

# Topología II

# Examen VI

Foto: José Juan Castro

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



**Los Del DGIIM**, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Topología II

# Examen VI

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Granada, 2025

**Asignatura** Topología II.

**Curso Académico** 2024/25.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Grupo Único.

**Descripción** Examen extraordinario.

**Fecha** 10 de febrero de 2025.

**Duración** 2 horas y media.

**Responda la pregunta 1 y elija tres preguntas entre la 2, 3, 4 y 5.**

**Ejercicio 1.** Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Dadas las circunferencias

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1\}, \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 = 1\}$$

no existe una aplicación recubridora desde  $X = C_1 \cup C_2$  en  $\mathbb{S}^1$ .

- b) Si  $p : X \rightarrow Y$  es una aplicación recubridora con  $X$  compacto, entonces  $p^{-1}(y)$  es finito para todo  $y \in Y$ .
- c) Toda aplicación continua  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  es homotópicamente nula.

**Ejercicio 2.** Consideremos el cilindro vertical  $C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$  y las rectas horizontales

$$R_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = -1\}, \quad R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = 1\}$$

Calcula el grupo fundamental de

$$X = C \cup R_1 \cup R_2$$

**Ejercicio 3.** Sea  $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$  una aplicación continua cumpliendo que  $f|_{Fr(\overline{\mathbb{D}})} : Fr(\overline{\mathbb{D}}) \rightarrow Fr(\overline{\mathbb{D}})$  es un homeomorfismo. Demuestra que  $f$  es sobreyectiva.

**Ejercicio 4.** Sea  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^1$  una aplicación continua. Demuestra que  $f$  es homotópicamente nula si  $n \geq 2$ .

**Ejercicio 5.** Determina la superficie compacta  $S$  dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e, f, g, h, i; afc^{-1}, deb^{-1}, hia^{-1}, dbc, ehg^{-1}, gfi^{-1} \rangle$$

### Solución.

**Ejercicio 1.** Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Dadas las circunferencias

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1\}, \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 = 1\}$$

no existe una aplicación recubridora desde  $X = C_1 \cup C_2$  en  $\mathbb{S}^1$ .

Es falsa: Por reducción al absurdo, supongamos que existe una aplicación recubridora  $p : X \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Tenemos entonces por el Teorema de Monodromía que el homomorfismo (como trabajamos con espacios arcoconexos da igual el punto en el que trabajemos)  $p_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$  es inyectivo, con  $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  y  $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ . Tendremos por tanto que  $\mathbb{Z}$  contiene un subgrupo isomorfo a  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , pero esto es una contradicción, ya que todo subgrupo de  $\mathbb{Z}$  es abeliano por ser  $\mathbb{Z}$  abeliano y  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  no es abeliano.

- b) Si  $p : X \rightarrow Y$  es una aplicación recubridora con  $X$  compacto, entonces  $p^{-1}(y)$  es finito para todo  $y \in Y$ .

### Demostración directa.

Es cierta: por reducción al absurdo, supongamos que existe  $y \in Y$  tal que el conjunto  $S = p^{-1}(y)$  un conjunto infinito. En dicho caso, por ser  $X$  compacto ha de existir  $x \in X$  punto de acumulación de  $S$ . Sea  $z = p(x)$ , como  $p$  es una aplicación recubridora existe  $U$  un entorno abierto de  $z$  y  $V$  un entorno abierto de  $x$  de forma que  $p : V \rightarrow U$  es un homeomorfismo. Usaremos el siguiente resultado:

Sea  $X$  un espacio topológico compacto y  $S \subseteq X$  un subconjunto infinito, existe un punto  $x \in X$  adherente a  $S$  tal que  $N \cap S$  es un conjunto infinito, para todo  $N$  entorno de  $x$ .

*Demuestração.* Por reducción al absurdo, supongamos que para todo punto  $x \in X$  adherente a  $S$  existe  $U_x$  entorno abierto de  $x$  tal que  $U_x \cap S$  es finito. Observemos que podemos escribir:

$$\overline{S} \subseteq \bigcup_{x \in \overline{S}} U_x$$

Y como  $\overline{S}$  es compacto por ser cerrado y subconjunto de un compacto tenemos que existen  $x_1, \dots, x_n \in \overline{S}$  de forma que:

$$\overline{S} \subseteq U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$$

Esto nos permite escribir:

$$S = (U_{x_1} \cap S) \cup \dots \cup (U_{x_n} \cap S)$$

con cada  $U_{x_i} \cap S$  finito para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Sin embargo, tenemos que  $S$  era un conjunto infinito, por lo que hemos llegado a contradicción.  $\square$

Tenemos entonces que  $V \cap S$  es un conjunto infinito, con lo que  $p$  no es inyectiva en  $V$ , lo que contradice que  $p : V \rightarrow U$  sea un homeomorfismo.

