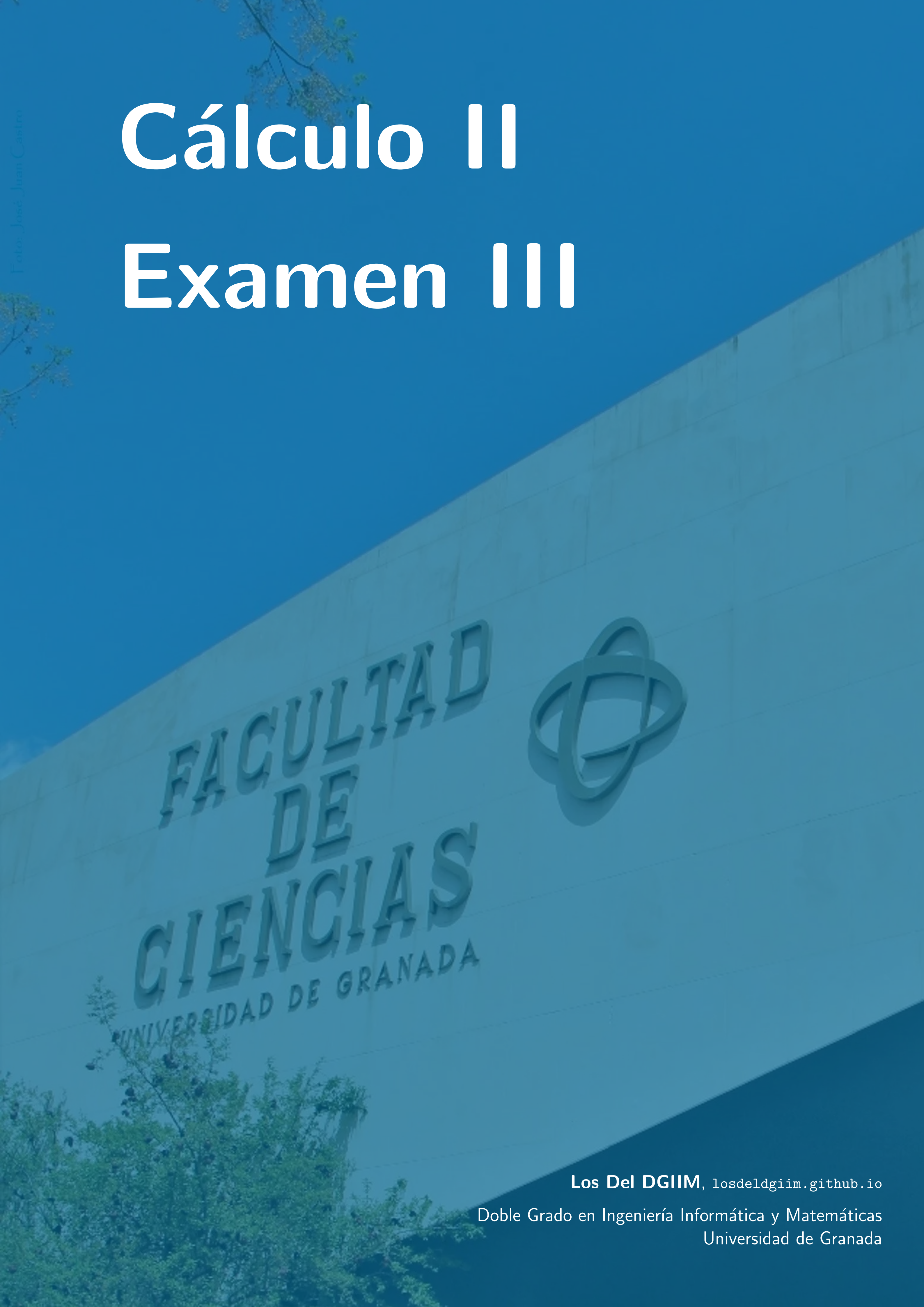
Cálculo II

Examen III



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo II
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María Victoria Velasco Collado.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 22 de junio de 2022.

Ejercicio 1. [2.5 puntos] Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función continua. Dado $a > 0$, sea:

$$g(x) := e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t)\, dt$$

1. Demostrar que g es constante si y solo si se verifica $f(x) = ag(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^+$.

