Análisis Funcional

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Funcional

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Índice general

Se recomienda encarecidamente acompañar la asignatura de la lectura del libro "Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equations", de Haim Brezis, que puede encontrarse en la bibliografía de la asignatura.

1. El Espacio Dual

El objetivo de este capítulo es definir el concepto de espacio dual de un espacio normado, así como sus principales propiedades, que nos dotan de muchos ejemplos de espacios de Banach. Para ello, será necesario primero repasar conceptos básicos vistos ya en asignaturas anteriores de Análisis Matemático.

1.1. Repaso

Definición 1.1 (Espacio métrico)**.** Un espacio métrico es una tupla (E, d) donde E es un conjunto no vacío y $d : E \times E \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

- **Desigualdad triangular.** $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \qquad \forall x, y, z \in E$
- **Simetría.** $d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall x, y \in E$
- **No degeneración.** $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

Definición 1.2 (Espacio normado)**.** Un espacio normado es una tupla $(E, \|\cdot\|)$ donde E es un espacio vectorial y $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

- **Desigualdad triangular.** $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in E$
- **Homogeneidad por homotecia.** $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$
- **No degeneración.** $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$

A partir de estas propiedades pueden deducirse muchas otras, entre las cuales destacamos:

Proposición 1.1. *Si* $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado, entonces:*

- $\|0\| = 0$.
- $\|x\| \geqslant 0 \qquad \forall x \in E$.

Demostración. Veamos cada propiedad:

- Para la primera: $\|0\| = \|0 \cdot v\| = 0\|v\| = 0$.
- Para la segunda, basta observar que si $x \in E$, entonces:

$$0 = \|0\| = \|x + (-x)\| \leqslant 2\|x\| \Longrightarrow \|x\| \geqslant 0$$

□

Proposición 1.2. *Si* $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado y definimos la aplicación* $d : E \times E \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$d(x, y) = \|y - x\| \qquad \forall x, y \in E$$

Se verifica que (E, d) *es un espacio métrico.*

Definición 1.3 (Espacio métrico completo)**.** Sea (E, d) un espacio métrico, decimos que es completo (o que la distancia d es completa) si toda sucesión de Cauchy para la distancia d es también convergente a un elemento de E para la distancia d.

Hemos visto ya que cualquier espacio normado puede dotarse de estructura de espacio métrico, así como la definición de espacio métrico completo, ambos conceptos tratados ya en asignaturas previas.

Definición 1.4 (Espacio de Banach)**.** Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, decimos que es de Banach si el espacio métrico (E, d) obtenido de la forma usual a partir de la norma $\|\cdot\|$ es un espacio métrico completo.

Definición 1.5 (Espacio prehilbertiano)**.** Un espacio prehilbertiano es una tupla $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ donde H es un espacio vectorial y $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

- **Bilinealidad.** La aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es lineal en ambas variables.
- **Simetría.** $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \qquad \forall x, y \in E$
- **Definida positiva.** $\langle x, x\rangle > 0 \qquad \forall x \in H \setminus \{0\}$

Proposición 1.3. *Si* $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un espacio prehilbertiano y definimos la aplicación* $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad \forall x \in E$$

Se verifica que $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado.*

Definición 1.6 (Espacio de Hilbert)**.** Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio prehilbertiano, decimos que es de Hilbert si el espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ obtenido de la forma usual a partir del producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un espacio métrico de Banach.

1.1.1. Ejemplos

- Sea $N \in \mathbb{N}$, en $\mathbb{R}^N$ podemos definir para cada $p \geqslant 1$ la aplicación $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por:

  $$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

  Que hace que $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$ sea un espacio normado, que de hecho es de Banach, como se vió en Análisis Matemático II, puesto que todo espacio normado de dimensión finita es de Banach.

- En el caso anterior, si tomamos $p = 2$ se verifica que además si definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

  Obtenemos que $(\mathbb{R}^N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio prehilbertiano (compruébese) cuyo espacio normado canónico coincide con $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$, por lo que es un espacio de Hilbert.

- Como otro ejemplo de espacio normado sobre $\mathbb{R}^N$, podemos definir $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : i \in \{0, \ldots, N\}\}$$

  Se cumple igualmente que $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado que además es de Banach, por la misma razón que antes.

- Como primer ejemplo de espacio normado que no se construye sobre los vectores de un espacio de la forma $\mathbb{R}^N$, si tomamos un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$, y definimos[1]:

$$\mathcal{C}_b(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y } f \text{ es acotada en } A\}$$

  Junto con la aplicación $\|\cdot\| : \mathcal{C}_b(A) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : x \in A\}$$

  Se verifica que $(\mathcal{C}_b(A), \|\cdot\|)$ es una espacio normado que de hecho es de Banach (compruébese).

- Sea ahora $K \subset \mathbb{R}^N$ un compacto, si definimos:

$$\mathcal{C}(K) = \{f : K \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$$

  resulta que podemos definir una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{C}(K) \times \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\langle f, g \rangle = \int_K f(x) g(x) \, dx$$

  que hace que $(\mathcal{C}(K), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sea un espacio prehilbertiano, que nos induce un espacio normado donde la norma es:

$$\|f\|_2 = \left(\int_K f(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall f \in \mathcal{C}(K)$$

  Sin embargo, este espacio prehilbertiano **no es de Hilbert**:

  Por ejemplo, si tomamos $K = [0, 2] \subset \mathbb{R}$, si tomamos $f_n : K \to \mathbb{R}$ de forma que la gráfica de f_n sea algo parecido a la de la Figura 1.1

[1]El subíndice "b" de $\mathcal{C}_b(A)$ viene de la palabra inglesa "bounded".

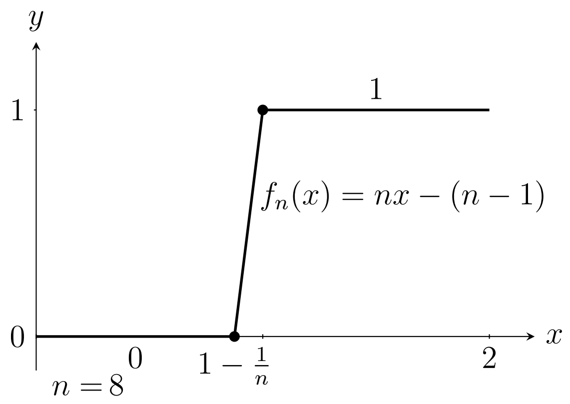


Figura 1.1: Gráfica de la función f_n.

Si definimos $f = \chi_{[1,2]}$ la función característica del intervalo $[1, 2]$ (que no pertence a $\mathcal{C}(K)$), tenemos que:

$$\|f - f_n\|_2^2 = \int_0^2 (f(x) - f_n(x))^2 \, dx = \frac{1}{2n} \to 0$$

Por lo que f_n es una sucesión de Cauchy pero cuyo límite no está en el espacio que consideramos, por lo que no es convergente, luego $\mathcal{C}(K)$ no es un espacio completo.

1.2. Espacios de Lebesgue

Un ejemplo interesante de espacios de Banach son los espacios de Lebesgue, que ya se trabajaron un poco en la asignatura de Análisis Matemático II. En este documento volveremos a definir dicho espacio, puesto que la construcción es importante tenerla clara. En un primer lugar, hemos de repasar ciertas desigualdades para poder construir la estructura de espacio normado.

1.2.1. Desigualdades importantes

Para la primera desigualdad, es conveniente la siguiente motivación, que nos dará una breve justificación del origen de la desigualdad: sean $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ dos números reales no negativos, es bien conocido que:

$$0 \geqslant (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Longrightarrow ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

Definición 1.7. Sea $p \geqslant 1$ un número real, definimos su "exponente conjugado" por:

$$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{si } p \neq 1 \\ \infty & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

De esta forma (admitiendo el convenio de que $0 = {}^1\!/\!_\infty$ de la recta real extendida), tenemos que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Usaremos en esta sección la notación p' para denotar al exponente conjugado de p.

Proposición 1.4 (Desigualdad de Young). *Sean $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ y $p \in \mathbb{R}$ con $p > 1$, se verifica que:*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

Demostración. La concavidad[2] del logaritmo nos dice:

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}\right) \geqslant \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{p'}\log\left(b^{p'}\right) = \log(a) + \log(b) = \log(ab)$$

Y si ahora aplicamos la función exponencial y usamos que es creciente obtenemos:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

□

Recordemos que en Análisis Matemático I definíamos para cualquier conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ medible el conjunto de las funciones integrables sobre Ω:

$$\mathcal{L}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega f < \infty \right\}$$

Pues bien, dado $p \geqslant 1$, podemos definir ahora:

$$\mathcal{L}_p(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{L}(\Omega) : \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}$$

Teorema 1.5 (Desigualdad de Hölder). *Sea $p > 1$, si $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$ y $g \in \mathcal{L}_{p'}(\Omega)$, entonces $fg \in \mathcal{L}(\Omega)$ y además:*

$$\int_\Omega |fg| \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Demostración. Si notamos por comodidad:

$$\alpha = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \beta = \left(\int_\Omega |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Si $\alpha = 0$, entonces $f^p = 0$ casi por doquier, de donde $|fg| = 0$ casi por doquier, luego:

$$\int_\Omega |fg| = 0$$

Si $\beta = 0$ la situación es simétrica. Suponiendo ahora que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, la desigualdad de Young nos dice que:

$$\frac{|f(x)|}{\alpha}\frac{|g(x)|}{\beta} \leqslant \frac{|f(x)|^p}{p\alpha^p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'\beta^{p'}} \qquad \forall x \in \Omega$$

[2]Recordamos que si f era una función cóncava, entonces $f(tx + (1-t)y) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y)$, para cualquier $t \in [0, 1]$, x,y en el dominio de definición de f.

Si ahora aplicamos la integral de Lebesgue a ambos lados usando el crecimiento de dicho funcional, obtenemos que (usando la definición de α y β):

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int_\Omega |fg| \leqslant \frac{1}{p\alpha^p}\int_\Omega |f|^p + \frac{1}{p'\beta^{p'}}\int_\Omega |g|^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

de donde $fg \in \mathcal{L}(\Omega)$ y despejando de la desigualdad:

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int_\Omega |fg| \leqslant 1$$

Obtenemos la desigualdad buscada. □

La desigualdad de Hölder nos proporcionará la desigualdad de Cauchy-Schwartz de la norma del futuro espacio normado, y nos permitirá probar la desigualdad de Minkowski.

Teorema 1.6 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Para $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$ y $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega)$, se cumple que:*

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Demostración. Si notamos por comodidad:

$$\alpha = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \beta = \left(\int_\Omega |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, \qquad \gamma = \left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = 1$, entonces la desigualdad triangular nos dice que $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, donde aplicamos el crecimiento de la integral y ya tenemos el Teorema demostrado. Sabemos por el resultado anterior que $\gamma < \infty$, puesto que $\mathcal{L}_p(\Omega) \subset \mathcal{L}(\Omega)$, y la desigualdad buscada es obvia si $\gamma = 0$. Supuesto ahora que $p > 1$ y $\gamma > 0$, si tomamos:

$$h = |f+g|^{p-1}$$

tenemos entonces que:

$$h^{p'} = |f+g|^{(p-1)p'} = |f+g|^p$$

luego:

$$\int_\Omega h^{p'} = \gamma^p < \infty$$

Por lo que $h \in \mathcal{L}_p(\Omega)$. Tenemos:

$$|f+g|^p = |f+g|h \leqslant |f|h + |g|h$$

Y por la desigualdad de Hölder:

$$\gamma^p \leqslant \int_\Omega |f|h + \int_\Omega |g|h \leqslant (\alpha+\beta)\left(\int_\Omega h^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = (\alpha+\beta)\gamma^{\frac{p}{p'}}$$

Y si dividimos por $\gamma^{\frac{p}{p'}}$ tenemos la desigualdad buscada. □

1.2.2. Definición de los espacios de Lebesgue

Fijado $p \geqslant 1$, podemos tratar de dotar a $\mathcal{L}_p(\Omega)$ de una norma. Pensamos en un principio en la aplicación $\varphi_p : \mathcal{L}_p(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$$

Que:

- Verifica la desigualdad triangular gracias a la desigualdad de Minkowski.
- Verifica la homegeneidad por homotecias, ya que:
$$\varphi_p(\alpha f) = |\alpha|\varphi_p(f) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$
- $\varphi_p(f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ casi por doquier.

Por lo que dicha función **no es una norma** en $\mathcal{L}_p(\Omega)$ al no verificar la no degeneración de la norma, puesto que la integral "es ciega" a la hora de diferenciar la función constantemente igual a 0 de otras funciones con integral cero.

Para solucionar el problema con el que nos acabamos de topar (el problema de no poder definir una norma de dicha forma), podemos constuir una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathcal{L}_p(\Omega)$ que identifique a las funciones que son iguales casi por doquier, pudiendo considerar el espacio cociente:

$$L_p(\Omega) = \frac{\mathcal{L}_p(\Omega)}{\sim}$$

Donde ya $(L_p(\Omega), \varphi_p)$ sí que es un espacio normado, donde denotaremos normalmente $\varphi_p = \|\cdot\|_p$.

Teorema 1.7 (Riesz-Fischer)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto medible y $p \geqslant 1$, se cumple que $(L_p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.*

1.2.3. Más ejemplos de espacios de Banach

- Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible, si definimos:
$$\sup_\Omega |f| = \inf\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \text{ casi para todo } x \in \Omega\}$$
El conjunto:
$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \sup_\Omega |f| < \infty\right\}$$
junto con la norma:
$$\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f|$$
es un espacio de Banach, donde la desigualdad de Hölder se comple considerando que $p = \infty$ y $p' = 1$:
Si $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ y $g \in \mathcal{L}(\Omega)$, entonces $fg \in \mathcal{L}(\Omega)$, con:
$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1$$

- Para $1 \leqslant p < \infty$ podemos considerar otro tipo de espacios:

$$l^p = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\}$$

que junto con la aplicación:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall x \in l^p$$

forman un espacio de Banach (compruébese).

En dichos espacios, se tiene que si $x \in l^p$ y $y \in l^{p'}$, entonces $xy \in l$, con:

$$\|xy\| \leqslant \|x\|_p \|y\|_{p'}$$

- En el caso anterior, si $p = 2$, podemos definir la aplicación:

$$\langle x, y \rangle_2 = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \qquad \forall x, y \in l^2$$

Con lo que $(l^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ es un espacio de Hilbert.

- Al igual que sucedía con las normas $p-$ésimas en $\mathbb{R}^N$, podemos considerar:

$$l^\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ acotada}\}$$

junto con la aplicación $\|\cdot\| : l^\infty \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$$

y obtenemos un espacio de Banach.

- $C = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ es convergente}\}$ es un subespacio de l^∞.

- $C_0 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ converge a } 0\}$ es un subespacio de C.

Proposición 1.8. *El espacio normado l^p es de Banach para $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Demostración. **Para $p = \infty$.** Recordamos que trabajamos en el espacio:

$$l^\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ acotada}\}, \qquad \|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$$

Sea $\{x_m\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de l^∞, queremos probar que $\{x_m\}$ es convergente en l^∞. Para ello, primero vemos que fijado $n \in \mathbb{N}$ tenemos que la sucesión de números reales $\{x_m(n)\}$ es de Cauchy, pues dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $m_0 \in \mathbb{N}$ (gracias a que $\{x_m\}$ es de Cauchy) de foma que:

$$|x_p(n) - x_q(n)| \leqslant \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_p(k) - x_q(k)| = \|x_p - x_q\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall p, q \geqslant m_0$$

Como $\mathbb{R}$ es completo, tenemos que la sucesión $\{x_m(n)\}$ es convergente, para cada $n \in \mathbb{N}$, lo que nos permite definir

$$\begin{array}{rccl} x: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & \text{lím}\{x_m(n)\} \end{array}$$

Obteniendo que $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, y la demostración de este caso terminará probando que $x \in l^\infty$ y que $\{\|x_m - x\|\} \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ de forma que de forma que:

$$\|x_p - x_q\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall p, q \geqslant m_0$$

Fijado $m \geqslant m_0$, tenemos para todo $k \in \mathbb{N}$ que:

$$|x_m(k) - x(k)| = \lim_{n\to\infty} |x_m(k) - x_n(k)| \leqslant \varepsilon$$

Por lo que $x_m - x \in l^\infty$, de donde:

$$x = x_m - (x_m - x) \in l^\infty$$

por ser l^∞ un espacio vectorial. Más aún, hemos probado que:

$$\|x_m - x\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall m \geqslant m_0$$

lo que nos dice que $\{\|x_m - x\|_\infty\} \to 0$.

Para $1 \leqslant p < \infty$**.** Trabajamos ahora en el espacio:

$$l^p = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\}, \qquad \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Sea $\{x_m\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de l^p, queremos probar que $\{x_m\}$ es convergente en l^p. Para ello, observemos primero que:

$$|x(k)| \leqslant \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall x \in l^p, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

de donde deducimos que $\{x_m(k)\}$ es de Cauchy, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por ser $\mathbb{R}$ completo tenemos que dicha sucesión es convergente, lo que nos permite definir

$$\begin{array}{rccl} x: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & k & \longmapsto & \text{lím}\{x_m(k)\} \end{array}$$

Obteniendo que $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, y basta probar que $x \in l^p$ y que $\{\|x_m - x\|\} \to 0$. Fijado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$\|x_t - x_s\|_p < \varepsilon \qquad \forall t, s \geqslant m_0$$

fijados $m \geqslant m_0$ y $N \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{N} |x_m(k) - x_n(k)|^p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x_m(k) - x_n(k)|^p = (\|x_m - x_n\|)^p < \varepsilon^p \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde:

$$\sum_{k=1}^{N} |x_m(k) - x(k)|^p = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |x_m(k) - x_n(k)|^p \leqslant \varepsilon^p \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$

por lo que la serie $\sum_{k\geqslant 1} |x_m(k) - x(k)|^p$ es convergente, de donde $x_m - x \in l^p$, por lo que:

$$x = x_m - (x_m - x) \in l^p$$

Más aún, la última desigualdad nos dice que:

$$\|x_m - x\|_p = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_m(k) - x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon \qquad \forall m \geqslant m_0$$

de donde deducimos que $\{\|x_m - x\|\} \to 0$.

□

1.3. Espacio dual

Para introducir la noción de espacio dual, nos será necesario primero destacar unos resultados:

Proposición 1.9. *Si H es un espacio prehilbertiano, entonces:*

1. *Se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz:*

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\| \qquad \forall u, v \in H$$

2. *Se cumple la identidad del paralelogramo:*

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\| + \left\|\frac{u-v}{2}\right\| = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2) \qquad \forall u, v \in H$$

Teorema 1.10 (de la Proyección)**.** *Sea H un espacio de Hilbert, sea $\emptyset \neq K \subset H$ un conjunto convexo y cerrado, entonces $\forall f \in H\ \exists_1 u \in K$ de forma que:*

$$\|f - u\| = d(f, K) = \inf\{d(f, v) : v \in K\}$$

Además, dicho elemento u está caracterizado por:

- *$u \in K$.*
- *$\langle f - u, v - u\rangle \leqslant 0 \qquad \forall v \in K$.*

Por tanto, a dicho único elemento u lo notaremos por $P_K f$.

Demostración. Como $0 \leqslant d(f, v)\quad \forall v \in K$, tenemos entonces que dicho ínfimo existe. Tenemos por tanto que existe $\{v_n\}$ una sucesión de elementos de K de forma que $\{d(f, v_n)\} \to d(f, K)$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y usando la identidad del paralelogramo con $f - v_n$ y $f - v_m$, tenemos:

$$\left\|\frac{f - v_n + f - v_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{f - v_n - (f - v_m)}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\right)$$
$$\left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{v_m - v_n}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\right)$$
$$\frac{\|v_m - v_n\|^2}{4} = \frac{1}{2}\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\right) - \left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2$$
$$\|v_m - v_n\|^2 = 2\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\right) - 4\left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2$$

Como K es convexo, tenemos que $\frac{v_n+v_m}{2} \in K$, por lo que:

$$\left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\| \geqslant d(f, K)$$

Por lo que:

$$0 \leqslant \|v_m - v_n\|^2 \leqslant 2(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - 4d(f, K)^2$$

Como $\{\|f - v_n\|^2\} \to d(f, K)^2$ y $\{\|f - v_m\|^2\} \to d(f, K)^2$, tenemos por el Lema del Sandwitch que $\{\|v_n - v_m\|^2\} \to 0$, por lo que $\{v_n\}$ es de Cauchy. Como H es completo, existe $u \in H$ de forma que $\{v_n\} \to u$, pero por ser K cerrado tendremos que $u \in K$.

Como $\{v_n\} \to u$, tenemos entonces que $\{d(f, v_n)\} \to d(f, v)$, pero $\{d(f, v_n)\}$ convergía también a $d(f, K)$. No queda más salida que $d(f, v) = d(f, K)$.

Una vez probada la existencia de u, veamos que:

$$u \in K \text{ con } \|f - u\| = d(f, K) \Longleftrightarrow u \in K \text{ y } \langle f - u, v - u\rangle \leqslant 0 \quad \forall v \in K$$

$\Longrightarrow)$ Supongamos que $u \in K$ y sabemos que $\|f - u\| \leqslant \|f - v\|$ para todo $v \in K$. Tomamos ahora $w \in K$ y consideramos el segmento que une u con w. Entonces $\forall w \in K$ y $\forall t \in [0, 1]$, al ser K convexo tendremos que

$$(1 - t)u + tw \in K \quad \text{y} \quad \|f - u\|^2 \leqslant \|f - (1 - t)u - tw\|^2$$

Aplicando la bilinealidad podemos reescribir esta última expresión como

$$\begin{aligned}\|f - (1 - t)u - tw\|^2 &= \langle f - (1 - t)u - tw, f - (1 - t)u - tw\rangle = \\ &= \|f - u\|^2 + t^2\|w - u\|^2 - 2t(f - u, w - u)\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión que teníamos anteriormente nos queda que:

$$0 \leqslant t^2\|w - u\|^2 - 2t\langle f - u, w - u\rangle \quad \forall t \in (0, 1]$$

Al dividir entre t nos queda

$$0 \leqslant t\|w - u\|^2 - 2\langle f - u, w - u\rangle \quad \forall t \in (0, 1]$$

y tomando ahora el límite cuando t tiende a 0 por la derecha queda que

$$0 \leqslant -2\langle f - u, w - u\rangle \Rightarrow \langle f - u, w - u\rangle \leqslant 0 \qquad \forall w \in K$$

$\Longleftarrow)$

$$\|f-v\|^2 = \|f-u+u-v\|^2 = \|f-u\|^2 + 2\langle f-u, u-v\rangle + \|u-v\|^2 \qquad \forall v \in K$$

De donde:

$$0 \geqslant 2\langle f-u, v-u\rangle - \|u-v\|^2 = \|f-u\|^2 - \|f-v\|^2$$

Luego:

$$\|f-u\|^2 \leqslant \|f-v\|^2 \qquad \forall v \in K$$

Para probar finalmente la unicidad, supongamos que existen $u, w \in K$ de forma que:

$$\langle f-u, v-u\rangle, \langle f-w, v-w\rangle \leqslant 0 \qquad \forall v \in K$$

Entonces:

$$\langle f-u, w-u\rangle, \langle f-w, u-w\rangle = \langle u-f, w-u\rangle \leqslant 0$$

Por lo que:

$$\langle f-u, w-u\rangle + \langle w-f, w-u\rangle = \langle w-u, w-u\rangle \leqslant 0$$

de donde $\langle w-u, w-u\rangle = 0$, por lo que $\|w-u\|^2 = d(w,u)^2 = 0$, luego $w = u$. □

Proposición 1.11. *Dado $\emptyset \neq K \subset H$ un conjunto convexo y cerrado, tenemos que la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} P_K: & H & \longrightarrow & H \\ & f & \longmapsto & P_K f \end{array}$$

es lipschitziana. De hecho:

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leqslant \|f_1 - f_2\| \qquad \forall f_1, f_2 \in H$$

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in H$, $u_1 = P_K f_1$, $u_2 = P_K f_2$, estos verifican:

$$\langle f_1 - u_1, v - u_1\rangle, \langle f_2 - u_2, v - u_2\rangle \leqslant 0 \qquad \forall v \in K$$

Por lo que:

$$\langle f_1 - u_1, u_2 - u_1\rangle \leqslant 0$$
$$\langle f_2 - u_2, u_1 - u_2\rangle \leqslant 0 \Longrightarrow \langle f_2 - u_2, u_2 - u_1\rangle \geqslant 0$$

De donde $\langle f_1 - u_2 - f_2 + u_2, u_2 - u_1\rangle \leqslant 0$, por lo que:

$$\langle f_1 - f_2 + (u_2 - u_1), (u_2 - u_1)\rangle = \langle f_1 - f_2, u_2 - u_1\rangle + \langle u_2 - u_1, u_2 - u_1\rangle$$

Luego:

$$\|u_2 - u_1\|^2 = \langle u_2 - u_1, u_2 - u_1\rangle \leqslant -\langle f_1 - f_2, u_2 - u_1\rangle \overset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leqslant} \|f_1 - f_2\|\|u_2 - u_1\|$$

Por lo que:

$$\|u_2 - u_1\| \leqslant \|f_1 - f_2\|$$

Si $\|u_2 - u_1\| \neq 0$, cierto también si $\|u_2 - u_1\| = 0$. □

Pensemos ahora en un ejemplo de conjuntos convexos con propiedades interesantes, como lo son los espacios vectoriales:

Corolario 1.11.1 (Proyección Ortogonal)**.** *Sea $M \subset H$ un subespacio vectorial cerrado de H, un espacio de Hilbert, entonces:*

$$\forall f \in H \ \exists_1 u \in M \ \textit{tal que} \ \|f - u\| = d(f, M)$$

Además, la caracterización de u puede mejorarse por:

$$u \in M \qquad y \qquad \langle f - u, w\rangle = 0 \quad \forall w \in M$$

Demostración. Bajo las hipótesis de que M es un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert H, basta probar:

$$u \in M \wedge \langle f - u, v - u\rangle \leqslant 0 \quad \forall v \in M \Longleftrightarrow u \in M \wedge \langle f - u, w\rangle = 0 \quad \forall w \in M$$

$\Longleftarrow$) Si $v \in M$, tenemos por ser M un espacio vectorial que $v - u \in M$, de donde $\langle f - u, v - u\rangle = 0$, por lo que en particular es menor o igual que 0.

$\Longrightarrow$) Si tomamos $v \in M$ y $t \in \mathbb{R}^*$, como M es un espacio vectorial tendremos que $v/t \in M$, por lo que:

$$\left\langle f - u, \frac{v}{t} - u\right\rangle \leqslant 0 \qquad \forall v \in M, \forall t \in \mathbb{R}^*$$

- Si $t > 0$, entonces $\langle f - u, v - tu\rangle \leqslant 0 \ \forall v \in M$, de donde tomando límite cuando $t \to 0$, tenemos que $\langle f - u, v\rangle \leqslant 0 \ \forall v \in M$.
- Si $t < 0$, entonces $\langle f - u, v - tu\rangle \geqslant 0 \ \forall v \in M$, de donde tomando límite cuando $t \to 0$, tenemos que $\langle f - u, v\rangle \geqslant 0 \ \forall v \in M$.

En consecuencia, tenemos que $\langle f - u, v\rangle = 0 \ \forall v \in M$.

□

Proposición 1.12. *Sea $M \subset H$ un esubespacio vectorial cerrado de H, un espacio de Hilbert, la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} P_M: & H & \longrightarrow & H \\ & f & \longmapsto & P_M f \end{array}$$

es lineal.

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in H$, $u_1 = P_M f_1$, $u_2 = P_M f_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle \lambda f_1 + f_2 - (\lambda u_1 + u_2), w\rangle &= \langle \lambda f_1 - \lambda u_1 + f_2 - u_2, w\rangle \\ &= \lambda\langle f_1 - u_1, w\rangle + \langle f_2 - u_2, w\rangle = 0 \qquad \forall w \in M \end{aligned}$$

Por lo que por el Corolario anterior, tenemos que:

$$P_M(\lambda f_1 + f_2) = \lambda u_1 + u_2 = \lambda P_M(f_1) + P_M(f_2)$$

de donde P_M es lineal. □

Definición 1.8. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, definimos el espacio dual topológico de E por:

$$E^* = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ es lineal y continua}\}$$

Nos será necesaria la siguiente Proposición para comprender mejor las propiedades de las aplicaciones lineales. Más concretamente, la relación existente entre la acotación y la continuidad de una aplicación lineal.

Proposición 1.13. *Sea $T : E \to F$ una aplicación lineal entre dos espacios normados E y F, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\exists M \in \mathbb{R}^+$ *de forma que* $\|T(x)\| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E$.

(2) T *es lipschitziana.*

(3) T *es continua.*

(4) T *es continua en* 0.

(5) T *es acotada (es decir, si* $A \subset E$ *es acotado, entonces* $T(A)$ *es acotado).*

(6) $T(\overline{B}(0,1))$ *es acotado.*

(7) $T(B(0,1))$ *es acotado.*

Demostración. Veamos la equivalencia entre todas ellas:

$(1) \Longleftrightarrow (2)$ Por doble implicación:

$\Longrightarrow)$ Sean $x, y \in E$, entonces $x - y \in E$, de donde:

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| \leqslant M\|x-y\|$$

Por lo que T es lipschitziana con constante de Lipschitz menor o igual que M.

$\Longleftarrow)$ Sea $x \in E$, si M es mayor o igual que la constante de Lipschitz de T, entonces:

$$\|T(x)\| = \|T(2x - x)\| = \|T(2x) - T(x)\| \leqslant M\|2x - x\| = M\|x\|$$

$(2) \Longrightarrow (3)$ Es conocida de Cálculo II.

$(3) \Longrightarrow (4)$ Si T es continua, en particular lo es en 0.

$(4) \Longrightarrow (1)$ Supuesto que T es continua en 0, es decir, que:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|T(x)\| < \varepsilon \ \forall x \in B(0,\delta)$$

Tomando $\varepsilon = 1$, la continuidad nos da un δ cumpliendo la afirmación anterior. Sea $x \in E$ arbitrario, tenemos:

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\frac{\delta}{2}\frac{2\|x\|}{\delta}\right)\right\| = \frac{2\|x\|}{\delta}\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\frac{\delta}{2}\right)\right\| < \frac{2}{\delta}\|x\|$$

Ya que $\dfrac{x\delta}{2\|x\|} \in B(0,\delta)$, por lo que tomando $M = \frac{2}{\delta}$ tenemos la implicación.

(5) $\Longrightarrow$ (6) Como $\overline{B}(0,1)$ es acotado, $T(\overline{B}(0,1))$ será acotado por ser T acotada.

(6) $\Longrightarrow$ (7) Como $B(0,1) \subset \overline{B}(0,1)$, entonces $T(B(0,1)) \subset T(\overline{B}(0,1))$.

(7) $\Longrightarrow$ (4) Si $\exists R \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\|T(x)\| \leqslant R$ para todo $x \in B(0,1)$, dado $\varepsilon > 0$, si tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2R}$, si $x \in B(0,\delta)$, entonces:

$$\|T(x)\| = \left\|T\left(\frac{x}{2\|x\|}2\|x\|\right)\right\| = 2\|x\| \left\|T\left(\frac{x}{2\|x\|}\right)\right\| \leqslant 2\|x\|R < 2\delta R = \varepsilon$$

(1) $\Longrightarrow$ (5) Sea $A \subset E$ acotado, entonces $\exists r \in \mathbb{R}^+$ de forma que $A \subset B(0,r)$, por lo que:

$$\|T(x)\| \leqslant M\|x\| \leqslant Mr \qquad \forall x \in A$$

De donde $T(A) \subset B(0, Mr)$, por lo que es un conjunto acotado.

□

Proposición 1.14. *Sea E un espacio normado, observemos que E^* es un espacio vectorial, sobre el que definimos la aplicación $\|\cdot\| : E^* \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| \qquad \forall f \in E^*$$

Se verifica que:

1. *$(E^*, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.*

2. *$(E^*, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.*

3. *Sea $f \in E^*$, entonces:*

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

4. *Sea $f \in E^*$, entonces:*

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \|f\| = \inf\{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E\}$$

Demostración. Veamos cada una de las propiedades:

1. Para la primera, hemos de probar:

   - **No degeneración.** Sea $f \in E^*$ de forma que $\displaystyle\sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \|f\| = 0$, entonces:

   $$0 \leqslant \|f(x)\| \leqslant 0 \quad \forall x \in \overline{B}(0,1) \Longrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

     de donde:

   $$f(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\|x\|\right) = \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0 \qquad \forall x \in E$$

     Por lo que $f = 0$.

