

Inferencia Estadística

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Inferencia Estadística

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Índice general

1. Ejercicios de clase	5
1.1. Estadísticos muestrales	5
1.2. Distribuciones en el muestreo de poblaciones normales	9
1.2.1. Varias demostraciones	10
1.2.2. Dos poblaciones normales	13
2. Relaciones de Ejercicios	17
2.1. Estadísticos muestrales	17
2.2. Distribuciones en el muestreo de poblaciones normales	30
2.3. Suficiencia y completitud	36
2.4. Estimación puntual. Inssegadez y mínima varianza	49
2.5. Estimación de máxima verosimilitud y otros métodos	67
2.6. Estimación puntual. Inssegadez y mínima varianza	69

1. Ejercicios de clase

Esta sección tiene el propósito de recoger todos los ejercicios propuestos en clase por parte de la profesora y que fueron resueltos por los alumnos en pizarra.

1.1. Estadísticos muestrales

Ejercicio 1.1.1. Obtener la función masa de probabilidad conjunta de una m.a.s. de $X \rightsquigarrow B(k_0, p)$ y la función de densidad de una m.a.s. de $X \rightsquigarrow U(a, b)$.

Recordamos que si $X \rightsquigarrow B(k_0, p)$, entonces:

$$P[X = x] = \binom{k_0}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \forall x \in \{0, \dots, k_0\}$$

Por lo que si tenemos una m.a.s. de n variables independientes e idénticamente distribuidas a X , (X_1, \dots, X_n) , su función de densidad vendrá dada por:

$$\begin{aligned} P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X_i = x_i] \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X = x_i] \\ &= \prod_{i=1}^n \binom{k_0}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{k_0-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{nk_0 - \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \binom{k_0}{x_i} \\ &\quad \forall x_i \in \{0, \dots, k_0\} \end{aligned}$$

Si ahora $X \rightsquigarrow U(a, b)$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad \forall x \in [a, b]$$

de donde:

$$f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{b-a} = \frac{1}{(b-a)^n} \quad \forall x \in [a, b]$$

Ejercicio 1.1.2. Para cada realización muestral, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n$, F_{x_1, \dots, x_n}^* es una función de distribución en \mathbb{R} . En particular es una función a saltos, con saltos de amplitud $1/n$ en los sucesivos valores muestrales ordenados de menor a mayor, supuestos que sean distintos, y de saltos múltiples en el caso de que varios valores muestrales coincidieran.

En las condiciones del enunciado, es decir, suponiendo que x_1, \dots, x_n están ordenados de menor a mayor y son distintos, entonces es fácil ver que:

$$F_{x_1, \dots, x_n}^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ 1/n & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ 1 & \text{si } x > x_n \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo que es claro que F_{x_1, \dots, x_n}^* es no decreciente, continua por la derecha, con límite 0 en $-\infty$ y con límite 1 en $+\infty$.

Ejercicio 1.1.3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{X_1, \dots, X_n}^*(x)$ es una variable aleatoria tal que $nF_{X_1, \dots, X_n}^*(x) \rightsquigarrow B(n, F(x))$ y:

$$E[F_{X_1, \dots, X_n}^*(x)] = F(x), \quad \text{Var}[F_{X_1, \dots, X_n}^*(x)] = \frac{F(x)(1 - F(x))}{n}$$

donde $F(x)$ es la función de distribución de X .

Recordamos que:

$$F_{X_1, \dots, X_n}^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{]-\infty, x]}(X_i) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Fijado $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $I_{]-\infty, x]}(X) \rightsquigarrow B(1, P[X \leq x]) \equiv B(1, F(x))$, por lo que por la propiedad reproductiva de la binomial tenemos que:

$$nF_{X_1, \dots, X_n}^*(x) \rightsquigarrow B(n, F(x))$$

Por lo que:

$$nE[F_{X_1, \dots, X_n}^*(x)] = E[nF_{X_1, \dots, X_n}^*(x)] = nF(x)$$

de donde:

$$E[F_{X_1, \dots, X_n}^*(x)] = F(x)$$

Para la varianza:

$$n^2 \text{Var}[F_{X_1, \dots, X_n}^*(x)] = \text{Var}[nF_{X_1, \dots, X_n}^*(x)] = nF(x)(1 - F(x))$$

de donde:

$$\text{Var}[F_{X_1, \dots, X_n}^*(x)] = \frac{F(x)(1 - F(x))}{n}$$

Ejercicio 1.1.4. Para valores grandes de n , en virtud del Teorema Central del Límite:

$$F_{X_1, \dots, X_n}^*(x) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(F(x), \frac{F(x)(1 - F(x))}{n}\right)$$

Sea (X_1, \dots, X_n) una m.a.s. de n muestras, sea:

$$S_n = \sum_{i=1}^n I_{]-\infty, x]}(X_i) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por el Teorema Central del Límite tenemos que:

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1) \implies S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}\left(F(x), \frac{F(x)(1 - F(x))}{n}\right)$$

Como $S_n \rightsquigarrow B(n, F(x))$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} E[S_n] &= nF(x) \\ Var[S_n] &= nF(x)(1 - F(x)) \end{aligned}$$

Por lo que:

$$F_{X_1, \dots, X_n}^*(x) = \frac{1}{n} S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}\left(F(x), \frac{F(x)(1 - F(x))}{n}\right)$$

Ejercicio 1.1.5. Dada una muestra aleatoria simple formada por las observaciones $(3, 8, 5, 4, 5)$, obtener su función de distribución muestral y realizar la representación gráfica.

Aplicando la definición de la función de distribución muestral obtenemos que:

$$F_{(3,8,5,4,5)}^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 1/5 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 2/5 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 4/5 & \text{si } 5 \leq x < 8 \\ 1 & \text{si } x \geq 8 \end{cases}$$



Figura 1.1: Representación gráfica de $F_{(3,8,5,4,5)}^*(x)$.

Ejercicio 1.1.6. Sea X una variable aleatoria con distribución $B(1, p)$ con $p \in (0, 1)$. Se toma una muestra de tamaño 5, $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, y se obtiene la siguiente observación $(0, 1, 1, 0, 0)$. Determinar el valor de los estadísticos estudiados en la observación.

Aplicando las fórmulas vistas en clase obtenemos:

- Media: 0,4.
- Varianza: 0,24.

- Cuasivarianza: 0,3.
- $x_{(1)} = 0, x_{(2)} = 0, x_{(3)} = 0, x_{(4)} = 1, x_{(5)} = 1.$

Ejercicio 1.1.7. Sea (X_1, \dots, X_n) una m.a.s. y $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, entonces:

$$M_{\bar{X}}(t) = (M_X(t/n))^n$$

$$M_{\bar{X}}(t) = E[e^{t\bar{X}}] = E\left[e^{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i}\right] = M_{\sum_{i=1}^n X_i}\left(\frac{t}{n}\right) \stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n M_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) \stackrel{\text{id. d.}}{=} \left(M_X\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$

Ejercicio 1.1.8. Obtener la distribución muestral de \bar{X} para (X_1, \dots, X_n) una m.a.s. de $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$M_{\bar{X}}(t) = \left(M_X\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}}\right)^n = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Luego $\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, ya que la función generatriz de momentos caracteriza la distribución.

Proposición 1.1. Si tenemos una m.a.s. (X_1, \dots, X_n) , entonces:

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(x) &= (F_X(x))^n \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ F_{X_{(1)}}(x) &= 1 - (1 - F_X(x))^n \end{aligned}$$

Demostración. Para la distribución del máximo:

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(x) &= P[X_{(n)} \leq x] = P[X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x] \stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X_i \leq x] \\ &\stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X \leq x] = (F_X(x))^n \end{aligned}$$

Para la del mínimo:

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x) &= P[X_{(1)} \leq x] = 1 - P[X_{(1)} > x] = 1 - P[X_1 > x, \dots, X_n > x] \\ &\stackrel{\text{indep.}}{=} 1 - \prod_{i=1}^n P[X_i > x] \stackrel{\text{id. d.}}{=} 1 - (P[X > x])^n = 1 - (1 - F_X(x))^n \end{aligned}$$

□

Ejercicio 1.1.9. Obtener las distribuciones muestrales de $X_{(1)}$ y $X_{(n)}$ para $X \rightsquigarrow U(a, b)$.

Si $X \rightsquigarrow U(a, b)$, entonces:

$$F_X(x) = \frac{x - a}{b - a} \quad \forall x \in [a, b]$$

Por lo que aplicando la Proposición superior:

$$F_{X_{(n)}}(x) = (F_X(x))^n = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n \quad \forall x \in [a, b]$$

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^n$$

$$= 1 - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n \quad \forall x \in [a, b]$$

1.2. Distribuciones en el muestreo de poblaciones normales

Proposición 1.2. Sea $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$, entonces $X^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)$.

Demostración. Sea $Y = X^2 = h(X)$, entonces $X = \pm\sqrt{Y} = h^{-1}(y)$, por lo que:

$$f_Y(y) = f_X(h_1^{-1}(y)) \left| \frac{dh_1^{-1}(y)}{dy} \right| + f_X(h_2^{-1}(y)) \left| \frac{dh_2^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Como $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$, entonces:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De donde:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}} \left| \frac{-1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} \quad \forall y > 0$$

Por lo que $Y \rightsquigarrow \chi^2(1)$. □

Ejercicio 1.2.1. Calcula el valor de k o la probabilidad inducida:

a) $P[\chi^2(10) \geq k] = 0,005$.

$k = 25,1881$.

b) $P[\chi^2(45) \leq k] = 0,005$.

$$P[\chi^2(45) \geq k] = 0,995 \implies k = 24,3110$$

c) $P[\chi^2(14) \geq 21,06]$

$0,1$

d) $P[\chi^2(20) \leq 12,44]$

$$P[\chi^2(20) \leq 12,44] = 1 - P[\chi^2(20) \geq 12,44] = 1 - 0,9 = 0,1$$

Ejercicio 1.2.2. Calcula el valor de k o la probabilidad inducida:

a) $P[t(26) \geq k] = 0,05$

$$k = 1,7056$$

b) $P[t(20) \leq k] = 0,25$

$$k = -0,6870$$

c) $P[t(26) \geq k] = 0,9$

$$k = -1,3150$$

d) $P[t(21) \geq 1,721]$

$$0,05$$

e) $P[t(11) \leq 0,697]$

$$0,75$$

f) $P[t(8) \leq -2,306]$

$$0,025$$

Ejercicio 1.2.3. Calcula el valor de k o la probabilidad inducida:

a) $P[F(7, 3) \leq k] = 0,95$

$$k = 8,89$$

b) $P[F(8, 4) \geq k] = 0,01$

$$0,01 = 1 - P[F(8, 4) \leq k] \implies P[F(8, 4) \leq k] = 0,99 \implies k = 14,8$$

c) $P[F(2, 2) \leq 19]$

$$0,95$$

d) $P[F(3, 5) \geq 12,1]$

$$P[F(3, 5) \geq 12,1] = 1 - P[F(3, 5) \leq 12,1] = 1 - 0,99 = 0,01$$

e) $P[F(60, 40) \leq k] = 0,05$

$$k = 0,627$$

1.2.1. Varias demostraciones

Tenemos una (X_1, \dots, X_n) m.a.s. con $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si tomamos:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Demostraciones importantes que pueden caer.

Proposición 1.3. En dichas condiciones, veamos que:

$\bar{X}, (X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$ son independientes

Demostración. Para ellos, usaremos la caracterización por la función generatriz de momentos conjunta:

$$M_{\bar{X}, X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X}}(t, t_1, \dots, t_n) \stackrel{?}{=} M_{\bar{X}}(t) M_{X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X}}(t_1, \dots, t_n)$$

$$\begin{aligned} M_{\bar{X}, X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X}}(t, t_1, \dots, t_n) &= E[e^{(t, t_1, \dots, t_n) \cdot (\bar{X}, X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})}] \\ &= E \left[e^{t\bar{X} + \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})t_i} \right] \\ &= E \left[e^{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n X_i t_i - \sum_{i=1}^n \bar{X} t_i} \right] \\ &= E \left[e^{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n X_i t_i - \bar{X} \sum_{i=1}^n t_i} \right] \\ &= E \left[e^{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n X_i t_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n t_i} \right] \\ &= E \left[e^{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n X_i t_i - \sum_{i=1}^n X_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i} \right] \\ &= E \left[e^{\frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n X_i t_i - \sum_{i=1}^n X_i \bar{t}} \right] \\ &= E \left[e^{\sum_{i=1}^n X_i \left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t} \right)} \right] \\ &= E \left[\prod_{i=1}^n e^{X_i \left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t} \right)} \right] \\ &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n E \left[e^{X_i \left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t} \right)} \right] = \prod_{i=1}^n M_{X_i} \left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t} \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \prod_{i=1}^n e^{\left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t} \right) \mu + \left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t} \right)^2 \frac{\sigma^2}{2}} \\ &= e^{\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t} \right) \mu + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{t^2}{n^2} + (t_i - \bar{t})^2 + 2 \frac{t}{n} (t_i - \bar{t}) \right) \right]} \\ &= e^{\sum_{i=1}^n \frac{\mu t}{n} + \sum_{i=1}^n \mu (t_i - \bar{t}) + \frac{\sigma^2}{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{t^2}{n^2} + \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{t}{n} (t_i - \bar{t}) \right)} \\ &= e^{\cancel{\mu t} + \cancel{\mu \sum_{i=1}^n t_i} + \cancel{\mu \sum_{i=1}^n \bar{t}} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{nt^2}{n^2} + \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 + 2 \frac{t}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t}) \right)} \\ &= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} M_{\bar{X}}(t) &= M_{(\bar{X}, X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})}(t, 0, \dots, 0) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}} \\ M_{(X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})}(t_1, \dots, t_n) &= M_{(\bar{X}, X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})}(0, t_1, \dots, t_n) \\ &= e^{\frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \end{aligned}$$

Por lo que es cierto que el producto de las funciones generatrices de momentos es la generatriz de mmoentos conjunta, luego las variables son independientes. \square

Corolario 1.3.1. Como corolario de la Proposición anterior, tenemos que:

- Se vio ya, y se saca de la demostración de arriba.
- Lema de Fisher: \bar{X} y S^2 son independientes.

Como S^2 es función del vector de la Proposición anterior, tenemos que es independiente con \bar{X} , ya que las funciones de variables independientes son independientes.

- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$

Para demostrarlo:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \rightsquigarrow \chi^2(n)$$

Ahora, queremos ver que:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$$

Para ello:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(\bar{X} - \mu)}{\sigma^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} + n \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Y como:

$$n \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(1)$$

Buscamos ver lo que sigue lo de la derecha ($A = B + C$). Para ello, usaremos la función generatriz de momentos. tenemos que $B = f(S^2)$ y $C = f(\bar{X})$, luego B y C son independientes, por lo que:

$$M_{A=B+C}(t) \stackrel{\text{indep.}}{=} M_B(t)M_C(t) = M_B(t) \frac{1}{(1-2t)^{\frac{1}{2}}} \quad t < \frac{1}{2}$$

Y sabemos que:

$$M_A(t) = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}}$$

De donde:

$$M_B(t) = \frac{M_A(t)}{M_C(t)} = \frac{\frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}}}{\frac{1}{(1-2t)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n-1}{2}}} \quad t < \frac{1}{2}$$

Por lo que $B \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$

$$\blacksquare \quad \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \rightsquigarrow t(n-1)$$

Para ello, al igual que la χ^2 , lo más sencillo es ir a la construcción de t :

$$\left. \begin{array}{l} X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ Y \rightsquigarrow \chi^2(n) \\ \text{indep} \end{array} \right\} \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \rightsquigarrow t(n)$$

Como:

$$\begin{aligned} \bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) &\implies \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} &\rightsquigarrow \chi^2(n-1) \end{aligned}$$

que son independientes por el Lema de Fisher. Si aplicamos la construcción:

$$\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \rightsquigarrow t(n-1)$$

Este último corolario ayuda a inferir parámetros de las distribuciones. Ver punto 2.3.1. Inferencia sobre x significa que queremos averiguar el valor de x . El corolario de ayer nos sirve para usar otros estadísticos en lugar de otros que deberíamos usar, pero con 1 parámetro desconocido en lugar de 2. Aprenderse fórmulas de 2.3.1.

1.2.2. Dos poblaciones normales

Teorema 1.4 (extensión del Lema de Fisher). *Los vectores (\bar{X}, \bar{Y}) , (S_1^2, S_2^2) son independientes.*

Demostración. Usemos la función generatriz de momentos, ya que son independientes si y solo si:

$$M_{(\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2)}(t_1, t_2, s_1, s_2) \stackrel{?}{=} M_{(\bar{X}, \bar{Y})}(t_1, t_2) M_{(S_1^2, S_2^2)}(s_1, s_2)$$

Como las X y las Y son independientes:

$$M_{(\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2)}(t_1, t_2, s_1, s_2) = M_{(\bar{X}, S_1^2)}(t_1, s_1) M_{(\bar{Y}, S_2^2)}(t_2, s_2) \stackrel{\text{Lema Fisher}}{=} M_{\bar{X}}(t_1) M_{S_1^2}(s_1) M_{\bar{Y}}(t_2) M_{S_2^2}(s_2)$$

Ahora, como X e Y son independientes:

$$M_{\bar{X}}(t_1) M_{S_1^2}(s_1) M_{\bar{Y}}(t_2) M_{S_2^2}(s_2) = M_{(\bar{X}, \bar{Y})}(t_1, t_2) M_{(S_1^2, S_2^2)}(s_1, s_2)$$

□

Corolario 1.4.1. *A partir de entonces (aunque el 3o es el único que necesita el Teorema anterior):*

1. *Tenemos (aunque no sea corolario de Fisher):*

$$\frac{n_2 \sigma_2^2 \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{n_1 \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2} \rightsquigarrow F(n_1, n_2)$$

Que es equivalente a que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2 / n_1 \sigma_1^2}{\sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2 / n_2 \sigma_2^2} \rightsquigarrow F(n_1, n_2)$$

Por construcción de $F(n_1, n_2)$:

$$\left. \begin{array}{l} X \rightsquigarrow \chi^2(m) \\ \text{independientes} \\ Y \rightsquigarrow \chi^2(n) \end{array} \right\} \implies \frac{X/m}{Y/n} \rightsquigarrow F(n_1, n_2)$$

Como ayer vimos que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_2)$$

Como X e Y son independientes, tenemos funciones en función de X e Y , luego estas dos variables son independientes. Ahora:

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{n_1 \sigma_1^2}}{\frac{\sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2}{n_2 \sigma_2^2}} \rightsquigarrow F(n_1, n_2) \rightsquigarrow F(n_1, n_2)$$

2. Tenemos:

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \rightsquigarrow F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

Seguimos buscando la construcción de F , por lo que buscamos aplicar lo que sabemos:

$$\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_1 - 1)$$

$$\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_2 - 1)$$

Que son independientes por ser funciones de X e Y , que son independientes. Dividimos:

$$\frac{\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \rightsquigarrow F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

En particular, si $\sigma_1 = \sigma_2$, se tiene:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \rightsquigarrow F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

3. La construcción de la t -Student era:

$$\left. \begin{array}{l} X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ \text{independientes} \\ Y \rightsquigarrow \chi^2(n) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \rightsquigarrow t(n)$$

Queremos probar:

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2}}} \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 2}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow t(n_1 + n_2 - 2)$$

Ahora:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) \\ \overline{Y} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{X} - \overline{Y} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Tipificamos:

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Para el denominador ahora, de la S^2 sabemos:

$$\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_1 - 1)$$

$$\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_2 - 1)$$

Como X e Y son independientes, estas dos son independientes, y al sumar dos χ^2 independientes tenemos la propiedad reproductiva:

$$\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{n_1^2} + \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{n_2^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$$

Por la extensión del Lema de Fisher tenemos que las dos variables aleatorias que hemos calculado son independientes. Procedemos ahora a aplicar la construcción de la t :

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow t(n_1 + n_2 - 2)$$
$$\sqrt{\frac{\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2}}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Las del punto 2.4.1. hay que aprenderlas de memoria también

2. Relaciones de Ejercicios

2.1. Estadísticos muestrales

Ejercicio 2.1.1. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X . Dar el espacio muestral y calcular la función masa de probabilidad de (X_1, \dots, X_n) en cada uno de los siguientes casos:

- a) $X \rightsquigarrow \{B(k_0, p) : p \in (0, 1)\}$ Binomial.

El espacio muestral en este caso es \mathcal{X}^n , donde:

$$\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, k_0\}$$

Recordamos que si $X \rightsquigarrow B(k_0, p)$, entonces:

$$P[X = x] = \binom{k_0}{x} p^x (1-p)^{k_0-x} \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

Por tanto, para nuestra m.a.s. tendremos la función masa de probabilidad:

$$\begin{aligned} P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X_i = x_i] \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X = x_i] \\ &= \prod_{i=1}^n \binom{k_0}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{k_0-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{nk_0 - \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \binom{k_0}{x_i} \\ &\quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \end{aligned}$$

- b) $X \rightsquigarrow \{\mathcal{P}(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ Poisson.

El espacio muestral de X es:

$$\mathcal{X} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Recordamos que si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, entonces:

$$P[X = x] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X_i = x_i] \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X = x_i] \\ &= \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \cdot \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \end{aligned}$$

c) $X \rightsquigarrow \{BN(k_0, p) : p \in (0, 1)\}$ Binomial Negativa.

