Ecuaciones Diferenciales II

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

Índice general

1. Movimiento de partículas en un fluido

Fijado un espacio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, supondremos siempre que será abierto[1] y conexo[2].

Notación. A cada punto de Ω lo notaremos normalmente por $p \in \Omega$, que tendrá coordenadas:

$$p = (x, y, z)$$

El fluido suele llevar en cada punto una dirección y una velocidad, por lo que en cada punto $p \in \Omega$ tendremos un vector v que determina la velocidad del fluido, la cual supondremos conocida siempre. Este vector no tiene por qué ser constante sino que puede depender del tiempo, por lo que generalmente v será una función $v = v(t, p)$, es decir, $v : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación que a cada momento t y posición p le asigna un vector $v(t, p)$.

Si tenemos una partícula en el fluido que se mueve esta determinará una trayectoria, que podemos modelar como una curva parametrizada $p(t)$.

Podremos medir la velocidad de la partícula de dos formas: observando la velocidad de la partícula de forma interna (como el cuentakilómetros de un coche) o suponiendo que es una partícula que se deja llevar por la corriente y que su velocidad es la del fluido. La velocidad es la derivada de p.

En el segundo caso:

$$\dot{p}(t) = V(t, p(t))$$

Estamos ante una ecuación diferencial. Observemos que es un sistema de primer orden en forma normal, puesto que las coordenadas de p son funciones del tiempo. Si escribimos $V = (u, v, w)$ tenemos:

$$\begin{cases} \dot{x} = u(t, x, y, z) \\ \dot{y} = v(t, x, y, z) \\ \dot{z} = w(t, x, y, z) \end{cases}$$

Un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas, que conocidas las velocidades del fluido determina la trayectoria de la partícula.

[1]Queremos estudiar movimientos de partículas en un fluido y pasan cosas no deseadas en la frontera.

[2]Por comodidad.

Observación. Observemos que en la notación primera hemos escrito explícitamente que $\dot{p}$ está en función de t. En la segunda notación estamos usando la notación habitual en las ecuaciones diferenciales, omitiendo la dependencia de t y pensándola de forma implícita. Podemos así reescribir la primera ecuación como:

$$\dot{p} = V(t, p)$$

Una vez denotamos $\dot{p}(t)$ estamos diciendo que es una solución concreta, por lo que será una variable dependiente de t. Sin embargo, cuando hablamos de $V(t, p)$ vemos p como una variable independiente.

Aparecerán sistemas autónomos, que representan fluidos estacionarios, donde la velocidad $V(t, p)$ no depende del tiempo.

Ejemplo. Comenzamos primero con dos ejemplos de fluidos estacionarios (el vector en cada posición no depende del tiempo):

- Consideramos $\Omega = \mathbb{R}^3$ y tomamos:

  $$V(t, x, y, z) = (0, 1, 0)$$

  Observamos que es un sistema autónomo (no depende del tiempo) y en el que la velocidad tampoco depende de la posición:

  $$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 1 \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

  Con lo que las soluciones son de la forma:

  $$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \\ y(t) &= t + c_2 \\ z(t) &= c_3 \end{aligned}$$

  Es una familia que depende de 3 parámetros.

- Tomamos la ecuación de un vórtice lineal, $\Omega = \mathbb{R}^3$ y:

  $$V(t, x, y, z) = (y, -x, 0)$$

  Tenemos el sistema:

  $$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

  Es un sistema lineal homogéneo, que nos da las soluciones:

  $$z(t) = c_3$$

  Reducimos a una ecuación de segundo orden, derivando en la primera:

  $$\ddot{x} + \dot{x} = 0$$

Por lo que:

$$x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t)$$

Y también tendremos:

$$y(t) = -c_1 \operatorname{sen}(t) + c_2 \cos(t)$$

Para ciertas condiciones iniciales $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Nuestro objetivo ahora es tratar de probar que el sistema:

$$\dot{p} = V(t, p)$$

con la condición inicial $p(t_0) = p_0$ tiene una solución. Luego trataremos de ver que en cada condición inicial tenemos una única solución. Demostraremos el Teorema de existencia y unicidad en cualquier número de dimensiones.

