# Topología II
# Examen VII

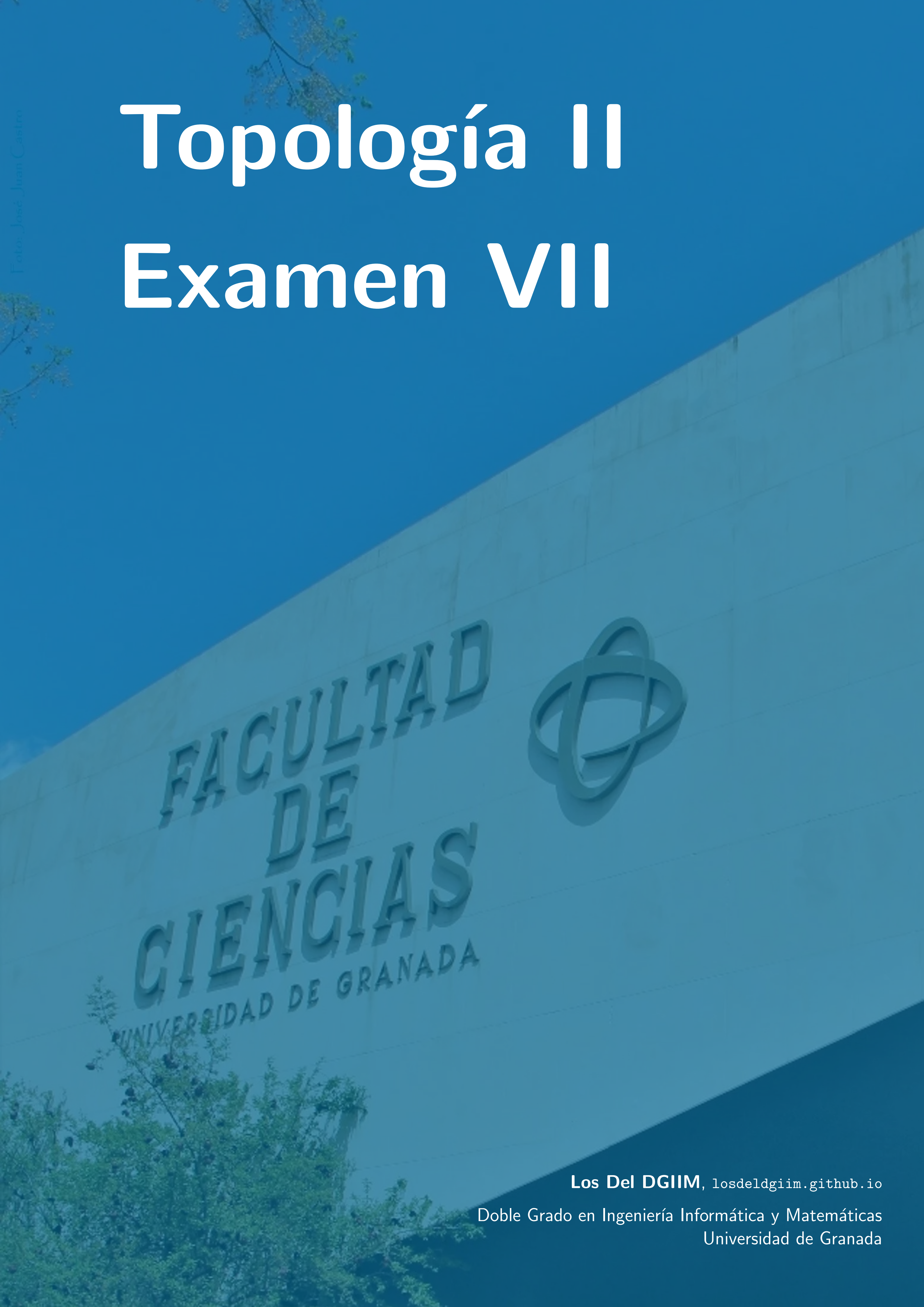


Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Topología II
# Examen VII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

**Asignatura** Topología II.

**Curso Académico** 2025/26.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Grupo Único.

**Profesor** José Antonio Gálvez.

**Descripción** Examen del Tema 1.

**Fecha** 28 de noviembre de 2025.

**Duración** Una hora.

**Ejercicio 1** (5 puntos)**.** Elija una pregunta de las siguientes:

a) Sea $T$ un toro de $\mathbb{R}^3$. Prueba que no existe una retracción $r : \mathbb{R}^3 \to T$.

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación continua y acotada. Demuestra que existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_0) = x_0$.

**Ejercicio 2.** Sean $R_1$ y $R_2$ las rectas de $\mathbb{R}^3$ con ecuaciones paramétricas respectivas $(\lambda, 0, -1)$ y $(\mu, 0, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Calcula el grupo fundamental de

$$X = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \cup R_1 \cup R_2$$

en el punto $p_0 = (1, 0, 0)$. Determina lazos basados en $p_0$ cuyas clases de equivalencia generen $\pi_1(X, p_0)$.

**Solución.**

**Ejercicio 1** (5 puntos)**.** Elija una pregunta de las siguientes:

a) Sea $T$ un toro de $\mathbb{R}^3$. Prueba que no existe una retracción $r : \mathbb{R}^3 \to T$.

Por reducción al absurdo, si existiera una retracción $r : \mathbb{R}^3 \to T$ tendríamos entonces que fijado $x \in T$ la inclusión $i : T \to \mathbb{R}^3$ induce un homomorfismo de grupos inyectivo $i_* : \pi_1(T, x) \to \pi_1(\mathbb{R}^3, x)$, pero tenemos que $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo, con lo que $\pi_1(\mathbb{R}^3, x) = \{[\varepsilon_x]\}$ y sabemos además que:

$$\pi_1(T, x) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Por lo que tenemos un homomorfismo de grupos $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \{1\}$ inyectivo, hemos llegado a una contradicción.

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación continua y acotada. Demuestra que existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Tenemos que existe $R \in \mathbb{R}^+$ de forma que:

$$f(\mathbb{R}^2) \subseteq \overline{B}(0, R)$$

de esta forma, tenemos que la aplicación $\overline{f} : \overline{B}(0, R) \to \overline{B}(0, R)$ es continua. Como $\overline{B}(0, R)$ es homeomorfo a $\overline{\mathbb{D}}$, el Teorema del punto fijo de Brouwer nos dice que existe $x_0 \in \overline{B}(0, R)$ de forma que:

$$x_0 = \overline{f}(x_0) = f(x_0)$$

**Ejercicio 2.** Sean $R_1$ y $R_2$ las rectas de $\mathbb{R}^3$ con ecuaciones paramétricas respectivas $(\lambda, 0, -1)$ y $(\mu, 0, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Calcula el grupo fundamental de

$$X = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \cup R_1 \cup R_2$$

en el punto $p_0 = (1, 0, 0)$. Determina lazos basados en $p_0$ cuyas clases de equivalencia generen $\pi_1(X, p_0)$.

Está resuelto en el Examen 6.