El espacio muestral de X es:

$$\mathcal{X} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Recordamos que si $X \rightsquigarrow BN(k_0, p)$, entonces:

$$P[X = x] = \binom{x + k_0 - 1}{x} (1 - p)^x p^{k_0} \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X_i = x_i] \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X = x_i] \\ &= \prod_{i=1}^n \binom{x_i + k_0 - 1}{x_i} (1 - p)^{x_i} p^{k_0} = p^{nk_0} (1 - p)^{\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \binom{x_i + k_0 - 1}{x_i} \\ &\quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \end{aligned}$$

d) $X \rightsquigarrow \{G(p) : p \in (0, 1)\}$ Geométrica.

El espacio muestral de X es:

$$\mathcal{X} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Recordamos que $G(p) \equiv BN(1, p)$, por lo que si sustituimos en la fórmula obtenida en la Binomial Negativa $k_0 = 1$:

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = p^n (1 - p)^{\sum_{i=1}^n x_i} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n$$

e) $X \rightsquigarrow \{P_N : N \in \mathbb{N}\}$, $P_N(X = x) = \frac{1}{N}$, $x = 1, \dots, N$.

El espacio muestral ya nos lo dan: $\mathcal{X} = \{1, \dots, N\}$. Calculemos la masa de probabilidad:

$$\begin{aligned} P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X_i = x_i] \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X = x_i] \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{N} = \left(\frac{1}{N}\right)^n \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.2. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X . Dar el espacio muestral y calcular la función de densidad de (X_1, \dots, X_n) en cada uno de los siguientes casos:

a) $X \rightsquigarrow \{U(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ Uniforme.

El espacio muestral en este caso es \mathcal{X}^n , donde:

$$\mathcal{X} = [a, b]$$

Recordamos que si $X \rightsquigarrow U(a, b)$, entonces:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad \forall x \in [a, b]$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{b-a} \\ &= \left(\frac{1}{b-a} \right)^n \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \end{aligned}$$

b) $X \rightsquigarrow \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$ Normal.

El espacio muestral de X es $\mathcal{X} = \mathbb{R}$. Recordamos que si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \prod_{i=1}^n e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

c) $X \rightsquigarrow \{\Gamma(p, a) : p, a \in \mathbb{R}^+\}$ Gamma.

El espacio muestral de X es $\mathcal{X} = \mathbb{R}_0^+$. Recordamos que si $X \rightsquigarrow \Gamma(p, a)$, entonces:

$$f_X(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{a^p}{\Gamma(p)} x_i^{p-1} e^{-ax_i} \\ &= \left(\frac{a^p}{\Gamma(p)} \right)^n \cdot e^{-a \sum_{i=1}^n x_i} \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{p-1} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \end{aligned}$$

d) $X \rightsquigarrow \{\beta(p, q) : p, q \in \mathbb{R}^+\}$ Beta.

El espacio muestral de X es $\mathcal{X} = [0, 1]$. Recordamos que si $X \rightsquigarrow \beta(p, q)$, entonces:

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \quad \forall x \in [0, 1]$$

Donde:

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta(p, q)} x_i^{p-1} (1-x_i)^{q-1} \\ &= \frac{1}{\beta(p, q)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{p-1} (1-x_i)^{q-1} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \end{aligned}$$

$$\text{e) } X \rightsquigarrow \{P_\theta : \theta \in \mathbb{R}^+\}, \quad f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\theta}}, \quad 0 < x < \theta.$$

Se nos dice que $\mathcal{X} =]0, \theta[$. Calculamos la función de densidad conjunta:

$$\begin{aligned} f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \stackrel{\text{id. d.}}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\sqrt{x_i\theta}} \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{\theta})^n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.3. Se miden los tiempos de sedimentación de una muestra de partículas flotando en un líquido. Los tiempos observados son:

11,5; 1,8; 7,3; 12,1; 1,8; 21,3; 7,3; 15,2; 7,3; 12,1; 15,2;
7,3; 12,1; 1,8; 10,5; 15,2; 21,3; 10,5; 15,2; 11,5

- Construir la función de distribución muestral asociada a a dichas observaciones.

Si aplicamos la definición de función de distribución muestral obtenemos que esta viene dada por:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1,8 \\ 3/20 & \text{si } 1,8 \leq x < 7,3 \\ 7/20 & \text{si } 7,3 \leq x < 10,5 \\ 9/20 & \text{si } 10,5 \leq x < 11,5 \\ 11/20 & \text{si } 11,5 \leq x < 12,1 \\ 14/20 & \text{si } 12,1 \leq x < 15,2 \\ 18/20 & \text{si } 15,2 \leq x < 21,3 \\ 20/20 & \text{si } x \geq 21,3 \end{cases}$$



Figura 2.1: Gráfica de la función de distribución muestral.

- Hallar los valores de los tres primeros momentos muestrales respecto al origen y respecto a la media.

Calculamos primero los tres primeros momentos respecto al origen para luego calcular los centrados respecto a la media a partir de ellos:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \sum_{i=1}^n f_i x_i = 10,915 & a_2 &= \sum_{i=1}^n f_i x_i^2 = 148,9325 \\
 a_3 &= \sum_{i=1}^n f_i x_i^3 = 2280,98365 \\
 b_1 &= \sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x}) = 0 \\
 b_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2\bar{x}}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x}^2 = a_2 - 2a_1 \bar{x} + a_1^2 = a_2 - a_1^2 \\
 &= 148,9325 - 10,915 = 29,795275 \\
 b_3 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^3 - 3x_i^2 \bar{x} + 3x_i \bar{x}^2 - \bar{x}^3) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^3 - \frac{3\bar{x}}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{3\bar{x}^2}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}^3 = a_3 - 3a_1 a_2 + 3a_1^3 - a_1^3 \\
 &= a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3 = 4,95455925
 \end{aligned}$$

- Determinar los valores de los cuartiles muestrales y el percentil 70.

Para ello, primero ordenamos los datos de menor a mayor y los agrupamos en

grupos de $20/4 = 5$ en 5:

1,8; 1,8; 1,8; 7,3; 7,3; 7,3; 7,3; 10,5; 10,5; 11,5; 11,5; 12,1; 12,1;
12,1; 15,2; 15,2; 15,2; 15,2; 21,3; 21,3

Como en los cambios de agrupaciones de números estos se repiten, hemos obtenido el valor de los cuartiles:

$$q_1 = 7,3 \quad q_2 = 11,5 \quad q_3 = 15,2 \quad q_4 = 21,3$$

Para el percentil 70, calculamos:

$$0,7 \cdot 20 = 14$$

Como hemos obtenido un número entero, el percentil 70 será:

$$c_{70} = \frac{X_{(14)} + X_{(15)}}{2} = \frac{12,1 + 15,2}{2} = 13,65$$

En el caso de haber obtenido un número no entero (por ejemplo, 14,2), sería $X_{(15)}$.

Ejercicio 2.1.4. Se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño 40 de una distribución exponencial de media 3, ¿cuál es la probabilidad de que los valores de la función de distribución muestral y la teórica, en $x = 1$, difieran menos de 0,01? Aproximadamente, ¿cuál debe ser el tamaño muestral para que dicha probabilidad sea como mínimo 0,98?

Como dice el enunciado, tenemos una m.a.s. (X_1, \dots, X_n) con $n = 40$, todas ellas idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow \exp(\lambda)$. Sabemos de la asignatura de Probabilidad que:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = 3 \implies \lambda = \frac{1}{3}$$

Por lo que $X \rightsquigarrow \exp(\frac{1}{3})$. Denotaremos por comodidad:

$$F_n^*(x) = F_{(X_1, \dots, X_n)}^*(x)$$

Y el enunciado nos pregunta por:

$$P[|F_n^*(1) - F_X(1)| < 0,01]$$

Para ello, primero calculamos $F_X(1)$:

$$F_X(1) = 1 - e^{-\lambda \cdot 1} = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-1/3} = \alpha$$

Por lo que nos disponemos ya a calcular la probabilidad:

$$\begin{aligned} P[|F_n^*(1) - F_X(1)| < 0,01] &= P[|F_n^*(1) - \alpha| < 0,01] = P[-0,01 < F_n^*(1) - \alpha < 0,01] \\ &= P[-0,01 + \alpha < F_n^*(1) < 0,01 + \alpha] \\ &= P[40(-0,01 + \alpha) < 40F_n^*(1) < 40(0,01 + \alpha)] \end{aligned}$$

Y como sabemos que $Y = 40F_n^*(1) \rightsquigarrow B(40, F_X(1)) \equiv B(40, \alpha)$:

$$P[|F_n^*(1) - F_X(1)| < 0,01] = P[40(-0,01 + \alpha) < Y < 40(0,01 + \alpha)]$$

Si ahora tomamos:

$$\alpha = 1 - e^{-1/3} \approx 0,283469$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 40(0,01 + \alpha) &\approx 40(0,01 + 0,283469) = 11,73876 \\ 40(-0,01 + \alpha) &\approx 40(-0,01 + 0,283469) = 10,93876 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$P[|F_n^*(1) - F_X(1)| < 0,01] \approx P[10,93876 < Y < 11,73876] = P[Y = 11]$$

De donde usando la masa de probabilidad de la Binomial:

$$P[Y = 11] = \binom{40}{11} (0,283469)^{11} (1 - 0,283469)^{40-11} \approx 0,139$$

Para el segundo apartado, como para $n = 40$ obtenemos una probabilidad de 0,139, podemos intuir que para que dicha probabilidad sea como mínimo 0,98, nos es necesario un valor de n grande, por lo que podemos suponer que:

$$F_n^*(1) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\alpha, \frac{\alpha(1-\alpha)}{n}\right)$$

De donde:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(F_n^*(1) - \alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Buscamos el valor de n que verifica:

$$0,98 \leq P[|F_n^*(1) - F_X(1)| < 0,01] = P\left[|Z| < \frac{\sqrt{n}0,01}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\right]$$

Si aplicamos propiedades conocidas de la Normal, si $a \in \mathbb{R}$, entonces:

$$P[|Z| < a] = P[-a < Z < a] = P[Z < a] - P[Z < -a]$$

Pero:

$$P[Z < -a] = P[Z > a] = 1 - P[Z < a]$$

Por lo que:

$$P[|Z| < a] = P[Z < a] - P[Z < -a] = 2P[Z < a] - 1$$

Volviendo al caso que nos interesa:

$$0,98 \leq P\left[|Z| < \frac{\sqrt{n}0,01}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\right] = 2P\left[Z < \frac{\sqrt{n}0,01}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\right] - 1$$

Luego:

$$0,99 = \frac{0,98 + 1}{2} \leq P \left[Z < \frac{\sqrt{n}0,01}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \right]$$

Si consultamos la tabla de la normal $\mathcal{N}(0, 1)$, observamos que el primer valor que supera la probabilidad de 0,99 es 2,33, por lo que:

$$2,33 = \frac{\sqrt{n}0,01}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} = \frac{\sqrt{n}0,01}{\sqrt{0,283469(1-0,283469)}} \approx 0,0221886\sqrt{n}$$

De donde:

$$5,4289 = (2,33)^2 = (0,0221886\sqrt{n})^2 = 0,00049233n \implies n = \frac{5,4289}{0,00049233} = 11026,95347$$

Por lo que para $n \geq 11027$ podemos asegurar que la probabilidad es como mínimo 0,98.

Ejercicio 2.1.5. Se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño 50 de una distribución de Poisson de media 2, ¿cuál es la probabilidad de que los valores de la función de distribución muestral y la teórica, en $x = 2$, difieran menos de 0,02? Aproximadamente, ¿qué tamaño muestral hay que tomar para que dicha probabilidad sea como mínimo 0,99?

Tenemos una m.a.s. (X_1, \dots, X_n) con $n = 50$ idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(2)$. Notamos por comodidad:

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}^*(x) = F_n^*(x)$$

Nos preguntan por:

$$P[|F_n^*(2) - F_X(2)| < 0,02]$$

Para ello primero calculamos:

$$F_X(2) = \sum_{k=0}^2 e^{-2} \frac{2^k}{k!} = e^{-2} \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} \right) = e^{-2}(1 + 2 + 2) \approx 0,6767$$

Por lo que:

$$P[|F_n^*(2) - 0,6767| < 0,02] = P[-0,02 < F_n^*(2) - 0,6767 < 0,02] = P[0,6567 < F_n^*(2) < 0,6967]$$

Como sabemos por lo visto en teoría que:

$$Y = 50F_n^*(2) \rightsquigarrow B(50, F_X(2)) \equiv B(50, 0,6767)$$

Multiplicamos por 50 la última expresión:

$$\begin{aligned} P[|F_n^*(2) - 0,6767| < 0,02] &= P[0,6567 < F_n^*(2) < 0,6967] = P[32,835 < Y < 34,835] \\ &= P[Y = 33] + P[Y = 34] \end{aligned}$$

Y calculamos estas dos probabilidades:

$$P[Y = 33] = \binom{50}{33} (0,6767)^{33} (1 - 0,6767)^{50-33} \approx 0,114734$$

$$P[Y = 34] = \binom{50}{34} (0,6767)^{34} (1 - 0,6767)^{50-34} \approx 0,120075$$

Por lo que:

$$P[|F_n^*(2) - 0,6767| < 0,02] \approx 0,114734 + 0,120075 = 0,234809$$

Para el segundo apartado, como para $n = 50$ obtenemos una probabilidad de 0,234809, podemos intuir que para que dicha probabilidad sea como mínimo 0,99, nos es necesario un valor de n grande, por lo que podemos suponer que:

$$F_n^*(2) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0,6767, \frac{0,6767(1 - 0,6767)}{n}\right) \equiv \mathcal{N}\left(0,6767, \frac{0,218777}{n}\right)$$

Por lo que:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(F_n^*(2) - 0,6767)}{\sqrt{0,218777}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

En dicho caso, buscamos n de forma que:

$$0,99 \leq P[|F_n^*(2) - F_X(2)| < 0,02] = P\left[|Z| < \frac{\sqrt{n}0,02}{\sqrt{0,218777}}\right]$$

De forma análoga al ejercicio anterior:

$$P\left[|Z| < \frac{\sqrt{n}0,02}{\sqrt{0,218777}}\right] = 2P\left[Z < \frac{\sqrt{n}0,02}{\sqrt{0,218777}}\right] - 1$$

Luego:

$$0,995 = \frac{0,99 + 1}{2} \leq P\left[Z < \frac{\sqrt{n}0,02}{\sqrt{0,218777}}\right]$$

Y si miramos la tabla de la Normal observamos que el primer valor que supera la probabilidad de 0,995 es 2,58, luego:

$$2,58 = \frac{\sqrt{n}0,02}{\sqrt{0,218777}} = 0,042759\sqrt{n}$$

Por lo que:

$$6,6564 = (2,58)^2 = (0,042759\sqrt{n})^2 = 0,00182833n$$

Luego:

$$n = \frac{6,6564}{0,00182833} \approx 3640,7$$

Por lo que para $n \geq 3641$ podemos asegurar que la probabilidad es como mínimo 0,99.

Ejercicio 2.1.6. Sea $X \rightsquigarrow B(1, p)$ y (X_1, X_2, X_3) una muestra aleatoria simple de X . Calcular la función masa de probabilidad de los estadísticos \bar{X} , S^2 , $\min X_i$ y $\max X_i$.

Para resolver este ejercicio, como X sigue una distribución discreta, buscamos aplicar el teorema de cambio de variable de discreta a discreta. Para ello, la forma más cómoda será analizar cada uno de los valores que puede tomar la muestra aleatoria simple (X_1, X_2, X_3) y determinar en consecuencia cada uno de los valores que toman \bar{X} , S^2 , $\min X_i$ y $\max X_i$. Acompañaremos la tabla junto con la probabilidad de que la muestra tome dicho valor, es decir, en la fila correspondiente a (x_1, x_2, x_3) incluiremos $P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3]$:

P	(X_1, X_2, X_3)	\bar{X}	S^2	$\min X_i$	$\max X_i$
$(1-p)^3$	$(0, 0, 0)$	0	0	0	0
$p(1-p)^2$	$(0, 0, 1)$	$1/3$	$1/3$	0	1
$p(1-p)^2$	$(0, 1, 0)$	$1/3$	$1/3$	0	1
$p^2(1-p)$	$(0, 1, 1)$	$2/3$	$1/3$	0	1
$p(1-p)^2$	$(1, 0, 0)$	$1/3$	$1/3$	0	1
$p^2(1-p)$	$(1, 0, 1)$	$2/3$	$1/3$	0	1
$p^2(1-p)$	$(1, 1, 0)$	$2/3$	$1/3$	0	1
p^3	$(1, 1, 1)$	1	0	1	1

Podemos ya calcular la función masa de probabilidad de cada uno de los estadísticos, simplemente sumando las probabilidades de la tabla que corresponden a cada valor del espacio muestral de cada estadístico:

- Para \bar{X} :

$$P[\bar{X} = 0] = P[X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0] = (1-p)^3$$

$$P[\bar{X} = 1/3] = \sum_{i=1}^3 p(1-p)^2 = 3p(1-p)^2$$

$$P[\bar{X} = 2/3] = \sum_{i=1}^3 p^2(1-p) = 3p^2(1-p)$$

$$P[\bar{X} = 1] = P[X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1] = p^3$$

- Para S^2 :

$$P[S^2 = 0] = P[X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0] + P[X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1] = p^3 + (1-p)^3$$

$$P[S^2 = 1/3] = \sum_{i=1}^3 p(1-p)^2 + \sum_{i=1}^3 p^2(1-p) = 3p(1-p)(p+1-p) = 3p(1-p)$$

- Para $\min X_i$:

$$P[\min X_i = 1] = P[X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1] = p^3$$

$$P[\min X_i = 0] = 1 - P[\min X_i = 1] = 1 - p^3$$

- Para $\max X_i$:

$$P[\max X_i = 0] = P[X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0] = (1 - p)^3$$

$$P[\max X_i = 1] = 1 - P[\max X_i = 0] = 1 - (1 - p)^3$$

Ejercicio 2.1.7. Obtener la función masa de probabilidad o función de densidad de \bar{X} en el muestreo de una variable de Bernoulli, de una Poisson y de una exponencial.

Calculamos la masa de probabilidad o función de densidad en cada caso, suponiendo que tenemos (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple con variables aleatorias idénticamente distribuidas a X , que sigue una distribución distinta en cada caso y estaremos interesados en calcular la masa de:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i$$

Bernoulli. Supuesto que $X \rightsquigarrow B(1, p)$ para cierto $p \in]0, 1[$, si tomamos:

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

Por la propiedad reproductiva de la Bernoulli, tenemos que $Y \rightsquigarrow B(n, p)$. En dicho caso:

$$P[Y = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

Por tanto, tendremos que:

$$P\left[\bar{X} = \frac{k}{n}\right] = P[Y = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

Poisson. Supuesto que $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}^+$, si tomamos:

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

Por la propiedad reproductiva de la Poisson, tendremos que:

$$Y \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda\right) \equiv \mathcal{P}(n\lambda)$$

En dicho caso:

$$P[Y = x] = e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^x}{x!} \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

Por lo que:

$$P[\bar{X} = x/n] = P[Y = x] = e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^x}{x!} \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

Exponencial. Supuesto ahora que $X \rightsquigarrow \exp(\lambda)$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}^+$, tendremos entonces que:

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad t < \lambda$$

Si aplicamos la igualdad (*) vista en teoría:

$$M_{\bar{X}}(t) \stackrel{(*)}{=} (M_X(t/n))^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t/n} \right)^n = \left(\frac{n\lambda}{n\lambda - t} \right)^n$$

Observamos que obtenemos una función generatriz de momentos para \bar{X} igual que para una variable aleatoria de distribución $\Gamma(n, n\lambda)$. Como la función generatriz de momentos de una variable aleatoria caracteriza su distribución, concluimos que $\bar{X} \rightsquigarrow \Gamma(n, n\lambda)$.

Ejercicio 2.1.8. Calcular las funciones de densidad de los estadísticos máx X_i y mín X_i en el muestreo de una variable X con función de densidad:

$$f_\theta(x) = e^{\theta-x}, \quad x > \theta.$$

Calculamos primero la función de distribución, para calcular con mayor comodidad las funciones de distribución de $X_{(n)}$ y $X_{(1)}$:

$$F_\theta(x) = \int_\theta^x f_\theta(t) dt = \int_\theta^x e^{\theta-t} dt = [-e^{\theta-t}]_\theta^x = 1 - e^{\theta-x} \quad \forall x > \theta$$

Supuesto ahora que disponemos de una m.a.s. (X_1, \dots, X_n) idénticamente distribuidas a X cuya función de densidad es la anteriormente dicha, podemos aplicar las fórmulas obtenidas en teoría para calcular las funciones de distribución del mínimo y del máximo. Para el máximo:

$$F_{X_{(n)}}(x) = (F_X(x))^n = (1 - e^{\theta-x})^n \implies f_{X_{(n)}} = n(1 - e^{\theta-x})^{n-1} e^{\theta-x} \quad \forall x > \theta$$

Para el mínimo:

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - (1 - 1 + e^{\theta-x})^n = 1 - e^{n(\theta-x)} \quad \forall x > \theta$$

de donde:

$$f_{X_{(1)}}(x) = n e^{n(\theta-x)-1} \quad \forall x > \theta$$

Ejercicio 2.1.9. El número de pacientes que visitan diariamente una determinada consulta médica es una variable aleatoria con varianza de 16 personas. Se supone que el número de visitas de cada día es independiente de cualquier otro. Si se observa el número de visitas diarias durante 64 días, calcular aproximadamente la probabilidad de que la media muestral no difiera en más de una persona del valor medio verdadero de visitas diarias.

