Álgebra I

Parcial VI

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Álgebra I
Parcial VI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2023-2024

Asignatura Álgebra I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María del Pilar Carrasco Carrasco.

Descripción Parcial I

Fecha 14 de noviembre de 2024.

Los puntos de los ejercicios se reparten de forma equitativa entre los apartados.

Ejercicio 1 (3 puntos).

(a) Sean P, Q, R propiedades referidas a los elementos de un conjunto X. Supongamos que $P \Longrightarrow \neg R$. Demostrar la siguiente equivalencia:

$$(P \vee Q) \wedge \neg R \Longleftrightarrow P \vee (Q \wedge \neg R)$$

(b) Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ aplicaciones componibles. Demsotrar que si f y g son biyectivas entonces $g \circ f : X \to Z$ es biyectiva. Demostrar que, en tal caso, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(c) Sea $X = \{0, 2, 4\}$. En el conjunto $X \times X$ definimos la relación binaria $\sim$:

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow a + d = b + c$$

Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia y calcular (describiendo todas las clases de equivalencia) el conjunto cociente $X \times X/\sim$.

(a) Sean X_P, X_Q y X_R los subconjuntos de X conformados por los elementos que verifican la propiedad P, Q y R respectivamente. Puesto que $P \Longrightarrow \neg R$, se tiene que $X_P \subseteq X_{\neg R} = c(X_R)$. Se trata de demostrar que:

$$(X_P \cup X_Q) \cap c(X_R) = X_P \cup (X_Q \cap c(X_R))$$

aplicando la propiedad distributiva de la intersección:

$$(X_P \cup X_Q) \cap c(X_R) = (X_P \cap c(X_R)) \cup (X_Q \cap c(X_R)) \overset{(*)}{=} X_P \cup (X_Q \cap c(X_R))$$

Donde en $(*)$ aplicamos que $X_P \subseteq c(X_R)$.

(b) Partimos de que $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son biyectivas. Entonces:

$$\exists f^{-1} : Y \to X \text{ única tal que } f \circ f^{-1} = id_Y \wedge f^{-1} \circ f = id_X$$
$$\exists g^{-1} : Z \to Y \text{ única tal que } g \circ g^{-1} = id_Z \wedge g^{-1} \circ g = id_Y$$

Se trata de probar que $g \circ f : X \to Z$ es biyectiva. Para ello, consideramos la composición $f^{-1} \circ g^{-1} : Z \to X$. Se tiene entonces que:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) \overset{(*)}{=} g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ (id_Y \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = id_Z$$
$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \overset{(*)}{=} f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ (id_Y \circ f) = f^{-1} \circ f = id_X$$

Donde en $(*)$ hemos aplicado la propiedad asociativa de la composición. Por tanto, $g \circ f : X \to Z$ tiene inversa y por consiguiente es biyectiva.

Además, como la inversa de una aplicación biyectiva es única, será

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

(c) Tenemos que:

$$X = \{0, 2, 4\} \qquad X \times X = \{(a, b) \mid a, b \in X\}$$
$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow a + d = b + c$$

Para ver que $\sim$ es una relación de equivalencia, hemos de ver:

Propiedad reflexiva.
Puesto que $a + b = b + a$, entonces:

$$(a, b) \sim (a, b) \qquad \forall (a, b) \in X \times X$$

Propiedad simétrica.
Sean $(a, b), (c, d) \in X \times X$. Entonces:

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow a + d = b + c \Longleftrightarrow d + a = c + b \Longleftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$$

Propiedad transitiva.
Supongamos que $(a, b), (c, d), (e, f) \in X \times X$ de forma que $(a, b) \sim (c, d)$ y $(c, d) \sim (e, f)$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{c} (a, b) \sim (c, d) \\ \wedge \\ (c, d) \sim (e, f) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a + d = b + c \\ \wedge \\ c + f = d + e \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a + d + f = b + c + f \\ \wedge \\ c + f + b = d + e + b \end{array}\right.$$
$$\Longrightarrow a + d + f = d + e + b \Longrightarrow a + f = e + b \Longrightarrow (a, b) \sim (e, f)$$

