

# Cálculo I

## Examen V

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Cálculo I

## Examen V

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2023-2024

**Asignatura** Cálculo I.

**Curso Académico** 2022-23.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Jose Luis Gámez Ruiz.

**Descripción** Convocatoria Ordinaria.

**Fecha** 19 de enero de 2023.

**Ejercicio 1** (2.5 puntos). Escribe los siguientes enunciados:

1. Definición de sucesión Convergente:

Una sucesión de números reales  $\{x_n\}$  se dice “convergente” si  $\exists L \in \mathbb{R}$  tal que  $\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : \text{si } n \in \mathbb{N}, n \geq m, \text{ se tiene } |x_n - L| < \varepsilon$ .

2. Criterio del cociente para sucesiones:

Sea  $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{Si } \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \rightarrow L \implies \{ \sqrt[n]{a_n} \} \rightarrow L \quad (L \in \mathbb{R}_0^+ \text{ o } “+\infty”)$$

3. Criterio de condensación para series:

Sean  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , con  $a_n$  decreciente. Entonces:

$$\sum_{n \geq 1} a_n \text{ convergente} \iff \sum_{n \geq 1} 2^n a_{2^n} \text{ convergente}$$

4. Definición de función continua en un punto  $a$  de su dominio:

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in A$ . Se dice “ $f$  continua en el punto  $a$ ” si

$$\forall \{a_n\} \rightarrow a \implies \{f(a_n)\} \rightarrow f(a) \quad (a_n \in A \forall n \in \mathbb{N})$$

5. Teorema de Bolzano-Weierstrass:

“La imagen, por una función continua, de un intervalo cerrado y acotado, es un intervalo cerrado y acotado”

En particular, si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces  $f$  alcanza un máximo absoluto y un mínimo absoluto.

**Ejercicio 2** (2 puntos). Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:

1.  $x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$  (1 punto)

Probaré que  $\{x_n\}$  decreciente y minorada por  $\sqrt{2}$   
(2) (1)

- (1) ¿  $x_n \geq \sqrt{2} \forall n \in \mathbb{N}$  ? (por inducción)

- $n = 1$   $x_1 = 2 \geq \sqrt{2}$ . Sí
- $x_n \geq \sqrt{2}$   $\implies x_{n+1} \geq \sqrt{2}$ ?  
*hip. de ind*

$$x_{n+1} \geq \sqrt{2} \iff \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \geq \sqrt{2} \iff x_n + \frac{2}{x_n} \geq 2\sqrt{2} \iff x_n^2 + 2 \geq 2\sqrt{2}x_n$$

$$\iff x_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}x_n \geq 0 \iff (x_n - \sqrt{2})^2 \geq 0 \quad \text{Sí}$$

Luego  $x_{n+1} \geq \sqrt{2}$  y concluimos (1).

(2) ¿ $\{x_n\}$  decreciente?  $\iff x_{n+1} \leq x_n \forall n \in \mathbb{N}$ ?

$$\begin{aligned} x_{n+1} \leq x_n &\iff \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \leq x_n \iff x_n + \frac{2}{x_n} \leq 2x_n \iff \frac{2}{x_n} \leq x_n \\ &\iff 2 \leq x_n^2 \quad \text{Sí, por (1)} \end{aligned}$$

Así concluimos (2).

Por ser  $\{x_n\}$  decreciente y minorada (por  $\sqrt{2}$ )  $\implies \{x_n\}$  converge.

Sea  $L = \lim\{x_n\} \implies \{x_{n+1}\} \rightarrow L$  (parcial)

$$\left. \begin{array}{l} x_{n+1} \rightarrow L \\ \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \rightarrow \frac{L + \frac{2}{L}}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{del lim}]{\text{(unicidad)}} L = \frac{L + \frac{2}{L}}{2} \implies L^2 = 2 \implies \left\{ \begin{array}{l} L = \sqrt{2} \\ \cancel{L = -\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

(el “candidato”  $-\sqrt{2}$  se descarta, pues  $x_n \geq \sqrt{2} \forall n \in \mathbb{N}$ )

