Topología I
Examen II

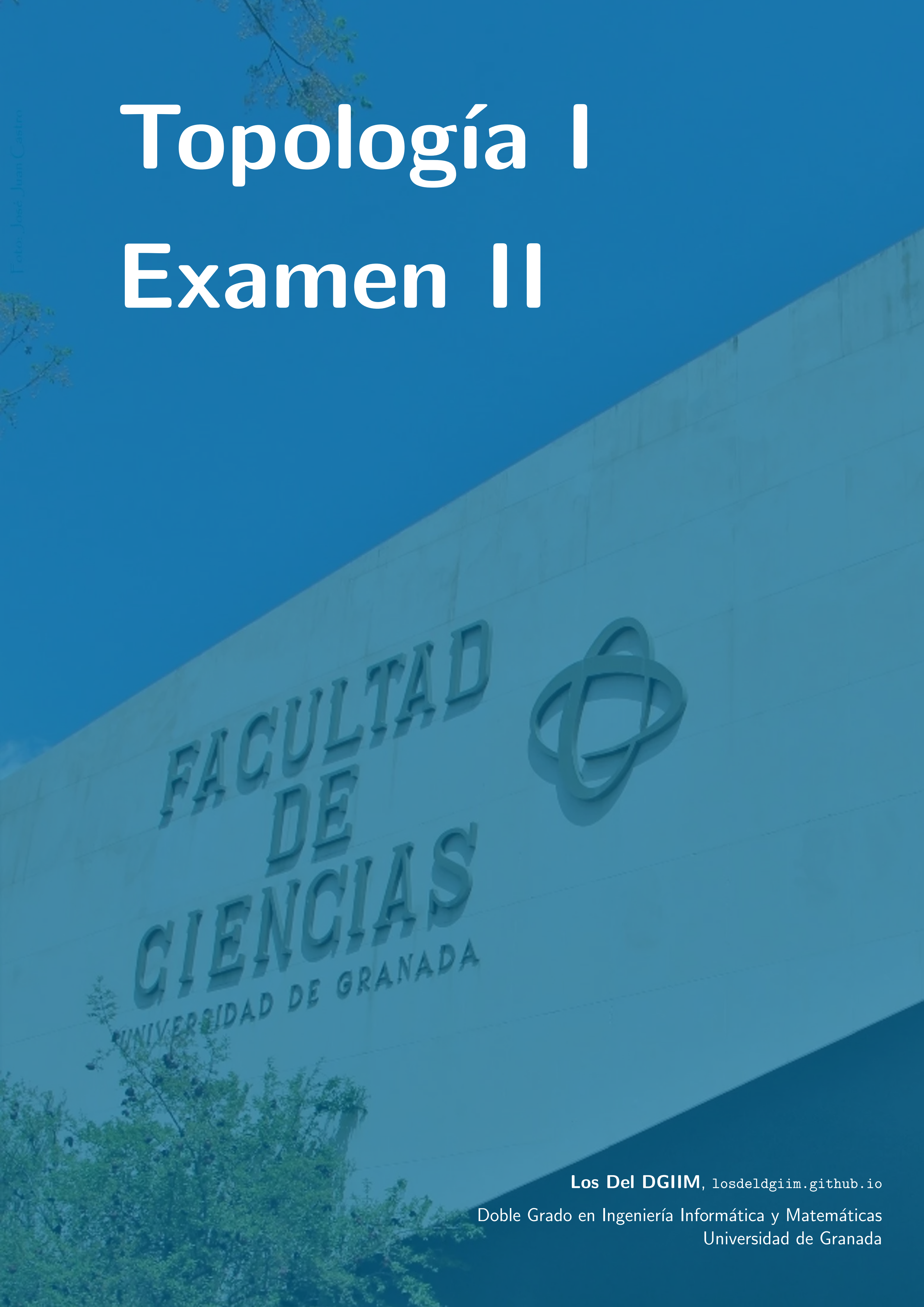

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología I
Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Antonio Gálvez López.

Descripción Parcial del Tema 2.

Fecha 21 de diciembre de 2023.

Duración 60 minutos.

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ una aplicación abierta. Demostrar que la aplicación $g : X \to \mathbb{R}$ dada por la ecuación $g(x) = \|f(x)\|$ no alcanza su máximo en X; es decir, no existe $x_0 \in X$ tal que $\|f(x_0)\| \geqslant \|f(x)\|$ para todo $x \in X$.

Como f es abierta y $X \in \mathcal{T}$, entonces $f(X) \in \mathcal{T}_u$. Por tanto, para todo $x \in X$ existe $r_x \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(f(x), r_x) \subset f(X)$. Veamos que $f(x) + \dfrac{r_x}{2} \cdot \dfrac{f(x)}{\|f(x)\|} \in f(X)$:

$$\left\| f(x) + \frac{r_x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\|f(x)\|} - f(x) \right\| = \left\| \frac{r_x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\|f(x)\|} \right\| = \frac{r_x}{2} < r_x$$

