

# Mecánica Celeste

## Examen II

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Mecánica Celeste

## Examen II

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2025

**Asignatura** Mecánica Celeste.

**Curso Académico** 2023-24.

**Grado** Grado en Matemáticas.

**Grupo** A.

**Descripción** Segundo Parcial.

**Fecha** 20 de Diciembre de 2023.

**Duración** 1 hora y 30 minutos.

El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio o apartado.

**Ejercicio 1** (1 punto). Decide si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: en el problema de  $n$  cuerpos existe una solución maximal

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_n) : ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$$

que cumple

$$|r_i(t) - r_j(t)| \geq 1, \quad t \in ]\alpha, \omega[, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

y tal que  $\omega < +\infty$ .

**Ejercicio 2** (7 puntos). Dos masas,  $m_1 = 3 \cdot 10^{24}$  Kg y  $m_2 = 10^{24}$  Kg, se mueven en órbitas circulares coplanarias alrededor de su centro de masas. Se pretende colocar satélites en órbita en los puntos de libración  $L_4$  y  $L_5$  correspondientes a esas masas primarias, que sabemos que son estables para el problema restringido de los tres cuerpos circular. Se pide:

- [1] Determinar la masa  $\mu$  de la primaria más pequeña en las unidades apropiadas para que la masa total de las primarias sea 1.
- [2] Encontrar las coordenadas de los puntos de libración  $L_4$  y  $L_5$  en el sistema de referencia con origen el centro de masas de las primarias, supuesto que la primaria de mayor masa se sitúa en el punto  $P_1 = (-\mu, 0)$  y la otra en el  $P_2 = (1 - \mu, 0)$ , con  $\mu$  el valor obtenido en el apartado anterior.
- [2] Hacer un esbozo del movimiento de los tres cuerpos si el satélite se sitúa en  $L_4$ .
- [2] Con los valores obtenidos en los apartados anteriores, probar que la función potencial

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1-\mu}{|P_1 - z|} + \frac{\mu}{|P_2 - z|} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu), \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\},$$

alcanza su mínimo absoluto en los puntos  $L_4$  y  $L_5$  y calcular el valor de la constante de Jacobi en esos puntos.

**Ejercicio 3** (2 puntos). En el sistema del ejercicio anterior, un satélite se sitúa a distancia menor que  $1/4$  de la primaria de mayor masa con velocidad cero. Demuestra que dicho satélite no se sale de la región

$$\{|P_1 - z| < 1/4\}.$$

(Sugerencia: utiliza las regiones de Hill).

**Ejercicio 1** (1 punto). Decide si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: en el problema de  $n$  cuerpos existe una solución maximal

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_n) : ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$$

que cumple

$$|r_i(t) - r_j(t)| \geq 1, \quad t \in ]\alpha, \omega[, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

y tal que  $\omega < +\infty$ .

Sea  $\rho(t) = \min_{1 \leq i < j \leq n} |r_i(t) - r_j(t)|$ . Si  $\omega < +\infty$ , entonces por un teorema visto en teoría sabemos que  $\rho(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \omega$ . Esto es una contradicción con la hipótesis  $|r_i(t) - r_j(t)| \geq 1, \quad t \in ]\alpha, \omega[, \quad 1 \leq i < j \leq n$ , por lo que la afirmación necesariamente debe ser falsa.

**Ejercicio 2** (7 puntos). Dos masas,  $m_1 = 3 \cdot 10^{24}$  Kg y  $m_2 = 10^{24}$  Kg, se mueven en órbitas circulares coplanarias alrededor de su centro de masas. Se pretende colocar satélites en órbita en los puntos de libración  $L_4$  y  $L_5$  correspondientes a esas masas primarias, que sabemos que son estables para el problema restringido de los tres cuerpos circular. Se pide:

- a) [1] Determinar la masa  $\mu$  de la primaria más pequeña en las unidades apropiadas para que la masa total de las primarias sea 1.

