

Lógica y Teoría Descriptiva de Conjuntos

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Lógica y Teoría Descriptiva de Conjuntos

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Lógica Proposicional	5
1.1. Semántica	5
1.1.1. Algoritmo de Davis & Putnam	8
1.2. Demostraciones	16
1.2.1. Resultados útiles a la hora de realizar demostraciones	20
1.3. Teoremas de coherencia y adecuación	22
2. Lógica de Primer Orden	25
2.1. Semántica	27
2.2. Demostraciones	29
2.2.1. Definición de una demostración	29
2.2.2. Primeros resultados	31
2.3. Teoremas de adecuación y coherencia	32
2.4. Sistemas matemáticos	33
2.4.1. Lenguajes de Primer Orden con Igualdad	33
2.4.2. Aritmética de Primer Orden	34
2.4.3. Teoría de conjuntos (de Zermelo-Fraenkel)	35
3. Introducción a la Teoría Descriptiva de Conjuntos	39
3.1. Construcción de fórmulas	39
3.2. Conjunto de Cantor	45
3.3. Jerarquía de Borel	48
3.3.1. Conjunto de Vitali	50
3.4. Jerarquía generalizada	53
3.4.1. Motivación	53
3.5. Buenos órdenes	55
3.6. Universalidad	58
3.6.1. Espacios topológicos metrizablees y separables	58
3.6.2. Conjuntos universales para la jerarquía	60
3.7. Conjuntos completos	61
3.7.1. Problema de Cauchy	62
4. Ejercicios	63
4.1. Lógica Proposicional	63
4.2. Lógica de Primer Orden	80
4.3. Teoría Descriptiva de Conjuntos	95

El presente documento es un resumen del microcredencial de “Lógica y Teoría Descriptiva de Conjuntos”, que recoge los principales conceptos que se impartieron en el mismo. Si cursa el microcredencial se recomienda ver los recursos proporcionados por el profesorado. Si está cursando actualmente la asignatura de “Lógica y Métodos Discretos” del grado de Informática, los dos primeros capítulos pueden serle de gran ayuda.

A lo largo del curso trabajaremos en \mathbb{Z}_2 , por lo que se recomienda al lector repasar los apuntes de Álgebra I en caso de no estar familiarizado con dicho cuerpo.

Observación. Al ser adicional, es necesario aún completar correctamente el presente documento. Recomendamos por tanto a leer con detalle el contenido de este curso, prestando especial atención a pequeños errores que se hayan podido cometer, e instamos al lector a complementar el contenido del mismo.

1. Lógica Proposicional

Consideraremos un conjunto finito de proposiciones atómicas, que serán para nosotros enunciados indivisibles. Nos interesará la veracidad o falsedad de cada una de estas proposiciones. Consideraremos sobre estas las conectivas \neg , \wedge , \vee , \rightarrow y \leftrightarrow . De esta forma, somos capaces de definir lo que es una proposición en nuestro lenguaje.

Definición 1.1 (Proposición). Definimos las proposiciones de forma recursiva¹:

1. Las proposiciones atómicas son proposiciones.
2. Si α y β son proposiciones, también lo son:

$$\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta, \alpha \leftrightarrow \beta$$

3. No hay más proposiciones que las que se puedan obtener siguiendo una secuencia finita de pasos a partir de las enunciadas.

1.1. Semántica

Una vez definida lo que es una proposición, pasamos a lo que nos interesa, asignar un valor de verdad o de falsedad a cada una de las proposiciones que nos encontremos. Para ello, consideraremos una aplicación del conjunto de las proposiciones en \mathbb{Z}_2 , e interpretaremos el valor de 0 como falso y el valor de 1 como verdad.

Definición 1.2 (Interpretación). Sea \mathcal{P} el conjunto de todas las proposiciones de un lenguaje proposicional, una interpretación sobre el mismo es una aplicación $I : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ que verifica:

1. $I(\neg a) = 1 + I(a)$.
2. $I(a \wedge b) = I(a)I(b)$.
3. $I(a \vee b) = I(a) + I(b) + I(a)I(b)$.
4. $I(a \rightarrow b) = 1 + I(a) + I(a)I(b)$.
5. $I(a \leftrightarrow b) = 1 + I(a) + I(b)$.

Para cualesquiera proposiciones $a, b \in \mathcal{P}$.

¹Algo que será habitual en este curso.

Observación. Observemos que, gracias a la naturaleza recursiva de las interpretaciones, basta dar un valor de \mathbb{Z}_2 a cada proposición atómica para obtener una interpretación: conocidos los valores de las proposiciones atómicas conocemos el valor de cualquier proposición y viceversa.

Definición 1.3. Sea α y β dos proposiciones de forma que $I(\alpha) = I(\beta)$ para cualquier interpretación I , entonces escribiremos que $\alpha \equiv \beta$ y podemos decir que α y β son semánticamente equivalentes.

Definición 1.4. Sea α una proposición:

- Si existe una interpretación I de forma que $I(\alpha) = 1$, diremos que p es **satisfacible**.
- Si existe una interpretación I de forma que $I(\alpha) = 0$, diremos que p es **refutable**.
- Si $I(\alpha) = 1$ para cualquier interpretación I , diremos que p es una **tautología**.
- Si $I(\alpha) = 0$ para cualquier interpretación I , diremos que p es una **contradicción**.

Definición 1.5 (Consecuencia lógica). Sea $\Gamma \cup \{p\}$ un conjunto de proposiciones, decimos que p es consecuencia lógica de Γ (notado por $\Gamma \models p$), si dada una interpretación I , siempre que se tenga que $I(\gamma) = 1$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, entonces se tiene que $I(p) = 1$.

Notación. Por comodidad, si p es una proposición de forma que $\emptyset \models p$, entonces notaremos:

$$\models p$$

Notemos que en este caso p es una tautología, ya que estamos diciendo que $I(p) = 1$ para cualquier² interpretación I .

Proposición 1.1. Se verifica que $\Gamma \models p$ si y solo si $(1 + I(p)) \prod_{\gamma \in \Gamma} I(\gamma) = 0$.

Demostración. Veamos las dos implicaciones:

\implies) Sea I una interpretación:

- Si existe un $\gamma \in \Gamma$ de forma que $I(\gamma) = 0$, entonces tenemos el resultado.
- En caso contrario, tendremos que $I(\gamma) = 1$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$. En dicho caso, como $\Gamma \models p$, se tendrá que $I(p) = 1$, por lo que:

$$1 + I(p) = 0 \implies (1 + I(p)) \prod_{\gamma \in \Gamma} I(\gamma) = 0$$

\impliedby) Sea I una interpretación que verifica $I(\gamma) = 1$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, como \mathbb{Z}_2 es un dominio de integridad, de $(1 + I(p)) \prod_{\gamma \in \Gamma} I(\gamma) = 0$ deducimos que

$$I(p) + 1 = 0, \text{ por lo que } I(p) = 1 \text{ y entonces se tiene que } \Gamma \models p.$$

²Cualquiera que haga ciertos todos los elementos del vacío.

□

Teorema 1.2 (de la deducción). *Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ un conjunto de proposiciones, equivalentes:*

1. $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$
2. $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$

Demostración. Demostramos las dos implicaciones:

- 1) \implies 2) Sea I una interpretación de forma que $I(\alpha) = 1$ y que $I(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$, entonces (por 1) deducimos que $I(\alpha \rightarrow \beta) = 1$, luego:

$$1 = I(\alpha \rightarrow \beta) = 1 + \cancel{I(\alpha)}^1 + \cancel{I(\alpha)}^1 I(\beta) = 1 + 1 + I(\beta) = I(\beta)$$

- 2) \implies 1) Sea I una interpretación de forma que $I(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$:

- Si $I(\alpha) = 0$, entonces:

$$I(\alpha \rightarrow \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) = 1$$

Por lo que se tiene 1.

- Si $I(\alpha) = 1$, como $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$, entonces $I(\beta) = 1$, por lo que:

$$I(\alpha \rightarrow \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) = 1 + 1 + 1 = 1$$

□

Ejemplo. Demostraremos ahora que varias proposiciones son tautologías:

$\models \alpha \rightarrow \alpha$

Por el Teorema de la deducción (1.2), $\models \alpha \rightarrow \alpha$ es equivalente a ver que $\{\alpha\} \models \alpha$. En efecto, sea I una interpretación de forma que $I(\alpha) = 1$, tenemos que $I(\alpha) = 1$.

$\models \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

Por el Teorema de la deducción, es equivalente ver que $\{\alpha\} \models \beta \rightarrow \alpha$; que nuevamente por el Teorema de la deducción es equivalente ver que $\{\alpha, \beta\} \models \alpha$. En efecto, sea I una interpretación de forma que $I(\alpha) = I(\beta) = 1$, entonces $I(\alpha) = 1$.

$\models (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

Por el Teorema de la deducción aplicado 3 veces, es equivalente ver que:

$$\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \models \gamma$$

Sea I una interpretación de forma que:

$$1 = I(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) = I(\alpha \rightarrow \beta) = I(\alpha)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= I(\alpha \rightarrow \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) = 1 + 1 + I(\beta) = I(\beta) \implies I(\beta) = 1 \\ 1 &= I(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta \rightarrow \gamma) \\ &= 1 + I(\alpha) + I(\alpha)(1 + I(\beta) + I(\beta)I(\gamma)) = 1 + 1 + 1(1 + 1 + I(\gamma)) \\ &= I(\gamma) \implies \underline{I(\gamma) = 1} \end{aligned}$$

$$\models (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha)$$

Por el Teorema de la deducción aplicado 2 veces, es equivalente ver que:

$$\{\neg\alpha \rightarrow \neg\beta, \neg\alpha \rightarrow \beta\} \models \alpha$$

Sea I una interpretación de forma que:

$$1 = I(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) = 1 + I(\neg\alpha) + I(\neg\alpha)I(\neg\beta)$$

$$1 = I(\neg\alpha \rightarrow \beta) = 1 + I(\neg\alpha) + I(\neg\alpha)I(\beta)$$

Entonces (sumando):

$$0 = I(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) + I(\neg\alpha \rightarrow \beta) = I(\neg\alpha)(I(\neg\beta) + I(\beta)) \stackrel{(*)}{=} I(\neg\alpha)$$

Donde en $(*)$ hemos usado que $I(\neg\beta) = 1 + I(\beta) \implies I(\neg\beta) + I(\beta) = 1$.

Como $I(\neg\alpha) = 0$, se tiene que $I(\alpha) = 1$, como queríamos demostrar.

Definición 1.6. Sea Γ un conjunto de proposiciones, decimos que Γ es **inconsistente** si para toda interpretación I existe $\gamma \in \Gamma$ de forma que $I(\gamma) = 0$.

Proposición 1.3. Sea $\Gamma \cup \{\alpha\}$ un conjunto de proposiciones, equivalen:

1. $\Gamma \models \alpha$.
2. $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente.

Demostración. Demostramos las dos implicaciones:

1) \implies 2) Sea I una interpretación:

- Si existe un $\gamma \in \Gamma$ de forma que $I(\gamma) = 0$, entonces Γ es inconsistente, de donde $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ también lo es.
- Si $I(\gamma) = 1$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, aplicando que $\Gamma \models \alpha$ deducimos que $I(\alpha) = 1 \implies I(\neg\alpha) = 1 + I(\alpha) = 0$, por lo que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente.

2) \implies 1) Sea I una interpretación de forma que $I(\gamma) = 1$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, como $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente, deducimos que $I(\neg\alpha) = 0$, luego $I(\alpha) = 1$. \square

1.1.1. Algoritmo de Davis & Putnam

Definición 1.7. Introducimos definiciones que nos serán útiles para llegar al algoritmo de Davis & Putnam:

- Dada una proposición atómica a , entonces decimos que a y $\neg a$ son literales.
- Sea a una proposición atómica, denotamos $a^c = \neg a$ y $(\neg a)^c = a$. Para un literal l , decimos que l^c es su complemento.
- Sean l_1, \dots, l_n literales, entonces decimos que $l_1 \vee \dots \vee l_n$ es una cláusula.
- Sea α una proposición, decimos que está en forma normal conjuntiva (abreviado como fnc) si α es de la forma $c_1 \wedge \dots \wedge c_n$, con c_1, \dots, c_n cláusulas.

- A la cláusula sin literales (compuesta por la disyunción de 0 literales) la llamamos cláusula vacía, y la denotamos por \square .

Proposición 1.4. *Sea I una interpretación, entonces:*

$$I(\square) = 0$$

Demostración. Como $\square \vee a = a$ para cualquier proposición atómica a , entonces:

$$I(\square \vee a) = I(\square) + I(a) + I(\square)I(a) = I(a)$$

De donde deducimos:

$$I(\square) + I(\square)I(a) = I(\square)(1 + I(a)) = 0$$

Luego $I(\square) = 0$ o $I(a) = 1$, pero como la proposición atómica a era arbitraria (y sabemos que hay proposiciones atómicas que no son tautologías), deducimos que ha de ser $I(\square) = 0$. \square

Proposición 1.5. *Toda proposición puede expresarse en una proposición semánticamente equivalente que se encuentre en forma normal conjuntiva.*

Demostración. Aunque no lo demostraremos, el lector puede hacerse una idea de que el enunciado es cierto, con ayuda de las siguientes reglas:

- $\neg\neg a \equiv a$ (regla de la doble negación)
- $\neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$ y $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$ (reglas de De Morgan)
- $a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$ y $a \leftrightarrow b \equiv (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$
- $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (ley distributiva)

\square

Ejemplo. Sea $\alpha = (a \rightarrow b) \rightarrow a$, buscamos una proposición semánticamente equivalente en forma normal conjuntiva. Para ello, primero quitamos \rightarrow de la proposición:

$$(a \rightarrow b) \rightarrow a \equiv \neg(\neg a \vee b) \vee a$$

Posteriormente, aplicamos la regla de De Morgan, así como la de la doble negación:

$$\neg(\neg a \vee b) \vee a \equiv (\neg\neg a \wedge \neg b) \vee a \equiv (a \wedge \neg b) \vee a$$

Aplicando la ley distributiva ya llegamos a una proposición semánticamente equivalente en forma normal conjuntiva:

$$(a \vee a) \wedge (a \vee \neg b)$$

Sin embargo, como $a \vee a \equiv a$, podemos seguir simplificando, obteniendo que:

$$a \wedge (a \vee \neg b)$$

Pero como:

$$\begin{aligned} I(\alpha \wedge (a \vee \neg b)) &= I(\alpha)(I(a) + I(\neg b) + I(\alpha)I(\neg b)) \\ &= I(\alpha)I(a) + I(\alpha)I(\neg b) + I(\alpha)I(\alpha)I(\neg b) \\ &= I(\alpha) + I(\alpha)I(\neg b) + I(\alpha)I(\neg b) = I(\alpha) \end{aligned}$$

Llegamos finalmente a que:

$$(a \rightarrow b) \rightarrow a \equiv a$$

Proposición 1.6. *Dado el conjunto de proposiciones $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, son equivalentes:*

1. $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ es inconsistente.
2. $\{\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n\}$ es inconsistente.

Demostración. Demostraremos el resultado mediante una doble implicación.

\Rightarrow) Supongamos que $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ es inconsistente; y sea I una interpretación arbitraria. Por ser dicho conjunto inconsistente, $\exists \psi_i \in \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ tal que $I(\psi_i) = 0$. Por tanto:

$$I\left(\bigwedge_{i=1}^n \psi_i\right) = \prod_{k=1}^n I(\psi_k) = 0$$

puesto que uno de los factores ($I(\psi_i)$) es 0. Por tanto, $\{\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n\}$ es inconsistente.

\Leftarrow) Supongamos que $\{\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n\}$ es inconsistente; y sea I una interpretación arbitraria. Por ser dicho conjunto inconsistente, tenemos que:

$$I\left(\bigwedge_{i=1}^n \psi_i\right) = \prod_{k=1}^n I(\psi_k) = 0$$

Por tanto, por ser \mathbb{Z}_2 un cuerpo (y en particular un dominio de integridad), tenemos que $\exists \psi_i \in \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ tal que $I(\psi_i) = 0$. Por tanto, $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ es inconsistente.

□

Proposición 1.7. *Dado un conjunto de proposiciones Γ , si consideramos el conjunto Γ' resultante de considerar para cada fórmula de Γ su forma normal conjuntiva y luego tomar la unión de todas ellas, se tiene que Γ es inconsistente si y solo si Γ' es inconsistente.*

Demostración. Puede demostrarse fácilmente usando la Proposición 1.6. □

El último resultado es de gran importancia, ya que recordemos que, si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de proposiciones, que $\Gamma \models \varphi$ es equivalente a probar que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente, conjunto que puede transformarse en un conjunto de cláusulas Δ que será inconsistente si y solo si lo era $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

De esta forma, notemos que el estudio de que una proposición sea consecuencia lógica de otra se reduce a estudiar si un conjunto de cláusulas es o no inconsistente.

El algoritmo

El algoritmo de Davis y Putnam consiste en aplicar a un conjunto de cláusulas las reglas que a continuación se exponen, intentando siempre aplicar la primera en el orden en que vienen dadas. Cada conjunto de cláusulas que obtengamos al aplicar las reglas de esta forma será inconsistente si y solo si lo era el original del que proviene (en el caso de la última regla, el conjunto de partida es inconsistente si y solo si lo son los dos conjuntos que se generan después de aplicar la regla):

Regla 1 (regla de las tautologías). Quítense todas las fórmulas que sean tautologías, es decir, las que contengan un literal y su complementario.

Regla 2 (regla de los literales). Si hay una cláusula que es un literal L en Δ , obténgase Δ' a partir de Δ eliminando todas las cláusulas de Δ que contengan a L .

- Si Δ' es el conjunto vacío, entonces Δ no será inconsistente, ya que el vacío no lo es.
- En otro caso, obténgase Δ'' a partir de Δ' suprimiendo L^c de Δ' .
Notemos que si L^c era una cláusula, entonces el resultado de suprimir L^c es \square , la cláusula vacía, en cuyo caso, el conjunto $\{\square\}$ es inconsistente.

Regla 3 (regla de los literales puros). Si un literal L aparece en algunas cláusulas y L^c no aparece en ninguna, quítense todas las cláusulas conteniendo a L .

Regla 4 (regla de la generalización). Si una cláusula C tiene todos sus literales en otra C' (es decir $C \subseteq C'$), quítese C' .

Regla 5 (regla de la subdivisión). Si un literal L y su complementario L^c están presentes en el conjunto de cláusulas, construir dos nuevos conjuntos de cláusulas de la siguiente forma:

- El primero se obtiene quitando todas las cláusulas conteniendo a L y borrando las ocurrencias de L^c .
- El segundo se obtiene quitando todas las cláusulas conteniendo a L^c y borrando las ocurrencias de L .

En este caso, el conjunto original es inconsistente si y solo si lo son los dos conjuntos resultado de aplicar esta regla.

Teorema 1.8 (Funcionamiento de Davis & Putnam). *Sea Δ un conjunto de cláusulas, Δ es inconsistente si y solo si lo son todos y cada uno de los conjuntos obtenidos tras aplicar las reglas del algoritmo de Davis y Putnam sobre Δ .*

Demostración. Para ello, hemos de probar que el conjunto que obtenemos al aplicar cada regla sobre Δ es inconsistente si y solo si lo es Δ :

Regla 1. Sea α una tautología y Δ un conjunto de cláusulas. Veamos que $\Delta \cup \{\alpha\}$ es inconsistente si y solo si Δ lo es. Por el Ejercicio ??, sabemos que:

$$\Delta \cup \{\alpha\} \text{ es inconsistente} \iff \left(\bigvee_{\delta \in \Delta} \delta \right) \wedge \alpha \text{ es inconsistente}$$

Sea ahora I una interpretación arbitraria. Tenemos que $\Delta \cup \{\alpha\}$ es inconsistente si y solo si:

$$0 = I \left(\left(\bigvee_{\delta \in \Delta} \delta \right) \wedge \alpha \right) = I \left(\bigvee_{\delta \in \Delta} \delta \right) \cdot I(\alpha)$$

Por ser α una tautología, $I(\alpha) = 1$. Por tanto, por ser \mathbb{Z}_2 un DI, tenemos que:

$$0 = I\left(\bigvee_{\delta \in \Delta} \delta\right)$$

Por tanto, hemos probado que:

$$\left(\bigvee_{\delta \in \Delta} \delta\right) \wedge \alpha \text{ es inconsistente} \iff \left(\bigvee_{\delta \in \Delta} \delta\right) \text{ es inconsistente}$$

Por último, usando de nuevo el Ejercicio ??, tenemos que:

$$\Delta \text{ es inconsistente} \iff \left(\bigvee_{\delta \in \Delta} \delta\right) \text{ es inconsistente}$$

Por tanto, hemos probado que $\Delta \cup \{\alpha\}$ es inconsistente si y solo si Δ lo es.

Mediante una sencilla e inmediata inducción sobre el número de tautologías en Δ , se prueba que un conjunto de cláusulas Δ es inconsistente si y solo si Δ' lo es, donde:

$$\Delta' = \Delta \setminus \{\delta \in \Delta \mid \delta \text{ es una tautología}\}$$

Regla 2. Sea L un literal, y sea Δ un conjunto de cláusulas tal que $L \in \Delta$. Definimos:

$$\begin{aligned} \Delta' &= \Delta \setminus \{\alpha \in \Delta \mid \alpha \vee L = \alpha\} \\ &= \Delta \setminus \{\alpha \in \Delta \mid \alpha \text{ contiene a } L\} \end{aligned}$$

Si $\Delta' = \emptyset$, consideramos una interpretación I tal que $I(L) = 1$. De esta forma, tenemos que para cada $\alpha \in \Delta$:

$$\alpha = \alpha \vee L \implies I(\alpha) = I(\alpha \vee L) = I(\alpha) + I(L) + I(\alpha) \cdot I(L) = 2I(\alpha) + 1 = 1$$

Por tanto, hemos encontrado una interpretación I tal que $I(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Delta$. Por tanto, Δ no es inconsistente.

Supongamos ahora que $\Delta' \neq \emptyset$. Consideramos el conjunto:

$$\Delta'' = \{\alpha \in \Delta' \mid \alpha \vee L^c \neq \alpha\} \cup \{\alpha \mid (\alpha \vee L^c \neq \alpha) \wedge (\exists \alpha' \in \Delta' \text{ con } \alpha' = \alpha \vee L^c)\}$$

Notemos que este conjunto resulta de, partiendo de Δ' , añadimos las cláusulas que no contienen a L^c y, de las que lo tienen, eliminamos L^c .

Demostramos que Δ es inconsistente si y solo si Δ'' lo es.

\Rightarrow) Demostraremos el recíproco. Supongamos que Δ'' no es inconsistente, por lo que existe una interpretación \tilde{I} tal que $\tilde{I}(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Delta''$.

Recordemos que, para definir una interpretación, basta con asignarle imágenes a las proposiciones atómicas. Equivalentemente, podemos definir una interpretación asignando valores a los literales, aunque hemos de asegurarnos de que $I(\lambda) = 1 + I(\lambda^c)$ para todo literal λ . Consideramos por tanto la interpretación I tal que:

$$I(L) = 1$$

$$I(\lambda) = \tilde{I}(\lambda) \text{ para todo literal } \lambda \text{ tal que } \left(\bigvee_{\alpha \in \Delta''} \alpha \right) = \lambda \vee \left(\bigvee_{\alpha \in \Delta''} \alpha \right)$$

Notemos que simplemente hemos definido I en L y en los literales que aparecen en Δ'' . El valor que tomen el resto de literales no nos será de relevancia. Notemos además que está bien definida, puesto que L no aparece en Δ' y por tanto tampoco en Δ'' .

Por tanto, para cada $\alpha \in \Delta$:

- Si $\alpha = \alpha \vee L$ (L aparece en α), entonces:

$$I(\alpha) = I(\alpha \vee L) = I(\alpha) + I(L) + I(\alpha) \cdot I(L) = 2I(\alpha) + 1 = 1$$

- Si $\alpha \neq \alpha \vee L$ (L no aparece en α), entonces $\alpha \in \Delta'$.

- Si $\alpha = \alpha \vee L^c$ (L^c aparece en α):

Entonces consideramos $\alpha' \in \Delta''$ resultante de eliminar L^c de α ; es decir, $\alpha = \alpha' \vee L^c$. Como $\alpha' \in \Delta''$, tenemos que $I(\alpha') = 1$. Por tanto:

$$I(\alpha) = I(\alpha' \vee L^c) = I(\alpha') + I(L^c) + I(\alpha') \cdot I(L^c) = I(\alpha') = 1$$

- Si $\alpha \neq \alpha \vee L^c$ (L^c no aparece en α):

Entonces, $\alpha \in \Delta''$ y por tanto $I(\alpha) = 1$.

Por tanto, hemos encontrado una interpretación I tal que $I(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Delta$. Por tanto, Δ no es inconsistente.

Por el recíproco, tenemos que si Δ es inconsistente, entonces Δ'' también lo es.

\Leftarrow) Supongamos ahora que Δ'' es inconsistente, y consideramos una interpretación I arbitraria. Veamos que existe $\gamma \in \Delta$ tal que $I(\gamma) = 0$.

- Si $I(L) = 0$, como $L \in \Delta$ basta con considerar $\gamma = L$.

- Si $I(L) = 1$, entonces $I(L^c) = 0$.

Por ser Δ'' inconsistente, tenemos que $\exists \alpha \in \Delta''$ tal que $I(\alpha) = 0$.

- Si $\alpha \in \Delta' \subset \Delta$, entonces basta con considerar $\gamma = \alpha$.

- Si $\alpha \notin \Delta'$, entonces $\exists \alpha' \in \Delta' \subset \Delta$ tal que $\alpha' = \alpha \vee L^c$. Entonces:

$$I(\alpha') = I(\alpha \vee L^c) = I(\alpha) + I(L^c) + I(\alpha) \cdot I(L^c) = 0$$

Por tanto, basta con considerar $\gamma = \alpha'$.

Por tanto, hemos probado que $\exists \gamma \in \Delta$ tal que $I(\gamma) = 0$. Por tanto, Δ es inconsistente.

Regla 3. Sea L un literal, y sea Δ un conjunto de cláusulas verificando:

- $\exists \alpha \in \Delta$ tal que $\alpha = \alpha \vee L$.
- $\nexists \alpha \in \Delta$ tal que $\alpha = \alpha \vee L^c$.

Consideramos el conjunto:

$$\Delta' = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha \neq \alpha \vee L\}$$

Demostramos que Δ es inconsistente si y solo si Δ' lo es.

