

# Topología I

## Examen VII

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Topología I

## Examen VII

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

**Asignatura** Topología I.

**Curso Académico** 2023-24.

**Grado** Grado en Matemáticas.

**Grupo** A.

**Profesor** Leonor Ferrer Martínez.

**Descripción** Primer Parcial.

**Fecha** 9 de noviembre de 2023.

Para cada  $x \in \mathbb{R}$ , y cada  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , se define el subconjunto:

$$G(x, \varepsilon) = \{x\} \cup (]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap \mathbb{Q})$$

En  $\mathbb{R}$  consideramos ahora para cada  $x \in \mathbb{R}$  la familia de subconjuntos:

$$\beta_x = \{G(x, \varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$$

**Ejercicio 1** (4 puntos). Demuestra que  $\beta_x$  es base de entornos para una única topología  $\mathcal{T}$  en  $\mathbb{R}$ . Prueba que los subconjuntos  $G(x, \varepsilon)$  son abiertos de la topología  $\mathcal{T}$ .

Para ello, hemos de comprobar las 4 hipótesis del correspondiente teorema. Dado  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos que:

V1)  $\beta_x \neq \emptyset$ , pues  $G(x, 1) \in \beta_x$ , por ejemplo.

V2) Sea  $G(x, \varepsilon) \in \beta_x$ . Trivialmente, se tiene que  $x \in G(x, \varepsilon)$  por la definición de  $G(x, \varepsilon)$ .

V3) Sean  $G(x, \varepsilon_1), G(x, \varepsilon_2) \in \beta_x$ . Buscamos  $\varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+$  tal que  $G(x, \varepsilon_3) \subset G(x, \varepsilon_1) \cap G(x, \varepsilon_2)$ . Sea  $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$  y se tiene de forma directa.

V4) Sea  $G(x, \varepsilon) \in \beta_x$ . Buscamos  $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$  tal que  $G(x, \varepsilon') \subset G(x, \varepsilon)$  y, para todo  $y \in G(x, \varepsilon')$ , buscamos  $\varepsilon'' \in \mathbb{R}^+$  tal que  $G(y, \varepsilon'') \subset G(x, \varepsilon)$ .

Sea  $\varepsilon' = \varepsilon$ , y la primera inclusión es trivial. Sea ahora  $y \in G(x, \varepsilon) \subset ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ . Como  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$  es abierto en  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ , tenemos que  $\exists \varepsilon'' \in \mathbb{R}^+$  tal que  $]y - \varepsilon'', y + \varepsilon''[ \subset ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ . Por tanto, como  $y \in G(x, \varepsilon)$  tenemos que  $G(y, \varepsilon'') \subset G(x, \varepsilon)$ .

Por tanto,  $\beta_x$  es base de entornos para una única topología  $\mathcal{T}$  en  $\mathbb{R}$ . Veamos ahora que  $G(x, \varepsilon)$  es abierto de la topología  $\mathcal{T}$ . Para ello, veremos que  $G(x, \varepsilon)$  es entorno de cada uno de sus puntos.

Sea  $y \in G(x, \varepsilon)$ . Hemos visto que  $\exists \varepsilon' \in \mathbb{R}^+$  tal que  $G(y, \varepsilon') \subset G(x, \varepsilon)$ . Como  $G(y, \varepsilon') \in N_y$  y  $G(y, \varepsilon') \subset G(x, \varepsilon)$ , tenemos que  $G(x, \varepsilon) \in N_y$ . Por tanto,  $G(x, \varepsilon)$  es entorno de cada uno de sus puntos, y por tanto es abierto de la topología  $\mathcal{T}$ .

**Ejercicio 2** (1 punto). Da una base de  $\mathcal{T}$ .

Sea el siguiente conjunto, y demostraremos que es base de  $\mathcal{T}$ :

$$\mathcal{B} = \{G(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$$

En primer lugar, por lo visto al final del ejercicio anterior, tenemos que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ . Veamos ahora que, para todo  $U \in \mathcal{T}$  y para todo  $x \in U$ , existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B \subset U$ . Como  $x \in U \in \mathcal{T}$ , entonces  $U \in N_x$ , y como  $\beta_x$  es una base de entornos de  $x$ , entonces  $\exists B \in \beta_x$  tal que  $x \in B \subset U$ .

**Ejercicio 3** (1 punto). Prueba que  $\mathcal{T}_u \subsetneq \mathcal{T}$ . ¿Es el espacio  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  Hausdorff?

