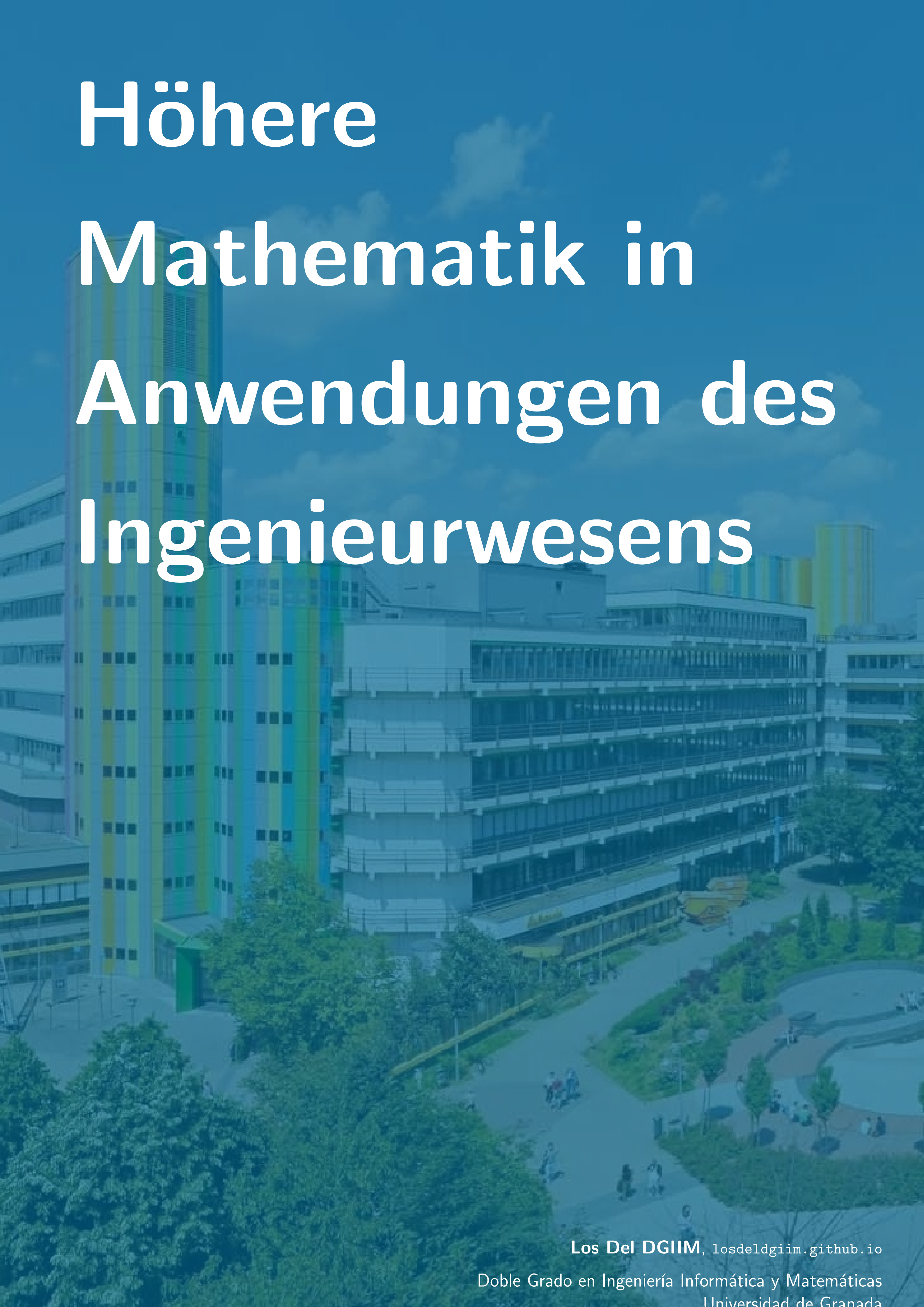

Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Universidad de Granada

Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Übungs Blätter

1.3. Rechnen mit physikalischen Größen

Ejercicio 1.3.1 (Fährverbindung)**.** Eine Fähre bewegt sich mit der Eigengeschwindigkeit $v_0 = 4\,\mathrm{m/s}$ (relativ zum Fluss) vom Uferpunkt A aus auf kürzestem Weg zum gegenüberliegenden Flussufer (Punkt B; Abb. 1.1).