   Como f es continua y la exponencial también, tenemos que el integrando es continuo y Riemman Integrable. Por tanto, por el TFC, tenemos que:

   $$\left(\int_0^x e^{at} f(t)\, dt\right)' = e^{ax} f(x)$$

   Por tanto, como la integral es derivable y la exponencial también, tenemos que g es derivable en $\mathbb{R}^+$, con:

   $$g'(x) = -ae^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t)\, dt + e^{-ax} e^{ax} f(x) = -ae^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t)\, dt + f(x)$$

   Como g es derivable en $\mathbb{R}^+$, tenemos que g es constante si su primer derivada es nula. Entonces:

   $$g'(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \iff f(x) = ae^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t)\, dt = ag(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

   Por tanto, se ha demostrado lo pedido.

2. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L > 0$, estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{at} f(t)\, dt$ y calcular $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

   Observación. Aunque en el examen no está especificado, creo que se puede suponer que $L \in \mathbb{R}$, por la notación usual de los límites convergentes.

   Tenemos:

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax} f(x)}{e^{ax}} = \lim_{x\to\infty} f(x) = L > 0$$

   Por tanto, tenemos que

   $$\int_0^\infty e^{at} f(t)\, dt \text{ diverge positivamente} \iff \int_0^\infty e^{at}\, dt \text{ diverge positivamente}$$

   Calculamos por tanto la segunda integral para ver si converge:

   $$\int_0^\infty e^{at}\, dt = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{a} \int_0^c ae^{at}\, dt = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{a} \left[e^{at}\right]_0^c = \frac{1}{a}\left[\infty - e^0\right] = \infty$$

   Por tanto, tenemos que $\displaystyle\int_0^\infty e^{at} f(t)\, dt$ diverge positivamente.

   Además, tenemos que:

   $$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x e^{at} f(t)\, dt}{e^{ax}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax} f(x)}{ae^{ax}} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{a} = \frac{L}{a}$$

3. Demostrar que si $f(\mathbb{R}^+) \subseteq [m, M]$, entonces:

$$\frac{m}{a}\frac{(e^{ax}-1)}{e^{ax}} \leqslant g(x) \leqslant \frac{M}{a}\frac{(e^{ax}-1)}{e^{ax}}$$

(por lo que g es una función acotada cuando f lo es).

Tenemos que:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \Longrightarrow e^{ax}m \leqslant e^{ax}f(x) \leqslant e^{ax}M \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

donde he usado que, como $a > 0$, $e^{ax} > 0$. Como el operador integral mantiene el orden:

$$\int_0^x e^{at}m\ dt \leqslant \int_0^x e^{at}f(t)\ dt \leqslant \int_0^x e^{at}M\ dt$$

Tenemos que:

$$\int_0^x e^{at}\ dt = \frac{1}{a}\left[e^{ax}-1\right]$$

Por tanto:

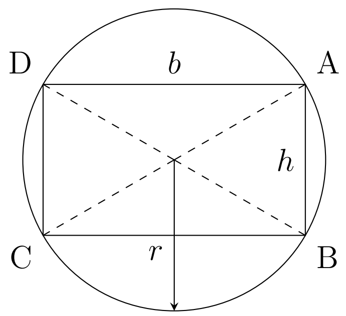
$$\frac{m}{a}\left[e^{ax}-1\right] \leqslant \int_0^x e^{at}f(t)\ dt \leqslant \frac{M}{a}\left[e^{ax}-1\right]$$

Para obtener $g(x)$, divido por $e^{ax} > 0$:

$$\frac{m}{a}\frac{(e^{ax}-1)}{e^{ax}} \leqslant g(x) \leqslant \frac{M}{a}\frac{(e^{ax}-1)}{e^{ax}}$$

Por tanto, se ha demostrado lo pedido.

Ejercicio 2. [1.5 puntos] Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un círculo de radio $r = \frac{1}{2}$.



