# Análisis Funcional

# Examen II

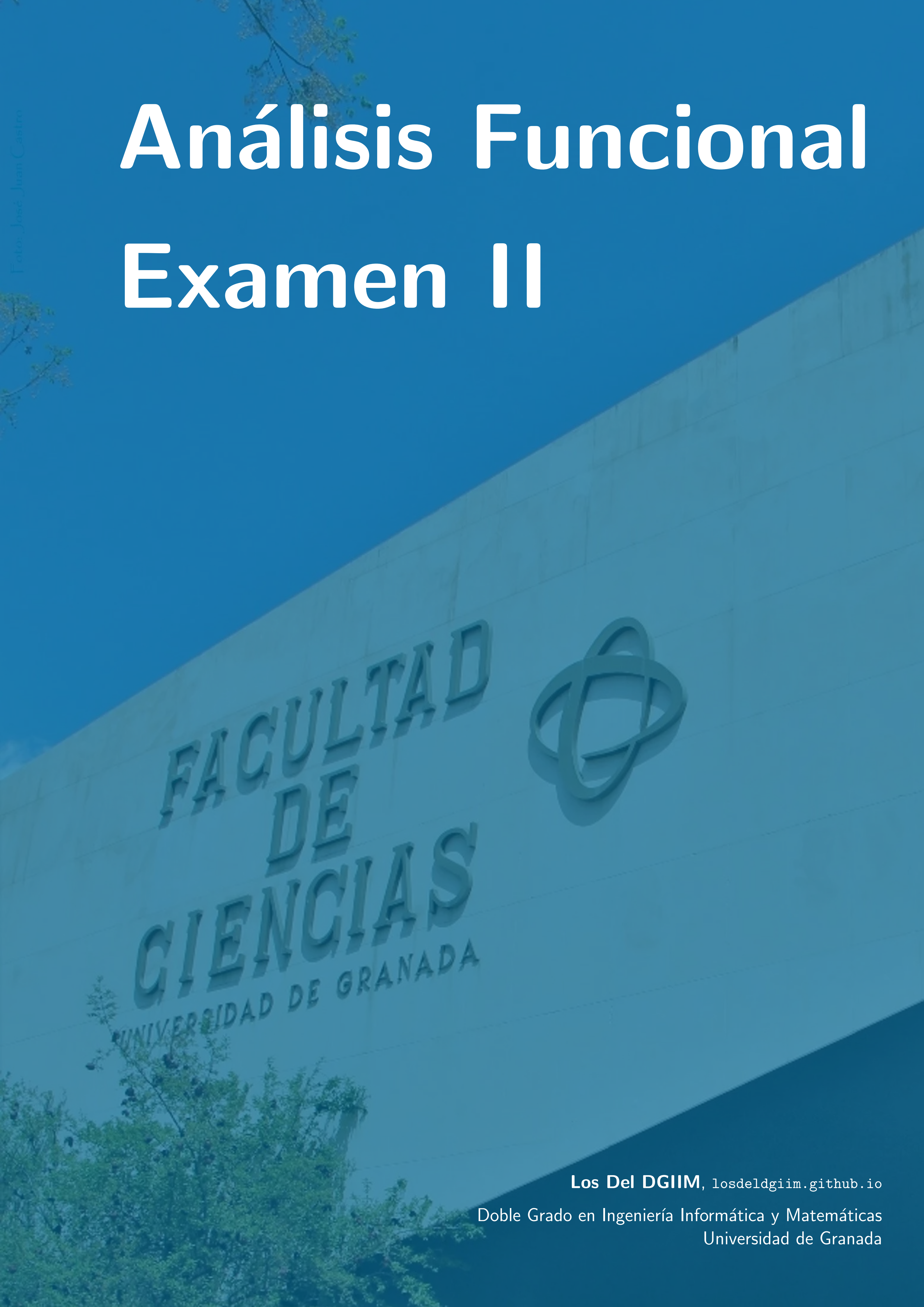


Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Análisis Funcional
# Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Daniel Morán Sánchez

Granada, 2025

**Asignatura** Análisis Funcional.

**Curso Académico** 2023/24.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Descripción** Examen Ordinario.

**Ejercicio 1** (3 puntos)**.** Teorema de representación de Riesz-Fréchet en espacios de Hilbert.

**Ejercicio 2** (2.5 puntos)**.** Sea $E = \{u \in C([0,1]) : u(0) = 0\}$ con la norma usual

$$\|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$$

Consideremos el funcional lineal $f : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(u) = \int_0^1 u(t)\ dt \qquad \forall u \in E$$

a) Probad que $f \in E^*$ y calculad $\|f\|_{E^*}$.

b) ¿Existe $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|_{E^*}$?