- **Homogeneidad por homotecias.** Sea $f \in E^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}A$:

$$\|\lambda f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\lambda f(x)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\lambda||f(x)| = |\lambda| \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = |\lambda|\|f\|$$

- **Desigualdad triangular.** Sean $f, g \in E^*$:

$$\begin{aligned}\|f+g\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)+g(x)| &\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} (|f(x)|+|g(x)|)\\ &\leqslant \sup_{\|x\|\leqq 1} |f(x)| + \sup_{\|x\|\leqslant 1} |g(x)| = \|f\|+\|g\|\end{aligned}$$

2. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de E^*, sean $\varepsilon, r > 0$, la condición de Cauchy para ε/r nos da $m \in \mathbb{N}$ de forma que si $p, q \geqslant m$, entonces:

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} |f_p(x) - f_q(x)| = \|f_p - f_q\| < \frac{\varepsilon}{r}$$

de donde:

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{r} \qquad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

pero entonces:

$$|f_p(rx) - f_q(rx)| = r|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

lo que equivale a que:

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in \overline{B}(0,r)$$

Por tanto, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy para todo $x \in \overline{B}(0,r)$, pero como r era arbitrario, dicha condición se cumple para todo $r \in \mathbb{R}^+$, tenemos que $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy para todo $x \in E$. Como $\mathbb{R}$ es completo, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es convergente para todo $x \in E$, lo que nos permite definir $f : E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \text{lím}\{f_n(x)\} \qquad \forall x \in E$$

Se verifica que f es lineal, ya que:

$$\begin{aligned}f(\lambda x + y) &= \text{lím}\{f_n(\lambda x + y)\} = \text{lím}\{\lambda f_n(x) + f_n(y)\}\\ &= \lambda\,\text{lím}\{f_n(x)\} + \text{lím}\{f_n(y)\} = \lambda f(x) + f(y)\\ &\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E\end{aligned}$$

Ahora, como $\{f_n\}$ era de Cauchy, tenemos que fijado $r \in \mathbb{R}^+$ y dado $\varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ de forma que para $p, q \geqslant m$ se tiene:

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in \overline{B}(0,r)$$

Fijado ahora dicho p, tenemos:

$$|f_p(x) - f(x)| = \lim_{q\to\infty} |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por lo que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $B(0,r)$, para todo $r \in \mathbb{R}^+$. En particular, $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en cada conjunto acotado de E. Como $\{f_n\}$ es continua $\forall n \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in E$ tenemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $B(x,1)$, entonces tenemos que f es continua en x, de donde f es continua en E. En consecuencia, $f \in E^*$.

Por último, para ver que $\{f_n\}$ converge a f, dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geqslant m$, entonces:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

de donde:

$$\|f_n - f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por lo que $\{f_n\} \to f$.

3. La desigualdad $\geqslant$ es obvia. Para la otra, sea $x \in B(0,1)$:

$$|f(x)| = \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \|x\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \|x\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

4. Buscamos probar que:

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = \inf\{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E\}$$

$\geqslant$) Para ver que el supremo es mayor o igual que el ínfimo, veamos que el supremo pertence al conjunto de la derecha:

$$|f(x)| = \|x\| \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \leqslant \|x\| \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$$

Por tanto, $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \in \{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E\}$.

$\leqslant$) Para ver el el ínfimo es mayor o igual que el supremo, veamos que el ínfimo es un mayorante del conjunto de la izquierda, si tomamos:

$$M_0 = \inf\{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E\}$$

entonces:

$$|f(x)| \leqslant M\|x\| \leqslant M \qquad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

Por lo que M_0 es un mayorante de $\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1\}$, por lo que es mayor o igual que su supremo.

□

1.3.1. Espacio dual de un espacio de Hilbert

Proposición 1.15. *Se verifica que si $v \in H$, entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_v: & H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \langle u, v\rangle \end{array}$$

verifica que $\varphi_v \in H^*$ y en cuyo caso, $\|\varphi_v\| = \|v\|$.

Más aún, podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & H & \longrightarrow & H^* \\ & v & \longmapsto & \varphi_v \end{array}$$

que es una aplicación lineal e inyectiva.

Demostración. Como el producto escalar es bilineal es evidente que φ_v es lineal. Vemos que:

$$|\varphi_v(u) - \varphi_v(w)| = |\langle u, v\rangle - \langle w, v\rangle| = |\langle u - w, v\rangle| \leqslant \|u - w\|\|v\| \qquad \forall u, w \in E$$

Por lo que φ_v es lipschitziana, y por la última Proposición tenemos que $\|\varphi_v\| \leqslant \|v\|$. Si $v = 0$ tenemos la igualdad de forma obvia y si $v \neq 0$, entonces:

$$\|v\| = \frac{\|v\|}{\|v\|^2} = \frac{\langle v, v\rangle}{\|v\|} = \left\langle \frac{v}{\|v\|}, v\right\rangle = \varphi_v\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$$

luego:

$$\|v\| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = \|\varphi_v\|$$

Para ver que Φ es lineal, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u, v \in H$:

$$\Phi(\lambda u + v) = \varphi_{\lambda u + v} \stackrel{?}{=} \lambda\varphi_u + \varphi_v = \lambda\Phi(u) + \Phi(v)$$

donde la igualdad puede demostrarse por:

$$\varphi_{\lambda u+v}(w) = \langle w, \lambda u + v\rangle = \langle w, \lambda u\rangle + \langle w, v\rangle = \lambda\langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle = \lambda\varphi_u(w) + \varphi_v(w)$$

Como $\|\varphi_v\| = \|v\|$, obtenemos de forma inmediata la continuidad de Φ, por ser una isometría.

Para ver que Φ es inyectiva, supongamos que $u, v \in H$ con $\Phi(u) = \Phi(v)$, de donde:

$$\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle \qquad \forall w \in H$$

Luego:

$$\langle u, w\rangle - \langle v, w\rangle = \langle u - v, w\rangle = 0 \qquad \forall w \in H$$

En particular, tomando $w = u - v$, tenemos que:

$$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v\rangle = 0$$

Por lo que $u = v$, de donde Φ es inyectiva. □

Teorema 1.16 (de Riesz-Fréchet, Representación del dual de un Hilbert)**.**
Sea H un espacio de Hilbert, $\forall \varphi \in H^* \ \exists_1 v \in H$ de forma que:

$$\varphi(u) = \langle u, v \rangle \qquad \forall u \in H$$

y además:

$$\|\varphi\| = \|v\|$$

Demostración. Si conseguimos probar la primera parte del Teorema, la segunda la tendremos ya probada gracias a la Proposición anterior. Sea por tanto $f \in H^*$, si $f = 0$ tomando $v = 0$ se tiene la tesis. Suponemos por tanto que $f \neq 0$, por lo que $M = f^{-1}(\{0\}) \subsetneq H$ es un espacio vectorial de H distinto del trivial. Como f es continua, tenemos además que M es un conjunto cerrado.

Como $M \subsetneq H$, podemos tomar $z_o \in H \setminus M$. Por el Teorema de la Proyección Ortogonal, tomamos $z_1 = P_M z_0 \in M$, que verifica:

$$\langle z_0 - z_1, v \rangle = 0 \qquad \forall v \in M$$

Como $z_0 \in H \setminus M$ y $z_1 \in M$, tenemos que $z_0 \neq z_1$, lo que nos permite definir:

$$z = \frac{z_0 - z_1}{\|z_0 - z_1\|}$$

Con esta definición, es claro que $\|z\| = 1$, así como que:

$$\langle z, v \rangle = \frac{1}{\|z_0 - z_1\|} \langle z_0 - z_1, v \rangle = 0 \qquad \forall v \in M$$

Como $z_0 \notin M$ la situación $z \in M$ es imposible, por lo que $z \notin M$, luego $f(z) \neq 0$. Veamos ahora que:

$$x - \frac{f(x)}{f(z)} z \in M \qquad \forall x \in H$$

ya que:

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z)} z\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)} f(z) = 0$$

Por lo que tenemos que:

$$\left\langle z, x - \frac{f(x)}{f(z)} z \right\rangle = 0$$

Pero tenemos:

$$0 = \left\langle z, x - \frac{f(x)}{f(z)} z \right\rangle = \langle z, x \rangle - \frac{f(x)}{f(z)} \langle z, z \rangle = \langle z, x \rangle - \frac{f(x)}{f(z)} \|z\|^2$$

Por lo que podemos despejar $f(x)$, obteniendo:

$$f(x) = f(z) \langle z, x \rangle = \langle x, z f(z) \rangle \qquad \forall x \in H$$

En consecuencia, tomando $v = z f(z)$ tenemos la existencia probada.

Para la unicidad, supongamos que $\exists v, w \in H$ de forma que:

$$\langle x, v\rangle = f(x) = \langle x, w\rangle \qquad \forall x \in H$$

En consecuencia:

$$\langle x, v - w\rangle = 0 \qquad \forall x \in H$$

Luego si tomamos $x = v - w$:

$$\|v - w\|^2 = \langle v - w, v - w\rangle = 0$$

Por lo que $v = w$. □

A partir del Teorema anterior tenemos que $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$, l^2 y $L^2(\Omega)$ son todos isomorfos a sus duales.

Ejercicio 1.3.1. Calcular el dual de l^p, para $p > 1$, $p \neq 2$.

Puede encontrarse en la Sección 1.6.

Notación. Si $x \in E$ y $f \in E^*$, a menudo notaremos:

$$\langle f, x\rangle = f(x)$$

Esta notación se debe a que la evaluación de una aplicación lineal y continua f en un punto x cumplen unas propiedades que nos recuerdan a la del producto escalar:

1. $\langle \lambda f + g, x\rangle = \lambda\langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle$.
2. $\langle f, \lambda x + y\rangle = \lambda\langle f, x\rangle + \langle f, y\rangle$.
3. $\langle f, x\rangle \leqslant \|f\|\|x\|$.

1.4. Teorema de Hahn-Banach

Si tenemos un espacio normado E de dimensión finita, resulta fácil dar una aplicación lineal y continua $f : E \to \mathbb{R}$, pero en dimensión finita el problema se complica. A continuación veremos el Teorema de Hahn-Banach, que entre sus muchas utilidades una de ellas es probar que si E es un espacio normado de dimensión infinita entonces $E^* \neq \{0\}$. Para resolver este problema, como somos capaces de calcular aplicciones lineales y continuas en dimensión finita y dentro de espacios de dimensión infinita somos capaces de encontrar espacios de dimensión finita, nos preguntamos:

Problema
Sea E un espacio de Banach, $G \subset E$ un subespacio suyo y $g : G \to \mathbb{R}$ lineal y continua, ¿podemos garantizar entonces que existe $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $f\big|_G = g$?

Como ya vimos en la Proposición 1.13, que g sea continua significa que $\exists k \in \mathbb{R}^+$ de forma que $|g(x)| \leqslant k\|x\|$ $\forall x \in G$. Para resolver el problema, necesitamos encontrar una aplicación $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y $k' \in \mathbb{R}^+$ de forma que:

$$f\big|_G = g \qquad \text{y} \qquad |f(x)| \leqslant k'\|x\| \qquad \forall x \in E$$

Ejercicio 1.4.1. Sea $p : (E, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$p(x) = k\|x\| \qquad \forall x \in E$$

Demostrar que la función p verifica:

- $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E.$
- $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E.$

Demostración. Sean $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$:

$$p(x+y) = k\|x+y\| \leqslant k(\|x\| + \|y\|) = k\|x\| + k\|y\| = p(x) + p(y)$$
$$p(\lambda x) = k\|\lambda x\| = \lambda k\|x\| = \lambda p(x)$$

□

Aunque no lo demostraremos, el Teorema de Hahn-Banach resulta ser equivalente al axioma de elección. Para realizar la demostración del Teorema de Hahn-Banach es necesario usar el Lema de Zorn, por lo que conviene realizar un breve repaso del mismo.

Lema de Zorn

Definición 1.9. Sea $\emptyset \neq P$ un conjunto con una relación $\leqslant$ de orden, es decir, una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, decimos que:

- Un subconjunto $Q \subset P$ es totalmente ordenado si:
$$\forall a, b \in Q \Longrightarrow a \leqslant b \ \vee \ b \leqslant a$$
- Si $Q \subset P$ y $x \in P$, decimos que x es una cota superior de Q si y solo si:
$$a \leqslant x \qquad \forall a \in Q$$
- Si $m \in P$, decimos que m es un elemento maximal de P si y solo si:
$$\{x \in P : m \leqslant x\} = \{m\}$$
- Diremos que P es inductivo si todo subconjunto $Q \subset P$ que sea totalmente ordenado posee una cota superior.

Lema 1.17 (de Zorn)**.** *Si P es un conjunto no vacío con una relación de orden $\leqslant$ y P es inductivo, entonces P tiene un elemento maximal.*

Teorema 1.18 (de Hahn-Banach, versión analítica)**.** *Sea E un espacio vectorial, sea $p : E \to \mathbb{R}$ una aplicación verificando:*

- $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E.$
- $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in E.$

Sea $G \subset E$ un subespacio vectorial y $g : G \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que

$$g(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in G$$

Entonces, $\exists f : E \to \mathbb{R}$ lineal de forma que:

1. $f(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in E$.
2. $f\big|_G = g$.

Demostración. Definimos el conjunto P de todas aquellas aplicaciones lineales h que tienen por dominios subespacios vectoriales de E que contienen a G de forma que $h\big|_G = g$ y que cumplen la desigualdad $h(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in D(h)$ (donde $D(h)$ denota el dominio de h); es decir:

$$P = \left\{ h : D(h) \to \mathbb{R} : \begin{array}{l} G \subset D(h) \text{ subespacio vectorial de } E \\ h(x) = g(x) \quad \forall x \in G \\ h \text{ lineal y } h(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in D(h) \end{array} \right\}$$

Tendremos entonces en P todas aquellas alicaciones lineales definidas en espacios vectoriales que son extensiones de g y que cumplen la condición de estar dominadas por p. Buscamos aplicar el Lema de Zorn sobre P, obteniendo un elemento maximal que luego probaremos que ha de tener como dominio E.

Hemos pues de definir una relación de orden en P que nos permita conseguir lo que queremos. Para ello, definiremos la relación $\leqslant$ de la siguiente forma:

$$h_1 \leqslant h_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D(h_1) \subset D(h_2) \\ h_2\big|_{D(h_1)} = h_1 \end{array} \right. \qquad \forall h_1, h_2 \in P$$

es decir, $h_1 \leqslant h_2$ si h_2 es una extensión de h_1. Podemos comprobar que esta efectivamente es una relación de orden en P:

- **Reflexiva.** Si $h \in P$, trivialmente tenemos que $D(h) \subset D(h)$ y $h\big|_{D(h)} = h$, lo que nos dice que $h \leqslant h$.

- **Antisimétrica.** Sean $h_1, h_2 \in P$ de forma que $h_1 \leqslant h_2$ y $h_2 \leqslant h_1$, entonces:

  $$D(h_1) \subset D(h_2) \ \wedge \ D(h_2) \subset D(h_1) \Longrightarrow D(h_1) = D(h_2)$$

  Y de esta condición junto con $h_2 = h_2\big|_{D(h_2)} = h_2\big|_{D(h_1)} = h_1$ concluimos que $h_2 = h_1$.

- **Transitiva.** Si $h_1, h_2, h_3 \in P$ con $h_1 \leqslant h_2$ y $h_2 \leqslant h_3$, tenemos entonces que $D(h_1) \subset D(h_2)$ y que $D(h_2) \subset D(h_3)$. La transitividad de $\subset$ nos dice que $D(h_1) \subset D(h_3)$. Ahora, si tenemos que $h_3\big|_{D(h_2)} = h_2$ y que $h_2\big|_{D(h_1)} = h_1$, obtenemos que:

  $$h_3\big|_{D(h_1)} = h_2\big|_{D(h_1)} = h_1$$

  De donde $h_1 \leqslant h_3$.

Tratemos ahora de probar que P es inductivo. Para ello, sea $Q \subset P$ un subconjunto totalmente ordenado, para buscar una cota superior de Q consideraremos:

$$V_0 = \bigcup_{h \in Q} D(h)$$

Vemos que V_0 es un subespacio vectorial de E, ya que si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in V_0$, tenemos entonces que $\exists h, h' \in Q$ de forma que $u \in D(h), v \in D(h')$. Como Q es totalmente ordenado, tendremos entonces que $h \leqslant h'$ o que $h' \leqslant h$. Supondremos sin pérdida de generalidad que $h \leqslant h'$, lo que nos dice que $D(h) \subset D(h')$, por lo que $u \in D(h')$ y como $D(h')$ es un subespacio vectorial de E, tenemos entonces que:

$$\alpha u + v \in D(h') \subset V_0$$

Una vez salvada esta cuestión, definimos $h_0 : V_0 \to \mathbb{R}$ por:

$$h_0(x) = h(x) \qquad \text{si } x \in D(h)$$

que está bien definida, ya que si $x \in D(h_1) \cap D(h_2)$, sucederá bien $h_1 \leqslant h_2$ bien $h_2 \leqslant h_1$, luego suponiendo que $h_1 \leqslant h_2$, tendremos que $h_2\big|_{D(h_1)} = h_1$, luego se cumplirá $h_1(x) = h_2(x)$. Además h_0 es lineal, ya que si $x, y \in V_0$, por ser V_0 espacio vectorial tendremos que $x + y \in V_0$, de donde $\exists h, h', h'' \in Q$ de forma que $x \in D(h)$, $y \in D(h')$, $x + y \in D(h'')$, con lo que:

$$h_0(x + y) = h''(x + y) = h''(x) + h''(y) = h(x) + h'(y) = h_0(x) + h_0(y)$$

Y finalmente es claro que $h_0(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in V_0$, puesto que si $x \in V_0$, entonces $\exists h \in Q$ de forma que $x \in D(h)$, con lo que:

$$h_0(x) = h(x) \leqslant p(x)$$

En definitiva, tenemos que h_0 es una aplicación lineal extensión de g que cumple $h(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in V_0$ y con V_0 un subespacio vectorial de E que claramente contiene a G, con lo que $h_0 \in P$ y además tenemos que $h \leqslant h_0$ $\forall h \in Q$, por lo que h_0 es una cota superior de Q, de donde tenemos que P es inductivo. Por el Lema de Zorn, existe $f \in P$ elemento maximal de P.

Para concluir la demostración del Teorema, nos falta probar que si f es un elemento maximal de P entonces $D(f) = E$. Para ello, supongamos por reducción al absurdo que fuese $D(f) \subsetneq E$, luego existe $x_0 \in E \setminus D(f)$. Si consideramos[3]:

$$D(f) \oplus \mathbb{R}x_0$$

Tenemos que si $v \in D(f) \oplus \mathbb{R}x_0$, entonces v se escribe como $v = x + tx_0$, con $x \in D(f)$ y $t \in \mathbb{R}$, lo que nos permite definir $\hat{f} : D(f) \oplus \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\hat{f}(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$$

Siendo α un número real que por ahora no concretaremos (puesto que necesitamos buscar luego una condición sobre α para garantizar que $\hat{f} \in P$). Veamos que $\hat{f} \in P$:

[3]Aquí hemos usado $\mathbb{R}x_0 := \{rx_0 : r \in \mathbb{R}\}$, que es un subespacio vectorial de E de dimensión 1.

- Es automático que $\hat{f}\big|_{D(f)} = f$, por lo que $\hat{f}(x) = g(x) \quad \forall x \in G$.
- $D(f) \oplus \mathbb{R}x_0$ es un subespacio vectorial de E que contiene a G.
- Es fácil ver que $\hat{f}$ es lineal, ya que si $x, y \in D(f)$ y $t, t' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x + tx_0 + y + t'x_0) &= \hat{f}((x + y) + (t + t')x_0) = f(x + y) + (t + t')\alpha \\ &= f(x) + f(y) + t\alpha + t'\alpha = \hat{f}(x + tx_0) + \hat{f}(y + t'x_0)\end{aligned}$$

- Tenemos que ver finalmente que

$$\hat{f}(x + tx_0) \leqslant p(x + tx_0) \qquad \forall x \in D(f), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

que sucede si y solo si:

$$t\hat{f}(z + x_0) = \hat{f}(tz + tx_0) \leqslant p(tz + tx_0) = p(t(z + x_0)) \qquad \forall z \in D(f), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

  - En el caso $t = 0$ la desigualdad es obvia.
  - Si $t > 0$, tenemos que:

$$t(f(z) + \alpha) = t\hat{f}(z + x_0) \leqslant p(t(z + x_0)) = tp(z + x_0) \qquad \forall z \in D(f)$$

    que es equivalente a

$$\alpha \leqslant -f(z) + p(z + z_0) \qquad \forall z \in D(f)$$

  - Si $t < 0$, tenemos:

$$-t(-f(z)-\alpha) = -t\hat{f}(-z-x_0) = t\hat{f}(z+x_0) \leqslant p(t(z+x_0)) = -tp(-z-x_0) \\ \forall z \in D(f)$$

    que es equivalente a

$$-f(z) - p(-z - x_0) \leqslant \alpha \qquad \forall z \in D(f)$$

En definitiva, ver (1.1) es equivalente a ver que:

$$\sup\{f(-z) - p(-z - x_0) : z \in D(f)\} \leqslant \alpha \leqslant \text{ínf}\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

que a su vez equivale a:

$$\sup\{f(w) - p(w - x_0) : w \in D(f)\} \leqslant \alpha \leqslant \text{ínf}\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

Por tanto, si probamos que el supremo de la izquierda es menor o igual que el ínfimo de la derecha, elegiendo α cualquier valor real comprendido entre ambos (o incluso igual al supremo o al ínfimo) habremos construido una aplicación $\hat{f}$ que cumple con los tres puntos anteriores y con la condición (1.1), que es la condición que veníamos buscando.

Para demostrar la desigualdad entre supremo e ínfimo, basta observar que para $z, w \in D(f)$ se verifica:

$$f(z)+f(w) = f(z+w) \leqslant p(z+w) = p(z+x_0-x_0+w) \leqslant p(z+x_0)+p(w-x_0)$$

y despejando llegamos a que:

$$f(w) - p(w - x_0) \leqslant -f(z) + p(z + x_0) \qquad \forall z, w \in D(f)$$

Lo que demuestra que:

$$\sup\{f(-z) - p(-z - x_0) : z \in D(f)\} \leqslant \text{ínf}\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

Como hemos comentado anteriormente, tomando por ejemplo:

$$\alpha = \sup\{f(-z) - p(-z - x_0) : z \in D(f)\} \in \mathbb{R}$$

en la definición de $\hat{f}$ nos garantiza la condición (1.1), que junto con las otras condiciones nos dice que $\hat{f} \in P$. Además, por la definición de $\hat{f}$ es claro que $f \leqslant \hat{f}$, donde f era un elemento maximal de P. Hemos llegado a una contradicción, que venía de suponer que $D(f) \subsetneq E$, por lo que $D(f)$ ha de ser igual a E, luego hemos encontrado la aplicación que el Teorema enunciaba, lo que concluye la demostración.

□

Volviendo al caso que nos interesaba, tenemos ya respuesta al Teorema anteriormente planteado:

Corolario 1.18.1. *Sea E un espacio vectorial, $G \subset E$ un subespacio vectorial suyo y $g : G \to \mathbb{R}$ lineal y continua, existe entonces $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua de forma que $f\big|_G = g$. Además:*

$$\|f\| = \|g\|$$

Demostración. Como g es una aplicación lineal y continua, si recordamos que:

$$\|g\| = \text{ínf}\{M > 0 : |g(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in G\}$$

Si definimos $p : E \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = \|g\|\|x\|$ para $x \in E$, vimos en el Ejercicio 1.4.1 que p verificaba:

- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E$
- $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E$

y la condición que hemos expresado arriba nos dice que $g(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in G$. Aplicando el Teorema de Hahn-Banach, tenemos que existe una aplicación $f : E \to \mathbb{R}$ lineal que verifica:

- $f\big|_G = g$
- $f(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in E$

falta ver que f es continua para acabar la demostración. Para ello, observemos que la condición $f(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in E$ implica:

$$-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x) = \|g\|\|-x\| = \|g\|\|x\| = p(x) \qquad \forall x \in E$$

Por lo que tenemos que $|f(x)| \leqslant \|g\|\|x\| \quad \forall x \in E$, y vimos en la Proposición 1.13 que esta condición para una aplicación lineal era equivalente a que la aplicación sea continua. Además, esta desigualdad implica que $\|f\| \leqslant \|g\|$. Si notamos ahora que:

$$|g(x)| = |f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \qquad \forall x \in G$$

Deducimos entonces que $\|g\| \leqslant \|f\|$, por lo que $\|f\| = \|g\|$. □

Corolario 1.18.2. *Sea E un espacio vectorial, $\forall x_0 \in E \ \exists f_0 \in E^*$ de forma que:*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad y \quad f_0(x_0) = \|x_0\|^2$$

Demostración. Si $x_0 = 0$, tomando $f_0 = 0$ se tiene. Suponemos por tanto que $x_0 \neq 0$. Sea $G = \mathbb{R}x_0$, defino $g : G \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(tx_0) = t\|x_0\|^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

es fácil ver que g es lineal. Además es continua, ya que:

$$|g(tx_0)| = |t|\|x_0\|^2 = \|x_0\|\|tx_0\| \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

en particular, acabamos de ver que $\|g\| \leqslant \|x_0\|$, pero como:

$$|g(x_0)| = \|x_0\|^2 = \|x_0\|\|x_0\|$$

deducimos que $\|g\| = \|x_0\|$. Aplicando el Corolario anterior, existe $f_0 \in E^*$ lineal y continua de forma que:

$$f_0\big|_G = g \qquad \|f_0\| = \|g\| = \|x_0\|$$

de donde:

$$f_0(x_0) = f_0\big|_G(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|^2$$

□

Corolario 1.18.3. *Para todo $x_0 \in E$ se tiene que:*

$$\|x_0\| = \sup\{|f(x_0)| : f \in E^*, \|f\| \leqslant 1\} = \text{máx}\{|f(x_0)| : f \in E^*, \|f\| \leqslant 1\}$$

Demostración. Si $x_0 = 0$, cualquier aplicación lineal cumple $f(0) = 0$, luego es obvio el resultado. Supuesto que $x_0 \in E\setminus\{0\}$, dada $f \in E^*$ con $\|f\| \leqslant 1$, tenemos entonces que:

$$|f(x_0)| \leqslant \|f\|\|x_0\| \leqslant \|x_0\| \Longrightarrow \|x_0\| \geqslant \sup\{|f(x_0)| : f \in E^*, \|f\| \leqslant 1\}$$

Para la otra desigualdad, por el Corolario anterior para x_0 sabemos que $\exists f_0 \in E^*$ de forma que:

$$\|f_0\| = \|x_0\|, \qquad f_0(x_0) = \|x_0\|^2$$

Si tomamos $f = {}^{f_0}/_{\|x_0\|}$, tenemos entonces que:

$$\|f\| = \left\|\frac{f_0}{\|x_0\|}\right\| = \frac{\|f_0\|}{\|x_0\|} = 1$$

Y además:

$$f(x_0) = \frac{f(x_0)}{\|x_0\|} = \frac{\|x_0\|^2}{\|x_0\|} = \|x_0\|$$

Por lo que el supremo se alcanza, luego es un máximo. □

1.4.1. Versiones geométricas del Teorema

Aunque no lo demostraremos, las sucesivas versiones geométricas del teorema de Hahn-Banach son equivalentes a la ya vista. Para realizar la formulación del Teorema será necesario tener claros ciertos conceptos:

Definición 1.10 (Hiperplano afín)**.** Sea E un espacio vectorial, un hiperplano afín de E es un subconjunto $H \subset E$ de la forma:

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$$

donde $f : E \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal no nula y $\alpha \in \mathbb{R}$. En dicho caso, escribiremos $H = [f = \alpha]$.

Observación. Cuando trabajábamos en asignaturas anteriores en espacios vectoriales de dimensión finita (digamos n), para nosotros un hiperplano era un subespacio vectorial de dimensión $n - 1$. Ahora, si nos encontramos en un espacio vectorial E genérico (no necesariamente de dimensión finita), el primer Teorema de Isomorfía de aplicaciones lineales aplicado a f nos da el isomorfismo lineal

$$E/\ker f \cong \mathrm{Im} f$$

Como f era lineal, ha de ser obligatoriamente dim $\mathrm{Im} f = 1$. Observemos que en el caso $H = [f = 0] = \ker f$, tenemos que $\dim(E/H) = 1$, de donde si E es de dimensión finita, tenemos $\dim H = \dim E - 1$. Si consideramos ahora $H = [f = \alpha]$ con $\alpha \neq 0$, tenemos que:

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\} = \{x + v : x \in E, v \in \ker f, f(x) = \alpha\}$$

Por lo que podemos ver H como un trasladado de $\ker f$, como un hiperplano afín, con espacio de direcciones $\ker f$.

Proposición 1.19. *El hiperplano $H = [f = \alpha]$ es cerrado si y solo si f es continua.*

Demostración. Por doble implicación:

$\Longleftarrow$) Si f es continua, tenemos que $H = f^{-1}(\{\alpha\})$, por lo que H será un conjunto cerrado, como imagen inversa de un conjunto cerrado por una aplicación continua.

$\Longrightarrow$) Supuesto que H es cerrado, tenemos entonces que $E \setminus H$ es abierto y no vacío (ya que f no se anula totalmente). Sea $x_0 \in E \setminus H$ de forma que $f(x_0) \neq \alpha$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f(x_0) < \alpha$.

Fijado $r > 0$ de forma que $B(x_0, r) \subset E \setminus H$, se cumple que $f(x) < \alpha$ $\forall x \in B(x_0, r)$, ya que si $f(x_1) > \alpha$ para cierto $x_1 \in B(x_0, r)$. El segmento:

$$\{x_t = (1 - t)x_0 + tx_1 : t \in [0, 1]\}$$

está contenido en $B(x_0, r) \subset E \setminus H$, por lo que $f(x_t) \neq \alpha \quad \forall t \in [0, 1]$, pero si tomamos:

$$t = \frac{f(x_1) - \alpha}{f(x_1) - f(x_0)}$$

tendremos que $f(x_t) = \alpha$, lo que lleva a una contradicción. En definitiva, tenemos que:

$$f(x_0 + rz) < \alpha \qquad \forall z \in B(0,1)$$

de donde f es continua.

□

La condición que nos va a interesar es buscar bajo qué condiciones cuando nos dan dos subconjuntos de un espacio normado vamos a poder separarlos mediante un hiperplano afín. Para ello, es necesario formalizar la idea de "separar dos subconjuntos de un espacio".

Definición 1.11. Sea E un espacio vectorial, $A, B \subset E$, diremos que el hiperplano $H = [f = \alpha]$ separa A y B si:

$$f(x) \leqslant \alpha \leqslant f(y) \qquad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

Además, diremos que la separación es estricta (o que H separa estrictamente A y B) si $\exists \varepsilon > 0$ de forma que:

$$f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leqslant f(y) \qquad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

Teorema 1.20 (Hahn Banach, primera versión geométrica)**.** *Sea E un espacio normado, $\emptyset \neq A, B \subset E$ con $A \cap B = \emptyset$, ambos convexos y A abierto, entonces existe un hiperplano cerrado*[4] *$H = [f = \alpha]$ que separa A y B.*

Demostración. El Teorema se demuestra en dos pasos:

Paso 1. Supongamos en una versión más débil que B se reduce a un punto, es decir, existe $x_0 \in E$ de forma que $B = \{x_0\}$ y que $A \subset E$ es un conjunto abierto y convexo de forma que $x_0 \notin A$.

Elegimos $z_0 \in A$ y definimos $C = A - z_0$, que:

- Contiene al 0, ya que como $z_0 \in A$, entonces $0 = z_0 - z_0 \in C$.
- Es abierto, ya que si consideramos la traslación según el vector z_0:

$$\begin{array}{rccc} t_{z_0} : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x + z_0 \end{array}$$

tenemos que t_{z_0} es una aplicación continua, con inversa $t_{z_0}^{-1} = t_{-z_0}$. Como $C = t_{-z_0}(A) = t_{z_0}^{-1}(A)$ y tenemos que A era abierto y t_{z_0} una aplicación continua, concluimos que C es abierto.

- Es convexo, ya que si $x, y \in C = A - z_0$ tenemos entonces que existen $u, v \in A$ de forma que:

$$x = u - z_0, \qquad y = v - z_0$$

Si tomamos $t \in [0,1]$, entonces:

$$tx + (1-t)y = t(u - z_0) + (1-t)(v - z_0) = \underbrace{tu + (1-t)v}_{\in A} - z_0 \in C$$

[4]Luego habrá una aplicación lineal y contina $f : E \to \mathbb{R}$, por lo que $E^* \neq \{0\}$.

El punto $y_0 = x_0 - z_0 \notin C$, de donde $y_0 \neq 0$. Por lo que $\mathbb{R}y_0$ es un subespacio vectorial de E de dimensión 1. Definimos $G = \mathbb{R}y_0$ y tomamos

$$\begin{array}{rccc} g: & G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ty_0 & \longmapsto & t \end{array}$$

que es una aplicación lineal (compruébese) y verificando $g(y_0) = 1$. La función g nos permitirá "separar el corte de C con G y el punto y_0". En este punto conviene estudiar el funcional de Minkowski del conjunto C, que se define en la Definición 1.12 y cuyas propiedades se aclaran en la Proposición 1.21. Sea p el funcional de Minkowski de C, veamos que p domina a g:

- Si $t \geqslant 0$, como $y_0 \notin C$ entonces[5] $p(y_0) \geqslant 1$, de donde:

$$g(ty_0) = t \leqslant tp(y_0) \overset{(1)}{=} p(ty_0)$$

- Si $t < 0$, tenemos que:

$$g(ty_0) = t < 0 \leqslant p(ty_0)$$

En cualquier caso, $g(ty_0) \leqslant p(ty_0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Nos encontramos en las hipótesis del Teorema de Hahn-Banach, por lo que podemos encontrar $f : E \to \mathbb{R}$ lineal de forma que:

$$f\big|_G = g \qquad \text{y} \qquad f(y) \leqslant p(y) \quad \forall y \in E$$

La propiedad 2 del funcional nos dice que $\exists M > 0$ de forma que:

$$f(y) \leqslant p(y) \leqslant M\|y\| \qquad \forall y \in E$$

Si aplicamos esta propiedad para $-y$:

$$-f(y) = f(-y) \leqslant M\| - y\| = M\|y\|$$

De donde:

$$|f(y)| \leqslant M\|y\| \qquad \forall y \in E$$

Como f es lineal, la Proposición 1.13 nos dice que f es continua.

