

# Topología II

# Examen I



**Los Del DGIIM**, [losdeldgim.github.io](https://losdeldgim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Topología II

# Examen I

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Granada, 2025

**Asignatura** Topología II.

**Curso Académico** 2023/24.

**Grado** Grado en Matemáticas.

**Grupo** Grupo A.

**Descripción** Prueba del Tema 1.

**Fecha** 25 de abril de 2024.

**Ejercicio 1** (7.5 puntos). Sea  $X_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \geq 2\}$  con la topología usual inducida.

- a) Encontrar un retracto de deformación de  $X_n$  distinto de  $X_n$  (detallar la retracción y la homotopía).
- b) Estudiar si  $X_1 \cong X_n$  cuando  $n \geq 2$ .

**Ejercicio 2** (2.5 puntos). Sea  $X$  un conjunto con  $|X| \geq 2$ . Fijado  $x_0 \in X$  se considera la topología

$$T = \{U \subseteq X : x_0 \notin U\} \cup \{X\}$$

¿Es  $(X, T)$  contráctil?

### Solución.

**Ejercicio 1** (7.5 puntos). Sea  $X_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \geq 2\}$  con la topología usual inducida.

- a) Encontrar un retracto de deformación de  $X_n$  distinto de  $X_n$  (detallar la re-tracción y la homotopía).

Si consideramos:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 2\}$$

y definimos  $H : X_n \times [0, 1] \rightarrow X_n$  dada por:

$$H(x, t) = (1 - t)x + 2t \frac{x}{\|x\|}$$

observemos que  $\|x\| \neq 0$  para todo  $x \in X_n$  así como que:

$$\begin{aligned} \|H(x, t)\| &= \left\| (1 - t)x + 2t \frac{x}{\|x\|} \right\| = \|x\| \left( 1 - t + \frac{2t}{\|x\|} \right) = \|x\|(1 - t) + 2t \\ &\geq 2(1 - t) + 2t = 2 \quad \forall x \in X_n, \quad \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Por lo que  $H(x, t) \in X_n$  para todo  $(x, t) \in X_n \times [0, 1]$ , por lo que  $H$  está bien definida. Es claro también que  $H$  es continua, y observamos además que:

- $H(x, 0) = x \quad \forall x \in X_n$ .
- $H(x, 1) = \frac{2x}{\|x\|} \in S \quad \forall x \in X_n$ .
- Si  $y \in S$ :

$$H(y, 1) = 2 \frac{y}{\|y\|} = y$$

En definitiva, si consideramos  $r : X_n \rightarrow S$  dada por:

$$r(x) = H(x, 1) = 2 \frac{x}{\|x\|}$$

tenemos que  $H$  es una homotopía entre  $Id_{X_n}$  y  $i \circ r$  (con  $i : S \hookrightarrow X_n$ ), por lo que  $S$  es un retracto de deformación de  $X_n$ .

- b) Estudiar si  $X_1 \cong X_n$  cuando  $n \geq 2$ .

Para cada  $m \geq 1$  tenemos que  $S_m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| = 2\}$  es un retracto de deformación de  $X_m$ . Observamos además que la aplicación  $f : \mathbb{S}^m \rightarrow S_m$  dada por:

$$f(x) = 2x$$

es un homeomorfismo, de donde deducimos que:

$$\pi_1(X_m) = \pi_1(S_m) \cong \pi_1(\mathbb{S}^m) \quad \forall m \geq 1$$

Ahora, si  $n \geq 2$  tenemos por un lado que:

$$\pi_1(X_1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

y por otro lado que:

$$\pi_1(X_n) \cong \pi_1(\mathbb{S}^n) = \{1\}$$

Por lo que  $X_1$  y  $X_n$  no pueden ser homeomorfos.

**Ejercicio 2** (2.5 puntos). Sea  $X$  un conjunto con  $|X| \geq 2$ . Fijado  $x_0 \in X$  se considera la topología

$$T = \{U \subseteq X : x_0 \notin U\} \cup \{X\}$$

¿Es  $(X, T)$  contráctil?

Sí es contráctil, pues si consideramos  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$  dada por:

$$H(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } t \in [0, 1/2[ \\ x_0 & \text{si } t \in ]1/2, 1] \end{cases}$$

Si tomamos  $U \in T$ :

- Si  $U = X$  tenemos trivialmente que  $H^{-1}(X) = X \times [0, 1]$ , que es un conjunto abierto.
- Si  $U \neq X$  tenemos entonces que  $x_0 \notin U$ , y:

$$\begin{aligned} H^{-1}(U) &= \{(x, t) \in X \times [0, 1] : H(x, t) \in U\} \\ &= \{(x, t) \in X \times [0, 1] : (t \geq 1/2 \wedge x_0 \in U) \vee (t < 1/2 \wedge x \in U)\} \\ &= \{(x, t) \in X \times [0, 1] : t < 1/2 \wedge x \in U\} = U \times [0, 1/2[ \end{aligned}$$

Con  $U \times [0, 1/2[$  un conjunto abierto, como producto de dos conjuntos abiertos.

En definitiva, tenemos que  $H$  es continua, así como que:

- $H(x, 0) = x \quad \forall x \in X$ .
- $H(x, 1) = x_0 \quad \forall x \in X$ .

Por lo que  $H$  es una homotopía entre  $Id_X$  y la función constantemente igual a  $x_0$ , de donde  $\{x_0\}$  es un retracto de deformación de  $(X, T)$ , por lo que este espacio topológico es contráctil.