Cálculo II

Examen XI

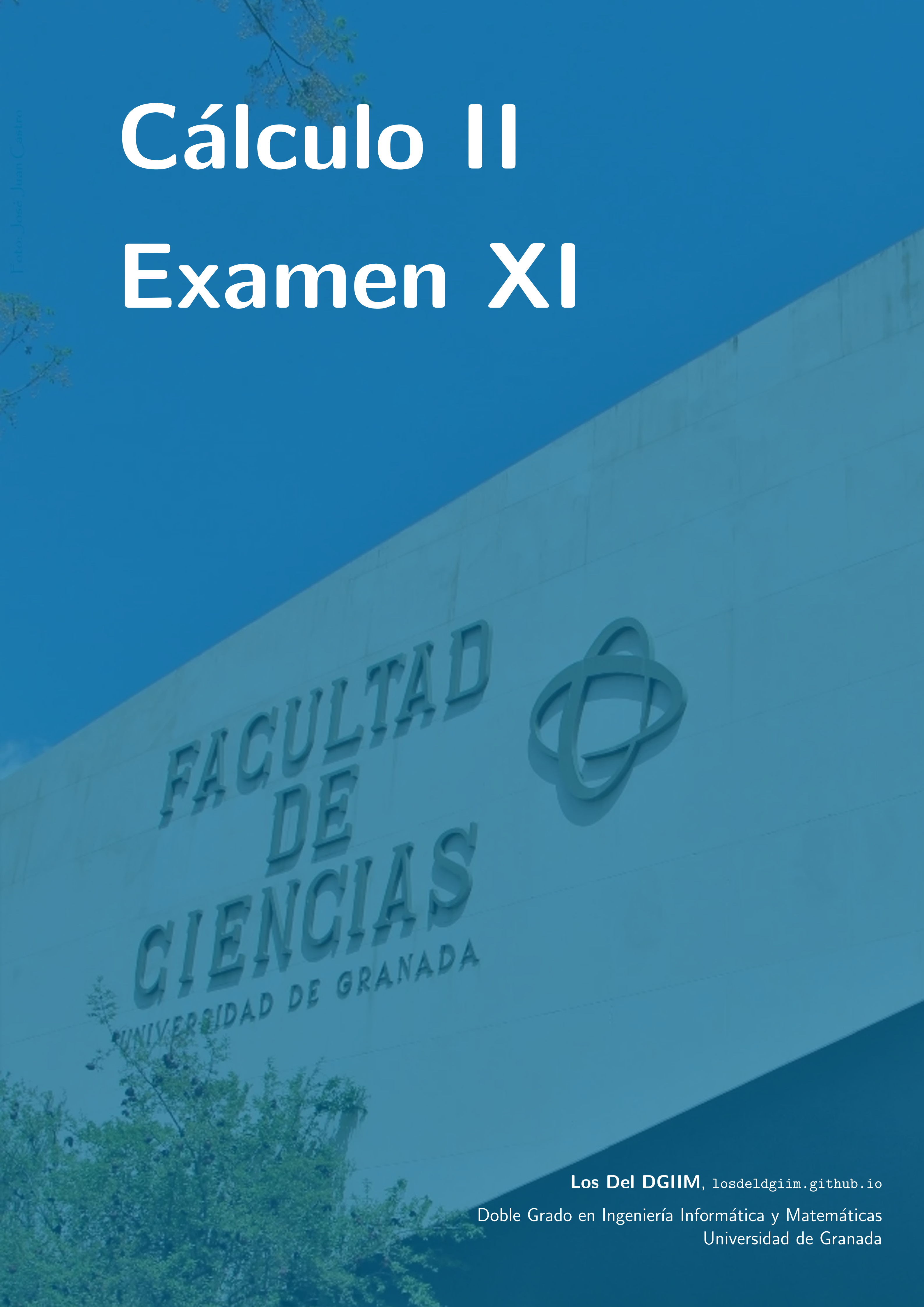

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo II
Examen XI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María Victoria Velasco Collado.

Descripción Parcial 2. Cálculo Integral. Temas 4-7.

Fecha 3 de junio de 2022.

Ejercicio 1. [2 puntos] Estudiar la continuidad uniforme de las siguientes funciones en el sitio indicado:

1. $f(x) = x^3$ en $\mathbb{R}$.
2. $g(x) := \dfrac{\int_0^x (t-2)f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$ en el intervalo $]0,1[$, siendo $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ una función continua.

Ejercicio 2. [1 punto] Determinar, de forma justificada, un intervalo no acotado en el que la función $f(x) = \ln x$ sea lipschitziana. ¿Es dicha función lipschitziana en $\mathbb{R}^+$?

Ejercicio 3. [2 puntos] Demostrar que $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ es integrable en $[0,1]$ siendo $\dfrac{(\ln 2)^2}{2} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x}\,dx$. Deducir que la función $g(x) = \frac{e^x \ln(x+1)}{x}$ también es integrable en $[0,1]$, siendo

$$\frac{(\ln 2)^2}{2} \leqslant \int_0^1 \frac{e^x \ln(x+1)}{x}\,dx \leqslant e - 1.$$

Ejercicio 4. [1.5 puntos] Mediante el cálculo integral, calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}} \right).$$

Ejercicio 5. [1.5 puntos] Calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x(x+1)} \frac{dt}{2+\sqrt[3]{t^2}}}{\displaystyle\int_0^{x^2} \frac{dt}{1+5\sqrt[3]{t^2}}}.$$

Ejercicio 6. [2 puntos] Determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de las funciones $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ y $g(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$.