\Rightarrow) Demostraremos el recíproco. Supongamos que Δ' no es inconsistente, por lo que existe una interpretación \tilde{I} tal que $\tilde{I}(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Delta'$. Al igual que hicimos en la Regla 2, consideramos la interpretación I tal que:

$$I(L) = 1$$

$$I(\lambda) = \tilde{I}(\lambda) \text{ para todo literal } \lambda \text{ tal que } \left(\bigvee_{\alpha \in \Delta'} \alpha \right) = \lambda \vee \left(\bigvee_{\alpha \in \Delta'} \alpha \right)$$

Por tanto, para cada $\alpha \in \Delta$:

- Si $\alpha = \alpha \vee L$ (L aparece en α), entonces:

$$I(\alpha) = I(\alpha \vee L) = I(\alpha) + I(L) + I(\alpha) \cdot I(L) = 2I(\alpha) + 1 = 1$$

- Si $\alpha \neq \alpha \vee L$ (L no aparece en α), entonces $\alpha \in \Delta'$. Por tanto, $I(\alpha) = 1$.

Por tanto, hemos encontrado una interpretación I tal que $I(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Delta$. Por tanto, Δ no es inconsistente.

Por el recíproco, tenemos que si Δ es inconsistente, entonces Δ' también lo es.

\Leftarrow) Supongamos ahora que Δ' es inconsistente. Como $\Delta' \subset \Delta$, tenemos que Δ también lo es.

Regla 4. Sea Δ un conjunto de cláusulas, y sean $C, C' \in \Delta$ dos cláusulas tales que $C' = C' \vee C$; es decir, todos los literales de C están en C' . Consideramos el conjunto:

$$\Delta' = \Delta \setminus \{C'\}$$

Demostramos que Δ es inconsistente si y solo si Δ' lo es.

\Rightarrow) Supongamos que Δ es inconsistente. Entonces, para cada interpretación I existe $\alpha \in \Delta$ tal que $I(\alpha) = 0$.

Veamos que $\exists \gamma \in \Delta'$ tal que $I(\gamma) = 0$.

- Si $\alpha \neq C'$, entonces $\alpha \in \Delta'$ y basta con considerar $\gamma = \alpha$.
- Si $\alpha = C'$, entonces:

$$0 = I(C') = I(C' \vee C) = I(C) + I(C') + I(C) \cdot I(C') = I(C) + 0 + 0 = I(C)$$

Por tanto, basta con considerar $\gamma = C$.

Por tanto, hemos probado que $\exists \gamma \in \Delta'$ tal que $I(\gamma) = 0$. Por tanto, Δ' es inconsistente.

\Leftarrow) Supongamos ahora que Δ' es inconsistente. Como $\Delta' \subset \Delta$, tenemos que Δ también lo es.

□

Ejemplo. Veamos ahora dos ejemplos de uso del algoritmo de Davis & Putnam:

1. En este caso, vamos a demostrar que el conjunto:

$$\{P \vee Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q, P \vee \neg P, P \vee Q \vee R, P \vee Q \vee \neg R, \neg P \vee S\}$$

es inconsistente. Como se trata de un conjunto de cláusulas, podemos aplicar directamente el algoritmo de Davis & Putnam. En primer lugar, aplicamos la regla 1 (ya que $P \vee \neg P$ es una tautología), obteniendo:

$$\{P \vee Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q, P \vee Q \vee R, P \vee Q \vee \neg R, \neg P \vee S\}$$

Ahora no podemos aplicar ni la regla 1 ni la 2, pero sí la 3 al literal S , obteniendo:

$$\{P \vee Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q, P \vee Q \vee R, P \vee Q \vee \neg R\}$$

La primera regla que podemos aplicar ahora es la cuarta, ya que tenemos $P \vee Q$, $P \vee Q \vee R$ y $P \vee Q \vee \neg R$; obteniendo:

$$\{P \vee Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q\}$$

Y ahora la única regla que podemos aplicar es la quinta, que si la aplicamos al literal P obtenemos:

$$\Delta_1 = \{Q, \neg Q\}, \quad \Delta_2 = \{Q, \neg Q\}$$

Finalmente, aplicando la segunda regla a cada uno de los dos conjuntos (notemos que son iguales), obtenemos:

$$\{\square\}, \quad \{\square\}$$

De donde deducimos que el conjunto de partida era inconsistente si y solo si lo son $\{\square\}$ y $\{\square\}$, que efectivamente, son inconsistentes.

2. Usando el algoritmo de Davis & Putnam y el Teorema de la Deducción, buscamos demostrar que:

$$\models (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma))$$

Aplicando tres veces el Teorema de la Deducción, eso equivale a demostrar que:

$$\{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \gamma, \alpha \vee \beta\} \models \gamma$$

Además, sabemos que demostrar esa consecuencia lógica equivale a probar que el siguiente conjunto es inconsistente:

$$\{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \gamma, \alpha \vee \beta, \neg\gamma\}$$

Para poder aplicar el Algoritmo de Davis-Putnam, necesitamos transformar las fórmulas en cláusulas. De esta forma:

$$\alpha \rightarrow \gamma \equiv \neg\alpha \vee \gamma$$

$$\beta \rightarrow \gamma \equiv \neg\beta \vee \gamma$$

Por tanto, el conjunto de cláusulas sobre el cual aplicaremos el Algoritmo de Davis-Putnam (y el cual será inconsistente si y solo si la consecuencia lógica de partida es cierta) es:

$$\Delta = \{\neg\alpha \vee \gamma, \neg\beta \vee \gamma, \alpha \vee \beta, \neg\gamma\}$$

Por la Proposición 1.6, sabemos que Δ es inconsistente si y solo si lo es el conjunto obtenido tras aplicar el Algoritmo de Davis-Putnam. En la Figura 1.1 se tiene que dicho conjunto es $\Delta_3 = \{\square\}$. Por tanto:

$$\Delta \text{ es inconsistente} \iff \Delta_3 = \{\square\} \text{ es inconsistente}$$

Por tanto, como Δ_3 es inconsistente, tenemos que Δ también lo es. Por tanto, tenemos probado que:

$$\models (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$$

1.2. Demostraciones

Definición 1.8 (Demostración). Sean \mathcal{A} y $\Gamma \cup \{p\}$ dos conjuntos de proposiciones (nos referiremos al conjunto \mathcal{A} como “conjunto de axiomas” y a Γ como “conjunto de hipótesis”), una demostración de p a partir de Γ (notado por $\Gamma \vdash p$) es una secuencia de proposiciones $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de forma que $\alpha_n = p$ y se verifica para todo i menor o igual que n :

- bien $\alpha_i \in \mathcal{A} \cup \Gamma$.

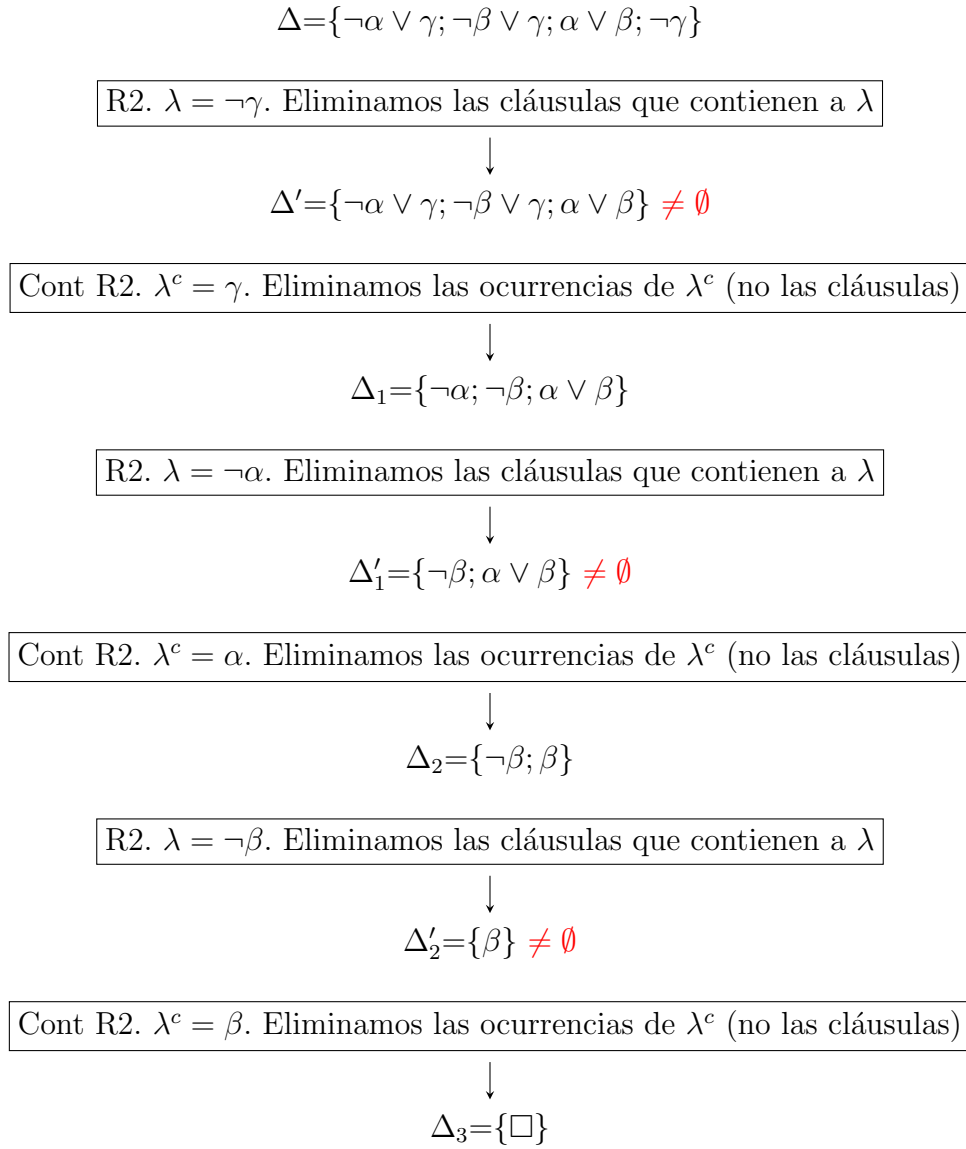


Figura 1.1: Algoritmo de Davis y Putnam del apartado 2.

- bien existen j, k naturales con $j < k < i$ siendo $\alpha_k = \alpha_j \rightarrow \alpha_i$.

En este caso, diremos que se tiene α_i por modus ponens de j y k .

Notación. Si p es una proposición de forma que $\emptyset \vdash p$, podremos notar $\vdash p$ y diremos que p es un teorema.

Ejemplo. Como ejemplo de demostración, veamos que $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\} \vdash \beta$ (regla conocida como “Modus ponens”). Para ello, consideramos:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha \\ \alpha_2 &= \alpha \rightarrow \beta \\ \alpha_3 &= \beta\end{aligned}$$

Como vemos, es una demostración de β a partir de $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\}$ porque $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son proposiciones, $\alpha_3 = \beta$ y:

- $\alpha_1 \in \Gamma$.
- $\alpha_2 \in \Gamma$.
- $1, 2 < 3$ y $\alpha_2 = \alpha_1 \rightarrow \alpha_3$.

Notación. Para abreviar las demostraciones, a partir de ahora no daremos una secuencia numerada de proposiciones $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, sino que numeraremos los pasos de la demostración y entenderemos que para formalizarla totalmente debemos coger como α_i el paso i -ésimo de la demostración.

Más aún, para no pararnos a comprobar las condiciones abstractas que han de cumplir cada una de las propiedades de la demostración, incluiremos junto a los pasos de la demostración un comentario sobre por qué dicho paso es válido.

Con esta notación, la demostración de $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\} \vdash \beta$ quedaría de la forma:

1. α es una hipótesis.
2. $\alpha \rightarrow \beta$ es una hipótesis.
3. β por Modus Ponens de 1 y 2.

Finalmente, como conjunto \mathcal{A} de axiomas, consideraremos:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$$

Con:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) : \alpha, \beta \text{ son proposiciones}\} \\ \mathcal{A}_2 &= \{(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) : \alpha, \beta, \gamma \text{ son proposiciones}\} \\ \mathcal{A}_3 &= \{(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) : \alpha, \beta \text{ son proposiciones}\}\end{aligned}$$

Ejemplo. Ejemplos de algunas demostraciones:

- $\{\alpha\} \vdash \beta \rightarrow \alpha$

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \in \mathcal{A}_1$
 2. α es una hipótesis
 3. $\beta \rightarrow \alpha$ Modus ponens de 1 y 2.
- $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$
1. $(\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \in \mathcal{A}_2$
 2. $\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \in \mathcal{A}_1$
 3. $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ Modus ponens de 1 y 2
 4. $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \in \mathcal{A}_1$
 5. $\alpha \rightarrow \alpha$ Modus ponens de 3 y 4

Teorema 1.9 (de Herbrand o de la deducción). *Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ un conjunto de proposiciones, equivalen:*

1. $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$
2. $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$

Demostración. Demostramos las dos implicaciones:

- 1) \implies 2) Como $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, podemos construir una demostración de n pasos de la proposición $\alpha \rightarrow \beta$ a partir de Γ . En cuyo caso, podemos añadir 2 pasos más a su demostración, de forma que:

1. \dots
- \vdots
- n . $\alpha \rightarrow \beta$
- $n + 1$. α es hipótesis
- $n + 2$. β por Modus ponens de n y $n + 1$

Como en los n primeros pasos solo hemos usado como hipótesis Γ , hemos conseguido demostrar en $n + 2$ pasos que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

- 2) \implies 1) Como $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, podemos obtener una demostración β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ de n pasos: β_1, \dots, β_n (con $\beta_n = \beta$). Por inducción sobre n (el número de pasos de la demostración):

- Si $n = 1$: Como $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ gracias a la demostración $\beta_1 = \beta$, distinguimos casos:
- (a) $\beta_1 \in \mathcal{A}$. En dicho caso, podemos considerar la demostración:
 1. $\beta_1 \in \mathcal{A}$
 2. $\beta_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_1) \in \mathcal{A}_1$
 3. $\alpha \rightarrow \beta_1$ por Modus ponens de 1 y 2
 Y con esto tenemos que $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.
 - (b) $\beta_1 \in \Gamma$. En dicho caso, podemos considerar una demostración similar al caso anterior:

1. $\beta_1 \in \Gamma$
2. $\beta_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_1) \in \mathcal{A}_1$
3. $\alpha \rightarrow \beta_1$ por Modus ponens de 1 y 2

Y con esto también tenemos que $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

(c) $\beta_1 = \alpha$. En dicho caso, podemos copiar la demostración de $\vdash \beta \rightarrow \beta$ del ejemplo anterior, llegando a que $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

- En el paso de inducción, supuesto que de $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta_m$ podemos deducir que $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_m$ para todo $m \leq n$, suponemos ahora que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta_{n+1}$ y queremos ver que $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta_{n+1}$.

En dicho caso, supuesto que $\beta_{m+1} \notin \mathcal{A} \cup \Gamma \cup \{\alpha\}$ (ya que si no la demostración es análoga al caso $n = 1$), la única posibilidad es que hayan de existir $i, j < n + 1$ con $\beta_i = \gamma$ y $\beta_j = \gamma \rightarrow \beta_{m+1}$.

Si ahora consideramos los i primeros pasos de la demostración, tenemos que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$ y si consideramos los j primeros pasos, tenemos que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma \rightarrow \beta_{n+1}$. Por hipótesis de inducción, como $i, j < n + 1$, tenemos que $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$ y que $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta_{n+1})$. En este momento, podemos realizar la demostración (con hipótesis Γ):

1. ...
- \vdots
- $p.$ $\alpha \rightarrow \gamma$
- $p + 1.$...
- \vdots
- $q.$ $\alpha \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta_{n+1})$
- $q + 1.$ $(\alpha \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta_{n+1})) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_{n+1})) \in \mathcal{A}_2$
- $q + 2.$ $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_{n+1})$ por Modus ponens de q y $q + 1$.
- $q + 3.$ $\alpha \rightarrow \beta_{n+1}$ por Modus ponens de p y $q + 2$.

□

1.2.1. Resultados útiles a la hora de realizar demostraciones

Proposición 1.10 (Regla de reducción al absurdo clásica). *Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ un conjunto de proposiciones: si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$ y $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\beta$, entonces $\Gamma \vdash \alpha$.*

Demostración. Supuesto que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$ y que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\beta$, por el Teorema de Herbrand (1.9), se tiene que $\Gamma \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$ y que $\Gamma \vdash \neg\alpha \rightarrow \neg\beta$. En dicho caso:

1. ...
- \vdots
- $p.$ $\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$
- $p + 1.$...
- \vdots
- $q.$ $\neg\alpha \rightarrow \beta$

$q + 1$. $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \in \mathcal{A}_3$

$q + 2$. $((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha)$ por Modus ponens de $q + 1$ y p .

$q + 3$. α por Modus ponens de $q + 2$ y q .

Como desde el paso 1 hasta el q solo hemos usado como hipótesis Γ , deducimos que $\Gamma \vdash \alpha$. \square

Proposición 1.11 (Leyes de silogismo o transitividad de la flecha). *Sean α , β y γ proposiciones, se verifican:*

1. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
2. $\vdash (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

Demostración. Demostraremos la primera y dejamos la segunda como ejercicio. Para ello, aplicando el Teorema de Herbrand 3 veces, llegamos a que 1 es equivalente a ver que:

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma, \alpha\} \vdash \gamma$$

Para ello, nos sirve con la demostración:

1. $\alpha \rightarrow \beta$ es una hipótesis
2. α es una hipótesis
3. β por Modus ponens de 1 y 2
4. $\beta \rightarrow \gamma$ es una hipótesis
5. γ por Modus ponens de 3 y 4

\square

Corolario 1.11.1 (Regla del silogismo). *Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ un conjunto de proposiciones, si $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ y $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$, entonces $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$.*

Proposición 1.12 (Ley de conmutación de premisas). *Sean α , β y γ proposiciones:*

$$\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

Demostración. Aplicando el Teorema de Herbrand 3 veces, es equivalente a ver que:

$$\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \beta, \alpha\} \vdash \gamma$$

Para ello, nos sirve con:

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ es una hipótesis
2. α es una hipótesis
3. $\beta \rightarrow \gamma$ por Modus ponens de 1 y 2
4. β es una hipótesis

5. γ por Modus ponens de 3 y 4

□

Corolario 1.12.1 (Regla de conmutación de premisas). *Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ un conjunto de proposiciones, si $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$, entonces $\Gamma \vdash \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$.*

Proposición 1.13 (Ley de la doble negación). *Sea α una proposición:*

$$\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$$

Demostración. Por el Teorema de Herbrand, es equivalente a ver que $\{\neg\neg\alpha\} \vdash \alpha$. Para ello, usamos la regla de la reducción al absurdo clásica, ya que:

$$1. \{\neg\neg\alpha, \neg\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$$

$$2. \{\neg\neg\alpha, \neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$$

Luego concluimos que $\{\neg\neg\alpha\} \vdash \alpha$.

□

Proposición 1.14 (Ley débil de la doble negación). *Sea α una proposición:*

$$\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$$

Demostración. Por el Teorema de Herbrand, es equivalente a ver que $\{\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$. Para ello, usamos la regla de la reducción al absurdo clásica, con lo que partimos que $\{\alpha, \neg\neg\neg\alpha\}$ y tenemos que demostrar una proposición y su negación. Para ello:

$$1. \neg\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha \text{ por la ley de la doble negación}$$

$$2. \neg\neg\neg\alpha \text{ es una hipótesis}$$

$$3. \neg\alpha \text{ por Modus ponens de 1 y 2}$$

$$4. \alpha \text{ es una hipótesis}$$

Concluimos por la regla de la reducción al absurdo que $\{\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$.

□

1.3. Teoremas de coherencia y adecuación

A lo largo de este capítulo hemos manejado en los lenguajes proposicionales dos conceptos fundamentales: las tautologías ($\models \alpha$), relacionadas con las interpretaciones; y los teoremas ($\vdash \alpha$), relacionados con las demostraciones. Las primeras tienen un gran interés en informática y ciencias de la computación, gracias a las consecuencias semánticas que podemos realizar de forma automática, tal y como vimos con el Algoritmo de Davis & Putnam. Por otra parte, las segundas tienen un gran interés matemático, por ser la principal herramienta que sustentan todo el conocimiento matemático. Veremos ahora dos teoremas que nos permiten relacionar las tautologías con los teoremas, de gran importancia en los lenguajes de primer orden.

Teorema 1.15 (de coherencia). *Sea α una proposición, si $\vdash \alpha$, entonces $\models \alpha$. Es decir, todo teorema es una tautología.*

Demostración. Si α es un teorema, por definición este tendrá una demostración de n pasos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

- α_1 será un axioma y anteriormente probamos que todo axioma era una tautología.
- A α_2 le ocurrirá lo mismo.
- α_i para $i \geq 3$ podrá ser un axioma, en cuyo caso ya sabemos cómo proceder o resultado de aplicar modus ponens sobre dos pasos anteriores. Sin embargo, anteriormente vimos que si a y $a \rightarrow b$ eran tautologías, entonces b era una tautología, por lo que α_i será una tautología.

Finalmente, llegaremos a $\alpha_n = \alpha$, con lo que podemos concluir que α es una tautología. □

Y además la otra implicación también es cierta, aunque su demostración excede los objetivos del curso.

Teorema 1.16 (de adecuación). *Sea α una proposición, si $\models \alpha$, entonces $\vdash \alpha$. Es decir, toda tautología es un teorema.*

2. Lógica de Primer Orden

Es necesario introducir ahora lenguajes en los que podamos cuantificar cosas. Como primer ejemplo, si sabemos que “Todo hombre es mortal” y que “Sócrates es un hombre”, nos gustaría deducir que, entonces, “Sócrates es mortal”. Sin embargo, para esto hemos de poder cuantificar, cosa que no es posible con los lenguajes proposicionales pero sí con los lenguajes de primer orden.

Los lenguajes de primer orden estarán formados por:

- Constantes: $c_1, c_2, \dots, a, b, c, \dots$
- Variables: $x_1, x_2, \dots, x, y, z, \dots$
- Símbolos de función: $f_1, f_2, \dots, f, g, h, \dots$
- Símbolos de relación: $R_1, R_2, \dots, R, S, T, \dots$
- Conectivas lógicas: $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Cuantificadores: \forall, \exists

A los conjuntos de todas las constantes, de todas las variables y de todos los símbolos de función los notaremos por $Cons(\mathcal{L}), Var(\mathcal{L}), Fun(\mathcal{L})$, si \mathcal{L} es nuestro lenguaje de primer orden.

Notación. En otros libros o contextos, en vez de denotar a los símbolos de función o variables con una letra que pueda llevar o no superíndice, estos las denotan con un superíndice:

- $f_1^{n_1}, f_2^{n_2}, \dots$
- $R_1^{m_1}, R_2^{m_2}, \dots$

En este caso, el superíndice indica la aridad de la función o relación. Por ejemplo, si consideramos f^3 , tenemos un símbolo de función que se aplica a 3 variables.

Definición 2.1 (Término). Un término es:

1. Cualquier constante.
2. Cualquier variable.
3. Si t_1, t_2, \dots, t_n son términos y f es un símbolo de función n -ario, entonces $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ es un término.

4. No hay más términos que los que se puedan obtener siguiendo una secuencia finita de pasos a partir de las enunciadas.

Al conjunto de todos los términos de nuestro lenguaje \mathcal{L} lo denotamos por $Term(\mathcal{L})$.

Ejemplo.

- $f(x, f(x, y))$ es un término.
- $f(x, f(x))$ no es un término, ya que usamos un mismo símbolo de función, f , para denotar dos objetos: una función unaria y una función binaria.

Definición 2.2 (Fórmulas atómicas). Si t_1, \dots, t_n son términos y R es un símbolo de relación n -ario, entonces $R(t_1, \dots, t_n)$ es una fórmula atómica (o simplemente, un átomo).

Definición 2.3 (Fórmulas). Son fórmulas:

1. Las fórmulas atómicas.
2. Si φ y ψ son fórmulas, también lo son:

$$\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \leftrightarrow \psi$$

3. Si x es una variable y φ es una fórmula, también lo son: $\forall x\varphi, \exists x\varphi$.
4. No hay más fórmulas que las que se puedan obtener siguiendo una secuencia finita de pasos a partir de las enunciadas.

Al conjunto de todas las fórmulas de nuestro lenguaje \mathcal{L} lo denotamos por $Form(\mathcal{L})$.

Definición 2.4. Una ocurrencia de una variable en una fórmula es una aparición de su escritura.

- En la fórmula $\forall x\varphi$, diremos que φ es el radio de acción de $\forall x$.
- En la fórmula $\exists x\varphi$, diremos que φ es el radio de acción de $\exists x$.

Diremos que x se encuentra cuantificada al ver $\forall x$ o $\exists x$.

Diremos que una ocurrencia de una variable x es ligada si aparece cuantificada o en el radio de acción de $\forall x$ o de $\exists x$.

Finalmente, diremos que una variable es libre si no aparece ligada. Si φ es una fórmula en la que las variables x_1, \dots, x_n aparecen libres, será usual denotar:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

Que no debe confundirse con un término de una función o relación n -aria, ya que φ no es ni un símbolo de función o relación, sino una fórmula.

Ejemplo. En la siguiente fórmula:

$$\forall x(\exists y R(x, y) \rightarrow Q(y))$$

- x aparece cuantificada en su primera ocurrencia.

- y aparece cuantificada en su primera ocurrencia.
- x aparece ligada en su segunda ocurrencia.
- y aparece ligada en su segunda ocurrencia.
- y aparece como variable libre en su tercera ocurrencia.

Definición 2.5 (Sentencia). Una sentencia es una fórmula sin ocurrencias de variables libres.

2.1. Semántica

Trataremos de generalizar el concepto de “interpretación”, ya visto para lenguajes proposicionales. Para ello, será necesario primero definir los conceptos de “estructura” y de “asignación”.

Definición 2.6 (Estructura). Una estructura ε en un lenguaje \mathcal{L} es una cuádrupla

$$\varepsilon = (D, \{c_i^\varepsilon\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i^\varepsilon\}_{i \in \mathbb{N}}, \{R_i^\varepsilon\}_{i \in \mathbb{N}})$$

de forma que:

- D es un conjunto no vacío al que llamamos universo o dominio.
- A cada constante c_i de \mathcal{L} le corresponde un elemento c_i^ε de D .
- A cada símbolo de función f_i de \mathcal{L} le corresponde una función $f_i^\varepsilon : D^n \rightarrow D$.
- A cada símbolo de relación R_i de \mathcal{L} le corresponde una aplicación $R_i^\varepsilon : D^m \rightarrow \mathbb{Z}_2$, de forma que $R_i^\varepsilon(c_1^\varepsilon, c_2^\varepsilon) = 1$ si c_1^ε y c_2^ε están relacionados y 0 en caso contrario.

