Topología II
Examen V

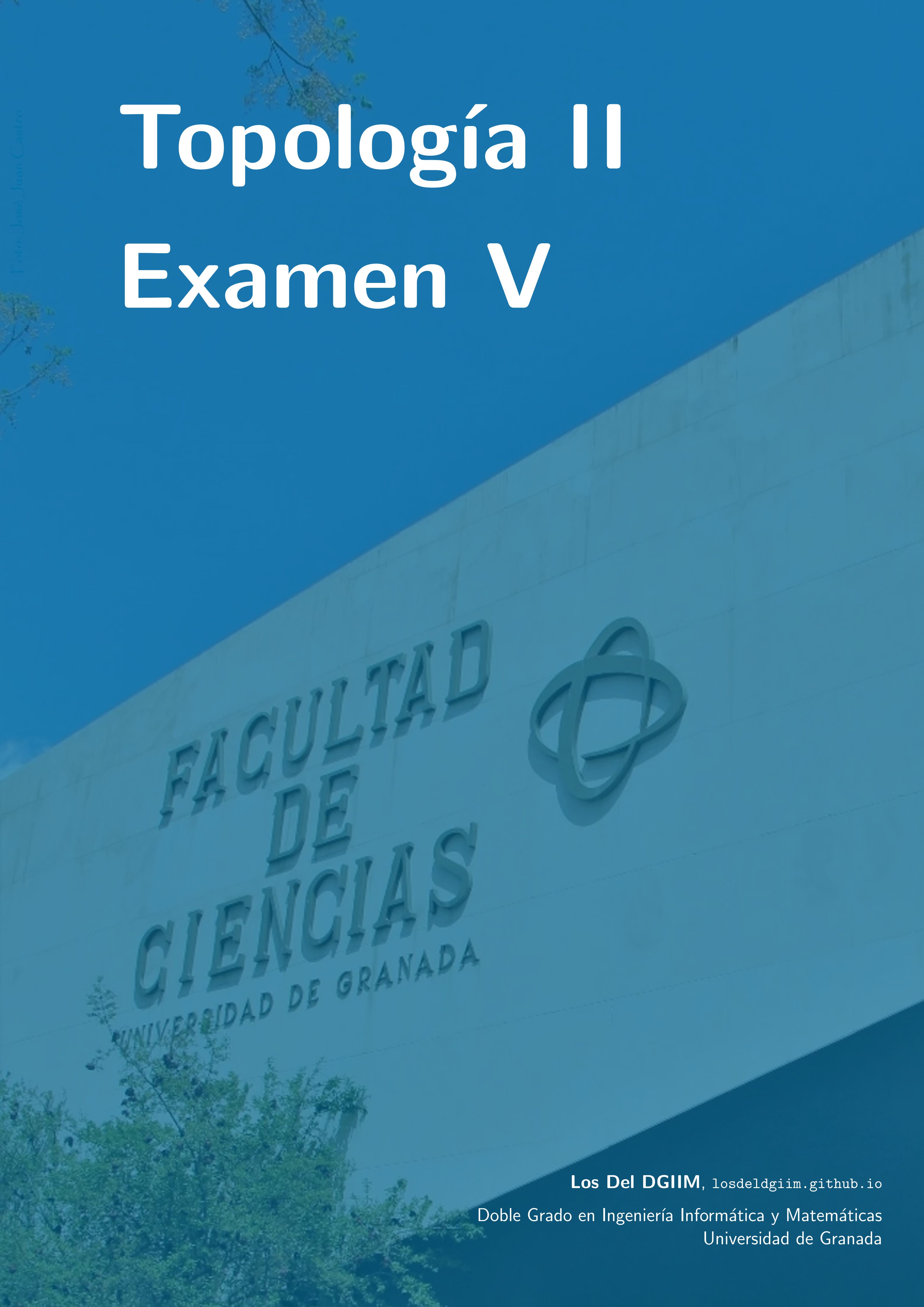


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología II
Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2025

Asignatura Topología II.

Curso Académico 2024/25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Grupo Único.

