

# Inferencia Estadística

## Examen V

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA





Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Inferencia Estadística Examen V

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Granada, 2026

**Asignatura** Inferencia Estadística.

**Curso Académico** 2021-22.

**Grado** Grado en Matemáticas y Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Descripción** Examen Ordinario.

**Ejercicio 1** (2.5 puntos). Sea  $(X_1, \dots, X_n)$  una muestra aleatoria simple de una variable con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \frac{\sqrt{\theta-1}}{2} x^{-3/2}, \quad x > \theta - 1$$

- a) Determinar para qué valores de  $n$  existe el UMVUE para  $\theta$ , y encontrarlo en tales casos. Justificar la existencia en los casos que corresponda.
- b) Calcular la función de verosimilitud y encontrar el estimador máximo verosímil de  $\theta$ . ¿Es insesgado? (justificar la respuesta).

**Ejercicio 2** (2.25 puntos).

- a) Sea  $X$  una variable aleatoria continua con distribución en una familia regular en el sentido de Fréchet-Cramér-Rao, cuyas funciones de densidad son de la forma:

$$f_\theta(x) = \exp[Q(\theta)T(x) + D(\theta) + S(x)], \quad x \in \mathcal{X}, \quad \theta \in \Theta$$

siendo  $T(X)$  un estadístico regular, insesgado en  $\theta^3$ , tal que  $Var_\theta[T(X)] = \theta^2$ . Calcular las funciones  $Q(\theta)$  y  $D(\theta)$ , sabiendo que  $Q(1) = 0$  y  $D(0) = 1$ .

- b) Sea  $(X_1, \dots, X_n)$  una muestra aleatoria simple de una variable  $X$  con función masa de probabilidad:

$$P_p[X = x] = p^2(x-1)(1-p)^{x-2}, \quad x = 2, 3, \dots; \quad 0 < p < 1$$

$$\left( E_p[X] = \frac{2}{p}, \quad Var_p[X] = \frac{2(1-p)}{p^2} \right)$$

- a) Sabiendo que la familia de distribuciones es regular, calcular la función de información asociada a la muestra. Encontrar la clase de funciones paramétricas que admiten estimador eficiente y los estimadores correspondientes.
- b) Calcular la cota para la varianza de estimadores insesgados en  $p^2$ , regulares, y justificar si se alcanza o no dicha cota.

**Ejercicio 3** (2 puntos). Sea  $(X_1, \dots, X_n)$  una muestra aleatoria simple de una variable  $X$  con distribución  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , siendo ambos parámetros desconocidos.

- a) Especificar la variable usada para hacer inferencia sobre  $\sigma^2$ . Deducir su distribución, detallando y justificando exhaustivamente cada paso.
- b) Deducir, detallando el método usado, el intervalo de confianza de menor longitud esperada uniformemente para  $\mu$  a nivel de confianza  $1 - \alpha$ .

**Ejercicio 4** (1.75 puntos). El retraso medio diario (en minutos) de los trabajadores de cierta empresa tiene una distribución  $U(0, \theta)$ . Para contrastar la hipótesis de que el máximo retraso medio diario es de 5 minutos frente a que es de 4 minutos, se midió dicha variable durante 10 días elegidos al azar, observando que el máximo retraso medio en esos 10 días fue de 3 minutos. Obtener los tests más potentes de tamaños 0,05 y 0,15 para el problema de contraste planteado. Decidir, a la vista de lo observado, si debe rechazarse la hipótesis nula en cada uno de los casos.