Cálculo I

Examen XI

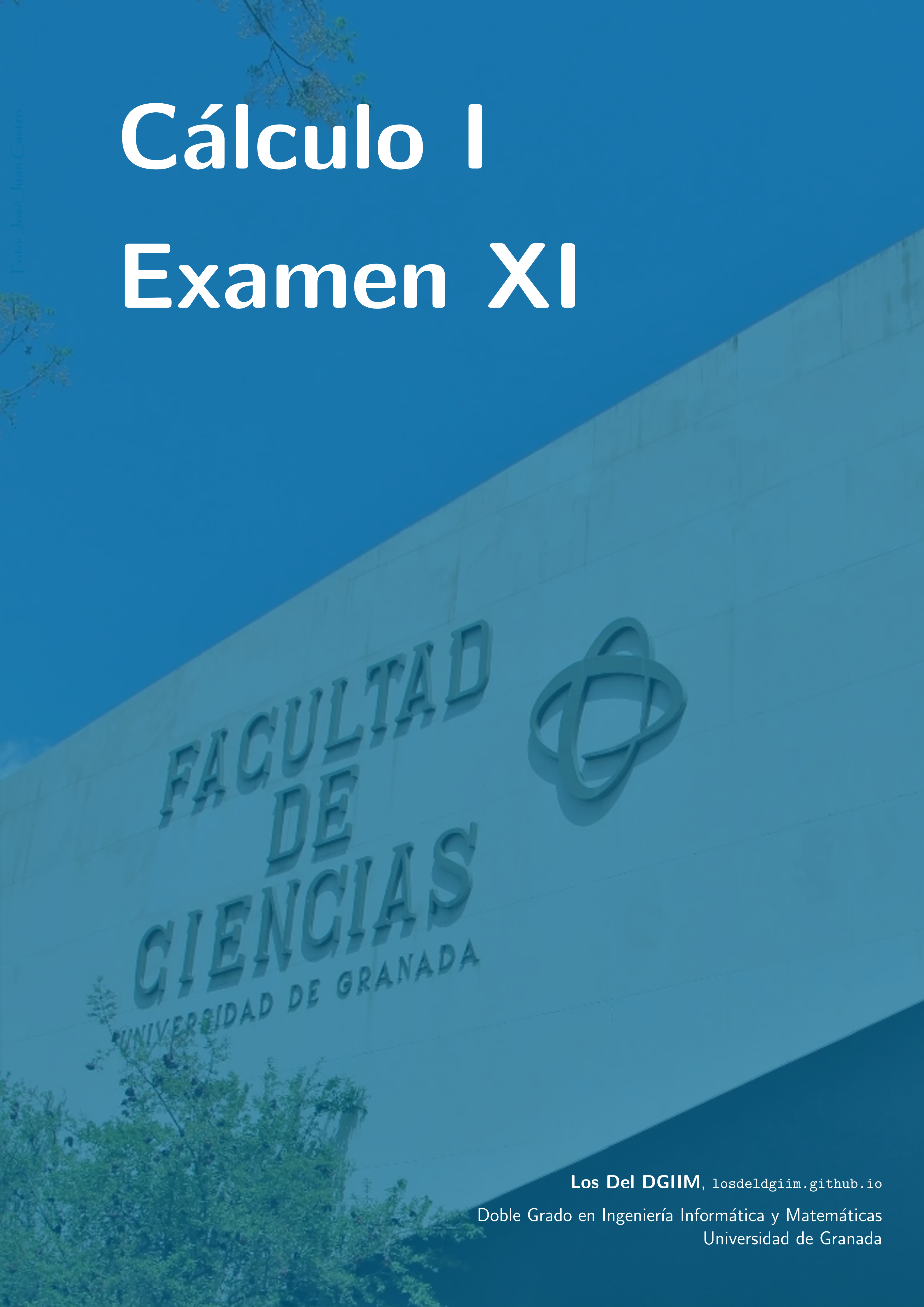

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo I
Examen XI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Roxana Acedo Parra

Granada, 2025

Asignatura Cálculo I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Luis Gámez Ruiz.

