

Inferencia Estadística

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

se crean derivados de estos datos originales y no para fines comerciales.

Inferencia Estadística

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Índice general

1. Ejercicios de clase

Esta sección tiene el propósito de recoger todos los ejercicios propuestos en clase por parte de la profesora y que fueron resueltos por los alumnos en pizarra.

1.1. Estadísticos muestrales

Ejercicio 1.1.1. Obtener la función masa de probabilidad conjunta de una m.a.s. de $X \rightsquigarrow B(k_0, p)$ y la función de densidad de una m.a.s. de $X \rightsquigarrow U(a, b)$.

Recordamos que si $X \rightsquigarrow B(k_0, p)$, entonces:

$$P[X = x] = \binom{k_0}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \forall x \in \{0, \dots, k_0\}$$

Por lo que si tenemos una m.a.s. de n variables independientes e idénticamente distribuidas a X , (X_1, \dots, X_n) , su función de densidad vendrá dada por:

$$\begin{aligned} P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X_i = x_i] \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X = x_i] \\ &= \prod_{i=1}^n \binom{k_0}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{k_0-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{nk_0 - \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \binom{k_0}{x_i} \\ &\quad \forall x_i \in \{0, \dots, k_0\} \end{aligned}$$

Si ahora $X \rightsquigarrow U(a, b)$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad \forall x \in [a, b]$$

de donde:

$$f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{b-a} = \frac{1}{(b-a)^n} \quad \forall x \in [a, b]$$

Ejercicio 1.1.2. Para cada realización muestral, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n$, F_{x_1, \dots, x_n}^* es una función de distribución en \mathbb{R} . En particular es una función a saltos, con saltos de amplitud $1/n$ en los sucesivos valores muestrales ordenados de menor a mayor, supuestos que sean distintos, y de saltos múltiples en el caso de que varios valores muestrales coincidieran.

En las condiciones del enunciado, es decir, suponiendo que x_1, \dots, x_n están ordenados de menor a mayor y son distintos, entonces es fácil ver que:

$$F_{x_1, \dots, x_n}^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ 1/n & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ 1 & \text{si } x > x_n \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo que es claro que F_{x_1, \dots, x_n}^* es no decreciente, continua por la derecha, con límite 0 en $-\infty$ y con límite 1 en $+\infty$.

Ejercicio 1.1.3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{X_1, \dots, X_n}^*(x)$ es una variable aleatoria tal que $nF_{X_1, \dots, X_n}^*(x) \rightsquigarrow B(n, F(x))$ y:

$$E[F_{X_1, \dots, X_n}^*(x)] = F(x), \quad \text{Var}[F_{X_1, \dots, X_n}^*(x)] = \frac{F(x)(1 - F(x))}{n}$$

donde $F(x)$ es la función de distribución de X .

Recordamos que:

$$F_{X_1, \dots, X_n}^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{]-\infty, x]}(X_i) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Fijado $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $I_{]-\infty, x]}(X) \rightsquigarrow B(1, P[X \leq x]) \equiv B(1, F(x))$, por lo que por la propiedad reproductiva de la binomial tenemos que:

$$nF_{X_1, \dots, X_n}^*(x) \rightsquigarrow B(n, F(x))$$

Por lo que:

$$nE[F_{X_1, \dots, X_n}^*(x)] = E[nF_{X_1, \dots, X_n}^*(x)] = nF(x)$$

de donde:

$$E[F_{X_1, \dots, X_n}^*(x)] = F(x)$$

Para la varianza:

$$n^2 \text{Var}[F_{X_1, \dots, X_n}^*(x)] = \text{Var}[nF_{X_1, \dots, X_n}^*(x)] = nF(x)(1 - F(x))$$

de donde:

$$\text{Var}[F_{X_1, \dots, X_n}^*(x)] = \frac{F(x)(1 - F(x))}{n}$$

Ejercicio 1.1.4. Para valores grandes de n , en virtud del Teorema Central del Límite:

$$F_{X_1, \dots, X_n}^*(x) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(F(x), \frac{F(x)(1 - F(x))}{n}\right)$$

Sea (X_1, \dots, X_n) una m.a.s. de n muestras, sea:

$$S_n = \sum_{i=1}^n I_{]-\infty, x]}(X_i) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por el Teorema Central del Límite tenemos que:

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1) \implies S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}\left(F(x), \frac{F(x)(1 - F(x))}{n}\right)$$

Como $S_n \rightsquigarrow B(n, F(x))$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} E[S_n] &= nF(x) \\ Var[S_n] &= nF(x)(1 - F(x)) \end{aligned}$$

Por lo que:

$$F_{X_1, \dots, X_n}^*(x) = \frac{1}{n} S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}\left(F(x), \frac{F(x)(1 - F(x))}{n}\right)$$

Ejercicio 1.1.5. Dada una muestra aleatoria simple formada por las observaciones (3, 8, 5, 4, 5), obtener su función de distribución muestral y realizar la representación gráfica.

Aplicando la definición de la función de distribución muestral obtenemos que:

$$F_{(3,8,5,4,5)}^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 4 & \text{si } 5 \leq x < 8 \\ 5 & \text{si } x \geq 8 \end{cases}$$



Figura 1.1: Representación gráfica de $F_{(3,8,5,4,5)}^*(x)$.

Ejercicio 1.1.6. Sea X una variable aleatoria con distribución $B(1, p)$ con $p \in (0, 1)$. Se toma una muestra de tamaño 5, $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, y se obtiene la siguiente observación (0, 1, 1, 0, 0). Determinar el valor de los estadísticos estudiados en la observación.

Aplicando las fórmulas vistas en clase obtenemos:

- Media: 0,4.
- Varianza: 0,24.

- Cuasivarianza: 0,3.
- $x_{(1)} = 0, x_{(2)} = 0, x_{(3)} = 0, x_{(4)} = 1, x_{(5)} = 1.$

Ejercicio 1.1.7. Sea (X_1, \dots, X_n) una m.a.s. y $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, entonces:

$$M_{\bar{X}}(t) = (M_X(t/n))^n$$

$$M_{\bar{X}}(t) = E[e^{t\bar{X}}] = E\left[e^{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i}\right] = M_{\sum_{i=1}^n X_i}\left(\frac{t}{n}\right) \stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n M_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) \stackrel{\text{id. d.}}{=} \left(M_X\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$

Ejercicio 1.1.8. Obtener la distribución muestral de \bar{X} para (X_1, \dots, X_n) una m.a.s. de $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$M_{\bar{X}}(t) = \left(M_X\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}}\right)^n = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Luego $\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, ya que la función generatriz de momentos caracteriza la distribución.

