# Topología II
# Examen V

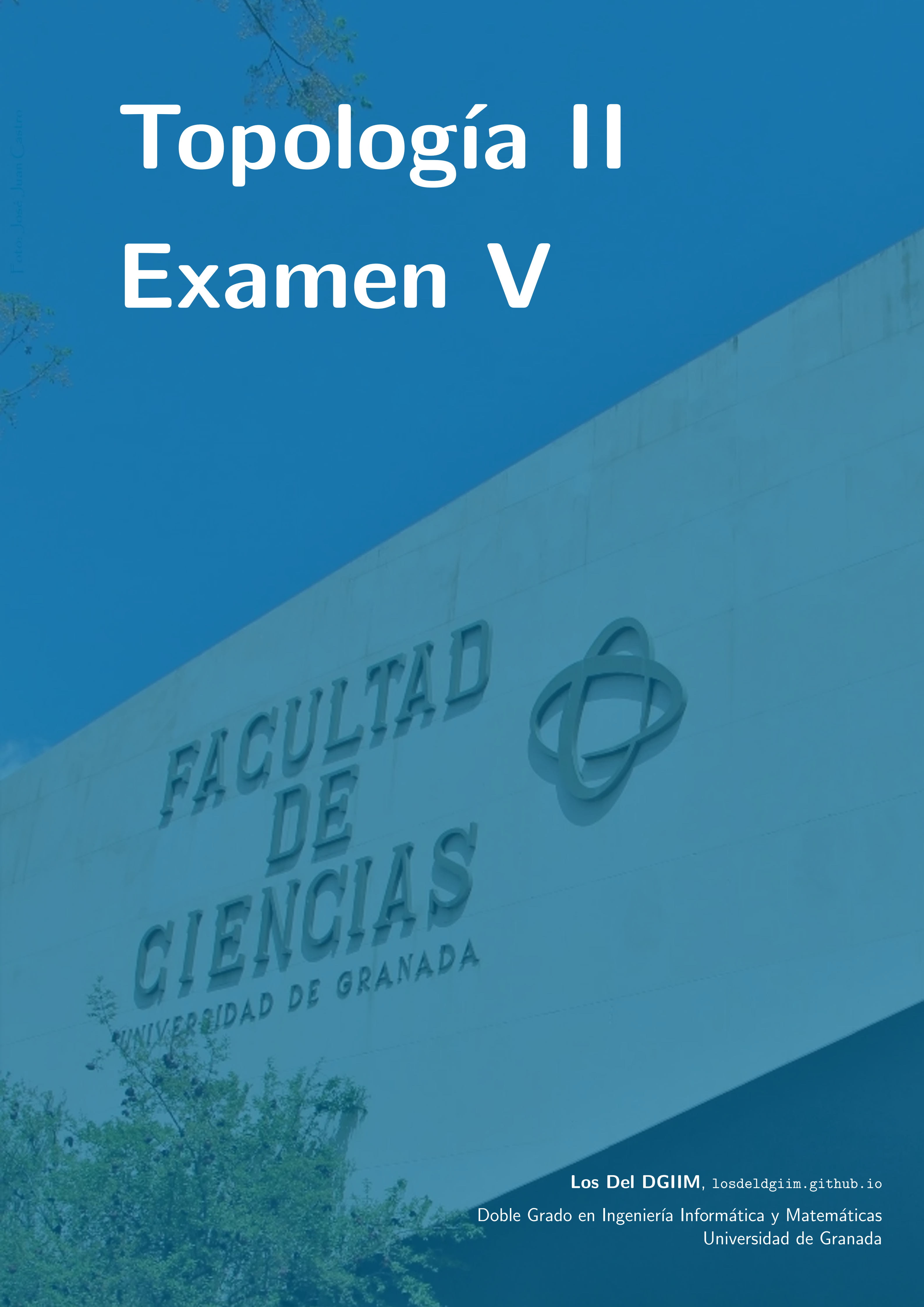



Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Topología II
# Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2025