Descripción Examen ordinario.

Fecha 10 de enero de 2025.

Duración 2 horas y media.

Responda la pregunta 1 y elija dos preguntas entre la 2, 3 y 4.

Ejercicio 1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Sea $f : \mathbb{S}^1 \to X$ una aplicación continua y $F : A \to X$ una aplicación continua desde $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geqslant 1\}$ tal que $F\big|_{\mathbb{S}^1} = f$. Entonces f_* es trivial.

b) Sea X un espacio topológico arcoconexo que admite un recubridor universal. Si $Y \subset X$ es arcoconexo entonces Y también tiene un recubridor universal.

c) Si S_1 y S_2 son dos superficies compactas y conexas con S_1 no orientable entonces $S_1 \# S_2$ es no orientable.

Ejercicio 2. Calcula el grupo fundamental de los espacios topológicos X, Y siguientes:

a) $X = E_1 \cup E_2$, donde E_1, E_2 son las esferas de $\mathbb{R}^3$ de radio 2 y centradas, respectivamente, en los puntos $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$.

b) $Y = S_1 \cup S_2$, donde $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ son dos superficies topológicas conexas que se cortan en un único punto y con grupos fundamentales isomorfos, respectivamente, a los grupos G_1 y G_2.

Ejercicio 3. Sean $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ con $N = (0, 0, 1)$, $S = (0, 0, -1)$ y $r : X \to A$ la aplicación continua

$$r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

donde $A = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, y, z) : z = 0\}$.

a) Demuestra que $H : X \times [0, 1] \to X$ dada por

$$H((x, y, z), t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

es una homotopía entre r y la identidad en X.

b) Si $Y = \mathbb{RP}^2 \setminus \{[N]\}$, comprueba que H se puede inducir a una homotopía

$$\overline{H} : Y \times [0, 1] \to Y$$

y utiliza esto para calcular el grupo fundamental del plano proyectivo menos un punto.

Ejercicio 4. Sean $\mathbb{T}$ el toro y S_1, S_2 las superficies siguientes:

a) S_1 está dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e; ab^{-1}cde, ad^{-1}e^{-1}bc^{-1} \rangle$$

b) $S_2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}$.

¿Son S_1 y S_2 homeomorfas?

Solución.

Ejercicio 1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Sea $f : \mathbb{S}^1 \to X$ una aplicación continua y $F : A \to X$ una aplicación continua desde $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geqslant 1\}$ tal que $F\big|_{\mathbb{S}^1} = f$. Entonces f_* es trivial.

Es falsa, si consideramos $X = \mathbb{S}^1$ y tomamos $f = Id_{\mathbb{S}^1}$ y $F : A \to \mathbb{S}^1$ dada por:

$$F(x) = \frac{x}{|x|}$$

Tenemos que f y F son continuas, así como que $F\big|_{\mathbb{S}^1} = f$. Como f es un homeomorfismo, tendremos que $f_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ es un isomorfismo de grupos, por lo que f_* no puede ser trivial, al ser $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.

b) Sea X un espacio topológico arcoconexo que admite un recubridor universal. Si $Y \subset X$ es arcoconexo entonces Y también tiene un recubridor universal.

Es falsa, si consideramos $X = \mathbb{R}^2$ tenemos que X admite un recubridor universal (él mismo con la aplicación identidad). Si denotamos ahora por $S(x, r)$ a la circunferencia de centro x y radio r y consideramos:

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

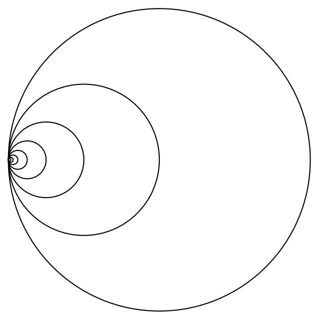


Figura 1: Conjunto Y.

