Álgebra II
Examen IV

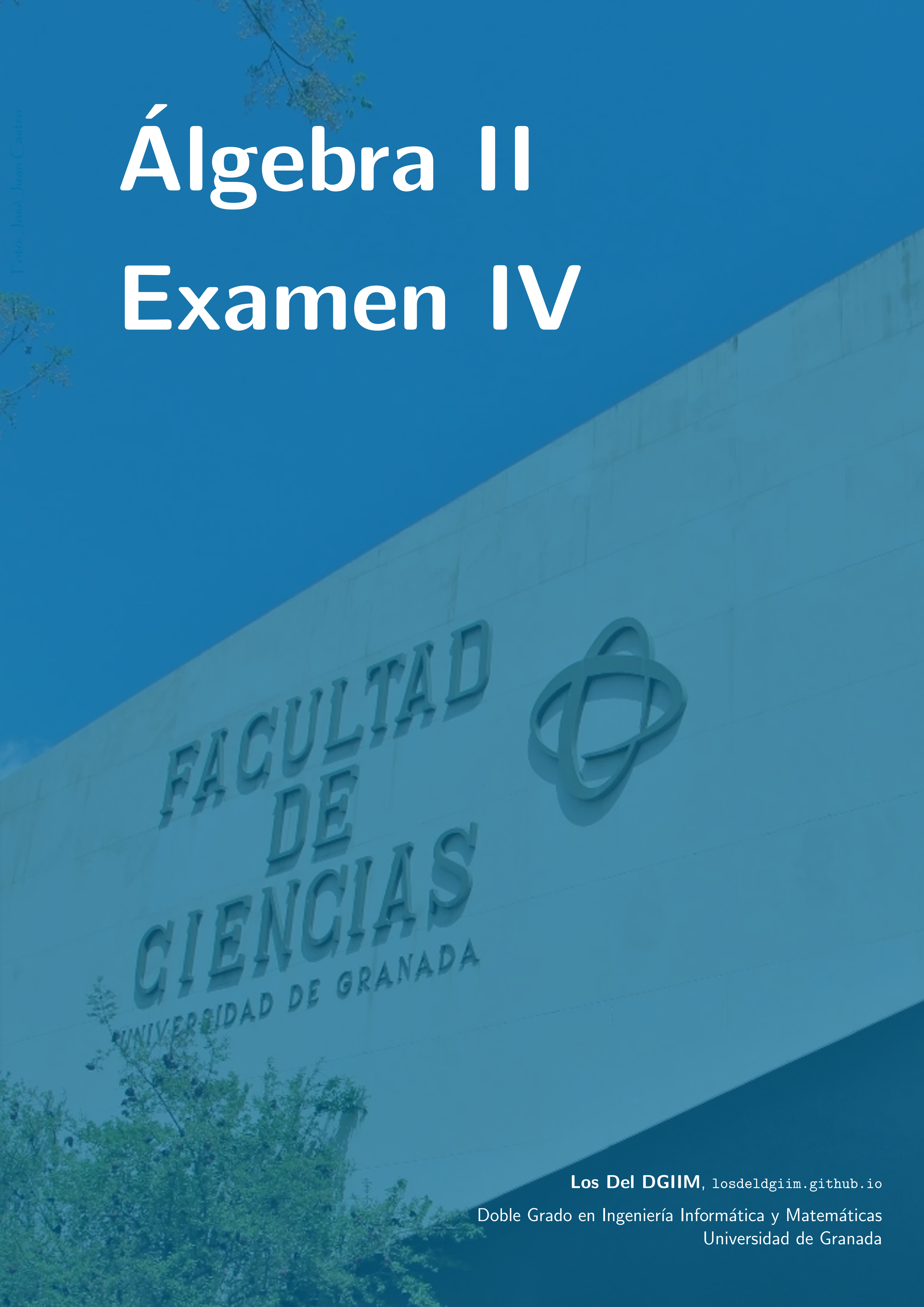

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra II
Examen IV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Asignatura Álgebra II.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Manuel Bullejos Lorenzo.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Ejercicio 1.

