Topología II

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2025

Índice general

1. Relaciones de Ejercicios

1.1. Conexión por arcos

Ejercicio 1.1.1. Muestra que cualquier esfera de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ es arcoconexa con la topología usual.

Es decir, queremos ver que $\mathbb{S}^n$ es arcoconexa para $n \geqslant 1$.
(notemos que $\mathbb{S}^0 = \{x \in \mathbb{R} : \|x\| = 1\} = \{-1, 1\}$ no es un conjunto arcoconexo).

Para ello, sea $n \geqslant 2$, sabemos que $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ (con $p \in \mathbb{S}^n$) es homeomorfa a $\mathbb{R}^{n-1}$, que es un conjunto arcoconexo por ser convexo (es una espacio vectorial). Como la arcoconexión es una propiedad topológica, esta se conserva por homeomorfismo, luego $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ es un conjunto arcoconexo, $\forall p \in \mathbb{S}^n$.

Tomando $N = (0, \ldots, 0, 1), S = (0, \ldots, 0, -1) \in \mathbb{S}^n$, podemos ver $\mathbb{S}^n$ como unión de dos conjuntos arcoconexos:

$$\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \cup (\mathbb{S}^n \setminus \{S\})$$

no disjuntos:

$$(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \cap (\mathbb{S}^n \setminus \{S\}) = \mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}$$

Por lo que $\mathbb{S}^n$ es un conjunto arcoconexo, $\forall n \geqslant 2$.

Ejercicio 1.1.2. Demuestra que si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de arcoconexos de X tales que todos intersecan a uno de ellos, es decir,

$$A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset, \qquad \forall i \in I,$$

entonces $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ es arcoconexo.

Sean $x, y \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, entonces existen $i, j \in I$ de forma que $x \in A_i$ y $y \in A_j$. Como $A_i \cap A_{i_0}, A_j \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, podemos tomar $a \in A_i \cap A_{i_0}$ y $b \in A_j \cap A_{i_0}$.

- A_i es un conjunto arcoconexo con $x, a \in A_i$, por lo que existe un camino, α, que une x con a.
- A_j también es un conjunto arcoconexo con $y, b \in A_j$, por lo que existe un camino, β, que une y con b.
- Además, A_{i_0} es un conjunto arcoconexo con $a, b \in A_{i_0}$, por lo que existe un tercer camino, γ, que une a con b.

De esta forma, podemos tomar:

$$\sigma = \alpha * \left(\gamma * \tilde{\beta}\right)$$

Que es un camino que une x con y. Como x e y eran arbitrarios, podemos unir cualesquiera dos puntos de $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, por lo que dicho conjunto es arcoconexo.

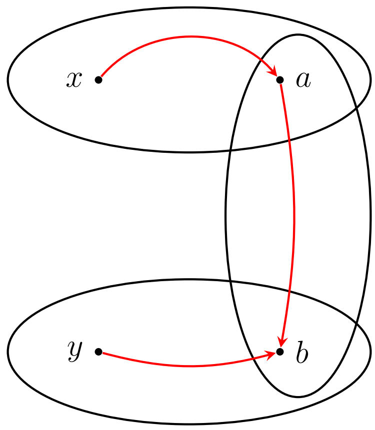


Figura 1.1: Forma de unir dos puntos cualesquiera.

Ejercicio 1.1.3. Sea X un conjunto, $x_0 \in X$, y consideramos la topología (del punto incluido) dada por

$$T = \{U \subset X : x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$$

¿Es (X, T) arcoconexo?

Sí: sea $x \in X$, veamos que la aplicación $\alpha : [0,1] \to X$ dada por

$$\alpha(t) = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ x_0 & \text{si } t \in]1/2, 1] \end{array} \right. \qquad \forall t \in [0,1]$$

es continua. Sea $U \in T$:

- Si $U = \emptyset$, entonces $\alpha^{-1}(U) = \emptyset \in \mathcal{T}_u\big|_{[0,1]}$.
- Si $x_0 \in U$ y $x \notin U$, entonces $\alpha^{-1}(U) =]1/2, 1] \in \mathcal{T}_u\big|_{[0,1]}$.
- Si $x_0, x \in U$, entonces $\alpha^{-1}(U) = [0,1] \in \mathcal{T}_u\big|_{[0,1]}$.

Como la preimagen de cualquier conjunto abierto es abierta, tenemos que α es continua, luego es un arco que une x con x_0.

Ahora, si $x, y \in X$, tenemos que existen $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ de forma que α une x con x_0 y β une y con x_0; por lo que $\alpha * \tilde{\beta}$ es un arco que une x con y. Como x e y eran arbitrarios, concluimos que X es arcoconexo.

Ejercicio 1.1.4. Demustra que en $\mathbb{R}^n$ con la topología usual, todo abierto conexo es arcoconexo. ¿Es cierto que todo cerrado conexo de $\mathbb{R}^n$ es arcoconexo?

En teoría vimos que:

$$\text{Un conjunto es arcoconexo} \iff \begin{cases} \text{Es conexo} \\ \text{Todo punto admite un entorno arcoconexo} \end{cases}$$

Sea U un abierto conexo de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, falta ver que todo punto suyo admite un entorno arcoconexo en la topología inducida en U para ver que U es arcoconexo. Para ello, sea $x \in U$, como U es abierto existe $r \in \mathbb{R}^+$ de forma que $B(x,r) \subset U$. $B(x,r)$ es un conjunto arcoconexo por ser convexo, luego es un entorno arcoconexo de x en U. Como x era un punto arbitrario de U, todo punto suyo admite un entorno arcoconexo, y como U era conexo, tenemos que U es arcoconexo.

Ahora, no es cierto que todo cerrado conexo de $\mathbb{R}^n$ es arcoconexo, ya que si consideramos $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Tenemos que

$$C = \overline{Gr(f)} = \overline{\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^+\}} = Gr(f) \cup (\{0\} \times [-1,1])$$

es un conjunto cerrado y conexo (se vio en Topología I) pero que no es arcoconexo, puede probarse por un razonamiento similar a un ejemplo visto en teoría.

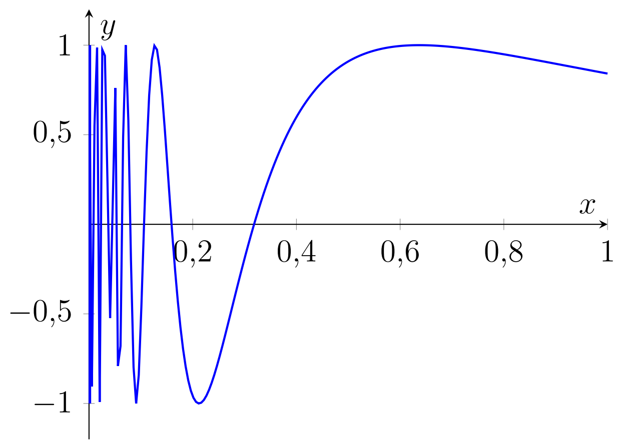


Figura 1.2: Dibujo de la adherencia de la gráfica de $f(x)$.

Ejercicio 1.1.5. Prueba que la componente arcoconexa de un punto x_0 está contenida en la componente conexa de x_0.

Sea (X, T) un espacio topológico, $x_0 \in X$ y C la componente arcoconexa de x_0 en X, en particular tenemos que C es un conjunto arcoconexo, luego es conexo, por lo que está contenida en la componente conexa de x, al ser esta el mayor conjunto conexo que contiene a x.

Ejercicio 1.1.6. En $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey, esto es, la topología que tiene como base

$$\mathcal{B}_S = \{[a, b) \subset \mathbb{R} : a < b\},$$

determina sus componentes arcoconexas.

En Topología I vimos que las componentes conexas de la topología de Sorgenfrey eran los conjuntos de puntos unitarios $\{x\}$, ya que si tenemos un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ con al menos dos puntos distintos x e y (suponemos $x < y$), entonces en la topología inducida en A podemos considerar los abiertos:

$$U = [-\infty, y) \cap A, \qquad V = [y, +\infty) \cap A$$

de forma que $U, V \neq \emptyset$, $U \cup V = A$ y $U \cap V = \emptyset$, por lo que A (cualquier conjunto con al menos dos puntos distintos) es disconexo, luego las componentes conexas han de ser los conjuntos unitarios, ya que los conjuntos unitarios son conexos en cualquier topología.

Como las componentes arcoconexas se encuentran contenidas en las componentes conexas, no queda más salida que las componentes arcoconexas de la topología de Sorgenfrey sean los conjuntos unitarios.

Ejercicio 1.1.7. Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo entre espacios topológicos. Demuestra que $A \subset X$ es una componente arcoconexa de X si y solo si $f(A)$ es una componente arcoconexa de Y. Deduce que el número de componentes arcoconexas es invariante por homeomorfismos.

Sea $A \subset X$ una componente arcoconexa de X, veamos que $f(A)$ es una componente arcoconexa de Y. Para ello, por reducción al absurdo, si $f(A)$ no fuera una componente arcoconexa de Y podría ser por dos razones:

- $f(A)$ no es un conjunto arcoconexo, algo que llevaría a una contradicción, ya que se vio que la imagen por una función continua de un conjunto arcoconexo era arcoconexa.
- Porque existe $B \subset Y$ un conjunto arcoconexo distinto de $f(A)$ de forma que $f(A) \subset B \subset Y$. En dicho caso, si aplicamos f^{-1} en la anterior inclusión tenemos que:

  $$f^{-1}(f(A)) = A \subset f^{-1}(B) \subset X$$

  Por lo que tenemos $f^{-1}(B)$, un conjunto arcoconexo[1] distinto de A que contiene a A, luego A no era una componentes arcoconexa de X, contradicción.

En definitiva, si $A \subset X$ es una componente arcoconexa entonces $f(A)$ también lo es de Y. Ahora, si $f(A)$ es una componente arcoconexa de Y, basta aplicar que f^{-1} también es un homeomorfismo para concluir que $f^{-1}(f(A)) = A$ es una componente arcoconexa de X.

Sea Z un espacio topológico, notaremos en este ejercicio:

$$\Gamma_Z = \{U \subset Z : U \text{ es una componente arcoconexa de } Z\}$$

[1]por ser imagen por una función continua de un conjunto arcoconexo.

Recuperando el homeomorfismo $f : X \to Y$, definimos

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \Gamma_X & \longrightarrow & \Gamma_Y \\ & U & \longmapsto & f(U) \end{array}$$

- Φ está bien definida (es decir, $f(U) \in \Gamma_Y$ para $U \in \Gamma_X$), ya que hemos visto que la imagen de una componente arcoconexa de X es una componente arcoconexa de Y.
- Φ es inyectiva, ya que si $U, V \in \Gamma_X$ con $f(U) = f(V)$, entonces por ser f inyectiva tenemos que $U = V$.
- Φ es sobreyectiva, ya que si $W \in \Gamma_Y$, entonces $f^{-1}(W) \in \Gamma_X$, con:

$$\Phi(f^{-1}(W)) = f(f^{-1}(W)) = W$$

Por ser Φ biyectiva concluimos que $|\Gamma_X| = |\Gamma_Y|$; es decir, el número de componentes arcoconexas es invariante por homeomorfismos.

Ejercicio 1.1.8. En $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ se considera la topología que tiene por base

$$\mathcal{B} = \{]a, b[\times \{0, 1\} : a < b\}.$$

Demuestra que X es arcoconexo. ¿Es X homeomorfo a $\mathbb{R}$ con la topología usual?

Sean $\alpha = (x, a), \beta = (y, b) \in X$, vamos a tratar de crear un arco que una α con β:

- Si $a = b$, entonces $\gamma : [0, 1] \to X$ dada por:

  $$\gamma(t) = ((1 - t)x + ty, a) \qquad \forall t \in [0, 1]$$

  Es una aplicación continua, ya que si tomamos $B =]a, b[\times \{0, 1\} \in \mathcal{B}$, tenemos:

  $$\gamma^{-1}(B) = \gamma^{-1}(]a, b[\times \{0\}) \text{ abierto de } [0, 1]$$

  Ya que el conjunto $]a, b[\times \{0\}$ es un abierto para la topología usual y α es una aplicación continua para la topología usual.

- Si $\alpha = (0, 0)$ y $\beta = (0, 1)$, entonces si tomamos $\gamma : [0, 1] \to X$ dada por:

  $$\gamma(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \beta & \text{si } 1/2 < t \leqslant 1 \end{array} \right.$$

  tenemos que γ es continua, ya que si $B =]a, b[\times \{0, 1\} \in \mathcal{B}$, tenemos que:

  $$\gamma^{-1}(B) = \left\{ \begin{array}{cl} \emptyset & \text{si } 0 \notin]a, b[\\ [0, 1] & \text{si } 0 \in]a, b[\end{array} \right.$$

- Una vez discutidos dichos casos, suponemos ahora que $\alpha = (x, 0)$ y $\beta = (y, 1)$ (en caso contrario, sustituimos los papeles de α y β), en cuyo caso:
  - Sabemos de la existencia de un arco γ que une α con $(0, 0)$.

- Sabemos de la existencia de un arco τ que une $(0,0)$ con $(0,1)$.
- Sabemos de la existencia de un arco π que une β con $(0,1)$.

Si consideramos el arco $\gamma * (\tau * \tilde{\pi})$ obtenemos un arco que une α con β.

Por tanto, X es arcoconexo, ya que somos capaces de unir cualesquiera dos puntos distintos de X por un arco.

Ahora, para responder a la pregunta de si $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es homeomorfo a X, la respuesta es que no, y tenemos dos formas de justificar la respuesta:

Opción 1. Sabemos que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es $T2$ por ser un espacio topológico metrizable, mientras que podemos probar que X no es $T2$, ya que no existen ningún par de abiertos disjuntos uno conteniendo a $(0,0)$ y otro conteniendo a $(0,1)$, puesto que si U es un abierto de X que contiene a $(0,0)$, entonces como $\mathcal{B}$ es una base, existen $a, b \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$(0,0) \in]a,b[\times \{0,1\} \subset U$$

Sin embargo, tendríamos entonces que $(0,1) \in]a,b[\times \{0,1\}$, de donde $(0,1) \in U$, por lo que X no es T2 y como ser T2 es una propiedad topológica, dichos espacios no pueden ser homeomorfos.

Opción 2. Otra forma sería suponer que son homeomorfos, con lo que existe un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to X$. Sea $p \in \mathbb{R}$, resulta entonces que $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ es homeomorfo a $X \setminus \{(p,0)\}$, pero:

- $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ no es arcoconexo.
- $X \setminus \{(p,0)\}$ sí es arcoconexo, ya que podemos hacer que cualquier curva "salte" a $(p,1)$ sin perder su continuidad, con lo que podemos seguir conectando dos puntos cualesquiera.

Ejercicio 1.1.9. En $\mathbb{R}^3$ con la topología usual, calcula las componentes arcoconexas de

$$X = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1\}$$

Notemos que como $xyz = 1$, ninguno de ellos puede ser igual a 0, por lo que:

$$X = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{xy}, \quad xy \neq 0\right\}$$

Si tomamos:

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\right\} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$$

y definimos $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \frac{1}{xy} \qquad \forall (x,y) \in \Gamma$$

Tenemos que $X = Gr(f)$. Por tanto, definiendo $h : \Gamma \to X$ por:

$$h(x,y) = (x, y, f(x,y)) \qquad \forall (x,y) \in \Gamma$$

Obtenemos (como vimos en Topología I) un homeomorfismo entre Γ y X. Como Γ tiene 4 componentes arcoconexas:

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \qquad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-, \qquad \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-, \qquad \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-$$

y las componentes arcoconexas se convervan por homeomorfismos tal y como acabamos de ver en el ejercicio 7, tenemos que:

$$h(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+), \qquad h(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-), \qquad h(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-), \qquad h(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-)$$

son las componentes arcoconexas de X.

Ejercicio 1.1.10. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual consideremos las rectas horizontales $A_n = \mathbb{R} \times \{1/n\}$, $B_n = \mathbb{R} \times \{-1/n\}$ y el eje de ordenadas menos el origen, esto es, $C = \{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Calcula las componentes conexas y arcoconexas de

$$X = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \cup C \cup \{(1,0)\}.$$

1.2. El grupo fundamental

Ejercicio 1.2.1. Prueba que en un espacio topológico simplemente conexo X, dos arcos cualesquiera $\alpha, \beta \in \Omega(X, x, y)$ son homotópicos por arcos.

Sean $\alpha, \beta \in \Omega(X, x, y)$, tenemos que $\alpha * \tilde{\beta}$ es un lazo basado en x, y por ser X simplemente conexo tenemos que $\left[\alpha * \tilde{\beta}\right] = [\varepsilon_x]$, de donde:

$$[\alpha] * \left[\tilde{\beta}\right] = \left[\alpha * \tilde{\beta}\right] = [\varepsilon_x] \Longrightarrow [\alpha] = [\beta]$$

Ejercicio 1.2.2. Sean X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $f : X \to Y$ una aplicación. Demuestra que si f se puede extender a una aplicación continua $F : \mathbb{R}^n \to Y$, entonces f_* es el homomorfismo trivial, es decir, el homomorfismo que lleva todo elemento en el neutro.

Como F es una extensión de f, tenemos que $F \circ i = f$, es decir:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "F"] & Y \end{tikzcd}$$

Y como cada una de ellas es continua (f es continua por ser $f = F\big|_X$), podemos inducir el diagrama a grupos fundamentales, obteniendo para cada $x_0 \in X$:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, hook, "i_*"] \arrow[rr, bend right, "f_*"'] & \pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) \arrow[r, "F_*"] & \pi_1(Y, f(x_0)) \end{tikzcd}$$

de donde:

$$f_*([\alpha]_X) = F_*(i_*([\alpha]_X)) = F_*([\alpha]_{\mathbb{R}^n}) \overset{(*)}{=} F_*([\varepsilon_{x_0}]_{\mathbb{R}^n}) = [\varepsilon_{f(x_0)}]_Y \qquad \forall [\alpha]_X \in \pi_1(X, x_0)$$

donde en $(*)$ hemos usado que $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.

Ejercicio 1.2.3. Se dice que un grupo G con operación $\cdot$ es un grupo topológico si G tiene una topología de forma que las aplicaciones producto e inversión

$$\begin{array}{rccc} : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (x, y) & \longmapsto & x \cdot y \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} : & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

son continuas. Sea e el elemento neutro en G:

a) Dados $\alpha, \beta \in \Omega(G, e)$, se define $\alpha \cdot \beta : [0, 1] \to G$ como $(\alpha \cdot \beta)(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t)$. Demuestra que $\alpha \cdot \beta \in \Omega(G, e)$.

   Hemos de probar que $\alpha \cdot \beta$ es un lazo basado en e. Para ello:

- $\alpha \cdot \beta$ es continua, puesto que si consideramos:

$$\begin{array}{rrcl} \Phi: & G\times G & \longrightarrow & G \\ & (x,y) & \longmapsto & x\cdot y \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \Psi: & [0,1] & \longrightarrow & G\times G \\ & t & \longmapsto & (\alpha(t),\beta(t)) \end{array}$$

Tenemos que $\alpha \cdot \beta = \Phi \circ \Psi$:

$$(\alpha\cdot\beta)(t) = \alpha(t)\cdot\beta(t) = \Phi(\alpha(t),\beta(t)) = \Phi(\Psi(t)) \qquad \forall t \in [0,1]$$

con Φ continua por hipótesis y Ψ continua por ser $\Psi = (\alpha, \beta)$, con sus dos componentes funciones continuas, por ser arcos.

- Observemos que:

$$\begin{aligned} (\alpha\cdot\beta)(0) = \alpha(0)\cdot\beta(0) = e\cdot e = e \\ (\alpha\cdot\beta)(1) = \alpha(1)\cdot\beta(1) = e\cdot e = e \end{aligned}$$

Con lo que $\alpha \cdot \beta \in \Omega(G, e)$.

b) Comprueba que $(\alpha * \varepsilon_e)\cdot(\varepsilon_e * \beta) = \alpha * \beta$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Omega(G, e)$.

Sean $\alpha, \beta \in \Omega(G, e)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} ((\alpha * \varepsilon_e)\cdot(\varepsilon_e * \beta))(t) &= (\alpha * \varepsilon_e)(t)\cdot(\varepsilon_e * \beta)(t) \\ &= \left\{\begin{array}{ll} \alpha(2t)\cdot\varepsilon_e(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \varepsilon_e(2t-1)\cdot\beta(2t-1) & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{array}\right. \\ &= \left\{\begin{array}{ll} \alpha(2t)\cdot e & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ e\cdot\beta(2t-1) & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{array}\right. \\ &= (\alpha * \beta)(t) \qquad \forall t \in [0,1] \end{aligned}$$

c) Sean $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e)$. Prueba que la operación $[\alpha]\cdot[\beta] = [\alpha\cdot\beta]$ está bien definida.

Sean $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma' \in \Omega(G, e)$ de forma que:

$$[\alpha] = [\alpha'], \qquad [\gamma] = [\gamma'] \tag{1.1}$$

hemos de probar que $[\alpha\cdot\gamma] = [\alpha'\cdot\gamma']$. De las igualdades (1.1) sabemos que existen $H_1, H_2 : [0,1]\times[0,1] \to G$ aplicaciones continuas con:

$$\begin{array}{lll} H_1(s,0) = \alpha(s), & H_1(s,1) = \alpha'(s), & H_1(0,t) = e = H_1(1,t) \\ H_2(s,0) = \gamma(s), & H_2(s,1) = \gamma'(s), & H_2(0,t) = e = H_2(1,t) \end{array}$$

Si definimos $H : [0,1]\times[0,1] \to G$ dada por:

$$H(s,t) = H_1(s,t)\cdot H_2(s,t) \qquad \forall (s,t) \in [0,1]\times[0,1]$$

tenemos que H es continua, ya que podemos verla como $H = \Phi \circ (H_1, H_2)$, al igual que inicmos en el apartado a), así como que:

$$\begin{gathered} H(s,0) = H_1(s,0) \cdot H_2(s,0) = \alpha(s) \cdot \gamma(s) = (\alpha \cdot \gamma)(s) \\ H(s,1) = H_1(s,1) \cdot H_2(s,1) = \alpha'(s) \cdot \gamma'(s) = (\alpha' \cdot \gamma')(s) \\ H(0,t) = H_1(0,t) \cdot H_2(0,t) = e \cdot e = e = e \cdot e = H_1(1,t) \cdot H_2(1,t) = H(1,t) \end{gathered}$$

Con lo que H es una homotopía, lo que nos dice que $[\alpha \cdot \gamma] = [\alpha' \cdot \gamma']$, luego la operación está bien definida.

d) Muestra que $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha] * [\beta]$, para cada $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e)$.