Si ahora usamos la propiedad 3 del funcional de Minkoski, observamos que:

$$f(x) \leqslant p(x) < 1 = f(y_0) \qquad \forall x \in C$$

por lo que el hiperplano cerrado $H' = [f = 1]$ separa C y $B' = \{y_0\}$.

Si volvemos al problema de separar A y $B = \{x_0\}$, observamos que:

$$f(x) = f(y + z_0) = f(y) + f(z_0) \leqslant 1 + f(z_0) = f(y_0 + z_0) = f(x_0) \qquad \forall x \in A$$

Por lo que el hiperplano cerrado $H = [f = f(x_0)]$ separa A y $B = \{x_0\}$, como queríamos probar en este primer paso.

[5] Usando la propiedad 3 del funcional.

Paso 2. Volviendo al caso que nos plantea el Teorema siendo B un conjunto convexo y disjunto de A, tomamos:

$$A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$$

Observemos que:

- $0 \notin A - B$, ya que $A \cap B = \emptyset$.
- $A - B$ es abierto, ya que podemos escribir:

$$A - B = \bigcup_{b \in B} (A - b)$$

  y en la demostración del paso anterior ya probamos que la traslación de unconjunto abierto sigue siendo abierto.
- $A - B$ es convexo, ya que si $\alpha, \beta \in A - B$, existen $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ de forma que:

$$\alpha = a - b, \qquad \beta = a' - b'$$

  Por lo que:

$$t\alpha + (1-t)\beta = t(a-b) + (1-t)(a'-b') = \underbrace{ta + (1-t)b}_{\in A} - [\underbrace{tb + (1-t)b'}_{\in B}] \in C$$

  donde hemos usado que tanto A como B son convexos.

Estamos en las condiciones del paso anterior, por lo que existen $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua y $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que el hiperplano cerrado $H = [f = \alpha]$ separa $A - B$ del conjunto $\{0\}$, es decir:

$$f(a) - f(b) = f(a - b) \leqslant \alpha \leqslant f(0) = 0 \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

de donde:

$$f(a) \leqslant \alpha - f(b) \leqslant f(b) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Por lo que el hiperplano cerrado $H' = [f = \alpha - f(b)]$ separa los conjuntos A y B.

□

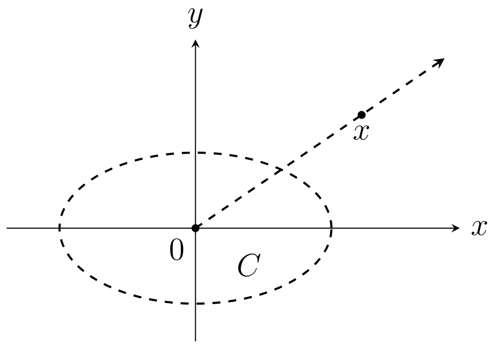
Funcional de Minkowski de un conjunto

En este subapartado definiremos el funcional de Minkowski de un conjunto, una cierta aplicación con propiedades interesantes que nos permite realizar la demostración de la primera versión geométrica del Teorema de Hahn Banach y que además tiene cierto interés fuera de esta demostración, como luego se pondrá de manifiesto en los ejercicios a realizar.

Definición 1.12 (Funcional de Minkowski)**.** Sea E un espacio normado y $C \subset E$ un conjunto convexo, abierto y con $0 \in C$, definimos el funcional de Minkowski de C como la aplicación $p : E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$p(x) = \text{ínf} \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C \right\} \qquad \forall x \in E$$

Observación. Bajo las hipótesis de la definición del funcional de Minkowski, observamos que lo que estamos haciendo es, fijado un punto $x \in E \setminus \{0\}$, tomar la recta de origen 0 que pasa por x, y si multiplicamos x por un escalar positivo, nos movemos por dicha recta. En particular, si multiplicamos x por el inverso de un escalar positivo, si aumentamos dicho escalar, nos estaremos acercando a 0, y si decrementamos dicho escalar, nos alejaremos de 0. Notemos que lo que estamos haciendo por la definición del funcional de Minkowski es tomar aquel valor más "pequeño" para el cual si multiplicamos x por el inverso de un escalar que se queda por encima suya no nos saldremos del conjunto C.



Observemos que $p(0) = 0$. Además, el funcional de Minkowski tiene ciertas propiedades resaltables.

Proposición 1.21. *Sea E un espacio normado y $C \subset E$ un conjunto convexo, abierto y con $0 \in C$, el funcional de Minkowski verifica:*

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$
2. $\exists M > 0$ *tal que* $0 \leqslant p(x) \leqslant M\|x\| \qquad \forall x \in E$
3. $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$
4. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E$

Demostración. Demostramos cada una de las propiedades:

1. Para la primera, basta usar que $\lambda > 0$ y observar:

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha/\lambda} = \frac{\lambda x}{\alpha} \in C\right\} = \inf\left\{\lambda\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} \\ &= \lambda \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} = \lambda p(x) \qquad \forall x \in E \end{aligned}$$

2. Dado $x \in E$, como $0 \in C$ es abierto $\exists r > 0$ de forma que $B(0, r) \subset C$. Si tomamos:

$$\alpha > \frac{\|x\|}{r} \Longrightarrow \left\|\frac{x}{\alpha}\right\| < r \Longrightarrow \frac{x}{\alpha} \in B(0, r) \subset C$$

Por tanto:

$$\left]\frac{\|x\|}{r}, +\infty\right[\subset \left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C\right\}$$

de donde el ínfimo de la derecha será menor o igual que el ínfimo de la izquierda:

$$p(x) \leqslant \frac{\|x\|}{r}$$

Tomamos $M = \frac{1}{r}$.

3. Queremos ver que $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$:

$\supset$) Sea $x \in E$ con $p(x) < 1$, el ínfimo nos garantiza la existencia de $\alpha_0 \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\alpha_0 < 1$ y $\frac{x}{\alpha_0} \in C$. Como C es convexo y $0 \in C$, tenemos entonces que:

$$x = \alpha_0 \frac{x}{\alpha_0} + (1 - \alpha_0) \cdot 0 \in C$$

$\subset$) Sea $x \in C$, por ser C abierto $\exists r > 0$ de forma que $B(x, r) \subset C$. Ahora, si tomamos $\varepsilon > 0$ de forma que:

$$\frac{\|x\|}{r} < \frac{1}{\varepsilon}$$

tendremos entonces que:

$$\|(1+\varepsilon)x - x\| = \|\varepsilon x\| = \varepsilon\|x\| < r \Longrightarrow (1+\varepsilon)x \in B(x, r)$$

En dicho caso, tendremos que:

$$p(x) \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$$

4. Dados $x, y \in E$, sabemos que el conjunto:

$$\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\}$$

es un intervalo no acotado superiormente y acotado inferiormente por $p(x)$, pero no sabemos si el intervalo contiene a $p(x)$ (en cuyo caso se trataría de un mínimo) o si no. Sin embargo, lo que sí sabemos es que:

$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon}, \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Si usamos el apartado 3, tenemos que:

$$p\left(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}\right) < 1$$

Como C es convexo, si tomamos:

$$t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \leqslant 1$$

tenemos entonces que:

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} = t\frac{x}{p(x)+\varepsilon} + (1-t)\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C \qquad \forall x, y \in E$$

Usando de nuevo la propiedad 3:

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon \qquad \forall x, y \in E, \quad \forall \varepsilon > 0$$

De donde deducimos la propiedad buscada. □

Observación. Notemos que si $C = B(0,1)$, tenemos entonces que:

$$p(x) = \text{ínf}\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} = \|x\| \qquad \forall x \in E$$

Ejercicio 1.4.2. Sea E un espacio vectorial y C un conjunto abierto, convexo y que contiene al 0, parece qer que p tiene propiedades deseables para ser una norma en E de forma que:

$$B_p(0,1) = C$$

es decir, el funcional de Minkoski de alguna forma resuelve el problema de dado un conjunto que quiero que sea la bola unidad, ¿qué norma considero?.

Se pide razonar las propiedades que ha de cumplir un conjunto $C \subset E$ abierto, convexo y que contiene al 0 para garantizar que el funcional de Minkowski de C sea una norma.

Teorema 1.22 (Hahn Banach, segunda versión geométrica)**.** *Sea E un espacio normado, $\emptyset \neq A, B \subset E$ con $A \cap B = \emptyset$ ambos convexos, A cerrado y B compacto, entonces existe un hiperplano cerrado que separa estrictamente A y B. Es decir, existen $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ de forma que:*

$$f(a) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon \leqslant f(b) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Demostración. Sea $C = A - B$, tenemos que:

- $0 \notin C$, ya que $A \cap B = \emptyset$.
- C es convexo, ya que A y B son convexos (se hizo en la prueba del Teorema anterior).
- C es cerrado, ya que A es cerrado y B es compacto: sea $\{x_n\} \to x \in E$ con $x_n \in C \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces existen $\{a_n\}$ sucesión de puntos de A y $\{b_n\}$ sucesión de puntos de B con:

  $$x_n = a_n - b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

  Como B es compacto, existe una parcial $\{b_{\sigma(n)}\}$ convergente a $b \in B$. Si vemos que:

  $$x_{\sigma(n)} = a_{\sigma(n)} - b_{\sigma(n)} \Longrightarrow a_{\sigma(n)} = x_{\sigma(n)} + b_{\sigma(n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

  Tenemos entonces que $\{a_{\sigma(n)}\} \to x+b$ y como A es cerrado, ha de ser $x+b \in A$. En definitiva:

  $$x = x + b - b$$

  Con $x + b \in A$ y $b \in B$, por lo que $x \in C$, lo que demuestra que C es cerrado.

Como C es cerrado y $0 \notin C$, tenemos entonces que $E \setminus C$ es abierto y $0 \in E \setminus C$, de donde $\exists r > 0$ con que $B(0,r) \cap C = \emptyset$. Si usamos la primera versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach para los conjuntos $B(0,r)$ y C, obtenemos un hiperplano cerrado $H = [f = \alpha]$ de forma que:

$$f(x) \leqslant \alpha \leqslant f(y) \qquad \forall x \in C, \quad \forall y \in B(0,r)$$

es decir:

$$f(a-b) \leqslant \alpha \leqslant f(-rz) = -rf(z) \leqslant -r\|f\| \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad \forall z \in B(0,1)$$

Si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2}r\|f\|$, tenemos entonces que:

$$f(a) + \varepsilon \leqslant f(b) - \varepsilon \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Tomando $\beta = \min\{f(b) : b \in B\} + \varepsilon$, tenemos entonces que:

$$f(a) \leqslant \beta - \varepsilon < \beta + \varepsilon \leqslant f(b) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Es decir, el hiperplano cerrado $H = [f = \beta]$ separa estrictamente A y B. □

Parece ser a priorio un Teorema más potente que la primera versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach, pero en dimensión infinita apenas hay conjuntos compactos.

Corolario 1.22.1. *Sea E un espacio vectorial, $F \subset E$ un subespacio vectorial de forma que $\overline{F} \neq E$, entonces existe $f \in E^*$, $f \neq 0$ de forma que:*

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in F$$

Demostración. Como $\overline{F} \neq E$, tomamos $x_0 \in E \backslash \overline{F}$ y tenemos que $\{x_0\}$ es compacto, así como que $\{x_0\} \cap \overline{F} = \emptyset$, con $\overline{F}$ cerrado. Además, como F es un subespacio vectorial, tenemos que $\overline{F}$ es un subespacio vectorial, luego convexo. Si aplicamos la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach, obtenemos $H = [f = \alpha]$ hiperplano cerrado que separa estrictamente $\overline{F}$ y $\{x_0\}$. Es decir, $\exists \varepsilon > 0$ de forma que:

$$f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leqslant f(x_0) \qquad \forall x \in \overline{F}$$

Tenemos que $f \in E^*$ así como que $f \neq 0$ (ya que tenemos una separación estricta de $f(x_0)$). Finalmente:

$$f(x) < \alpha < f(x_0) \qquad \forall x \in \overline{F}$$

Fijaremos $\lambda \in \mathbb{R}^*$, tenemos que:

$$\lambda f(x) = f(\lambda x) < \alpha \qquad \forall x \in \overline{F}$$

- Si $\lambda > 0$, tenemos entonces que:

  $$f(x) < \frac{\alpha}{\lambda} \qquad \forall \lambda > 0$$

  luego $f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in F$.

- Si $\lambda < 0$, tenemos que:

  $$f(x) > \frac{\alpha}{\lambda} \qquad \forall \lambda < 0$$

  de la misma forma, $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in F$.

□

Observación. Notemos que el enunciado de este teorema es equivalente a:

Sea E un espacio vectorial, $G \subset E$ un subespacio vectorial cerrado de E con $G \neq E$, entonces existe $f \in E^*$, $f \neq 0$ de forma que:

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in F$$

Aunque esta forma de enunciarlo parezca más sencilla, preferimos enunciarlo de la primera forma, ya que lo que nos va a interesar del enunciado es su contrarrecíproco:

Sea E un espacio vectorial y $F \subset E$ un subespacio vectorial, si $\forall f \in E^*$, $f \neq 0$, $\exists x \in F$ con $f(x) \neq 0$, entonces F es denso en E.

Enunciado de otra forma más sencilla:

Si $f \in E^* \setminus \{0\}$, si la condición $f\big|_F = 0$ implica $f = 0$, entonces F es denso en E.

Acabamos de encontrar una condición suficiente que nos permite probar que ciertos subespacios vectoriales de un espacio vectorial son densos, mediante una idea muy ingeniosa.

1.5. Espacio bidual

Sea E un espacio normado, habíamos ya definido el espacio E^*, que probamos que era también un espacio normado, con la norma:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\langle f, x \rangle|$$

esto nos permite considerar $(E^*)^*$, al que llamaremos espacio bidual de E, y notaremos por E^{**}. Será costumbre denotar a sus elementos por letras griegas, y la norma en este espacio vendrá dada por:

$$\|\chi\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |\langle \chi, f \rangle|$$

Proposición 1.23. *Sea E un espacio normado, E^{**} contiene una copia isométrica de E.*

Demostración. Es decir, queremos probar que existe un subconjunto de E^{**} que es isométrico con E, o en otras palabras, que existe una aplicación $J : E \to E^{**}$ que sea lineal, inyectiva y que preserve la norma. Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} J: & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & \chi_x \end{array}$$

donde χ_x es la aplicación dada por:

$$\begin{array}{rccc} \chi_x: & E^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \langle f, x \rangle \end{array}$$

Comprobemos primero que J está bien definida, es decir, que $\chi_x \in E^{**}$. Para ello:

- χ_x es lineal, puesto que:

$$\chi_x(\lambda f+g) = \langle \lambda f+g, x\rangle = \lambda\langle f, x\rangle+\langle g, x\rangle = \lambda\chi_x(f)+\chi_x(g) \qquad \forall f, g \in E^*, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- χ_x es continua, ya que:

$$\|\chi_x\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |\chi_x(f)| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |\langle f, x\rangle| \overset{(*)}{=} \|x\|$$

  donde en $(*)$ hemos usado el Corolario 1.18.3 del Teorema de Hahn-Banach. Además, hemos probado que $\|\chi_x\| = \|x\|$, por lo que J preserva la norma.

Nos falta comprobar que J es lineal e inyectiva:

- Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$:

$$J(\lambda x + y) = \chi_{(\lambda x+y)} \overset{(*)}{=} \lambda\chi_x + \chi_y = \lambda J(x) + J(y)$$

  donde en $(*)$ hemos usado que:

$$\chi_{(\lambda x+y)}(f) = \langle f, \lambda x + y\rangle = \lambda\langle f, x\rangle + \langle f, y\rangle = \lambda\chi_x(f) + \chi_y(f) \qquad \forall f \in E^*$$

- Sean $x, y \in E$ de forma que $J(x) = J(y)$, tenemos entonces que:

  Opción 1.

$$J(x - y) = 0 \Longrightarrow 0 = \|J(x - y)\| \overset{(*)}{=} \|x - y\| \Longrightarrow x - y = 0$$

  donde en $(*)$ usamos que J conserva la norma.

  Opción 2. Supuesto que $x \neq y$, si tomamos $v = x-y$ y consideramos $G = \mathbb{R}v$ podemos definir el funcional lineal y continuo:

$$g(tv) = t\|v\|$$

  El Corolario 1.18.1 nos da la existencia de $f \in E^*$ de forma que $f(v) = \|v\|$, pero tenemos que:

$$f(v) = f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$$

  por lo que $v = 0$, lo que es una contradicción.

Hemos probado que E es isométrico con $J(E) \subset E^{**}$. □

Definición 1.13. Sea E un espacio normado, decimos que es reflexivo si la aplicación J de la proposición anterior es sobreyectiva.

1.6. Dual de l_p, para $1 \leqslant p < \infty$

Consideramos nuevamente el espacio:

$$l_p = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\}, \qquad \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

y estaremos interesados en calcular su espacio dual, l_p^*. Para ello, si para cada $k \in \mathbb{N}$ denotamos por e_k al vector que verifica:

$$e_k(n) = \delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

claramente tenemos que $e_k \in l_p$, $\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \in [1, \infty[$. Consideraremos el espacio:

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \mathcal{L}(\{e_i : i \in \mathbb{N}\}) \subset l_p$$

Y dado $p \in [1, \infty[$, consideraremos siempre que p^* cumple que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1, \qquad p^* = \infty \text{ si } p = 1$$

Trataremos de probar que $\boxed{(l_p)^* \cong l_{p^*}}$

Proposición 1.24. *Si $p \in [1, \infty[$, se verifica que:*

$$\overline{\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}} = l_p$$

Demostración. Sea $x \in l_p$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x(k) e_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

es decir, s_n será el vector cuyas $n-$ésimas primeras componentes coinciden con las de x y el resto de componentes son 0:

$$\begin{aligned} s_1 &= (x(1), 0, \ldots) \\ s_2 &= (x(1), x(2), 0, \ldots) \\ s_3 &= (x(1), x(2), x(3), 0, \ldots) \end{aligned}$$

Es evidente que $s_n \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así como que $s_n(k) = x(k)$ siempre que $k \leqslant n$. De esta última observación deducimos que:

$$(\|x - s_n\|_p)^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} (|x(k)|)^p \to 0$$

por lo que $\{s_n\} \to x$ en l_p. □

Proposición 1.25. *Si $1 \leqslant p < \infty$, el espacio $(l_p)^*$ contiene una copia isométrica de l_{p^*}.*

Demostración. Tomaremos $y \in l_{p^*}$ y definiremos $\Phi_y : l_p \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\Phi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \qquad \forall x \in l_p$$

que está bien definida (la serie es convergente), puesto que:

$$x \in l_p, y \in l_{p^*} \Longrightarrow xy \in l_1 \qquad \text{y} \qquad \|xy\|_1 \leqslant \|x\|_p \|y\|_{p^*}$$

Veamos que Φ_y es lineal, continua y que $\|\Phi_y\| = \|y\|_{p^*}$, puesto que:

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, z \in l_p$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\Phi_y(\lambda x + z) &= \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda x(n) + z(n))y(n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) + \sum_{n=1}^{\infty} z(n)y(n) \\ &= \lambda \Phi_y(x) + \Phi_y(z)\end{aligned}$$

- Para ver que Φ_y es continua, veamos que:

$$|\Phi_y(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)||y(n)| \overset{(*)}{\leqslant} \|y\|_{p^*}\|x\|_p$$

  donde en $(*)$ usamos la desigualdad de Hölder, con lo que Φ_y es continua. Además hemos visto ya que, $\|\Phi_y\| \leqslant \|y\|_{p^*}$.

- Para la otra desigualdad, distinguimos casos:

  - Para $p = 1$, tenemos que:

  $$|y(n)| = |\Phi_y(e_n)| \leqslant \|\Phi_y\|\|e_n\|_p = \|\Phi_y\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

    de donde:

  $$\|y\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |y(n)| \leqslant \|\Phi_y\|$$

  - Para $1 < p < \infty$, tomamos:

  $$x(n) = (|y_n|)^{p^*-2} y_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

    y razonando como en el Ejercicio 4.1.2 obtenemos la desigualdad:

  $$\|y\|_{p^*} \leqslant \|\Phi_y\|$$

A partir de eso, veamos que:

$$\begin{array}{rccc}\Phi : & l_{p^*} & \longrightarrow & {l_p}^* \\ & y & \longmapsto & \Phi_y\end{array}$$

es lineal, inyectiva y que conserva la norma:

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, y \in l_{p^*}$, tenemos que:

$$\Phi(\lambda x + y) = \Phi_{(\lambda x + y)} \overset{(*)}{=} \lambda \Phi_x + \Phi_y = \lambda \Phi(x) + \Phi(y)$$

donde en $(*)$ hemos usado que:

$$\begin{aligned}\Phi_{(\lambda x+y)}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z(n)(\lambda x(n) + y(n)) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} z(N)x(n) + \sum_{n=1}^{\infty} z(n)y(n) \\ &= \lambda \Phi_x(z) + \Phi_y(z)\end{aligned}$$

- Hemos visto ya que $\|\Phi_y\| = \|y\|_{p^*}$ para todo $y \in l_{p^*}$.
- Como Φ preserva la norma y es lineal, tenemos que si $x, y \in l_{p^*}$ con $\Phi(x) = \Phi(y)$, entonces:

$$0 = \Phi(x - y) \Longrightarrow 0 = \|\Phi(x - y)\| = \|x - y\| \Longrightarrow x = y$$

por lo que Φ es inyectiva.

□

Proposición 1.26. *Si* $1 \leqslant p < \infty$*, entonces* ${l_p}^*$ *es isométrico a* l_{p^*}*.*

Demostración. La demostración se basa en probar que la aplicación Φ de la Proposición anterior es sobreyectiva. Para ello, fijado $f \in l_p^*$, definimos:

$$y(n) = f(e_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Si $p = 1$, escribimos:

$$|y(k)| = \alpha_k y(k), \qquad \alpha_k = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } y(k) \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } y(k) < 0 \end{array} \right. \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$|y(n)| = |f(e_n)| \leqslant \|f\|\|e_n\| = \|f\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo que la sucesión y está acotada, es decir, $y \in l_\infty$, y tenemos que $\Phi(y) = f$.

- Si $p > 1$, fijado $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (|y(k)|)^{p^*} &= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k y(k))^{p^*-1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (|y(k)|)^{p^*-1} f(e_k) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (|y(k)|)^{p^*-1} e_k\right) \\ &\leqslant \|f\| \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (|y(k)|)^{p^*-1} e_k\right\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} (|y(k)|)^{(p^*-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} (|y(k)|)^{p^*}\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Es decir:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|\right)^{p^*} \leqslant \|f\| \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|\right)^{p^*}\right)^{\frac{1}{p}}$$

de donde:

$$\|f\| \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

por lo que $y \in l_{p^*}$. Tenemos que:

$$\Phi_y(e_n) = y(n) = f(e_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde $f(x) = \Phi_y(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Como es un conjunto denso, han de coincidir por continuidad en todo el espacio, con lo que:

$$f(x) = \Phi_y(x) \qquad \forall x \in l_p$$

de donde $\Phi_y = f$

□

A partir de los resultados vistos en esta sección, se propone:

Ejercicio 1.6.1. Calcular el dual de c_0, y comprobar que es isométrico con l_1.

Ejercicio 1.6.2. Calcular el dual de c y comprobar que es isométrico con l_1.

Ejercicio 1.6.3. Demostrar que c_0 no es reflexivo.

Ejercicio 1.6.4. Demostrar que l_p es reflexivo para $1 < p < \infty$.

2. Principio de acotación uniforme y Tª de la gráfica cerrada

Definición 2.1. Sean E, F espacios normados, definimos:

$$L(E,F) = \{f : E \to F : f \text{ lineal y continua}\}$$

y notaremos normalmente $L(E) := L(E,E)$.

Proposición 2.1. *Al igual que como sucedía con aplicaciones lineales y continuas de un espacio normado E en $\mathbb{R}$, si E, F son espacios normados y $T \in L(E,F)$ tenemos*[1]*:*

1. *T es continua $\Longleftrightarrow$ T es continua en 0 $\Longleftrightarrow$* $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| < \infty$

2. *Si definimos:*

$$\|T\| := \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| \qquad \forall T \in L(E,F)$$

   Tenemos que $\|\cdot\|$ es una norma en $L(E,F)$.

3. *Se verifica que:*

$$\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\|, \quad \forall x \in E\}$$

2.1. Principio de acotación uniforme

Con vistas a demostrar el Principio de acotación uniforme, demostramos el siguiente Lema:

Lema 2.2. *Sean E, F espacios normados y $T \in L(E,F)$, entonces:*

$$\sup_{\|x-x_0\|\leqslant r} \|Tx\| \geqslant r\|T\| \qquad \forall x_0 \in E, \quad \forall r > 0$$

Demostración. Fijado $r \in \mathbb{R}^+$, sean $x_0, y \in E$ con $\|y\| \leqslant r$:

$$\begin{aligned}
\|Ty\| &= \left\| T\left(\frac{1}{2}\left[x_0 + y - (x_0 - y)\right]\right)\right\| = \frac{1}{2}\|T(x_0 + y - (x_0 - y))\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\|T(x_0+y)\| + \|T(x_0-y)\|\right) \leqslant \max\{\|T(x_0+y)\|, \|T(x_0-y\|)\} \\
&\leqslant \sup_{\|y\|\leqslant r} \max\{\|T(x_0+y)\|, \|T(x_0-y)\|\} \leqslant \sup_{\|z-x_0\|\leqslant r} \|Tz\|
\end{aligned}$$

[1] Resultados análogos que se realizan con las mismas pruebas.

Si ahora observamos que:

$$\sup_{\|y\|\leqslant r} \|Ty\| = r \sup_{\|z\|\leqslant 1} \|Tz\| = r\|T\|$$

Acabamos de probar que $\sup\limits_{\|x-x_0\|\leqslant r} \|Tx\| \geqslant r\|T\|$. □

Teorema 2.3 (Principio de acotación uniforme, de Banach-Steinhaus)**.** *Sea E un espacio de Banach, F un espacio normado y $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L(E,F)$, entonces:*

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < +\infty \quad \forall x \in E \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < +\infty$$

Demostración. Demostraremos el contrarrecíproco:

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| = \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| = \infty$$

Supongamos pues que $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}} \|T\| = \infty$, por lo que existe una sucesión de elementos de $\mathcal{F}$, llamémosla $\{T_n\}$, de forma que:

$$\|T_n\| \geqslant 4^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definimos por inducción una sucesión de puntos de E:

- $x_0 = 0 \in E$.
- Tomando $r = 1/3$, el Lema 2.2 nos dice:

  $$\sup_{\|x-x_0\|<\frac{1}{3}} \|T_1x\| \geqslant \frac{1}{3}\|T_1\| > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\|T_1\|$$

  Como $2/3 \cdot 1/3 \cdot \|T_1\|$ es estrictamente menor que el supremo de la izquierda, tenemos que no puede ser una cota superior de $\|T_1x\|$ para $x \in B(x_0, 1/3)$, con lo que $\exists x_1 \in B(x_0, 1/3)$ de forma que:

  $$\|T_1x_1\| > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\|T_1\|$$

- Supuesto que hemos construido hasta x_{n-1}, veamos cómo construir x_n:

  Tomando $r = 1/3^n$, el Lema 2.2 nos dice que:

  $$\sup_{\|x-x_{n-1}\|<\frac{1}{3^n}} \|T_nx\| \geqslant \frac{1}{3^n}\|T_n\| > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\|$$

  Y por el mismo razonamiento de antes podemos encontrar $x_n \in B(x_{n-1}, 1/3^n)$ de forma que:

  $$\|T_nx_n\| > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\|$$

Veamos ahora que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Para ello, buscamos acotar $\|x_m - x_n\|$ para n, m índices bastante avanzados. Supondremos sin pérdida de generalidad que $n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n$, donde tendremos:

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &= \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n\| \\
&\leqslant \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\leqslant \frac{1}{3^m} + \frac{1}{3^{m-1}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n}\left[\frac{1}{3^{m-n}} + \ldots + \frac{1}{3}\right] \\
&\leqslant \frac{1}{3^n}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{3^j} = \frac{1}{3^n}\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

En definitiva, tenemos que:

$$\|x_m - x_n\| = \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}$$

Por lo que $\{x_n\}$ es de Cauchy en E, que era de Banach, por lo que $\{x_n\}$ converge a cierto $x \in E$. Observemos que:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n} \geqslant \lim_{m\to\infty}\|x_m - x_n\| \overset{(*)}{=} \left\|\lim_{m\to\infty}(x_m - x_n)\right\| = \|x - x_n\|$$

donde en $(*)$ hemos usado la continuidad de $\|\cdot\|$. Calculamos ahora:

$$\begin{aligned}
\|T_n x\| &= \|T_n(x - x_n + x_n)\| \geqslant \|T_n x_n\| - \|T_n(x - x_n)\| \geqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\| - \|T_n\|\|x - x_n\| \\
&\geqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\| - \|T_n\|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3^n}\|T_n\| = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\| \geqslant \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\sup_{T\in\mathcal{F}}\|Tx\| \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n x\| = \infty$$

Como queríamos probar. □

Introducimos ahora una serie de Corolarios que nos da el Principio de acotación uniforme:

Corolario 2.3.1. *Sean E, F dos espacios de Banach, sea $\{T_n\}$ una sucesión de elementos de $L(E, F)$ de forma que $\{T_n(x)\} \to T(x)$ para todo $x \in E$. Entonces:*

(a) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\| < \infty$.

(b) $T \in L(E, F)$.

(c) $\|T\| \leqslant \liminf_{n\to\infty}\|T_n\|$.

Demostración. Demostramos cada apartado:

(a) Dado $x \in E$, como $\{T_n(x)\} \to T(x)$, tenemos que $\exists m \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$T_n(x) \in B(T(x), 1) \qquad \forall n \geqslant m$$

Por lo que $\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado, puesto que podemos verlo como la unión de un conjunto acotado y uno finito:

$$\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\} = \{T_n(x) : n \geqslant m\} \cup \{T_n(x) : n < m\}$$

En definitiva, tenemos que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty$ para todo $x \in E$, de donde aplicando el Principio de acotación uniforme tenemos que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.

(b) Veamos que $T : E \to F$ es lineal y continua:

- Es fácil ver que T es lineal:

$$\begin{aligned} T(\lambda x + y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda T_n(x) + T_n(y)) \\ &= \lambda \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) = \lambda T(x) + T(y) \qquad \forall x, y \in E \end{aligned}$$

- Para ver que T es continua podemos usar el apartado (a):

$$\|T_n(x)\| \leqslant \|T_n\|\|x\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|\|x\| \qquad \forall x \in E$$

  Y como $\{\|T_n(x)\|\} \to \|T(x)\|$, tenemos que:

$$\|T(x)\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|\|x\| \qquad \forall x \in E$$

  lo que nos dice que T es continua.

(c) Para ver que $\|T\| \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \|T_n\|$, notemos que:

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \left\| \lim_{n\to\infty} T_n(x) \right\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| = \liminf \|T_n(x)\| \leqslant \liminf(\|T_n\|\|x\|) \\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geqslant k} (\|T_n\|\|x\|) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geqslant k} \|T_n\| \cdot \|x\| = \liminf \|T_n\| \cdot \|x\| \qquad \forall x \in E \end{aligned}$$

De donde $\|T\| \leqslant \liminf \|T_n\|$.

□

Corolario 2.3.2. *Sea G un espacio de Banach y $B \subset G$, si para toda $f \in G^*$ el conjunto $f(B)$ está acotado (en $\mathbb{R}$), entonces B está acotado.*

Demostración. Comenzamos la demostración pensando a lo que queremos llegar, pues así nos será más fácil comenzar la demostración. Queremos probar que B está acotado, es decir, que existe $M > 0$ de forma que:

$$\|b\| \leqslant M \qquad \forall b \in B$$

Si recordamos que el Corolario 1.18.3 nos dice que:

$$\|b\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(b)|$$

observemos que lo queremos es buscar una cota superior de $|f(b)|$, donde b está fija y f se mueve. Para ello, podemos pensar en definir ciertos funcionales $T_b(f)$ de forma que tras aplicar el Principio de Acotación Uniforme obtengamos para $\|f\| \leqslant 1$:

$$|f(b)| = |T_b(f)| \leqslant \|T_b\|\|f\| \leqslant \|T_b\| \leqslant \sup_{b\in B} \|T_b\| < \infty$$

Con lo que nuestra constante M la tomaremos como $\sup\limits_{b\in B} \|T_b\|$. Comenzando ahora con la demostración, fijado $b \in B$, definimos la aplicación $T_b : G^* \to \mathbb{R}$ dada por:

$$T_b(f) = f(b) \qquad \forall f \in G^*$$

Con lo que $T_b \in L(G^*, \mathbb{R})$:

- Es claro que T_b es lineal.
- T_b es continua, ya que $|T_b(f)| = |f(b)| \leqslant \|b\|\|f\| \quad \forall f \in G^*$.