Proposición 1.1. Si tenemos una m.a.s. (X_1, \dots, X_n) , entonces:

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(x) &= (F_X(x))^n \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ F_{X_{(1)}}(x) &= 1 - (1 - F_X(x))^n \end{aligned}$$

Demostración. Para la distribución del máximo:

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(x) &= P[X_{(n)} \leq x] = P[X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x] \stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X_i \leq x] \\ &\stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X \leq x] = (F_X(x))^n \end{aligned}$$

Para la del mínimo:

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x) &= P[X_{(1)} \leq x] = 1 - P[X_{(1)} > x] = 1 - P[X_1 > x, \dots, X_n > x] \\ &\stackrel{\text{indep.}}{=} 1 - \prod_{i=1}^n P[X_i > x] \stackrel{\text{id. d.}}{=} 1 - (P[X > x])^n = 1 - (1 - F_X(x))^n \end{aligned}$$

□

Ejercicio 1.1.9. Obtener las distribuciones muestrales de $X_{(1)}$ y $X_{(n)}$ para $X \rightsquigarrow U(a, b)$.

Si $X \rightsquigarrow U(a, b)$, entonces:

$$F_X(x) = \frac{x - a}{b - a} \quad \forall x \in [a, b]$$

Por lo que aplicando la Proposición superior:

$$F_{X_{(n)}}(x) = (F_X(x))^n = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n \quad \forall x \in [a, b]$$

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^n$$

$$= 1 - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n \quad \forall x \in [a, b]$$

1.2. Distribuciones en el muestreo de poblaciones normales

Proposición 1.2. Sea $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$, entonces $X^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)$.

Demostración. Sea $Y = X^2 = h(X)$, entonces $X = \pm\sqrt{Y} = h^{-1}(y)$, por lo que:

$$f_Y(y) = f_X(h_1^{-1}(y)) \left| \frac{dh_1^{-1}(y)}{dy} \right| + f_X(h_2^{-1}(y)) \left| \frac{dh_2^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Como $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$, entonces:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De donde:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}} \left| \frac{-1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} \quad \forall y > 0$$

Por lo que $Y \rightsquigarrow \chi^2(1)$. □

Ejercicio 1.2.1. Calcula el valor de k o la probabilidad inducida:

a) $P[\chi^2(10) \geq k] = 0,005.$

$$k = 25,1881.$$

b) $P[\chi^2(45) \leq k] = 0,005.$

$$P[\chi^2(45) \geq k] = 0,995 \implies k = 24,3110$$

c) $P[\chi^2(14) \geq 21,06]$

$$0,1$$

d) $P[\chi^2(20) \leq 12,44]$

$$P[\chi^2(20) \leq 12,44] = 1 - P[\chi^2(20) \geq 12,44] = 1 - 0,9 = 0,1$$

Ejercicio 1.2.2. Calcula el valor de k o la probabilidad inducida:

a) $P[t(26) \geq k] = 0,05$

$$k = 1,7056$$

b) $P[t(20) \leq k] = 0,25$

$$k = -0,6870$$

c) $P[t(26) \geq k] = 0,9$

$$k = -1,3150$$

d) $P[t(21) \geq 1,721]$

$$0,05$$

e) $P[t(11) \leq 0,697]$

$$0,75$$

f) $P[t(8) \leq -2,306]$

$$0,025$$

Ejercicio 1.2.3. Calcula el valor de k o la probabilidad inducida:

a) $P[F(7, 3) \leq k] = 0,95$

$$k = 8,89$$

b) $P[F(8, 4) \geq k] = 0,01$

$$0,01 = 1 - P[F(8, 4) \leq k] \implies P[F(8, 4) \leq k] = 0,99 \implies k = 14,8$$

c) $P[F(2, 2) \leq 19]$

$$0,95$$

d) $P[F(3, 5) \geq 12,1]$

$$P[F(3, 5) \geq 12,1] = 1 - P[F(3, 5) \leq 12,1] = 1 - 0,99 = 0,01$$

e) $P[F(60, 40) \leq k] = 0,05$

$$k = 0,627$$

1.2.1. Varias demostraciones

Tenemos una (X_1, \dots, X_n) m.a.s. con $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si tomamos:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Demostraciones importantes que pueden caer.

Proposición 1.3. En dichas condiciones, veamos que:

$\bar{X}, (X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$ son independientes

Demostración. Para ellos, usaremos la caracterización por la función generatriz de momentos conjunta:

$$M_{\bar{X}, X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X}}(t, t_1, \dots, t_n) \stackrel{?}{=} M_{\bar{X}}(t) M_{X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X}}(t_1, \dots, t_n)$$

$$\begin{aligned} M_{\bar{X}, X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X}}(t, t_1, \dots, t_n) &= E[e^{(t, t_1, \dots, t_n) \cdot (\bar{X}, X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})}] \\ &= E \left[e^{t\bar{X} + \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})t_i} \right] \\ &= E \left[e^{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n X_i t_i - \sum_{i=1}^n \bar{X} t_i} \right] \\ &= E \left[e^{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n X_i t_i - \bar{X} \sum_{i=1}^n t_i} \right] \\ &= E \left[e^{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n X_i t_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n t_i} \right] \\ &= E \left[e^{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n X_i t_i - \sum_{i=1}^n X_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i} \right] \\ &= E \left[e^{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n X_i t_i - \sum_{i=1}^n X_i \bar{t}} \right] \\ &= E \left[e^{\sum_{i=1}^n X_i \left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t} \right)} \right] \\ &= E \left[\prod_{i=1}^n e^{X_i \left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t} \right)} \right] \\ &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n E \left[e^{X_i \left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t} \right)} \right] = \prod_{i=1}^n M_{X_i} \left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t} \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \prod_{i=1}^n e^{\left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t} \right) \mu + \left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t} \right)^2 \frac{\sigma^2}{2}} \\ &= e^{\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t} \right) \mu + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{t^2}{n^2} + (t_i - \bar{t})^2 + 2 \frac{t}{n} (t_i - \bar{t}) \right) \right]} \\ &= e^{\sum_{i=1}^n \frac{\mu t}{n} + \sum_{i=1}^n \mu (t_i - \bar{t}) + \frac{\sigma^2}{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{t^2}{n^2} + \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{t}{n} (t_i - \bar{t}) \right)} \\ &= e^{\cancel{\mu t} + \cancel{\mu \sum_{i=1}^n t_i} + \cancel{\mu \sum_{i=1}^n \bar{t}} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{nt^2}{n^2} + \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 + 2 \frac{t}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t}) \right)} \\ &= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} M_{\bar{X}}(t) &= M_{(\bar{X}, X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})}(t, 0, \dots, 0) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}} \\ M_{(X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})}(t_1, \dots, t_n) &= M_{(\bar{X}, X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})}(0, t_1, \dots, t_n) \\ &= e^{\frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \end{aligned}$$

Por lo que es cierto que el producto de las funciones generatrices de momentos es la generatriz de mmoentos conjunta, luego las variables son independientes. \square

Corolario 1.3.1. Como corolario de la Proposición anterior, tenemos que:

- Se vio ya, y se saca de la demostración de arriba.
- Lema de Fisher: \bar{X} y S^2 son independientes.