Notación. Notaremos a los puntos por $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ y al campo que define la ecuación diferencial por X, que será función de t y de x, que estará definido en un conjunto $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ y exigiremos que sea abierto y conexo. Así, tendremos

$$\begin{array}{rrcl} X: & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ & (t,x) & \longmapsto & X(t,x) \end{array}$$

donde el campo X tiene d coordenadas:

$$X = (X_1, \ldots, X_d)$$

donde tratamos de resolver la ecuación $\dot{x} = X(t, x)$, que en realidad es un sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x_1} = X_1(t, x_1, \ldots, x_d) \\ \vdots \\ \dot{x_d} = X_d(t, x_1, \ldots, x_d) \end{array} \right.$$

Supondremos siempre que X es una función continua.

Tomaremos $(t_0, x_0) \in D$ y queremos resolver el problema de condiciones iniciales

$$\dot{x} = X(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

que consiste en resolver la ecuación diferencial superior mediante una solución que cumpla la condición enunciada.

1.1. Problema a resolver

Así, queremos resolver el problema:

$$\dot{x} = X(t, x) \tag{1.1}$$

con $X : D \to \mathbb{R}^d$ continuo, donde $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ es un subconjunto abierto y conexo. La condición de que X sea continuo es equivalente a que cada una de sus coordenadas

$$X = (X_1, \ldots, X_d)$$

sea una aplicación continua.

Definición 1.1. Una **solución** del problema (1.1) es una aplicación $x : I \to \mathbb{R}^d$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo[3] de forma que $x(t) \subset D$:

i) $x(t)$ es derivable.

ii) $(t, x(t)) \in D \qquad \forall t \in I.$

iii) $\dot{x}(t) = X(t, x(t)) \qquad \forall t \in I.$

Observación. Observemos que la definición de solución del problema planteado anteriormente es equivalente si sustituimos la condición de que x sea derivable por la condición de que x sea de clase 1, puesto que la condición *iii)* nos da automáticamente la continuidad de la derivada de x.
Así, la condición *i)* se puede sustituir por la condición *i')* $x \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Ejemplo. Veamos un par de ejemplos para fijar las ideas:

1. Consideramos $\dot{x} = x^2$ y la aplicación $x(t) = \dfrac{1}{1-t}$. Vamos a analizar el marco del problema.

   Tenemos en este caso $d = 1$ y $D = \mathbb{R}^2$, puesto que tenemos el campo vectorial $X(t, x) = x^2$, que es continuo en todo $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   Tenemos una primera solución en $I_1 =]-\infty, 1[$, $x_1(t) = \frac{1}{1-t}$.

   Y otra solución en $I_2 =]1, +\infty[$, $x_2(t) = \frac{1}{1-t}$.

   Son <u>dos soluciones distintas</u>, con la misma fórmula.

2. Consideramos ahora $\dot{x} = \frac{x}{t}$ y la aplicación $x(t) = -7t$.

   Tenemos $d = 1$ y el campo es $X(t, x) = \frac{x}{t}$, que tiene dos posibles dominios de definición:

   $$D_1 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}, \qquad D_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

   Tenemos en realidad dos ecuaciones diferenciales.

   Para discutir una de sus soluciones, si consideramos:

   $$I_1 = \mathbb{R}^-, \qquad I_2 = \mathbb{R}^+$$

   tenemos que $x\big|_{I_1}$ es solución de la ecuación diferencial considerando el dominio D_1 y análogamente para $x\big|_{I_2}$ con el dominio D_2.

[3] No necesariamente abierto.

Para una ecuación $\dot{x} = X(t, x)$ definida en un dominio $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ abierto y conexo, acompañaremos usualmente la ecuación de una **condición inicial**, que es fijar un punto $(t_0, x_0) \in D$ y obligaremos a la solución $x(t)$ de la ecuación que verifique la condición:

$$x(t_0) = x_0$$

Ejemplo. En el primer ejemplo anterior tenemos para la condición inicial $x(0) = 1$ que la solución de $\dot{x} = x^2$ es $x :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ dada por:

$$x(t) = \frac{1}{1-t}$$

Teorema 1.1 (Cauchy-Peano, Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales.)**.** *Todo problema de valores iniciales admite una solución definida en algún intervalo*[4] I *con* $t_0 \in I$.

