

  Hemos obtenido que x es solución de (1.1), y es claro que $x(t_0) = x_0$.

□

[5]Es decir, tienen las mismas soluciones.

[6]Observemos que la condición *ii)* en el primer caso es equivalente a la condición *ii)* del segundo caso.

1.2.1. El Teorema global

La estrategia a seguir será probar un Teorema global con hipótesis extra para luego retringir el problema y obtener la demostración del Teorema local.

Teorema 1.3 (global de existencia)**.** *Sea* $D =]a, b[\times \mathbb{R}^d$ *para ciertos* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $X :]a, b[\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *continuo de forma que*

$$\exists M > 0 : \|X(t, x)\| \leqslant M \qquad \forall (t, x) \in D$$

Entonces (1.1) *tiene una solución definida en todo el intervalo* $]a, b[$*.*

Ejemplo. Familiaricémonos con este problema.

1. Consideramos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{x_2}{1 + x_2^2 + x_1^2} + t\operatorname{sen}(x_1), & x_1(0) = 3 \\ \\ \dot{x}_2 = e^{-x_1^2} + \sqrt{1 - t^2}, & x_2(0) = 7 \end{cases}$$

   Aquí tenemos $d = 2$, $]a, b[=]-1, 1[$, con $X :]-1, 1[\times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continuo.

   Veamos que X está acotado, como todas las normas son equivalentes, tomaremos la norma del máximo: $\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$:

$$\|X(t, x)\| \leqslant \max\{2, 2\} = 2 \qquad \forall (t, x) \in]-1, 1[\times \mathbb{R}^2$$

   Tenemos además que $t_0 = 0 \in]a, b[$ así como que $x_0 = (3, 7) \in \mathbb{R}^2$.

2. Veamos ahora que la hipótesis de que X es acotado es esencial, puesto que el problema de valores iniciales $\dot{x} = x^2$, $x(0) = 1$ con solución

$$x(t) = \frac{1}{1 - t}, \qquad t \in]-3, 1[$$

   donde tenemos[7] $D =]-3, 3[\times \mathbb{R}$. Próximamente veremos que esta solución es la única para la condición inicial enunciada, lo que nos garantizará que esta solución no puede extenderse a otra que esté definida en $]-3, 3[$.

Vamos a ver a continuación que el Teorema 1.1 puede deducirse a partir del Teorema 1.3, por lo que nuestro futuro trabajo será probar este segundo. Para probar esta relación usaremos el Lema del Pegado, que ya conocíamos de Topología I.

Lema 1.4. *Sean* X, Y *espacios métricos y* $F_1, F_2 \subset X$ *dos cerrados de forma que* $F_1 \cup F_2 = X$*. Sean* $f_i : F_i \to Y$ *continuas para* $i \in \{1, 2\}$ *verificando que* $f_1 = f_2$ *en* $F_1 \cap F_2$*. Entonces la función* $f : X \to Y$ *dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in F_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in F_2 \end{cases}$$

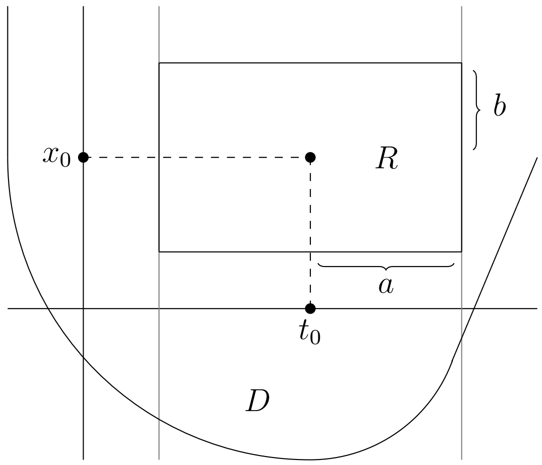
está bien definida y es continua.

[7] Podríamos haber tomado $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pero queremos verificar las hipótesis del Teorema.

Proposición 1.5. *Del Teorema 1.3 puede deducirse el Teorema 1.1.*

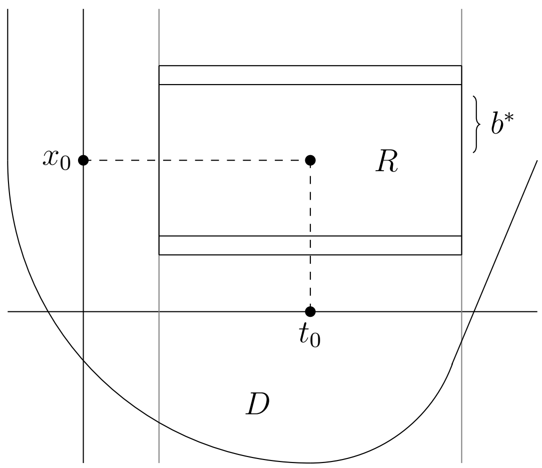
Demostración. Como D es abierto y $(t_0, x_0) \in D$, podemos tomar $a, b > 0$ de forma que:

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : |t - t_0| \leqslant a, \|x - x_0\| \leqslant b\} \subset D$$



Nuestro objetivo es tratar de extender el campo X definido en el conjunto D a toda la banda $]t_0 - a, t_0 + a[\times \mathbb{R}^d$. Inicialmente podríamos pensar en asignarle el valor 0 fuera de la región R, pero entonces podríamos perder la continuidad del campo X. Este problema tiene fácil arreglo, pues basta reservar una zona en la que "unir" el campo X con la función constantemente igual a cero de forma continua. Para ello, tomaremos $0 < b^* < b$ y consideraremos:

$$R^* = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : |t - t_0| \leqslant a, \|x - x_0\| \leqslant b^*\} \subset D$$



Definimos $\psi :]t_0 - a, t_0 + a[\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua de forma que:

$$\psi = 1 \quad \text{en} \quad \|x - x_0\| < b^*$$
$$\psi = 0 \quad \text{en} \quad \|x - x_0\| > b$$
$$0 \leqslant \psi \leqslant 1 \quad \text{siempre}$$

Y definimos el campo modificado $X^* :]t_0 - a, t_0 + a[\, \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dado por:

$$X^*(t,x) = \begin{cases} \psi(t,x) \cdot X(t,x) & \text{si } \|x - x_0\| \leqslant b \\ 0 & \text{si } \|x - x_0\| > b \end{cases}$$

Vemos que $X(t,x) = X^*(t,x)$ para todo $(t,x) \in R^*$.