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \varepsilon_e] \cdot [\varepsilon_e * \beta] = [(\alpha * \varepsilon_e) \cdot (\varepsilon_e * \beta)] \overset{b)}{=} [\alpha * \beta] = [\alpha] * [\beta]$$

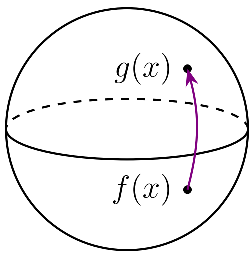
e) Demuestra que $\pi_1(G, e)$ es abeliano.

Sean $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} [\alpha] * [\beta] &= [\alpha * \beta] = [(\alpha * \varepsilon_e) \cdot (\varepsilon_e * \beta)] = [\alpha * \varepsilon_e] \cdot [\varepsilon_e * \beta] = [\varepsilon_e * \alpha] \cdot [\beta * \varepsilon_e] \\ &= \left[\begin{cases} e \cdot \beta(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \alpha(2t-1) \cdot e & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \right] = [\beta * \alpha] = [\beta] * [\alpha] \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.4. Sean X un espacio topológico y $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ aplicaciones continuas con $g(x) \neq -f(x)$ para cada $x \in X$. Prueba que f y g son homotópicas. Deduce que si $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es continua y carece de puntos fijos, entonces f es homotópica a $-Id_{\mathbb{S}^n}$.

La idea que hay en la prueba es para cada $x \in X$, tratar de "llevar" de forma continua el punto $f(x)$ hasta el punto $g(x)$ sin salirnos de $\mathbb{S}^n$:



Para ello, definimos $H : X \times [0,1] \to Y$ dada por:

$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|_2} \qquad \forall (x,t) \in X \times [0,1]$$

- H está bien definida (es decir, el denominador no se anula), ya que si tenemos $x \in X$ y $t \in [0,1]$ de forma que $(1-t)f(x) + tg(x) = 0$, entonces:

$$(1-t)f(x) = -tg(x)$$

de donde:

$$1 - t = (1-t)\|f(x)\|_2 = \|(1-t)f(x)\|_2 = \|-tg(x)\|_2 = t\|g(x)\|_2 = t$$

por lo que ha de ser $t = 1/2$. Sin embargo, la condición $g(x) \neq -f(x)$ implica que $f(x) \neq -1/2 g(x)$, por lo que es imposible que el denominador se anule.

- H es continua.
- Observamos que:

$$H(x,0) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|_2} = f(x) \qquad H(x,1) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|_2} = g(x)$$

con lo que H es una homotopía entre f y g.

Sea ahora $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ una aplicación sin puntos fijos, entonces:

$$f(x) \neq x = -(-x) = -(-Id_{\mathbb{S}^n})(x) \qquad \forall x \in \mathbb{S}^n$$

y si aplicamos la parte del ejercicio que acabamos de probar, obtenemos que f es homotópica a $-Id_{\mathbb{S}^n}$.

Ejercicio 1.2.5. Sea $p : R \to B$ una aplicación recubridora y $b \in B$. Demuestra que el subespacio topológico $p^{-1}(\{b\}) \subset R$ tiene la topología discreta.

Sea $X = p^{-1}(\{b\})$, como p es una aplicación recubridora, podemos tomar un abierto O_b que contiene a b y está regularmente recubierto, con lo que existen $\{A_i\}_{i\in I}$ conjuntos abiertos de R de forma que:

$$p^{-1}(O_b) = \biguplus_{i\in I} A_i$$

Sea $r \in X \subseteq p^{-1}(O_b)$, tenemos entonces que existe un índice $j \in I$ de forma que $r \in A_j$. Veamos que A_j no puede contener dos elementos distintos de X, pues si $r, r' \in A_j \cap X$, tenemos que:

$$p\big|_{A_j}(r) = b = p\big|_{A_j}(r')$$

y como $p\big|_{A_j} : A_j \to O_b$ es un homeomorfismo por ser p una aplicación recubridora, tenemos en particular que es inyectiva, luego $r = r'$. En definitiva, hemos probado que si $r \in X$, entonces existe un índice $j \in I$ de forma que $\{r\} = X \cap A_j$, con A_j un abierto de R, por lo que $\{r\}$ es un abierto de X, $\forall r \in X$, con lo que X tiene la topología discreta.

Ejercicio 1.2.6. Demuestra que toda aplicación recubridora es una aplicación abierta.

Sea $p : R \to B$ una aplicación recubridora y U un abierto de R, queremos probar que $p(U)$ es un abierto de B. Para ello, sea $y \in p(U)$, existirá $x \in R$ de forma que $p(x) = y$. Como p es una aplicación recubridora, existirá O_y abierto de B con $y \in O_y$ y de forma que O_y está regularmente recubierto, es decir, existe una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de abiertos disjuntos de R de forma que:

$$x \in p^{-1}(O_y) = \biguplus_{i\in I} A_i$$

con lo que tenemos un cierto índice $j \in I$ de modo que $x \in A_j$, luego $x \in U \cap A_j$, siendo $U \cap A_j$ un conjunto abierto, como intersección de conjuntos abiertos. Como $p\big|_{A_j} : A_j \to O_y$ es un homeomorfismo por ser p una aplicación recubridora, en particular $p\big|_{A_j}$ es abierta, luego $p\big|_{A_j}(U \cap A_j)$ es un abierto contenido en $p(U) \cap O_y$, que contiene a y. Como este procedimiento podemos repetirlo para todo $y \in p(U)$, concluimos que $p(U)$ es un abierto de B.

Ejercicio 1.2.7. Sea $p : R \to B$ una aplicación recubridora, con B conexo. Demuestra que si $p^{-1}(b_0)$ tiene k elementos para algún $b_0 \in B$, entonces $p^{-1}(b)$ tiene k elementos para todo $b \in B$. En tal caso, se dice que R es un recubridor de k hojas de B.

Sea:

$$A = \{x \in B : p^{-1}(x) \text{ tiene } k \text{ elementos}\}$$

Como $b_0 \in A$, tenemos que $A \neq \emptyset$. Veamos que A es abierto y cerrado:

- Si $a \in A$, existe un abierto regularmente recubierto O_a de B que contiene a a, con lo que existe una familia de abiertos $\{A_i\}_{i\in I}$ de R de forma que:

  $$p^{-1}(O_a) = \biguplus_{i\in I} A_i$$

  y tal que $p\big|_{A_i} : A_i \to O_a$ es un homeomorfismo, $\forall i \in I$. Para cada $x \in O_a$ podemos construir la aplicación $\Phi_x : I \to p^{-1}(x)$ de forma que a cada índice i le hace corresponder aquel elemento de A_i cuya imagen por p es x.

  - La aplicación Φ_x está bien definida, pues si $i \in I$, como la aplicación $p\big|_{A_i} : A_i \to O_a$ es un homeomorfismo, ha de existir un único elemento $y \in A_i$ tal que $p(y) = x$.
  - Φ_x es inyectiva, pues si $i, j \in I$ con $\Phi_x(i) = \Phi_x(j)$, entonces tenemos $y \in A_i \cap A_j$ de forma que $p(y) = x$. Como la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ es disjunta, ha de ser $i = j$.
  - Φ_x es sobreyectiva, pues si:

    $$y \in p^{-1}(x) \subseteq p^{-1}(O_a) = \biguplus_{i\in I} A_i$$

    entonces ha de existir $y \in A_i$ para cierto índice i de forma que $p(y) = x$, con lo que $\Phi_x(i) = y$.

  En definitiva, Φ_x es biyectiva para cada $x \in O_a$. Como en particular $p^{-1}(a)$ tiene k elementos, tendremos entonces que I tiene k elementos, de donde $p^{-1}(x)$ tiene k elementos, $\forall x \in O_a$, con lo que $O_a \subseteq A$. De donde deducimos que A es abierto.

- Sea $x \in \overline{A}$, como p es recubridora, existe un abierto regularmente recubierto O_x de B que contiene a x. Como $x \in \overline{A}$, se verifica que $\exists a \in O_x \cap A$. Como

O_x está regularmente recubierto, existe una familia de abiertos $\{A_i\}_{i\in I}$ de R de forma que:

$$p^{-1}(O_x) = \biguplus_{i\in I} A_i$$

tal que $p\big|_{A_i} : A_i \to O_a$ es un homeomorfismo $\forall i \in I$. Al igual que antes, para cada $y \in O_x$ podemos construir la aplicación $\Phi_y : I \to p^{-1}(y)$ de forma que a cada índice i le hace corresponder aquel elemento de A_i cuya imagen por x es y, obteniendo una aplicación biyectiva. Como $a \in O_x \cap A$, tenemos que $p^{-1}(a)$ tiene k elementos, por lo que I ha de tener k elementos, de donde deducimos que $p^{-1}(y)$ tiene k elementos, para todo $y \in O_x$. En particular, $x \in O_x$, de donde $p^{-1}(x)$ tiene k elementos, es decir, $x \in A$.

Ejercicio 1.2.8. Sean $p_1 : X \to Y$ y $p_2 : Y \to Z$ dos aplicaciones recubridoras. Prueba que si $p_2^{-1}(z)$ es finito para todo $z \in Z$, entonces $p_2 \circ p_1 : X \to Z$ es una aplicación recubridora.

Ejercicio 1.2.9. Consideremos una aplicación recubridora $p : R \to B$ y la relación de equivalencia $\mathcal{R}_p$ en R dada por

$$r_1\mathcal{R}_p r_2 \Longleftrightarrow p(r_1) = p(r_2)$$

Demuestra que $R/\mathcal{R}_p$ es homeomorfo a B.

Sabemos que p es continua y sobreyectiva. Además, el Ejercicio 1.2.6 nos die que p es abierta, por lo que p es una identificación, de donde si consideramos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \hat{p}: & R/\mathcal{R}_p & \longrightarrow & B \\ & [r] & \longmapsto & p(r) \end{array}$$

tenemos, por la teoría desarrollada en Topología I, que $\hat{p}$ está bien definida y es un homeomorfismo, con lo que $R/\mathcal{R}_p$ es homeomorfo a B.

Ejercicio 1.2.10. Sea $p : R \to B$ una aplicación recubridora, con R arcoconexo y B simplemente conexo. Prueba que p es un homeomorfismo.

Sabemos ya que p es continua, sobreyectiva y (por el Ejercicio 1.2.6) abierta, con lo que bastará probar que p es inyectiva:

Opción 1. Fijado cualquier $b \in B$, consideramos la correspondencia del levantamiento $\phi : \pi_1(B, b) \to p^{-1}(b)$. Como R es arcoconexo se ha visto en teoría que esta aplicación debe ser sobreyectiva, pero como B es simplemente conexo tenemos entonces que $\pi_1(B, b) = \{1\}$, por lo que $p^{-1}(b)$ solo puede contener un elemento, para todo $b \in B$, lo que implica que p es inyectiva.

Opción 2. Sean $x, y \in R$ con $p(x) = z = p(y)$, como R es arcoconexo existirá un arco $\alpha : [0, 1] \to R$ que une x con y, con lo que $p \circ \alpha$ es un arco uniendo $p(x)$ con $p(y)$, es decir, un lazo basado en z. Como B es simplemente conexo, ha de ser $[p \circ \alpha] = [\varepsilon_z]$.

Sea ahora $\beta : [0,1] \to R$ un levantamiento de ε_z, es decir, $p \circ \beta = \varepsilon_z$, queremos ver que β es un lazo trivial. Para ello, si existiera $t \in [0,1]$ de forma que $\beta(t) \notin p^{-1}(z)$, entonces $p(\beta(t)) \neq z = \varepsilon_z(t)$, con lo que β no sería un levantamiento de ε_z, por lo que ha de ser $\beta([0,1]) \subseteq p^{-1}(z)$. Queremos ver ahora que β es constante:

Opción 1. β es una aplicación de un conjunto conexo en $p^{-1}(z)$, que en el Ejercicio 1.2.5 vimos que tiene la topología discreta, con lo que β ha de ser constante.

Opción 2. Como p es una aplicación recubridora, z estará contenida en cierto abierto O_z de B regularmente recubierto, con lo que existe una familia de abiertos $\{A_i\}_{i\in I}$ de forma que:

$$p^{-1}(z) \in p^{-1}(O_z) = \biguplus_{i\in I} A_i$$

con $p\big|_{A_i} : A_i \to O_z$ homeomorfismo $\forall i \in I$. Supongamos ahora que $\exists s,t \in [0,1]$ de forma que $\beta(s) \neq \beta(t)$. Como $\beta(s) \in p^{-1}(z)$, supongamos que $\beta(s) \in A_i$, con lo que tomando:

$$U = A_i \cap \beta([0,1]), \qquad V = \biguplus_{j\in I\setminus\{i\}} (A_j \cap \beta([0,1]))$$

Tenemos que $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = \beta([0,1])$ y que U y V son abiertos de $\beta([0,1])$, por lo que $\beta([0,1])$ no es conexo, lo que contradice que β es continua y $[0,1]$ es conexo, contradicción que viene de suponer que existen $s,t \in [0,1]$ con $\beta(s) \neq \beta(t)$. En consecuencia, β es constante.

Ahora, si fijamos x como preimagen de z, sabemos que existen respectivamente únicos levantamientos de $p \circ \alpha$ y de ε_z que empiezan en x. Como $\alpha(0) = x$ y α es un levantamiento de $p \circ \alpha$, α es el levantamiento que buscamos para $p \circ \alpha$. Si ahora tomamos β aquel levantamiento de ε_z con $\beta(0) = x$, hemos probado anteriormente que β ha de ser constante, es decir, $\beta = \varepsilon_x$. Como además teníamos (por un resultado visto en teoría) que $[p \circ \alpha] = [\varepsilon_z]$, tendremos pues que $[\alpha] = [\varepsilon_x]$, de donde resulta que α ha de ser un lazo basado en x, por lo que $y = x$, de donde p es inyectiva, por lo que podemos concluir que p es un homeomorfismo.

Ejercicio 1.2.11. Dado un espacio topológico Y, prueba que estas afirmaciones son equivalentes:

a) Y es contráctil.

b) Para cualesquiera $f, g : X \to Y$ continuas se tiene que f y g son homotópicas.

c) Cada aplicación continua $f : X \to Y$ es nulhomótopa.

d) La identidad Id_Y es nulhomótopa.

e) Cada conjunto $\{y_0\}$ con $y_0 \in Y$ es un retracto de deformación de Y.

Probamos las implicaciones:

a) $\Longrightarrow$ *b*) Si Y es contráctil, entonces existen $y_0 \in Y$ y una aplicación continua $H : Y \times [0,1] \to Y$ de forma que:

$$H(y,0) = y, \qquad H(y,1) = y_0 \qquad \forall y \in Y$$

Sean $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas, definimos $H' : X \times [0,1] \to Y$ dada por:

$$H'(x,t) = \begin{cases} H(f(x), 2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ H(g(x), 2(1-t)) & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Y tenemos que:

- H' está bien definida en $1/2$, ya que:

$$H\left(f(x), 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = H(f(x), 1) = y_0 = H(g(x), 1) = H\left(g(x), 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

- H' es continua en $X \times [0, 1/2]$ y en $X \times [1/2, 1]$, como composición de funciones continuas. Como ambos son conjuntos cerrados, podemos aplicar el Lema del Pegado, para obtener que H' es continua.
- H' es una homotopía entre f y g, puesto que:

$$H'(x,0) = H(f(x),0) = f(x), \quad H'(x,1) = H(g(x),0) = g(x) \qquad \forall x \in X$$

b) $\Longrightarrow$ *c*) Para ver que cada aplicación continua $f : X \to Y$ es nulhomótopa (es decir, que es homotópica a una aplicación constante), como cualquier aplicación constante es continua tendremos que es homotópica a f.

c) $\Longrightarrow$ *d*) Id_Y es continua, luego nulhomótopa.

d) $\Longrightarrow$ *a*) Como Id_Y es nulhomótopa, existen $y_0 \in Y$ y $H : Y \times [0,1] \to Y$ de forma que:

$$H(y,0) = Id_Y(y) = y, \quad H(y,1) = y_0, \qquad \forall y \in Y$$

Por lo que $\{y_0\}$ es un retracto de deformación de Y, luego Y es contráctil.

Una vez tenemos que *a*), *b*), *c*) y *d*) son equivalentes:

b) $\Longrightarrow$ *e*) Dado $y_0 \in Y$, consideramos $Id_Y : Y \to Y$ y la aplicación $f_0 : Y \to Y$ constantemente igual a y_0, ambas continuas, luego son homotópicas, es decir, existe $H : Y \times [0,1] \to Y$ de forma que:

$$H(y,0) = Id_Y(y) = y, \quad H(y,1) = f_0(y) = y_0 \qquad \forall y \in Y$$

En otras palabras, tenemos que $\{y_0\}$ es retracto de deformación de Y.

e) $\Longrightarrow$ *a*) Trivial.

Ejercicio 1.2.12. Prueba que $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup ((K \cup \{0\}) \times [0,1]) \subset \mathbb{R}^2$ es contráctil, donde $K = \left\{\frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}\right\}$.

Tenemos el conjunto de la Figura 1.3

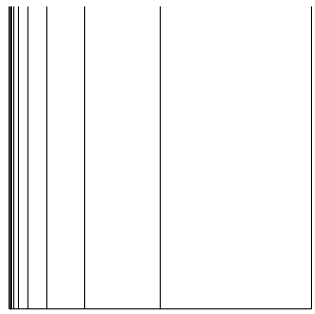


Figura 1.3: Conjunto X.

Si consideramos la aplicación $H : X \times [0,1] \to X$ dada por:

$$H((x,y),t) = \begin{cases} (x, (1-2t)y) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ (2(1-t)x, 0) & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Tenemos que:

- H está bien definida, pues:

$$\left(x, \left(1 - \frac{1/2}{2}\right) y\right) = (x, (1-1)y) = (x, 0) = \left(2\left(1 - \frac{1}{2}\right) x, 0\right)$$

- H es claramente continua en $X \times [0, 1/2]$ y en $X \times [1/2, 1]$, por lo que por el Lema del Pegado obtenemos que H es continua.
- H cumple que:

$$H((x,y),0) = (x,y), \quad H((x,y),1) = (0,0) \qquad \forall (x,y) \in X$$

Por lo que hemos probado que $\{(0,0)\}$ es retracto de deformación de X, luego X es contráctil.

Ejercicio 1.2.13. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función continua. Definimos el conjunto:

$$S_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (f(z))^2\right\}$$

a) Estudia el conjunto $S_f \cap \{z = z_0\}$ con $z_0 \in \mathbb{R}$.

Fijado $z_0 \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$S_f \cap \{z = z_0\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (f(z_0))^2\right\}$$

que se trata de una circunferencia de centro $(0,0,z_0)$ y de radio $f(z_0)$. Podemos interpretar S_f como el sólido de revolución obtenido a partir de la gráfica de f.

b) Demuestra que cualesquiera dos conjuntos S_f son homeomorfos entre sí.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función continua, consideramos $\Phi : S_f \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dada por:

$$\Phi(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right)$$

Así como la aplicación $\Psi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to S_f$ dada por:

$$\Psi(x, y, z) = (f(z)x, f(z)y, z)$$

Es claro que Φ y Ψ son continuas, así como que:

$$\begin{aligned}
&\Phi(\Psi(x, y, z)) = \Phi(f(z)x, f(z)y, z) = \\
&= \left(\frac{f(z)x}{\sqrt{(f(z)x)^2 + (f(z)y)^2}}, \frac{f(z)y}{\sqrt{(f(z)x)^2 + (f(z)y)^2}}, z \right) \\
&= \left(\frac{f(z)x}{\sqrt{(f(z))^2(x^2 + y^2)}}, \frac{f(z)y}{\sqrt{(f(z))^2(x^2 + y^2)}}, z \right) = \left(\frac{f(z)x}{\sqrt{(f(z))^2}}, \frac{f(z)y}{\sqrt{(f(z))^2}}, z \right) \\
&= \left(\frac{f(z)x}{f(z)}, \frac{f(z)y}{f(z)}, z \right) = (x, y, z) \qquad \forall (x, y, z) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\
&\Psi(\Phi(x, y, z)) = \Psi\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right) = \left(\frac{f(z)x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{f(z)y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right) = (x, y, z) \qquad \forall (x, y, z) \in S_f
\end{aligned}$$

Por lo que Φ es un homeomorfismo.

c) Calcula el grupo fundamental de S_f.

Dado $(x, y, z) \in S_f$, el homeomorfismo Φ anterior induce un isomorfismo:

$$\Phi_* : \pi_1(S_f, (x, y, z)) \to \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \Phi(x, y, z))$$

Y como $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \Phi(x, y, z)) \cong \mathbb{Z}$, tenemos que $\pi_1(S_f, (x, y, z)) \cong \mathbb{Z}$.

Ejercicio 1.2.14. Prueba que $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. ¿Son del mismo tipo de homotopía?

Por reducción al absurdo, si $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ fuera homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, existiría un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$, por lo que la restricción de f $f|_{(\mathbb{R} \times [0,+\infty[) \setminus \{(0,0)\}} : (\mathbb{R} \times [0, +\infty[) \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{f(0, 0)\}$ seguiría siendo un homeomorfismo, que induciría un isomorfismo entre sus grupos fundamentales.

Sin embargo, $(\mathbb{R} \times [0, +\infty[) \setminus \{(0, 0)\}$ es un conjunto estrellado, luego es simplemente conexo y $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0, 0)\}$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, que tiene $\mathbb{Z}$ como grupo fundamental, por lo que no pueden ser homeomorfos, contradicción que viene de suponer la que $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ y $\mathbb{R}^2$ son homeomorfos.