1. (1 punto) Dado el grupo abeliano siguiente, calcula sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, el orden de A y el rango de su parte libre:

$$A = \left\langle x, y, z \;\middle|\; \begin{array}{rcl} 6x - 4y + 4z & = & 0 \\ 8x + 4y + 6z & = & 0 \\ 6x + 4y + 4z & = & 0 \end{array} \right\rangle$$

2. (1 punto) Escribe las descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias de todos los grupos abelianos de orden 108.

3. (1 punto) Calcula la descomposición cíclica y cíclica primaria del grupo abeliano $\mathrm{Aut}(C_{16})$.

Ejercicio 2.

1. (0,5 puntos) Sea $\alpha = (2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3) \in S_5$. Calcula α^{123}.

2. (1,5 puntos) Calcula el número de 3-subgrupos de Sylow de S_5.

Ejercicio 3.

1. (2 puntos) Demuestra que hay un único grupo de orden 885 que además es abeliano.

2. (1,5 puntos) Demuestra que todo grupo de orden 351 es un producto semidirecto.

3. (1,5 puntos) Calcula todos los productos semidirectos $C_{13} \rtimes C_{27}$. ¿Cuántos hay salvo isomorfismo?

Ejercicio 1.

1. (1 punto) Dado el grupo abeliano siguiente, calcula sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, el orden de A y el rango de su parte libre:

$$A = \left\langle x, y, z \;\middle|\; \begin{array}{rcl} 6x - 4y + 4z & = & 0 \\ 8x + 4y + 6z & = & 0 \\ 6x + 4y + 4z & = & 0 \end{array} \right\rangle$$

   Consideramos su matriz de relaciones:

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

   Calculamos su forma normal de Smith:

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1'=C_1-C_3} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3'=F_3-F_1]{F_2'=F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2'=C_2+2C_1]{C_3'=C_3-2C_1}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2\leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3'=C_3-4C_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, la forma normal de Smith de M es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, tanto su descomposición cíclica como su descomposición cíclica primaria son:

$$A \cong C_2 \oplus C_2 \oplus C_8$$

   Como vemos, el orden de A es 32 y su parte libre tiene rango 0.

2. (1 punto) Escribe las descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias de todos los grupos abelianos de orden 108.

   Mostrado en la Tabla 1.

3. (1 punto) Calcula la descomposición cíclica y cíclica primaria del grupo abeliano $\mathrm{Aut}(C_{16})$.

   Sea $C_16 = \langle x \mid x^{16} = 1\rangle$ el grupo cíclico de orden 16. Tenemos que:

$$|\operatorname{Aut}(C_{16})| = \varphi(16) = \varphi(2^4) = 1 \cdot 2^3 = 8$$

	Fact. Inv.	Div. element.	Desc. cíclica primaria	Desc. cíclica
$\begin{pmatrix} 2^2 \\ 3^3 \end{pmatrix}$	$d_1 = 108$	$\{2^2; 3^3\}$	$C_4 \oplus C_{27}$	C_{108}
$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3^3 & 1 \end{pmatrix}$	$d_1 = 54$ $d_2 = 2$	$\{2; 2; 3^3\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_{27}$	$C_{54} \oplus C_2$
$\begin{pmatrix} 2^2 & 1 \\ 3^2 & 3 \end{pmatrix}$	$d_1 = 36$ $d_2 = 3$	$\{2^2; 3^2; 3\}$	$C_4 \oplus C_9 \oplus C_3$	$C_{36} \oplus C_3$
$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3^2 & 3 \end{pmatrix}$	$d_1 = 18$ $d_2 = 6$	$\{2; 2; 3^2; 3\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_3$	$C_{18} \oplus C_6$
$\begin{pmatrix} 2^2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	$d_1 = 12$ $d_2 = 3$ $d_3 = 3$	$\{2^2; 3; 3; 3\}$	$C_4 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_3$	$C_{12} \oplus C_3 \oplus C_3$
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	$d_1 = 6$ $d_2 = 6$ $d_3 = 3$	$\{2; 2; 3; 3; 3\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_3$	$C_6 \oplus C_6 \oplus C_3$

Tabla 1: Grupos abelianos de orden 108.