1. Unter welchem Winkel α muss die Fähre gegen die Strömung gesteuert werden, wenn die Geschwindigkeit der Strömung den Betrag $v_s = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$ hat?

   The Ferry wants to get to B in an straight line. Therefore, it must compensate the flow velocity by steering at an angle α against the flow. It is then needed that:

   $$v_s = v_0 \sin(\alpha) \implies \alpha = \arcsin\left(\frac{v_s}{v_0}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}5}{4}\right) \approx 0{,}3844\,\mathrm{rad} \approx 22{,}024\,^\circ$$

2. Wie groß ist dann die resultierende Geschwindigkeit v_r der Fähre?

   The resulting velocity v_r of the ferry is given by:

   $$v_r = v_0 \cos(\alpha) = 4\cos(0{,}3844) \approx 3{,}7081\,\mathrm{m/s}$$

Ejercicio 1.3.2 (Elektrische Punktladungen im Koordinatensystem)**.** Eine Punktladung $q_1 = 6{,}0\,\mu\mathrm{C}$ befindet sich in einem kartesischen Koordinatensystem bei $x_1 = 1{,}0\,\mathrm{m}$, $y_1 = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Eine zweite Ladung $q_2 = -2{,}5\,\mu\mathrm{C}$ befindet sich in dessen Ursprung. Ein Elektron, d.h. eine dritte Punktladung, ist in einem Punkt mit den Koordinaten (x_e, y_e). Berechnen Sie die Werte für x_e und y_e, bei denen sich das

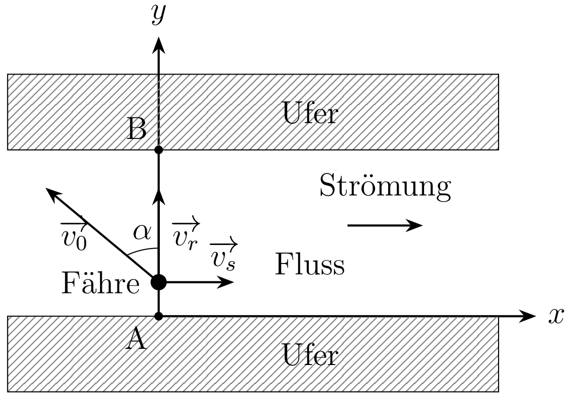

Figura 1.1: Fährverbindung über einen Fluss mit Strömung.

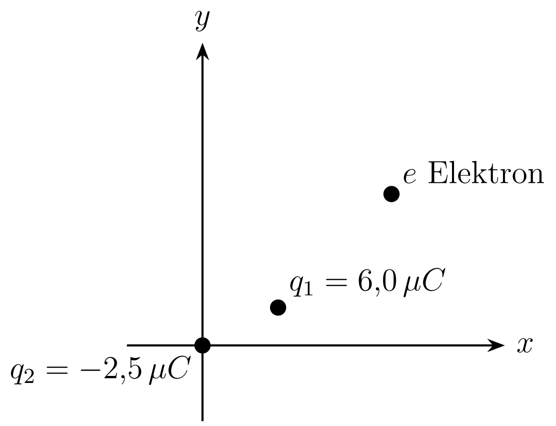

Figura 1.2: Punktladungen im Koordinatensystem.

Elektron im Gleichgewicht befindet, d.h. bei dem die Gesamtkraft auf das Elektron verschwindet.

Option 1 :

The forces acting on the electron due to the other two charges must cancel each other out for equilibrium. Let F_{ei} be the force on the electron due to charge q_i. The forces can be expressed as:

$$\overrightarrow{F}_{e1} + \overrightarrow{F}_{e2} = 0$$

where, using that $q_e = -e < 0$ (the charge of the electron):

$$\overrightarrow{F}_{e1} = -k_e \frac{|q_1 e|}{r_{e1}^2}\ \hat{r}_{e1}, \quad \overrightarrow{F}_{e2} = k_e \frac{|q_2 e|}{r_{e2}^2}\ \hat{r}_{e2}$$