### Asumiendo una hipótesis adicional.

Si  $Y$  es T1 es cierta, pues para todo  $y \in Y$  tendremos que  $\{y\}$  es cerrado por ser  $Y$  T1, por lo que  $p^{-1}(\{y\}) \subseteq X$  es un conjunto cerrado. Como  $X$  es compacto, tenemos que  $p^{-1}(\{y\})$  también será compacto. Como  $p$  es una aplicación recubridora, para  $y$  existirá  $O_y$  un abierto de  $Y$  regularmente recubierto, por lo que:

$$p^{-1}(O_y) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

con  $A_i$  abierto y  $p|_{A_i} : A_i \rightarrow O_y$  homeomorfismo, para cada  $i \in I$ . Tenemos un recubrimiento por abiertos de  $p^{-1}(\{y\}) \subseteq p^{-1}(O_y)$ , por lo que por ser  $p^{-1}(\{y\})$  compacto existirá  $J \subseteq I$  finito de forma que:

$$p^{-1}(\{y\}) \subseteq \bigcup_{i \in J} A_i$$

Como los conjuntos  $A_i$  son disjuntos tenemos entonces que solo puede haber una cantidad finita de preimágenes de  $y$ .

- c) Toda aplicación continua  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  es homotópicamente nula.

Verdadera: Si consideramos el conjunto:

$$Y = \mathbb{R} \times ]0, 1[$$



Tenemos que  $Y$  recubre a  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , ya que para cada circunferencia de centro  $(0, 0)$  de  $X$  podemos considerar la aplicación recubridora estándar desde  $\mathbb{R}$  cuyo dominio se encuentra a cierta altura en el conjunto  $Y$ . Podemos repetir esta idea haciendo corresponder a cada altura del conjunto  $Y$  un radio en el conjunto  $X$ , de forma que los radios tiendan a 0 cuando la altura tienda a 0 y que los radios diverjan cuando la altura se acerque a 1.



Usando esta idea, si consideramos la aplicación  $p : Y \rightarrow X$  dada por:

$$p(x, y) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}y\right)p_0(x)$$

donde  $p_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  es la aplicación recubridora estándar, es sencillo probar que  $p$  es una aplicación recubridora. Así, estamos en la situación:

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \downarrow p & & \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \end{array}$$

Si observamos ahora que  $\mathbb{D}$  es simplemente conexo tenemos entonces que  $f$  se puede levantar, con lo que fijado  $x_0 \in \mathbb{D}$  y tomando  $r_0 \in p^{-1}(\{f(x_0)\})$  tenemos que existe un levantamiento  $\hat{f} : \mathbb{D} \rightarrow Y$ . Como tenemos ahora que  $Y$  es contráctil tenemos que  $\hat{f}$  es homotópicamente nula, y razonando como en el Ejercicio 4 llegamos a que  $f$  es homotópicamente nula.

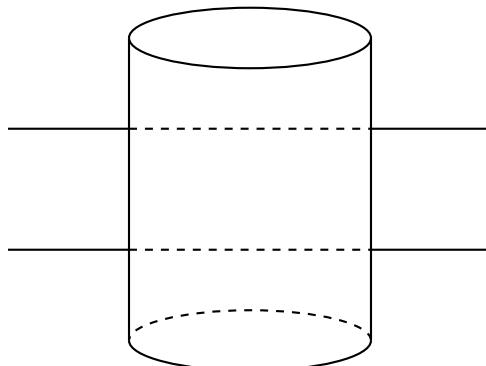
**Ejercicio 2.** Consideremos el cilindro vertical  $C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$  y las rectas horizontales

$$R_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = -1\}, \quad R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = 1\}$$

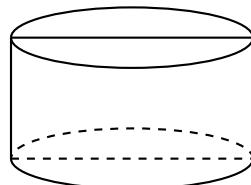
Calcula el grupo fundamental de

$$X = C \cup R_1 \cup R_2$$

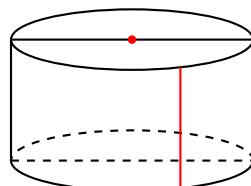
Tenemos el conjunto:



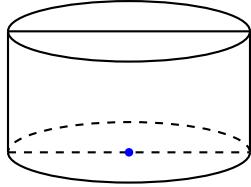
Que tiene por retracto de deformación el conjunto:



Si tomamos como  $U$ :



Y como  $V$ :



Puede probarse que  $U \cap V$  es simplemente conexo, que  $U$  tiene grupo fundamental  $\mathbb{Z}$  y  $V$  tiene  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , de donde:

$$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

**Ejercicio 3.** Sea  $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$  una aplicación continua cumpliendo que  $f|_{Fr(\overline{\mathbb{D}})} : Fr(\overline{\mathbb{D}}) \rightarrow Fr(\overline{\mathbb{D}})$  es un homeomorfismo. Demuestra que  $f$  es sobreyectiva.

