

# Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025



# Índice general

<b>1. Übungs Blätter</b>	<b>5</b>
1.3. Rechnen mit physikalischen Größen . . . . .	5
1.5. Komplexe Rechnung in physikalisch-technischen Zusammenhängen . . . . .	9
1.8. Ableitungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	15
1.9. Kurvenintegrale . . . . .	16
1.10. Potenzialfelder und Mehrfachintegrale . . . . .	20



# 1. Übungs Blätter

## 1.3. Rechnen mit physikalischen Größen

**Ejercicio 1.3.1** (Fährverbindung). Eine Fähre bewegt sich mit der Eigengeschwindigkeit  $v_0 = 4 \text{ m/s}$  (relativ zum Fluss) vom Uferpunkt  $A$  aus auf kürzestem Weg zum gegenüberliegenden Flussufer (Punkt  $B$ ; Abb. 1.1).

- Unter welchem Winkel  $\alpha$  muss die Fähre gegen die Strömung gesteuert werden, wenn die Geschwindigkeit der Strömung den Betrag  $v_s = 1,5 \text{ m/s}$  hat?

The Ferry wants to get to  $B$  in a straight line. Therefore, it must compensate the flow velocity by steering at an angle  $\alpha$  against the flow. It is then needed that:

$$v_s = v_0 \sin(\alpha) \implies \alpha = \arcsin\left(\frac{v_s}{v_0}\right) = \arcsin\left(\frac{1,5}{4}\right) \approx 0,3844 \text{ rad} \approx 22,024^\circ$$

- Wie groß ist dann die resultierende Geschwindigkeit  $v_r$  der Fähre?

The resulting velocity  $v_r$  of the ferry is given by:

$$v_r = v_0 \cos(\alpha) = 4 \cos(0,3844) \approx 3,7081 \text{ m/s}$$

**Ejercicio 1.3.2** (Elektrische Punktladungen im Koordinatensystem). Eine Punktladung  $q_1 = 6,0 \mu\text{C}$  befindet sich in einem kartesischen Koordinatensystem bei  $x_1 = 1,0 \text{ m}$ ,  $y_1 = 0,5 \text{ m}$ . Eine zweite Ladung  $q_2 = -2,5 \mu\text{C}$  befindet sich in dessen Ursprung. Ein Elektron, d.h. eine dritte Punktladung, ist in einem Punkt mit den Koordinaten  $(x_e, y_e)$ . Berechnen Sie die Werte für  $x_e$  und  $y_e$ , bei denen sich das

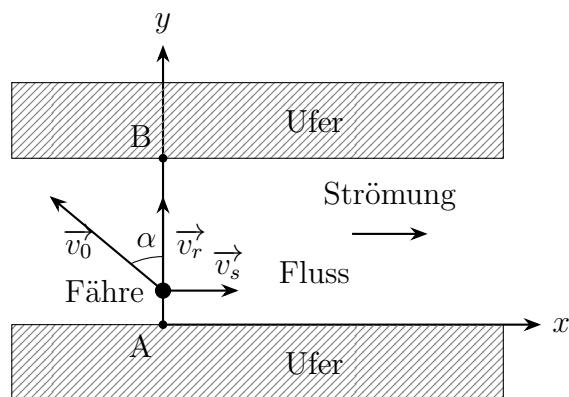


Figura 1.1: Fährverbindung über einen Fluss mit Strömung.

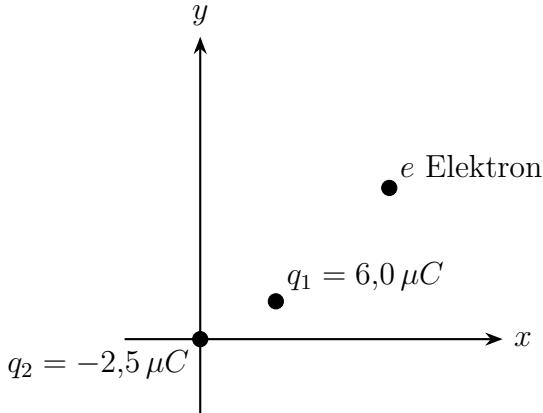


Figura 1.2: Punktladungen im Koordinatensystem.

Elektron im Gleichgewicht befindet, d.h. bei dem die Gesamtkraft auf das Elektron verschwindet.