**Ejercicio 3** (2.5 puntos)**.** Sea $E$ un espacio de Banach. Probad que si un subconjunto $A \subset E$ es compacto en la topología débil $\sigma(E, E^*)$, entonces $A$ es acotado.

**Ejercicio 4** (2 puntos)**.** Sea $E$ un espacio de Banach reflexivo y $K \subset E$ un subconjunto convexo, cerrado y acotado. Dotamos a $K$ con la topología débil $\sigma(E, E^*)$ (que hace compacto a $K$). Sea $F = C(K)$ con la norma usual. Si $\mu \in F^*$ con $\|\mu\| = 1$ y

$$\langle \mu, u\rangle \geqslant 0 \qquad \forall u \in C(K) \quad \text{tal que} \quad u \geqslant 0 \text{ en } K$$

probad que existe un único elemento $x_0 \in K$ tal que

$$\langle \mu, f\big|_K\rangle = \langle f, x_0\rangle \qquad \forall f \in E^*$$

(**Pista:** Encontrad primero $x_0 \in E$ verificando $\langle \mu, f\big|_K\rangle = \langle f, x_0\rangle \quad \forall f \in E^*$ y a continuación probad que $x_0 \in K$ usando el teorema de Hahn-Banach).

**Ejercicio 1** (3 puntos)**.** Teorema de representación de Riesz-Fréchet en espacios de Hilbert.

Consultar los apuntes de teoría.

**Ejercicio 2** (2.5 puntos)**.** Sea $E = \{u \in C([0,1]) : u(0) = 0\}$ con la norma usual

$$\|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$$

Consideremos el funcional lineal $f : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(u) = \int_0^1 u(t)\ dt \qquad \forall u \in E$$

a) Probad que $f \in E^*$ y calculad $\|f\|_{E^*}$.

El funcional $f$ es claramente lineal(pues la integral es lineal).
Además para todo $u \in E$ se tiene

$$|f(u)| = \left|\int_0^1 u(t)\, dt\right| \leq \int_0^1 |u(t)|\, dt \leq \|u\| \int_0^1 1\, dt = \|u\|.$$

Luego $f$ es continuo y

$$\|f\|_{E^*} \leq 1.$$

Consideremos la sucesión $(u_n) \subset E$ dada por

$$u_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Se verifica que $\|u_n\| = 1$ y

$$f(u_n) = \int_0^{1/n} nt\, dt + \int_{1/n}^1 1\, dt = 1 - \frac{1}{2n}.$$

Por tanto,

$$\|f\|_{E^*} = 1.$$

b) ¿Existe $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|_{E^*}$?
Supongamos que existe $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = 1$. Entonces

$$\int_0^1 u(t)\, dt = 1.$$

Como $|u(t)| \leq 1$ para todo $t \in [0,1]$ y $u$ es continua, se deduce que $u(t) = 1$ para todo $t \in [0,1]$, lo cual contradice la condición $u(0) = 0$.

Por tanto, no existe ningún $u \in E$ que alcance la norma de $f$.

**Ejercicio 3** (2.5 puntos)**.** Sea $E$ un espacio de Banach. Probad que si un subconjunto $A \subset E$ es compacto en la topología débil $\sigma(E, E^*)$, entonces $A$ es acotado.

Sea $A \subset E$ un subconjunto compacto para la topología débil $\sigma(E, E^*)$. Comenzamos probando que, para todo funcional lineal $f \in E^*$, el conjunto $f(A) \subset \mathbb{R}$ es compacto.

En efecto, sea $\{f(x_n)\}$ una sucesión cualquiera en $f(A)$, con $\{x_n\} \subset A$. Como $A$ es $\sigma(E, E^*)$-compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge débilmente hacia algún $x \in A$.

Dado que la topología débil $\sigma(E, E^*)$ es la topología inicial inducida por los funcionales de $E^*$, todo funcional $f \in E^*$ es continuo para dicha topología(es decir $f$ lleva sucesiones $\sigma(E, E^*)$-convergentes en sucesiones convergentes). Por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x).$$

Observando que $f(x) \in f(A)$, concluimos que toda sucesión $\{f(x_n)\}$ en $f(A)$ admite una subsucesión convergente $\{f(x_{n_k})\}$ con límite $f(x)$ en $f(A)$, y por tanto $f(A)$ es compacto en $\mathbb{R}$.

En particular, $f(A)$ es un conjunto acotado de $\mathbb{R}$ para todo $f \in E^*$. Por uno de los corolarios del teorema de Banach–Steinhaus, se deduce que $A$ es un subconjunto acotado de $E$.