Por tanto, $f(x) + \dfrac{r_x}{2} \cdot \dfrac{f(x)}{\|f(x)\|} \in B(f(x), r_x) \subset f(X)$. Por tanto, existe $x' \in X$ tal que $f(x') = f(x) + \dfrac{r_x}{2} \cdot \dfrac{f(x)}{\|f(x)\|}$. Veamos que $\|f(x')\| > \|f(x)\|$:

$$\begin{aligned}\|f(x')\| = \left\| f(x) + \frac{r_x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\|f(x)\|} \right\| &= \left\| \left(1 + \frac{r_x}{2} \cdot \frac{1}{\|f(x)\|}\right) \cdot f(x) \right\| = \\ &= \left(1 + \frac{r_x}{2} \cdot \frac{1}{\|f(x)\|}\right) \cdot \|f(x)\| > \|f(x)\|\end{aligned}$$

Por tanto, supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que $\|f(x_0)\| \geqslant \|f(x)\|$ para todo $x \in X$. Como hemos visto antes, existe $x_0' \in X$ tal que $\|f(x_0')\| > \|f(x_0)\|$, por lo que hemos llegado a una contradicción. Por tanto, no existe $x_0 \in X$ tal que $\|f(x_0)\| \geqslant \|f(x)\|$ para todo $x \in X$, es decir, g no alcanza su máximo en X.

Ejercicio 2 (5 puntos)**.** Sobre $\mathbb{S}^1 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ se considera la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ siguiente:

$$(x, y, z)\mathcal{R}(x', y', z') \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x, y, z) = (x', y', z') \\ \vee \\ z = z' = 0 \end{array} \right.$$

Demuestra que la aplicación $F : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \to \overline{B}[(0, 0), 1]$ dada por

$$F(x, y, z) = z(x, y)$$

induce un homeomorfismo desde $(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]/\mathcal{R}, \mathcal{T}_u/\mathcal{R})$ en la bola cerrada unidad $\overline{B}[(0, 0), 1] \subset \mathbb{R}^2$ con su topología usual inducida.

En primer lugar, tenemos que F es continua, ya que $F(x, y, z) = z(x, y) = (zx, zy)$. Como ambas componentes son continuas, F es continua. Veamos ahora que es sobreyectiva. Sea $(x, y) \in \overline{B}[(0, 0), 1]$, es decir, $x^2 + y^2 = k$, con $k \in [0, 1]$. Sea $x' = \frac{x}{\sqrt{k}}$, $y' = \frac{y}{\sqrt{k}}$ y $z' = \sqrt{k}$. Veamos que $(x', y', z) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$:

$$(x')^2 + (y')^2 = \frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k} = \frac{x^2 + y^2}{k} = \frac{k}{k} = 1 \qquad \text{y} \qquad 0 \leqslant z' = \sqrt{k} \leqslant 1$$

Veamos que $F(x', y', z') = (x, y)$:

$$F(x', y', z') = z'(x', y') = \sqrt{k} \left(\frac{x}{\sqrt{k}}, \frac{y}{\sqrt{k}} \right) = (x, y)$$

Por tanto, hemos visto que F es sobreyectiva. Veamos ahora que es cerrada. Para ello, como $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ es cerrado y acotado y es subconjunto de $\mathbb{R}^3$, entonces es compacto. Por tanto, F es cerrada. Como F es continua, sobreyectiva y cerrada, entonces es una identificación. Veamos ahora que $\mathcal{R}_F = \mathcal{R}$, es decir, que F identifica los puntos de $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ que están relacionados por $\mathcal{R}$.

Sean $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{S}^1 \times [0,1]$. Veamos que:

$$(x,y,z)\mathcal{R}(x',y',z') \Longleftrightarrow F(x,y,z) = F(x',y',z')$$

$\Longrightarrow$) Supongamos que $(x,y,z)\mathcal{R}(x',y',z')$. Entonces, $(x,y,z) = (x',y',z')$ o $z = z' = 0$. Si $(x,y,z) = (x',y',z')$, entonces $F(x,y,z) = F(x',y',z')$. Si $z = z' = 0$, entonces $F(x,y,z) = F(x',y',z') = 0$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $F(x,y,z) = F(x',y',z')$. Entonces, $z(x,y) = z'(x',y')$; es decir, $zx = z'x'$ y $zy = z'y'$.

- Supongamos $z = z' \neq 0$. Entonces, dividiendo entre z, tenemos que $x = x'$ y $y = y'$. Por tanto, $(x,y,z) = (x',y',z')$.
- Supongamos $z = z' = 0$. Entonces, $(x,y,z)\mathcal{R}(x',y',z')$ de forma directa.
- Supongamos $z \neq z'$. Veamos que este caso no es posible.
  Supongamos, sin pérdida de generalidad, $z \neq 0$. Tenemos $x = \frac{z'x'}{z}$ y $y = \frac{z'y'}{z}$. Por tanto,
  $$1 = x^2 + y^2 = \frac{(z')^2(x')^2}{z^2} + \frac{(z')^2(y')^2}{z^2} = \frac{(z')^2}{z^2}((x')^2 + (y')^2) = \frac{(z')^2}{z^2} = 1$$
  Por tanto, $(z')^2 = z^2$, con $z, z' \in [0,1]$. Por tanto, $z = z'$.

Por tanto, como F es una identificación y $\mathcal{R}_F = \mathcal{R}$, entonces F induce un homeomorfismo desde $(\mathbb{S}^1 \times [0,1]/\mathcal{R}, \mathcal{T}_u/\mathcal{R})$ en la bola cerrada unidad $\overline{B}[(0,0),1] \subset \mathbb{R}^2$ con su topología usual inducida, como queríamos demostrar.