MN I

Examen II

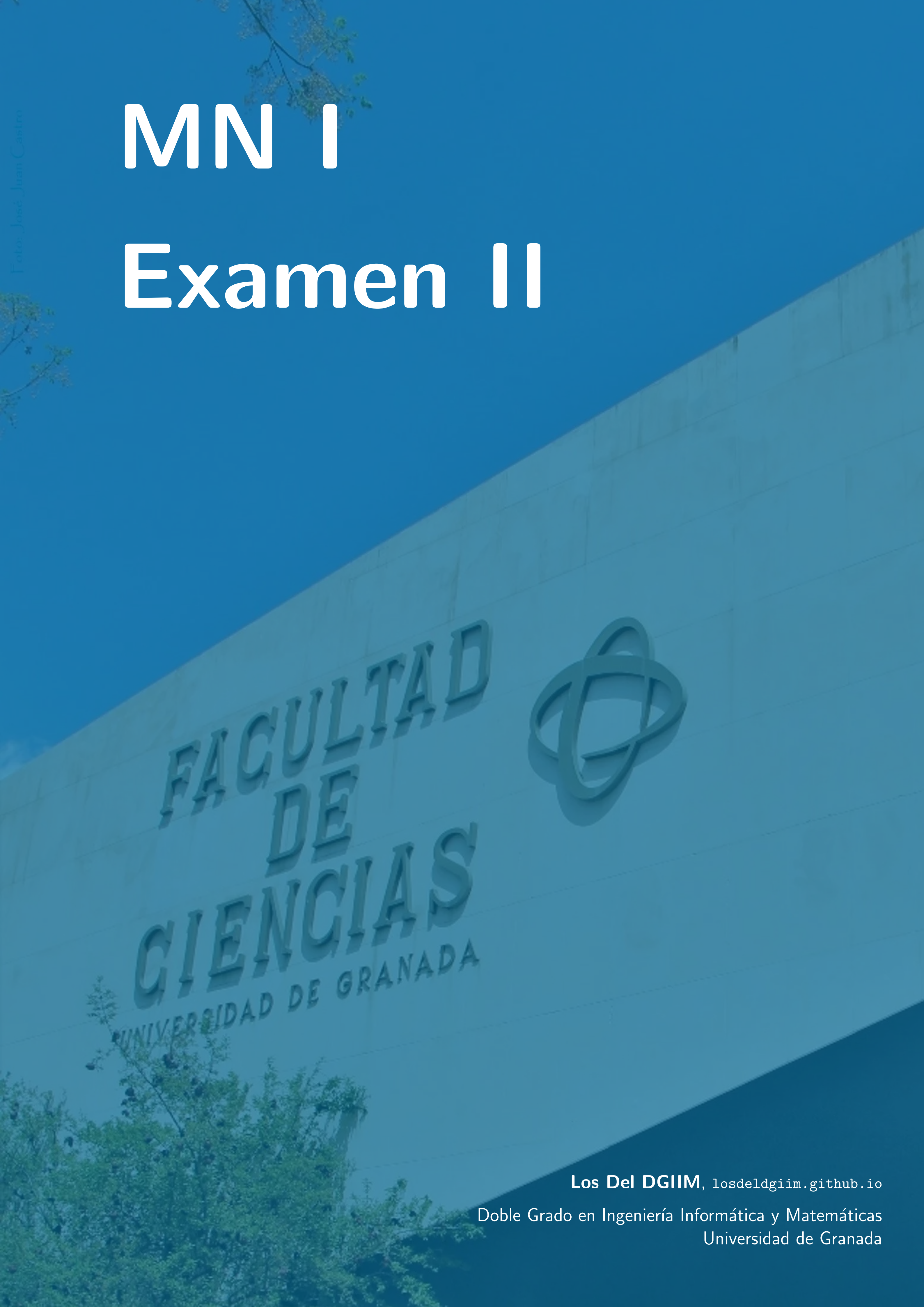

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

MN I
Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Métodos Numéricos I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Matemáticas.

Grupo B.

Profesor Teresa Encarnación Pérez Fernández.

