# Topología II
# Examen VI

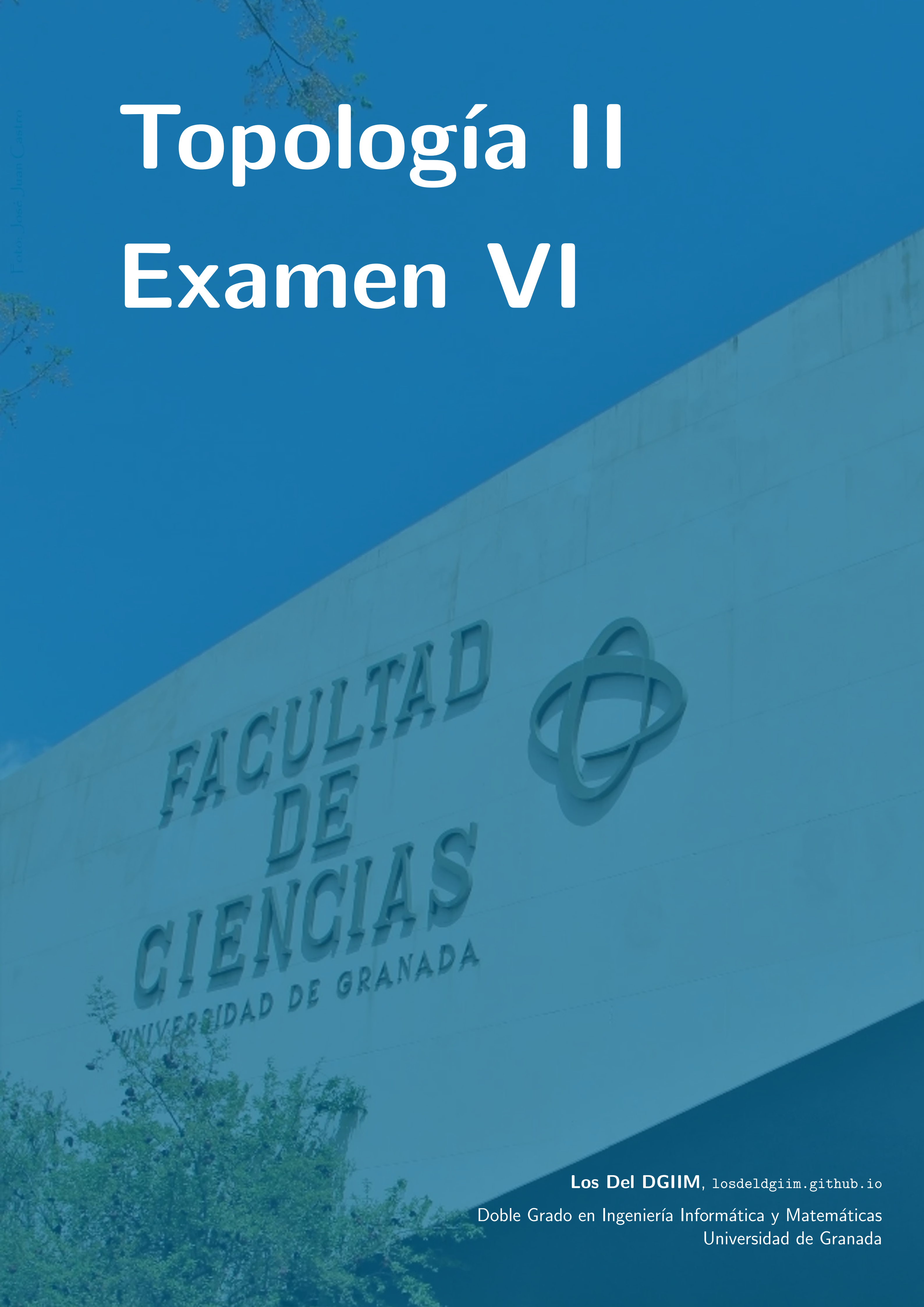



Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Topología II
# Examen VI

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

**Asignatura** Topología II.

**Curso Académico** 2024/25.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Grupo Único.

**Descripción** Examen extraordinario.

**Fecha** 10 de febrero de 2025.

**Duración** 2 horas y media.

**Responda la pregunta 1 y elija tres preguntas entre la 2, 3, 4 y 5.**

**Ejercicio 1.** Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Dadas las circunferencias

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}, \qquad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 1\}$$

no existe una aplicación recubridora desde $X = C_1 \cup C_2$ en $\mathbb{S}^1$.

b) Si $p : X \to Y$ es una aplicación recubridora con $X$ compacto, entonces $p^{-1}(y)$ es finito para todo $y \in Y$.

c) Toda aplicación continua $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ es homotópicamente nula.

