

# Álgebra II

## Examen VII

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Álgebra II

## Examen VII

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2025

**Asignatura** Álgebra II.

**Curso Académico** 2024-25.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Aurora Inés del Río Cabeza.

**Descripción** Convocatoria Ordinaria.

**Fecha** 18 de Junio de 2025.

**Duración** 2 horas y 30 minutos.

**Ejercicio 1** (1 punto). Prueba, utilizando el algoritmo explicado en clase, que la sucesión

$$3 \geq 3 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 2$$

es gráfica y, utilizando dicho algoritmo, encuentra un grafo en que los grados de sus vértices sean los términos de esa sucesión. Prueba que el grafo es plano y que satisface el teorema de la característica de Euler.

**Ejercicio 2** (3 puntos). Se considera el grupo diédrico

$$D_9 = \langle r, s \mid r^9 = s^2 = 1, rs = sr^8 \rangle$$

- (a) Calcula el orden de cada uno de los elementos de  $D_9$ .
- (b) Calcula el número de subgrupos de Sylow de  $D_9$  y descríbelos.
- (c) ¿Es  $D_9$  resoluble? En caso afirmativo, calcula la longitud y los factores de composición de  $D_9$ .
- (d) Demuestra que el centralizador de  $r^i$ , con  $i = 1, \dots, 8$ , es el subgrupo  $\langle r \rangle$ .
- (e) Calcula el centro de  $D_9$ .
- (f) ¿Es normal el subgrupo  $H = \langle s \rangle \subseteq D_9$ ? En caso contrario, calcula su normalizador en  $D_9$ .
- (g) Consideremos el subgrupo  $N = \langle r^3, s \rangle \subseteq D_9$ , prueba que  $N$  es isomorfo a  $D_3$ .
- (h) ¿Es  $N$  un subgrupo normal de  $D_9$ ?

**Ejercicio 3** (2 puntos). Una presentación del grupo abeliano  $A$  está dada por:

$$A = \left\langle x, y, z, t \mid \begin{array}{l} 12x + 18y + 6z = 0 \\ 9x + 9y + 9z + 6t = 0 \\ 6x + 9y + 27z + 6t = 0 \end{array} \right\rangle$$

- (a) Calcula, de forma razonada, el rango (de la parte libre) y las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de  $A$  y, si  $T(A)$  denota el grupo de torsión de  $A$ , determina su longitud y sus factores de composición.
- (b) Clasifica, dando sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, todos los grupos abelianos cuyo orden sea el orden de  $T(A)$  e identifica cuál de ellos es justamente  $T(A)$ .

**Ejercicio 4** (2 puntos). Sea  $G$  un grupo de orden 28.

- (a) Razona que  $G$  es el producto semidirecto  $P_7 \rtimes P_2$  con  $P_7$  y  $P_2$  un 7-subgrupo y un 2-subgrupo de Sylow de  $G$ , respectivamente.
- (b) Razona que si  $G$  tiene un elemento de orden 4, entonces hay exactamente dos productos semidirectos (no isomorfos)  $P_7 \rtimes P_2$ : uno de ellos abeliano y el otro no abeliano, da una presentación de este último.

- (c) Concluye que hay sólo 4 grupos de orden 28, dos abelianos y dos no abelianos. Da las descomposiciones cíclicas de los abelianos y presentaciones de los no abelianos.

**Ejercicio 5** (2 puntos). Demuestra el Teorema de Cauchy. Concluye que, si  $G$  es finito, entonces  $G$  es un  $p$ -grupo si y sólo si su orden es una potencia de  $p$ .

**Ejercicio 1** (1 punto). Prueba, utilizando el algoritmo explicado en clase, que la sucesión

$$3 \geq 3 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 2$$

es gráfica y, utilizando dicho algoritmo, encuentra un grafo en que los grados de sus vértices sean los términos de esa sucesión. Prueba que el grafo es plano y que satisface el teorema de la característica de Euler.

Aplicamos el Algoritmo de Havel-Hakimi, y posteriormente construimos el grafo correspondiente, que se muestra en la Figura 1.

3	3	2	2	2	2	2	Eliminamos el 3 y restamos uno a los 3 términos siguientes
2	1	1	2	2	2		Reordenamos los términos
2	2	2	2	1	1		Eliminamos el 2 y restamos uno a los 2 términos siguientes
1	1	2	1	1			Reordenamos los términos
2	1	1	1	1			Eliminamos el 2 y restamos uno a los 2 términos siguientes
0	0	1	1				Reordenamos los términos
1	1	0	0				Eliminamos el 1 y restamos uno al término siguiente
0	0	0					Obtenemos una sucesión gráfica

Por el Teorema de Havel-Hakimi, la sucesión de partida

$$3 \geq 3 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 2$$

es gráfica. Reconstruimos el grafo añadiendo un vértice y las correspondientes aristas en cada paso.

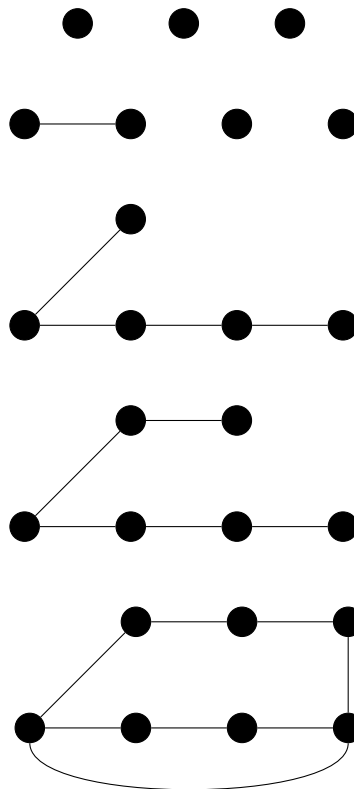


Figura 1: Grafo Correspondiente a la Sucesión Gráfica  $3 \geq 3 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 2$

Como vemos, el grafo es plano, puesto que se da una representación en la que no se cruzan las aristas. Por último, verificar la característica de Euler significa que  $v - a + c = 2$ , es decir, la suma del número de vértices menos el número de aristas más el número de caras debe ser igual a 2. Tenemos  $v = 7$  vértices,  $a = 8$  aristas, y  $c = 3$  caras (dos interiores, y la cara exterior), por lo que

$$v - a + c = 7 - 8 + 3 = 2$$

y se verifica la característica de Euler, como se pedía comprobar.

**Ejercicio 2** (3 puntos). Se considera el grupo diédrico

$$D_9 = \langle r, s \mid r^9 = s^2 = 1, rs = sr^8 \rangle$$

(a) Calcula el orden de cada uno de los elementos de  $D_9$ .