Sí son del mismo tipo de homotopía. Para verlo, veamos que $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ es un retracto de deformación de $\mathbb{R}^2$, ya que definiendo $H : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$H((x, y), t) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[\\ (x, (1-t)y) & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 0] \end{cases}$$

Tenemos que:

- H está bien definida, puesto que:

$$(x, 0) = (x, (1-t)0), \qquad \forall t \in [0, 1]$$

- H es continua, puesto que es continua en los cerrados $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times [0, 1]$, $\mathbb{R} \times]-\infty, 0] \times [0, 1]$, luego podemos aplicar el Lema del Pegado.
- Se verifica que:

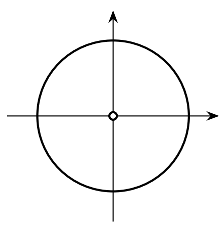
$$H((x, y), 0) = (x, y), \quad H((x, y), 1) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[\,, \quad H((a, b), 1) = (a, b)$$
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$$

Por lo que $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ es retracto de deformación de $\mathbb{R}^2$ para $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ dada por $r(x, y) = H((x, y), 1)$, que induce un isomorfismo entre grupos fundamentales $r_* : \pi_1(\mathbb{R}^2, (x, y)) \to \pi_1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[\,, r(x, y)) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, luego $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ y $\mathbb{R}^2$ son del mismo tipo de homotopía.

Ejercicio 1.2.15. Sea S un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $k \leqslant n - 2$. Calcula $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus S)$.

Estudiemos ejemplos particulares para obtener intuición:

- Para $n = 2$, si S es un subespacio afín de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 0 (S se reduce a un punto), entonces:
$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus S) \cong \mathbb{Z}$$
Ya que $\mathbb{R}^2 \setminus S \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y este último tiene por retracto de deformación a $\mathbb{S}^1$.



- Para $n = 2$, si S es un subespacio afín de $\mathbb{R}^3$ de dimensión:
  - $dimS = 0$, entonces:
  $$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S) = \{1\}$$
  Ya que $\mathbb{R}^3 \setminus S \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ y este último tiene por retracto de deformación a $\mathbb{S}^2$.

- $dimS = 1$, entonces:
$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S) \cong \mathbb{Z}$$
Ya que $\mathbb{R}^3 \setminus S$ tiene por retracto de deformación un conjunto homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Comenzando ahora la prueba formal, sea S un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $k \leqslant n-2$, tenemos entonces que S es homeomorfo al subespacio afín $\mathcal{S}$, dado por las ecuaciones[2]:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-k} = 0 \end{cases}$$

De esta forma, tenemos que:

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S} = (\mathbb{R}^{n-k} \setminus \{(0,0,\ldots,0)\}) \times \mathbb{R}^k$$

Por lo que:

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus S) = \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}) = \pi_1\left(\mathbb{R}^{n-k} \setminus \{(0,0,\ldots,0)\}\right) \times \pi_1(\mathbb{R}^k) \cong \pi_1\left(\mathbb{R}^{n-k} \setminus \{(0,0,\ldots,0)\}\right)$$

Y tenemos que:

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus S) \cong \pi_1\left(\mathbb{R}^{n-k} \setminus \{(0,\ldots,0)\}\right) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n-k = 2 \\ \{1\} & \text{si } n-k > 2 \end{cases}$$

Ejercicio 1.2.16. Prueba que si X es de Hausdorff y $A \subseteq X$ es un retracto de X, entonces A es cerrado en X. Deduce que una bola abierta en $\mathbb{R}^n$ no es un retracto de $\mathbb{R}^n$. ¿Lo es una bola cerrada?

Para probar que A es cerrado, veamos que $X \setminus A$ es abierto. Para ello, sea $x \in X \setminus A$, tendremos entonces que $a = r(x) \neq x$. Como X es de Hausdorff, podemos encontrar abiertos U_x, U_a con:

$$x \in U_x, \qquad a \in U_a, \qquad U_x \cap U_a = \emptyset$$

Si consideramos $W = U_x \cap r^{-1}(U_a)$, tenemos que W es abierto como intersección de dos abiertos, así como que $x \in W$. Si existiera $b \in W \cap A$, tendríamos entonces que $b \in U_x \cap r^{-1}(U_a) \cap A$, por lo que:

$$U_x \ni b = r(b) \in U_a \Longrightarrow b \in U_x \cap U_a$$

<u>contradicción</u> que viene de suponer que $W \cap A \neq \emptyset$, luego $x \in W \subseteq X \setminus A$, de donde $X \setminus A$ es abierto.

Sea $B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ una bola abierta para ciertos puntos $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^+$, esta no puede ser un retracto de $\mathbb{R}^n$ puesto que no es cerrada, ya que si tomamos como t_n una sucesión de puntos del intervalo $[0, r[$ convergente a r (por ejemplo $r - \frac{1}{n}$), tenemos entonces que $\left\{x + \frac{x}{\|x\|}t_n\right\}$ es una sucesión de puntos de $B(x,r)$:

$$\left\| x + \frac{x}{\|x\|}t_n - x \right\| = \frac{t_n\|x\|}{\|x\|} = t_n < r$$

[2]Como es de dimensión k en $\mathbb{R}^n$ ha de tener $n-k$ ecuaciones.

convergente a $x + r\frac{x}{\|x\|}$, con:

$$\left\| x + r\frac{x}{\|x\|} - x \right\| = \frac{r\|x\|}{\|x\|} = r \Longrightarrow x + r\frac{x}{\|x\|} \notin B(x,r)$$

Sea ahora $\overline{B}(x,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ una bola cerrada para ciertos puntos $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^+$, podemos construir la aplicación $r : \mathbb{R}^n \to \overline{B}(x,r)$ dada por:

$$r(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in \overline{B}(x,r) \\ c(y) & \text{si } y \in \mathbb{R}^n \setminus B(x,r) \end{cases}$$

donde $c(y)$ es la aplicación que a cada punto y le hace corresponder aquel punto de la semirrecta con origen en x y que pasa por y con módulo r. En teoría vimos en un ejemplo parecido que la aplicación c era continua, por lo que aplicando el Lema del Pegado vemos que r es continua, así como que:

$$r(y) = y \qquad \forall y \in \overline{B}(x,r)$$

por lo que $\overline{B}(x,r)$ es un retracto de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 1.2.17. En este ejercicio demostraremos que *un abierto de* $\mathbb{R}^2$ *no puede ser homeomorfo a un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *si* $n \geqslant 3$. Supongamos que $f : U \to V$ es un homeomorfismo entre abiertos no vacíos $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^2$ con $n \geqslant 3$.

a) Prueba que existen bolas abiertas $B_1 \subset U$ y $B_2, B_2' \subset V$ (estas últimas con el mismo centro $y_0 \in \mathbb{R}^2$) tales que $\overline{B_2'} \subset f(\overline{B_1}) \subset \overline{B_2}$.

b) Si $i : \overline{B_2'} \setminus \{y_0\} \to \overline{B_2} \setminus \{y_0\}$ es la inclusión, deduce de *a*) que el homomorfismo inducido en cualquier punto i_* es trivial.

c) Prueba que $\overline{B_2'} \setminus \{y_0\}$ es un retracto de deformación de $\overline{B_2} \setminus \{y_0\}$. Concluye que i_* es un isomorfismo no trivial, lo que contradice *b*).

Solución.

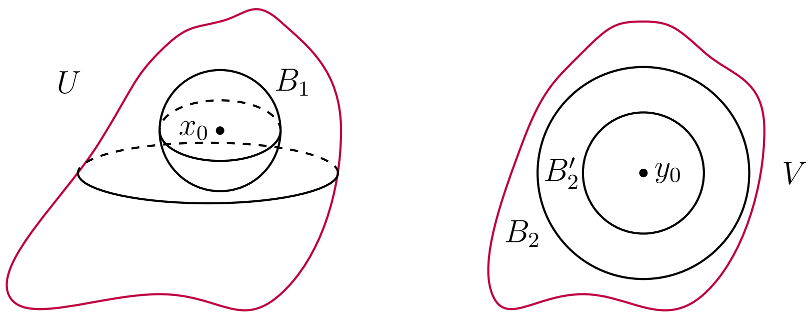
a) Prueba que existen bolas abiertas $B_1 \subset U$ y $B_2, B_2' \subset V$ (estas últimas con el mismo centro $y_0 \in \mathbb{R}^2$) tales que $\overline{B_2'} \subset f(\overline{B_1}) \subset \overline{B_2}$.

   Fijado cualquier $y_0 \in V$, como V es abierto ha de existir una bola abierta B_2 centrada en y_0 y contenida en V. Si consideramos $x_0 = f^{-1}(y_0)$, como f es continua el conjunto $f^{-1}(B_2)$ será también abierto, con $x_0 \in f^{-1}(B_2)$, por lo que ha de existir una bola abierta B_1 centrada en x_0 y contenida en $f^{-1}(B_2)$. Como f es continua, ha de cumplirse que:

$$f(\overline{B_1}) \subseteq \overline{f(B_1)} \subseteq \overline{B_2}$$

   Si consideramos ahora $f(B_1)$, como B_1 estaba centrada en x_0 tenemos que $y_0 \in f(B_1)$ y como f es una aplicación abierta por ser un homeomorfismo, $f(B_1)$ será también un conjunto abierto, por lo que podemos encontrar una bola abierta B_2' centrada en y_0 y de modo que:

$$\overline{B_2'} \subseteq f(B_1) \subseteq f(\overline{B_1})$$



b) Si $i : \overline{B_2'} \setminus \{y_0\} \to \overline{B_2} \setminus \{y_0\}$ es la inclusión, deduce de *a*) que el homomorfismo inducido en cualquier punto i_* es trivial.

Opción 1. Fijado $z_0 \in \overline{B_2'} \setminus \{y_0\}$, consideramos un lazo $\alpha \in \Omega(\overline{B_2'} \setminus \{y_0\})$ y consideramos el lazo $f^{-1} \circ \alpha$, que está basado en $f^{-1}(z_0)$ y cumple que:

$$Im(f^{-1} \circ \alpha) \subseteq f^{-1}(\overline{B_2'} \setminus y_0) \subseteq \overline{B_1} \setminus \{x_0\}$$

Como $\pi_1(\overline{B_1} \setminus \{x_0\}, f^{-1}(z_0))$ es trivial (por tener $\overline{B_1} \setminus \{x_0\}$ un retracto de deformación homeomorfo a $\mathbb{S}^n$) tenemos entonces que $[f^{-1} \circ \alpha] = [\varepsilon_{f^{-1}(z_0)}]$, por lo que existe una homotopía por arcos H de forma que:

$$H(t,0) = f^{-1}(z_0), \qquad H(t,1) = (f^{-1} \circ \alpha)(t) \qquad \forall t \in [0,1]$$

Finalmente, observamos que $f \circ f^{-1} \circ \alpha = \alpha$ y que $f \circ H$ es una homotopía que cumple:

$$(f \circ H)(t,0) = z_0, \qquad (f \circ H)(t,1) = \alpha(t) \qquad \forall t \in [0,1]$$

Con:

$$Im(f \circ H) \subseteq f(\overline{B_1} \setminus \{x_0\}) \subseteq \overline{B_2} \setminus \{y_0\}$$

Por lo que $i_*([\alpha]) = [\alpha]_{\overline{B_2} \setminus \{y_0\}} = [\varepsilon_{z_0}]$.

Opción 2. Como $\overline{B_2'} \setminus \{y_0\} \subseteq f(\overline{B_1}) \setminus \{x_0\}$, podemos considerar:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \overline{B_2'} \setminus \{y_0\} & \longrightarrow & \overline{B_1} \setminus \{x_0\} \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) \end{array}$$

que será una aplicación continua, como restricción de $f^{-1} : V \to U$ en dominio y codominio. Análogamente, como $f(\overline{B_1}) \setminus \{x_0\} \subseteq \overline{B_2'} \setminus \{y_0\}$, podemos considerar:

$$\begin{array}{rrcl} \phi : & \overline{B_1} \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \overline{B_2} \setminus \{y_0\} \\ & y & \longmapsto & f(y) \end{array}$$

que también será una aplicación continua, como restricción de f en dominio y codominio. Observamos que de esta forma tenemos:

$$\phi(\varphi(x)) = \phi(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(x)) = x = i(x) \qquad \forall x \in \overline{B_2'} \setminus \{y_0\}$$

Por lo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\overline{B_2'} \setminus \{y_0\} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, hook, bend right, "i"'] & \overline{B_1} \setminus \{x_0\} \arrow[r, "\phi"] & \overline{B_2} \setminus \{y_0\}
\end{tikzcd}$$

Si inducimos ahora el diagrama a grupos fundamentales para un punto $z_0 \in \overline{B_2'} \setminus \{y_0\}$ arbitrario, obtenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\overline{B_2'} \setminus \{y_0\}, z_0) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[rr, hook, bend right, "i_*"'] & \pi_1(\overline{B_1} \setminus \{x_0\}, \varphi(z_0)) \arrow[r, "\phi_*"] & \pi_1(\overline{B_2} \setminus \{y_0\}, z_0)
\end{tikzcd}$$

Y como $\pi_1(\overline{B_1} \setminus \{x_0\}, \varphi(z_0))$ es trivial por tener $\overline{B_1} \setminus \{x_0\}$ un retracto de deformación homeomorfo a $\mathbb{S}^n$, obtenemos por tanto que i_* es trivial.

c) Prueba que $\overline{B_2'} \setminus \{y_0\}$ es un retracto de deformación de $\overline{B_2} \setminus \{y_0\}$. Concluye que i_* es un isomorfismo no trivial, lo que contradice b).

Supuesto que $\overline{B_2'} \setminus \{y_0\}$ es una bola cerrada punteada[3] de radio $r \in \mathbb{R}^+$, podemos definir la aplicación $H : (\overline{B_2} \setminus \{y_0\}) \times [0,1] \to \overline{B_2} \setminus \{y_0\}$ dada por:

$$H(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \overline{B_2'} \setminus \{y_0\} \\ (1-t)x + tr \cdot \frac{x}{\|x\|_2} & \text{si } x \notin \overline{B_2'} \setminus \{y_0\} \end{cases}$$

Que es continua y verifica:

$$H(x,0) = x, \qquad H(x,1) \in \overline{B_2'} \setminus \{y_0\} \qquad \forall x \in \overline{B_2} \setminus \{y_0\}$$
$$H(y,1) = y \qquad \forall x \in \overline{B_2'} \setminus \{y_0\}$$

Por tanto, el grupo fundamental de $\overline{B_2'} \setminus \{y_0\}$ coincide (en cualquier punto z_0) con el grupo fundamental de $\overline{B_2} \setminus \{y_0\}$, lo que contradice que i_* sea trivial.

Ejercicio 1.2.18. Demuestra que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - \operatorname{arc\,tg}(x^2 - y^3) = 2 \\ \cos(x) + \operatorname{sen}(xy^3) + e^x + e^{y^2} + \dfrac{1}{y} = -5 \end{cases}$$

tiene al menos una solución en $\mathbb{R}^2$.

Si llamamos a dicho sistema de ecuaciones por $(*)$, vemos que este es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones (al que llamamos $(**)$) cuando $y \neq 0$:

$$\begin{cases} x = 2 + \operatorname{arc\,tg}(x^2 - y^3) \\ y = \dfrac{-1}{5 + \cos(x) + \operatorname{sen}(xy^3) + e^x + e^{y^2}} \end{cases}$$

[3]Es decir, a la que hemos quitado el centro

Definimos $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$F(x,y) = \left(2 + \operatorname{arc\,tg}(x^2 - y^3), \frac{-1}{5 + \cos(x) + \operatorname{sen}(xy^3) + e^x + e^{y^2}}\right)$$

Observemos que el denominador de la segunda componente no se anula, ya que $e^x, e^{y^2} > 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ así como que $5 + \cos(x) + \operatorname{sen}(xy^3) > 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por ser $|\cos(x)|, |\operatorname{sen}(xy^3)| \leqslant 1$. Por tanto, tenemos que F es continua, ya que cada una de sus componentes es una función continua.

Ahora, fijado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si escribimos $F = (F_1, F_2)$, tenemos que $|F_1(x,y)| \leqslant 2 + \frac{\pi}{2}$, así como que $|F_2(x,y)| < 1/3$, por lo que deducimos que F está acotada, es decir, existe $R \in \mathbb{R}^+$ de forma que:

$$\|F(x,y)\|_2 \leqslant R \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Por lo que podemos considerar la aplicación restringida $\tilde{F} : \overline{B}(0,R) \to \overline{B}(0,R)$ dada por $\tilde{F}(x) = F(x)$. Si aplicamos el Teorema del Punto fijo de Brouwer, obtenemos que existe $(x_0, y_0) \in \overline{B}(0,R)$ de forma que:

$$\tilde{F}(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$$

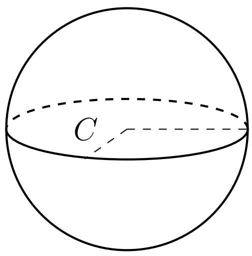
Por lo que hemos encontrado una solución al sistema $(**)$. Más aún, observemos que como $F_2(x_0, y_0) < 0$ debe ser $y_0 < 0$, en particular $y_0 \neq 0$, por lo que (x_0, y_0) tamién es solución del sistema $(*)$.

Ejercicio 1.2.19. Sean M una matriz cuadrada real de orden 3 por 3 cuyas entradas son números reales positivos y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal $f(v) = Mv$. Demuéstrese que:

a) El conjunto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : x,y,z \geqslant 0\}$ es homeomorfo al disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$.

Es decir, queremos probar que la parte de la esfera $\mathbb{S}^2$ que se encuentra en el primer octante es homeomorfo a $\overline{\mathbb{D}}$. Para ello, lo que haremos primero será considerar el conjunto:

$$C = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,0)\|_2 \leqslant 1 \ \wedge \ x,y \geqslant 0\}$$



Y vemos que si consideramos la función que a cada punto de C le asigna la altura de la esfera en la parte superior:

$$\begin{array}{rccc} F: & C & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{array}$$

Tenemos que $A = Gr(F)$, con F una función continua, por lo que A y C son homeomorfos. Finalmente tenemos que probar que C y $\overline{\mathbb{D}}$ son homeomorfos. Para ello, es sencillo dar primero un homeomorfismo $h : \delta C \to \mathbb{S}^1$ (hágase). Ahora, fijado $p_0 \in C^\circ$ cada punto $c \in C$ puede expresarse como:

$$c = (1-t)p_0 + tx$$

para cierto $t \in [0,1]$ y $x \in \delta C$. Podemos hacer corresponder dicho punto mediante una aplicación $p : C \to \overline{\mathbb{D}}$ a:

$$c = (1-t)p_0 + tx \longmapsto (1-t)\cdot 0 + th(x) = th(x)$$

es claro que p es continua y biyectiva, y como va de un conjunto cerrado a un Hausdorff será también una aplicación cerrada, por lo que p es un homeomorfismo.

b) La aplicación $g : A \to \mathbb{S}^2$ dada por $g(v) = \frac{f(v)}{|f(v)|}$ está bien definida y $g(A) \subset A$.

Recordamos que según el enunciado tenemos que $f(v) = Mv$ con $M = (m_{i,j})_{i,j}$ de forma que $m_{i,j} > 0$ para $i,j \in \{1,2,3\}$. Dado $v \in A$, tendremos que $v = (v_1, v_2, v_3)$ con $v_1, v_2, v_3 \geqslant 0$. De esta forma, podemos obtener $f(v)$ calculando:

$$f(v) = Mv = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1}v_1 + m_{1,2}v_2 + m_{1,3}v_3 \\ m_{2,1}v_1 + m_{2,2}v_2 + m_{2,3}v_3 \\ m_{3,1}v_1 + m_{3,2}v_2 + m_{3,3}v_3 \end{pmatrix}$$

Observamos que para obtener $f(v) = 0$ tendríamos que tener (como $m_{i,j} > 0$ y $v_1, v_2, v_3 \geqslant 0$) que $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, pero como $v \in A \subseteq \mathbb{S}^2$ dicha situación es imposible, por lo que el denominador de la función g nunca se anula. Más aún, $|g(v)| = 1$ para todo $v \in A$, por lo que g está bien definida.

Finalmente, similar a lo que hemos comentado ya, como $m_{i,j} > 0$ para todo $i,j \in \{1,2,3\}$ y $v_1, v_2, v_3 \geqslant 0$ tendremos por tanto (observando las cuentas que hacemos para calcular $f(v)$) que $f(v) \in A$.

c) f tiene un valor propio real y positivo.

Usando el apartado *b*) tenemos que podemos restringir g en codominio, obteniendo una aplicación continua $g : A \to A$. Si usamos el apartado *a*), existe $h : \overline{\mathbb{D}} \to A$ homeomorfismo, con lo que la aplicación $h^{-1} \circ g \circ h : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ es continua. Por el Teorema del punto fijo de Brouwer, existe $x_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ de forma que:

$$(h^{-1} \circ g \circ h)(x_0) = x_0 \quad \Longrightarrow \quad g(h(x_0)) = h(x_0)$$

Por lo que tomando $z_0 = h(x_0) \in A$ obtenemos que:

$$\frac{f(z_0)}{|f(z_0)|} = g(z_0) = z_0 \quad \Longrightarrow \quad f(z_0) = |f(z_0)| \cdot z_0$$

De esta forma, hemos probado que $|f(z_0)|$ es un valor propio real y positivo de f.

Ejercicio 1.2.20. Teorema de Lusternik-Schnirelmann. Demuestra que si $\mathbb{S}^2$ es la unión de tres subconjuntos cerrados C_1, C_2, C_3, entonces alguno de ellos contiene dos puntos antípodas. Para ello prueba que la función $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x) = (dist(x, C_1), dist(x, C_2))$$

tiene un punto $x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$, donde $dist(\cdot, \cdot)$ denota la función distancia en $\mathbb{R}^3$.