**Ejercicio 2.** Consideremos el cilindro vertical $C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ y las rectas horizonatales

$$R_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = -1\}, \qquad R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = 1\}$$

Calcula el grupo fundamental de

$$X = C \cup R_1 \cup R_2$$

**Ejercicio 3.** Sea $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ una aplicación continua cumpliendo que $f\big|_{Fr(\overline{\mathbb{D}})} : Fr(\overline{\mathbb{D}}) \to Fr(\overline{\mathbb{D}})$ es un homeomorfismo. Demuestra que $f$ es sobreyectiva.

**Ejercicio 4.** Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^1$ una aplicación continua. Demuestra que $f$ es homotópicamente nula si $n \geqslant 2$.

**Ejercicio 5.** Determina la superficie compacta $S$ dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e, f, g, h, i; afc^{-1}, deb^{-1}, hia^{-1}, dbc, ehg^{-1}, gfi^{-1} \rangle$$

**Solución.**

**Ejercicio 1.** Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Dadas las circunferencias

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}, \qquad C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 1\}$$

no existe una aplicación recubridora desde $X = C_1 \cup C_2$ en $\mathbb{S}^1$.

Es verdadera: Por reducción al absurdo, supongamos que existe una aplicación recubridora $p : X \to \mathbb{S}^1$. Tenemos entonces por el Teorema de Monodromía que el homomorfismo (como trabajamos con espacios arcoconexos da igual el punto en el que trabajemos) $p_* : \pi_1(X) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ es inyectivo, con $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ y $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$. Tendremos por tanto que $\mathbb{Z}$ contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, pero esto es una contradicción, ya que todo subgrupo de $\mathbb{Z}$ es abeliano por ser $\mathbb{Z}$ abeliano y $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ no es abeliano.

b) Si $p : X \to Y$ es una aplicación recubridora con $X$ compacto, entonces $p^{-1}(y)$ es finito para todo $y \in Y$.

**Demostración directa.**

Es cierta: por reducción al absurdo, supongamos que existe $y \in Y$ tal que el conjunto $S = p^{-1}(y)$ un conjunto infinito. En dicho caso, por ser $X$ compacto ha de existir $x \in X$ punto de acumulación de $S$. Sea $z = p(x)$, como $p$ es una aplicación recubridora existe $U$ un entorno abierto de $z$ y $V$ un entorno abierto de $x$ de forma que $p : V \to U$ es un homeomorfismo.

Usaremos el siguiente resultado:

Sea $X$ un espacio topológico compacto y $S \subseteq X$ un subconjunto infinito, existe un punto $x \in X$ adherente a $S$ tal que $N \cap S$ es un conjunto infinito, para todo $N$ entorno de $x$.

*Demostración.* Por reducción al absurdo, supongamos que para todo punto $x \in X$ adherente a $S$ existe $U_x$ entorno abierto de $x$ tal que $U_x \cap S$ es finito. Observemos que podemos escribir:

$$\overline{S} \subseteq \bigcup_{x \in \overline{S}} U_x$$

Y como $\overline{S}$ es compacto por ser cerrado y subconjunto de un compacto tenemos que existen $x_1, \ldots, x_n \in \overline{S}$ de forma que:

$$\overline{S} \subseteq U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$$

Esto nos permite escribir:

$$S = (U_{x_1} \cap S) \cup \ldots \cup (U_{x_n} \cap S)$$

con cada $U_{x_i} \cap S$ finito para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sin embargo, tenemos que $S$ era un conjunto infinito, por lo que hemos llegado a contradicción. $\square$

Tenemos entonces que $V \cap S$ es un conjunto infinito, con lo que $p$ no es inyectiva en $V$, lo que contradice que $p : V \to U$ sea un homeomorfismo.

