LMD
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

LMD
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Antonio Romero Martín
Carolina González Ríos
Daniel Gómez García
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Lógica y Métodos Discretos.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingienería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Francisco Miguel García Olmedo.

Descripción Convocatoria ordinaria.

Fecha 14 de junio de 2024.

Observaciones El examen se hacía por grupos de 3/4 personas. La entrega se abrió en Prado a las 13:00 y se cerró a las 21:30. Tan solo se pedía entregar 5 ejercicios de los 6 propuestos.

Ejercicio 1. Sea la relación de recurrencia que para todo número natural n proporcione el número exacto a_n de cadenas de bits de longitud n que contenga al menos un par de ceros consecutivos. Responda a las siguientes cuestiones:

1. Encuentre razonadamente la relación de recurrencia descrita.

   Fijado $n \in \omega$, con $n \geqslant 2$, veremos cuantas cadenas de longitud n que contienen al menos un par de ceros consecutivos hay, que será a_n. Distinguimos dos casos:

   - Si la cadena termina en 1, habrá tantas como cadenas de longitud $n-1$ que contienen al menos un par de ceros consecutivos, es decir, a_{n-1}.
   - Si la cadena termina en 0, volvemos a distinguir dos subcasos:
     - Si el penúltimo bit es 1, entonces habrá tantas cadenas como cadenas de longitud $n-2$ que contienen al menos un par de ceros consecutivos, es decir, a_{n-2}.
     - Si el penúltimo bit es 0, entonces la cadena ya contiene un par de ceros consecutivos, por lo que en los $n-2$ bits restantes puedes elegir cualquier combinación de bits, por lo que puedes formar 2^{n-2} cadenas de longitud n.

   Por tanto, la relación de recurrencia para a_n es:

   $$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2} \qquad \forall n \in \omega, \quad n \geqslant 2$$

2. Dé razonadamente las condiciones iniciales que definirán el problema de recurrencia.

   Como la recurrencia obtenida es de orden $k = 2$, necesitamos dos condiciones iniciales para definir el problema de recurrencia, sean estas a_0 y a_1.

   - a_0 es el número de cadenas de longitud 0 que contienen al menos un par de ceros consecutivos, que trivialmente es $a_0 = 0$.
   - a_1 es el número de cadenas de longitud 1 que contienen al menos un par de ceros consecutivos, que de nuevo trivialmente es $a_1 = 0$.

   Por tanto, las condiciones iniciales que definen el problema de recurrencia son:

   $$a_0 = 0, \qquad a_1 = 0$$

3. Calcule razonadamente a_{500}.

   Para el cálculo de a_{500} sin tener que resolver dicha recurrencia, vamos a proponer una forma alternativa de calcularlo. Buscamos una relación de recurrencia para a_n, el número de cadenas de bits de longitud n que contienen al menos un par de ceros consecutivos, vamos a dividir el problema en dos casos que son complementarios para los que usaremos el enfoque de recurrencia. Denotamos entonces por:

   - a_n al número de cadenas de bits de longitud n que contienen al menos un par de ceros consecutivos.

- b_n al número de cadenas de bits de longitud n que no contienen ningún par de ceros consecutivos.

En primer lugar, observamos que la cantidad total de cadenas de bits de longitud n es 2^n, ya que cada bit puede ser 0 ó 1. Entonces, la relación entre a_n y b_n viene dada por:

$$a_n + b_n = 2^n \qquad \forall n \in \omega$$

Lo que haremos será entonces encontrar una relación de recurrencia para b_n. Fijado $n \in \omega$, con $n \geqslant 2$, veremos cuántas cadenas de longitud n que no contienen ningún par de ceros consecutivos hay, que será b_n.

- Si la cadena termina en 1, entonces el número de cadenas de longitud $n-1$ que no contienen ningún par de ceros consecutivos es b_{n-1}.
- Si la cadena termina en 0, el penúltimo bit debe ser 1 para que no haya un par de ceros consecutivos, por lo que la subcadena de longitud $n-2$ restante también debe no tener ningún par de ceros consecutivos, de donde el número de cadenas de longitud $n-2$ que no contienen ningún par de ceros consecutivos es b_{n-2}.

Por tanto, podemos escribir la relación de recurrencia para b_n como:

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \qquad \forall n \in \omega, \quad n \geqslant 2$$

con las condiciones iniciales siguientes:

- $b_0 = 1$, ya que la única cadena de longitud 0 es la cadena vacía, que no contiene ningún par de ceros consecutivos.
- $b_1 = 2$, ya que las cadenas de longitud 1 son 0 y 1, y ninguna de ellas contiene ningún par de ceros consecutivos.

Nos damos cuenta de que esta sucesión es la conocida sucesión de Fibonacci desplazada dos términos; es decir, $b_n = F_{n+2}$, donde F_n es el $n-$ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Por tanto, a_n tenemos que es:

$$a_n = 2^n - F_{n+2} \qquad \forall n \in \omega$$

Para calcular a_{500}, usamos el resultado obtenido:

$$a_{500} = 2^{500} - F_{502}$$

Por la relación entre la sucesión de Fibonacci y los números combinatorios, sabemos que:

$$a_{500} = 2^{500} - \sum_{i=0}^{250} \binom{501-i}{i}$$

Obtenemos dicho valor usando el siguiente programa de Python:

```python
from math import comb

sum = 0
for i in range(251):
    sum += comb(501 - i, i)

print((2 ** 500) - sum)
```

Mediante dicho programa, calculamos el valor de a_{500}:

$$\begin{aligned} a_{500} = {} & 3273390607896141870013189696827599152216 6\\ & 42045678050048759657157083896718498195198887188510\\ & 824448659298138854760759871647667082449311747124309037796625 \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Para cualquier conjunto $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ de fórmulas proposicionales, considere la igualdad:

$$\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))) = \mathrm{Con}(\Gamma, (\beta \to \alpha) \to (\beta \to \gamma))$$

Si es cierta, dé una demostración y de no serlo, demuéstrelo con un contraejemplo.