Sea X una variable aleatoria que indica el número de pacientes que visitan diariamente dicha consulta médica, por cómo nos definen X sabemos que $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Como además nos dicen que la varianza de dicha variable aleatoria es 16, tenemos

que $Var(X) = \lambda = 16$. Si tenemos ahora una muestra aleatoria simple (X_1, \dots, X_n) con $n = 64$, nos preguntan por:

$$P[|\bar{X} - E[X]| < 1]$$

Donde $E[X] = \lambda = 16$, ya que $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(16)$. Calculamos:

$$P[|\bar{X} - E[X]| < 1] = P[-1 < \bar{X} - 16 < 1] = P[15 < \bar{X} < 17]$$

Aplicamos ahora lo visto en el ejercicio 7, ya que si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, entonces tendremos que $n\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{P}(n\lambda)$, gracias a la propiedad reproductiva de la Poisson:

$$\begin{aligned} P[|\bar{X} - E[X]| < 1] &= P[15 < \bar{X} < 17] = P[64 \cdot 15 < 64\bar{X} < 64 \cdot 17] \\ &= P[960 < 64\bar{X} < 1088] \end{aligned}$$

Donde $64\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{P}(64 \cdot 16) \equiv \mathcal{P}(1024)$. Para calcular dicha probabilidad, aproximaremos la Poisson a una distribución normal:

$$\mathcal{P}(1024) \approx \mathcal{N}(1024, 1024)$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} P[|\bar{X} - E[X]| < 1] &= P[960 < 64\bar{X} < 1088] \approx P\left[\frac{960 - 1024}{\sqrt{1024}} < Z < \frac{1088 - 1024}{\sqrt{1024}}\right] \\ &= P[-2 < Z < 2] = 2P[Z < 2] - 1 \\ &= 2 \cdot 0,97725 - 1 = 0,9545 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.10. Una máquina de refrescos está arreglada para que la cantidad de bebida que sirve sea una variable aleatoria con media 200 ml. y desviación típica 15 ml. Calcular de forma aproximada la probabilidad de que la cantidad media servida en una muestra aleatoria de tamaño 36 sea al menos 204 ml.

Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple idénticamente distribuida a la variable aleatoria X de tamaño $n = 36$, aplicando el Teorema Central del Límite obtenemos que $\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(200, \frac{15^2}{36}\right)$. Calculamos la probabilidad:

$$\begin{aligned} P[\bar{X} \geq 204] &\stackrel{\text{tipificamos}}{=} P\left[Z \geq \frac{\sqrt{36}(204 - 200)}{15}\right] = P[Z \geq 1,6] = 1 - P[Z < 1,6] \\ &= 1 - 0,9452 = 0,0548 \end{aligned}$$

2.2. Distribuciones en el muestreo de poblaciones normales

Ejercicio 2.2.1. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 5 de una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(2,5, 36)$. Calcular:

- a) Probabilidad de que la cuasivarianza muestral esté comprendida entre 1,863 y 2,674.

Tenemos una m.a.s. $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, todas ellas idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(2,5, 36)$. Tomamos la cuasivarianza de dichos datos:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (X_i - 2,5)^2$$

Y queremos calcular la probabilidad:

$$P[1,863 < S^2 < 2,674]$$

Para ello, en teoría hemos visto que como tenemos una población normal, se cumple que:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{4S^2}{36} \rightsquigarrow \chi^2(4) \equiv \chi^2(n-1)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} P[1,863 < S^2 < 2,674] &= P\left[\frac{4 \cdot 1,863}{36} < \frac{4S^2}{36} < \frac{4 \cdot 2,674}{36}\right] \\ &= P\left[0,207 < \frac{4S^2}{36} < 0,2971\right] \\ &= P\left[\frac{4S^2}{36} > 0,207\right] - P\left[\frac{4S^2}{36} > 0,2971\right] \end{aligned}$$

Si consultamos la tabla de la $\chi^2(4)$:

$$P\left[\frac{4S^2}{36} > 0,207\right] = 0,995, \quad P\left[\frac{4S^2}{36} > 0,2971\right] = 0,99$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} P[1,863 < S^2 < 2,674] &= P\left[\frac{4S^2}{36} > 0,207\right] - P\left[\frac{4S^2}{36} > 0,2971\right] \approx 0,995 - 0,99 \\ &= 0,005 \end{aligned}$$

- b) Probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 1,3 y 3,5, supuesto que la cuasivarianza muestral está entre 30 y 40.

En la situación del apartado anterior, ahora tenemos también en consideración la media muestral:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Bajo estas condiciones, el Lema de Fisher nos dice que S^2 y \bar{X} son independientes, por lo que la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 1,3 y 3,5 suponiendo que la cuasivarianza muestral está comprendida entre 30 y 40 es igual a la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 1,3 y 3,5:

$$P[1,3 < \bar{X} < 3,5 \mid 30 < S^2 < 40] = P[1,3 < \bar{X} < 3,5]$$

Sabemos que $\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, nos disponemos a calcular dicha probabilidad:

$$\begin{aligned} P[1,3 < \bar{X} < 3,5] &\stackrel{\text{tipificamos}}{=} P\left[\frac{\sqrt{5}(1,3 - 2,5)}{\sqrt{36}} < Z < \frac{\sqrt{5}(3,5 - 2,5)}{\sqrt{36}}\right] \\ &= P[-0,447214 < Z < 0,372678] \\ &= P[Z < 0,372678] - P[Z > 0,447214] \\ &= P[Z < 0,372678] - 1 + P[Z < 0,447214] \\ &= 0,64431 - 1 + 0,67003 = 0,31434 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.2.2. La longitud craneal en una determinada población humana es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media 185,6 mm. y desviación típica 12,78 mm. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria simple de tamaño 20 de esa población tenga media mayor que 190 mm.?

Tenemos una población que sigue una variable aleatoria $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con parámetros $\mu = 185,6$ y $\sigma = 12,78$. Tomamos una m.a.s. (X_1, \dots, X_n) con $n = 20$ y tomamos la media muestral:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

Queremos calcular:

$$P[\bar{X} > 190]$$

Para ello, sabemos por lo visto en teoría que $\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, por lo que:

$$\begin{aligned} P[\bar{X} > 190] &\stackrel{\text{tipificamos}}{=} P\left[Z > \frac{\sqrt{20}(190 - 185,6)}{12,78}\right] = P[Z > 1,5397] \\ &= 1 - P[Z < 1,5397] = 1 - 0,93822 = 0,06178 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.2.3. ¿De qué tamaño mínimo habría que seleccionar una muestra de una variable con distribución normal $\mathcal{N}(\mu, 4)$ para poder afirmar, con probabilidad mayor que 0,9, que la media muestral diferirá de la poblacional menos de 0,1?

Supuesto que tenemos una m.a.s. (X_1, \dots, X_n) de tamaño $n \in \mathbb{N}$ de variables aleatorias idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, 4)$, queremos buscar el menor n de forma que:

$$0,9 \leq P[|\bar{X} - \mu| < 0,1]$$

Para ello, usaremos que hemos visto en teoría que $\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ con $\sigma = 2$:

$$\begin{aligned} 0,9 &\leq P[|\bar{X} - \mu| < 0,1] = P[-0,1 < \bar{X} - \mu < 0,1] = P\left[\frac{-\sqrt{n}0,1}{2} < Z < \frac{\sqrt{n}0,1}{2}\right] \\ &= P[-\sqrt{n}0,05 < Z < \sqrt{n}0,05] = 2P[Z < \sqrt{n}0,05] - 1 \end{aligned}$$

De donde:

$$0,95 = \frac{0,9 + 1}{2} \leq P[Z < \sqrt{n}0,05]$$

De donde mirando la tabla de la normal $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\sqrt{n}0,05 \geq 1,65 \implies n \geq \left(\frac{1,65}{0,05}\right)^2 = 1089$$

Por lo que habría que seleccionar como mínimo una muestra de tamaño 1089 para poder afirmar con probabilidad mayor que 0,9 que la media muestral difiere de la poblacional menos de 0,1.

Ejercicio 2.2.4. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable con distribución normal. Calcular la probabilidad de que la cuasivarianza muestral sea menor que un 50 % de la varianza poblacional para $n = 16$ y para $n = 1000$.

Dicha muestra aleatoria simple es de variables idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Bajo estas condiciones, sabemos por lo visto en teoría que:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$$

Y queremos calcular:

$$P[S^2 < 0,5\sigma^2] = P\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)0,5\sigma^2}{\sigma^2}\right] = 1 - P\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > (n-1)0,5\right]$$

- Para $n = 16$, mirando en la tabla de $\chi^2(15)$ tenemos que:

$$P[S^2 < 0,5\sigma^2] = 1 - P\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > 7,5\right] = 1 - 0,95 = 0,05$$

- Para $n = 1000$, no disponemos de tabla para $\chi^2(999)$, por lo que aproximaremos $\chi^2(999)$ por $\mathcal{N}(999, 2 \cdot 999) \equiv \mathcal{N}(999, 1998)$, gracias al Teorema de Lévy. De esta forma, si tomamos:

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \mathcal{N}(999, 1998)$$

Tenemos entonces que:

$$P[999 \cdot 0,5] = P[Y > 499,5] = P\left[Z > \frac{499,5 - 999}{\sqrt{1998}}\right] = 1 - P[Z < -11,17]$$

Por lo que:

$$P[S^2 < 0,5\sigma^2] \approx P[Z < -11,17] \approx 0$$

Ejercicio 2.2.5. Sean S_1^2 y S_2^2 las cuasivarianzas muestrales de dos muestras independientes de tamaños $n_1 = 5$ y $n_2 = 4$ de dos poblaciones normales con la misma varianza. Calcular la probabilidad de que S_1^2/S_2^2 sea menor que 5,34 o mayor que 9,12.

Bajo estas hipótesis, sabemos por lo visto en teoría que (como $\sigma_1 = \sigma_2$):

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \rightsquigarrow F(n_1 - 1, n_2 - 1) \equiv F(4, 3)$$

Por tanto, notando $Y = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ por comodidad, calculamos (son sucesos disjuntos):

$$P[Y < 5,34 \text{ o } Y > 9,12] = P[Y < 5,34] + P[Y > 9,12]$$

Observamos la tabla de $F(4, 3)$:

$$P[Y < 5,34] = 0,9$$

$$P[Y > 9,12] = 1 - P[Y < 9,12] = 1 - 0,95 = 0,05$$

En definitiva:

$$P[Y < 5,34 \text{ o } Y > 9,12] = P[Y < 5,34] + P[Y > 9,12] = 0,95$$

Ejercicio 2.2.6. Se consideran dos poblaciones de bombillas cuyas longitudes de vida siguen una ley normal con la misma media y desviaciones típicas 425 y 375 horas, respectivamente. Con objeto de realizar un estudio comparativo de ambas poblaciones, se considera una muestra aleatoria simple de 10 bombillas en la primera población y una de tamaño 6 en la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral del primer grupo menos la del segundo sea menor que la observada en dos realizaciones muestrales que dieron 1325 horas y 1215 horas, respectivamente?

Como describe el enunciado, tenemos una m.a.s. (X_1, \dots, X_n) de tamaño $n = 10$ de variables aleatorias idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, 425^2)$; y otra m.a.s. (Y_1, \dots, Y_m) de tamaño $m = 6$ de variables aleatorias idénticamente distribuidas a $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, 375^2)$. Notaremos $\mu_1 = 1325$, $\mu_2 = 1215$. Bajo estas condiciones, sabemos por lo visto en teoría que:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu - \mu)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Luego si notamos a esta última variable como Z :

$$\begin{aligned} P[\bar{X} - \bar{Y} < 1325 - 1215] &= P\left[Z < \frac{1325 - 1215}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right] = P\left[Z < \frac{1325 - 1215}{\sqrt{\frac{425^2}{10} + \frac{375^2}{6}}}\right] \\ &= P[Z < 0,5399] = 0,7054 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.2.7. Sean X_1, \dots, X_n, X_{n+1} variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, y sean \bar{X} y S^2 la media y la cuasivarianza muestral de (X_1, \dots, X_n) . Calcular la distribución de

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Bajo dichas hipótesis, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} X_{n+1} \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ \bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow X_{n+1} - \bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu - \mu, \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right) \equiv \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

de donde si tipificamos la variable:

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sqrt{\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}} = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sigma \sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Además, se ha visto en teoría que:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$$

Como tanto X_{n+1} como \bar{X} son independientes de S^2 , podemos aplicar la construcción de la distribución t de Student:

$$\left. \begin{array}{l} U \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ \text{independientes} \\ V \rightsquigarrow \chi^2(n) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{U}{\sqrt{V/n}} \rightsquigarrow t(n)$$

Si lo aplicamos a nuestras variables:

$$\frac{\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \rightsquigarrow t(n-1)$$

Ejercicio 2.2.8. Sean $(X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_m)$ muestras aleatorias simples independientes de poblaciones $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ y $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$, respectivamente. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$ las medias y cuasivarianzas de las dos muestras. Calcular la distribución de

$$\frac{\alpha(\bar{X} - \mu_1) + \beta(\bar{Y} - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}} \sqrt{\frac{\alpha^2}{n} + \frac{\beta^2}{m}}}$$

Sabemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ \bar{Y} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_2, \frac{\sigma^2}{m}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{X} - \mu_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ \bar{Y} - \mu_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{m}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha(\bar{X} - \mu_1) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha^2 \sigma^2}{n}\right) \\ \beta(\bar{Y} - \mu_2) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\beta^2 \sigma^2}{m}\right) \end{array} \right\}$$

Como ambas son independientes, podemos aplicar la propeidad reproductiva de la normal:

$$\alpha(\bar{X} - \mu_1) + \beta(\bar{Y} - \mu_2) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha^2 \sigma^2}{n} + \frac{\beta^2 \sigma^2}{m}\right) \equiv \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \left(\frac{\alpha^2}{n} + \frac{\beta^2}{m}\right)\right)$$

Si tipificamos la variable:

$$\frac{\alpha(\bar{X} - \mu_1) + \beta(\bar{Y} - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{\alpha^2}{n} + \frac{\beta^2}{m}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Por otra parte, tenemos que:

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1), \quad \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(m-1)$$

Como ambas son independientes por ser S_1^2 y S_2^2 independientes (ya que las muestras aleatorias simples eran independientes), podemos aplicar la propiedad reproductiva de χ^2 , obteniendo que:

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n+m-2)$$

Finalmente, la extensión del Lema de Fisher nos dice que (\bar{X}, \bar{Y}) es independiente de (S_1^2, S_2^2) , por lo que las dos variables aleatorias con las que trabajamos son independientes, lo que nos permite aplicar la construcción de la distribución t de Student:

$$\frac{\frac{\alpha(\bar{X} - \mu_1) + \beta(\bar{Y} - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{\alpha^2}{n} + \frac{\beta^2}{m}}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}}} = \frac{\alpha(\bar{X} - \mu_1) + \beta(\bar{Y} - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}} \sqrt{\frac{\alpha^2}{n} + \frac{\beta^2}{m}}} \rightsquigarrow t(n+m-2)$$

2.3. Suficiencia y completitud

Ejercicio 2.3.1. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable $X \rightsquigarrow \{B(k, p) : p \in]0, 1[\}$ y sea $T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$. Probar

- a) usando la definición
- b) aplicando el teorema de factorización

que T es suficiente para p .

- a) Si notamos para abreviar $T = T(X_1, \dots, X_n)$, tenemos que probar que la distribución de la muestra condicionada a cualquier valor del estadístico no depende del parámetro p para probar que T es suficiente para p . Para ello:

$$\begin{aligned} P_p[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid T = t] &= \frac{P_p[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, T = t]}{P_p[T = t]} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } T(x_1, \dots, x_n) \neq t \\ \frac{P_p[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]}{P_p[T = t]} & \text{si } T(x_1, \dots, x_n) = t \end{cases} \end{aligned}$$

Como 0 obviamente no depende de p , el caso $T(x_1, \dots, x_n) \neq t$ se encuentra ya estudiado, por lo que nos centramos en el caso $T(x_1, \dots, x_n) = t$:

$$\begin{aligned} \frac{P_p[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]}{P_p[T = t]} &\stackrel{\text{iid.}}{=} \frac{\prod_{i=1}^n P_p[X = x_i]}{P_p[T = t]} \stackrel{(*)}{=} \frac{\prod_{i=1}^n \binom{k}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{k-x_i}}{\binom{nk}{t} p^t (1-p)^{nk-t}} \\ &= \frac{p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{nk - \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \binom{k}{x_i}}{\binom{nk}{t} p^t (1-p)^{nk-t}} \stackrel{(**)}{=} \frac{\prod_{i=1}^n \binom{k}{x_i}}{\binom{nk}{t}} \end{aligned}$$

Donde en $(*)$ hemos usado que (X_1, \dots, X_n) es una m.a.s. (variables independientes) y la reproductividad de la Binomial, por lo que $T \rightsquigarrow B(nk, p)$; y en $(**)$ hemos usado que $t = T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$. En definitiva, hemos obtenido que la distribución de la muestra condicionada a cualquier valor del estadístico no depende del parámetro p , por lo que T es suficiente para p .

- b) Si podemos usar el Teorema de factorización, escribimos la función masa de probabilidad de la distribución conjunta de la muestra aleatoria simple:

$$\begin{aligned} P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] &\stackrel{\text{iid.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X = x_i] = \prod_{i=1}^n \binom{k}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{k-x_i} \\ &= p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{nk - \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \binom{k}{x_i} \end{aligned}$$

Si tomamos:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \binom{k}{x_i}, \quad T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i, \quad g_p(t) = p^t (1-p)^{nk-t}$$

Podemos aplicar el Teorema de Factorización de Neymann-Fisher, obteniendo que T es un estadístico suficiente para p .

Ejercicio 2.3.2. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable $X \rightsquigarrow \{\mathcal{P}(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ y sea $T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$. Probar

- a) usando la definición
- b) aplicando el teorema de factorización

que T es suficiente para λ .

- a) Notando $T = T(X_1, \dots, X_n)$, seguimos los mismos pasos que en el ejercicio anterior:

$$P_\lambda[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid T = t] = \frac{P_\lambda[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, T = t]}{P_\lambda[T = t]}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } T(x_1, \dots, x_n) \neq t \\ \frac{P_\lambda[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]}{P_\lambda[T = t]} & \text{si } T(x_1, \dots, x_n) = t \end{cases}$$

Y ahora nos interesamos por el segundo término, que es el que puede depender de λ :

$$\frac{P_\lambda[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]}{P_\lambda[T = t]} \stackrel{\text{iid.}}{=} \frac{\prod_{i=1}^n P_\lambda[X = x_i]}{P_\lambda[T = t]} \stackrel{(*)}{=} \frac{\prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}}{e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^t}{t!}} = \frac{e^{-n\lambda} \cdot \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}}{e^{-n\lambda} \cdot \frac{n^t \lambda^t}{t!}}$$

$$\stackrel{(**)}{=} \frac{t!}{n^t \prod_{i=1}^n x_i!}$$

Donde en $(*)$ usamos que $T \rightsquigarrow P(n\lambda)$, por la reproductividad de la Poisson y en $(**)$ usamos que $t = T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$. Obtenemos una cantidad que no depende de λ , por lo que T es suficiente para λ .

- b) Si podemos aplicar el Teorema de factorización, escribimos:

$$P_\lambda[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] \stackrel{\text{iid.}}{=} \prod_{i=1}^n P_\lambda[X = x_i] = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \cdot \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

Si tomamos:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}, \quad T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i, \quad g_\lambda(t) = e^{-n\lambda} \cdot \lambda^t$$

Por el Teorema de Factorización de Neymann-Fisher obtenemos que T es suficiente para λ .

Ejercicio 2.3.3. Sea (X_1, X_2, X_3) una muestra aleatoria simple de una variable $X \rightsquigarrow \{B(1, p) : p \in]0, 1[\}$. Probar que el estadístico $X_1 + 2X_2 + 3X_3$ no es suficiente.

Consideramos el estadístico $T(X_1, X_2, X_3) = X_1 + 2X_2 + 3X_3$. El espacio muestral de X es $\mathcal{X} = \{0, 1\}$, por lo que el espacio muestral de T es $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sabemos por un ejemplo visto en teoría que el “truco” para demostrar que $T(X_1, X_2, X_3)$ no es suficiente para p es buscar un valor del espacio muestral \mathcal{T} que provenga de varias combinaciones de estados del espacio muestral \mathcal{X}^3 . Como 0, 1, 2 solo provienen de una combinación del espacio muestral \mathcal{X}^3 (son (0, 0, 0), (1, 0, 0) y (0, 1, 0) respectivamente), probamos buscar el contraejemplo con $t = 3$, que proviene de considerar las observaciones de la muestra (1, 1, 0) y (0, 0, 1).

Una vez explicado el procedimiento para buscar cuál es el valor de t que funciona, procedemos a probar que la distribución de la muestra condicionada a dicho valor de t depende del parámetro p . Para ello:

$$\begin{aligned} P_p[X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3 \mid T = 3] &= \frac{P_p[X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, T = 3]}{P_p[T = 3]} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } T(x_1, x_2, x_3) \neq 3 \\ \frac{P_p[X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3]}{P_p[T = 3]} & \text{si } T(x_1, x_2, x_3) = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vemos que el primer caso no puede depender nunca de p , por lo que buscamos probar que el segundo caso sí que depende de p . Para ello:

$$\begin{aligned} \frac{P_p[X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3]}{P_p[T = 3]} &\stackrel{\text{iid.}}{=} \frac{P_p[X = x_1]P_p[X = x_2]P_p[X = x_3]}{P_p[T = 3]} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{p^{x_1}(1-p)^{1-x_1}p^{x_2}(1-p)^{1-x_2}p^{x_3}(1-p)^{1-x_3}}{P_p[X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0] + P_p[X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1]} \\ &= \frac{p^{x_1}(1-p)^{1-x_1}p^{x_2}(1-p)^{1-x_2}p^{x_3}(1-p)^{1-x_3}}{p \cdot p \cdot (1-p) + (1-p)(1-p)p} \end{aligned}$$

Donde en (*) he usado la propiedad reproductiva de la Binomial, por lo que $T \rightsquigarrow B(3, p)$, así como que la condición $t = 3$ provenía de los valores (1, 1, 0) y (0, 0, 1). Ahora, si tomamos $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{P_p[X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0]}{P_p[T = 3]} &= \frac{p^1(1-p)^0 p^1(1-p)^0 p^0(1-p)^1}{p \cdot p \cdot (1-p) + (1-p)(1-p)p} \\ &= \frac{pp(1-p)}{pp(1-p) + (1-p)(1-p)p} \\ &= \frac{p^2(1-p)}{p(1-p)(p+1-p)} = p \end{aligned}$$

Que claramente depende de p , por lo que T no es suficiente para p .