Como $f(B)$ es acotado para toda $f \in G^*$, tenemos entonces que:

$$\sup_{b\in B} |T_b(f)| = \sup_{b\in B} |f(b)| < \infty \qquad \forall f \in G^*$$

Con lo que aplicando el Principio de acotación uniforme tenemos:

$$\sup_{b\in B} \|T_b\| < \infty$$

Ahora, si tomamos $f \in G^*$ con $\|f\| \leqslant 1$, buscamos usar que $\|x\| = \sup\limits_{\|f\| \leqslant 1} |f(x)|$:

$$|f(b)| = |T_b(f)| \leqslant \|T_b\|\|f\| \leqslant \sup_{b\in B} \|T_b\|\|f\| \leqslant \sup_{b\in B} \|T_b\|$$

Por lo que $\|b\| \leqslant \sup\limits_{b\in B} \|T_b\| < \infty \quad \forall b \in B$, lo que nos dice que B está acotado. $\square$

Este último corolario nos dice que si $B \subset G^*$ es un conjunto cualquiera, una forma de estudiar si B es un conjunto acotado, una posibilidad es tratar de calcular su imagen bajo cualquier función $f \in G^*$, que es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Recordemos que en $\mathbb{R}^n$ un conjunto era acotado si y solo si cada una de sus proyecciones es un conjunto acotado. Este Corolario hace ese papel en espacios de dimensión infinita, que junto con el siguiente son muy utilizados.

Corolario 2.3.3. *Sea G un espacio de Banach y sea $B^* \subset G^*$, si el conjunto:*

$$B^*(x) = \{f(x) : f \in B^*\}$$

está acotado para todo $x \in G$, entonces B^* está acotado.

Demostración. Al igual que antes empezamos por el final, pues así nos será más fácil comenzar la demostración. Queremos concluir que B^* está acotado, es decir, que:

$$\|f\| \leqslant M \qquad \forall f \in B^*$$

para cierta constante $M > 0$. Para ello, si recordamos la definición de $\|f\|$, vemos que:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$$

donde f está fija y movemos la x, con lo que trataremos de definir funcionales $T_f(x)$ de forma que para $\|x\| \leqslant 1$:

$$|f(x)| = |T_f(x)| \leqslant \|T_f\|\|x\| \leqslant \|T_f\| \leqslant \sup_{f \in B^*} \|T_f\|$$

Comenzando ahora con la demostración, para cada $f \in B^*$ definimos la aplicación $T_f : G \to \mathbb{R}$ dada por:

$$T_f(x) = f(x) \qquad \forall x \in G$$

con lo que $T_f \in G^*$ para todo $f \in B^*$:

- Es fácil ver que T_f es lineal para cualquier $f \in B^*$.
- No es difícil ver que T_f es continua para $f \in B^*$, ya que:

$$|T_f(x)| = |f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \qquad \forall x \in G$$

Como el conjunto $B^*(x)$ está acotado para todo $x \in G$, tenemos que:

$$\sup_{f \in B^*} \|T_f(x)\| = \sup_{f \in B^*} |f(x)| < \infty$$

nos encontramos en las hipótesis del Principio de acotación uniforme, que nos dice que entonces:

$$\sup_{f \in B^*} \|T_f\| < \infty$$

en cuyo caso, si $\|x\| \leqslant 1$, entonces:

$$|f(x)| = |T_f(x)| \leqslant \|T_f\|\|x\| \leqslant \|T_f\| \leqslant \sup_{f \in B^*} \|T_f\| \qquad \forall f \in B^*$$

con lo que:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \leqslant \sup_{f \in B^*} \|T_f\| \qquad \forall f \in B^*$$

de donde deducimos que B^* está acotado. □

2.2. Otra demostración del Principio de acotación uniforme

Repetiremos ahora la demostración del Principio de acotación uniforme de otra forma, usando el Lema de Baire, un resultado clásico que nos da de forma no muy complicada la demostración del Principio.

Lema 2.4 (de Baire)**.** *Sea X un espacio métrico completo, sea $\{X_n\}$ una sucesión de subconjuntos de X todos ellos cerrados y con interior vacío, entonces:*

$$\operatorname{Int}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \emptyset$$

Demostración. Tomaremos $O_n = X \setminus X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, con lo que O_n es abierto y denso para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que:

$$\overline{O_n} = \overline{X \setminus X_n} = X \setminus \operatorname{Int} X_n = X \setminus \emptyset = X \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Y la prueba terminará probando que $G = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$ es denso, ya que en dicho caso tendremos:

$$X = \overline{G} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus X_n} = \overline{X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n} = X \setminus \operatorname{Int}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)$$

de donde podremos deducir que $\operatorname{Int}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\right) X_n = \emptyset$. Para probar que G es denso, sea ω un abierto no vacío de X, tenemos que probar que $\omega \cap G \neq \emptyset$. Como ω es abierto, dado $x_0 \in \omega$ podemos encontrar $r_0 > 0$ de forma que:

$$\overline{B(x_0, r_0)} \subset \omega$$

Tras esto, como O_1 es abierto y denso, podremos elegir $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$ y $r_1 > 0$ de forma que:

$$\overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_0, r_0) \cap O_1 \quad \text{y} \quad 0 < r_1 < \frac{r_0}{2}$$

De forma inductiva, como cada O_n es abierto y denso, seremos capaces de encontrar dos sucesiones: $\{x_n\}$ de puntos de X y $\{r_n\}$ de reales positivos de forma que se cumpla:

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1} \quad \text{y} \quad 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Veamos que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Para ello, sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \geqslant n$, tendremos que:

$$x_m \in B(x_{m-1}, r_{m-1}) \subset \ldots \subset B(x_n, r_n)$$
$$r_n < \frac{r_{n-1}}{2} < \frac{r_{n-2}}{2^2} < \ldots < \frac{r_0}{2^n}$$

Por lo que:

$$\|x_m - x_n\| < r_n < \frac{r_0}{2^n}$$

de donde deducimos que $\{x_n\}$ es de Cauchy en X, y como X era completo, existe $l \in X$ de forma que $\{x_n\} \to l$. Finalmente, como $x_{n+p} \in B(x_n, r_n)$ para $n, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tomando límite cuando $p \to \infty$ obtenemos que:

$$l \in \overline{B(x_n, r_n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

En particular, $l \in \omega \cap G$, por lo que G es denso, lo que concluye la demostración. □

Cabe destacar que una de las formas en las que más se utiliza el Lema de Baire es mediante su contrarrecíproco:

Sea X un espacio métrico completo, sea $\{X_n\}$ una sucesión de subconjuntos de X todos ellos cerrados, entonces:

$$\operatorname{Int}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \operatorname{Int}(X_{n_0}) \neq \emptyset$$

Ahora, volveremos a demostrar el Principio de acotación uniforme usando el Lema de Baire.

Teorema 2.5 (Principio de acotación uniforme)**.** *Sea E un espacio de Banach, F un espacio normado y $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L(E, F)$, entonces:*

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < +\infty \quad \forall x \in E \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < +\infty$$

Demostración. Suponiendo que indexamos nuestra familia mediante un conjunto I: $\mathcal{F} = \{T_i\}_{i\in I}$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \{x \in E : \|T_i x\| \leqslant n, \quad \forall i \in I\}$$

que verifica:

- X_n es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que si tomamos $\{x_m\}$ una sucesión de puntos de X_n convergente a $x \in E$, tenemos entonces que $\|T_i x_m\| \leqslant n$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Usando que $\|\cdot\|$ y que T_i son las dos funciones continuas obtenemos que:
$$\|T_i x\| \leqslant n$$
con lo que $x \in X_n$.
- Usando que $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < \infty$, sabemos entonces que existe $M \in \mathbb{N}$ de forma que $\|Tx\| \leqslant M$ para todo $x \in E$ y $T \in \mathcal{F}$, con lo que $X_M = E$, luego:
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = E$$

Como E es abierto y es un espacio vectorial, tenemos que $\operatorname{Int} E = E \neq \emptyset$. Por el Lema de Baire tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $\operatorname{Int}(X_{n_0}) \neq \emptyset$, lo que nos permite tomar $x_0 \in E$ y $r > 0$ de forma que $B(x_0, r) \subset X_{n_0}$, lo que nos dice por la definición de X_{n_0} que:

$$\|T_i(x_0 + rz)\| \leqslant n_0 \qquad \forall i \in I, \quad \forall z \in B(0, 1)$$

como:

$$n_0 \geqslant \|T_i(x_0 + rz)\| \geqslant \|T_i(rz)\| - \|T_i(x_0)\| \implies r\|T_i(z)\| \leqslant n_0 + \|T_i(x_0)\| \qquad \forall i \in I, \quad \forall z \in B(0,1)$$

tendremos:

$$r\|T_i\| \leqslant n_0 + \|T_i(x_0)\| \leqslant n_0 + \sup_{T\in\mathcal{F}} \|T(x_0)\| < \infty \qquad \forall i \in I, \quad \forall z \in B(0,1)$$

de donde concluimos que $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < \infty$ □

2.3. Teorema de la aplicación abierta

Ejercicio 2.3.1. Sean X, Y dos espacios de Banach, $T \in L(X,Y)$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $y \in Y$:

$$\|y\|_n := \text{ínf}\{\|u\| + n\|v\| : u \in X, v \in Y \text{ con } y = T(u) + v\}$$

Probar que $\|\cdot\|_n$ es una norma en Y para todo $n \in \mathbb{N}$, que verifica:

$$\|y\|_n \leqslant n\|y\| \qquad \forall y \in Y$$

Además, si $y = T(x)$ con $x \in X$, entonces:

$$\|y\|_n \leqslant \|x\|$$

Veamos en primer lugar que $\|\cdot\|_n$ es una norma en Y para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, fijaremos $n \in \mathbb{N}$ y veremos las propiedades de una norma:

- Para la no degeneración, supongamos que $y \in Y$ con $\|y\|_n = 0$. Por definición del ínfimo, existen sucesiones $\{u_m\}$ de puntos de X y $\{v_m\}$ de puntos de Y de forma que:

  $$\{\|u_m\| + n\|v_m\|\} \to 0 \qquad y = T(u_m) + v_m \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

  como $\|u_m\|, \|v_m\| \geqslant 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, tenemos entonces que:

  $$\{\|u_m\|\}, \{\|v_m\|\} \to 0 \implies \{u_m\}, \{v_m\} \to 0$$

  usando ahora que $y = T(u_m) + v_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, observemos que:

  $$\{T(u_m) + v_m\} \to 0$$

  donde hemos usado que T y la suma son continuas, con lo que $y = 0$.

- Para la homogeneidad por homotecias, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $y \in Y$:

  $$\begin{aligned}
  |\lambda|\|y\|_n &= \text{ínf}\{|\lambda|(\|u\| + n\|v\|) : u \in X, v \in Y \text{ con } y = T(u) + v\} \\
  &= \text{ínf}\{\|\lambda u\| + n\|\lambda v\| : u \in X, v \in Y \text{ con } y = T(u) + v\} \\
  &= \text{ínf}\left\{\|u\| + n\|v\| : u \in X, v \in Y \text{ con } y = T\left(\frac{u}{\lambda}\right) + \frac{v}{\lambda}\right\} \\
  &= \text{ínf}\{\|u\| + n\|v\| : u \in X, v \in Y \text{ con } \lambda y = T(u) + v\} = \|\lambda y\|_n
  \end{aligned}$$

- Finalmente, para la desigualdad triangular, sean $y_1, y_2 \in Y$, para todo $\varepsilon > 0$ tenemos por la caracterización del ínfimo que existen $u_1, u_2 \in X$, $v_1, v_2 \in Y$ de forma que:

$$y_i = T(u_i) + v_i \quad \text{y} \quad \|u_i\| + n\|v_i\| \leqslant \|y_i\| + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall i \in \{1, 2\}$$

de donde $y_1 + y_2 = T(u_1) + v_1 + T(u_2) + v_2 = T(u_1 + u_2) + v_1 + v_2$, por lo que:

$$\begin{aligned}\|y_1 + y_2\| \leqslant \|u_1 + u_2\| + n\|v_1 + v_2\| &\leqslant \|u_1\| + n\|v_1\| + \|u_2\| + n\|v_2\| \\ &\leqslant \|y_1\| + \|y_2\| + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0\end{aligned}$$

En definitiva, hemos probado que $\|y_1 + y_2\| \leqslant \|y_1\| + \|y_2\|$.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, sea ahora $y \in Y$, tomando $u = 0 \in X$ y $v = y \in Y$, tenemos que:

$$y = 0 + y = T(u) + v$$

por lo que:

$$\|y\|_n \leqslant \|u\| + n\|v\| = n\|y\|$$

Si tenemos ahora que $y = T(x)$ para $x \in X$, podemos tomar $u = x \in X$ y $v = 0 \in Y$ con lo que:

$$y = y + 0 = T(x) + v$$

por lo que:

$$\|y\|_n \leqslant \|u\| + n\|v\| = \|x\|$$

Ejercicio 2.3.2. Si $T : X \to Y$ es una aplicación lineal entre dos espacios normados:

$$T \text{ es abierta} \iff \exists \delta > 0 : B(0, \delta) \subset T(B(0, 1))$$

Teorema 2.6 (de la aplicación abierta)**.**
Sean X, Y espacios de Banach, sea $T \in L(X, Y)$ sobreyectiva, entonces T es una aplicación abierta.

Demostración. La demostración se completa en dos pasos:

Paso 1. Veamos que $\exists r > 0$ de forma que $B(0, r) \subset \overline{T(B(0, 1))}$:

Consideramos en Y la norma:

$$\|y\|_n = \inf\{\|u\| + n\|v\| : y = T(u) + v, u \in X, v \in Y\} \qquad \forall y \in Y, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Que abreviaremos por:

$$\|y\|_n = \inf_{y=T(u)+v} \{\|u\| + n\|v\|\}$$

Cuyas propiedades fueron vistas en el Ejercicio 2.3.1. Consideramos ahora Z como el espacio de todas aquellas sucesiones casi nulas[2] $\{z_n\}$ de puntos de Y. Consideraremos en dicho espacio:

$$\|\{z_n\}\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} \|z_n\|_n \qquad \forall \{z_n\} \in Z$$

[2]Es decir, con un número finito de términos no nulos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} T_n : & Y & \longrightarrow & Z \\ & y & \longmapsto & T_n(y) \end{array}$$

dada por:

$$T_n(y) = \{\delta_{n,k} \cdot y\}_{k\in\mathbb{N}}$$

donde usamos la δ de Dirichlet:

$$\delta_{n,k} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{array} \right.$$

Veamos que $T_n \in L(Y, Z)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, dado $n \in \mathbb{N}$; vemos que:

- Es lineal, ya que si $y_1, y_2 \in Y$:

$$\begin{aligned} T_n(y_1 + y_2) &= \{\delta_{n,k} \cdot (y_1 + y_2)\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\delta_{n,k} \cdot y_1 + \delta_{n,k} \cdot y_2\}_{k\in\mathbb{N}} \\ &= \{\delta_{n,k} \cdot y_1\}_{k\in\mathbb{N}} + \{\delta_{n,k} \cdot y_2\}_{k\in\mathbb{N}} = T_n(y_1) + T_n(y_2) \end{aligned}$$

- Para ver que $T_n : (Y, \|\cdot\|) \to (Z, \|\cdot\|_\infty)$ es continua:

$$\begin{aligned} \|T_n(y)\|_\infty &= \|\{\delta_{n,k} \cdot y\}_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} \|\delta_{n,k} \cdot y\|_n \\ &= \max_{k\in\mathbb{N}} (\delta_{n,k} \cdot \|y\|_n) = \|y\|_n \overset{(*)}{\leqslant} n\|y\| \qquad \forall y \in Y \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado el Ejercicio 2.3.1.

Veamos ahora que para cada $y \in Y$, la sucesión $\{T_n(y)\}$ está acotada. Para ello, sea $y \in Y$, como T es sobreyectiva $\exists x \in X$ de forma que $T(x) = y$, con lo que:

$$\|T_n(y)\|_\infty = \|y\|_n \overset{(*)}{\leqslant} \|x\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde en $(*)$ hemos vuelto a usar el Ejercicio 2.3.1. Aplicando el Principio de acotación uniforme, tenemos que $\{\|T_n\|\}$ está acotada, es decir, existe $M > 0$ de forma que:

$$\|T_n\| \leqslant M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

con lo que:

$$\|y\|_n = \|T_n(y)\|_\infty \leqslant M\|y\| \qquad \forall y \in Y$$

Sea $y \in B\left(0, {}^1\!/\!_M\right)$, queremos deducir que $y \in \overline{T(B(0,1))}$:

$$\|y\|_n = \inf_{y=T(u)+v} \{\|u\| + n\|v\|\} \leqslant M\|y\| < \frac{M}{M} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como el ínfimo de dicho conjunto es menor que 1, han de existir sucesiones $\{u_m\}$ en X y $\{v_m\}$ en Y de forma que:

$$y = T(u_m) + nv_m \qquad \|u_m\| + n\|v_m\| < 1 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, tenemos entonces que:

$$\|u_m\|,\ n\|v_m\| < 1 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

luego $\|v_m\| < 1/n$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora:

$$T(u_n) = T(u_n) + v_n - v_n = y - v_n \overset{(*)}{\to} y$$

donde en $(*)$ usamos que $\|v_m\| < 1/n$. Observamos ahora que $u_n \in B(0,1)$ y que $v_n \to 0$, por lo que ha de ser $y \in \overline{T(B(0,1))}$. Tomando $r = 1/M$ tenemos el paso 1.

Paso 2. Veamos ahora que $B\left(0, \frac{r}{2}\right) \subset T(B(0,1))$.

Sabemos del paso 1 que $\exists r > 0$ de forma que $B(0,r) \subset \overline{T(B(0,1))}$, con lo que:

$$B\left(0, \frac{r}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}B(0,r) \subset \frac{1}{2^n}\overline{T(B(0,1))} = \overline{T\left(B\left(0, \frac{1}{2^n}\right)\right)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Para $n = 1$ tenemos:

$$B\left(0, \frac{r}{2}\right) \subset \overline{T\left(B\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)}$$

  por lo que si $y \in B\left(0, \frac{r}{2}\right)$, tenemos entonces que existe $x_1 \in B\left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que[3] $\|y - T(x_1)\| < \frac{r}{2^2}$, de donde $y - T(x_1) \in B\left(0, \frac{r}{2^2}\right)$
- Para $n = 2$:

$$B\left(0, \frac{r}{2^2}\right) \subset \overline{T\left(B\left(0, \frac{1}{2^2}\right)\right)}$$

  Como $y - T(x_1) \in B\left(0, \frac{r}{2^2}\right)$, podemos encontrar $x_2 \in B\left(0, \frac{1}{2^2}\right)$ tal que $\|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \frac{r}{2^3}$, de donde $y - T(x_1) - T(x_2) \in B\left(0, \frac{r}{2^3}\right)$.
- En definitiva, hemos obtenido $x_n \in B\left(0, \frac{1}{2^n}\right)$ tal que:

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} T(x_k) \right\| < \frac{r}{2^{n+1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

Con lo que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

Por lo que la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente en norma, y como X es de Banach, tenemos que $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es converegente, a cierto $x \in X$. Ahora:

$$\|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

De la ecuación (2.1) obtenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T(x_k) = y$$

[3]Esta distancia podemos acotarla tanto como queramos.

Finalmente:

$$\begin{aligned} T(x) &= T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_k\right) = T\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T(x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} T(x_k) = y \end{aligned}$$

donde en $(*)$ usamos que T es continua. En defintiva, hemos probado que $y \in T(B(0,1))$, ya que $\|x\| < 1$.

□

Corolario 2.6.1. *Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T \in L(E, F)$ biyectiva, entonces T^{-1} es también continua.*

Demostración. Por el Teorema de la aplicación abierta tenemos que T es abierta

Opción 1. Deducimos que T es un homeomorfismo, luego T^{-1} es continua.

Opción 2. Sea $U \subset E$ abierto, observamos que:

$$\left(T^{-1}\right)^{-1}(U) = T(U)$$

y como T es abierta concluimos que $T(U)$ es abierto, con lo que T^{-1} es continua.

□

Corolario 2.6.2. *Sea E un espacio vectorial con normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$. Supongamos que E es de Banach para ambas normas y que existe una constante $C \geqslant 0$ de forma que:*

$$\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1 \qquad \forall x \in E$$

Entonces, las dos normas son equivalentes, es decir, existe una constante $c > 0$ de forma que:

$$\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2 \qquad \forall x \in E$$

Demostración. Sea $T : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$ dada por $T(x) = x$, tenemos claramente que T es lineal, así como que:

$$\|T(x)\|_2 = \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1 \qquad \forall x \in E$$

por lo que T es continua. Es claro que también $T \in L(E, E)$ es biyectiva, con lo que por el Ejercicio anterior tenemos que T^{-1} es también continua. Es obvio que $T^{-1} : (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1)$ viene dada por $T^{-1}(x) = x$. Es claro que se verifica la igualdad:

$$\|x\|_1 = \|T^{-1}(x)\|_1 \leqslant \|T^{-1}\|\|x\|_2 \qquad \forall x \in E$$

Por lo que tomando $c = \|T^{-1}\|$ se tiene el resultado. □

Por tanto, si tenemos dos normas completas, es suficiente comprobar una desigualdad para obtener la otra que nos demuestra que las dos normas son equivalentes.

2.4. Teorema de la gráfica cerrada

Sea $T : E \to F$ una aplicación continua con E, F espacios normados, sabemos entonces que $Gr(T)$ es cerrado en $E \times F$.

Demostración. Sea $\{(x_n, T(x_n))\}$ una sucesión de elementos de $Gr(T)$ convergente a un elemento (x, y) de $E \times F$, tenemos entonces que $\{x_n\} \to x$ y como T es continua, deducimos que:

$$y \leftarrow \{T(x_n)\} \to T(x)$$

Por lo que $y = T(x)$, de donde $(x, y) \in Gr(T)$, luego $Gr(T)$ es cerrado. □

Teorema 2.7 (de la Gráfica Cerrada)**.** *Sean E, F dos espacios de Banach y sea $T : E \to F$ una aplicación lineal. Si $Gr(T)$ es cerrado, entonces T es continua.*

Demostración. Definimos una nueva norma en E, que depende del funcional T:

$$\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F \qquad \forall x \in E$$

Que es una norma:

- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$, usando que T es lineal:

$$\|\lambda x\|_T = \|\lambda x\|_E + \|T(\lambda x)\|_F = |\lambda|(\|x\|_E + \|T(x)\|_F) = |\lambda|\|x\|_T$$

- Tenemos que:

$$\|x\|_T = 0 \Longleftrightarrow \|x\|_E + \|Tx\|_F \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \|x\|_E = 0 \\ \|Tx\|_F = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x = 0$$

- Si $x_1, x_2 \in E$:

$$\begin{aligned} \|x_1 + x_2\|_T = \|x_1 + x_2\|_E + \|T(x_1 + x_2)\|_F &\leqslant \|x_1\|_E + \|x_2\|_E + \|Tx_1\|_F + \|Tx_2\|_F \\ &= \|x_1\|_T + \|x_2\|_T \end{aligned}$$

Además, $(E, \|\cdot\|_T)$ es completo. Para ello, si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de E de Cauchy para $\|\cdot\|_T$, entonces:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geqslant n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_T < \varepsilon$$

Como:

$$\|x_n - x_m\|_T = \|x_n - x_m\|_E + \|T(x_n - x_m)\|_F \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \|x_n - x_m\|_E \\ \|T(x_n - x_m)\|_F \end{array} \right.$$

Por lo que $\{x_n\}$ es de Cauchy para $\|\cdot\|_E$ en E y $\{T(x_n)\}$ es de Cauchy en F. Como ambos son espacios de Banach, existe $x \in E$ y $y \in F$ de forma que:

$$\|x_n - x\|_E \to 0 \qquad \|T(x_n) - y\|_F \to 0$$

Como $(x_n, Tx_n) \in Gr(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos entonces que $\{(x_n, Tx_n)\}$ es una sucesión de puntos de $Gr(T)$ convergente a (x, y). Como por hipótesis $Gr(T)$

es cerrado, tenemos entonces que $(x, y) \in Gr(T)$, por lo que $y = T(x)$.

Tenemos por tanto que $\|x_n - x\|_E, \|Tx_n - Tx\|_F \to 0$, de donde:

$$\|x_n - x\|_T = \|x_n - x\|_E + \|Tx_n - Tx\|_F \to 0$$

Por lo que $\{x_n\}$ es convergente para $\|\cdot\|_T$ a x, de donde $(E, \|\cdot\|_T)$ es completo.

Observemos ahora que $\|x\|_E \leqslant \|x\|_T$ para todo $x \in E$. Como las dos normales son completas, tenemos por el Corolario 2.6.2 que son equivalentes. Tenemos entonces que existe $k \geqslant 0$ de forma que:

$$\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F \leqslant k\|x\|_E \qquad \forall x \in E$$

de donde $k \geqslant 1$, con lo que:

$$\|Tx\|_F \leqslant (k-1)\|x\|_E \qquad \forall x \in E$$

Por lo que T es continua en E. □

3. Topologías Débiles

3.1. Topologías iniciales

Trabajaremos sobre un conjunto X y una familia de espacios topológicos $\{Y_i\}_{i\in I}$ junto con una familia de aplicaciones $\varphi_i : X \to Y_i, \quad \forall i \in I$.

Observamos que si consideramos en X la topología discreta:

$$\tau_d = \{A : A \subset X\}$$

tenemos que φ_i es continua, para todo $i \in I$. Sin embargo, hemos sido "muy brutos" al considerar esta topología sobre X. Nos preguntamos por definir alguna topología en X que haga que todas las funciones de la familia $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ sean continuas con el menor número de abiertos.

Observación. Observemos que como pretendemos que las funciones φ_i sean continuas, necesitaremos que esta topología τ buscada verifique que:

$$\tau \supset \{\varphi_i^{-1}(\omega_i) : \omega_i \text{ es un abierto de } Y_i, \quad \forall i \in I\}$$

De esta forma, el problema podemos reformularlo como:

Dado un conjunto X y una familia $\mathcal{U} = \{U_\lambda \subset X : \lambda \in \Lambda\}$, buscar la topología τ con menor cantidad de abiertos de forma que $\mathcal{U} \subset \tau$.

Para ello, si pretendemos que los U_λ estén en τ, estos serán abiertos, luego toda intersección finita de ellos lo seguirá siendo, con lo que la intersección finita de los conjuntos U_λ también tiene que seguir estando en τ. Es decir, si consideramos:

$$\mathcal{V} = \left\{ V = \bigcap_{i=1}^{n} U_{\lambda_i} : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

Tenemos que $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, y nos preguntamos si $\mathcal{V}$ es una topología. Observamos:

- Primero, que $\mathcal{V}$ es estable por intersecciones finitas.
- Sin embargo, la familia no es cerrada por uniones arbitrarias de elementos del conjunto.

Para solucionar el segundo problema, consideramos:

$$\left\{ \bigcup_{\eta\in\Lambda_0} V_\eta : V_\eta \in \mathcal{V}, \Lambda_0 \subset \Lambda \right\}$$

Y tenemos que la topología más pequeña que buscamos debe contener este conjunto. Se demuestra que este conjunto es, de hecho, una topología.

Observación. Observemos que el vacío es resultado de una unión vacía.

Sin embargo, faltaría unir el total.

¿Cómo se forma una base de entornos de dicha topología en X?

Resulta que una base de entornos es:

$$\left\{\bigcap_{i\in J}\varphi_i^{-1}(V_i) : V_i \text{ entorno de } \varphi_i(x)\in Y_i, \quad J\subset I \text{ finito}\right\}$$

Se verifica que el conjunto es una base de entornos.

Aunque no conozcamos en profundidad la topología (puesto que no hemos dado de forma explícita quiénes son sus abiertos), es sencillo en ocasiones probar ciertas propiedades topológicas, usando para ellos las dos proposiciones siguientes, que nos permiten comprobar propiedades sobre la topología inicial sin tener que usarla, sino tratar de buscar problemas equivalentes realizando composiciones con las aplicaciones φ_i de la familia que nos da la topología inicial.

Proposición 3.1. *Sea (X,τ) con τ la topología inicial asociada a una familia de aplicaciones $\{\varphi_i\}_{i\in I}$, sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de X y $x\in X$:*

$$\{x_n\}\to x \quad\Longleftrightarrow\quad \{\varphi_i(x_n)\}\to\varphi_i(x)\quad \forall i\in I$$

Demostración. Por doble implicación:

$\Longrightarrow)$ Para cada $i\in I$, τ hace que φ_i sea continua, por lo que:

$$\{x_n\}\to x\Longrightarrow\{\varphi_i(x_n)\}\to\varphi_i(x)$$

$\Longleftarrow)$ Si consideramos un entorno U de x, este ha de contener un entorno de la base de entornos, luego existe una familia finita $\{V_i\}_{i\in J}$ de entornos de $\varphi_i(x)$ en cada Y_i con $i\in J$ de forma que:

$$W=\bigcap_{i\in J}\varphi_i^{-1}(V_i)$$

es un entorno básico contenido en U. Observemos que para cada $i\in J$ tenemos:

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_i(x)\in V_i\\ \{\varphi_i(x_n)\}\to\varphi_i(x)\end{array}\right\}\Longrightarrow \exists N_i\in\mathbb{N}:\varphi_i(x_n)\in V_i\quad\forall n\geqslant N_i$$

Sin embargo, como J es finito, podemos tomar $N=\max\limits_{i\in J}N_i$ y tendremos que:

$$n\geqslant N\Longrightarrow\varphi_i(x_n)\in V_i\qquad\forall i\in J$$

de donde:

$$x_n\in W=\bigcap_{i\in J}\varphi_i^{-1}(V_i)\subset U\quad\forall n\geqslant N$$

Por lo que $\{x_n\}\to x$.

□

Por lo que conociendo la convergencia de las sucesiones en los espacios Y_i, estudiar la convergencia de X con la topología inicial se reduce a estudiar las convergencias de sus imágenes por φ_i, esto hace fácil trabajar con sucesiones en la topología inicial. Sin embargo, no todos los conceptos topológicos se pueden caracterizar por sucesiones.

Otra propiedad útil de las topologías iniciales es la siguiente:

Proposición 3.2. *Sea (X, τ) con τ la topología inicial asociada a una familia de aplicaciones $\{\varphi_i\}_{i\in I}$. Si Z es un espacio topológico y tenemos una aplicación entre espacios topológicos $\psi : Z \to X$, entonces:*

$$\psi \text{ es continua} \Longleftrightarrow \varphi_i \circ \psi : Z \to Y_i \text{ es continua} \quad \forall i \in I$$

Demostración. Por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Si $\psi : Z \to X$ es continua, τ hace que cada φ_i sea continua, por lo que $\varphi_i \circ \psi$ es continua.

$\Longleftarrow$) Para esta, tenemos que si $U \in \tau$, entonces podemos escribir:

$$U = \bigcup \bigcap_J \varphi_i^{-1}(\omega_i)$$

para ciertos conjuntos abiertos ω_i de Y_i, de donde:

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup \bigcap_J \psi^{-1}(\varphi_i^{-1}(\omega_i)) = \bigcup \bigcap_J (\varphi_i \circ \psi_i)^{-1}(\omega_i)$$

como la intersección finita de abiertos en Z es un abierto de Z y la unión arbitraria de abiertos de Z también lo es, tenemos que $\psi^{-1}(U)$ es abierto en Z, para cada $U \in \tau$, por lo que ψ es continua.

□

Y la idea es la misma de la Proposición anterior: aunque no conozcamos con exactitud los abiertos de la topología inicial, estudiar las funciones continuas $Z \to X$ se reduce al problema de estudiar la continuidad de cada una de las funciones resultantes con componer con φ_i, obteniendo funciones $Z \to Y_i$. Este procedimiento hace que sea muy fácil comprobar qué aplicaciones $Z \to X$ son continuas.

3.2. Topología débil

Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach, tenemos ya sobre E una topología, la asociada a la norma $\|\cdot\|_E$, que denotaremos a veces por $\tau_{\|\cdot\|_E}$. Definiremos sobre este espacio E otra topología:

Definición 3.1 (Topología débil de un espacio normado)**.** Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado, definimos la topología débil en E como la topología inicial en E que hace que todas las aplicaciones de la familia E^* sean continuas, y denotaremos a esta topología por $\sigma(E, E^*)$.

Observación. Observaciones que hay que tener en cuenta al trabajar con $\sigma(E, E^*)$:

- La notación $\sigma(E, E^*)$ hay que pensarla como la "topología débil en E es la topología inicial en E que hace continuos todos aquellos elementos de E^*".
- Tenemos $Y_f = \mathbb{R}$ para cada $f \in E^*$, donde tomamos como conjunto de índices $I = E^*$.
- Observemos que:
$$\sigma(E, E^*) \subset \tau_{\|\cdot\|_E}$$
Ya que toda aplicación $f \in E^*$ es continua en $\tau_{\|\cdot\|_E}$ y $\sigma(E, E^*)$ es, por definición de topología inicial, la topología más pequeña que hace que las aplicaciones de E^* sean continuas.

Destacaremos a continuación propiedades destacables de la topología débil de un espacio normado E, donde siempre que hagamos referencia $\sigma(E, E^*)$, estaremos trabajando sobre un espacio normado E arbitrario.