Notemos por $\varphi_1 = \alpha \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$ y $\varphi_2 = (\beta \to \alpha) \to (\beta \to \gamma)$. Sea v una valuación fija pero arbitraria. Tenemos que:

$$\begin{aligned} v(\varphi_1) &= v(\alpha \to (\beta \to (\alpha \to \gamma)))\\ &= v(\alpha)v(\beta \to (\alpha \to \gamma)) + v(\alpha) + 1\\ &= v(\alpha)[v(\beta)v(\alpha \to \gamma) + v(\beta) + 1] + v(\alpha) + 1\\ &= v(\alpha)[v(\beta)(v(\alpha)v(\gamma) + v(\alpha) + 1) + v(\beta) + 1] + v(\alpha) + 1\\ &= v(\alpha)^2 v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)^2 v(\beta) + \cancel{v(\alpha)v(\beta)} + \cancel{v(\alpha)v(\beta)} + \cancel{v(\alpha)} + \cancel{v(\alpha)} + 1\\ &= v(\alpha)v(\beta)v(\gamma) + v(\alpha)v(\beta) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\varphi_2) &= v((\beta \to \alpha) \to (\beta \to \gamma))\\ &= v(\beta \to \alpha)v(\beta \to \gamma) + v(\beta \to \alpha) + 1\\ &= (v(\beta)v(\alpha) + v(\beta) + 1)(v(\beta)v(\gamma) + v(\beta) + 1) + v(\beta)v(\alpha) + v(\beta) + 1 + 1\\ &= v(\beta)^2 v(\alpha)v(\gamma) + v(\beta)^2 v(\alpha) + \cancel{v(\beta)v(\alpha)} + v(\beta)^2 v(\gamma) + v(\beta)^2 +\\ &\qquad + \cancel{v(\beta)} + v(\beta)v(\gamma) + \cancel{v(\beta)} + \cancel{1} + \cancel{v(\beta)v(\alpha)} + v(\beta) + \cancel{1} + 1\\ &= v(\beta)v(\alpha)v(\gamma) + v(\beta)v(\alpha) + 1 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $v(\varphi_1) = v(\varphi_2)$ para cualquier valuación v, de donde se sigue que $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$, por lo que $\varphi_1 = \varphi_2$. Por el apartado 6 del Teorema 3.3.2., tenemos que:

$$\mathrm{Con}(\Gamma, \varphi_1) = \mathrm{Con}(\Gamma, \varphi_2)$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 3. Demuestre que para todo conjunto de fórmulas proposicionales Γ se cumple la igualdad:

$$\mathrm{Con}(\Gamma) = \bigcup_{\substack{\Gamma_f \subseteq \Gamma \\ \Gamma_f \text{ finito}}} \mathrm{Con}\left(\Gamma_f\right)$$

Demostración. Demostraremos mediante doble inclusión:

$\supseteq$) Demostraremos en primer lugar que $\displaystyle\bigcup_{\substack{\Gamma_f \subseteq \Gamma \\ \Gamma_f \text{ finito}}} \mathrm{Con}\left(\Gamma_f\right) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$.

En virtud del Teorema 3.3.1 de los apuntes, si $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ se tiene que $\mathrm{Con}(\Gamma_f) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$. Deducimos entonces que:

$$\bigcup_{\substack{\Gamma_f \subseteq \Gamma \\ \Gamma_f \text{ finito}}} \mathrm{Con}\left(\Gamma_f\right) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$$

como queríamos demostrar.

$\subseteq$) Demostraremos ahora que $\mathrm{Con}(\Gamma) \subseteq \displaystyle\bigcup_{\substack{\Gamma_f \subseteq \Gamma \\ \Gamma_f \text{ finito}}} \mathrm{Con}\left(\Gamma_f\right)$.

Para ello, bastará tomar una fórmula $\gamma \in \mathrm{Con}(\Gamma)$ y ver que $\gamma \in \displaystyle\bigcup_{\substack{\Gamma_f \subseteq \Gamma \\ \Gamma_f \text{ finito}}} \mathrm{Con}\left(\Gamma_f\right)$.
Esto último, a su vez, equivale a ver que $\gamma \in \mathrm{Con}(\Gamma_f)$ para algún $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ finito. De nuevo, esto equivale a demostrar que $\Gamma_f \models \gamma$ para cierto $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ finito; que a su vez equivale a demostrar que $\Gamma_f \cup \{\neg\gamma\}$ para cierto $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ finito es insatisfacible.

Para esto último, demostraremos el siguiente lema, que es una de las implicaciones del Teorema de Compacidad:

Lema 0.1. *Sea Γ un conjunto de fórmulas proposicionales. Entonces, se tiene lo siguiente:*

Si cualquier $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ finito es satisfacible, entonces Γ es satisfacible.