### Option 1 :

The forces acting on the electron due to the other two charges must cancel each other out for equilibrium. Let  $\vec{F}_{ei}$  be the force on the electron due to charge  $q_i$ . The forces can be expressed as:

$$\vec{F}_{e1} + \vec{F}_{e2} = 0$$

where, using that  $q_e = -e < 0$  (the charge of the electron):

$$\vec{F}_{e1} = -k_e \frac{|q_1 e|}{r_{e1}^2} \hat{r}_{e1}, \quad \vec{F}_{e2} = k_e \frac{|q_2 e|}{r_{e2}^2} \hat{r}_{e2}$$

Here,  $k_e$  is Coulomb's constant,  $e$  is the elementary charge,  $r_{ei}$  is the distance between the electron and charge  $q_i$ , and  $\hat{r}_{ei}$  is the unit vector pointing from charge  $q_i$  to the electron. Using the values of  $r_{e1}$  and  $r_{e2}$  based on the coordinates of the charges and the electron, we have:

$$\vec{r}_{e1} = (x_e - 1, y_e - 0,5), \quad \vec{r}_{e2} = (x_e, y_e)$$

Therefore, the equilibrium condition becomes:

$$-k_e \frac{|q_1 e|}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)} \cdot \frac{(x_e - 1, y_e - 0,5)}{\sqrt{(x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2}} + k_e \frac{|q_2 e|}{(x_e^2 + y_e^2)} \cdot \frac{(x_e, y_e)}{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}} = 0$$

This vector equation can be separated into its  $x$  and  $y$  components, leading to a system of two equations with two unknowns ( $x_e$  and  $y_e$ ). Solving this system will yield the coordinates of the electron in equilibrium.

$$\begin{aligned} -k_e \frac{|q_1 e|(x_e - 1)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e|x_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} &= 0 \\ -k_e \frac{|q_1 e|(y_e - 0,5)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e|y_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} &= 0 \end{aligned}$$

In an easier way:

$$\frac{|q_1|(x_e - 1)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)^{3/2}} = \frac{|q_2|x_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}}$$

$$\frac{|q_1|(y_e - 0,5)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)^{3/2}} = \frac{|q_2|y_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}}$$

As we can see, this system of equations is nonlinear and may require numerical methods or iterative approaches to solve for  $x_e$  and  $y_e$ . We should then approach the problem using another method.

### Option 2 :

Given that  $\vec{F}_{e1} = -\vec{F}_{e2}$ , the forces must have the same magnitude but opposite directions. This implies that the electron must lie along the line connecting the two charges, with  $x_e, y_e < 0$ . Therefore:

$$y_e = \frac{y_1}{x_1}x_e = \frac{1}{2}x_e$$

On the other hand, equating the magnitudes of the forces:

$$|\vec{F}_{e1}| = |\vec{F}_{e2}| \implies k_e \frac{|q_1 e|}{r_{e1}^2} = k_e \frac{|q_2 e|}{r_{e2}^2} \implies \frac{|q_1|}{r_{e1}^2} = \frac{|q_2|}{r_{e2}^2} \implies \frac{|q_1|}{(x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2} = \frac{|q_2|}{x_e^2 + y_e^2}$$

Therefore, using the relation for  $y_e$  in terms of  $x_e$ , we have the following equation to solve for  $x_e$ :

$$\frac{|q_1|}{(x_e - 1)^2 + (\frac{1}{2}x_e - 0,5)^2} = \frac{|q_2|}{x_e^2 + (\frac{1}{2}x_e)^2}$$

$$6 \cdot \left(\frac{5}{4}x_e^2\right) = 2,5 \cdot \left(\frac{5}{4}x_e^2 - 2,5x_e + 1,25\right)$$

$$4,375x_e^2 + 6,25x_e - 3,125 = 0$$

$$x_e = \frac{-6,25 \pm \sqrt{(-6,25)^2 - 4 \cdot 4,375 \cdot (-3,125)}}{2 \cdot 4,375} = \frac{-5 \pm 2\sqrt{15}}{7}$$

Given that  $x_e < 0$ , we take:

$$x_e = -\frac{5 + 2\sqrt{15}}{7} \approx -1,8208 \text{ m}$$

$$y_e = \frac{1}{2}x_e = -\frac{5 + 2\sqrt{15}}{14} \approx -0,9104 \text{ m}$$

**Ejercicio 1.3.3** (Die magnetische Kraft). Ein punktförmiges Teilchen mit einer Ladung  $q = -3,64 \text{ nC}$  bewegt sich mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v} = 2,75 \cdot 10^6 \text{ m/s } \vec{e}_x$ , d.h. entlang der x-Achse. Berechnen Sie die Kraft, die folgende Felder auf das Teilchen ausüben:

