Ecuaciones Diferenciales I

Examen XIV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen XIV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial 2.

Fecha 19 de Diciembre de 2023.

Ejercicio 1. Se consideran las funciones $f_1, f_2 :]0,1[\to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f_1(t) = 1 \quad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0, 2/3], \\ 0 & \text{si } t \in]2/3, 1[. \end{cases}$$

¿Son estas funciones linealmente independientes en el intervalo $]0,1[$?

Aplicando la definición de independencia lineal, buscamos $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = 0, \quad \forall t \in]0,1[.$$

Tomando $t \in]2/3, 1]$, se tiene:

$$0 = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \Longrightarrow c_1 = 0.$$

Tomando $t \in]0, 2/3]$, se tiene:

$$0 = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = 0 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = c_2 \Longrightarrow c_2 = 0.$$

Por tanto, $c_1 = c_2 = 0$, lo que implica que f_1 y f_2 son linealmente independientes en el intervalo $]0,1[$.

Ejercicio 2. Se considera la ecuación diferencial

$$ax + by + (cx + dy)y' = 0,$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$. ¿En qué casos se puede afirmar que $\mu(x,y) = e^{x+y}$ es un factor integrante?

Definimos:

$$\begin{array}{rrcl} P: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & ax + by \\ Q: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & cx + dy \end{array}$$

Sea Ω el dominio del factor integrante. Para que $\mu(x,y)$ sea un factor integrante de la ecuación diferencial, se debe cumplir que:

- $\mu(x,y) \neq 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega$. Si $\mu(x,y) = e^{x+y}$, lo tenemos garantizado.
- Se cumpla la condición de exactitud tras multiplicar la ecuación diferencial por $\mu(x,y)$:
$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}.$$

Calculamos las derivadas parciales de la condición de exactitud:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y} P + \mu \frac{\partial P}{\partial y},$$
$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Por tanto, la condición de exactitud se traduce en:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P - \frac{\partial \mu}{\partial x}Q = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

En nuestro caso concreto, las derivadas son:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = e^{x+y} = \mu(x,y), && \frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) = e^{x+y} = \mu(x,y),\\
&\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = b, && \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = c.
\end{aligned}$$

Por tanto, en nuestro caso concreto, la condición de exactitud se traduce en:

$$\mu(x,y)(ax+by-cx-dy) = \mu(x,y)(c-b) \qquad \forall (x,y)\in\Omega.$$

Como $\mu(x,y)\neq 0$ para todo $(x,y)\in\Omega$, la condición de exactitud queda:

$$x(a-c)+y(b-d) = c-b \qquad \forall (x,y)\in\Omega$$

Por tanto, lo único que hemos de imponer sobre los coeficientes de la ecuación diferencial es que se cumpla la ecuación siguiente:

$$x(a-c)+y(b-d) = c-b \qquad \forall (x,y)\in\Omega$$

Como $1, x, y$ son linealmente independientes, tenemos que:

$$\begin{cases}
a-c &= 0,\\
b-d &= 0,\\
c-b &= 0.
\end{cases}$$

Por tanto, tenemos que $a=b=c=d$. Por tanto, lo único que hemos de imponer sobre los coeficientes de la ecuación diferencial es:

$$a=b=c=d.$$

Ejercicio 3. Dada una función $a\in C(\mathbb{R})$, se supone que φ_1,φ_2 son las soluciones de la ecuación $x''+a(t)x=0$ que cumplen las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(0)=1, && \varphi_1'(0)=0,\\
&\varphi_2(0)=0, && \varphi_2'(0)=1.
\end{aligned}$$

Demuestra que la función

$$x(t) = \varphi_2(t)\int_0^t e^s\varphi_1(s)\ ds - \varphi_1(t)\int_0^t e^s\varphi_2(s)\ ds + 2024\varphi_2(t)$$

pertenece a $C^2(\mathbb{R})$ y encuentra una ecuación diferencial de la que es solución.

El dominio de la ecuación diferencial descrita en el enunciado es $\mathbb{R}^2$. Por tanto, por ser φ_1,φ_2 las soluciones de dicha ecuación diferencial para distintas condiciones iniciales, por el Teorema de Existencia y Unicidad visto en el Capítulo 4, tenemos que dichas soluciones están definidas en todo $\mathbb{R}$. Además, como φ_1, φ_2 son soluciones, tenemos que:

$$\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(\mathbb{R}).$$

En particular, por ser $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\mathbb{R})$, por el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos que dichas integrales son de clase 1. Por tanto, al x suma de productos de funciones de clase C^1, tenemos que $x \in C^1(\mathbb{R})$. Para argumentar que $x \in C^2(\mathbb{R})$, hemos de calcular su derivada (notemos que para derivar las integrales usamos el Teorema Fundamental del Cálculo):

$$x'(t) = \varphi_2'(t) \int_0^t e^s \varphi_1(s)\ ds + \cancel{\varphi_2(t) e^t \varphi_1(t)} - \varphi_1'(t) \int_0^t e^s \varphi_2(s)\ ds - \cancel{\varphi_1(t) e^t \varphi_2(t)} + 2024\varphi_2'(t)$$