Definición 2.7 (Asignación). Una asignación v en ε es una aplicación $v : Var(\mathcal{L}) \rightarrow D$. Dada una asignación v , podremos extenderla a $v' : Term(\mathcal{L}) \rightarrow D$ de la forma:

$$v'(t) = \begin{cases} c^\varepsilon & \text{si } t = c \text{ una constante} \\ v(x) & \text{si } t = x \text{ una variable} \\ f^\varepsilon(v'(t_1), \dots, v'(t_n)) & \text{si } t = f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

Definición 2.8 (Interpretación). Una interpretación es una tupla (ε, v) con ε una estructura y v una asignación que tiene asociada una aplicación¹ $I_\varepsilon^v : Form(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ que cumple para cualesquiera fórmulas φ y ψ :

1. $I^v(\neg\varphi) = 1 + I^v(\varphi)$.
2. $I^v(\varphi \wedge \psi) = I^v(\varphi)I^v(\psi)$.
3. $I^v(\varphi \vee \psi) = I^v(\varphi) + I^v(\psi) + I^v(\varphi)I^v(\psi)$.
4. $I^v(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + I^v(\varphi) + I^v(\varphi)I^v(\psi)$.

¹A la que próximamente denotaremos simplemente como I^v , por simplicidad, entendiendo que la estructura ε viene dada por el contexto.

$$5. I^v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + I^v(\varphi) + I^v(\psi).$$

$$6. I^v(R(t_1, \dots, t_n)) = R^e(v(t_1), \dots, v(t_n))$$

Con R un símbolo de relación n -ario y t_1, \dots, t_n términos.

$$7. I^v(\forall x \varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si para todo } a \in D, I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$8. I^v(\exists x \varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si existe } a \in D \text{ con } I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Siendo:

$$v(x \mid a)(y) = \begin{cases} v(y) & \text{si } y \neq x \\ a & \text{si } y = x \end{cases}$$

Definición 2.9. Sea $\varphi \in \text{Form}(\mathcal{L})$:

- Dada una estructura ε , diremos que φ es válida en ε si $I^v(\varphi) = 1$ para toda asignación v en ε .
- Dada una estructura ε , diremos que φ es satisfacible en ε si $I^v(\varphi) = 1$ para alguna asignación v en ε .
- Diremos que φ es universalmente válida si φ es válida en cualquier estructura.
- Diremos que φ es satisfacible si existe una estructura ε donde φ es satisfacible.
- Diremos que φ es refutable si $\neg\varphi$ es satisfacible.
- Diremos que φ es una contradicción si $\neg\varphi$ es universalmente válida.

Lema 2.1 (de Coincidencia). Sea $\varphi \in \text{Form}(\mathcal{L})$ de forma que $x_1, \dots, x_n \in \text{Var}(\mathcal{L})$ son las variables con ocurrencias libres en φ y sea ε una estructura. Entonces, dada una asignación v en ε :

$$I^v(\varphi) = I^w(\varphi)$$

para toda asignación w en ε tal que $w(x_i) = v(x_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Observación. En particular, si φ es una sentencia, entonces $I^v(\varphi)$ no depende de la asignación v . Por tanto, si φ es satisfacible en ε , entonces φ es válida en ε .

Definición 2.10 (Consecuencia lógica). Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}(\mathcal{L})$, diremos que φ es consecuencia lógica de Γ , notado por $\Gamma \models \varphi$, si para toda interpretación (ε, v) tal que $I^v(\gamma) = 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$, fuerza a que $I^v(\varphi) = 1$.

Teorema 2.2 (de la Deducción). Sea $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}(\mathcal{L})$, son equivalentes:

1. $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.
2. $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$.

Definición 2.11 (Inconsistencia). Sea $\Gamma \subseteq \text{Form}(\mathcal{L})$, diremos que Γ es inconsistente si no existe una interpretación (ε, v) tal que $I^v(\gamma) = 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$.

Teorema 2.3. Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}(\mathcal{L})$, son equivalentes:

1. $\Gamma \models \varphi$.
2. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Ejemplo. Demostremos las siguientes fórmulas universalmente válidas:

1. $\models \forall x\varphi(x) \leftrightarrow \forall y\varphi(y)$ con² y libre para x en $\varphi(x)$.

Dada cualquier interpretación (ε, v) , queremos ver que:

$$I^v(\forall x\varphi(x) \leftrightarrow \forall y\varphi(y)) = 1$$

Y sabemos que eso es equivalente a ver que:

$$I^v(\forall x\varphi(x)) = I^v(\forall y\varphi(y))$$

Que se puede ver a partir de su definición:

$$\begin{aligned} I^v(\forall x\varphi(x)) &= \begin{cases} 1 & \text{si } I^{v(x|a)}(\varphi(x)) = 1 \text{ para todo } a \in D \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \\ &\stackrel{(*)}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } I^{v(y|a)}(\varphi(y)) = 1 \text{ para todo } a \in D \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \\ &= I^v(\forall y\varphi(y)) \end{aligned}$$

Donde en $(*)$ debemos tener cuidado y usar que y es libre para x en $\varphi(x)$, ya que x aparecía libre en φ y como y es libre para x en $\varphi(x)$, al hacer la sustitución de x por y no estaremos cambiando variables libres en φ , por lo que a partir del Lema de Coincidencia (Lema 2.1), al no cambiar variables libres en φ , no cambiamos su condición de verdad.

2. $\models \forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(t)$ con t libre para x en $\varphi(x)$.

Por el Teorema de la Deducción, probar esto es equivalente a ver que:

$$\{\forall x\varphi(x)\} \models \varphi(t)$$

Por tanto, sea (ε, v) una interpretación de forma que $I^v(\forall x\varphi(x)) = 1$, entonces para todo $a \in D$, se tendrá $I^{v(x|a)}(\varphi(x)) = 1$. Si tomamos $a = v(t)$, entonces tendremos que:

$$I^{v(x|a)}(\varphi(x)) = I^v(\varphi(t))$$

2.2. Demostraciones

Trataremos ahora de generalizar lo que hicimos ya para la demostraciones en el caso de los lenguajes proposicionales, para que cualquier demostración hecha con lenguajes proposicionales siga siendo válida ahora.

2.2.1. Definición de una demostración

En lugar de dar directamente la definición de demostración, daremos primero los axiomas de nuestro sistema y las reglas de inferencia que usaremos, para posteriormente dar la definición de demostración.

²Estamos usando una notación que se introduce en la siguiente sección.

Axiomas

Sobre nuestro lenguaje \mathcal{L} consideraremos los 3 primeros conjuntos de axiomas, que son los que ya teníamos en lenguajes proposicionales:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) : \varphi, \psi \in \text{Form}(\mathcal{L})\} \\ \mathcal{A}_2 &= \{(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) : \varphi, \psi, \chi \in \text{Form}(\mathcal{L})\} \\ \mathcal{A}_3 &= \{(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) : \varphi, \psi \in \text{Form}(\mathcal{L})\}\end{aligned}$$

Ahora, será necesario considerar nuevos axiomas que nos permitan generalizar lo ya visto para lenguajes proposicionales a lenguajes de primer orden. Como el lector puede deducir, estos axiomas tendrán que contener cuantificadores, ya que es el concepto principal que introducimos en los lenguajes de primer orden. Antes de dar el cuarto axioma³, introduciremos la siguiente notación:

Notación. Sea $\varphi \in \text{Form}(\mathcal{L})$ y $x_1, \dots, x_n \in \text{Var}(\mathcal{L})$, al notar:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

Estamos diciendo que, si x_1, \dots, x_n son variables que aparecen en φ , entonces tienen todas sus ocurrencias libres en φ .

Notación. Sea $\varphi \in \text{Form}(\mathcal{L})$, $x \in \text{Var}(\mathcal{L})$ y $t \in \text{Term}(\mathcal{L})$, cuando aparezca:

$$“t \text{ libre para } x \text{ en } \varphi(x)”$$

Y notemos $\varphi(t)$, significará que estamos cambiando las ocurrencias libres de x que había en φ por t . Por ser t un término, este puede depender de otras variables, por lo que en este proceso no se permite que variables de t se queden ligadas, sino que deben aparecer libres.

Podemos dar ya el cuarto axioma:

$$\mathcal{A}_4 = \{\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(t) \mid \varphi \in \text{Form}(\mathcal{L}), x \in \text{Var}(\mathcal{L}), t \text{ libre para } x \text{ en } \varphi(x)\}$$

Observemos que casos particulares interesantes de este axioma son:

- $\forall x \varphi \rightarrow \varphi$
- $\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(x)$

Y podemos finalmente dar el quinto axioma⁴:

$$\mathcal{A}_5 = \{\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x \psi) \mid \varphi, \psi \in \text{Form}(\mathcal{L}), x \text{ no aparece libre en } \varphi\}$$

De esta forma, nuestro conjunto de axiomas vendrá dado por:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4 \cup \mathcal{A}_5$$

Notemos que en estos 5 axiomas no aparecen los conectores \wedge , \vee , \leftrightarrow ni el cuantificador \exists . En caso de querer usarlos:

- Los conectores los expresaremos como fórmulas semánticamente equivalentes pero usando \neg y \rightarrow .
- Usaremos que $\exists x \varphi$ es semánticamente equivalente a $\neg \forall x \neg \varphi$, siendo $\varphi \in \text{Form}(\mathcal{L})$.

³Algunos autores dividen este axioma en dos, ya que no consideran la notación que vamos a considerar para poder dar este axioma.

⁴Que en aquellos autores que dividen el cuarto axioma en dos, aparece como el sexto.

Reglas de inferencia

Las reglas de inferencia que consideraremos en nuestro sistema serán las siguientes, las cuales tendremos en cuenta a la hora de realizar la definición de lo que será una demostración:

Modus ponens	Generalización
$\varphi \rightarrow \psi$	φ
φ	
ψ	$\forall x\varphi$

Definición 2.12 (Demostración). Si consideramos el conjunto de fórmulas \mathcal{A} previamente definido y sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}(\mathcal{L})$, una demostración de p a partir de Γ (notado por $\Gamma \vdash p$) es una secuencia de fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de forma que $\alpha_n = p$ y se verifica para todo i menor o igual que n alguna de las tres condiciones siguientes:

- $\alpha_i \in \mathcal{A} \cup \Gamma$.
- Existen j, k naturales con $j < k < i$ siendo $\alpha_k = \alpha_j \rightarrow \alpha_i$ (Modus ponens).
- Existe un natural j con $j < i$ siendo $\alpha_i = \forall x\alpha_j$ (Generalización).

2.2.2. Primeros resultados

Como primer resultado a destacar, como los lenguajes de primer orden generalizan los lenguajes proposicionales, cualquier demostración para los lenguajes proposicionales seguirán siendo válidas para los lenguajes de primer orden.

Teorema 2.4 (de la Deducción). Sean $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}(\mathcal{L})$. Si tenemos que $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ y en su demostración no usamos la regla de generalización sobre un paso en que haya intervenido φ con una variable libre en φ , entonces:

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

Observación. Ha sido necesario introducir la condición extra que no teníamos en lenguajes proposicionales ya que vamos a poder demostrar, por ejemplo, $\{A(x)\} \vdash \forall xA(x)$:

1. $A(x)$ es hipótesis.
2. $\forall xA(x)$ por generalización

Sin embargo, $\not\vdash A(x) \rightarrow \forall xA(x)$, ya si que si consideramos por ejemplo el dominio $D = \mathbb{Z}_2$ y A es “ser igual a 0”, de $A(0)$ no podemos concluir que todo elemento de \mathbb{Z}_2 sea 0. Esto se debe a que semánticamente:

$$\{A(x)\} \not\models \forall xA(x)$$

El lector podría sospechar que la regla de generalización carece de sentido o contradice lo enunciado, pero si somos capaces de demostrar algo para un elemento x arbitrario en un cierto conjunto, entonces seremos capaces de afirmar que $\forall x$ en dicho conjunto, tendremos la proposición conseguida para el elemento arbitrario anterior. Esta es la intuición detrás de la regla de generalización.

Proposición 2.5. Sean $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}(\mathcal{L})$, si tenemos que $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, entonces $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Teorema 2.6 (Regla de reducción al Absurdo). Sean $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}(\mathcal{L})$ si tenemos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ y $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ y en esas demostraciones no usamos la regla de generalización sobre un paso en el que haya intervenido $\neg\varphi$ con una variable libre en $\neg\varphi$, entonces:

$$\Gamma \vdash \varphi$$

Ejemplo. Buscamos demostrar $\vdash (\varphi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ con x no libre en φ .

Buscamos demostrar con precaución⁵ que:

$$\{\varphi \rightarrow \forall x\psi\} \vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$$

Para ello:

1. $\varphi \rightarrow \forall x\psi$ es una hipótesis.
2. $\forall x\psi \rightarrow \psi \in \mathcal{A}_4$
3. $\varphi \rightarrow \psi$ por silogismo de 1 y 2.
4. $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ generalización de 3.

Como x no está libre en φ , tampoco lo estará en $\varphi \rightarrow \forall x\psi$, por lo que en esta demostración no hemos usado la regla de generalización sobre un paso en el que haya intervenido $\varphi \rightarrow \forall x\psi$ con una variable libre en la misma, por lo que podremos aplicar el Teorema de la Deducción, obteniendo lo que queríamos probar.

2.3. Teoremas de adecuación y coherencia

Una parte positiva de los lenguajes de primer orden es que a pesar de ser más generales que los proposicionales, seguimos contando con los teoremas de adecuación y de coherencia:

Teorema 2.7 (de coherencia). Sea $\varphi \in \text{Form}(\mathcal{L})$, si $\vdash \varphi$, entonces $\models \varphi$.

Demostración. La demostración es similar a la del Teorema de coherencia para lenguajes proposicionales, pero ahora hemos de tener en cuenta más axiomas, así como la regla de generalización. \square

Teorema 2.8 (de consistencia). Nuestro conjunto de axiomas \mathcal{A} junto con las reglas de inferencia es consistente, es decir, no existe $\varphi \in \text{Form}(\mathcal{L})$ de forma que $\vdash \varphi$ y $\not\models \varphi$.

Teorema 2.9 (de adecuación). Sea $\varphi \in \text{Form}(\mathcal{L})$, si $\models \varphi$, entonces $\vdash \varphi$.

⁵Para poder aplicar luego el Teorema de la Deducción bajo las hipótesis correctas con la limitación extra.

2.4. Sistemas matemáticos

2.4.1. Lenguajes de Primer Orden con Igualdad

Un lenguaje de primer orden con igualdad es un lenguaje de primer orden \mathcal{L} en el que habrá un símbolo de relación destacado A .

Notación. Aceptaremos las siguientes notaciones con el fin de abreviar los enunciados:

1. Si $s, t \in \text{Term}(\mathcal{L})$, usaremos con frecuencia:

$$s = t$$

Para denotar $A(s, t)$.

2. En el caso de tener $\neg(s = t)$, podremos notar: $s \neq t$.

3. Usaremos $\exists_1 x \varphi(x)$ como abreviatura de:

$$\exists x \varphi(x) \wedge \forall y (\varphi(y) \rightarrow x = y)$$

La única diferencia con los lenguajes de primer orden corrientes será que tendremos dos conjuntos de axiomas extras:

$$\mathcal{A}_6 = \{\forall x (x = x) \mid x \in \text{Var}(\mathcal{L})\}$$

Y para introducir el último axioma, hace falta introducir más notación:

Notación. Sea $\varphi \in \text{Form}(\mathcal{L})$, y $x, y \in \text{Var}(\mathcal{L})$, si notamos $\varphi(x, y)$ tras notar $\varphi(x, x)$, significará que estamos reemplazando algunas ocurrencias libres de x por y en la fórmula φ .

El último axioma será:

$$\mathcal{A}_7 = \{(x = y) \rightarrow (\varphi(x, x) \rightarrow \varphi(x, y)) \mid x, y \in \text{Var}(\mathcal{L})\}$$

Observación. Notemos que con dos conjuntos de axiomas que hemos añadido, tenemos que “=” es una relación de equivalencia:

- \mathcal{A}_6 nos da la relación reflexiva.
- De \mathcal{A}_7 deducimos la simétrica y la transitiva.

Sin embargo, “=” es mucho más que eso, ya que de \mathcal{A}_7 no solo deducimos esas propiedades, sino muchas más, tal y como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Demostraremos que:

$$\vdash (x = y) \rightarrow (f(t_1, \dots, x, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, y, \dots, t_n))$$

Para ello, bastará demostrar con cuidado que:

$$\{x = y\} \vdash f(t_1, \dots, x, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, y, \dots, t_n)$$

1. $\forall x(x = x) \in \mathcal{A}_6$
2. $\forall x(x = x) \rightarrow f(t_1, \dots, x, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, x, \dots, t_n) \in \mathcal{A}_4$
3. $f(t_1, \dots, x, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, x, \dots, t_n)$ por modus ponens de 1 y 2.
4. $(x = y) \rightarrow ((f(t_1, \dots, x, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, x, \dots, t_n)) \rightarrow (f(t_1, \dots, x, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, y, \dots, t_n))) \in \mathcal{A}_7$
5. $x = y$ es hipótesis.
6. $(f(t_1, \dots, x, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, x, \dots, t_n)) \rightarrow (f(t_1, \dots, x, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, y, \dots, t_n))$ por modus ponens de 4 y 5.
7. $f(t_1, \dots, x, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, y, \dots, t_n)$ por modus ponens de 3 y 6.

Como no hemos usado ningún paso de generalización, podemos aplicar el Teorema de la Deducción, obteniendo lo que queríamos probar.

2.4.2. Aritmética de Primer Orden

En aritmética de primer orden, consideraremos un lenguaje de primer orden \mathcal{L} , que tendrá:

- Variables.
- Una sola constante, que denotaremos por 0.
- Tres símbolos de función, que denotaremos por⁶ s , $+$ y \cdot .
- Un símbolo de relación que denotaremos por $=$.

En aritméticas de primer orden, consideraremos como axiomas $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_7$, junto con los siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1 &= \{\forall x(s(x) \neq 0) : x \in Var(\mathcal{L})\} \\
\mathcal{N}_2 &= \{\forall x \forall y(s(x) = s(y) \rightarrow x = y) : x, y \in Var(\mathcal{L})\} \\
\mathcal{N}_3 &= \{\forall x(x + 0 = x) : x \in Var(\mathcal{L})\} \\
\mathcal{N}_4 &= \{\forall x \forall y(x + s(y) = s(x + y)) : x, y \in Var(\mathcal{L})\} \\
\mathcal{N}_5 &= \{\forall x(x \cdot 0 = 0) : x \in Var(\mathcal{L})\} \\
\mathcal{N}_6 &= \{\forall x \forall y(x \cdot s(y) = x \cdot y + x) : x, y \in Var(\mathcal{L})\} \\
\mathcal{N}_7 &= \{\varphi(0) \rightarrow (\forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(s(x))) \rightarrow \forall x \varphi(x)) : \varphi(x) \in Form(\mathcal{L})\}
\end{aligned}$$

La aritmética de primer orden funcionará bien cuando pensemos que estamos en un dominio similar a \mathbb{N} . Pensando esto, los axiomas \mathcal{N}_i conviene entenderlos como:

1. \mathcal{N}_1 y \mathcal{N}_2 definen cómo funciona la función s , que podemos entender por “siguiente”.

⁶Y entenderemos que \cdot tiene mayor prioridad de $+$.

2. \mathcal{N}_3 y \mathcal{N}_4 definen de forma inductiva la operación $+$.
3. \mathcal{N}_5 y \mathcal{N}_6 definen de forma inductiva la operación \cdot .
4. \mathcal{N}_7 es una versión más débil del principio de inducción.

Decimos que \mathcal{N}_7 es una versión más débil del principio de inducción porque el principio de inducción (en matemáticas) es el siguiente:

Proposición 2.10. *Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, si $0 \in A$ y siempre que $n \in A \implies n + 1 \in A$, entonces $A = \mathbb{N}$.*

Donde hacemos una afirmación sobre cualquier subconjunto de \mathbb{N} , por lo que estamos considerando elementos dentro de un conjunto no numerable de elementos (el conjunto de todos los subconjuntos de \mathbb{N} , que no es numerable). Esta idea no se puede expresar en lenguajes de primer orden, por tener solo un conjunto numerable de fórmulas.

2.4.3. Teoría de conjuntos (de Zermelo-Fraenkel)

La teoría de conjuntos es un lenguaje de primer orden donde:

- No tenemos constantes ni símbolos de función, por lo que los únicos términos que podremos considerar son las variables.
- Como relaciones solo tendremos dos, que denotaremos por \in y $=$ (y usaremos \notin y \neq como sus respectivas negaciones).

Notación. Dados $t, s \in \text{Term}(\mathcal{L})$, usaremos $t \subseteq s$ como abreviatura de:

$$\forall x(x \in t \rightarrow x \in s)$$

En este contexto, consideraremos como axiomas $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_7$, junto con los siguientes (entendiendo que todo lo que sale son variables):

$$\begin{aligned} ZF_1 &= \{x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)\} \\ ZF_2 &= \{\exists x \forall y(y \notin x)\} \\ ZF_3 &= \{\forall x \forall y \exists z \forall u(u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))\} \\ ZF_4 &= \{\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists u(u \in x \wedge z \in u))\} \\ ZF_5 &= \{\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)\} \\ ZF_6 &= \{\forall x_1 \exists x_2 \varphi(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_3 \exists x_4 \forall x_5(x_5 \in x_4 \leftrightarrow \exists x_6(x_6 \in x_3 \wedge \varphi(x_6, x_5)))\} \\ ZF_7 &= \{\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))\} \\ ZF_8 &= \{\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y)))\} \end{aligned}$$

Las variables recibirán usualmente el nombre de “conjuntos” o “elementos” y una forma de entender mejor estos axiomas es la siguiente:

1. ZF_1 recibe el nombre de “extensionalidad” y puede entenderse como una condición de cuándo dos conjuntos son iguales.

2. ZF_2 afirma la existencia de un conjunto sin elementos.

A partir de ZF_1 y ZF_2 puede demostrarse que aquel conjunto sin elementos es único. Por tanto, a partir de ahora nos referiremos a este único conjunto por \emptyset , y le llamaremos “conjunto vacío”. De esta forma, ZF_2 recibe el nombre de “existencia del conjunto vacío”.

3. ZF_3 recibe el nombre de “emparejamiento”, y afirma que dados dos conjuntos x e y , podemos considerar z , el conjunto formado por estos dos elementos: $\{x, y\}$. En el caso $\{x, x\}$, notaremos simplemente $\{x\}$.
4. ZF_4 nos dice que siempre que tengamos un conjunto x , existirá un conjunto y que contendrá todos aquellos elementos que están en algún conjunto de x . De esta forma, podemos pensar en ZF_4 como en la existencia de las uniones arbitrarias de conjuntos. Si consideramos la unión de un conjunto x , podremos denotarlo por:

$$\bigcup x$$

Y cuando tengamos dos conjuntos t y s , podremos denotar:

$$t \cup s = \bigcup \{t, s\}$$

5. ZF_5 recibe el nombre de “conjunto potencia” y afirma que dado un conjunto x , existe un conjunto y que contiene todos aquellos conjuntos que sean subconjuntos de x . Este conjunto y recibirá usualmente el nombre de $\mathcal{P}(x)$.
6. ZF_6 recibe el nombre de “esquema de reemplazo” y nos permite definir funciones mediante la regla $\varphi(x_1, x_2)$: dado cualquier x_1 , existirá un único x_2 de forma que se tenga $\varphi(x_1, x_2)$. En cuyo caso, podremos considerar el conjunto imagen de un conjunto por dicha aplicación:

Si pensamos en x_3 como un subconjunto del dominio de la aplicación, entonces existirá un x_4 (imagen de x_3 por la aplicación), y este verificará que un elemento está en él si y solo si hay un elemento de x_3 que se aplicaba en él.

7. ZF_7 recibe el nombre de “axioma del infinito”, y es que afirma la existencia de un conjunto x que contiene a \emptyset y es infinito.
8. ZF_8 recibe el nombre de “axioma de regularidad”, y viene a decir que dada conjunto no vacío x contiene un elemento y que es disjunto con el propio x (es decir, que cualquier conjunto no vacío contiene un elemento que no comparte ningún elemento con el propio conjunto no vacío de partida).

Este axioma nos permite no caer en cadenas infinitas de pertenencias. Por ejemplo, si tuviéramos dos conjuntos x e y de forma que:

$$x = \{y\} \quad y = \{x\}$$

Entonces, tendríamos:

$$x \ni y \ni x \ni y \ni \dots$$

Pero este axioma no lo permite.

Axioma de elección (AE).

Para todo conjunto no vacío x existe un conjunto y que tiene un único elemento en común con cada elemento de x .

Lema de Zorn.

Si toda cadena de un conjunto ordenado tiene cota superior, entonces el conjunto tiene un elemento maximal.

Principio de buena ordenación.

Todo conjunto no vacío admite un buen orden (un elemento mínimo).

Hipótesis del continuo (HC).

Todo subconjunto infinito de \mathbb{R} es numerable o tiene la misma cardinalidad de que \mathbb{R} .

(AE) y (HC) no son demostrables con la axiomática de Zermelo-Fraenkel, son independientes entre sí y son consistentes con estos axiomas, así como sus negaciones.

3. Introducción a la Teoría Descriptiva de Conjuntos

La Teoría Descriptiva de Conjuntos (TDC a partir de ahora) tiene como un objetivo clasificar enunciados o fórmulas según su complejidad, concepto que luego formalizaremos. Por ejemplo, si consideramos sobre las funciones del intervalo $[0, 1]$ en \mathbb{R} la propiedad de “ser continua”:

$$\forall x \in [0, 1] \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_0 |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Como sabemos que toda función continua en $[0, 1]$ es uniformemente continua y que toda función uniformemente continua es continua, podemos reescribir esta propiedad de una forma “menos compleja”, eliminando en ε la dependencia de x

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_0 |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

y obteniendo así una fórmula más corta, algo que nos interesará, puesto que intentaremos buscar las fórmulas más cortas (en función de las variables y cuantificadores que aparecen en ellas) que nos definan ciertas propiedades.

3.1. Construcción de fórmulas

Sin olvidar que la teoría sobre la que trabajamos (la de Zermelo-Fraenkel) es en particular un lenguaje de primer orden, recordamos que nuestras fórmulas van a estar formadas por, fijado un conjunto X que contendrá los elementos a los que nos refiramos:

- Términos, referidos a objetos.
- Conectores: \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow .
- Cuantificadores: \forall , \exists .

De esta forma, una fórmula para nosotros será una composición finita de estos elementos.

Estaremos especialmente interesados en el hecho de que las fórmulas sean composiciones finitas de dichos elementos, así como en estudiar los cuantificadores que aparecen en las fórmulas.

Ejemplo. Si consideramos $X = \mathbb{N}$ y en este contexto consideramos la aplicación “sucesor” $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la fórmula:

$$s \leq s(n)$$

Contiene a n como variable libre, y (en general) podrá ser cierta o falsa en función de las sustituciones de n realicemos (aunque en este caso hemos considerado una fórmula que ante cualquier sustitución siempre es cierta).