Como S^2 es función del vector de la Proposición anterior, tenemos que es independiente con \bar{X} , ya que las funciones de variables independientes son independientes.

- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$

Para demostrarlo:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \rightsquigarrow \chi^2(n)$$

Ahora, queremos ver que:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$$

Para ello:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(\bar{X} - \mu)}{\sigma^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} + n \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Y como:

$$n \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(1)$$

Buscamos ver lo que sigue lo de la derecha ($A = B + C$). Para ello, usaremos la función generatriz de momentos. tenemos que $B = f(S^2)$ y $C = f(\bar{X})$, luego B y C son independientes, por lo que:

$$M_{A=B+C}(t) \stackrel{\text{indep.}}{=} M_B(t)M_C(t) = M_B(t) \frac{1}{(1-2t)^{\frac{1}{2}}} \quad t < \frac{1}{2}$$

Y sabemos que:

$$M_A(t) = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}}$$

De donde:

$$M_B(t) = \frac{M_A(t)}{M_C(t)} = \frac{\frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}}}{\frac{1}{(1-2t)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n-1}{2}}} \quad t < \frac{1}{2}$$

Por lo que $B \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$

$$\blacksquare \quad \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \rightsquigarrow t(n-1)$$

Para ello, al igual que la χ^2 , lo más sencillo es ir a la construcción de t :

$$\left. \begin{array}{l} X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ Y \rightsquigarrow \chi^2(n) \\ \text{indep} \end{array} \right\} \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \rightsquigarrow t(n)$$

Como:

$$\begin{aligned} \bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) &\implies \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} &\rightsquigarrow \chi^2(n-1) \end{aligned}$$

que son independientes por el Lema de Fisher. Si aplicamos la construcción:

$$\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \rightsquigarrow t(n-1)$$

Este último corolario ayuda a inferir parámetros de las distribuciones. Ver punto 2.3.1. Inferencia sobre x significa que queremos averiguar el valor de x . El corolario de ayer nos sirve para usar otros estadísticos en lugar de otros que deberíamos usar, pero con 1 parámetro desconocido en lugar de 2. Aprenderse fórmulas de 2.3.1.

1.2.2. Dos poblaciones normales

Teorema 1.4 (extensión del Lema de Fisher). *Los vectores (\bar{X}, \bar{Y}) , (S_1^2, S_2^2) son independientes.*

Demostración. Usemos la función generatriz de momentos, ya que son independientes si y solo si:

$$M_{(\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2)}(t_1, t_2, s_1, s_2) \stackrel{?}{=} M_{(\bar{X}, \bar{Y})}(t_1, t_2) M_{(S_1^2, S_2^2)}(s_1, s_2)$$

Como las X y las Y son independientes:

$$M_{(\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2)}(t_1, t_2, s_1, s_2) = M_{(\bar{X}, S_1^2)}(t_1, s_1) M_{(\bar{Y}, S_2^2)}(t_2, s_2) \stackrel{\text{Lema Fisher}}{=} M_{\bar{X}}(t_1) M_{S_1^2}(s_1) M_{\bar{Y}}(t_2) M_{S_2^2}(s_2)$$

Ahora, como X e Y son independientes:

$$M_{\bar{X}}(t_1) M_{S_1^2}(s_1) M_{\bar{Y}}(t_2) M_{S_2^2}(s_2) = M_{(\bar{X}, \bar{Y})}(t_1, t_2) M_{(S_1^2, S_2^2)}(s_1, s_2)$$

□

Corolario 1.4.1. *A partir de entonces (aunque el 3o es el único que necesita el Teorema anterior):*

1. *Tenemos (aunque no sea corolario de Fisher):*

$$\frac{n_2 \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{n_1 \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2} \rightsquigarrow F(n_1, n_2)$$

Que es equivalente a que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2 / n_1 \sigma_1^2}{\sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2 / n_2 \sigma_2^2} \rightsquigarrow F(n_1, n_2)$$

Por construcción de $F(n_1, n_2)$:

$$\left. \begin{array}{l} X \rightsquigarrow \chi^2(m) \\ \text{independientes} \\ Y \rightsquigarrow \chi^2(n) \end{array} \right\} \implies \frac{X/m}{Y/n} \rightsquigarrow F(n_1, n_2)$$

Como ayer vimos que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_2)$$

Como X e Y son independientes, tenemos funciones en función de X e Y , luego estas dos variables son independientes. Ahora:

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{n_1 \sigma_1^2}}{\frac{\sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2}{n_2 \sigma_2^2}} \rightsquigarrow F(n_1, n_2) \rightsquigarrow F(n_1, n_2)$$

2. Tenemos:

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \rightsquigarrow F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

Seguimos buscando la construcción de F , por lo que buscamos aplicar lo que sabemos:

$$\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_1 - 1)$$

$$\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_2 - 1)$$

Que son independientes por ser funciones de X e Y , que son independientes. Dividimos:

$$\frac{\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \rightsquigarrow F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

En particular, si $\sigma_1 = \sigma_2$, se tiene:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \rightsquigarrow F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

3. La construcción de la t -Student era:

$$\left. \begin{array}{l} X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ \text{independientes} \\ Y \rightsquigarrow \chi^2(n) \end{array} \right\} \implies \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \rightsquigarrow t(n)$$

Queremos probar:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2}}} \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 2}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow t(n_1 + n_2 - 2)$$

Ahora:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) \\ \bar{Y} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \end{array} \right\} \implies \bar{X} - \bar{Y} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Tipificamos:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Para el denominador ahora, de la S^2 sabemos:

$$\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_1 - 1)$$

$$\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_2 - 1)$$

Como X e Y son independientes, estas dos son independientes, y al sumar dos χ^2 independientes tenemos la propiedad reproductiva:

$$\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{n_1^2} + \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{n_2^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$$

Por la extensión del Lema de Fisher tenemos que las dos variables aleatorias que hemos calculado son independientes. Procedemos ahora a aplicar la construcción de la t :

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow t(n_1 + n_2 - 2)$$
$$\sqrt{\frac{\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2}}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Las del punto 2.4.1. hay que aprenderlas de memoria también

2. Relaciones de Ejercicios

2.1. Estadísticos muestrales

Ejercicio 2.1.1. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X . Dar el espacio muestral y calcular la función masa de probabilidad de (X_1, \dots, X_n) en cada uno de los siguientes casos:

- a) $X \rightsquigarrow \{B(k_0, p) : p \in (0, 1)\}$ Binomial.