Ejercicio 2.3.4. Aplicando el teorema de factorización, y basándose en una muestra de tamaño arbitrario, encontrar un estadístico suficiente para cada una de las siguientes familias de distribuciones (en las familias biparamétricas, suponer los casos de sólo un parámetro desconocido y de los dos desconocidos).

- a) $X \rightsquigarrow \{U(-\theta/2, \theta/2) : \theta > 0\}$
 b) $X \rightsquigarrow \{\Gamma(p, a) : p, a > 0\}$
 c) $X \rightsquigarrow \{\beta(p, q) : p, q > 0\}$
 d) $X \rightsquigarrow \{P_{N_1, N_2} : N_1, N_2 \in \mathbb{N}, N_1 \leq N_2\}$ y la masa de probabilidad viene dada por:

$$P_{N_1, N_2}[X = x] = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \quad x \in \{N_1, \dots, N_2\}$$

En lo que sigue, supondremos que tenemos una m.a.s. (X_1, \dots, X_n) de variables idénticamente distribuidas a la respectiva variable X :

- a) Si $X \rightsquigarrow U(-\theta/2, \theta/2)$ con $\theta > 0$:

$$f(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{iid.}}{=} \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n} \quad x_i \in]-\theta/2, \theta/2[, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Por lo que tendremos $-\theta/2 < X_{(1)} \leq X_{(n)} < \theta/2$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\theta^n} I_{]0, +\infty[}(X_{(1)} + \theta/2) I_{]-\infty, 0[}(X_{(n)} - \theta/2)$$

Si tomamos:

$$h(x_1, \dots, x_n) = 1, \quad T(X_1, \dots, X_n) = (X_{(1)}, X_{(n)})$$

$$g_\theta(t_1, t_2) = \frac{1}{\theta^n} I_{]0, +\infty[}(t_1 + \theta/2) I_{]-\infty, 0[}(t_2 - \theta/2)$$

Por el Teorema de factorización, tenemos que $T(X_1, \dots, X_n)$ es un estadístico suficiente para θ .

- b) Si $X \rightsquigarrow \Gamma(p, a)$ con $p, a > 0$:

$$f(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{iid.}}{=} \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{a^p}{\Gamma(p)} x_i^{p-1} e^{-ax_i} = \left(\frac{a^p}{\Gamma(p)} \right)^n e^{-a \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n x_i^{p-1}$$

$$= \left(\frac{a^p}{\Gamma(p)} \right)^n e^{-a \sum_{i=1}^n x_i} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{p-1} \quad x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

- Suponiendo que p es conocida, podemos tomar:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{p-1}, \quad T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$g_a(t) = \left(\frac{a^p}{\Gamma(p)} \right)^n e^{-at}$$

- Suponiendo ahora que a es conocida:

$$h(x_1, \dots, x_n) = e^{-a \sum_{i=1}^n x_i}, \quad T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$g_p(t) = \left(\frac{a^p}{\Gamma(p)} \right)^n t^{p-1}$$

- Si ahora tanto p como a son desconocidas, podemos tomar:

$$h(x_1, \dots, x_n) = 1, \quad T(X_1, \dots, X_n) = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n X_i \right)$$

$$g_{(a,p)}(t_1, t_2) = \left(\frac{a^p}{\Gamma(p)} \right)^n e^{-at_1} t_2^{p-1}$$

- c) Si $X \rightsquigarrow \beta(p, q)$ con $p, q > 0$:

$$f(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{iid.}}{=} \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta(p, q)} x_i^{p-1} (1 - x_i)^{q-1}$$

$$= \frac{1}{\beta(p, q)^n} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{p-1} \left(\prod_{i=1}^n (1 - x_i) \right)^{q-1} \quad x_i \in [0, 1], \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

- Si p es conocida, tomamos:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{p-1}, \quad T(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n (1 - X_i)$$

$$g_q(t) = \frac{1}{\beta(p, q)^n} t^{q-1}$$

- Si q es conocida:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^n (1 - x_i) \right)^{q-1}, \quad T(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n X_i$$

$$g_p(t) = \frac{1}{\beta(p, q)^n} t^{p-1}$$

- Si tanto p como q son parámetros:

$$h(x_1, \dots, x_n) = 1, \quad T(X_1, \dots, X_n) = \left(\prod_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n (1 - X_i) \right)$$

$$g_{(p,q)}(t_1, t_2) = \frac{1}{\beta(p, q)^n} t_1^{p-1} t_2^{q-1}$$

- d) Si $X \rightsquigarrow P_{N_1, N_2}$ con $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 \leq N_2$, entonces:

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] \stackrel{\text{iid.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X = x_i] = \prod_{i=1}^n \frac{1}{N_2 - N_1 + 1}$$

$$= \frac{1}{(N_2 - N_1 + 1)^n}, \quad x_i \in \{N_1, \dots, N_2\}$$

Como se tiene $N_1 \leq X_{(1)} \leq X_{(n)} \leq N_2$, entonces:

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \frac{I_{-N_0}(X_{(1)} - N_1) I_{N_0}(X_{(n)} - N_2)}{(N_2 - N_1 + 1)^n}$$

- Si N_1 es conocido:

$$h(x_1, \dots, x_n) = I_{-\mathbb{N}_0}(X_{(1)} - N_1), \quad T(X_1, \dots, X_n) = X_{(n)}$$

$$g_{N_2}(t) = \frac{I_{\mathbb{N}_0}(t - N_2)}{(N_2 - N_1 + 1)^n}$$

- Si N_2 es conocida:

$$h(x_1, \dots, x_n) = I_{\mathbb{N}_0}(X_{(n)} - N_2), \quad T(X_1, \dots, X_n) = X_{(1)}$$

$$g_{N_1}(t) = \frac{I_{-\mathbb{N}_0}(t - N_1)}{(N_2 - N_1 + 1)^n}$$

- Si tanto N_1 como N_2 son parámetros:

$$h(x_1, \dots, x_n) = 1, \quad T(X_1, \dots, X_n) = (X_{(1)}, X_{(n)})$$

$$g_{(N_1, N_2)}(t_1, t_2) = \frac{I_{-\mathbb{N}_0}(t_1 - N_1)I_{\mathbb{N}_0}(t_2 - N_2)}{(N_2 - N_1 + 1)^n}$$

Por lo que en cualquier caso obtenemos un estadístico suficiente, por el Teorema de Factorización.

Ejercicio 2.3.5. Sea $X \rightsquigarrow \{P_N : N \in \mathbb{N}\}$, siendo P_N la distribución uniforme en los puntos $\{1, \dots, N\}$, y sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de X . Probar que $\max(X_1, \dots, X_n)$ es un estadístico suficiente y completo.

Buscamos aplicar el Teorema de factorización de Neymann-Fisher:

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] \stackrel{\text{iid.}}{=} \prod_{i=1}^n P[X = x_i] = \prod_{i=1}^n \frac{1}{N}, \quad x_i \in \{1, \dots, N\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Por lo que $1 \leq X_{(1)} \leq X_{(n)} \leq N$:

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \frac{I_{\mathbb{N}_0}(X_{(1)} - 1)I_{-\mathbb{N}_0}(X_{(n)} - N)}{N^n}$$

De donde podemos tomar:

$$h(x_1, \dots, x_n) = I_{\mathbb{N}_0}(X_{(1)} - 1), \quad T(X_1, \dots, X_n) = X_{(n)}$$

$$g_N(t) = \frac{I_{-\mathbb{N}_0}(t - N)}{N^n}$$

Por el Teorema de factorización de Neymann-Fisher, tenemos que el estadístico $T(X_1, \dots, X_n) = X_{(n)}$ es suficiente. Comprobamos que también es completo: sea g cualquier función medible, supongamos que (abreviaremos $T(X_1, \dots, X_n) = T$):

$$0 = E[g(T)] = \sum_{t=1}^N g(t)P[T = t] \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Calculamos la función masa de probabilidad de T :

$$F_T(t) = (F_X(t))^n \implies P[T = t] = P[T \leq t] - P[T \leq t-1] = (F_X(t))^n - (F_X(t-1))^n$$

Como $F_X(t) = \frac{t}{N}$, tenemos entonces que:

$$P[T = t] = (F_X(t))^n - (F_X(t-1))^n = \frac{t^n}{N^n} - \frac{(t-1)^n}{N^n} = \frac{t^n - (t-1)^n}{N^n}$$

Por lo que:

$$0 = E[g(T)] = \sum_{t=1}^N g(t) \frac{t^n - (t-1)^n}{N^n} = \frac{1}{N^n} \sum_{t=1}^N g(t)(t^n - (t-1)^n) \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

de donde:

$$\sum_{t=1}^N g(t)(t^n - (t-1)^n) = 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Probemos por inducción sobre N que $g(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{N}$:

- Para $N = 1$: tenemos que:

$$g(1) = g(1)(1^n - (1-1)^n) = \sum_{t=1}^1 g(t)(t^n - (t-1)^n) = 0$$

- Supuesto que $g(t) = 0$ para $t < N$:

$$g(N)(N^n - (N-1)^n) = \sum_{t=1}^N g(t)(t^n - (t-1)^n) = 0$$

Por lo que:

- $g(N) = 0$.
- $N^n - (N-1)^n = 0$, que es imposible, puesto que la potencia n -ésima es una función estrictamente creciente en el intervalo $[0, +\infty[$.

En definitiva, tenemos que:

$$\mathbb{N} \subseteq \{t : g(t) = 0\}$$

Por lo que:

$$1 \geq P[g(T) = 0] \geq P[T \in \mathbb{N}] = 1 \implies P[g(T) = 0] = 1$$

Lo que demuestra que $X_{(n)}$ es completo.

Ejercicio 2.3.6. Basándose en una muestra de tamaño arbitrario, obtener un estadístico suficiente y completo para la familia de distribuciones definidas por todas las densidades de la forma

$$f_\theta(x) = e^{\theta-x}, \quad x > \theta$$

Sea (X_1, \dots, X_n) una m.a.s. de tamaño $n \in \mathbb{N}$:

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{iid.}}{=} \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^n e^{\theta-x_i} = e^{n\theta - \sum_{i=1}^n x_i} = \frac{e^{n\theta}}{e^{\sum_{i=1}^n x_i}}, \quad x_i > \theta \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Por lo que ha de ser $\theta < X_{(1)}$:

$$f_{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{e^{n\theta} \cdot I_{]-\infty, 0[}(X_{(1)} - \theta)}{e^{\sum_{i=1}^n x_i}}$$

Si tomamos:

$$h(x_1, \dots, x_n) = e^{-\sum_{i=1}^n x_i}, \quad T(X_1, \dots, X_n) = X_{(1)} \\ g_{\theta}(t) = e^{n\theta} \cdot I_{]-\infty, 0[}(t - \theta)$$

Por el Teorema de factorización de Neymann-Fisher tenemos que el estadístico $X_{(1)}$ es suficiente para θ . Comprobemos si es completo: sea g cualquier función medible, suponemos que (y escribimos $T = T(X_1, \dots, X_n)$ para abreviar):

$$0 = E[g(T)] = \int_{\theta}^{+\infty} g(t) f_T(t) dt \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Como $T = X_{(1)}$, tenemos que:

$$F_T(t) = 1 - (1 - F_{\theta}(t))^n \implies f_T(t) = n(1 - F_{\theta}(t))^{n-1} f_{\theta}(t)$$

donde:

$$F_{\theta}(t) = \int_{\theta}^t e^{\theta-x} dx = [-e^{\theta-x}]_{\theta}^t = 1 - e^{\theta-t}, \quad t > \theta$$

por lo que:

$$f_T(t) = n(e^{\theta-t})^{n-1} e^{\theta-t} = n(e^{\theta-t})^n, \quad t > \theta$$

volviendo al caso que nos interesa:

$$0 = E[g(T)] = \int_{\theta}^{+\infty} g(t) n(e^{\theta-t})^n dt = ne^{n\theta} \int_{\theta}^{+\infty} g(t) e^{-nt} dt \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

por lo que:

$$\int_{\theta}^{+\infty} g(t) e^{-nt} dt = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Por simplicidad de cálculos, supondremos que g es continua, con lo que si $G(t)$ es una primitiva de $g(t)e^{-nt}$, entonces:

$$\int_{\theta}^{+\infty} g(t) e^{-nt} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\theta}^n g(t) e^{-nt} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} G(n) - G(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Si derivamos ahora respecto a θ , tenemos que:

$$-g(\theta) e^{-n\theta} = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

con lo que $g(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$. Es decir:

$$\mathbb{R} \subseteq \{t : g(t) = 0\}$$

luego:

$$1 \geq P[g(T) = 0] \geq P[T \in \mathbb{R}] = 1 \implies P[g(T) = 0] = 1$$

por lo que T es completo.

Ejercicio 2.3.7. Comprobar que las siguientes familias de distribuciones son exponenciales uniparamétricas y, considerando una muestra aleatoria simple de una variable con distribución en dicha familia, obtener, si existe, un estadístico suficiente y completo.

a) $\{B(k_0, p) : 0 < p < 1\}$

Comprobamos todas las condiciones:

1. El espacio paramétrico es: $]0, 1[\subseteq \mathbb{R}$.
2. El espacio muestral es $\mathcal{X} = \{0, \dots, k_0\}$, que no depende de p .
3. Para la tercera condición:

$$\begin{aligned} P[X = x]_p &= \binom{k_0}{p} p^x (1-p)^{k_0-x} = \exp \left[\ln \left(\binom{k_0}{p} p^x (1-p)^{k_0-x} \right) \right] \\ &= \exp \left[\ln \binom{k_0}{p} + x \ln p + (k_0 - x) \ln(1-p) \right] \\ &= \exp \left[\ln \binom{k_0}{p} + x \ln p + k_0 \ln(1-p) - x \ln(1-p) \right] \\ &= \exp \left[\ln \binom{k_0}{p} + k_0 \ln(1-p) + x \ln \left(\frac{p}{1-p} \right) \right] \end{aligned}$$

Tomando:

$$\begin{aligned} T(x) &= x, & S(x) &= 0 \\ Q(p) &= \ln \left(\frac{p}{1-p} \right), & D(p) &= \ln \binom{k_0}{p} + k_0 \ln(1-p) \end{aligned}$$

obtenemos la tercera condición.

Sea (X_1, \dots, X_n) una m.a.s. de variables aleatorias idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow B(k_0, p)$ con $p \in]0, 1[$, el Teorema visto en teoría para las familias de distribuciones exponenciales nos dice que el estadístico:

$$T = T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n T(X_i) = \sum_{i=1}^n X_i$$

es suficiente para p . Para ver que T es también completo, hemos de ver que $\text{Im}Q$ contiene un abierto de \mathbb{R} :

Opción 1. Como $Q :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ es continua, no constante y definida sobre un intervalo, por el Teorema del Valor Intermedio su imagen ha de ser un intervalo, que es un abierto de \mathbb{R} , por lo que T es completo.

Opción 2.

$$\text{Im}Q = \left\{ \ln \left(\frac{p}{1-p} \right) : p \in]0, 1[\right\}$$

Si definimos la función $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^+$, tenemos que f es sobreyectiva (de hecho es biyectiva):

- Está bien definida, puesto que si $x \in]0, 1[$, entonces $1 - x > 0$, con lo que $f(x) \in \mathbb{R}^+$.
- Sea $y \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\frac{t}{1-t} = y \iff t = y(1-t) \iff t = y - yt \iff t(1+y) = y \iff t = \frac{y}{y+1} < 1$$

Por lo que $f(t) = y$ con $t \in]0, 1[$, con lo que f es sobreyectiva.

Por tanto, $Imf = \mathbb{R}^+$, de donde deducimos que:

$$ImQ = \left\{ \ln \left(\frac{p}{1-p} \right) : p \in]0, 1[\right\} = \{ \ln(f(p)) : p \in]0, 1[\} = \ln(Imf) = \ln(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$$

Como obviamente \mathbb{R} contiene algún abierto de \mathbb{R} , deducimos que T era un estadístico completo.

b) $\{\mathcal{P}(\lambda) : \lambda > 0\}$

Comprobamos las condiciones:

1. El espacio paramétrico es $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$.
2. El espacio muestral es $\mathcal{X} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, que no depende de λ .
3. Para la tercera condición:

$$P_\lambda[X = x] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \exp \left[\ln \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \right) \right] = \exp[-\lambda + x \ln \lambda - \ln(x!)]$$

Tomando:

$$\begin{aligned} T(x) &= x, & S(x) &= -\ln(x!) \\ Q(\lambda) &= \ln \lambda, & D(\lambda) &= -\lambda \end{aligned}$$

obtenemos la tercera condición.

Sea (X_1, \dots, X_n) una m.a.s. de variables aleatorias idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$, el Teorema visto en teoría para las familias de distribuciones exponenciales nos dice que el estadístico:

$$T = T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n T(X_i) = \sum_{i=1}^n X_i$$

es suficiente para λ . Para ver que T es también completo, hemos de ver que ImQ contiene un abierto de \mathbb{R} . Como:

$$ImQ = \{\ln(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^+\} = \ln(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$$

Tenemos que $ImQ = \mathbb{R}$ claramente contiene un abierto de \mathbb{R} , por lo que T es completo.

c) $\{BN(k_0, p) : 0 < p < 1\}$

Comprobamos las condiciones:

1. El espacio paramétrico es $]0, 1[\subseteq \mathbb{R}$.
2. El espacio muestral es $\mathcal{X} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, que no depende de p .
3. Para la tercera condición:

$$\begin{aligned} P_p[X = x] &= \binom{x + k_0 - 1}{x} (1 - p)^x p^{k_0} = \exp \left[\ln \left(\binom{x + k_0 - 1}{x} (1 - p)^x p^{k_0} \right) \right] \\ &= \exp \left[\ln \binom{x + k_0 - 1}{x} + x \ln(1 - p) + k_0 \ln p \right] \end{aligned}$$

Tomando:

$$\begin{aligned} T(x) &= x, & S(x) &= \ln \binom{x + k_0 - 1}{x} \\ Q(p) &= \ln(1 - p), & D(p) &= k_0 \ln p \end{aligned}$$

Obtenemos la tercera condición.

Sea (X_1, \dots, X_n) una m.a.s. de variables aleatorias idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow BN(k_0, p)$ con $p \in]0, 1[$, el Teorema visto en teoría para las familias de distribuciones exponenciales nos dice que el estadístico:

$$T = T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n T(X_i) = \sum_{i=1}^n X_i$$

es suficiente para p . Para ver que T es también completo, hemos de ver que ImQ contiene un abierto de \mathbb{R} . Como $Q :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, no constante y definida en un intervalo, tenemos que su imagen es un intervalo, por lo que contiene abiertos de \mathbb{R} , de donde T es completo.

d) $\{exp(\lambda) : \lambda > 0\}$

Comprobamos las condiciones:

1. El espacio paramétrico es $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$.
2. El espacio muestral es $\mathcal{X} = \mathbb{R}^+$, que no depende de λ .
3. Para la tercera condición:

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \exp [\ln (\lambda e^{-\lambda x})] = \exp [\ln(\lambda) - \lambda x]$$

Tomando:

$$\begin{aligned} T(x) &= x, & S(x) &= 0 \\ Q(\lambda) &= -\lambda, & D(\lambda) &= \ln(\lambda) \end{aligned}$$

tenemos la tercera condición.

Sea (X_1, \dots, X_n) una m.a.s. de variables aleatorias idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow exp(\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$, el Teorema visto en teoría para las familias de distribuciones exponenciales nos dice que el estadístico:

$$T = T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n T(X_i) = \sum_{i=1}^n X_i$$

es suficiente para λ . Para ver que T es también completo, hemos de ver que ImQ contiene un abierto de \mathbb{R} . Como $Q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, no constante y definida en un intervalo, tenemos que su imagen es un intervalo, por lo que contiene abiertos de \mathbb{R} , de donde T es completo.

Ejercicio 2.3.8. Estudiar si las siguientes familias de distribuciones son exponenciales biparamétricas. En caso afirmativo, considerando una muestra aleatoria simple de una variable con distribución en dicha familia, obtener, si existe, un estadístico suficiente y completo.

a) $\{\Gamma(p, a) : p, a > 0\}$

Comprobamos las condiciones:

1. El espacio paramétrico es $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}^2$.
2. El espacio muestral es \mathbb{R}^+ , que no depende de p ni de a .
3. Para la tercera condición:

$$\begin{aligned} f_{(p,a)}(x) &= \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} = \exp \left[\ln \left(\frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} \right) \right] \\ &= \exp \left[\ln \left(\frac{a^p}{\Gamma(p)} \right) + (p-1) \ln x - ax \right] \end{aligned}$$

Tomando:

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \ln x, & T_2(x) &= x, & S(x) &= 0 \\ Q_1(p, a) &= (p-1), & Q_2(p, a) &= -a, & D(p, a) &= \ln \left(\frac{a^p}{\Gamma(p)} \right) \end{aligned}$$

Tenemos la tercera condición.