En conclusión,  $\{x_n\} \searrow \sqrt{2}$

2.  $\left\{ \frac{n \log n}{\log(n!)} \right\}$  (1 punto)

Llamamos  $a_n = n \log(n)$ ,  $b_n = \log(n!)$   $\nearrow \nearrow +\infty$  (puedo aplicar Stolz)

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \frac{(n+1) \log(n+1) - n \log(n)}{\log(n+1)! - \log(n)} = \frac{\log(n+1) + \log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\log(n+1)} = \\ &= 1 + \frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\log(n+1)} \xrightarrow{(*)} 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Donde en (\*) he aplicado que  $\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \rightarrow \log(e) = 1$  y que  $\log(n+1) \rightarrow +\infty$

**Ejercicio 3** (3 puntos). Sea la sucesión  $\{a_n\}$  verificando  $|a_n - 1| \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Se pide:

1. Probar que la serie  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{(a_n - 1)}{n}$  converge absolutamente.

La pregunta se reduce a probar si  $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n - 1|}{n}$  converge. Por “comparación”, usando la hipótesis:

$$\frac{|a_n - 1|}{n} \leq \frac{\frac{1}{n}}{n} = \frac{1}{n^2}$$

Así, por ser  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  convergente  $\xrightarrow{\text{(crit.comp.)}} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{(a_n - 1)}{n}$  convergente.

2. Estudiar la convergencia absoluta y la convergencia de la serie  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{a_n}{n}$

- La convergencia absoluta es ver si  $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$  converge.

Comparación (criterio límite) con la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

$$\frac{\frac{a_n}{n}}{\frac{1}{n}} = a_n \longrightarrow 1 \in \mathbb{R}^+$$

Así, por el criterio límite de comparación,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ no converge} \implies \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} \text{ no converge}$$

Luego  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{a_n}{n}$  no converge absolutamente

- ¿converge?

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{a_n}{n} = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{(a_n - 1)}{n} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}$$

Por el apartado anterior tenemos que  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{(a_n - 1)}{n}$  converge absolutamente, luego converge.

Por el criterio de Leibnitz tenemos que  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}$  converge.

Al ser  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{a_n}{n}$  suma de series convergentes tenemos que converge.

**Ejercicio 4** (2.5 puntos). Sea  $f : [0, 1] \cup \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a & (\text{si } x = 0) \\ \frac{x^2}{1+x^2} & (\text{si } 0 < x \leq 1) \\ b & (\text{si } x = 2) \end{cases}$$

- (1 punto) ¿Para qué valores de  $a$  y  $b$  es  $f$  continua?

- Continuidad en el punto  $0 \in A$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = a \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} f \text{ continua en } 0 \iff a = 0$$

- $f$  continua en cualquier punto de  $]0, 1]$  (por el carácter local de la continuidad)
- Continuidad en el punto  $2 \in A$   
2 es un punto aislado del dominio y, por tanto,  $f$  es continua en 2 (independientemente del valor de  $b$ )

Conclusión:

$$f \text{ continua} \iff a = 0$$

2. (1 punto) ¿Para qué valores de  $a$  y  $b$  es  $f$  monótona?

Observemos que  $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$  es creciente en  $]0, 1]$ .

Así,  $f_{|_{]0,1]}}$  es creciente. Para que  $f$  creciente en  $A$  debe ocurrir que:

$$\begin{array}{lll} a = f(0) \leq f(x) \quad \forall x \in ]0, 1] & \iff & a \leq 0 \\ b = f(2) \geq f(1) = \frac{1}{2} & \iff & b \geq \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(En ningún caso podrá} \\ \text{ser } f \text{ decreciente)} \end{array}$$

3. (0.5 puntos) Calcular la imagen de  $f$ .

$$Im(f) = \{a, b\} \cup f(]0, 1])$$

Por el T.V.I. y la monotonía de  $f_{|_{]0,1]}}$  sabemos que  $f(]0, 1]) = ]0, \frac{1}{2}]$ , luego

$$Im(f) = \{a, b\} \cup \left]0, \frac{1}{2}\right]$$