El espacio muestral en este caso es \mathcal{X}^n , donde:

$$\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, k_0\}$$

Recordamos que si $X \rightsquigarrow B(k_0, p)$, entonces:

$$P[X = x] = \binom{k_0}{x} p^x (1-p)^{k_0-x} \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

Por tanto, para nuestra m.a.s. tendremos la función masa de probabilidad:

$$\begin{aligned} P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X_i = x_i] \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X = x_i] \\ &= \prod_{i=1}^n \binom{k_0}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{k_0-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{nk_0 - \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \binom{k_0}{x_i} \\ &\quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \end{aligned}$$

- b) $X \rightsquigarrow \{\mathcal{P}(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ Poisson.

El espacio muestral de X es:

$$\mathcal{X} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Recordamos que si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, entonces:

$$P[X = x] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X_i = x_i] \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X = x_i] \\ &= \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \cdot \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \end{aligned}$$

c) $X \rightsquigarrow \{BN(k_0, p) : p \in (0, 1)\}$ Binomial Negativa.

El espacio muestral de X es:

$$\mathcal{X} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Recordamos que si $X \rightsquigarrow BN(k_0, p)$, entonces:

$$P[X = x] = \binom{x + k_0 - 1}{x} (1 - p)^x p^{k_0} \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X_i = x_i] \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X = x_i] \\ &= \prod_{i=1}^n \binom{x_i + k_0 - 1}{x_i} (1 - p)^{x_i} p^{k_0} = p^{nk_0} (1 - p)^{\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \binom{x_i + k_0 - 1}{x_i} \\ &\quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \end{aligned}$$

d) $X \rightsquigarrow \{G(p) : p \in (0, 1)\}$ Geométrica.

El espacio muestral de X es:

$$\mathcal{X} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Recordamos que $G(p) \equiv BN(1, p)$, por lo que si sustituimos en la fórmula obtenida en la Binomial Negativa $k_0 = 1$:

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = p^n (1 - p)^{\sum_{i=1}^n x_i} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n$$

e) $X \rightsquigarrow \{P_N : N \in \mathbb{N}\}$, $P_N(X = x) = \frac{1}{N}$, $x = 1, \dots, N$.

El espacio muestral ya nos lo dan: $\mathcal{X} = \{1, \dots, N\}$. Calculemos la masa de probabilidad:

$$\begin{aligned} P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X_i = x_i] \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X = x_i] \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{N} = \left(\frac{1}{N}\right)^n \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.2. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X . Dar el espacio muestral y calcular la función de densidad de (X_1, \dots, X_n) en cada uno de los siguientes casos:

a) $X \rightsquigarrow \{U(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ Uniforme.

El espacio muestral en este caso es \mathcal{X}^n , donde:

$$\mathcal{X} = [a, b]$$

Recordamos que si $X \rightsquigarrow U(a, b)$, entonces:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad \forall x \in [a, b]$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{b-a} \\ &= \left(\frac{1}{b-a} \right)^n \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \end{aligned}$$

b) $X \rightsquigarrow \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$ Normal.

El espacio muestral de X es $\mathcal{X} = \mathbb{R}$. Recordamos que si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \prod_{i=1}^n e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

c) $X \rightsquigarrow \{\Gamma(p, a) : p, a \in \mathbb{R}^+\}$ Gamma.

El espacio muestral de X es $\mathcal{X} = \mathbb{R}_0^+$. Recordamos que si $X \rightsquigarrow \Gamma(p, a)$, entonces:

$$f_X(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{a^p}{\Gamma(p)} x_i^{p-1} e^{-ax_i} \\ &= \left(\frac{a^p}{\Gamma(p)} \right)^n \cdot e^{-a \sum_{i=1}^n x_i} \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{p-1} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \end{aligned}$$

d) $X \rightsquigarrow \{\beta(p, q) : p, q \in \mathbb{R}^+\}$ Beta.

El espacio muestral de X es $\mathcal{X} = [0, 1]$. Recordamos que si $X \rightsquigarrow \beta(p, q)$, entonces:

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \quad \forall x \in [0, 1]$$

Donde:

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta(p, q)} x_i^{p-1} (1-x_i)^{q-1} \\ &= \frac{1}{\beta(p, q)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{p-1} (1-x_i)^{q-1} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \end{aligned}$$

$$\text{e) } X \rightsquigarrow \{P_\theta : \theta \in \mathbb{R}^+\}, \quad f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\theta}}, \quad 0 < x < \theta.$$

Se nos dice que $\mathcal{X} =]0, \theta[$. Calculamos la función de densidad conjunta:

$$\begin{aligned} f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\sqrt{x_i\theta}} \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{\theta})^n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.3. Se miden los tiempos de sedimentación de una muestra de partículas flotando en un líquido. Los tiempos observados son:

11,5; 1,8; 7,3; 12,1; 1,8; 21,3; 7,3; 15,2; 7,3; 12,1; 15,2;
7,3; 12,1; 1,8; 10,5; 15,2; 21,3; 10,5; 15,2; 11,5

- Construir la función de distribución muestral asociada a a dichas observaciones.

Si aplicamos la definición de función de distribución muestral obtenemos que esta viene dada por:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1,8 \\ 3/20 & \text{si } 1,8 \leq x < 7,3 \\ 7/20 & \text{si } 7,3 \leq x < 10,5 \\ 9/20 & \text{si } 10,5 \leq x < 11,5 \\ 11/20 & \text{si } 11,5 \leq x < 12,1 \\ 14/20 & \text{si } 12,1 \leq x < 15,2 \\ 18/20 & \text{si } 15,2 \leq x < 21,3 \\ 20/20 & \text{si } x \geq 21,3 \end{cases}$$



Figura 2.1: Gráfica de la función de distribución muestral.

- Hallar los valores de los tres primeros momentos muestrales respecto al origen y respecto a la media.