Sea (X_1, \dots, X_n) una m.a.s. de variables aleatorias idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow \Gamma(p, a)$ con $p, a \in \mathbb{R}^+$, el Teorema visto en teoría para las familias de distribuciones exponenciales multiparamétricas nos dice que el estadístico:

$$T = T(X_1, \dots, X_n) = \left(\sum_{i=1}^n T_1(X_i), \sum_{i=1}^n T_2(X_i) \right) = \left(\sum_{i=1}^n \ln(X_i), \sum_{i=1}^n X_i \right)$$

es suficiente para (p, a) . Para ver que T es también completo, hemos de ver que ImQ contiene un abierto de \mathbb{R}^2 , donde $Q : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $Q = (Q_1, Q_2)$. Para ello:

$$\begin{aligned} ImQ &= \left\{ (p-1, -a) : (p, a) \in (\mathbb{R}^+)^2 \right\} = \{(x-1, y) : x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^-\} \\ &=]-1, +\infty[\times \mathbb{R}^- \end{aligned}$$

Como claramente $]-1, +\infty[\times \mathbb{R}^-$ contiene un abierto de \mathbb{R}^2 , tenemos que T es completo.

Observemos que también podríamos haber tomado:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \left(\prod_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i \right)$$

b) $\{\beta(p, q) : p, q > 0\}$

Comprobamos las condiciones:

1. El espacio paramétrico es $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}^2$.
2. El espacio muestral es $[0, 1]$, que no depende de p ni de q .
3. Para la tercera condición:

$$\begin{aligned} f_{(p,q)}(x) &= \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} = \exp \left[\ln \left(\frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \right) \right] \\ &= \exp \left[\ln \left(\frac{1}{\beta(p,q)} \right) + (p-1) \ln x + (q-1) \ln(1-x) \right] \end{aligned}$$

Tomando:

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \ln x, & T_2(x) &= \ln(1-x), & S(x) &= 0 \\ Q_1(p, q) &= p-1, & Q_2(p, q) &= q-1, & D(p, q) &= \ln \left(\frac{1}{\beta(p, q)} \right) \end{aligned}$$

Tenemos la tercera condición.

Sea (X_1, \dots, X_n) una m.a.s. de variables aleatorias idénticamente distribuidas a $X \rightsquigarrow \beta(p, q)$ con $p, q \in \mathbb{R}^+$, el Teorema visto en teoría para las familias de distribuciones exponenciales multiparamétricas nos dice que el estadístico:

$$T = T(X_1, \dots, X_n) = \left(\sum_{i=1}^n T_1(X_i), \sum_{i=1}^n T_2(X_i) \right) = \left(\sum_{i=1}^n \ln(X_i), \sum_{i=1}^n \ln(1-X_i) \right)$$

es suficiente para (p, q) . Para ver que T es también completo, hemos de ver que ImQ contiene un abierto de \mathbb{R}^2 , donde $Q : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $Q = (Q_1, Q_2)$. Para ello:

$$ImQ = \{(p-1, q-1) : p, q \in \mathbb{R}^+\} =]-1, +\infty[\times]-1, +\infty[$$

Como claramente este conjunto contiene un abierto de \mathbb{R}^2 , tenemos que T es completo.

2.4. Estimación puntual. Insesgadez y mínima varianza

Ejercicio 2.4.1. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra de una variable $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Probar que

$$T(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{X} \leq 0 \\ 0 & \text{si } \bar{X} > 0 \end{cases}$$

es un estimador insesgado de la función paramétrica $\Phi\left(\frac{-\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right)$, siendo Φ la función de distribución de la $\mathcal{N}(0, 1)$.

Tenemos $T(X_1, \dots, X_n) = I_{]-\infty, 0]}(\bar{X})$. Como $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, sabemos por lo visto en el Tema 1 que entonces:

$$\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

de donde (escribiendo $T = T(X_1, \dots, X_n)$):

$$T = I_{]-\infty, 0]}(\bar{X}) \rightsquigarrow B(1, P[\bar{X} \leq 0])$$

estamos ya en condiciones de ver que T es insesgado para dicha función:

$$E[T] \stackrel{(*)}{=} P[\bar{X} \leq 0] \stackrel{\text{tipif.}}{=} P\left[Z \leq \frac{-\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{-\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

donde en $(*)$ usamos que conocemos bien la esperanza de una distribución Bernoulli.

Ejercicio 2.4.2. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de $X \rightsquigarrow B(1, p)$ con $p \in]0, 1[$ y sea $T = \sum_{i=1}^n X_i$.

a) Probar que si $k \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$, el estadístico

$$\frac{T(T-1) \cdot \dots \cdot (T-k+1)}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}$$

es un estimador insesgado de p^k . ¿Es este estimador el UMVUE?

b) Probar que si $k > n$, no existe ningún estimador insesgado para p^k .

c) ¿Puede afirmarse que $\frac{T}{n}(1 - \frac{T}{n})^2$ es insesgado para $p(1-p)^2$?

Veamos cada apartado:

a) Sea $k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, definimos:

$$h(T) = \frac{T(T-1) \cdot \dots \cdot (T-k+1)}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}$$

Veamos que $h(T)$ es insesgado para p^k . En primer lugar, observemos que por la reproductividad de la binomial $T \rightsquigarrow B(n, p)$:

$$E[h(T)] = \frac{E[T(T-1) \cdot \dots \cdot (T-k+1)]}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)} = \frac{(n-k)!}{n!} E[T(T-1) \cdot \dots \cdot (T-k+1)]$$

Calculamos ahora la esperanza:

$$\begin{aligned} E[T(T-1) \cdot \dots \cdot (T-k+1)] &= \sum_{t=0}^n t(t-1) \cdot \dots \cdot (t-k+1) P[T=t] \\ &= \sum_{t=0}^n t(t-1) \cdot \dots \cdot (t-k+1) \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t} \\ &= \sum_{t=k}^n t(t-1) \cdot \dots \cdot (t-k+1) \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t} \\ &= \sum_{t=k}^n \frac{t!}{(t-k)!} \frac{n!}{t!(n-t)!} p^t (1-p)^{n-t} \\ &= \sum_{t=k}^n \frac{n!}{(t-k)!(n-t)!} p^t (1-p)^{n-t} \end{aligned}$$

si desarrollamos ahora los primeros términos, observamos que:

$$\begin{aligned} E[T(T-1) \cdot \dots \cdot (T-k+1)] &= \sum_{t=k}^n \frac{n!}{(t-k)!(n-t)!} p^t (1-p)^{n-t} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + \frac{n!}{(n-k-1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} + \dots \end{aligned}$$

donde podemos ver que podemos sacar factor común de la sumatoria ciertos términos:

$$\begin{aligned} E[T(T-1) \cdot \dots \cdot (T-k+1)] &= \sum_{t=k}^n \frac{n!}{(t-k)!(n-t)!} p^t (1-p)^{n-t} \\ &= \frac{n! \cdot p^k}{(n-k)!} \sum_{t=k}^n p^{t-k} (1-p)^{n-t} \frac{(n-k)!}{(t-k)!(n-t)!} \\ &= \frac{n! \cdot p^k}{(n-k)!} \sum_{t=0}^{n-k} p^t (1-p)^{n-k-t} \frac{(n-k)!}{t!(n-k-t)!} \\ &= \frac{n! \cdot p^k}{(n-k)!} \sum_{t=0}^{n-k} \binom{n-k}{t} p^t (1-p)^{n-k-t} \\ &= \frac{n! \cdot p^k}{(n-k)!} \sum_{t=0}^{n-k} P[S=t] = \frac{n! \cdot p^k}{(n-k)!} P[0 \leq S \leq n-k] \stackrel{(*)}{=} \frac{n! \cdot p^k}{(n-k)!} \end{aligned}$$

para cierta variable aleatoria $S \rightsquigarrow B(n-k, p)$, donde en $(*)$ usamos que $P[0 \leq S \leq n-k] = 1$. Ahora, vemos que:

$$E[h(T)] = \frac{(n-k)!}{n!} \frac{n!}{(n-k)!} p^k = p^k$$

por lo que $h(T)$ es insesgado para p^k . Veamos ahora que $h(T)$ es un estimador. Para ello, observamos primero que:

$$h(T) = \frac{T}{n} \cdot \frac{T-1}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{T-k+1}{n-k+1} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{T-j}{n-j}$$

Para cada $j \in \{0, \dots, k-1\}$, observemos que $T \in \{0, \dots, n\}$, por lo que $T-j \in \{-j, \dots, n-j\}$ con $j < k \leq n$, de donde deducimos que:

$$\frac{T-j}{n-j} \in [-1, 1] \implies \prod_{j=0}^{k-1} \frac{T-j}{n-j} \in [-1, 1]$$

Tenemos que ver finalmente que dicho producto es positivo, con lo que habremos probado que $h(T)$ es un estimador. Para ello, si el producto no fuera positivo es por la existencia de $j \in \{0, \dots, k-1\}$ de forma que $T-j < 0$, es decir, tenemos entonces que $T \in \{0, \dots, j-1\}$ supuesto que $T = l \in \{0, \dots, j-1\}$, tendremos entonces que:

$$h(T) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{T-j}{n-j} = \left(\prod_{j=0}^{l-1} \frac{T-j}{n-j} \right) \frac{T-l}{n-l} \left(\prod_{j=l+1}^{k-1} \frac{T-j}{n-j} \right) = 0$$

es decir, siempre que un término del producto sea negativo el producto entero se anula, por lo que siempre el producto es positivo, de donde $h(T) \in [0, 1]$, por lo que $h(T)$ es un estimador.

Finalmente, como:

$$E[(h(T))^2] = \sum_{t=0}^n (h(t))^2 P[T=t] < \infty$$

y teníamos que T era un estimador suficiente y completo (cuando vimos que $\{B(1, p) : p \in]0, 1[\}$ era una familia exponencial), tenemos entonces que $E[h(T)/T] = h(T)$ es el UMVUE de p^k .

- b) Sea ahora $k > n$, veamos que no puede existir ningún estimador insesgado para p^k . Para ello, por reducción al absurdo, supongamos que $h(T)$ es un estimador insesgado para p^k , con lo que:

$$p^k = E[h(T)] = \sum_{t=0}^n h(t) P[T=t] = \sum_{t=0}^n h(t) \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t}$$

de donde:

$$1 = \sum_{t=0}^n h(t) \binom{n}{t} p^{t-k} (1-p)^{n-t} \quad \forall p \in]0, 1[$$

en particular, tomando $p \rightarrow 0$, como $t-k < 0$ para todo $t \in \{0, \dots, k\}$, tenemos que:

$$1 = \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{t=0}^n h(t) \binom{n}{t} p^{t-k} (1-p)^{n-t} = \infty$$

contradicción, con lo que para $k > n$ no puede existir un estimador insesgado para p^k . También podríamos haber justificado que son dos polinomios de distinto grado, para llegar a contradicción.

- c) Buscamos ahora comprobar si $h(T) = \frac{T}{n} \left(1 - \frac{T}{n}\right)^2$ es insesgado para $p(1-p)^2$.

Resulta que esto no puede afirmarse para todos los valores de n y p . Como un contraejemplo, para $n = 3$ resulta que tenemos:

$$\begin{aligned} E[h(T)] &= \sum_{t=0}^3 \frac{t}{3} \left(1 - \frac{t}{3}\right)^2 \binom{3}{t} p^t (1-p)^{3-t} \stackrel{(*)}{=} \sum_{t=1}^2 \frac{t}{3} \left(1 - \frac{t}{3}\right)^2 \binom{3}{t} p^t (1-p)^{3-t} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \binom{3}{1} p(1-p)^2 + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \binom{3}{2} p^2(1-p) \\ &= p(1-p) \left(\frac{1}{9}(1-p) + \frac{2}{9}p\right) = p(1-p) \frac{(1+p)}{9} \quad \forall p \in]0, 1[\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que la función $t \mapsto \frac{t}{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^2$ evaluada en 0 y 3 es igual a cero. Observamos que:

$$E[h(T)] = p(1-p) \frac{(1+p)}{9} = p(1-p)^2 \iff \frac{1+p}{9} = 1-p$$

resultado que no es cierto para todo $p \in]0, 1[$ (basta considerar $p = 1/2$), por lo que dicho estimador no es insesgado para $p(1-p)^2$.

Ejercicio 2.4.3. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Encontrar, si existe, el UMVUE para λ^s , siendo $s \in \mathbb{N}$ arbitrario.

Veamos que $T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estadístico suficiente y completo. Para ello, recordemos que $\{\mathcal{P}(\lambda) : \lambda > 0\}$ es una familia exponencial:

1. El espacio paramétrico es $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$.
2. El espacio muestral es $\mathcal{X} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, que no depende de λ .
3. Observamos que:

$$P_\lambda[X = x] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \exp \left[\ln \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \right) \right] = \exp(-\lambda + x \ln \lambda - \ln(x!))$$

por lo que basta tomar:

$$Q(\lambda) = \ln \lambda, \quad T(x) = x \quad D(\lambda) = -\lambda, \quad S(x) = -\ln(x!)$$

En consecuencia, por un Teorema visto en teoría, tenemos que el estadístico:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n T(X_i) = \sum_{i=1}^n X_i$$

es suficiente y completo para λ . Observemos que por la reproductividad de la Poisson tenemos que (notando $T = T(X_1, \dots, X_n)$):

$$T \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda\right) \equiv \mathcal{P}(n\lambda)$$

Ahora, para buscar el UMVUE, buscamos una función h medible de forma que:

$$\lambda^s = E[h(T)] = \sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} h(t) P[T = t] = \sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} h(t) e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^t}{t!}$$

por lo que:

$$\lambda^s e^{n\lambda} = \sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} h(t) \frac{(n\lambda)^t}{t!}$$

y si aplicamos el desarrollo en serie de la exponencial, obtenemos:

$$\lambda^s \sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(n\lambda)^t}{t!} = \lambda^s e^{n\lambda} = \sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} h(t) \frac{(n\lambda)^t}{t!}$$

si desarrollamos cada uno de los términos:

$$\lambda^s + \lambda^{s+1}n + \frac{\lambda^{s+2}n^2}{2!} + \dots = h(0) + h(1)(n\lambda) + \dots + h(s) \frac{(n\lambda)^s}{s!} + \dots$$

observamos que tomando:

$$\begin{aligned} h(0) &= \dots = h(s-1) = 0, & h(s) &= \frac{s!}{n^s} \\ h(s+1) &= \frac{(s+1)!}{n^s}, & \dots & h(s+k) = \frac{(s+k)!}{n^s k!} \end{aligned}$$

es decir:

$$h(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } T < s \\ \frac{T!}{n^s (T-s)!} & \text{si } T \geq s \end{cases}$$

tenemos que $h(T)$ es insesgado para λ^s . Es claro además que $h(t) \in \mathbb{R}^+$ para cualquier valor de t , con lo que $h(T)$ es un estimador de λ^s . Finalmente, observemos que:

$$\begin{aligned} E[(h(T))^2] &= \sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (h(t))^2 P[T = t] = \sum_{t \geq s} \left(\frac{t!}{n^s (t-s)!} \right)^2 e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^t}{t!} \\ &= \frac{1}{n^s e^{n\lambda}} \sum_{t \geq s} \frac{(n\lambda)^t t!}{((t-s)!)^2} \end{aligned}$$

como:

$$\frac{\frac{(n\lambda)^{t+1} (t+1)!}{((t+1-s)!)^2}}{\frac{(n\lambda)^t t!}{((t-s)!)^2}} = \frac{(n\lambda)^{t+1} (t+1)! ((t-s)!)^2}{(n\lambda)^t t! ((t+1-s)!)^2} = \frac{n\lambda (t+1)}{(t+1-s)^2} \rightarrow 0 < 1$$

por el Criterio del cociente, tenemos que:

$$\sum_{t \geq s} \frac{(n\lambda)^t t!}{((t-s)!)^2} < \infty \implies E[(h(T))^2] = \frac{1}{n^s e^{n\lambda}} \sum_{t \geq s} \frac{(n\lambda)^t t!}{((t-s)!)^2} < \infty$$

en consecuencia, tenemos que $h(T)$ es un estimador insesgado para λ^s y de momento de segundo orden finito y es función de un estadístico suficiente y completo, con lo que el Teorema de Lehmann-Scheffé nos dice que:

$$E[h(T)/T] = h(T)$$

es un UMVUE para λ^s .

Ejercicio 2.4.4. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable con distribución uniforme discreta en los puntos $\{1, \dots, N\}$, siendo N un número natural arbitrario. Encontrar el UMVUE para N .

En el Ejercicio 2.3.5 vimos que $T(X_1, \dots, X_n) = X_{(n)}$ era un estadístico suficiente y completo. Si notamos $T = T(X_1, \dots, X_n)$, tenemos que:

$$F_T(t) = (F_X(t))^n \implies P[T = t] = P[T \leq t] - P[T \leq t-1] = (F_X(t))^n - (F_X(t-1))^n$$

como $F_X(t) = \frac{t}{N}$ para $t \in \{1, \dots, N\}$, tenemos:

$$P[T = t] = (F_X(t))^n - (F_X(t-1))^n = \frac{t^n - (t-1)^n}{N^n}$$

Buscamos ahora una función h medible de forma que:

$$N = E[h(T)] = \sum_{t=1}^N h(t) P[T = t] = \sum_{t=1}^N h(t) \frac{t^n - (t-1)^n}{N^n}$$

Si desarrollamos la suma para $h(t) = 1$, observamos un comportamiento telescópico:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^n} \sum_{t=1}^N (t^n - (t-1)^n) &= \frac{1}{N^n} (N^n - (N-1)^n + (N-1)^n - (N-2)^n + \dots + 2^n - 1 + 1 - 0) \\ &= \frac{N^n}{N^n} = 1 \end{aligned}$$

No hemos obtenido lo que queríamos, puesto que queríamos que el resultado de la suma fuera N^{n+1} . Si tomamos sin embargo:

$$h(t) = \frac{t^{n+1} - (t-1)^{n+1}}{t^n - (t-1)^n}$$

tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} E[h(T)] &= \frac{1}{N^n} \sum_{t=1}^N h(t) (t^n - (t-1)^n) = \frac{1}{N^n} \sum_{t=1}^N t^{n+1} - (t-1)^{n+1} \\ &= \frac{1}{N^n} (N^{n+1} - (N-1)^{n+1} + (N-1)^{n+1} - \dots + 2^{n+1} - 1 + 1 - 0) \\ &= \frac{N^{n+1}}{N^n} = N \end{aligned}$$

Por lo que el estadístico $h(T)$ es insesgado para N . Nos falta comprobar si es un estimador y si tiene momento de segundo orden finito:

- No es estimador, puesto que $h(\mathbb{N}) \not\subseteq \mathbb{N}$. Sin embargo, podemos realizar aproximaciones y quedarnos con el natural más próximo. Es decir, no va a haber un UMVUE pero podemos quedarnos con este estadístico, que es aquello que podemos conseguir más próximo a un UMVUE.
- Para el momento de segundo orden, observamos que:

$$E[(h(T))^2] = \frac{1}{N^n} \sum_{t=1}^N (h(t))^2 (t^n - (t-1)^n) < \infty$$

al ser una suma finita.

Ejercicio 2.4.5. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X cuya función de densidad es de la forma

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\theta}}, \quad 0 < x < \theta$$

Calcular, si existe, el UMVUE para θ .

