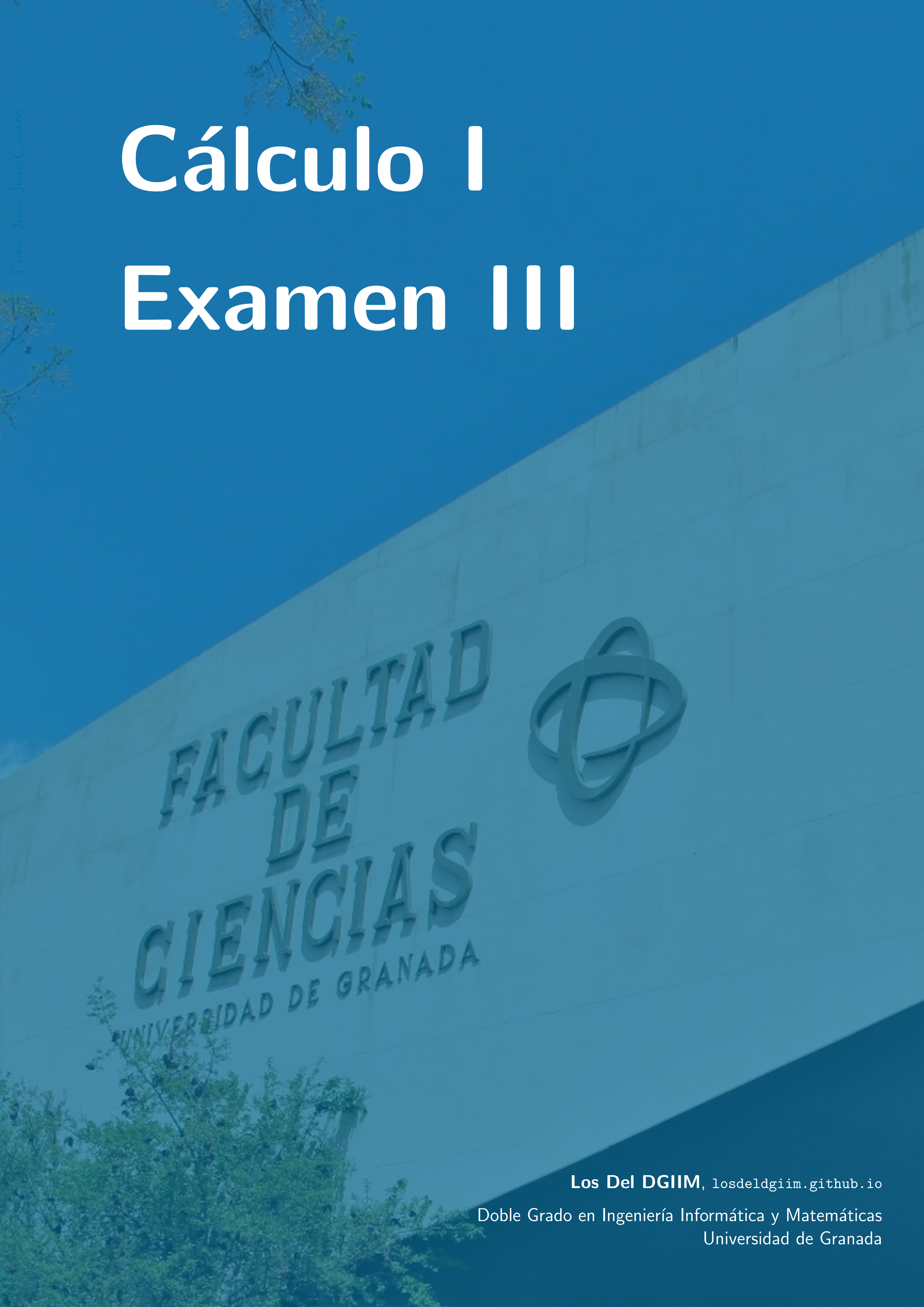
Cálculo I

Examen III



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo I
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Cálculo I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Luis Gámez Ruíz.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 24 de enero de 2024.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío.

1. Demostrar que las dos siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) A está acotado.

   b) El conjunto $|A| = \{|a| : a \in A\}$ está mayorado.

2. Probar que si A acotado entonces existe una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A, que verifica $\{|a_n|\} \to \sup |A|$. ¿Se puede conseguir que tal $\{a_n\}$ sea monótona? Justificar las respuestas.

Ejercicio 2.

1. (2 puntos) Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones calculando, en su caso, el límite:

   a) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

   b) $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{n}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\}.$

2. (1 punto) Estudiar la convergencia de la serie: $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{4^n}.$

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Sea la sucesión $\{a_n\}$ verificando $|a_n - 1| \leqslant \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Se pide:

1. Probar que la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{(a_n - 1)}{n}$ converge absolutamente.

2. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{a_n}{n}$.

Observación. Nótese que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{(a_n - 1)}{n} = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{a_n}{n} - \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{1}{n}.$

Ejercicio 4 (3 puntos)**.** Considérese la función $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} - \ln x$, $\forall x \in [1, 2]$. Responder las siguientes cuestiones, enunciando todos los teoremas que se usen.

1. Demostrar que $\exists c \in]1, 2[$ tal que $f(c) = c - 1$.

2. Determinar la imagen de f.

c) ¿Existe la inversa de f? En caso afirmativo, ¿es f^{-1} monótona?, ¿es f^{-1} continua? Justificar las respuestas.