Tenemos que Y es arcoconexo como la unión de conjunto arcoconexos que se interseca en un punto (en el punto $(0, 0)$) y que Y no es semilocalmente simplemente conexo, pues para $x_0 = (0, 0)$ todo entorno U de x_0 ha de contener alguna circunferencia de radio $1/n$, y el arco cuya imagen rodea dicha circunferencia no puede cerrarse en U pero sí en X, por lo que $(i_U)_*$ no es trivial, lo que prueba que Y no es semilocalmente simplemente conexo, luego no puede tener recubridor universal.

c) Si S_1 y S_2 son dos superficies compactas y conexas con S_1 no orientable entonces $S_1\#S_2$ es no orientable.

Es verdadera, para ambas superficies podemos encontrar representaciones poligonales suyas $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ con una única expresión, con lo que serán de la forma:

$$\mathcal{P}_1 = \langle a_1, \ldots, a_n; w_1\rangle, \qquad \mathcal{P}_2 = \langle b_1, \ldots, b_m; w_2\rangle$$

Como S_1 no es orientable y $\mathcal{P}_1$ tiene una expresión tendremos que esta expresión contiene dos letras con el mismo exponente. Hemos visto en teoría que la presentación:

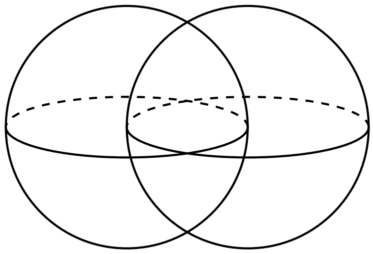
$$\mathcal{P} = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m; w_1 w_2 \rangle$$

es una presentación poligonal de $S_1 \# S_2$, que contiene una letra con el mismo exponente, al contener la expresión $w_1 w_2$ la palabra w_1, por lo que $S_1 \# S_2$ no es orientable.

Ejercicio 2. Calcula el grupo fundamental de los espacios topológicos X, Y siguientes:

a) $X = E_1 \cup E_2$, donde E_1, E_2 son las esferas de $\mathbb{R}^3$ de radio 2 y centradas, respectivamente, en los puntos $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$.

El conjunto que nos dan es el siguiente:

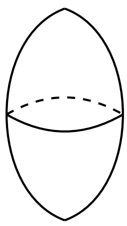


Si consideramos los conjuntos:

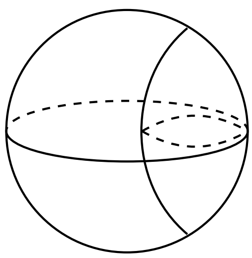
$$U = X \setminus \{(2, 0, 0)\}, \qquad V = X \setminus \{(-2, 0, 0)\}$$

Tenemos:

- Claramente $X = U \cup V$ con U y V abiertos.
- U, V y $U \cap V$ son arcoconexos como unión de conjuntos arcoconexos que se intersecan.
- $U \cap V$ tiene como retracto de deformación el conjunto:



  Que es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$, por lo que es simplemente conexo.
- U tiene como retracto de deformación el conjunto Z:

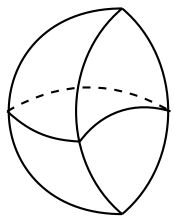


Si consideramos:

$$W = Z \setminus \{(-1,0,0)\}, \qquad O = Z \setminus \{(1,0,0)\}$$

Tenemos que:

- $Y = W \cup O$, con W y O abiertos.
- W, O y $W \cap O$ son arcoconexos.
- W tiene a E_2 como retracto de deformación, por lo que $\pi_1(W) = \{1\}$.
- O tiene al conjunto:



Como retracto de deformación, que es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$, por lo que $\pi_1(O) = \{1\}$.

- Claramente V es homeomorfo a U (basta considerar una rotación), por lo que también será $\pi_1(V) = \{1\}$.

Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen concluimos que $\pi_1(X) = \{1\}$.

b) $Y = S_1 \cup S_2$, donde $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ son dos superficies topológicas conexas que se cortan en un único punto y con grupos fundamentales isomorfos, respectivamente, a los grupos G_1 y G_2.