Sean C_1, C_2, C_3 tres subconjuntos cerrados de $\mathbb{S}^2$ tales que:

$$C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \mathbb{S}^2$$

definimos la aplicación $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(x) = (dist(x, C_1), dist(x, C_2) \qquad \forall x \in \mathbb{S}^2$$

donde[4]:

$$dist(x, C_i) = \min\{d(x, c) : c \in C_i\} \qquad i \in \{1, 2, 3\}$$

como cada aplicación $x \mapsto dist(x, C_i)$ es continua, tenemos que la aplicación f es continua, y si aplicamos el Teorema de Borsuk-Ulam tenemos que $\exists x_0 \in \mathbb{S}^2$ de forma que:

$$(dist(x_0, C_1), dist(x_0, C_2)) = f(x_0) = f(-x_0) = (dist(-x_0, C_1), dist(-x_0, C_2))$$

de donde:

$$dist(x_0, C_1) = dist(-x_0, C_1), \qquad dist(x_0, C_2) = dist(-x_0, C_2)$$

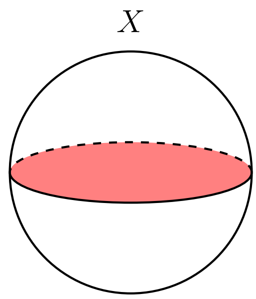
distinguimos casos:

- Si $dist(x_0, C_1), dist(x_0, C_2) > 0$, tenemos entonces que tanto x_0 como $-x_0$ están en C_3.
- Si $dist(x_0, C_1) = 0$, tenemos que $x_0, -x_0 \in C_1$.
- Si $dist(x_0, C_2) = 0$, tenemos que $x_0, -x_0 \in C_2$.

Ejercicio 1.2.21. Calcula $\pi_1(X)$ en los siguientes casos:

a) $X = \mathbb{S}^2 \cup (\mathbb{D} \times \{0\})$.

Tenemos el conjunto de la Figura:



[4]Observemos que cada C_i es compacto en $\mathbb{R}^3$.

Si tomamos los conjuntos:

$$U = X \setminus \{(0,0,1)\}, \qquad V = X \setminus \{(0,0,-1)\}$$

Tenemos que:

- Claramente $X = U \cup V$.
- U y V son abiertos, ya que como estamos trabajando en un espacio métrico, los conjuntos unitarios son cerrados.
- Es claro que U es homeomorfo a V (basta considerar una rotación), y tenemos que U es la unión de $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$, que es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ luego arcoconexo, con $\mathbb{D} \times \{0\}$, que claramente es arcoconexo, y estos dos conjuntos se cortan en al menos un punto (como por ejemplo el $(1,0,0)$), por lo que U es arcoconexo y V también por ser homeomorfo a V.
- $U \cap V$ es arcoconexo, ya que puede verse como la unión de los conjuntos:

  $$(\mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+)) \cup \mathbb{D} \times \{0\}, \qquad (\mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^-)) \cup \mathbb{D} \times \{0\}$$

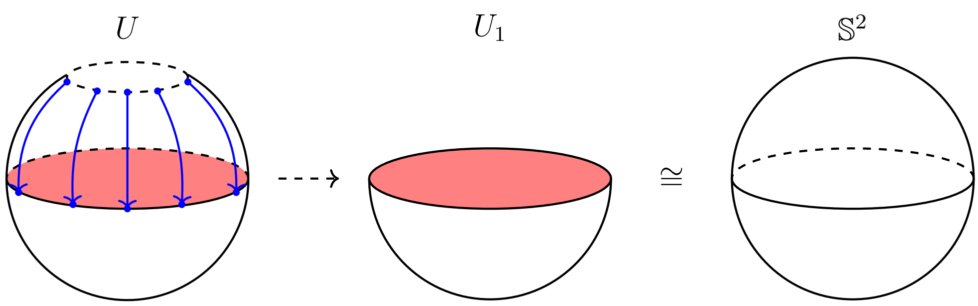
  Ambos homeomorfos a $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$, que es arcoconexo, por lo que los dos conjuntos son arcoconexos y su unión también lo es, pues su intersección es $\mathbb{D} \times \{0\}$, que es arcoconexo.

Ahora, vemos que:

- Los grupos fundamentales de U y de V coinciden, pues ambos son homeomorfos.
- U tiene como retracto de deformación el conjunto:

  $$U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : z \leqslant 0\} \cup (\mathbb{D} \times \{0\})$$

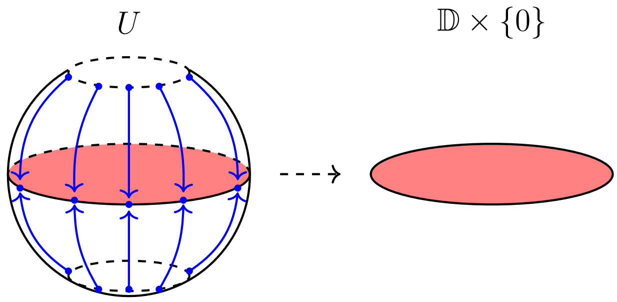
  Que es homeomofo a $\mathbb{S}^2$:

  Por lo que:

  $$\pi_1(V) = \pi_1(U) = \pi_1(U_1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^2) \cong \{1\}$$

- Finalmente (aunque ya tenemos suficiente para aplicar el Teorema), tenemos que $U \cap V$ tiene como retracto de deformación a $\mathbb{D} \times \{0\}$:



que es simplemente conexo, por lo que:

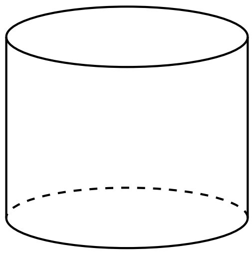
$$\pi_1(U \cap V) = \{1\}$$

En consecuecia, aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen, llegamos a que:

$$\pi_1(X) = \{1\}$$

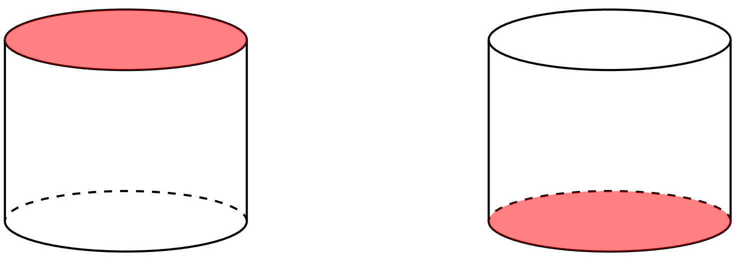
b) $X = (\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]) \cup (\mathbb{D} \times \{-1, 1\})$.

Tenemos el conjunto:



Si consideramos los conjuntos:

$$U = X \setminus (\mathbb{D} \times \{1\}), \qquad V = X \setminus (\mathbb{D} \times \{-1\})$$



Tenemos que:

- Claramente $X = U \cup V$.
- U y V son abiertos, pues $(\mathbb{D} \times \{p\})$ es siempre un conjunto cerrado, como producto de cerrados.
- U, V y $U \cap V$ son claramente[5] arcoconexos.

[5]Habría que justificarlo mejor en un examen.

- U tiene a $\mathbb{D}\times\{-1\}$ como retracto de deformación, por lo que $\pi_1(U) = \{1\}$.
- V tiene a $\mathbb{D}\times\{1\}$ como retracto de deformación, por lo que $\pi_1(V) = \{1\}$.

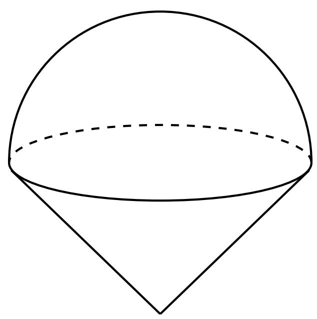
Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen, como $\pi_1(U) = \{1\} = \pi_1(V)$, obtenemos que $\pi_1(X) = \{1\}$.

c) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (z + 1)^2, -1 \leqslant z \leqslant 0\} \cup (\mathbb{S}^2 \cap \{z \geqslant 0\})$.

Tratamos de averiguar primero qué conjunto X nos están dando:

- Está claro que la segunda parte de la unión es la "cáscara" superior de la esfera de $\mathbb{R}^3$.
- Para el primer conjunto de la unión, vemos que a altura z tenemos la circunferencia de centro 0 y radio $|z + 1|$, por lo que podemos pensar en que este conjunto es un cono. Observamos que $|z + 1| = 0 \iff z = -1$, con lo que este primer conjunto es el cono desplazado una unidad hacia los valores negativos de z.

En definitiva, la figura dada es similar a:



Si tomamos ahora:

$$U = X \setminus \{(0, 0, 1)\}, \qquad V = X \setminus \{(0, 0, -1)\}$$

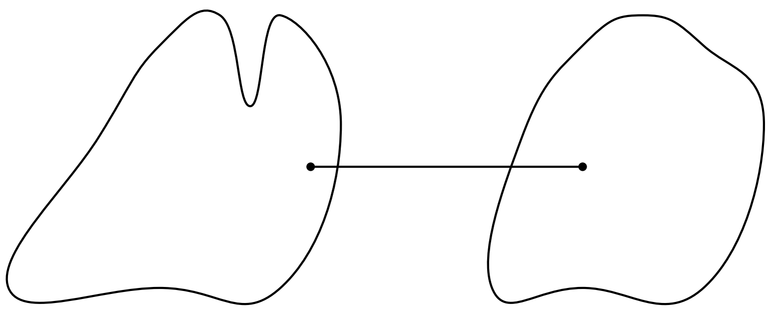
Tenemos que:

- Claramente $X = U \cup V$ y U, V son abiertos.
- U, V y $U \cap V$ son claramente arcoconexos.
- U tiene a $(\{0, 0, -1\})$ como retracto de deformación, por lo que U es simplemente conexo.
- V tiene a $(\{0, 0, 1\})$ como retracto de deformación, por lo que V es simplemente conexo.

Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen tenemos que X es simplemente conexo.

d) $X = S_1 \cup S_2 \cup L$, donde S_1, S_2 son cerrados disjuntos simplemente conexos de $\mathbb{R}^n$ y $L \subset \mathbb{R}^n$ es un segmento tal que $L \cap S_i = \{x_i\}$, $i = 1, 2$.

Podemos imaginar que tenemos un conjunto similar a:



Si consideramos:

$$U = X \setminus S_2, \qquad V = X \setminus S_1$$

Tenemos que:

- Claramente $U \cup V = X$.
- U y V son abiertos, ya que S_2 y S_1 son cerrados.
- U es arcoconexo, pues S_1 y L son arcoconexos (el primero por ser arcoconexo y el segundo por ser imagen por una función continua de un conjunto arcoconexo) que se intersecan en x_1. Análogamente, se prueba que V es arcoconexo.
- Tenemos que $U \cap V = L \setminus \{x_1, x_2\}$, que claramente es simplemente conexo.
- U tiene a S_1 como retracto de deformación, por lo que:

$$\pi_1(U) = \pi_1(S_1) = \{1\}$$

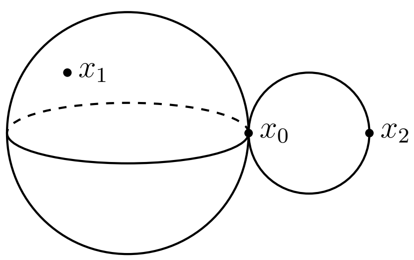
- Análogamente V tiene a S_2 como retracto de deformación, por lo que:

$$\pi_1(V) = \pi_1(S_2) = \{1\}$$

Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen obtenemos que $\pi_1(X) = \{1\}$.

e) $X \subset \mathbb{R}^3$ es la unión de una circunferencia y de una esfera que se tocan en un único punto.

Si consideramos $X = S \cup C$ con S una esfera de $\mathbb{R}^3$, C una circunferencia de $\mathbb{R}^3$ y $S \cap C = \{x_0\}$:



Si consideramos:

$$U = X \setminus \{x_1\}, \quad x_1 \in S \setminus \{x_0\}$$
$$V = X \setminus \{x_2\}, \quad x_2 \in C \setminus \{x_0\}$$

Tenemos que:

- Claramente $X = U \cup V$ y U, V son abiertos.
- U es arcoconexo, como unión de $S \setminus \{x_1\}$, que es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ luego es arcoconexo, y de C. Notemos que $(S \setminus \{x_1\}) \cap C = \{x_0\}$.
- V es arcoconexo, como unión de S, que es arcoconexo con cada uno de los arcos que unen x_0 con x_2 (abiertos en x_2), cada uno de ellos es arcoconexo e intersecan a S en x_0.
- $U \cap V$ es arcoconexo, como unión de $S \setminus \{x_1\}$ con cada uno de los arcos, ya que todos ellos se intersecan en $\{x_0\}$.
- U tiene a C como retracto de deformación, por lo que:

$$\pi_1(U) = \pi_1(C) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

- V tiene a S como retracto de deformación, por lo que:

$$\pi_1(V) = \pi_1(S) \cong \pi_1(\mathbb{S}^2) = \{1\}$$

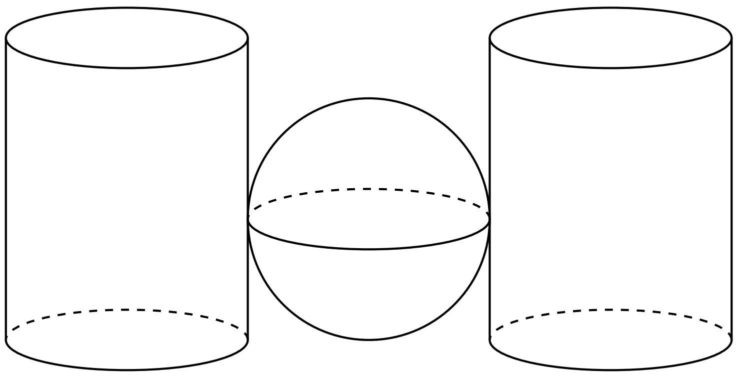
- $U \cap V$ tiene a $\{x_0\}$ como retracto de deformación, por lo que es simplemente conexo.

Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen obtenemos que:

$$\pi_1(X) = \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \mathbb{Z} * \{1\} = \mathbb{Z}$$

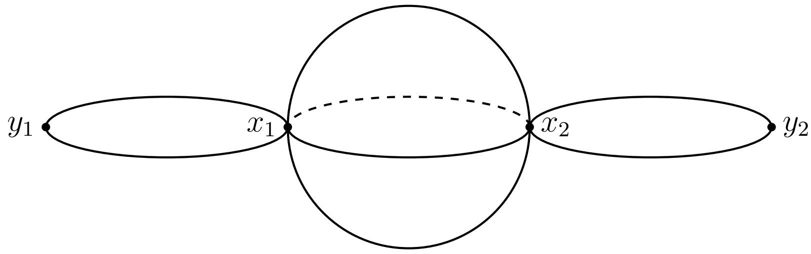
f) $X = \mathbb{S}^2 \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + (z-2)^2 = 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + (z+2)^2 = 1\}$.

X está compuesto por la unión de la esfera de $\mathbb{R}^3$ junto con dos cilindros de radio 1 a lo largo del eje x (tienen altura infinita), de forma que cada cilindro tiene un único punto de intersección con la esfera.



En primer lugar, observamos que un retracto de deformación de X es el conjunto Y:

$$Y = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + (z-2)^2 = 1\} \cup \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + (z+1)^2 = 1\} \cup \mathbb{S}^2$$



Si nombramos a cada una circunferencia C_1 y a la otra C_2 tendremos entonces que:

$$Y = C_1 \cup C_2 \cup \mathbb{S}^2, \qquad C_1 \cap \mathbb{S}^2 = \{x_1\}, \qquad C_2 \cap \mathbb{S}^2 = \{x_2\}$$

En este punto, consideramos los conjuntos:

$$U = X \setminus \{y_2\}, \quad y_2 \in C_2 \setminus \{x_2\}$$
$$V = X \setminus \{y_1\}, \quad y_1 \in C_1 \setminus \{x_1\}$$

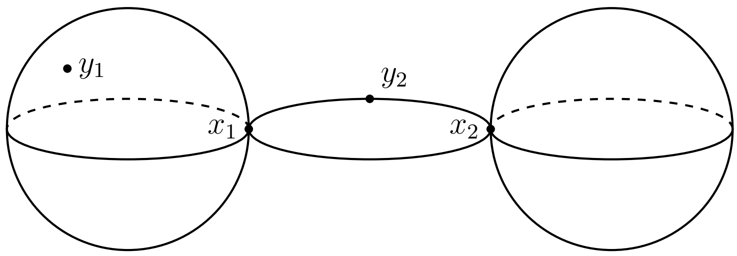
De esta forma:

- Tenemos claramente que U y V son abiertos con $X = U \cup V$.
- U, V y $U \cap V$ son arcoconexos, todos ellos por ser unión de conjuntos arcoconexos que se intersecan en un punto.
- U tiene a $C_1 \cup \mathbb{S}^2$ como retracto de deformación, y en el apartado anterior vimos que dicho espacio topológico tiene grupo fundamental $\mathbb{Z}$, por lo que $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$.
- Análogamente, V tiene a $C_2 \cup \mathbb{S}^2$ como retracto de deformación, por lo que $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$.
- $U \cap V$ tiene a $\mathbb{S}^2$ como retracto de deformación, por lo que $U \cap V$ es simplemente conexo.

En definitiva, aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen, obtenemos que:

$$\pi_1(X) = \pi_1(Y) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

g) $X = S_1 \cup (\mathbb{S}^1 \times \{0\}) \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son, respectivamente, las esferas de radio 1 centradas en el $(0, -2, 0)$ y en el $(0, 2, 0)$. Tenemos el conjunto:



Notando $S_i \cap (\mathbb{S}^1 \times \{0\}) = \{x_i\}$ para $i \in \{1, 2\}$, definiendo los conjuntos:

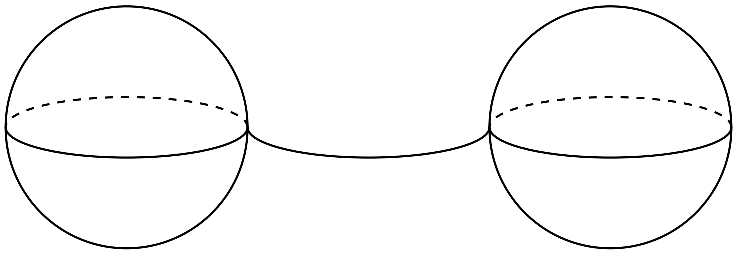
$$U = X \setminus \{y_1\}, \quad y_1 \in S_1 \setminus \{x_1\}$$
$$V = X \setminus \{y_2\}, \quad y_2 \in (\mathbb{S}^1 \times \{0\}) \setminus \{x_1, x_2\}$$

Tenemos que:

- U y V son abiertos, con $X = U \cup V$.
- Claramente U, V y $U \cap V$ son arcoconexos.
- U tiene a $S_2 \cup (\mathbb{S}^1 \times \{0\})$ como retracto de deformación, y en el apartado f) vimos que este espacio topológico tiene un grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z}$, por lo que $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$.
- V tiene a:

  $$S_1 \cup S_2 \cup ((\mathbb{S}^1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant 0\}) \times \{0\})$$

  como retracto de deformación:

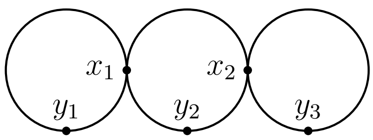
  Por lo que $\pi_1(V) = \{1\}$, tal y como se vio en el apartado d).
- $U \cap V$ tiene a S_2 como retracto de deformación, por lo que $U \cap V$ es simplemente conexo.

Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen obtenemos que:

$$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \{1\} = \mathbb{Z}$$

h) $X \subset \mathbb{R}^2$ es la unión de las tres circunferencias de radio 1 centradas en los puntos $(-2,0)$, $(0,0)$ y $(2,0)$.

Tenemos que $X = S_{-2} \cup S_0 \cup S_2$, con $S_{-2} \cap S_0 = \{x_1\}$ y $S_0 \cap S_2 = \{x_2\}$:



Si consideramos $y_1 \in S_{-2} \setminus \{x_1\}$, $y_2 \in S_0 \setminus \{x_1, x_2\}$, $y_3 \in S_2 \setminus \{x_2\}$, podemos definir los conjuntos:

$$U = X \setminus \{y_1, y_2\}, \qquad V = X \setminus \{y_3\}$$

Y tenemos que:

- Claramente U y V son abiertos con $X = U \cup V$.
- Claramente U, V y $U \cap V$ son arcoconexos.
- U tiene a S_2 como retracto de deformación, por lo que $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$.

- V tiene a $Y = S_{-2} \cup S_0$ como retracto de deformación, y tomando:

  $$W = Y \setminus \{y_1\}, \qquad Z = Y \setminus \{y_2\}$$

  tenemos que:
  - $Y = W \cup Z$ con W y Z abiertos arcoconexos, con $W \cap Z$ arcoconexo.
  - W tiene a S_2 como retracto de deformación, por lo que $\pi_1(W) \cong \mathbb{Z}$.
  - Z tiene a S_0 como retracto de deformación, por lo que $\pi_1(Z) \cong \mathbb{Z}$.
  - $W \cap Z$ tiene a x_1 como retracto de deformación, por lo que $W \cap Z$ es simplemente conexo.

  De aquí deducimos aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen que $\pi_1(V) = \pi_1(Y) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.
- $U \cap V$ tiene a $\{x_2\}$ como retracto de deformación, por lo que $U \cap V$ es simplemente conexo.

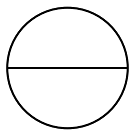
En definitiva, por el Teorema de Seifert-van Kampen deducimos que:

$$\pi_1(X) \cong (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) * \mathbb{Z} = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Observemos que un razonamiento similar puede hacerse para el caso de n circunferencias de forma que la intersección dos a dos de ellas es unitaria, obteniendo que la unión de dichas n circunferencias sería $*_{i=1}^{n}\mathbb{Z}$.

i) $X = \mathbb{S}^1 \cup [(-1, 0), (1, 0)]$.