Proposición 3.3. *$\sigma(E, E^*)$ es Hausdorff.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in E$ distintos, tomamos:
$$A = \{x_1\}, \qquad B = \{x_2\}$$
que son dos conjuntos convexos, disjuntos y cerrados para $\tau_{\|\cdot\|_E}$, lo que nos permite aplicar la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.22), obteniendo $f \in E^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que:
$$\langle f, x_1 \rangle < \alpha < \langle f, x_2 \rangle$$
de donde tomando:
$$\begin{aligned} x_1 \in \Theta_1 &:= \{x \in E : \langle f, x \rangle < \alpha\} = f^{-1}(]-\infty, \alpha[) \in \sigma(E, E^*) \\ x_2 \in \Theta_2 &:= \{x \in E : \langle f, x \rangle > \alpha\} = f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in \sigma(E, E^*) \end{aligned}$$
Tenemos que Θ_1, Θ_2 son disjuntos entre sí, con lo que nos dan la condición de Hausdorff que buscábamos. □

Veamos ahora una base de entornos en $\sigma(E, E^*)$, aplicando el procedimiento que hicimos anteriormente al construir la topología inicial.

Proposición 3.4. *Dado $x_0 \in E$ y $f_1, \ldots, f_k \in E^*$, tenemos que:*

1. *$V = V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon) = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon, \quad i \in \{1, \ldots, k\}\}$ es un entorno de x_0 en $\sigma(E, E^*)$, para todo $\varepsilon > 0$.*
2. *Además, $\mathcal{V} = \{V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon) : \varepsilon > 0, \quad f_1, \ldots, f_k \in E^*\}$ es base de entornos de x_0 en $\sigma(E, E^*)$.*

Demostración. Veamos cada apartado:

1. Si definimos:
$$a_i = \langle f_i, x_0 \rangle \qquad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$$
dado $\varepsilon > 0$, tenemos que:
$$|\langle f_i, x\rangle - \langle f_i, x_0\rangle| < \varepsilon \Longleftrightarrow \langle f_i, x_0\rangle - \varepsilon \leqslant \langle f_i, x\rangle \leqslant \langle f_i, x_0\rangle + \varepsilon$$
que a su vez equivale a:
$$x \in f_i^{-1}\left(\langle f_i, x_0\rangle - \varepsilon, \langle f_i, x_0\rangle + \varepsilon\right)$$
Por lo que podemos escribir:
$$V = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)$$
como f_i es continua para la topología débil, el conjunto V ha de ser abierto para $\sigma(E, E^*)$, y $x_0 \in V$, por lo que V es un entorno abierto de x_0.

2. Para ver que es base de entornos, si tomamos U un entorno abierto de x_0 en $\sigma(E, E^*)$, tenemos entonces que existe un entorno de la base de entornos de $\sigma(E, E^*)$, luego existen $f_1, \ldots, f_k \in E^*$ de forma que:
$$\bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}(V_j) \subset U$$
como V_j es un entorno de $f_j(x_0)$ en la topología usual en $\mathbb{R}$, ha de existir $\varepsilon > 0$ de forma que:
$$]f_j(x_0) - \varepsilon, f_j(x_0) + \varepsilon[\subset V_j \qquad \forall j \in \{1, \ldots, k\}$$
de donde:
$$V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}(V_j) \subset U$$

□

Esta proposición nos permite, tomado $x \in E$ y U un abierto de x, han de existir $f_1, \ldots, f_k \in E^*$ y $\varepsilon > 0$ de forma que:
$$x \in V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon) \subset U$$

Ejercicio 3.2.1. Probar que $dimE < \infty \Longrightarrow \sigma(E, E^*) = \tau_{\|\cdot\|_E}$.

Si $dimE < \infty$, E ha de ser isométrico a $\mathbb{R}^N$, para $N = dimE$, y tenemos que:
$$E^* = \{f : E \to \mathbb{R} \text{ de forma que } f \text{ es lineal}\}$$
Nos preguntamos ahora por la topología que hace que todas estas sean continuas. Si tomamos $\{x_n\}$ una sucesión de $\mathbb{R}^N$ Y $x \in \mathbb{R}^N$, tenemos que:
$$\{x_n\} \overset{(*)}{\to} x \Longleftrightarrow \{f(x_n)\} \to f(x) \qquad \forall f \in E^*$$

Además, una base de E^* es $\{\pi_1, \ldots, \pi_N\}$, donde π_i es la proyección en $i-$ésima coordenada, de donde:

$$\{f(x_n)\} \to f(x) \quad \forall f \in E^* \Longleftrightarrow \{x_n(i)\} = \{\pi_i(x_n)\} \to \pi_i(x) = x(i) \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$$

y esta última condición es equivalente a decir que $\{x_n\}$ converge a x con la norma de E.

Resumimos en la siguiente proposición cada una de las relaciones entre las convergencias de sucesiones en los distintos espacios topológicos que manejamos. Antes de ello, introducimos la siguiente notación:

Notación. Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio normado, consideraremos sobre él habitualmente dos topologías posiblemente distintas (por lo que obtendremos distintas convergencias de sucesiones):

$$\tau_{\|\cdot\|_E} \qquad \text{y} \qquad \sigma(E, E^*)$$

Si tenemos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de E y un punto $x \in E$, será costumbre para nosotros:

- notar por "$\{x_n\} \to x$" si la sucesión $\{x_n\}$ es convergente en $\tau_{\|\cdot\|_E}$ al elemento x, diciendo en alguna ocasión que la sucesión $\{x_n\}$ "converge" o que "converge fuertemente" al elemento x.

- notar por "$\{x_n\} \rightharpoonup x$" si la sucesión $\{x_n\}$ es convergente en $\sigma(E, E^*)$ al elemento x, diciendo en alguna ocasión que la sucesión $\{x_n\}$ "converge débilmente" al elemento x.

Todavía no está del todo claro la relación entre estas dos convergencias distintas de sucesiones de puntos de E, que aclararemos en la siguiente Proposición, pero ya podremos hablar de convergencia de sucesiones de puntos de E de forma cómoda, sin confundir en ningún momento la convergencia de $\sigma(E, E^*)$ con la de $\tau_{\|\cdot\|_E}$.

Proposición 3.5. *Sea E un espacio normado y $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de E:*

1. $\{x_n\} \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \{\langle f, x_n\rangle\} \to \langle f, x\rangle \quad \forall f \in E^*$.

2. $\{x_n\} \to x \Longrightarrow \{x_n\} \rightharpoonup x$.

3. $\{x_n\} \rightharpoonup x \Longrightarrow \{\|x_n\|\}$ *acotada y* $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$.

4. *Tenemos:*
$$\left.\begin{array}{l} \{x_n\} \rightharpoonup x \\ \{f_n\} \to f \end{array}\right\} \Longrightarrow \{\langle f_n, x_n\rangle\} \to \langle f, x\rangle$$

Demostración. Demostramos cada una de las propiedades:

1. Es la Proposición 3.1 pero usando la notación para la topología débil de E.

2. Si tenemos $\{x_n\} \to x$, entonces para $f \in E^*$:

$$|\langle f, x_n - x\rangle| \leqslant \|f\|\|x_n - x\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

y como $\|x_n - x\| \to 0$, deducimos que $\langle f, x_n - x\rangle \to 0$, luego tenemos que:

$$\{\langle f, x_n\rangle\} \to \langle f, x\rangle \qquad \forall f \in E^*$$

y usando 1 tenemos que $\{x_n\} \rightharpoonup x$.

3. Tomamos $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, que verifica para $f \in E^*$:

$$f(B) = \{\langle f, x_n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$$

Como $\{x_n\} \rightharpoonup x$, el apartado 1 nos dice que $f(B)$ es acotado, $\forall f \in E^*$. Por el Corolario 2.3.2 deducimos que B es acotado, es decir, que $\{\|x_n\|\}$ está acotada.

Para la segunda parte, si tomamos $f \in E^*$, tenemos que:

$$|\langle f, x_n\rangle| \leqslant \|f\|\|x_n\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

si tomamos límite inferior:

$$\langle f, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, x_n\rangle = \liminf \langle f, x_n\rangle \leqslant \|f\| \liminf \|x_n\| \qquad \forall f \in E^*$$

En particular, si tomamos $\|f\| = 1$, tenemos que:

$$\|x\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} \langle f, x\rangle \leqslant \|f\| \liminf \|x_n\| = \liminf \|x_n\|$$

4. Estudiamos la diferencia:

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &\leqslant |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle| \\ &\leqslant \|f_n - f\|\|x_n\| + |\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Y tenemos que $\|f_n - f\| \to 0$, que $\{\|x_n\|\}$ está acotada, y que $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, de donde deducimos que $|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \to 0$.

□

Para entender mejor el punto 3 de esta Proposición, introducimos el siguiente concepto:

Definición 3.2. Sea (E, τ) un espcio topológico, sea $f : (E, \tau) \to \mathbb{R}$ una aplicción, decimos que la función f es <u>secuencialmente semicontinua inferiormente</u> si se cumple que:

$$\{x_n\} \to x \Longrightarrow f(x) \leqslant \liminf f(x_n)$$

Notemos que sabíamos que la aplicación

$$\|\cdot\| : (E, \tau_{\|\cdot\|_E}) \to \mathbb{R}$$

es continua. Sin embargo, en vista de la Proposición y la Definición anterior, sabemos que la aplicación

$$\|\cdot\| : (E, \sigma(E, E^*)) \to \mathbb{R}$$

es secuencialmente semicontinua inferiormente.

Nos preguntamos ahora por el recícproco de la propiedad 3, si tenemos una sucesión $\{\|x_n\|\}$ acotada con $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de E, ¿será cierto que $\{x_n\} \rightharpoonup x$? La respuesta a esta pregunta es rotundamente negativa, pues sabemos que en dimensión finita $\sigma(E, E^*) = \tau_{\|\cdot\|_E}$, y sabemos de la existencia de sucesiones acotadas que no son convergentes en cualquier espacio normado $N-$dimensional.

Sin embargo, si recordamos el Teorema de Bolzano-Weierstrass, en todo espacio normado $N-$dimensional siempre que teníamos una sucesión acotada podríamos extraer una parcial suya convergente. Veremos próximamente que una propiedad similar a esta se cumple en la topología débil de E, lo que nos permitirá llegar a un Teorema que relacione los conjuntos compactos de $\sigma(E, E^*)$ con los conjuntos cerrados y acotados, brindándonos un espacio topológico con una cantidad abundante de conjuntos compactos, cosa que no sucede en $\tau_{\|\cdot\|_E}$ cuando la dimensión del espacio E no es finita.

Esta propiedad de $\sigma(E, E^*)$ es totalmente natural, pues al considerar como $\sigma(E, E^*)$ la menor topología sobre E que hace que las aplicaciones de E^* sean continuas lo que estamos haciendo es eliminar de $\tau_{\|\cdot\|_E}$ abiertos que no nos interesa considerar en ciertos momentos, haciendo más fácil que un conjunto sea compacto, pues cuantos menos abiertos contenga una topología más fácil será que un conjunto sea compacto, por la propia definición de conjunto compacto en un espacio topológico general.

3.2.1. Cierre de la esfera

Notación. Sea E un espacio normado, denotaremos:

$$B = B(0,1), \qquad \overline{B} = \overline{B}(0,1), \qquad S = S(0,1)$$

Además, llamaremos a los conjuntos abiertos de $\sigma(E, E^*)$ <u>débilmente abiertos</u>, y análogamente débilmente cerrados a los conjuntos cerrados de $\sigma(E, E^*)$.

Observación. Si $E = \mathbb{R}^N$, tenemos que $\tau_{\|\cdot\|}$ y $\sigma(E, E^*)$ son iguales (con $\|\cdot\|$ cualquier norma en $\mathbb{R}^N$, puesto que todas son equivalentes). De esta forma, vemos que:

$$\overline{S}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{S} = S$$

Si ahora tenemos que $dimE = \infty$, nos va a interesar calcular también $\overline{S}^{\sigma(E,E^*)}$, y resulta que:

$$\overline{S}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{B}$$

Nos da un resultado muy sorprendente, pues no es nada intuitivo.

Proposición 3.6. *Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, se tiene que:*

$$\overline{S}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{B}$$

Demostración. Por doble inclusión:

$\subseteq$) Para esta inclusión, como tenemos que $S \subset \overline{B}$, basta probar que $\overline{B}$ es débilmente cerrado, con lo que:

$$\overline{S}^{\sigma(E,E^*)} \subset \overline{(\overline{B})}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{B}$$

Opción 1. Si tenemos una sucesión de puntos de $\overline{B}$ $\{x_n\} \rightharpoonup x$ con $x \in E$, vimos entonces que $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$, pero como $\|x_n\| \leqslant 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tendremos entonces que:

$$\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\| \leqslant 1$$

Por lo que $x \in \overline{B}$, de donde $\overline{B}$ es $\sigma(E,E^*)-$cerrado.

Opción 2. Si tenemos $\{x_n\} \rightharpoonup x$ con $x_n \in \overline{B} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $x \in E$, el Corolario 1.18.3 del Teorema de Hahn-Banach nos dice que:

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(x)|$$

Si tomamos $f \in E^*$ con $\|f\| \leqslant 1$ tenemos por la convergencia débil que $\{f(x_n)\} \to f(x)$, y tenemos:

$$|f(x_n)| \leqslant \|f\|\|x_n\| \leqslant 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo que también tenemos que $|f(x)| \leqslant 1$, para toda $f \in E^*$ que verifique $\|f\| \leqslant 1$, luego $\|x\| \leqslant 1$, de donde $x \in \overline{B}$, por lo que $\overline{B}$ es $\sigma(E,E^*)-$cerrado.

$\supseteq$) Probemos primero que:

$$B \subset \overline{S}^{\sigma(E,E^*)}$$

Para ello, sea $x_0 \in B$, si consideramos V un entorno de x_0 en la topología débil, tenemos que existen $f_1, \ldots, f_k \in E^*$ y $\varepsilon > 0$ de forma que:

$$V \supseteq V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon) = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon \quad i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

La demostración termina probando que $V \cap S \neq \emptyset$. Para ello, definimos la función $\psi : E \to \mathbb{R}^k$ dada por:

$$\psi(x) = \langle \psi, x \rangle = (\langle f_1, x \rangle, \langle f_2, x \rangle, \ldots, \langle f_k, x \rangle)$$

Tenemos que ψ es lineal y que no puede ser inyectiva, ya que $dim E = \infty$ y tenemos que $dim \mathbb{R}^k = k$. Como ψ no es inyectiva, tenemos que existe $y_0 \in E \setminus \{0\}$ con $\langle \psi, y_0 \rangle = 0$.

Consideramos ahora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(t) = \|x_0 + ty_0\| \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

que es una función continua, con $g(0) = \|x_0\| < 1$, así como que $\lim_{t \to \infty} g(t) = \infty$, ya que:

$$\|x_0 + ty_0\| \geqslant |\|x_0\| + |t|\|y_0\||$$

Por el Teorema de Bolzano, tenemos que existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ de forma que $g(t_0) = 1$, es decir, $x_0 + t_0 y_0 \in S$. Además, tenemos que $x_0 + t_0 y_0 \in V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon)$, ya que:

$$|\langle f_i, x_0 + t_0 y_0 - x_0 \rangle| = |\langle f_i, t_0 y_0 \rangle| = |t_0 \langle f_i, y_0 \rangle| \overset{(*)}{=} 0 < \varepsilon \qquad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$$

donde en $(*)$ usamos que $y_0 \in \ker \psi$. En definitiva, tenemos que $x_0 + t_0 y_0 \in S \cap V$, donde V era un entorno arbitrario de x_0 para la topología débil. Hemos probado que $x_0 \in \overline{S}^{\sigma(E,E^*)}$ para cada $x_0 \in B$, por lo que tenemos la inclusión que queríamos:

$$B \subset \overline{S}^{\sigma(E,E^*)}$$

Por otra parte, es obvio que $S \subset \overline{S}^{\sigma(E,E^*)}$, por lo que:

$$\overline{B} = B \cup S \subset \overline{S}^{\sigma(E,E^*)}$$

□

Observación. Observemos que según la prueba anterior, la elección de t_0 no nos da la condición de $x_0 + t_0 y_0 \in V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon)$, sino que la existencia de $y_0 \in \ker \psi$ nos dice que:

$$x_0 + t y_0 \in V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Es decir, dicho entorno básico contiene a toda una recta afín de E, algo que no sigue la idea intuitiva de entorno básico.

Corolario 3.6.1. *Como consecuencias a destacar, si E es un espacio de Banach de dimensión infinita:*

- *S no es débilmente cerrado.*
- *B no es débilmente abierta.*

Demostración. Para la segunda, supongamos por reducción al absurdo que B fuera $\sigma(E, E^*)-$abierta, con lo que $E \setminus B$ es $\sigma(E, E^*)-$cerrado, con lo que el conjunto

$$S = (E \setminus B) \cap \overline{B}$$

es $\sigma(E, E^*)-$cerrado, lo que contradice el primer punto, que viene de la Proposición anterior. □

3.2.2. Relación entre débilmente cerrados y cerrados

Sea E un espacio de Banach:

- la Proposición 3.6 nos dice que los cerrados de E no son necesariamente débilmente cerrados.
- como $\sigma(E, E^*) \subset \tau_{\|\cdot\|}$, tenemos que todo conjunto débilmente cerrado tambien será cerrado.

Buscamos ahora una condición sencilla que podemos añadir a los conjuntos cerrados para que siempre sean también débilmente cerrados. Para ello:

Teorema 3.7. *Sea E un espacio de Banach y $A \subset E$ un conjunto convexo, entonces:*

$$A \text{ es } \sigma(E, E^*) - \text{cerrado} \iff A \text{ es cerrado}$$

Demostración. Por doble implicación:

$\Longrightarrow$) La hemos discutido anteriormente, pues se tiene que:

$$\sigma(E, E^*) \subset \tau_{\|\cdot\|}$$

$\Longleftarrow$) Si A es un subconjunto de E que es cerrado y convexo, queremos ver que es $\sigma(E, E^*)-$cerrado. Para ello, veamos que $E \setminus A$ es débilmente abieto. Para esto último, si tomamos $x_0 \in E \setminus A$ tenemos por la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach ($\{x_0\}$ es compacto y A cerrado con $x_0 \notin A$) tenemos que existen $f \in E^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\langle f, x_0 \rangle < \alpha < \langle f, x \rangle \qquad \forall x \in A$$

Tenemos por tanto que:

$$x_0 \in \{y \in E : \langle f, y \rangle < \alpha\} = f^{-1}(\alpha)$$

con $f^{-1}(\alpha)$ un conjunto $\sigma(E, E^*)-$abierto[1], por la definición de $\sigma(E, E^*)$. Como $f^{-1}(\alpha) \cap A = \emptyset$, tenemos que:

$$x_0 \in f^{-1}(\alpha) \subset E \setminus A$$

Como x_0 era un punto de $E \setminus A$ arbitrario, tenemos que $E \setminus A$ es $\sigma(E, E^*)-$abierto, lo que concluye la demostración. □

Observación. Por tanto, para decir que un conjunto abierto es abierto en la topología débil basta ver que su complementario es convexo.

Corolario 3.7.1 (Teorema de Mazur)**.** *Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de E débilmente convergente a $x \in E$, $\{x_n\} \rightharpoonup x$. Entonces existe una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de E tal que:*

1. *$\forall n \in \mathbb{N}$, y_n es una combinación convexa finita de $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.*
2. *$\{y_n\} \to x$.*

Envolvente convexa de un conjunto

Para realizar su demostración, conviene tener claros ciertos conceptos:

Definición 3.3. Sea E un espacio vectorial, si $\emptyset \neq X \subset E$ definimos la envolvente convexa de X como:

$$\operatorname{conv}(X) = \bigcap \{C \subset E : C \text{ es convexo y } X \subset C\}$$

Este subconjunto de E verifica ser el menor conjunto convexo que contiene a X.

[1] También podríamos haber dicho que $f^{-1}(\alpha) = V(f; \alpha)$.

Proposición 3.8. *Sea E un espacio vectorial y $\emptyset \neq X \subset E$, tenemos que:*

$$\operatorname{conv}(X) = \left\{ \sum_{i\in I} t_i x_i : \begin{array}{l} I \text{ es finito} \\ t_i \in \mathbb{R}, x_i \in X \quad \forall i \in I \\ \sum\limits_{i\in I} t_i = 1 \end{array} \right\}$$

Demostración. Por doble inclusión y llamando Y al conjunto de la derecha:

$\subseteq$) Para esta inclusión, veamos que Y es convexo. Para ello, si $\sum\limits_{i\in I} t_i x_i, \sum\limits_{j\in J} \lambda_j x_j \in Y$ y $t \in [0,1]$ observamos que:

$$\begin{aligned} t\sum_{i\in I} t_i x_i + (1-t)\sum_{j\in J}\lambda_j x_j &= \sum_{i\in I} t t_i x_i + \sum_{j\in J}(1-t)\lambda_j x_j \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{i\in I\setminus J} t t_i x_i + \sum_{j\in J\setminus I}(1-t)\lambda_j x_j + \sum_{k\in I\cap J}(t t_k + (1-t)\lambda_k) x_k \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos agrupado por cada x_k, si definimos:

$$\alpha_i = \begin{cases} t t_i + (1-t)\lambda_i & \text{si } i \in I \cap J \\ t t_i & \text{si } i \in I \setminus J \\ (1-t)\lambda_i & \text{si } i \in J \setminus I \end{cases}$$

tenemos que:

$$\sum_{i\in I\setminus J} t t_i x_i + \sum_{j\in J\setminus I}(1-t)\lambda_j x_j + \sum_{k\in I\cap J}(t t_k + (1-t)\lambda_k) x_k = \sum_{i\in I\cup J}\alpha_i x_i$$

con $I \cup J$ finito y además:

$$\begin{aligned} \sum_{i\in I\cup J}\alpha_i &= \sum_{i\in I\setminus J} t t_i + \sum_{j\in J\setminus I}(1-t)\lambda_j + \sum_{k\in I\cap J}(t t_k + (1-t)\lambda_k) \\ &= \sum_{i\in I} t t_i + \sum_{j\in J}(1-t)\lambda_j = t\sum_{i\in I} t_i + (1-t)\sum_{j\in J}\lambda_j \\ &\overset{(*)}{=} t + (1-t) = 1 \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que $\sum\limits_{i\in I} t_i = 1 = \sum\limits_{j\in J}\lambda_j$.

$\supseteq$) Sea $\sum\limits_{i\in I} t_i x_i \in Y$, veamos que $\sum\limits_{i\in I} t_i x_i \in \operatorname{conv}(X)$, por inducción sobre $|I| = n$:

- Para $n = 1$ tenemos tx con $t = 1$, $x \in X$, luego $x = tx \in X \subset \operatorname{conv}(X)$.
- Para $n = 2$ tenemos que $I = \{p, q\}$:

$$\sum_{i\in I} t_i x_i = t_p x_p + t_q x_q \qquad \text{con} \qquad t_p + t_q = 1 \Longrightarrow t_q = 1 - t_p$$

de donde $\sum\limits_{i\in I} t_i x_i$ es combinación convexa de dos elementos de X, por lo que ha de ser $\sum\limits_{i\in I} t_i x_i \in \operatorname{conv}(X)$.

- Supuesto para $n = m-1$, veámoslo si $|I| = m$. Tomando $J = I \setminus \{k\}$ con $k \in I$, vemos que:
$$\sum_{i\in I} t_i x_i = t_k x_k + \sum_{j\in J} t_j x_j = t_k x_k + (1-t_k)\sum_{j\in J} \frac{t_j}{(1-t_k)} x_j$$
Observemos que:
$$t_k + \sum_{j\in J} t_j = \sum_{i\in I} x_i = 1 \Longrightarrow \sum_{j\in J} t_j = 1 - t_k$$
Por lo que:
$$\sum_{j\in J} \frac{t_j}{(1-t_k)} = \frac{1}{1-t_k}\sum_{j\in J} = 1$$
Por hipótesis de inducción (recordemos que $|J| = m-1$) tenemos que $\sum\limits_{j\in J} \frac{t_j}{1-t_k} x_j \in \operatorname{conv}(X)$, por lo que hemos probado que $\sum\limits_{i\in I} t_i x_i$ es conbinación convexa de dos elementos de $\operatorname{conv}(X)$, por lo que tiene que estar en $\operatorname{conv}(X)$. □

Proposición 3.9. *Sea E un espacio normado y $\emptyset \neq X \subset E$, tenemos que* $\operatorname{conv} X$ *es un conjunto cerrado.*

Estamos ya en condiciones de probar el Corolario anterior:

Corolario 3.9.1 (Teorema de Mazur)**.** *Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de E débilmente convergente a $x \in E$, $\{x_n\} \rightharpoonup x$. Entonces existe una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de E tal que:*

1. *$\forall n \in \mathbb{N}$, y_n es una combinación convexa finita de $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.*
2. *$\{y_n\} \to x$.*

Demostración. Llamando $C = \operatorname{conv}(\{x_k : k \in \mathbb{N}\})$, si $\{x_n\} \rightharpoonup x$ tenemos entonces que $x \in \overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}^{\sigma(E,E^*)}$, luego:
$$x \in \overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}^{\sigma(E,E^*)} \subset \overline{C}^{\sigma(E,E^*)}$$
tenemos que $\overline{C}^{\sigma(E,E^*)}$ es un conjunto débilmente cerrado y convexo (ya que la clausura de un conjunto convexo sigue siendo un conjunto convexo), por lo que por el Teorema anterior ha de ser $\overline{C}^{\sigma(E,E^*)}$ un conjunto cerrado para la norma de E. En estas condiciones:

- Como $\overline{C}^{\sigma(E,E^*)}$ es un cerrado que contiene a C, ha de ser $\overline{C} \subset \overline{C}^{\sigma(E,E^*)}$.
- Como tenemos también que $C \subset \overline{C}$, tomando cierre débil a ambos lados obtenemos:
$$\overline{C}^{\sigma(E,E^*)} \subset \overline{(\overline{C})}^{\sigma(E,E^*)}$$
Pero como $\overline{C}$ es un conjunto cerrado y convexo, es débilmente cerrado, por lo que:
$$\overline{C}^{\sigma(E,E^*)} \subset \overline{(\overline{C})}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{C}$$

En definitiva, $\overline{C} = \overline{C}^{\sigma(E,E^*)}$ y tenemos que $x \in \overline{C}$, por lo que existe una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de C de forma que $\{y_n\} \to x$. □

4. Relaciones de Ejercicios

Las siguientes relaciones de ejercicios corresponden a los ejercicios que uno puede encontrar en el libro "Functional Analysis", de Haim Brezis. Concretamente, se encuentran los primeros ejercicios de los Capítulos 1 y 2.

4.1. El Espacio Dual

Ejercicio 4.1.1. Sea E un espacio normado, definimos $\forall x \in E$:

$$F(x) = \left\{f \in E^* : \|f\| = \|x\| \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|^2\right\}$$

Se pide:

a) Probar que

$$F(x) = \{f \in E^* : \|f\| \leqslant \|x\| \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|^2\}$$

y deducir que $F(x)$ es no vacío, cerrado y convexo.

$\subset$) Es evidente.

$\supset$) Si $x = 0$ la igualdad es evidente. Supuesto que $x \neq 0$, denotamos por $\tilde{F}(x)$ al conjunto de la derecha y tenemos que si $f \in \tilde{F}(x)$, entonces:

$$\|x\|^2 = |f(x)| = f(x) \leqslant \|f\|\|x\| \Longrightarrow \|f\| \geqslant \|x\|$$

Por lo que $\|f\| = \|x\|$, de donde $\tilde{F}(x) = F(x)$.

- Por el Corolario 1.18.2 sabemos que $F(x) \neq \emptyset$.
- Sea $\{f_n\} \to f \in E^*$ con $f_n \in F(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \|x\|^2 = \|x\|^2$$
$$\|f\| = \left\|\lim_{n\to\infty} f_n\right\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x\| = \|x\|$$

Por lo que $f \in F(x)$, de donde $F(x)$ es cerrado.

- Sean $f, g \in F(x)$, si tomamos $t \in [0, 1]$, definimos:

$$h = tf + (1-t)g$$

h es lineal y continua, y además:

$$h(x) = tf(x) + (1-t)g(x) = t\|x\|^2 + (1-t)\|x\|^2 = \|x\|^2$$
$$\|h\| = \|tf + (1-t)g\| \leqslant t\|f\| + (1-t)\|g\| = t\|x\| + (1-t)\|x\| = \|x\|$$

Por lo que $h \in \{f \in E^* : \|f\| \leqslant \|x\| \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|^2\} = F(x)$, lo que demuestra que $F(x)$ es convexo.

b) Probar que si E^* es estrictamente convexo, entonces $F(x)$ se reduce a un punto.

Que E^* sea estrictamente convexo significa que si tomamos $f, g \in E^*$ con $f \neq g$ y $\|f\| = 1 = \|g\|$, entonces:

$$\|tf + (1-t)g\| < 1 \qquad \forall t \in]0,1[$$

Si $x = 0$ entonces $F(x)$ es unitario. Si $x \neq 0$, supongamos que existen dos funciones $g_1, g_2 \in F(x)$ con $g_1 \neq g_2$. En cuyo caso, podemos tomar:

$$f_1 = \frac{g_1}{\|x\|}, \qquad f_2 = \frac{g_2}{\|x\|}$$

que verifican $f_1 \neq f_2$ y $\|f_1\| = 1 = \|f_2\|$. Por la convexidad estricta de E^* tenemos que:

$$\|tf_1 + (1-t)f_2\| < 1 \qquad \forall t \in]0,1[$$

Sin embargo, fijado $t \in]0,1[$, vemos que:

$$\|x\| = t\|x\| + (1-t)\|x\| = (tf_1 + (1-t)f_2)(x) \leqslant \|tf_1 + (1-t)f_2\|\|x\|$$

de donde deducimos que $\|tf_1 + (1-t)f_2\| \geqslant 1$, contradicción, que viene de suponer que $F(x)$ contiene dos elementos distintos.

c) Probar que:

$$F(x) = \left\{ f \in E^* : \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \geqslant f(y-x) \quad \forall y \in E \right\}$$

$\subset$) Si $f \in F(x)$, entonces:

$$f(y) \leqslant \|f\|\|y\| \leqslant \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 \qquad \forall y \in E$$

De donde si restamos $f(x) = \|x\|^2$ a ambos lados:

$$f(y-x) = f(y) - f(x) \leqslant \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \|x\|^2 = \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \quad \forall y \in E$$

$\supset$) Supongamos que tenemos $f \in E^*$, $x \in E$ fijo de forma que se cumple:

$$f(y-x) \leqslant \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \qquad \forall y \in E$$

Para probar primero que $f(x) = \|x\|^2$, tomaremos $y = \lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{R}^+$:

$$(\lambda - 1)f(x) = f(\lambda x - x) \leqslant \frac{1}{2}\|\lambda x\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2\left(\lambda^2 - 1\right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Distinguimos casos (notemos que si $\lambda = 1$ la desigualdad sigue siendo cierta):

- Si $\lambda > 1$, entonces:

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2}\|x\|^2\left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1}\right) \qquad \forall \lambda > 1$$

- Si $\lambda < 1$, entonces:

$$f(x) \geqslant \frac{1}{2}\|x\|^2 \left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda-1}\right) \qquad \forall \lambda \in]0,1[$$

Como tenemos que:

$$\lim_{\lambda\to 1} \frac{\lambda^2-1}{\lambda-1} = \lim_{\lambda\to 1} \frac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{\lambda-1} = \lim_{\lambda\to 1}(\lambda+1) = 2$$

Del primer punto deducimos que $f(x) \leqslant \|x\|^2$, y del segundo punto que $f(x) \geqslant \|x\|^2$. Por tanto, tenemos que $f(x) = \|x\|^2$.
Para ver que $\|f\| \leqslant \|x\|$, tomamos $y \in E$ con $\|y\| = \delta > 0$, con lo que:

$$f(y) - f(x) = f(y-x) \leqslant \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2$$

de donde:

$$f(y) \leqslant \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2$$

Si ahora observamos que:

$$\delta\|f\| = \delta \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(\delta x)| = \sup_{\|x\|=\delta} |f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2$$

Si tomamos $\delta = \|x\|$, tenemos que:

$$\|x\|\|f\| \leqslant \|x\|^2 \Longrightarrow \|f\| \leqslant \|x\|$$

d) Deducir que:

$$(f-g)(x-y) \geqslant 0 \qquad \forall x,y \in E, \quad \forall f \in F(x), \quad \forall g \in F(y)$$

de hecho:

$$(f-g)(x-y) \geqslant (\|x\| - \|y\|)^2 \qquad \forall x,y \in E, \quad \forall f \in F(x), \quad \forall g \in F(y)$$

Para probar la primera desigualdad, sean $x, y \in E$, si tomamos $f \in F(x)$, $g \in F(y)$, entonces por el apartado anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} f(z-x) &\leqslant \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \qquad \forall z \in E \\ g(z-y) &\leqslant \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 \qquad \forall z \in E \end{aligned}$$

Tomando en la primera desigualdad $z = y$, $z = x$ en la segunda y sumando ambas obtenemos:

$$f(y-x) + g(x-y) \leqslant 0$$

De donde:

$$(f-g)(x-y) = f(x-y) - g(x-y) = -(f(y-x) + g(x-y)) \geqslant 0$$

Para probar que bajo las mismas hipótesis tenemos $(f-g)(x-y) \geqslant (\|x\| - \|y\|)^2$:

$$(f-g)(x-y) = f(x) - f(y) - g(x) + g(y) = \|x\|^2 - f(y) - g(x) + \|y\|^2$$

Ahora, observamos que:

$$f(y) + g(x) \leqslant \|f\|\|y\| + \|g\|\|x\| = 2\|x\|\|y\| \Longrightarrow -2\|x\|\|y\| \leqslant -f(y) - g(x)$$

de donde:

$$(f-g)(x-y) = \|x\|^2 - f(y) - g(x) + \|y\|^2 \geqslant \|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

e) Sea E^* un espacio estrictamente convexo con $x, y \in E$ de forma que:

$$(f-g)(x-y) = 0 \qquad \forall x, y \in E, \quad \forall f \in F(x), \quad \forall g \in F(y)$$

Probar que $F(x) = F(y)$.

