Topología II
Examen III

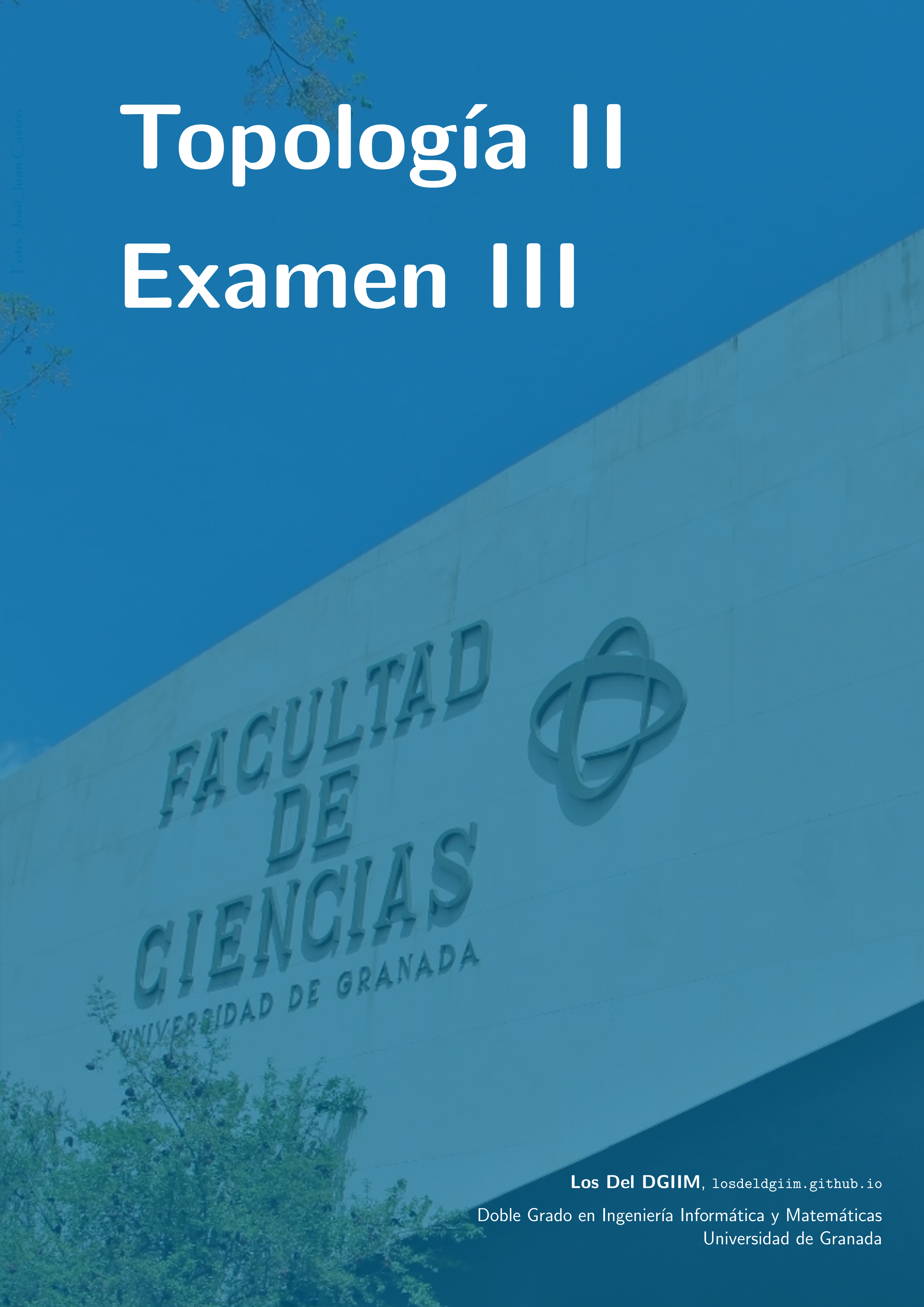


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología II
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2025

Asignatura Topología II.

Curso Académico 2021/22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Grupo Único.

Descripción Recopilación de ejercicios de repaso de varios temas.

