Cálculo I

Examen VII

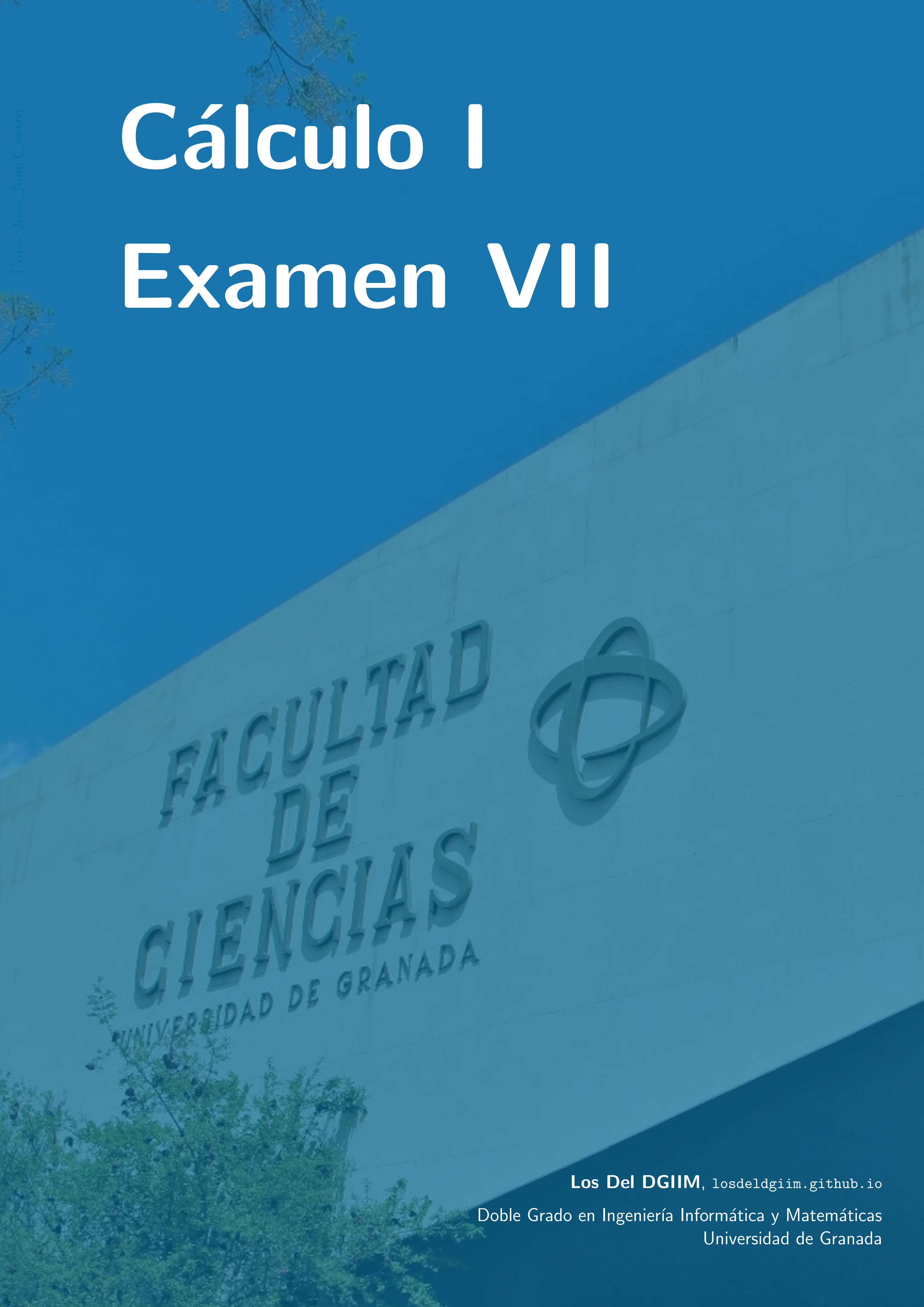

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo I
Examen VII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Jesús Muñoz Velasco
Arturo Olivares Martos

Granada, 2021-2022

Asignatura Cálculo I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Jose Luis Gámez Ruiz.

