

# Ecuaciones Diferenciales I

## Examen XXV



**Los Del DGIIM**, [losdeldgim.github.io](https://losdeldgim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Ecuaciones Diferenciales I

## Examen XXV

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Juan Urrutia Milán  
Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

**Asignatura** Ecuaciones Diferenciales I

**Curso Académico** 2024-25.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Rafael Ortega Ríos.

**Descripción** Parcial 2.

**Fecha** 17 de Diciembre de 2024.

**Duración** 120 minutos.

**Ejercicio 1.** Encuentra la solución del problema

$$(4y^3 + 2ye^x)y' + e^x y^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

¿Está definida en toda la recta real?

**Ejercicio 2.** Dada la ecuación

$$x'' - x = t$$

se llama  $S$  a su conjunto de soluciones y se define la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : S &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

¿Es  $\Phi$  biyectiva?

**Ejercicio 3.** Encuentra la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 3x_2, \\ x'_2 = 3x_1 + x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = x_2(0) = 1.$$

**Ejercicio 4.** Demuestra que la ecuación integral

$$x(t) = \cos t + t \int_0^t e^s x(s) ds$$

tiene a lo sumo una solución continua  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 5.** Se emplea la notación  $\mathcal{P}$  para designar a la familia de funciones polinómicas

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \end{aligned}$$

donde  $n \geq 0$ ,  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Demuestra:

1.  $f \notin \mathcal{P}$  si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \cos t$ .

2. Dada  $p \in \mathcal{P}$ , la ecuación

$$x'' + x = p(t)$$

tiene a lo sumo una solución polinómica.

**Ejercicio 1.** Encuentra la solución del problema

$$(4y^3 + 2ye^x)y' + e^x y^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

¿Está definida en toda la recta real?

Definimos las funciones  $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por:

$$P(x, y) = e^x y^2 \quad Q(x, y) = 4y^3 + 2ye^x \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Que son de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$  y además verifican la condición de exactitud:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 2ye^x = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Con lo que nos encontramos ante una ecuación exacta, definida en  $\mathbb{R}^2$ , que sabemos que es estrellado por ser convexo, luego podemos encontrar un potencial para el campo de fuerzas  $F = (P, Q)$ . Una posible función potencial para  $(P, Q)$  es la función  $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$U(x, y) = e^x y^2 + y^4 - 2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Ya que es de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$ , con:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) &= e^x y^2 = P(x, y) & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) &= 2ye^x + 4y^3 = Q(x, y) & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

De esta forma, buscamos una función  $y$  que cumpla:

$$U(x, y(x)) = e^x(y(x))^2 + (y(x))^4 - 2 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La cual podemos obtener mediante la fórmula de las raíces de los polinomios de segundo grado, obteniendo:

$$y(x) = \sqrt{\frac{-e^x + \sqrt{e^{2x} + 8}}{2}}$$

Que puede definirse en todo  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.** Dada la ecuación

$$x'' - x = t \tag{1}$$

se llama  $S$  a su conjunto de soluciones y se define la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : S &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

¿Es  $\Phi$  biyectiva?

Sí que es biyectiva, para demostrarlo comprobamos que es inyectiva y sobreyectiva:

**Inyectividad.** Sean  $x, y \in S$  tales que  $\Phi(x) = \Phi(y)$ , entonces  $x$  y  $y$  son ambas soluciones de (1) con las mismas condiciones iniciales, luego por la unicidad que nos da el Teorema de existencia y unicidad de la Lección 4, tenemos que  $x = y$ , con lo que  $\Phi$  es inyectiva.

**Sobreyectividad.** Sea  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , por la parte de existencia garantizada por el mismo teorema, podemos encontrar  $x \in S$  de forma que

$$x(0) = \alpha \quad x'(0) = \beta$$

Con lo que  $\Phi(x) = (\alpha, \beta)$ , y tenemos que  $\Phi$  es sobreyectiva.