Here, k_e is Coulomb's constant, e is the elementary charge, r_{ei} is the distance between the electron and charge q_i, and $\hat{r}_{ei}$ is the unit vector pointing from charge q_i to the electron. Using the values of r_{e1} and r_{e2} based on the coordinates of the charges and the electron, we have:

$$\overrightarrow{r}_{e1} = (x_e - 1, y_e - 0{,}5), \quad \overrightarrow{r}_{e2} = (x_e, y_e)$$

Therefore, the equilibrium condition becomes:

$$-k_e \frac{|q_1 e|}{((x_e-1)^2 + (y_e - 0{,}5)^2)} \cdot \frac{(x_e - 1, y_e - 0{,}5)}{\sqrt{(x_e-1)^2 + (y_e-0{,}5)^2}} + k_e \frac{|q_2 e|}{(x_e^2 + y_e^2)} \cdot \frac{(x_e, y_e)}{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}} = 0$$

This vector equation can be separated into its x and y components, leading to a system of two equations with two unknowns (x_e and y_e). Solving this system will yield the coordinates of the electron in equilibrium.

$$\begin{aligned} -k_e \frac{|q_1 e|(x_e - 1)}{((x_e-1)^2 + (y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e| x_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} &= 0 \\ -k_e \frac{|q_1 e|(y_e - 0{,}5)}{((x_e-1)^2 + (y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e| y_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} &= 0 \end{aligned}$$

In an easier way:

$$\frac{|q_1|(x_e - 1)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0{,}5)^2)^{3/2}} = \frac{|q_2|x_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}}$$
$$\frac{|q_1|(y_e - 0{,}5)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0{,}5)^2)^{3/2}} = \frac{|q_2|y_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}}$$

As we can see, this system of equations is nonlinear and may require numerical methods or iterative approaches to solve for x_e and y_e. We should then approach the problem using another method.

Option 2 :

Given that $\overrightarrow{F}_{e1} = -\overrightarrow{F}_{e2}$, the forces must have the same magnitude but opposite directions. This implies that the electron must lie along the line connecting the two charges, with $x_e, y_e < 0$. Therefore:

$$y_e = \frac{y_1}{x_1}x_e = \frac{1}{2}x_e$$

On the other hand, equating the magnitudes of the forces:

$$|\overrightarrow{F}_{e1}| = |\overrightarrow{F}_{e2}| \Longrightarrow k_e\frac{|q_1 e|}{r_{e1}^2} = k_e\frac{|q_2 e|}{r_{e2}^2} \Longrightarrow \frac{|q_1|}{r_{e1}^2} = \frac{|q_2|}{r_{e2}^2} \Longrightarrow \frac{|q_1|}{(x_e - 1)^2 + (y_e - 0{,}5)^2} = \frac{|q_2|}{x_e^2 + y_e^2}$$

Therefore, using the relation for y_e in terms of x_e, we have the following equation to solve for x_e:

$$\frac{|q_1|}{(x_e - 1)^2 + \left(\frac{1}{2}x_e - 0{,}5\right)^2} = \frac{|q_2|}{x_e^2 + \left(\frac{1}{2}x_e\right)^2}$$
$$6 \cdot \left(\frac{5}{4}x_e^2\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{5}{4}x_e^2 - 2{,}5x_e + 1{,}25\right)$$
$$4{,}375x_e^2 + 6{,}25x_e - 3{,}125 = 0$$
$$x_e = \frac{-6{,}25 \pm \sqrt{(-6{,}25)^2 - 4 \cdot 4{,}375 \cdot (-3{,}125)}}{2 \cdot 4{,}375} = \frac{-5 \pm 2\sqrt{15}}{7}$$

Given that $x_e < 0$, we take:

$$x_e = -\frac{5 + 2\sqrt{15}}{7} \approx -1{,}8208\,\mathrm{m}$$
$$y_e = \frac{1}{2}x_e = -\frac{5 + 2\sqrt{15}}{14} \approx -0{,}9104\,\mathrm{m}$$

Ejercicio 1.3.3 (Die magnetische Kraft)**.** Ein punktförmiges Teilchen mit einer Ladung $q = -3{,}64\,\mathrm{nC}$ bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $\overrightarrow{v} = 2{,}75 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}\,\overrightarrow{e_x}$, d.h. entlang der x-Achse. Berechnen Sie die Kraft, die folgende Felder auf das Teilchen ausüben:

1. $\overrightarrow{B} = 0{,}38\,\mathrm{T}\ \overrightarrow{e_y}$

$$\overrightarrow{F} = q \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ v_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \overrightarrow{e_z} =$$
$$= -3{,}64 \cdot 10^{-9} \cdot 2{,}75 \cdot 10^{6} \cdot 0{,}38\ \overrightarrow{e_z} = -3{,}8038 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}\ \overrightarrow{e_z}$$

2. $\overrightarrow{B} = T\,0{,}75\ \overrightarrow{e_x} + T\,0{,}75\ \overrightarrow{e_y}$

$$\overrightarrow{F} = q \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \overrightarrow{e_z} =$$
$$= -3{,}64 \cdot 10^{-9} \cdot 2{,}75 \cdot 10^{6} \cdot 0{,}75\ \overrightarrow{e_z} = -7{,}5075 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}\ \overrightarrow{e_z}$$

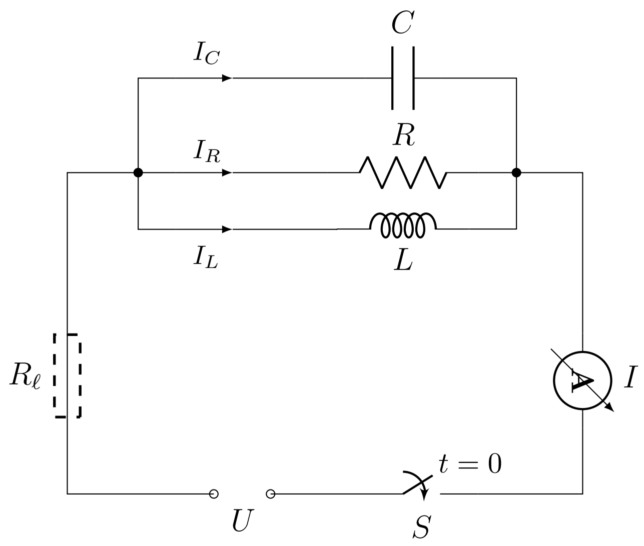

Figura 1.3: Skizze zur Aufgabe 1.5.2

1.5. Komplexe Rechnung in physikalisch-technischen Zusammenhängen

Ejercicio 1.5.1. Zeigen Sie durch Rechnung in komplexer Form: Drei gleichfrequente, sinusförmige Wechselströme i_1, i_2 und i_3 mit den Amplituden i_0, der Kreisfrequenz $\omega > 0$ und den Nullphasenwinkeln $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = {}^2\!/_3\pi$ und $\varphi_3 = {}^4\!/_3\pi$ löschen sich bei ungestörter Überlagerung gegenseitig aus, d.h. $i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

Let $\underline{i}_1(t)$, $\underline{i}_2(t)$ und $\underline{i}_3(t)$ be:

$$\begin{aligned}
\underline{i}_1(t) &= i_0 \cdot e^{\jmath(\omega t+0)} = i_0 \cdot e^{\jmath\omega t}\\
\underline{i}_2(t) &= i_0 \cdot e^{\jmath(\omega t+2/3\pi)} = i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \cdot e^{\jmath 2/3\pi}\\
\underline{i}_3(t) &= i_0 \cdot e^{\jmath(\omega t+4/3\pi)} = i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \cdot e^{\jmath 4/3\pi}
\end{aligned}$$

Therefore:

$$\begin{aligned}
\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \underline{i}_3(t) &= i_0 \cdot e^{\jmath\omega t}\left(e^{\jmath 0} + e^{\jmath 2/3\pi} + e^{\jmath 4/3\pi}\right) =\\
&= i_0 \cdot e^{\jmath\omega t}\left(1 + \left(-\frac{1}{2} + \jmath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \jmath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) =\\
&= i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Therefore, we have shown that:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = \Im\left(\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \underline{i}_3(t)\right) = \Im(0) = 0$$

Ejercicio 1.5.2 (Resonanz im Parallelschwingkreis)**.** Der in Abbildung 1.3 skizzierte Parallelschwingkreis mit dem ohmschen Widerstand $R = 10\,\Omega$, der Induktivität $L = 0{,}2\,\mathrm{H}$ und der Kapazität $C = 10\,\mathrm{mF}$ wird durch eine Wechselstromquelle mit dem Effektivwert $I = 10\,\mathrm{A}$ und der variablen Kreisfrequenz ω zu elektromagnetischen Schwingungen angeregt.