Sean $x, y \in E$, $f \in F(x)$, $g \in F(y)$, si aplicamos la desigualdad del apartado anterior junto con la propiedad que nos dan ahora:

$$0 = (f-g)(x-y) \geqslant (\|x\| - \|y\|)^2 \geqslant 0 \Longrightarrow \|x\| = \|y\|$$

Del apartado *c*) obtenemos que (usando además que $\|x\| = \|y\|$):

$$f(y) - \|x\|^2 = f(y-x) \leqslant \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 = 0 \Longrightarrow f(y) \leqslant \|x\|^2$$
$$g(x) - \|y\|^2 = g(x-y) \leqslant \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 = 0 \Longrightarrow g(x) \leqslant \|y\|^2 = \|x\|^2$$

Además, tenemos que:

$$0 = (f-g)(x-y) = f(x) - f(y) - g(x) + g(y) = \|x\|^2 - f(y) - g(x) + \|y\|^2$$

luego:

$$f(y) + g(x) = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2\|x\|^2$$

Sin embargo, como $f(y), g(x) \leqslant \|x\|^2$, concluimos que ha de ser:

$$g(x) = \|x\|^2 = \|y\|^2 = f(y)$$

Finalmente, como E^* es un espacio estrictamente convexo, tenemos por el apartado *b*) que tanto $F(x)$ como $F(y)$ se reducen a un punto:

$$\{f\} = F(x) = \{f \in E^* : \|f\| = \|x\| \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|^2\}$$

Sin embargo, tenemos que $\|g\| = \|x\|$ y que $g(x) = \|x\|^2$, lo que nos dice que $g \in F(x) = \{f\}$, por lo que $f = g$ y tenemos $F(x) = F(y)$.

Ejercicio 4.1.2. Sea E un espacio vectorial de dimensión n y sea $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ una base de E, dado $x \in E$ escribimos $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{R}$. Dado $f \in E^*$, definimos $f_i = f(e_i)$.

a) Considerar en E la norma:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

a) Calcular explícitamente, en términos de f_i, la norma $\|f\|$ para $f \in E^*$.

Hemos visto que $\|f\| = \sup_{\|x\|_1=1} |f(x)|$, por lo que si tomamos $x \in E$ con $\|x\|_1 = 1$, tenemos entonces que $\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1$, de donde:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i||f_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i| \\ &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i| \end{aligned}$$

Luego $\|f\| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i|$. Sin embargo, si tenemos que $p \in \{1, \ldots, n\}$ es el índice en el cual se maximiza $|f_i|$, es decir, $|f_p| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i|$, si tomamos:

$$x = e_j$$

Tenemos que $\|x\|_1 = 1$, así como que:

$$|f(x)| = |f(e_j)| = |f_j| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i|$$

Por lo que el supremo se alcanza, luego:

$$\|f\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i|$$

b) Determinar explícitamente el conjunto $F(x)$, para todo $x \in E$.

Veamos que:

$$f \in F(x) = \{f \in E^* : \|f\| = \|x\|_1 \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|_1^2\}$$

si y solo si

$$f_i = \left\{ \begin{array}{ll} sgn(x_i)\|x\|_1 & \text{si } x_i \neq 0 \\ \text{cualquier valor en } [-\|x\|_1, \|x\|_1] & \text{si } x_i = 0 \end{array} \right. \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$\Longleftarrow$) Notemos que:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \sum_{i=1}^{n} x_i sgn(x_i)\|x\|_1 = \|x\|_1 \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1\|x\|_1 = \|x\|_1^2$$

y que:

$$\|f\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i| = \max\left\{\max_{x_i\neq 0} |sgn(x_i)\|x\|_1|,\ \max_{x_i=0}\{f_i\}\right\} \overset{(*)}{=} \max_{x_i\neq 0} |\|x\|_1| = \|x\|_1$$

donde en $(*)$ hemos usado que si $x_i = 0$, entonces el valor de f_i está en el intervalo $[-\|x\|_1, \|x\|_1]$.

$\Longrightarrow$) Sea $f \in E^*$ con $\|f\| = \|x\|_1$ y $f(x) = \|x\|_1^2$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = f(x) = \|x\|_1^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|x\|_1$$

Ahora, como $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i| = \|f\| = \|x\|_1$, tenemos que:

$$|f_i| \leqslant \|x\|_1 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Por lo que tenemos:

$$x_i f_i \leqslant |x_i||f_i| \leqslant |x_i| \|x\|_1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|x\|_1$$

Luego ha de ser:

$$x_i f_i = |x_i| \|x\|_1 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

De donde (si $x_i \neq 0$):

$$f_i = \frac{|x_i| \|x\|_1}{x_i} = sgn(x_i) \|x\|_1$$

y para el resto de valores podemos tomar cualquier valor que no se salga del intervalo $[-\|x\|_1, \|x\|_1]$, para no alterar el valor de $\|f\|$.

b) Las mismas preguntas pero para la norma:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

Sea $x \in E$ con $\|x\|_\infty = 1$, tenemos entonces que $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| = 1$, de donde:

$$|f(x)| = \left| f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i||f_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f_i|$$

por lo que $\|f\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f_i|$, pero si tomamos:

$$x = (sgn(f_1), sgn(f_2), \ldots, sgn(f_n))$$

tenemos entonces que $\|x\|_\infty = 1$, con:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \sum_{i=1}^{n} sgn(f_i) f_i = \sum_{i=1}^{n} |f_i|$$

Tenemos que el supremo se alcanza, por lo que:

$$\|f\| = \sum_{i=1}^{n} |f_i|$$

Si pensamos ahora en el conjunto $F(x)$, si definimos:

$$I = \{i \in \{1, \ldots, n\} : |x_i| = \|x\|_\infty\}$$

veamos que:

$$f \in F(x) = \{f \in E^* : \|f\| = \|x\|_\infty \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|_\infty^2\}$$
$$\text{si y solo si}$$
$$\begin{cases} f_i = 0 & \forall i \notin I \\ x_i f_i \geqslant 0 & \forall i \in I \quad \text{y} \quad \sum_{i\in I} |f_i| = \|x\|_\infty \end{cases}$$

$\Longleftarrow$) Si las f_i cumplen lo enunciado, entonces:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \sum_{i\in I} x_i f_i = \sum_{i\in I} |x_i||f_i| = \|x\|_\infty \sum_{i\in I} |f_i| = \|x\|_\infty \|x\|_\infty = \|x\|_\infty^2$$

y también:

$$\|f\| = \sum_{i=1}^{n} |f_i| = \sum_{i\in I} |f_i| = \|x\|_\infty$$

$\Longrightarrow$) Sea $f \in E^*$ con $\|f\| = \|x\|_\infty$ y $f(x) = \|x\|_\infty^2$, entonces:

- Si $f_i = 0 \quad \forall i \notin I$, entonces:

  $$\|x\|_\infty = \|f\| = \sum_{i=1}^{n} |f_i| = \sum_{i\in I} |f_i|$$

  Además:

  $$\sum_{i\in I} x_i f_i = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = f(x) = \|x\|_\infty^2 = \sum_{i=1}^{n} |f_i|\|x\|_\infty = \sum_{i\in I} |f_i|\|x\|_\infty$$

  y tenemos las desigualdades:

  $$x_i \leqslant |x_i| \leqslant \|x\|, \qquad f_i \leqslant |f_i| \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

  lo que nos permite igualar término a término en la suma anterior, obteniendo:

  $$x_i f_i = |f_i|\|x\|_\infty = |f_i| \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|x_i|\} \Longrightarrow x_i f_i \geqslant 0 \quad \forall i \in I$$

  y se tienen las dos condiciones buscadas.

- Si suponemos ahora que existe $f_j \neq 0$ para $j \notin I$, tendremos entonces que $|x_j| < \|x\|$. Si observamos que:

  $$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = f(x) = \|x\|_\infty^2 = \sum_{i=1}^{n} |f_i|\|x\|$$

  y las desigualdades:

  $$x_i \leqslant |x_i| \leqslant \|x\|, \qquad f_i \leqslant |f_i| \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

  deducimos entonces que:

  $$x_i f_i = |f_i|\|x\| \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Sin embargo, tendríamos entonces que (para $i = j$ tenemos $f_j \neq 0$):

$$x_j = \frac{|f_j| \|x\|}{f_j} = sgn(f_j)\|x\|$$

de donde deducimos que $|x_j| = \|x\|$, contradicción, por lo que este caso es imposible.

c) Las mismas preguntas pero para la norma:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

y más generalmente para la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \in]1, +\infty[$$

Sea $x \in E$ con $\|x\|_p = 1$, tenemos entonces que $(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = 1$, de donde:

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i||f_i| \overset{(*)}{\leqslant} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

donde en $(*)$ he usado la desigualdad de Hölder. Deducimos por tanto que:

$$\|f\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Ejercicio 4.1.3. Sea $E = \{u \in C([0,1], \mathbb{R}) : u(0) = 0\}$ con la norma:

$$\|u\| = \max_{t \in [0,1]} |u(t)|$$

considera el funcional lineal $f : E \to \mathbb{R}$ dado por:

$$f(u) = \int_0^1 u(t)\ dt$$

a) Demuestra que $f \in E^*$ y calcula $\|f\|$.

Hemos de probar que f es lineal y continua:

- Por la forma de definir f es claro que es lineal:

$$f(\lambda u+v) = \int_0^1 \lambda u(t)+v(t)\ dt = \lambda \int_0^1 u(t)\ dt + \int_0^1 v(t)\ dt = \lambda f(u)+f(v)$$
$$\forall u, v \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- f es continua, ya que:

$$|f(u)| = \left| \int_0^1 u(t)\ dt \right| \leqslant \left| \int_0^1 \|u\|\ dt \right| = \|u\| \qquad \forall u \in E$$

En consecuencia, $f \in E^*$. En este último punto hemos probado además que $\|f\| \leqslant 1$. Para probar la otra desigualdad:

Opción 1. si para cada $\alpha > 0$ definimos $u_\alpha \in E$ dada por:

$$u_\alpha(t) = t^\alpha \qquad \forall t \in [0,1]$$

tenemos entonces que:

$$f(u_\alpha) = \int_0^1 t^\alpha\ dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{1+\alpha} \qquad \forall \alpha > 0$$

de donde:

$$|f(u_\alpha)| \leqslant \|f\| \leqslant 1$$

con $\lim\limits_{\alpha\to 0} |f(u_\alpha)| = 1$, por lo que $\|f\| = 1$.

Opción 2. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in E$ dada por:

$$u_n(t) = \begin{cases} nt & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant n \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Tenemos que:

$$f(u_n) = \int_0^{\frac{1}{n}} nt\ dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 1\ dt = \frac{nt}{2} \int_0^{\frac{1}{n}} 1 + t\ dt = 1 - \frac{1}{2n}$$

por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = 1$$

luego $\|f\| = 1$.

b) ¿Puede encontrarse $u \in E$ con $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|$?

Opción 1. No, ya que la única función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua con integral 1 en $[0,1]$ y con máximo 1 es la constantemente igual a 1, que no pertence a E (por no valer 0 en 0):

Supongamos que tenemos una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua con integral 1 en $[0,1]$ y con máximo 1 distinta de la constantemente igual a 1. En dicho caso, ha de existir $x_0 \in [0,1]$ de forma que $f(x_0) < 1$. Por continuidad de f podemos encontrar $\varepsilon, \delta > 0$ de forma que:

$$f(x) \leqslant 1 - \varepsilon \qquad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [0,1]$$

En cuyo caso, llamando $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [0,1]$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\ dx &= \int_{[0,1]\setminus I} f(x)\ dx + \int_I f(x)\ dx \leqslant \int_{[0,1]\setminus I} 1\ dx + \int_I (1-\varepsilon)\ dx \\ &= (1 - l(I)) + l(I)(1-\varepsilon) = 1 - \varepsilon < 1\end{aligned}$$

Por lo que f no tiene integral 1 en $[0, 1]$, contradicción, que viene de suponer que f no es constantemente igual a 1.

Tras este resultado, como la pertenencia al conjunto E obliga a que la función u no sea constantemente igual a 1, tenemos pues que no puede existir una tal función.

Opción 2. Supongamos que existe $u \in E$ de forma que $\|u\| = 1$ con $f(u) = 1$, esto es equivalente a que:

$$f(u) = \int_0^1 u(t)\ dt = 1 \Longleftrightarrow \int_0^1 u(t) - 1\ dt = 0$$

Tomando $g(t) = u(t) - 1$, como $\|u\| = 1$ tenemos entonces que $u(t) \leqslant 1$ para todo $t \in [0, 1]$, con lo que $g(t) \leqslant 0$ para $t \leqslant [0, 1]$, y como su integral en $[0, 1]$ vale 0 concluimos que $g(t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$, con lo que:

$$u(t) = 1 \qquad \forall t \in [0, 1]$$

Pero teníamos que $u \in E$, luego $0 = u(0) = 1$, contradicción.

Ejercicio 4.1.4. Considera el espacio $E = C_0$ de sucesiones de números reales que convergen a cero con la norma

$$\|x\| = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \qquad \forall x \in E$$

Para cada elemento $u \in E$ definimos:

$$f(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} u(n)$$

a) Comprueba que $f \in E^*$ y calcula $\|f\|$.

En primer lugar veos que f está bien definida, pues:

$$f(u) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u(n)|}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u\|}{2^n} = \|u\|$$

- Para ver que f es lineal:

$$f(\lambda u + v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda u(n) + v(n)}{2^n} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{2^n} = \lambda f(u) + f(v)$$
$$\forall u, v \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- Para ver que f es continuo:

$$|f(u)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{2^n} \right| \leqslant \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u\|}{2^n} \right| = \|u\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right| = \|u\|$$

Por lo que $f \in E^*$. En este último punto hemos visto también que $\|f\| \leqslant 1$. Si tomamos ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ el vector u_n donde:

$$u_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

tenemos claramente que $u_n \overset{k\to\infty}{\to} 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $u_n \in C_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos también:

$$f(u_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

De donde $\{f(u_n)\} \to 1$, por lo que $\|f\| = 1$.

b) ¿Puede encontrarse $u \in E$ con $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|$?

Opción 1. Supongamos que existe $u \in C_0$ con $\|u\| = 1 = f(u)$, con lo que:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u(n)|}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

de donde ha de ser obligatoriamente:

$$u(n) = |u(n)| = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pero sin embargo la función constantemente igual a 1 no es convergente a 0.

Opción 2. Si tomamos $u \in C_0$ con $\|u\| = 1$, como $u \in C_0$ tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$|u(n)| \leqslant \frac{1}{2} \qquad \forall n \geqslant m$$

Pero tenemos:

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{2^n} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{u(n)}{2^n} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{u(n)}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{n-1} \frac{|u(n)|}{2^n} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{|u(n)|}{2^n}$$

y usando ahora que $\|u\| = 1$, tenemos que $|u(n)| \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde:

$$f(u) \leqslant \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{m-1}} = 1 - \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m} < 1$$

Por lo que $f(u) < 1$, no es posible encontrar dicho $u \in E$.

Ejercicio 4.1.5. Sea E un espacio normado de dimensión infinita:

a) Demuestra (usando el Lema de Zorn) que existe una base algebraica $\{e_i\}_{i\in I}$ en E de forma que $\|e_i\| = 1 \quad \forall i \in I$.

Recordamos que una base algebraica (o de Hamel) es un subconjunto $\{e_i\}_{i\in I}$ de E de forma que todo $x \in E$ puede ser escrito de forma única como:

$$x = \sum_{i\in J} x_i e_i, \quad \text{con} \quad J \subset I, \quad J \text{ finito}$$

Consideramos (que es no vacío puesto que $\{x\} \in P$ para todo $x \in E$):

$$P = \{C \subset E : \text{los elementos de } C \text{ son linealmente independientes}\}$$

Y buscamos aplicar el Lema de Zorn a P. Para ello, definimos:

$$C \leqslant D \Longleftrightarrow C \subset D \qquad \forall C, D \in P$$

Ahora, hemos de probar primero que P es inductivo. Para ello, sea $Q \subset P$ un subconjunto totalmente ordenado, tratemos de probar que $\cup Q$ es una cota superior de Q. Es claro que $C \subset \cup Q$ para todo $C \in Q$, por lo que basta probar que $\cup Q \in P$. Si tomamos $x, y \in \cup Q$, tendremos entonces que existen $C, D \in Q$ de forma que $x \in C$ y $y \in D$. Como Q es totalmente ordenado, tendremos bien $C \subset D$ bien $D \subset C$. Aprovechando la simetría de la situación, supondremos que $C \subset D$, con lo que también tenemos $x \in D \in Q \subset P$, de donde x e y son linealmente independientes, como queríamos probar, lo que nos dice que $\cup Q \in P$.

Aplicando el Lema de Zorn, tenemos que P tiene un elemento maximal, es decir, existe $\mathcal{B} \in P$ de forma que si $C \subset E$ es un conjunto tal que todos sus elementos son linealmente independientes entonces $C \subset \mathcal{B}$. Probaremos ahora que $\mathcal{B}$ es una base de E. Para ello, sea $x \in E$, si x es linealmente independiente de los elementos de $\mathcal{B}$, entonces consideramos $B = \mathcal{B} \cup \{x\}$, que es un elemento de P mayor que el elemento maximal de P, <u>contradicción</u>, por lo que x ha de ser linealmente dependiente de los elementos de $\mathcal{B}$, es decir, existe una cantidad finita de ellos determinada por $J \subset I$ finito y unos escalares a_i de forma que:

$$x + \sum_{j\in J} a_j x_j = 0, \qquad x_j \in \mathcal{B}, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad \forall j \in J$$

Dicho de otra forma, si tomamos $x_j = -a_j \quad \forall j \in J$:

$$x = \sum_{j\in J} a_j x_j$$

Como la normalización de los vectores no modifica su independiencia lineal, podemos normalizar todos los elementos del conjunto $\mathcal{B}$ y este seguirá cumpliendo lo enunciado.

b) Construye un funcional lineal $f : E \to \mathbb{R}$ que no sea continuo.

Ejemplo particular. Si consideramos $E = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ el espacio de sucesiones casi nulas, una base del mismo es:

$$\mathcal{B} = \{e_n \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} : e_n(n) = 1, e_n(m) = 0, m \neq n\}$$

Si consideramos la norma:

$$\|x\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| \qquad \forall x \in E$$

Veamos que la aplicación lineal dada por la base:

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \\ & e_n & \longmapsto & 2^n \end{array}$$

Veamos que el funcional no es continuo en 0, pues para $\varepsilon = 1$, para todo $\delta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{2^n} < \delta$ de forma que $\|\delta e_n\| \leqslant \delta$:

$$|f(\delta e_n)| = \delta|f(e^n)| > \frac{1}{2^n}2^n = 1$$

En general. Sea E un espacio normado de dimensión infinita, sabemos que existe una base unitaria $\mathcal{B}$ de E. Consideramos $\overline{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ un subconjunto infinito numerable, por lo que podemos enumerar sus elementos, definimos la aplicación $f : E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(e_n) = 2^n \qquad \forall e_n \in \overline{\mathcal{B}}$$
$$f(e) = 0 \qquad \forall e \in \mathcal{B} \setminus \overline{\mathcal{B}}$$

Al igual que antes, f no es continua en 0, pues para $\varepsilon = 1$, $\forall \delta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\frac{1}{2^n} < \delta$ con $\|\delta e_n\| = \delta$ y:

$$|f(\delta e_n)| = 1$$

c) Suponiendo que además E es un espacio de Banach, prueba que I no es numerable (**Pista:** usar "el Teorema de categoría de Baire").

Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, suponemos que existe $\mathcal{B}$ una base numerable del mismo. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \left\{ x \in E : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\}$$

Veamos que A_n es cerrado y que $\mathrm{Int}(A_n) = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

- Sea $\{x_m\} \to x \in E$ con $x_m \in A_n$ $\forall m \in \mathbb{N}$, como A_n es un subespacio vectorial de E de dimensión finita, entonces $A_n \cong \mathbb{R}^n$, luego A_n es completo y como $\{x_m\}$ es de Cauchy, ha de ser convergente en A_n, de donde $x \in A_n$.

- Sea $x \in A_n$, consideramos para cierto $\varepsilon > 0$ la bola $B(x, \varepsilon)$, y vemos que:
$$x + \frac{\varepsilon}{2} e_{n+1} \in B(x, \varepsilon)$$
$$x + \frac{\varepsilon}{2} \notin A_n$$
De donde $B(x, \varepsilon) \not\subset A_n$

Si consideramos $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = E$, el Lema de Baire nos dice que $\operatorname{Int} E = \emptyset$, contradicción, puesto que $\operatorname{Int} E = E$, que viene de suponer que la base $\mathcal{B}$ es numerable.

Ejercicio 4.1.6. Sea E un espacio normado y $H \subset E$ un hiperplano. Sea $V \subset E$ un subespacio afín que contiene a H.

a) Probar que $V = H$ o $V = E$.

Recordamos que un hiperplano es, dada $0 \neq f : E \to \mathbb{R}$ lineal y $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$$

Opción 1. Observemos que $x, y \in H \iff y - x \in \ker f$, por lo que fijado $x_0 \in H$, los vectores y que están en H son los de la forma $y - x_0 \in \ker f$. Es decir:
$$H = x_0 + \ker f$$

Opción 2. H es un espacio afín, por lo que será de la forma $H = x_0 + H_1$ con H_1 un cierto espacio vectorial. Tratamos de ver que $H_1 = \ker f$.

$\subseteq$) Si tomamos $v \in H_1$ tenemos que $v = x - y$ para $x, y \in H$; de donde:
$$f(v) = f(x - y) = f(x) - f(y) = \alpha - \alpha = 0 \Longrightarrow v \in \ker f$$

$\supseteq$) Si tomamos $v \in \ker f$ y consideramos $x \in H$ de donde:
$$f(x + v) = f(x) + f(v) = \alpha$$
Por lo que tomando $v = y - x$ tenemos que $v \in H_1$.

En definitiva, si aplicamos ahora el Teorema de Isomorfía para aplicaciones lineales:
$$\frac{E}{\ker f} \cong f(E) \subset \mathbb{R}$$
Como $dim\mathbb{R} = 1$ y f no se anula, tenemos que $f(E)$ es un subespacio vectorial mayor que $\{0\}$, por lo que no queda más salida que $f(E) = \mathbb{R}$. En definitiva:
$$\frac{E}{\ker f} \cong \mathbb{R}$$
por lo que $dim \frac{E}{\ker F} = 1$. Usando que $x_0 \in H \subset V \subset E$, podemos ver $V = x_0 + V_1$ como espacio afín, con lo que tenemos:
$$\ker f = H_1 \subset V_1 \subset E_1$$
de donde:
$$\{0\} \cong \frac{H_1}{\ker f} \subset \frac{V_1}{\ker f} \subset \frac{E_1}{\ker f} \cong \mathbb{R}$$
Por lo que no queda más salida que $dim \frac{V_1}{\ker f} \in \{0, 1\}$:

- Si la dimensión es 0, entonces $V_1 = \ker f$, de donde:

$$V = x_0 + V_1 = x_0 + \ker f = H$$

- Si la dimensión es 1, entonces $V_1 = E_1$, por lo que:

$$V = x_0 + V_1 = x_0 + E_1 = E_1$$

Algo habitual al trabajar con espacios vectoriales de dimensión no finita es hablar de la "codimensión". En este ejemplo, teníamos por ejemplo que como $dim \frac{E}{\ker f} = 1$, entonces:

$$codim \ker f = 1$$

De esta forma, un hiperplano es un espacio afín de codimensión 1.

b) Deducir que H es cerrado o denso en E.

Supuesto que H no es cerrado, tenemos que $\overline{H} \neq H$, y además $\overline{H}$ es un espacio afín conteniendo H, por lo que por el apartado anterior ha de ser $\overline{H} = E$, es decir, H es denso en E.

Ejercicio 4.1.7. Sea E un espacio normado y $C \subset E$ un subconjunto convexo.

a) Prueba que $\overline{C}$ y $\operatorname{Int} C$ son convexos.

- Para $\overline{C}$, sean $x, y \in \overline{C}$, entonces existen sucesiones de puntos de C $\{x_n\}, \{y_n\}$ con $\{x_n\} \to x$ y $\{y_n\} \to y$, de donde si tomamos $t \in [0,1]$, tenemos que:

$$\{(1-t)x_n + ty_n\} \to (1-t)x + ty$$

Por lo que $(1-t)x + ty \in \overline{C}$ para todo $t \in [0,1]$.

- Para $\operatorname{Int} C$, sean $x, y \in \operatorname{Int} C$, entonces existe $r > 0$ de forma que $B(x,r), B(y,r) \subset C$. En dicho caso, como C es convexo, tenemos que:

$$tB(x,r) + (1-t)B(y,r) \subset C \qquad \forall t \in [0,1]$$

Pero como:

$$tB(x,r) + (1-t)B(y,r) = B(tx + (1-t)y, r)$$

tenemos entonces que $tx + (1-t)y \in B(tx + (1-t)y, r) \subset C \quad \forall t \in [0,1]$, con lo que $\operatorname{Int} C$ es convexo. La igualdad entre conjuntos que hemos usado se debe principalmente a:

$$B(x,r) = x + rB(0,1) \qquad \forall x \in E, \quad \forall r \in \mathbb{R}^+$$

$\supseteq$) Si $z \in B(0,1)$ entonces $\|z\| < 1$, de donde $\|rz\| < r$, por lo que $\|x - x + rz\| < r$, luego $x + rz \in B(x,r)$.

$\subseteq$) Si $z \in B(x,r)$, entonces $\|x - z\| < r$, por lo que:

$$z = x + r\left(\frac{z-x}{r}\right) \quad \text{con} \quad \left\|\frac{z-x}{r}\right\| < 1$$

Para ver:

$$tB(x,r) + (1-t)B(y,r) = B(tx + (1-t)y, r)$$

$\subseteq$) Si tomamos $z \in tB(x,r)+(1-t)B(y,r)$, tenemos entonces que existen $\alpha \in B(x,r)$ y $\beta \in B(y,r)$ de forma que:

$$z = t(x + r\alpha) + (1-t)(y + r\beta) = tx + (1-t)y + r(t\alpha + (1-t)\beta)$$

y como $t\alpha + (1-t)\beta \in B(0,1)$ por ser convexa, hemos probado que $z \in B(tx + (1-t)y, r)$.

$\supseteq$) Si tomamos ahora $z \in B(tx + (1-t)y, r)$, tenemos que existe un elemento $\alpha \in B(0,1)$ de forma que:

$$\begin{aligned} z &= tx + (1-t)y + r\alpha = tx + (1-t)y + tr\alpha + (1-t)r\alpha \\ &= t(x + r\alpha) + (1-t)(y + r\alpha) \in tB(x,r) + (1-t)B(y,r) \end{aligned}$$

b) Dado $x \in C$ y $y \in \operatorname{Int} C$, prueba que $tx + (1-t)y \in \operatorname{Int} C \quad \forall t \in]0,1[$.

Sea $r > 0$ de forma que $B(y,r) \subset C$, como C es convexo tenemos que:

$$tx + (1-t)B(y,r) \subset C \qquad \forall t \in [0,1]$$

lo que nos dice que:

$$C \ni tx+(1-t)(y+r\alpha) = tx+(1-t)y+(1-t)r\alpha \qquad \forall \alpha \in B(0,1), \quad \forall t \in [0,1]$$

por tanto, tendremos que $B(tx + (1-t)y, (1-t)r) \subset C$ para todo $t \in [0,1]$, de donde $tx + (1-t)y \in \operatorname{Int} C$, para todo $t \in [0,1]$.

c) Deduce que $\overline{C} = \overline{\operatorname{Int} C}$ siempre que $\operatorname{Int} C \neq \emptyset$.

Como $\operatorname{Int} C \subset C$, tenemos que $\overline{\operatorname{Int} C} \subset \overline{C}$. Sea ahora $x \in \overline{C}$, tenemos que existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C con $\{x_n\} \to x$. Como $\operatorname{Int} C \neq \emptyset$, podemos tomar $y \in \operatorname{Int} C$. Sea $\{t_n\}$ una sucesión de puntos de $[0,1]$ convergente a 1 (por ejemplo, $t_n = 1 - {}^1\!/_n$), tenemos entonces que:

$$\{t_n x_n + (1-t_n)y\} \to x$$

con $t_n x_n + (1-t_n)y \in \operatorname{Int} C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por el apartado *b)*), de donde concluimos que $x \in \overline{\operatorname{Int} C}$.

Ejercicio 4.1.8. Sea E un espacio normado con norma $\|\cdot\|$. Sea $C \subset E$ un abierto convexo de forma que $0 \in C$. Si p denota el funcional de Minkowski de C:

a) Suponiendo que C es simétrico (es decir, que $-C = C$) y que es acotado, prueba que p es una norma equivalente a $\|\cdot\|$.

Veamos en primer lugar que p es una norma en E:

- p verifica la desigualdad triangular, como vimos en la Proposición 1.21.

- Sea $x \in E$ de forma que $p(x) = 0$, entonces $\lambda x \in C \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$. Si $x \neq 0$ podemos tomar la sucesión:

$$\left\{ n\frac{x}{\|x\|} \right\}$$

que verifica:

$$\left\| n\frac{x}{\|x\|} \right\| = \|n\| = n$$

por lo que $\{\|n \cdot {}^{x}/_{\|x\|}\|\} \to \infty$, lo que contradice que C esté acotado, contradicción que viene de suponer que $x \neq 0$, luego ha de ser $x = 0$.

- Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$, distinguimos casos:
  - Si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, la Proposición 1.21 nos dice que $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.
  - Si $\lambda = 0$, tenemos que $\lambda p(x) = 0 = p(0) = p(\lambda x)$.
  - Si $\lambda \in \mathbb{R}^-$, tenemos que:

$$p(\lambda x) = p((-\lambda)(-x)) \overset{(*)}{=} -\lambda p(-x) = |\lambda| p(-x)$$

donde en $(*)$ usamos que $-\lambda \in \mathbb{R}^+$. De la simetría de C concluimos que $x \in C \iff -x \in C$. Supuesto que $p(x) \neq p(-x)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p(x) < p(-x)$:

$$\inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C \right\} = p(x) < p(-x) = \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{-x}{\alpha} \in C \right\}$$

por definición de ínfimo, ha de existir $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de forma que:

$$\frac{x}{\alpha} \in C \quad \text{y} \quad \frac{-x}{\alpha} \notin C$$

lo que contradice que ${}^{x}/_{\alpha} \in C \iff {}^{-x}/_{\alpha} \in C$, que viene de suponer que $p(x) \neq p(-x)$.

En conclusión, tenemos que p es una norma en E. Para ver que p es equivalente a $\|\cdot\|$:

- La Proposición 1.21 nos dice que $\exists M > 0$ de forma que:

$$p(x) \leqslant M\|x\| \qquad \forall x \in E$$

- Como C está acotado, ha de existir $L \geqslant 0$ de forma que:

$$\|x\| \leqslant L \qquad \forall x \in C$$

Fijado $x \in E$, sea $\alpha \in \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C \right\}$, tenemos que:

$$\frac{1}{\alpha}\|x\| = \left\| \frac{x}{\alpha} \right\| \leqslant L \Longrightarrow \frac{1}{L}\|x\| \leqslant \alpha$$

de donde deducimos que $\frac{1}{L}\|x\| \leqslant p(x) \quad \forall x \in E$, lo que nos da la otra desigualdad.

Por lo que p y $\|\cdot\|$ son normas equivalentes.

b) Sea $E = C([0,1],\mathbb{R})$ con la norma:

$$\|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$$

sea:

$$C = \left\{ u \in E : \int_0^1 |u(t)|^2 \, dt < 1 \right\}$$

Comprueba que C es convexo, simétrico y que $0 \in C$. ¿Está C acotado en E? Calcula el funcional de Minkowski p de C y prueba que p es una norma en E. ¿Es p equivalente a $\|\cdot\|$?

Veamos que C es convexo, simétrico y que $0 \in C$:

- Si consideramos la función $c_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $c_0(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$, tenemos que:
$$\int_0^1 |c_0(t)|^2 \, dt = \int_0^1 0 \, dt = 0 < 1$$
por lo que $0 = c_0 \in C$.
- Sea $u \in E$, tenemos que:
$$\int_0^1 |u(t)|^2 \, dt = \int_0^1 |-u(t)|^2 \, dt$$
de donde deducimos que $u \in C \iff -u \in C$, lo que nos dice que $C = -C$, que equivale a ser simétrico.
- Si consideramos:
$$\|u\|_2 = \left(\int_0^1 |u(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$
tenemos que
- Para ver que C es convexo, veamos que si $u, v \in C$ entonces $w = \lambda u + (1-\lambda)v \in C$, para $\lambda \in [0,1]$. Para ello, si denotamos por $\|\cdot\|_2$ a la norma en L^2:
$$\|u\|_2 = \left(\int_0^1 |u(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$
Observamos que:
$$\|w\|_2 = \|\lambda u + (1-\lambda)v\|_2 \leqslant \lambda \|u\|_2 + (1-\lambda)\|v\|_2 \leqslant \lambda + (1-\lambda) = 1$$
Por lo que $w \in C$.
- Veamos que C no está acotado, pues podemos considerar:
$$u_n(t) = \frac{\sqrt{n}}{1+nt} \qquad \forall t \in [0,1]$$
Que son funciones de C:
$$\int_0^1 |u_n(t)|^2 \, dt = \int_0^1 \frac{n}{(1+nt^2)} \, dt = \int_1^{1+n} \frac{1}{s^2} \, ds = \left[\frac{-1}{S} \right]_1^{1+n} = \frac{n}{n+1} < 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Y cumplen:

$$\|u_n\| = \max_{t\in[0,1]} \frac{\sqrt{n}}{1+nt} = \sqrt{n}$$

- Calcular p y ver que es una norma:

$$p(u) = \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{u}{\alpha} \in C\right\} = \inf\left\{\alpha > 0 : \int_0^1 \left|\frac{u(t)}{\alpha}\right|^2 \, dt < 1\right\}$$

Tenemos que:

$$\frac{1}{\alpha^2}\int_0^1 |u(t)|^2 \, dt < 1 \Longleftrightarrow \alpha^2 > \int_0^1 |u(t)|^2 \, dt$$

Por lo que:

$$p(u) = \inf\left\{\alpha > 0 : \alpha > \sqrt{\int_0^1 |u(t)|^2 \, dt}\right\} \qquad \forall u \in E$$

De donde:

$$p(u) = \sqrt{\int_0^1 |u(t)|^2 \, dt} = \|u\|_2$$

- Veamos que no son equivalentes, pues tenemos que:

$$p(u_n) = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1$$

y tenemos $\|u_n\| \to \infty$.