1.  $\vec{B} = 0,38 \text{ T } \vec{e}_y$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \vec{e}_z = \\ &= -3,64 \cdot 10^{-9} \cdot 2,75 \cdot 10^6 \cdot 0,38 \vec{e}_z = -3,8038 \cdot 10^{-3} \text{ N } \vec{e}_z\end{aligned}$$

2.  $\vec{B} = T 0,75 \vec{e}_x + T 0,75 \vec{e}_y$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \vec{e}_z = \\ &= -3,64 \cdot 10^{-9} \cdot 2,75 \cdot 10^6 \cdot 0,75 \vec{e}_z = -7,5075 \cdot 10^{-3} \text{ N } \vec{e}_z\end{aligned}$$

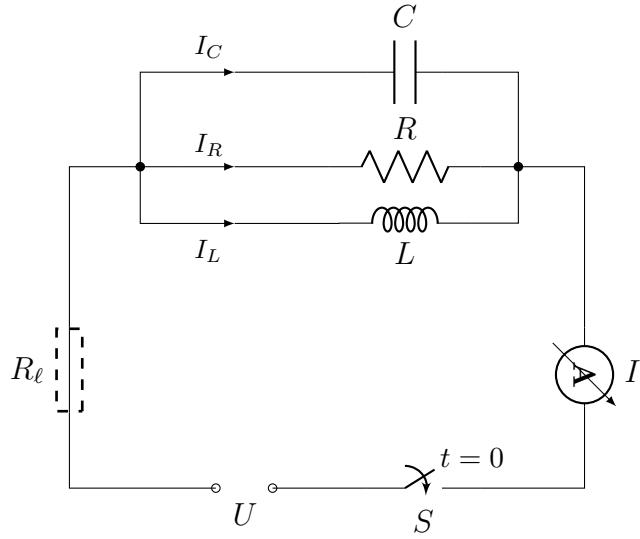


Figura 1.3: Skizze zur Aufgabe 1.5.2

## 1.5. Komplexe Rechnung in physikalisch-technischen Zusammenhängen

**Ejercicio 1.5.1.** Zeigen Sie durch Rechnung in komplexer Form: Drei gleichfrequente, sinusförmige Wechselströme  $i_1$ ,  $i_2$  und  $i_3$  mit den Amplituden  $i_0$ , der Kreisfrequenz  $\omega > 0$  und den Nullphasenwinkeln  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 2/3\pi$  und  $\varphi_3 = 4/3\pi$  löschen sich bei ungestörter Überlagerung gegenseitig aus, d.h.  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ .

Let  $\underline{i}_1(t)$ ,  $\underline{i}_2(t)$  und  $\underline{i}_3(t)$  be:

$$\begin{aligned}\underline{i}_1(t) &= i_0 \cdot e^{j(\omega t+0)} = i_0 \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{i}_2(t) &= i_0 \cdot e^{j(\omega t+2/3\pi)} = i_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j2/3\pi} \\ \underline{i}_3(t) &= i_0 \cdot e^{j(\omega t+4/3\pi)} = i_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j4/3\pi}\end{aligned}$$

Therefore:

$$\begin{aligned}\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \underline{i}_3(t) &= i_0 \cdot e^{j\omega t} (e^{j0} + e^{j2/3\pi} + e^{j4/3\pi}) = \\ &= i_0 \cdot e^{j\omega t} \left( 1 + \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \\ &= i_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Therefore, we have shown that:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = \Im(\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \underline{i}_3(t)) = \Im(0) = 0$$

**Ejercicio 1.5.2** (Resonanz im Parallelschwingkreis). Der in Abbildung 1.3 skizzierte Parallelschwingkreis mit dem ohmschen Widerstand  $R = 10 \Omega$ , der Induktivität  $L = 0,2 \text{ H}$  und der Kapazität  $C = 10 \text{ mF}$  wird durch eine Wechselstromquelle mit dem Effektivwert  $I = 10 \text{ A}$  und der variablen Kreisfrequenz  $\omega$  zu elektromagnetischen Schwingungen angeregt.

1. Im Resonanzfall sind der Gesamtstrom  $I$  und die angelegte Spannung  $U$  in Phase, d.h.  $\varphi_I - \varphi_U = 0$ . Bei welcher Kreisfrequenz  $\omega_0$  tritt dieser Fall ein? Wie groß ist dann der komplexe Gesamtwiderstand  $Z$ ?

The complex resistance is:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\sqrt{2}Ue^{j(\omega t+\varphi_U)}}{\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\varphi_I)}} = \frac{U}{I}e^{j(\varphi_U-\varphi_I)} \stackrel{(*)}{=} \frac{U}{I}e^{j0} = \frac{U}{I} \in \mathbb{R}$$

where in  $(*)$  we used the fact that in resonance  $\varphi_U = \varphi_I$ .

