

Análisis Funcional

Examen XIII



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Análisis Funcional

Examen XIII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Daniel Morán Sánchez

Granada, 2026

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor David Arcoya Álvarez.

Descripción Examen Ordinario de Incidencias.

Ejercicio 1 (3 puntos). Sean:

$$F = \{f \in C([-1, 1], \mathbb{R}) : f(1) = 0\}, \quad G = \{f \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}) : f(1) = 0\},$$

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0, 1]\}, \quad \forall f \in X$$

- a) ¿Es $(F, \|\cdot\|_\infty)$ un espacio de Banach? Justifica tu respuesta.
- b) ¿Es $(G, \|\cdot\|_\infty)$ un espacio de Banach? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2 (3 puntos). Supongamos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas completas en el espacio vectorial E . Prueba que si se verifica la propiedad

$$\text{“toda sucesión } \{x_n\} \subset E \text{ verificando } \begin{cases} \{x_n\} \xrightarrow{(E, \|\cdot\|_1)} x \\ \{x_n\} \xrightarrow{(E, \|\cdot\|_2)} y \end{cases} \text{ cumple } x = y”}$$

entonces $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

Ejercicio 3. Sea E un espacio de Banach.

- a) **[1.5 puntos]** Si C es un subconjunto convexo de E , prueba que

C es cerrado en la topología de la norma $\iff C$ es cerrado en la topología débil $\sigma(E, E^*)$.

- b) **[0.75 puntos]** Sea una sucesión $\{f_n\} \subset E^*$ verificando

$\{\langle f_n, x \rangle\}$ es convergente para todo $x \in E$.

Prueba que existe $f \in E^*$ tal que

$$\{f_n\} \xrightarrow{*} f \text{ en } \sigma(E^*, E)$$

- c) **[0.75 puntos]** Supongamos que E es reflexivo y sea $\{x_n\}$ una sucesión en E tal que

$\{\langle f, x_n \rangle\}$ es convergente para cada $f \in E^*$.

Prueba que existe $x \in E$ tal que

$$\{x_n\} \rightharpoonup x \text{ en } \sigma(E, E^*)$$

- d) **[1 punto]** Da un ejemplo de una sucesión $\{x_n\} \subset E = c_0$ tal que $\{\langle f, x_n \rangle\}$ es convergente para cada $f \in E^*$, pero no sea convergente débilmente en $\sigma(E, E^*)$.

Ejercicio 1 (3 puntos). Sean:

$$F = \{f \in C([-1, 1], \mathbb{R}) : f(1) = 0\}, \quad G = \{f \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}) : f(1) = 0\},$$

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0, 1]\}, \quad \forall f \in X$$

Este es el enunciado oficial pero supongamos que $X = C([-1, 1])$ y que la norma está mal escrita y en realidad se refiere a $t \in [-1, 1]$

a) ¿Es $(F, \|\cdot\|_\infty)$ un espacio de Banach? Justifica tu respuesta.

Sabemos que $(C([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach. Por tanto, para probar que $(F, \|\cdot\|_\infty)$ es de Banach basta ver que F es un subespacio cerrado de $C([-1, 1], \mathbb{R})$.

Paso 1: F es un subespacio vectorial.

Sea $f, g \in F$. Entonces $f, g \in C([-1, 1], \mathbb{R})$ y $f(1) = g(1) = 0$. Se tiene:

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0,$$

luego $f + g \in F$.

Además, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in F$, entonces

$$(\alpha f)(1) = \alpha f(1) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

por lo que $\alpha f \in F$. Así, F es un subespacio vectorial de $C([-1, 1], \mathbb{R})$.

Paso 2: F es cerrado en $C([-1, 1], \mathbb{R})$.

Sea $\{f_n\} \subset F$ una sucesión tal que

$$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{con } f \in C([-1, 1], \mathbb{R}).$$

La convergencia uniforme implica convergencia puntual, en particular,

$$f_n(1) \longrightarrow f(1).$$

Pero como $f_n \in F$, se cumple $f_n(1) = 0$ para todo n , luego

$$f(1) = 0,$$

y por tanto $f \in F$. Esto prueba que F es cerrado.

Como F es un subespacio cerrado de un espacio de Banach, concluimos que $(F, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

b) ¿Es $(G, \|\cdot\|_\infty)$ un espacio de Banach? Justifica tu respuesta.