Tenemos el conjunto:



Si consideramos:

$$U = X \setminus \{(0, 0)\}, \qquad V = X \setminus \{(0, 1)\}$$

tenemos que:

- $X = U \cup V$ con U y V abiertos.
- U, V y $U \cap V$ son arcoconexos.
- U tiene a $\mathbb{S}^1$ como retracto de deformación, por lo que $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$.
- V tiene a:

  $$(\{(x, y) : y \leqslant 0\} \cap \mathbb{S}^1) \cup [(-1, 0), (1, 0)]$$

  como retracto de deformación, y este último es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, por lo que $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$.
- $U \cap V$ es contráctil, ya que tiene por ejemplo a $\{(0, -1)\}$ como retracto de deformación, por lo que $U \cap V$ es simplemente conexo.

En definitiva, aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen tenemos que:

$$\pi_1(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Ejercicio 1.2.22. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Sean $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \Omega(X, x_0)$ con $[\alpha_1 * \beta_1] = [\alpha_2 * \beta_2]$. Entonces $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ y $[\beta_1] = [\beta_2]$.

   Es falsa, puesto que si consideramos $X = \mathbb{S}^1$, $x_0 = (1, 0)$, el arco:

   $$\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) \qquad \forall t \in [0, 1]$$

   Y tomamos:

   $$\alpha_1 = \alpha = \beta_2, \qquad \alpha_2 = \varepsilon_{x_0} = \beta_1$$

   Tenemos que $[\alpha_1] \neq [\alpha_2]$, $[\beta_1] \neq [\beta_2]$ y $[\alpha_1 * \beta_1] = [\alpha_2 * \beta_2]$.

b) Sean $f : A \to Y$ una aplicación continua con $A \subset X$ y X simplemente conexo. Si existe $F : X \to Y$ continua con $F\big|_A = f$, entonces f_* es trivial.

   Es verdadera, como F es una extensión de f, tenemos que $f \circ i = F$, es decir:

   $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & X \arrow[r, "F"] & Y \end{tikzcd}$$

   Y como cada una de ellas es continua, podemos inducir el diagrama a grupos fundamentales, obteniendo para cada $x_0 \in A$:

   $$\begin{tikzcd} \pi_1(A, x_0) \arrow[r, hook, "i_*"] \arrow[rr, bend right, "f_*"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "F_*"] & \pi_1(Y, f(x_0)) \end{tikzcd}$$

   de donde:

   $$f_*([\alpha]_A) = F_*(i_*([\alpha]_A)) = F_*([\alpha]_X) \overset{(*)}{=} F_*([\varepsilon_{x_0}]_X) = [\varepsilon_{f(x_0)}]_Y \qquad \forall [\alpha]_A \in \pi_1(A, x_0)$$

   donde en $(*)$ hemos usado que X es simplemente conexo.

c) Si $f : X \to Y$ es continua y nulhomótopa, entonces f_* es trivial.

   Veradera, si $f : X \to Y$ es continua y nulhomótopa, existe entonces una constante $y_0 \in Y$ de forma que la aplicación constantemente igual a y_0

   $$\begin{array}{rccc} c: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & y_0 \end{array}$$

sea homotópica a f, es decir, existe una aplicación continua $H : X \times [0,1] \to Y$ de forma que:

$$H(x,0) = f(x), \qquad H(x,1) = c(x) = y_0 \qquad \forall x \in X$$

En este caso, hemos visto en teoría que para cada $x_0 \in X$ existe un isomorfismo $\varphi : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Y, y_0)$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[d, "\varphi"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[r, "c_*"'] & \pi_1(Y, y_0)
\end{tikzcd}$$

De donde deducimos que:

$$f_* = \varphi^{-1} \circ c_*$$

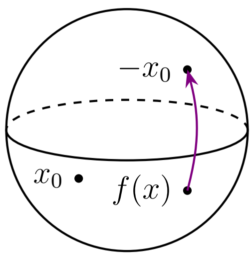
Luego si tomamos $\alpha \in \Omega(X, x_0)$, tenemos que:

$$f_*([\alpha]) = \varphi^{-1}(c_*([\alpha])) = \varphi^{-1}([c \circ \alpha]) = \varphi^{-1}([\varepsilon_{y_0}]) = [\varepsilon_{f(x_0)}]$$

de donde deducimos que f_* es trivial.

d) Si $f : X \to \mathbb{S}^n$ es continua y no sobreyectiva, entonces es nulhomótopa.

Verdadera, si f no es sobreyectiva existirá entonces $x_0 \in \mathbb{S}^n$ de forma que $x_0 \notin f(X)$. Si pensamos ahora en unir cada punto $f(x)$ con $-x_0$ podemos hacerlo a lo largo de $\mathbb{S}^n$:



De esta forma, definimos $H : X \times [0,1] \to \mathbb{S}^n$ dada por:

$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + t(-x_0)}{|(1-t)f(x) + t(-x_0)|}$$

Observamos que:

$$|(1-t)f(x) + t(-x_0)| = 0 \iff (1-t)f(x) = tx_0 \qquad \forall t \in [0,1]$$

Como $f(x), x_0 \in \mathbb{S}^n$, esto último solo puede suceder si:

- $f(x) = x_0$, pero $x_0 \notin f(X)$.

- $f(x) = -x_0$, pero en este caso tenemos $(1-t)f(x) + t(-x_0) = 1$.

Por lo que el denominador nunca se anula, lo que nos permite obtener la función H continua, que hemos definido, que verifica:

$$H(x,0) = f(x), \qquad H(x,1) = -x_0 \qquad \forall x \in X$$

Por lo que f es homotópica a la función $X \to \mathbb{S}^n$ constantemente igual a $-x_0$, de donde f es nulhomótopa.

e) Si X es simplemente conexo y $A \subset X$ un retracto de X, entonces A es simplemente conexo.

Verdadera, puesto que si A es un retracto de X, entonces fijado $x_0 \in A$ la aplicación inclusión $i : A \to X$ induce un monomorfismo entre grupos fundamentales $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Como

$$\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$$

ha de ser $\pi_1(A, x_0) \cong \{1\}$. Además, por ser A un retracto de X, existe una aplicación $r : X \to A$ continua de forma que $r(a) = a \quad \forall a \in A$, por lo que $A = r(X)$, y como X es arcoconexo A también debe serlo.

f) Si $f : X \to Y$ es continua e inyectiva con $f(x_0) = y_0$ entonces el homomorfismo $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ es un monomorfismo.

Falsa, puesto que la aplicación inclusión

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

es continua e inyectiva, y si tomamos $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$, tenemos el homomorfismo $i_* : \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \to \pi_1(\mathbb{R}^2, x_0)$ que no es inyectivo, puesto que:

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}, \qquad \pi_1(\mathbb{R}^2, x_0) \cong \{1\}$$

g) Sea $f : X \to Y$ una equivalencia homotópica y $A \subset X$. La restricción $f\big|_A : A \to f(A)$ es una equivalencia homotópica.

Falsa: sean $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $Y = \mathbb{S}^1$, sabemos que Y es retracto de deformación de X, por lo que existe una aplicación continua $r : X \to Y$ dada por:

$$r(x) = \frac{x}{|x|}$$

de forma que su composición con la inclusión $Y \xhookrightarrow{i} X$ es homotópica a la identidad. Tomando por tanto $f = r$ y $g = i$ tenemos que r es una equivalencia homotópica.

Opción 1. Si consideramos el conjunto:

$$A = \left\{ (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\operatorname{sen}\theta) : r(\theta) = 1 + \frac{\theta}{2\pi}, \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

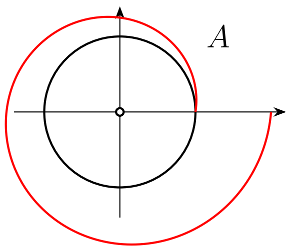


Figura 1.4: Representación gráfica de X, Y y A.

Tenemos la aplicación $r\big|_A : A \to \mathbb{S}^1$, que no puede ser una equivalencia homotópica, ya que A es simplemente conexo y $\mathbb{S}^1$ tiene un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}$ como grupo fundamental.

Opción 2. Si consideramos el conjunto:

$$A = B((1{,}5, 1{,}5), 0{,}5)$$

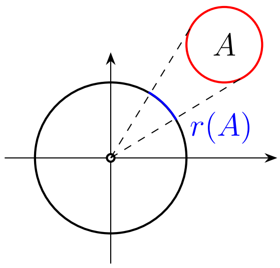


Figura 1.5: Representación gráfica de X, Y, A y $r(A)$ en azúl.

Tenemos la aplicación $r\big|_A : A \to r(A)$, que no puede ser una equivalencia homotópica, ya que A es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, por lo que tiene grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z}$ y $r(A)$ es un subconjunto simplemente conexo de $\mathbb{S}^1$.

h) $\mathbb{S}^1$ no tiene ningún retracto de deformación $D \neq \mathbb{S}^1$.

Verdadera: por reducción al absurdo, si fuese $D \subsetneq \mathbb{S}^1$ un retracto de deformación suyo, como $D \neq \mathbb{S}^1$ ha de existir $x_0 \in \mathbb{S}^1$ de forma que $D \subseteq \mathbb{S}^1 \setminus \{x_0\}$. Como $\mathbb{S}^1 \setminus \{x_0\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$, D es homeomorfo a un subconjunto de $\mathbb{R}$, y como D es un retracto de deformación de $\mathbb{S}^1$ ha de existir una función $r : \mathbb{S}^1 \to D$ continua de forma que $D = r(\mathbb{S}^1)$. Como $\mathbb{S}^1$ es conexo, D ha de ser homeomorfo a un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, es decir, a un intervalo, que siempre es simplemente conexo, por lo que D es simplemente conexo, pero por ser retracto de deformación de $\mathbb{S}^1$ debería tener grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z}$, hemos llegado a una contradicción.

i) Existe un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ que intercambia las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1$.

Falsa: por reducción al absurdo, si existiera $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que intercambia las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1$, es decir, que si:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$$

se tiene $f(A) = B$, $f(B) = A$; tendríamos entonces al considerar $f\big|_A$ que A es homeomorfo a B, por lo que ambos han de tener el mismo grupo fundamental. Sin embargo:

- B es estrellado, por lo que tiene grupo fundamental trivial.
- A tiene como retracto de deformación el conjunto:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 2\}$$

  que es una homotecia de $\mathbb{S}^1$, luego $S \cong \mathbb{S}^1$, de donde deducimos que:

$$\pi_1(A) = \pi_1(S) = \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

Vemos que $\pi_1(A) \neq \pi_1(B)$, contradicción que viene de suponer la existencia del homeomorfismo f que intercambia A y B.

j) Si A es un retracto del disco unidad cerrado de $\mathbb{R}^2$, entonces toda aplicación continua $f : A \to A$ tiene al menos un punto fijo.

Verdadera, si A es un retracto de $\mathbb{D}$ tenemos entonces que existe $r : \mathbb{D} \to A$ continua de forma que $r(a) = a \quad \forall a \in A$. Sea ahora una aplicación continua $f : A \to A$, tenemos que la aplicación $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ dada como la siguiente composición de funciones continuas:

$$\mathbb{D} \xrightarrow{r} A \xrightarrow{f} A \xhookrightarrow{i} \mathbb{D}$$

tiene un punto fijo por el Teorema de Brouwer, es decir, existe $x_0 \in \mathbb{D}$ de forma que:

$$x_0 = h(x_0) = i(f(r(x_0))) = f(r(x_0))$$

como f toma valores en A tenemos que $x_0 \in A$, por lo que $r(x_0) = x_0$, con lo que:

$$x_0 = f(r(x_0)) = f(x_0)$$

Por lo que f tiene un punto fijo.

1.3. Espacios recubridores

Ejercicio 1.3.1. Sea $R =]-1, 1[\subset \mathbb{R}$. Demuestra que existe una aplicación recubridora $p : R \to \mathbb{S}^1$. ¿Se puede levantar al recubridor la aplicación $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $f(x, y) = (y, x)$?

Sabemos que R es homeomorfo a $\mathbb{R}$ y que la aplicación $p_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por:

$$p_0(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$$

es una aplicación recubridora. Si tomamos $h : R \to \mathbb{R}$ cualquier homeomofismo tendremos entonces que $p = p_0 \circ h : R \to \mathbb{S}^1$ es una aplicación recubridora (como vimos en el Tema 1). En vistas del segundo apartado daremos h de forma explícita, como por ejemplo:

$$h(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

Si consideramos la aplicación f enunciada, estamos en la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[r, "f"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Fijado $x_0 = (0, 1) \in \mathbb{S}^1$, tomamos $b_0 = f(x_0) = (1, 0)$ y $r_0 = 0 \in p^{-1}(b_0)$. Tenemos que existe un levantamiento $\hat{f} : \mathbb{S}^1 \to R$ de f con $\hat{f}(x_0) = r_0$ si y solo si:

$$f_*(\pi_1(\mathbb{S}^1, (0, 1))) \subseteq p_*(\pi_1(R, 0)) \tag{1.2}$$

Pero tenemos que:

$$\pi_1(R, 0) = \{[\varepsilon_0]\} \quad \Longrightarrow \quad p_*(\pi_1(R, 0)) = \{[\varepsilon_{(1,0)}]\}$$

f_* es un isomorfismo por ser f un homeomorfismo, por lo que:

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, (0, 1)) \cong \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad f_*(\pi_1(\mathbb{S}^1, (0, 1))) \cong \mathbb{Z}$$

como no se puede cumplir la ecuación (1.2) tenemos que no existe dicho levantamiento. El mismo razonamiento puede repetirse para todo punto $x_0 \in \mathbb{S}^1$.

Ejercicio 1.3.2. Dada la aplicación recubridora estándar $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definida por

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)),$$

determina si la aplicación $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $f(x, y) = (x, |y|)$ puede ser levantada al recubridor. Y, en tal caso, calcula sus levantamientos.

Fijado $x_0 = (1, 0) \in \mathbb{S}^1$, tomamos $b_0 = f(x_0) = (1, 0)$ y consideramos el punto $r_0 = 0 \in p^{-1}(b_0)$. Existirá un levantamiento $\hat{f} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ de f con $\hat{f}(x_0) = r_0$ si y solo si:

$$f_*(\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{R}, r_0))$$

Tenemos que:

$$\pi_1(\mathbb{R}, r_0) = \{[\varepsilon_{r_0}]\} \quad \Longrightarrow \quad p_*(\pi_1(\mathbb{R}, r_0)) = \{[\varepsilon_{b_0}]\}$$

Por otra parte, $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$ está generado por $[\alpha]$, con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ dado por:

$$\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$$

y tenemos que:

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

donde:

$$(f \circ \alpha)(t) = (\cos(2\pi t), |\operatorname{sen}(2\pi t)|)$$

que claramente es un arco homotópico a ε_{b_0}, por lo que tenemos:

$$f_*(\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)) = \{[\varepsilon_{b_0}]\}$$

De donde existe una única $\hat{f} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ aplicación continua con $\hat{f}(x_0) = r_0$.

Ejercicio 1.3.3. ¿Existe una aplicación recubridora desde $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$?

No: por reducción al absurdo, si existiera una aplicación recubridora $p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$:

Opción 1. Tendríamos entonces por el Teorema de Monodromía que la aplicación p induce un homomorfismo inyectivo $p_* : \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, x_0) \to \pi_1(\mathbb{S}^1, p(x_0))$ con $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\pi_1(\mathbb{S}^1, p(x_0)) \cong \mathbb{Z}$. Sin embargo, ningún subgrupo de $\mathbb{Z}$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, por lo que llegamos a una contradicción.

Opción 2. $\mathbb{R}$ es el recubridor universal de $\mathbb{S}^1$, por lo que entonces este también recubre a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, y $\mathbb{R}^2$ también es recubridor universal de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, por lo que ha de existir un isomorfismo de recubridores (y por tanto, un homeomorfismo) entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, algo imposible, pues $\mathbb{R}$ menos un punto no es conexo y $\mathbb{R}^2$ menos un punto sí lo es.

Ejercicio 1.3.4. Determina, salvo isomorfismos, todos los recubridores del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Fijado $b_0 = (1,0,0) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, tenemos que $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, b_0) \cong \mathbb{Z}$, y los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son:

$$H_k = k\mathbb{Z} \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

- Asociado a $H_0 = \{0\}$ tenemos el recubridor $(\mathbb{R}^2, p)$, donde $p = p_0 \times Id_{\mathbb{R}}$, con $p_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ la aplicación recubridora estándar.

- Asociado a H_k con $k \geqslant 1$ tenemos el recubridor $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p_k)$, con la aplicación recubridora $p_k : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dada por:

$$p_k(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, y) = (\cos(k\theta), \operatorname{sen}(k\theta), y)$$

Ejercicio 1.3.5. Demuestra que si $p : R \to B$ es un homeomorfismo local con R compacto, B conexo y ambos Hausdorff, entonces p es una aplicación recubridora.

Recordamos que si p es un homeomorfismo local entonces es una aplicación continua de forma que para cada punto $x \in R$ existe un abierto U_x entorno de x de forma que $p(U_x)$ es abierto en B y $p\big|_{U_x} : U_x \to p(U_x)$ es un homeomorfismo.

- Tenemos que p es continua por ser un homeomorfismo local.
- Como R es compacto y B es Hausdorff tenemos que p es cerrada.
- Sea $U \subseteq R$ un abierto, podemos escribir:

  $$U = \bigcup_{x \in U} U_x$$

  de donde $U_x \cap U$ es un abierto para cada $x \in U$, por lo que

  $$U = \bigcup_{x \in U} U_x \cap U$$

  Para cada $x \in X$ tenemos que $p\big|_{U_x} : U_x \to p(U_x)$ es un homeomorfismo, por lo que $p(U_x \cap U)$ es un abierto de B. Finalmente, vemos:

  $$p(U) = p\left(\bigcup_{x \in U} U_x \cap U\right) = \bigcup_{x \in U} p(U_x \cap U)$$

  Por lo que $p(U)$ es abierto, de donde p es una aplicación abierta[6].

Como p es abierta y cerrada tenemos que $p(R) \subseteq B$ es abierto y cerrado, como B es conexo ha de ser $p(R) = B$, por lo que p es sobreyectiva. Falta probar que todo punto $b \in B$ tiene un entorno abierto regularmente recubierto mediante p. Para ello, la estrategia a seguir será demostrar primero que la preimagen de cada punto es finita, luego que cada punto de B tiene el mismo número de preimágenes, y finalmente la existencia de los entornos abiertos regularmente recubiertos.

$p^{-1}(b)$ **es finito para cada** $b \in B$**.** Por reducción al absurdo, si $p^{-1}(B) \subseteq R$ fuera infinito como R es compacto debería existir $r_0 \in R$ un punto de acumulación de $p^{-1}(b)$, ya que:

Sea X un espacio topológico compacto y $A \subseteq X$ un conjunto infinito entonces A tiene algún punto de acumulación, es decir, existe $x \in X$ de forma que

$$(N \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

para todo entorno N de x.

[6]Notemos que no hemos usado nada más que p es un homeomorfismo local, por lo que todo homeomorfismo local es una aplicación abierta.

Demostración. Por reducción al absurdo, si $A \subseteq X$ es un conjunto infinito sin puntos de acumulación tenemos entonces que para cada $x \in X$ podemos encontrar O_x un entorno abierto suyo de forma que $(O_x \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$. Si consideramos el recubrimiento:

$$X = \bigcup_{x \in X} O_x$$

como X es compacto, podemos encontrar una cantidad finita de puntos $x_1, \ldots, x_n$ de forma que:

$$X = O_{x_1} \cup \ldots \cup O_{x_n}$$

De esta forma, tenemos que:

$$A = (O_{x_1} \cap A) \cup \ldots \cup (O_{x_n} \cap A)$$

con $O_{x_m} \cap A$ bien vacío o igual a $\{x_m\}$, para cada $m \in \{1, \ldots, n\}$. Tenemos así que A tiene a lo mucho n elementos, hemos llegado a una contradicción. $\square$

Como B es T2 tenemos que $\{b\}$ es cerrado, de donde $p^{-1}(b)$ también es cerrado, con lo que $r_0 \in p^{-1}(b)$. Sin embargo, esto es imposible, ya que al ser p un homeomorfismo local existe un entorno U_0 de r_0 de forma que $p\big|_{U_0}$ es inyectiva, de donde:

$$p^{-1}(b) \cap U_0 = \{r_0\}$$

pero esto contradice que r_0 sea un punto de acumulación, contradicción que viene de suponer que $p^{-1}(b)$ es infinito para algún $b \in B$.

El cardinal de $p^{-1}(b)$ no depende del punto $b \in B$. Vimos en el Ejercicio 1.2.7 que si $p^{-1}(b_0)$ tiene k elementos para $b_0 \in B$ entonces $p^{-1}(b)$ tiene k elementos, para todo $b \in B$.

Cada punto $b \in B$ tiene un entorno abierto regularmente recubierto. Dado $b \in B$, podemos escribir:

$$p^{-1}(b) = \{r_1, \ldots, r_k\} \subseteq R$$

Y tenemos que existe un entorno abierto W de b y W_i abiertos disjuntos (aquí usamos la hipótesis de que R sea T2) de R de forma que cada W_i contiene a r_i, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$; y de forma que $p\big|_{W_i}$ es un homeomorfismo desde W_i en W.

Para probar que W es el entorno regularmente recubierto de b basta ver que:

$$p^{-1}(W) = \bigcup_{i=1}^{k} W_i$$

La inclusión $\supseteq$ la tenemos ya garantizada. Para la otra inclusión, por reducción al absurdo supongamos que existe:

$$r \in p^{-1}(W) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} W_i \right)$$

Tendríamos así que el punto $p(r)$ tendría al menos $k+1$ preimágenes (cada una en cada W_i y además en r), pero esto es una contradicción, pues anteriormente vimos que cada punto debía tener k preimágenes.

Ejercicio 1.3.6. Sea $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo local tal que para todo $r > 0$ se tiene que $p^{-1}(\overline{B}(0, r))$ es compacto. Demuestra que p es un homeomorfismo.

Por ser p un homeomorfismo local sabemos ya que es continua. Bastará ver que p es una aplicación recubridora (es decir, probar que es sobreyectiva y que todo punto del codominio admite un entorno abierto regularmente recubierto) para así poder aplicar el Ejercicio 1.2.10, puesto que $\mathbb{R}^n$ es arcoconexo y también simplemente conexo.