1. Im Resonanzfall sind der Gesamtstrom I und die angelegte Spannung U in Phase, d.h. $\varphi_I - \varphi_U = 0$. Bei welcher Kreisfrequenz ω_0 tritt dieser Fall ein? Wie groß ist dann der komplexe Gesamtwiderstand Z?

   The complex resistance is:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\sqrt{2}Ue^{\jmath(\omega t+\varphi_U)}}{\sqrt{2}Ie^{\jmath(\omega t+\varphi_I)}} = \frac{U}{I}e^{\jmath(\varphi_U-\varphi_I)} \overset{(*)}{=} \frac{U}{I}e^{\jmath 0} = \frac{U}{I} \in \mathbb{R}$$

   where in $(*)$ we used the fact that in resonance $\varphi_U = \varphi_I$.

   We can calculate the complex resistance as:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\underline{Z}} &= \frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_C} \\ &= \frac{1}{R} + \frac{1}{\jmath\omega L} + \jmath\omega C \\ \Longrightarrow \underline{Z} &= \frac{1}{\frac{1}{R} - \jmath\frac{1}{\omega L} + \jmath\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \jmath\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)}\end{aligned}$$

   Given that $\underline{Z} \in \mathbb{R}$, we have that the imaginary part must be zero:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\omega_0 L} + \omega_0 C = 0 &\Longrightarrow \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \Longrightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{0{,}2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}} = \sqrt{500} \approx 22{,}36\,{}^{\text{rad}}/_{\text{s}}\end{aligned}$$

   Therefore, we have that:

$$\underline{Z} = Z = R = 10\,\Omega$$

2. Wie ändert sich die Situation, wenn die Zuleitungen nicht mehr als ideal angenommen werden und einen ohmschen Widerstand R_ℓ beitragen? Welche Werte haben ω_0 und Z dann?

   In this case, we have:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \jmath\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)} + R_\ell$$

   Therefore, ω_0 does not change, but:

$$\underline{Z} = Z = R + R_\ell = 10 + R_\ell$$

Ejercicio 1.5.3 (Wechselstrommessbrücke)**.** Mit der in Abbildung 1.4 dargestellten Brückenschaltung lässt sich ein unbekannter komplexer Widerstand $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_X$ wie folgt bestimmen: Bei vorgegebenen (komplexen) Widerständen $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_3$ wird der stetig veränderbare komplexe Widerstand $\underline{Z}_4$ so eingestellt, dass der Brückenzweig A–B stromlos wird. Das in die Brücke geschaltete Wechselstromamperemeter mit dem (bekannten) Innenwiderstand $\underline{Z}_5$ dient dabei lediglich als Nullindikator.

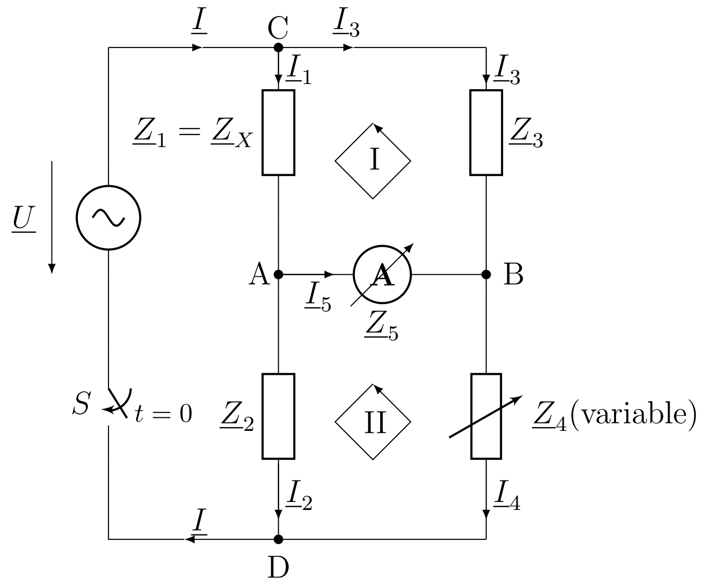

Figura 1.4: Skizze zur Aufgabe 1.5.3.