Calculamos primero los tres primeros momentos respecto al origen para luego calcular los centrados respecto a la media a partir de ellos:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \sum_{i=1}^n f_i x_i = 10,915 & a_2 &= \sum_{i=1}^n f_i x_i^2 = 148,9325 \\
 a_3 &= \sum_{i=1}^n f_i x_i^3 = 2280,98365 \\
 b_1 &= \sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x}) = 0 \\
 b_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2\bar{x}}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x}^2 = a_2 - 2a_1 \bar{x} + a_1^2 = a_2 - a_1^2 \\
 &= 148,9325 - 10,915 = 29,795275 \\
 b_3 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^3 - 3x_i^2 \bar{x} + 3x_i \bar{x}^2 - \bar{x}^3) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^3 - \frac{3\bar{x}}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{3\bar{x}^2}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}^3 = a_3 - 3a_1 a_2 + 3a_1^3 - a_1^3 \\
 &= a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3 = 4,95455925
 \end{aligned}$$

- Determinar los valores de los cuartiles muestrales y el percentil 70.

Para ello, primero ordenamos los datos de menor a mayor y los agrupamos en

grupos de $20/4 = 5$ en 5:

1,8; 1,8; 1,8; 7,3; 7,3; 7,3; 7,3; 10,5; 10,5; 11,5; 11,5; 12,1; 12,1;
12,1; 15,2; 15,2; 15,2; 15,2; 21,3; 21,3

Como en los cambios de agrupaciones de números estos se repiten, hemos obtenido el valor de los cuartiles:

$$q_1 = 7,3 \quad q_2 = 11,5 \quad q_3 = 15,2 \quad q_4 = 21,3$$

Para el percentil 70, calculamos:

$$0,7 \cdot 20 = 14$$

Como hemos obtenido un número entero, el percentil 70 será:

$$c_{70} = \frac{X_{(14)} + X_{(15)}}{2} = \frac{12,1 + 15,2}{2} = 13,65$$

En el caso de haber obtenido un número no entero (por ejemplo, 14,2), sería $X_{(15)}$.

Ejercicio 2.1.4. Se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño 40 de una distribución exponencial de media 3, ¿cuál es la probabilidad de que los valores de la función de distribución muestral y la teórica, en $x = 1$, difieran menos de 0,01? Aproximadamente, ¿cuál debe ser el tamaño muestral para que dicha probabilidad sea como mínimo 0,98?

Como dice el enunciado, tenemos una m.a.s. (X_1, \dots, X_n) con $n = 40$, todas ellas idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow \exp(\lambda)$. Sabemos de la asignatura de Probabilidad que:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = 3 \implies \lambda = \frac{1}{3}$$

Por lo que $X \rightsquigarrow \exp(\frac{1}{3})$. Denotaremos por comodidad:

$$F_n^*(x) = F_{(X_1, \dots, X_n)}^*(x)$$

Y el enunciado nos pregunta por:

$$P[|F_n^*(1) - F_X(1)| < 0,01]$$

Para ello, primero calculamos $F_X(1)$:

$$F_X(1) = 1 - e^{-\lambda \cdot 1} = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-1/3} = \alpha$$

Por lo que nos disponemos ya a calcular la probabilidad:

$$\begin{aligned} P[|F_n^*(1) - F_X(1)| < 0,01] &= P[|F_n^*(1) - \alpha| < 0,01] = P[-0,01 < F_n^*(1) - \alpha < 0,01] \\ &= P[-0,01 + \alpha < F_n^*(1) < 0,01 + \alpha] \\ &= P[40(-0,01 + \alpha) < 40F_n^*(1) < 40(0,01 + \alpha)] \end{aligned}$$

Y como sabemos que $Y = 40F_n^*(1) \rightsquigarrow B(40, F_X(1)) \equiv B(40, \alpha)$:

$$P[|F_n^*(1) - F_X(1)| < 0,01] = P[40(-0,01 + \alpha) < Y < 40(0,01 + \alpha)]$$

Si ahora tomamos:

$$\alpha = 1 - e^{-1/3} \approx 0,283469$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 40(0,01 + \alpha) &\approx 40(0,01 + 0,283469) = 11,73876 \\ 40(-0,01 + \alpha) &\approx 40(-0,01 + 0,283469) = 10,93876 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$P[|F_n^*(1) - F_X(1)| < 0,01] \approx P[10,93876 < Y < 11,73876] = P[Y = 11]$$

De donde usando la masa de probabilidad de la Binomial:

$$P[Y = 11] = \binom{40}{11} (0,283469)^{11} (1 - 0,283469)^{40-11} \approx 0,139$$

Para el segundo apartado, como para $n = 40$ obtenemos una probabilidad de 0,139, podemos intuir que para que dicha probabilidad sea como mínimo 0,98, nos es necesario un valor de n grande, por lo que podemos suponer que:

$$F_n^*(1) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\alpha, \frac{\alpha(1-\alpha)}{n}\right)$$

De donde:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(F_n^*(1) - \alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Buscamos el valor de n que verifica:

$$0,98 \leq P[|F_n^*(1) - F_X(1)| < 0,01] = P\left[|Z| < \frac{\sqrt{n}0,01}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\right]$$

Si aplicamos propiedades conocidas de la Normal, si $a \in \mathbb{R}$, entonces:

$$P[|Z| < a] = P[-a < Z < a] = P[Z < a] - P[Z < -a]$$

Pero:

$$P[Z < -a] = P[Z > a] = 1 - P[Z < a]$$

Por lo que:

$$P[|Z| < a] = P[Z < a] - P[Z < -a] = 2P[Z < a] - 1$$

Volviendo al caso que nos interesa:

$$0,98 \leq P\left[|Z| < \frac{\sqrt{n}0,01}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\right] = 2P\left[Z < \frac{\sqrt{n}0,01}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\right] - 1$$

Luego:

$$0,99 = \frac{0,98 + 1}{2} \leq P \left[Z < \frac{\sqrt{n}0,01}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \right]$$

Si consultamos la tabla de la normal $\mathcal{N}(0, 1)$, observamos que el primer valor que supera la probabilidad de 0,99 es 2,33, por lo que:

$$2,33 = \frac{\sqrt{n}0,01}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} = \frac{\sqrt{n}0,01}{\sqrt{0,283469(1-0,283469)}} \approx 0,0221886\sqrt{n}$$

De donde:

$$5,4289 = (2,33)^2 = (0,0221886\sqrt{n})^2 = 0,00049233n \implies n = \frac{5,4289}{0,00049233} = 11026,95347$$

Por lo que para $n \geq 11027$ podemos asegurar que la probabilidad es como mínimo 0,98.