Buscamos aplicar ahora el Teorema 1.3 a $\dot{x} = X^*(t,x)$, $x(t_0) = x_0$. Falta comprobar la contiuidad de X^* y su acotación.

- Para la contuidad de X^*, si consideramos en el espacio $]t_0 - a, t_0 + a[\, \times \mathbb{R}^d$:

  $$F_1 = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : |t - t_0| < a, \|x - x_0\| \leqslant b\}$$
  $$F_2 = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : |t - t_0| < a, \|x - x_0\| \geqslant b\}$$

  Vemos que definiendo $f_1 = \psi \cdot X$, $f_2 = 0$ se tiene que[8] $f_1 = f_2$ en $F_1 \cap F_2$. Aplicando el Lema 1.4 obtenemos que la función X^* es continua.

- X es continuo y $R \subset D$ es compacto, por lo que:

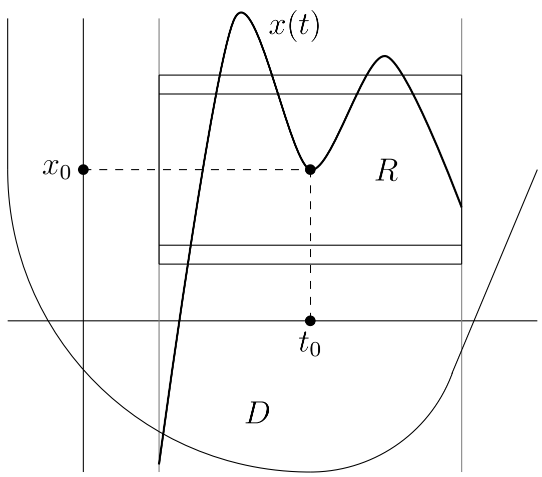
  $$\exists M > 0 : \|X(t,x)\| \leqslant M \qquad \forall (t,x) \in R$$

  Como $\psi \leqslant 1$ obtenemos que X^* es también acotada a partir de su definición.

Aplicando ahora el Teorema 1.3 obtenemos que existe $x :]t_0 - a, t_0 + a[\to \mathbb{R}^d$ que es solución del problema:

$$\dot{x}(t) = X^*(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

Vemos que $x(t)$ no puede (quizás) ser solución del problema planteado con el campo X en el dominio D.



Sin embargo, sí que nos podemos restringir a un entorno en el que sea solución. Tenemos que:

$$\dot{x}(t) = X(t,x) = X^*(t,x) \quad \text{si} \quad \|x - x_0\| < b^*$$
$$x(t_0) = x_0, \qquad x(t) \quad \text{continua}$$

[8]Por la contiuidad de ψ tenemos que $\psi(x) = 0$ cuando $\|x - x_0\| = b$.

Y además:

$$\exists \delta > 0 : \|x(t) - x_0\| < b^* \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

Con lo que $x\big|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$ sí que es solución de $\dot{x} = X(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. □

1.2.2. Demostración del Teorema global

Nuestro interés será ahora probar el Teorema 1.3. Recordando las hipótesis, tenemos una función $X :]a, b[\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continuo y acotado:

$$\exists M : \|X(t, x)\| \leqslant M \qquad \forall (t, x) \in]a, b[\times \mathbb{R}^d$$

La demostración se dividirá en 3 etapas:

1 - Construcción de soluciones aproximadas. Fijado $\varepsilon > 0$, definiremos $x_\varepsilon :]a, b[\to \mathbb{R}^d$ continua de forma que se verifica[9]:

$$\left\| x_\varepsilon - x_0 - \int_{t_0}^{t} X(s, x(s))\, ds \right\| \leqslant M\varepsilon \qquad \forall t \in]a, b[$$

Estas funciones x_ε serán soluciones aproximasdas a la ecuación de Volterra que estamos buscando, y seguiremos el método de Tonelli para construirlas.

2 - Argumento de compacidad (Ascoli-Arzelá). En esta etapa queremos pasar al límite de una sucesión de aproximaciones x_{ε_n}, que queremos que tengan límite, para lo que nos serán de especial relevancia los conjuntos compactos en un espacio de funciones. La convergencia que nos interesará será la convergencia uniforme.

3 - Paso al límite. Teniendo n a infinito obtendremos la solución como límite de la sucesión construida.

Ejemplo. Consideramos $x' = \operatorname{sen} x$, $x(0) = \frac{\pi}{2}$, $[0, 2]$ y $\varepsilon = 1$. La solución aproximada sería:

$$x_1(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } t \in [0, 1] \\ \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\int_0^{t-1} \operatorname{sen} x_1(s)\, ds = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\int_0^{t-1} ds = \dfrac{\pi}{2} + t - 1 & \text{si } t \in [1, 2] \end{cases}$$

[9] La constante $M\varepsilon$ es por comodidad, se podría haber sustituido por ε.