- Para ver que p es sobreyectiva, demostraremos que $p(\mathbb{R}^n)$ es un conjunto abierto y cerrado, por lo que como $\mathbb{R}^n$ es conexo (y $p(\mathbb{R}^n)$ es no vacío) tendrá que ser $p(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

  $p(\mathbb{R}^n)$ es abierto por ser p una aplicación abierta, puesto que es un homeomorfismo local (se probó en el ejercicio anterior).

  Para ver que $p(\mathbb{R}^n)$ es cerrado, si tomamos $\{y_n\}$ una sucesión de puntos de $p(\mathbb{R}^n)$ convergente a cierto $y_0 \in \mathbb{R}^n$, como la sucesión $\{y_n\}$ es convergente, esta estará acotada, lo que nos permite encontrar $r > 0$ de forma que:

  $$\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \overline{B}(0, r)$$

  Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $x_n \in \mathbb{R}^n$ con $p(x_n) = y_n$ y la condición superior nos dice que:

  $$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq p^{-1}(\overline{B}(0, r))$$

  siendo este último un conjunto compacto, por hipótesis, por lo que podemos extraer una sucesión parcial convergente $\{x_{\sigma(n)}\}$ a cierto $x_0 \in p^{-1}(\overline{B}(0, r))$. Si aplicamos ahora la aplicación p:

  $$y_0 \leftarrow \{y_{\sigma(n)}\} = \{p(x_{\sigma(n)})\} \to p(x_0)$$

  Y como $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff tenemos que $y_0 = p(x_0)$, como queríamos probar.

- Hay que probar que todo punto en $\mathbb{R}^n$ admite un entorno abierto regularmente recubierto.

Ejercicio 1.3.7. Sea X conexo y localmente arcoconexo con grupo fundamental finito. Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son aplicaciones continuas cumpliendo que $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ para todo $x \in X$. Prueba que existe $h : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $\cos(h(x)) = f(x)$ y $\operatorname{sen}(h(x)) = g(x)$ para cada $x \in X$.

Observando la condición que cumplen f y g así como de la presencia de senos y cosenos pensamos en que el problema está relacionado con una circunferencia. Definimos por tanto $F : X \to \mathbb{S}^1$ dada por:

$$F(x) = (f(x), g(x))$$

que está bien definida, pues $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$, por lo que $F(x) \in \mathbb{S}^1$ para todo $x \in X$. Si consideramos la aplicación recubridora estándar $p_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, fijado $x_0 \in X$, $b_0 = F(x_0)$ y tomando $r_0 \in p^{-1}(b_0)$ tenemos que existe un levantamiento $\hat{F} : X \to \mathbb{R}$ de F con $\hat{F}(x_0) = r_0$ si y solo si:

$$F_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{R}, r_0))$$

Por una parte:

$$\pi_1(\mathbb{R}, r_0) = \{[\varepsilon_{r_0}]\} \quad \Longrightarrow \quad p_*(\pi_1, (\mathbb{R}, r_0)) = \{[\varepsilon_{b_0}]\}$$

Por otra tenemos que como $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo finito ha de ser por tanto $F_*(\pi_1(X, x_0))$ un subgrupo finito de $\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \cong \mathbb{Z}$, que solo tiene un subgrupo finito, $\{[\varepsilon_{b_0}]\}$, de donde deducimos que ha de ser $F_*(\pi_1(X, x_0)) = \{[\varepsilon_{b_0}]\}$. Sea por tanto $\hat{F} : X \to \mathbb{R}$ el único levantamiento de F con $\hat{F}(x_0) = r_0$, tenemos que:

$$(\cos(2\pi\hat{F}(x)), \operatorname{sen}(2\pi\hat{F}(x))) = p(\hat{F}(x)) = F(x) = (f(x), g(x)) \qquad \forall x \in X$$

Por lo que si definimos $h : X \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = 2\pi\hat{F}(x)$, tenemos que:

$$(\cos(h(x)), \operatorname{sen}(h(x))) = F(x) = (f(x), g(x)) \qquad \forall x \in X$$

Ejercicio 1.3.8. Sean $p : X \to Y$ y $f : Y \to Z$ dos aplicaciones continuas tales que p y $f \circ p$ son aplicaciones recubridoras. Prueba que f es también una aplicación recubridora.

Como $f \circ p$ es una aplicación recubridora es en particular sobreyectiva, por lo que f también es sobreyectiva. Basta ver que para todo $z \in Z$ existe un entorno abierto de z regularmente recubierto. Fijado $z \in Z$, tomamos O_z un entorno abierto y arcoconexo de z regularmente recubierto por la aplicación recubridora $f \circ p$, por lo que:

$$p^{-1}(f^{-1}(O_z)) = (f \circ p)^{-1}(O_z) = \biguplus_{i \in I} A_i$$

con $A_i \subseteq X$ abierto y $(f \circ p)\big|_{A_i} : A_i \to O_z$ homeomorfismo para cada $i \in I$. Si aplicamos p a dicha igualdad, obtenemos que:

$$\bigcup_{i \in I} p(A_i) = p\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = p(p^{-1}(f^{-1}(O_z))) \overset{(*)}{=} f^{-1}(O_z)$$

donde en $(*)$ hemos usado que p es sobreyectiva, y tenemos además que $p(A_i)$ es abierto para cada $i \in I$, ya que p es una aplicación abierta por ser una aplicación recubridora.

Veamos ahora que si $p(A_i) \cap p(A_j) \neq \emptyset \Longrightarrow p(A_i) = p(A_j)$: sea $y \in p(A_i) \cap p(A_j)$ existen entonces $x_i \in A_i$, $x_j \in A_j$ de forma que $p(x_i) = y = p(x_j)$, basta demostrar que $p(A_i) \subseteq p(A_j)$ y la otra inclusión será análoga. Para ello, sea $y' \in p(A_i)$, tenemos que existe $x' \in A_i$ de forma que $p(x') = y'$. Tomamos ahora $w = f(y), w' = f(y')$ y tendremos que $w, w' \in O_z$. Como O_z es arcoconexo, existirá $\gamma : [0, 1] \to Z$ de forma que $\gamma(0) = w$, $\gamma(1) = w'$. Si tomamos como $\hat{\gamma}$ el único levantamiento de γ

por $f \circ p$ con $\hat{\gamma}(0) = x_i$, como $Im\hat{\gamma}$ es un conjunto conexo ha de ser $Im\hat{\gamma} \subseteq A_i$ y como $(f \circ p)\big|_{A_i} : A_i \to O_z$ es un homeomorfismo, ha de ser $\hat{\gamma}(1) = x'$, ya que $(f \circ p)^{-1}(\{w'\}) \cap A_i = \{x'\}$.

Si consideramos ahora $\delta = p \circ \hat{\gamma}$ tenemos que:

$$\delta(0) = p(x_i) = y, \qquad \delta(1) = p(x') = y'$$

y consideramos como $\hat{\delta}$ el único levantamiento de δ por p con $\hat{\delta}(0) = x_j$. Tendremos:

$$(f \circ p) \circ \hat{\delta} = f \circ \delta = f \circ p \circ \hat{\gamma} = \gamma$$

Por lo que $\hat{\delta}$ es el único levantamiento de γ por $f \circ p$ con $\hat{\delta}(0) = x_j \in A_j$. Tendrá que ser $Im\hat{\delta} \subseteq A_j$, luego $\hat{\delta}(1) \in A_j$ y tenemos que:

$$p(\hat{\delta}(1)) = \delta(1) = y'$$

por lo que $y' \in p(A_j)$, como queríamos probar. De esta forma, si eliminamos de la unión:

$$\bigcup_{i \in I} p(A_i)$$

los conjuntos repetidos, obtendremos una unión disjunta, luego será:

$$f^{-1}(O_z) = \biguplus_{j \in J} p(A_j)$$

y como $(f \circ p)\big|_{A_j} : A_j \to O_z$ es un homeomorfismo para cada $j \in J$ tenemos que:

$$(f \circ p)\big|_{A_j} = f\big|_{p(A_j)} \circ p\big|_{A_j}$$

Por lo que $f\big|_{p(A_j)} : A_j \to O_z$ es inyectiva y con todas las demás propiedades que hemos probado de f deducimos que $f\big|_{p(A_j)} : p(A_j) \to O_z$ es un homeomorfismo para cada $j \in J$. En definitiva, hemos probado que la aplicación f es una aplicación recubridora.

Ejercicio 1.3.9. Sean $p_1 : X \to Y$ y $p_2 : Y \to Z$ dos aplicaciones recubridoras. Prueba que si Z tiene recubridor universal, entonces $p_2 \circ p_1 : X \to Z$ es una aplicación recubridora.

Si Z tiene recubridor universal (R, p) tenemos que como (Y, p_2) también recubre a Z existirá entonces un homomorfismo de recubridores ϕ_1 de (R, p) en (Y, p_2), por lo que R es recubridor universal de Y. Repetiendo el razonamiento con el recubridor (X, p_1) de Y tenemos que existe un homomorfismo de recubridores ϕ_2 de (R, p) en (X, p_1), obteniendo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & R \arrow[d, "p"] \arrow[dl, bend right, "\phi_1"'] \arrow[dll, bend right, "\phi_2"'] \\
X \arrow[r, "p_1"] & Y \arrow[r, "p_2"] & Z
\end{tikzcd}$$

De esta forma, tenemos que:
$$(p_2 \circ p_1) \circ \phi_2 = p$$
con ϕ_2 y p aplicaciones recubridoras, por lo que por el ejercicio anterior tenemos que $p_2 \circ p_1$ es una aplicación recubridora.

Ejercicio 1.3.10. Sean $p : R \to B$ una aplicación recubridora y $b_0 \in B$. Definimos la aplicación (correspondencia del levantamiento generalizada)
$$\begin{array}{rrcl} \phi : & p^{-1}(\{b_0\}) \times \pi_1(B, b_0) & \longrightarrow & p^{-1}(\{b_0\}) \\ & (r, [\alpha]) & \longmapsto & \hat{\alpha}_r(1) \end{array}$$
donde $\hat{\alpha}_r(s)$ es el único levantamiento de $\alpha(s)$ con condición inicial $\hat{\alpha}_r(0) = r$. Demuestra que:

a) ϕ está bien definida.

Fijado $r \in p^{-1}(b_0)$ tenemos que la aplicación correspondencia del levantamiento
$$\begin{array}{rrcl} \phi_r : & \pi_1(B, b_0) & \longrightarrow & p^{-1}(\{b_0\}) \\ & [\alpha] & \longmapsto & \hat{\alpha}(1) \end{array}$$
donde $\hat{\alpha}$ es el único levantamiento de α con condición inicial $\hat{\alpha}(0) = r$ está bien definida, por lo que ϕ estará bien definida.

b) $\phi(r, [\varepsilon_{b_0}]) = r$, para cualquier $r \in p^{-1}(\{b_0\})$.

Sea $r \in p^{-1}(\{b_0\})$, si consideramos ε_r tenemos que:
$$p \circ \varepsilon_r = \varepsilon_{b_0}, \qquad \varepsilon_r(0) = r$$
Por lo que ε_r es el único levantamiento de ε_{b_0} con $\varepsilon_r(0) = r$, de donde ha de ser:
$$\phi_r(r, [\varepsilon_{b_0}]) = \varepsilon_r(1) = r$$

c) $\phi(\phi(r, [\alpha]), [\beta]) = \phi(r, [\alpha] * [\beta])$, para cualesquiera $r \in p^{-1}(\{b_0\})$ y $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(B, b_0)$.

Sea $\hat{\alpha}_r$ el único levantamiento de α con $\hat{\alpha}_r(0) = r$ tenemos entonces que $\phi(r, [\alpha]) = \hat{\alpha}_r(1) = r_1 \in p^{-1}(\{b_0\})$. Sea $\hat{\beta}_{r_1}$ el único levantamiento de β con $\hat{\beta}_{r_1}(0) = r_1$, tenemos que $\phi(r_1, [\beta]) = \hat{\beta}_{r_1}(1)$.

Veamos finalmente que $\hat{\alpha}_r * \hat{\beta}_{r_1}$ es un levantamiento de $\alpha * \beta$, que además cumple:
$$(\hat{\alpha}_r * \hat{\beta}_{r_1})(0) = \hat{\alpha}_r(0) = r$$
Para ello, vemos que:
$$\begin{aligned} p((\hat{\alpha}_r * \hat{\beta}_{r_1})(t)) &= p\left(\begin{cases} \hat{\alpha}_r(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \hat{\beta}_{r_1}(2t-1) & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}\right) \\ &= \begin{cases} p(\hat{\alpha}_r(2t)) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ p(\hat{\beta}_{r_1}(2t-1)) & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} = (\alpha * \beta)(t) \end{aligned}$$
Por lo que ha de ser:
$$\phi(r, [\alpha] * [\beta]) = \phi(r, [\alpha * \beta]) = (\hat{\alpha}_r * \hat{\beta}_{r_1})(1) = \hat{\beta}_{r_1}(1) = \phi(\phi(r, [\alpha]), [\beta])$$

d) ϕ es sobreyectiva.

En efecto, sea $r \in p^{-1}(b_0)$, tenemos que $\phi(r, [\varepsilon_{b_0}]) = r$.

e) $\phi(r, [\alpha]) = r$ si y solo si $[\alpha] \in p_*(\pi_1(R, r))$. Por doble implicación:

$\Longleftarrow$) Si $[\alpha] \in p_*(\pi_1(R, r))$ tenemos entonces que existe $[\beta] \in \pi_1(R, r)$ de forma que $[p \circ \beta] = p_*([\beta]) = [\alpha]$, por lo que β es un levantamiento de α, que además cumple $\beta(0) = r$, por lo que:

$$\phi(r, [\alpha]) = \hat{\alpha}_r(0) = \beta(0) = r$$

$\Longrightarrow$) Si $\phi(r, [\alpha]) = r$ tenemos entonces que el único levantamiento $\hat{\alpha}_r$ de α con $\hat{\alpha}_r(0) = r$ es un lazo en R, $[\hat{\alpha}_r] \in \pi_1(R, r)$, y tenemos que $p_*([\hat{\alpha}_r]) = [\alpha]$ por ser $\hat{\alpha}_r$ levantamiento de α.

f) El cardinal de $p^{-1}(\{b_0\})$ coincide con el cardinal de $\pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(R, r))$ (es decir, el índice de $p_*(\pi_1(R, r))$ como subgrupo de $\pi_1(B, b_0)$).

Ejercicio 1.3.11. Sea X un espacio topológico (conexo y localmente arcoconexo), G un grupo de homeomorfismos de X y $X/\mathcal{R}_G$ el espacio topológico cociente dado por la relación de equivalencia:

$$x\mathcal{R}_G y \iff \exists \varphi \in G : y = \varphi(x)$$

para cualesquiera $x, y \in X$.
Demuestra que la aplicación proyección $\pi : X \to X/\mathcal{R}_G$ es recubridora si y solo si para cada $x \in X$ existe un entorno suyo U_x tal que $\varphi(U_x) \cap U_x = \emptyset$ para todo $\varphi \in G \setminus \{Id_X\}$.
Deduce que, además, $\varphi : (X, \pi) \to (X, \pi)$ es un isomorfismo de recubridores si y solo si $\varphi \in G$.

Comenzamos probando que la aplicación proyección $\pi : X \to X/\mathcal{R}_G$ es recubridora si y solo si para cada $x \in X$ existe un entorno suyo U_x tal que $\varphi(U_x) \cap U_x = \emptyset$ para todo $\varphi \in G \setminus \{Id_X\}$.

$\Longleftarrow$) Como π es una proyección al cociente tenemos ya que es continua y sobreyectiva. Sea ahora $\xi \in X/\mathcal{R}_G$, tenemos que existe $x \in X$ con $\xi = \pi(x)$. Para x tenemos que existe un entorno U_x de forma que $\varphi(U_x) \cap U_x = \emptyset$. Como U_x es entorno de x ha de existir un abierto O_x de forma que $x \in O_x \subseteq U_x$. Si consideramos ahora:

$$A = \bigcup_{\varphi \in G} \varphi(O_x)$$

Tenemos que A es abierto, como unión de conjuntos abiertos, así como $\pi-$saturado[7], pues si $y \in X$ cumple que $y\mathcal{R}_G z$ para $z \in A$ tenemos entonces que $\exists \varphi \in G$ con:

$$y = \varphi(z)$$

[7]Para comprobar que A es $\pi-$saturado basta ver que si $\pi(y) = \pi(z)$ para algún $z \in A$ se tiene entonces que $y \in A$.

pero por ser $z \in A$ tenemos que existe $\phi \in G$ con $z = \phi(w)$, con $w \in O_x$, de donde:

$$y = \varphi(z) = \varphi(\phi(w))$$

tenemos ahora que $\varphi \circ \phi \in G$ por ser G un grupo, de donde deducimos que $y \in A$, luego A es $\pi-$saturado. Si consideramos:

$$V_x = \pi(A) = \pi\left(\bigcup_{\varphi \in G} \varphi(O_x)\right) = \bigcup_{\varphi \in G} \varphi(O_x)$$

Tenemos que V_x es un abierto en $X/\mathcal{R}_G$, como imagen de un abierto $\pi-$saturado. Observemos que como A es saturado tenemos:

$$\bigcup_{\varphi \in G} \varphi(O_x) = A = \pi^{-1}(\pi(A)) = \pi^{-1}(V_x)$$

con cada $\varphi(O_x)$ abierto y la unión es disjunta, pues si tuviéramos $\varphi(O_x) \cap \psi(O_x) \neq \emptyset$ para $\varphi, \psi \in G$ tenemos entonces que:

$$\emptyset \neq \psi^{-1}(\varphi(O_x) \cap \psi(O_x)) = \psi^{-1}(\varphi(O_x)) \cap O_x$$

lo que lleva a una contradicción (pues $\psi^{-1} \circ \varphi \in G$), por lo que la unión ha de ser disjunta. Fijada $\varphi \in G$, consideramos:

$$\pi\big|_{\varphi(O_x)} : \varphi(O_x) \to V_x$$

tenemos que es continua, así como que:

- Es sobreyectiva, puesto que si $\eta \in V_x$ tenemos entonces que $\exists v \in O_x$, $\phi \in G$ de forma que $\eta = \pi(\phi(v))$, con lo que:

  $$\eta = \pi(\phi(v)) = \pi(v) = \pi(\varphi(v)) = \pi\big|_{\varphi(O_x)}(\varphi(v))$$

- Es inyectiva, pues si $u, v \in O_x$ son elementos distintos con $\pi(\varphi(u)) = \pi(\varphi(v))$ tenemos entonces que existe $\phi \in G$ con $\phi(\varphi(u)) = \varphi(v)$, luego:

  $$\varphi^{-1}(\phi(\varphi(u))) = v$$

  con $\varphi^{-1} \circ \phi \circ \varphi \in G$ y por tanto $\varphi^{-1}(\phi(\varphi(U_x))) \cap U_x \neq \emptyset$.

- Es abierta, pues si $B_x \subseteq \varphi(O_x)$ es un conjunto abierto tenemos entonces que $\pi(B_x)$ es un conjunto abierto, ya que podemos verlo como la imagen de cierto conjunto abierto y saturado.

En conclusión, $\pi\big|_{\varphi(O_x)} : \varphi(O_x) \to V_x$ es un homeomorfismo.

$\Longrightarrow$) Sea $x \in X$, tomamos $b = \pi(x)$ y como π es una aplicación recubridora, ha de existir un entorno abierto O_b de b regularmente recubierto, con lo que:

$$\pi^{-1}(O_b) = \biguplus_{i \in I} A_i$$

con A_i abierto y $\pi\big|_{A_i} : A_i \to O_b$ homeomorfismo para cada $i \in I$. Como $x \in \pi^{-1}(O_b)$ debe existir $j \in I$ para el que $x \in A_j$, tomamos $U_x = A_j$ y vemos ya que U_x es entorno de x. Para probar la condición enunciada sobre U_x, sea $\varphi \in G \setminus \{Id\}$, suponemos por reducción al absurdo que existe $y \in \varphi(U_x) \cap U_x$, por lo que ha de existir $z \in U_x$ con $y = \varphi(z)$, de donde tenemos que $y\mathcal{R}_G z$, luego $\pi(y) = \pi(z)$. Como tenemos que $y, z \in U_x$ y $\pi\big|_{U_x}$ es inyectiva tiene que ser $y = z$. Si observamos que tenemos:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop left, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] \\ X/\mathcal{R}_G \end{tikzcd}$$

Id es un levantamiento de $\pi \circ Id$ y φ es un levantamiento de $\pi \circ \varphi$, pero por la forma de definir $\mathcal{R}_G$ tenemos que $\pi \circ Id = \pi \circ \varphi$, y además que:

$$Id(y) = y = \varphi(y)$$

como ambos son levantamientos de la misma aplicación y coinciden en un punto han de ser necesariamente iguales, $\varphi = Id$, pero esto contradice la elección que habíamos hecho de φ, pues la habíamos tomado del conjunto $G \setminus \{Id\}$.

$\varphi : (X, \pi) \to (X, \pi)$ es un isomorfismo de recubridores si y solo si $\varphi \in G$.

$\Longleftarrow$) Si $\varphi \in G$ tenemos entonces que $\varphi : X \to X$ es un homeomorfismo, y es claro que si $x \in X$ tenemos entonces que $x\mathcal{R}_G\varphi(x)$, luego:

$$\pi(x) = \pi(\varphi(x))$$

podemos repetir el argumento para todo $x \in X$, obteniendo que:

$$\pi = \pi \circ \varphi$$

Por lo que φ es un isomorfismo de recubridores.

$\Longrightarrow$) Si φ es un isomorfismo de recubridores tenemos entonces que $\varphi : X \to X$ es un homeomorfismo, así como que:

$$\pi = \pi \circ \varphi$$

por lo que:

$$\pi(x) = \pi(\varphi(x)) \qquad \forall x \in X$$

o en otras palabras, $x\mathcal{R}_G\varphi(x) \quad \forall x \in X$ y esto solo sucede si $\exists \phi \in G$ con:

$$\phi(x) = \varphi(x) \qquad \forall x \in X$$

de donde $\phi = \varphi$, por lo que $\varphi \in G$.