En primer lugar, por el Teorema de Lagrange, vemos que

$$x \in D_9 \implies O(x) \mid |D_9| = 18 \implies O(x) \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

Ahora, antes de hallar el orden de cada elemento, probamos que

$$O(sr^i) = 2 \quad \forall i \in \{1, \dots, 9\}$$

Basta comprobar que

$$(sr^i)^2 = (sr^i)(sr^i) \stackrel{(*)}{=} (r^{-i}s)(sr^i) = r^{-i}(ss)r^i = r^{-i}(s^2)r^i \stackrel{(**)}{=} r^{-i}r^i = r^{-i+i} = 1$$

donde en  $(*)$  se ha usado que  $sr^i = r^{-i}s$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, 9\}$ , y en  $(**)$  se ha usado que  $s^2 = 1$ . Como  $sr^i \neq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, 9\}$ , tenemos que

$$O(sr^i) = 2 \quad \forall i \in \{1, \dots, 9\}$$

Con lo anterior, ya podemos calcular el orden de cada elemento de  $D_9$ :

- $O(x) \neq 18 \quad \forall x \in D_9$ , ya que en caso contrario habría un elemento de orden 18, lo cual implicaría que  $D_9$  es cíclico, luego abeliano, cosa que sabemos que es falsa.
- $O(x) = 1 \iff x = 1$ .
- $O(x) = 2 \iff x = sr^i \quad \forall i \in \{1, \dots, 9\}$ .
- $O(x) \in \{3, 6, 9\} \iff x = r^i \quad \forall i \in \{1, \dots, 9\}$ .
- Hallamos el orden de cada  $r^i$ :

$$O(r^i) = \frac{9}{\text{mcd}(9, i)} \implies \begin{cases} O(r^i) = 9 & i \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \\ O(r^i) = 3 & i \in \{3, 6\} \end{cases}$$

Vemos que no hay elementos de orden 6 en  $D_9$ .

- (b) Calcula el número de subgrupos de Sylow de  $D_9$  y descríbelos.

Factorizamos

$$|D_9| = 18 = 2 \cdot 3^2$$

Por el Primer Teorema de Sylow, tenemos garantizada la existencia de 2-subgrupos y 3-subgrupos de Sylow en  $D_9$ . Vamos a obtenerlos:

- 3-subgrupos de Sylow. Sea  $n_3$  el número de 3-subgrupos de Sylow en  $D_9$ . Por el Segundo Teorema de Sylow, tenemos que

$$n_3 \mid 2 \quad \wedge \quad n_3 \equiv 1 \pmod{3} \implies n_3 = 1$$

Hay un único 3-subgrupo de Sylow, pongamos  $P_3$ , que además, por ser el único 3-subgrupo de Sylow, será normal,  $P_3 \triangleleft D_9$ , y  $|P_3| = 3^2 = 9$ , luego, por el Corolario del Teorema de Burnside, será abeliano (tiene orden cuadrado de un primo). Veamos ahora dos opciones para justificar que  $P_3 \cong \langle r \rangle$ .

**Opción 1.** Debe ser  $P_3 \cong \langle r \rangle \cong C_9$  porque los únicos 9 elementos de  $D_9$  que forman un grupo abeliano son los generados por las potencias de  $r$ . Además,  $P_3$  es un 3-grupo, y como hemos visto en el apartado a) los únicos elementos de órdenes potencias de 3,  $(1, 3, 9)$ , en  $D_9$  son las rotaciones  $r^i \quad i \in \{1, \dots, 9\}$ .

**Opción 2.** Como  $P_3$  es el único 3-subgrupo de Sylow, y  $|\langle r \rangle| = 9 = |P_3|$ , necesariamente debe ser  $P_3 \cong \langle r \rangle \cong C_9$ .

- 2-subgrupos de Sylow. Sea  $n_2$  el número de 2-subgrupos de Sylow en  $D_9$ . Por el Segundo Teorema de Sylow, tenemos que

$$n_2 \mid 9 \quad \wedge \quad n_2 \equiv 1 \pmod{2} \implies n_2 \in \{1, 3, 9\}$$

Ahora, si  $P_2$  es un 2-subgrupo de Sylow, entonces  $|P_2| = 2$ . En particular  $P_2$  es cíclico, luego abeliano. Recordando que en el apartado a) habíamos probado que  $O(x) = 2 \iff x = sr^i \quad \forall i \in \{1, \dots, 9\}$ , y teniendo en cuenta que  $sr^i \neq sr^j \quad \forall i \neq j \quad i, j \in \{1, \dots, 9\}$ , entonces, cada  $\langle sr^i \rangle$  es un 2-subgrupo de Sylow distinto, y por tanto, tenemos que  $n_2 = 9$ , y no puede haber más 2-subgrupos de Sylow, por lo recién encontrado con el Segundo Teorema de Sylow. Así pues, hay nueve 2-subgrupos de Sylow, y cada uno es de la forma  $\langle sr^i \rangle \quad i \in \{1, \dots, 9\}$ .



- (c) ¿Es  $D_9$  soluble? En caso afirmativo, calcula la longitud y los factores de composición de  $D_9$ .

En el apartado b) hemos visto que  $P_3$  era el único 3-subgrupo de Sylow, y que, por tanto, era normal en  $D_9$ ,  $P_3 \triangleleft D_9$ . También, hemos visto que  $P_3 = \langle r \rangle \cong C_9$ , luego  $P_3$  es cíclico, luego abeliano. En particular, todos sus subgrupos serán normales. Usaremos la Caracterización de las Series de Composición, que nos dice que una serie normal es de composición y si y solo si sus factores son grupos simples. También usaremos la Caracterización de Grupos Resolubles Para Grupos Finitos. Concretamente,  $G$  es soluble si y solo si los factores de composición de  $G$  son cíclicos de orden primo. Teniendo en cuenta que  $P_3 \triangleright \langle r^3 \rangle$ , y que  $\langle r^3 \rangle = \{1, r^3, r^6\} \cong C_3$ , construimos la siguiente serie normal:

$$D_9 \triangleright^2 P_3 \triangleright^3 \langle r^3 \rangle \triangleright^3 \{1\}$$

Como vemos, cada factor  $D_9/P_3 \cong C_2$ ,  $P_3/\langle r^3 \rangle \cong C_3$ , y  $\langle r^3 \rangle/\{1\} \cong C_3$  es cíclico de orden primo, luego, por la Caracterización de los Grupos Abelianos Simples, cada factor es un grupo abeliano y simple. En particular todos los factores son grupos simples, y por la Caracterización de las Series de Composición, la serie normal es de composición. Además, como todos los factores de composición de  $D_9$  son cíclicos de orden primo, por la Caracterización de Grupos Resolubles,  $D_9$  es soluble.

La longitud de la serie de composición es 3, y los factores de composición de  $D_9$  son  $C_2$ ,  $C_2$  y  $C_3$ .