Sabemos que  $m_1 = 1 - \mu$ ,  $m_2 = \mu$ ,  $\mu \in ]0, 1/2]$  y  $m_1 + m_2 = 1$ , por lo que la masa  $\mu$  en las unidades apropiadas será

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{10^{24} \text{ Kg}}{3 \cdot 10^{24} \text{ Kg} + 10^{24} \text{ Kg}} = \frac{1}{4}$$

- b) [2] Encontrar las coordenadas de los puntos de libración  $L_4$  y  $L_5$  en el sistema de referencia con origen el centro de masas de las primarias, supuesto que la primaria de mayor masa se sitúa en el punto  $P_1 = (-\mu, 0)$  y la otra en el  $P_2 = (1 - \mu, 0)$ , con  $\mu$  el valor obtenido en el apartado anterior.

Por teoría sabemos que tanto  $L_4$  como  $L_5$ , colocándolos como vértices, forman un triángulo equilátero de lado 1 con las primarias. Por lo tanto, los puntos de libración  $L_4$  y  $L_5$  son aquellos  $z \in \mathbb{R}^2$  que verifican

$$|z - P_1| = |z - P_2| = |P_1 - P_2| = 1$$

Deducimos entonces que la abscisa de  $L_4$  y  $L_5$  está en la mediatriz de las primarias, es decir:

$$M = \frac{P_1 + P_2}{2} = \left( \frac{-\mu + 1 - \mu}{2}, 0 \right) = \left( \frac{1 - 2\mu}{2}, 0 \right) = \left( \frac{1}{2} - \mu, 0 \right)$$

Denotando por  $z = (x, y)$ , entonces  $x = 1/2 - \mu$ .

Para obtener la altura, imponemos  $|z - P_1| = 1$  (también se podría imponer  $|z - P_2| = 1$ ). Como

$$z - P_1 = \left( \frac{1}{2} - \mu - (-\mu), y \right) = \left( \frac{1}{2}, y \right)$$

Entonces

$$|z - P_1| = 1 \iff |z - P_1|^2 = 1 \iff \left( \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 = 1 \iff y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \iff y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

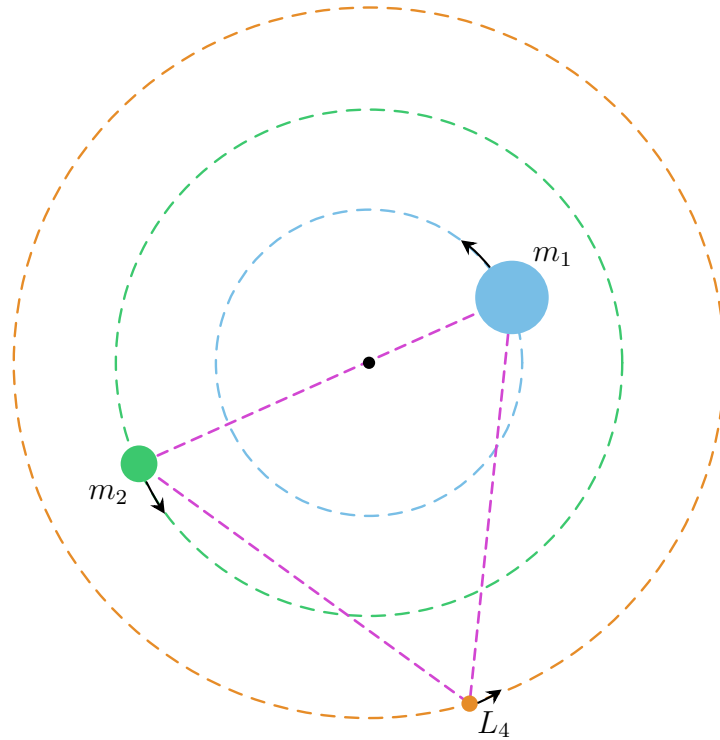
Consecuentemente

$$L_4 = \left( \frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad L_5 = \left( \frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Sustituyendo  $\mu = 1/4$  del apartado anterior

$$L_4 = \left( \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad L_5 = \left( \frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

- c) [2] Hacer un esbozo del movimiento de los tres cuerpos si el satélite se sitúa en  $L_4$ .



