Geometría II
Examen XIII

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría II
Examen XIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Daniel Arias Calero

Granada, 2025

Asignatura Geometría II.

Curso Académico 2024-2025.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Ros Mulero.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 12 de Junio de 2025.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si dos matrices simétricas reales de orden n son semejantes, entonces también son congruentes.
2. Todo endomorfismo $f : V^n \to V^n$ verificando $f \circ f = 0$ es diagonalizable.
3. Sea (V^n, g) un espacio vectorial métrico euclídeo y $f, h : V \to V$ dos endomorfismos autoadjuntos. Entonces el endomorfismo $f \circ h + h \circ f$ es autoadjunto.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Sea $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = \frac{1}{2}\left((x_2 - x_1)(y_3 - y_4) + (x_3 - x_4)(y_2 - y_1)\right)$$

Se pide:

1. Demostrar que φ es una forma bilineal y simétrica sobre $\mathbb{R}^4$.
2. Calcular la forma canónica de Sylvester para φ y una base donde dicha forma se alcance.
3. Sea $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$. ¿Es posible encontrar un $w \in U$ tal que $\varphi(w, e_1) = 1$, siendo $e_4 = (0, 0, 0, 1)$? Razona la respuesta.

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** En el espacio vectorial S_2 de las matrices simétricas de orden 2 se considera la forma g dada por

$$g(A, C) = \text{traza}(A \cdot C)$$

y el endomorfismo f definido por

$$f\left(\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c & \frac{b}{\sqrt{2}} \\ \frac{b}{\sqrt{2}} & a \end{pmatrix}$$

1. Demostrar que g es una métrica euclídea sobre S_2.
2. Probar que f es una isometría de (S_2, g) y describir sus elementos geométricos.