- (d) Demuestra que el centralizador de  $r^i$ , con  $i = 1, \dots, 8$ , es el subgrupo  $\langle r \rangle$ .

Por definición, el centralizador en  $D_9$  de  $r^i$  es, para cada  $i \in \{1, \dots, 8\}$ , el siguiente

$$C_{D_9}(r^i) = \{x \in D_9 : xr^i = r^i x\}$$

Vamos a probar que  $C_{D_9}(r^i) = \langle r \rangle$  por doble contenido.

$\supseteq$ ) Sea  $x \in \langle r \rangle \implies x = r^j$  para cierto  $j \in \{1, \dots, 9\}$ . Entonces

$$r^j r^i = r^{j+i} = r^{i+j} = r^i r^j \implies x \in C_{D_9}(r^i)$$

$\subseteq$ ) Sea  $x \in C_{D_9}(r^i)$  para un  $i \in \{1, \dots, 8\}$  fijo. Distinguimos en función de la forma de los elementos de  $D_9$ . Si  $x \in D_9$ , puede ser  $x = r^k$  con  $k \in \{1, \dots, 9\}$ , o  $x = sr^k$ , con  $k \in \{1, \dots, 9\}$ .

- Si  $x = r^k$  con  $k \in \{1, \dots, 9\}$ , entonces  $x \in \langle r \rangle$ , y ya hemos terminado este caso.
- Vamos ahora a llegar a contradicción con que  $x \in C_{D_9}(r^i)$  si  $x = sr^k$ , con  $k \in \{1, \dots, 9\}$ . Por reducción al absurdo, supongamos que  $\exists x = sr^k \in C_{D_9}(r^i)$ . Entonces por estar  $x$  en el centralizador se verifica que

$(sr^k)(r^i) = (r^i)(sr^k)$ . Recordando que  $sr^j = r^{-j}s \quad \forall j \in \{1, \dots, 9\}$ , vemos que

$$\begin{cases} (sr^k)r^i = sr^{k+i} = r^{-(k+i)}s \\ r^i(sr^k) = r^i r^{-k}s = r^{(i-k)}s \end{cases}$$

Igualando ambas expresiones, se obtiene

$$r^{-(k+i)}s = r^{(i-k)}s \xLeftrightarrow{(1)} r^{-(k+i)} = r^{i-k} \xLeftrightarrow{(2)} r^{(i-k)+(k+i)} = 1 \iff r^{2i} = 1$$

donde en (1) se ha multiplicado por la derecha en ambos miembros de la igualdad por  $s$ , y se ha usado que  $s^2 = 1$ , y en (2) se ha hecho lo mismo, pero con  $r^{k+i}$ .

Ahora, como  $O(r) = 9$ , necesariamente debe ser  $9 \mid 2i$ , para algún  $i \in \{1, \dots, 8\}$ , pero como además  $\text{mcd}(9, 2) = 1$ , debe ser  $9 \mid i$ , con  $i \in \{1, \dots, 8\}$ . Contradicción que viene de suponer que  $\exists x = sr^k \in C_{D_9}(r^i)$ .

Como  $i$  era fijo, pero arbitrario, concluimos que  $C_{D_9}(r^i) = \langle r \rangle$  para cada  $i \in \{1, \dots, 8\}$ .

(e) Calcula el centro de  $D_9$ .

Por definición, el centro de  $D_9$  es

$$Z(D_9) = \{x \in D_9 : xy = yx \quad \forall y \in D_9\}$$

Sabemos que  $Z(D_9) < D_9$  (además es normal), luego  $\{1\} \subseteq Z(D_9)$ . Veamos ahora que  $Z(D_9) \subseteq \{1\}$ , siguiendo un razonamiento similar al que se ha hecho en el apartado d), pero encontrando contraejemplos.

- Si  $x = sr^k$  con  $k \in \{1, \dots, 9\}$ , entonces, si  $x \in Z(D_9)$ , en particular  $x$  conmutaría con  $r$ , pero:

$$(sr^k)r = sr^{k+1} = r^{-(k+1)}s$$

$$r(sr^k) = r(r^{-k}s) = r^{1-k}s$$

Igual que en el apartado d)

$$r^{-(k+1)}s = r^{1-k}s \iff r^{-(k+1)} = r^{1-k} \iff r^{(1-k)+(k+1)} = 1 \iff r^2 = 1$$

Cosa que sabemos que es falsa. Por tanto,  $x \notin Z(D_9)$ .

- Si  $x = r^k$  con  $k \in \{1, \dots, 9\}$ , entonces, si  $x \in Z(D_9)$ , en particular,  $x$  conmutaría con  $s$ , luego  $r^k s = sr^k$ , pero, por otro lado, sabemos que  $sr^k = r^{-k}s$ , por lo que, igualando ambas expresiones de  $sr^k$ , llegamos a que:

$$r^k s = sr^k = r^{-k}s \iff r^k = r^{-k} \iff r^{2k} = 1$$

Aplicando el mismo argumento que en el apartado d),  $9 \mid 2k \wedge \text{mcd}(9, 2) = 1 \implies 9 \mid k$ , con  $k \in \{1, \dots, 9\}$ . Necesariamente entonces  $k = 9$ , y  $x = r^9 = 1$ .

Concluimos entonces que  $Z(D_9) = \{1\}$ . Nótese que si  $D_9$  fuera un  $p$ -grupo, por el Teorema de Burnside,  $Z(D_9)$  sería no trivial.

- (f) ¿Es normal el subgrupo  $H = \langle s \rangle \subseteq D_9$ ? En caso contrario, calcula su normalizador en  $D_9$ .

Usando la caracterización de los subgrupos normales,  $H \triangleleft D_9 \iff \forall h \in H, \forall x \in D_9 \implies xhx^{-1} \in H$ . Tomando  $s = h \in H$ , y  $r = x \in D_9$ , vemos que

$$rsr^{-1} = rsr^8 = rr^{-8}s = r^{-7}s = sr^7 \notin H = \langle s \rangle = \{1, s\}$$

Por lo tanto,  $H$  no es normal en  $D_9$ . Por definición, su normalizador es

$$N_{D_9}(H) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in D_9 : xH = Hx\} = \{x \in D_9 : xHx^{-1} = H\}$$

Sabemos que el normalizador se caracteriza como el mayor subgrupo (en este caso de  $D_9$ ) en el que  $H$  es normal. Así,  $x \in N_{D_9}(H) \iff \forall h \in H, \exists h' \in H : xhx^{-1} = h'$

Basta comprobar la conjugación para los dos generadores de  $D_9$ ,  $r$  y  $s$ . Como la conjugación preserva órdenes, y  $O(s) = 2$ , entonces  $xsx^{-1} = s \iff xs = sx$ . Distinguimos entre los dos posibles tipos de elementos de  $D_9$ , como venimos haciendo hasta ahora.

