

Análisis Funcional

Examen XIV



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Análisis Funcional

Examen XIV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2026

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2025-26.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor David Arcoya Álvarez.

Descripción Examen Ordinario.

Fecha 22 de Enero de 2026.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1. Para $\alpha \in]0, 1]$, sea

$$X = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua y } \sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}$$

con

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y \in [0, 1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}, \quad \forall f \in X$$

Prueba que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Ejercicio 2. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios de Banach y $T : X \rightarrow Y$ lineal y acotada para la que existe $c > 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \geq c\|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

Prueba que T es compacto si y solo si $\dim X < \infty$.

Ejercicio 3. Sea X un espacio de Banach reflexivo y $f : [0, 1] \rightarrow X$ una función continua. Prueba que existe $x \in X$ tal que

$$\int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \, ds = \langle \varphi, x \rangle, \quad \forall \varphi \in X^*$$

Ejercicio 4. (Teoría) Sea H un espacio de Hilbert con producto escalar (\cdot, \cdot) y norma asociada $\|\cdot\|$. Prueba que si $T : H \rightarrow H$ es lineal, compacto y simétrico tal que

$$\lambda_1 = \sup\{(Tx, x) : \|x\| = 1\} > 0,$$

entonces λ_1 es un valor propio de T y cualquier otro valor propio de T es menor que λ_1 .