- ⊂) Sea  $U \in \mathcal{T}_u$ . Entonces, veamos que  $U$  es entorno de todos sus puntos en  $\mathcal{T}$ . Sea  $x \in U$ . Como  $U \in \mathcal{T}_u$ , entonces  $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$  tal que  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subset U$ . Por tanto

$$G(x, \varepsilon) = \{x\} \cup (]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap \mathbb{Q}) \subset ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subset U$$

Como  $x \in G(x, \varepsilon) \subset U$ , y  $G(x, \varepsilon) \in N_x$ , entonces  $U \in N_x$  en  $\mathcal{T}$ , y por tanto  $U \in \mathcal{T}$ .

Para ver que  $\mathcal{T}_u \neq \mathcal{T}$ , sea  $G(0, 1) \in \mathcal{T}_u$ .

$$G(0, 1) = \mathbb{Q} \cap ]-1, 1[$$

Como  $0 \in G(0, 1)$ , pero  $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$  tal que  $B(0, \varepsilon) \subset G(0, 1)$ , entonces  $G(0, 1) \notin N_0$  en  $\mathcal{T}_u$ , y por tanto  $G(0, 1) \notin \mathcal{T}_u$ .

Veamos ahora que  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  es T2. Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq y$ , como  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  es T2,  $\exists U, V \in \mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$ , con  $x \in U$ ,  $y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ . Por tanto,  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  sí es T2.

**Ejercicio 4** (1 punto). Calcula la clausura de  $G(x, \varepsilon)$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ .

Veamos que  $\overline{G(x, \varepsilon)} = [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ .

- ⊂) Claramente,  $G(x, \varepsilon) \subset [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ , y  $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \in C_{\mathcal{T}_u} \subset C_{\mathcal{T}}$ . Por tanto,

$$\overline{G(x, \varepsilon)} \subset [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$$

- ⊃) Sea  $y \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ . Veamos que  $y \in \overline{G(x, \varepsilon)}$ . Basta comprobar que, para todo  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , se tiene que  $G(y, \delta) \cap G(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ .

Como  $y \in \overline{B(x, \varepsilon)}$ , en  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  tenemos que  $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \delta) \in \mathcal{T}_u$  por ser intersección de abiertos. Por la densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ , tenemos que:

$$B(x, \varepsilon) \cap B(y, \delta) \cap \mathbb{Q} = ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap ]y - \delta, y + \delta[ \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \quad \forall \delta \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto,

$$\emptyset \neq ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap ]y - \delta, y + \delta[ \cap \mathbb{Q} \subset G(x, \varepsilon) \cap G(y, \delta) \quad \forall \delta \in \mathbb{R}^+$$

y tenemos entonces que  $y \in \overline{G(x, \varepsilon)}$ .

**Ejercicio 5** (1 punto). Describe la topología  $\mathcal{T}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ .

Veamos que, para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , se tiene que  $\{x\} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ .

$$G(x, \varepsilon) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = (\{x\} \cup ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap \mathbb{Q}) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x\} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x\}$$

Por tanto, como  $G(x, \varepsilon) \in \mathcal{T}$ , entonces  $G(x, \varepsilon) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ . Por tanto,  $\{x\} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ . Como la unión de abiertos es abierta, entonces:

$$\mathcal{T}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} = \mathcal{P}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathcal{T}_{disc}|_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$$

Por tanto, tenemos que es la topología discreta en  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Ejercicio 6** (2 puntos). Estudia si  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  es 1AN o 2AN.

Veamos que  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  es 1AN. Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , veamos que el siguiente conjunto es una base de entornos de  $x$ :

$$\beta'_x = \left\{ G\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Como  $1/n \in \mathbb{R}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\beta'_x \subset \beta_x$ . Veamos ahora que, para todo  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $G(x, 1/n) \subset G(x, \varepsilon)$ . Esto es cierto ya que consideramos  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1/n < \varepsilon$ , o equivalentemente  $n > 1/\varepsilon$ . Esto siempre es posible ya que  $\{1/n\} \rightarrow 0$ .

Por tanto,  $\beta'_x$  es base de entornos de  $x$  numerable, y por tanto  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  es 1AN.

Veamos ahora que no es 2AN. Por reducción al absurdo, supongamos que  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  es 2AN. Entonces, como esta propiedad es hereditaria,  $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathcal{T}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}})$  sería 2AN. No obstante, su base más económica es  $\mathcal{B}' = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ , que claramente no es numerable por no serlo  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Por tanto, llegamos a un absurdo, y  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  no es 2AN.

**Ejercicio 7** (1 punto extra). Prueba que para toda sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  que converja a un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n = x_0$  para todo  $n \geq n_0$ , y por tanto  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Como la sucesión converge a  $x_0$ , entonces dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in G(x_0, \varepsilon)$  para todo  $n \geq n_0$ . No obstante,  $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y además  $G(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\} \subset \mathbb{Q}$ , por lo que  $x_n = x_0$  para todo  $n \geq n_0$ .

Además, como  $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .