Ecuaciones Diferenciales I Examen XXI

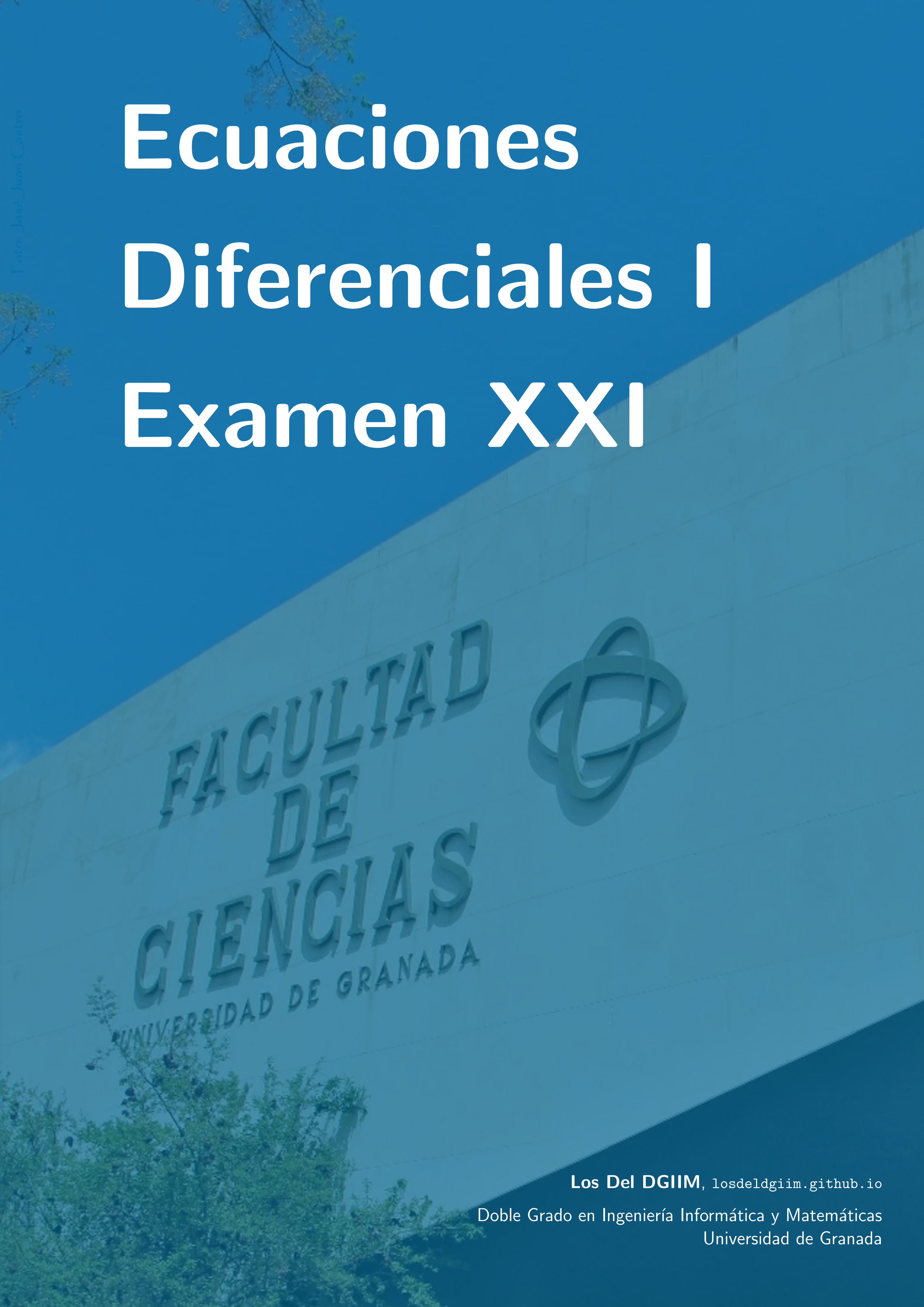

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen XXI

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2019-20.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial 2.

Fecha 14 de Diciembre de 2019.

Ejercicio 1. Se considera la ecuación diferencial

$$x'' + a(t)x = 0,$$

con $a(t)$ es una función continua.

1. Demuestra que si $x_1(t)$ es una solución positiva definida en I, entonces

$$x_2(t) = x_1(t) \int_{t_0}^{t} x_1(s)^2 \, ds,$$

donde $t_0 \in I$, también es solución.

2. Demuestra que forman un sistema fundamental.

Ejercicio 2. Consideramos el problema de valores iniciales

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0,$$

con f continua y globalmente Lipschitziana, i.e., existe $L \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$$

para todo x, y. Demuestra que la sucesión de iterantes

$$x_0(t) \equiv x_0, \quad x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_n(s)) \, ds$$

converge uniformemente en intervalos compactos a una solución del problema.

Ejercicio 3. Resuelve el sistema $y' = Ay$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. Sea A una matriz cuadrada de orden 3 con valor propio real triple.

1. Clasifica las posibles matrices de Jordan asociadas.
2. Demuestra que si λ es negativo, todas las soluciones de $x' = Ax$ tienden a cero cuando $t \to +\infty$.