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

Fecha 6 de febrero de 2025.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Enuncia:

1. El criterio de condensación para series de términos positivos.
2. El criterio de convergencia absoluta para series de números reales.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando las respuestas:

1. Si $n \in \mathbb{N}$ es primo, $\sqrt{n}$ es irracional.
2. Todo conjunto de números naturales, no vacío y mayorado, es finito.
3. Toda sucesión monótona de números reales, que admita una parcial divergente, es divergente.
4. Toda sucesión de números positivos, convergente a cero, es decreciente.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Estudiar la convergencia de:

1. La sucesión $\left\{ \dfrac{n^2\sqrt{n}}{1 + 2\sqrt{2} + \cdots + n\sqrt{n}} \right\}$.
2. La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n a^n}{1+a^n}$ según el valor de $a \in \mathbb{R}^+$.

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Se considera la sucesión $\{x_n\}$ definida de forma recurrente por $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n} - 1$. Estudiar:

1. La convergencia de la sucesión $\{x_n\}$.
2. El carácter de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{(n+1)x_n}{n^2}$.

Ejercicio 5 (3 puntos)**.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2+8} & \text{si } x \in \mathbb{R}^-, \\ \\ e^{-x}\dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+. \end{cases}$$

1. Estudiar la continuidad de f.
2. Calcular $f(\mathbb{R})$ y $f([-1, 1])$.
3. ¿Tiene inversa la función f?¿Y la función $f\big|_{[-1,1]}$? En caso afirmativo, discutir el dominio y la continuidad de dicha inversa.

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Enuncia:

1. El criterio de condensación para series de términos positivos.
   Criterio de condensación para series de términos positivos:
   Si $\{a_n\}$ decreciente, con $a_n \geqslant 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces:
   $$\sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge } \iff \sum_{n\geqslant 1} 2^n a_{2n} \text{ converge}$$

2. El criterio de convergencia absoluta para series de números reales. **Criterio de convergencia absoluta para series:**
   Si la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge absolutamente (esto es, si $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ converge) $\Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando las respuestas:

1. Si $n \in \mathbb{N}$ es primo, $\sqrt{n}$ es irracional. $\boxed{Verdadera}$
   Demostración (por reducción al absurdo):
   Si fuese $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; \sqrt{n} = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$, fracción irreducible.
   $\sqrt{n} = \frac{p}{q} \;\Rightarrow\; n = \frac{p^2}{q^2} \;\Rightarrow\; p^2 = nq^2 \;\Rightarrow p$ múltiplo de $n \;\Rightarrow\; \exists r \in \mathbb{N} : p = nr \;\Rightarrow$ (sustituimos p en la expresión $p^2 = nq^2$) $n^2r^2 = nq^2 \;\Rightarrow\; q^2 = nr^2 \;\Rightarrow$ (igual) q múltiplo de n
   Luego p y q son, ambos, múltiplos de n. **¡Contradicción!**

2. Todo conjunto de números naturales, no vacío y mayorado, es finito. $\boxed{Verdadera}$
   Demostración:
   Si $A \subseteq \mathbb{N}$, no vacío y mayorado $\Rightarrow$ tiene supremo $\alpha = sup(A)$. Por la propiedad arquimediana, $\exists m \in \mathbb{N} : \alpha < m$. Así $A \subseteq \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant m\} = S(m)$ finito $\Rightarrow$ A finito.

3. Toda sucesión monótona de números reales, que admita una parcial divergente, es divergente. $\boxed{Verdadera}$
   Demostración (hagamos el caso creciente):
   $\{x_n\}$ monótona creciente y $\exists$ parcial $\left\{x_{\sigma(n)}\right\} \to +\infty$
   $\forall k > 0 \; \exists m \in \mathbb{N}$: si $p \in \mathbb{N} \wedge p \geqslant m$, se tiene que $x_{\sigma(p)} > k$ (en particular $x_{\sigma(m)} > k$)
   Si $n \in \mathbb{N} \wedge n \geqslant \sigma_{(p)}$ se tiene que $x_n \geqslant x_{\sigma(m)} > k$. Luego $\{x_n\} \to +\infty$

4. Toda sucesión de números positivos, convergente a cero, es decreciente. $\boxed{Falsa}$
   Contraejemplos:
   $$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n + (-1)^{n+1}}\right\}$$
   $$\{y_n\} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Estudiar la convergencia de:

1. la sucesión $\left\{\dfrac{n^2\sqrt{n}}{1+2\sqrt{2}+\cdots+n\sqrt{n}}\right\}$.

   Llamamos $a_n = n^2\sqrt{n}$, $b_n = 1+2\sqrt{2}+\cdots+n\sqrt{n}$.

