NOMBRE Y APELLIDOS:

Parcial 2 - Análisis Funcional - 20/XII/2024

1. **[5 puntos]** Sean E un espacio de Banach y $\{f_n\}$ una sucesión en el espacio dual E^* y $f \in E^*$. Probad que

$$\{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} f \qquad \text{en } \sigma(E^*, E) \Longleftrightarrow \{\langle f_n, x\rangle\} \longrightarrow \langle f, x\rangle, \qquad \forall x \in E.$$

2. **[5 puntos]** Sean $C \neq \emptyset$ un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert H y $T : C \longrightarrow C$ una aplicación verificando

$$\|Tu - Tv\| \leq \|u - v\| \qquad u, v \in C.$$

   a) Probad que si existe una sucesión $\{u_n\} \subset C$ verificando

   $$\{u_n\} \rightharpoonup u \text{ (débilmente) y } \{u_n - Tu_n\} \longrightarrow f \text{ (fuertemente).}$$

   entonces $u - Tu = f$.

   [**Ayuda**: Empieza por el caso $C = H$ y usa la desigualdad $((u - Tu) - (v - Tv), u - v) \geq 0$, $\forall u, v$.]

   b) Deduce que si C es además acotado, entonces T tiene un punto fijo.

   [**Ayuda**: Considera $T_\varepsilon u = (1 - \varepsilon)Tu + \varepsilon a$ siendo $a \in C$ fijo y $\varepsilon > 0$, con $\varepsilon \to 0$.]