Demostrado que $\sim$ es una relación de equivalencia, calculamos $X \times X/ \sim$:

$$X \times X = \{(0, 0), (0, 2), (0, 4), (2, 0), (2, 2), (2, 4), (4, 0), (4, 2), (4, 4)\}$$
$$X \times X/ \sim = \{[(a, b)] \mid (a, b) \in X \times X\}$$

Calculamos las diferentes clases:

$$\begin{aligned}
[(0, 0)] &= \{(a, b) \in X \times X \mid (a, b) \sim (0, 0)\} = \{(a, b) \in X \times X \mid a = b\} \\
&= \{(0, 0), (2, 2), (4, 4)\} = [(2, 2)] = [(4, 4)] \\
[(0, 2)] &= \{(a, b) \in X \times X \mid (a, b) \sim (0, 2)\} = \{(a, b) \in X \times X \mid a + 2 = b\} \\
&= \{(0, 2), (2, 4)\} = [(0, 2)] = [(2, 4)] \\
[(0, 4)] &= \{(a, b) \in X \times X \mid (a, b) \sim (0, 4)\} = \{(a, b) \in X \times X \mid a + 4 = b\} \\
&= \{(0, 4)\} \\
[(2, 0)] &= \{(a, b) \in X \times X \mid (a, b) \sim (0, 2)\} = \{(a, b) \in X \times X \mid a = b + 2\} \\
&= \{(2, 0), (4, 2)\} = [(4, 2)] \\
[(4, 0)] &= \{(a, b) \in X \times X \mid (a, b) \sim (4, 0)\} = \{(a, b) \in X \times X \mid a = b + 4\} \\
&= \{(4, 0)\}
\end{aligned}$$

Con lo que:

$$X \times X/ \sim = \{[(0, 0)], [(0, 2)], [(0, 4)], [(2, 0)], [(4, 0)]\}$$

Ejercicio 2 (4 puntos)**.** Efectuar los siguientes cálculos:

(a) El resto de dividir $18 \cdot 15 - 561 \cdot 15^2$ entre 13.

(b) $[2 \cdot (3^5 - 5^2)]^{-1}$ en $\mathbb{Z}_7$.

(c) $(2x^3 - 3x + 5)(3x - 2)$ en $\mathbb{Z}_6[x]$.

(d) $\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^{-1}$ en $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$.

(e) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\sqrt{3}\right)^{-1}$ en $\mathbb{Q}\left[\sqrt{-3}\right]$.

(a) Puesto que la aplicación

$$\begin{array}{rccl} R: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{13} \\ & a & \longmapsto & R(a) := Res(a;13) \end{array}$$

Es un homomorfismo de anillos, será:

$$\begin{aligned} Res(18 \cdot 15 - 561 \cdot 15^2; 13) &= Res(18;13) \cdot Res(15;13) - Res(561;13) \cdot Res(15;13)^2 \\ &\overset{(*)}{=} 5 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 = 10 - 8 = 2 \end{aligned}$$

Donde en $(*)$ hemos aplicado que $561 = 13 \cdot 43 + 2$

(b) Para ello, primero calcularemos $2 \cdot (3^5 - 5^2)$ en $\mathbb{Z}_7$:

- $3^5 = 5$ en $\mathbb{Z}_7$ pues $3^5 = 243 = 7 \cdot 34 + 5$
- $5^2 = 5$ en $\mathbb{Z}_7$ pues $5^2 = 25 = 7 \cdot 3 + 4$

Entonces:

$$2(3^5 - 5^2) = 2(5 - 4) = 2$$

Y solo queda calcular el inverso de 2 en $\mathbb{Z}_7$:

$$[2 \cdot (3^5 - 5^2)]^{-1} = 2^{-1} = 4$$

Ya que $2 \cdot 4 = 8 = 1$ en $\mathbb{Z}_7$.

(c) $(2x^3 - 3x + 5)(3x - 2) = 6x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 6x + 15x - 10 = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

(d) Puesto que

$$N(7 - 4\sqrt{3}) = (7 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3}) = 49 - 3 \cdot 16 = 49 - 48 = 1$$

Entonces tenemos que $7 - 4\sqrt{3} \in U(\mathbb{Z}[\sqrt{3}])$ y:

$$(7 - 4\sqrt{3})^{-1} = 7 + 4\sqrt{3}$$

(e) Sabemos que si $0 \neq \alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ entonces tenemos que $N(\alpha) \neq 0$ y $\alpha^{-1} = \frac{1}{N(\alpha)}\overline{\alpha}$.