**Asumiendo una hipótesis adicional.**

Si $Y$ es T1 es cierta, pues para todo $y \in Y$ tendremos que $\{y\}$ es cerrado por ser $Y$ T1, por lo que $p^{-1}(\{y\}) \subseteq X$ es un conjunto cerrado. Como $X$ es compacto, tenemos que $p^{-1}(\{y\})$ también será compacto. Como $p$ es una aplicación recubridora, para $y$ existirá $O_y$ un abierto de $Y$ regularmente recubierto, por lo que:

$$p^{-1}(O_y) = \biguplus_{i \in I} A_i$$

con $A_i$ abierto y $p\big|_{A_i} : A_i \to O_y$ homeomorfismo, para cada $i \in I$. Tenemos un recubrimiento por abiertos de $p^{-1}(\{y\}) \subseteq p^{-1}(O_y)$, por lo que por ser $p^{-1}(\{y\})$ compacto existirá $J \subseteq I$ finito de forma que:

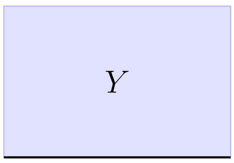
$$p^{-1}(\{y\}) \subseteq \biguplus_{i \in J} A_i$$

Como los conjuntos $A_i$ son disjuntos tenemos entonces que solo puede haber una cantidad finita de preimágenes de $y$.

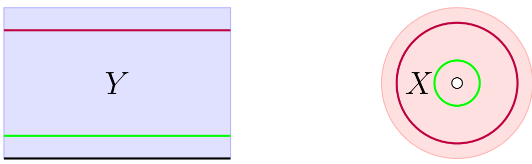
c) Toda aplicación continua $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es homotópicamente nula.

Verdadera: Si consideramos el conjunto:

$$Y = \mathbb{R} \times ]0,1[$$




Tenemos que $Y$ recubre a $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ya que para cada circunferencia de centro $(0,0)$ de $X$ podemos considerar la aplicación recubridora estándar desde $\mathbb{R}$ cuyo dominio se encuentra a cierta altura en el conjunto $Y$. Podemos repetir esta idea haciendo corresponder a cada altura del conjunto $Y$ un radio en el conjunto $X$, de forma que los radios tiendan a 0 cuando la altura tienda a 0 y que los radios diverjan cuando la altura se acerque a 1.




Usando esta idea, si consideramos la aplicación $p : Y \to X$ dada por:

$$p(x, y) = tg\left(\frac{\pi}{2} y\right) p_0(x)$$

donde $p_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ es la aplicación recubridora estándar, es sencillo probar que $p$ es una aplicación recubridora. Así, estamos en la situación:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{D} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \end{tikzcd}$$

Si observamos ahora que $\mathbb{D}$ es simplemente conexo tenemos entonces que $f$ se puede levantar, con lo que fijado $x_0 \in \mathbb{D}$ y tomando $r_0 \in p^{-1}(\{f(x_0)\})$ tenemos que existe un levantamiento $\hat{f} : \mathbb{D} \to Y$. Como tenemos ahora que $Y$ es contráctil tenemos que $\hat{f}$ es homotópicamente nula, y razonando como en el Ejercicio 4 llegamos a que $f$ es homotópicamente nula.

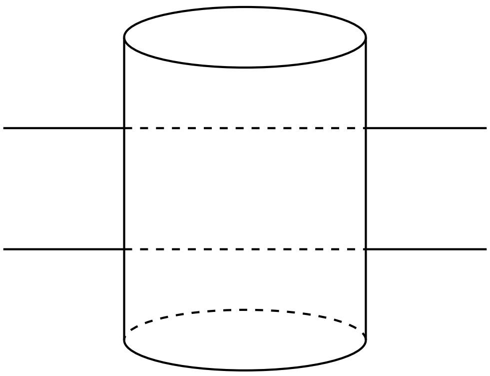
**Ejercicio 2.** Consideremos el cilindro vertical $C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ y las rectas horizonatales

$$R_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = -1\}, \qquad R_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = 1\}$$

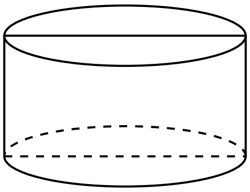
Calcula el grupo fundamental de

$$X = C \cup R_1 \cup R_2$$

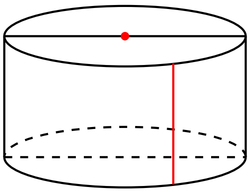
Tenemos el conjunto:



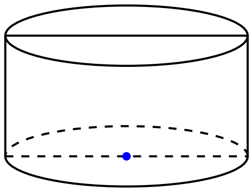
Que tiene por retracto de deformación el conjunto:



Si tomamos como $U$:



Y como $V$:



Puede probarse que $U \cap V$ es simplemente conexo, que $U$ tiene grupo fundamental $\mathbb{Z}$ y $V$ tiene $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, de donde:

$$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

**Ejercicio 3.** Sea $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ una aplicación continua cumpliendo que $f\big|_{Fr(\overline{\mathbb{D}})} : Fr(\overline{\mathbb{D}}) \to Fr(\overline{\mathbb{D}})$ es un homeomorfismo. Demuestra que $f$ es sobreyectiva.