A partir de ahora, lo que nos interesará es dada una fórmula P en la que hay una variable libre y trabajando sobre un conjunto X , podremos siempre considerar por el axioma de composición el conjunto formado por aquellos elementos de X para los cuales la fórmula P sea cierta:

$$X_P = \{x \in X \mid P(x)\}$$

Sin embargo, el recíproco de esta afirmación (que para cada conjunto siempre podemos encontrar una fórmula que cumplan exclusivamente los elementos del conjunto) no será generalmente cierta. Por ejemplo, si consideramos X un conjunto finito, como $\mathcal{P}(X)$ es finito, siempre podremos hacerlo; pero en un caso general con X cualquier conjunto (posiblemente no numerable), podemos pensar en que la cantidad de fórmulas que podemos construir es un conjunto numerable, por lo que no llegaremos a abarcar todas las posibilidades¹.

Ejemplo. Como primeros ejemplos de conjuntos a destacar, fijado un conjunto X , consideramos una cantidad numerable de subconjuntos de X : $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $X_n \subseteq X$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Si pensamos en la intersección de todos estos conjuntos:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

Podemos tratar de buscar una fórmula que defina única y exclusivamente a todos los elementos de este conjunto, como por ejemplo:

$$\forall n (n \in \mathbb{N} \implies x \in X_n)$$

- Si ahora consideramos la unión de todos ellos:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

Y tratamos de buscar una fórmula que lo defina, llegamos a:

$$\exists n (n \in \mathbb{N} \wedge x \in X_n)$$

A partir de este primer ejemplo y viendo la relación existente entre los cuantificadores \forall y \exists con las operaciones \cap y \cup , buscamos ahora cómo podemos expresar ciertas fórmulas sobre algún espacio X previamente fijado en forma de conjuntos, proceso que ilustraremos con los siguientes ejemplos.

¹Es mucho más complejo que esto, este argumento no es suficiente para demostrarlo.

Ejemplo. En cada caso, consideraremos un conjunto X distinto.

- En el espacio de las sucesiones de números reales: $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$

Pensamos en la propiedad de que una sucesión sea “casi nula”, que intuitivamente podemos definir como que una sucesión tenga una cantidad infinita de términos nulos. De manera formal, podemos escribir que existe un término a partir del cual todos los términos de la sucesión son cero:

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall m \geq n \ x(m) = 0$$

Que podemos escribir de forma más rigurosa como (entendiendo que donde pone $m \geq n$ deberíamos escribir $m \geq n \wedge m \in \mathbb{N}$):

$$\exists n(n \in \mathbb{N} \wedge \forall m(m \geq n \implies x(m) = 0))$$

Donde observamos que en esta la variable x aparece libre, por lo que podemos tratar de buscar un conjunto que contenga todos aquellos elementos que cumplan la fórmula para cierto x y ninguno más, conjunto al que denotaremos por C_{00} .

Para hayar este conjunto, lo que haremos será en primer lugar considerar los términos que aparecen en la fórmula y en segundo lugar, tratar de relacionarlos con los conectores y cuantificadores que aparecen. Para ello, los términos que aparecen en la fórmula son:

$$n \in \mathbb{N} \quad m \geq n \quad x(m) = 0$$

Y para construir el conjunto que venga definido por la fórmula, lo que haremos será ir poco a poco de dentro hacia afuera, considerando primero el conjunto que cumpla:

$$x(m) = 0$$

De esta forma, fijado m , definimos:

$$X_m = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x(m) = 0\}$$

Ahora, busquemos el conjunto que venga definido por la fórmula:

$$\forall m(m \geq n \implies x(m) = 0)$$

Que podemos reescribir como:

$$\forall m(m \geq n \implies x \in X_m)$$

Observando el \forall , podemos pensar en reescribir este conjunto como en una intersección de conjuntos:

$$\bigcap_{m \geq n} X_m$$

Finalmente, la fórmula entera:

$$\exists n(n \in \mathbb{N} \wedge \forall m(m \geq n \implies x(m) = 0))$$

La podemos reescribir como:

$$\exists n \left(n \in \mathbb{N} \wedge x \in \bigcap_{m \geq n} X_m \right)$$

Que podemos expresar ahora como la unión de ciertos conjunto.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} X_m$$

Obteniendo así nuestro conjunto C_{00} :

$$C_{00} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} X_m$$

- Sobre el mismo espacio $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ podemos ahora considerar la propiedad de “ser convergente a 0”, propiedad definida por:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m \implies |x(m)| < \varepsilon \quad (3.1)$$

Y que de forma rigurosa puede escribirse como (entendiendo que donde pone $n \geq m$ deberíamos escribir $n \geq m \wedge n \in \mathbb{N}$ y que donde pone $\varepsilon > 0$ deberíamos poner $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$):

$$\forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \implies \exists m (m \in \mathbb{N} \wedge \forall n (n \geq m \implies |x(m)| < \varepsilon)))$$

Fórmula a partir de la cual podemos extraer un conjunto de igual forma que hicimos anteriormente, identificando que los términos son:

$$\varepsilon > 0 \quad m \in \mathbb{N} \quad n \geq m \quad |x(m)| < \varepsilon$$

Y construyendo la fórmula de dentro hacia afuera. Para ello, en primer lugar, fijados m y ε definimos el conjunto:

$$X_{n,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x(n)| < \varepsilon\}$$

Y posteriormente escribiendo las sucesivas fórmulas como uniones e intersecciones, llegando a:

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} X_{n,\varepsilon}$$

Sin embargo, hay una diferencia ahora entre la fórmula obtenida anteriormente y esta; resulta que en esta fórmula estamos considerando una intersección no numerable de elementos, al considerar la intersección de todos aquellos elementos de \mathbb{R}^+ , un hecho que nos va a dificultar luego algo en lo que estamos interesados².

²Que es poder definir una sigma álgebra que contenga uniones e intersecciones numerables de ciertos conjuntos.

A pesar de ello, la solución en este caso es bien sencilla. Resulta que la definición de convergencia a 0 cuya definición escribimos en (3.1) puede caracterizarse en función de una sucesión convergente a cero, pudiendo cambiar la fórmula que describe la propiedad de “ser convergente a cero” por la fórmula:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m \implies |x(n)| < \frac{1}{k}$$

Si ahora realizamos nuevamente el proceso anterior de reescribir a qué conjunto llegamos, obtenemos ahora sí un conjunto dado por intersecciones y uniones numerables de ciertos conjuntos:

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} X_{n, \frac{1}{k}}$$

- Si ahora consideramos $X = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua}\}$ y fijado $L \in \mathbb{R}^+$, pensamos en la propiedad de $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, definida por:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \forall x > M |f(x) - L| < \varepsilon$$

Se nos plantea el problema anterior de que obtendríamos uniones o intersecciones no numerables de conjuntos. Sin embargo, vemos que es fácil reemplazar ε y M para que esto no suceda, obteniendo una expresión equivalente:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists M \in \mathbb{N} \forall x > M |f(x) - L| < \frac{1}{k}$$

Sin embargo, seguimos teniendo el problema de que $x \in \mathbb{R}$, que pensamos en cómo solucionar. Como estamos considerando funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} y $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ es denso y numerable, podemos considerar $x \in \mathbb{Q}$ y reescribir la propiedad de forma equivalente como:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists M \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{Q}, x > M |f(x) - L| < \frac{1}{k}$$

Así, obtenemos una fórmula:

$$\forall k \left(k \in \mathbb{N} \implies \exists M \left(M \in \mathbb{N} \wedge \forall x \left(x \in \mathbb{Q} \wedge x > M \implies |f(x) - L| < \frac{1}{k} \right) \right) \right)$$

Fijado x y k , definimos el conjunto:

$$X_{x,k} = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) : |f(x) - L| < \frac{1}{k} \right\}$$

Y la fórmula nos da el conjunto:

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{M \in \mathbb{N}} \bigcap_{\substack{x > M \\ x \in \mathbb{Q}}} X_{x,k}$$

- Finalmente, si ahora consideramos el mismo espacio X y la pensamos en la propiedad de que una función tenga límite en infinito:

$$\forall L \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \forall x > M |f(x) - L| < \varepsilon$$

Sabemos que podemos sustituir ε , M y x para obtener intersecciones y uniones numerables, pero ¿cómo podemos ahora hacer esto con L ? Pues bien, podemos usar un resultado bien conocido, y es que \mathbb{R} es completo, por lo que cualquier sucesión de Cauchy es convergente y viceversa, con lo que podemos reescribir esta fórmula en una equivalente de la forma:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists M \in \mathbb{N} \forall x, y \in \mathbb{Q}, x, y > M |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Con esta gran cantidad de ejemplos hemos visto cómo podemos obtener conjuntos a partir de fórmulas, así como tratar de buscar siempre una cantidad numerable de intersecciones y uniones, que generalmente obtendremos usando teoremas fundamentales del espacio en el que trabajemos.

En resumen, fijado un conjunto X , nos interesará dar propiedades mediante fórmulas, a partir de las cuales construir conjuntos mediante intersecciones y uniones (preferiblemente numerables) de conjuntos, las cuales vendrán dadas por los cuantificadores que hemos usado en la fórmula para describir una propiedad específica. De esta forma, dada una cierta propiedad y considerando una cierta topología \mathcal{T} sobre el espacio X , los conjuntos que obtengamos podrán ser:

- Abiertos.
- Cerrados.
- Intersecciones numerables de abiertos.
- Uniones arbitrarias de cerrados.
- Uniones numerables de intersecciones numerables de abiertos.
- Intersecciones numerables de uniones numerables de cerrados.
- ...

De esta forma, llegaremos luego a considerar una σ -álgebra de Borel, que será donde podamos trabajar.

Finalmente nos preguntamos si toda fórmula puede reducirse a unos cuantificadores numerables, pregunta cuya respuesta será que no³, y esta respuesta nos hará interesarnos por una noción más general de los cardinales de los conjuntos.

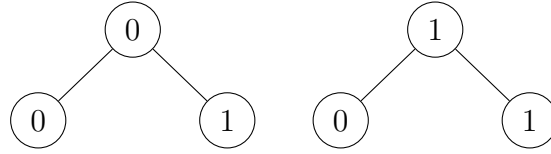
³Se verá un leve razonamiento de por qué.

3.2. Conjunto de Cantor

Definición 3.1 (Conjunto de Cantor). Definimos el conjunto de Cantor como el conjunto de las sucesiones de $\{0, 1\}$:

$$2^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$$

Las sucesiones de números de $\{0, 1\}$ podemos entenderlas de forma gráfica como cada una de las elecciones (arriba o abajo) en las bifurcaciones del siguiente dibujo:



Notación. Nos interesará también considerar una sucesión finita de elementos de $\{0, 1\}$:

$$2^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f : \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}\}$$

Lo que nos interesará será comparar qué tan cercanas están los elementos del conjunto de Cantor entre sí de una forma intuitiva.

Ejemplo. Por ejemplo, ante las sucesiones:

$$(0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$

$$(0, 1, 1, 0, 0, \dots)$$

$$(0, 1, 0, 1, 1, \dots)$$

Nos interesará decir que la tercera sucesión es la que más se parece a la primera. Una analogía es comparar lo que estamos haciendo con los números irracionales, ya que el conjunto de los números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, podemos verlo como un entero seguido de una sucesión de naturales del conjunto $\{0, 1, \dots, 9\}$:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad x = a' n_1 n_2 n_3 \dots \quad a \in \mathbb{Z}, n_1, n_2, n_3, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

Ante los siguientes números irracionales:

$$3,141529\dots$$

$$3,141578\dots$$

$$3,142386\dots$$

Decimos que el segundo es más cercano al primero que el tercero al primero.

Definición 3.2. Definimos en el conjunto de Cantor la distancia: $d : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} & \text{si } x \neq y, \quad n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid x(k) \neq y(k)\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En el conjunto $2^{<\mathbb{N}}$, fijado $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ podemos definir el siguiente conjunto de abiertos básicos para s (siendo n la longitud de s):

$$O_s = \{x \in 2^{\mathbb{N}} \mid x_{\{0,1,\dots,n\}} = s\} = \left\{x \in 2^{\mathbb{N}} \mid d(s, x) \leq \frac{1}{2^{n+1}}\right\}$$

Ejercicio 3.2.1. Demostrar que $(2^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio completo.

Veamos en primer lugar que d es una distancia.

1. No negatividad:

$$d(x, y) = \frac{1}{2^{n+1}} \geq 0 \quad \forall x, y \in 2^{\mathbb{N}}$$

Además, se tiene que $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

2. Simetría:

Sea $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid x(k) \neq y(k)\} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid y(k) \neq x(k)\}$, entonces:

$$d(x, y) = \frac{1}{2^{n+1}} = d(y, x)$$

3. Desigualdad triangular:

Sean los siguientes tres mínimos, que suponemos que existen (ya que si no existen, la desigualdad se verifica trivialmente):

$$\begin{aligned} n_1 &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid x(k) \neq y(k)\} \\ n_2 &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid y(k) \neq z(k)\} \\ n &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid x(k) \neq z(k)\} \end{aligned}$$

Tenemos que $\min\{n_1, n_2\} \leq n$, puesto que para $k < \min\{n_1, n_2\}$, se verifica que $x(k) = y(k)$ y $y(k) = z(k)$, por lo que $x(k) = z(k)$. Por tanto, $n \geq \min\{n_1, n_2\}$. Por tanto:

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{\min\{n_1, n_2\}+1}} = \max\left\{\frac{1}{2^{n_1+1}}, \frac{1}{2^{n_2+1}}\right\} = \\ &= \max\{d(x, y), d(y, z)\} \leq d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Por tanto, hemos demostrado que d es una distancia, por lo que consideramos el espacio métrico $(2^{\mathbb{N}}, d)$. Este será completo si toda sucesión de Cauchy es convergente, lo que veremos a continuación.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, es decir:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Veamos ahora cómo demostrar que esta sucesión es convergente, para lo cual hemos de construir la sucesión x que sea el límite de la sucesión de Cauchy. Para cada $j \in \mathbb{N}$, consideramos $\varepsilon = \frac{1}{2^{j+1}}$, y por tanto, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall m, n \geq N_j \quad d(x_m, x_n) < \frac{1}{2^{j+1}}$$

Por tanto, para cada $m, n \geq N_j$, tenemos que $x_m(j) = x_n(j)$. Definimos por tanto:

$$x(j) = x_{N_j}(j) = x_m(j) \quad \forall m \geq N_j$$

Vemos que x es una sucesión de Cantor, y ahora hemos de demostrar que es el límite de la sucesión de Cauchy. Fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon$, y podemos considerar $N_k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall m, n \geq N_k \quad d(x_m, x_n) < \frac{1}{2^{k+1}}$$

Por tanto, para todo $m \geq N_k$, veamos que $x_m(j) = x(j)$ para todo $j \leq k$. Sea $j \leq k$, luego:

$$\frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^j + 1} \implies N_j \leq N_k$$

Por tanto, para todo $m \geq N_k \geq N_j$, se tiene que $x_m(j) = x_{N_j}(j) = x(j)$. Por tanto, para todo $m \geq N_k$, se verifica que:

$$d(x_m, x) < \frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon$$

Por tanto, hemos demostrado que la sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $x \in 2^{\mathbb{N}}$, y por tanto, $(2^{\mathbb{N}}, d)$ es completo.

Definición 3.3 (Polaco). Sea (X, d) un espacio métrico, decimos que es polaco si admite una distancia que lo hace completo e induce un espacio topológico separable.

Ejemplo. Un ejemplo de un espacio métrico polaco es el conjunto de los irracionales con la distancia usual de \mathbb{R} inducida, ya que el espacio métrico que consideramos no es completo (hay sucesiones de irracionales que convergen a racionales), pero con la distancia análoga a la anterior definida sí que es completo.

Lema 3.1 (de Cantor). *Todo espacio (no numerable) completo⁴ separable y sin puntos aislados admite un conjunto homeomorfo al conjunto de Cantor.*

Demostración. Sea X un espacio bajo esas hipótesis, pensamos la demostración como si estuviéramos en $[0, 1]$:

1. Cogemos dos puntos suficientemente lejos, x_0 y x_1 , de forma que podamos coger $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ de forma que⁵:

$$B(x_0, \varepsilon_0) \cap B(x_1, \varepsilon_1) = \emptyset$$

2. Dentro de $B(x_0, \varepsilon_0)$ volvemos a coger dos puntos en estas condiciones: x_{00} y x_{01} , de forma que:

$$B(x_{00}, \varepsilon_{00}) \cap B(x_{01}, \varepsilon_{01}) = \emptyset$$

Repetimos el procedimiento en $B(x_1, \varepsilon_1)$ y hacemos una inducción.

⁴En realidad, bastaría con ser polaco.

⁵Usar que no hay puntos aislados.

3. De esta forma, por cada punto de $2^{\mathbb{N}}$ hemos encontrado una sucesión de bolas abiertas decrecientes. Se verifica que la intersección de todas ellas es un único punto⁶:

$$\bigcap B_x = \{p\} \quad p \in X$$

Hemos conseguido una aplicación $\Phi : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow X$, entre el conjunto de Cantor y el nuestro.

4. Demostramos que:

- Φ es inyectiva.
- $2^{\mathbb{N}}$ es compacto.
- Φ es continua⁷.

Con lo que, como X es Hausdorff, una aplicación continua de un cerrado en Hausdorff es cerrada, con lo que acabamos deduciendo que Φ es homeomorfismo sobre su imagen.

□

Ejercicio 3.2.2. Formalizar la demostración anterior.

3.3. Jerarquía de Borel

Fijado un espacio topológico procedente de una métrica, (X, \mathcal{T}) , definimos:

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \{U \subseteq X \mid U \text{ abierto}\} & \Sigma_1 &= \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid A_n \text{ cerrado} \right\} \\ \Pi_0 &= \{U \subseteq X \mid U \text{ cerrado}\} & \Pi_1 &= \left\{ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid A_n \text{ abierto} \right\} \end{aligned}$$

Ejercicio 3.3.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $x \in X$ y $A \subseteq X$, definimos la distancia entre a y X como:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

Verificar que, dado $r > 0$, el siguiente conjunto es un abierto:

$$\{x \in X \mid d(x, A) < r\}$$

Demostración. Dado $x \in X$ con $d(x, A) < r$, veamos que $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ de forma que $B(x, \varepsilon) \subseteq \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$.

Sea $\varepsilon = r - d(x, A) > 0$, y sea $y \in B(x, \varepsilon)$, es decir, $d(x, y) < \varepsilon$. Veamos que $d(y, A) < r$.

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) \forall a \in A$$

⁶Usar la completitud.

⁷Usar que es separable.

Por tanto:

$$\begin{aligned} d(y, A) &= \inf\{d(y, a) \mid a \in A\} \\ &\leq \inf\{d(y, x) + d(x, a) \mid a \in A\} = d(y, x) + \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} \\ &= d(y, x) + d(x, A) < \varepsilon + d(x, A) = r - d(x, A) + d(x, A) = r \end{aligned}$$

Por tanto, $y \in \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$, y hemos demostrado que:

$$B(x, \varepsilon) \subseteq \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$$

Por tanto, $\{x \in X \mid d(x, A) < r\}$ es un abierto. □

Proposición 3.2. *Se verifica que:*

1. $\Sigma_0 \subseteq \Pi_1$.
2. $\Pi_0 \subseteq \Sigma_1$.
3. $\Pi_0 \subseteq \Pi_1$.
4. $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1$.

Demostración. Vemos las inclusiones:

1. Sea $A \in \Sigma_0$:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

2. Sea $A \in \Pi_0$:

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

3. Sea $C \in \Pi_0$, veamos que C puede escribirse como una intersección numerable de abiertos. Para ello, sabemos que:

$$C = \overline{C} = \{x \in X \mid d(x, C) = 0\}$$

Por lo que podemos tomar:

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in X \mid d(x, C) < \frac{1}{n} \right\}$$

4. Sea $C \in \Sigma_0$, sabemos que $X \setminus C \in \Pi_0$, por lo que podemos escribir $X \setminus C$ como intersección numerable de abiertos:

$$X \setminus C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Tomando complementario:

$$C = X \setminus (X \setminus C) = X \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X \setminus A_n$$

Tenemos que $X \setminus A_n$ es un cerrado, $\forall n \in \mathbb{N}$, luego $C \in \Sigma_1$.

□

Si seguimos definiendo conjuntos para la jerarquía:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 \quad \Sigma_2 &= \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid A_n \in \Pi_j, j \in \{0, 1\} \right\} \\ \Pi_1 \quad \Pi_2 &= \left\{ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid A_n \in \Sigma_j, j \in \{0, 1\} \right\}\end{aligned}$$

Y por inducción, dado $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\begin{aligned}\Sigma_{n-1} \quad \Sigma_n &= \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid A_n \in \Pi_j, j < n \right\} \\ \Pi_{n-1} \quad \Pi_n &= \left\{ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid A_n \in \Sigma_j, j < n \right\}\end{aligned}$$

Proposición 3.3. *Se verifica que:*

1. $\Sigma_j \subseteq \Sigma_n \quad \forall j < n.$
2. $\Pi_j \subseteq \Pi_n \quad \forall j < n.$

Ejercicio 3.3.2. Hacer la Proposición anterior.

Notación. Si previamente fijamos un espacio X sobre el que trabajar, escribiremos:

$$\Sigma_n(X) \quad \Pi_n(X) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

De esta forma, podemos también hablar sobre estos conceptos sin fijar antes ningún conjunto, en cuyo caso no serán conjuntos, sino clases, y notaremos:

$$\Sigma_n \quad \Pi_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3.3.1. Conjunto de Vitali

Un problema que surgió de forma natural en matemáticas cuando se intentó definir una medida, es decir, una función $\mu : \cdot \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ que verifique unas ciertas propiedades deseables con el fin de obtener una medida del tamaño de cualquier conjunto, propiedades como:

- Que la medida de los intervalos sea la diferencia de los extremos:

$$\mu([a, b]) = b - a$$

- La σ -aditividad de la medida:

$$\mu \left(\biguplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

- La medida es invariante frente a traslaciones:

$$\mu(t(A)) = \mu(A)$$

De estas tres propiedades podía deducirse que si tenemos $A \subseteq B \subseteq C$, entonces:

$$\mu(A) \leq \mu(B) \leq \mu(C)$$

Sin embargo, no podemos considerar esta medida sobre todos los conjuntos a considerar, porque tendríamos entonces varias contradicciones en la teoría, tal y como veremos a continuación. Por esta razón, las medidas (como por ejemplo la de Lebesgue, ya estudiada en Análisis Matemático II) se definen sobre ciertos conjuntos restringidos de $\mathcal{P}(X)$, no sobre todo este conjunto. En el ejemplo de la medida de Lebesgue, estos conjuntos eran los medibles, \mathcal{M} . En este caso, los conjuntos borelianos (de la σ -álgebra de Borel) estaban dentro de los medibles.

En teorías matemáticas constructivas se verifica que todos los conjuntos que se consideran son medibles, pero al considerar axiomas o resultados como el Axioma de Elección, empiezan a surgir ejemplos de conjuntos no medibles.

En nuestro caso, la jerarquía definida hasta el momento, el conjunto de todos los Σ_n y Π_n no nos es suficiente. Por ejemplo, la unión de todos los conjuntos Σ_n está dentro del σ -álgebra de Borel, que ni siquiera llega a todos los conjuntos medibles, por lo que queremos extender nuestra jerarquía con el fin de llegar a poder clasificar más tipos de conjuntos.

Lo que haremos en esta sección será dar un ejemplo de un conjunto no medible (es decir, un conjunto que pone en conflicto alguna de las propiedades enunciadas que son buenas para las medidas). Como este conjunto no será medible, en particular no será de Borel, mucho menos puede estar en nuestra jerarquía.

Definición 3.4 (Conjunto de Vitali). Sea $V \subseteq \mathbb{R}$, decimos que V es un conjunto de Vitali si:

$$V \cap \{x + \mathbb{Q}\} = \{y\} \subseteq \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proposición 3.4. *Todo conjunto de Vitali $V \subseteq [0, 1]$ verifica:*

1. $(q + V) \cap (p + V) = \emptyset \quad \forall p, q \in \mathbb{Q}, p \neq q$
2. $[0, 1] \subseteq \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq q \leq 1}} (q + V) \subseteq [-1, 2]$

Demostración. Supuesto que tenemos un conjunto de Vitali $V \subseteq [0, 1]$, veamos las dos propiedades:

1. Supongamos que tenemos $p, q \in \mathbb{Q}$ con $p \neq q$ de forma que:

$$(q + V) \cap (p + V) \neq \emptyset$$

En dicho caso, $\exists u, v \in V$ de forma que:

$$q + u = p + v$$

En cuyo caso, $v = u + (q - p)$, por lo que $v \neq u$. Sin embargo, tenemos entonces que:

$$\{u, v\} \subseteq V \cap \{u + \mathbb{Q}\}$$

Por lo que llegamos a una contradicción con que V era un conjunto de Vitali.

2. Para la primera inclusión, sea $x \in [0, 1]$, basta observar que:

$$V \cap (x + \mathbb{Q}) = \{y\} \subseteq \mathbb{R}$$

Para la segunda:

$$\bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq q \leq 1}} (q + V) \subseteq \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq q \leq 1}} (q + [0, 1]) \subseteq [-1, 2]$$

□

Todavía no demostraremos la existencia del mismo, pero supuesta la existencia y vistas estas propiedades, podemos ver por un lado que aplicando la σ -aditividad:

$$\mu \left(\bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq q \leq 1}} (q + V) \right) = \sum_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq q \leq 1}} \mu(q + V) = \sum_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq q \leq 1}} \mu(V)$$

Pero como esta cantidad ha de ser menor que 3, por estar contenido el conjunto en $[-1, 2]$, esta última serie ha de ser finita, luego ha de ser $\mu(V) = 0$.

Por otra parte, observamos que:

$$1 = \mu([0, 1]) \leq \mu \left(\bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq q \leq 1}} (q + V) \right) \leq \mu[-1, 2] = 3$$

Por lo que no puede ser $\mu(V) = 0$.

Vemos que supuesta la existencia de este conjunto (algo que no hemos demostrado todavía), llegamos a una contradicción, por lo que este conjunto (en caso de existir), no podrá ser medible, y mucho menos estar en nuestra jerarquía.

Demostración. Para probar la existencia de un conjunto de Vitali en $[0, 1]$, lo que haremos será definir la siguiente relación de equivalencia:

$$\forall x, y \quad x \sim y \iff \exists q \in \mathbb{Q} : x = q + y$$

Con esta relación de equivalencia, podemos considerar la proyección al cociente:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R} / \sim$$

Ahora, por el Axioma de Elección, podemos crear una aplicación $\phi : \mathbb{R} / \sim \rightarrow \mathbb{R}$ que de cada clase de equivalencia nos elija un elemento en $[0, 1]$, por lo que componiendo $\phi \circ \pi$, obtenemos una aplicación:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R} / \sim \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$$

Y tomando $V = (\phi \circ \pi)(\mathbb{R})$, tenemos un conjunto de Vitali en $[0, 1]$. □

3.4. Jerarquía generalizada

Con el fin de que cualquier subconjunto que consideremos esté en algún lugar de la jerarquía, tratamos de extender el concepto de los ordinales finitos (los números naturales) a otros ordinales más generosas. Para ello, recordamos cómo se construyeron los números naturales:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \{\emptyset\} \\ 2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es decir, a partir del conjunto \emptyset , cuya existencia suponemos por axioma, y con la aplicación sucesor s , dada por:

$$s(x) = x \cup \{x\}$$

De esta forma, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2 &= 0 \cup 1 \\ 3 &= 0 \cup 1 \cup 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Y si queremos generalizar estos conceptos para que trasciendan a los naturales, tras todos los números naturales, el siguiente ordinal a considerar será \mathbb{N} , luego:

$$\mathbb{N} + 1 := \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\} \quad \dots$$

Con esta idea, llegamos a la siguiente definición:

Definición 3.5 (Ordinal). Un conjunto α es un ordinal cuando:

1. Es transitivo para \in :

$$\forall x(x \in \alpha \implies \forall y(y \in x \implies y \in \alpha))$$

2. α es bien ordenado para \in .