Descripción Prueba 1. Temas 1 y 2.

Fecha 20 de abril de 2022.

Ejercicio 1 (1.5 puntos). Calcule $p(1{,}1)$ para el polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ utilizando la expresión explícita y el algoritmo de Horner en aritmética de redondeo a dos dígitos. ¿Cambian los resultados? ¿Qué valor es más exacto? ¿Porqué?

En el caso de el algoritmo de Horner, el valor es $p(1{,}1) = 0{,}99$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 1{,}1 & & 1{,}1 & -2{,}1 & 0{,}99 \\ \hline & 1 & -1{,}9 & 0{,}9 & 0{,}99 \end{array}$$

Evaluando en la expresión analítica:

$$p(1{,}1) = (1{,}1)^3 - 3(1{,}1)^2 + 3(1{,}1) = 1{,}3 - 3(1{,}2) + 3(1{,}1) = 1{,}3 - 3{,}6 + 3{,}3 = 1$$

El valor exacto es $p(1{,}1) = 1{,}001$. Aunque por norma general es más exacto el algoritmo de Horner, en este caso es más exacto evaular en la expresión analítica. Esto se debe a que al evaluar al cubo se produce un error por defecto, mientras que al evaluar en el monomio de grado dos se produce un error por exceso. Por tanto, los errores, aunque son mayores, se compensan.

Ejercicio 2 (2 puntos). Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 6 & 12 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Razone que A no admite factorización LU sin realizar cálculos.

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0$$

   Como el determinante principal de orden 2 de A es nulo, entonces no admite factorización LU sin intercambio de filas.

2. Razone que existe una matriz obtenida mediante permutación de las filas de la matriz A que sí admite factorización LU, y encuéntrela.

$$|A| = \cancel{7 \cdot 3 \cdot 15} + 6 \cdot 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 7 - \cancel{7 \cdot 3 \cdot 15} - 6^2 \cdot 7 - 5^2 \cdot 3 = -27$$

   Como $|A| \neq 0 \Longrightarrow A$ es regular, y como A es regular, con una permutación de filas podremos obtener una matriz que admita factorización LU. En este caso, esa permutación es $F_2 \Longleftrightarrow F_3$.

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|3| = 3 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 18 = -3 \qquad |A| = 27$$

   Como los menores principales de A' son no nulos, entonces admite factorización LU.

Ejercicio 3 (2.5 puntos). Se considera el sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1/a & a & \dots & a \\ a & 1/a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & 1/a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Estudie para qué valores del parámetro a el método de Jacobi es convergente. Escriba las ecuaciones del método, indicando explícitamente cuál es la matriz B_J.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{a}x_1 + ax_2 + \dots + ax_n = b_1 \\ ax_1 + \frac{1}{a}x_2 + \dots + ax_n = b_2 \\ \vdots \\ ax_1 + ax_2 + \dots + \frac{1}{a}x_n = b_n \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = ab_1 - a^2x_2^{(k)} - \dots - a^2x_n^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = ab_2 - a^2x_1^{(k)} - a^2x_3^{(k)} - \dots - a^2x_n^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = ab_n - a^2x_1^{(k)} - \dots - a^2x_{n-1}^{(k)} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow x_i^{(k+1)} = a\left(b_i - \sum_{j=0, j\neq i}^{n} ax_j^{(k)}\right) = ab_i - \sum_{j=0, j\neq i}^{n} a^2x_j^{(k)}$$

Por tanto,

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 & \dots & -a^2 \\ -a^2 & 0 & \dots & -a^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a^2 & -a^2 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos su polinomio característico:

$$P_{B_J}(\lambda) = |B_J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -a^2 & \dots & -a^2 \\ -a^2 & -\lambda & \dots & -a^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a^2 & -a^2 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} -\lambda-(n-1)a^2 & -\lambda-(n-1)a^2 & \dots & -\lambda-(n-1)a^2 \\ -a^2 & -\lambda & \dots & -a^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a^2 & -a^2 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda-(n-1)a^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -a^2 & -\lambda & \dots & -a^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a^2 & -a^2 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(2)}{=} (-\lambda-(n-1)a^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -\lambda+a^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda+a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda-(n-1)a^2)(-\lambda+a^2)^{n-1}$$