We can calculate the complex resistance as:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}} &= \frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_C} \\ &= \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \\ \Rightarrow \underline{Z} &= \frac{1}{\frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} + j\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)} \end{aligned}$$

Given that  $\underline{Z} \in \mathbb{R}$ , we have that the imaginary part must be zero:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\omega_0 L} + \omega_0 C &= 0 \implies \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \implies \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \implies \\ \implies \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{0,2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}} = \sqrt{500} \approx 22,36 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Therefore, we have that:

$$\underline{Z} = Z = R = 10 \Omega$$

2. Wie ändert sich die Situation, wenn die Zuleitungen nicht mehr als ideal angenommen werden und einen ohmschen Widerstand  $R_\ell$  beitragen? Welche Werte haben  $\omega_0$  und  $Z$  dann?

In this case, we have:

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)} + R_\ell$$

Therefore,  $\omega_0$  does not change, but:

$$\underline{Z} = Z = R + R_\ell = 10 + R_\ell$$

**Ejercicio 1.5.3** (Wechselstrommessbrücke). Mit der in Abbildung 1.4 dargestellten Brückenschaltung lässt sich ein unbekannter komplexer Widerstand  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_X$  wie folgt bestimmen: Bei vorgegebenen (komplexen) Widerständen  $\underline{Z}_2$  und  $\underline{Z}_3$  wird der stetig veränderbare komplexe Widerstand  $\underline{Z}_4$  so eingestellt, dass der Brückenzweig A–B stromlos wird. Das in die Brücke geschaltete Wechselstromampermeter mit dem (bekannten) Innenwiderstand  $\underline{Z}_5$  dient dabei lediglich als Nullindikator.

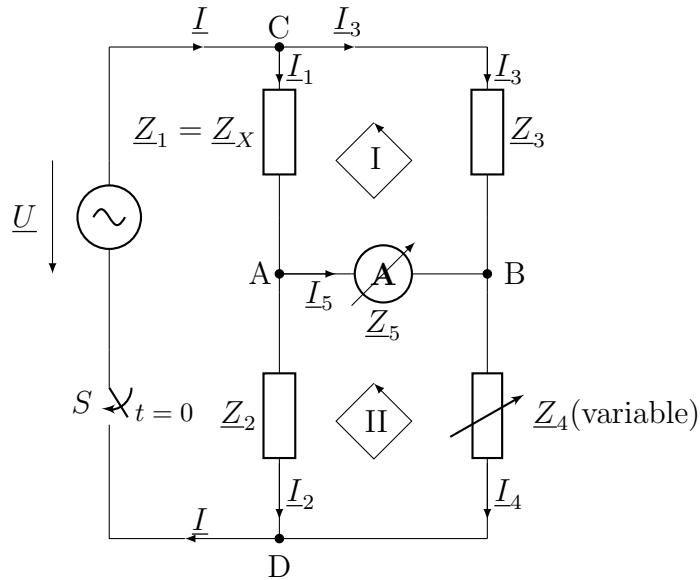


Figura 1.4: Skizze zur Aufgabe 1.5.3.

1. Wie lautet die sogenannte Abgleichbedingung, d.h. die Bedingung für die Stromlosigkeit des Brückenzweiges A-B?

Let's denote  $U_{ij} := \underline{U}_i - \underline{U}_j$  the voltage between nodes  $i$  and  $j$ . According to Kirchhoff's laws, we have that:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{CA} + \underline{U}_{AB} - \underline{U}_{CB} &= 0 \\ \underline{U}_{AD} - \underline{U}_{BD} - \underline{U}_{AB} &= 0\end{aligned}$$

In order that the branch A-B is currentless, we need:

$$0 = I_5 = \frac{\underline{U}_{AB}}{Z_5} \iff \underline{U}_{AB} = 0$$

Therefore, we have:

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{CB} \quad \underline{U}_{AD} = \underline{U}_{BD} \quad (1.1)$$

Using now Kirchhoff's Intensity Law on nodes A and B, taking into account that  $I_5 = 0$ , we have:

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 &= \underline{I}_4\end{aligned}$$

Using Ohm's Law, we have:

$$\frac{\underline{U}_{CA}}{Z_1} = \frac{\underline{U}_{AD}}{Z_2} \quad \frac{\underline{U}_{CB}}{Z_3} = \frac{\underline{U}_{BD}}{Z_4} \quad (1.2)$$