Descripción Examen de evaluación continua.

Fecha 23 de noviembre de 2021

Ejercicio 1 (2 puntos)**. Enuncia** el Teorema de Bolzano-Weierstrass y el Teorema de Complitud de $\mathbb{R}$.

- Teorema de Bolzano-Weierstrass:

  Toda sucesión (de números reales) acotada admite una parcial convergente

$$\left(\{x_n\} \text{ acotada} \Longrightarrow \begin{array}{c} \exists\ \sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ estrictamente creciente} \\ \text{tal que } \{x_{\sigma(n)}\} \text{ converge} \end{array} \right)$$

- Teorema de Complitud de $\mathbb{R}$:

  Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales, entonces:

$$\{x_n\} \text{ convergente} \Longleftrightarrow \{x_n\} \text{ de Cauchy}$$

Ejercicio 2 (2 puntos)**. Justifica** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Toda sucesión monótona y mayorada es convergente.
   Falso. Contraejemplo:
   La sucesión $\{-n\}$ es monótona (decreciente), mayorada (por 0) y no converge.

2. Si un $A \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y mayorado, existe al menos un mayorante positivo.
   Sea $M(A)$ el conjunto de los mayorantes de A y sea $k \in M(A)$. Entonces

$$\left.\begin{array}{l} k' = \text{máx}\{k, 5\} \in M(A) \\ \\ k' \geqslant 5 \Rightarrow k' \text{ positivo} \end{array}\right\} \Longrightarrow \textbf{Verdadero}$$

3. Si un $A \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y minorado, existe al menos un minorante positivo.
   Falso. Contraejemplo:

$$A = \{-2, 8\}, \quad m(A) =]-\infty, -2] \Longrightarrow m(A) \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$$
$$\text{(ningún minorante es positivo)}$$

4. Toda sucesión que admita una parcial de Cauchy, es acotada.
   Falso. Contraejemplo:

$$\{x_n\} \quad \text{tal que} \quad \begin{array}{c} x_{2n} = 0 \\ x_{2n-1} = n \end{array} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Admite una parcial de Cauchy, $\{x_{2n}\}$. Sin embargo, es no acotada.

5. Si $\{x_n\}$ es una sucesión no acotada, admite una parcial divergente.
   Verdadero. Demostración:
   (Dado $k \in \mathbb{R}^+$, $\{p \in \mathbb{N} : |x_p| > k\}$ es infinito)

Sea $\sigma(1) = \text{mín}\{p \in \mathbb{N} : |x_p| > 1\}$. Supuesto conocido $\sigma(n)$, ¿$\sigma(n+1)$?

$$\sigma(n+1) = \text{mín}\left\{p \in \mathbb{N} : \begin{array}{c} p > \sigma(n) \\ |x_p| > n+1 \end{array}\right\}$$

Se tiene:

$$\begin{array}{c} \sigma(n+1) > \sigma(n) \quad (\sigma \text{ es estrictamente creciente}) \\ |x_{\sigma(n)}| > n \Longrightarrow \{|x_{\sigma(n)}|\} \longrightarrow +\infty \end{array}$$

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Sean a y b dos números reales distintos. Demuestra que:

$$\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por inducción:

Sea $A = \left\{n \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}\right\} \subseteq \mathbb{N}$

¿Es A inductivo? ($1 \in A$ y Si $n \in A \Longrightarrow n+1 \in A$)

$*$ ¿$1 \in A$? $1 \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{1} a^{1-k}b^k = a + b = \dfrac{a^2 - b^2}{a-b}$ Sí.