Ejercicio 4.1.9. Sea E un espacio normado de dimensión finita, sea $C \subset E$ un conjunto no vacío convexo con $0 \notin C$. Siempre hay un hiperplano que separa C y $\{0\}$ (Notemos que todo hiperplano es cerrado (¿por qué?). El mayor punto de este ejercicio es que no hace falta exigir nada más sobre C).

Como un hiperplano de E es un subespacio vectorial de E de dimensión finita, este será cerrado.

a) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ subconjunto numerable de C que es denso en C (¿por qué existe?). Para cada n definimos:

$$C_n = \text{conv}\{x_1, \ldots, x_n\} = \left\{x = \sum_{i=1}^n t_i x_i : t_i \geqslant 0 \quad \forall i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n t_i = 1\right\}$$

Comprueba que C_n es compacto y que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ es denso en C.

Vemos que es posible considerar dicho conjunto de hecho en todo el espacio E, puesto que como E es un espacio normado de dimensión finita, digamos n, existe un isomorfismo lineal $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$. En $\mathbb{R}^n$ sabemos que el conjunto

$\mathbb{Q}^n$ es numerable y denso. Tendremos que $\Phi^{-1}(\mathbb{Q}^n)$ es numerable y como Φ es un isomorfismo lineal será también un homeomorfismo, con lo que el cierre de $\Phi^{-1}(\mathbb{Q}^n)$ será todo el espacio E. Para considerar el conjunto enunciado basta tomar $\Phi^{-1}(\mathbb{Q}^n) \cap C$.

Para ver que $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ es denso en C, observamos primero que como C es convexo tenemos que $\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\} \subset C \quad \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subset C$$

Usando que el conjunto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso en C y que $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, vemos que:

$$\overline{C} = \overline{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}} \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n} \subset \overline{C}$$

De donde deducimos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es denso en C.

Finalmente, para ver que C_n es compacto para cada $n \in \mathbb{N}$, fijado $n \in \mathbb{N}$ si consideramos una sucesión de elementos de C_n (indexada en k):

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i^{(k)} x_i \right\}$$

Notemos que fijado $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que $\{t_i^{(k)}\}$ es una sucesión de números reales acotada, puesto que:

$$0 \leqslant t_i^{(k)} \leqslant 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Por lo que admite una parcial $\{t_i^{(\sigma_i(k))}\}$ convergente. Si aplicamos este razonamiento desde $\{t_0^{(k)}\}$ hasta $\{t_n^{(k)}\}$ razonando en cada caso con la parcial obtenida de la sucesión anterior[1], podemos obtener finalmente una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que haga que cada una de las sucesiones $\{t_i^{(\sigma(k))}\}$ sea convergente, a cierto t_i. De esta forma, tenemos que:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i^{(\sigma(k))} x_i \right\} \to \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$$

Por lo que nuestra sucesión de partida admite una parcial convergente, lo que prueba que C_n es compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$.

b) Prueba que existe un $f_n \in E^*$ de forma que:

$$\|f_n\| = 1 \quad \text{y} \quad f_n(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in C_n$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, buscamos aplicar la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach. Para ello, observemos que como $C_n \subset C$ con $0 \notin C_n$ no puede ser $0 \in C_n$, por lo que tenemos $\{0\} \cap C_n = \emptyset$ con $\{0\}$ un conjunto cerrado y C_n

[1] Esta idea se usa en la demostración del Teorema de Bolzano-Weierstrass para $\mathbb{R}^N$.

un conjunto compacto. Aplicando el Teorema enunciado tenemos que existen $g_n \in E^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$0 = g_n(0) < \alpha < g_n(x) \qquad \forall x \in C_n$$

Si definimos $f_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}$, tenemos que $f_n \in E^*$, con:

- Si $x \in C_n$:
$$f_n(x) = \frac{g_n(x)}{\|g_n\|} > \frac{\alpha}{\|g_n\|} > 0$$
- Tenemos que:
$$\|f_n\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f_n(x)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \frac{|g_n(x)|}{\|g_n\|} = \frac{1}{\|g_n\|} \sup_{\|x\|\leqslant 1} |g_n(x)| = \frac{\|g_n\|}{\|g_n\|} = 1$$

c) Deduce que existe $f \in E^*$ de forma que:

$$\|f\| = 1 \quad \text{y} \quad f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in C$$

Si consideramos la sucesión de funciones $\{f_n\}$ que hemos obtenido gracias al apartado anterior, observamos que $\|f_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que tenemos una sucesión acotada que, por ser $dimE < \infty$ tenemos que $dimE^* < \infty$, por lo que por el Teorema de Bolzano-Weierstrass tenemos que existe una sucesión parcial suya $\{f_{\sigma(n)}\}$ convergente a cierta función $f : E \to \mathbb{R}$ que:

- Es lineal, ya que si $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos:
$$f(\lambda x+y) = \lim_{n\to\infty} f_{\sigma(n)}(\lambda x+y) = \lambda \lim_{n\to\infty} f_{\sigma(n)}(x) + \lim_{n\to\infty} f_{\sigma(n)}(y) = \lambda f(x)+f(y)$$
- Es continua, puesto que:
$$|f(x)| = \left|\lim_{n\to\infty} f_{\sigma(n)}(x)\right| = \lim_{n\to\infty} |f_{\sigma(n)}(x)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|f_{\sigma(n)}\|\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x\| = \|x\| \qquad \forall x \in E$$

Por lo que $f \in E^*$. Veamos ahora que f cumple las dos propiedades enunciadas:

- En primer lugar, veamos que $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in C$. Para ello, vemos primero que si $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que $x \in C_m$, y por la definición que hicimos de los conjuntos C_n también tenemos que:
$$x \in C_n \qquad \forall n \geqslant m$$
Por lo que tenemos que $f_{\sigma(n)}(x) \geqslant 0 \quad \forall n \geqslant m$, de donde deducimos que $f(x) \geqslant 0$. Como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es denso en C, tendremos también que $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in C$.
- Para ver que $\|f\| = 1$,

d) Sean $A, B \subset E$ conjuntos no vacíos disjuntos y convexos. Prueba que existe algún hiperplano H que separa A y B.

Sea $C = A - B$, tenemos que C es no vacío, convexo (se probó en la primera versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach) y no contiene al 0 (ya que A y B eran disjuntos), si consideramos un subconjunto numerable de C $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que además sea denso en C (en el apartado a)) ya vimos por qué existía, podremos definir los conjuntos $C_n = \text{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, que ya vimos que eran compactos y que su unión era densa en C, lo que nos permitía encontrar $f \in E^*$ de forma que $\|f\| = 1$ y $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in C$. Es decir:

$$f(0) = 0 \leqslant 0 \leqslant f(x) \qquad \forall x \in C$$

Por lo que el hiperplano $H = [f = 0]$ separa $\{0\}$ y C; y repitiendo la demostración de la primera versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach llegamos a que existe algún hiperplano cerrado H que separa A y B.

Ejercicio 4.1.10. Sea E un espacio normado y sea I cualquier conjunto de índices, fijado un subconjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ en E y otro $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ en $\mathbb{R}$. Demuestra que las siguientes propiedades son equivalentes:

1. Existe $f \in E^*$ de forma que $f(x_i) = \alpha_i \quad \forall i \in I$.
2. Existe una constante $M \geqslant 0$ de forma que para cada conjunto finito $J \subset I$ y para cada elección de números reales $\{\beta_i\}_{i\in J}$ tenemos:

$$\left|\sum_{i\in J} \beta_i\alpha_i\right| \leqslant M \left\|\sum_{i\in J} \beta_i x_i\right\|$$

Notemos que en la prueba $2 \Longrightarrow 1$ uno puede encontrar alguna $f \in E^*$ con $\|f\| \leqslant M$. (**Pista:** intenta primero definir f en el espacio lineal generado por $\{x_i\}_{i\in I}$).

$1 \Longrightarrow 2)$ Sea $J \subset I$ finito y $\{\beta_i\}_{i\in J} \subset \mathbb{R}$, tenemos:

$$\left|\sum_{i\in J} \beta_i\alpha_i\right| = \left|\sum_{i\in J} \beta_i f(x_i)\right| = \left|f\left(\sum_{i\in J} \beta_i x_i\right)\right| \leqslant M \left\|\sum_{i\in J} \beta_i x_i\right\|$$

$2 \Longrightarrow 1)$ Sea:

$$G = \mathcal{L}(\{x_i\}_{i\in I}) = \left\{\sum_{i\in J} \beta_i x_i : J \subset I \text{ finito}, \beta_i \in \mathbb{R}\right\}$$

Definimos para cada $x \in G$:

$$g(x) = g\left(\sum_{i\in J} \beta_i x_i\right) = \sum_{i\in J} \beta_i\alpha_i$$

siempre que $x = \sum_{i\in J} \beta_i x_i$. Que está bien definida, puesto que si tenemos dos descomposiciones de x:

$$\sum_{i\in J} \beta_i x_i = x = \sum_{i\in J} \gamma_i x_i$$

tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
g\left(\sum_{i\in J}\beta_i x_i\right) - g\left(\sum_{i\in J}\gamma_i x_i\right) &= \sum_{i\in J}\beta_i\alpha_i - \sum_{i\in J}\gamma_i\alpha_i = \sum_{i\in J}(\beta_i-\gamma_i)\alpha_i \\
&\leqslant M\left\|\sum_{i\in J}(\beta_i-\gamma_i)x_i\right\| = M\left\|\sum_{i\in J}\beta_i x_i - \sum_{i\in J}\gamma_i x_i\right\| \\
&= M\|x-x\| = 0
\end{aligned}$$

Veamos que g es lineal y continua:

- Si tomamos
$$x = \sum_{i\in J_1}\beta_i x_i, \qquad y = \sum_{i\in J_2}\gamma_i x_i$$
definiendo:
$$\beta_i = \begin{cases} \beta_i & \text{si } j\in J_1 \\ 0 & \text{si } j\in J_2\setminus J_1 \end{cases} \qquad \gamma_i = \begin{cases} \gamma_i & \text{si } j\in J_2 \\ 0 & \text{si } j\in J_1\setminus J_2 \end{cases}$$
tenemos:
$$x = \sum_{i\in J_1\cup J_2}\beta_i x_i, \quad y = \sum_{i\in J_1\cup J_2}\gamma_i x_i \quad \Longrightarrow \quad x+y = \sum_{i\in J_1\cup J_2}(\beta_i+\gamma_i)x_i$$
Luego:
$$g(x+y) = \sum_{i\in J_1\cup J_2}(\beta_i+\gamma_i)\alpha_i = \sum_{i\in J_1}\beta_i\alpha_i + \sum_{i\in J_2}\gamma_i\alpha_i = g(x)+g(y)$$
Si ahora $\lambda\in\mathbb{R}$:
$$g(\lambda x) = g\left(\sum_{i\in J}\lambda_i\beta_i x_i\right) = \sum_{i\in J}\lambda\beta_i\alpha_i = \lambda\sum_{i\in J}\beta_i\alpha_i = \lambda g(x)$$
- Por 2 sabemos que existe $M\geqslant 0$ de forma que:
$$|g(x)| = \left|\sum_{i\in J}\beta_i\alpha_i\right| \leqslant M\left\|\sum_{i\in J}\beta_i x_i\right\| = M\|x\|$$

Tenemos por tanto que $g\in G^*$ (en particular, al probar que g es continua hemos probado que $\|g\|\leqslant M$), y por un Corolario del Teorema de Hahn-Banach, existe $f\in E^*$ de forma que $f\big|_G = g$ y $\|f\| = \|g\|$. Tenemos pues que:
$$f(x_i) = g(x_i) = \alpha_i \qquad \forall i\in I$$

Ejercicio 4.1.11. Sea E un espacio normado y sea $M>0$. Fijados n elementos $f_1,\ldots,f_n\in E^*$ y n números reales $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in E$ de forma que:

$$\|x_\varepsilon\| \leqslant M + \varepsilon \qquad \text{y} \qquad f_i(x_\varepsilon) = \alpha_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

2. Para toda elección de n números reales $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leqslant M \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|$$

(**Pista:** Para la prueba $2 \Longrightarrow 1$ considera primero el caso en el que las aplicaciones f_i son linealmente independientes)
Compara este ejercicio con el anterior.

$1 \Longrightarrow 2)$ Dados $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, como E^* es un espacio vectorial, podemos considerar la aplicación:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \in E^*$$

Para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar el x_ε que nos da 1, con lo que:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x_\varepsilon)\right| = \left|\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right)(x_\varepsilon)\right| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\| \|x_\varepsilon\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\| (M+\varepsilon)$$

De donde deducimos la desigualdad solicitada.

$2 \Longrightarrow 1)$

Ejercicio 4.1.12. Sea E un espacio vectorial, dadas n funcionales lineales $f_1, \ldots, f_n$ en E^* y n números reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

1. Existe algún $x \in E$ de forma que $f_i(x) = \alpha_i$.

2. Para toda elección $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i = 0$$

Por doble implicación:

$\Longrightarrow)$ Para esta implicación, si tomamos $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ cumpiendo la primera igualdad, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right)(x) = 0$$

$\Longleftarrow$) Para esta, sea $F : E \to \mathbb{R}^N$ dada por:

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \qquad \forall x \in E$$

Definimos:

$$V = ImF = \{F(x) : x \in E\}$$

Como tenemos que $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i f_i = 0$, tenemos para todo $x \in E$ que:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x) = 0 = \beta_1 f_1(x) + \ldots + \beta_n f_n(x) = \langle \beta, F(x) \rangle$$

Con $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Tenemos por tanto que $\beta \in V^\perp$:

$$V^\perp = \{\beta \in \mathbb{R}^N : \langle \beta, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V\}$$

Como tenemos que $\langle \beta, \alpha \rangle = 0$, tenemos que α es ortogonal a $\beta \in V^\perp$, con lo que $\alpha \in (V^\perp)^\perp = V$.

Ejercicio 4.1.13.

Ejercicio 4.1.14.

Ejercicio 4.1.15. Sea E un espacio normado y $C \subset E$ convexo con $0 \in C$. Consideramos:

$$C^* = \{f \in E^* : \langle f, x \rangle \leqslant 1 \quad \forall x \in C\}$$
$$C^{**} = \{x \in E : \langle f, x \rangle \leqslant 1 \quad \forall f \in C^*\}$$

Se pide:

1. Probar que $C^{**} = \overline{C}$.

   $\subseteq$) Para esta inclusión:

   Opcion 1. Podemos probarlo directamente:
   Si $x \in \overline{C}$, existe entonces una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C con $\{x_n\} \to x$. Sea $f \in C^*$, tenemos entonces que:

   $$\langle f, x_n \rangle \leqslant 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Y como f es continua, tenemos que $\{\langle f, x_n \rangle\} \to \langle f, x \rangle$, por lo que ha de ser $\langle f, x \rangle \leqslant 1$, de donde $x \in C^{**}$.

   Opcion 2. Veamos que $C \subset C^{**}$ y que C^{**} es cerrado:

   - Si $x \in C$ y tomamos $f \in C^*$ tenemos entonces que $\langle f, x \rangle \leqslant 1$, por lo que $x \in C^{**}$.
   - Podemos ver:

     $$C^{**} = \bigcap_{f \in C^*} \{x \in E : \langle f, x \rangle \leqslant 1\}$$

     donde cada uno de dichos conjuntos es la preimagen por una función continua de un conjunto cerrado, luego C^{**} es cerrado, como intersección de conjuntos cerrados.

Por lo que $\overline{C} \subset C^{**}$.

$\supseteq$) Supongamos que existe $x_0 \in C^{**} \setminus \overline{C}$, tenemos que $\{x_0\}$ es compacto y $\overline{C}$ cerrado, por lo que por la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach, existen $f_0 \in E^*$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ de manera que:

$$\langle f_0, x\rangle < \alpha_0 < \langle f_0, x_0\rangle \qquad \forall x \in \overline{C}$$

Sabemos por hipótesis que $0 \in C \subset \overline{C}$, por lo que:

$$0 = \langle f_0, 0\rangle < \alpha_0$$

Podemos tomar $f = \frac{1}{\alpha_0} f_0$, con lo que:

$$\frac{1}{\alpha_0}\langle f_0, x\rangle < 1 < \frac{1}{\alpha_0}\langle f_0, x_0\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle f, x\rangle < 1 < \langle f, x_0\rangle \qquad \forall x \in C$$

por lo que $f \in C^*$, pero esto es una contradicción, pues $x_0 \in C^{**}$, que venía de suponer que existe $x_0 \in C^{**} \setminus \overline{C}$.

2. ¿Qué le sucede a C^* si C es un subespacio vectorial de E?.

Bajo estas condiciones, si $x \in C$, entonces $\lambda x \in C$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo que:

$$C^* = \{f \in E^* : \langle f, \lambda x\rangle \leqslant 1 \quad \forall x \in C\}$$

Por lo que:

$$\langle f, \lambda x\rangle \leqslant 1 \overset{f\in E^*}{\Longrightarrow} \lambda\langle f, x\rangle \leqslant 1 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si fuese $\langle f, x\rangle \neq 0$, tenemos por tanto que:

- $\lambda \leqslant \frac{1}{\langle f,x\rangle}$
- $\lambda \geqslant \frac{1}{\langle f,x\rangle}$

en ambos casos se llega a contradicción, por lo que ha de ser $\langle f, x\rangle = 0$. Para todo $x \in C$, y por definición de C^*:

$$C^* = \{f \in E^* : \langle f, x\rangle = 0 \quad \forall x \in C\} = an(C)$$

A veces se llama a $an(C)$ por $C^\perp$, ya que en espacios de Hilbert realmente los elementos del dual son correspondientes por cada vector.

4.2. Principio de acotación uniforme y Tª de la gráfica cerrada

Ejercicio 4.2.1. Continuidad de las funciones convexas.
Sea E un espacio de Banach y sea $\varphi : E \to]-\infty, +\infty]$ una función convexa secuencialmente semicontinua inferiormente. Supón que $x_0 \in \operatorname{Int} D(\varphi)$.

Antes de comenzar con el ejercicio:

- $D(\varphi) = \{x \in E : \varphi(x) < +\infty\}$.
- Que φ sea convexa significa que:

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leqslant t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \qquad \forall x, y \in E, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- Que φ sea secuencialmente semicontinua inferiormente significa que:

$$\{x_n\} \to x \Longrightarrow \varphi(x) \leqslant \liminf \varphi(x_n)$$

1. Prueba que existen dos constantes $R > 0$ y M de forma que:

$$\varphi(x) \leqslant M \qquad \forall x \in E \quad \text{con} \quad \|x - x_0\| \leqslant R$$

(**Pista:** Dado un $\rho > 0$ apropiado, considera los conjuntos

$$F_n = \{x \in E : \|x - x_0\| \leqslant \rho \quad \text{y} \quad \varphi(x) \leqslant n\})$$

Solución. Como $x_0 \in \operatorname{Int} D(\varphi)$, tenemos que existe $\rho > 0$ de forma que $\overline{B}(x_0, \rho) \subset D(\varphi)$. Consideramos:

$$F_n = \left\{x \in \overline{B}(x_0, \rho) : \varphi(x) \leqslant n\right\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tenemos que:

- Para cada $n \in \mathbb{N}$ veamos que F_n es cerrado, ya que si $\{x_m\} \to x$ con $x_m \in F_n \quad \forall m \in \mathbb{N}$ y $x \in E$ tendremos entonces que $x \in \overline{B}(x_0, \rho)$ por ser este conjunto cerrado y:

$$\varphi(x) \leqslant \liminf \varphi(x_n) \leqslant n$$

  Por lo que $x \in F_n$.
- Como $\overline{B}(x_0, \rho) \subset D(\varphi)$, es claro que:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \overline{B}(x_0, \rho)$$

Por el Lema de Baire, tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que $\operatorname{Int} F_m \neq \emptyset$, por lo que existen $x_1 \in \operatorname{Int} F_m$ y $r > 0$ de forma que $\overline{B}(x_1, r) \subset F_m$. Es decir:

$$\varphi(x) \leqslant m \qquad \forall x \in \overline{B}(x_1, r)$$

Sea ahora $x \in \overline{B}(x_0, {}^r\!/_2)$ tenemos que existe $z \in \overline{B}(0,1)$ de forma que:

$$x = x_0 + \frac{r}{2}z = x_0 + \frac{r}{2}z + \frac{x_1}{2} - \frac{x_1}{2} = \frac{1}{2}(x_1 + rz) + \frac{1}{2}(2x_0 - x_1)$$

Si usamos la convexidad de φ:

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{2}(x_1 + rz) + \frac{1}{2}(2x_0 - x_1)\right) \leqslant \frac{1}{2}\varphi(x_1 + rz) + \frac{1}{2}\varphi(2x_0 - x_1)$$

Como tenemos que $x_1 + rz \in \overline{B}(x_1, r) \subset F_m$, tenemos que:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{1}{2}\varphi(x_1 + rz) + \frac{1}{2}\varphi(2x_0 - x_1) \leqslant \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\varphi(2x_0 - x_1)$$

Por lo que tomando:

$$R = \frac{r}{2}, \qquad M = \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\varphi(2x_0 - x_1)$$

Tenemos que:

$$\varphi(x) \leqslant M \qquad \forall x \in \overline{B}(x_0, R)$$

2. Prueba que $\forall r < R$, $\exists L \geqslant 0$ de forma que

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant L\|x_1 - x_2\| \qquad \forall x_1, x_2 \in E \quad \text{con} \quad \|x_i - x_0\| \leqslant r, \quad i \in \{1, 2\}$$

Más precisamente, uno puede tomar $L = \frac{2(M - \varphi(x_0))}{R - r}$.

Solución. Fijado $r < R$, si tomamos $x_1, x_2 \in \overline{B}(x_0, r)$, tenemos que existen $u \in S(x_0, r)$ y $t \in [0,1]$ de forma que:

$$x_2 = tx_1 + (1-t)u$$

Por lo que usando la convexidad de φ:

$$\varphi(x_2) = \varphi(tx_1 + (1-t)u) \leqslant t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(u)$$

de donde:

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \leqslant (1-t)(\varphi(u) - \varphi(x_1)) \leqslant (1-t)(M - \varphi(x_1))$$

Si observamos ahora que:

$$x_1 - x_2 = (1-t)(u - x_1)$$

tomando normas:

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &= (1-t)\|u - x_1\| = (1-t)\|u - x_0 + x_0 - x_1\| \\ &\geqslant (1-t)\,|\|u - x_0\| - \|x_0 - x_1\|| = (1-t)(R - r) \end{aligned}$$

por lo que:

$$(1-t) \leqslant \frac{\|x_1 - x_2\|}{R - r}$$

de donde:

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \leqslant (1-t)(M - \varphi(x_1)) \leqslant \frac{M - \varphi(x_1)}{R - r}\|x_1 - x_2\|$$

Ejercicio 4.2.2. Sea E un espacio vectorial y sea $p : E \to \mathbb{R}$ una función que cumple las siguientes propiedades:

1. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$.
2. Para cada $x \in E$ fijo la función $\lambda \longmapsto p(\lambda x)$ es continua.
3. Siempre que una sucesión de puntos de E $\{y_n\}$ verifique que $\{p(y_n)\} \to 0$, entonces $\{p(\lambda y_n)\} \to 0$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de E de forma que $\{p(x_n)\} \to 0$ y $\{\alpha_n\}$ es una sucesión de números reales acotada. Probar que $p(0) = 0$ y que $\{p(\alpha_n x_n)\} \to 0$.
(**Pista:** Dado $\varepsilon > 0$, considera los conjuntos:

$$F_n = \{\lambda \in \mathbb{R} : |p(\lambda x_k)| \leqslant \varepsilon \quad \forall k \geqslant n\}$$

Deduce que si $\{x_n\}$ es una sucesión de E de forma que $\{p(x_n - x)\} \to 0$ para algún $x \in E$ y $\{\alpha_n\}$ es una sucesión de forma que $\{\alpha_n\} \to \alpha$, entonces $\{p(\alpha_n x_n)\} \to p(\alpha x)$.)

Por un lado tenemos que:

$$p(0) \leqslant p(0) + p(0) = 2p(0) \Longrightarrow p(0) \geqslant 0$$

Por otro:

$$p(0) \leqslant p(x_n) + p(-x_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

con $\{p(x_n) + p(-x_n)\} \to 0$, por lo que $p(0) \leqslant 0$, de donde tenemos que $p(0) = 0$.
Siguiendo la pista, dado $\varepsilon > 0$ definimos:

$$F_n = \{\lambda \in \mathbb{R} : |p(\lambda x_k)| \leqslant \varepsilon \quad \forall k \geqslant n\}$$

Por reducción al absurdo, supongamos que $\{p(\alpha_n x_n)\} \not\to 0$, de donde existe una parcial con $|p(\alpha_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)})| \geqslant \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{\alpha_n\}$ está acotada, el Teorema de Weierstrass nos permite encontrar una parcial convergente. Supongmos que la parcial σ verifica esto, con lo que $\{\alpha_{\sigma(n)}\} \to \alpha$. Observemos que:

- F_n es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que:

  $$F_n = \bigcap_{k \geqslant n} \{\lambda \in \mathbb{R} : |p(\lambda x_k)| \leqslant \varepsilon\}$$

  Como (2) nos dice que $\lambda \longmapsto p(\lambda x_k)$ es continua, tenemos que cada uno de dichos conjuntos son cerrados, como preimagen de un conjunto cerrado por una función continua.

- Veamos que $\bigcup_{n \geqslant 1} F_n = \mathbb{R}$. Para ello, tomamos $\lambda \in \mathbb{R}$ y como por hipótesis $\{p(\lambda x_n)\} \to 0$, con lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que:

  $$|p(\lambda x_n)| < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant n_0$$

  Luego $\lambda \in F_{n_0}$

Por el contrarrecíproco del Lema de Baire, existe $F_{\overline{n}}$ con $F_{\overline{n}}^\circ \neq \emptyset$, por lo que existen $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ de forma que

$$B(\lambda_0, \delta) \subset F_{\overline{n}}^\circ$$

En otras palabras:

$$(|p((\lambda_0 + t)x_{\sigma(k)})| \leqslant \varepsilon \quad \forall k \geqslant n_0) \quad \forall t \in]-\delta, \delta[$$

Ahora:

$$p(\alpha_{\sigma(k)} x_{\sigma(k)}) \leqslant p((\lambda_0 + \alpha_{\sigma(k)} - \alpha)x_{\sigma(k)}) + p((\alpha - \lambda_0)x_{\sigma(k)})$$

con $\{p((\alpha - \lambda_0)x_{\sigma(k)})\} \to 0$ y podemos acotar el primer sumando en valor absoluto:

$$|p((\lambda_0 + \alpha_{\sigma(k)} - \alpha)x_{\sigma(k)})| \leqslant \varepsilon$$

Luego:

$$p((\lambda_0 + \alpha_{\sigma(k)} - \alpha)x_{\sigma(k)}) \leqslant p((\lambda_0 - \alpha)x_{\sigma(k)}) + p(\alpha_{\sigma(k)} x_{\sigma(k)})$$

de donde:

$$p(x_{\sigma(k)} x_{\sigma(k)}) \geqslant p((\lambda_0 + \alpha_{\sigma(k)} - \alpha)x_{\sigma(k)}) - p((\lambda_0 - \alpha)x_{\sigma(k)})$$

de forma que el segundo sumando tiende a 0 y el primero está acotado en valor absoluto por ε, de donde deducimos:

$$p(\alpha_{\sigma(k)} x_{\sigma(k)}) \leqslant 2\varepsilon$$

Seguimos:

$$p(\alpha_n x_n) - p(\alpha x) \leqslant p(\alpha_n(x_n - x)) + \underbrace{p(\alpha_n x) - p(\alpha x)}_{\text{tiende a } 0}$$

Además, como $\{\alpha_n\}$ está acotada y $\{x_n - x\} \to 0$, nos queda simplemente acotar por debajo para aplicar el Lema del Sandwich:

$$p(\alpha_n x) \leqslant p(\alpha_n(x - x_n)) + p(\alpha_n x_n)$$

de donde:

$$p(\alpha_n x) - p(\alpha_n(x_n - x)) - p(\alpha x) \leqslant p(\alpha_n x_n) - p(\alpha x)$$

de donde $\{p(\alpha_n x_n)\} \to p(\alpha x)$.

Ejercicio 4.2.3. Sean E y F dos espacios de Banach y $\{T_n\}$ una sucesión en $L(E, F)$. Supongamos que para todo $x \in E$ se tiene que $\{T_n x\}$ converge a un cierto límite Tx. Probar que si $\{x_n\} \to x$ en E, entonces $\{T_n(x_n)\} \to Tx$ en F.

Dado $x \in E$, como $\{T_n x\}$ es convergente a Tx tenemos entonces que $\{T_n x\}$ es acotada, con lo que:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x\| < \infty$$

Por el Principio de acotación uniforme, tenemos que $C = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|Tn\| < \infty$, de donde:

$$\begin{aligned}
\|T_n x_n - Tx\| &= \|T_n x_n - T_n x + T_n x - Tx\| \leqslant \|T_n x_n - T_n x\| + \|T_n x - Tx\| \\
&= \|T_n(x_n - x)\| + \|T_n x - Tx\| \leqslant C\|x_n - x\| + \|T_n x - Tx\|
\end{aligned}$$

Como $\|x_n - x\|, \|T_n x - Tx\| \to 0$, tenemos pues que $\|T_n x_n - Tx\| \to 0$, de donde $\{T_n(x_n)\} \to Tx$.

Ejercicio 4.2.4. Sean E, F dos espacios de Banach y sea $a : E \times F \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal que verifica:

1. Para cada $x \in E$, la aplicación $y \longmapsto a(x, y)$ es continua.
2. Para cada $y \in F$, la aplicación $x \longmapsto a(x, y)$ es continua.

Probar que existe una constante $C \geqslant 0$ de forma que:

$$|a(x, y)| \leqslant C\|x\|\|y\| \qquad \forall x \in E, \quad \forall y \in F$$

(**Pista:** Introduce un operador lineal $T : E \to F^*$ y prueba que T está acotada con ayuda del Corolario 2.3.3).

Opción 1. Fijado $x \in E$ definimos:

$$\begin{array}{rccc} f_x : & F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & a(x, y) \end{array}$$

y la linealidad de a en segunda variable así como la continuidad de la función $y \longmapsto a(x, y)$ nos dice que $f_x \in F^* \quad \forall x \in E$, con lo que podemos definir la función

$$\begin{array}{rccc} T : & E & \longrightarrow & F^* \\ & x & \longmapsto & f_x \end{array}$$

Queremos ver que si $B \subset E$ es un conjunto acotado entonces $T(B)$ es acotado. Para ello consideramos:

$$\langle T(B), y\rangle = \{\langle f_x, y\rangle : f_x \in T(B)\} = \{a(x, y) : x \in B\} = \{f_y(x) : x \in B\}$$

de donde:

$$|f_y(x)| \leqslant M\|x\| \qquad \forall x \in E$$

Luego por el Corolario 2.3.3 tenemos que $T(B)$ está acotado, así como que T es continua (acabamos de probar que es una aplicación acotada), por lo que existe $C \geqslant 0$ tal que $\|T(x)\| \leqslant C\|x\| \quad \forall x \in E$. Luego:

$$\|f_x\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} |f_x(y)| \leqslant C\|x\|$$

de donde:

$$\left| a\left(x, \frac{y}{\|y\|}\right) \right| \leqslant C\|x\| \Longrightarrow a(x, y) \leqslant C\|x\|\|y\|$$

Opción 2. Definimos:

$$\begin{array}{rccc} T : & E & \longrightarrow & F^* \\ & x & \longmapsto & Tx \end{array}$$

Donde el operador Tx viene dado para cada $x \in E$ por:

$$\begin{array}{rccc} Tx : & F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & a(x, y) \end{array}$$

Y vemos que:

- Como fijado $x \in E$ la aplicación $y \longmapsto a(x,y)$ es continua, Tx es continua para cada $x \in E$.
- Como a es lineal en segunda variable, Tx es lineal para cada $x \in E$, por lo que la aplicación T está bien definida (ya que $Tx \in F^*$ para cada $x \in E$).
- Como a es lineal en primera variable, T es lineal, puesto que si $x, z \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tendremos que $T(\lambda x + z) = \lambda Tx + Tz$, ya que:

$$T(\lambda x + z)(y) = a(\lambda x + z, y) = \lambda a(x,y) + a(z,y) = \lambda Tx(y) + Tz(y) \qquad \forall y \in F$$

- Veamos que T es continua usando para ello el Teorema de la Gráfica cerrada. Sea $\{(x, Tx)\}$ una sucesión de puntos de GrT convergente a cierto punto $(x, L) \in E \times F^*$, tenemos entonces que $\|x_n - x\|, \|Tx_n - L\| \to 0$. De la segunda desigualdad deducimos que para todo $y \in F$ se tiene:

$$\|a(x_n, y) - L(y)\| = \|Tx_n(y) - L(y)\| = \|(Tx_n - L)(y)\| \to 0$$

  Por lo que $\{a(x_n, y)\} \to L(y)$, pero usando que fijado $y \in F$ la aplicación $x \longmapsto a(x,y)$ es continua, teníamos que $\{a(x_n, y)\} \to a(x,y)$, por lo que ha de ser:

$$L(y) = a(x,y) = Tx(y) \qquad \forall y \in F \quad \Longrightarrow \quad L = Tx$$

  de donde GrT es cerrada, luego T es continua.