1. Wie lautet die sogenannte Abgleichbedingung, d.h. die Bedingung für die Stromlosigkeit des Brückenzweiges A-B?

   Let's denote $U_{ij} := \underline{U}_i - \underline{U}_j$ the voltage between nodes i and j. According to Kirchhoff's laws, we have that:

$$\underline{U}_{CA} + \underline{U}_{AB} - \underline{U}_{CB} = 0$$
$$\underline{U}_{AD} - \underline{U}_{BD} - \underline{U}_{AB} = 0$$

   In order that the branch A-B is currentless, we need:

$$0 = \underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_5} \iff \underline{U}_{AB} = 0$$

   Therefore, we have:

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{CB} \qquad \underline{U}_{AD} = \underline{U}_{BD} \tag{1.1}$$

   Using now Kirchhoff's Intensity Law on nodes A and B, taking into account that $\underline{I}_5 = 0$, we have:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2$$
$$\underline{I}_3 = \underline{I}_4$$

   Using Ohm's Law, we have:

$$\frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_{AD}}{\underline{Z}_2} \qquad \frac{\underline{U}_{CB}}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_{BD}}{\underline{Z}_4} \tag{1.2}$$

   Unifying Equations (1.1) and (1.2), we obtain:

$$\frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_{AD}}{\underline{Z}_2} \implies \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{U}_{AD}} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$$
$$\frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_{AD}}{\underline{Z}_4} \implies \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{U}_{AD}} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}$$

We should denote that we can divide by $\underline{U}_{AD}$ because if $\underline{U}_{AD} = 0$, then $\underline{U}_{BD} = \underline{U}_{AD} = 0$ and therefore $\underline{I}_2 = \underline{I}_4 = 0$, which according to the Kirchhoff's Intensity Law implies that $\underline{I} = 0$, which would mean that $\underline{U} = 0$, which is not the case.

Therefore, we have the balance condition:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \Longrightarrow \underline{Z}_1\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\underline{Z}_3$$

2. In einem konkreten Fall haben die festen Widerstände $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_3$ folgende Werte:

$$\underline{Z}_2 = 10\Omega - \jmath \cdot 2\Omega,$$
$$\underline{Z}_3 = 8\Omega - \jmath \cdot 6\Omega.$$

Die Brücke A–B wird dabei genau dann stromlos, wenn der variable Widerstand $\underline{Z}_4$ auf den Wert

$$\underline{Z}_4 = 5\Omega - \jmath \cdot 2\Omega$$

eingestellt wird. Welchen Wert besitzt dann der (zunächst noch unbekannte) Widerstand $\underline{Z}_X$?

Using the balance condition obtained in the previous part, we obtain:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_X = \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \\ &= \frac{(10-2\jmath)(8-6\jmath)}{5-2\jmath} = \\ &= \frac{492}{29}\Omega - \jmath \cdot \frac{244}{29}\Omega \approx 16{,}97\Omega - \jmath \cdot 8{,}41\Omega \end{aligned}$$

Ejercicio 1.5.4 (Wechselstromparadoxon)**.** Der in Bild 1.5 dargestellte Wechselstromkreis enthält die ohmschen Widerstände R und R_x und einen zu R_x parallel geschalteten Kondensator mit der Kapazität C. Beim Anlegen einer Wechselspannung $\underline{U}$ mit der Kreisfrequenz ω fließt der Gesamtstrom $\underline{I}$, dessen Effektivwert I durch das zugeschaltete Wechselstrommessgerät A gemessen wird. Der Innenwiderstand R_i des Geräts sei im Widertstand R bereits enthalten. Zeigen Sie: Der ohmsche Widerstand R_x lässt sich so wählen, dass die Stromanzeige unabhängig ist von der Stellung des Schalters S (geschlossen oder offen; sog Wechselstromparadoxon).