Unifying Equations (1.1) and (1.2), we obtain:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{U}_{CA}}{Z_1} &= \frac{\underline{U}_{AD}}{Z_2} \implies \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{U}_{AD}} = \frac{Z_1}{Z_2} \\ \frac{\underline{U}_{CA}}{Z_3} &= \frac{\underline{U}_{AD}}{Z_4} \implies \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{U}_{AD}} = \frac{Z_3}{Z_4}\end{aligned}$$

We should denote that we can divide by  $\underline{U}_{AD}$  because if  $\underline{U}_{AD} = 0$ , then  $\underline{U}_{BD} = \underline{U}_{AD} = 0$  and therefore  $\underline{I}_2 = \underline{I}_4 = 0$ , which according to the Kirchhoff's Intensity Law implies that  $\underline{I} = 0$ , which would mean that  $\underline{U} = 0$ , which is not the case.

Therefore, we have the balance condition:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \implies \underline{Z}_1 \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3$$

2. In einem konkreten Fall haben die festen Widerstände  $\underline{Z}_2$  und  $\underline{Z}_3$  folgende Werte:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_2 &= 10\Omega - j \cdot 2\Omega, \\ \underline{Z}_3 &= 8\Omega - j \cdot 6\Omega.\end{aligned}$$

Die Brücke A–B wird dabei genau dann stromlos, wenn der variable Widerstand  $\underline{Z}_4$  auf den Wert

$$\underline{Z}_4 = 5\Omega - j \cdot 2\Omega$$

eingestellt wird. Welchen Wert besitzt dann der (zunächst noch unbekannte) Widerstand  $\underline{Z}_X$ ?

Using the balance condition obtained in the previous part, we obtain:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_X &= \underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \\ &= \frac{(10 - 2j)(8 - 6j)}{5 - 2j} = \\ &= \frac{492}{29}\Omega - j \cdot \frac{244}{29}\Omega \approx 16,97\Omega - j \cdot 8,41\Omega\end{aligned}$$

**Ejercicio 1.5.4** (Wechselstromparadoxon). Der in Bild 1.5 dargestellte Wechselstromkreis enthält die ohmschen Widerstände  $R$  und  $R_x$  und einen zu  $R_x$  parallel geschalteten Kondensator mit der Kapazität  $C$ . Beim Anlegen einer Wechselspannung  $\underline{U}$  mit der Kreisfrequenz  $\omega$  fließt der Gesamtstrom  $\underline{I}$ , dessen Effektivwert  $I$  durch das zugeschaltete Wechselstrommessgerät  $A$  gemessen wird. Der Innenwiderstand  $R_i$  des Geräts sei im Widerstand  $R$  bereits enthalten. Zeigen Sie: Der ohmsche Widerstand  $R_x$  lässt sich so wählen, dass die Stromanzeige unabhängig ist von der Stellung des Schalters  $S$  (geschlossen oder offen; sog Wechselstromparadoxon).

We have two options:

- Switch open: In this case, everything is connected in serial and  $\underline{I}_1 = 0$ . Therefore:

$$\underline{Z}_{\text{open}} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{1}{\omega C} \cdot j$$

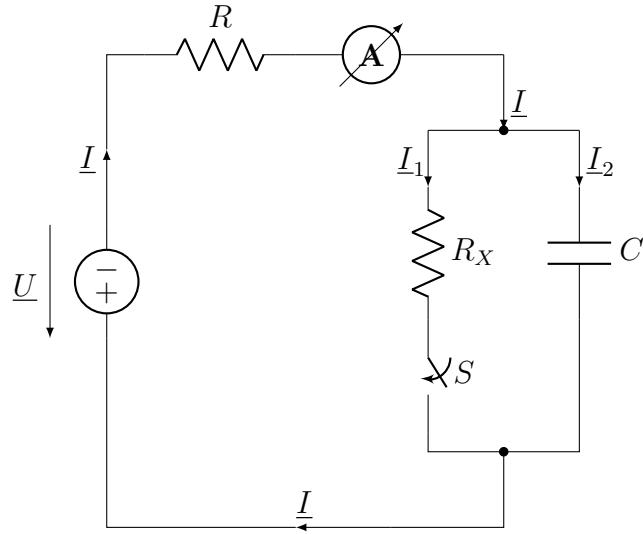


Figura 1.5: Skizze zur Aufgabe 1.5.4.