En el sistema inercial (con centro de masas fijo en el origen) las dos primarias describen una órbita circular a la misma velocidad angular, así como el satélite situado en  $L_4$ . De esta manera, en cada instante los tres vértices están a distancia fija  $|P_1 - P_2| = 1$ , formando un triángulo equilátero de lado 1, que rota rígidamente (sin deformarse) alrededor del centro de masas.

- d) [2] Con los valores obtenidos en los apartados anteriores, probar que la función potencial

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1-\mu}{|P_1-z|} + \frac{\mu}{|P_2-z|} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu), \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\},$$

alcanza su mínimo absoluto en los puntos  $L_4$  y  $L_5$  y calcular el valor de la constante de Jacobi en esos puntos.

Sea  $\rho_1 = |z - P_1|$  y  $\rho_2 = |z - P_2|$ . Buscamos expresar  $|z|^2$  en función de  $\rho_1$  y  $\rho_2$ . Primero

$$|z - P_1|^2 = |z|^2 + |P_1|^2 - 2zP_1$$

$$|z - P_2|^2 = |z|^2 + |P_2|^2 - 2zP_2$$

Multiplicando la primera por  $(1-\mu)$  y la segunda por  $\mu$ , y sumándolas, obtenemos

$$(1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 = |z|^2 + (1-\mu)|P_1|^2 + \mu|P_2|^2 - 2z \cdot ((1-\mu)P_1 + \mu P_2) \quad (1)$$

Como el centro de masas está en el origen, entonces  $(1-\mu)P_1 + \mu P_2 = 0$ , y además sabemos que  $|P_1|^2 = \mu^2$  y  $|P_2|^2 = (1-\mu)^2$ , de donde

$$(1-\mu)|P_1|^2 + \mu|P_2|^2 = (1-\mu)\mu^2 + \mu(1-\mu)^2 = \mu(1-\mu) \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$(1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 = |z|^2 + \mu(1-\mu) \iff |z|^2 = (1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 - \mu(1-\mu) \quad (3)$$

Recuperando la función potencial dada en el enunciado, multiplicamos por 2 a ambos lados, obteniendo

$$2\Phi(z) = |z|^2 + \frac{2(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{2\mu}{\rho_2} + \mu(1-\mu), \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\}, \quad (4)$$

y sustituimos (3) en (4), llegando a

$$\begin{aligned} 2\Phi(z) &= [(1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 - \mu(1-\mu)] + \frac{2(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{2\mu}{\rho_2} + \mu(1-\mu) = \\ &= (1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 + \frac{2(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{2\mu}{\rho_2} \end{aligned}$$

Factorizando con  $(1-\mu)$  y  $\mu$ , conseguimos la expresión cómoda

$$2\Phi(z) = (1-\mu) \left( \rho_1^2 + \frac{2}{\rho_1} \right) + \mu \left( \rho_2^2 + \frac{2}{\rho_2} \right) \quad (5)$$

Sea ahora la función

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \rho &\longmapsto \rho^2 + \frac{2}{\rho} \end{aligned}$$



Vemos que

$$g'(\rho) = 2\rho - \frac{2}{\rho^2}, \quad g''(\rho) = 2 + \frac{4}{\rho^3} > 0 \quad \forall \rho > 0$$

Por lo que  $g$  es estrictamente convexa, y su mínimo global se alcanza en los puntos críticos  $g'(\rho) = 0$ , es decir,

$$g'(\rho) = 0 \iff 2\rho - \frac{2}{\rho^2} = 0 \iff 2\rho = \frac{2}{\rho^2} \iff \rho^3 = 1 \iff \rho = 1$$