Demostración. Para demostrar este lema, introducimos en primer lugar algo de notación.

Notamos $P = \{p_n \mid n \in \omega\}$ el conjunto de todas las variables proposicionales. Además, en lo que sigue entenderemos que para $n \in \omega$, p_n es el $n-$ésimo símbolo de variable proposicional numerado en P (donde estamos haciendo uso de que el conjunto de símbolos de variables proposicionales es numerable).

Llamamos asignación parcial a toda función $\mathcal{A} : D \to \{0, 1\}$, donde o bien se tiene que $D = P$ ó $D = \{p_i \mid i \in n\} \subseteq P$ para algún $n \in \omega$ (notemos que D es finito en este último caso, llegando incluso a poder ser vacío). Por ser D el dominio de $\mathcal{A}$, notaremos D por $\text{dom}(\mathcal{A})$.

Dadas dos asignaciones parciales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, diremos que $\mathcal{A}'$ extiende a $\mathcal{A}$ si $\text{dom}(\mathcal{A}) \subseteq \text{dom}(\mathcal{A}')$ y $\mathcal{A}(p) = \mathcal{A}'(p)$ para todo $p \in \text{dom}(\mathcal{A})$.

Decimos que una asignación parcial $\mathcal{A}$ es *buena* si satisface cualquier fórmula $\varphi \in \Gamma$ que solo contenga símbolos de variable proposicional de $\text{dom}(\mathcal{A})$ en su expresión.

Observamos que para cada $n \in \omega$ hay una asignación parcial $\mathcal{A}$ tal que su dominio es $\text{dom}(\mathcal{A}) = \{p_i \mid i \in n\}$ que es buena. Para ello, fijado $n \in \omega$, consideramos el subconjunto $\Gamma' \subseteq \Gamma$ de fórmulas que solo contienen símbolos de variable proposicional de $\{p_i \mid i \in n\}$ en su expresión. Si bien Γ' podría ser infinito, sabemos que el conjunto cociente $\Gamma'/=$ tiene a lo sumo $2^{(2^n)}$ elementos, luego en particular es finito. Para cada clase de equivalencia, escogemos un representante de clase y consideramos Γ'' el conjunto formado por dichos representantes.

Por hipótesis, Γ'' es satisfacible por ser subconjunto finito de Γ, luego cualquier fórmula proposicional de Γ' es satisfacible para cierta asignación parcial $\mathcal{A}$ con $\text{dom}(\mathcal{A}) = \{p_i \mid i \in n\}$, que por definición es buena.

Nuestro objetivo ahora será construir $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geqslant 0}$ sucesión de asignaciones parciales buenas tal que para cada $n \in \omega$ se tenga que:

> "Hay infinitas asignaciones parciales buenas que extienden a $\mathcal{A}_n$".

Esta sucesión la definiremos de la siguiente manera:

- Para $n = 0$:
  En el caso de $n = 0$, $\mathcal{A}_0$ tiene dominio vacío ($\text{dom}(\mathcal{A}_0) = \emptyset$). Puesto que habíamos demostrado que para cada $n \in \omega$ hay una asignación parcial buena con $\text{dom}(\mathcal{A}) = \{p_i \mid i \in n\}$, y trivialmente cada una de ellas extiende a $\mathcal{A}_0$, tenemos que hay infinitas asignaciones parciales buenas que extienden a $\mathcal{A}_0$ (tantas como elementos en ω). Por tanto, hemos construido el primer elemento de nuestra sucesión, $\mathcal{A}_0$.
- Construido para n, construimos para $n + 1$:
  Supongamos que hemos construido $\mathcal{A}_n$ con las hipótesis anteriormente descritas. Consideramos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ las dos únicas asignaciones parciales con $\text{dom}(\mathcal{B}) = \text{dom}(\mathcal{B}') = \{p_i \mid i \in n^+\} \subseteq P$ que extienden a $\mathcal{A}_n$ siendo $\mathcal{B}(p_{n+1}) = 0$ y $\mathcal{B}'(p_{n+1}) = 1$.
  Puesto que cualquier asignación parcial buena que extiende a $\mathcal{A}_n$ extiende a su vez a $\mathcal{B}$ o a $\mathcal{B}'$, deducimos que $\mathcal{B}$ o $\mathcal{B}'$ tiene infinitas asignaciones parciales buenas que la extienden. Por tanto, tomamos $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{B}$ en caso de que $\mathcal{B}$ tenga infinitas asignaciones parciales buenas que la extienden, y $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{B}'$ en caso contrario. Tenemos por tanto construido $\mathcal{A}_{n+1}$ con las propiedades deseadas.

Construida esta sucesión, definimos la asignación $\mathcal{A}$ como sigue:

$$A(p_n) = A_n(p_n), \qquad \forall n \in \omega$$

Para cualquier fórmula $\varphi \in \Gamma$ que sólo contenga símbolos de variable proposicional contenidos en $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ en su expresión, sabemos por construcción que $\mathcal{A}_n$ satisface φ. Por tanto, $\mathcal{A}$ también satisface a φ, pues por definición $\mathcal{A}$ extiende a $\mathcal{A}_n$. $\square$

Una vez demostrado el lema, por el contrarecíproco del mismo, si Γ es insatisfacible, entonces existe un subconjunto finito $\Gamma_f \subseteq \Gamma$ tal que Γ_f es insatisfacible, tal y como queríamos demostrar.