**Ejercicio 4** (2 puntos)**.** Sea $E$ un espacio de Banach reflexivo y $K \subset E$ un subconjunto convexo, cerrado y acotado. Dotamos a $K$ con la topología débil $\sigma(E, E^*)$ (que hace compacto a $K$). Sea $F = C(K)$ con la norma usual. Si $\mu \in F^*$ con $\|\mu\| = 1$ y

$$\langle \mu, u \rangle \geqslant 0 \qquad \forall u \in C(K) \quad \text{tal que} \quad u \geqslant 0 \text{ en } K$$

probad que existe un único elemento $x_0 \in K$ tal que

$$\langle \mu, f\big|_K \rangle = \langle f, x_0 \rangle \qquad \forall f \in E^*$$

(**Pista:** Encontrad primero $x_0 \in E$ verificando $\langle \mu, f\big|_K \rangle = \langle f, x_0 \rangle \quad \forall f \in E^*$ y a continuación probad que $x_0 \in K$ usando el teorema de Hahn-Banach).

**Unicidad.** Supongamos que existen $x_0, y_0 \in K$ tales que

$$\langle \mu, f|_K \rangle = \langle f, x_0 \rangle = \langle f, y_0 \rangle \qquad \forall f \in E^*.$$

Entonces

$$\langle f, x_0 - y_0 \rangle = 0 \qquad \forall f \in E^*.$$

Por el teorema de Hahn–Banach se deduce que $x_0 - y_0 = 0$, y por tanto $x_0 = y_0$.

**Existencia.** Procedemos en dos pasos, primero veremos que existe dicho $x_0$ y después que pertenece a $K$.

**Paso 1.** Definimos $\varphi : E^* \to \mathbb{R}$ mediante

$$\langle \varphi, f \rangle := \langle \mu, f|_K \rangle, \qquad \forall f \in E^*.$$

Es claro que $\varphi$ es lineal. Además, para todo $f \in E^*$ se tiene

$$|\langle \varphi, f \rangle| = |\langle \mu, f|_K \rangle| \overset{(*)}{\leq} \|\mu\| \, \|f|_K\|_\infty = \max_{x \in K} |\langle f, x \rangle| \overset{(**)}{\leq} \max_{x \in K} \|f\|_{E^*} \|x\|_E.$$

Donde en $(*)$ y $(**)$ hemos usado la continuidad de $\mu \in F^*$ y de $f \in E^*$, respectivamente

Como $K$ es acotado, existe $C > 0$ tal que $K \subset B(0, C)$, y por tanto

$$|\langle \varphi, f \rangle| \leq C \, \|f\|_{E^*} \qquad \forall f \in E^*.$$

Luego $\varphi$ es un funcional lineal continuo sobre $E^*$, es decir, $\varphi \in E^{**}$.

Como $E$ es reflexivo, la aplicación canónica $J : E \to E^{**}$ es sobreyectiva. Por tanto, existe $x_0 \in E$ tal que $\varphi = J(x_0)$, es decir,

$$\langle \mu, f|_K \rangle = \langle f, x_0 \rangle \qquad \forall f \in E^*.$$

**Paso 2.** Veamos que necesariamente $x_0 \in K$. Supongamos por contradicción que $x_0 \notin K$. Como $K$ es convexo y cerrado y $\{x_0\}$ es compacto, por la 2da forma geométrica del teorema de Hahn–Banach existen $f_0 \in E^* \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$\langle f_0, x \rangle \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq \langle f_0, x_0 \rangle, \qquad \forall x \in K. \tag{1}$$

Como $K$ es $\sigma(E, E^*)$-compacto y $f_0$ es $\sigma(E, E^*)$-continuo, en particular alcanza su máximo, existe $y \in K$ tal que

$$\langle f_0, x\rangle \leq \langle f_0, y\rangle \qquad \forall x \in K \qquad \text{y definimos } M := \langle f_0, y\rangle$$

Usando la positividad de $\mu$ y notando $M, 1$ como funciones constantes

$$\langle f_0, x_0\rangle = \langle \mu, f_0|_K\rangle = \langle \mu, f_0|_K - M\rangle + \langle \mu, M\rangle \overset{(*)}{\leq} M\langle \mu, 1\rangle.$$

Donde en $(*)$ hemos usado que $f_0|_K - M \leq 0$ en $K$ (por definición de $M$) y, como $\mu \geq 0$, se tiene $\langle \mu, f_0|_K - M\rangle \leq 0$.

Como $\|\mu\| = 1$ y $\|1\|_\infty = 1$, se tiene $\langle \mu, 1\rangle \leq \|\mu\|\|1\|_\infty \leq 1$, y por tanto

$$\langle f_0, x_0\rangle \leq M = \langle f_0, y\rangle,$$

lo cual contradice (1). Por tanto, $x_0 \in K$.