En primer lugar, tenemos que $\varphi_1', \varphi_2' \in C^1(\mathbb{R})$. Además, como los integrandos son producto de funciones continuas, tenemos que las integrales son de clase C^1. Por tanto, $x' \in C^1(\mathbb{R})$, de forma que $x \in C^2(\mathbb{R})$. Calculamos ahora $x''(t)$:

$$\begin{aligned}
x''(t) &= \varphi_2''(t) \int_0^t e^s \varphi_1(s)\ ds + \varphi_2'(t) e^t \varphi_1(t) - \varphi_1''(t) \int_0^t e^s \varphi_2(s)\ ds - \varphi_1'(t) e^t \varphi_2(t) + 2024\varphi_2''(t) \\
&\overset{(*)}{=} -a(t)\varphi_2(t) \int_0^t e^s \varphi_1(s)\ ds + \varphi_2'(t) e^t \varphi_1(t) + a(t)\varphi_1(t) \int_0^t e^s \varphi_2(s)\ ds - \varphi_1'(t) e^t \varphi_2(t) - 2024a(t)\varphi_2(t) \\
&= -a(t) \left[\varphi_2(t) \int_0^t e^s \varphi_1(s)\ ds - \varphi_1(t) \int_0^t e^s \varphi_2(s)\ ds + 2024\varphi_2(t)\right] + e^t[\varphi_2'(t)\varphi_1(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t)] \\
&\overset{(**)}{=} -a(t)x(t) + e^t[\varphi_2'(t)\varphi_1(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t)]
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que φ_1, φ_2 son soluciones de la ecuación diferencial, y en $(**)$ hemos usado la definición de $x(t)$. Por tanto, una ecuación diferencial de la que $x(t)$ es solución es:

$$x'' = -a(t)x + e^t[\varphi_2'(t)\varphi_1(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t)] \qquad \text{con dominio } \mathbb{R}^2$$

No obstante, veamos ahora que se puede simplificar aún más, ya que podemos conseguir que no dependa de φ_1 ni φ_2, puesto que ese término es constante. Tenemos dos opciones:

Derivando: Derivemos dicho término, que sabemos que es de clase 1 en $\mathbb{R}$ por ser producto y restas de funciones de clase C^1.

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi_2'\varphi_1 - \varphi_1'\varphi_2\right) = \varphi_2''\varphi_1 + \cancel{\varphi_2'\varphi_1'} - \varphi_1''\varphi_2 - \cancel{\varphi_1'\varphi_2'} \overset{(*)}{=} -a\varphi_2\varphi_1 + a\varphi_1\varphi_2 = 0$$

Por tanto, al ser dicha derivada nula en todo $\mathbb{R}$, tenemos que dicho término es constante. Evaluando en 0, tenemos:

$$\varphi_2'(0)\varphi_1(0) - \varphi_1'(0)\varphi_2(0) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

Usando la Fórmula de Jacobi-Liouville: Tenemos que:

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2$$

Por tanto, el término que estamos estudiando es dicho Wronskiano. Evaluando en 0, tenemos:

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Por la Fórmula de Jacobi-Liouville, como φ_1, φ_2 son soluciones de la ecuación diferencial, tenemos que:

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = W(\varphi_1, \varphi_2)(0) \cdot \exp\left(\int_0^t 0\ ds\right) = 1 \cdot e^0 = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

donde hemos empleado que el coeficiente que acompaña a x' en la ecuación original es 0.

En cualquier caso, hemos probado que dicho término es constantemente igual a 1:

$$\varphi_2'(t)\varphi_1(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t) = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Por tanto, la ecuación diferencial de la que $x(t)$ es solución es:

$$x'' = -a(t)x + e^t \qquad \text{con dominio } \mathbb{R}^2$$

No obstante, esta es no es la única solución de dicha ecuación. Aunque no sea necesario darlas, considerando la condición inicial:

$$x(0) = 0 \qquad x'(0) = 2024$$

tenemos que $x(t)$ es la única solución de la ecuación diferencial descrita que cumple dichas condiciones iniciales.

Ejercicio 4. Encuentra todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen las desigualdades

$$0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2} F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

con $F(t) = \int_0^t f(s)\ ds$.