3.4.1. Motivación

Resulta que la jerarquía que hemos construido no es suficiente, puesto que hay conjuntos Borelianos que se salen de la jerarquía.

Definición 3.6. Diremos que un punto de un espacio topológico $x \in X$ es aislado si $\{x\}$ es abierto.

Además, consideraremos:

$$S(X) = \{x \in X \mid x \text{ no es aislado}\}$$

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de esto:

- Si consideramos:

$$D = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{1\}$$

Resulta que

$$S(D) = \{1\} \quad S(S(D)) = \{\emptyset\} \quad S^3(D) = S(S(S(D))) = \emptyset$$

Vemos que “ D se estabiliza en 2 iteraciones”.

- Si consideramos ahora:

$$E = \left\{ 1 - \frac{1}{n_1} \mid n_1 \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 2 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \mid n_1, n_2 \in \mathbb{N} \right\} \cup \{2\}$$

Tendremos:

$$S(E) = \{1\} \cup \left\{ 2 - \frac{1}{n_2} \mid n_2 \in \mathbb{N} \right\} \quad S(S(E)) = \{2\} \quad S^3(E) = \emptyset$$

- Dado $m \in \mathbb{N}$:

$$X_m = \bigcup_{k=1}^m \left\{ k - \frac{1}{n_1} - \dots - \frac{1}{n_k} \mid n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} \right\} \cup \{m\}$$

Tendremos:

$$S^m(X_m) = \{m\} \quad S^{m+1}(X_m) = \emptyset$$

Por último, si consideramos:

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

Llegaremos a que $S^m(X) \neq \emptyset \forall m \in \mathbb{N}$. Sabemos que $]0, 1[$ es homeomorfo a $]0, +\infty[$. Pues bien, si aplicamos dicho homeomorfismo a X , obtendremos que $\{1\} \in S^m(X)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Veamos unos últimos luego entenderemos mejor y que nos servirán de motivación:

Teorema 3.5. Si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = 0$ para todo $t \in [-\pi, \pi]$, necesariamente ha de cumplirse que $c_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3.6 (Dedekind). Si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = 0$ para todo $t \in [-\pi, \pi]$ salvo en un número finito de puntos, necesariamente ha de cumplirse que $c_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Dedekind preguntó a Cantor cómo mejorar las hipótesis del Teorema, algo que consiguió y que luego entenderemos, ya que son necesarias algunas definiciones previas.

Teorema 3.7. Si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = 0$ para todo $t \in [-\pi, \pi]$ salvo en un conjunto X “que se establezca en una etapa numerable”, necesariamente ha de cumplirse que $c_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

3.5. Buenos órdenes

Definición 3.7. Una relación⁸ $<$ es un orden en un conjunto X si:

- $<$ es anti-reflexiva ($\forall x \in X \neg x < x$).
- $<$ es transitiva ($\forall x, y, z \in X \ x < y < z \rightarrow x < z$).

Diremos que:

- $<$ es un orden total si $\forall x, y \in X \ (x < y \vee x = y \vee y < x)$.
- $<$ es un buen orden si $\forall Y \subset X \ (Y \neq \emptyset \rightarrow Y \text{ tiene un mínimo})$.

Diremos que una aplicación $f : (X, <) \rightarrow (Y, <)$ entre dos conjuntos bien ordenados (es decir, que tienen un buen orden) es un morfismo si:

$$\forall x, x' \in X \ (x < x' \rightarrow f(x) < f(x'))$$

Diremos que:

- f es un isomorfismo si es un morfismo biyectivo con inversa un morfismo.
- f es un automorfismo si es un isomorfismo con mismo dominio que codominio.

Resulta que la condición de tener un buen orden es mucho más general que la de tener un orden total.

Proposición 3.8. *Todo conjunto bien ordenado tiene un orden total.*

Demostración. Sea W un conjunto bien ordenado, sean $x, y \in W$, entonces el conjunto $\{x, y\} \subseteq W$ tiene un mínimo, es decir:

- Bien $x \leq y$.
- Bien $y \leq x$.

Por lo que se cumple la definición del orden total para el orden de W . □

Lema 3.9. *Si $(W, <)$ es un buen orden y $f : W \rightarrow W$ es un morfismo, entonces:*

$$f(x) \geq x \quad \forall x \in W$$

Demostración. Como la mayoría de las demostraciones que involucren a un buen orden: lo probaremos por reducción al absurdo, cogiendo el mínimo elemento del conjunto en el que no se cumple la tesis.

Por reducción al absurdo, suponemos que:

$$X = \{x \in W \mid f(x) < x\}$$

es no vacío. Por ser W bien ordenado, este ha de tener un mínimo, $y = \min X$. Por ser $y \in X$, tendremos que $f(y) < y$. Si volvemos a aplicar f :

$$f(f(y)) < f(y) < y$$

Sea $z = f(y)$, tenemos que $z \in X$ por ser $f(z) < z$ y además tenemos que $z < y$, por lo que y no podía ser el mínimo de X , contradicción, que venía de suponer que X era no vacío. □

⁸Puede hacerse la definición para $<$ o para \leq .

Ejemplo. Sin embargo, el lema anterior no se verifica si solo consideramos que $(W, <)$ tenga un orden total. Por ejemplo, $(\mathbb{Z}, <)$ con el orden al que estamos acostumbrados es un orden total que no es un buen orden y podemos considerar el morfismo:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ z &\longmapsto z - 1 \end{aligned}$$

Corolario 3.9.1. *El único automorfismo de un buen orden es la identidad.*

Demostración. Sea $(W, <)$ un conjunto bien ordenado, sea $f : W \rightarrow W$ un automorfismo, si $x \in X$, tendremos por el Lema anterior que $f(x) \geq x$. Sin embargo, por ser f un automorfismo, también lo será f^{-1} , por lo que también tendremos que:

$$x = f^{-1}(f(x)) \geq f(x)$$

De donde concluimos que $f(x) = x$, para todo $x \in X$. □

Corolario 3.9.2. *Si W_1, W_2 son dos buenos órdenes isomorfos, el isomorfismo es único.*

Demostración. Supongamos que $f_1 : W_1 \rightarrow W_2$ y $f_2 : W_1 \rightarrow W_2$ son dos isomorfismos. Entonces, tendremos que $(f_2^{-1} \circ f_1) : W_1 \rightarrow W_1$ es un automorfismo, por lo que debe ser:

$$f_2^{-1} \circ f_1 = id \implies f_1 = f_2 \circ f_2^{-1} \circ f_1 = f_2$$

□

Definición 3.8. Sea W un buen orden, para $x \in W$ definimos el segmento inicial generado por x como:

$$W(x) = \{y \in W \mid y < x\}$$

Es claro que $W(x)$ también es un buen orden.

Lema 3.10. *Ningún buen orden es isomorfo a un segmento inicial propio suyo.*

Demostración. Sea W un buen orden, supongamos que tenemos $W \cong W(x)$ para cierto $x \in W$. En dicho caso, si $f : W \rightarrow W(x)$ es un isomorfismo, tendremos:

- $f(x) \geq x$ por ser f un morfismo.
- $f(x) < x$ por ser $f(x) \in W(x)$.

Hemos llegado a una contradicción. □

Teorema 3.11. *Sean W_1 y W_2 buenos órdenes, entonces ocurre uno y solo uno de los siguientes escenarios:*

- $W_1 \cong W_2$.
- $W_1 \cong W_2(x)$ para cierto $x \in W_2$.
- $W_2 \cong W_1(x)$ para cierto $x \in W_1$.

Demostración. Consideramos:

$$f = \{(x, y) \in W_1 \times W_2 \mid W_1(x) \cong W_2(y)\}$$

- En primer lugar, veamos que dado $x \in W_1$, existe un único $y \in W_2$ de forma que $(x, y) \in f$. Para ello, sean $x \in W_1$, $y_1, y_2 \in W_2$ de forma que $(x, y_1), (x, y_2) \in f$, entonces tendremos que $W_1(x) \cong W_2(y_1)$ y que $W_1(x) \cong W_2(y_2)$. Por la transitividad de la isomorfía, llegamos a que $W_2(y_1) \cong W_2(y_2)$ y como ningún buen orden puede ser isomorfo a un segmento inicial propio, concluimos que ha de ser $y_1 = y_2$.
- Ahora, veamos que dados $x_1, x_2 \in W_1$ de forma que si $y \in W_2$ con $(x_1, y), (x_2, y) \in f$, entonces $x_1 = x_2$.

La demostración es análoga a la anterior.

- Es fácil ver que f es un morfismo.

Supongamos ahora que $\text{dom}(f) \neq W_1$ y que $\text{ran}(f) \neq W_2$. Consideramos por tanto, $x = \min(W_1 \setminus \text{dom}(f))$, $y = \min(W_2 \setminus \text{ran}(f))$, tenemos que:

$$\text{dom}(f) = W_1(x) \quad \text{ran}(f) = W_2(y)$$

Por la definición de f , tendremos que $(x, y) \in f$, que es una contradicción.

Como la hipótesis de la que partíamos era falsa, a de ser falsa alguna de las premisas de la conjunción, o bien ambas:

- Si ambas son falsas, estamos en la primera situación.
- Si la primera es falsa, $W_1 \cong W_2(x)$ para cierto $x \in W_2$.
- Si la segunda es falsa, $W_2 \cong W_1(x)$ para cierto $x \in W_1$.

Falta ver que si tenemos $f : W_1 \rightarrow Y \subset W_2$, entonces si tomamos $x = \min(W_2 \setminus Y)$, tendremos que $Y = W_2(x)$, por lo que Y es un segmento inicial. \square

Definición 3.9 (Ordinal). Un ordinal es una clase de equivalencia de ser isomorfos entre buenos órdenes.

De esta forma, como ordinales tenemos:

$$0, 1, 2, \dots n, \dots \mathbb{N}, \mathbb{N} + 1, \dots \mathbb{N} + n, \dots \mathbb{N} + \mathbb{N}, \dots$$

Definición 3.10 (Cardinal). Un cardinal es un ordinal que no está en biyección con ningún otro ordinal menor.

Notación. En este ámbito nos encontramos con dos notaciones equivalentes:

- ω_0
- \aleph_0

Ambos representan a \mathbb{N} . Una pregunta que se hizo Cantor es cómo conseguir el siguiente cardinal, ω_1 o \aleph_1 , y si este era el mismo que el de \mathbb{R} .

Paul Cohen demostró que ver si \aleph_1 coincide con el cardinal de \mathbb{R} es algo que no se puede demostrar, ya que hay modelos a partir de los axiomas de Zermelo-Fraenkel que sí lo cumplen y otros modelos que no.

3.6. Universalidad

El concepto de universalidad es extendido en matemáticas y depende del área en el que nos encontremos. En general, diremos que un espacio (un conjunto con una estructura) es universal para una “clase de espacios” si:

- Dicho conjunto pertenece a la clase.
- Contiene “una copia” (depende del contexto en el que nos encontremos será una clase u otra) de todos los elementos de la clase.

3.6.1. Espacios topológicos metrizables y separables

El objetivo de esta sección es probar que:

Teorema 3.12. *El cubo de Hilbert $I = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ es universal (bajo homeomorfismos) en la clase de los espacios métrizables y separables.*

Para probar el Teorema, hemos de probar:

- Primero, que el cubo de Hilbert es un espacio metrizable y separable.
- Segundo, que todo espacio metrizable y separable contiene una copia homeomorfa dentro del cubo de Hilbert.

En primer lugar, sobre el cubo de Hilbert podemos definir la distancia:

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n} \quad \forall x, y \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$$

Ejercicio. Demostrar que d es una métrica en $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Demostración. En primer lugar, hemos de ver que la distancia así definida está bien definida, es decir, que la suma converge. Aplicamos para ello el Criterio de Comparación:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

Por tanto, d está bien definida. Ahora, veamos que d es una métrica:

- No-negatividad: Por definición de d , tenemos que:

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n} \geq 0$$

Además, se tiene que $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

- Simetría: Por definición de d , tenemos que:

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(y_n, x_n)}{2^n} = d(y, x)$$

- Desigualdad triangular: Tenemos que:

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, z_n)}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(y_n, z_n)}{2^n} \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Por tanto, hemos visto que d es una métrica en $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. □

Lema 3.13. $I = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ es separable.

Demostración. Lo primero que podríamos pensar es considerar el conjunto $(\mathbb{Q} \cap [0, 1])^{\mathbb{N}} \subseteq I$ como nuestro conjunto denso y numerable. Sin embargo, este conjunto no es numerable, ya que:

$$2^{\mathbb{N}} \subseteq (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^{\mathbb{N}}$$

Lo que podemos hacer es tomar una cantidad finita de elementos de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y seguir completando la sucesión con ceros.

Sea $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso de $[0, 1]$ (por ejemplo, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, aunque valdría cualquier otro), definimos:

$$Y_n = \{y \in I \mid y_0, \dots, y_n \in X \wedge y_m = 0 \quad \forall m \geq n\}$$

Y consideramos:

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$$

Que es numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables. Veamos que Y es denso en I . Sea $z \in I$, y $\varepsilon > 0$, buscamos $y \in Y$ de forma que $d(z, y) < \varepsilon$. Para ello, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Lo que haremos será buscar (hágase) $y_0, \dots, y_{n_0} \in X$ de forma que:

$$\sum_{n=1}^{n_0} \frac{d(y_n, z_n)}{2^n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

De esta forma, tendremos que:

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_{n_0}, 0, \dots, 0, \dots) \in Y$$

Así como que:

$$d(z, y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Estamos ya en condiciones de demostrar el Teorema anterior:

Teorema 3.14. El cubo de Hilbert $I = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ es universal (bajo homeomorfismos) en la clase de los espacios métrizables y separables.

Demostración. Hemos probado ya que I es un espacio metrizable y separable. Sea ahora (X, d) un espacio métrico y separable, queremos definir una función $f : X \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}$ continua, abierta e inyectiva, para que la restricción a su imagen sea un homeomorfismo.

En la asignatura de Análisis Matemático I se demostró que siempre que tengamos un espacio métrico (X, d) , podremos definir la distancia:

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{d(x, y) + 1} \quad \forall x, y \in X$$

Que también será una distancia, equivalente a d y acotada por 1:

$$d'(x, y) \leq 1 \quad \forall x, y \in X$$

De esta forma, por ser X un espacio separable, admitirá un conjunto denso y numerable, cuyos elementos denotaremos por x_n . Podemos ahora definir f por:

$$f(x) = \{d'(x, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \forall x \in X$$

- Para probar la inyectividad de f , sean $x, y \in X$ distintos, tomamos $r = d'(x, y)$ y $x_n \in B(x, r/4) \cap X$, tenemos entonces que $d(x, x_n) \neq d(y, x_n)$, por lo que:

$$f(x) = \{d'(x, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \neq \{d'(y, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} = f(y)$$

- La continuidad de la función se deja como ejercicio.
- Para demostrar que f es abierta, lo que haremos será probar que f^{-1} es continua. Para ello, sea $\{f(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Im}(f)$ de forma que $\{f(y_n)\} \rightarrow f(y)$, queremos probar que $\{y_n\} \rightarrow y$. Observemos que tenemos:

$$\{d(x_n, y_m)\}_{m \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n} \{d(y, x_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$$

Es decir, para cada $m \in \mathbb{N}$ tenemos que $\{d(y_n, x_m)\} \rightarrow d(y, x_m)$. Sea $\varepsilon > 0$, buscamos $n_0 \in \mathbb{N}$ para el cual si $n \geq n_0$, entonces $d(y, y_n) \leq \varepsilon$:

$$d(y, y_n) \leq d(y, a) + d(y_n, a) \leq \varepsilon$$

□

3.6.2. Conjuntos universales para la jerarquía

De vuelta a la Jerarquía Boreliana, si consideramos el conjunto de Cantor $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$, definimos lo que es un conjunto universal para una clase de dicha jerarquía:

Definición 3.11. Fijado un conjunto X , decimos que \mathcal{U} es \mathcal{C} -universal para $\Sigma_{\alpha}^0(X)$ para cierto α si:

- $\mathcal{U} \in \Sigma_{\alpha}^0(\mathcal{C} \times X)$.
- Para todo $Y \subseteq X$, $Y \in \Sigma_{\alpha}^0 \iff \exists c \in \mathcal{C}$ con $Y = \pi_{\mathcal{C}}(\mathcal{U})$.

Lema 3.15. Sea (X, d) un espacio polaco, existe \mathcal{U} , un conjunto \mathcal{C} –universal para los abiertos de X .

Demostración. Al ser X separable, existe $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de abiertos básicos de forma que para todo O abierto, existe $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de forma que:

$$O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_{\sigma(n)}$$

Es decir:

$$O \in \Sigma_1^0(X) \iff \exists c \in \mathcal{C} \text{ con } O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$$

De esta forma, sea:

$$\mathcal{U} = \{(c, x) \in 2^{\mathbb{N}} \times X \mid \exists n \in \mathbb{N} (c(n) = 1 \wedge x \in O_n)\}$$

Tenemos que:

$$Y \in \Sigma_1^0(X) \iff \exists c \in \mathcal{C} \text{ con } Y = \pi_{\mathcal{C}}(\mathcal{U})$$

□

Lema 3.16. Si \mathcal{U}_α es \mathcal{C} –universal para $\Sigma_\alpha^0(X)$, entonces existe $\mathcal{U}_{\alpha+1}$, un conjunto \mathcal{C} –universal para $\Sigma_{\alpha+1}^0(X)$.

Lema 3.17.

$$\Sigma_\alpha^0 \neq \Pi_\alpha^0$$

Demostración. Sea \mathcal{U}_α un conjunto \mathcal{C} –universal en $\Sigma_\alpha^0(\mathcal{C})$, supongamos que $\Sigma_\alpha^0 = \Pi_\alpha^0$, definimos el conjunto A como:

$$y \in A \iff (y, y) \notin \mathcal{U}_\alpha$$

De esta forma, tenemos que $\mathcal{U}_\alpha \in \Sigma_\alpha^0 = \Pi_\alpha^0$, por lo que $\exists c \in \mathcal{C}$ de forma que:

$$A = \pi_{\mathcal{C}}(\mathcal{U}_\alpha)$$

Si nos preguntamos si (c, c) está o no en A :

- Si $c \in A$, entonces $(c, c) \in \mathcal{U}_\alpha$, contradicción.
- Si $c \notin A$, entonces $(c, c) \notin \mathcal{U}_\alpha$, por lo que $c \in A$, contradicción.

□

3.7. Conjuntos completos

Este apartado nos servirá para comprobar si una cierta propiedad es de una complejidad concreta y no de ninguna anterior. La idea que usaremos es parecida a la que se usa en geometría o topología, con medidas invariantes por las transformaciones que nos interesan. Por ejemplo, si X, Y son espacios polacos y $A \subseteq X$, si $A \in \Sigma_2^0(X)$, entonces existe una cantidad numerable de cerrados A_n de forma que:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Sea ahora $f : Y \rightarrow X$ una función continua, observemos que:

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in \Sigma_2^0(Y)$$

Por inducción puede probarse para todo Σ_n^0 , así como para las clases Π_n^0 . Esta propiedad fomenta la siguiente definición:

Definición 3.12. Sean X, Y espacios polacos, si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, diremos que A es wadge reducible (o simplemente reducible) a B ($A \leq_w B$) si existe una función $f : X \rightarrow Y$ continua de forma que:

$$f^{-1}(B) = A$$

Definición 3.13. Si Γ es una clase de la Jerarquía Boreliana (bien Σ_n^0 bien Π_n^0 para cierto n), un conjunto $B \subseteq Y$ de un espacio polaco se dice que es Γ -completo si:

- $B \in \Gamma(Y)$.
- Para todo espacio polaco X , si $A \in \Gamma(X)$, entonces $A \leq_w B$.

De esta forma, si quiero saber la complejidad de un conjunto O del que solo conozco que $O \in \Gamma$, tendremos próximamente una variedad de ejemplos sencillos que sabremos que son Γ -completos. Sea U un conjunto Γ -completo, tendremos entonces que existirá una función continua f con:

$$f^{-1}(U) = O \quad O \leq_w U$$

Y nos bastará demostrar que $U \leq_w O$ para ver que el orden de complejidad de O es exactamente Γ .

3.7.1. Problema de Cauchy

Nos interesaremos por un ejemplo concreto, el de clasificar la complejidad de las EDOs (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias) con valores iniciales que tienen soluciones únicas.

Para dar una EDO, necesitamos dar:

- Una función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
- Una condición inicial $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$.

Y lo que exigiremos a una función $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, será:

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

4. Ejercicios

4.1. Lógica Proposicional

Ejercicio 4.1.1. Demuestra que el conjunto de proposiciones es numerable.

Ejercicio 4.1.2. Demuestra que las siguientes proposiciones son tautologías.

1. Ley de doble negación: $\neg\neg a \rightarrow a$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{\neg\neg a\} \models a.$$

Sea I una interpretación tal que $I(\neg\neg a) = 1$. Entonces:

$$1 = I(\neg\neg a) = 1 + I(\neg a) = 1 + 1 + I(a) = 2 + I(a) = I(a)$$

Por tanto, $I(a) = 1$, y por lo tanto, $\{\neg\neg a\} \models a$.

2. Leyes de simplificación:

a) $(a \wedge b) \rightarrow a$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{a \wedge b\} \models a.$$

Sea I una interpretación tal que $I(a \wedge b) = 1$. Entonces:

$$1 = I(a \wedge b) = I(a)I(b)$$

Por ser \mathbb{Z}_2 un cuerpo, en particular es un DI. Si fuese $I(a) = 0$, entonces $I(a)I(b) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $I(a) = 1$, y por lo tanto, $\{a \wedge b\} \models a$.

b) $a \rightarrow (a \vee b)$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{a\} \models a \vee b.$$

Sea I una interpretación tal que $I(a) = 1$. Entonces:

$$I(a \vee b) = I(a) + I(b) + I(a)I(b) = 1 + I(b) + I(b) = 1 + 2I(b) = 1$$

Por tanto, $\{a\} \models a \vee b$.

3. Ley de conmutatividad de la conjunción: $(a \wedge b) \rightarrow (b \wedge a)$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{a \wedge b\} \models b \wedge a.$$

Sea I una interpretación tal que $I(a \wedge b) = 1$. Entonces:

$$1 = I(a \wedge b) = I(a)I(b) \stackrel{(*)}{=} I(b)I(a) = I(b \wedge a)$$

donde en $(*)$ se usa la conmutatividad de la multiplicación en \mathbb{Z}_2 . Por tanto, $\{a \wedge b\} \models b \wedge a$.

4. Ley de conmutatividad de la disyunción: $(a \vee b) \rightarrow (b \vee a)$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{a \vee b\} \models b \vee a.$$

Sea I una interpretación tal que $I(a \vee b) = 1$. Entonces:

$$I(a \vee b) = I(a) + I(b) + I(a)I(b) \stackrel{(*)}{=} I(b) + I(a) + I(b)I(a) = I(b \vee a)$$

donde en $(*)$ se usa la conmutatividad de la suma y la multiplicación en \mathbb{Z}_2 . Por tanto, $\{a \vee b\} \models b \vee a$.

5. Ley de Clavius: $(\neg a \rightarrow a) \rightarrow a$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{\neg a \rightarrow a\} \models a.$$

Sea I una interpretación tal que $I(\neg a \rightarrow a) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} 1 = I(\neg a \rightarrow a) &= 1 + I(\neg a) + I(\neg a)I(a) = 1 + 1 + I(a) + (1 + I(a))I(a) = \\ &= I(a) + I(a) + I(a) = I(a) \end{aligned}$$

Por tanto, $\{\neg a \rightarrow a\} \models a$.

6. Ley de De Morgan: $\neg(a \wedge b) \rightarrow (\neg a \vee \neg b)$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{\neg(a \wedge b)\} \models \neg a \vee \neg b.$$

Sea I una interpretación tal que $I(\neg(a \wedge b)) = 1$. Entonces:

$$1 = I(\neg(a \wedge b)) = 1 + I(a \wedge b) = 1 + I(a)I(b) \implies 0 = I(a)I(b)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} I(\neg a \vee \neg b) &= I(\neg a) + I(\neg b) + I(\neg a)I(\neg b) = 1 + I(a) + 1 + I(b) + (1 + I(a))(1 + I(b)) = \\ &= 1 + \cancel{I(a)} + 1 + \cancel{I(b)} + 1 + \cancel{I(a)} + \cancel{I(b)} + I(a)I(b) = 1 + I(a)I(b) = 1 \end{aligned}$$

Por tanto, $\{\neg(a \wedge b)\} \models \neg a \vee \neg b$.

7. Segunda ley de De Morgan: $\neg(a \vee b) \rightarrow (\neg a \wedge \neg b)$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{\neg(a \vee b)\} \models \neg a \wedge \neg b.$$

Sea I una interpretación tal que $I(\neg(a \vee b)) = 1$. Entonces:

$$1 = I(\neg(a \vee b)) = 1 + I(a \vee b) = 1 + I(a) + I(b) + I(a)I(b)$$

Por tanto:

$$I(\neg a \wedge \neg b) = I(\neg a)I(\neg b) = (1 + I(a))(1 + I(b)) = 1 + I(a) + I(b) + I(a)I(b) = 1$$

Por tanto, $\{\neg(a \vee b)\} \models \neg a \wedge \neg b$.

8. Ley de inferencia alternativa: $((a \vee b) \wedge \neg a) \rightarrow b$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{(a \vee b) \wedge \neg a\} \models b.$$

Sea I una interpretación tal que $I((a \vee b) \wedge \neg a) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} 1 = I((a \vee b) \wedge \neg a) &= I(a \vee b)I(\neg a) = (I(a) + I(b) + I(a)I(b))(1 + I(a)) = \\ &= \cancel{I(a)} + I(b) + I(a)I(b) + \cancel{I(a)} + \cancel{I(a)I(b)} + \cancel{I(a)I(b)} = \\ &= I(b)(1 + I(a)) \end{aligned}$$

Si fuese $I(b) = 0$, entonces $I(b)(1 + I(a)) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $I(b) = 1$, y por lo tanto, $\{(a \vee b) \wedge \neg a\} \models b$.