Veamos cuáles son. Por el Teorema de Dyck, construir estos automorfismos basta con enviar un generador de C_{16} a otro generador. Los generadores de C_{16} son los elementos de orden 16, que son aquellos que son coprimos con 16.

$$C_16 = \langle x \rangle = \langle x^3 \rangle = \langle x^5 \rangle = \langle x^7 \rangle = \langle x^9 \rangle = \langle x^{11} \rangle = \langle x^{13} \rangle = \langle x^{15} \rangle$$

Por tanto, los automorfismos de C_{16} son:

$$\begin{aligned}
x &\mapsto \varphi_1(x) = x \\
x &\mapsto \varphi_3(x) = x^3 \\
x &\mapsto \varphi_5(x) = x^5 \\
x &\mapsto \varphi_7(x) = x^7 \\
x &\mapsto \varphi_9(x) = x^9 \\
x &\mapsto \varphi_11(x) = x^{11} \\
x &\mapsto \varphi_13(x) = x^{13} \\
x &\mapsto \varphi_15(x) = x^{15}
\end{aligned}$$

Veamos que $\mathrm{Aut}(C_{16})$ es abeliano. Dados $\varphi_i, \varphi_j \in \mathrm{Aut}(C_{16})$, tenemos que:

$$(\varphi_i \circ \varphi_j)(x) = \varphi_i(\varphi_j(x)) = \varphi_i(x^j) = x^{ij} = x^{ji} = \varphi_j(\varphi_i(x)) = (\varphi_j \circ \varphi_i)(x)$$

Por tanto, como la composición conmuta para un generador de C_{16}, se cumple:

$$\varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_j \circ \varphi_i \qquad \forall \varphi_i, \varphi_j \in \mathrm{Aut}(C_{16})$$

Por tanto, $\mathrm{Aut}(C_{16})$ es abeliano. Por la estructura de los grupos finitos abelianos, tenemos que hay dos posibilidades:

$$\mathrm{Aut}(C_{16}) \cong C_8 \qquad \vee \qquad \mathrm{Aut}(C_{16}) \cong C_4 \oplus C_2$$

Para determinar la correcta, hemos de razonar por órdenes. Los órdenes de los elementos de $C_8 \cong \mathbb{Z}_8$ son:

$$O(0) = 1, \quad O(1) = O(3) = O(5) = O(7) = 8, \quad O(2) = O(6) = 4, \quad O(4) = 2$$

Los órdenes de los elementos de $C_4 \oplus C_2 \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ son:

$$O(0,0) = 1, \quad O(1,0) = O(3,0) = O(1,1) = O(3,1) = 4, \quad O(2,0) = O(1,0) = O(2,1) = 2$$

Para determinar cuál es la correcta, hemos de ver qué órdenes tienen los elementos de $\mathrm{Aut}(C_{16})$. No es necesario calcular el orden de todos los elementos, sino que nos basta con ver cuántos tienen orden 2:

$$(\varphi_i \circ \varphi_i)(x) = \varphi_i(\varphi_i(x)) = \varphi_i(x^i) = x^{i^2}$$

Por tanto, tenemos que φ_i tiene orden 2 si y solo si $i^2 \equiv 1 \mod 16$, es decir, si y solo si $i \in \{7, 9, 15\}$. Por tanto, hay 3 elementos de orden 2 en $\mathrm{Aut}(C_{16})$. De aquí, deducimos que la descomposición cíclica (y cíclica primaria) de $\mathrm{Aut}(C_{16})$ es:

$$\mathrm{Aut}(C_{16}) \cong C_4 \oplus C_2$$

Ejercicio 2.

1. (0,5 puntos) Sea $\alpha = (2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3) \in S_5$. Calcula α^{123}.