   La sucesión es $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, con $\{b_n\} \nearrow\nearrow +\infty$, por lo tanto podemos aplicar el criterio de Stolz.

$$\left(Si \ \left\{\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right\} \longrightarrow L \Longrightarrow \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow L \ (L\in\mathbb{R} \text{ ó } \pm\infty)\right)$$

   Estudiemos la sucesión:

$$\left\{\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right\} = \left\{\frac{(n+1)^{\frac{5}{2}}-n^{\frac{5}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\right\} = \left\{\frac{(n+1)^5-n^5}{(n+1)^{\frac{3}{2}}\left[(n+1)^{\frac{5}{2}}+n^{\frac{5}{2}}\right]}\right\}$$

$$\left\{\frac{\cancel{n^5}+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1-\cancel{n^5}}{(n+1)^4+(n+1)^{\frac{3}{2}}n^{\frac{5}{2}}}\right\} = \left\{\frac{\cancel{n^4}\left(5+\frac{10}{n}+\frac{10}{n^2}+\frac{5}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)}{\cancel{n^4}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^4+\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\right]}\right\} \longrightarrow \frac{5}{2}$$

   Luego aplicando Stolz, $\boxed{\boxed{\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to \frac{5}{2}}}$

   También podría haberse calculado así:

$$\left\{\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right\} = \left\{\frac{(n+1)^{\frac{5}{2}}-n^{\frac{5}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\right\} = \left\{\frac{n^{\frac{5}{2}}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{5}{2}}-1\right]}{n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{n+1}{1}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\} =$$

$$\left\{\frac{n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{5}{2}}-1\right]}{\left(\frac{n+1}{1}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\} \xrightarrow[(*)\,\text{debajo}]{} \frac{5}{2} \xRightarrow[\text{(Stolz)}]{} \boxed{\boxed{\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to \frac{5}{2}}}$$

   (*) El denominador tiende a 1, estudiemos por separado el numerador:

$$\left.\begin{array}{l} \{x_n\} = \left(\dfrac{n+1}{1}\right)^{\frac{5}{2}} \longrightarrow 1 \\ \\ \{y_n\} = \{n\} \end{array}\right\} \left(\begin{array}{c}\text{puedo aplicar el} \\ \text{criterio de Euler } (*)\end{array}\right)$$

$$(*) \ x_n^{y_n} \longrightarrow e^H \Longleftrightarrow y_n(x_n-1) \longrightarrow H$$

$$\{x_n^{y_n}\} = \left\{\left(\frac{n+1}{1}\right)^{\frac{5}{2}n}\right\} = \left\{\left[\left(\frac{n+1}{1}\right)^n\right]^{\frac{5}{2}}\right\} \longrightarrow e^{\frac{5}{2}}$$

Luego $\left\{ n \left[\left(\frac{n+1}{1} \right)^{\frac{5}{2}} - 1 \right] \right\} = \{y_n(x_n - 1)\} \longrightarrow \frac{5}{2}$

2. la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n a^n}{1+a^n}$ según el valor de $a \in \mathbb{R}^+$.

Convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n a^n}{1+a^n}$, según el valor de $a \in \mathbb{R}^+$.

Consideremos los casos: $\underline{0 < a < \frac{1}{2},\ a = \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < a < 1,\ a = 1,\ a > 1.}$

* Caso $0 < a < \frac{1}{2}$. Criterio de la raíz $\left[\text{Si } \sqrt[n]{a_n} \to L \geqslant 0, \begin{cases} \text{Si } L > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ \text{Si } L < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ no converge} \end{cases} \right]$

$$\left\{ \sqrt[n]{\frac{2^n a^n}{1+a^n}} \right\} = \left\{ \frac{2a}{\sqrt[n]{1+a^n}} \right\} \to 2a < 1 \Rightarrow$$

<u>Para $0 < a < \frac{1}{2}$ la serie **converge**.</u>

* Caso $a = \frac{1}{2}$. Los sumandos $\left\{ \frac{2^n a^n}{1+a^n} \right\} = \left\{ \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n} \right\} \to 1$ ¡¡No tienden a 0 !!
Luego, <u>para $a = \frac{1}{2}$, la serie **no converge**</u>.