Ejercicio 1. Sea $M = \frac{I\times I}{\sim}$ con $I = [0,1]$ la banda de Möbius con $(0,y) \sim (1, 1-y)$. Probar que $\frac{I\times\{\frac{1}{2}\}}{\sim}$ es un retracto de deformación de M y deducir que $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$. Probar que el borde $\frac{I\times\{0,1\}}{\sim}$ es un lazo y hallar qué clase da en $\pi_1(M)$.

Ejercicio 2. Hallar el grupo fundamental de:

a) $(\mathbb{S}^1 \times [0,1]) \cup (\mathbb{D}^2 \cup \{0,1\})$.

b) $\mathbb{S}^1(-1,0) \cup \mathbb{S}^1(1,0) \cup [(-2,0),(2,0)]$.

c) Tres esferas de $\mathbb{R}^3$ donde cada una es tangente a las otras dos.

Ejercicio 3. Sea G un grupo de homeomorfismos de X actuando de manera natural. Si G actúa propia y discontinuamente sobre X, probar que la aplicación proyección $p : X \to X/G$ es recubridora.

Ejercicio 4. Si Y es un espacio topológico discreto, probar que $(X\times Y, p_1 : X\times Y \to X)$ es recubridor de X.

Ejercicio 5. Probar:

a) El grupo fundamental de un plano proyectivo menos un punto.

b) Un espacio contráctil es arcoconexo.

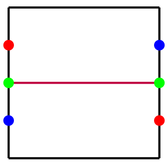
c) Si el recubridor de un espacio simplemente conexo también es simplemente conexo, entonces ambos espacios son homeomorfos.

d) Si $\overline{X}$ es simplemente conexo, entonces $|\pi_1(X)|$ es el número de hojas.

Solución.

Ejercicio 1. Sea $M = \frac{I\times I}{\sim}$ con $I = [0,1]$ la banda de Möbius con $(0,y) \sim (1, 1-y)$. Probar que $\frac{I\times\{\frac{1}{2}\}}{\sim}$ es un retracto de deformación de M y deducir que $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$. Probar que el borde $\frac{I\times\{0,1\}}{\sim}$ es un lazo y hallar qué clase da en $\pi_1(M)$.

Nos piden probar que el conjunto $C = \frac{I\times\{1/2\}}{\sim}$ es un retracto de deformación de M:



Consideramos la aplicación $H : M \times [0,1] \to M$ dada por:

$$H((x,y),t) = (1-t)(x,y) + t(x, {}^1\!/\!_2) = (x, (1-t)y + {}^t\!/\!_2)$$

Que está bien definida, ya que si $(x,y) \sim (u,v)$, entonces:

- Bien $(x,y) = (u,v)$, en cuyo caso es claro que $H(x,y) = H(u,v)$.
- Bien $x = 0$, $u = 1$ y $y = 1-v$. En dicho caso:

  $$\begin{aligned} H(u,v) &= H(1,v) = (1, (1-t)v + {}^t\!/\!_2) \\ H(x,y) &= H(0,1-v) = (0,(1-t)(1-v) + {}^t\!/\!_2) = (0, (1-v) - t(1-v) + {}^t\!/\!_2) \\ &= (0, 1-t+{}^t\!/\!_2 - (1-t)v) = (0, 1-(1-t)v - {}^t\!/\!_2) \qquad \forall t \in [0,1] \end{aligned}$$

  Observamos que $H(u,v) \sim H(x,y)$.

Vemos que H es continua. Vemos además que:

- $H((x,y),0) = (x,y) \quad \forall (x,y) \in M$.
- $H((x,y),1) = (x, {}^1\!/\!_2) \in C \quad \forall (x,y) \in M$.
- $H((u,v),1) = (u, {}^1\!/\!_2) = (u,v) \quad \forall (u,v) \in C$.