$*$ Si $n \in A$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$ (hipótesis de inducción)

$$¿n+1 \in A? \Longleftrightarrow ¿\sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k}b^k = \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a-b}?$$

Veamos:

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k}b^k = \sum_{k=0}^{n} a^{n+1-k}b^k + b^{n+1} = a\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k + b^{n+1} \overset{(*)}{=} a\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} + b^{n+1} =$$

$$= \frac{a^{n+2} - \cancel{ab^{n+1}} + \cancel{ab^{n+1}} - b^{n+2}}{a-b} = \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a-b} \qquad \text{Sí}$$

Donde en $(*)$ he aplicado la hipótesis de inducción.

Luego A es inductivo (por el principio de inducción). Por tanto $A = \mathbb{N}$, es decir,

$$\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 4 (4 puntos)**.** Estudia la convergencia de las sucesiones:

1. $\left\{\dfrac{n3^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{3^n\sqrt{n+1}+2^n}\right\}$

$$\left\{\frac{n3^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{3^n\sqrt{n+1}+2^n}\right\}=\left\{\frac{n\cancel{3^n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\cancel{3^n}\sqrt{n+1}+\cancel{3^n}\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right\}=\left\{\frac{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right\}=$$
$$\left\{\frac{\cancel{\sqrt{n+1}}\left(\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\cancel{\sqrt{n+1}}+\cancel{\sqrt{n+1}}\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}}\right)}\right\}=\left\{\frac{\left(\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{1+\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}}\right)}\right\}$$

Estudiemos ahora por comodidad numerador y denominador por separado:

- Numerador:

$$\frac{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}}=\frac{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{n(\cancel{n}+1-\cancel{n})}{n+1+\sqrt{n(n+1)}}=$$
$$=\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}+\cancel{n}\left(\frac{1}{n}\right)+\cancel{n}\sqrt{\frac{\cancel{n}(n+1)}{n^{\cancel{2}}}}}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)+\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\longrightarrow\frac{1}{1+0+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$

- Denominador:

$$1+\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}}\right)\longrightarrow 1+0=1$$

Por tanto,

$$\left\{\frac{n3^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{3^n\sqrt{n+1}+2^n}\right\}\longrightarrow\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1}=\frac{1}{2}$$

2. $\{x_n\}$ Definida por recurrencia: $x_1=5,\quad x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+9}{2x_n}\quad\forall n\in\mathbb{N}.$

Voy a demostrar que $\{x_n\}$ es decreciente y minorada por 3.

¿$3<x_{n+1}<x_n\quad\forall n\in\mathbb{N}$? (por inducción)

- n=1 $\;x_2=\frac{34}{10}=3,4\Longrightarrow\;3<3,4<5$ Sí.
- Supuesto $3<x_{n+1}<x_n$ (hipótesis de inducción), ¿$\Rightarrow 3\underset{(1)}{<}x_{n+2}\underset{(2)}{<}x_{n+1}$?

(1)

$$x_{n+2}=\frac{x_{n+1}^2+9}{2x_{n+1}}>3\Longleftrightarrow x_{n+1}^2+9>6x_{n+1}\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x_{n+1}^2-6x_{n+1}+9>0\Longleftrightarrow(x_{n+1}-3)^2>0\quad\text{Sí}$$

(2)

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2 + 9}{2x_{n+1}} < x_{n+1} \iff x_{n+1}^2 + 9 < 2x_{n+1}^2 \iff$$
$$\iff 9 < x_{n+1}^2 \Longleftarrow 3 < x_{n+1} \quad \text{Sí (por hipótesis de inducción)}$$

Luego $\{x_n\}$ decreciente y minorada (por 3), luego es convergente. Por la unicidad del límite y sabiendo que $x_{n+1} = \frac{x_n^2+9}{2x_n}$,

$$L = \frac{L^2 + 9}{2L} \Longrightarrow L^2 = 9 \Longrightarrow \begin{array}{c} L = 3 \\ \cancel{L = -3} \end{array}$$

Descartamos el -3 ya que $x_n > 3 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Finalmente tenemos que la sucesión dada converge a 3.