**Asignatura** Topología II.

**Curso Académico** 2024/25.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Grupo Único.

**Descripción** Examen ordinario.

**Fecha** 10 de enero de 2025.

**Duración** 2 horas y media.

**Responda la pregunta 1 y elija dos preguntas entre la 2, 3 y 4.**

**Ejercicio 1.** Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Sea $f : \mathbb{S}^1 \to X$ una aplicación continua y $F : A \to X$ una aplicación continua desde $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geqslant 1\}$ tal que $F\big|_{\mathbb{S}^1} = f$. Entonces $f_*$ es trivial.

b) Sea $X$ un espacio topológico arcoconexo que admite un recubridor universal. Si $Y \subset X$ es arcoconexo entonces $Y$ también tiene un recubrido universal.

c) Si $S_1$ y $S_2$ son dos superficies compactas y conexas con $S_1$ no orientable entonces $S_1 \# S_2$ es no orientable.

**Ejercicio 2.** Calcula el grupo fundamental de los espacios topológicos $X, Y$ siguientes:

a) $X = E_1 \cup E_2$, donde $E_1, E_2$ son las esferas de $\mathbb{R}^3$ de radio 2 y centradas, respectivamente, en los puntos $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$.

b) $Y = S_1 \cup S_2$, donde $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ son dos superficies topológicas conexas que se cortan en un único punto y con grupos fundamentales isomorfos, respectivamente, a los grupos $G_1$ y $G_2$.

**Ejercicio 3.** Sean $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ con $N = (0, 0, 1)$, $S = (0, 0, -1)$ y $r : X \to A$ la aplicación continua

$$r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

donde $A = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, y, z) : z = 0\}$.

a) Demuestra que $H : X \times [0, 1] \to X$ dada por

$$H((x, y, z), t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

es una homotopía entre $r$ y la identidad en $X$.

b) Si $Y = \mathbb{RP}^2 \setminus \{[N]\}$, comprueba que $H$ se puede inducir a una homotopía

$$\overline{H} : Y \times [0, 1] \to Y$$

y utiliza esto para calcular el grupo fundamental del plano proyectivo menos un punto.

**Ejercicio 4.** Sean $\mathbb{T}$ el toro y $S_1, S_2$ las superficies siguientes:

a) $S_1$ es´ta dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e; ab^{-1}cde, ad^{-1}e^{-1}bc^{-1} \rangle$$

b) $S_2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}$.

¿Son $S_1$ y $S_2$ homeomorfas?

**Solución.**

**Ejercicio 1.** Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Sea $f : \mathbb{S}^1 \to X$ una aplicación continua y $F : A \to X$ una aplicación continua desde $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geqslant 1\}$ tal que $F\big|_{\mathbb{S}^1} = f$. Entonces $f_*$ es trivial.

Es falsa, si consideramos $X = \mathbb{S}^1$ y tomamos $f = Id_{\mathbb{S}^1}$ y $F : A \to \mathbb{S}^1$ dada por:

$$F(x) = \frac{x}{|x|}$$

Tenemos que $f$ y $F$ son continuas, así como que $F\big|_{\mathbb{S}^1} = f$. Como $f$ es un homeomorfismo, tendremos que $f_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ es un isomorfismo de grupos, por lo que $f_*$ no puede ser trivial, al ser $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.

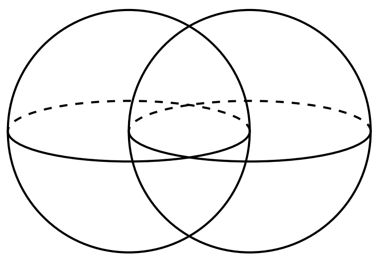
b) Sea $X$ un espacio topológico arcoconexo que admite un recubridor universal. Si $Y \subset X$ es arcoconexo entonces $Y$ también tiene un recubrido universal.

c) Si $S_1$ y $S_2$ son dos superficies compactas y conexas con $S_1$ no orientable entonces $S_1 \# S_2$ es no orientable.