En primer lugar, busquemos un estadístico suficiente y completo:

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{iid.}}{=} \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\sqrt{x_i\theta}} = \frac{1}{(2\sqrt{\theta})^n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}} \quad x_i \in]0, \theta[$$

Si consideramos $0 < X_{(1)} \leq X_{(n)} < \theta$, podemos escribir:

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \frac{I_{]0, +\infty[}(X_{(1)} - 0) \cdot I_{]-\infty, 0[}(X_{(n)} - \theta)}{(2\sqrt{\theta})^n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}}$$

Tomando:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}}, \quad T(X_1, \dots, X_n) = X_{(n)}$$

$$g_\theta(t) = \frac{I_{]0, +\infty[}(X_{(1)} - 0) \cdot I_{]-\infty, 0[}(t - \theta)}{(2\sqrt{\theta})^n}$$

por el Teorema de factorización de Neymann-Fisher tenemos que el estadístico $X_{(n)}$ es suficiente para θ . Notando $T = X_{(n)}$ para abreviar, calculamos la distribución de T :

$$F_T(t) = (F_X(t))^n \implies f_T(t) = n(F_X(t))^{n-1} f_\theta(t)$$

Calculamos la distribución de X :

$$F_X(t) = \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{x\theta}} dx = \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{t}{\theta}} \quad t \in]0, \theta[$$

Por lo que:

$$f_T(t) = n(F_X(t))^{n-1} f_\theta(t) = n \left(\sqrt{\frac{t}{\theta}} \right)^{n-1} \frac{1}{2\sqrt{t\theta}} = \frac{n(\sqrt{t})^{n-2}}{2(\sqrt{\theta})^n} \quad t \in]0, \theta[$$

Sea ahora h una función medible de forma que:

$$0 = E[h(T)] = \int_0^\theta h(t) f_T(t) dt = \frac{n}{2(\sqrt{\theta})^n} \int_0^\theta h(t) (\sqrt{t})^{n-2} dt \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

tenemos entonces que:

$$\int_0^\theta h(t) (\sqrt{t})^{n-2} dt = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

Sea ahora $H(t)$ una primitiva de $h(t)(\sqrt{t})^{n-2}$, tenemos entonces que:

$$H(\theta) - H(0) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

por lo que derivando respecto a θ :

$$h(\theta) (\sqrt{\theta})^{n-2} = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+ \implies h(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

En conclusión, tenemos que:

$$\mathbb{R}^+ \subseteq \{t : h(t) = 0\}$$

por lo que:

$$1 \geq P[h(T) = 0] \geq P[T \in \mathbb{R}^+] = 1 \implies P[h(T) = 0] = 1$$

lo que demuestra que T es un estadístico completo. Ahora, tratamos de buscar un estimador insesgado para θ , que será nuestro candidato a UMVUE. Buscamos una función medible h de forma que:

$$\theta = E[h(T)] = \frac{n}{2(\sqrt{\theta})^n} \int_0^\theta h(t) (\sqrt{t})^{n-2} dt$$

Observemos que:

$$\int_0^\theta (\sqrt{t})^n dt = \frac{2}{n+2} \left[(\sqrt{t})^{n+2} \right]_0^\theta = \frac{2}{n+2} (\sqrt{\theta})^{n+2} = \frac{2}{n+2} (\sqrt{\theta})^n \theta$$

Por lo que si tomamos:

$$h(t) = \frac{n+2}{n} \cdot t$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} E[h(T)] &= \int_0^\theta \frac{n+2}{n} t \frac{n}{2(\sqrt{\theta})^n} (\sqrt{t})^{n-2} dt = \frac{n+2}{2(\sqrt{\theta})^n} \int_0^\theta t (\sqrt{t})^{n-2} dt \\ &= \frac{n+2}{2(\sqrt{\theta})^n} \int_0^\theta (\sqrt{t})^n dt = \frac{n+2}{2(\sqrt{\theta})^n} \frac{2}{n+2} (\sqrt{\theta})^n \theta = \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Por lo que $h(T)$ es insesgado para θ . Ahora, si $t \in \mathbb{R}^+$, tendremos entonces que:

$$h(t) = \frac{n+2}{n} \cdot t \geq t \in \mathbb{R}^+ \implies h(t) \in \mathbb{R}^+$$

por lo que $h(T)$ es además un estimador. Si calculamos ahora:

$$E[(h(T))^2] = \frac{n}{2(\sqrt{\theta})^n} \int_0^\theta (h(t))^2 (\sqrt{t})^{n-2} dt$$

Tenemos la integral en un compacto de una función continua, por lo que sabemos que $E[(h(T))^2] < \infty$. En conclusión, tenemos por el Teorema de Lehmann-Scheffé que: $E[h(T)/T] = h(T)$ es el UMVUE.

Ejercicio 2.4.6. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^2}, \quad x > \theta > 0$$

Calcular, si existen, los UMVUE para θ y para $1/\theta$.

Calculamos en primer lugar un estadístico suficiente y completo para θ :

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{iid.}}{=} \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta \cdot I_{[0, +\infty[}(X_{(1)} - \theta)}{x_i^2} = \theta^n \cdot I_{[0, +\infty[}(X_{(1)} - \theta) \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$$

Tomando:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}, \quad T(X_1, \dots, X_n) = X_{(1)} \\ g_\theta(t) = \theta^n \cdot I_{[0, +\infty[}(t - \theta)$$

Podemos aplicar el Teorema de factorización de Neymann-Fisher, obteniendo que T es suficiente para θ . Notando $T = X_{(1)}$ para abreviar, calculamos la distribución de T :

$$F_T(t) = 1 - (1 - F_X(t))^n \implies f_T(t) = n(1 - F_X(t))^{n-1} f_\theta(t)$$

Si calculamos:

$$F_X(t) = \int_\theta^t \frac{\theta}{x^2} dx = \theta \int_\theta^t \frac{1}{x^2} dx = \theta \left[\frac{-1}{x} \right]_\theta^t = \theta \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{\theta} \right) = \frac{t - \theta}{t} \quad t > \theta$$

Tenemos que:

$$f_T(t) = n \left(1 - \frac{t - \theta}{t} \right)^{n-1} \frac{\theta}{t^2} = n \cdot \frac{\theta^n}{t^{n+1}}$$

Sea h una función medible de forma que:

$$0 = E[h(T)] = \int_\theta^{+\infty} h(t) f_T(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\theta^n \underbrace{h(t) \cdot n \cdot \frac{\theta^n}{t^{n+1}}}_{(*)} dt \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

Sea $H(t)$ una primitiva de $(*)$, tenemos entonces que:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} H(n) - H(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

con lo que derivando respecto θ :

$$0 = h(\theta) \cdot n \cdot \frac{\theta^n}{\theta^{n+1}} = h(\theta) \cdot \frac{n}{\theta} \implies h(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

Por lo que:

$$\mathbb{R}^+ \subseteq \{t : h(t) = 0\}$$

de donde:

$$1 \geq P[h(T) = 0] \geq P[T \in \mathbb{R}^+] = 1 \implies P[h(T) = 0] = 1$$

Luego tenemos que T es completo. Si calculamos la esperanza de T :

$$\begin{aligned} E[T] &= \int_{\theta}^{\infty} t \cdot n \cdot \frac{\theta^n}{t^{n+1}} dt = \int_{\theta}^{+\infty} \frac{n\theta^n}{t^n} dt = n\theta^n \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt = \frac{-n\theta^n}{n-1} \left[\frac{1}{t^{n-1}} \right]_{\theta}^{\infty} \\ &= \frac{n\theta^n}{(n-1)\theta^{n-1}} = \frac{n\theta}{n-1} \end{aligned}$$

Por lo que tomando:

$$h(t) = \frac{n-1}{n} \cdot t$$

tenemos que:

$$E[h(T)] = \frac{n-1}{n} E[T] = \theta$$

Es decir, $h(T)$ es un estadístico insesgado para θ . Veamos que es estimador y que tiene momento de segundo orden:

- Si $t \in \mathbb{R}^+$, tenemos entonces que $h(t) \in \mathbb{R}_0^+$ para $n > 1$, por lo que $h(T)$ es estimador.
- Calculamos para $n > 2$:

$$\begin{aligned} E[(h(T))^2] &= \int_{\theta}^{+\infty} (h(t))^2 \frac{n\theta^n}{t^{n+1}} dt = \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \int_{\theta}^{+\infty} \frac{n\theta^n t^2}{t^{n+1}} dt \\ &= n\theta^n \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}} dt = n\theta^n \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \left[\frac{1}{(-n+2)t^{n-2}} \right]_{\theta}^{+\infty} \\ &= n\theta^n \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{1}{(n-2)\theta^{n-2}} = \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{n}{(n-2)} \theta^2 < \infty \end{aligned}$$

Por lo que $h(T) = \frac{n-1}{n} \cdot t$ es UMVUE para θ . Si buscamos ahora un UMVUE para $1/\theta$, observamos que tomando $h(t) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{t}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} E[h(T)] &= \int_{\theta}^{+\infty} h(t) \frac{n\theta^n}{t^{n+1}} dt = (n+1)\theta^n \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{t^{n+2}} dt = (n+1)\theta^n \left[\frac{1}{-(n+1)t^{n+1}} \right]_{\theta}^{+\infty} \\ &= \frac{\theta^n}{\theta^{n+1}} = \frac{1}{\theta} \end{aligned}$$

por lo que $h(T)$ es insesgado para T . Observamos además que:

- Si $t \in \mathbb{R}^+$, entonces $h(t) \in \mathbb{R}^+$, por lo que $h(T)$ es un estimador.
- Calculamos si $n + 3 > 1$:

$$\begin{aligned} E[(h(T))^2] &= \int_{\theta}^{+\infty} (h(t))^2 \frac{n\theta^n}{t^{n+1}} dt = \frac{\theta^n(n+1)^2}{n} \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{t^{n+3}} dt \\ &= \frac{\theta^n(n+1)^2}{n} \left[\frac{1}{-(n+2)t^{n+2}} \right]_{\theta}^{+\infty} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)\theta^2} < \infty \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Lehmann-Scheffé, tenemos que $E[h(T)/T] = h(T)$ es UMVUE para $1/\theta$.

Ejercicio 2.4.7. Sea $X \rightsquigarrow P_{\theta}$ siendo P_{θ} una distribución con función de densidad

$$f_{\theta}(x) = e^{\theta-x}, \quad x \geq \theta$$

Dada una muestra aleatoria simple de tamaño arbitrario, encontrar los UMVUE de θ y de e^{θ} .

Calculamos en primer lugar un estadístico suficiente y completo para θ :

$$f_{\theta}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{iid.}}{=} \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i) = \prod_{i=1}^n e^{\theta-x_i} \cdot I_{[0,+\infty[}(X_{(1)} - \theta) = I_{[0,+\infty[}(X_{(1)} - \theta) e^{n\theta} \prod_{i=1}^n e^{-x_i}$$

Tomando:

$$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n e^{-x_i}, \quad T(X_1, \dots, X_n) = X_{(1)} \\ g_{\theta}(t) &= I_{[0,+\infty[}(t - \theta) \cdot e^{n\theta} \end{aligned}$$

Tenemos por el Teorema de factorización de Neymann-Fisher que $T = X_{(1)}$ es suficiente para θ . Calculamos la distribución de T :

$$F_T(t) = 1 - (1 - F_X(t))^n \implies f_T(t) = n(1 - F_X(t))^{n-1} f_{\theta}(t)$$

Si calculamos:

$$F_X(t) = \int_{\theta}^t e^{\theta-x} dx = e^{\theta} \int_{\theta}^t e^{-x} dx = e^{\theta} [-e^{-x}]_{\theta}^t = e^{\theta} (e^{-\theta} - e^{-t}) = 1 - e^{\theta-t}, \quad t \geq \theta$$

Tenemos entonces que:

$$f_T(t) = n(e^{\theta-t})^{n-1} e^{\theta-t} = n(e^{\theta-t})^n$$

Sea h una función medible de forma que:

$$0 = E[h(T)] = \int_{\theta}^{+\infty} h(t) n(e^{\theta-t})^n dt = n e^{n\theta} \int_{\theta}^{+\infty} h(t) e^{-nt} dt \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Tenemos entonces que:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\theta}^n h(t) e^{-nt} dt \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Sea $H(t)$ una primitiva de $h(t)e^{-nt}$, tenemos que:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} H(n) - H(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

derivando respecto θ obtenemos:

$$0 = -h(\theta)e^{-n\theta} \implies h(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Por lo que:

$$\mathbb{R} \subseteq \{t : h(t) = 0\}$$

de donde deducimos que T es completo:

$$1 \geq P[h(t) = 0] \geq P[T \in \mathbb{R}] = 1 \implies P[h(t) = 0] = 1$$

Buscamos ahora un estadístico inssegado para θ , es decir, buscamos una función h medible de forma que:

$$\theta = E[h(T)] = \int_{\theta}^{+\infty} h(t)n(e^{\theta-t})^n dt = ne^{n\theta} \int_{\theta}^{+\infty} h(t)e^{-nt} dt$$

Sea $H(t)$ una primitiva de $h(t)e^{-nt}$, tenemos entonces que:

$$\theta = ne^{n\theta} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} H(n) - H(\theta) \right) \implies \frac{\theta}{ne^{n\theta}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} H(n) - H(\theta) \right)$$

y si derivamos a ambos lados:

$$\frac{e^{-n\theta}}{n} - \theta e^{-n\theta} = -h(\theta)e^{-n\theta} \implies h(\theta) = \theta - \frac{1}{n}$$

Por lo que si tomamos:

$$h(T) = T - \frac{1}{n}$$

Tenemos que $E[T] = \theta$, con lo que $h(T)$ es inssegado para θ . Además, se trata de un estimador (puesto que el espacio paramétrico es \mathbb{R}). Finalmente, vemos que:

$$E[(h(T))^2] = \int_{\theta}^{+\infty} (h(t))^2 n(e^{\theta-t})^n dt = ne^{n\theta} \int_{\theta}^{+\infty} \left(t^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{2t}{n} \right) e^{-nt} dt$$

calculamos la integral a parte:

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{+\infty} \left(t^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{2t}{n} \right) e^{-nt} dt &= \left\{ \begin{array}{l} u = (t - 1/n)^2 \quad du = 2t - 2/n \\ dv = e^{-nt} \quad v = -e^{-nt}/n \end{array} \right\} \\ &= \left[\frac{-(t - 1/n)^2 e^{-nt}}{n} \right]_{\theta}^{+\infty} + \frac{1}{n} \int_{\theta}^{+\infty} (2t - 2/n) e^{-nt} dt \end{aligned}$$

tenemos que:

$$\left[\frac{-(t - 1/n)^2 e^{-nt}}{n} \right]_{\theta}^{+\infty} < \infty$$

y volvemos a calcular a parte:

$$\begin{aligned}\int_{\theta}^{+\infty} (2t - 2/n)e^{-nt} dt &= \left\{ \begin{array}{ll} u = 2t - 2/n & du = 2 \\ dv = e^{-nt} & v = -e^{-nt}/n \end{array} \right\} \\ &= \left[\frac{-(2t - 2/n)e^{-nt}}{n} \right]_{\theta}^{+\infty} + \frac{2}{n} \int_{\theta}^{+\infty} e^{-nt} dt\end{aligned}$$

tenemos que:

$$\left[\frac{-(2t - 2/n)e^{-nt}}{n} \right]_{\theta}^{+\infty} < \infty$$

y también que:

$$\frac{2}{n} \int_{\theta}^{+\infty} e^{-nt} dt = \frac{2}{n} \left[\frac{-e^{-nt}}{n} \right]_{\theta}^{+\infty} < \infty$$

En definitiva, $E[(h(T))^2] < \infty$, por lo que aplicando el Teorema de Lehmann-Scheffé, obtenemos que $E[h(T)/T] = h(T)$ es UMVUE.

Ejercicios de estimadores eficientes

Ejercicio 2.4.8. Sea X la variable que describe el número de fracasos antes del primer éxito en una sucesión de pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito $\theta \in]0, 1[$, y sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de X .

- a) Probar que la familia de distribuciones de X es regular y calcular la función de información asociada a la muestra.

Según el enunciado, “ X modela el número de fracasos antes del primer éxito en una sucesión de pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito $\theta \in]0, 1[$ ”, por lo que X sigue una distribución geométrica con probabilidad de éxito θ , $X \rightsquigarrow G(\theta)$, $\theta \in]0, 1[$. Para ver que la familia de distribuciones de X es regular:

- i) El espacio paramétrico es $\Theta =]0, 1[$, un intervalo abierto de \mathbb{R} .
- ii) El espacio muestral es $\mathcal{X} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, que no depende de θ .
- iii) Para comprobar la tercera condición, recordamos que la función masa de probabilidad viene dada por:

$$P_{\theta}[X = x] = (1 - \theta)^x \theta$$

que es derivable respecto θ . Calculamos la derivada del logaritmo de la función masa de probabilidad:

$$\begin{aligned}\ln P_{\theta}[X = x] &= \ln((1 - \theta)^x \theta) = x \ln(1 - \theta) + \ln \theta \\ \frac{\partial \ln P_{\theta}[X = x]}{\partial \theta} &= \frac{-x}{1 - \theta} + \frac{1}{\theta} = \frac{1 - \theta - x\theta}{\theta(1 - \theta)}\end{aligned}$$

Y si calculamos su esperanza:

$$E \left[\frac{\partial \ln P_{\theta}[X = x]}{\partial \theta} \right] = E \left[\frac{1 - \theta - X\theta}{\theta(1 - \theta)} \right] = \frac{1 - \theta - \theta E[X]}{\theta(1 - \theta)} \stackrel{(*)}{=} \frac{1 - \theta - (1 - \theta)}{\theta(1 - \theta)} = 0$$

donde en $(*)$ usamos que $E[X] = \frac{1-\theta}{\theta}$. En definitiva, se cumple también la tercera condición de las familias exponenciales.

Calculamos ahora la función de información asociada a la muestra:

$$I_X(\theta) = \text{Var} \left(\frac{\partial \ln P_\theta[X = x]}{\partial \theta} \right) = \text{Var} \left(\frac{1 - \theta - X\theta}{\theta(1 - \theta)} \right) = \frac{\theta^2}{\theta^2(1 - \theta)^2} \text{Var}(X)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{1 - \theta}{(1 - \theta)^2 \theta^2} = \frac{1}{\theta^2(1 - \theta)}$$

donde en $(*)$ hemos usado que $\text{Var}(X) = \frac{1-\theta}{\theta^2}$.

- b) Especificar la clase de funciones paramétricas que admiten estimadores eficientes y los correspondientes estimadores.

Una vez que sabemos que la familia es exponencial y que $0 < I_X(\theta) < \infty$, lo que hacemos es buscar las funciones $a(\theta)$ y $g(\theta)$ que se usan en el enunciado del Teorema de caracterización de los estimadores eficientes. Para ello:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln P_\theta[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln P_\theta[X = x_i]}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - \theta - x_i \theta}{\theta(1 - \theta)} \right) \\ &= \frac{n(1 - \theta) - \theta \sum_{i=1}^n x_i}{\theta(1 - \theta)} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n(1 - \theta)}{\theta}}{\theta - 1} \end{aligned}$$

Por lo que tomando:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i, \quad g(\theta) = \frac{n(1 - \theta)}{\theta}, \quad a(\theta) = \frac{1}{\theta - 1}$$

Tenemos que $a(\theta) \neq 0 \quad \forall \theta \in]0, 1[$, que g es derivable, con:

$$g'(\theta) = \frac{-n}{\theta^2} \neq 0 \quad \forall \theta \in]0, 1[$$

Además, observamos que:

$$a(\theta)g'(\theta) = \frac{-n}{\theta^2(\theta - 1)} = \frac{n}{\theta^2(1 - \theta)} = nI_X(\theta) = I_{(X_1, \dots, X_n)}(\theta) \quad \forall \theta \in]0, 1[$$

Así como que T es un estimador, pues:

$$T(]0, 1[) =]0, n[= g(]0, 1[)$$

Finalmente, por un Corolario visto en teoría sabemos que las únicas funciones paramétricas que admiten estimadores eficientes son de la forma:

$$a \cdot \frac{n(1 - \theta)}{\theta} + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

y que sus estimadores eficientes son de la forma:

$$a \cdot \sum_{i=1}^n X_i + b$$

- c) Calcular la varianza de cada estimador eficiente y comprobar que coincide con las correspondiente cota de Fréchet-Cramér-Rao.

Si calculamos ahora la varianza de $T = a \cdot \sum_{i=1}^n X_i$ y la cota de Fréchet-Cramér-Rao:

$$Var(T) = Var\left(a \cdot \sum_{i=1}^n X_i + b\right) \stackrel{(*)}{=} a^2 \sum_{i=1}^n Var(X_i) = a^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1-\theta}{\theta^2}\right) = \frac{a^2 n(1-\theta)}{\theta^2}$$

$$\frac{(ag'(\theta))^2}{I_{(X_1, \dots, X_n)}(\theta)} = \frac{\left(\frac{-an}{\theta^2}\right)^2}{\frac{n}{\theta^2(1-\theta)}} = \frac{a^2 n(1-\theta)}{\theta^2}$$

- d) Calcular, si existen, los UMVUE para $P_\theta[X = 0]$ y para $E_\theta[X]$ y decir si son eficientes.

- Para $P_\theta[X = 0]$:

$$P_\theta[X = 0] = (1 - \theta)^0 \theta = \theta$$

Como ya hemos demostrado que $T = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estimador eficiente para $g(\theta) = \frac{n(1-\theta)}{\theta}$, tenemos automáticamente que T es un estadístico suficiente. Tomando ahora $Q(\theta)$ como una primitiva de $a(\theta)$, por ejemplo $Q(\theta) = \ln(|\theta - 1|)$, como:

$$Q(]0, 1[) =]-\infty, 0[$$

claramente contiene un abierto de \mathbb{R} concluimos que T es completo. Buscamos ahora una función h medible de forma que $h(T)$ sea insesgado para θ , sabiendo que $T \rightsquigarrow BN(n, \theta)$, con función masa de probabilidad:

$$P_\theta[T = t] = \binom{t+n-1}{t} (1-\theta)^t \theta^n$$

- Para $E_\theta[X]$:

Finalmente, observamos que como θ y $\frac{1-\theta}{\theta}$ no están en la clase de funciones paramétricas que admiten estimadores eficientes, estos no pueden ser eficientes.

Ejercicio 2.4.9. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con distribución exponencial.

- a) Probar que la familia de distribuciones de X es regular.

Supuesto que $X \rightsquigarrow \exp(\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$, la función de densidad de X viene dada por:

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

Y se cumple:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Comprobamos cada una de las propiedades:

- i) El espacio paramétrico es $\Theta = \mathbb{R}^+$, intervalo abierto de \mathbb{R} .
- ii) El espacio muestral es \mathbb{R}^+ , que no depende de λ .
- iii) Para la tercera, observamos que f_λ es derivable respecto λ , con:

$$\ln f_\lambda(X) = \ln(\lambda e^{-\lambda X}) = \ln \lambda - \lambda X \implies \frac{\partial \ln f_\lambda(X)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} - X$$

Y si calculamos:

$$E \left[\frac{\partial \ln f_\lambda(X)}{\partial \lambda} \right] = E \left[\frac{1}{\lambda} - X \right] = \frac{1}{\lambda} - E[X] = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = 0$$

- b) Encontrar la clase de funciones paramétricas que admiten estimador eficiente y el estimador correspondiente. Calcular la varianza de estos estimadores.

