

# Topología II

# Examen IX



**Los Del DGIIM**, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Topología II

# Examen IX

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Granada, 2025

**Asignatura** Topología II.

**Curso Académico** 2025/26.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Grupo Único.

**Profesor** José Antonio Gálvez.

**Descripción** Segundo Parcial.

**Fecha** 19 de diciembre de 2025.

**Duración** 1 hora.

**Ejercicio 1** (5 puntos). Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Existe una aplicación recubridora  $p : \mathbb{RP}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ .
- b) Si  $X$  es un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo tal que toda aplicación continua  $f : X \rightarrow \mathbb{S}^1$  se puede levantar a una aplicación continua  $\hat{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  (para el recubridor usual  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ) entonces  $X$  es simplemente conexo.

**Ejercicio 2** (5 puntos). Consideremos la aplicación  $p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  dada por

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_3 - x_2x_4, x_1x_4 + x_2x_3, x_1(x_3^2 - x_4^2) - 2x_2x_3x_4, 2x_1x_3x_4 + x_2(x_3^2 - x_4^2))$$

o equivalentemente,

$$p(\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi) = (\cos(\theta + \varphi), \sin(\theta + \varphi), \cos(\theta + 2\varphi), \sin(\theta + 2\varphi))$$

Demuestra que  $p$  es una aplicación recubridora (3.5 puntos). Además, para el punto  $x_0 = (1, 0, 1, 0)$  calcula  $p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, x_0))$  (1.5 puntos).

**Solución.**

**Ejercicio 1** (5 puntos). Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Existe una aplicación recubridora  $p : \mathbb{RP}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

Es falsa: por reducción al absurdo, supuesto que existe  $p : \mathbb{RP}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  aplicación recubridora como  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  es recubridor universal de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  por la aplicación  $Id_{\mathbb{S}^2} \times p$  donde  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  es la aplicación usual:

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

Tenemos entonces que  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  recubre a  $\mathbb{RP}^3$ , y  $\mathbb{S}^3$  es el recubridor universal de  $\mathbb{RP}^3$  (basta considerar la proyección al cociente), por lo que tendremos entonces que  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^3$ , pero esto es una contradicción, ya que  $\mathbb{S}^3$  es compacto y  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  no lo es.

- b) Si  $X$  es un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo tal que toda aplicación continua  $f : X \rightarrow \mathbb{S}^1$  se puede levantar a una aplicación continua  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  (para el recubridor usual  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ) entonces  $X$  es simplemente conexo.

Es falsa: podemos tomar  $X = \mathbb{RP}^2$  y sea  $f : X \rightarrow \mathbb{S}^1$  cualquier aplicación continua, si tomamos  $x_0 \in X$ ,  $b_0 = f(x_0)$  y  $r_0 \in p^{-1}(b_0)$  tenemos entonces que  $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$ , grupo finito, con lo que  $f_*(\pi_1(X, x_0))$  también ha de ser un subgrupo finito de  $\pi_1(\mathbb{R}, b_0) \cong \mathbb{Z}$ . Como el único subgrupo finito de  $\mathbb{Z}$  es  $\{0\}$  ha de ser:

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) = \{[\varepsilon_{b_0}]\}$$

Tenemos así que  $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{R}, r_0))$ , por lo que  $f$  se puede levantar. Vemos además que  $X$  no es simplemente conexo, pues  $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$ .

**Ejercicio 2** (5 puntos). Consideremos la aplicación  $p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  dada por

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_3 - x_2x_4, x_1x_4 + x_2x_3, x_1(x_3^2 - x_4^2) - 2x_2x_3x_4, 2x_1x_3x_4 + x_2(x_3^2 - x_4^2))$$

o equivalentemente,

$$p(\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi) = (\cos(\theta + \varphi), \sin(\theta + \varphi), \cos(\theta + 2\varphi), \sin(\theta + 2\varphi))$$

Demuestra que  $p$  es una aplicación recubridora (3.5 puntos). Además, para el punto  $x_0 = (1, 0, 1, 0)$  calcula  $p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, x_0))$  (1.5 puntos).

Vemos que  $p$  es claramente una aplicación continua. Definimos ahora la aplicación  $q : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  dada por:

$$q(\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi) = (\cos(2\theta - \varphi), \sin(2\theta - \varphi), \cos(\varphi - \theta), \sin(\varphi - \theta))$$

vemos que es una aplicación continua, y que:

$$\begin{aligned} p(q(\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi)) &= p(\cos(2\theta - \varphi), \sin(2\theta - \varphi), \cos(\varphi - \theta), \sin(\varphi - \theta)) \\ &= (\cos(2\theta - \varphi + \varphi - \theta), \sin(2\theta - \varphi + \varphi - \theta), \cos(2\theta - \varphi + 2\varphi - 2\theta), \sin(2\theta - \varphi + 2\varphi - 2\theta)) \\ &= (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi)) \\ q(p(\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi))) &= q(\cos(\theta + \varphi), \sin(\theta + \varphi), \cos(\theta + 2\varphi), \sin(\theta + 2\varphi)) \\ &= (\cos(2(\theta + \varphi) - (\theta + 2\varphi)), \sin(2(\theta + \varphi) - (\theta + 2\varphi)), \\ &\quad \cos(\theta + 2\varphi - (\theta + \varphi)), \sin(\theta + 2\varphi - (\theta + \varphi))) \\ &= (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

Por lo que  $q$  es la aplicación inversa de  $p$ , con lo que  $p$  es un homeomorfismo, luego una aplicación recubridora.

Para  $x_0 = (1, 0, 1, 0)$ , tenemos que  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, x_0)$  está generador por  $[\alpha], [\beta]$ , donde  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  vienen dadas por:

$$\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 1, 0), \quad \beta(t) = (1, 0, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Si calculamos su imagen mediante  $p$  obtenemos que:

$$\begin{aligned} p(\alpha(t)) &= (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \\ p(\beta(t)) &= (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \cos(4\pi t), \sin(4\pi t)) \end{aligned}$$

Vemos así que  $[p(\alpha)] = [\alpha] * [\beta]$  y que  $[p(\beta)] = [\alpha] * [\beta] * [\beta]$ , como tenemos la imagen de los generadores de  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, x_0)$  tenemos pues que:

$$p_*(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, x_0) = \langle [\alpha] * [\beta], [\alpha] * [\beta] * [\beta] \rangle$$

Podemos además observar que:

$$[\beta] = ([\alpha] * [\beta] * [\beta]) * ([\alpha]^{-1} * [\beta]^{-1})$$

de donde  $[\beta]$  también está en dicho grupo y por tanto:

$$[\alpha] = [\alpha] * [\beta] * [\beta]^{-1}$$

En definitiva, tenemos que:

$$p_*(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, x_0) = \langle [\alpha] * [\beta], [\alpha] * [\beta] * [\beta] \rangle = \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p(x_0))$$