- Si  $x = r^k$  con  $k \in \{1, \dots, 9\}$ , entonces

$$r^k s = sr^k = r^{-k} s \implies r^{2k} = 1 \implies 9 \mid 2k \implies 9 \mid k$$

lo cual implica que  $k = 9$ , y entonces  $x = r^9 = 1$ . Así,  $1 \in N_{D_9}(H)$ , y  $r^k \notin N_{D_9}(H)$  para cada  $k \in \{1, \dots, 8\}$ .

- Si  $x = sr^k$  con  $k \in \{1, \dots, 9\}$ , entonces

$$(sr^k)s = s(sr^k) \iff (sr^k)s = r^k \iff (r^{-k}s)s = r^k \iff r^{2k} = 1$$

lo que implica que  $9 \mid 2k \implies 9 \mid k \implies k = 9$ , de donde  $x = sr^9 = s$ . Así,  $s \in N_{D_9}(H)$ , y vemos que, junto con el neutro, no hay más elementos en  $N_{D_9}(H)$ , por lo que concluimos que  $N_{D_9}(H) = H = \langle s \rangle = \{1, s\}$

- (g) Consideremos el subgrupo  $N = \langle r^3, s \rangle \subseteq D_9$ , prueba que  $N$  es isomorfo a  $D_3$ .

Vemos que los elementos de  $N$  serán de la forma  $r^{3i}$   $i \in \{1, \dots, 9\}$ , o bien  $sr^{3i}$   $i \in \{1, \dots, 9\}$ . Como por el apartado a) sabemos que  $O(r^3) = 3$ , entonces  $|\langle r^3 \rangle| = 3$ , y  $\langle r^3 \rangle = \{1, r^3, r^6\}$ . Ahora, añadiéndole el generador  $s$ , tenemos los otros 3 elementos, y podemos dar  $N$  por extensión:  $N = \{1, r^3, r^6, s, sr^3, sr^6\}$  Como  $sr^i \neq sr^j \quad \forall i \neq j, i, j \in \{1, \dots, 9\}$ , también será  $sr^{3i} \neq sr^{3j}$  puesto que  $3i \neq 3j \iff i \neq j$ , entonces los tres elementos  $s, sr^3, sr^6$  son distintos, por lo que  $|N| = 6 = 2 \cdot 3 = |D_3|$ . Ahora, veamos dos opciones para probar que  $N \cong D_3$ .

**Opción 1.** Aplicar el Teorema de Dyck. De esta manera, se podrá encontrar un homomorfismo  $f : N \rightarrow D_3$ . Para ello, veamos que  $r^3$  y  $s$  verifican las relaciones de  $r$  y  $s$  en  $D_3$ , que son  $r^3 = 1$ ,  $s^2 = 1$  y  $rs = sr^{-1} = sr^2$ .

$$(r^3)^3 = 1^3 = 1$$

$$s^2 = 1$$

$$r^3 s = s(r^3)^2 = sr^6 = r^{-6}s \iff r^3 = r^{-6} = r^{-3} \cdot r^{-3} = (r^3)^{-1} \cdot (r^3)^{-1} = 1$$

Donde hemos usado que  $O(r^3) = 1$  en  $D_3$  para la primera y tercera relación. Así pues, por el Teorema de Dyck, existe un homomorfismo  $f : N \rightarrow D_3$  de tal manera que  $f(r^3) = r \in D_3$  y  $f(s) = s \in D_3$ . Como  $D_3 = \langle r, s \rangle$ ,  $f$  es un epimorfismo y como  $|N| = |D_3| = 6$ , entonces  $f$  será un isomorfismo, luego  $N \cong D_3$ .

**Opción 2.** Usar la teoría general de clasificación de grupos finitos. Sabemos que el único grupo no abeliano de orden 6 (salvo isomorfismo), es  $D_3$ . Ahora, también sabemos que  $N$  es un grupo. Vemos que no es abeliano pues, tomando  $sr^3 \in N$ , este no conmuta con  $s \in N$  pues

$$(sr^3)s = s(sr^3) = r^3 \iff (r^{-3}s)s = r^{-3} = r^3 \iff r^3 = 1$$

donde en la última equivalencia se ha multiplicado por  $(r^3)^{-1} = r^6$  en  $N$ . Como  $O(r^3) = 3$ , vemos que  $(sr^3)s \neq s(sr^3)$ . Tenemos entonces que  $N$  es un grupo no abeliano de orden 6, luego necesariamente debe ser  $N \cong D_3$ .

(h) ¿Es  $N$  un subgrupo normal de  $D_9$ ?

Usando nuevamente la caracterización de subgrupo normal de un grupo, se tiene que  $N \triangleleft D_9 \iff \forall n \in N, \forall x \in D_9 \implies xnx^{-1} \in N$ . Tomando  $s = n \in N$ , y  $r = x \in D_9$ , vemos que

$$rsr^{-1} = (sr^8)r^{-1} = sr^7 \notin N$$

porque  $sr^i \in N \iff i \in \{3, 6, 9\}$ . Como  $i = 7$ ,  $rsr^{-1} \notin N$ , luego  $N$  no es un subgrupo normal de  $D_9$ .

**Ejercicio 3** (2 puntos). Una presentación del grupo abeliano  $A$  está dada por:

$$A = \left\langle x, y, z, t \mid \begin{array}{cccc} 12x & + & 18y & + & 6z & & = & 0 \\ 9x & + & 9y & + & 9z & + & 6t & = & 0 \\ 6x & + & 9y & + & 27z & + & 6t & = & 0 \end{array} \right\rangle$$

- (a) Calcula, de forma razonada, el rango (de la parte libre) y las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de  $A$  y, si  $T(A)$  denota el grupo de torsión de  $A$ , determina su longitud y sus factores de composición.

La matriz de relaciones es  $M = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 6 & 0 \\ 9 & 9 & 9 & 6 \\ 6 & 9 & 27 & 6 \end{pmatrix} = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}}$

Como  $\gcd((m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}}) = \gcd(12, 18, 6, 0, 9, 27) = 3$ , buscamos que

$$m_{11} = 3 \quad \wedge \quad m_{1j} = 0 \quad \wedge \quad m_{i1} = 0, \quad i, j > 1$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 18 & 6 & 0 \\ 9 & 9 & 9 & 6 \\ 6 & 9 & 27 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 6 & 9 & 27 & 6 \\ 9 & 9 & 9 & 6 \\ 12 & 18 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 6 & 9 & 27 & 6 \\ 3 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -48 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & -18 & 0 \\ 6 & 9 & 27 & 6 \\ 0 & 0 & -48 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 + 6C_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 63 & 6 \\ 0 & 0 & -48 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 63 & 6 \\ 0 & 0 & -48 & -12 \end{pmatrix}$$