Podemos ya terminar la demostración, observando que:

$$|a(x,y)| = |Tx(y)| \leqslant \|Tx\|\|y\| \leqslant \|T\|\|x\|\|y\| \qquad \forall x \in E, \quad \forall y \in F$$

Ejercicio 4.2.5. Sea E un espacio de Banach y sea $\{\varepsilon_n\}$ una sucesión de reales positivos de forma que $\{\varepsilon_n\} \to 0$. Además, sea $\{f_n\}$ una sucesión de elementos de E^* que cumple la propiedad:

$$\begin{gathered} \exists r > 0 \ \forall x \in E \text{ con } \|x\| < r, \ \exists C(x) \in \mathbb{R} \text{ de forma que} \\ \langle f_n, x \rangle \leqslant \varepsilon_n \|f_n\| + C(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{gathered}$$

Prueba que la sucesión $\{f_n\}$ está acotada.
(**Pista:** Introduce $g_n = \frac{f_n}{(1+\varepsilon_n\|f_n\|)}$).

Consideramos:

$$g_n = \frac{f_n}{1 + \varepsilon_n \|f_n\|} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $f_n \in E^*$ tendremos también que $g_n \in E^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\exists r > 0$ tal que $\forall x \in B(0, r)$ existe $C(x) \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$f_n(x) \leqslant \varepsilon_n \|f_n\| + C(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

De esta forma:

- Si $x \in B(0,r)$, tenemos para cada $n \in \mathbb{N}$ que:

  $$g_n(x) = \frac{f_n(x)}{1+\varepsilon_n\|f_n\|} \leqslant \frac{\varepsilon_n\|f_n\| + C(x)}{1+\varepsilon_n\|f_n\|} = \frac{1+\varepsilon_n\|f_n\| + C(x) - 1}{1+\varepsilon_n\|f_n\|} = 1 + \frac{C(x)-1}{1+\varepsilon_n\|f_n\|}$$
  $$\overset{(*)}{\leqslant} 1 + C(x) - 1 = C(x)$$

  donde en $(*)$ hemos usado que $1+\varepsilon_n\|f_n\| \geqslant 1$, al ser $\varepsilon_n \in \mathbb{R}^+$.

- Si $x \in E$ con $\|x\| \geqslant r$, si consideramos $y = \frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|}$ tenemos que $y \in B(0,r)$, por lo que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos aplicar la cota anteriormente conseguida a y, y usando además que g_n es lineal obtenemos:

  $$C(y) \geqslant g_n(y) = \frac{r}{2\|x\|}g_n(x) \quad \Longrightarrow \quad g_n(x) \leqslant \frac{2\|x\|}{r}C(y)$$

En definitiva, hemos probado que:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |g_n(x)| < \infty \qquad \forall x \in E$$

Por lo que aplicando el Teorema de Banach-Steinhaus obtenemos que $C = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\| < \infty$, de donde:

$$\|g_n\| = \frac{\|f_n\|}{1+\varepsilon_n\|f_n\|} \quad \Longrightarrow \quad \|g_n\|(1+\varepsilon_n\|f_n\|) = \|f_n\|$$

Por lo que:

$$\|g_n\| = \|f_n\|(1-\varepsilon_n\|g_n\|)$$

Si observamos ahora que $\|g_n\| \leqslant C$ y que $\{\varepsilon_n\} \to 0$, tenemos que:

Para $x \in B(0,r)$ tenemos que:

$$f_n(x) \leqslant \varepsilon_n\|f_n\| + C(x)$$
$$-f_n(x) = f(-x) \leqslant \varepsilon_n\|f_n\| + C(-x)$$

de donde:

$$|f_n(x)| \leqslant \varepsilon_n\|f_n\| + \tilde{C}(x)$$

donde:

$$\tilde{C}(x) = \text{máx}\{C(x), C(-x)\}$$

- Si $x \in B(0,r)$, entonces:

  $$|g_n(x)| = \frac{|f_n(x)|}{1+\varepsilon_n\|f_n\|} \leqslant \frac{\varepsilon_n\|f_n\| + \tilde{C}(x)}{1+\varepsilon_n\|f_n\|}$$

- Si tomamos ahora $x \in E$ con $\|x\| \geqslant r$, tomamos $\lambda \in \mathbb{R}^+$ con $\lambda < \frac{r}{\|x\|}$, de donde $\|\lambda x\| < r$. Tenemos que:

  $$|g_n(x)| = \frac{1}{\lambda}|g_n(\lambda x)| \leqslant \frac{1}{\lambda}\frac{\varepsilon_n\|f_n\| + \tilde{C}(\lambda x)}{1+\varepsilon_n\|f_n\|}$$

Para ver que esta última cantidad está acotada, tomando:

$$t_n = \varepsilon_n \|f_n\| \geqslant 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

tenemos que:

$$\left|\frac{t_n + \tilde{C}(x)}{t_n + 1}\right| = \left|1 + \frac{\tilde{C}(x) - 1}{t_n + 1}\right| \leqslant 1 + \left|\frac{\tilde{C}(x) - 1}{t_n + 1}\right| \leqslant 1 + |\tilde{C}(x) - 1|$$

Tenemos pues que:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |g_n(x)| < \infty \qquad \forall x \in E$$

Por el Principio de acotación uniforme tenemos que $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\| < \infty$. Tenemos ahora:

$$\begin{aligned} M > \|g_n\| = \frac{\|f_n\|}{1 + \varepsilon_n\|f_n\|} &\Longleftrightarrow \|f_n\| < M(1 + \varepsilon_n\|f_n\|) \Longleftrightarrow \|f_n\| < M + M\varepsilon_n\|f_n\| \\ &\Longleftrightarrow \|f_n\|(1 - M\varepsilon_n) < M \end{aligned}$$

Como $\{\varepsilon_n\} \to 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geqslant m$ tenemos $M\varepsilon_n < \frac{1}{2}$, por lo que $\|f_n\| < 2M$ para $n \geqslant m$. Como $\{f_n : n < m\}$ es un conjunto finito, podemos acotar su norma por $\max\limits_{n<m} \|f_n\|$. En conclusión:

$$\|f_n\| \leqslant \max\{2M, \max_{n<m} \|f_n\|\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 4.2.6. (Operadores no lineales monótonos y localmente acotados)
Sea E un espacio de Banach y sea $D(A)$ cualquier subconjunto de E. Una aplicación (no lineal) $A : D(A) \subseteq E \to E^*$ se dice "monótona" si verifica

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geqslant 0 \qquad \forall x, y \in D(A)$$

1. Sea $x_0 \in \operatorname{Int} D(A)$. Prueba que existen dos constantes $R > 0$ y C de forma que
$$\|Ax\| \leqslant C \qquad \forall x \in D(A) \quad \text{con} \quad \|x - x_0\| < R$$
(**Pista:** Razona por reducción al absurdo y construye una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $D(A)$ de forma que $\{x_n\} \to x_0$ y $\{\|Ax_n\|\} \to \infty$. Elije $r > 0$ de forma que $B(x_0, r) \subset D(A)$. Usa la monotonía de A en x_n y en $(x_0 + r)$ con $\|x\| < r$. Aplica el Ejercicio 4.2.5).

2. Prueba la misma conclusión para un punto $x_0 \in \operatorname{Int}(\operatorname{conv} D(A))$.

3. Extiende la conclusión de la pregunta 1 al caso de que A sea multivaluada, es decir, para cada $x \in D(A)$, Ax es un conjunto no vacío de E^*, en este caso la monotonía se define como sigue:

$$\langle f - g, x - y\rangle \geqslant 0 \qquad \forall x, y \in D(A), \quad \forall f \in Ax, \quad \forall g \in Ay$$

Solución.

1. Sea $x_0 \in \operatorname{Int} D(A)$. Prueba que existen dos constantes $R > 0$ y C de forma que
$$\|Ax\| \leqslant C \qquad \forall x \in D(A) \quad \text{con} \quad \|x - x_0\| < R$$
Por reducción al absurdo, supongamos que:
$$\forall R, C \geqslant 0 \quad \exists x \in D(A) \quad \text{con} \quad \|x - x_0\| < R \quad \text{y} \quad \|Ax\| > C$$
Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$
$$\exists x_n \in D(A) \quad \text{con} \quad \|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \|Ax_n\| > C$$
Por lo que $\{x_n\} \to x_0$ y $\{\|Ax_n\|\} \to \infty$. Como $x_0 \in \operatorname{Int} D(A)$, sea $r > 0$ de forma que $B(x_0, r) \subset D(A)$, si tomamos $x \in E$ con $\|x\| < r$ tendremos entonces que:
$$\|x_0 + x - x_0\| = \|x\| < r \Longrightarrow x_0 + x \in B(x_0, r) \subset D(A)$$
Como A es monótona, tenemos que:
$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \langle Ax_n - A(x_0 + x), x_n - x_0 - x\rangle \\ &= \langle Ax_n, x\rangle + \langle Ax_n, x_n - x_0\rangle + \langle A(x_0 + x), x\rangle + \langle A(x_0 + x), x_0 - x_n\rangle \end{aligned}$$
de donde:
$$\begin{aligned} \langle Ax_n, x\rangle &\leqslant \|Ax_n\|\|x_n - x_0\| + \|A(x_0 + x)\|\|x\| + \|A(x_0 + x)\|\|x_0 - x_n\| \\ &= \|Ax_n\|\|x_n - x_0\| + \|A(x_0 + x)\|(\|x\| + \|x_0 - x_n\|) \\ &\overset{(*)}{\leqslant} \|Ax_n\| \underbrace{\|x_n - x_0\|}_{\varepsilon_n} + \underbrace{\|A(x_0 + x)\|(\|x\| + 1)}_{C(x)} \end{aligned}$$
Donde en $(*)$ hemos usado que $\|x_n - x_0\| < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Aplicando el Ejercicio 4.2.5, tenemos que $\{Ax_n\}$ está acotada, contradicción con que $\{\|Ax_n\|\} \to \infty$, por lo que tenemos el primer apartado.

2. Prueba la misma conclusión para un punto $x_0 \in \operatorname{Int}(\operatorname{conv} D(A))$.

Tenemos que $\operatorname{conv} D(A)$ es el cierre convexo de $D(A)$:
$$\operatorname{conv} D(A) = \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k : v_k \in D(A), \text{ con } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1\right\}$$
Repetiremos la misma prueba que en el apartado 1, cambiando un poco el final. Por Reducción al absurdo, de la misma forma podemos encontrar $\{x_n\} \to x_0$ con $\|x_n - x_0\| \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{\|Ax_n\|\} \to \infty$. Como $x_0 \in \operatorname{Int}(\operatorname{conv} D(A))$, sea $r > 0$ de forma que $B(x_0, r) \subset \operatorname{conv} D(A)$, si tomamos $x \in E$ con $\|x\| < r$ tendremos que $x_0 + x \in \operatorname{conv} D(A)$, por lo que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $v_1, \ldots, v_n \in D(A)$ con:
$$x_0 + x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$$

Fijado $k \in \{1, \ldots, n\}$, podemos usar la monotonía de A:

$$0 \leqslant \langle Ax_n - Av_k, x_n - v_k\rangle \Longrightarrow \langle Ax_n, x_n - v_k\rangle \geqslant \langle Av_k, x_n - v_k\rangle$$

Por lo que:

$$\lambda_k\langle Ax_n, x_n - v_k\rangle \geqslant \lambda_k\langle Av_k, x_n - v_k\rangle \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$$

de donde:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\langle Ax_n, x_n - v_k\rangle \geqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\langle Av_k, x_n - v_k\rangle$$

Vemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\langle Ax_n, x_n - v_k\rangle &= \left\langle Ax_n, \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k x_n - \lambda_k v_k)\right\rangle = \left\langle Ax_n, x_n - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k\right\rangle \\ &= \langle Ax_n, x_n - x_0 - x\rangle = \langle Ax_n, x_n - x_0\rangle - \langle Ax_n, x\rangle\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}\langle Ax_n, x\rangle &\leqslant \langle Ax_n, x_n - x_0\rangle + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\langle Av_k, v_k - x_n\rangle \\ &\leqslant \|Ax_n\|\|x_n - x_0\| + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\|Av_k\|\|v_k - x_n\|\end{aligned}$$

Pero:

$$\|v_k - x_n\| \leqslant \|v_k - x_0\| + \|x_0 - x_n\| \leqslant \|v_k - x_0\| + 1$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}\langle Ax_n, x\rangle &\leqslant \langle Ax_n, x_n - x_0\rangle + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\langle Av_k, v_k - x_n\rangle \\ &\leqslant \|Ax_n\|\|x_n - x_0\| + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\|Av_k\|\|v_k - x_n\| \\ &\leqslant \|Ax_n\| \underbrace{\|x_n - x_0\|}_{\varepsilon_n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\|Av_k\|(\|v_k - x_0\| + 1)}_{C(x)}\end{aligned}$$

Lo que nuevamente lleva a contradicción.

3. Extiende la conclusión de la pregunta 1 al caso de que A sea multivaluada.

   En este caso, queremos probar que existen $R > 0, C \geqslant 0$ de forma que:

$$\text{Si} \quad x \in D(A) \quad \text{con} \quad \|x - x_0\| < R \Longrightarrow \|f\| \leqslant C \qquad \forall f \in Ax$$

   Por reducción al absurdo, suponemos que

$$\forall R, C \geqslant 0 \quad \exists x \in D(A) \quad \text{con} \quad \|x - x_0\| < R \quad \text{y} \quad f \in Ax \quad \text{con} \quad \|f\| > C$$

Por lo que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar un elemento $x_n \in D(A)$ con $\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n}$, y $f_n \in Ax_n$ con $\|f_n\| > C$. En definitiva, tenemos $\{x_n\} \to x_0$ y $\{\|f_n\|\} \to \infty$. Sea ahora $r > 0$ de forma que $B(x_0, r) \subset D(A)$, entonces si $x \in E$ con $\|x\| < r$ tendremos que $x_0 + x \in D(A)$. Si tomamos $g \in A(x_0 + x)$ y usamos la monotonía de A:

$$\langle f_n - g, x_n - x_0 - x \rangle \geqslant 0$$

luego:

$$\begin{aligned}\langle f_n, x\rangle &\leqslant \langle f_n, x_n - x_0\rangle + \langle g, x + x_0 - x_n\rangle \leqslant \|f_n\|\|x_n - x_0\| + \|g\|\|x + x_0 - x_n\| \\ &\leqslant \|f_n\|\|x_n - x_0\| + \|g\|(\|x\| + \|x_0 - x_n\|) \leqslant \|f_n\| \underbrace{\|x_n - x_0\|}_{\varepsilon_n} + \underbrace{\|g\|(\|x\| + 1)}_{C(x)}\end{aligned}$$

Lo que nos lleva a contradicción.

Ejercicio 4.2.7. Sea $\alpha = \{\alpha_n\}$ una sucesión de números reales y sea $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n||x_n| < \infty$ para cada elemento $x = \{x_n\}$ de l_p. Prueba que $\alpha \in l_{p'}$.

Recordamos que para $1 \leqslant p < \infty$ teníamos:

$$l_p = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ tales que } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

que era un espacio normado, con la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall x \in l_p$$

Y que:

$$l_\infty = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ tales que } \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}, \qquad \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, \quad x \in l_\infty$$

Ejercicio 4.2.8. Sea E un espacio de Banach y sea $T : E \to E^*$ un operador lineal verificando que

$$\langle Tx, x \rangle \geqslant 0 \qquad \forall x \in E$$

Prueba que T es acotado.
(Se pueden aplicar dos métodos, bien usar el Ejercicio 4.2.6, bien aplicar el Teorema de la Gráfica Cerrada.)

Usando el Ejercicio 4.2.6. Es fácil ver que T es monótona, ya que:

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle = \langle T(x - y), x - y \rangle \geqslant 0 \qquad \forall x, y \in E$$

En dicho caso, por el Ejercicio 4.2.6 tenemos que para todo $x \in E$ existen $R > 0$, $C \geqslant 0$ de forma que:

$$y \in E \quad \text{con} \quad \|y - x\| < R \Longrightarrow \|Ty\| \leqslant C$$

Es decir, si $y \in B(x, R)$ tenemos entonces que $\|Ty\| \leqslant C$. Sea ahora $z \in B(0, 1)$, tenemos que:

$$\|Tz\| = \frac{\|T(Rz)\|}{R} \leqslant \frac{C}{R}$$

Por lo que $T(B(0, 1))$ es un conjunto acotado, y por una proposición vista en teoría concluimos que T es acotada.

Usando el Teorema de la Gráfica Cerrada. Sea $\{(x_n, Tx_n)\}$ una sucesión de GrT convergente a $(x, L) \in E \times E^*$, queremos ver que $L = Tx$ para concluir que GrT es cerrada. Para ello, observemos que para todo $y \in E$ tenemos:

$$0 \leqslant \langle T(x_n - y), x_n - y\rangle = \langle Tx_n - Ty, x_n - y\rangle \to \langle L - T_y, x - y\rangle$$

En particular, tomando $y = x + tz$ para $t \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$0 \leqslant \langle L - T(x + tz), -tz\rangle = \langle L - Tx - T(tz), -tz\rangle = -t\langle L - Tx, z\rangle + t^2\langle Tz, z\rangle$$

de donde:

$$t^2\langle Tz, z\rangle \geqslant t\langle L - Tx, z\rangle \qquad \forall z \in E, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- Si $t > 0$, tenemos que:

  $$t\langle Tz, z\rangle \geqslant \langle L - Tx, z\rangle \qquad \forall z \in E$$

  Por lo que tendiendo $t \to 0^+$, tenemos:

  $$0 \geqslant \langle L - Tx, z\rangle \qquad \forall z \in E$$

- Si $t < 0$, tenemos que:

  $$t\langle Tz, z\rangle \leqslant \langle L - Tx, z\rangle \qquad \forall z \in E$$

  Por lo que tendiendo $t \to 0^-$, tenemos:

  $$0 \leqslant \langle L - Tx, z\rangle \qquad \forall z \in E$$

En definitiva, tenemos que $\langle L - Tx, z\rangle = 0$ para todo $z \in E$, por lo que $L = Tx$, luego GrT es un conjunto cerrado. Por el Teorema de la gráfica cerrada, concluimos que T es continua, es decir, acotada.

Ejercicio 4.2.9. Sea E un espacio de Banach y sea $T : E \to E^*$ un operador lineal verificando

$$\langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle \qquad \forall x, y \in E$$

Prueba que T es acotado.

Usando el Ejercicio 4.2.4. Definimos $a : E \times E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$a(x, y) = \langle Tx, y\rangle \qquad \forall x, y \in E$$

Tenemos que:

- a es lineal en primera variable por ser T una aplicación lineal.
- a es lineal en segunda variable por ser Tx lineal, para cada $x \in E$.
- Fijado $x \in E$ tenemos que Tx es continua, es decir, la aplicación:

$$y \longmapsto a(x, y) = \langle Tx, y\rangle$$

  es continua.
- Fijado $y \in E$, tenemos que la aplicación Ty es continua, por lo que la aplicación:

$$x \longmapsto a(x, y) = \langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle$$

  también será continua.

Aplicando el Ejercicio 4.2.4, existe $C \geqslant 0$ de forma que:

$$|a(x, y)| \leqslant C\|x\|\|y\| \qquad \forall x, y \in E$$

De esta forma, tenemos que:

$$\|Tx\| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} |\langle Tx, y\rangle| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} |a(x, y)| \leqslant \sup_{\|y\|\leqslant 1} C\|x\|\|y\| = C\|x\| \qquad \forall x \in E$$

Por lo que T es acotado.

Usando el Teorema de la gráfica cerrada. Sea $\{(x_n, Tx_n)\}$ una sucesión de puntos de GrT convergente a $(x, L) \in E \times E^*$, buscamos probar que $Tx_n = L$ para probar que GrT es cerrado. Para ello, observamos que:

$$\langle L, z\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, z\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tz, x_n\rangle = \langle Tz, x\rangle = \langle Tx, z\rangle \qquad \forall z \in E$$

de donde deducimos que $L = Tx$, por lo que GrT es cerrada. Aplicando el Teorema de la gráfica cerrada concluimos que T es continua, luego acotada.

Ejercicio 4.2.10. Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T \in L(E, F)$ una aplicación sobreyectiva.

1. Sea $M \subset E$. Prueba que $T(M)$ es cerrado en F si y solo si $M + N(T)$ es cerrado en E.

   Donde $N(T)$ es el núcleo de T, por doble implicación tenemos que:

   $\Longleftarrow$) Si $M + N(T)$ es cerrado, entonces $E \setminus (M + N(T))$ es abierto, y como:

$$T(E \setminus (M + N(T))) = F \setminus T(M)$$

   ya que:

   $\supseteq$) Si $y \in F \setminus T(M)$, por ser T sobreyectiva existe $x \in E$ de forma que $T(x) = y$. Afirmo que $x \notin M + N(T)$, ya que si $x \in M + N(T)$ entonces existen $m \in M$, $n \in N(T)$ de forma que $x = m + n$, por lo que:

$$y = T(x) = T(m + n) = T(m) + T(n) = T(m) \in T(M)$$

   contradicción, luego $x \in E \setminus (M + N(T))$, de donde tenemos que $y \in T(E \setminus (M + N(T)))$.

$\subseteq$) Si $y \in T(E \setminus (M + N(T)))$ entonces existe $x \in E \setminus (M + N(T))$ de forma que $T(x) = y$. Si existiera $z \in M$ de forma que $T(z) = y$, tendríamos entonces que:

$$0 = y - y = T(x) - T(z) = T(x - z)$$

Por lo que existe $v \in N(T)$ de forma que $v = x - z$, de donde:

$$x = z + v \in M + N(T)$$

contradicción, luego $y \in F \setminus T(M)$.

si aplicamos ahora el Teorema de la Aplicación Abierta, obtenemos que $F \setminus T(M)$ es abierto, por lo que $T(M)$ es cerrado.

$\Longrightarrow$) Si $T(M)$ es cerrado, por ser T continua tenemos que $T^{-1}(T(M))$ es cerrado, y:

$$T^{-1}(T(M)) = M + N(T)$$

$\supseteq$) Si $x + n \in M + N(T)$, entonces:

$$T(x + n) = T(x) + T(n) = T(x) \in T(M)$$

Por lo que $x + n \in T^{-1}(T(x))$.

$\subseteq$) Si $x \in T^{-1}(T(M))$, entonces:

$$T(x) \in T(M) \Longrightarrow \exists m \in M \text{ con } T(x) = T(m)$$

de donde $T(x - m) = T(x) - T(m) = 0$. En conclusión, tenemos que:

$$x = m + x - m$$

con $m \in M$, $x - m \in N(T)$.

2. Deduce que si M es un subespacio vectorial cerrado de E y si $dimN(T) < \infty$, entonces $T(M)$ es cerrado.

   Si $dimN(T) < \infty$ tenemos entonces que $N(T)$ es un espacio vectorial de dimensión finita, luego es un conjunto cerrado. Como Además, M es un espacio vectorial cerrado, tendremos que $M + N(T)$ es cerrado, luego $T(M)$ será cerrado por el primer apartado.

En este último apartado hemos usado que:

Si E es un espacio normado y $M, N \subset E$ son subespacios vectoriales con M cerrado y N de dimensión finita, entonces $M + N$ es cerrado.

Demostración. Distingamos ciertos casos triviales que nos facilitan la prueba:

- Si $N \subset M$, entonces $M + N = M$, por lo que la prueba es trivial. Suponemos pues que $M \cap N \neq N$.

- Si $M \cap N \neq \{0\}$, entonces como N es de dimensión finita, podemos tomar una base suya B, de forma que $N = \mathcal{L}(B)$, y como $M \cap N$ es un subespacio de N ha de existir $B' \subsetneq B$ de forma que $M \cap N = \mathcal{L}(B')$, por lo que si consideramos $N' = \mathcal{L}(B \setminus B')$ tenemos que $M \cap N' = \{0\}$, con:

$$M + N = M + N'$$

  Podemos por tanto suponer que $M \cap N = \{0\}$.

Si tenemos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $M + N$ convergente a $x \in E$, queremos ver que $x \in M + N$. Para ello, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $u_n \in M$ y $v_n \in N$ de forma que:

$$x_n = u_n + v_n$$

Y la demostración se completa en dos pasos:

Ver que $\{v_n\}$ está acotada. Por reducción al absurdo, supongamos que $\{v_n\}$ no está acotada, con lo que podemos encontrar una parcial divergente $\{\|v_{\sigma(n)}\|\} \to \infty$, lo que nos dirá que (usando que $\{x_n\}$ está acotada por ser convergente):

$$\left\{ \frac{u_{\sigma(n)} + v_{\sigma(n)}}{\|v_{\sigma(n)}\|} \right\} = \left\{ \frac{x_{\sigma(n)}}{\|v_{\sigma(n)}\|} \right\} \to 0$$

Si tomamos:

$$w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

tenemos que $\|w_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y que $w_n \in N \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Es decir, una sucesión acotada en un espacio de dimensión finita, propiedad que también cumple $\{w_{\sigma(n)}\}$, por lo que ha de existir una parcial de esta última, $\{w_{\gamma(n)}\}$ que sea convergente a cierto $w \in E$ (por el Teorema de Bolzano-Weierstrass). Notemos que por ser N cerrado ha de ser $w \in N$, así como $\|w\| = 1$ por ser $\|\cdot\|$ una aplicación continua. Tenemos entonces que:

$$\left\{ \frac{u_{\gamma(n)}}{\|v_{\gamma(n)}\|} + w_{\gamma(n)} \right\} = \left\{ \frac{x_{\gamma(n)}}{\|v_{\gamma(n)}\|} \right\} \to 0$$

Fijado $\varepsilon > 0$, esta última convergencia nos da $n_1 \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$\left\| \frac{u_{\gamma(n)}}{\|v_{\gamma(n)}\|} + w_{\gamma(n)} \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geqslant n_1$$

y la convergencia $\{w_{\gamma(n)}\} \to w$ nos da $n_2 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\|w_{\gamma(n)} - w\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geqslant n_2$$

Por lo que tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ obtenemos que:

$$\left\| \frac{u_{\gamma(n)}}{\|v_{\gamma(n)}\|} + w \right\| \leqslant \left\| \frac{u_{\gamma(n)}}{\|v_{\gamma(n)}\|} + w_{\gamma(n)} \right\| + \|w_{\gamma(n)} - w\| < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant n_0$$

Es decir:

$$\left\{ \frac{u_{\gamma(n)}}{\|v_{\gamma(n)}\|} + w \right\} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \frac{u_{\gamma(n)}}{\|v_{\gamma(n)}\|} \right\} \to -w$$

Y como M es cerrado y la sucesión que tenemos es de puntos de M deducimos que $-w \in M$, por lo que $w \in M$ por ser M un espacio vectorial. En definitiva, hemos probado que si la sucesión $\{v_n\}$ no está acotada, entonces podemos encontrar (recordamos que $\|w\| = 1$) $0 \neq w \in M \cap N$, contradicción con que $M \cap N = \{0\}$.

Ver que $x \in M + N$**.** Una vez sabemos que $\{v_n\}$ está acotada, como $dimN < \infty$, por Bolzano-Weierstrass ha de existir una parcial $\{v_{\alpha(n)}\}$ convergente a cierto $v \in E$, y por ser N de dimensión finita tenemos que es cerrado, con lo que $v \in N$. Fijado $\varepsilon > 0$, la convergencia $\{u_{\alpha(n)} + v_{\alpha(n)}\} \to x$ nos da $n_1 \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$\|u_{\alpha(n)} + v_{\alpha(n)} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geqslant n_1$$

y la convergencia $\{v_{\alpha(n)}\} \to v$ nos da $n_2 \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$\|v_{\alpha(n)} - v\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geqslant n_2$$

por lo que tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\|u_{\alpha(n)} - x + v\| &= \|u_{\alpha(n)} + v_{\alpha(n)} - x - (v_{\alpha(n)} - v)\| \\ &\leqslant \|u_{\alpha(n)} + v_{\alpha(n)} - x\| + \|v_{\alpha(n)} - v\| < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant n_0\end{aligned}$$

Por lo que $\{u_{\alpha(n)}\} \to x - v$ y como M es cerrado, $x - v \in M$. En definitiva, tenemos que:

$$x = x - v + v$$

con $x - v \in M$ y $v \in N$, por lo que $x \in M + N$.

□

Ejercicio 4.2.11. Sea E un espacio de Banach y $F = l^1$, sea $T \in L(E, F)$ una aplicación sobreyectiva. Prueba que existe $S \in L(F, E)$ de forma que $T \circ S = I_F$, es decir, S es la inversa por la derecha de T.
(**Pista:** Intenta definir S de forma explícita usando la base canónica de l^1.)

Recordamos que:

$$l^1 = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ tales que } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}, \qquad \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|, \quad x \in l^1$$

Consideramos:

$$\mathcal{B} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\} \subset l^1$$

donde para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $e_k(i) = \delta_{k,i} \quad \forall i \in \mathbb{N}$. De esta forma, es evidente que $\|e_k\| = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Como T es sobreyectiva y l^1 es de Banach, el Teorema de la aplicación abierta nos dice que T es abierta. Como $0 \in T(B(0,1))$, existe $R \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\overline{B}(0,R) \subset T(B(0,1))$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $Re_k \in \overline{B}(0,R)$, por lo que existe $v_k \in B(0,1)$ de forma que $T(v_k) = Re_k$, de donde tomando:

$$u_k = \frac{v_k}{R}$$

tenemos que $T(u_k) = e_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Definimos $S : l^1 \to E$ por:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n \qquad \forall x \in l^1$$

Que está bien definida (la suma es convergente), porque:

$$\|x_n u_n\| = |x_n| \|u_n\| = \frac{1}{R} |x_n| \|v_n\| \leqslant \frac{|x_n|}{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

De donde:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n u_n\| \leqslant \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$$

Por lo que la suma de la definición de S es absolutamente convergente, luego es convergente por ser E de Banach. Además:

- S es lineal, ya que si $x, y \in l^1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} S(\lambda x + y) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n + y_n) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n u_n + y_n u_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n u_n \\ &= \lambda S(x) + S(y) \end{aligned}$$

- S es continua, ya que:

$$\|S(x)\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n \right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n u_n\| \leqslant \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \frac{1}{R} \|x\| \qquad \forall x \in l^1$$

Finalmente, vemos que:

$$\begin{aligned} T(S(x)) &= T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n \right) = T\left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k u_k \right) \overset{T \text{ cont.}}{=} \lim_{n \to \infty} T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k u_k \right) \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k T(u_k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n T(u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n = x \qquad \forall x \in l^1 \end{aligned}$$

Ejercicio 4.2.12. Sean E, F dos espacios de Banach a cuyas normas denotamos por $\|\cdot\|$. Sea $T \in L(E, F)$ de forma que ImT es cerrado y $dim \ker T < \infty$. Sea $|\cdot|$ otra norma definida sobre E que cumple:

$$|x| \leqslant M \|x\| \qquad \forall x \in E$$

Prueba que existe una constante C de forma que:

$$\|x\| \leqslant C(\|Tx\| + |x|) \qquad \forall x \in E$$

(**Pista:** Razonar por reducción al absurdo)

Ejercicio 4.2.13. Sean E y F dos espacios de Banach, probar que el conjunto

$$\Omega = \{T \in L(E, F) : T \text{ admite una inversa por la izquierda}\}$$

es abierto en $L(E, F)$.
(**Pista:** probar primero que el conjunto

$$\mathcal{O} = \{T \in L(E, F) : T \text{ es biyectiva}\}$$

es abierto en $L(E, F)$.)

Ejercicio 4.2.14.

Ejercicio 4.2.15. Sean E_1, E_2 y F tres espacios de Banach, consideramos $T_1 \in L(E_1, F)$ y $T_2 \in L(E_2, F)$ de forma que:

$$ImT_1 \cap ImT_2 = \{0\} \qquad \text{y} \qquad ImT_1 + ImT_2 = F$$

Prueba que ImT_1 y ImT_2 son cerrados.

Ejercicio 4.2.16. Sea E un espacio de Banach y sean G y L dos subespacios cerrados de E. Si existe una constante C de forma que:

$$dist(x, G \cap L) \leqslant C dist(x, L) \qquad \forall x \in G$$

Prueba que $G + L$ es cerrado.