

# Ecuaciones Diferenciales I Examen XVIII

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Ecuaciones Diferenciales I Examen XVIII

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

**Asignatura** Ecuaciones Diferenciales I

**Curso Académico** 2016-17.

**Grupo** A.

**Profesor** Rafael Ortega Ríos.

**Descripción** Parcial C.

**Fecha** 1 de Junio de 2017.

**Ejercicio 1.** Encuentra la solución del problema

$$x'' + 9x = t^2, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

Busquemos una solución particular de la forma  $x_p(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= 2\alpha t + \beta, \\ x_p''(t) &= 2\alpha. \end{aligned}$$

Por tanto, como buscamos que sea solución, hemos de imponer:

$$2\alpha + 9(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) = t^2 \implies 9\alpha t^2 + 9\beta t + 9\gamma + 2\alpha = t^2 \implies \begin{cases} 9\alpha = 1, \\ 9\beta = 0, \\ 9\gamma + 2\alpha = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 1/9, \\ \beta = 0, \\ \gamma = -2/81. \end{cases}$$

Por tanto, una solución particular del problema es:

$$x_p(t) = \frac{t^2}{9} - \frac{2}{81} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Busquemos ahora la solución de la homogénea. Sus valores propios son:

$$\lambda^2 + 9 = 0 \implies \lambda = \pm 3i.$$

Trabajando con el valor propio  $\lambda = 3i$ , tenemos que una solución compleja de la homogénea es:

$$x(t) = e^{3it} = \cos(3t) + i \sin(3t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la solución general de la homogénea es:

$$x(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la solución general del problema es:

$$x(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t) + \frac{t^2}{9} - \frac{2}{81} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, tenemos que:

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 - \frac{2}{81} = 0 \implies c_1 = \frac{2}{81}, \\ x'(t) &= -3c_1 \sin(3t) + 3c_2 \cos(3t) + \frac{2t}{9}, \\ x'(0) &= 3c_2 = 0 \implies c_2 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del problema es:

$$x(t) = \frac{2}{81} \cos(3t) + \frac{t^2}{9} - \frac{2}{81} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Ejercicio 2.** Sea  $Z$  el espacio de soluciones del sistema  $x' = Ax$  donde  $A$  es la matriz  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideramos la aplicación lineal  $\Psi : Z \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Psi(x) = (x_1(0), x_2(1))$ . Encuentra  $\ker \Psi$ .

Tenemos que:

$$\ker \Psi = \{x \in Z : \Psi(x) = 0\} = \{x \in Z : x_1(0) = 0, x_2(1) = 0\}.$$

El sistema podemos escribirlo como:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que toda solución  $x_2(t)$ , al ser de clase 1 en  $\mathbb{R}$  y tener derivada nula, es constante. Por la condición inicial, tenemos que:

$$x_2(t) = x_2(1) = 0 \quad t \in \mathbb{R}.$$

De igual forma, tenemos que:

$$x_1' = 0 \implies x_1(t) = x_1(0) = 0 \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\ker \Psi = \{x \in Z : x_1(t) = 0, x_2(t) = 0\} = \{0\}.$$

**Ejercicio 3.** Demuestra que la función

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} t^2 + 1 & t^2 + 2 & t^2 + 3 & \dots & t^2 + n \\ t^3 + 1 & t^3 + 2 & t^3 + 3 & \dots & t^3 + n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^n + 1 & t^n + 2 & t^n + 3 & \dots & t^n + n \\ t^{n+1} + 1 & t^{n+1} + 2 & t^{n+1} + 3 & \dots & t^{n+1} + n \end{vmatrix}$$

es derivable y calcula  $\chi'(0)$ .

Como cada componente de la matriz es un polinomio en  $t$ , cada componente es derivable en todo  $\mathbb{R}$ , luego  $\chi$  es derivable en todo  $\mathbb{R}$ , con derivada:

$$\begin{aligned} \chi'(t) &= \begin{vmatrix} 2t & 2t & \dots & 2t \\ t^3 + 1 & t^3 + 2 & \dots & t^3 + n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^n + 1 & t^n + 2 & \dots & t^n + n \\ t^{n+1} + 1 & t^{n+1} + 2 & \dots & t^{n+1} + n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t^2 + 1 & t^2 + 2 & \dots & t^2 + n \\ 3t^2 & 3t^2 & \dots & 3t^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^n + 1 & t^n + 2 & \dots & t^n + n \\ t^{n+1} + 1 & t^{n+1} + 2 & \dots & t^{n+1} + n \end{vmatrix} + \dots \\ &\quad + \dots + \begin{vmatrix} t^2 + 1 & t^2 + 2 & \dots & t^2 + n \\ t^3 + 1 & t^3 + 2 & \dots & t^3 + n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^n + 1 & t^n + 2 & \dots & t^n + n \\ (n+1)t^n & (n+1)t^n & \dots & (n+1)t^n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, evaluando en el punto  $t = 0$ , tenemos que  $\chi'(0) = 0$ , ya que cada determinante tendrá una fila de ceros.