Tenemos que $S_1 \cap S_2 = \{x_0\}$. Sabemos que los discos regulares de S_1 forman una base de entornos abiertos en S_1, y que los discos regulares de S_2 forman una base de entornos abiertos de S_2. Sean por tanto D_1 un disco regular que contiene a x_0 en S_1 y D_2 un disco regular que contiene a x_0 en S_2, podemos considerar los conjuntos:

$$U = S_2 \cup D_1, \qquad V = S_1 \cup D_2$$

Vemos que:

- U y V son arcoconexos como unión de dos conjuntos arcoconexos con intersección no vacía, pues:

$$S_2 \cap D_1 = \{x_0\} = S_1 \cap D_2$$

- $U \cap V$ es también arcoconexo como unión de dos conjuntos arcoconexos como intersección no vacía:

$$U \cap V = D_1 \cup D_2, \qquad D_1 \cap D_2 = \{x_0\}$$

- U y V son abiertos.

- Para calcular el grupo fundamental de U vemos que U tiene como retracto de deformación a S_2, pues podemos contraer D_1 a $\{x_0\}$, obtenido así que:

$$\pi_1(U) \cong \pi_1(S_2) \cong G_2$$

- Para calcular el grupo fundamental de V podemos hacer un razonamiento análogo, pues tiene a S_1 como retracto de deformación, con lo que:

$$\pi_1(V) \cong \pi_1(S_1) \cong G_1$$

- Tenemos que $U \cap V = D_1 \cup D_2$ tiene por retracto de deformación $\{x_0\}$, con lo que $U \cap V$ es simplemente conexo.

Así, aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen vemos que:

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong G_2 * G_1$$

Ejercicio 3. Sean $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ con $N = (0,0,1)$, $S = (0,0,-1)$ y $r : X \to A$ la aplicación continua

$$r(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y,0)$$

donde $A = \mathbb{S}^2 \cap \{(x,y,z) : z = 0\}$.

a) Demuestra que $H : X \times [0,1] \to X$ dada por

$$H((x,y,z),t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x,y,z) + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y,0)$$

es una homotopía entre r y la identidad en X.

Vemos que:

$$H((x,y,z),t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x,y,z) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) r(x,y,z) \qquad \forall ((x,y,z),t) \in X \times [0,1]$$

La aplicación H es continua, como suma de aplicaciones continuas. Vemos además que:

$$\begin{aligned} H((x,y,z),0) &= (x,y,z) = Id_X(x,y,z) \qquad \forall (x,y,z) \in X \\ H((x,y,z),1) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y,0) = r(x,y,z) \in A \qquad \forall (x,y,z) \in X \end{aligned}$$

Por lo que H es una homotopía entre Id_X y $i \circ r$.

b) Si $Y = \mathbb{RP}^2 \setminus \{[N]\}$, comprueba que H se puede inducir a una homotopía

$$\overline{H} : Y \times [0,1] \to Y$$

y utiliza esto para calcular el grupo fundamental del plano proyectivo menos un punto.

Definimos la aplicación $\overline{H} : Y \times [0,1] \to Y$ dada por:

$$\overline{H}([(x,y,z)],t) = \left[\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x,y,z) + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y,0)\right]$$

Que está bien definida, pues si (x,y,z) está relacionado con otro punto mediante la relación de equivalencia:

- El caso (x,y,z) es trivial.
- Si está relacionado con $(-x,-y,-z)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\overline{H}([(-x,-y,-z)],t) &= \left[\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(-x,-y,-z) + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}(-x,-y,0)\right] \\
&= \left[-\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x,y,z) + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y,0)\right)\right] \\
&= \left[\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x,y,z) + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y,0)\right]
\end{aligned}$$

Sea $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$ la aplicación proyección al cociente, recordamos que vimos en teoría que esta aplicación es recubridora. Vemos además que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[d, "p\times Id"'] & X \arrow[d, "p"] \\
Y \times [0,1] \arrow[r, "\overline{H}"] & Y
\end{tikzcd}$$

