Foto: José Juan Castro

Cálculo II

Examen XVI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo II
Examen XVI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Roberto González Lugo

Granada, 2024

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Luis Gámez Ruiz.

Fecha 4 de junio de 2025.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Tema a desarrollar: Teorema del Valor Medio y consecuencias sobre el crecimiento.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.**

a) Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Calcula la imagen de f.

b) Sea $a \neq 0$ y sea $g : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{a}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \arctan(a) + \arctan(x) - \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$$

Calcula la imagen de g.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ continua con $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$ cumpliendo:

$$f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)\, dt \qquad \forall x \geqslant 0$$

a) Demuestra que f es derivable en $\mathbb{R}^+$ y calcula su derivada.

b) Determina qué función (o funciones) cumplen la condición anterior.

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Calcula el área del recinto interior delimitado por la elipse de fórmula $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$, así como el volumen del sólido de revolución generado por rotar dicha elipse alrededor del eje OX.

Ejercicio 5 (2 puntos)**.** Sea $F : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_2^{x^2+2} te^{-t}\, dt$$

a) Calcula $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{x \log(1+x)}$

b) Estudia el crecimiento de F y calcula su imagen.

Ejercicio 1. Tema a desarrollar: Teorema del Valor Medio y consecuencias sobre el crecimiento.

Teorema 0.1 (del Valor Medio)**.** *Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Entonces, existe $c \in]a, b[$ tal que*

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$$

Demostración. Sea la recta que pasa por $(a, g(a))$ y $(b, g(b))$.

$$r(x) = g(a) + \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a)$$

Definimos

$$h(x) = g(x) - r(x)$$

- g es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$
- r es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$
- Entonces, h es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$

Además:

$$h(a) = g(a) - r(a) = 0, \quad h(b) = g(b) - r(b) = 0 \Rightarrow h(a) = h(b)$$

Hacemos ahora uso del Teorema de Rolle:

Teorema 0.2 (Rolle)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$, y tal que $f(a) = f(b)$. Entonces, existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Aplicamos el Teorema de Rolle a h, por lo que $\exists\, c \in]a, b[$ tal que:

$$h'(c) = 0 \Rightarrow g'(c) - r'(c) = 0 \Rightarrow g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

□

Consecuencia. Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$. Entonces:

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I^\circ \quad \iff \quad f \text{ es constante}$$

La implicación hacia la izquierda es obvia, la interesante es la otra, pues nos dice que una función derivable en un intervalo queda determinada cuando conocemos su función derivada, salvo una constante aditiva. En efecto, si I es un intervalo no trivial y $f, g \in D(I)$ verifican que $f' = g'$, entonces $g - f$ es constante: existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + \lambda$ para todo $x \in I$.

Corolario 0.2.1 (Criterio de crecimiento)**.** *Sea I un intervalo y $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$.*

- *Si $f'(x) > 0\ \forall x \in I^\circ$, entonces f es estrictamente creciente en I.*
- *Si $f'(x) < 0\ \forall x \in I^\circ$, entonces f es estrictamente decreciente en I.*
- *Si $f'(x) = 0\ \forall x \in I^\circ$, entonces f es constante en I.*

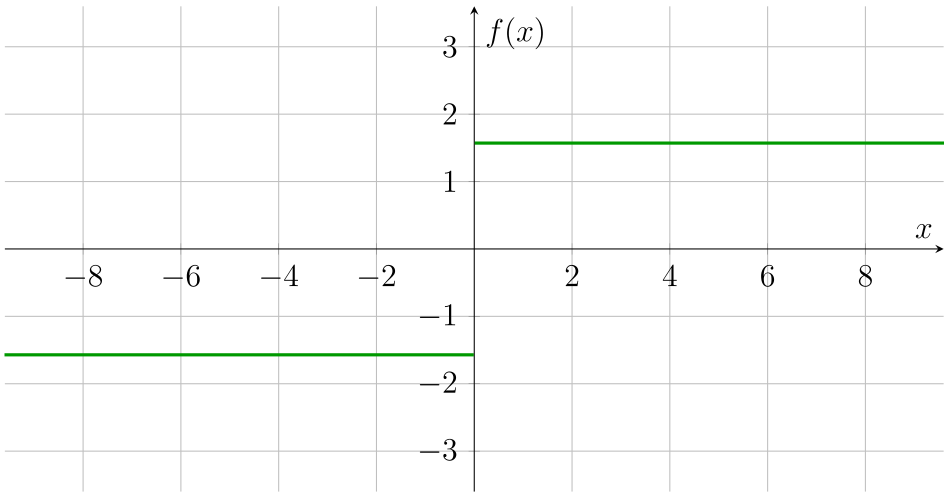

Figura 1: Imagen de la función $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Ejercicio 2.

a) Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Calcula la imagen de f.