$\square$

Ejercicio 4. Considere la función booleana dada como sigue:

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,4,5,6,7,9,11,15) + \sum d(10,14)$$

Para este ejercicio empleará exclusivamente el algoritmo de Quine-McCluskey y razonará, escueta pero suficientemente, los pasos en la aplicación de dicho algoritmo. A continuación, se le pide:

1. Dé razonadamente una expresión minimal de la función a condición de ser SOP.

   Usaremos el algoritmo de Quine-McCluskey. Generamos los implicantes primos:

Columna 1			Columna 2			Columna 3		
0	0000	✓	{0,1}	000_	✓	{0,1,4,5}	0_0_	$*$
1	0001	✓	{0,4}	0_00	✓	{4,5,6,7}	01__	$*$
4	0100	✓	{1,5}	0_01	✓	{6,7,14,15}	_11_	$*$
5	0101	✓	{1,9}	_001	$*$	{10,11,14,15}	1_1_	$*$
6	0110	✓	{4,5}	010_	✓			
9	1001	✓	{4,6}	01_0	✓			
10	1010	✓	{5,7}	01_1	✓			
7	0111	✓	{6,7}	011_	✓			
11	1011	✓	{6,14}	_110	✓			
14	1110	✓	{9,11}	10_1	$*$			
15	1111	✓	{10,11}	101_	✓			
			{10,14}	1_10	✓			
			{7,15}	_111	✓			
			{11,15}	1_11	✓			
			{14,15}	111_	✓			

   Los implicantes primos son, por tanto, los que se han marcado con $*$. Reducimos la tabla de implicantes primos usando la cuadrícula de McCluskey:

			0	1	4	5	6	7	9	11	15
	{1,9}	_001		○					○		
	{9,11}	1_1_							○	○	
$*$	{0,1,4,5}	0_0_	○	○	○	○					
	{4,5,6,7}	01__			○	○	○	○			
	{6,7,14,15}	_11_					○	○			○
	{10,11,14,15}	1_11								○	○

donde hemos indicado con $*$ que el implicante {0,1,4,5} es esencial, ya que es el único que cubre el minterm 0. Además, la columna asociada a cada minterm cubierto por este implicante se descarta, puesto que ya está cubierta. Esto lo hemos indicado con una línea roja. La tabla reducida es:

			6	7	9	11	15
	{1,9}	_001			○		
	{9,11}	1_1_			○	○	
	{4,5,6,7}	01__	○	○			
$**$	{6,7,14,15}	_11_	○	○			○
	{10,11,14,15}	1_11				○	○

donde, en primer lugar, la fila del implicante primo {6,7,14,15} domina a la del {4,5,6,7}, por lo que se descarta esta última (indicado en azul). Una vez hecho esto, vemos que el minterm 6 tan solo está cubierto por el implicante primo {6,7,14,15}, por lo que este es esencial (indicado con $**$). Además, las columnas asociadas a los minterms cubiertos por este implicante se descartan, ya que ya están cubiertas (indicado tachando dichas columnas en morado). La tabla reducida es:

			9	11
	{1,9}	_001	○	
$***$	{9,11}	1_1_	○	○
	{10,11,14,15}	1_11		○

donde, en primer lugar, la fila del implicante primo {9,11} domina a las otras dos, por lo que se descartan estas dos últimas (indicado en naranja). Una vez hecho esto, vemos que el minterm 9 tan solo está cubierto por el implicante primo {9,11}, por lo que este es esencial (indicado con $***$).

Por tanto, los implicantes primos esenciales son los siguientes:

Implicante	Patrón	Producto
{0,1,4,5}	0_0_	$\overline{a}\ \overline{c}$
{6,7,14,15}	_11_	$b\ c$
{9,11}	10_1	$a\ \overline{b}\ d$

Por tanto, una vez aplicado el algoritmo de Quine-McCluskey, la expresión minimal de la función a condición de ser SOP es:

$$f(a,b,c,d) = \overline{a}\ \overline{c} + b\ c + a\ \overline{b}\ d$$

2. Dé razonadamente una expresión minimal de la función a condición de ser POS.

   En primer lugar, hemos de obtener la expresión de f como producto de maxtérminos. Esta es:

$$f(a,b,c,d) = \prod M(2,3,8,12,13) \cdot \prod d(10,14)$$

   Usaremos el algoritmo de Quine-McCluskey. Generamos los implicantes primos:

Columna 1			Columna 2			Columna 3		
2	0010	✓	{2,3}	001_	$*$	{8,10,12,14}	1__0	$*$
8	1000	✓	{2,10}	_010	$*$			
3	0011	✓	{8,10}	10_0	✓			
10	1010	✓	{8,12}	1_00	✓			
12	1100	✓	{10,14}	1_10	✓			
13	1101	✓	{12,13}	110_	$*$			
14	1110	✓	{12,14}	11_0	✓			

   Los implicantes primos son, por tanto, los que se han marcado con $*$. Reducimos la tabla de implicantes primos usando la cuadrícula de McCluskey:

			2	3	8	12	13
$*$	{2,3}	001_	o	o			
	{2,10}	_010	o				
$*$	{12,13}	110_				o	o
$*$	{8,10,12,14}	1__0			o	o	

   donde hemos indicado con $*$ que el implicante {2,3} es esencial, ya que es el único que cubre el maxtérmino 3. Además, la fila asociada a cada maxtérmino cubierto por este implicante se descarta, puesto que ya está cubierta. Esto lo hemos indicado con una línea vertical roja. Asímismo, hemos indicado con $*$ que el implicante {12,13} es esencial, ya que es el único que cubre el maxtérmino 13. El implicante primo {8,10,12,14} también es esencial por ser el único que cubre el maxtérmino 8 (indicado con $*$).