Distinguimos en función del valor de t:

- Restringuiendo a $\mathbb{R}^-$, veamos que $f\Big|_{\mathbb{R}^-} = 0$. Como $f(t) \geqslant 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos que:

  $$\int_a^b f(t)\ dt \geqslant 0 \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$$

  Por tanto, para $t < 0$, tenemos que:

  $$F(t) = \int_0^t f(s)\ ds = -\int_t^0 f(s)\ ds \leqslant 0$$

  Por tanto, tenemos que:

  $$0 \leqslant f(t) \leqslant 0 \qquad \forall t < 0$$

  Por tanto, $f\Big|_{\mathbb{R}^-} = 0$.

- Restringuiendo a $\mathbb{R}_0^+$, veamos también que $f\Big|_{\mathbb{R}^+} = 0$.

  Como $t^2 \geqslant 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos que:

  $$\frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+0} = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

  Por tanto, buscamos las funciones f continuas tales que:

  $$0 \leqslant f(t) \leqslant 1 \cdot F(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

  Para $t > 0$, tenemos que:

  $$0 \leqslant f(t) \leqslant 1 \cdot |F(t)| \qquad \forall t \geqslant 0$$

  Por tanto, y usando un Lema visto en la demostración del Teorema de Existencia y Unicidad del Capítulo 5, tenemos que:

  $$f(t) = 0 \qquad \forall t \geqslant 0$$

  Por tanto, $f\Big|_{\mathbb{R}_0^+} = 0$.

Por tanto, la única función continua que cumple las desigualdades dadas es la función nula.

Ejercicio 5. El espacio vectorial de soluciones de la ecuación $x'' + 4x = 0$ se denota por Z_x. De igual modo, Z_y será el espacio vectorial de soluciones de $y'' + 2y' + 5y = 0$. Demuestra que la transformación

$$\Psi : Z_x \to Z_y, \quad x \mapsto y, \quad y(t) = e^{-t}x(t)$$

define un isomorfismo. Encuentra bases de Z_x y Z_y y calcula la matriz que representa a Ψ en esas bases.

Buscamos en primer lugar base de Z_x. El polinomio característico de la primera ecuación es:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 = -4 \Longleftrightarrow \lambda = \pm 2i$$

Trabajamos con el valor propio $\lambda = 2i$. Sabemos que e^{2it} es solución (compleja) de la ecuación diferencial. Tenemos que:

$$e^{2it} = \cos(2t) + i\operatorname{sen}(2t)$$

Por tanto, dos soluciones reales de la primera ecuación diferencial son:

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos(2t) \\ x_2(t) = \operatorname{sen}(2t) \end{cases}$$

Además, son linealmente independientes, ya que:

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} \cos(2t) & \operatorname{sen}(2t) \\ -2\operatorname{sen}(2t) & 2\cos(2t) \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \cos(2t) & \operatorname{sen}(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) \end{vmatrix} = 2\left(\cos^2(2t) + \operatorname{sen}^2(2t)\right) = 2 \neq 0$$

Por tanto, tenemos que:

$$\mathcal{B}_x = \{\cos(2t), \operatorname{sen}(2t)\} \qquad Z_x = \mathcal{L}\{\mathcal{B}_x\}$$

Buscamos ahora base de Z_y. El polinomio característico de la segunda ecuación es:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$$

Trabajamos con el valor propio $\lambda = -1 + 2i$. Sabemos que $e^{(-1+2i)t}$ es solución (compleja) de la ecuación diferencial. Tenemos que:

$$e^{(-1+2i)t} = e^{-t}(\cos(2t) + i\operatorname{sen}(2t))$$

Por tanto, dos soluciones reales de la segunda ecuación diferencial son:

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{-t}\cos(2t) \\ y_2(t) = e^{-t}\operatorname{sen}(2t) \end{cases}$$

Además, son linealmente independientes. Por tanto, tenemos que:

$$\mathcal{B}_y = \left\{e^{-t}\cos(2t), e^{-t}\operatorname{sen}(2t)\right\} \qquad Z_y = \mathcal{L}\{\mathcal{B}_y\}$$

Veamos ahora que Ψ es una aplicación lineal. Dados $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1, x_2 \in Z_x$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= e^{-t}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &= \lambda_1 e^{-t} x_1 + \lambda_2 e^{-t} x_2 \\ &= \lambda_1 \Psi(x_1) + \lambda_2 \Psi(x_2) \end{aligned}$$

Por tanto, Ψ es una aplicación lineal. Además, tenemos que:

$$\begin{aligned} \Psi(x_1(t)) &= e^{-t}\cos(2t) = y_1(t) \\ \Psi(x_2(t)) &= e^{-t}\operatorname{sen}(2t) = y_2(t) \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz que representa a Ψ en las bases dadas es:

$$\mathcal{M}(\Psi, \mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2$$

Por tanto, como Ψ es lineal con $|\Psi| = 1 \neq 0$, tenemos que Ψ es un isomorfismo.