

Análisis Funcional

Examen III



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Análisis Funcional

Examen III

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2024/25.

Grado Grado en Matemáticas.

Descripción Examen Ordinario.

Fecha 15 de enero de 2025.

Ejercicio 1 (2 puntos). Sea $X = C([0, 1], \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0, 1]$ a \mathbb{R} . Se define

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0, 1]\} \quad \forall f \in X$$

y se escribe $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_\infty = (X, \|\cdot\|_\infty)$. Definimos el funcional lineal $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\delta(f) = f(0) \quad \forall f \in X$$

- a) Demuestra que $\delta \in X_\infty^*$ y calcula su norma.
- b) ¿Es δ continuo respecto a $\|\cdot\|_1$? Justifica tu respuesta.
- c) ¿Son equivalentes $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en X ? Justifica tu respuesta.
- d) ¿Es X_1 completo? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2 (2 puntos). Sea X un espacio reflexivo e Y un espacio de Banach. Pruébese que si existe $T \in L(X, Y)$ sobreyectiva, entonces Y es reflexivo.

Ejercicio 3 (2 puntos). Sean $S : c_0 \rightarrow c_0$ y $T : l_1 \rightarrow l_1$ operadores lineales y supongamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} [Sx](k)y(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)[Ty](k) \quad \forall x \in c_0, \quad \forall y \in l_1$$

Demuestra que S y T son continuos.

Ejercicio 4 (4 puntos). Desarrolla el siguiente tema: “*Mejor aproximación en espacios de Hilbert; teorema de la proyección ortogonal; teorema de Riesz-Fréchet*”.

Ejercicio 5. (Ejercicio extra)

Sean X, Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador verificando que $\overline{T(B_X)}$ es un subconjunto compacto de Y . Demuestra que T^* alcanza su norma.

Ejercicio 1 (2 puntos). Sea $X = C([0, 1], \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0, 1]$ a \mathbb{R} . Se define

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0, 1]\} \quad \forall f \in X$$

y se escribe $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_\infty = (X, \|\cdot\|_\infty)$. Definimos el funcional lineal $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\delta(f) = f(0) \quad \forall f \in X$$

- a) Demuestra que $\delta \in X_\infty^*$ y calcula su norma.

Veamos que $\delta \in X_\infty^*$:

- δ es lineal, pues si $f, g \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que:

$$\delta(\lambda f + g) = (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda \delta(f) + \delta(g)$$

- δ es continuo, pues si $f \in X$ tenemos:

$$|\delta(f)| = |f(0)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$$

Por lo que $\delta \in X_\infty^*$. De hecho, en el último apartado hemos probado además que $\|\delta\| \leq 1$. Veamos que $\|\delta\| = 1$, puesto que si consideramos cualquier función $f \in X$ de forma que $\max_{t \in [0, 1]} |f(t)| = |f(0)|$ tenemos entonces que:

$$|\delta(f)| = |f(0)| = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$$

- b) ¿Es δ continuo respecto a $\|\cdot\|_1$? Justifica tu respuesta.
 c) ¿Son equivalentes $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en X ? Justifica tu respuesta.
 d) ¿Es X_1 completo? Justifica tu respuesta.