Análisis Funcional
Primera prueba de evaluación
31 de octubre de 2024

1. Se considera el operador lineal $T : c_0 \to c_0$ definido por

$$T(x)(k) = \frac{k}{k+1}x(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall x \in c_0.$$

(i) (3) Demuestra que T es continuo y $\|T\| \leq 1$.
(ii) (3) Demuestra que $\|T\| = 1$.
(iii) (1) Demuestra que T no alcanza su norma.

Solución. (i) Sea $x \in c_0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$|T(x)(k)| = \left|\frac{k}{k+1}x(k)\right| = \underbrace{\left|\frac{k}{k+1}\right|}_{\leq 1}\underbrace{|x(k)|}_{\leq\|x\|_\infty} \leq \|x\|_\infty,$$

luego $\|T(x)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |T(x)(k)| \leq \|x\|_\infty$. Como esta desigualdad es válida para todo $x \in c_0$ concluimos que T es continuo y que $\|T\| \leq 1$.

(ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\|T(e_n)\|_\infty \leq \|T\| \underbrace{\|e_n\|_\infty}_{=1}$$

y, por otra parte,

$$T(e_n)(k) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k \neq n, \end{cases}$$

luego $\|T(e_n)\|_\infty = \frac{n}{n+1}$. En consecuencia,

$$\frac{n}{n+1} \leq \|T\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y haciendo $n \to \infty$ en la desigualdad anterior obtenemos $1 \leq \|T\|$.

(iii) Conviene recordar que para cada $x \in c_0$, se tiene que

$$\|x\|_\infty = \max_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|.$$

Supongamos que existiera $x \in c_0$ con $\|x\|_\infty = 1$ y $\|T(x)\|_\infty = \|T\|(= 1)$. En virtud de la observación anterior, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|T(x)(k)| = 1$, lo cual conduce a la contradicción siguiente:

$$1 = \left|T(x)(k)\right| = \left|\frac{k}{k+1}x(k)\right| = \underbrace{\frac{k}{k+1}}_{<1} \underbrace{|x(k)|}_{\leq\|x\|_\infty=1} < 1.$$

$\square$

2. Sea H un espacio de Hilbert, sea $u \in H$ con $u \neq 0$ y sea
$$M = \{x \in H\colon \langle x|u\rangle = 0\}.$$
Para cada $x \in H$:

(i) (2) demuestra que
$$\operatorname{dist}(x, M) = \frac{|\langle x|u\rangle|}{\|u\|},$$

(ii) (1) demuestra que existe un único punto $y \in M$ tal que $\operatorname{dist}(x, M) = \|x - y\|$ y calcula ese punto.

Solución. Observamos que
$$M = \ker \phi_u,$$
donde ϕ_u es el funcional lineal continuo sobre H definido por $\phi_u(x) = \langle x|u\rangle$ para todo $x \in H$. Sabemos que $\|\phi_u\| = \|u\|$ y también sabemos, por la teoría de espacios de Banach, que
$$\operatorname{dist}(x, \ker \phi_u) = \frac{|\phi_u(x)|}{\|\phi_u\|} = \frac{|\langle x|u\rangle|}{\|u\|}.$$

Alternativamente podemos obtener la fórmula solicitada para la distancia junto con las propiedades solicitadas en (ii) usando exclusivamente la teoría de espacios de Hilbert en la forma siguiente. Observamos que
$$M = N^{\perp},$$
donde $N = \mathbb{K}u$ (que es un subespacio vectorial de dimensión uno de H y, por tanto, cerrado). M es un subespacio vectorial cerrado de H por lo que el teorema de la aproximación óptima asegura que existe un único punto $y \in M$ tal que $\operatorname{dist}(x, M) = \|x - y\|$. El conjunto $\{u/\|u\|\}$ es una base ortonormal de N y, por tanto, la proyección ortogonal de x sobre N viene dada por
$$P_N(x) = \left\langle x \middle| \frac{u}{\|u\|} \right\rangle \frac{u}{\|u\|} = \frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2} u,$$
mientras que la proyección ortogonal de x sobre $M = N^{\perp}$ viene dada por
$$P_M(x) = x - P_N(x) = x - \frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2} u.$$
Además, sabemos que $y = P_M(x)$ por lo que
$$\operatorname{dist}(x, M) = \|x - y\| = \left\| \frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2} u \right\| = \frac{|\langle x|u\rangle|}{\|u\|^2} \|u\| = \frac{|\langle x|u\rangle|}{\|u\|}.$$

$\square$