Topología I
Examen XI

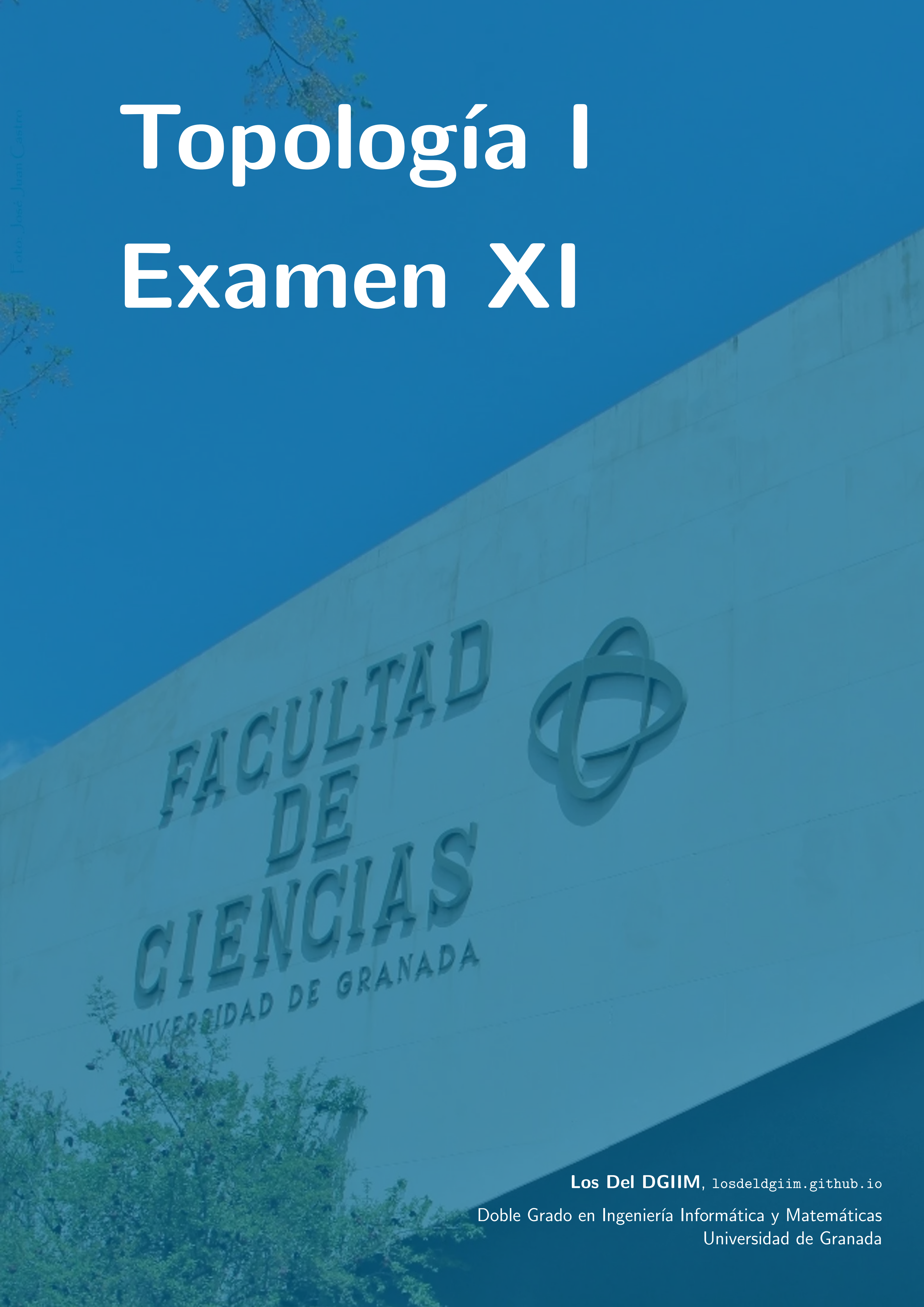

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología I
Examen XI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2024-2025

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Alarcón.

Descripción Segundo Parcial.

Fecha 13 de diciembre de 2024.

Duración 90 minutos.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Dados espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$, demuestra que la proyección

$$\pi_Y : (X, Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$$

es continua y abierta. Da un ejemplo que demuestre que, en general, no es cerrada.

Veamos en primer lugar que π_Y es continua. Sea $U \in \mathcal{T}'$, tenemos que $\pi_Y^{-1}(U') = \{(x, y) \in X \times Y : y \in U'\} = X \times U' \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ por lo que es continua.

Veamos ahora que es abierta. Para ello consideramos la siguiente base de la topología producto:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'} = \{U \times U' : U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'\}$$

Sea $U \times U' \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'}$, entonces tenemos $\pi_Y(U \times U') = U' \in \mathcal{T}'$.

Veamos además que en general no es cerrada. Para ello consideramos la topología $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ que es la topología producto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ consigo misma. Consideramos además la función $f : \mathbb{R} \to]{-\pi/2}, \pi/2[$ dada por $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$. Consideramos ahora el grafo de f definido como $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$. Sin embargo tenemos que $\pi_Y(G(f)) =]{-\pi/2}, \pi/2[\notin \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$ por lo que en esta topología la proyección no es cerrada ya que $\exists C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ tal que $\pi_Y(C) \notin \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio tologógico y supongamos que para todo espacio topológico $(Y, \mathcal{T}')$ se tiene que toda aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua. Demuestra que $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

Tomamos $(Y, \mathcal{T}') = (X, \mathcal{T}_{disc})$ y $f = Id_X$. Como la aplicación $Id_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}_{disc})$ es continua por hipótesis, entonces $\mathcal{T}_{disc} \leqslant \mathcal{T}$. Como siempre se da la otra inclusión ($\mathcal{T}_{disc} \geqslant \mathcal{T}$) tenemos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$.