**Ejercicio 3.** Encuentra la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 3x_2, \\ x'_2 = 3x_1 + x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = x_2(0) = 1.$$

Se trata de un sistema de ecuaciones lineales, que puede reescribirse de forma matricial con:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Considerando la ecuación

$$x' = Ax$$

Para resolverla, primero calculamos los valores propios de la matriz  $A$ , para lo cual calculamos su polinomio característico:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$$

Obteniendo valores propios  $\lambda_1 = 4$  y  $\lambda_2 = -2$ , de forma que podemos coger como vectores propios  $v_1 = (1, 1)$  y  $v_2 = (1, -1)$ , respectivamente. De esta forma, cualquier solución del sistema será de la forma:

$$x(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Buscamos ahora la solución solicitada, la que cumple que  $x(0) = (1, 1)$ :

$$x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Con lo que la solución solicitada es:

$$x(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 4.** Demuestra que la ecuación integral

$$x(t) = \cos t + t \int_0^t e^s x(s) ds \tag{2}$$

tiene a lo sumo una solución continua  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supongamos que  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son dos soluciones continuas distintas de (2). Definimos  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$z(t) = x(t) - y(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

y tenemos que:

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) - y(t) = e^t + t \int_0^t e^s x(s) \, ds - e^t - t \int_0^t e^s y(s) \, ds \\ &= t \int_0^t e^s (x(s) - y(s)) \, ds \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sea  $b \in \mathbb{R}$ , consideramos el conjunto  $I_b = ]-b, b[$  y tenemos que:

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) - y(t) = t \int_0^t e^s (x(s) - y(s)) \, ds \leq b \int_0^t e^b (x(s) - y(s)) \, ds \\ &= b e^b \int_0^t (x(s) - y(s)) \, ds \leq b e^b \left| \int_0^t (x(s) - y(s)) \, ds \right| \quad \forall t \in I_b \end{aligned}$$

De esta forma, aplicando el Lema visto en la Lección 4 de teoría, llegamos a que  $z(t) = 0 \quad \forall t \in I_b$ . Finalmente, como:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

Llegamos a que  $z(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , con lo que  $x(t) = y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 5.** Se emplea la notación  $\mathcal{P}$  para designar a la familia de funciones polinómicas

$$\begin{array}{rcl} p : & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \end{array}$$

donde  $n \geq 0$ ,  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Demuestra:

1.  $f \notin \mathcal{P}$  si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \cos t$ .

Veamos una condición necesaria para que una función esté en la familia  $\mathcal{P}$ :

Sea  $p \in \mathcal{P}$  un polinomio de grado  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $p \in C^\infty(\mathbb{R})$ , con:

$$p^{(n)}(t) = a_n \cdot n! \quad p^{(n+1)}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Por lo que  $p^{(k)}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , para todo  $k \geq n+1$ .

Tenemos ahora que  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , con:

$$f'(t) = -\sin t \quad f''(t) = -\cos t \quad f'''(t) = \sin t \quad f^{(iv)}(t) = \cos t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Por lo que  $\nexists n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{(k)}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , con  $k \geq n$ , luego  $f \notin \mathcal{P}$ .

2. Dada  $p \in \mathcal{P}$ , la ecuación

$$x'' + x = p(t) \quad (3)$$

tiene a lo sumo una solución polinómica.

Sabemos que un sistema fundamental de la ecuación homogénea asociada viene dado por las funciones  $\{f, g\}$ , con  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$g(t) = \operatorname{sen} t \quad t \in \mathbb{R}$$

De esta forma, si tenemos una solución particular  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de (3), entonces todas sus soluciones serán de la forma  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$x(t) = q(t) + c_1 f(t) + c_2 g(t) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Si  $c_1 \neq 0$  o  $c_2 \neq 0$ , supuesto que  $x \in C^\infty(\mathbb{R})$  (ya que si no, tenemos directamente que  $x \notin \mathcal{P}$ ), entonces si en la expresión de  $x$  aparece  $f$  o  $g$ , en la derivada cuarta de  $x$  aparecerá  $f$  o  $g$  respectivamente, con lo que no existirá un  $n$  a partir del cual la derivada de  $x$  se anule, con lo que  $x \notin \mathcal{P}$ .
- La única posibilidad de que  $x \in \mathcal{P}$  es que  $c_1 = 0 = c_2$ , con lo que  $x = q$ . En esta situación,  $q$  podrá ser o no un polinomio, pero por el punto superior estamos seguros de que no habrá más de una solución polinómica.