   Por tanto, los implicantes primos esenciales son los siguientes:

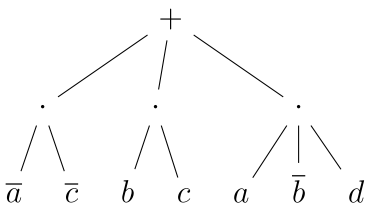
Implicante	Patrón	Suma
{2,3}	001_	$a + b + \overline{c}$
{12,13}	110_	$\overline{a} + \overline{b} + c$
{8,10,12,14}	1__0	$\overline{a} + d$

Por tanto, una vez aplicado el algoritmo de Quine-McCluskey, la expresión minimal de la función a condición de ser POS es:

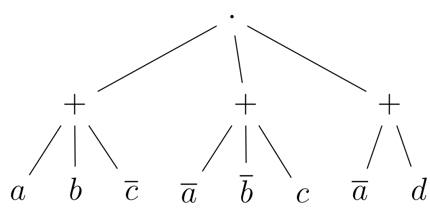
$$f(a,b,c,d) = (a+b+\overline{c})(\overline{a}+\overline{b}+c)(\overline{a}+d)$$

3. Elija justificadamente la expresión de menor coste entre la SOP y la POS encontradas en los apartados anteriores.

   Calculemos para ello el coste de ambas expresiones obtenidas en los apartados anteriores:



(a) SOP.



(b) POS.

Por tanto, en el caso de la expresión SOP, tenemos:

- Puertas `OR`: 1.
- Puertas `AND`: 3.
- Ejes: 10.

Por tanto, el coste de la expresión SOP es $1+3+10 = 14$. Respecto a la expresión POS, tenemos:

- Puertas `OR`: 3.
- Puertas `AND`: 1.
- Ejes: 11.

Por tanto el coste de la expresión POS es $3+1+11 = 15$.

Como el coste de la expresión SOP es menor que el de la expresión POS $(14 < 15)$, elegimos la SOP como expresión de menor coste:

$$f(a,b,c,d) = \overline{a}\ \overline{c} + b\ c + a\ \overline{b}\ d$$

Ejercicio 5. De ser posible, construya razonadamente un grafo G (sin lazos ni lados paralelos) que teniendo 7 vértices: dos sean de grado 2, uno de grado 3, tres de grado 4 y no haya ninguno de grado 1.

Sea $G = (V, A)$ un grafo simple con $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$. Para cada $i \in \{1, \dots, 7\}$, denotamos por d_i al grado de v_i ($d_i = \mathrm{dg}(v_i)$). Por ser un grafo simple, veamos que:

$$d_i \leqslant 6, \qquad \forall i \in \{1, \dots, 7\}$$

Supongamos que $\exists i \in \{1, \dots, 7\}$ tal que $d_i \geqslant 7$. Por definición, como no hay lazos, tenemos que el número de aristas de G incidentes en v_i es mayor o igual que 7. No obstante, esto contradice nuestra hipótesis, ya que por el principio del palomar, existirían aristas paralelas. Por tanto, tenemos que $d_i \leqslant 6$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Aplicamos ahora las condiciones dadas. Tenemos que:

$$d_1 = k \in \omega, \qquad d_2 = d_3 = d_4 = 4, \qquad d_5 = 3, \qquad d_6 = d_7 = 2$$

Buscamos ahora conocer el valor de $k \in \omega$. Por ser G un grafo, tenemos que:

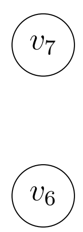
$$\sum_{i=1}^{7} d_i = k + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 19 + k = 2 \cdot |A|$$

Por tanto, sabemos que $d_1 = k \leqslant 6$ y k es impar. Como k no puede ser ni 1 ni 3 por hipótesis (ya que entonces habría más nodos con dicho grado que los indicados en el enunciado), tenemos que $d_1 = k = 5$.

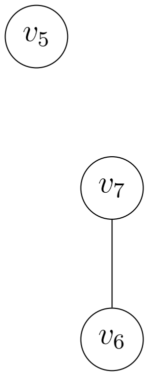
Una vez llegados a este punto, en el que sabemos el grado de cada vértice de nuestro grafo G, consideramos la sucesión $5, 4, 4, 4, 3, 2, 2$, y aplicaremos el teorema de *Havel-Hakimi* para construir el grafo.