Observación. El ejepmlo anterior nos demuestra que el Teorema de Cauchy-Peano no puede generalizarse a otro que resuelva el problema de forma global, puesto que tenemos una solución para la ecuación que no puede extenderse a todo $\mathbb{R}$; a pesar de ser el dominio de la ecuación todo $\mathbb{R}^2$.

Lo que venga a continuación estará destinado a probar el Teorema anterior.

El primer paso será pasar el problema de valores iniciales a una ecuación integral, puesto que la ecuación diferencial y el problema de condiciones iniciales son muy intuitivos pero difíciles de manipular desde el punto de vista de las demostraciones.

1.2. Ecuación integral de Volterra

La ecuación integral de Volterra es:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(s, x(s))\ ds \tag{1.2}$$

Es la ecuación que obtenemos al integrar $\dot{x} = X(t, x)$. Así, a cada ecuación diferencial podemos asociarle una ecuación de Volterra y a cada ecuación de Volterra podemos asociarle una ecuación diferencial.

Ejemplo. El problema de valores iniciales $\dot{x} = 3x$ con la condición inicial $x(2) = -5$ tiene ecuación integral de Volterra:

$$x(t) = -5 + \int_{2}^{t} 3x(s)\ ds \tag{1.3}$$

Definición 1.2. Una solución de (1.2) es una función $x : I \to \mathbb{R}^d$ con I un intervalo que contiene a t_0 en su interior y:

i) x es continua.

ii) $(t, x(t)) \in D \qquad \forall t \in I$.

[4] Por tanto, el Teorema nos da una solución local.

iii) Se cumple la condición (1.2) para todo $t \in I$.

Ejemplo. Una solución de la ecuación integral de Volterra (1.3) es:

$$x(t) = -5e^{3(t-2)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

La estrategia será enunciar los Teoremas como ecuaciones diferenciales y realizar sus demostraciones con ecuaciones integrales.

Proposición 1.2. *Los problemas* (1.1) *y* (1.2) *son equivalentes*[5].

Demostración. Supondremos que tenemos una solución de una ecuación y tendremos que probar entonces que tenemos una solución de la otra ecuación. Basta aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo en un caso y la Regla de Barrow en el otro.

- Supuesto que $x : I \to \mathbb{R}^d$ es solución de la ecuación (1.1), tenemos entonces que x es una aplicación derivable que verifica[6]:

  $$\dot{x}(t) = X(t, x(t)) \qquad \forall t \in I$$

  Por lo que $\dot{x}$ es una primitiva de la aplicación $t \mapsto X(t, x(t))$ definida en I. La Regla de Barrow nos dice entonces que:

  $$\int_{t_0}^{t} X(s, x(s))\ ds = x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0 \qquad \forall t \in I$$

  Y despejando obtenemos (1.2).

- Supuesto que $x : I \to \mathbb{R}^d$ es solución de la ecuación (1.2), tenemos en este caso que x es una aplicación continua que verifica:

  $$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(s, x(s))\ ds \qquad \forall t \in I$$

  Como x es continua, la aplicación $s \mapsto X(s, x(s))$ y de dominio I será también continua. Bajo estas hipótesis, el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la aplicación

  $$t \longmapsto \int_{t_0}^{t} X(s, x(s))\ ds$$

  de dominio I es derivable, por lo que también lo será la aplicación x, y su derivada es:

  $$\dot{x}(t) = X(t, x(t)) \qquad \forall t \in I$$

  Hemos obtenido que x es solución de (1.1).

□

[5]Es decir, tienen las mismas soluciones.

[6]Observemos que la condición *ii)* en el primer caso es equivalente a la condición *ii)* del segundo caso.