Calculamos primero la función de información de Fisher:

$$I_X(\lambda) = \text{Var} \left(\frac{\partial \ln f_\lambda(X)}{\partial \lambda} \right) = \text{Var} \left(\frac{1}{\lambda} - X \right) = \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

que como vemos verifica $0 < I_X(\lambda) < \infty$. Buscamos ahora las funciones a y g :

$$\frac{\partial \ln f_\lambda^n(x_1, \dots, x_n)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f_\lambda(x_i)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda} - x_i \right) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = - \left(\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{\lambda} \right)$$

Por lo que tomando:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i, \quad g(\lambda) = \frac{n}{\lambda}, \quad a(\lambda) = -1$$

Tenemos que $a(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$, que g es derivable con:

$$g'(\lambda) = \frac{-n}{\lambda^2} \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$$

y que T es un estimador, pues $T(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+ = g(\mathbb{R}^+)$. Finalmente, falta comprobar que:

$$a(\lambda)g'(\lambda) = \frac{n}{\lambda^2} = nI_X(\lambda) = I_{(X_1, \dots, X_n)}(\lambda)$$

Por lo que podemos deducir ya por el Teorema de caracterización de los estimadores eficientes que T es un estimador eficiente. Más aún, por un Corolario del mismo, tenemos que las únicas funciones paramétricas de dicha familia que admiten estimadores eficientes son de la forma:

$$a \cdot \frac{n}{\lambda} + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

y que dichos estimadores son $a \cdot T + b$. Nos disponemos a calcular la varianza de estos estimadores:

$$\text{Var}(a \cdot T + b) = a^2 \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = a^2 \sum_{i=1}^n \text{Var}(X) = a^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{na^2}{\lambda^2}$$

Veamos que coincide con la cota de Fréchet-Cramér-Rao, para comprobar nuestro trabajo calculando la familia de estimadores eficientes:

$$\frac{(ag'(\lambda))^2}{I_{(X_1, \dots, X_n)}(\lambda)} = \frac{\left(\frac{-an}{\lambda^2}\right)^2}{\frac{n}{\lambda^2}} = \frac{na^2}{\lambda^2} = \text{Var}(a \cdot T + b)$$

- c) Basándose en el apartado anterior, encontrar el UMVUE para la media de X .

Como ya sabemos que $T = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estimador eficiente para $g(\lambda)$, tenemos automáticamente que T es suficiente. Para ver que T es completo, sea Q una primitiva de a , podemos tomar $Q(\lambda) = -\lambda$, tenemos que claramente $Q(\mathbb{R}^+)$ contiene un abierto de \mathbb{R} , por lo que T es completo.

Como en el apartado anterior vimos que T es eficiente para $g(\lambda) = \frac{n}{\lambda}$, tenemos entonces que $\frac{T}{n}$ es eficiente para $\tilde{g}(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{n} = \frac{1}{\lambda}$. Como la correspondencia $t \mapsto \frac{t}{n}$ es biunívoca, $\frac{T}{n}$ también será suficiente y completo (para ver que es completo no hace falta que la correspondencia sea unívoca). Por un Corolario del Teorema de caracterización de estimadores eficientes tenemos que T es UMVUE para $\frac{1}{\lambda} = E[X]$.

- d) Dar la cota de Fréchet-Cramér-Rao para la varianza de estimadores insesgados y regulares de λ^3 . ¿Es alcanzable dicha cota?

Si tomamos $g(\lambda) = \lambda^3$, la cota de Fréchet-Cramér-Rao tiene la forma:

$$\frac{(g'(\lambda))^2}{I_{(X_1, \dots, X_n)}(\lambda)} = \frac{(3\lambda^2)^2}{\frac{n}{\lambda^2}} = \frac{9\lambda^6}{n}$$

y como $g(\lambda)$ no es de la forma $a \cdot \frac{n}{\lambda} + b$, para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$, sabemos que esta cota no es alcanzable.

Ejercicio 2.4.10. Sea X una variable aleatoria con función de densidad de la forma

$$f_{\theta}(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1$$

- a) Sabiendo que $E_{\theta}[\ln X] = -\frac{1}{\theta}$ y $\text{Var}_{\theta}[\ln X] = \frac{1}{\theta^2}$, comprobar que esta familia de distribuciones es regular.

Veamos las propiedades, suponiendo que $\theta > 0$.

- i) El espacio paramétrico es $\Theta = \mathbb{R}^+$, intervalo abierto de \mathbb{R} .
- ii) El espacio muestral es $\mathcal{X} =]0, 1[$, que no depende de θ .
- iii) La función de densidad es derivable respecto θ , calculamos la derivada del logaritmo de la función de densidad:

$$\ln f_{\theta}(X) = \ln(\theta X^{\theta-1}) = \ln \theta + (\theta - 1) \ln X \quad \implies \quad \frac{\partial \ln f_{\theta}(X)}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} + \ln X$$

Con lo que:

$$E \left[\frac{\partial \ln f_{\theta}(X)}{\partial \theta} \right] = E \left[\frac{1}{\theta} + \ln X \right] = \frac{1}{\theta} + E[\ln X] = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} = 0$$

- b) Basándose en una muestra aleatoria simple de X , dar la clase de funciones paramétricas con estimador eficiente, los estimadores y su varianza.

Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de X , en primer lugar calculamos la función de información de Fisher:

$$I_X(\theta) = \text{Var} \left(\frac{\partial \ln f_\theta(X)}{\partial \theta} \right) = \text{Var} \left(\frac{1}{\theta} + \ln X \right) = \text{Var}(\ln X) = \frac{1}{\theta^2}$$

y observamos que $0 < I_X(\theta) < \infty$. Ahora, busquemos las funciones g y a :

$$\frac{\partial \ln f_\theta^n(x_1, \dots, x_n)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f_\theta(x_i)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\theta} + \ln x_i \right) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

Tomando:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \ln X_i, \quad g(\theta) = \frac{-n}{\theta}, \quad a(\theta) = 1$$

tenemos que $a(\theta) \neq 0$ para todo $\theta \in \mathbb{R}^+$, que g es derivable con:

$$g'(\theta) = \frac{n}{\theta^2} \neq 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

además de que T es un estimador, puesto que:

$$T([0, 1]^n) \subseteq]-\infty, 0[= g(\mathbb{R}^+)$$

Comprobemos que:

$$a(\theta)g'(\theta) = \frac{n}{\theta^2} = nI_X(\theta) = I_{(X_1, \dots, X_n)}(\theta)$$

Por lo que T es un estimador eficiente para $g(\theta) = \frac{-n}{\theta}$, luego las únicas funciones paramétricas que admiten estimadores eficientes son las de la forma:

$$a \cdot \frac{-n}{\theta} + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

cuyos estimadores eficientes son:

$$a \cdot T + b$$

Calculemos sus varianzas y veamos que coinciden con la cota de Fréchet-Cramér-Rao:

$$\begin{aligned} \text{Var}(a \cdot T + b) &= a^2 \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right) \stackrel{\text{indep.}}{=} a^2 \sum_{i=1}^n \text{Var}(\ln X_i) = a^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta^2} = \frac{a^2 n}{\theta^2} \\ \frac{(ag'(\theta))^2}{I_{(X_1, \dots, X_n)}(\theta)} &= \frac{\left(\frac{an}{\theta^2}\right)^2}{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{a^2 n}{\theta^2} \end{aligned}$$

2.5. Estimación de máxima verosimilitud y otros métodos

Ejercicio 2.5.1. Sea $X \rightsquigarrow \{P_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ siendo P_θ una distribución con función de densidad

$$f_\theta(x) = e^{\theta-x}, \quad x \geq \theta$$

Dada una muestra aleatoria simple de tamaño n , encontrar los estimadores máximo verosímiles de θ y de e^θ . Basándose en los resultados del Ejercicio 2.6.7, decir si estos estimadores son insesgados.

Ejercicio 2.5.2. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con distribución exponencial. Basándose en los resultados del Ejercicio 2.6.9, encontrar los estimadores máximo verosímiles de la media y de la varianza de X .

Ejercicio 2.5.3. Sea X una variable aleatoria con función de densidad de la forma

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1$$

- Calcular un estimador máximo verosímil para θ .
- Deducir dicho estimador a partir de los resultados del Ejercicio 2.6.10.

Ejercicio 2.5.4. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra de una variable $X \rightsquigarrow \{B(k_0, p) : p \in]0, 1[\}$. Estimar, por máxima verosimilitud y por el método de los momentos, el parámetro p y la varianza de X .

Aplicación: Se lanza 10 veces un dado cargado y se cuenta el número de veces que sale un 4. Este experimento se realiza 100 veces de forma independiente, obteniéndose los siguientes resultados:

nº de 4	0	1	2	3
frecuencia	84	15	1	0

Estimar, a partir de estos datos, la probabilidad de salir un cuatro.

Ejercicio 2.5.5. Se lanza un dado hasta que salga un 4 y se anota el número de lanzamientos necesarios; este experimento se efectúa veinte veces de forma independiente. A partir de los resultados obtenidos, estimar la probabilidad de sacar un 4 por máxima verosimilitud.

Ejercicio 2.5.6. En 20 días muy fríos, una granjera pudo arrancar su tractor en el primer, tercer, quinto, primer, segundo, primer, tercer, séptimo, segundo, cuarto, cuarto, octavo, primer, tercer, sexto, quinto, segundo, primer, sexto y segundo intento. Suponiendo que la probabilidad de arrancar en cada intento es constante, y que las observaciones se han obtenido de forma independiente, dar la estimación más verosímil de la probabilidad de que el tractor arranque en el segundo intento.

Ejercicio 2.5.7. Una variable aleatoria discreta toma los valores 0, 1 y 2 con las siguientes probabilidades

$$P_p[X = 0] = p^2, \quad P_p[X = 1] = 2p(1 - p), \quad P_p[X = 2] = (1 - p)^2$$

siendo p un parámetro desconocido. En una muestra aleatoria simple de tamaño 100, se ha presentado 22 veces el 0, 53 veces el 1 y 25 veces el 2. Calcular la función de verosimilitud asociada a dicha muestra y dar la estimación más verosímil de p .

Ejercicio 2.5.8. En el muestreo de una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(\mu, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$, se observa que no se obtiene un valor menor que -1 hasta la quinta observación. Dar una estimación máximo verosímil de μ .

Ejercicio 2.5.9. En la producción de filamentos eléctricos la medida de interés, X , es el tiempo de vida de cada filamento, que tiene una distribución exponencial de parámetro θ . Se eligen n de tales filamentos de forma aleatoria e independiente, pero, por razones de economía, no conviene esperar a que todos se quemen y la observación acaba en el tiempo T . Dar el estimador máximo verosímil para la media de X a partir del número de filamentos quemados durante el tiempo de observación.

Ejercicio 2.5.10. Sean X_1, \dots, X_n observaciones independientes de una variable $X \rightsquigarrow \{\Gamma(p, a) : p, a > 0\}$. Estimar ambos parámetros mediante el método de los momentos.

Aplicación: Ciertos neumáticos radiales tuvieron vidas útiles de 35200, 41000, 44700, 38600 y 41500 kilómetros. Suponiendo que estos datos son observaciones independientes de una variable con distribución exponencial de parámetro θ , dar una estimación de dicho parámetro por el método de los momentos.

2.6. Estimación puntual. Inssegadez y mínima varianza

Ejercicio 2.6.1. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra de una variable $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Probar que

$$T(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{X} \leq 0 \\ 0 & \text{si } \bar{X} > 0 \end{cases}$$

es un estimador inssegado de la función paramétrica $\Phi\left(\frac{-\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right)$, siendo Φ la función de distribución de la $\mathcal{N}(0, 1)$.

Tenemos $T(X_1, \dots, X_n) = I_{]-\infty, 0]}(\bar{X})$. Como $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, sabemos por lo visto en el Tema 1 que entonces:

$$\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

de donde (escribiendo $T = T(X_1, \dots, X_n)$):

$$T = I_{]-\infty, 0]}(\bar{X}) \rightsquigarrow B(1, P[\bar{X} \leq 0])$$

estamos ya en condiciones de ver que T es inssegado para dicha función:

$$E[T] \stackrel{(*)}{=} P[\bar{X} \leq 0] \stackrel{\text{tipif.}}{=} P\left[Z \leq \frac{-\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{-\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

donde en $(*)$ usamos que conocemos bien la esperanza de una distribución Bernoulli.

Ejercicio 2.6.2. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de $X \rightsquigarrow B(1, p)$ con $p \in]0, 1[$ y sea $T = \sum_{i=1}^n X_i$.

a) Probar que si $k \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$, el estadístico

$$\frac{T(T-1) \cdot \dots \cdot (T-k+1)}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}$$

es un estimador inssegado de p^k . ¿Es este estimador el UMVUE?

b) Probar que si $k > n$, no existe ningún estimador inssegado para p^k .

c) ¿Puede afirmarse que $\frac{T}{n}(1 - \frac{T}{n})^2$ es inssegado para $p(1-p)^2$?

Veamos cada apartado:

a) Sea $k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, definimos:

$$h(T) = \frac{T(T-1) \cdot \dots \cdot (T-k+1)}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}$$

Veamos que $h(T)$ es insesgado para p^k . En primer lugar, observemos que por la reproductividad de la binomial $T \rightsquigarrow B(n, p)$:

$$E[h(T)] = \frac{E[T(T-1) \cdot \dots \cdot (T-k+1)]}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)} = \frac{(n-k)!}{n!} E[T(T-1) \cdot \dots \cdot (T-k+1)]$$

Calculamos ahora la esperanza:

$$\begin{aligned} E[T(T-1) \cdot \dots \cdot (T-k+1)] &= \sum_{t=0}^n t(t-1) \cdot \dots \cdot (t-k+1) P[T=t] \\ &= \sum_{t=0}^n t(t-1) \cdot \dots \cdot (t-k+1) \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t} \\ &= \sum_{t=k}^n t(t-1) \cdot \dots \cdot (t-k+1) \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t} \\ &= \sum_{t=k}^n \frac{t!}{(t-k)!} \frac{n!}{t!(n-t)!} p^t (1-p)^{n-t} \\ &= \sum_{t=k}^n \frac{n!}{(t-k)!(n-t)!} p^t (1-p)^{n-t} \end{aligned}$$

si desarrollamos ahora los primeros términos, observamos que:

$$\begin{aligned} E[T(T-1) \cdot \dots \cdot (T-k+1)] &= \sum_{t=k}^n \frac{n!}{(t-k)!(n-t)!} p^t (1-p)^{n-t} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + \frac{n!}{(n-k-1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} + \dots \end{aligned}$$

donde podemos ver que podemos sacar factor común de la sumatoria ciertos términos:

$$\begin{aligned} E[T(T-1) \cdot \dots \cdot (T-k+1)] &= \sum_{t=k}^n \frac{n!}{(t-k)!(n-t)!} p^t (1-p)^{n-t} \\ &= \frac{n! \cdot p^k}{(n-k)!} \sum_{t=k}^n p^{t-k} (1-p)^{n-t} \frac{(n-k)!}{(t-k)!(n-t)!} \\ &= \frac{n! \cdot p^k}{(n-k)!} \sum_{t=0}^{n-k} p^t (1-p)^{n-k-t} \frac{(n-k)!}{t!(n-k-t)!} \\ &= \frac{n! \cdot p^k}{(n-k)!} \sum_{t=0}^{n-k} \binom{n-k}{t} p^t (1-p)^{n-k-t} \\ &= \frac{n! \cdot p^k}{(n-k)!} \sum_{t=0}^{n-k} P[S=t] = \frac{n! \cdot p^k}{(n-k)!} P[0 \leq S \leq n-k] \stackrel{(*)}{=} \frac{n! \cdot p^k}{(n-k)!} \end{aligned}$$

para cierta variable aleatoria $S \rightsquigarrow B(n-k, p)$, donde en $(*)$ usamos que $P[0 \leq S \leq n-k] = 1$. Ahora, vemos que:

$$E[h(T)] = \frac{(n-k)!}{n!} \frac{n!}{(n-k)!} p^k = p^k$$

por lo que $h(T)$ es insesgado para p^k . Veamos ahora que $h(T)$ es un estimador. Para ello, observamos primero que:

$$h(T) = \frac{T}{n} \cdot \frac{T-1}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{T-k+1}{n-k+1} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{T-j}{n-j}$$

Para cada $j \in \{0, \dots, k-1\}$, observemos que $T \in \{0, \dots, n\}$, por lo que $T-j \in \{-j, \dots, n-j\}$ con $j < k \leq n$, de donde deducimos que:

$$\frac{T-j}{n-j} \in [-1, 1] \implies \prod_{j=0}^{k-1} \frac{T-j}{n-j} \in [-1, 1]$$

Tenemos que ver finalmente que dicho producto es positivo, con lo que habremos probado que $h(T)$ es un estimador. Para ello, si el producto no fuera positivo es por la existencia de $j \in \{0, \dots, k-1\}$ de forma que $T-j < 0$, es decir, tenemos entonces que $T \in \{0, \dots, j-1\}$ supuesto que $T = l \in \{0, \dots, j-1\}$, tendremos entonces que:

$$h(T) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{T-j}{n-j} = \left(\prod_{j=0}^{l-1} \frac{T-j}{n-j} \right) \frac{T-l}{n-l} \left(\prod_{j=l+1}^{k-1} \frac{T-j}{n-j} \right) = 0$$

es decir, siempre que un término del producto sea negativo el producto entero se anula, por lo que siempre el producto es positivo, de donde $h(T) \in [0, 1]$, por lo que $h(T)$ es un estimador.

Finalmente, como:

$$E[(h(T))^2] = \sum_{t=0}^n (h(t))^2 P[T=t] < \infty$$

y teníamos que T era un estimador suficiente y completo (cuando vimos que $\{B(1, p) : p \in]0, 1[\}$ era una familia exponencial), tenemos entonces que $E[h(T)/T] = h(T)$ es el UMVUE de p^k .

- b) Sea ahora $k > n$, veamos que no puede existir ningún estimador insesgado para p^k . Para ello, por reducción al absurdo, supongamos que $h(T)$ es un estimador insesgado para p^k , con lo que:

$$p^k = E[h(T)] = \sum_{t=0}^n h(t) P[T=t] = \sum_{t=0}^n h(t) \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t}$$

de donde:

$$1 = \sum_{t=0}^n h(t) \binom{n}{t} p^{t-k} (1-p)^{n-t} \quad \forall p \in]0, 1[$$

en particular, tomando $p \rightarrow 0$, como $t-k < 0$ para todo $t \in \{0, \dots, k\}$, tenemos que:

$$1 = \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{t=0}^n h(t) \binom{n}{t} p^{t-k} (1-p)^{n-t} = \infty$$

contradicción, con lo que para $k > n$ no puede existir un estimador insesgado para p^k . También podríamos haber justificado que son dos polinomios de distinto grado, para llegar a contradicción.

- c) Buscamos ahora comprobar si $h(T) = \frac{T}{n} \left(1 - \frac{T}{n}\right)^2$ es insesgado para $p(1-p)^2$.

Resulta que esto no puede afirmarse para todos los valores de n y p . Como un contraejemplo, para $n = 3$ resulta que tenemos:

$$\begin{aligned} E[h(T)] &= \sum_{t=0}^3 \frac{t}{3} \left(1 - \frac{t}{3}\right)^2 \binom{3}{t} p^t (1-p)^{3-t} \stackrel{(*)}{=} \sum_{t=1}^2 \frac{t}{3} \left(1 - \frac{t}{3}\right)^2 \binom{3}{t} p^t (1-p)^{3-t} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \binom{3}{1} p(1-p)^2 + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \binom{3}{2} p^2(1-p) \\ &= p(1-p) \left(\frac{1}{9}(1-p) + \frac{2}{9}p\right) = p(1-p) \frac{(1+p)}{9} \quad \forall p \in]0, 1[\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que la función $t \mapsto \frac{t}{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^2$ evaluada en 0 y 3 es igual a cero. Observamos que:

$$E[h(T)] = p(1-p) \frac{(1+p)}{9} = p(1-p)^2 \iff \frac{1+p}{9} = 1-p$$

resultado que no es cierto para todo $p \in]0, 1[$ (basta considerar $p = 1/2$), por lo que dicho estimador no es insesgado para $p(1-p)^2$.

Ejercicio 2.6.3. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Encontrar, si existe, el UMVUE para λ^s , siendo $s \in \mathbb{N}$ arbitrario.