Además,  $g(1) = 1 + 2 = 3$ , y, por ser  $\rho = 1$  mínimo,  $g(\rho) \geq 3 \quad \forall \rho > 0$ . Teniendo esto en cuenta, vemos que de (5) se deduce que

$$2\Phi(z) \geq (1 - \mu) \cdot 3 + \mu \cdot 3 = 3 \implies \Phi(z) \geq \frac{3}{2}$$

El mínimo de  $\Phi$  se alcanza en caso de que  $g(\rho_1) = 3 = g(\rho_2)$ , es decir,  $\rho_1 = 1 = \rho_2$ , pero como  $\rho_1 = |z - P_1| = 1 = |z - P_2| = \rho_2$ , y los únicos puntos que verifican esto último son  $L_4$  y  $L_5$ , por lo realizado en el apartado anterior, queda demostrado que  $\Phi$  alcanza su mínimo absoluto en los puntos  $L_4$  y  $L_5$ .

Falta calcular la constante de Jacobi en  $L_4$  y  $L_5$ . Por definición,

$$J = 2\Phi(z(t)) - |\dot{z}(t)|^2$$

Como  $L_4$  y  $L_5$  son puntos de equilibrio en el problema restringido circular (demostrado en teoría), entonces la solución  $z = z(t)$  es constante,  $z(t) \equiv c$ , luego  $\dot{z}(t) \equiv 0$ . Entonces  $J(c) = 2\Phi(c)$ , y como hemos visto que el mínimo absoluto de  $\Phi$  se alcanza en  $L_4$  y  $L_5$ , y además  $\Phi(L_4) = \Phi(L_5) = 3/2$ , concluimos que

$$J(L_4) = J(L_5) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

**Ejercicio 3** (2 puntos). En el sistema del ejercicio anterior, un satélite se sitúa a distancia menor que  $1/4$  de la primaria de mayor masa con velocidad cero. Demuestra que dicho satélite no se sale de la región

$$\{|P_1 - z| < 1/4\}.$$

(Sugerencia: utiliza las regiones de Hill).

Sea  $A = \{|P_1 - z| < 1/4\}$  y supongamos que  $z = z(t)$  define la posición del satélite. Como este se sitúa con velocidad cero, entonces  $\dot{z}(0) = 0$ , y la constante de Jacobi, suponiendo que se sitúa en  $z(0) = z_0 \in A$ , es  $J = 2\Phi(z_0)$ . Como siempre

$$|\dot{z}(t)|^2 = 2\Phi(z(t)) - J \geq 0 \implies \Phi(z(t)) \geq \frac{J}{2} = \Phi(z_0)$$

Es decir, el movimiento quedaría siempre en la región de Hill asociada al nivel  $\Phi(z_0)$ , que, por definición, es

$$H = \{z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\} : \Phi(z) \geq \Phi(z_0)\}$$

Como  $\Phi(z) \rightarrow +\infty$  cuando  $z \rightarrow P_1$ , existe una componente conexa  $H_{P_1}$  de  $H$  que contiene a  $P_1$  y a  $z_0$ . Además, la curva  $\Phi = \Phi(z_0)$  (de velocidad cero) es la barrera, pues en el exterior  $\Phi < \Phi(z_0)$ , lo cual implicaría que  $|\dot{z}(t)|^2 < 0$  (contradicción). En particular, fijado  $z_0 \in A$ , la componente conexa  $H_{P_1}$  queda contenida en el disco  $A$ , por lo que la trayectoria no puede cruzar la circunferencia  $|P_1 - z| = 1/4$ . Así pues, concluimos que  $z(t) \in A \quad \forall t \in I$ , siendo  $I$  el intervalo maximal de la solución  $z = z(t)$ .