Ejercicio 2.1.5. Se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño 50 de una distribución de Poisson de media 2, ¿cuál es la probabilidad de que los valores de la función de distribución muestral y la teórica, en $x = 2$, difieran menos de 0,02? Aproximadamente, ¿qué tamaño muestral hay que tomar para que dicha probabilidad sea como mínimo 0,99?

Tenemos una m.a.s. (X_1, \dots, X_n) con $n = 50$ idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(2)$. Notamos por comodidad:

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}^*(x) = F_n^*(x)$$

Nos preguntan por:

$$P[|F_n^*(2) - F_X(2)| < 0,02]$$

Para ello primero calculamos:

$$F_X(2) = \sum_{k=0}^2 e^{-2} \frac{2^k}{k!} = e^{-2} \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} \right) = e^{-2}(1 + 2 + 2) \approx 0,6767$$

Por lo que:

$$P[|F_n^*(2) - 0,6767| < 0,02] = P[-0,02 < F_n^*(2) - 0,6767 < 0,02] = P[0,6567 < F_n^*(2) < 0,6967]$$

Como sabemos por lo visto en teoría que:

$$Y = 50F_n^*(2) \rightsquigarrow B(50, F_X(2)) \equiv B(50, 0,6767)$$

Multiplicamos por 50 la última expresión:

$$\begin{aligned} P[|F_n^*(2) - 0,6767| < 0,02] &= P[0,6567 < F_n^*(2) < 0,6967] = P[32,835 < Y < 34,835] \\ &= P[Y = 33] + P[Y = 34] \end{aligned}$$

Y calculamos estas dos probabilidades:

$$P[Y = 33] = \binom{50}{33} (0,6767)^{33} (1 - 0,6767)^{50-33} \approx 0,114734$$

$$P[Y = 34] = \binom{50}{34} (0,6767)^{34} (1 - 0,6767)^{50-34} \approx 0,120075$$

Por lo que:

$$P[|F_n^*(2) - 0,6767| < 0,02] \approx 0,114734 + 0,120075 = 0,234809$$

Para el segundo apartado, como para $n = 50$ obtenemos una probabilidad de 0,234809, podemos intuir que para que dicha probabilidad sea como mínimo 0,99, nos es necesario un valor de n grande, por lo que podemos suponer que:

$$F_n^*(2) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0,6767, \frac{0,6767(1 - 0,6767)}{n}\right) \equiv \mathcal{N}\left(0,6767, \frac{0,218777}{n}\right)$$

Por lo que:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(F_n^*(2) - 0,6767)}{\sqrt{0,218777}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

En dicho caso, buscamos n de forma que:

$$0,99 \leq P[|F_n^*(2) - F_X(2)| < 0,02] = P\left[|Z| < \frac{\sqrt{n}0,02}{\sqrt{0,218777}}\right]$$

De forma análoga al ejercicio anterior:

$$P\left[|Z| < \frac{\sqrt{n}0,02}{\sqrt{0,218777}}\right] = 2P\left[Z < \frac{\sqrt{n}0,02}{\sqrt{0,218777}}\right] - 1$$

Luego:

$$0,995 = \frac{0,99 + 1}{2} \leq P\left[Z < \frac{\sqrt{n}0,02}{\sqrt{0,218777}}\right]$$

Y si miramos la tabla de la Normal observamos que el primer valor que supera la probabilidad de 0,995 es 2,58, luego:

$$2,58 = \frac{\sqrt{n}0,02}{\sqrt{0,218777}} = 0,042759\sqrt{n}$$

Por lo que:

$$6,6564 = (2,58)^2 = (0,042759\sqrt{n})^2 = 0,00182833n$$

Luego:

$$n = \frac{6,6564}{0,00182833} \approx 3640,7$$

Por lo que para $n \geq 3641$ podemos asegurar que la probabilidad es como mínimo 0,99.

Ejercicio 2.1.6. Sea $X \rightsquigarrow B(1, p)$ y (X_1, X_2, X_3) una muestra aleatoria simple de X . Calcular la función masa de probabilidad de los estadísticos \bar{X} , S^2 , $\min X_i$ y $\max X_i$.

Como tenemos que:

$$\bar{X} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 X_i$$

Si definimos $Y = \sum_{i=1}^3 X_i$, por la propiedad reproductiva de la Binomial, tenemos que $Y \rightsquigarrow B(3, p)$, de donde $\bar{X} \rightsquigarrow B(1, p/3)$.

(X_1, X_2, X_3)	\bar{X}	P	S^2	$X_{(1)}$	$X_{(n)}$
(0,0,0)	0	$(1-p)^3$	0	0	0
(0,0,1)	$1/3$	$(1-p)^2 p$	$1/3$	0	1
(0,1,0)	$1/3$	$(1-p)^2 p$	$1/3$	0	1
(0,1,1)	$1/3$	$(1-p)^2 p$	$1/3$	0	1
(1,0,0)	$1/3$	$(1-p)^2 p$	$1/3$	0	1
(1,0,1)	$2/3$	$(1-p)p^2$	$1/3$	0	1
(1,1,0)	$2/3$	$(1-p)p^2$	$1/3$	0	1
(1,1,1)	1	p^3	0	1	1

Tabla 2.1: Usamos la tabla para cálculos.

Ejercicio 2.1.7. Obtener la función masa de probabilidad o función de densidad de \bar{X} en el muestreo de una variable de Bernoulli, de una Poisson y de una exponencial.

Ejercicio 2.1.8. Calcular las funciones de densidad de los estadísticos $\max X_i$ y $\min X_i$ en el muestreo de una variable X con función de densidad:

$$f_{\theta}(x) = e^{\theta-x}, \quad x > \theta.$$

Calculamos primero la función de distribución, para calcular con mayor comodidad las funciones de distribución de $X_{(n)}$ y $X_{(1)}$:

$$F_{\theta}(x) = \int_{\theta}^x f_{\theta}(t) dt = \int_{\theta}^x e^{\theta-t} dt = [-e^{\theta-t}]_{\theta}^x = 1 - e^{\theta-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Supuesto ahora que disponemos de una m.a.s. (X_1, \dots, X_n) idénticamente distribuidas a X cuya función de densidad es la anteriormente dicha, podemos aplicar las fórmulas obtenidas en teoría para calcular las funciones de distribución del mínimo y del máximo. Para el máximo:

$$F_{X_{(n)}}(x) = (F_X(x))^n = (1 - e^{\theta-x})^n \implies f_{X_{(n)}} = n(1 - e^{\theta-x})^{n-1} e^{\theta-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Para el mínimo:

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - (1 - 1 + e^{\theta-x})^n = 1 - e^{n(\theta-x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

de donde:

$$f_{X_{(1)}}(x) = n e^{n(\theta-x)-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Ejercicio 2.1.9. El número de pacientes que visitan diariamente una determinada consulta médica es una variable aleatoria con varianza de 16 personas. Se supone que el número de visitas de cada día es independiente de cualquier otro. Si se observa el número de visitas diarias durante 64 días, calcular aproximadamente la probabilidad de que la media muestral no difiera en más de una persona del valor medio verdadero de visitas diarias.