■ Switch closed:

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_{\text{closed}} &= R + \frac{1}{\frac{1}{R_X} + j\omega C} = \left( R + \frac{\frac{1}{R_X}}{\frac{1}{R_X^2} + \omega^2 C^2} \right) - \frac{j\omega C}{\frac{1}{R_X^2} + \omega^2 C^2} = \\
 &= \left( R + \frac{R_X}{1 + (R_X \omega C)^2} \right) - \frac{R_X^2 \omega C}{1 + (R_X \omega C)^2} \cdot j = \\
 &= \frac{R(1 + (R_X \omega C)^2) + R_X}{1 + (R_X \omega C)^2} - \frac{R_X^2 \omega C}{1 + (R_X \omega C)^2} \cdot j
 \end{aligned}$$

In order that the current does not depend on the position of the switch, it is needed:

$$\widehat{I}_{\text{closed}} = \widehat{I}_{\text{open}} \implies |I_{\text{closed}}| = |I_{\text{open}}| \implies \left| \frac{U_{\text{closed}}}{Z_{\text{closed}}} \right| = \left| \frac{U_{\text{open}}}{Z_{\text{open}}} \right|$$

Given that  $U_{\text{open}} = U_{\text{closed}}$ , we only need that:

$$\begin{aligned}
 |\underline{Z}_{\text{closed}}| &= |\underline{Z}_{\text{open}}| \implies |\underline{Z}_{\text{closed}}|^2 = |\underline{Z}_{\text{open}}|^2 \implies \\
 \implies R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} &= \frac{(R(1 + (R_X \omega C)^2) + R_X)^2 + (R_X^2 \omega C)^2}{(1 + (R_X \omega C)^2)^2} \implies \\
 \implies (R(1 + (R_X \omega C)^2))^2 + \frac{(1 + (R_X \omega C)^2)^2}{\omega^2 C^2} &= (R(1 + (R_X \omega C)^2))^2 + R_X^2 + 2R_X R(1 + (R_X \omega C)^2) + (R_X^2 \omega C)^2 \implies \\
 \implies \frac{(1 + (R_X \omega C)^2)^2}{\omega^2 C^2} &= R_X^2 + 2R_X R(1 + (R_X \omega C)^2) + (R_X^2 \omega C)^2 \implies \\
 \implies 1 + 2(R_X \omega C)^2 &= (R_X \omega C)^2 + 2\omega^2 C^2 R_X R(1 + (R_X \omega C)^2) \implies \\
 \implies 1 + (R_X \omega C)^2 &= 2\omega^2 C^2 R_X R(1 + (R_X \omega C)^2) \implies \\
 \implies (2\omega^2 C^2 R_X R - 1)(1 + (R_X \omega C)^2) &= 0
 \end{aligned}$$

Therefore, the only possible solution is:

$$R_X = \frac{1}{2R(\omega C)^2}$$

Using that value of  $R_X$ , we will measure the same current value with the switch opened and closed.

## 1.8. Ableitungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher

**Ejercicio 1.8.1** (Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung). Bilden Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 \cdot e^{-xy} \end{aligned}$$

The partial derivatives of first order are:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xe^{-xy} - x^2ye^{-xy} = e^{-xy}(2x - x^2y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -x^3e^{-xy} \end{aligned}$$

The partial derivatives of second order are:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (e^{-xy}(2x - x^2y)) = -ye^{-xy}(2x - x^2y) + e^{-xy}(2 - 2xy) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (-x^3e^{-xy}) = x^4e^{-xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (-x^3e^{-xy}) = -3x^2e^{-xy} + x^3ye^{-xy} \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.8.2** (Eine Differenzialgleichung). Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto e^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x) \end{aligned}$$

eine Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (a \in \mathbb{R} \text{ const.})$$

Let's compute the partial derivatives:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) &= -\pi^2 a^2 e^{-\pi^2 a^2 t} \sin(\pi x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) &= -\pi^2 e^{-\pi^2 a^2 t} \sin(\pi x) \end{aligned}$$

Therefore, it is clear that it is a solution of the given equation.

**Ejercicio 1.8.3** (Totales Differenzial einer gebrochen rationalen Funktion). Bestimmen Sie das totale Differenzial der Funktion

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{x^2 + y^2}{y - x} \end{aligned}$$

To find the total differential of the function, we first compute the partial derivatives:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x(y - x) + (x^2 + y^2)}{(y - x)^2} = \frac{-x^2 + 2xy + y^2}{(y - x)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{2y(y - x) - (x^2 + y^2)}{(y - x)^2} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(y - x)^2} \end{aligned}$$

## 1.9. Kurvenintegrale

**Ejercicio 1.9.1** (Kurvenintegral erster Art). Berechnen Sie das Kurvenintegral erster Art  $\int_{\varphi_1} f dt$  für die skalarwertige Funktion