Por reducción al absurdo suponemos que $f$ no es sobreyectiva, es decir, que existe $y \in \overline{\mathbb{D}} \setminus f(\overline{\mathbb{D}})$ (notemos que $y \in \mathbb{D}$, ya que si no esto contradeciría la existencia del homeomorfismo enunciado). De esta forma, podemos considerar la restricción en codominio $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}} \setminus \{y\}$. Ahora, el conjunto $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{y\}$ tiene por retracto de deformación al conjunto $\mathbb{S}^1$. En definitiva, podemos considerar la siguiente cadena de composiciones de aplicaciones continuas:

$$\overline{\mathbb{D}} \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{D}} \setminus \{y\} \xrightarrow{r} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{S}^1$$

donde usamos que $Fr(\overline{\mathbb{D}}) = \mathbb{S}^1$, obteniendo así una aplicación continua de $\overline{\mathbb{D}}$ en $\mathbb{S}^1$ que mantiene fijos los puntos de $\mathbb{S}^1$, <u>contradicción</u>.

**Ejercicio 4.** Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^1$ una aplicación continua. Demuestra que $f$ es homotópicamente nula si $n \geqslant 2$.

Si consideramos el recubridor $(\mathbb{R}, p)$ de $\mathbb{S}^1$ con $p$ la aplicación recubridora estándar:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{S}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Como $\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$ para $n \geqslant 2$ tenemos entonces que:

$$f_*(\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{R}, r_0))$$

para $r_0 \in p^{-1}(\{f(x_0)\})$, por lo que existe una aplicación $\hat{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ levantamiento de $f$ con $\hat{f}(x_0) = r_0$. Como $\hat{f}$ llega a $\mathbb{R}$, que es contráctil, tenemos que $\hat{f}$ es homotópicamente nula, es decir, existe $z_0 \in \mathbb{R}$ y una homotopía $H : \mathbb{S}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}$ de forma que:

$$H(x,0) = \hat{f}(x), \qquad H(x,1) = z_0 \qquad \forall x \in \mathbb{S}^n$$

Si consideramos ahora la homotopía $p \circ H : \mathbb{S}^n \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ tenemos que:

$$(p \circ H)(x,0) = p(\hat{f}(x)) = f(x), \qquad (p \circ H)(x,1) = p(z_0) \qquad \forall x \in \mathbb{S}^n$$

Por lo que $f$ es homotópica a la aplicación constantemente igual a $p(z_0)$, como queríamos probar.

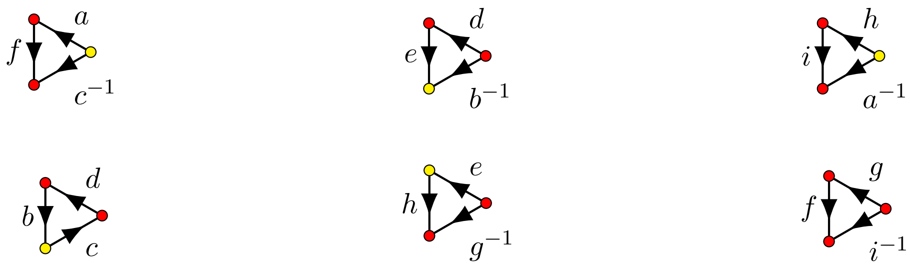
**Ejercicio 5.** Determina la superficie compacta $S$ dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e, f, g, h, i; afc^{-1}, deb^{-1}, hia^{-1}, dbc, ehg^{-1}, gfi^{-1} \rangle$$

Calculamos la característica de Euler de $S$:

- $C = 6$.
- $A = 9$.
- $V = 2$.

Y para averiguar el número de vértices hemos visto que:




tenemos así que:

$$\chi(S) = V - A + C = 2 - 9 + 6 = -1$$

Por lo que $S \cong \mathbb{RP}^2_3$.