   Hallamos la descomposición de α en ciclos disjuntos:

   $$\alpha = (2\,3\,4)(1\,2\,3) = (1\,3)(2\,4) \Longrightarrow O(\alpha) = \mathrm{mcm}(O(1\,3), O(2\,4)) = \mathrm{mcm}(2, 2) = 2$$

   Por tanto:

   $$\alpha^{123} = \alpha = (1\ 3)(2\ 4)$$

2. (1,5 puntos) Calcula el número de 3-subgrupos de Sylow de S_5.

   Sabemos que $|S_5| = 5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Notando por n_3 el número de 3-subgrupos de Sylow de S_5, por el Segundo Teorema de Sylow, tenemos que:

   $$\begin{gathered} n_3 \equiv 1 \mod 3 \\ n_3 \mid 2^3 \cdot 5 = 40 \end{gathered}$$

   Como n_3 es un divisor de 40, sus posibles valores son:

   $$n_3 \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$$

   Como además $n_3 \equiv 1 \mod 3$, tenemos que:

   $$n_3 \in \{1, 4, 10, 40\}$$

Sea $P_3 \in \text{Syl}_3(S_5)$ un 3-subgrupo de Sylow de S_5. Por tanto, $|P_3| = 3$, luego P_3 es cíclico y contiene dos elementos de orden 3. Los únicos elementos de orden 3 en S_5 son los ciclos de longitud 3; veamos cuántos hay:

$$\text{Número de ciclos de longitud 3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3} = 20$$

Cada elemento de orden 3 pertenece a un 3−subgrupo de Sylow de S_5, ya que cualquier otro subconjunto de S_5 no va a tener cardinal múltiplo de 3. Además, dados dos 3-subgrupos de Sylow distintos, tienen que tener intersección trivial, ya que si no, tendrían un elemento de orden 3 en común, y por tanto serían el mismo subgrupo.

Por tanto, cada 3-subgrupo de Sylow de S_5 contiene exactamente dos elementos de orden 3, y como hay 20 elementos de orden 3, tenemos que:

$$n_3 = \frac{20}{2} = 10$$

Por tanto, el número de 3-subgrupos de Sylow de S_5 es 10.

Ejercicio 3.

1. (2 puntos) Demuestra que hay un único grupo de orden 885 que además es abeliano.

   Sea G un grupo de orden 885. Notamos que:

   $$885 = 3 \cdot 5 \cdot 59$$

   Calculamos el número de subgrupos de Sylow de G, notando por n_p el número de p-subgrupos de Sylow de G. Por el Segundo Teorema de Sylow, tenemos que:

   $$\left.\begin{array}{rcl} n_3 & \equiv & 1 \mod 3 \\ n_3 & | & 5 \cdot 59 = 295 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_3 \in \{1, \cancel{5}, \cancel{59}, 295\}$$

   De nuevo, por el Segundo Teorema de Sylow, tenemos que:

   $$\left.\begin{array}{rcl} n_5 & \equiv & 1 \mod 5 \\ n_5 & | & 3 \cdot 59 = 177 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_5 \in \{1, \cancel{3}, \cancel{59}, \cancel{177}\}$$

   Por tanto, $n_5 = 1$, luego existe un único 5-subgrupo de Sylow de G, que denotamos por P_5, que además es normal en G ($P_5 \lhd G$). Como $|P_5| = 5$, tenemos que $P_5 \cong C_5$.

   Por último, por el Segundo Teorema de Sylow, tenemos que:

   $$\left.\begin{array}{rcl} n_{59} & \equiv & 1 \mod 59 \\ n_{59} & | & 3 \cdot 5 = 15 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_{59} = 1$$

   Por tanto, existe un único 59-subgrupo de Sylow de G, que denotamos por P_{59}, que además es normal en G ($P_{59} \lhd G$). Como $|P_{59}| = 59$, tenemos que $P_{59} \cong C_{59}$.

   Fijamos $P_3 \in \text{Syl}_3(G)$ un 3-subgrupo de Sylow de G.

2. (1,5 puntos) Demuestra que todo grupo de orden 351 es un producto semidirecto.

3. (1,5 puntos) Calcula todos los productos semidirectos $C_{13} \rtimes C_{27}$. ¿Cuántos hay salvo isomorfismo?