Ejercicio 1.3.12. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define la aplicación $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como $f_n(x, y) = (x + 2n, (-1)^n y)$. Utiliza el ejercicio anterior para demostrar que:

a) $G = \{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo de homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$ y para cada $x \in \mathbb{R}^2$ existe un entorno suyo U_x tal que $f_n(U_x) \cap U_x = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Veamos primero que G es un grupo de homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$:

- Primero, si $f_n, f_m \in G$ para $n, m \in \mathbb{Z}$, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} f_n(f_m(x, y)) &= f_n(x + 2m, (-1)^m y) = (x + 2m + 2n, (-1)^n (-1)^m y) \\ &= (x + 2(m + n), (-1)^{n+m} y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Por lo que $\circ$ es una operación en G, en particular:

$$f_n \circ f_m = f_{n+m} \qquad \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

- Tenemos claramente que $\circ$ es asociativa, ya que la composición de aplicaciones siempre es una operación asociativa.
- Observamos que se tiene que $f_n \circ f_0 = f_{n+0} = f_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.
- Análogamente, $f_n \circ f_{-n} = f_{n-n} = f_0$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^2$ consideramos:

$$U_x = x + ([-1/2, 1/2] \times \mathbb{R}) = \{x + (u, v) : u \in [-1/2, 1/2], v \in \mathbb{R}\}$$

vemos claramente que U_x es un entorno de x, y supongamos ahora que para cierto $n \in \mathbb{Z}$ existe $(z, y) \in f_n(U_x) \cap U_x$, de donde existe $(u, v) \in U_x$ de forma que:

$$(z, y) = f_n(u, v) = (u + 2n, (-1)^n v) \iff z = u + 2n \iff z - u = 2n$$

Pero como $z, u \in [x_1 - 1/2, x_1 + 1/2]$, tenemos entonces que $z - u \in [-1, 1]$ y en estas condiciones solo puede ser $z - u = 2n$ si $n = 0$, por lo que:

$$f_n(U_x) \cap U_x = \emptyset \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

b) La proyección $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathcal{R}_G$ es una aplicación recubridora de $\mathbb{R}^2$ en la cinta de Moebius $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}_G$.

Como $\forall x \in X\ \exists U_x$ entorno de x con:

$$f_n(U_x) \cap U_x = \emptyset \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

tenemos por el Ejercicio anterior que la aplicación proyección $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathcal{R}_G$ es una aplicación recubridora.

Ejercicio 1.3.13. Para cada $n, m \in \mathbb{Z}$ se define $f_{n,m} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como:

$$f_{n,m}(x, y) = (x, (-1)^n y) + 2(n, (-1)^n m).$$

Utiliza el ejercicio 1.3.11 para demostrar que:

a) $G = \{f_{n,m} : n, m \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo de homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$ y para cada $x \in \mathbb{R}^2$ existe un entorno suyo U_x tal que $f_{n,m}(U_x) \cap U_x = \emptyset$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ con $(n, m) \neq (0, 0)$.

Vemos primero que:

$$f_{n,m}(x, y) = (x, (-1)^n y) + 2(n, (-1)^n m) = (x + 2n, (-1)^n (y + 2m))$$

Veamos que G es un grupo de homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$:

- Si $f_{n,m}, f_{s,t} \in G$ tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} f_{n,m}(f_{s,t}(x, y)) &= f_{n,m}(x + 2s, (-1)^s (y + 2t)) \\ &= (x + 2s + 2n, (-1)^n ((-1)^s (y + 2t) + 2m)) \\ &= (x + 2(n + s), (-1)^{n+s} (y + 2t) + (-1)^n 2m) \\ &= (x + 2(n + s), (-1)^{n+s} (y + 2t + 2m(-1)^{-s})) \\ &= (x + 2(n + s), (-1)^{n+s} (y + 2(t + m(-1)^{-s}))) \\ &= f_{n+s, t+m(-1)^{-s}}(x, y) \end{aligned}$$

- La composición es asociativa.
- Tenemos que $f_{n,m} \circ f_{0,0} = f_{n,m}$.
- Además, dada $f_{n,m} \in G$ tomando $s = -n$, $t = m(-1)^{n+1}$ obtenemos que $f_{n,m} \circ f_{s,t} = f_{0,0}$.

Fijado $x \in \mathbb{R}^2$, podemos tomar:

$$U_x = x + ([-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2])$$

y tenemos que U_x es un entorno de x. Si para $n \in \mathbb{Z}$ existe $(z, y) \in f_{n,m}(U_x) \cap U_x$ tenemos entonces que existe $(u, v) \in U_x$ con:

$$(z, y) = f_{n,m}(u, v) = (u + 2n, (-1)^n (v + 2m)) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} z = u + 2n \\ y = (-1)^n (v + 2m) \end{array} \right.$$

de la primera igualdad y de forma análoga al ejercicio anterior deducimos que ha de ser $n = 0$ y por tanto tenemos $y = v + 2m$, cuya única posibilidad vuelve a ser nuevamente $m = 0$, por lo que:

$$f_{n,m}(U_x) \cap U_x = \emptyset \qquad \forall (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}$$

b) La proyección $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathcal{R}_G$ es una aplicación recubridora de $\mathbb{R}^2$ en la botella de Klein $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}_G$.

Como $\forall x \in X$ $\exists U_x$ entorno de x con:

$$f_{n,m}(U_x) \cap U_x = \emptyset \qquad \forall (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}$$

tenemos por el Ejercicio 1.3.11 que la aplicación proyección $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathcal{R}_G$ es una aplicación recubridora.

Ejercicio 1.3.14. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Existe una aplicación recubridora $p : \mathbb{S}^1 \to [0, 1]$.

Es falsa, ya que si existiera una aplicación recubridora $p : \mathbb{S}^1 \to [0, 1]$ el Teorema de Monodromía nos diría que el homomorfismo inducido por la aplicación p $p_* : \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \to \pi_1([0, 1], p(x_0))$ es inyectivo, con $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ y $\pi_1([0, 1], p(x_0)) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$, lo que llevaría a una contradicción.

b) Existe una aplicación recubridora $p : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{S}^1$.

Es falsa, ya que si existiera una aplicación recubridora $p : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{S}^1$:

Opción 1. el Teorema de Monodromía nos diría que el homomorfismo inducido $p_* : \pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) \to \pi_1(\mathbb{S}^1, p(x_0))$ es inyectivo, con $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$, pero entonces tenemos que $p_*(\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0)) \cong \mathbb{Z}_2$ y subgrupo de $\pi_1(\mathbb{S}^1, p(x_0)) \cong \mathbb{Z}$, que es una contradicción.

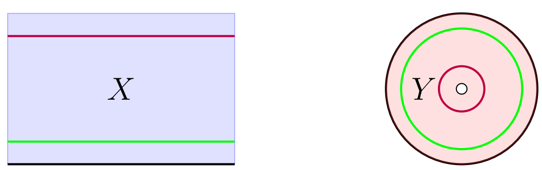
Opción 2. Como $\mathbb{R}$ es el recubridor universal de $\mathbb{S}^1$ tendríamos entonces que $\mathbb{R}$ recubriría a $\mathbb{RP}^2$, y el recubridor universal de $\mathbb{RP}^2$ es $\mathbb{S}^2$, por lo que tendríamos entonces un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2$, algo imposible, pues $\mathbb{S}^2$ es compacto y $\mathbb{R}$ no.

c) El semiplano $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$ es el recubridor universal de la bola cerrada punteada $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Es verdadera, es claro que X es simplemente conexo, por lo que basta ver que existe alguna aplicación recubridora $p : X \to Y$.

Sabemos ya de la existencia de una aplicación recubridora $p_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, por lo que sabemos llevarnos el "borde" de X al "borde" de Y. Si repetimos el proceso subiendo la altura en X y achicando el radio en Y conseguiremos una aplicación recubridora $p : X \to Y$. La idea es buscar una aplicación que en 0 valga 1 y que su imagen tienda a 0 en infinito. Tomamos por tanto $p : X \to Y$ dada por:

$$p(x, y) = e^{-y} p_0(x)$$



Es claro que p es continua y sobreyectiva. Se comprueba además que p es una aplicación recubridora.

d) Si X es un espacio topológico (conexo y localmente arcoconexo) con grupo fundamental finito y $p : X \to X$ es una aplicación recubridora, entonces p es un homeomorfismo.

Es verdadera. Para probar que p es un homeomorfismo basta probar que p es inyectiva, pues al ser una aplicación recubridora tenemos ya que es continua, sobreyectiva y abierta. Para ver que es inyectiva, tomamos dos puntos $x, y \in X$ con $p(x) = p(y)$, como X es conexo y localmente arcoconexo vimos en el Tema 1 que entonces X es arcoconexo, por lo que en particular ha de existir un arco $\alpha : [0,1] \to X$ de forma que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Si consideramos el arco $p \circ \alpha$ tenemos que:

$$(p \circ \alpha)(0) = p(x) = p(y) = (p \circ \alpha)(1)$$

por lo que $p \circ \alpha$ es un lazo en X. Por otra parte, el Teorema de Monodromía nos dice que el homomorfismo $p_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, p(x))$ es inyectivo, por lo que será un isomorfismo de grupos, al ser $\pi_1(X, x)$ finito. De esta forma, como $[p \circ \alpha] \in \pi_1(X, p(x))$, ha de existir $\beta \in \Omega(X, x)$ de forma que $p_*([\beta]) = [p \circ \alpha]$. En este momento tenemos que tanto β como α son dos levantamientos de $p \circ \alpha$ con:

$$\beta(0) = x = \alpha(0)$$

por lo que han de ser iguales, de donde:

$$y = \alpha(1) = \beta(1) = x$$

1.4. Superficies compactas

Ejercicio 1.4.1. Sea $X = \mathbb{S}^2 \cup \{x_0\}$, donde $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^2$. En X se considera la topología tal que los entornos de los puntos de $\mathbb{S}^2$ son los usuales, y los de x_0 son de la forma $(V \setminus \{N\}) \cup \{x_0\}$, donde $N = (0, 0, 1)$ y V es un entorno de N en $\mathbb{S}^2$. Demuestra que X es localmente euclídeo, es 2AN, pero no es T2.

Para ver que X es localmente euclídeo hemos de probar que todo punto admite un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$ (en este caso, tendremos $n = 2$). Para ello:

- Si $x \in \mathbb{S}^2$, tenemos entonces que $\mathbb{S}^2 \setminus \{-x\}$ es un entorno abierto de x homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.
- Para $x_0 \in X$, si consideramos un entorno abierto suyo (donde $V \neq \mathbb{S}^2$) $U = (V \setminus \{N\}) \cup \{x_0\}$ podemos considerar la aplicación $f : U \to V$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x = x_0 \\ N & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

  y obtendremos que f es un homeomorfismo (compruébese), con V un abierto de $\mathbb{S}^2$ distinto de $\mathbb{S}^2$, con lo que este es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$.

Para ver que X es 2AN, se puede comprobar que una base numerable de la topología es:

$$\{\mathbb{S}^2 \cap B(x, r) : x \in \mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3, r \in \mathbb{Q}\} \cup \{(\mathbb{S}^2 \cap (B(x, r) \setminus \{N\})) \cup \{x_0\} : x \in \mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3, r \in \mathbb{Q}\}$$

El espacio topológico X no es T2 porque no podemos "separar" N de x_0, sea U un entorno abierto de N y $(V \setminus \{N\}) \cup \{x_0\}$ un entorno abierto de x_0, vemos que $U \cap (V \setminus \{x_0\})$ es no vacío, por lo que no se puede dar la condición para que X sea T2.

Ejercicio 1.4.2. Consideremos el espacio producto $X = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, donde en $\mathbb{R}^2$ se considera la topología usual y en $\mathbb{R}$ la topología discreta. Demuestra que X es localmente euclídeo, es T2 pero no es 2AN.

Para ver que X es localmente euclídeo hemos de probar que todo punto admite un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$ (en este caso, tendremos $n = 2$). Para ello, si $(z, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ tenemos que $\mathbb{R}^2 \times \{x\}$ es un entorno abierto de (z, x) homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, por lo que X es localmente euclídeo.

Para ver que X es T2, dados $(u, x), (v, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ distintos:

- Si $x \neq y$ vemos que $\mathbb{R}^2 \times \{x\}$ es un entorno abierto de x, $\mathbb{R}^2 \times \{y\}$ es un entorno abierto de y y que:

$$(\mathbb{R}^2 \times \{x\}) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{y\}) = \emptyset$$

  por ser $x \neq y$, con lo que el espacio topológico X es T2.

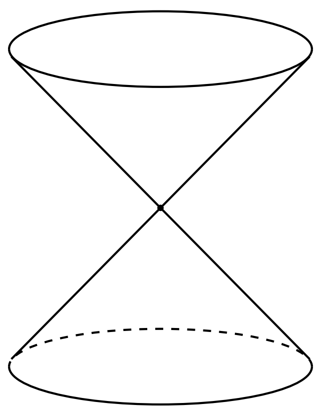
- Si $x = y$ tendremos entonces que $u \neq v$, con lo que $d(u, v) > 0$. Si consideramos:
$$r = \frac{d(u, v)}{2}$$
tenemos entonces que los abiertos:
$$B(u, r) \times \{x\}, \qquad B(v, r) \times \{x\}$$
son disjuntos, con (u, x) contenido en el primero y (v, y) en el segundo.

Para ver que X no es 2AN, supongamos por reducción al absurdo que tenemos $\mathbb{B}$ una base para la topología de X numerable. En dicho caso, para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $\mathbb{R}^2 \times \{x\}$ es un abierto de X, con lo que ha de existir $B_x \in \mathbb{B}$ de forma que:
$$B_x \subseteq \mathbb{R}^2 \times \{x\}$$
Esto nos permite construir la aplicación $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ dada por:
$$\Phi(x) = B_x$$
Vemos además que Φ es inyectiva, pues si $x, y \in \mathbb{R}$ son distintos tenemos entonces que $B_x \subseteq \mathbb{R}^2 \times \{x\}$, $B_y \subseteq \mathbb{R}^2 \times \{y\}$ y que:
$$(\mathbb{R}^2 \times \{x\}) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{y\}) = \emptyset$$
por lo que $B_x \cap B_y = \emptyset$, de donde $B_x \neq B_y$. Esto demuestra que Φ es inyectiva. Como $\mathbb{B}$ era numerable tenemos una aplicación $\Psi : \mathbb{B} \to \mathbb{N}$ inyectiva, con lo que $\Psi \circ \Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ es una aplicación inyectiva, contradicción con que $\mathbb{R}$ es no numerable.

Ejercicio 1.4.3. Prueba que los siguientes espacios topológicos no son superficies:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

Tenemos que el conjunto que nos dan es:



Como podemos ver de forma intuitiva, tenemos que el punto $(0, 0, 0)$ no tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$. Formalmente, por reducción al absurdo, si existiera $U \subseteq S$ entorno abierto de $(0, 0, 0)$ homeomorfo a $V \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto mediante un homeomorfismo $f : U \to V$, tendríamos entonces que $f : U \setminus \{(0, 0, 0)\} \to V \setminus \{f(0, 0, 0)\}$ sería un homeomorfismo, pero $U \setminus \{(0, 0, 0)\}$ no es conexo y $V \setminus \{f(0, 0, 0)\}$ sí sigue siendo conexo, hemos llegado a una contradicción.

b) $\mathbb{R}^n$ con $n \neq 2$.

Vemos que $\mathbb{R}$ no es una superficie, puesto que en caso de serlo podemos quitar un punto y por un argumento de conexión llegamos a contradicción.

Para $\mathbb{R}^n$ con $n > 2$, supongamos que sí es una superficie, con lo que para $0 = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ podemos encontrar un entorno abierto suyo U homeomorfo a un abierto V de $\mathbb{R}^2$. Como U es abierto existe r de forma que $B(0, r) \subseteq U$, y su imagen será un subconjunto abierto simplemente conexo de V. De esta forma, tenemos que $B(0, r) \setminus \{0\}$ sigue siendo simplemente conexo (ya que un retracto de deformación suyo es $S(0, r/2)$, que sabemos que tiene grupo fundamental trivial por ser homeomorfa a $\mathbb{S}^{n-1}$ con $n > 2$) pero su imagen por el homeomorfismo no, llegando a contradicción.

c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$.

Supuesto que S tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$, quitando un punto de la recta $y = 0$ dentro de dicho entorno podemos llegar a contradicción, puesto que dentro del conjunto descrito puede encontrarse un disco abierto que contiene al punto, que menos el punto en $y = 0$ sigue siendo simplemente conexo pero su imagen por el homeomorfismo no.

¿Es la unión o intersección de dos superficies en $\mathbb{R}^3$ una superficie?

- La unión de dos superficies no es una superficie, en $\mathbb{R}^3$ tenemos que las esferas $S((0, 1), 1)$ y $S((0, -1), 1)$ son homeomorfas a $\mathbb{S}^2$ (y por tanto superficies), pero su unión no es una superficie, puede demostrarse con un argumento similar al que hicimos para el cono anteriormente.

- La intersección de dos superficientes tampoco es una superficie: en $\mathbb{R}^3$ tenemos que $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ y $\mathbb{S}^2$ son superficies, pero su intersección es $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$, que no es una superficie.

Ejercicio 1.4.4. Sea (R, p) un recubridor de una superficie topológica S. Si R es 2AN, demuestra que R es una superficie topológica.

Sea $r \in R$ y $b = p(r)$, tenemos que existe un entorno abierto O_b de b regularmente recubierto por p, con lo que podemos obtener un abierto A_r de R que contiene a r y de forma que $p\big|_{A_r} : A_r \to O_b$ es un homeomorfismo. Como S es una superficie, b admite un entorno abierto V_b homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$, por lo que el entorno abierto:

$$W_b = V_b \cap O_b$$

será también homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$, gracias a la restricción del homeomorfismo. Así, basta considerar el entorno $p\big|_{A_r}^{-1}(W_b)$ para obtener un entorno abierto de r que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$.

Como R es 2AN, basta ver que R es T2 para probar que R es una superficie. Sean $x, y \in R$ puntos distintos, tenemos que:

- Si $p(x) = p(y)$ entonces para este punto existe un abierto O regularmente recubierto de forma que:
$$p^{-1}(O) = \biguplus_{i \in I} A_i$$
con A_i abierto y $p\big|_{A_i} : A_i \to O$ homeomorfismo, $\forall i \in I$. En dicho caso, tenemos que existen $j, k \in I$ de forma que $x \in A_j$, $y \in A_k$ y como $x \neq y$ y la unión es disjunta tenemos que A_j y A_k son dos abiertos disjuntos, hemos conseguido "separar" x de y.

- Si $p(x) \neq p(y)$, como S es T2 por ser una superficie tenemos que existen O_x, O_y entornos abiertos disjuntos de $p(x)$ y de $p(y)$ de forma respectiva. Si consideramos los abiertos $p^{-1}(O_x)$ y $p^{-1}(O_y)$ tenemos entonces que estos son entornos abiertos de O_x y de O_y disjuntos, por lo que hemos "separado" x de y.

Ejercicio 1.4.5. Sean S una superficie y $f : S \to \mathbb{R}$ una función continua. Definimos el grafo de f como el espacio topológico
$$G(f) = \{(x, t) \in S \times \mathbb{R} : t = f(x)\}$$
con la topología inducida por la topología producto en $S \times \mathbb{R}$. Prueba que $G(f)$ es una superficie, que además es compacta si y solo si lo es S.

Ejercicio 1.4.6. Prueba que la característica de Euler de la suma conexa de dos superficies compactas es igual a la suma de sus características de Euler menos dos.

Sean S_1 y S_2 dos superficies compactas, podemos encontrar $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ presentaciones poligonales de forma respectiva de cada una de ellas con una expresión cada una, de forma que tengamos:
$$\begin{matrix} C_1 = 1, & A_1, & V_1 \\ C_2 = 1, & A_2, & V_2 \end{matrix}$$
Si hacemos la suma conexa de las superficies a través de un vértice, obtendremos que la superficie $S_1 \# S_2$ tiene una presentación poligonal con:
$$C = 1, \qquad A = A_1 + A_2, \qquad V = (V_1 - 1) + (V_2 - 1) + 1$$
Obtenemos así que:
$$\begin{aligned} \chi(S_1 \# S_2) &= V_1 + V_2 - 1 - A_1 - A_2 + 1 = V_1 - A_1 + V_2 - A_2 \\ \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2 &= V_1 - A_1 + 1 + V_2 - A_2 + 1 - 2 = V_1 - A_1 + V_2 - A_2 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.4.7. Calcula la característica de Euler de la suma conexa de un plano proyectivo y n toros.

A partir del ejercicio anterior tenemos que:
$$\chi(\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}_n) = \chi(\mathbb{RP}^2) + \chi(\mathbb{T}_n) - 2$$

Y sabemos que:

$$\chi(\mathbb{RP}^2) = 1, \qquad \chi(\mathbb{T}_n) = 2(n-1) \quad n \geqslant 1$$

Por lo que:

$$\chi(\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}_n) = \chi(\mathbb{RP}^2) + \chi(\mathbb{T}_n) - 2 = 1 + 2(n-1) - 2 = 2n - 3$$

Ejercicio 1.4.8. Estudia la orientabilidad de $S_1 \# S_2$ a partir de la de S_1 y de S_2.

Podemos tomar $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ presentaciones poligonales para S_1 y S_2 de forma respectiva y de una expresión cada una, por lo que tendremos:

$$\mathcal{P}_1 = \langle a_1, \ldots, a_n : w_1 \rangle$$
$$\mathcal{P}_2 = \langle b_1, \ldots, b_m : w_2 \rangle$$

Y en teoría hemos visto que una presentación poligonal para $S_1 \# S_2$ es:

$$\mathcal{P} = \langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m : w_1 w_2 \rangle$$

De esta forma:

- Si S_1 o S_2 es no orientable tenemos entonces que su correspondiente presentación poligonal es no orientada, es decir, que contiene dos letras del mismo exponente, por lo que $w_1 w_2$ también contendrá dos letras del mismo exponente, por lo que $S_1 \# S_2$ será no orientable.
- Si S_1 y S_2 son orientables tendremos que sus correspondientes presentaciones son orientadas, con lo que no aparece ni en w_1 ni en w_2 dos letras con el mismo exponente, por lo que en $w_1 w_2$ tampoco, con lo que $S_1 \# S_2$ es orientable.