No. Aunque $G \subset C^1([-1, 1], \mathbb{R}) \subset C([-1, 1], \mathbb{R})$, con la norma $\|\cdot\|_\infty$ el espacio G no es completo porque no es cerrado en $(C([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Para verlo, consideramos la sucesión

Opción 1.

$$f_n(t) := |t|^{\frac{n+1}{n}} - 1, \quad t \in [-1, 1].$$

Entonces $f_n \in G$ para todo n porque $|t|^\alpha$ es derivable en $[-1, 1]$ cuando $\alpha > 1$, y además $f_n(1) = 1 - 1 = 0$.

Veamos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente, donde

$$f(t) := |t| - 1.$$

En efecto,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t \in [-1, 1]} \left| |t|^{\frac{n+1}{n}} - |t| \right| \stackrel{|\cdot| \text{ es par}}{=} \max_{0 \leq t \leq 1} \left| t^{\frac{n+1}{n}} - t \right|,$$

pues la expresión depende sólo de $|t|$.

Definimos

$$\varphi(t) := t^{\frac{n+1}{n}} - t, \quad t \in [0, 1].$$

Se tiene $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ y

$$\varphi'(t) = \frac{n+1}{n} t^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Luego $\varphi'(t) = 0$ si y sólo si

$$t^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \iff t_0 = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Por tanto, el máximo de $|\varphi|$ en $[0, 1]$ se alcanza en t_0 , y como $\varphi(t) \leq 0$ en $[0, 1]$, se obtiene

$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |\varphi(t)| = |\varphi(t_0)| = t_0 - t_0^{\frac{n+1}{n}}.$$

Pero

$$t_0^{\frac{n+1}{n}} = \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right)^{\frac{n+1}{n}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1},$$

y así

$$\begin{aligned} |\varphi(t_0)| &= \left(\frac{n}{n+1} \right)^n - \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) \\ &= \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Concluimos que $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$, es decir, $f_n \rightarrow f$ uniformemente.

Sin embargo, $f(t) = |t| - 1$ no pertenece a G porque no es derivable en $t = 0$. Luego G no es cerrado en $(C([-1, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ y, por tanto, $(G, \|\cdot\|_\infty)$ no es completo (no es de Banach).

Opción 2. Usaremos la aproximación usual del valor absoluto $\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}$ y le restamos su valor en $1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ para que pertenezca a G

$$f_n(t) := \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}.$$

Entonces $f_n \in C^1([-1, 1])$ y además

$$f_n(1) = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 0,$$

luego $f_n \in G$ para todo n .

Sea ahora

$$f(t) := |t| - 1, \quad t \in [-1, 1].$$

Probamos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente. En efecto, para todo $t \in [-1, 1]$,

$$\left| \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} - |t| \right| = \frac{\left(\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} \right)^2 + |t|^2}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} + |t|} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} + |t|} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

y análogamente

$$\left| \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Por tanto,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t \in [-1, 1]} \left| \left(\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} - |t| \right) - \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Luego $\{f_n\}$ converge uniformemente a f , en particular es de Cauchy en $\|\cdot\|_\infty$.

Sin embargo, $f(t) = |t| - 1$ no pertenece a G porque no es derivable en $t = 0$ (luego no es C^1). Concluimos que $(G, \|\cdot\|_\infty)$ no es completo y, por tanto, no es un espacio de Banach.

Ejercicio 2 (3 puntos). Supongamos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas completas en el espacio vectorial E . Prueba que si se verifica la propiedad

“toda sucesión $\{x_n\} \subset E$ verificando $\begin{cases} \{x_n\} \xrightarrow{(E,\|\cdot\|_1)} x \\ \{x_n\} \xrightarrow{(E,\|\cdot\|_2)} y \end{cases}$ cumple $x = y$ ”

entonces $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

Consideremos la aplicación identidad

$$T : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2), \quad T(x) = x.$$

Es claro que T es lineal.

Como $(E, \|\cdot\|_1)$ y $(E, \|\cdot\|_2)$ son espacios de Banach, para probar que T es continua basta, por el teorema de la gráfica cerrada, ver que su gráfica es cerrada.

Sea $\{x_n\} \subset E$ tal que

$$x_n \xrightarrow{(E,\|\cdot\|_1)} x \quad y \quad Tx_n = x_n \xrightarrow{(E,\|\cdot\|_2)} y.$$

Por la hipótesis del enunciado, se deduce necesariamente que $x = y$. Por tanto,

$$(x_n, Tx_n) \longrightarrow (x, x) \in \text{Graf}(T),$$

lo que prueba que la gráfica de T es cerrada.

Aplicando el teorema de la gráfica cerrada, concluimos que T es continua, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|x\|_2 \leq C \|x\|_1 \quad \forall x \in E.$$

Para ver la misma desigualdad en el otro sentido:

Opción 1. Intercambiando el papel de las normas y considerando ahora:

$$S : (E, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_1), \quad S(x) = x,$$

razonando de forma análoga .

Opción 2. Por el 2do corolario del teorema de la aplicación abierta.

Se obtiene la existencia de $C' > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \leq C' \|x\|_2 \quad \forall x \in E.$$

Por tanto, existen constantes $C, C' > 0$ tales que

$$C'^{-1} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1 \quad \forall x \in E,$$

y se concluye que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes.

Ejercicio 3. Sea E un espacio de Banach.

a) [1.5 puntos] Si C es un subconjunto convexo de E , prueba que

C es cerrado en la topología de la norma $\iff C$ es cerrado en la topología débil $\sigma(E, E^*)$.

Es el Teorema 3.7. del temario, en la parte de Relación entre débilmente cerrados y cerrados”

Teorema 0.1. *Sea E un espacio de Banach y $A \subset E$ un conjunto convexo, entonces:*

$$A \text{ es } \sigma(E, E^*)\text{-cerrado} \iff A \text{ es cerrado}$$

Demostración. Por doble implicación:

\implies) La hemos discutido anteriormente, pues se tiene que:

$$\sigma(E, E^*) \subset \tau_{\|\cdot\|}$$

\iff) Si A es un subconjunto de E que es cerrado y convexo, queremos ver que es $\sigma(E, E^*)$ -cerrado. Para ello, veamos que $E \setminus A$ es débilmente abierto. Para esto último, si tomamos $x_0 \in E \setminus A$ tenemos por la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach ($\{x_0\}$ es compacto y A cerrado con $x_0 \notin A$) que existen $f \in E^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\langle f, x_0 \rangle < \alpha < \langle f, x \rangle \quad \forall x \in A$$

Tenemos por tanto que:

$$x_0 \in \{y \in E : \langle f, y \rangle < \alpha\} = f^{-1}(-\infty, \alpha]$$

con $f^{-1}(-\infty, \alpha]$ un conjunto $\sigma(E, E^*)$ -abierto¹, por la definición de $\sigma(E, E^*)$. Como $f^{-1}(-\infty, \alpha] \cap A = \emptyset$, tenemos que:

$$x_0 \in f^{-1}(-\infty, \alpha] \subset E \setminus A$$

Como x_0 era un punto de $E \setminus A$ arbitrario, tenemos que $E \setminus A$ es $\sigma(E, E^*)$ -abierto, lo que concluye la demostración. \square

¹También podríamos haber dicho que $f^{-1}(-\infty, \alpha] = V(f; \alpha)$.

b) [0.75 puntos] Sea una sucesión $\{f_n\} \subset E^*$ verificando

$$\{\langle f_n, x \rangle\} \text{ es convergente para todo } x \in E.$$

Prueba que existe $f \in E^*$ tal que

$$\{f_n\} \xrightarrow{*} f \text{ en } \sigma(E^*, E)$$

Definimos la aplicación

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle f, x \rangle := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, x \rangle.$$

a) f es lineal.

Como cada f_n es lineal, el paso al límite preserva la linealidad, luego f es lineal.

b) f es continuo.

Por (*), para todo $x \in E$ la sucesión $\{\langle f_n, x \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente y, en particular, acotada:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle f_n, x \rangle| < \infty \quad \forall x \in E.$$

Esto significa que la familia $\{f_n\} \subset E^*$ es puntualmente acotada. Por el teorema de Banach–Steinhaus(Acot. Unif.), existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{E^*} \leq M.$$

Entonces, para todo $x \in E$,

$$|\langle f_n, x \rangle| \leq \|f_n\|_{E^*} \|x\| \leq M \|x\|,$$

considerando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ obtenemos

$$|\langle f, x \rangle| \leq M \|x\| \quad \forall x \in E.$$

Por tanto, f es un funcional lineal continuo, es decir, $f \in E^*$.

Además, por definición de f ,

$$\langle f_n, x \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall x \in E,$$

lo que, por la caracterización de la convergencia débil-*, implica que

$$\{f_n\} \xrightarrow{*} f \text{ en } \sigma(E^*, E)$$

- c) [0.75 puntos] Supongamos que E es reflexivo y sea $\{x_n\}$ una sucesión en E tal que

$\{\langle f, x_n \rangle\}$ es convergente para cada $f \in E^*$.