* Caso $\frac{1}{2} < a < 1$. Los sumandos $\left\{ \frac{2^n a^n}{1+a^n} \right\} = \left\{ \frac{(2a)^n}{1+a^n} \right\} \to +\infty$ ¡¡No tienden a 0 !!
Luego, <u>para $\frac{1}{2} < a < 1$, la serie **no converge**</u>.

* Caso $a = 1$. Los sumandos $\left\{ \frac{2^n a^n}{1+a^n} \right\} = \{2^{n-1}\} \to +\infty$ ¡¡No tienden a 0 !!
Luego, <u>para $a = 1$, la serie **no converge**</u>.

* Caso $a > 1$. Los sumandos $\left\{ \frac{2^n a^n}{1+a^n} \right\} = \left\{ \frac{2^n \cancel{a^n}}{\cancel{a^n}\left(\left(\frac{1}{a}\right)^n + 1\right)} \right\} \to +\infty$ ¡¡No tienden a 0 !!
Luego, <u>para $a > 1$, la serie **no converge**</u>.

Alternativamente, todos los casos con $\boxed{a > \frac{1}{2}}$ también se resuelven comparando la serie a estudiar con la del caso $a = \frac{1}{2}$. Bastará con observar que, si $x > y > 0 \Rightarrow \frac{x}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} > \frac{1}{1+y} = \frac{y}{1+y}$, con lo que $x = a^n \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ obtenemos la comparación:

$$2^n \frac{a^n}{1+a^n} > 2^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n} \quad \text{(sumandos del caso } a = 1\text{)}$$

Por el criterio de comparación, para $a > \frac{1}{2}$,

$$\text{ya que } \sum_{n\geqslant 1} 2^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n} \text{ no converge } \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} 2^n \frac{a^n}{1+a^n} \text{ no converge.}$$

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Se considera la sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_1 = \sqrt{1+2x_n} - 1$. Estudiar:

1. La convergencia de la sucesión $\{x_n\}$.
   Probaremos que $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente y minorada por 0. Más concretamente, demostraremos que $\boxed{0 < x_{n+1} < x_n \forall n \in \mathbb{N}}$ por inducción:

   Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : 0 < x_{n+1} < x_n\} \subseteq \mathbb{N}$
   ¿Es A inductivo? $\Leftrightarrow$ 1) $\wedge$ 2)

   1) ¿$1 \in A$? $\Leftrightarrow$ ¿$0 < x_2 < x_1$? $\Leftrightarrow$ ¿$0 < \sqrt{3} - 1 < 1$? $\boxed{\text{Sí}}$
   2) Si $k \in A$ (hipótesis de inducción) ¿$\Rightarrow k+1 \in A$?
      La hipótesis de inducción dice: $0 < x_{n+1} < x_n$, y queremos probar ¿$0 < x_{n+2} < x_{n+1}$?

      $$\left.\begin{array}{l} \text{Claramente } x_{k+2} = \sqrt{1+2x_{k+1}} - 1 >_{\text{(ya que } x_{k+1} > 0)} \sqrt{1} - 1 = 0 \\ \text{Además, } x_{k+2} = \sqrt{1+2x_{k+1}} - 1 < \sqrt{1+2x_k} - 1 = x_{k+1} \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{\text{Sí}}$$

   Luego $\{x_n\}$ estrictamente decreciente y minorada. En particular será convergente $\{x_n\} \searrow L \geqslant 0$

   $$\left.\begin{array}{l} \{x_{n+1}\} \longrightarrow L \text{ (parcial)} \\ \left\{\sqrt{1+2x_n} - 1\right\} \longrightarrow \sqrt{1+2L} - 1 \end{array}\right] \xRightarrow{\text{(uni. del lím.)}} L = \sqrt{1+2L} - 1 \Rightarrow \boxed{L = 0}$$

   Luego $\{x_n\} \searrow 0$.

2. El carácter de la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{(n+1)x_n}{n^2}$.
   Es una serie alternada, podemos aplicar el criterio de Leibniz, nos preguntamos si ¿$\left\{\frac{(n+1)}{n^2} x_n\right\} \searrow 0$? (ya sabemos que $\{x_n\} \searrow 0$)
   Veamos que $\left\{\frac{(n+1)}{n^2}\right\}$ es decreciente:

   $$¿\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{n+1}{n^2}? \Leftrightarrow ¿n^2(n+2) < (n+1)^3? \Leftrightarrow ¿n^3 + 2n^2 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1? \boxed{\text{Sí}}$$