Por lo que C es un retracto de deformación de M. Ahora, si consideramos la aplicación $f : I \times \{{}^1\!/\!_2\} \to \mathbb{S}^1$ dada por:

$$f(x, {}^1\!/\!_2) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$$

Tenemos claramente que f es continua y sobreyectiva. Como va de un conjunto compacto en un T2 tenemos también que es cerrada, por lo que f es una identificación. Vemos finalmente que:

$$f(0, {}^1\!/\!_2) = (1,0) = f(1, {}^1\!/\!_2)$$

Por lo que podemos inducir f al cociente $\frac{I\times\{1/2\}}{\sim}$, lo que nos da un homeomorfismo entre C y $\mathbb{S}^1$. De esta forma:

$$\pi_1(M) = \pi_1(C) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

Ejercicio 2. Hallar el grupo fundamental de:

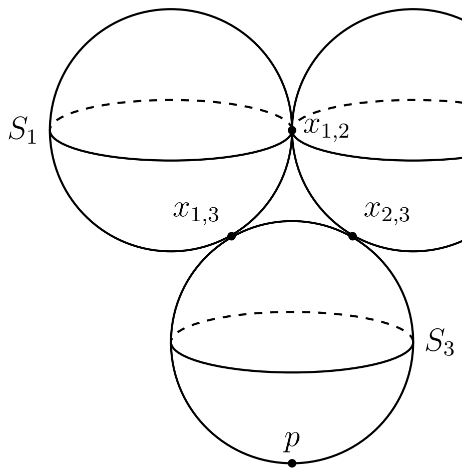
a) $(\mathbb{S}^1 \times [0,1]) \cup (\mathbb{D}^2 \cup \{0,1\})$.

b) $\mathbb{S}^1(-1,0) \cup \mathbb{S}^1(1,0) \cup [(-2,0),(2,0)]$.

c) Tres esferas de $\mathbb{R}^3$ donde cada una es tangente a las otras dos.

Tenemos que $X = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, con:

$$S_1 \cap S_2 = \{x_{1,2}\}, \qquad S_1 \cap S_3 = \{x_{1,3}\}, \qquad S_2 \cap S_3 = \{x_{2,3}\}$$

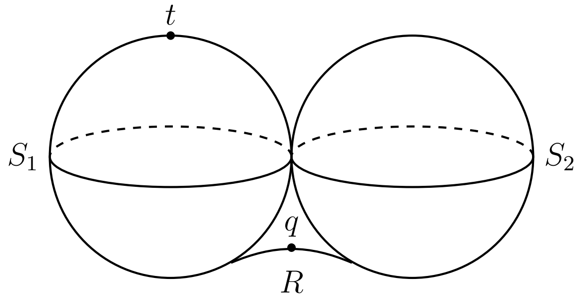


y consideramos los conjuntos:

$$\begin{aligned} U &= X \setminus \{x_{1,2}\} \\ V &= X \setminus \{p\}, \quad p \in S_3 \setminus \{x_{1,3}, x_{2,3}\} \end{aligned}$$

tenemos que:

- $X = U \cup V$ con U, V abiertos.
- U, V y $U \cap V$ son arcoconexos.
- U tiene por retracto de deformación el conjunto S_3, por lo que U es simplemente conexo.
- $U \cap V$ tiene por retracto de deformación el conjunto $S_3 \setminus \{q\}$, que a su vez es contráctil, por lo que $U \cap V$ es contráctil, luego simplemente conexo.
- V tiene como retracto de deformación el conjunto Y:

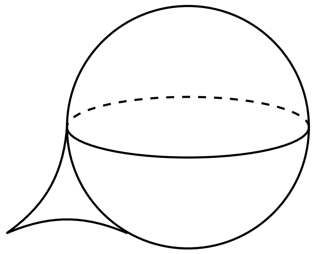


Al que tratamos de calcularle el grupo fundalmental, usando para ello nuevamente el Teorema de Seifert-van Kampen. Si denotamos por R al segmento restante de S_3 en Y que une $x_{1,3}$ con $x_{2,3}$ (luego $Y = S_1 \cup S_2 \cup R$), consideramos ahora los conjuntos:

$$\begin{aligned} W &= Y \setminus \{q\}, \qquad & q \in R \setminus \{x_{1,3}, x_{2,3}\} \\ O &= Y \setminus \{t\}, \qquad & t \in S_1 \setminus \{x_{1,2}, x_{1,3}\} \end{aligned}$$

Tenemos que:

- $Y = W \cup O$ con W y O abiertos.
- W, O y $O \cap W$ son arcoconexos.
- W tiene a $S_1 \cup S_2$ como retracto de deformación, y en teoría vimos que este espacio topológico es simplemente conexo.
- $W \cap O$ tiene a $(S_1 \setminus \{t\}) \cup S_2$ como retracto de deformación, y este último tiene a su vez a S_2 como retracto de deformación, por lo que $W \cap O$ es simplemente conexo.
- O tiene el conjunto:



como retracto de deformación, y en teoría tambien se calculó el grupo fundamental de este espacio topológico, pues podemos ver R como la imagen de cierto arco α, por lo que sabemos que dichos espacio topológico tiene grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z}$, por lo que el grupo fundalmental de O es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen obtenemos que:

$$\pi_1(V) \cong \pi_1(Y) \cong \pi_1(W) * \pi_1(O) \cong \{1\} * \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

Aplicando nuevamente el Teorema de Seifert-van Kampen obtenemos:

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1 k(V) \cong \{1\} * \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

Ejercicio 3. Sea G un grupo de homeomorfismos de X actuando de manera natural. Si G actúa propia y discontinuamente sobre X, probar que la aplicación proyección $p : X \to X/G$ es recubridora.

Ejercicio 4. Si Y es un espacio topológico discreto, probar que $(X \times Y, p_1 : X \times Y \to X)$ es recubridor de X.

Sabemos ya que p_1 es una aplicación continua y sobreyectiva, por ser la proyección en primera coordenada del espacio topológico producto $X \times Y$.

Dado $x \in X$, si consideramos como O_x cualquier entorno abierto de x tendremos entonces que:

$$p_1^{-1}(O_x) = O_x \times Y = \biguplus_{y \in Y} O_x \times \{y\}$$

Con cada $O_x \times \{y\}$ abierto para todo $y \in Y$, puesto que O_x es abierto en X y $\{y\}$ abierto en Y por tener Y la topología discreta. Es obvio finalmente que para cada $y \in Y$ tenemos que $p_1\big|_{O_x \times \{y\}} : O_x \times \{y\} \to O_x$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 5. Probar:

a) El grupo fundamental de un plano proyectivo menos un punto.

b) Un espacio contráctil es arcoconexo.

Si X es un espacio topológico contráctil, existe entonces una aplicación continua $H : X \times [0, 1] \to X$ de forma que:

$$H(x, 0) = x, \qquad H(x, 1) = x_0 \qquad \forall x \in X$$

Por tanto, si consideramos $\alpha_x : [0, 1] \to X$ dada por:

$$\alpha_x(t) = H(x, t)$$

Tenemos que α_x es una aplicación continua, luego es un arco que une $\alpha_x(0) = H(x, 0) = x$ con $\alpha_x(1) = H(x, 1) = x_0$. Como este lazo lo podemos considerar para todo $x \in X$, dados dos puntos arbitrarios de X x e y, el lazo $\alpha_x * \widetilde{\alpha_y}$ une x con y, por lo que X es arcoconexo.

c) Si el recubridor de un espacio simplemente conexo también es simplemente conexo, entonces ambos espacios son homeomorfos.

Sea $p : R \to B$ una aplicación recubridora entre dos espacios topológicos simplemente conexos, por ser p una aplicación recubridora tenemos que es continua, sobreyectiva y abierta. Para probar que p es un homeomorfismo, basta ver que p es inyectiva. Para ello, dados $x, y \in R$ con $p(x) = p(y)$, como R es arcoconexo (por ser simplemente conexo) tenemos que existe un arco α que une x con y, por lo que $p \circ \alpha$ es un arco de B que une $p(x)$ con $p(y) = p(x)$, por lo que es un lazo basado en $p(x)$. Como B es simplemente conexo:

$$[p \circ \alpha] = [\varepsilon_{p(x)}]$$

Ahora, tenemos que α es el único levantamiento de $p \circ \alpha$ que comienza en x, así como que ε_x es el único levantamiento de $\varepsilon_{p(x)}$ que comienza en x. Tenemos por tanto que α debe ser un lazo, y además $[\alpha] = [\varepsilon_x]$, de donde $x = y$, por lo que p es inyectiva, luego es un homeomorfismo.

Notemos que en este ejercicio solo hemos usado que R es arcoconexo y que B es simplemente conexo.

d) Si $\overline{X}$ es simplemente conexo, entonces $|\pi_1(X)|$ es el número de hojas.