Inferencia Estadística Examen II

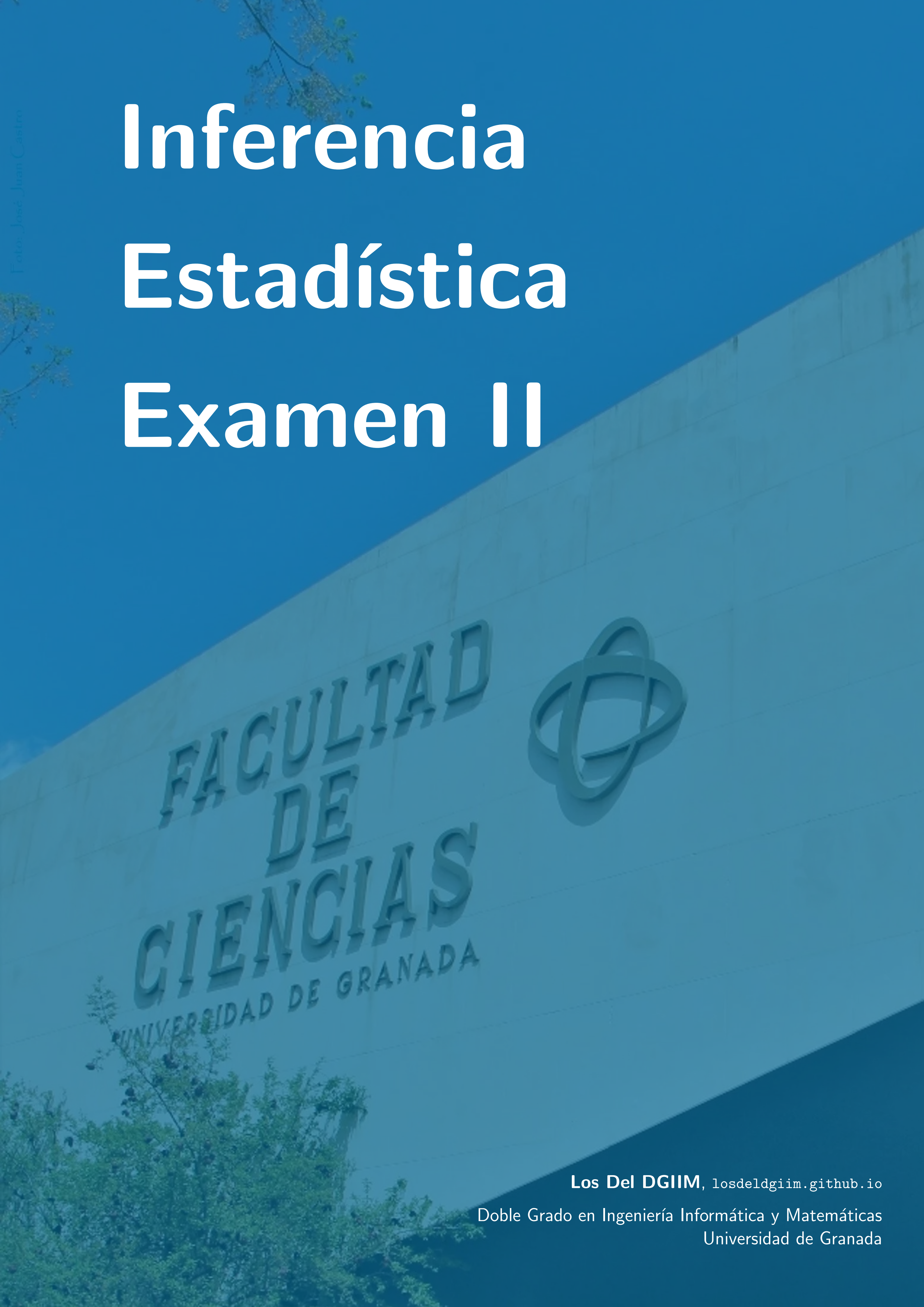

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Inferencia Estadística Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2026

Asignatura Inferencia Estadística.

Curso Académico 2022-23.

Grado Grado en Matemáticas y Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Descripción Examen Ordinario.

Ejercicio 1 (2.25 puntos)**.** Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable X con distribución en una familia paramétrica.

a) Dar la definición de estadístico suficiente. Enunciar el Teorema de Factorización de Neymann-Fisher. Demostrar dicho teorema para variables discretas.

b) Si la función de distribución de X es $F_\theta(x) = 1 - e^{\theta - x}, x > \theta$, encontrar el intervalo de confianza para θ de menor longitud media uniformemente a nivel de confianza $1 - \alpha$ basado en un estadístico suficiente.

Ejercicio 2 (2.25 puntos)**.** Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\theta - 1}\sqrt{x - 1}}, \qquad 1 < x < 2\theta$$

a) Sabiendo que $T = \max X_i$ es suficiente, encontrar, si existe, el UMVUE para $(2\theta - 1)^{-1}$, especificando previamente el espacio paramétrico y el espacio muestral. Justificar la no existencia del UMVUE en los casos que corresponda.

b) Calcular la función de verosimilitud y encontrar un estdimador máximo verosímil de $2\theta - 1$.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Sea X una variable aleatoria con distribución en una famlia regular en el sentido de Fréchet-Cramér-Rao, cuyas funciones de densidad son de la forma:

$$f_\theta(x) = exp\left[T(x)\ln\theta - \frac{\theta^2}{2} + S(x)\right], \qquad x \in R, \quad \theta \in \mathbb{R}^+$$

siendo $T(X)$ un estadístico regular.

a) Calcular la función de información asociada a X.

b) Basándose en una muestra aleatoria simple de X, $(X_1, \ldots, X_n)$, y suponiendo $T(X) > 0$; encontrar la clase de funciones paramétricas que admiten estimador eficiente y los estimadores correspondientes.

c) Bajo los supuestos del apartado *b*), calcular la cota inferior para la varianza de los estimadores insesgados en $\ln\theta$, regulares, y justificar si se alcanza o no dicha cota.

Ejercicio 4 (2.4 puntos)**.** Contraste de hipótesis:

a) Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aelatoria simple de una variable X con distribución en una familia $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$. Sea Θ_0 subconjunto arbitrario de Θ y supongamos que se pretende contrastar la hipótesis $H_0 : \theta \in \Theta_0$.

    a) Detallar la hipótesis alternativa. Definir formalmente el concepto de test de hipótesis y dar la interpretación de sus valores.

    b) Definir el tamaño y la función de potencia de un test arbitrario para resolver el problema anterior, explicando el significado de estos conceptos en término del rechazo de H_0.

c) En términos del tamaño y de la función potencia, ¿qué significa que un test tiene nivel de significación α para el problema de contraste planteado? ¿Cuáles son las condiciones para que un test sea UMP a nivel de significación α?

b) Obtener un test de razón de verosimilitud de tamaño α para contrastar $H_0 : \theta \leqslant \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$, basado en una observación de una variable con la siguiente función de densidad (detallar y justificar todos los pasos para la obtención, incluyendo el estudio detallado del estadístico de contraste y su representación gráfica):

$$f_\theta(x) = \theta x^{-2} e^{-\theta/x}, \qquad x > 0$$

¿Qué tamaños se alcanzan con dicho test?