Ejercicio 1.4.9. Para cada una de las siguientes presentaciones poligonales de superficies compactas, calcula la característica de Euler y determina a cuál de las superficies modelo es homeomorfa:

Recordamos que las superficienes modelo son:

$$\mathbb{S}^2, \qquad \mathbb{T}_n, \qquad \mathbb{RP}^2_n$$

y tenemos que:

$$\chi(\mathbb{S}^2) = 2, \qquad \chi(\mathbb{T}_n) = 2(1-n), \qquad \chi(\mathbb{RP}^2_n) = 2 - n; \qquad n \geqslant 1$$

a) $\langle a, b, c; abacb^{-1}c^{-1} \rangle$.

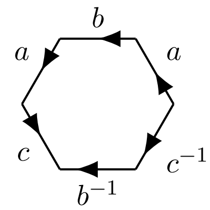
Sea $|\mathcal{P}|$ su realización geométrica, tenemos que:

$$\chi(|\mathcal{P}|) = V - A + C$$

Vemos que:

- $C = 1$, pues la presentación solo cuenta con una palabra.
- $A = 3$, pues la presentación cuenta con 3 símbolos.

Para el número de vértices, tenemos que observar la figura:

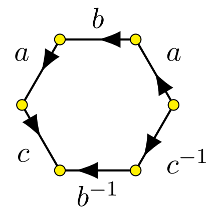


Analicemos sus vértices en el espacio topológico cociente:

- El vértice en el que empieza la arista a de la derecha se pega con el vértice que empieza en la arista a de la izquierda, que es el mismo vértice en el que termina b, que es el mismo vértice en el que termina c, que es el mismo vértice en el que empieza b, que es el mismo vértice en el que termina a, que es el mismo vértice en el que empieza c, que es el mismo vértice en el que empieza a.

  Hemos cerrado el ciclo, por lo que todos estos vértices se identifican en el cociente.

Hemos dejado al polígono sin vértices, por lo que todos estos son iguales en el cociente:



Tenemos así que $V = 1$, por lo que:

$$\chi(|\mathcal{P}|) = V - A + C = 1 - 3 + 1 = -1$$

Vemos que obtenemos un número negativo e impar, por lo que tiene que ser el producto de un plano proyectivo consigo mismo n veces, y como:

$$\chi(\mathbb{RP}^2_n) = n - 2$$

vemos entonces que $n = 3$, es decir:

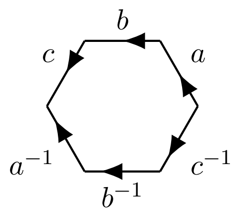
$$|\mathcal{P}| \cong \mathbb{RP}^2_3$$

b) $\langle a, b, c; abca^{-1}b^{-1}c^{-1} \rangle$.

Sea $|\mathcal{P}|$ su realización geométrica, tenemos que:

- $C = 1$.
- $A = 3$.

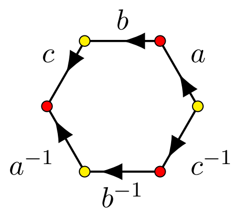
Para los vértices, vemos que tenemos la figura:



Contamos sus vértices:

- El vértice en el que empieza a también es el vértice en el que termina b, que también es el vértice en el que empieza c, que es el vértice en el que empieza a. Hemos cerrado el ciclo.
- El vértice en el que termina a es también donde termina c, que es donde comienza b y donde termina a. Hemos cerrado el ciclo.

Hemos obtenido así 2 vértices:



Tenemos entonces que:

$$\chi(|\mathcal{P}|) = V - A + C = 2 - 3 + 1 = 0$$

Por lo que nuestra superficie $|\mathcal{P}|$ puede ser $\mathbb{T}$ o $\mathbb{RP}^2_2$. Vemos que la presentación poligonal es orientada, por lo que la superficie $|\mathcal{P}|$ es orientable, luego ha de ser:

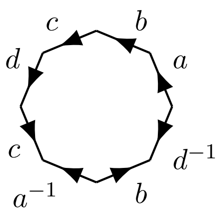
$$|\mathcal{P}| \cong \mathbb{T}$$

c) $\langle a, b, c, d; abcdca^{-1}bd^{-1} \rangle$.

Sea $|\mathcal{P}|$ la realización geométrica de la presentación, tenemos:

- $C = 1$.
- $A = 4$.

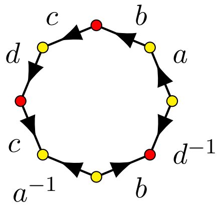
Tenemos el polígono:



Y si calculamos sus vértices obtendremos:

$$V = 2$$

ya que:



Tenemos así que:

$$\chi(|\mathcal{P}|) = 2 - 4 + 1 = -1$$

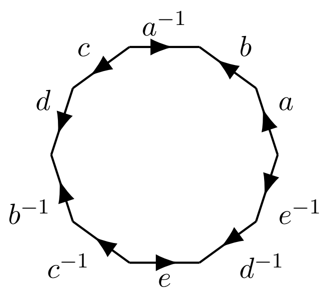
Por lo que:

$$|\mathcal{P}| \cong \mathbb{RP}^2_3$$

d) $\langle a, b, c, d, e; aba^{-1}cdb^{-1}c^{-1}ed^{-1}e^{-1} \rangle$. Sea $|\mathcal{P}|$ su realización geométrica, tenemos que:

- $C = 1$.
- $A = 5$

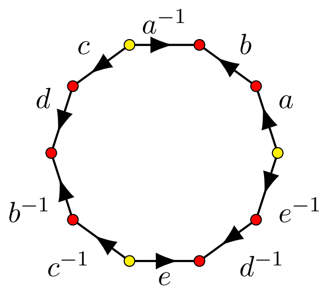
El polígono es:



Y tenemos que:

$$V = 2$$

ya que:



En definitiva:

$$\chi(|\mathcal{P}|) = 2 - 5 + 1 = -2$$

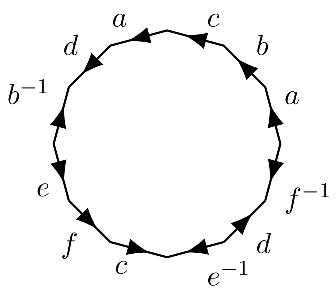
Por lo que puede ser $\mathbb{T}_2$ o $\mathbb{RP}^2_4$. Vemos que la presentación es orientada, por lo que $|\mathcal{P}|$ es orientable, de donde tiene que ser:

$$|\mathcal{P}| \cong \mathbb{T}_2$$

e) $\langle a, b, c, d, e, f; abcadb^{-1}efce^{-1}df^{-1}\rangle$. Sea $|\mathcal{P}|$ su realización geométrica, tenemos que:

- $C = 1$.
- $A = 6$

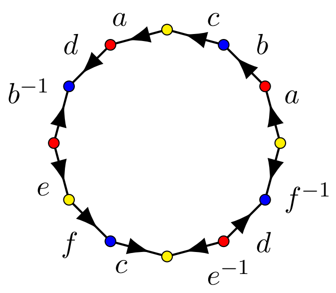
El polígono es:



Y tenemos que:

$$V = 3$$

ya que:



Tenemos así que:

$$\chi(|\mathcal{P}|) = 3 - 6 + 1 = -2$$

Por lo que puede ser $\mathbb{T}_2$ o $\mathbb{RP}^2_4$. Vemos que la presentación es no orientada, por lo que $|\mathcal{P}|$ es no orientable, de donde será:

$$|\mathcal{P}| \cong \mathbb{RP}^2_4$$

f) $\langle a, b, c, d, e, f; abc, bde, c^{-1}df, e^{-1}fa\rangle$. Sea $|\mathcal{P}|$ la realización geométrica de la presentación, tenemos en este caso que:

- $C = 4$, ya que contamos con 4 expresiones.
- $A = 6$.

Tenemos en este caso los polígonos:

Y tenemos que:

$$V = 4$$

ya que:

Por lo que:

$$\chi(|\mathcal{P}|) = 4 - 6 + 4 = 2$$

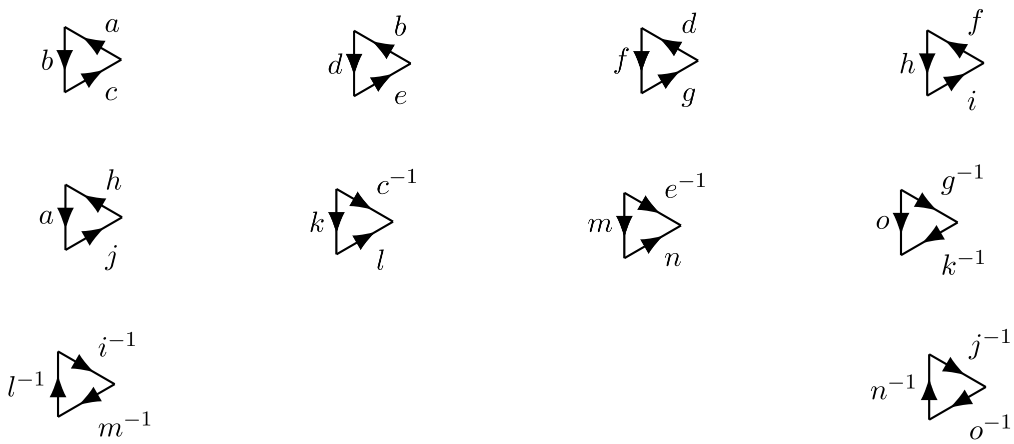
Y la única posibilidad es $|\mathcal{P}| \cong \mathbb{S}^2$.

g) $\langle a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o;$
$abc, bde, dfg, fhi, haj, c^{-1}kl, e^{-1}mn, g^{-1}ok^{-1}, i^{-1}l^{-1}m^{-1}, j^{-1}n^{-1}o^{-1}\rangle$.

Tenemos que:

- $C = 10$.
- $A = 15$.

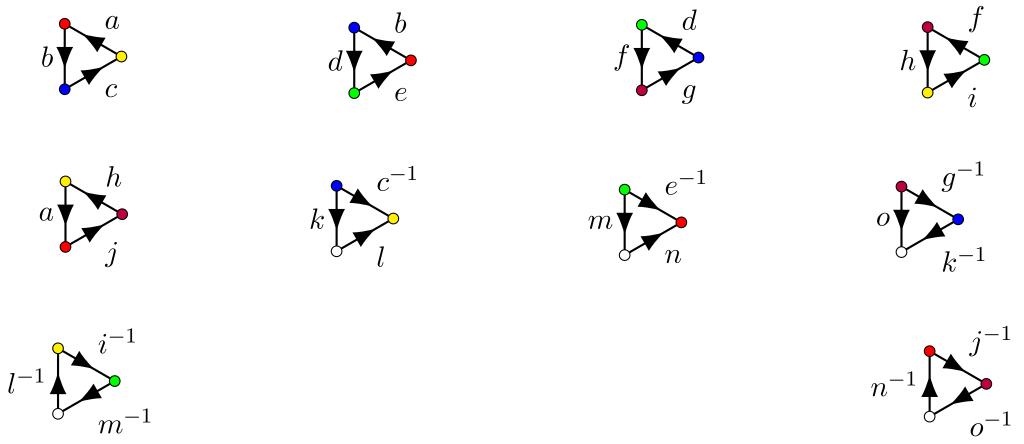
Los polígonos que tenemos son:



Tenemos que los vértices son:

$$V = 6$$

ya que:



Por lo que:

$$\chi(|\mathcal{P}|) = 6 - 15 + 10 = 1$$

de donde tenemos que $|\mathcal{P}| \cong \mathbb{RP}^2$.

Ejercicio 1.4.10. Clasifica la suma conexa de las superficies representadas en los apartados *a*) y *b*) del ejercicio anterior.

Hemos obtenido que las dos primeras superficies clasificadas en el ejercicio anterior son:

$$\mathbb{RP}^2_3 \quad \text{y} \quad \mathbb{T}$$

con características $\chi(\mathbb{RP}^2_3) = -1$ y $\chi(\mathbb{T}) = 0$, por lo que aplicando el Ejercicio 1.4.6 tenemos que:

$$\chi(\mathbb{RP}^2_3 \# \mathbb{T}) = \chi(\mathbb{RP}^2_3) + \chi(\mathbb{T}) - 2 = -1 + 0 - 2 = -3$$

Por lo que $\mathbb{RP}^2_3 \# \mathbb{T} \cong \mathbb{RP}^2_5$

Ejercicio 1.4.11. Demuestra que toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a una y solo una de las siguientes superficies:

$$\mathbb{S}^2, \quad \mathbb{T}_n, \quad \mathbb{RP}^2, \quad K, \quad \mathbb{T}_n \# \mathbb{RP}^2, \quad \mathbb{T}_n \# K$$

donde K denota la botella de Klein.

Sabemos ya que toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a una de las siguientes:

$$\mathbb{S}^2, \qquad \mathbb{T}_n, \qquad \mathbb{RP}^2_n$$

Por lo que solo hemos de distinguir los casos K, $\mathbb{T} \# \mathbb{RP}^2$ y $\mathbb{T}_n \# K$, para ver que todos estos casos se corresponden con casos distintos de $\mathbb{RP}^2_n$ para $n \geqslant 2$:

- En teoría se vió que $K \cong \mathbb{RP}^2_2$.

- Para $\mathbb{T}_n\#\mathbb{RP}^2$ sabemos por el Ejercicio 1.4.8 que debe ser una superficie no orientable, luego ha de ser homeomorfa a $\mathbb{RP}^2_n$ para $n \geqslant 1$. Estudiemos su característica de Euler usando para ello el Ejercicio 1.4.6:

$$\chi(\mathbb{T}_n\#\mathbb{RP}^2) = \chi(\mathbb{T}_n) + \chi(\mathbb{RP}^2) - 2 = 2(1-n) + 1 - 2 = 1 - 2n$$

  Por lo que teneoms la lista de características:

$$-1, -3, -5, \dots$$

  Vemos por tanto que $\mathbb{T}_n\#\mathbb{RP}^2$ es homeomorfo a $\mathbb{RP}^2_{2n+1}$.

- Para $\mathbb{T}_n\#K$ sabemos también que ha de ser una superficie no orientable, ya que podemos verla como:

$$\mathbb{T}_n\#K \cong (\mathbb{T}_n\#\mathbb{RP}^2)\#\mathbb{RP}^2$$

  Si calculamos su característica de Euler:

$$\chi(\mathbb{T}_n\#K) = \chi(\mathbb{T}_n) + \chi(K) - 2 = 2(1-n) + 0 - 2 = -2n$$

  Por lo que tenemos la lista:

$$-2, -4, -6, \dots$$

  Y por tanto $\mathbb{T}_n\#K$ es homeomorfo a $\mathbb{RP}^2_{2n+2}$.

Ejercicio 1.4.12. Identifica, salvo homeomorfismos, las superficies compactas y conexas con característica de Euler igual a -2.

En teoría hemos visto que toda superfice compacta y conexa es homeomorfa a:

$$\mathbb{S}^2, \qquad \mathbb{T}_n, \qquad \mathbb{RP}^2_n$$

y cuyas características son:

$$\chi(\mathbb{S}^2) = 2, \qquad \chi(\mathbb{T}_n) = 2(1-n), \qquad \chi(\mathbb{RP}^2_n) = 2 - n$$

Vemos por tanto que las superficies con característica de Euler -2 son:

$$\mathbb{T}_2, \qquad \mathbb{RP}^2_4$$

Ejercicio 1.4.13. Sea S una superficie compacta y conexa. Probar que $\chi(S) \geqslant -2$ si y solo si S tiene una presentación poligonal $\mathcal{P} = \langle A; W\rangle$ donde A tiene exactamente 4 elementos.

Por doble implicación:

$\Longleftarrow$) Si S tiene una presentación poligonal con 4 aristas, esta presentación ha de tener al menos una cara y un vértice, con lo que:

$$\chi(S) = V - A + C = V - 4 + C \geqslant 1 - 4 + 1 = -2$$

$\Longrightarrow$) Si $\chi(S) \geqslant -2$, podemos asumir que tenemos una presentación poligonal $\mathcal{P}$ de S con una sola cara y un solo vértice, gracias al algoritmo de clasificación de superficies compactas. En este punto, tendremos que:

$$-2 \leqslant \chi(S) = V - A + C = 1 - A + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad A \leqslant 4$$

Por lo que la presentación poligonal $\mathcal{P}$ tiene menos de 4 aristas.

- Si tiene exactamente 4 ya hemos terminado.
- Si tiene menos de 4 aristas (como mínimo podría tener 2), lo que haremos será subdividir una arista cualquiera, con lo que ahora obtenemos una presentación $\mathcal{P}'$ equivalente con una cara, un vértice y una arista más. Repetiremos el procedimiento hasta obtener 4 aristas.

Ejercicio 1.4.14. Discute de forma razonada si cada par de las siguientes superficies compactas y conexas son homeomorfas entre sí:

a) S_1 tiene por presentación poligonal a $\langle a, b, c, d; abcdad^{-1}cb^{-1}\rangle$.

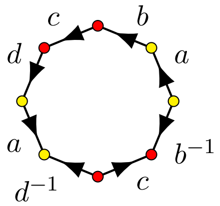
b) S_2 cumple que $\chi(S_2) \geqslant 0$ y $\pi_1(S_2)$ no es abeliano.

c) S_3 cumple que $\pi_1(S_3)$ es isomorfo al grupo $F(a, b, c)/\langle acbcba^{-1}\rangle_N$.

Tratamos de clasificar la primera superficie, viendo que:

$$C = 1, \qquad A = 4$$

Y el número de vértices viene dado por:



Por lo que tenemos que $V = 2$, de donde:

$$\chi(S_1) = 2 - 4 + 1 = -1$$

Por lo que tenemos que $S_1 \cong \mathbb{RP}^2_3$. Como $\chi(S_2) \geqslant 0$ no puede ser S_1 homeomorfa a S_2. Superficies compactas y conexas de característica no negativa tenemos cuatro:

$$\chi(\mathbb{S}^2) = 2, \qquad \chi(\mathbb{RP}^2) = 1, \qquad \chi(\mathbb{T}) = 0, \qquad \chi(\mathbb{RP}^2_2) = 0$$

Sus respectivos grupos fundamentales son:

$$\pi_1(\mathbb{S}^2) = \{0\}, \qquad \pi_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}_2, \qquad \pi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \qquad \pi_1(\mathbb{RP}^2_2) = \frac{F(a,b)}{\langle aabb\rangle_N}$$

con los tres primeros conmutativos y el último no, que de hecho tiene grupo abelianizador:

$$H_1(\mathbb{RP}^2_2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$$

Tenemos así que $S_2 \cong \mathbb{RP}^2_2$.

Ejercicio 1.4.15. Obten la presentación poligonal canónica de la superficie S_1 del ejercicio anterior efectuando para ello las transformaciones elementales que sean necesarias.

Ejercicio 1.4.16. Sea S la superficie compacta y conexa que admite una presentación poligonal de la forma

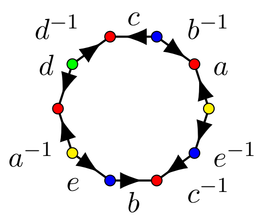
$$\langle a, b, c, d, e; ab^{-1}c - da^{-1}ebc^{-1} - \rangle$$

donde cada guión - está ocupado por un único símbolo. Completa los guiones correspondientes para que S sea homeomorfa a:

a) $\mathbb{T}_2$.

Como podemos apreciar, debemos rellenar los guiones con las aristas d, e, con su exponente correspondiente. Como queremos obtener $\mathbb{T}_2$, una superficie orientable, y tenemos una presentación de una sola expresión, debemos obtener una presentación orientada, por lo que d debe ir con exponente -1 y e también. Tenemos así dos únicas posibilidades, las cuales estudiamos a continuación:

Posibilidad 1. Que el primer guión sea d^{-1} y el segundo e^{-1}, obteniendo así:

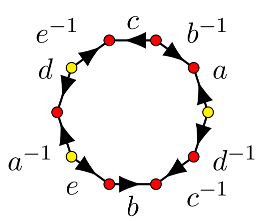


Por lo que tenemos:

$$\chi(S) = V - A + C = 4 - 5 + 1 = 0$$

En este caso tendríamos que $S \cong \mathbb{T}$. No hemos acertado.

Posibilidad 2. Que el primer guión sea e^{-1} y el segundo d^{-1}:



En este caso:

$$\chi(S) = V - A + C = 2 - 5 + 1 = -2$$

Por lo que $S \cong \mathbb{T}_2$, este es el caso que nos interesa.

b) $\mathbb{RP}^2_4$. Para este caso tenemos que dos letras tienen que tener el mismo exponente (puesto que buscamos una presentación poligonal no onrientable de una ola expresión), por lo que las combinaciones son:

- d, e.
- d, e^{-1}.
- d^{-1}, e.
- e, d.
- e, d^{-1}.
- e^{-1}, d.

Como $\chi(\mathbb{RP}^2_4) = -2$ y tenemos una presentación de 5 aristas y una cara, buscamos tener:

$$-2 = \chi(\mathbb{RP}^2_4) = V - A + C = V - 5 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad V = 2$$

Por lo que probaremos todas la combinaciones superiores y nos quedaremos con la que nos dé dos vértices.

c) La superficie compacta con grupo fundamental abelianizado isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^4$.

Sabemos por lo visto en teoría que esta superficie es $\mathbb{RP}^2_5$. Como esta es no orientable, las posibilidades son las mismas que para el apartado anterior. En este caso tenemos:

$$-3 = \chi(\mathbb{RP}^2_5) = V - A + C = V - 5 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad V = 1$$

Al igual que antes, de entre todas las combinaciones buscaremos aquella que nos dé un vértice.