Ahora como  $\gcd((m_{ij})_{\substack{2 \leq i \leq 3 \\ 2 \leq j \leq 4}}) = \gcd(9, 63, 6, 0, -48, -12) = 3$ , buscamos que

$$m_{22} = 3 \quad \wedge \quad m_{2j} = 0 \quad \wedge \quad m_{i2} = 0, \quad i, j > 2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 63 & 6 \\ 0 & 0 & -48 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 - C_4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 63 & 6 \\ 0 & 12 & -48 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 4F_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 63 & 6 \\ 0 & 0 & -300 & -36 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 - 21C_2]{C_4 - 2C_2} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -300 & -36 \end{pmatrix}$$

Por último, vemos que  $\gcd((m_{ij})_{\substack{3 \leq i \leq 3 \\ 3 \leq j \leq 4}}) = \gcd(-300, -36) = 12$ , buscamos que  $m_{33} = 12$  y que  $m_{34} = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -300 & -36 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 - 8C_4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 - 3C_3}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, como tenemos 4 generadores, y el rango de la matriz es  $r = 3$ , tendremos que

$$A \cong \mathbb{Z}^{4-3} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{12}$$

La descomposición cíclica de  $A$  es

$$C_3 \oplus C_3 \oplus C_{12}$$

y la descomposición cíclica primaria de  $A$  es

$$C_3 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_4$$

El rango de la parte libre es 1, y su grupo de torsión es:

$$T(A) \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4)$$

con  $|T(A)| = 3 \cdot 3 \cdot 12 = 108 = 2^3 \cdot 3^3$ .

Ahora, hallamos la longitud y los factores de composición de  $T(A)$ . Para ello, usaremos que, dado un grupo, una serie normal es de composición si, y sólo si, sus factores son grupos simples, y que un grupo es abeliano y simple si, y sólo si, es de orden primo. Además, usaremos que todo subgrupo de un grupo abeliano es un subgrupo normal.

Definimos:

- a)  $G_0 = T(A) \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$
- b)  $G_1 = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$
- c)  $G_2 = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$
- d)  $G_3 = \mathbb{Z}_4$
- e)  $G_4 = 2\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2$
- f)  $G_5 = \{0\}$

Cada cociente  $G_{k-1}/G_k$  es abeliano y simple para  $k \in \{1, 2, 3\}$ , porque es de orden primo 3, y para  $k \in \{4, 5\}$ , igual, pero siendo el orden primo 2.

Por construcción, tenemos la siguiente serie de composición:

$$G_0 \overset{3}{\triangleright} G_1 \overset{3}{\triangleright} G_2 \overset{3}{\triangleright} G_3 \overset{2}{\triangleright} G_4 \overset{2}{\triangleright} G_5 = \{0\}$$

De esta manera, la longitud de composición es 5.

- (b) Clasifica, dando sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, todos los grupos abelianos cuyo orden sea el orden de  $T(A)$  e identifica cuál de ellos es justamente  $T(A)$ .

Sea  $G$  un grupo abeliano, verificando que  $|G| = |T(A)| = 108 = 2^2 \cdot 3^3$ . Clasifiquemos:

Divisores elementales	desc. cíclica primaria	factores invariantes	desc. cíclica
$\{2^2, 3^3\}$	$C_4 \oplus C_{27}$	$d_1 = 2^2 \cdot 3^3 = 108$	$C_{108}$
$\{2^2, 3, 3^2\}$	$C_4 \oplus C_3 \oplus C_9$	$d_1 = 2^2 \cdot 3^2 = 36$ $d_2 = 3$	$C_{36} \oplus C_3$
$\{2^2, 3, 3, 3\}$	$C_4 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_3$	$d_1 = 2^2 \cdot 3 = 12$ $d_2 = 3$ $d_3 = 3$	$C_{12} \oplus C_3 \oplus C_3$
$\{2, 2, 3^3\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_{27}$	$d_1 = 2 \cdot 3^3 = 54$ $d_2 = 2$	$C_{54} \oplus C_2$
$\{2, 2, 3, 3^2\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_9$	$d_1 = 2 \cdot 3^2 = 18$ $d_2 = 2 \cdot 3 = 6$	$C_{18} \oplus C_6$
$\{2, 2, 3, 3, 3\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_3$	$d_1 = 2 \cdot 3 = 6$ $d_2 = 2 \cdot 3 = 6$ $d_3 = 3$	$C_6 \oplus C_6 \oplus C_3$

Por medio de los factores invariantes, vemos que el grupo que coincide con  $T(A)$  es el que tiene factores invariantes  $(3, 3, 12)$ , que sería el resultante de considerar como divisores elementales, según la clasificación anterior,  $\{2^2, 3, 3, 3\}$ , es decir:

$$T(A) \cong C_{12} \oplus C_3 \oplus C_3 \cong C_3 \oplus C_3 \oplus C_{12}$$

**Ejercicio 4** (2 puntos). Sea  $G$  un grupo de orden 28.

- (a) Razona que  $G$  es el producto semidirecto  $P_7 \rtimes P_2$  con  $P_7$  y  $P_2$  un 7-subgrupo y un 2-subgrupo de Sylow de  $G$ , respectivamente.

Como  $|G| = 28 = 2^2 \cdot 7$ , por el Primer Teorema de Sylow tenemos garantizada la existencia de 2-subgrupos de Sylow y 7-subgrupos de Sylow en  $G$ . Sea  $n_7$  el número de 7-subgrupos de Sylow que hay en  $G$ . Entonces, por el Segundo Teorema de Sylow, tenemos que

$$n_7 \mid 4 \quad \wedge \quad n_7 \equiv 1 \pmod{7} \implies n_7 = 1$$

Hay un único 7-subgrupo de Sylow, pongamos  $P_7$ , que además, por ser el único 7-subgrupo de Sylow, será normal,  $P_7 \triangleleft G$  con  $|P_7| = 7$ .

Ahora, consideramos un 2-subgrupo de Sylow,  $P_2$ . Buscamos aplicar la Propiedad Universal del Producto Semidirecto. Primero, veamos por reducción al absurdo que  $P_2 \cap P_7 = \{1\}$ . Si  $P_2 \cap P_7 \neq \{1\} \implies \exists x \in P_2 \cap P_7$  tal que  $x \neq 1$ .

Entonces, por el Teorema de Lagrange,  $O(x) \mid |P_2| = 4 \wedge O(x) \mid |P_7| = 7$ , por lo que  $O(x) \in \{1, 2, 4\} \cap \{1, 7\} \implies O(x) = 1 \iff x = 1$ , contradicción que viene de suponer que  $P_2 \cap P_7 \neq \{1\}$ . Así, debe ser  $P_2 \cap P_7 = \{1\}$ . Ahora, por el Segundo Teorema de Isomorfía:

$$\frac{P_2}{P_2 \cap P_7} \cong \frac{P_2 P_7}{P_7} \implies |P_2 P_7| = \frac{|P_2| |P_7|}{|P_2 \cap P_7|} = 4 \cdot 7 = 28 = |G|$$

de esta manera,  $P_2 P_7 = G$ , y como  $P_7 \triangleleft G$ , entonces  $G$  es el producto semidirecto de  $P_7$  y  $P_2$ , es decir,  $G \cong P_7 \rtimes P_2$ .