En este caso, tenemos que la ecuación de ligadura viene dada por el Teorema de Pitágoras:

$$b^2 + h^2 = (2r)^2 = 4r^2 \Longrightarrow b = \sqrt{4r^2 - h^2}$$

Por tanto, la función a maximizar es:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto A(h) = bh = h\sqrt{4r^2-h^2} \end{aligned}$$

Como $A(h) \geqslant 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^+$, tenemos que $A(h)$ y $A^2(h)$ alcanzan los extremos relativos en los mismos valores de las abcisas. Por tanto, maximizo $A^2(h)$:

$$A^2(h) = h^2(4r^2 - h^2) = 4h^2r^2 - h^4 \Longrightarrow \frac{\partial A^2}{\partial h} = 8hr^2 - 4h^3 = 0 \Longleftrightarrow 4h(2r^2 - h^2) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow h = 0, \sqrt{2}r$$

Por tanto, como $h = 0$ no pertenece al dominio de la función, tenemos que $h = \sqrt{2}r$ es el único candidato a extremo relativo. Estudiemos la monotonía.

- Para $h < \sqrt{2}r$: $\frac{\partial A^2}{\partial h} > 0 \Longrightarrow A^2(h)$ estrictamente creciente.
- Para $h > \sqrt{2}r$: $\frac{\partial A^2}{\partial h} < 0 \Longrightarrow A^2(h)$ estrictamente decreciente.

Por tanto, tenemos que $h = \sqrt{2}r$ es un máximo relativo. Además, es absoluto por el el único extremo relativo y ser continua. Por tanto, las dimensiones pedidas son:

$$h = \sqrt{2}r = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad b = \sqrt{4r^2 - h^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicio 3. [1 punto] Demostrar que:

$$|\arctan x - \arctan y| \leqslant |x - y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

¿Es $f(x) = \arctan x$ una función uniformemente continua?

Demostramos en primer lugar que f es lipschitziana. Como es derivable en $\mathbb{R}$, veamos si su derivada está acotada.

$$0 \leqslant f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \leqslant 1$$

Por tanto, tenemos que su derivada está acotada por 1. Por tanto, f es lipschitziana y, por tanto, uniformemente continua. Además, como la constante de Lipschitiz es 1, tenemos que:

$$|f(y) < f(x)| \leqslant M|x - y| \leqslant 1 \cdot |x - y| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, se ha demostrado lo pedido.

Ejercicio 4. [3 puntos] Sea $f(x) = \ln(1 + x)$.

1. Calcular el Polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado n centrado en el origen, dando una expresión del resto.

   Demostramos en primer lugar mediante inducción la derivada $n-$ésima de $f(x)$:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

- Demostramos para $n = 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1^0 \cdot \frac{0!}{(1+x)^1}$$

Por tanto, para $n = 1$ se tiene.

- Supuesto cierto para n, se comprueba para $n + 1$:

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{-n(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} = (-1)^n \cdot (n)! \cdot \frac{1}{(1+x)^{n+1}} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Por tanto, se ha demostrado para $n + 1$.

Por tanto, el polinomio de Taylor de grado n centrado en el origen es:

$$P^f_{n,0}(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{k!}(x)^k = \ln 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{(1)^k}}{k!}(x)^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k}$$

El resto de Lagrage es, para cierto $c \in]-1, \infty[$:

$$R^f_{n,0}(x) := f(x) - P^f_{n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^n \cdot \frac{n!}{(1+c)^{n+1}}}{(n+1)!}x^{n+1} =$$
$$= (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

2. Calcular $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(1+x) - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^4}{x^5}$.

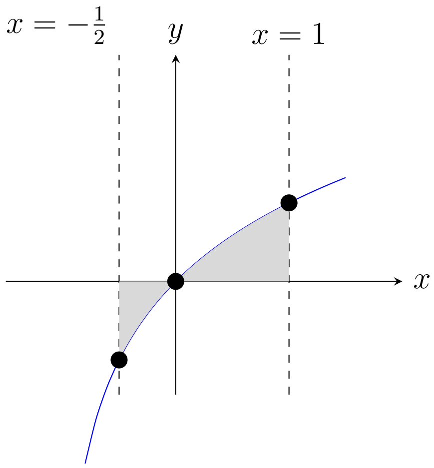
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x) - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^4}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^4}{x^4} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P^f_{4,0}(x) - \frac{1}{4}x^4}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P^f_{4,0}(x)}{x^4} - \frac{\frac{1}{4}x^4}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P^f_{4,0}(x)}{x^4} - \frac{1}{4} =$$
$$= 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

donde he empleado el Teorema Infinetesimal del Resto.