**Ejercicio 2.** Calcula el grupo fundamental de los espacios topológicos $X, Y$ siguientes:

a) $X = E_1 \cup E_2$, donde $E_1, E_2$ son las esferas de $\mathbb{R}^3$ de radio 2 y centradas, respectivamente, en los puntos $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$.

El conjunto que nos dan es el siguiente:

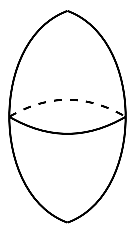


Si consideramos los conjuntos:

$$U = X \setminus \{(2, 0, 0)\}, \qquad V = X \setminus \{(-2, 0, 0)\}$$

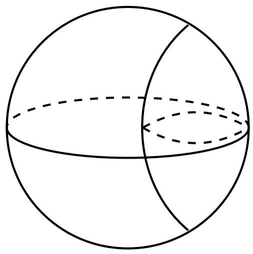
Tenemos:

- Claramente $X = U \cup V$ con $U$ y $V$ abiertos.
- $U$, $V$ y $U \cap V$ son arcoconexos como unión de conjuntos arcoconexos que se intersecan.
- $U \cap V$ tiene como retracto de deformación el conjunto:



Que es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$, por lo que es simplemente conexo.

- $U$ tiene como retracto de deformación el conjunto $Z$:

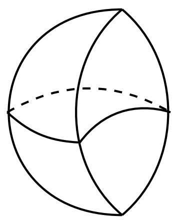


Si consideramos:

$$W = Z \setminus \{(-1,0,0)\}, \qquad O = Z \setminus \{(1,0,0)\}$$

Tenemos que:

  - $Y = W \cup O$, con $W$ y $O$ abiertos.
  - $W, O$ y $W \cap O$ son arcoconexos.
  - $W$ tiene a $E_2$ como retracto de deformación, por lo que $\pi_1(W) = \{1\}$.
  - $O$ tiene al conjunto:



Como retracto de deformación, que es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$, por lo que $\pi_1(O) = \{1\}$.

- Claramente $V$ es homeomorfo a $U$ (basta considerar una rotación), por lo que también será $\pi_1(V) = \{1\}$.

Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen concluimos que $\pi_1(X) = \{1\}$.

b) $Y = S_1 \cup S_2$, donde $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ son dos superficies topológicas conexas que se cortan en un único punto y con grupos fundamentales isomorfos, respectivamente, a los grupos $G_1$ y $G_2$.

**Ejercicio 3.** Sean $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ con $N = (0,0,1)$, $S = (0,0,-1)$ y $r : X \to A$ la aplicación continua

$$r(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y,0)$$

donde $A = \mathbb{S}^2 \cap \{(x,y,z) : z = 0\}$.

a) Demuestra que $H : X \times [0,1] \to X$ dada por

$$H((x,y,z),t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x,y,z) + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y,0)$$

es una homotopía entre $r$ y la identidad en $X$.

La aplicación $H$ es continua, como suma de aplicaciones continuas. Vemos ahora que:

$$H((x,y,z),0) = (x,y,z) \qquad \forall (x,y,z) \in X$$
$$H((x,y,z),1) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y,0) = r(x,y,z) \in A \qquad \forall (x,y,z) \in X$$
$$H((x,y,0),1) = r(x,y,0) = (x,y,0) \qquad \forall (x,y,0) \in A$$

Por lo que $H$ es una homotopía entre $Id_X$ y $i \circ r$.

b) Si $Y = \mathbb{RP}^2 \setminus \{[N]\}$, comprueba que $H$ se puede inducir a una homotopía

$$\overline{H} : Y \times [0,1] \to Y$$

y utiliza esto para calcular el grupo fundamental del plano proyectivo menos un punto.

**Ejercicio 4.** Sean $\mathbb{T}$ el toro y $S_1, S_2$ las superficies siguientes:

a) $S_1$ es´ta dada por la presentación poligonal

$$\langle a,b,c,d,e; ab^{-1}cde, ad^{-1}e^{-1}bc^{-1} \rangle$$

b) $S_2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}$.

¿Son $S_1$ y $S_2$ homeomorfas?