- (b) Razona que si  $G$  tiene un elemento de orden 4, entonces hay exactamente dos productos semidirectos (no isomorfos)  $P_7 \rtimes P_2$ : uno de ellos abeliano y el otro no abeliano, da una presentación de este último.

Sea  $y \in G$ , con  $O(y) = 4$ . Entonces, por el Teorema de Lagrange,  $O(y) \mid |G|$ , y vemos que  $|\langle y \rangle| = 4 = |P_2|$ , por lo que  $\langle y \rangle$  es un 2-subgrupo de Sylow, y además  $\langle y \rangle \cong C_4$ . Consideramos  $\langle y \rangle \cong P_2$ , así como  $P_7 \cong C_7$ . Ahora, buscamos homomorfismos  $\theta : C_4 \rightarrow \text{Aut}(C_7)$ . Primero veamos los generadores de  $C_7$ . Sea  $a \in C_7$  tal que  $\langle a \rangle \cong C_7$ . Como  $\varphi(7) = 6$ , habrá 6 generadores, que son aquellos coprimos con 7, es decir:

$$\langle a^i \rangle \quad i \in \{1, \dots, 6\}$$

Para cada  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , definimos entonces el automorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_i : \langle a \rangle &\longrightarrow \langle a \rangle \\ a &\longmapsto a^i \end{aligned}$$

Ahora, hay que ver cuáles de entre todos estos son automorfismos válidos. Trabajamos con  $i \in \{1, \dots, 6\}$  fijo, y vemos que dado que  $O(y) = 4 \implies O(\theta(y)) \mid 4 \implies O(\theta(y)) \in \{1, 2, 4\}$

Veamos que  $O(\theta(y)) \neq 4$ . Como  $\theta(y) \in \text{Aut}(C_7) \implies O(\theta(y)) \mid |\text{Aut}(C_7)| = 6$ . Por tanto, tenemos que  $O(\theta(y)) \mid 4 \wedge O(\theta(y)) \mid 6 \implies O(\theta(y)) \mid \text{mcd}(4, 6) = 2$ . Así,  $O(\theta(y)) \in \{1, 2\}$ . Distinguimos en función de estos dos valores.

- Si  $O(\theta(y)) = 1$ , entonces  $\theta(y) = \varphi_1$ , y por tanto,  $\theta$  es el homomorfismo trivial, y  $G \cong P_7 \times P_2$ , que es abeliano, por ser producto directo de abelianos ( $P_7 \cong C_7$ , luego cíclico, luego abeliano, y  $P_2$  tiene orden cuadrado de un primo, luego, por el Corolario del Teorema de Burnside, es abeliano).
- Si  $O(\theta(y)) = 2$ , hay que comprobar cuáles son los automorfismos que tienen orden 2:

$$(\varphi_i \circ \varphi_i)(a) = \varphi_i(\varphi_i(a)) = \varphi_i(a^i) = (a^i)^i = a^{i \cdot i} = a^{i^2}$$



Ahora,  $O(\varphi_i) = 2 \iff a^{i^2} = a \iff i^2 \equiv 1 \pmod{7} \iff i \in \{1, 6\}$ . Como  $O(\theta(y)) \neq 1 \implies i \neq 1$ , luego  $i = 6$  necesariamente, y el único automorfismo válido sería  $\varphi_6$ . Por tanto:

$$yay^{-1} = \varphi_6(a) = a^6 = a^{-1} \implies ya = a^{-1}y$$

Así pues, obtenemos que  $G$  es isomorfo a un grupo no abeliano con la siguiente presentación  $G \cong \langle a, y : a^7 = 1, y^4 = 1, ya = a^{-1}y \rangle$ .

- (c) Concluye que hay sólo 4 grupos de orden 28, dos abelianos y dos no abelianos. Da las descomposiciones cíclicas de los abelianos y presentaciones de los no abelianos.

Como  $|G| = 28 = 2^2 \cdot 7$ , y hemos visto en el apartado a) que  $G \cong P_7 \rtimes P_2$ , los posibles isomorfismos a grupos abelianos o no abelianos vendrán determinados por el homomorfismo que se tome, y de a quién sea isomorfo  $P_2$ . Como  $|P_2| = 4$ , hay dos posibles isomorfismos que son  $P_2 \cong C_4$  o  $P_2 \cong C_2 \times C_2 \cong V^{abs}$  (nótese que ambos isomorfismos son distintos, puesto que  $C_4$  es cíclico, y  $V^{abs}$  no). También hemos visto en el apartado b) que los únicos homomorfismos válidos eran aquellos que llegaban a los automorfismos  $\varphi_1$  (el trivial), o  $\varphi_6$  (el no trivial). Con esto, distinguimos, en primer lugar, si se toma la acción trivial o no, y, en caso de no tomarse, del isomorfismo que se tome de  $P_2$ . Recordemos que dado un grupo  $G$  y un conjunto no vacío  $X$ , dar una acción de  $G$  sobre  $X$  equivale a dar un homomorfismo de grupos de  $G$  en  $\text{Perm}(X)$  (este homomorfismo es la representación de  $G$  por permutaciones).

- Si se toma la acción trivial, entonces  $G \cong P_7 \times P_2$ , y como  $P_7 \cong C_7$  y  $P_2 \cong C_4$ , entonces  $G$  es abeliano, por ser producto directo de grupos cíclicos, luego abelianos. Clasificamos como en el apartado b) del ejercicio 3:

Divisores elementales	desc. cíclica primaria	factores invariantes	desc. cíclica
$\{2^2, 7\}$	$C_4 \oplus C_7$	$d_1 = 2^2 \cdot 7 = 28$	$C_{28}$
$\{2, 2, 7\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_7$	$d_1 = 2 \cdot 7 = 14$ $d_2 = 2$	$C_{14} \oplus C_2$

- En caso de no tomar la acción trivial, distinguimos según los isomorfismos de  $P_2$  que se tomen,  $P_2 \cong C_4$  o  $P_2 \cong V^{abs}$ .
  - Si  $P_2 \cong C_4$ , entonces, por el apartado b),  $G$  es isomorfo a un grupo no abeliano con la presentación siguiente

$$G \cong \langle a, y : a^7 = 1, y^4 = 1, ya = a^{-1}y \rangle$$

- Si  $P_2 \cong C_2 \times C_2 \cong V^{abs}$ , recordamos que  $V^{abs}$  se puede presentar como  $V^{abs} = \langle b, c : b^2 = c^2 = 1, bc = cb \rangle = \{1, b, c, bc\}$ . Sabemos que para  $n \geq 3$ , si  $\theta : C_2 \rightarrow \text{Aut}(C_n)$ , dado por  $\theta(y)(x) = x^{-1} \quad \forall y \in C_2, \forall x \in C_n$ , entonces  $C_n \rtimes_{\theta} C_2 \cong D_n$ . Este homomorfismo coincide con

el homomorfismo  $\theta : P_2 \rightarrow \text{Aut}(C_7)$ , que llega al automorfismo  $\varphi_6$ , y entonces  $G \cong P_7 \rtimes P_2 \cong C_7 \rtimes_{\theta} (C_2 \times C_2) \cong (C_7 \rtimes_{\theta} C_2) \times C_2 \cong D_7 \times C_2$ , de tal manera que  $G$  no es abeliano, por no serlo  $D_7$ .