En primer lugar, calculamos

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{-1}{x^2+1}\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Esto nos permite saber que $f(x)$ es constante para todo $x \neq 0$
Veamos qué ocurre a la izquierda y derecha del 0, utilizando valores conocidos de la arctan:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = {}^{-\pi}/_2$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = {}^{\pi}/_2$
- $\arctan(0) = 0$

Luego:

- **Izquierda** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = {}^{-\pi}/_2 + 0 = {}^{-\pi}/_2$
- **Derecha** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = {}^{\pi}/_2 + 0 = {}^{\pi}/_2$
- **En 0** La función NO está definida en $x = 0$ (Condición inicial del enunciado)

Por tanto, la imagen es la siguiente, y se puede observar en la Figura 1:

$$Im(f) = \{{}^{-\pi}/_2, {}^{\pi}/_2\}$$

b) Sea $a \neq 0$ y sea $g : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{a}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \arctan(a) + \arctan(x) - \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$$

Calcula la imagen de g.

Siguiendo el mismo procedimiento, calculamos:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2} \cdot \frac{(1-ax)-(a+x)(-a)}{(1-ax)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0,$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1/a\}, \forall a \neq 0$$

Luego la función es constante en $]-\infty, 1/a[$ y en $]1/a, +\infty[$
Estudiamos los valores a la izquierda y a la derecha:

a) **Izquierda:** $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \arctan(a) - \pi/2 - \arctan(-1/a)$
Y sabiendo que arctan es una función impar $(f(-x) = -f(x))$:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \arctan(a) + \arctan(1/a) - \frac{\pi}{2} = f(a) - \frac{\pi}{2}$$

b) **Derecha:** $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \arctan(a) + \pi/2 - \arctan(-1/a) \overset{\text{Análogamente}}{=} f(a) + \frac{\pi}{2}$

Por último, diferenciamos casos:

a) Si $a < 0 \implies f(a) = -\pi/2 \implies Im(g) = \{-\pi, 0\}$
b) si $a > 0 \implies f(a) = \pi/2 \implies Im(g) = \{0, \pi\}$

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ continua con $f(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^+$ cumpliendo:

$$f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)\ dt \qquad \forall x \geqslant 0$$

a) Demuestra que f es derivable en $\mathbb{R}^+$ y calcula su derivada.

b) Determina qué función (o funciones) cumplen la condición anterior. En primer lugar, observemos que

$$f(x) = \sqrt{2\int_0^x f(t)dt} \quad \forall x \geqslant 0$$

Es una raíz (que es derivable si su interior es no negativo y derivable) de una constante positiva mutliplicada por una función no negativa, ya que es una integral de otra función no negativa (por la condición del enunciado) Visto esto, veamos:

$$\frac{f(x)^2}{2} = \int_0^x f(t)dt \quad \forall x \geqslant 0$$

$$\text{Sea: } F(x) = \frac{f(x)^2}{2}$$

Por el TFC: $F'(x) = f(x) \iff f(x)f'(x) = f(x)$
Usamos ahora que $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ y separamos:

a) Si $f(x) > 0 \implies f'(x) = 1 \implies f(x) = Id(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$

b) Si $f(x) = 0 \implies \int_0^x f(t)dt = 0$ nos da dos opciones

1) $f(x)$ es constantemente 0
2) $f(x)$ no es constantemente 0, luego $x = 0$

Sabemos que $f(0) = 0$, luego:
juntando todo lo anterior, $f(x) = Id(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$

En resumen, hemos comprobado que $f(x)$ es constantemente 0, o bien la identidad. Pero el enunciado establece que la imagen de f está contenida en $\mathbb{R}^+$, luego $\boxed{f(x) = x \quad , \forall x \in \mathbb{R}_0^+}$

Ejercicio 4. Calcula el área del recinto interior delimitado por la elipse de fórmula $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$, así como el volumen del sólido de revolución generado por rotar dicha elipse alrededor del eje OX.

