

# Análisis Funcional

## Examen III

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Análisis Funcional

## Examen III

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Granada, 2025

**Asignatura** Análisis Funcional.

**Curso Académico** 2024/25.

**Grado** Grado en Matemáticas.

**Descripción** Examen Ordinario.

**Fecha** 15 de enero de 2025.

**Ejercicio 1** (2 puntos). Sea  $X = C([0, 1], \mathbb{R})$  el espacio vectorial de las funciones continuas de  $[0, 1]$  a  $\mathbb{R}$ . Se define

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0, 1]\} \quad \forall f \in X$$

y se escribe  $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ ,  $X_\infty = (X, \|\cdot\|_\infty)$ . Definimos el funcional lineal  $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\delta(f) = f(0) \quad \forall f \in X$$

- Demuestra que  $\delta \in X_\infty^*$  y calcula su norma.
- ¿Es  $\delta$  continuo respecto a  $\|\cdot\|_1$ ? Justifica tu respuesta.
- ¿Son equivalente  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_\infty$  en  $X$ ? Justifica tu respuesta.
- ¿Es  $X_1$  completo? Justifica tu respuesta.

**Ejercicio 2** (2 puntos). Sea  $X$  un espacio reflexivo e  $Y$  un espacio de Banach. Pruébese que si existe  $T \in L(X, Y)$  sobreyectiva, entonces  $Y$  es reflexivo.

**Ejercicio 3** (2 puntos). Sean  $S : c_0 \rightarrow c_0$  y  $T : l_1 \rightarrow l_1$  operadores lineales y supongamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} [Sx](k)y(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)[Ty](k) \quad \forall x \in c_0, \quad \forall y \in l_1$$

Demuestra que  $S$  y  $T$  son continuos.

**Ejercicio 4** (4 puntos). Desarrolla el siguiente tema: “*Mejor aproximación en espacios de Hilbert; teorema de la proyección ortogonal; teorema de Riesz-Fréchet*”.

**Ejercicio 5.** (Ejercicio extra)

Sean  $X, Y$  espacios normados y  $T : X \rightarrow Y$  un operador verificando que  $\overline{T(B_X)}$  es un subconjunto compacto de  $Y$ . Demuestra que  $T^*$  alcanza su norma.

**Ejercicio 1** (2 puntos). Sea  $X = C([0, 1], \mathbb{R})$  el espacio vectorial de las funciones continuas de  $[0, 1]$  a  $\mathbb{R}$ . Se define

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0, 1]\} \quad \forall f \in X$$

y se escribe  $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ ,  $X_\infty = (X, \|\cdot\|_\infty)$ . Definimos el funcional lineal  $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\delta(f) = f(0) \quad \forall f \in X$$

a) Demuestra que  $\delta \in X_\infty^*$  y calcula su norma.

Veamos que  $\delta \in X_\infty^*$ :

- $\delta$  es lineal, pues si  $f, g \in X$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  tenemos que:

$$\delta(\lambda f + g) = (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda \delta(f) + \delta(g)$$

- $\delta$  es continuo, pues si  $f \in X$  tenemos:

$$|\delta(f)| = |f(0)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$$

Por lo que  $\delta \in X_\infty^*$ . De hecho, en el último apartado hemos probado además que  $\|\delta\| \leq 1$ . Veamos que  $\|\delta\| = 1$ , puesto que si consideramos cualquier función  $f \in X$  de forma que  $\max_{t \in [0, 1]} |f(t)| = |f(0)|$  tenemos entonces que:

$$|\delta(f)| = |f(0)| = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$$

- b) ¿Es  $\delta$  continuo respecto a  $\|\cdot\|_1$ ? Justifica tu respuesta.
- c) ¿Son equivalentes  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_\infty$  en  $X$ ? Justifica tu respuesta.
- d) ¿Es  $X_1$  completo? Justifica tu respuesta.