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** En la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ consideramos la topología $\mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}$ inducida por la topología usual $\mathcal{T}_u$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Sea R la relación de equivalencia en $\mathbb{S}^1$ dada por

$$(x, y)R(x', y') \iff x = x'.$$

Demuestra que el espacio topológico cociente $(\mathbb{S}^1/R, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}/R)$ es homeomorfo a $([-1, 1], \mathcal{T}_u|_{[-1,1]})$, donde $\mathcal{T}_u|_{[-1,1]}$ es la topología en el intervalo $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ inducida por la topología usual $\mathcal{T}_u$ de $\mathbb{R}$.

Consideramos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}) &\to ([-1, 1], \mathcal{T}_u) \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

y tenemos lo siguiente:

- f sobreyectiva trivialmente.
- f continua ya que $f = \pi_X|_{\mathbb{S}^1}$ y π_X es continua y la restricción en el dominio de una función continua sigue siendo continua.[1]
- f es cerrada ya que su dominio, $\mathbb{S}^1$ es cerrado y acotado en un espacio euclídeo y su codominio, $[-1,1]$ es un subespacio de un espacio euclídeo. Por el lema visto en clase tenemos que f es cerrada.

Tenemos que f es sobreyectiva, continua y cerrada luego f es una identificación. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_f"'] & {[-1,1]} \\
\mathbb{S}^1/R_f \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] &
\end{tikzcd}$$

Por tanto $\exists \tilde{f} : (\mathbb{S}^1/R_f, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}/R_f) \to ([-1,1], \mathcal{T}_u|_{[-1,1]})$ homeomorfismo con $f = \tilde{f} \circ \pi_f$. Nos queda comprobar que $R_f = R$.

En efecto, si $(x,y), (x',y') \in \mathbb{S}^1$, entonces

$$(x,y)R(x',y') \iff f(x,y) = f(x',y') \iff x = x' \iff (x,y)R(x',y')$$

2. Sea R' la relación de equivalencia en $\mathbb{S}^1$ dada por

$$(x,y)R'(x',y') \iff (x,y) = (x',y') \text{ o } x = x' \neq 0.$$

Demuestra que los espacios topológicos cociente $(\mathbb{S}^1/R, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}/R)$ y $(\mathbb{S}^1/R', \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}/R')$ no son homeomorfos, donde R es la relación de equivalencia del apartado anterior.

Por el apartado anterior teníamos que $(\mathbb{S}^{\nVdash}/R, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}/R) \cong ([-1,1], \mathcal{T}_u|_{[-1,1]})$ que es T2, luego $(\mathbb{S}^{\nVdash}/R, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}/R)$ es T2. Como ser T2 es un invariante topológico, si comprobamos que $(\mathbb{S}^1/R', \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1})$ no es T2 habremos probado lo que queríamos.

Si $(x,y) \in \mathbb{S}^1$, tenemos que su clase de equivalencia es

- $[(x,y)] = \{(x,y), (x,-y)\}$ si $x \neq 0$
- $[(0,1)] = \{(0,1)\}$
- $[(0,-1)] = \{(0,-1)\}$

Veamos que la propiedad T2 no se cumple para los puntos $[(0,-1)]$ y $[(0,-1)]$ que son distintos en $\mathbb{S}^1/R'$. Sean $\tilde{U}_1$ y $\tilde{U}_{-1}$ entornos de $[(0,1)]$ y $[(0,-1)]$ en $\mathbb{S}^1/R'$ respectivamente. Entonces $\tilde{U}_1 = p_{R'}(U_1)$ con $p_{R'} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1/R'$ la proyección y U_1 un entorno $p_{R'}-$saturado de $(0,1)$ en $\mathbb{S}^1$. Como U_1 es entorno de $(0,1)$, tenemos que existe $\varepsilon > 0$ (si queremos $\varepsilon < 1$) tal que

[1]También se puede ver que es continua con argumentos de análisis.

$\{(x, \sqrt{1-x^2}) : x \in (-\varepsilon, \varepsilon)\} \subset U_1$.

Como además U_1 es $p_{R'}-$saturado, los puntos de $\mathbb{S}^1$ que están $R'-$relacionados con esos también están en U_1, luego $\{(x, -\sqrt{1-x^2}) : x \in (-\varepsilon, \varepsilon), x \neq 0\} \subset U_1$. De esta forma tenemos que

$$(\{x, \sqrt{1-x^2} : x \in (-\varepsilon, \varepsilon)\} \cup \{(x, -\sqrt{1-x^2}) : x \in (-\varepsilon, \varepsilon), x \neq 0\}) \subset U_1$$

Análogamente, tenemos que $\exists \varepsilon' > 0$ tal que

$$(\{x, \sqrt{1-x^2} : x \in (-\varepsilon', \varepsilon')\} \cup \{(x, -\sqrt{1-x^2}) : x \in (-\varepsilon', \varepsilon'), x \neq 0\}) \subset U_{-1}$$

luego $U_1 \cap U_{-1} \neq \emptyset$.

Esto implica que $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_{-1} = p_{R'}(U_1) \cap p_{R'}(U_{-1}) \neq \emptyset$ puesto que

$$\emptyset \neq p_{R'}(U_1 \cap U_{-1}) \subset p_{R'}(U_1) \cap p_{R'}(U_{-1})$$

Hemos comprobado entonces que $(\mathbb{S}^1/R', \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1})$ no es T2, luego no puede ser homeomorfo a $(\mathbb{S}^1/R, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1}/R)$.