Prueba que existe $x \in E$ tal que

$$\{x_n\} \rightharpoonup x \text{ en } \sigma(E, E^*)$$

Definimos la aplicación

$$\chi : E^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \chi, f \rangle := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, x_n \rangle.$$

- a) χ es lineal.

Como para cada n la aplicación $f \mapsto \langle f, x_n \rangle$ es lineal en E^* , el paso al límite preserva la linealidad, luego χ es lineal.

- b) χ es continua.

Para cada $f \in E^*$, la sucesión $\{\langle f, x_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente y, en particular, acotada:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, x_n \rangle| < \infty \quad \forall f \in E^*.$$

Esto significa que la familia de funcionales

$$\chi_n : E^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_n(f) := \langle f, x_n \rangle$$

es puntualmente acotada en $(E^*)^* = E^{**}$.

Por el teorema de Banach–Steinhaus, existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\chi_n\|_{E^{**}} \leq M.$$

Además $\langle \chi_n, f \rangle = \langle f, x_n \rangle$, por lo que

$$\|\chi_n\|_{E^{**}} = \sup_{\|f\|_{E^*} \leq 1} |\langle \chi_n, f \rangle| = \sup_{\|f\|_{E^*} \leq 1} |\langle f, x_n \rangle| = \|x_n\|,$$

luego $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$.

Entonces, para todo $f \in E^*$ y todo n ,

$$|\langle f, x_n \rangle| \leq \|f\|_{E^*} \|x_n\| \leq M \|f\|_{E^*},$$

y pasando a límite en $n \rightarrow \infty$ obtenemos

$$|\langle \chi, f \rangle| \leq M \|f\|_{E^*} \quad \forall f \in E^*.$$

Por tanto χ es un funcional lineal continuo, es decir, $\chi \in E^{**}$.

Como E es reflexivo, $J : E \rightarrow E^{**}$ es sobreyectiva, luego existe $x \in E$ tal que

$$\chi = J(x), \quad \text{es decir,} \quad \langle \chi, f \rangle = \langle J(x), f \rangle = \langle f, x \rangle \quad \forall f \in E^*.$$

Pero por definición de χ ,

$$\langle \chi, f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, x_n \rangle.$$

Concluimos que

$$\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall f \in E^*,$$

lo cual equivale a

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{en } \sigma(E, E^*).$$

- d) **[1 punto]** Da un ejemplo de una sucesión $\{x_n\} \subset E = c_0$ tal que $\{\langle f, x_n \rangle\}$ es convergente para cada $f \in E^*$, pero no sea convergente débilmente en $\sigma(E, E^*)$.

Consideremos $E = c_0$, el espacio de las sucesiones reales que convergen a 0 con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Definimos la sucesión $\{x_n\} \subset c_0$ dada por

$$x_n := (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ veces}}, 0, 0, \dots) \in c_0.$$

Recordemos que $(c_0)^* \simeq \ell^1$. Más precisamente, a cada $y = (y_k) \in \ell^1$ le corresponde el funcional

$$\varphi_y \in (c_0)^*, \quad \varphi_y(x) := \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k, \quad \forall x = (x_k) \in c_0,$$

y toda forma lineal continua sobre c_0 es de este tipo.

Para $y \in \ell^1$ arbitrario, se tiene

$$\varphi_y(x_n) = \sum_{k=1}^n y_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

ya que las sumas parciales de una serie absolutamente convergente convergen. Por tanto,

$$\{\langle f, x_n \rangle\} \text{ es convergente para todo } f \in (c_0)^*.$$

Supongamos ahora, por contradicción, que existe $x \in c_0$ tal que

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{en } \sigma(E, E^*) = \sigma(c_0, (c_0)^*).$$

Entonces

$$\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall f \in (c_0)^*.$$

En particular, para todo $y \in \ell^1$,

$$\sum_{k=1}^n y_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k.$$

Eligiendo $y = e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots) \in \ell^1$, obtenemos

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e_i(k) = x_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Por tanto,

$$x = (1, 1, 1, \dots),$$

lo cual contradice que $x \in c_0$, ya que esta sucesión no converge a 0.

Concluimos que no existe $x \in c_0$ tal que $x_n \rightharpoonup x$. Es decir,

$\{\langle f, x_n \rangle\}$ es convergente para todo $f \in (c_0)^*$ pero $\{x_n\}$ no converge débilmente en c_0 .