Ejercicio 2.1.10. Una máquina de refrescos está arreglada para que la cantidad de bebida que sirve sea una variable aleatoria con media 200 ml. y desviación típica 15 ml. Calcular de forma aproximada la probabilidad de que la cantidad media servida en una muestra aleatoria de tamaño 36 sea al menos 204 ml.

2.2. Distribuciones en el muestreo de poblaciones normales

Ejercicio 2.2.1. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 5 de una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(2,5, 3,6)$. Calcular:

- a) Probabilidad de que la cuasivarianza muestral esté comprendida entre 1,863 y 2,674.

Tenemos una m.a.s. $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, todas ellas idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(2,5, 3,6)$. Tomamos la cuasivarianza de dichos datos:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (X_i - 2,5)^2$$

Y queremos calcular la probabilidad:

$$P[1,863 < S^2 < 2,674]$$

Para ello, en teoría hemos visto que como tenemos una población normal, se cumple que:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{4S^2}{3,6} \rightsquigarrow \chi^2(4) \equiv \chi^2(n-1)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} P[1,863 < S^2 < 2,674] &= P\left[\frac{4 \cdot 1,863}{3,6} < \frac{4S^2}{3,6} < \frac{4 \cdot 2,674}{3,6}\right] \\ &= P\left[2,07 < \frac{4S^2}{3,6} < 2,971\right] \\ &= P\left[\frac{4S^2}{3,6} > 2,07\right] - P\left[\frac{4S^2}{3,6} > 2,971\right] \end{aligned}$$

Si consultamos la tabla de la $\chi^2(4)$ (no encontramos los valores exactos, por lo que realizamos una media entre los dos más próximos):

$$P\left[\frac{4S^2}{3,6} > 2,07\right] \approx 0,725, \quad P\left[\frac{4S^2}{3,6} > 2,971\right] \approx 0,575$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} P[1,863 < S^2 < 2,674] &= P\left[\frac{4S^2}{3,6} > 2,07\right] - P\left[\frac{4S^2}{3,6} > 2,971\right] \approx 0,725 - 0,575 \\ &= 0,15 \end{aligned}$$

- b) Probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 1,3 y 3,5, supuesto que la cuasivarianza muestral está entre 30 y 40.

En las situación del apartado anterior, ahora tenemos también en consideración la media muestral:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (X_i - 2,5)^2$$

Bajo estas condiciones, el Lema de Fisher nos dice que S^2 y \bar{X} son independientes, por lo que la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 1,3 y 3,5 suponiendo que la cuasivarianza muestral está comprendida entre 30 y 40 es igual a la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 1,3 y 3,5.

Como además sabemos que $\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, nos disponemos a calcular dicha probabilidad:

$$\begin{aligned} P[1,3 < \bar{X} < 3,5] &\stackrel{\text{tipificamos}}{=} P\left[\frac{\sqrt{5}(1,3 - 2,5)}{\sqrt{3,6}} < Z < \frac{\sqrt{5}(3,5 - 2,5)}{\sqrt{3,6}}\right] \\ &= P[-1,4142 < Z < 1,1785] = P[Z < 1,1785] - P[Z > 1,4142] \\ &= P[Z < 1,1785] - 1 + P[Z < 1,4142] \\ &= 0,881 - 1 + 0,92073 = 0,80173 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.2.2. La longitud craneal en una determinada población humana es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media 185,6 mm. y desviación típica 12,78 mm. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria simple de tamaño 20 de esa población tenga media mayor que 190 mm.?

Tenemos una población que sigue una variable aleatoria $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con parámetros $\mu = 185,6$ y $\sigma = 12,78$. Tomamos una m.a.s. (X_1, \dots, X_n) con $n = 20$ y tomamos la media muestral:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

Queremos calcular:

$$P[\bar{X} > 190]$$

Para ello, sabemos por lo visto en teoría que $\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, por lo que:

$$\begin{aligned} P[\bar{X} > 190] &\stackrel{\text{tipificamos}}{=} P\left[Z > \frac{\sqrt{20}(190 - 185,6)}{12,78}\right] = P[Z > 1,5397] \\ &= 1 - P[Z < 1,5397] = 1 - 0,93822 = 0,06178 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.2.3. ¿De que tamaño mínimo habría que seleccionar una muestra de una variable con distribución normal $\mathcal{N}(\mu, 4)$ para poder afirmar, con probabilidad mayor que 0,9, que la media muestral diferirá de la poblacional menos de 0,1?

Supuesto que tenemos una m.a.s. (X_1, \dots, X_n) de tamaño $n \in \mathbb{N}$ de variables aleatorias idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, 4)$, queremos buscar el menor n de forma que:

$$0,9 \leq P[|\bar{X} - \mu| < 0,1]$$

Para ello, usaremos que hemos visto en teoría que $\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ con $\sigma = 2$:

$$0,9 \leq P[|\bar{X} - \mu| < 0,1] = P\left[Z < \frac{\sqrt{n}0,1}{2}\right] = P[Z < \sqrt{n}0,05]$$

De donde mirando la tabla de la normal $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\sqrt{n}0,05 \geq 1,29 \implies n \geq \left(\frac{1,29}{0,05}\right)^2 = 665,64$$

Por lo que habría que seleccionar como mínimo una muestra de tamaño 666 para poder afirmar con probabilidad mayor que 0,9 que la media muestral difiere de la poblacional menos de 0,1.

Ejercicio 2.2.4. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable con distribución normal. Calcular la probabilidad de que la cuasivarianza muestral sea menor que un 50 % de la varianza poblacional para $n = 16$ y para $n = 1000$.