Como p es una aplicación recubridora y $Id : [0,1] \to [0,1]$ también (de hecho es un homeomorfismo), tenemos que $p \times Id$ es una aplicación recubridora, luego será continua, sobreyectiva y abierta, es decir, una identificación. Tenemos así que:

$$\overline{H} \text{ es continua} \iff \overline{H} \circ (p \times Id) \text{ es continua}$$

Pero como $\overline{H} \circ (p \times Id) = p \circ H$ y $p \circ H$ es continua como composición de aplicaciones continuas deducimos que $\overline{H}$ es continua. Como H era una homotopía entre Id_X y r, vemos ahora que $\overline{H}$ es una homotopía entre Id_Y y $p \circ r$, por lo que hemos probado que $p(A) = \mathbb{RP}$ es un retracto de deformación de Y, por lo que:

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(\mathbb{RP})$$

Sin embargo, en Topología I se vió que $\mathbb{RP} \cong \mathbb{S}^1$, de donde:

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(\mathbb{RP}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

Por lo que el grupo fundamental de Y es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Ejercicio 4. Sean $\mathbb{T}$ el toro y S_1, S_2 las superficies siguientes:

a) S_1 está dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e; ab^{-1}cde, ad^{-1}e^{-1}bc^{-1}\rangle$$

b) $S_2 = \mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2\#\mathbb{T}$.

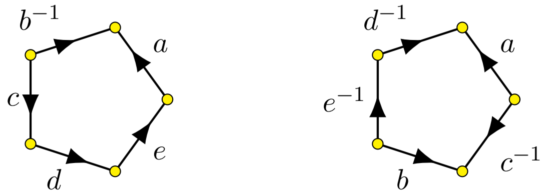
¿Son S_1 y S_2 homeomorfas?

Tratamos de clasificar las superficies S_1 y S_2:

a) Para S_1, tenemos que:

- $C = 2$.
- $A = 5$.
- $V = 1$.

Y hemos calculado el número de vértices viendo que:



Por lo que:

$$\chi(S_1) = V - A + C = 1 - 5 + 2 = -2$$

Luego $S_1 \cong \mathbb{T}_2$ ó $S_1 \cong \mathbb{RP}^2_4$. Para distinguir cual es, buscamos una presentación poligonal equivalente pero solo de una expresión, mediante transformaciones elementales vemos que:

$$ab^{-1}cde, ad^{-1}e^{-1}bc^{-1} \rightsquigarrow ab^{-1}cde, e^{-1}bc^{-1}ad^{-1} \rightsquigarrow ab^{-1}cdbc^{-1}ad^{-1}$$

Por lo que una presentación poligonal equivalente para S_1 es:

$$\langle a, b, c, d; ab^{-1}cdbc^{-1}ad^{-1}\rangle$$

Vemos que esta es no orientada, puesto que a aparece con el mismo exponente, por lo que deducimos que S_1 es una superficie no orientable, con lo que debe ser:

$$S_1 \cong \mathbb{RP}^2_4$$

b) Para S_2 aplicamos la fórmula (donde S y T son superficies compactas y conexas):

$$\chi(S\#T) = \chi(S) + \chi(T) - 2$$

Vista en teoría, por lo que:

$$\begin{aligned}\chi(\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2\#\mathbb{T}) &= \chi(\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2) + \chi(\mathbb{T}) - 2 = \chi(\mathbb{RP}^2) + \chi(\mathbb{RP}^2) + \chi(\mathbb{T}) - 4\\ &= 1 + 1 + 0 - 4 = -2\end{aligned}$$

Al igual que antes tenemos que $S_2 \cong \mathbb{T}_2$ ó $S_2 \cong \mathbb{RP}^2_4$. Como hemos visto en el Ejercicio 1 c) de este examen, la suma conexa de una superficie no orientable con otra superfice es no orientable, y como:

$$S_2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T} = \mathbb{RP}^2 \# (\mathbb{RP}^2 \# T)$$

Vemos que S_2 es no orientable, con lo que $S_2 \cong \mathbb{RP}^2_4$.

En definitiva vemos que S_1 y S_2 sí son homeomorfas, ya que:

$$S_1 \cong \mathbb{RP}^2_4 \cong S_2$$