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

über die parametrisierte Kurve

$$\begin{aligned} \varphi_1 : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (t \cos(t), t \sin(t), t) \end{aligned}$$

First of all, we compute the derivative of the parameterization:

$$\varphi'_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - t \sin(t) \\ \sin(t) + t \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

We then realize that  $\phi$  is differentiable, and given that the third component is constant and non-zero, we can conclude that the parameterization is regular. Therefore, in order to compute the norm of the derivative, we have:

$$\begin{aligned} \|\varphi'_1(t)\| &= \sqrt{(\cos(t) - t \sin(t))^2 + (\sin(t) + t \cos(t))^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\cos^2(t) - 2t \sin(t) \cos(t) + t^2 \sin^2(t) + t^2 \cos^2(t) + \sin^2(t) + 2t \sin(t) \cos(t) + t^2 \cos^2(t) + 1} \\ &= \sqrt{1 + t^2 + 1} = \sqrt{t^2 + 2} \end{aligned}$$

Therefore, we can now compute the curve integral:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1} f dt &= \int_0^{2\pi} f(\varphi_1(t)) \|\varphi'_1(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2 + 2} \cdot \sqrt{t^2 + 2} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} t \sqrt{t^2 + 2} dt \end{aligned}$$

We use the substitution given by:

$$\begin{aligned} \Phi : [2, 4\pi^2 + 2] &\longrightarrow [0, 2\pi] \\ u &\longmapsto \sqrt{u - 2} \end{aligned}$$

Thus, using  $t = \Phi(u)$ , we have:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1} f dt &= \sqrt{2} \int_{\Phi^{-1}(0)}^{\Phi^{-1}(2\pi)} \Phi(u) \sqrt{\Phi(u)^2 + 2} \cdot \Phi'(u) du \\ &= \sqrt{2} \int_2^{4\pi^2+2} \sqrt{u - 2} \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u-2}} du = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_2^{4\pi^2+2} \sqrt{u} du = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_2^{4\pi^2+2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} [u^{3/2}]_2^{4\pi^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{3} ((4\pi^2 + 2)^{3/2} - 2^{3/2}) \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.9.2** (Kurvenintegral zweiter Art). Berechnen Sie das Kurvenintegral zweiter Art  $\int_{\varphi_2} \vec{f} d\vec{s}$  für das Vektorfeld

$$\begin{aligned}\vec{f} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x - z, y^2, 1)\end{aligned}$$

über die parametrisierte Kurve

$$\begin{aligned}\varphi_2 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (t^2, t, e^t)\end{aligned}$$

We first compute the derivative of the parameterization:

$$\varphi'_2(t) = (2t, 1, e^t)$$

We then realize that  $\phi$  is differentiable, and given that the third component is non-zero, we can conclude that the parameterization is regular. Then, the dot product  $\vec{f}(\varphi_2(t)) \cdot \varphi'_2(t)$  is given by:

$$\begin{aligned}\vec{f}(\varphi_2(t)) \cdot \varphi'_2(t) &= (t^2 - e^t, t^2, 1) \cdot (2t, 1, e^t) \\ &= 2t^3 - 2te^t + t^2 + e^t\end{aligned}$$

Therefore, we can now compute the curve integral:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_2} \vec{f} d\vec{s} &= \int_0^1 \vec{f}(\varphi_2(t)) \cdot \varphi'_2(t) dt \\ &= \int_0^1 2t^3 - 2te^t + t^2 + e^t dt\end{aligned}$$

Let's firstly compute the integral of  $te^t$  using integration by parts:

$$\begin{bmatrix} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v(t) = e^t & v'(t) = e^t \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 te^t dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt$$

Now, we can compute the entire integral:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_2} \vec{f} d\vec{s} &= \left[ 2 \cdot \frac{t^4}{4} - 2(te^t - e^t) + \frac{t^3}{3} + e^t \right]_0^1 = \left[ \frac{t^4}{2} - 2te^t + 3e^t + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} - 2e + 3e + \frac{1}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + e\end{aligned}$$

**Ejercicio 1.9.3** (Länge einer Kurve). Berechnen Sie die Länge der Kurve  $C$  mit der Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}\varphi : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto 1 - t^2\end{aligned}$$

*Observación.* Man denke an die Voraussetzung zur Längenberechnung mittels Kurvenintegralen, dass die Parameterdarstellung regulär sein muss, d.h.  $\varphi'(t) \neq \vec{0}$ . Ist dies nicht für alle Punkte der Kurve der Fall, berechnet man die Länge abschnittsweise.