9. Segunda ley de inferencia alternativa: $((a \vee b) \wedge \neg b) \rightarrow a$.

Se tiene de forma directa por el apartado anterior (intercambiando los papeles de a y b). La demostración es análoga empleando la conmutatividad de \mathbb{Z}_2 .

10. Modus ponendo ponens: $((a \rightarrow b) \wedge a) \rightarrow b$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{(a \rightarrow b) \wedge a\} \models b.$$

Sea I una interpretación tal que $I((a \rightarrow b) \wedge a) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} 1 = I((a \rightarrow b) \wedge a) &= I(a \rightarrow b)I(a) = (1 + I(a) + I(a)I(b))I(a) = \\ &= I(a) + I(a) + I(a)I(b) = I(a)I(b) \end{aligned}$$

Si fuese $I(b) = 0$, entonces $I(a)I(b) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $I(b) = 1$, y por lo tanto, $\{(a \rightarrow b) \wedge a\} \models b$.

11. Modus tollendo tollens: $((a \rightarrow b) \wedge \neg b) \rightarrow \neg a$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{(a \rightarrow b) \wedge \neg b\} \models \neg a.$$

Sea I una interpretación tal que $I((a \rightarrow b) \wedge \neg b) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= I((a \rightarrow b) \wedge \neg b) = I(a \rightarrow b)I(\neg b) = (1 + I(a) + I(a)I(b))(1 + I(b)) = \\ &= 1 + I(a) + I(a)I(b) + I(b) + \cancel{I(a)I(b)} + \cancel{I(a)I(b)} = \\ &= 1 + I(a) + I(b) + I(a)I(b) = \\ &= (1 + I(b)) + I(a)(1 + I(b)) = (1 + I(a))(1 + I(b)) \end{aligned}$$

Si fuese $1 + I(a) = 0$, entonces $(1 + I(a))(1 + I(b)) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $1 + I(a) = 1 = I(\neg a)$. Por tanto, $\{(a \rightarrow b) \wedge \neg b\} \models \neg a$.

Ejercicio 4.1.3. Dado un conjunto de proposiciones $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$. Si $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$, entonces $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$.

Notemos que en este caso tan solo tenemos una de las implicaciones del Teorema de la Deducción. Sea I una interpretación tal que $I(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

- Si $I(\alpha) = 1$, como $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$, entonces $I(\beta) = 1$. Por tanto:

$$I(\alpha \rightarrow \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) = 1 + 1 + 1 = 1$$

- Si $I(\alpha) = 0$, entonces:

$$I(\alpha \rightarrow \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) = 1 + 0 + 0 = 1$$

Por tanto, $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$.

Ejercicio 4.1.4. El señor Pérez, empadronador de la isla de Tururulandia, tiene como objetivo el censar la población de dicha isla. La tarea no es fácil debido al hecho de que la población se divide en dos grupos bien distinguidos: los honrados y los embusteros. Los honrados siempre dicen la verdad, mientras que un embustero solo es capaz de producir mentiras. El gobierno de la isla encarga como trabajo al señor Pérez la ardua tarea de contar los honrados y embusteros de la isla. He aquí cuatro de los muchos problemas con los que se encontró nuestro empadronador.

1. Llama a la puerta de una casa, en la que sabía a ciencia cierta que vivía un matrimonio, y el marido abre la puerta para ver quién es. El empadronador le dice: “necesito información sobre usted y su esposa. ¿Cuál de ustedes, si alguno lo es, es honrado y cuál un embustero?,” a lo que el hombre de la casa respondió “ambos somos embusteros,” cerrando la puerta de golpe. ¿Qué es el marido y qué es la mujer?

Sean las siguientes proposiciones atómicas:

- $p \equiv$ “El marido es honrado.”

- $q \equiv$ “La mujer es honrada.”

Para empezar, sabemos que $p \longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ es cierto. Por tanto, fijada una interpretación I tal que $I(p \longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= I(p \longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)) = 1 + I(p) + I(\neg p \wedge \neg q) = 1 + I(p) + I(\neg p)I(\neg q) = \\ &= 1 + I(p) + (1 + I(p))(1 + I(q)) = (1 + I(p))(I(q)) \end{aligned}$$

Por tanto:

- $I(p) = 0 \implies$ El marido es un embustero.
- $I(q) = 1 \implies$ La mujer es honrada.

2. La segunda casa que visita también está habitada por un matrimonio. Al llamar a la puerta y formular la misma pregunta que antes, el marido responde: “Por lo menos uno de nosotros es un embustero,” cerrando a continuación la puerta. ¿Qué es el marido y qué es la mujer?

Sean las siguientes proposiciones atómicas:

- $p \equiv$ “El marido es honrado.”
- $q \equiv$ “La mujer es honrada.”

Para empezar, sabemos que $p \longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$ es cierto. Por tanto, fijada una interpretación I tal que $I(p \longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= I(p \longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)) = 1 + I(p) + I(\neg p \vee \neg q) = \\ &= 1 + I(p) + I(\neg p) + I(\neg q) + I(\neg p)I(\neg q) = \\ &= \cancel{1 + I(p)} + \cancel{1 + I(p)} + 1 + I(q) + (1 + I(p))(1 + I(q)) = \\ &= (1 + I(q))(1 + 1 + I(p)) = I(p)(1 + I(q)) \end{aligned}$$

Por tanto:

- $I(p) = 1 \implies$ El marido es honrado.
- $I(q) = 0 \implies$ La mujer es una embustera.

3. Visita una tercera casa, y en las mismas condiciones de antes, recibe la respuesta: “Si yo soy honrado, entonces mi mujer también lo es.” ¿Qué es el marido y qué es la mujer?

Sean las siguientes proposiciones atómicas:

- $p \equiv$ “El marido es honrado.”
- $q \equiv$ “La mujer es honrada.”

Para empezar, sabemos que $p \longleftrightarrow (p \longrightarrow q)$ es cierto. Por tanto, fijada una interpretación I tal que $I(p \longleftrightarrow (p \longrightarrow q)) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= I(p \longleftrightarrow (p \longrightarrow q)) = 1 + I(p) + I(p \longrightarrow q) = \\ &= 1 + I(p) + 1 + I(p) + I(p)I(q) = I(p)I(q) \end{aligned}$$

Por tanto:

- $I(p) = 1 \implies$ El marido es honrado.
 - $I(q) = 1 \implies$ La mujer es honrada.
4. En la última casa que visita, pues ya estaba cansado de partirse el coco, la respuesta es “Yo soy lo mismo que mi mujer.” ¿Qué es el marido y qué es la mujer? Sean las siguientes proposiciones atómicas:

- $p \equiv$ “El marido es honrado.”
- $q \equiv$ “La mujer es honrada.”

Para empezar, sabemos que $p \longleftrightarrow (p \longleftrightarrow q)$ es cierto. Por tanto, fijada una interpretación I tal que $I(p \longleftrightarrow (p \longleftrightarrow q)) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= I(p \longleftrightarrow (p \longleftrightarrow q)) = 1 + I(p) + I(p \longleftrightarrow q) = \\ &= 1 + I(p) + 1 + I(p) + I(q) = I(q) \end{aligned}$$

Por tanto:

- $I(q) = 1 \implies$ La mujer es honrada.
 - Respecto al marido, no podemos determinar si es honrado o no.
5. De vuelta a su casa se encuentra con tres individuos, A, B y C, en la calle, y pensando en que quizás podía tener más suerte con ellos decide preguntarles qué son cada uno de ellos. Le pregunta al primero, A, y no entiende la respuesta, ya que en ese momento pasa una de esas motos que hacen un ruido ensordecedor y no corren nada. El segundo, B, le aclara que lo que ha dicho el primero es que es un embustero, pero el tercero, C, le advierte que no haga caso del segundo, B, ya que es un embustero. ¿Puedes deducir algo de lo ocurrido?

Sean las siguientes proposiciones atómicas:

- $a \equiv$ “A es honrado.”
- $b \equiv$ “B es honrado.”
- $c \equiv$ “C es honrado.”
- $p \equiv$ “A dice que es un embustero.”

Sabemos que:

- $a \longrightarrow \neg p$ es cierto.
- $\neg a \longrightarrow \neg p$ es cierto.
- $b \longleftrightarrow p$ es cierto.
- $c \longleftrightarrow \neg b$ es cierto.

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 1 &= I(a \longrightarrow \neg p) = 1 + I(a) + I(a)I(\neg p) \\
 1 &= I(\neg a \longrightarrow \neg p) = 1 + I(\neg a) + I(\neg a)I(\neg p) = \\
 &= 1 + 1 + I(a) + (1 + I(a))I(\neg p) = 1 + 1 + I(a) + I(\neg p) + I(a)I(\neg p) = \\
 &= 1 + I(\neg p) + 1 = I(\neg p) \implies I(p) = 0
 \end{aligned}$$

Además, sabemos que:

$$\begin{aligned}
 1 &= I(b \longleftrightarrow p) = 1 + I(b) + I(p) = 1 + I(b) \implies I(b) = 0 \\
 1 &= I(c \longleftrightarrow \neg b) = 1 + I(c) + I(\neg b) = 1 + I(c) + 1 + I(b) = I(c)
 \end{aligned}$$

Por tanto:

- $I(b) = 0 \implies B$ es un embustero.
- $I(c) = 1 \implies C$ es honrado.
- Desconocemos el valor de $I(a)$, por lo que no podemos determinar si A es honrado o no.

Ejercicio 4.1.5. Probar que todo axioma del cálculo proposicional clásico es una tautología.

Sean α, β, γ fórmulas proposicionales. Entonces, probaremos que cada uno de los axiomas del cálculo proposicional clásico es una tautología.

1. $\mathcal{A}_1 = \{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)\}$.

Aplicando dos veces el Teorema de la Deducción, hemos de probar que:

$$\{\alpha, \beta\} \models \alpha$$

Sea I una interpretación tal que $I(\alpha) = I(\beta) = 1$. Entonces, trivialmente $I(\alpha) = 1$. Por tanto, $\{\alpha, \beta\} \models \alpha$.

2. $\mathcal{A}_2 = \{(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))\}$.

Aplicando tres veces el Teorema de la Deducción, hemos de probar que:

$$\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \models \gamma$$

Sea I una interpretación tal que $I(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) = I(\alpha \rightarrow \beta) = I(\alpha) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 1 &= I(\alpha \rightarrow \beta) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta) = 1 + 1 + I(\beta) \implies I(\beta) = 1 \\
 1 &= I(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) = 1 + I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta \rightarrow \gamma) = I(\beta \rightarrow \gamma) = 1 + I(\beta) + I(\beta)I(\gamma) = I(\gamma)
 \end{aligned}$$

Por tanto, $\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \models \gamma$.

3. $\mathcal{A}_3 = \{(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha)\}$.

Aplicando dos veces el Teorema de la Deducción, hemos de probar que:

$$\{\neg\alpha \rightarrow \neg\beta, \neg\alpha \rightarrow \beta\} \models \alpha$$

Sea I una interpretación tal que $I(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) = I(\neg\alpha \rightarrow \beta) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= I(\neg\alpha \rightarrow \beta) = 1 + I(\neg\alpha) + I(\neg\alpha)I(\beta) \\ 1 &= I(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) = 1 + I(\neg\alpha) + I(\neg\alpha)I(\neg\beta) = 1 + I(\neg\alpha) + I(\neg\alpha)(1 + I(\beta)) = \\ &= 1 + I(\neg\alpha) + I(\neg\alpha) + I(\neg\alpha)I(\beta) = 1 + I(\neg\alpha) = 1 + 1 + I(\alpha) = I(\alpha) \end{aligned}$$

Por tanto, $\{\neg\alpha \rightarrow \neg\beta, \neg\alpha \rightarrow \beta\} \models \alpha$.

Ejercicio 4.1.6 (Regla de “reductio ad absurdum” minimal o intuicionista). Si se tiene $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ y $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \neg\beta$, entonces $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

Por el Teorema de la Deducción, tenemos que:

$$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \neg\beta$$

Por tanto:

1. ...
- ...
- p . $\alpha \rightarrow \beta$
- $p + 1$
- ...
- q . $\alpha \rightarrow \neg\beta$
- $q + 1$. $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ por la Regla de la Doble Negación.
- $q + 2$. $\neg\neg\alpha \rightarrow \beta$ por la Regla del Silogismo aplicada a $q + 1$ y p .
- $q + 3$. $\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$ por la Regla del Silogismo aplicada a $q + 1$ y q .

Como desde 1 hasta q tan solo se han empleado axiomas e hipótesis de Γ , entonces:

$$\Gamma \vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$$

Por tanto, aplicando el Teorema de la Deducción, tenemos que:

$$\Gamma \cup \{\neg\neg\alpha\} \vdash \beta \quad \Gamma \cup \{\neg\neg\alpha\} \vdash \neg\beta$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\Gamma \vdash \neg\alpha$$

Ejercicio 4.1.7 (Leyes de Duns Scoto).

1. $\vdash \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta$$

Tenemos que:

1. α es una hipótesis.
2. $\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \in \mathcal{A}_1$.
3. $\neg\beta \rightarrow \alpha$ por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.
4. $\neg\alpha$ es una hipótesis.
5. $\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \in \mathcal{A}_1$.
6. $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ por Modus Ponens aplicado a 4 y 5.

Por tanto, y aplicando el Teorema de la Deducción, tenemos que:

$$\{\alpha, \neg\alpha\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \alpha \qquad \{\alpha, \neg\alpha\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \neg\alpha$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta$$

2. $\vdash \alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta$$

Esto ha sido demostrado en el apartado anterior.

Ejercicio 4.1.8 (Principio de inconsistencia). Si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \neg\alpha$, entonces $\Gamma \vdash \beta$.

1. ...
⋮
- p . α
- $p + 1$
⋮
- q . $\neg\alpha$
- $q + 1$. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ por la Ley de Duns Scoto (Ejercicio 4.1.7).
- $q + 2$. $\alpha \rightarrow \beta$ por Modus Ponens aplicado a q y $q + 1$.
- $q + 3$. β por Modus Ponens aplicado a p y $q + 2$.

Como desde 1 hasta q tan solo se han empleado axiomas e hipótesis de Γ :

$$\Gamma \vdash \beta$$

Ejercicio 4.1.9 (Leyes débiles de Duns Scoto).

1. $\vdash \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)$.
2. $\vdash \alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$.

Ambos casos se tienen de forma directa por el Ejercicio 4.1.7, puesto que lo tenemos demostrado para cualquier proposición β (no es necesario que sea una proposición atómica), por lo que en particular se tiene para $\neg\beta$.

Observación. Notemos que obtener las Leyes de Duns Scoto a partir de las Leyes débiles de Duns Scoto no sería directo y tendríamos que emplear la Regla de la Doble Negación.

Ejercicio 4.1.10 (Principio de inconsistencia débil). Si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \neg\alpha$, entonces $\Gamma \vdash \neg\beta$.

Al igual que ocurrió en el Ejercicio 4.1.9, esto se tiene de forma directa por el Ejercicio 4.1.8.

Ejercicio 4.1.11 (Ley de contraposición fuerte o “ponendo ponens”).

$$\vdash (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta).$$

Por el Teorema de la Deducción aplicado dos veces, esto equivale a demostrar:

$$\{\neg\beta \rightarrow \neg\alpha, \alpha\} \vdash \beta$$

Supongamos además $\neg\beta$ como hipótesis (para poder aplicar reducción al absurdo). Entonces:

1. $\neg\beta$ es una hipótesis.
2. $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ es una hipótesis.
3. $\neg\alpha$ por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.
4. α es una hipótesis.

Por tanto, tenemos que:

$$\{\neg\beta \rightarrow \neg\alpha, \alpha\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \alpha \qquad \{\neg\beta \rightarrow \neg\alpha, \alpha\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \neg\alpha$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\{\neg\beta \rightarrow \neg\alpha, \alpha\} \vdash \beta$$

Ejercicio 4.1.12 (Ley de contraposición “ponendo tollens”).

$$\vdash (\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta).$$

Por el Teorema de la Deducción aplicado dos veces, esto equivale a demostrar:

$$\{\beta \rightarrow \neg\alpha, \alpha\} \vdash \neg\beta$$

Supongamos además β como hipótesis (para poder aplicar reducción al absurdo). Entonces:

1. β es una hipótesis.
2. $\beta \rightarrow \neg\alpha$ es una hipótesis.
3. $\neg\alpha$ por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.
4. α es una hipótesis.

Por tanto, tenemos que:

$$\{\beta \rightarrow \neg\alpha, \alpha\} \cup \{\beta\} \vdash \alpha \qquad \{\beta \rightarrow \neg\alpha, \alpha\} \cup \{\beta\} \vdash \neg\alpha$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo minimal (Ejercicio 4.1.6), tenemos que:

$$\{\beta \rightarrow \neg\alpha, \alpha\} \vdash \neg\beta$$

Ejercicio 4.1.13 (Ley de contraposición “tollendo ponens”).

$$\vdash (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha).$$

Por el Teorema de la Deducción aplicado dos veces, esto equivale a demostrar:

$$\{\neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash \alpha$$

Supongamos además $\neg\alpha$ como hipótesis (para poder aplicar reducción al absurdo). Entonces:

1. $\neg\alpha$ es una hipótesis.
2. $\neg\alpha \rightarrow \beta$ es una hipótesis.
3. β por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.
4. $\neg\beta$ es una hipótesis.

Por tanto, tenemos que:

$$\{\neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta \qquad \{\neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\beta$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\{\neg\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash \alpha$$

Ejercicio 4.1.14 (Ley de contraposición débil o “tollendo tollens”).

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha).$$

Por el Teorema de la Deducción aplicado dos veces, esto equivale a demostrar:

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$$

Supongamos además α como hipótesis (para poder aplicar reducción al absurdo). Entonces:

1. α es una hipótesis.

2. $\alpha \rightarrow \beta$ es una hipótesis.
3. β por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.
4. $\neg\beta$ es una hipótesis.

Por tanto, tenemos que:

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \cup \{\alpha\} \vdash \beta \qquad \{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \cup \{\alpha\} \vdash \neg\beta$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo minimal (Ejercicio 4.1.6), tenemos que:

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$$

Ejercicio 4.1.15 (Regla de prueba por casos). Si $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ y $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$, entonces $\Gamma \vdash \beta$.

Supongamos (para poder aplicar reducción al absurdo) $\neg\beta$ como hipótesis. Entonces, se tiene que:

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \beta \qquad \Gamma \cup \{\alpha\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \neg\beta$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo minimal (Ejercicio 4.1.6), tenemos que:

$$\Gamma \cup \{\neg\beta\} \vdash \neg\alpha$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \beta \qquad \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \neg\beta$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\Gamma \cup \{\neg\beta\} \vdash \alpha$$

Por tanto, por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\Gamma \vdash \beta$$

Ejercicio 4.1.16 (Ley débil de Clavius). $\vdash (\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{\alpha \rightarrow \neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$$

Supongamos además α como hipótesis (para poder aplicar reducción al absurdo). Entonces:

1. α es una hipótesis.
2. $\alpha \rightarrow \neg\alpha$ es una hipótesis.
3. $\neg\alpha$ por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.

Por tanto, tenemos que:

$$\{\alpha \rightarrow \neg\alpha\} \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \qquad \{\alpha \rightarrow \neg\alpha\} \cup \{\alpha\} \vdash \neg\alpha$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo minimal (Ejercicio 4.1.6), tenemos que:

$$\{\alpha \rightarrow \neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$$

Ejercicio 4.1.17 (Ley de Clavius). $\vdash (\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{\neg\alpha \rightarrow \alpha\} \vdash \alpha$$

Supongamos además $\neg\alpha$ como hipótesis (para poder aplicar reducción al absurdo). Entonces:

1. $\neg\alpha$ es una hipótesis.
2. $\neg\alpha \rightarrow \alpha$ es una hipótesis.
3. α por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.

Por tanto, tenemos que:

$$\{\neg\alpha \rightarrow \alpha\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha \qquad \{\neg\alpha \rightarrow \alpha\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\{\neg\alpha \rightarrow \alpha\} \vdash \alpha$$

Ejercicio 4.1.18 (Regla de retorsión, regla de Clavius). Si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha$, entonces $\Gamma \vdash \alpha$.

Tenemos que:

$$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha \qquad \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Ejercicio 4.1.19 (Leyes de adjunción).

1. $\vdash \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$.

Semánticamente, $\alpha \vee \beta \equiv \neg\alpha \rightarrow \beta$. Por tanto, equivale a demostrar:

$$\vdash \alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$$

Esta es precisamente una Ley de Duns Scoto (Ejercicio 4.1.7), por lo que se tiene ya demostrada.

$$2. \vdash \beta \rightarrow \alpha \vee \beta.$$

Semánticamente, $\alpha \vee \beta \equiv \neg\alpha \rightarrow \beta$. Por tanto, equivale a demostrar:

$$\vdash \beta \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$$

Esta es cierta por pertenecer a \mathcal{A}_1 .

Ejercicio 4.1.20 (Reglas de adjunción o de introducción de la disyunción).

$$1. \text{ Si } \Gamma \vdash \alpha, \text{ entonces } \Gamma \vdash \alpha \vee \beta.$$

$$1. \dots$$

$$\vdots$$

$$p. \alpha$$

$$p+1. \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \text{ por la Ley de Adjunción (Ejercicio 4.1.19).}$$

$$p+2. \alpha \vee \beta \text{ por Modus Ponens aplicado a } p \text{ y } p+1.$$

Como desde 1 hasta p tan solo se han empleado axiomas e hipótesis de Γ :

$$\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$$

$$2. \text{ Si } \Gamma \vdash \beta, \text{ entonces } \Gamma \vdash \alpha \vee \beta.$$

$$1. \dots$$

$$\vdots$$

$$p. \beta$$

$$p+1. \beta \rightarrow \alpha \vee \beta \text{ por la Ley de Adjunción (Ejercicio 4.1.19).}$$

$$p+2. \alpha \vee \beta \text{ por Modus Ponens aplicado a } p \text{ y } p+1.$$

Como desde 1 hasta p tan solo se han empleado axiomas e hipótesis de Γ :

$$\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$$

Ejercicio 4.1.21 (Ley conmutativa de la disyunción). $\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \beta \vee \alpha$.

Esto equivale a demostrar:

$$\vdash (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha)$$

Esta es una de las leyes de contraposición, demostrada en el Ejercicio 4.1.13.

Ejercicio 4.1.22.

$$1. \vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha.$$

Semánticamente, $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$. Por tanto, equivale a demostrar:

$$\vdash \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \alpha$$

$$1. \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \text{ por la Ley Débil de Duns Scoto.}$$

2. $(\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)) \rightarrow (\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \alpha)$ por las Leyes de Contraposición.
3. $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \alpha$ por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.
2. $\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$.

Semánticamente, $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$. Por tanto, equivale a demostrar:

$$\vdash \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \beta$$

1. $\neg\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \in \mathcal{A}_1$.
2. $(\neg\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)) \rightarrow (\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \beta)$ por las Leyes de Contraposición.
3. $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \beta$ por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.

Ejercicio 4.1.23 (Reglas de simplificación o de eliminación de la conjunción). Si $\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$, entonces $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \beta$.

1. ...

⋮

p . $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$.

- $p + 1$. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)$ por la Ley Débil de Duns Scoto (Ejercicio 4.1.9).
- $p + 2$. $[\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)] \rightarrow [\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \alpha]$ por las Leyes de Contraposición.
- $p + 3$. $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \alpha$ por Modus Ponens aplicado a $p + 1$ y $p + 2$.
- $p + 4$. α por Modus Ponens aplicado a p y $p + 3$.
- $p + 5$. $\neg\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \in \mathcal{A}_1$.
- $p + 6$. $[\neg\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)] \rightarrow [\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \beta]$ por las Leyes de Contraposición.
- $p + 7$. $\neg(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \beta$ por Modus Ponens aplicado a $p + 5$ y $p + 6$.
- $p + 8$. β por Modus Ponens aplicado a p y $p + 7$.

Como desde 1 hasta p tan solo se han empleado axiomas e hipótesis de Γ :

$$\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \beta$$

Ejercicio 4.1.24. $\vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma))$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \gamma, \alpha \vee \beta\} \vdash \gamma$$

Debido a la equivalencia semántica de la disyunción, definiendo el conjunto Γ como $\Gamma = \{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \gamma, \neg\alpha \rightarrow \beta\}$, esto es equivalente a demostrar $\Gamma \vdash \gamma$.

1. $\neg\alpha \rightarrow \beta$ es una hipótesis.
2. $\beta \rightarrow \gamma$ es una hipótesis.

3. $\neg\alpha \rightarrow \gamma$ por la Regla del Silogismo aplicada a 1 y 2.

4. $\alpha \rightarrow \gamma$ es una hipótesis.

Por tanto, y aplicando el Teorema de la Deducción, tenemos que:

$$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \gamma \qquad \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$$

Aplicando la Regla de la Prueba por Casos (Ejercicio 4.1.15), tenemos que:

$$\Gamma \vdash \gamma$$

Ejercicio 4.1.25 (Otra regla de prueba por casos). Si $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$ y $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \gamma$, entonces $\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \gamma$.

Usando que $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$ y $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$, tenemos que:

1. ...

\vdots

p . $\alpha \rightarrow \gamma$

$p+1$

\vdots

q . $\beta \rightarrow \gamma$

$q+1$. $\neg\alpha \rightarrow \beta$ es una hipótesis.

$q+2$. $\neg\alpha \rightarrow \gamma$ por la Regla del Silogismo aplicada a $q+1$ y q .

Por tanto, y aplicando el Teorema de la Deducción, tenemos que:

$$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \cup \{\alpha\} \vdash \gamma \qquad \Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash \gamma$$

Por la Regla de Prueba por Casos (Ejercicio 4.1.15), tenemos que:

$$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \gamma$$

Ejercicio 4.1.26 (Ley de Peirce). $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$.

Por el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha\} \vdash \alpha$$

Supongamos además $\neg\alpha$ como hipótesis (para poder aplicar reducción al absurdo). Entonces:

1. $\neg\alpha$ es una hipótesis.

2. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ por la Ley de Duns Scoto (Ejercicio 4.1.7).

3. $\alpha \rightarrow \beta$ por Modus Ponens aplicado a 1 y 2.

4. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha$ es una hipótesis.
5. α por Modus Ponens aplicado a 3 y 4.

Por tanto, tenemos que:

$$\{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha \qquad \{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha\} \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo, tenemos que:

$$\{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha\} \vdash \alpha$$

Ejercicio 4.1.27. $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta)$.

Por la equivalencia semántica de la conjunción y el Teorema de la Deducción, esto equivale a demostrar:

$$\{\alpha, \beta\} \vdash \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$$

Supongamos además $\alpha \rightarrow \neg\beta$ como hipótesis (para poder aplicar reducción al absurdo). Entonces:

1. α es una hipótesis.
2. β es una hipótesis.
3. $\alpha \rightarrow \neg\beta$ es una hipótesis.
4. $\neg\beta$ por Modus Ponens aplicado a 1 y 3.