Por reducción al absurdo suponemos que  $f$  no es sobreyectiva, es decir, que existe  $y \in \overline{\mathbb{D}} \setminus f(\overline{\mathbb{D}})$  (notemos que  $y \in \mathbb{D}$ , ya que si no esto contradeciría la existencia del homeomorfismo enunciado). De esta forma, podemos considerar la restricción en codominio  $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}} \setminus \{y\}$ . Ahora, el conjunto  $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{y\}$  tiene por retracto de deformación al conjunto  $\mathbb{S}^1$ . En definitiva, podemos considerar la siguiente cadena de composiciones de aplicaciones continuas:

$$\overline{\mathbb{D}} \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{D}} \setminus \{y\} \xrightarrow{r} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{S}^1$$

donde usamos que  $Fr(\overline{\mathbb{D}}) = \mathbb{S}^1$ , obteniendo así una aplicación continua de  $\overline{\mathbb{D}}$  en  $\mathbb{S}^1$  que mantiene fijos los puntos de  $\mathbb{S}^1$ , contradicción.

**Ejercicio 4.** Sea  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^1$  una aplicación continua. Demuestra que  $f$  es homotópicamente nula si  $n \geq 2$ .

Si consideramos el recubridor  $(\mathbb{R}, p)$  de  $\mathbb{S}^1$  con  $p$  la aplicación recubridora estándar:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & & \\ \downarrow p & & \\ \mathbb{S}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

Como  $\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$  para  $n \geq 2$  tenemos entonces que:

$$f_*(\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{R}, r_0))$$

para  $r_0 \in p^{-1}(\{f(x_0)\})$ , por lo que existe una aplicación  $\hat{f} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  levantamiento de  $f$  con  $\hat{f}(x_0) = r_0$ . Como  $\hat{f}$  llega a  $\mathbb{R}$ , que es contráctil, tenemos que  $\hat{f}$  es homotópicamente nula, es decir, existe  $z_0 \in \mathbb{R}$  y una homotopía  $H : \mathbb{S}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que:

$$H(x, 0) = \hat{f}(x), \quad H(x, 1) = z_0 \quad \forall x \in \mathbb{S}^n$$

Si consideramos ahora la homotopía  $p \circ H : \mathbb{S}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  tenemos que:

$$(p \circ H)(x, 0) = p(\hat{f}(x)) = f(x), \quad (p \circ H)(x, 1) = p(z_0) \quad \forall x \in \mathbb{S}^n$$

Por lo que  $f$  es homotópica a la aplicación constantemente igual a  $p(z_0)$ , como queríamos probar.

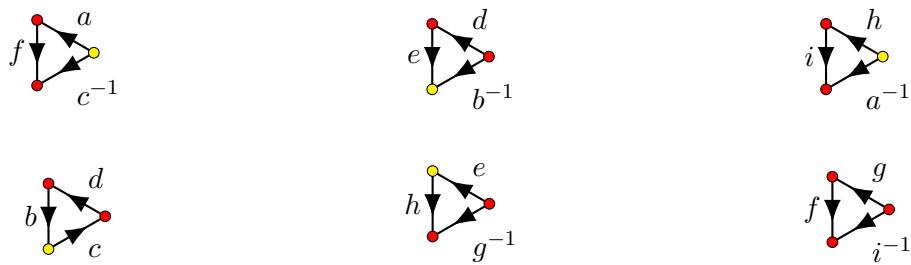
**Ejercicio 5.** Determina la superficie compacta  $S$  dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e, f, g, h, i; afc^{-1}, deb^{-1}, hia^{-1}, dbc, ehg^{-1}, gfi^{-1} \rangle$$

Calculamos la característica de Euler de  $S$ :

- $C = 6$ .
- $A = 9$ .
- $V = 2$ .

Y para averiguar el número de vértices hemos visto que:



tenemos así que:

$$\chi(S) = V - A + C = 2 - 9 + 6 = -1$$

Por lo que  $S \cong \mathbb{RP}_3^2$ .