Given that  $x(t)$  is injective, we realize that  $\varphi$  is also injective. Let's compute the derivative of the parameterization:

$$\varphi'(t) = (3t^2, -2t)$$

We realize that  $\varphi$  is differentiable, and that  $\varphi'(t) = \vec{0}$  only at  $t = 0$ . Therefore, we will compute the length of the curve in two parts: in  $[-1, 0]$  and in  $[0, 1]$ . Thus, we compute the norm of the derivative:

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(3t^2)^2 + (-2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2} = \sqrt{t^2(9t^2 + 4)} = |t|\sqrt{9t^2 + 4}$$

Therefore, we can now compute the length of the curve:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^0 \|\varphi'(t)\| dt + \int_0^1 \|\varphi'(t)\| dt \\ &= \int_{-1}^0 -t\sqrt{9t^2 + 4} dt + \int_0^1 t\sqrt{9t^2 + 4} dt \end{aligned}$$

We use the substitution given by:

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto u = 9t^2 + 4 \end{aligned}$$

In both intervals,  $\Phi$  is bijective. Thus, using  $t = \Phi^{-1}(u)$ , we have:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\Phi(-1)}^{\Phi(0)} -\Phi^{-1}(u)\sqrt{u} \cdot (\Phi^{-1})'(u) du + \int_{\Phi(0)}^{\Phi(1)} \Phi^{-1}(u)\sqrt{u} \cdot (\Phi^{-1})'(u) du \\ &= \int_{13}^4 -\Phi^{-1}(u)\sqrt{u} \cdot \frac{1}{2\Phi^{-1}(u)} \cdot \frac{1}{9} du + \int_4^{13} \Phi^{-1}(u)\sqrt{u} \cdot \frac{1}{2\Phi^{-1}(u)} \cdot \frac{1}{9} du = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{18} \int_4^{13} \sqrt{u} du = \frac{1}{9} \left[ \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_4^{13} = \frac{2}{27} (13^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{26\sqrt{13} - 16}{27} \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.9.4** (Flächeninhalt einer Ellipse). Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt  $F$  einer Ellipse  $E$ , die durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschrieben wird,  $F = \pi ab$  ist.

*Observación.* Verwenden Sie die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (a \cos t, b \sin t) \end{aligned}$$

We first compute the derivative of the parameterization:

$$\varphi'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$$

We then realize that  $\varphi$  is differentiable, and given that  $a, b > 0$  and that both  $\sin t$  and  $\cos t$  cannot be zero at the same time, we can conclude that the parameterization is regular. Given that the curve goes around the ellipse counter-clockwise, we can use the following formula to compute the area:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \int_{\varphi} (-y, x) \cdot d\vec{x} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-b \sin t, a \cos t) \cdot (-a \sin t, b \cos t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \sin^2 t + ab \cos^2 t dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} 1 dt = \frac{ab}{2} \cdot 2\pi = \pi ab \end{aligned}$$

## 1.10. Potenzialfelder und Mehrfachintegrale

**Ejercicio 1.10.1** (Kurvenintegral einer Funktion mit Potenzial). Im  $\mathbb{R}^2$  ist eine Kurve gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}\varphi : [0, \pi/2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\sin t, t)\end{aligned}$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral  $\int_{\varphi} \vec{f} \cdot d\vec{s}$  für:

$$\begin{aligned}\vec{f} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \frac{2xy + 2\cos(y)}{x^2 - 2x\sin(y) + 1}\end{aligned}$$

*Observación.* Prüfen Sie, ob  $\vec{f}$  ein Potenzial hat und nutzen Sie es ggf. aus.

**Ejercicio 1.10.2** (Doppelintegral mit e-Funktion). Berechnen Sie

$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{x/y} dx dy$$

**Ejercicio 1.10.3** (Flächenberechnung mit Doppelintegral). Ein Flächenstück wird durch die Kurven  $x = 0$ ,  $y = 2x$ ,  $y = 1/ax^2 + a$ ,  $a > 0$  berandet. Berechnen Sie den Flächeninhalt  $A$  mit Hilfe eines Doppelintegrals.

**Ejercicio 1.10.4** (Flächeninhalt mit Polarkoordinaten). Die Randkurve eines Gebiets in der Ebene wird durch die Gleichung

$$r = 2(\cos(\varphi) + \sin(\varphi))$$

in Polarkoordinaten beschrieben. Berechnen Sie den Flächeninhalt  $A$  dieses Gebiets.

**Ejercicio 1.10.5** (Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten). Berechnen Sie das folgende in Zylinderkoordinaten gegebene Integral:

$$I = \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{r^2} rz \cdot \sin(\varphi) dz dr d\varphi.$$