La presentación de este último grupo no abeliano será entonces

$$G \cong \langle a, b, c : a^7 = 1, b^2 = c^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1}, algo \rangle$$

Como  $\theta : V^{abs} \rightarrow \text{Aut}(C_7)$ , entonces  $\text{Im}(\theta) = \langle \varphi_6 \rangle$ , y ya hemos visto que  $O(\varphi_6) = 2$  en el apartado b), por lo que  $|\langle \varphi_6 \rangle| = 2$ , y entonces, por el Primer Teorema de Isomorfía:

$$\frac{V^{abs}}{\ker \theta} \cong \text{Im}(\theta) \cong C_2 \implies |\ker \theta| = \frac{|V^{abs}|}{|C_2|} = \frac{4}{2} = 2$$

Ahora, tomando  $b, c \in V^{abs}$  los dos generadores, hay cuatro posibilidades para el par  $(\theta(b), \theta(c))$ :

- o Si  $\theta(b) = \theta(c) = \varphi_1$ , estamos en el caso de la acción trivial, ya estudiado.
- o Si  $\theta(b) = \varphi_6$ , entonces  $\text{Im}(\theta) = \langle \theta(b) \rangle$ , y entonces  $\theta(c) = \varphi_1$ , luego  $\ker(\theta) = \langle c \rangle$ . En tal caso, como

$$\begin{aligned} \ker \theta &= \{h \in V^{abs} : \theta(h) = \varphi_1\} = \{h \in V^{abs} : \theta(h)(k) = k \quad \forall k \in P_7\} = \\ &= \{h \in V^{abs} : hkh^{-1} = k \quad \forall k \in P_7\} \end{aligned}$$

por estar  $c \in \ker \theta$ , tomando  $a \in P_7$ , se tiene que  $cac^{-1} = a \iff ca = ac \iff [c, a] = 1$ . Por la presentación de  $V^{abs}$ , ya sabemos que  $bc = cb$  luego  $[b, c] = [c, b] = 1$ , y obtenemos la presentación final del último grupo no abeliano.

$$G \cong \langle a, b, c : a^7 = 1, b^2 = c^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1}, [c, a] = [c, b] = 1 \rangle$$

- o Si  $\theta(c) = \varphi_6$ , entonces  $\text{Im}(\theta) = \langle \theta(c) \rangle$ , y entonces  $\theta(b) = \varphi_1$ , luego  $\ker(\theta) = \langle b \rangle$ , y el resultado que se obtendría sería el mismo que en el caso anterior cambiando los papeles de  $b$  con los de  $c$ .
- o Si  $\theta(b) = \theta(c) = \varphi_6$ , entonces

$$\theta(bc) = \theta(b)\theta(c) = \varphi_6^2 = \varphi_1$$

donde en la primera igualdad se ha usado que  $\theta$  es un homomorfismo, y en la tercera que  $O(\varphi_6) = 2$ . Entonces,  $\ker(\theta) = \langle bc \rangle$ , y  $\text{Im}(\theta) = \langle \varphi_6 \rangle$ . Definiendo  $c' = bc$  y  $b' = b$  como nuevos generadores, comprobamos que cumplen todas las relaciones:  $O(b') = 2$ , pues  $b' = b$ , y  $O(b) = 2$ .  $O(c') = 2$ , pues

$$(c')^2 = (c')(c') = (bc)(bc) = bccb = bc^2b = b^2 = 1$$

donde se han usado las relaciones de  $V^{abs}$ .

Como  $\theta(b') = \theta(b) = \varphi_6$ , se sigue cumpliendo que  $b'a(b')^{-1} = a^{-1}$ .

También se verifica que

$$\begin{aligned} c'a(c')^{-1} &= (bc)a(bc)^{-1} = (bc)a(c^{-1}b^{-1}) = b(cac^{-1})b^{-1} = b(a^{-1})b^{-1} = \\ &= (bab^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1} = a \end{aligned}$$

Vemos por último que  $[b', c'] = 1$ , pues

$$b'c' = b(bc) = c$$

$$c'b' = (bc)b = (cb)b = c$$

donde en la penúltima igualdad se ha usado la relación de  $V^{abs}$ . En definitiva, la presentación resultante es la misma pero con otros nombres:

$$G \cong \langle a, b', c' : a^7 = 1, (b')^2 = (c')^2 = 1, (b')a(b')^{-1} = a^{-1}, [c', a] = [c', b'] = 1 \rangle$$

**Ejercicio 5** (2 puntos). Demuestra el Teorema de Cauchy. Concluye que, si  $G$  es finito, entonces  $G$  es un  $p$ -grupo si y sólo si su orden es una potencia de  $p$ .

*Observación.* Si desea encontrar una demostración más detallada de este teorema, puede consultar el Temario o las Relaciones de la asignatura de Álgebra II.

Primero definimos qué es un  $p$ -grupo.

**Definición 0.1** ( $p$ -grupo). Si  $p$  es un número primo, un grupo  $G$  se dice que es un  $p$ -grupo si todo elemento de  $G$  distinto del neutro tiene orden una potencia de  $p$ . Si  $G$  es un grupo, diremos que  $H < G$  es un  $p$ -subgrupo si  $H$  es un  $p$ -grupo.

Necesitaremos el siguiente lema para la demostración:

**Lema 0.1** (Relación Entre los Conjuntos Notables Orb y Stab de un  $G$ -conjunto). Sea  $G$  un grupo finito que actúa sobre  $X$ , entonces para cada  $x \in X$ ,  $\text{Orb}(x)$  es un conjunto finito y:

$$|\text{Orb}(x)| = [G : \text{Stab}_G(x)]$$

En particular, el cardinal de la órbita es un divisor del orden de  $G$ .

Ahora enunciamos y demostramos el Teorema de Cauchy.