**Ejercicio 4.** Demuestra que la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  converge uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$  si  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por las fórmulas recursivas

$$f_0(t) = 7, \quad f_{n+1}(t) = 7 + \int_0^t \sqrt{s^2 + t^2} f_n(s) ds.$$

Para ello, usaremos el Test de Weierstrass. Veamos que:

$$\begin{aligned} |f_1(t) - f_0(t)| &= \left| \int_0^t \sqrt{s^2 + t^2} f_0(s) ds \right| \\ &= \left| 7 \int_0^t \sqrt{s^2 + t^2} ds \right| \leq 7 \left| \int_0^t \sqrt{2t^2} ds \right| \\ &= 7\sqrt{2} \cdot t^2 \leq 7\sqrt{2}. \\ |f_2(t) - f_1(t)| &= \left| \int_0^t \sqrt{s^2 + t^2} (f_1(s) - f_0(s)) ds \right| \\ &\leq 7\sqrt{2} \left| \int_0^t \sqrt{s^2 + t^2} ds \right| \leq 7(\sqrt{2})^2 \left| \int_0^t t ds \right| \leq 7(\sqrt{2})^2 \cdot \left| \int_0^t ds \right| = 7(\sqrt{2})^2 t. \\ |f_3(t) - f_2(t)| &= \left| \int_0^t \sqrt{s^2 + t^2} (f_2(s) - f_1(s)) ds \right| \\ &\leq 7(\sqrt{2})^2 \left| \int_0^t \sqrt{s^2 + t^2} s ds \right| \leq 7(\sqrt{2})^3 \cdot \left| \int_0^t s ds \right| = 7(\sqrt{2})^3 \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Demostremos por inducción que:

$$|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leq 7(\sqrt{2})^{n+1} \frac{t^n}{n!}.$$

■ Para  $n = 0$ , tenemos que:

$$|f_1(t) - f_0(t)| \leq 7(\sqrt{2})^1 \frac{t^0}{0!}.$$

■ Supongamos cierto para  $n$ , y veamos que es cierto para  $n + 1$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} |f_{n+2}(t) - f_{n+1}(t)| &= \left| \int_0^t \sqrt{s^2 + t^2} (f_{n+1}(s) - f_n(s)) ds \right| \\ &\leq 7(\sqrt{2})^{n+1} \left| \int_0^t \sqrt{s^2 + t^2} s ds \right| \leq 7(\sqrt{2})^{n+2} \cdot \left| \int_0^t \frac{s^n}{n!} ds \right| = \\ &= 7(\sqrt{2})^{n+2} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leq 7(\sqrt{2})^{n+1} \frac{t^n}{n!} \leq 7\sqrt{2} \cdot \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} \quad t \in [0, 1].$$

Definimos entonces la sucesión de números reales:

$$M_n = 7\sqrt{2} \cdot \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Veamos ahora que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  converge. Para ello, usando el desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial, tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = 7\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} = 7\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} < \infty.$$

Por tanto, por el Test de Weierstrass, la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  converge uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$ .

**Ejercicio 5.** Dado un sistema lineal y homogéneo  $x' = A(t)x$  con  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  continua, se considera una matriz solución  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ . Demuestra que el rango de la matriz  $\Phi(t)$  es independiente de  $t$ .

Sea  $\Phi = (\phi_1 \mid \cdots \mid \phi_N)$ , con  $\phi_i$  la columna  $i$ -ésima de  $\Phi$  una solución del sistema. Veamos que el rango de  $\Phi(t)$  es el número de soluciones linealmente independientes de  $\Phi$ , y que por tanto no depende de  $t$ .

Sea  $Z$  el espacio de soluciones del sistema. Consideramos el subespacio vectorial de las combinaciones lineales de las columnas de  $\Phi$ :

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^N c_i \phi_i \mid c_i \in \mathbb{R} \forall i \in 1 = 1, \dots, n \right\}.$$

de esta forma,  $\dim V$  es el número de soluciones linealmente independientes de  $\Phi$ .

Fijado  $t_0 \in I$ , consideramos el isomorfismo dado por:

$$\begin{aligned} \Phi_{t_0} : \quad Z &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} &\longmapsto x(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_N(t_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por ser  $\Phi_{t_0}$  lineal, tenemos que:

$$\Phi_{t_0}(V) = \left\{ \sum_{i=1}^N c_i \Phi_{t_0}(\phi_i) \mid c_i \in \mathbb{R} \forall i \in 1 = 1, \dots, n \right\}.$$

De esta forma, tenemos que:

$$\Phi(t_0) = (\Phi_{t_0}(\phi_1) \mid \cdots \mid \Phi_{t_0}(\phi_N)) \implies \text{rg}(\Phi(t_0)) = \text{rg}(\Phi_{t_0}(\phi_1) \mid \cdots \mid \Phi_{t_0}(\phi_N))$$

La matriz  $(\Phi_{t_0}(\phi_1) \mid \cdots \mid \Phi_{t_0}(\phi_N))$  ya es una matriz en cuyas columnas hay vectores de  $\mathbb{R}^N$ , por lo que su rango es el número de columnas linealmente independientes, y como  $\Phi_{t_0}(V)$  es el espacio vectorial formado por las combinaciones lineales de los vectores de dicha matriz, tenemos que:

$$\text{rg}(\Phi(t_0)) = \text{rg}(\Phi_{t_0}(\phi_1) \mid \cdots \mid \Phi_{t_0}(\phi_N)) = \dim \Phi_{t_0}(V)$$

No obstante, como  $\Phi_{t_0}$  es un isomorfismo, tenemos que  $\dim \Phi_{t_0}(V) = \dim V$ , y por tanto:

$$\operatorname{rg}(\Phi(t_0)) = \dim V$$

Como  $t_0$  es arbitrario, tenemos que:

$$\operatorname{rg}(\Phi(t)) = \dim V \quad \forall t \in I.$$

Por lo que hemos demostrado que es independiente de  $t$ .