Dicha muestra aleatoria simple es de variables idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Bajo estas condiciones, sabemos por lo visto en teoría que:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$$

Y queremos calcular:

$$P[S^2 < 0,5\sigma^2] = P\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)0,5\sigma^2}{\sigma^2}\right] = 1 - P\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > (n-1)0,5\right]$$

- Para $n = 16$, mirando en la tabla de $\chi^2(15)$ tenemos que:

$$P[S^2 < 0,5\sigma^2] = 1 - P\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > 7,5\right] = 1 - 0,95 = 0,05$$

- Para $n = 1000$, no disponemos de tabla para $\chi^2(999)$, por lo que aproximaremos $\chi^2(999)$ por $\mathcal{N}(999, 2 \cdot 999) \equiv \mathcal{N}(999, 1998)$, gracias al Teorema de Lévy. De esta forma, si tomamos:

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \mathcal{N}(999, 1998)$$

Tenemos entonces que:

$$P[Y > 7,5] = P\left[Z > \frac{7,5 - 999}{\sqrt{1998}}\right] = 1 - P[Z < -22,1817]$$

Por lo que:

$$P[S^2 < 0,5\sigma^2] \approx P[Z < -22,1817] \approx 0$$

Ejercicio 2.2.5. Sean S_1^2 y S_2^2 las cuasivarianzas muestrales de dos muestras independientes de tamaños $n_1 = 5$ y $n_2 = 4$ de dos poblaciones normales con la misma varianza. Calcular la probabilidad de que S_1^2/S_2^2 sea menor que 5,34 o mayor que 9,12.

Bajo estas hipótesis, sabemos por lo visto en teoría que (como $\sigma_1 = \sigma_2$):

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \rightsquigarrow F(n_1 - 1, n_2 - 1) \equiv F(4, 3)$$

Por tanto, notando $Y = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ por comodidad, calculamos:

$$P[Y < 5,34 \text{ o } Y > 9,12] = P[Y < 5,34] + P[Y > 9,12]$$

Observamos la tabla de $F(4, 3)$:

$$P[Y < 5,34] = 0,9$$

$$P[Y > 9,12] = 1 - P[Y < 9,12] = 1 - 0,95 = 0,05$$

En definitiva:

$$P[Y < 5,34 \text{ o } Y > 9,12] = P[Y < 5,34] + P[Y > 9,12] = 0,95$$

Ejercicio 2.2.6. Se consideran dos poblaciones de bombillas cuyas longitudes de vida siguen una ley normal con la misma media y desviaciones típicas 425 y 375 horas, respectivamente. Con objeto de realizar un estudio comparativo de ambas poblaciones, se considera una muestra aleatoria simple de 10 bombillas en la primera población y una de tamaño 6 en la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral del primer grupo menos la del segundo sea menor que la observada en dos realizaciones muestrales que dieron 1325 horas y 1215 horas, respectivamente?

Como describe el enunciado, tenemos una m.a.s. (X_1, \dots, X_n) de tamaño $n = 10$ de variables aleatorias idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, 425^2)$; y otra m.a.s. (Y_1, \dots, Y_m) de tamaño $m = 6$ de variables aleatorias idénticamente distribuidas a $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, 375^2)$. Notaremos $\mu_1 = 1325$, $\mu_2 = 1215$. Bajo estas condiciones, sabemos por lo visto en teoría que:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu - \mu)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Luego si notamos a esta última variable como Z :

$$\begin{aligned} P[\bar{X} - \bar{Y} < 1325 - 1215] &= P\left[Z < \frac{1325 - 1215}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right] = P\left[Z < \frac{1325 - 1215}{\sqrt{\frac{425^2}{10} + \frac{375^2}{6}}}\right] \\ &= P[Z < 0,5399] = 0,7054 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.2.7. Sean X_1, \dots, X_n, X_{n+1} variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, y sean \bar{X} y S^2 la media y la cuasivarianza muestral de (X_1, \dots, X_n) . Calcular la distribución de

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Bajo dichas hipótesis, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} X_{n+1} \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ \bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \end{array} \right\} \implies X_{n+1} - \bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu - \mu, \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right) \equiv \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

de donde si tipificamos la variable:

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sqrt{\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}} = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sigma \sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Además, se ha visto en teoría que:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$$

FALTA RAZONAR QUE AMBAS VARIABLES SON INDEPENDIENTES. Por lo que si realizamos la construcción de la distribución t de Student:

$$\left. \begin{array}{l} U \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ \text{independientes} \\ V \rightsquigarrow \chi^2(n) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{U}{\sqrt{V/n}} \rightsquigarrow t(n)$$

Si lo aplicamos a nuestras variables:

$$\frac{\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \rightsquigarrow t(n-1)$$

Ejercicio 2.2.8. Sean $(X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_m)$ muestras aleatorias simples independientes de poblaciones $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ y $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$, respectivamente. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$ las medias y cuasivarianzas de las dos muestras. Calcular la distribución de

$$\frac{\alpha(\bar{X} - \mu_1) + \beta(\bar{Y} - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}} \sqrt{\frac{\alpha^2}{n} + \frac{\beta^2}{m}}}$$

Sabemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ \bar{Y} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_2, \frac{\sigma^2}{m}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{X} - \mu_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ \bar{Y} - \mu_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{m}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha(\bar{X} - \mu_1) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha^2 \sigma^2}{n}\right) \\ \beta(\bar{Y} - \mu_2) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\beta^2 \sigma^2}{m}\right) \end{array} \right\}$$

Por lo que:

$$\alpha(\bar{X} - \mu_1) + \beta(\bar{Y} - \mu_2) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha^2 \sigma^2}{n} + \frac{\beta^2 \sigma^2}{m}\right) \equiv \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \left(\frac{\alpha^2}{n} + \frac{\beta^2}{m}\right)\right)$$

Si tipificamos la variable:

$$\frac{\alpha(\bar{X} - \mu_1) + \beta(\bar{Y} - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{\alpha^2}{n} + \frac{\beta^2}{m}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Por otra parte, tenemos que:

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1), \quad \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(m-1)$$

Como ambas son independientes por ser S_1^2 y S_2^2 independientes (ya que las muestras aleatorias simples eran independientes), podemos aplicar la propiedad reproductiva de χ^2 , obteniendo que:

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n+m-2)$$

Finalmente, la extensión del Lema de Fisher nos dice que (\bar{X}, \bar{Y}) es independiente de (S_1^2, S_2^2) , por lo que las dos variables aleatorias con las que trabajamos son independientes, lo que nos permite aplicar la construcción de la distribución t de Student:

$$\frac{\alpha(\bar{X} - \mu_1) + \beta(\bar{Y} - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{\alpha^2}{n} + \frac{\beta^2}{m}}} = \frac{\alpha(\bar{X} - \mu_1) + \beta(\bar{Y} - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}} \sqrt{\frac{\alpha^2}{n} + \frac{\beta^2}{m}}} \rightsquigarrow t(n+m-2)$$