Variable Compleja I
Examen VII

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen VII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2018-19.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 25 de Abril de 2019.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (3.5 puntos)**.** Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ donde

$$f_n(z) = \left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right)^{2n} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1-i\}.$$

Ejercicio 2 (3.5 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{C}\setminus\{-i, i\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \log(1+z^2)$$

y obtener un desarrollo en serie de potencias de f centrado en el origen.

Ejercicio 3.

1. **(1.5 puntos)** Calcular $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z(z-2)^2}\,dz$.
2. **(1.5 puntos)** Sean f y g dos funciones enteras verificando $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \mathbb{T}$. Demostrar que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.
3. **Extra (1.5 puntos)** Probar que, de hecho, $f = g$.

Ejercicio 1 (3.5 puntos)**.** Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ donde

$$f_n(z) = \left(\frac{z-1-i}{z+1+i}\right)^{2n} \qquad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{-1-i\}.$$

Se trata de una serie geométrica de razón $\varphi(z)$, donde:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{C}\setminus\{-1-i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \left(\dfrac{z-1-i}{z+1+i}\right)^2 \end{array}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia puntual. Fijado $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1-i\}$:

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| < 1 &\Longleftrightarrow |z-1-i|^2 < |z+1+i|^2 \\ &\Longleftrightarrow (\operatorname{Re}(z)-1)^2 + (\operatorname{Im}(z)-1)^2 < (\operatorname{Re}(z)+1)^2 + (\operatorname{Im}(z)+1)^2 \\ &\Longleftrightarrow \operatorname{Re}^2(z) - 2\operatorname{Re}(z) + 1 + \operatorname{Im}^2(z) - 2\operatorname{Im}(z) + 1 < \operatorname{Re}^2(z) + 2\operatorname{Re}(z) + 1 + \operatorname{Im}^2(z) + 2\operatorname{Im}(z) + 1 \\ &\Longleftrightarrow 0 < \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \end{aligned}$$

Por tanto, definimos el conjunto:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 0\}$$

De esta forma, la serie converge absolutamente (y puntualmente) en Ω y diverge para $z \in \mathbb{C}\setminus\Omega$.

Respecto a la convergencia uniforme, dado $B \subset \mathbb{C}$, veamos que la serie converge uniformemente en B si y solo si:

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge uniformemente en } B \subseteq \Omega \Longleftrightarrow \rho = \sup\{|\varphi(z)| \mid z \in B\} < 1$$

$\Longleftarrow$) Supuesto que $\rho < 1$, es fácil probar la convergencia uniforme de la serie en B:

$$|f_n(z)| = |\varphi(z)|^n \leqslant \rho^n \qquad \forall z \in B, n \in \mathbb{N}$$

Y sabemos que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \rho^n$ converge por ser $\rho < 1$. Por el Test de Weierstrass, tenemos que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en B.

$\Longrightarrow$) Supuesto que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en un conjunto $B \subseteq \Omega$, por reducción al absurdo, supongamos que $\rho \geqslant 1$, en cuyo caso (por la definición de supremo), tendremos la existencia de una sucesión $\{|\varphi(z_n)|\}$ con $z_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$\{|\varphi(z_n)|\} \to \rho \geqslant 1$$

En cuyo caso, para dicha sucesión tendremos que:

$$|f_n(z_n)| = |\varphi(z_n)|^n$$

Y esta sucesión no podrá converger a 0, por ser $\rho \geqslant 1$, lo que contradice que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converja uniformemente en B, por no converger uniformemente su término general a 0 en B.

Ejercicio 2 (3.5 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{C}\setminus\{-i, i\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \log(1 + z^2)$$

y obtener un desarrollo en serie de potencias de f centrado en el origen.

Sabemos que el logaritmo principal es holomorfo en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, y supongamos $1 + z^2 \in \mathbb{R}_0^-$.

$$1 + z^2 = 1 + \operatorname{Re}^2(z) - \operatorname{Im}^2(z) + 2i \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z) \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}^2(z) - \operatorname{Im}^2(z) \leqslant -1 \\ 2 \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z) = 0 \end{cases}$$

- Si $\operatorname{Re}(z) = 0$, entonces $\operatorname{Im}^2(z) \geqslant 1 \implies |\operatorname{Im}(z)| \geqslant 1$.
- Si $\operatorname{Im}(z) = 0$, entonces $\operatorname{Re}^2(z) \leqslant -1$, lo que es una contradicción puesto que $\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$.

Por tanto, definimos el siguiente conjunto:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 + z^2 \in \mathbb{R}_0^-\} = \{ai \mid a \in \mathbb{R}, |a| \geqslant 1\}$$

Tenemos por tanto que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus A)$. Por el Teorema de Taylor, f admite un desarrollo en serie de potencias en $D(0, 1)$.

$$f'(z) = \frac{2z}{1 + z^2} = 2z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n z^{2n+1} \qquad \forall z \in D(0, 1)$$

Integrando término a término, se obtiene:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{2n + 2} z^{2n+2} + C \qquad \forall z \in D(0, 1)$$

Para determinar la constante de integración C, basta con evaluar en $z = 0$:

$$f(0) = \log(1 + 0^2) = 0 \implies C = 0$$

Por tanto, el desarrollo en serie de potencias de f centrado en el origen es:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1} z^{2n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^{2n} \qquad \forall z \in D(0, 1)$$

Ejercicio 3.

1. **(1.5 puntos)** Calcular $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z(z - 2)^2}\, dz$.

   Definimos la función f como:

   $$\begin{array}{rccc} f: & D(0,2) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{e^z}{(z-3)^3} \end{array}$$

   Como f es racional, $f \in \mathcal{H}(D(0, 2))$. Por tanto, por la fórmula de Cauchy para la circunferencia, tenemos que:

   $$\int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z}\, dz = 2\pi i \cdot f(0) = \frac{2\pi}{4} \cdot i = \frac{\pi}{2} i$$

2. **[1.5 puntos]** Sean f y g dos funciones enteras verificando $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \mathbb{T}$. Demostrar que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.

   Como son funciones enteras, para cada $z \in D(0,1)$ se tiene por la fórmula de Cauchy para la circunferencia que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{g(w)}{w-z}\,dw = g(z)$$

   Además, para cada $z \in \mathbb{T}$ también se tiene por hipótesis que $f(z) = g(z)$. Por tanto, $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.

3. **[1.5 puntos Extra]** Probar que, de hecho, $f = g$.

   Si consideramos las restricciones a $\Omega = \overline{D}(0,1)$, se tiene que:

$$f_{\big|\Omega} = g_{\big|\Omega}$$

   Por el carácter local de la derivabilidad, se tiene que:

$$f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Por otro lado, como f, g son funciones enteras, por el Teorema de Cauchy son analíticas en $\mathbb{C}$. De hecho, considerando el desarrollo de taylor centrado en el origen, se tiene que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n = g(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$