Por tanto, tenemos que:

$$\{\alpha, \beta\} \cup \{\alpha \rightarrow \neg\beta\} \vdash \neg\beta \qquad \{\alpha, \beta\} \cup \{\alpha \rightarrow \neg\beta\} \vdash \beta$$

Por la Regla de Reducción al Absurdo minimal (Ejercicio 4.1.6), tenemos que:

$$\{\alpha, \beta\} \vdash \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$$

Ejercicio 4.1.28 (Regla del producto o de introducción de la conjunción). Si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \beta$, entonces $\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$.

1. ...
⋮
- p . α
- $p + 1$
⋮
- q . β

- $q + 1$. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta)$ por el Ejercicio 4.1.27.
- $q + 2$. $\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$ por Modus Ponens aplicado a p y $q + 1$.
- $q + 3$. $\alpha \wedge \beta$ por Modus Ponens aplicado a q y $q + 2$.

Como desde 1 hasta q tan solo se han empleado axiomas e hipótesis de Γ :

$$\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$$

4.2. Lógica de Primer Orden

Ejercicio 4.2.1. Prueba que $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \neg Q(a)\} \models \neg P(a)$.

Sea (ε, v) una \mathcal{L} -interpretación, verificando:

$$\begin{aligned} I^v(\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))) &= 1, \\ I^v(\neg Q(a)) &= 1. \end{aligned}$$

Por hipótesis, $I^v(\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))) = 1$. En particular, para a tenemos:

$$\begin{aligned} 1 = I^{v(x|a)}(P(x) \rightarrow Q(x)) &= 1 + I^{v(x|a)}(P(x)) + I^{v(x|a)}(Q(x)) = 1 + P(a) + Q(a) \implies \\ &\implies P(a) = Q(a). \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos:

$$1 = I^v(\neg Q(a)) = 1 + I^v(Q(a)) \implies I^v(Q(a)) = 0 = Q(v(a)) = Q(a)$$

Por tanto:

$$I^v(\neg P(a)) = 1 + I^v(P(a)) = 1 + P(v(a)) = 1 + P(a) = 1 + Q(a) = 1.$$

Por tanto, $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \neg Q(a)\} \models \neg P(a)$.

Ejercicio 4.2.2. Dada \mathcal{U} una \mathcal{L} -estructura y φ una sentencia, razona si equivalen el que φ sea satisfacible y que sea válida en \mathcal{U}

Observación. Usar el lema de coincidencia.

Demostraremos por doble implicación:

\implies) Supongamos que φ es satisfacible en \mathcal{U} . Entonces existe una \mathcal{L} -interpretación (ε, v) tal que $I^v(\varphi) = 1$. No obstante, por tratarse de una sentencia, y usando el lema de coincidencia, tenemos que:

$$1 = I^v(\varphi) = I^w(\varphi)$$

para cualquier otra \mathcal{L} -interpretación (ε, w) . Por tanto, φ es válida en \mathcal{U} .

\impliedby) Supongamos que φ es válida en \mathcal{U} . Entonces para cualquier \mathcal{L} -interpretación (ε, w) , tenemos que $I^w(\varphi) = 1$. En particular existe una \mathcal{L} -interpretación (ε, v) tal que $I^v(\varphi) = 1$. Por tanto, φ es satisfacible en \mathcal{U} .

Ejercicio 4.2.3. Usando el Ejercicio 4.2.2, y bajo las mismas hipótesis, prueba que o bien φ es válida o bien lo es $\neg\varphi$, pero no se pueden dar las dos posibilidades.

Sea ahora una \mathcal{L} -interpretación (\mathcal{U}, v) . Hay dos posibilidades:

- $I^v(\varphi) = 1$. Entonces, φ es satisfacible en \mathcal{U} , y por el Ejercicio 4.2.2 φ es válida en \mathcal{U} . Por tanto, $\neg\varphi$ no es válida en \mathcal{U} .
- $I^v(\varphi) = 0$. Entonces, $\neg\varphi$ es satisfacible en \mathcal{U} , y por el Ejercicio 4.2.2 $\neg\varphi$ es válida en \mathcal{U} . Por tanto, φ no es válida en \mathcal{U} .

Ejercicio 4.2.4. Sea \mathcal{U} una \mathcal{L} -estructura. Sea $\varphi \in \text{Form}(\mathcal{L})$. Si x_1, \dots, x_n son todas las variables de φ con alguna ocurrencia libre, entonces equivalen:

1. φ es válida en \mathcal{U} ,
2. $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ es satisfacible en \mathcal{U} ,
3. $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ es válida en \mathcal{U} .

Demostremos distintas implicaciones:

- (1) \implies (2) Supongamos que φ es válida en \mathcal{U} . Sea ahora una \mathcal{L} -interpretación (ε, v) fijada. Tenemos que:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n I^v(\varphi) = 1 \iff \forall a_1, \dots, \forall a_n \in D, \quad I^{v(x_1|a_1, \dots, x_n|a_n)}(\varphi) = 1$$

No obstante, esto se tiene que es cierto, puesto que φ es válida en \mathcal{U} y $I^{v(x_1|a_1, \dots, x_n|a_n)}$ es una \mathcal{L} -interpretación. Por tanto, $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ es satisfacible en \mathcal{U} .

- (2) \implies (3) $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ es una sentencia, ya que estamos cuantificando todas las variables libres de φ . Por tanto, por el Ejercicio 4.2.2, se tiene la implicación.

- (3) \implies (1) Supongamos que $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ es válida en \mathcal{U} . Sea ahora una \mathcal{L} -interpretación (ε, v) fijada. Sea ahora $a_i = v(x_i) \in D$ para $i = 1, \dots, n$. Por ser $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ válida en \mathcal{U} , tenemos que:

$$I^{v(x_1|a_1, \dots, x_n|a_n)}(\varphi) = 1.$$

Además, tenemos que:

$$v(x_i) = v(x_1 | a_1, \dots, x_n | a_n)(x_i) = a_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Por tanto, ambas asignaciones coinciden en las variables libres de φ . Por el Lema de Coincidencia, tenemos que:

$$1 = I^{v(x_1|a_1, \dots, x_n|a_n)}(\varphi) = I^v(\varphi).$$

Por último, como esto era para cualquier \mathcal{L} -interpretación (ε, v) , se tiene que φ es válida en \mathcal{U} .

Ejercicio 4.2.5. Sea \mathcal{U} una \mathcal{L} -estructura. Sea $\varphi \in \text{Form}(\mathcal{L})$. Si x_1, \dots, x_n son todas las variables de φ con alguna ocurrencia libre, entonces equivalen:

1. φ es satisfacible en \mathcal{U} ,
2. $\exists x_1 \dots \exists x_n \varphi$ es satisfacible en \mathcal{U} .

¿Es también cierta la equivalencia cambiando en el segundo apartado satisfacible por válida?

Demostremos las distintas implicaciones:

- (1) \implies (2) Supongamos que φ es satisfacible en \mathcal{U} . Entonces existe una \mathcal{L} -interpretación (ε, v) tal que $I^v(\varphi) = 1$. Consideramos $a_i = v(x_i) \in D$ para $i = 1, \dots, n$. Por tanto, por el Lema de Coincidencia, tenemos que:

$$I^{v(x_1|a_1, \dots, x_n|a_n)}(\varphi) = 1.$$

Por tanto, $\exists x_1 \dots \exists x_n \varphi$ es satisfacible en \mathcal{U} .

- (2) \implies (1) Supongamos que $\exists x_1 \dots \exists x_n \varphi$ es satisfacible en \mathcal{U} . Entonces existen $a_i \in D$ para $i = 1, \dots, n$ y una \mathcal{L} -interpretación (ε, v) tal que:

$$I^{v(x_1|a_1, \dots, x_n|a_n)}(\varphi) = 1.$$

Por tanto, consideramos una \mathcal{L} -interpretación (ε, w) tal que $w(x_i) = a_i$ para $i = 1, \dots, n$. Por el Lema de Coincidencia, tenemos que:

$$I^{v(x_1|a_1, \dots, x_n|a_n)}(\varphi) = I^w(\varphi) = 1.$$

Por tanto, φ es satisfacible en \mathcal{U} .

Por último, si cambiamos satisfacible por válida en el segundo apartado, la equivalencia sigue siendo cierta, puesto que:

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \varphi \text{ es válida en } \mathcal{U} \implies \exists x_1 \dots \exists x_n \varphi \text{ es satisfacible en } \mathcal{U}.$$

Ejercicio 4.2.6. Demuestra que:

1. $\models \neg \forall x \psi \leftrightarrow \exists x \neg \psi$,

Sea (ε, v) una \mathcal{L} -interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\exists x \neg \psi) &\iff \exists a \in D, & I^{v(x|a)}(\neg \psi) &= 1 \\ &\iff \exists a \in D, & 1 + I^{v(x|a)}(\psi) &= 1 \\ &\iff \exists a \in D, & I^{v(x|a)}(\psi) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\neg \forall x \psi) &\iff 1 + I^v(\forall x \psi) = 1 \\ &\iff I^v(\forall x \psi) = 0 \\ &\iff \exists a \in D, & I^{v(x|a)}(\psi) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, y puesto que trabajamos en \mathbb{Z}_2 , hemos probado que:

$$I^v(\neg \forall x \psi) = I^v(\exists x \neg \psi).$$

Por tanto:

$$I(\neg \forall x \psi \leftrightarrow \exists x \neg \psi) = 1 + I(\neg \forall x \psi) + I(\exists x \neg \psi) = 1$$

2. $\models \neg \exists x \psi \leftrightarrow \forall x \neg \psi$,

Sea (ε, v) una \mathcal{L} -interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\forall x \neg \psi) &\iff \forall a \in D, & I^{v(x|a)}(\neg \psi) &= 1 \\ &\iff \forall a \in D, & 1 + I^{v(x|a)}(\psi) &= 1 \\ &\iff \forall a \in D, & I^{v(x|a)}(\psi) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\neg \exists x \psi) &\iff 1 + I^v(\exists x \psi) = 1 \\ &\iff I^v(\exists x \psi) = 0 \\ &\iff \forall a \in D, & I^{v(x|a)}(\psi) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, y puesto que trabajamos en \mathbb{Z}_2 , hemos probado que:

$$I^v(\neg \exists x \psi) = I^v(\forall x \neg \psi).$$

Por tanto:

$$I(\neg \exists x \psi \leftrightarrow \forall x \neg \psi) = 1 + I(\neg \exists x \psi) + I(\forall x \neg \psi) = 1$$

3. $\models \exists x \psi \leftrightarrow \neg \forall x \neg \psi$,

Sea (ε, v) una \mathcal{L} -interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\neg \forall x \neg \psi) &\iff 1 + I^v(\forall x \neg \psi) = 1 \\ &\iff I^v(\forall x \neg \psi) = 0 \\ &\iff \exists a \in D, & I^{v(x|a)}(\neg \psi) &= 0 \\ &\iff \exists a \in D, & 1 + I^{v(x|a)}(\psi) &= 0 \\ &\iff \exists a \in D, & I^{v(x|a)}(\psi) &= 1 \end{aligned}$$

$$1 = I^v(\exists x \psi) \iff \exists a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) = 1.$$

Por tanto, y puesto que trabajamos en \mathbb{Z}_2 , hemos probado que:

$$I^v(\exists x \psi) = I^v(\neg \forall x \neg \psi).$$

Por tanto:

$$I(\exists x \psi \leftrightarrow \neg \forall x \neg \psi) = 1 + I(\exists x \psi) + I(\neg \forall x \neg \psi) = 1$$

4. $\models \forall x \psi \leftrightarrow \neg \exists x \neg \psi$,

Sea (ε, v) una \mathcal{L} -interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\neg \exists x \neg \psi) &\iff 1 + I^v(\exists x \neg \psi) = 1 \\ &\iff I^v(\exists x \neg \psi) = 0 \\ &\iff \forall a \in D, & I^{v(x|a)}(\neg \psi) &= 0 \\ &\iff \forall a \in D, & 1 + I^{v(x|a)}(\psi) &= 0 \\ &\iff \forall a \in D, & I^{v(x|a)}(\psi) &= 1 \end{aligned}$$

$$1 = I^v(\forall x \psi) \iff \forall a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) = 1.$$

Por tanto, y puesto que trabajamos en \mathbb{Z}_2 , hemos probado que:

$$I^v(\forall x\psi) = I^v(\neg\exists x\neg\psi).$$

Por tanto:

$$I(\forall x\psi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\psi) = 1 + I(\forall x\psi) + I(\neg\exists x\neg\psi) = 1$$

5. $\models \forall x\psi \wedge \varphi \leftrightarrow \forall x(\psi \wedge \varphi)$, si x no aparece libre en φ ,

Sea (ε, v) una \mathcal{L} -interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\forall x(\psi \wedge \varphi)) &\iff \forall a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi \wedge \varphi) = 1 \\ &\iff \forall a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi)I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\ &\iff \forall a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) = 1 \text{ y } I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\ &\stackrel{(*)}{\iff} \forall a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) = 1 \text{ y } I^v(\varphi) = 1 \\ &\iff I^v(\forall x\psi) = 1 \text{ y } I^v(\varphi) = 1 \\ &\iff I^v(\forall x\psi \wedge \varphi) = 1. \end{aligned}$$

donde $(*)$ se debe a que x no aparece libre en φ y v y $v(x|a)$ tan solo difieren en el valor de x . Por el Lema de Coincidencia, $I^{v(x|a)}(\varphi) = I^v(\varphi)$ para cualquier $a \in D$. Por tanto:

$$I^v(\forall x\psi \wedge \varphi) = I^v(\forall x(\psi \wedge \varphi)).$$

Por tanto:

$$I(\forall x\psi \wedge \varphi \leftrightarrow \forall x(\psi \wedge \varphi)) = 1 + I(\forall x\psi \wedge \varphi) + I(\forall x(\psi \wedge \varphi)) = 1$$

6. $\models \exists x\psi \wedge \varphi \leftrightarrow \exists x(\psi \wedge \varphi)$, si x no aparece libre en φ ,

Sea (ε, v) una \mathcal{L} -interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\exists x(\psi \wedge \varphi)) &\iff \exists a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi \wedge \varphi) = 1 \\ &\iff \exists a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi)I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\ &\iff \exists a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) = 1 \text{ y } I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\ &\stackrel{(*)}{\iff} \exists a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) = 1 \text{ y } I^v(\varphi) = 1 \\ &\iff I^v(\exists x\psi) = 1 \text{ y } I^v(\varphi) = 1 \\ &\iff I^v(\exists x\psi \wedge \varphi) = 1. \end{aligned}$$

donde $(*)$ se debe a que x no aparece libre en φ y v y $v(x|a)$ tan solo difieren en el valor de x . Por el Lema de Coincidencia, $I^{v(x|a)}(\varphi) = I^v(\varphi)$ para cualquier $a \in D$. Por tanto:

$$I^v(\exists x\psi \wedge \varphi) = I^v(\exists x(\psi \wedge \varphi)).$$

Por tanto:

$$I(\exists x\psi \wedge \varphi \leftrightarrow \exists x(\psi \wedge \varphi)) = 1 + I(\exists x\psi \wedge \varphi) + I(\exists x(\psi \wedge \varphi)) = 1$$

7. $\models \forall x\psi \vee \varphi \leftrightarrow \forall x(\psi \vee \varphi)$, si x no aparece libre en φ ,

Sea (ε, v) una \mathcal{L} -interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned}
 1 = I^v(\forall x(\psi \vee \varphi)) &\iff \forall a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi \vee \varphi) = 1 \\
 &\iff \forall a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) + I^{v(x|a)}(\varphi) + I^{v(x|a)}(\psi)I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\
 &\stackrel{(*)}{\iff} \forall a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) + I^v(\varphi) + I^{v(x|a)}(\psi)I^v(\varphi) = 1 \\
 1 = I^v(\forall x\psi \vee \varphi) &\iff I^v(\forall x\psi \vee \varphi) = 1 \\
 &\iff I^v(\forall x\psi) + I^v(\varphi) + I^v(\forall x\psi)I^v(\varphi) = 1
 \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que x no aparece libre en φ y v y $v(x|a)$ tan solo difieren en el valor de x . Por el Lema de Coincidencia, $I^{v(x|a)}(\varphi) = I^v(\varphi)$ para cualquier $a \in D$.

Veamos que se da la equivalencia:

■ Si $I^v(\varphi) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned}
 1 = I^v(\forall x(\psi \vee \varphi)) &\iff \forall a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) + 1 + I^{v(x|a)}(\psi) = 1 \\
 &\iff \forall a \in D, \quad 0 = 0 \\
 1 = I^v(\forall x\psi \vee \varphi) &\iff I^v(\forall x\psi) + 1 + I^v(\forall x\psi) = 1 \iff 0 = 0
 \end{aligned}$$

Por tanto, en este caso se da $I^v(\forall x\psi \vee \varphi) = I^v(\forall x(\psi \vee \varphi))$.

■ Si $I^v(\varphi) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
 1 = I^v(\forall x(\psi \vee \varphi)) &\iff \forall a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) + 0 + 0 = 1 \\
 &\iff I^v(\forall x\psi) = 1 \\
 &\iff I^v(\forall x\psi) + 0 + 0 = 1 \\
 &\iff 1 = I^v(\forall x\psi \vee \varphi)
 \end{aligned}$$

En este caso, también se da $I^v(\forall x\psi \vee \varphi) = I^v(\forall x(\psi \vee \varphi))$.

Por tanto, hemos probado que:

$$I^v(\forall x\psi \vee \varphi) = I^v(\forall x(\psi \vee \varphi)).$$

Por tanto:

$$I(\forall x\psi \vee \varphi \leftrightarrow \forall x(\psi \vee \varphi)) = 1 + I(\forall x\psi \vee \varphi) + I(\forall x(\psi \vee \varphi)) = 1$$

8. $\models \exists x\psi \vee \varphi \leftrightarrow \exists x(\psi \vee \varphi)$, si x no aparece libre en φ ,

Sea (ε, v) una \mathcal{L} -interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned}
 1 = I^v(\exists x(\psi \vee \varphi)) &\iff \exists a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi \vee \varphi) = 1 \\
 &\iff \exists a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) + I^{v(x|a)}(\varphi) + I^{v(x|a)}(\psi)I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\
 &\stackrel{(*)}{\iff} \exists a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) + I^v(\varphi) + I^{v(x|a)}(\psi)I^v(\varphi) = 1 \\
 1 = I^v(\exists x\psi \vee \varphi) &\iff I^v(\exists x\psi \vee \varphi) = 1 \\
 &\iff I^v(\exists x\psi) + I^v(\varphi) + I^v(\exists x\psi)I^v(\varphi) = 1
 \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que x no aparece libre en φ y v y $v(x \mid a)$ tan solo difieren en el valor de x . Por el Lema de Coincidencia, $I^{v(x|a)}(\varphi) = I^v(\varphi)$ para cualquier $a \in D$. Veamos que se da la equivalencia:

- Si $I^v(\varphi) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\exists x(\psi \vee \varphi)) &\iff \exists a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) + 1 + I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\ &\iff \exists a \in D, \quad 0 = 0 \\ 1 = I^v(\exists x\psi \vee \varphi) &\iff I^v(\exists x\psi) + 1 + I^v(\exists x\psi) = 1 \iff 0 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, en este caso se da $I^v(\exists x\psi \vee \varphi) = I^v(\exists x(\psi \vee \varphi))$.

- Si $I^v(\varphi) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\exists x(\psi \vee \varphi)) &\iff \exists a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) + 0 + 0 = 1 \\ &\iff I^v(\exists x\psi) = 1 \\ &\iff I^v(\exists x\psi) + 0 + 0 = 1 \\ &\iff 1 = I^v(\exists x\psi \vee \varphi) \end{aligned}$$

En este caso, también se da $I^v(\exists x\psi \vee \varphi) = I^v(\exists x(\psi \vee \varphi))$.

Por tanto, hemos probado que:

$$I^v(\exists x\psi \vee \varphi) = I^v(\exists x(\psi \vee \varphi)).$$

Por tanto:

$$I(\exists x\psi \vee \varphi \leftrightarrow \exists x(\psi \vee \varphi)) = 1 + I(\exists x\psi \vee \varphi) + I(\exists x(\psi \vee \varphi)) = 1$$

$$9. \models \forall x\psi \wedge \forall x\varphi \leftrightarrow \forall x(\psi \wedge \varphi),$$

Sea (ε, v) una \mathcal{L} -interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\forall x(\psi \wedge \varphi)) &\iff \forall a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi \wedge \varphi) = 1 \\ &\iff \forall a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\ &\iff \forall a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) = 1 \text{ y } I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\ &\iff \forall a_1, a_2 \in D, \quad I^{v(x|a_1)}(\psi) = 1 \text{ y } I^{v(x|a_2)}(\varphi) = 1 \\ &\iff I^v(\forall x\psi) = 1 \text{ y } I^v(\forall x\varphi) = 1 \\ &\iff I^v(\forall x\psi) I^v(\forall x\varphi) = 1 \\ &\iff I^v(\forall x\psi \wedge \forall x\varphi) = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, hemos probado que:

$$I^v(\forall x\psi \wedge \forall x\varphi) = I^v(\forall x(\psi \wedge \varphi)).$$

Por tanto:

$$I(\forall x\psi \wedge \forall x\varphi \leftrightarrow \forall x(\psi \wedge \varphi)) = 1 + I(\forall x\psi \wedge \forall x\varphi) + I(\forall x(\psi \wedge \varphi)) = 1$$

10. $\models \exists x\psi \vee \exists x\varphi \leftrightarrow \exists x(\psi \vee \varphi)$,

Sea (ε, v) una \mathcal{L} -interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\exists x(\psi \vee \varphi)) &\iff \exists a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi \vee \varphi) = 1 \\ &\iff \exists a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\psi) + I^{v(x|a)}(\varphi) + I^{v(x|a)}(\psi)I^{v(x|a)}(\varphi) = 1 \\ 1 = I^v(\exists x\psi \vee \exists x\varphi) &\iff I^v(\exists x\psi) + I^v(\exists x\varphi) + I^v(\exists x\psi)I^v(\exists x\varphi) = 1 \end{aligned}$$

Veamos que se da la equivalencia:

- Si $I^v(\exists x\psi) = 1$:

En este caso, $\exists a \in D$ tal que $I^{v(x|a)}(\psi) = 1$. Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} I^v(\exists x\psi \vee \exists x\varphi) &= \cancel{I^v(\exists x\psi)}^1 + I^v(\exists x\varphi) + \cancel{I^v(\exists x\psi)}^1 I^v(\exists x\varphi) = 1 \\ \cancel{I^{v(x|a)}(\psi)}^1 + I^{v(x|a)}(\varphi) + \cancel{I^{v(x|a)}(\psi)}^1 I^{v(x|a)}(\varphi) &= 1 \implies 1 = I^{v(x|a)}(\psi \vee \varphi) \implies I^v(\exists x(\psi \vee \varphi)) = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, en este caso se da $I^v(\exists x\psi \vee \exists x\varphi) = I^v(\exists x(\psi \vee \varphi))$.

- Si $I^v(\exists x\psi) = 0$:

En este caso, $\nexists a \in D$ tal que $I^{v(x|a)}(\psi) = 1$. Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\exists x(\psi \vee \varphi)) &\iff \exists a \in D, \quad 0 + I^{v(x|a)}(\varphi) + 0 = 1 \\ &\iff I^v(\exists x\varphi) = 1 \\ 1 = I^v(\exists x\psi \vee \exists x\varphi) &\iff 0 + I^v(\exists x\varphi) + 0 = 1 \iff I^v(\exists x\varphi) = 1 \end{aligned}$$

De nuevo, se da $I^v(\exists x\psi \vee \exists x\varphi) = I^v(\exists x(\psi \vee \varphi))$.

En cualquier caso, hemos probado que:

$$I^v(\exists x\psi \vee \exists x\varphi) = I^v(\exists x(\psi \vee \varphi)).$$

Por tanto:

$$I(\exists x\psi \vee \exists x\varphi \leftrightarrow \exists x(\psi \vee \varphi)) = 1 + I(\exists x\psi \vee \exists x\varphi) + I(\exists x(\psi \vee \varphi)) = 1$$

11. $\models \forall x\varphi(x) \leftrightarrow \forall y\varphi(y)$, y variable que no aparece en $\forall x\varphi(x)$,

Sea (ε, v) una \mathcal{L} -interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\forall x\varphi(x)) &\iff \forall a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\varphi(x)) = 1 \\ &\stackrel{(*)}{\iff} \forall a \in D, \quad I^{v(y|a)}(\varphi(y)) = 1 \\ &\iff I^v(\forall y\varphi(y)) = 1. \end{aligned}$$

donde vamos ahora a argumentar el paso dado en (*). Los únicos valores en los que difieren $v(x | a)$ y $v(y | a)$ son en el valor de x y y . Vamos a estudiar qué ocurre:

- Como y no aparece en $\forall x\varphi(x)$, entonces $v(x | a)(x)$ no es relevante.

- Como, tras calcular $\varphi(y)$ se sustituyen todas las ocurrencias libres de x por y , entonces $v(y \mid a)(x)$ tampoco es relevante (las ocurrencias ligadas, por el Lema de Coincidencia, no supondrán problema).
- En el caso de que haya más variables libres en φ , estas serán distintas a y y x , por lo que, por el Lema de Coincidencia, no supondrán problema.
- Sabemos que $v(x \mid a)(x) = v(y \mid a)(y) = a$.

Por tanto, hemos probado que:

$$I^v(\forall x\varphi(x)) = I^v(\forall y\varphi(y)).$$

Por tanto:

$$I(\forall x\varphi(x) \leftrightarrow \forall y\varphi(y)) = 1 + I(\forall x\varphi(x)) + I(\forall y\varphi(y)) = 1$$

12. $\models \exists x\varphi(x) \leftrightarrow \exists y\varphi(y)$, y variable que no aparece en $\forall x\varphi(x)$.

Sea (ε, v) una \mathcal{L} -interpretación. Por definición:

$$\begin{aligned} 1 = I^v(\exists x\varphi(x)) &\iff \exists a \in D, \quad I^{v(x|a)}(\varphi(x)) = 1 \\ &\stackrel{(*)}{\iff} \exists a \in D, \quad I^{v(y|a)}(\varphi(y)) = 1 \\ &\iff I^v(\exists y\varphi(y)) = 1. \end{aligned}$$

donde, por el mismo argumento que en el caso anterior, hemos dado el paso (*). Por tanto, hemos probado que:

$$I^v(\exists x\varphi(x)) = I^v(\exists y\varphi(y)).$$

Por tanto:

$$I(\exists x\varphi(x) \leftrightarrow \exists y\varphi(y)) = 1 + I(\exists x\varphi(x)) + I(\exists y\varphi(y)) = 1$$

Ejercicio 4.2.7. Demuestra que $\not\models \forall x(\psi \vee \varphi) \rightarrow (\forall x\psi \vee \forall x\varphi)$.