   Luego $\left\{\frac{(n+1)}{n^2} x_n\right\}$ es producto de dos sucesiones decrecientes y positivas y, por lo tanto, es decreciente y su límite es (producto de límites) 0. Así, por el criterio de Leibniz, $\underline{\underline{\sum\limits_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{(n+1)x_n}{n^2} \text{ converge.}}}$

Ejercicio 5 (3 puntos)**.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2+8} & \text{si } x \in \mathbb{R}^-, \\[2ex] e^{-x} \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+. \end{cases}$$

1. Estudiar la continuidad de f.
Por el carácter local de la continuidad, f será continua en todo punto de $\mathbb{R}^-$ y también en todo punto de $\mathbb{R}^+$. Falta saber si es continua en 0. Por un resultado visto en clase, consecuencia de la caracterización de la continuidad por sucesiones monótonas:

$$f \text{ continua en } 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{0^2+8} = e^{-0} + \frac{1}{1+0} \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 1+1 \qquad \boxed{\text{Sí}}$$

Luego $\underline{\underline{f \text{ es continua en } \mathbb{R}}}$.

2. Calcular $f(\mathbb{R})$ y $f([-1,1])$.
¿$f(\mathbb{R})$? $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}_0^+) = f(\mathbb{R}^-) \cup f(\mathbb{R}_0^+)$

   * Comencemos por $f(\mathbb{R}^-)$: por el T.V.I. será un intervalo. Además $\forall x, y \in \mathbb{R}^- x < y \Rightarrow x^2 > y^2 \Rightarrow f(x) > f(y)$
   Luego $\underline{f \text{ es estrictamente decreciente en } \mathbb{R}^-}$ (en particular $\underline{\text{inyectiva}}$ en $\mathbb{R}^-$).

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \{x_n\}\ (x_n \in \mathbb{R}^- \forall n \in \mathbb{N}) \to 0 \Rightarrow \{f(x_n)\} \to 2 \\ \text{Si } \{x_n\} \to -\infty \Rightarrow \{f(x_n)\} \to +\infty \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{f(\mathbb{R}^-) = (2, +\infty)}$$

   * Hagamos ahora $f(\mathbb{R}^+)$: de nuevo, por el T.V.I. será un intervalo. Además, en $\mathbb{R}_0^+$ f es suma de funciones estrictamente decrecientes.
   Luego $\underline{\text{es estrictamente decreciente en } \mathbb{R}_0^+}$ (en particular inyectiva en $\mathbb{R}_0^+$).

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 2 \\ \text{Si } \{y_n\} \to +\infty \Rightarrow \{f(y_n)\} \to 0 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{f(\mathbb{R}_0^+) = (0, 2]}$$

   * En consecuencia, $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}^-) \cup f(\mathbb{R}_0^+) = (2, +\infty) \cup (0, 2] = (0, +\infty)$

Para calcular $f([-1,1])$, ya que f es estrictamente decreciente en todo su dominio y continua, tendremos:

$$f([-1,1]) = [f(1), f(-1)] = \left[\frac{1}{e} + \frac{1}{2}, \sqrt[3]{9}\right]$$

3. ¿Tiene inversa la función f?¿Y la función $f \restriction_{[-1,1]}$? En caso afirmativo, discutir el dominio y la continuidad de dicha inversa.
f es estrictamente decreciente en su dominio ($\Rightarrow$ inyectiva) y por tanto tiene inversa, cuyo dominio será la imagen de f. Además, dado que el dominio de f es un intervalo ($\mathbb{R}$), la inversa será continua (*).

$$f^{-1} : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua.}$$

Por el mismo motivo, al ser $g = f \restriction_{[-1,1]}$ estrictamente monótona tendrá inversa cuyo dominio será la imagen de g, es decir, $f([-1,1])$. De nuevo, por ser el dominio de g un intervalo, g^{-1} será continua (*).

$$g^{-1} = (f \restriction_{[-1,1]})^{-1} : \left[\frac{1}{e} + \frac{1}{2}, \sqrt[3]{9}\right] \longrightarrow [-1,1] \quad \text{continua.}$$

(*) Hemos usado un resultado de teoría sobre monotonía y continuidad:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } I \subseteq \mathbb{R} \text{ intervalo} \\ \text{y } h : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ estrictamente monótona}\end{array}\right] \Rightarrow \exists \text{ inversa } h^{-1} \text{ y es continua.}$$