5	4	4	4	3	2	2	Eliminamos el 5 y restamos uno a los 5 términos siguientes
	3	3	3	2	1	2	Reordenamos los términos
	3	3	3	2	2	1	Eliminamos el 3 y restamos uno a los 3 términos siguientes
		2	2	1	2	1	Reordenamos los términos
		2	2	2	1	1	Eliminamos el 2 y restamos uno a los 2 términos siguientes
			1	1	1	1	Eliminamos el 1 y restamos uno al término siguiente
				0	1	1	Reordenamos los términos
				1	1	0	Eliminamos el 1 y restamos uno al término siguiente
					0	0	

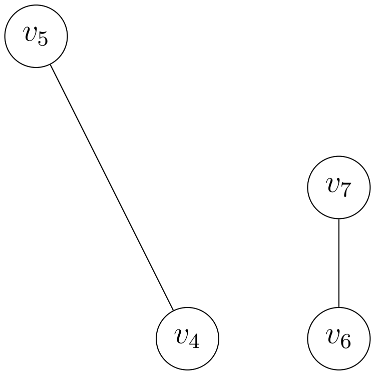
Por tanto, comprobamos que, efectivamente se puede construir un grafo G con las condiciones dadas; es decir, que la sucesión $5, 4, 4, 4, 3, 2, 2$ es gráfica. Para representarlo, comenzamos con la sucesión $0, 0$:



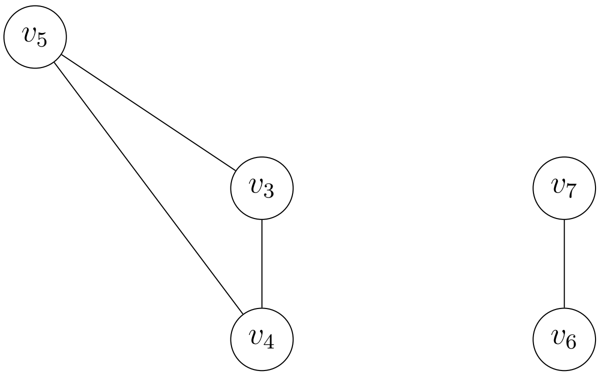
Ahora, pasamos a la sucesión superior, es decir, $1, 1, 0$, que proviene de la sucesión $\mathbf{0}, 0$, por lo que el nuevo nodo añadido debe conectarse a un nodo de grado 0:



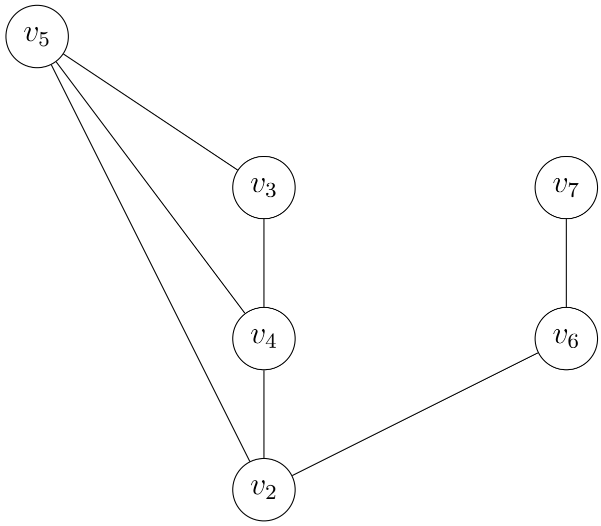
La siguiente sucesión es $1, 1, 1, 1$, que proviene de $\mathbf{0}, 1, 1$, luego el nuevo nodo añadido debe conectarse a un nodo que tenía grado 0:



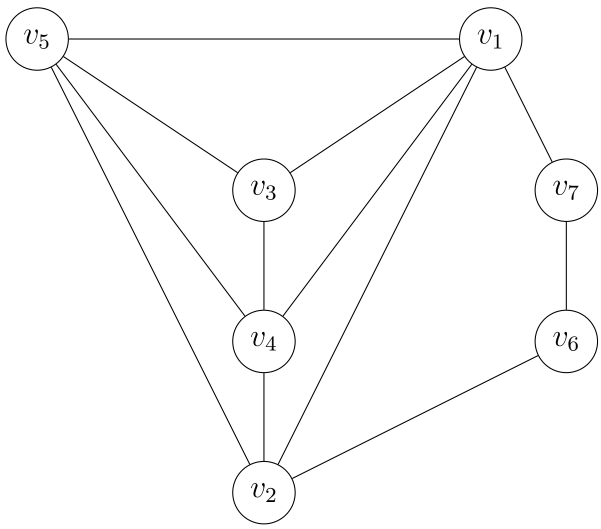
La siguiente sucesión es $2, 2, 2, 1, 1$, que proviene de la sucesión $\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1, 1$, luego el nuevo nodo añadido debe conectarse a dos nodos de grado 1:



La siguiente sucesión es $3, 3, 3, 2, 2, 1$, que proviene de la sucesión $\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, 2, 1$. Por tanto, el nuevo nodo añadido debe conectarse a dos nodos de grado 2 y uno de grado 1:



La última sucesión es $5, 4, 4, 4, 3, 2, 2$, que proviene de la sucesión $\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, 2$, luego el nuevo nodo añadido debe conectarse a tres nodos de grado 3, uno de grado 2 y uno de grado 1:



De esta forma, hemos construido un grafo G con las condiciones dadas (7 nodos, dos de grado 2, uno de grado 3 y tres de grado 4).