**Teorema 0.2** (Teorema de Cauchy). *Si  $G$  es un grupo finito, y  $p$  es un primo que divide a  $|G|$ , entonces  $G$  tiene un elemento de orden  $p$ , y, por tanto, tendrá un  $p$ -subgrupo de orden  $p$ .*

*Demostración.* Consideramos:

$$X = \{(a_1, \dots, a_p) \in G^p : a_1 \cdots a_p = 1\}$$

Si  $|G| = n$ , entonces  $|X| = n^{p-1}$ , ya que elegimos libremente las  $p - 1$  primeras coordenadas (variación con repetición):

$$a_1, \dots, a_{p-1} \in G \quad \text{arbitrarios}$$

Y la última viene condicionada por:

$$a_p = (a_1, \dots, a_{p-1})^{-1}$$

Sea ahora  $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ p) \in S_p$ . Consideramos  $H = \langle \sigma \rangle = \{1, \sigma, \dots, \sigma^{p-1}\} \subseteq S_p$ . Consideramos también la acción  $ac : H \times X \rightarrow X$ :

$$ac(\sigma^k, (a_1, \dots, a_p)) = (a_{\sigma^k(1)}, \dots, a_{\sigma^k(p)}) \quad \forall (a_1, \dots, a_p) \in X, \quad \forall \sigma^k \in H$$

En efecto, es una acción, pues:

- Tomando como neutro  $1 = \sigma^0$ , tenemos que, para  $x = (a_1, \dots, a_p) \in X$  arbitrario:

$$ac(\sigma^0, (a_1, \dots, a_p)) = (a_{\sigma^0(1)}, \dots, a_{\sigma^0(p)}) = (a_1, \dots, a_p)$$

que es la identidad de  $X$ .

- Si tenemos  $\sigma^k, \sigma^l \in H$ , es decir,  $k, l \in \{0, \dots, p-1\}$  arbitrarios, y  $x = (a_1, \dots, a_p) \in X$ , entonces:

$$\begin{aligned} ac(\sigma^k \sigma^l, x) &= ac(\sigma^{k+l}, x) = (a_{\sigma^{k+l}(1)}, \dots, a_{\sigma^{k+l}(p)}) = (a_{\sigma^k(\sigma^l(1))}, \dots, a_{\sigma^k(\sigma^l(p))}) = \\ &= ac(\sigma^k, (a_{\sigma^l(1)}, \dots, a_{\sigma^l(p)})) = ac(\sigma^k, ac(\sigma^l, x)) \end{aligned}$$

Por el Lema 0.1, tenemos que:

$$|\text{Orb}(z)| = [H : \text{Stab}_H(z)] = \frac{|H|}{|\text{Stab}_H(z)|} \quad \forall z \in X$$

De donde tenemos que  $|\text{Orb}(a_1, \dots, a_p)|$  es un divisor de  $H$   $\forall (a_1, \dots, a_p) \in X$ . En dicho caso,  $|\text{Orb}(a_1, \dots, a_p)| \in \{1, p\}$ , por ser  $|H| = p$  (y ser  $p$  primo). Por tanto, las órbitas de un elemento serán unitarias o bien tendrán cardinal  $p$ .

Así, sean  $r$  el número de órbitas con un elemento, y  $s$  el número de órbitas con  $p$  elementos, entonces (con  $|\Gamma| = s$ ):

$$n^{p-1} = |X| = |\text{Fix}(X)| + \sum_{y \in \Gamma} |\text{Orb}(y)| = r + \sum_{y \in \Gamma} p = r + sp$$

Veamos ahora cómo son los elementos de  $\text{Orb}(a_1, \dots, a_p)$ :

$$\begin{aligned} \text{Orb}(a_1, \dots, a_p) &= \{\sigma^k(a_1, \dots, a_p) : k \in \{0, \dots, p-1\}\} = \\ &= \{(a_1, \dots, a_p), (a_2, \dots, a_p, a_1), \dots, (a_p, a_1, \dots, a_{p-1})\} \end{aligned}$$

Por tanto, la órbita será unitaria si, y sólo si,  $a_1 = \dots = a_p$ . Además, sabemos de la existencia de órbitas con un elemento ( $r \geq 1$ ), como  $\text{Orb}(1, \dots, 1)$ . Busquemos más: por hipótesis,  $p|n$ , y además  $r = n^{p-1} - sp$ , de donde  $p|r$ , luego  $r \geq 2$ , ya que lo divide un primo.

En conclusión,  $\exists a \in G \setminus \{1\}$  de forma que  $\text{Orb}(a, \dots, a)$  es unitaria, de donde  $a^p = 1$ , luego  $O(a)|p$ , y sabemos que  $O(a) \neq 1$  (porque  $O(a) = 1 \iff a = 1$ , y  $a \in G \setminus \{1\}$ ). Así pues, debe ser  $O(a) = p$ .

Finalmente, sea  $x \in \langle a \rangle \setminus \{1\}$ , tenemos entonces que  $1 \neq O(x)|p$ , por lo que  $O(x) = p$ , y tenemos consecuentemente que todo elemento del subgrupo  $\langle a \rangle$  es de orden  $p$ . En definitiva,  $\langle a \rangle$  es un  $p$ -subgrupo de  $G$  de orden  $p$ , como queríamos probar.  $\square$

Ahora, concluimos que, si  $G$  es finito, entonces  $G$  es un  $p$ -grupo si y sólo si su orden es una potencia de  $p$ . Lo enunciamos como corolario:

**Corolario 0.2.1** (Corolario del Teorema de Cauchy). *Sea  $G$  un grupo finito y  $p$  un número primo:*

$$G \text{ es un } p\text{-subgrupo} \iff \exists n \in \mathbb{N} : |G| = p^n$$

*Demostración.* Lo probaremos por doble implicación:

$\Leftarrow$ ) Si  $|G| = p^n$  para cierto  $n \in \mathbb{N}$ , entonces tendremos que  $O(x)|p^n$  para todo  $x \in G$ , de donde  $O(x) = p^k$  para cierto  $k \in \mathbb{N}$ , luego  $G$  es un  $p$ -subgrupo por definición.

$\Rightarrow$ ) Suponemos que  $q$  es un primo que divide al orden de  $|G|$  (por el Teorema Fundamental de la Aritmética, todo número entero mayor que 1, en este caso,  $|G| > 1$ , tiene al menos un factor primo). Por el Teorema de Cauchy (Teorema 0.2), debe existir  $x \in G$  de forma que  $O(x) = q$ . En tal caso, como  $G$  es un  $p$ -grupo (por hipótesis),  $q = p^r$  para cierto  $r \in \mathbb{N}$ , de donde (dado que  $q$  y  $p$  son primos),  $r = 1$  y  $q = p$ . De esta manera, el único primo que divide a  $|G|$  es  $p$ , por lo que será  $|G| = p^n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , como queríamos probar.  $\square$