a) **Área encerrada por la elipse**

Despejamos y de la ecuación de la elipse:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

El área total del recinto delimitado por la elipse es:

$$A = 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

Sacamos constantes y utilizamos la simetría:

$$A = 4b\int_{0}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

Usamos el cambio de variable $x = a\sin\theta$, entonces $dx = a\cos\theta d\theta$, y los límites cambian:

$$x = 0 \Rightarrow \theta = 0, \quad x = a \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

La integral queda:

$$A = 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\theta} \cdot a\cos\theta\, d\theta = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$$

Usamos la identidad: $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$

$$A = 4ab \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\, d\theta = 4ab \cdot \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\pi ab}$$

b) **Volumen del sólido de revolución generado al rotar la elipse respecto del eje OX**

Usamos el método de discos sobre la parte superior de la elipse:

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right)^2 dx = \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx$$

Como la función es par:

$$V = 2\pi b^2 \int_{0}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = 2\pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a = 2\pi b^2 \left(a - \frac{a}{3} \right) = \boxed{\frac{4\pi ab^2}{3}}$$

Ejercicio 5. Sea $F : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_{2}^{x^2+2} te^{-t}\, dt$$

a) Calcula $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{F(x)}{x \log(1+x)}$

Vemos que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{F(x)}{x \log(1+x)} = \frac{\int_2^2 te^{-t}\, dt}{0} = \frac{0}{0}$ ¿Podemos usar L'Hôpital? Sí, puesto que el numerador y el denominador son funciones continuas, derivables y ambos tienden a 0

Sea $g(x) = x \log(1+x)$:

a) $F'(x) \overset{TFC\ y\ regla\ cadena}{=} 2x(x^2+2)e^{-(x^2+2)}$

b) $g(x)' \overset{Regla\ producto}{=} \log(1+x) + \frac{x}{1+x}$

Y vemos ahora el nuevo limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x(x^2+2)e^{-(x^2+2)}}{\log(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \frac{0}{0}$$

Volvemos a aplicar L'Hôpital

a) Calculamos $F''(x)$:

$$\begin{aligned} F''(x) &= (6x^2+4)e^{-(x^2+2)} + e^{-(x^2+2)} \cdot -2x \cdot (2x^3+4x) = \\ &= e^{-x^2-2}[(6x^2+4) + (-4x^4 - 8x^2)] \end{aligned}$$

b) $g''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$

Estudiamos ahora este nuevo límite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-x^2-2}[(6x^2+4) + (-4x^4 - 8x^2)]}{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}} = \frac{4e^{-2}}{2} = \frac{2}{e^2}$$

Concluimos por ende que

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{g(x)} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{F'(x)}{g'(x)} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{F''(x)}{g''(x)} = \frac{2}{e^2}}$$

b) Estudia el crecimiento de F y calcula su imagen.
Ya sabemos que $F(x)$ es derivable así que podemos estudiar el signo de su derivada:

$$F'(x) = 2x(x^2+2)e^{-(x^2+2)}$$

Vemos que $F'(x) \geqslant 0 \forall x \geqslant 0$ por ser cociente de dos términos no negativos; y además $F'(x) > 0 \forall x > 0$; como F está definida en $\mathbb{R}_0^+$, y sabemos que $F(0) = 0$ (integral con limites de integración iguales) Podemos afirmar que $F(x)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$ y $F(0) = 0$.
Solo falta ver el $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_2^{x^2+2} te^{-t}\, dt = \int_2^{\infty} te^{-t}\, dt$$

Podemos calcular esta integral impropia aplicando los cambios:

- $u = t$
- $du = 1$
- $dv = e^{-t}$
- $v = e^{-t}$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Luego, aplicando:

$$\int_2^{\infty} te^{-t}\, dt = te^{-t}]_2^{\infty} - \int_2^{\infty} e^{-t}dt = te^{-t} - e^{-t}]_2^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-t}{e^t} - \frac{1}{e^t}\right) - \left(\frac{-2}{e^2} - \frac{1}{e^2}\right) \overset{(*)}{=} \boxed{\frac{-3}{e^2}}$$

Donde en $(*)$ hemos usado que $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{-t}{e^t} - \frac{1}{e^t}) = 0$ por la escala de infinitos[1].

$$\boxed{\text{En conclusión } Im(F) = [0, +\infty[}$$

[1] Si no se ve claro, esto se puede comprobar fácilmente por L'Hôpital