Ejercicio 6. Considere las fórmulas de cierto lenguaje de primer orden:

- $\varphi_0 \equiv \forall x(r(x, x) \to \exists y r(x, y))$
- $\varphi_1 \equiv \forall x \forall y(r(x, y) \to r(y, x))$
- $\varphi_2 \equiv \forall x(\neg r(y, x))$
- $\varphi_3 \equiv \exists x(\neg r(x, x))$

y diga razonadamente si son ciertas o no cada una de las siguintes afirmaciones:

1. $\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2 \models \varphi_3$

   Demostraremos que sí es cierta. Esto lo haremos demostrando que el conjunto $\Gamma = \{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2, \neg\varphi_3\}$ es insatisfactible. Para ello, calcularemos la forma clausulada de cada una de las fórmulas, pasando para ello tanto por la forma normal prenexa como por la forma normal de Skolem:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &\equiv \forall x(r(x,x) \to \exists y r(x,y)) \\
&\equiv \forall x \exists y(r(x,x) \to r(x,y)) \\
&\equiv \forall x \exists y(\neg r(x,x) \lor r(x,y)) \\
&\equiv \forall x(\neg r(x,x) \lor r(x,f(x)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv \forall x \forall y(r(x,y) \to r(y,x)) \\
&\equiv \forall x \forall y(\neg r(x,y) \lor r(y,x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &\equiv \forall x(\neg r(y,x)) \\
&\overset{(*)}{\equiv} \forall x(\neg r(b,x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\neg\varphi_3 &\equiv \neg(\exists x(\neg r(x,x))) \\
&\equiv \forall x(r(x,x))
\end{aligned}$$

   donde en $(*)$ hemos sustituido y por b en φ_2 por tratarse de una fórmula y no de una sentencia (y es libre). Definimos el conjunto Γ_1^* de las formas clausuladas de los elementos de Γ:

$$\Gamma_1^* = \{\forall x(\neg r(x,x) \lor r(x,f(x))), \forall x \forall y(\neg r(x,y) \lor r(y,x)), \forall x(\neg r(b,x)), \forall x(r(x,x))\}$$

   Tenemos que el conjunto de fórmulas Γ es insatisfacible si y solo si el conjunto de sentencias Γ_1^* es insatisfacible. Veamos que se cumple esto último por resolución:

$$\begin{tikzcd}
\neg r(b,x) \arrow[d, dash, "(x|b)"'] & r(x,x) \arrow[dl, dash, "(x|b)"] \\
\square &
\end{tikzcd}$$

   Por tanto, Γ_1^* es insatisfacible, y deducimos que Γ también lo es, teniendo que $\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2 \models \varphi_3$ como queríamos demostrar.

2. $\varphi_0,\ \varphi_2,\ \varphi_3 \models \varphi_1$

   Demostraremos que no es cierta. Veamos que $\varphi_0,\ \varphi_2,\ \varphi_3 \not\models \varphi_1$. Sea $\mathbf{A}$ una estructura tal que:

   - $A = \{0,1\}$
   - $(r)^{\mathbf{A}} = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle\}$

Sea una asignación v tal que $v(y) = 1$, y consideremos la interpretación $\langle \mathbf{A}, v\rangle$. Veamos qué ocurre con cada una de las fórmulas:

a) <u>Para φ_0:</u>

$$\begin{aligned}
I^v_{\mathbf{A}}(\varphi_0) = 1 &\Longleftrightarrow \forall a \in A, \quad I^{v(x|a)}_{\mathbf{A}}(r(x,x) \to \exists y r(x,y)) = 1\\
&\Longleftrightarrow \forall a \in A, \quad I^{v(x|a)}_{\mathbf{A}}(r(x,x)) I^{v(x|a)}_{\mathbf{A}}(\exists y r(x,y)) + I^{v(x|a)}_{\mathbf{A}}(r(x,x)) + 1 = 1\\
&\Longleftrightarrow \forall a \in A, \quad I^{v(x|a)}_{\mathbf{A}}(r(x,x)) I^{v(x|a)}_{\mathbf{A}}(\exists y r(x,y)) = I^{v(x|a)}_{\mathbf{A}}(r(x,x))
\end{aligned}$$

Veamos qué ocurre con cada $a \in A$:

- Para $a = 0$:

$$\begin{aligned}
I^{v(x|0)}_{\mathbf{A}}(r(x,x)) = 1 &\Longleftrightarrow \langle v(x|0)(x), v(x|0)(x)\rangle = \langle 0,0\rangle \in (r)^{\mathbf{A}} \qquad \checkmark\\
I^{v(x|0)}_{\mathbf{A}}(\exists y r(x,y)) = 1 &\Longleftrightarrow \exists b \in A, \quad I^{v(x|0,y|b)}_{\mathbf{A}}(r(x,y)) = 1\\
&\Longleftrightarrow \exists b \in A, \quad \langle v(x|0,y|b)(x), v(x|0,y|b)(y)\rangle = \langle 0,b\rangle \in (r)^{\mathbf{A}}
\end{aligned}$$

  Tomando $b = 0$, se tiene que $\langle 0,0\rangle \in (r)^{\mathbf{A}}$ y por tanto $I^{v(x|0)}_{\mathbf{A}}(\exists y r(x,y)) = 1$. Tenemos entonces $1 \cdot 1 = 1$, lo cual es correcto.

- Para $a = 1$:

$$I^{v(x|1)}_{\mathbf{A}}(r(x,x)) = 1 \Longleftrightarrow \langle v(x|1)(x), v(x|1)(x)\rangle = \langle 1,1\rangle \in (r)^{\mathbf{A}} \qquad \times$$

  Por tanto, como $\langle 1,1\rangle \notin (r)^{\mathbf{A}}$, se tiene que $I^{v(x|1)}_{\mathbf{A}}(r(x,x)) = 0$, y por tanto tenemos que $0 \cdot 1 = 0$, lo cual es correcto.

