

Geometría I

Examen XIII

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría I

Examen XIII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Víctor Naranjo Cabrera

Granada, 2021

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo B

Profesor Antonio Alarcón López.

Fecha 21 de diciembre de 2021.

Ejercicio 1 (3 puntos). Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- f es un monomorfismo.
- Para todo conjunto linealmente independiente $S \subset V$, se tiene que $f(S) \subset V'$ es linealmente independiente
- Existe una base \mathcal{B} de V tal que $f(\mathcal{B})$ es un conjunto linealmente independiente en V'

Ejercicio 2 (3 puntos). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Demostrar que toda base de V tiene una única base dual en V^*

Ejercicio 3 (4 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo de \mathbb{R}^3 del que se sabe que:

$$f(1, 0, 2) = (-2, 1, 1), f(0, 1, 0) = (-1, 1, 0), \text{ y } f(0, 0, 1) = (-1, 0, 1)$$

Se pide:

- Obtener bases del núcleo y la imagen de f . Calcular la matriz asociada a f respecto de la base usual de \mathbb{R}^3 , $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_u)$.
- Obtener, si es posible, bases \mathcal{B} y \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 tales que

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}) = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Encontrar las matrices regulares, $P, Q \in Gl(3, \mathbb{R})$ tales que $C = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

- Calcular la base dual \mathcal{B}^* de la base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 obtenida en el apartado anterior.

Ejercicio 1 (3 puntos). Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- f es un monomorfismo.
- Para todo conjunto linealmente independiente $S \subset V$, se tiene que $f(S) \subset V'$ es linealmente independiente
- Existe una base \mathcal{B} de V tal que $f(\mathcal{B})$ es un conjunto linealmente independiente en V'

Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo \mathbb{K} :

a) \Rightarrow b)

Sea f un monomorfismo. Sea $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ l.i. $\subseteq V \Rightarrow a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$. Sea ahora $f(S) = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ y b_1, \dots, b_n , con $b_i \in \mathbb{K} \forall i = 1, \dots, n$ tal que

$$b_1f(v_1) + \dots + b_nf(v_n) = 0 \Rightarrow f(b_1v_1 + \dots + b_nv_n) = 0$$

Por ser inyectiva, $b_1v_1 + \dots + b_nv_n = 0$. Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ l.i. $\Rightarrow b_1 = \dots = b_n = 0 \Rightarrow f(S)$ l.i.

b) \Rightarrow c)

Como la dimensión de V es finita, $\exists \mathcal{B}$ base de V . Por definición, \mathcal{B} es l.i. $\Rightarrow f(\mathcal{B})$ es l.i.

c) \Rightarrow a)

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $x \in \text{Ker}(f) \mid x = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$, con $a_i \in \mathbb{K} \forall i = 0, \dots, n$. Entonces:

$$0 = f(x) = a_1f(v_1) + \dots + a_nf(v_n) = 0 \xrightarrow{f(\mathcal{B}) \text{ l.i.}} a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \Rightarrow x = 0$$

Por tanto, $\text{Ker}(f) = \{0\} \Rightarrow f$ monomorfismo

Ejercicio 2 (3 puntos). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Demostrar que toda base de V tiene una única base dual en V^*

Sea V esp. vect. con $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}$. Queremos probar que $\forall \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V , $\exists!$ \mathcal{B}^* base de V^* .

Como $\forall \varphi \in V^*$, φ viene determinada por $\mathcal{M}(\varphi, \{1\} \leftarrow \mathcal{B})$ y esta por las imágenes de cada vector de \mathcal{B} , entonces cada $\varphi \in V^*$ viene determinada por $\varphi(v_i) \forall i = 1, \dots, n$. Como $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$, se tienen determinadas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de forma única $\Rightarrow \exists! \mathcal{B}^* \subseteq V^*$.

Veamos que efectivamente \mathcal{B}^* forma base, demostrando para ello que \mathcal{B}^* es l.i. Sean $a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n = \varphi_0 = 0 \forall i = 1, \dots, n$

$$\varphi_0(v_i) = 0 = a_i\varphi_i(v_i) = a_i = 0 \Rightarrow \mathcal{B}^* \text{ l.i.} \Rightarrow \mathcal{B}^* \text{ es base}$$

Ejercicio 3 (4 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo de \mathbb{R}^3 del que se sabe que:

$$f(1, 0, 2) = (-2, 1, 1), f(0, 1, 0) = (-1, 1, 0), \text{ y } f(0, 0, 1) = (-1, 0, 1)$$

Se pide:

- a. Obtener bases del núcleo y la imagen de f . Calcular la matriz asociada a f respecto de la base usual de \mathbb{R}^3 , $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_u)$.

Primero calcular la matriz A . Sea $\mathcal{B}_u = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$$\begin{cases} f(0, 1, 0) = f(e_2) = (-1, 1, 0) \\ f(0, 0, 1) = f(e_3) = (-1, 0, 1) \\ f(1, 0, 2) = f(e_1) + 2f(e_3) \Rightarrow f(e_1) = (-2, 1, 1) - 2(-1, 0, 1) = (0, 1, -1) \end{cases}$$

Por tanto:

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular base de $\text{Ker}(f)$.

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{l} -y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{array} \right. \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{l} y = -z \\ x = -y \\ x = z \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{l} y = -z \\ x = z \end{array} \right. \right\} = \mathcal{L}(\{(1, -1, 1)\}) \\ &\Rightarrow \mathcal{B} = \{(1, -1, 1)\} \text{ base de } \text{Ker}(f) \end{aligned}$$

Obtener base de $\text{Im}(f)$.

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right| = -1 + 1 = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) \neq 3, \left| \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

Por lo que $\mathcal{B} = \{(0, -1, 1), (-1, 1, 0)\}$ l.i y base de $\text{Im}(f)$

- b. Obtener, si es posible, bases \mathcal{B} y \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 tales que

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}) = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Encontrar las matrices regulares, $P, Q \in Gl(3, \mathbb{R})$ tales que $C = Q^{-1} \cdot A \cdot P$. Sean $\mathcal{B} = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, -1, 1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$:

$$\begin{cases} f(0, 0, 1) = (-1, 0, 1) \\ f(0, 1, 0) = (-1, 1, 0) \\ f(1, -1, 1) = (0, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Encontrar $P, Q \in Gl(3, \mathbb{R}) \mid C = Q^{-1} \cdot A \cdot P$

Sabemos que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = \mathcal{M}(I_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}_u) \cdot \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_u) \cdot \mathcal{M}(I_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B}) \Rightarrow C = \mathcal{M}(I_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B}') \cdot A \cdot \mathcal{M}(I_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B})$. Por lo que:

$$Q = \mathcal{M}(I_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \mathcal{M}(I_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c. Calcular la base dual \mathcal{B}^* de la base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 obtenida en el apartado anterior.

Sea $\mathcal{B}_u^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, $\varphi_i(a_1, a_2, a_3) = a_i, \forall i = 1, 2, 3$ y $\mathcal{B}' = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$, $\psi_i \equiv (a_i, b_i, c_i)_{\mathcal{B}_u^*}$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi_1 = (-1, 0, 1)_{\mathcal{B}_u^*}, \psi_2 = (1, 1, 0)_{\mathcal{B}_u^*}, \psi_3 = (1, 0, 0)_{\mathcal{B}_u^*} \Rightarrow \mathcal{B}^* = \{-\varphi_1 + \varphi_3, \varphi_1 + \varphi_2, \varphi_1\}$$