Consideramos la siguiente estructura ε :

- $D = \mathbb{N}$,
- $R, S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ tales que:

$$\begin{aligned} R(n) = n \mod 2 &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} \\ S(n) = n \mod 2 + 1 &= \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} \end{aligned}$$

Consideremos además que $\varphi = R(x)$ y $\psi = S(x)$. Como además no hay variables libres, no es relevante dar una asignación. Por tanto:

$$\begin{aligned}
 1 &= I^v(\forall x(\psi \vee \varphi)) = I^v(\forall x(S(x) \vee R(x))) \\
 &\iff \forall n \in \mathbb{N}, I^{v(x|n)}(S(x) \vee R(x)) = 1 \\
 &\iff \forall n \in \mathbb{N}, I^{v(x|n)}(S(x)) + I^{v(x|n)}(R(x)) + I^{v(x|n)}(S(x))I^{v(x|n)}(R(x)) = 1 \\
 &\iff \forall n \in \mathbb{N}, S(n) + R(n) + S(n)R(n) = 1
 \end{aligned}$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, si n es par entonces $S(n) = 1$ y $R(n) = 0$, mientras que si n es impar entonces $S(n) = 0$ y $R(n) = 1$. Por tanto, se tiene que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, S(n) + R(n) + S(n)R(n) = 1 \implies 1 = I^v(\forall x(\psi \vee \varphi)).$$

Estudiemos ahora la otra fórmula:

$$\begin{aligned}
 1 &= I^v(\forall x\psi) = I^v(\forall xS(x)) \iff \forall n \in \mathbb{N}, I^{v(x|n)}(S(x)) = 1 \\
 &\iff \forall n \in \mathbb{N}, S(n) = 1 \iff \forall n \in \mathbb{N}, n \text{ mód } 2 = 0. \\
 1 &= I^v(\forall x\varphi) = I^v(\forall xR(x)) \iff \forall n \in \mathbb{N}, I^{v(x|n)}(R(x)) = 1 \\
 &\iff \forall n \in \mathbb{N}, R(n) = 1 \iff \forall n \in \mathbb{N}, n \text{ mód } 2 = 1.
 \end{aligned}$$

Por tanto, $I^v(\forall x\varphi) = I^v(\forall x\psi) = 0$. Por tanto, con esta interpretación se tiene que:

$$\begin{aligned}
 I^v(\forall x(\psi \vee \varphi) \rightarrow (\forall x\psi \vee \forall x\varphi)) &= 1 + I^v(\forall x(\psi \vee \varphi)) + I^v(\forall x(\psi \vee \varphi))I^v(\forall x\psi \vee \forall x\varphi) = \\
 &= 1 + 1 + 1 \cdot (I^v(\forall x\psi) + I^v(\forall x\varphi) + I^v(\forall x\psi)I^v(\forall x\varphi)) = \\
 &= 1 + 1 + 1 \cdot (0 + 0 + 1 \cdot 0) = 1 + 1 + 1 \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

Por tanto, $\not\models \forall x(\psi \vee \varphi) \rightarrow (\forall x\psi \vee \forall x\varphi)$.

Ejercicio 4.2.8. $\vdash \forall x(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\exists x\psi \rightarrow \exists x\varphi)$.

Por su valor semántico, sabemos que esto es equivalente a demostrar:

$$\vdash \forall x(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\neg \forall x \neg \psi \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi)$$

Con vistas a aplicar el Teorema de la deducción, intentaremos demostrar lo que sigue con cuidado:

$$\{\forall x(\psi \rightarrow \varphi), \neg \forall x \neg \psi\} \vdash \neg \forall x \neg \varphi$$

Añadiremos como hipótesis $\forall x \neg \varphi$, con vistas a emplear el Teorema de Reducción al Absurdo débil. Por tanto:

1. $\forall x \neg \varphi$ es una hipótesis.
2. $\forall x \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi \in \mathcal{A}_4$.
3. $\neg \varphi$ por Modus Ponens de 1 y 2.
4. $\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \in \mathcal{A}_4$.

5. $\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \in \mathcal{A}_4$.
6. $\psi \rightarrow \varphi$ por Modus Ponens de 4 y 5.
7. $\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$ por las leyes de Contraposición.
8. $\neg\psi$ por Modus Ponens de 3 y 7.
9. $\forall x\neg\psi$ por la Generalización de 8 (Generalización sobre x).
10. $\neg\forall x\neg\psi$ es una hipótesis.

Por tanto, por el Teorema de Reducción al Absurdo débil, hemos probado que:

$$\{\forall x(\psi \rightarrow \varphi), \neg\forall x\neg\psi\} \vdash \neg\forall x\neg\varphi$$

Como no hemos generalizado sobre variables libres (puesto que x aparece cuantificada en ambas hipótesis), podemos aplicar el Teorema de la deducción y concluir que:

$$\vdash \forall x(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\exists x\psi \rightarrow \exists x\varphi).$$

Ejercicio 4.2.9. $\vdash \exists x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \psi)$, supuesto que x no aparece libre en ψ

Observación. Intenta probar $\{\neg\psi, \forall x\varphi\} \vdash \forall x\neg(\varphi \rightarrow \psi)$.

Buscaremos en primer lugar demostrar $\{\neg\psi, \forall x\varphi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi)$. Con vistas a aplicar el Teorema de reducción al Absurdo débil, añadimos como hipótesis $\varphi \rightarrow \psi$.

1. $\neg\psi$ es una hipótesis.
2. $\forall x\varphi$ es una hipótesis.
3. $\forall x\varphi \rightarrow \varphi \in \mathcal{A}_4$.
4. φ por Modus Ponens de 2 y 3.
5. $\varphi \rightarrow \psi$ es una hipótesis.
6. ψ por Modus Ponens de 4 y 5.

Por tanto, por el Teorema de Reducción al Absurdo débil, hemos probado que:

$$\{\neg\psi, \forall x\varphi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi).$$

Generalizando sobre x , se tiene que:

$$\{\neg\psi, \forall x\varphi\} \vdash \forall x\neg(\varphi \rightarrow \psi).$$

Como x no aparece libre en ψ , tampoco aparecerá libre en $\neg\psi$. Por tanto, por el Teorema de la deducción, podemos concluir que:

$$\{\forall x\varphi\} \vdash \neg\psi \rightarrow \forall x\neg(\varphi \rightarrow \psi).$$

Por las Leyes de Contraposición, se tiene que:

$$\{\forall x\varphi\} \vdash \neg\forall x\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi.$$

Por la implicación sencilla del Teorema de la deducción, se tiene que:

$$\{\forall x\varphi, \neg\forall x\neg(\varphi \rightarrow \psi)\} \vdash \psi.$$

Como tan solo hemos generalizado sobre x y esta aparece ligada en ambas hipótesis, podemos aplicar dos veces el Teorema de la deducción. En primer lugar:

$$\{\neg\forall x\neg(\varphi \rightarrow \psi)\} \vdash \forall x\varphi \rightarrow \psi.$$

Y, en segundo lugar:

$$\vdash \neg\forall x\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \psi).$$

Por su equivalencia semántica, hemos probado que:

$$\vdash \exists x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \psi).$$

Ejercicio 4.2.10. $\vdash \neg\forall x\psi \rightarrow \exists x\neg\psi$.

Por su equivalencia semántica, sabemos que esto es equivalente a demostrar:

$$\vdash \neg\forall x\psi \rightarrow \neg\forall x(\neg\neg\psi)$$

Por las Leyes de Contraposición, sabemos que esto es equivalente a demostrar:

$$\vdash \forall x(\neg\neg\psi) \rightarrow \forall x\psi$$

Con vistas a aplicar el Teorema de la deducción, intentaremos demostrar lo que sigue con cuidado:

$$\{\forall x(\neg\neg\psi)\} \vdash \forall x\psi$$

1. $\forall x(\neg\neg\psi)$ es una hipótesis.
2. $\forall x(\neg\neg\psi) \rightarrow \neg\neg\psi \in \mathcal{A}_4$.
3. $\neg\neg\psi$ por Modus Ponens de 1 y 2.
4. ψ por la Ley de Doble Negación.
5. $\forall x\psi$ por la Generalización de 4 (Generalización sobre x).

Como x aparece ligada en la hipótesis, podemos aplicar el Teorema de la deducción y concluir que:

$$\vdash \forall x(\neg\neg\psi) \rightarrow \forall x\psi.$$

Por las Leyes de Contraposición y su valor semántico, se tiene lo pedido.

Ejercicio 4.2.11. Si x no aparece libre en ψ , $\vdash (\forall x\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$.

Por su equivalencia semántica, sabemos que esto es equivalente a demostrar:

$$\vdash (\forall x\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\forall x\neg(\varphi \rightarrow \psi)$$

Con vistas a aplicar el Teorema de la deducción, intentaremos demostrar lo que sigue con cuidado:

$$\{\forall x\varphi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\forall x\neg(\varphi \rightarrow \psi)$$

Con vistas a aplicar el Teorema de reducción al Absurdo débil, añadimos como hipótesis $\forall x\neg(\varphi \rightarrow \psi)$.

1. $\forall x\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ es una hipótesis.
2. $\forall x\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi) \in \mathcal{A}_4$.
3. $\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ por Modus Ponens de 1 y 2.
4. $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ por las Leyes de Duns Scoto.
5. $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$ por las Leyes de Contraposición aplicadas a 4.
6. φ por Modus Ponens de 3 y 5.
7. $\forall x\varphi$ por la Generalización de 6 (Generalización sobre x).
8. $\forall x\varphi \rightarrow \psi$ es una hipótesis.
9. ψ por Modus Ponens de 7 y 8.
10. $\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \in \mathcal{A}_1$.
11. $\varphi \rightarrow \psi$ por Modus Ponens de 9 y 10.

Como x no aparece libre en la hipótesis adicional que hemos añadido, entonces:

$$\{\forall x\varphi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\forall x\neg(\varphi \rightarrow \psi)$$

Como tan solo hemos generalizado sobre x y esta no aparece libre en ψ , podemos aplicar el Teorema de la deducción y concluir que:

$$\vdash (\forall x\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\forall x\neg(\varphi \rightarrow \psi).$$

Ejercicio 4.2.12. En un sistema de primer orden con igualdad, demuestra que las siguientes fórmulas son teoremas:

1. $\forall x(x = x)$.
Se tiene de forma directa por ser un axioma.
2. $\forall x\forall y(x = y \rightarrow y = x)$.
 1. $\forall x(x = x) \in \mathcal{A}_6$.
 2. $\forall x(x = x) \rightarrow (x = x) \in \mathcal{A}_4$.

3. $x = x$ por modus ponens de 1 y 2.
4. $(x = x) \rightarrow [(x = y) \rightarrow (x = x)] \in \mathcal{A}_1$.
5. $(x = y) \rightarrow (x = x)$ por modus ponens de 3 y 4.
6. $(x = y) \rightarrow [(x = x) \rightarrow (y = x)] \in \mathcal{A}_7$.
7. $(x = x) \rightarrow [(x = y) \rightarrow (y = x)]$ por la Regla de Conmutación de las Premisas aplicada a 6.
8. $(x = y) \rightarrow (y = x)$ por modus ponens de 3 y 7.
9. $\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$ por generalización en y, x .
3. $\forall x \forall y \forall z (x = y \rightarrow (y = z \rightarrow x = z))$.
 1. $(y = x) \rightarrow (y = z \rightarrow x = z) \in \mathcal{A}_7$
 2. $\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$ por el apartado anterior.
 3. $(x = y \rightarrow y = x)$ tras aplicar dos veces el axioma 4 y modus ponens.
 4. $(x = y) \rightarrow (y = z \rightarrow x = z)$ por la Regla del Silogismo aplicada a 3 y 1.
 5. $\forall x \forall y \forall z (x = y \rightarrow (y = z \rightarrow x = z))$ tras generalizar en z, y, x .

Ejercicio 4.2.13. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. En la aritmética de primer orden \mathcal{N} prueba que:

1. si $n \neq m$, entonces $\vdash_{\mathcal{N}} \neg(s^n(0) = s^m(0))$,

Con vistas a aplicar el Teorema de Reducción al Absurdo débil, suponemos como única hipótesis $s^n(0) = s^m(0)$. Además, podemos suponer $n > m$ sin pérdida de generalidad (en caso contrario, tendremos que aplicar la propiedad simétrica de la igualdad, demostrada en el ejercicio anterior). Entonces, tenemos que:

1. $s(s^{n-1}(0)) = s(s^{m-1}(0))$ es una hipótesis.
2. $s(s^{n-1}(0)) = s(s^{m-1}(0)) \rightarrow (s^{n-1}(0) = s^{m-1}(0)) \in \mathcal{N}_2$.
3. $s^{n-1}(0) = s^{m-1}(0)$ por modus ponens de 1 y 2.
- \vdots
- $3(m-1)$. $s^{n-m+1}(0) = s(0)$ por modus ponens de $3(m-1) - 1$ y $3(m-1) - 2$.
- $3(m-1) + 1$. $s(s^{n-m}(0)) = s(0) \rightarrow (s^{n-m}(0) = 0) \in \mathcal{N}_2$.
- $3(m-1) + 2$. $s^{n-m}(0) = 0$ por modus ponens de $3(m-1) + 1$ y $3(m-1)$.
- $3m$. $s(s^{n-m-1}(0)) \neq 0 \in \mathcal{N}_2$, puesto que $n - m - 1 \geq 0$.

Por el Teorema de Reducción al Absurdo débil, se concluye que $s^n(0) \neq s^m(0)$.

2. si $n = m$, entonces $\vdash_{\mathcal{N}} (s^n(0) = s^m(0))$,

Como $n = m$, y s es una aplicación, se tiene que $s^n(0)$ y $s^m(0)$ son el mismo elemento. Por lo tanto:

1. $s^n(0) = s^m(0) \in \mathcal{A}_6$.

3. $\vdash_{\mathcal{N}} (s^n(0) + s^m(0) = s^{n+m}(0))$.
 1. $s^n(0) + s(s^{m-1}(0)) = s(s^n(0) + s^{m-1}(0)) \in \mathcal{N}_2$.
 - \vdots
 - $m-1$. $s^{m-2}(s^n(0) + s(s(0))) = s^{m-1}(s^n(0) + s(0)) \in \mathcal{N}_2$.
 - m . $s^{m-1}(s^n(0) + s(0)) = s^m(s^n(0) + 0) \in \mathcal{N}_2$.
 - $m+1$. $s^n(0) + 0 = s^n(0) \in \mathcal{N}_3$.
 - $m+2$. $s^n(0) + 0 = s^n(0) \rightarrow s^m(s^n(0) + 0) = s^m(s^n(0)) \in \mathcal{A}_7$.
 - $m+3$. $s^{m-1}(s^n(0) + s(0)) = s^m(s^n(0))$ por Modus ponens de m y $m+2$ y transitividad.
 - $m+4$. $s^n(0) + s^m(0) = s^{n+m}(0)$ tras aplicar la transitividad a $1, \dots, m-1$ y $m+3$.

Ejercicio 4.2.14. Usando los ejercicios anteriores, prueba que para todo $n, m \in \mathbb{N}$, $n + m = m + n$ en \mathcal{N} , a saber,

$$\vdash_{\mathcal{N}} s^n(0) + s^m(0) = s^m(0) + s^n(0).$$

1. $s^n(0) + s^m(0) = s^{n+m}(0)$ por el ejercicio anterior.
2. $s^{n+m}(0) = s^{m+n}(0)$ por la conmutatividad en \mathbb{N} .
3. $s^m(0) + s^n(0) = s^{m+n}(0)$ por el ejercicio anterior.
4. $s^{m+n}(0) = s^m(0) + s^n(0)$ por la simetría de la igualdad.
5. $s^n(0) + s^m(0) = s^m(0) + s^n(0)$ por la transitividad aplicada a 1, 2, 4.

4.3. Teoría Descriptiva de Conjuntos

Ejercicio 4.3.1. Demostrar que $(2^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio completo.

Veamos en primer lugar que d es una distancia.

1. No negatividad:

$$d(x, y) = \frac{1}{2^{n+1}} \geq 0 \quad \forall x, y \in 2^{\mathbb{N}}$$

Además, se tiene que $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

2. Simetría:

Sea $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid x(k) \neq y(k)\} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid y(k) \neq x(k)\}$, entonces:

$$d(x, y) = \frac{1}{2^{n+1}} = d(y, x)$$

3. Desigualdad triangular:

Sean los siguientes tres mínimos, que suponemos que existen (ya que si no existen, la desigualdad se verifica trivialmente):

$$\begin{aligned} n_1 &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid x(k) \neq y(k)\} \\ n_2 &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid y(k) \neq z(k)\} \\ n &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid x(k) \neq z(k)\} \end{aligned}$$

Tenemos que $\min\{n_1, n_2\} \leq n$, puesto que para $k < \min\{n_1, n_2\}$, se verifica que $x(k) = y(k)$ y $y(k) = z(k)$, por lo que $x(k) = z(k)$. Por tanto, $n \geq \min\{n_1, n_2\}$. Por tanto:

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{\min\{n_1, n_2\}+1}} = \max\left\{\frac{1}{2^{n_1+1}}, \frac{1}{2^{n_2+1}}\right\} = \\ &= \max\{d(x, y), d(y, z)\} \leq d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Por tanto, hemos demostrado que d es una distancia, por lo que consideramos el espacio métrico $(2^{\mathbb{N}}, d)$. Este será completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a una sucesión de cantor, lo que veremos a continuación.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, es decir:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Veamos ahora cómo demostrar que esta sucesión es convergente, para lo cual hemos de construir la sucesión x que sea el límite de la sucesión de Cauchy. Para cada $j \in \mathbb{N}$, consideramos $\varepsilon = \frac{1}{2^{j+1}}$, y por tanto, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall m, n \geq N_j \quad d(x_m, x_n) < \frac{1}{2^{j+1}}$$

Por tanto, para cada $m, n \geq N_j$, tenemos que $x_m(j) = x_n(j)$. Definimos por tanto:

$$x(j) = x_{N_j}(j) = x_m(j) \quad \forall m \geq N_j$$

Vemos que x es una sucesión de Cantor, y ahora hemos de demostrar que es el límite de la sucesión de Cauchy. Fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon$, y podemos considerar $N_k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall m, n \geq N_k \quad d(x_m, x_n) < \frac{1}{2^{k+1}}$$

Por tanto, para todo $m \geq N_k$, veamos que $x_m(j) = x(j)$ para todo $j \leq k$. Sea $j \leq k$, luego:

$$\frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^j + 1} \implies N_j \leq N_k$$

Por tanto, para todo $m \geq N_k \geq N_j$, se tiene que $x_m(j) = x_{N_j}(j) = x(j)$. Por tanto, para todo $m \geq N_k$, se verifica que:

$$d(x_m, x) < \frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon$$

Por tanto, hemos demostrado que la sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $x \in 2^{\mathbb{N}}$, y por tanto, $(2^{\mathbb{N}}, d)$ es completo.

Ejercicio 4.3.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $x \in X$ y $A \subseteq X$, definimos la distancia entre a y X como:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

Verificar que, dado $r > 0$, el siguiente conjunto es un abierto:

$$\{x \in X \mid d(x, A) < r\}$$

Demostración. Dado $x \in X$ con $d(x, A) < r$, veamos que $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ de forma que $B(x, \varepsilon) \subseteq \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$.

Sea $\varepsilon = r - d(x, A) > 0$, y sea $y \in B(x, \varepsilon)$, es decir, $d(x, y) < \varepsilon$. Veamos que $d(y, A) < r$.

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) \quad \forall a \in A$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} d(y, A) &= \inf\{d(y, a) \mid a \in A\} \\ &\leq \inf\{d(y, x) + d(x, a) \mid a \in A\} = d(y, x) + \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} \\ &= d(y, x) + d(x, A) < \varepsilon + d(x, A) = r - d(x, A) + d(x, A) = r \end{aligned}$$

Por tanto, $y \in \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$, y hemos demostrado que:

$$B(x, \varepsilon) \subseteq \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$$

Por tanto, $\{x \in X \mid d(x, A) < r\}$ es un abierto. □

Ejercicio 4.3.3. En el cubo de Hilbert $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, consideramos la métrica d definida como:

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n} \quad \forall x, y \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$$

Demostrar que d es una métrica en $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Demostración. En primer lugar, hemos de ver que la distancia así definida está bien definida, es decir, que la suma converge. Aplicamos para ello el Criterio de Comparación:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

Por tanto, d está bien definida. Ahora, veamos que d es una métrica:

- No-negatividad: Por definición de d , tenemos que:

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n} \geq 0$$

Además, se tiene que $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

- Simetría: Por definición de d , tenemos que:

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(y_n, x_n)}{2^n} = d(y, x)$$

- Desigualdad triangular: Tenemos que:

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, z_n)}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(y_n, z_n)}{2^n} \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Por tanto, hemos visto que d es una métrica en $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. □

Ejercicio 4.3.4. Definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} Q_2 &= \{\alpha \in \mathcal{C} \mid \exists A \subset \mathbb{N} \text{ finito tal que } \alpha(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{A\}\} \\ \ell^1 &= \left\{ x \in [0, 1]^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty \right\} \end{aligned}$$

Demostrar que $\ell^1 \in \Sigma_2^0$ y $Q_2 \leq_W \ell^1$.

Ejercicio 4.3.5. Sea Γ una clase de la Jerarquía Boreliana, y X un conjunto. Si $A \subset X$ es Γ -completo, y $B \subset X$ es otro conjunto de la clase Γ tal que $A \leq_W B$, entonces B es Γ -completo.

Demostración. Hemos de comprobar que:

■ $B \in \Gamma$: Se tiene por hipótesis.

■ Para todo espacio polaco X' , si $C \in \Gamma(X')$ entonces $C \leqslant_W B$:

Sea $C \in \Gamma(X')$, y busquemos $f : X' \rightarrow X$ tal que f es una función continua y $C = f^{-1}(B)$.

Como A es Γ -completo, existe $g : X' \rightarrow X$ tal que g es continua y $C = g^{-1}(A)$. Por otro lado, como $A \leqslant_W B$, existe una función continua $h : X \rightarrow X$ tal que $A = h^{-1}(B)$. Entonces, la composición $f = h \circ g$ es continua y cumple que:

$$f^{-1}(B) = g^{-1}(h^{-1}(B)) = g^{-1}(A) = C$$

Por tanto, $C \leqslant_W B$.

□

Ejercicio 4.3.6. Demostrar que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente derivable si y solo si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ f \in A_{\varepsilon, \delta}$$

donde:

$$A_{\varepsilon, \delta} = \left\{ f \in C([0, 1]) \mid \forall x, y, a, b \in [0, 1] : a, b, x, y \text{ a distancia } \leqslant \delta \implies \left| \frac{f(a) - f(b)}{a - b} - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < \varepsilon \right\}$$

Demostración. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Demostraremos por doble implicación.

\implies) Sea $f \in C^1([0, 1])$, y sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Como f es derivable en $[0, 1]$, por el Teorema del Valor Medio existe $a' \in]a, b[$, $x' \in]x, y[$ tal que:

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(a') \quad \text{y} \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(x')$$

Por el Teorema de Heine, como $[0, 1]$ es compacto y f' es continua, existe $\delta' \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$|a' - x'| < \delta' \implies |f'(a') - f'(x')| < \varepsilon$$

Sea ahora $\delta = \delta'/3$. Usando que a, b, x, y están a distancia $\leqslant \delta$, veamos que $|x' - a'| < \delta'$:

$$|x' - a'| \leqslant |x' - x| + |x - a| + |a - a'| < |x - y| + |x - a| + |a - b| \leqslant 3\delta = \delta'$$

Por tanto, se verifica que:

$$\left| \frac{f(a) - f(b)}{a - b} - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(a') - f'(x')| < \varepsilon$$

Por tanto, $f \in A_{\varepsilon, \delta}$.

\Leftarrow) Hemos de demostrar que f es continuamente derivable. Para ello, definimos el cociente incremental de f en $t \in [0, 1]$ como:

$$f_t(x) = \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \quad \forall x \in [0, 1] \setminus \{t\}$$

En primer lugar, hemos de ver que f es derivable, para lo cual hemos de comprobar que, para cada $t \in [0, 1]$, el siguiente límite existe:

$$\lim_{x \rightarrow t} f_t(x)$$

Para comprobar que este límite existe, usaremos que \mathbb{R} es completo, por lo que toda sucesión de Cauchy converge. Sea $t \in [0, 1]$, y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de $[0, 1] \setminus \{t\}$ tal que $\{x_n\} \rightarrow t$. Veamos que $\{f_t(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Para ello, fijamos $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, por lo que $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $f \in A_{\varepsilon, \delta}$. Por ser $\{x_n\}$ de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m, n \geq N$, se verifica que:

$$|x_m - x_n| < \delta$$

Por tanto, t, x_m, x_n están a distancia $\leq \delta$, y por tanto, como $f \in A_{\varepsilon, \delta}$, se verifica que:

$$|f_t(x_m) - f_t(x_n)| = \left| \frac{f(x_m) - f(t)}{x_m - t} - \frac{f(x_n) - f(t)}{x_n - t} \right| < \varepsilon$$

Por tanto, $\{f_t(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, y por tanto, converge a un límite $f'(t) \in \mathbb{R}$. Definimos por tanto:

$$f'(t) = \lim_{x \rightarrow t} f_t(x)$$

Ahora, queremos demostrar que f' es continua en todo $[0, 1]$. Para ello, fijamos un punto $x \in [0, 1]$, y tomamos una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1] \setminus \{x\}$ tal que $\{t_n\} \rightarrow x$. Queremos ver que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(t_n) = f'(x)$$

Recordemos que, por definición,

$$f'(t_n) = \lim_{y \rightarrow t_n} \frac{f(y) - f(t_n)}{y - t_n} \quad \text{y} \quad f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Fijado ahora $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, consideramos $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $f \in A_{\varepsilon, \delta}$. Como $\{t_n\} \rightarrow x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, se tiene $|t_n - x| < \delta/2$. Fijamos tal $n \geq N$, y tomamos $y \in [0, 1]$ con $|y - t_n| < \delta/2$. Entonces, por desigualdad triangular:

$$|y - x| \leq |y - t_n| + |t_n - x| < \delta/2 + \delta/2 = \delta$$

Por tanto, x, y, t_n están a distancia menor que δ , y podemos aplicar la hipótesis:

$$\left| \frac{f(y) - f(t_n)}{y - t_n} - \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \right| < \varepsilon \quad \forall z \in [0, 1] \text{ tal que } |x - z| < \delta$$

Tomando el límite cuando $y \rightarrow t_n$, se obtiene:

$$\left| f'(t_n) - \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \right| < \varepsilon \quad \forall z \in [0, 1] \text{ tal que } |x - z| < \delta$$

Y tomando después el límite cuando $z \rightarrow x$, se concluye que $|f'(t_n) - f'(x)| < \varepsilon$. Como $n \geq N$ era arbitrario, tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(t_n) = f'(x)$$

Es decir, f' es continua en x . Como $x \in [0, 1]$ era arbitrario, concluimos que f' es continua en todo el intervalo, y por tanto, $f \in C^1([0, 1])$.

□