En definitiva, tenemos que $I^v_{\mathbf{A}}(\varphi_0) = 1$.

b) <u>Para φ_2:</u>

$$\begin{aligned}
I^v_{\mathbf{A}}(\varphi_2) = 1 &\Longleftrightarrow I^v_{\mathbf{A}}(\forall x(\neg r(y,x))) = 1\\
&\Longleftrightarrow \forall a \in A, I^{v(x|a)}_{\mathbf{A}}(\neg r(y,x)) = 1\\
&\Longleftrightarrow \forall a \in A, I^{v(x|a)}_{\mathbf{A}}(r(y,x)) + 1 = 1\\
&\Longleftrightarrow \forall a \in A, I^{v(x|a)}_{\mathbf{A}}(r(y,x)) = 0\\
&\Longleftrightarrow \forall a \in A, \langle v(x|a)(y), v(x|a)(x)\rangle \notin (r)^{\mathbf{A}}\\
&\Longleftrightarrow \forall a \in A, \langle v(y), a\rangle \notin (r)^{\mathbf{A}}\\
&\Longleftrightarrow \forall a \in A, \langle 1, a\rangle \notin (r)^{\mathbf{A}} \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

donde hemos afirmado que, para todo $a \in A$, $\langle 1,a\rangle \notin (r)^{\mathbf{A}}$, puesto que no existe ningún par en $(r)^{\mathbf{A}}$ que tenga a 1 como primer componente.

c) <u>Para φ_3:</u>

$$\begin{aligned}
I^v_{\mathbf{A}}(\varphi_3) = 1 &\Longleftrightarrow I^v_{\mathbf{A}}(\exists x(\neg r(x,x))) = 1\\
&\Longleftrightarrow \exists a \in A, \qquad I^{v(x|a)}_{\mathbf{A}}(\neg r(x,x)) = 1\\
&\Longleftrightarrow \exists a \in A, \qquad I^{v(x|a)}_{\mathbf{A}}(r(x,x)) + 1 = 1\\
&\Longleftrightarrow \exists a \in A, \qquad I^{v(x|a)}_{\mathbf{A}}(r(x,x)) = 0\\
&\Longleftrightarrow \exists a \in A, \qquad \langle v(x|a)(x), v(x|a)(x)\rangle \notin (r)^{\mathbf{A}}\\
&\Longleftrightarrow \exists a \in A, \qquad \langle a,a\rangle \notin (r)^{\mathbf{A}} \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Por tanto, tomando $a = 1$, se tiene que $\langle 1, 1\rangle \notin (r)^{\mathbf{A}}$, y por tanto $I_{\mathbf{A}}^{v}(\varphi_3) = 1$.

d) Para φ_1:

$$\begin{aligned}
I_{\mathbf{A}}^{v}(\varphi_1) = 1 &\iff I_{\mathbf{A}}^{v}(\forall x \forall y (r(x,y) \to r(y,x))) = 1 \\
&\iff \forall a \in A, \forall b \in A, \qquad I_{\mathbf{A}}^{v(x|a,y|b)}(r(x,y) \to r(y,x)) = 1 \\
&\iff \forall a \in A, \forall b \in A, \\
&\qquad I_{\mathbf{A}}^{v(x|a,y|b)}(r(x,y)) I_{\mathbf{A}}^{v(x|a,y|b)}(r(y,x)) + I_{\mathbf{A}}^{v(x|a,y|b)}(r(x,y)) + 1 = 1 \\
&\iff \forall a \in A, \forall b \in A, \\
&\qquad I_{\mathbf{A}}^{v(x|a,y|b)}(r(x,y)) I_{\mathbf{A}}^{v(x|a,y|b)}(r(y,x)) = I_{\mathbf{A}}^{v(x|a,y|b)}(r(x,y))
\end{aligned}$$

Tomemos $a = 0$ y $b = 1$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
I_{\mathbf{A}}^{v(x|0,y|1)}(r(x,y)) = 1 &\iff \langle v(x|0,y|1)(x), v(x|0,y|1)(y)\rangle = \langle 0, 1\rangle \in (r)^{\mathbf{A}} \qquad \checkmark \\
I_{\mathbf{A}}^{v(x|0,y|1)}(r(y,x)) = 1 &\iff \langle v(x|0,y|1)(y), v(x|0,y|1)(x)\rangle = \langle 1, 0\rangle \in (r)^{\mathbf{A}} \qquad \times
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $I_{\mathbf{A}}^{v(x|0,y|1)}(r(x,y)) = 1$ y $I_{\mathbf{A}}^{v(x|0,y|1)}(r(y,x)) = 0$, y como $1 \cdot 0 \neq 0$, se tiene que $I_{\mathbf{A}}^{v}(\varphi_1) = 0$.

En conclusión, hemos encontrado una $\mathbf{L}-$interpretación $\langle \mathbf{A}, v\rangle$ tal que:

$$\begin{gathered}
I_{\mathbf{A}}^{v}(\varphi_0) = I_{\mathbf{A}}^{v}(\varphi_2) = I_{\mathbf{A}}^{v}(\varphi_3) = 1, \\
I_{\mathbf{A}}^{v}(\varphi_1) = 0
\end{gathered}$$

Por tanto, se tiene que $\varphi_0,\ \varphi_2,\ \varphi_3 \not\models \varphi_1$.