We have two options:

- Switch open: In this case, everything is connected in serial and $\underline{I}_1 = 0$. Therefore:

$$\underline{Z}_{\text{open}} = R + \frac{1}{\jmath\omega C} = R - \frac{1}{\omega C} \cdot \jmath$$

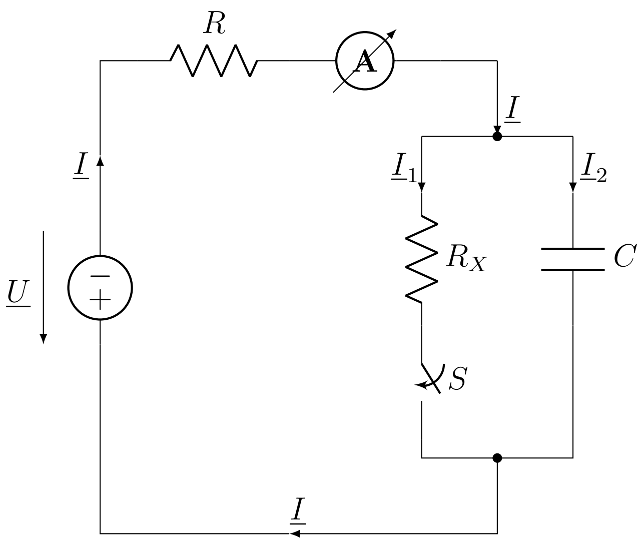

Figura 1.5: Skizze zur Aufgabe 1.5.4.

- Switch closed:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{\text{closed}} &= R + \frac{1}{\dfrac{1}{R_X} + \jmath\omega C} = \left(R + \frac{\frac{1}{R_X}}{\frac{1}{R_X^2} + \omega^2 C^2}\right) - \frac{\omega C}{\frac{1}{R_X^2} + \omega^2 C^2} \cdot \jmath = \\
&= \left(R + \frac{R_X}{1 + (R_X\omega C)^2}\right) - \frac{R_X^2 \omega C}{1 + (R_X\omega C)^2} \cdot \jmath = \\
&= \frac{R(1 + (R_X\omega C)^2) + R_X}{1 + (R_X\omega C)^2} - \frac{R_X^2 \omega C}{1 + (R_X\omega C)^2} \cdot \jmath
\end{aligned}$$

In order that the current does not depend on the position of the switch, it is needed:

$$\widehat{I}_{\text{closed}} = \widehat{I}_{\text{open}} \Longrightarrow |\underline{I}_{\text{closed}}| = |\underline{I}_{\text{open}}| \Longrightarrow \left|\frac{\underline{U}_{\text{closed}}}{\underline{Z}_{\text{closed}}}\right| = \left|\frac{\underline{U}_{\text{open}}}{\underline{Z}_{\text{open}}}\right|$$

Given that $\underline{U}_{\text{open}} = \underline{U}_{\text{closed}}$, we only need that:

$$\begin{aligned}
&|\underline{Z}_{\text{closed}}| = |\underline{Z}_{\text{open}}| \Longrightarrow |\underline{Z}_{\text{closed}}|^2 = |\underline{Z}_{\text{open}}|^2 \Longrightarrow \\
\Longrightarrow & R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} = \frac{(R(1 + (R_X\omega C)^2) + R_X)^2 + (R_X^2\omega C)^2}{(1 + (R_X\omega C)^2)^2} \Longrightarrow \\
\Longrightarrow & (R(1 + (R_X\omega C)^2))^2 + \frac{(1 + (R_X\omega C)^2)^2}{\omega^2 C^2} = (R(1 + (R_X\omega C)^2))^2 + R_X^2 + 2R_X\ R(1 + (R_X\omega C)^2) + (\\
\Longrightarrow & \frac{(1 + (R_X\omega C)^2)^2}{\omega^2 C^2} = R_X^2 + 2R_X\ R(1 + (R_X\omega C)^2) + (R_X^2\omega C)^2 \Longrightarrow \\
\Longrightarrow & 1 + 2(R_X\omega C)^2 = (R_X\omega C)^2 + 2\omega^2 C^2 R_X\ R(1 + (R_X\omega C)^2) \Longrightarrow \\
\Longrightarrow & 1 + (R_X\omega C)^2 = 2\omega^2 C^2 R_X\ R(1 + (R_X\omega C)^2) \Longrightarrow \\
\Longrightarrow & (2\omega^2 C^2 R_X\ R - 1)(1 + (R_X\omega C)^2) = 0
\end{aligned}$$

Therefore, the only possible solution is:

$$R_X = \frac{1}{2R(\omega C)^2}$$

Using that value of R_X, we will measure the same current value with the switch opened and closed.