Para $\alpha = \frac{2}{3} - \frac{1}{9}\sqrt{-3}$, será:

$$N(\alpha) = \frac{4}{9} + \frac{3}{81} = \frac{13}{27}$$

y entonces:

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\sqrt{-3}\right)^{-1} = \frac{27}{13}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9}\sqrt{-3}\right) = \frac{18}{13} + \frac{3}{13}\sqrt{-3}$$

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Demostrar:

(a) $Img(f)$ es un subanillo de B.

(b) $f(n \cdot a) = n \cdot f(a)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $a \in A$.

(c) $f(u^n) = f(u)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $u \in U(A)$.

(a) Sabemos que $Img(f) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$.

Para demostrar que es un subanillo de B hemos de ver que es cerrado para sumas, productos, opuestos y que contiene al 1 de B.

Sean $b_1, b_2 \in Img(f)$, entonces $\exists a_1, a_2 \in A$ tales que:

$$b_1 = f(a_1) \qquad b_2 = f(a_2)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 &= f(a_1) + f(a_2) = f(a_1 + a_2) \in Img(f) \\ b_1 \cdot b_2 &= f(a_1)f(a_2) = f(a_1 \cdot a_2) \in Img(f) \end{aligned}$$

por lo que $Img(f)$ es cerrado para sumas y productos. Para ver que es cerrado para opuestos, utilizamos que todo homomorfismo verifica que $f(-a) = -f(a)$ $\forall a \in A$. Entonces:

$$\text{Si } b \in Img(f) \Longrightarrow \exists a \in A \mid f(a) = b \Longrightarrow -b = -f(a) = f(-a) \in Img(f)$$

Finalmente, como $f(1) = 1 \in Img(f)$, tenemos que $Img(f)$ es un subanillo de B.

(b) Distinguimos casos:

- Para $n \geqslant 1$ y $a \in A$: $n \cdot a = \overbrace{a + \ldots + a}^{n \text{ veces}}$, con lo que:

$$f(n \cdot a) = f(\overbrace{a + \ldots + a}^{n \text{ veces}}) = \overbrace{f(a) + \ldots + f(a)}^{n \text{ veces}} = n \cdot f(a)$$

- Para $n = 0$ y $a \in A$, tenemos que $0 \cdot a = 0$, con lo que:

$$f(0 \cdot a) = f(0) = 0 = 0 \cdot f(a)$$

- Para $n < 0$ y $a \in A$, tenemos que $n \cdot a = (-n)(-a)$, con lo que:

$$f(n \cdot a) = f((-n)(-a)) \overset{(*)}{=} (-n)f(-a) = (-n)(-f(a)) = n \cdot f(a)$$

Donde en $(*)$ usamos que $-n > 0$, con lo que podemos aplicar el primer apartado.

(c) Distinguimos casos:

- Para $n \geqslant 1$ y $a \in A$: $a^n = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}}$, con lo que:

$$f(u^n) = f(\overbrace{u \cdot \ldots \cdot u}^{n \text{ veces}}) = \overbrace{f(u) \cdot \ldots \cdot f(u)}^{n \text{ veces}} = [f(u)]^n$$

- Para $n = 0$ y $a \in A$, $a^0 = 1$, con lo que:

$$f(u^0) = f(1) = 1 = [f(u)]^0$$

- Para $n < 0$ y $u \in U(A)$, $u^n = (u^{-1})^{-n}$.
Además, si $u \in U(A) \Longrightarrow \exists u^{-1} \in A \mid uu^{-1} = 1$. Entonces:

$$1 = f(1) = f(uu^{-1}) = f(u)f(u^{-1})$$

y por tanto $f(u) \in U(B)$ y $f(u)^{-1} = f(u^{-1})$. Entonces:

$$f(u^n) = f((u^{-1})^{-n}) \overset{(*)}{=} [f(u^{-1})]^{-n} = [f(u)^{-1}]^{-n} = f(u)^n$$

Donde en $(*)$ hemos usado que $-n > 0$ y el primer apartado.