donde en (1) he sumado fila por fila a la primera fila. Es decir,

$$(1) \Longrightarrow F_1' = F_1 + \sum_{k=2}^{n} F_k$$

y en (2) he sumado a cada fila a^2F_1. Es decir,

$$(2) \Longrightarrow F_k' = F_k + a^2F_1 \qquad \forall k = 2, \dots, n$$

Por tanto, sus valores propios son: $\sigma(B_J) = \{a^2, -(n-1)a^2\}$.

Para que el sistema sea convergente para cualquier valor de $x^{(0)}$ inicial, es necesario que $\rho(B_J) < 1$. Por tanto,

$$|a^2| = a^2 < 1 \Longrightarrow |a| < 1$$

$$|-(n-1)a^2| = (n-1)a^2 < 1 \Longrightarrow a^2 < \frac{1}{n-1} \Longrightarrow |a| < \sqrt{\frac{1}{n-1}}$$

Sin embargo, podemos ver que

$$\sqrt{\frac{1}{n-1}} \leqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{n-1} \leqslant 1 \Longleftrightarrow 1 \leqslant n-1 \Longleftrightarrow 2 \leqslant n, \text{ trivialmente cierto}$$

Por tanto, para que sea convergente es necesario que:

$$|a| < \sqrt{\frac{1}{n-1}}$$

2. Calcule la matriz B_J y el vector c del método para $n = 3, a = 0, \frac{1}{2}, 1$, y $b = (1, -1, 2)^T$. ¿Es convergente el método de Jacobi en estos casos?

Para $n = 3$, es convergente para cualquier valor inicial siy solo si

$$|a| < \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$$

$$B_J^{a=0} = 0. \text{ No tiene sentido, ya que } a_{kk} = \frac{1}{a} = \frac{1}{0}$$

$$B_J^{a=\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \qquad B_J^{a=1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para $a = \frac{1}{2}$, podemos ver que $||B_J^{a=\frac{1}{2}}||_1 = ||B_J^{a=\frac{1}{2}}||_\infty = \frac{1}{2} < 1$, por lo que el sistema es convergente. Además, podemos ver que $|a| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Para $a = 1$, podemos ver que $||B_J^{a=1}||_1 = ||B_J^{a=1}||_\infty = 2 \not< 1$, por lo que no se garantiza que sea convergente. Como $|a| = 1 \not< \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow$ No convergerá para cualquier valor inicial.

Ejercicio 4 (4 puntos). El tema de resolución de sistemas de ecuaciones tiene muchos nombres y métodos, y es fácil confundirse, sobre todo cuando te has estudiado los métodos la noche anterior. El método de Gauss hace sustitución hacia atrás (de abajo arriba), y hay un método iterativo de Gauss-no-se-qué (o qué-se-yo-Gauss) que actualiza los valores... ¡el método de Seidel-Gauss es iterativo con actualización de abajo arriba!

Eso es. Dado un sistema de ecuaciones cuadrado $Ax = b$ de dimensión $n \geqslant 1$ y un vector inicial $x^{(0)}$, el método de Seidel-Gauss es iterativo como todos, en la forma $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c; \quad k \geqslant 0$, es decir,

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

de forma que vamos actualizando las variables de abajo hacia arriba. Para conseguir la siguiente iteración, primero calculamos $x_n^{(k+1)}$ de la última ecuación, después sustituimos esta variable actualizada en la penúltima ecuación junto con los valores anteriores necesarios del paso k, obteniendo $x_{n-1}^{(k+1)}$, y así sucesivamente hasta obtener $x_1^{(k+1)}$.

1. Describa matricialmente el método, esto es, deduzca los valores de la matriz B y el vector c en términos de la matriz de coeficientes A.

2. Escriba las ecuaciones del método de Seidel-Gauss para el sistema de ecuaciones:
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & -1 \end{array}$$
y calcule tres iteraciones partiendo del vector inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

3. ¿Qué puede decirse acerca de la convergencia?