3. Calcular el área de la región determinada por la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.
Veamos en qué valores corta la gráfica al eje X:

$$f(x) = 0 \iff \ln(1+x) = 0 \iff x = 0$$

Por tanto, a partir de la gráfica del $\ln x$, sacamos que la gráfica de $f(x)$ es la siguiente:



En primer lugar, resolvemos la integral indefinida:

$$\int \ln(1+x)\,dx = \left[\begin{array}{cc} u(x) = \ln(1+x) & u'(x) = \frac{1}{1+x} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{array}\right] = x\ln(1+x) - \int \frac{x+1-1}{1+x}\,dx =$$
$$= x\ln(1+x) - \int 1 - \frac{1}{1+x}\,dx = x\ln(1+x) - x + \ln|1+x| + C$$

Por tanto, tenemos que el área es:

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} |f(x)|\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} -f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx =$$
$$= \left[x\ln(1+x) - x + \ln|1+x|\right]_0^{-\frac{1}{2}} + \left[x\ln(1+x) - x + \ln|1+x|\right]_0^1 =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln 2 - 1 + \ln 2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + 2\ln 2 = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + 2\ln 2 =$$
$$= \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} \quad u^2$$

Ejercicio 5. [2 puntos] Calcular la longitud de la curva $f(x) = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$ entre $x = 1$ y $x = 2$.

Tenemos que f restringida al intervalo [1,2] es continua. Calculemos su derivada.

$$f'(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \cdot \frac{e^x(e^x-1) - e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x-1}{e^x+1} \cdot \frac{e^x(e^x-1-e^x-1)}{(e^x-1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x-1)(e^x+1)} =$$
$$= \frac{-2e^x}{e^{2x}-1}$$

Por tanto, como tanto f como f' son continuas en $[1,2]$, tenemos que $f \in C^1[1,2]$. Por tanto, su longitud en este intervalo es:

$$l = \int_1^2 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1+\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}}\, dx = \left[\begin{array}{c} e^{2x}=t \quad t\in[e^2,e^4] \\ 2e^{2x}dx = dt \end{array}\right] =$$

$$= \int_{e^2}^{e^4} \sqrt{1+\frac{4t}{(t-1)^2}}\,\frac{dt}{2t} = \int_{e^2}^{e^4} \sqrt{\frac{t^2+1-2t+4t}{(t-1)^2}}\,\frac{dt}{2t} = \int_{e^2}^{e^4} \sqrt{\frac{(t+1)^2}{(t-1)^2}}\,\frac{dt}{2t} = \int_{e^2}^{e^4} \left|\frac{t+1}{t-1}\right|\frac{dt}{2t} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{e^2}^{e^4} \frac{t}{t-1}\,\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{t-1}\,\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{t-1}\,dt + \frac{1}{2}\int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{t(t-1)}\,dt$$

Aplico el método de coeficientes indeterminados para resolver la integral:

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+Bt}{t(t-1)}$$

- Para $t = 0$: $1 = -A \Longrightarrow A = -1$
- Para $t = 1$: $1 = B$

Por tanto, tenemos que:

$$l = \frac{1}{2}\int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{t-1}\,dt + \frac{1}{2}\int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{t(t-1)}\,dt = \frac{1}{2}\left[\ln|t-1| - \ln t + \ln|t-1|\right]_{e^2}^{e^4} =$$

$$= \left[\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln t\right]_{e^2}^{e^4} = \left[\ln|t-1| - \ln\sqrt{t}\right]_{e^2}^{e^4} = \ln(e^4-1) - 2 - \ln(e^2-1) + 1 =$$

$$= \ln\frac{e^4-1}{e^2-1} - 1 = \ln(e^2+1) - 1$$

Por tanto, tenemos que la longitud de esa curva es rectificable, con:

$$l = \ln(e^2+1) - 1\ u.$$