Veamos que $T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estadístico suficiente y completo. Para ello, recordemos que $\{\mathcal{P}(\lambda) : \lambda > 0\}$ es una familia exponencial:

1. El espacio paramétrico es $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$.
2. El espacio muestral es $\mathcal{X} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, que no depende de λ .
3. Observamos que:

$$P_\lambda[X = x] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \exp \left[\ln \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \right) \right] = \exp(-\lambda + x \ln \lambda - \ln(x!))$$

por lo que basta tomar:

$$Q(\lambda) = \ln \lambda, \quad T(x) = x \quad D(\lambda) = -\lambda, \quad S(x) = -\ln(x!)$$

En consecuencia, por un Teorema visto en teoría, tenemos que el estadístico:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n T(X_i) = \sum_{i=1}^n X_i$$

es suficiente y completo para λ . Observemos que por la reproductividad de la Poisson tenemos que (notando $T = T(X_1, \dots, X_n)$):

$$T \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda\right) \equiv \mathcal{P}(n\lambda)$$

Ahora, para buscar el UMVUE, buscamos una función h medible de forma que:

$$\lambda^s = E[h(T)] = \sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} h(t) P[T = t] = \sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} h(t) e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^t}{t!}$$

por lo que:

$$\lambda^s e^{n\lambda} = \sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} h(t) \frac{(n\lambda)^t}{t!}$$

y si aplicamos el desarrollo en serie de la exponencial, obtenemos:

$$\lambda^s \sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{(n\lambda)^t}{t!} = \lambda^s e^{n\lambda} = \sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} h(t) \frac{(n\lambda)^t}{t!}$$

si desarrollamos cada uno de los términos:

$$\lambda^s + \lambda^{s+1}n + \frac{\lambda^{s+2}n^2}{2!} + \dots = h(0) + h(1)(n\lambda) + \dots + h(s) \frac{(n\lambda)^s}{s!} + \dots$$

observamos que tomando:

$$\begin{aligned} h(0) &= \dots = h(s-1) = 0, & h(s) &= \frac{s!}{n^s} \\ h(s+1) &= \frac{(s+1)!}{n^s}, & \dots & h(s+k) = \frac{(s+k)!}{n^s k!} \end{aligned}$$

es decir:

$$h(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } T < s \\ \frac{T!}{n^s (T-s)!} & \text{si } T \geq s \end{cases}$$

tenemos que $h(T)$ es inssegado para λ^s . Es claro además que $h(t) \in \mathbb{R}^+$ para cualquier valor de t , con lo que $h(T)$ es un estimador de λ^s . Finalmente, observemos que:

$$\begin{aligned} E[(h(T))^2] &= \sum_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (h(t))^2 P[T = t] = \sum_{t \geq s} \left(\frac{t!}{n^s (t-s)!} \right)^2 e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^t}{t!} \\ &= \frac{1}{n^s e^{n\lambda}} \sum_{t \geq s} \frac{(n\lambda)^t t!}{((t-s)!)^2} \end{aligned}$$

como:

$$\frac{\frac{(n\lambda)^{t+1} (t+1)!}{((t+1-s)!)^2}}{\frac{(n\lambda)^t t!}{((t-s)!)^2}} = \frac{(n\lambda)^{t+1} (t+1)! ((t-s)!)^2}{(n\lambda)^t t! ((t+1-s)!)^2} = \frac{n\lambda (t+1)}{(t+1-s)^2} \rightarrow 0 < 1$$

por el Criterio del cociente, tenemos que:

$$\sum_{t \geq s} \frac{(n\lambda)^t t!}{((t-s)!)^2} < \infty \implies E[(h(T))^2] = \frac{1}{n^s e^{n\lambda}} \sum_{t \geq s} \frac{(n\lambda)^t t!}{((t-s)!)^2} < \infty$$

en consecuencia, tenemos que $h(T)$ es un estimador insesgado para λ^s y de momento de segundo orden finito y es función de un estadístico suficiente y completo, con lo que el Teorema de Lehmann-Scheffé nos dice que:

$$E[h(T)/T] = h(T)$$

es un UMVUE para λ^s .

Ejercicio 2.6.4. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable con distribución uniforme discreta en los puntos $\{1, \dots, N\}$, siendo N un número natural arbitrario. Encontrar el UMVUE para N .

En el Ejercicio 2.3.5 vimos que $T(X_1, \dots, X_n) = X_{(n)}$ era un estadístico suficiente y completo. Si notamos $T = T(X_1, \dots, X_n)$, tenemos que:

$$F_T(t) = (F_X(t))^n \implies P[T = t] = P[T \leq t] - P[T \leq t-1] = (F_X(t))^n - (F_X(t-1))^n$$

como $F_X(t) = \frac{t}{N}$ para $t \in \{1, \dots, N\}$, tenemos:

$$P[T = t] = (F_X(t))^n - (F_X(t-1))^n = \frac{t^n - (t-1)^n}{N^n}$$

Buscamos ahora una función h medible de forma que:

$$N = E[h(T)] = \sum_{t=1}^N h(t) P[T = t] = \sum_{t=1}^N h(t) \frac{t^n - (t-1)^n}{N^n}$$

Si desarrollamos la suma para $h(t) = 1$, observamos un comportamiento telescópico:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^n} \sum_{t=1}^N (t^n - (t-1)^n) &= \frac{1}{N^n} (N^n - (N-1)^n + (N-1)^n - (N-2)^n + \dots + 2^n - 1 + 1 - 0) \\ &= \frac{N^n}{N^n} = 1 \end{aligned}$$

No hemos obtenido lo que queríamos, puesto que queríamos que el resultado de la suma fuera N^{n+1} . Si tomamos sin embargo:

$$h(t) = \frac{t^{n+1} - (t-1)^{n+1}}{t^n - (t-1)^n}$$

tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} E[h(T)] &= \frac{1}{N^n} \sum_{t=1}^N h(t) (t^n - (t-1)^n) = \frac{1}{N^n} \sum_{t=1}^N t^{n+1} - (t-1)^{n+1} \\ &= \frac{1}{N^n} (N^{n+1} - (N-1)^{n+1} + (N-1)^{n+1} - \dots + 2^{n+1} - 1 + 1 - 0) \\ &= \frac{N^{n+1}}{N^n} = N \end{aligned}$$

Por lo que el estadístico $h(T)$ es insesgado para N . Nos falta comprobar si es un estimador y si tiene momento de segundo orden finito:

- No es estimador, puesto que $h(\mathbb{N}) \not\subseteq \mathbb{N}$. Sin embargo, podemos realizar aproximaciones y quedarnos con el natural más próximo. Es decir, no va a haber un UMVUE pero podemos quedarnos con este estadístico, que es aquello que podemos conseguir más próximo a un UMVUE.
- Para el momento de segundo orden, observamos que:

$$E[(h(T))^2] = \frac{1}{N^n} \sum_{t=1}^N (h(t))^2 (t^n - (t-1)^n) < \infty$$

al ser una suma finita.

Ejercicio 2.6.5. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X cuya función de densidad es de la forma

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\theta}}, \quad 0 < x < \theta$$

Calcular, si existe, el UMVUE para θ .

En primer lugar, busquemos un estadístico suficiente y completo:

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{iid.}}{=} \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\sqrt{x_i\theta}} = \frac{1}{(2\sqrt{\theta})^n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}} \quad x_i \in]0, \theta[$$

Si consideramos $0 < X_{(1)} \leq X_{(n)} < \theta$, podemos escribir:

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \frac{I_{]0, +\infty[}(X_{(1)} - 0) \cdot I_{]-\infty, 0[}(X_{(n)} - \theta)}{(2\sqrt{\theta})^n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}}$$

Tomando:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}}, \quad T(X_1, \dots, X_n) = X_{(n)}$$

$$g_\theta(t) = \frac{I_{]0, +\infty[}(X_{(1)} - 0) \cdot I_{]-\infty, 0[}(t - \theta)}{(2\sqrt{\theta})^n}$$

por el Teorema de factorización de Neymann-Fisher tenemos que el estadístico $X_{(n)}$ es suficiente para θ . Notando $T = X_{(n)}$ para abreviar, calculamos la distribución de T :

$$F_T(t) = (F_X(t))^n \implies f_T(t) = n(F_X(t))^{n-1} f_\theta(t)$$

Calculamos la distribución de X :

$$F_X(t) = \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{x\theta}} dx = \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{t}{\theta}} \quad t \in]0, \theta[$$

Por lo que:

$$f_T(t) = n(F_X(t))^{n-1} f_\theta(t) = n \left(\sqrt{\frac{t}{\theta}} \right)^{n-1} \frac{1}{2\sqrt{t\theta}} = \frac{n(\sqrt{t})^{n-2}}{2(\sqrt{\theta})^n} \quad t \in]0, \theta[$$

Sea ahora h una función medible de forma que:

$$0 = E[h(T)] = \int_0^\theta h(t) f_T(t) dt = \frac{n}{2(\sqrt{\theta})^n} \int_0^\theta h(t) (\sqrt{t})^{n-2} dt \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

tenemos entonces que:

$$\int_0^\theta h(t) (\sqrt{t})^{n-2} dt = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

Sea ahora $H(t)$ una primitiva de $h(t)(\sqrt{t})^{n-2}$, tenemos entonces que:

$$H(\theta) - H(0) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

por lo que derivando respecto a θ :

$$h(\theta) (\sqrt{\theta})^{n-2} = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+ \implies h(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

En conclusión, tenemos que:

$$\mathbb{R}^+ \subseteq \{t : h(t) = 0\}$$

por lo que:

$$1 \geq P[h(T) = 0] \geq P[T \in \mathbb{R}^+] = 1 \implies P[h(T) = 0] = 1$$

lo que demuestra que T es un estadístico completo. Ahora, tratamos de buscar un estimador insesgado para θ , que será nuestro candidato a UMVUE. Buscamos una función medible h de forma que:

$$\theta = E[h(T)] = \frac{n}{2(\sqrt{\theta})^n} \int_0^\theta h(t) (\sqrt{t})^{n-2} dt$$

Observemos que:

$$\int_0^\theta (\sqrt{t})^n dt = \frac{2}{n+2} \left[(\sqrt{t})^{n+2} \right]_0^\theta = \frac{2}{n+2} (\sqrt{\theta})^{n+2} = \frac{2}{n+2} (\sqrt{\theta})^n \theta$$

Por lo que si tomamos:

$$h(t) = \frac{n+2}{n} \cdot t$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} E[h(T)] &= \int_0^\theta \frac{n+2}{n} t \frac{n}{2(\sqrt{\theta})^n} (\sqrt{t})^{n-2} dt = \frac{n+2}{2(\sqrt{\theta})^n} \int_0^\theta t (\sqrt{t})^{n-2} dt \\ &= \frac{n+2}{2(\sqrt{\theta})^n} \int_0^\theta (\sqrt{t})^n dt = \frac{n+2}{2(\sqrt{\theta})^n} \frac{2}{n+2} (\sqrt{\theta})^n \theta = \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Por lo que $h(T)$ es insesgado para θ . Ahora, si $t \in \mathbb{R}^+$, tendremos entonces que:

$$h(t) = \frac{n+2}{n} \cdot t \geq t \in \mathbb{R}^+ \implies h(t) \in \mathbb{R}^+$$

por lo que $h(T)$ es además un estimador. Si calculamos ahora:

$$E[(h(T))^2] = \frac{n}{2(\sqrt{\theta})^n} \int_0^\theta (h(t))^2 (\sqrt{t})^{n-2} dt$$

Tenemos la integral en un compacto de una función continua, por lo que sabemos que $E[(h(T))^2] < \infty$. En conclusión, tenemos por el Teorema de Lehmann-Scheffé que: $E[h(T)/T] = h(T)$ es el UMVUE.

Ejercicio 2.6.6. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^2}, \quad x > \theta > 0$$

Calcular, si existen, los UMVUE para θ y para $1/\theta$.

Calculamos en primer lugar un estadístico suficiente y completo para θ :

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{iid.}}{=} \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta \cdot I_{[0, +\infty[}(X_{(1)} - \theta)}{x_i^2} = \theta^n \cdot I_{[0, +\infty[}(X_{(1)} - \theta) \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$$

Tomando:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}, \quad T(X_1, \dots, X_n) = X_{(1)} \\ g_\theta(t) = \theta^n \cdot I_{[0, +\infty[}(t - \theta)$$

Podemos aplicar el Teorema de factorización de Neymann-Fisher, obteniendo que T es suficiente para θ . Notando $T = X_{(1)}$ para abreviar, calculamos la distribución de T :

$$F_T(t) = 1 - (1 - F_X(t))^n \implies f_T(t) = n(1 - F_X(t))^{n-1} f_\theta(t)$$

Si calculamos:

$$F_X(t) = \int_\theta^t \frac{\theta}{x^2} dx = \theta \int_\theta^t \frac{1}{x^2} dx = \theta \left[\frac{-1}{x} \right]_\theta^t = \theta \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{\theta} \right) = \frac{t - \theta}{t} \quad t > \theta$$

Tenemos que:

$$f_T(t) = n \left(1 - \frac{t - \theta}{t} \right)^{n-1} \frac{\theta}{t^2} = n \cdot \frac{\theta^n}{t^{n+1}}$$

Sea h una función medible de forma que:

$$0 = E[h(T)] = \int_\theta^{+\infty} h(t) f_T(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\theta^n \underbrace{h(t) \cdot n \cdot \frac{\theta^n}{t^{n+1}}}_{(*)} dt \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

Sea $H(t)$ una primitiva de $(*)$, tenemos entonces que:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} H(n) - H(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

con lo que derivando respecto θ :

$$0 = h(\theta) \cdot n \cdot \frac{\theta^n}{\theta^{n+1}} = h(\theta) \cdot \frac{n}{\theta} \implies h(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

Por lo que:

$$\mathbb{R}^+ \subseteq \{t : h(t) = 0\}$$

de donde:

$$1 \geq P[h(T) = 0] \geq P[T \in \mathbb{R}^+] = 1 \implies P[h(T) = 0] = 1$$

Luego tenemos que T es completo. Si calculamos la esperanza de T :

$$\begin{aligned} E[T] &= \int_{\theta}^{\infty} t \cdot n \cdot \frac{\theta^n}{t^{n+1}} dt = \int_{\theta}^{+\infty} \frac{n\theta^n}{t^n} dt = n\theta^n \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt = \frac{-n\theta^n}{n-1} \left[\frac{1}{t^{n-1}} \right]_{\theta}^{\infty} \\ &= \frac{n\theta^n}{(n-1)\theta^{n-1}} = \frac{n\theta}{n-1} \end{aligned}$$

Por lo que tomando:

$$h(t) = \frac{n-1}{n} \cdot t$$

tenemos que:

$$E[h(T)] = \frac{n-1}{n} E[T] = \theta$$

Es decir, $h(T)$ es un estadístico insesgado para θ . Veamos que es estimador y que tiene momento de segundo orden:

- Si $t \in \mathbb{R}^+$, tenemos entonces que $h(t) \in \mathbb{R}_0^+$ para $n > 1$, por lo que $h(T)$ es estimador.
- Calculamos para $n > 2$:

$$\begin{aligned} E[(h(T))^2] &= \int_{\theta}^{+\infty} (h(t))^2 \frac{n\theta^n}{t^{n+1}} dt = \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \int_{\theta}^{+\infty} \frac{n\theta^n t^2}{t^{n+1}} dt \\ &= n\theta^n \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}} dt = n\theta^n \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \left[\frac{1}{(-n+2)t^{n-2}} \right]_{\theta}^{+\infty} \\ &= n\theta^n \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{1}{(n-2)\theta^{n-2}} = \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{n}{(n-2)} \theta^2 < \infty \end{aligned}$$

Por lo que $h(T) = \frac{n-1}{n} \cdot t$ es UMVUE para θ . Si buscamos ahora un UMVUE para $1/\theta$, observamos que tomando $h(t) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{t}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} E[h(T)] &= \int_{\theta}^{+\infty} h(t) \frac{n\theta^n}{t^{n+1}} dt = (n+1)\theta^n \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{t^{n+2}} dt = (n+1)\theta^n \left[\frac{1}{-(n+1)t^{n+1}} \right]_{\theta}^{+\infty} \\ &= \frac{\theta^n}{\theta^{n+1}} = \frac{1}{\theta} \end{aligned}$$

por lo que $h(T)$ es insesgado para T . Observamos además que:

- Si $t \in \mathbb{R}^+$, entonces $h(t) \in \mathbb{R}^+$, por lo que $h(T)$ es un estimador.
- Calculamos si $n + 3 > 1$:

$$\begin{aligned} E[(h(T))^2] &= \int_{\theta}^{+\infty} (h(t))^2 \frac{n\theta^n}{t^{n+1}} dt = \frac{\theta^n(n+1)^2}{n} \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{t^{n+3}} dt \\ &= \frac{\theta^n(n+1)^2}{n} \left[\frac{1}{-(n+2)t^{n+2}} \right]_{\theta}^{+\infty} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)\theta^2} < \infty \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Lehmann-Scheffé, tenemos que $E[h(T)/T] = h(T)$ es UMVUE para $1/\theta$.

Ejercicio 2.6.7. Sea $X \rightsquigarrow P_{\theta}$ siendo P_{θ} una distribución con función de densidad

$$f_{\theta}(x) = e^{\theta-x}, \quad x \geq \theta$$

Dada una muestra aleatoria simple de tamaño arbitrario, encontrar los UMVUE de θ y de e^{θ} .

Calculamos en primer lugar un estadístico suficiente y completo para θ :

$$f_{\theta}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{iid.}}{=} \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i) = \prod_{i=1}^n e^{\theta-x_i} \cdot I_{[0,+\infty[}(X_{(1)} - \theta) = I_{[0,+\infty[}(X_{(1)} - \theta) e^{n\theta} \prod_{i=1}^n e^{-x_i}$$

Tomando:

$$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n e^{-x_i}, \quad T(X_1, \dots, X_n) = X_{(1)} \\ g_{\theta}(t) &= I_{[0,+\infty[}(t - \theta) \cdot e^{n\theta} \end{aligned}$$

Tenemos por el Teorema de factorización de Neymann-Fisher que $T = X_{(1)}$ es suficiente para θ . Calculamos la distribución de T :

$$F_T(t) = 1 - (1 - F_X(t))^n \implies f_T(t) = n(1 - F_X(t))^{n-1} f_{\theta}(t)$$

Si calculamos:

$$F_X(t) = \int_{\theta}^t e^{\theta-x} dx = e^{\theta} \int_{\theta}^t e^{-x} dx = e^{\theta} [-e^{-x}]_{\theta}^t = e^{\theta} (e^{-\theta} - e^{-t}) = 1 - e^{\theta-t}, \quad t \geq \theta$$

Tenemos entonces que:

$$f_T(t) = n(e^{\theta-t})^{n-1} e^{\theta-t} = n(e^{\theta-t})^n$$

Sea h una función medible de forma que:

$$0 = E[h(T)] = \int_{\theta}^{+\infty} h(t) n(e^{\theta-t})^n dt = n e^{n\theta} \int_{\theta}^{+\infty} h(t) e^{-nt} dt \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Tenemos entonces que:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\theta}^n h(t) e^{-nt} dt \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Sea $H(t)$ una primitiva de $h(t)e^{-nt}$, tenemos que:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} H(n) - H(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

derivando respecto θ obtenemos:

$$0 = -h(\theta)e^{-n\theta} \implies h(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Por lo que:

$$\mathbb{R} \subseteq \{t : h(t) = 0\}$$

de donde deducimos que T es completo:

$$1 \geq P[h(t) = 0] \geq P[T \in \mathbb{R}] = 1 \implies P[h(t) = 0] = 1$$

Buscamos ahora un estadístico insesgado para θ , es decir, buscamos una función h medible de forma que:

$$\theta = E[h(T)] = \int_{\theta}^{+\infty} h(t)n(e^{\theta-t})^n dt = ne^{n\theta} \int_{\theta}^{+\infty} h(t)e^{-nt} dt$$

Sea $H(t)$ una primitiva de $h(t)e^{-nt}$, tenemos entonces que:

$$\theta = ne^{n\theta} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} H(n) - H(\theta) \right) \implies \frac{\theta}{ne^{n\theta}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} H(n) - H(\theta) \right)$$

y si derivamos a ambos lados:

$$\frac{e^{-n\theta}}{n} - \theta e^{-n\theta} = -h(\theta)e^{-n\theta} \implies h(\theta) = \theta - \frac{1}{n}$$

Por lo que si tomamos:

$$h(T) = T - \frac{1}{n}$$

Tenemos que $E[T] = \theta$, con lo que $h(T)$ es insesgado para θ . Además, se trata de un estimador (puesto que el espacio paramétrico es \mathbb{R}). Finalmente, vemos que:

$$E[(h(T))^2] = \int_{\theta}^{+\infty} (h(t))^2 n(e^{\theta-t})^n dt = ne^{n\theta} \int_{\theta}^{+\infty} \left(t^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{2t}{n} \right) e^{-nt} dt$$

calculamos la integral a parte:

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{+\infty} \left(t^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{2t}{n} \right) e^{-nt} dt &= \left\{ \begin{array}{l} u = (t - 1/n)^2 \quad du = 2t - 2/n \\ dv = e^{-nt} \quad v = -e^{-nt}/n \end{array} \right\} \\ &= \left[\frac{-(t - 1/n)^2 e^{-nt}}{n} \right]_{\theta}^{+\infty} + \frac{1}{n} \int_{\theta}^{+\infty} (2t - 2/n) e^{-nt} dt \end{aligned}$$

tenemos que:

$$\left[\frac{-(t - 1/n)^2 e^{-nt}}{n} \right]_{\theta}^{+\infty} < \infty$$

y volvemos a calcular a parte:

$$\begin{aligned}\int_{\theta}^{+\infty} (2t - 2/n)e^{-nt} dt &= \left\{ \begin{array}{ll} u = 2t - 2/n & du = 2 \\ dv = e^{-nt} & v = -e^{-nt}/n \end{array} \right\} \\ &= \left[\frac{-(2t - 2/n)e^{-nt}}{n} \right]_{\theta}^{+\infty} + \frac{2}{n} \int_{\theta}^{+\infty} e^{-nt} dt\end{aligned}$$

tenemos que:

$$\left[\frac{-(2t - 2/n)e^{-nt}}{n} \right]_{\theta}^{+\infty} < \infty$$

y también que:

$$\frac{2}{n} \int_{\theta}^{+\infty} e^{-nt} dt = \frac{2}{n} \left[\frac{-e^{-nt}}{n} \right]_{\theta}^{+\infty} < \infty$$

En definitiva, $E[(h(T))^2] < \infty$, por lo que aplicando el Teorema de Lehmann-Scheffé, obtenemos que $E[h(T)/T] = h(T)$ es UMVUE.

Ejercicios de estimadores eficientes

Ejercicio 2.6.8. Sea X la variable que describe el número de fracasos antes del primer éxito en una sucesión de pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito $\theta \in]0, 1[$, y sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de X .

- a) Probar que la familia de distribuciones de X es regular y calcular la función de información asociada a la muestra.

Según el enunciado, “ X modela el número de fracasos antes del primer éxito en una sucesión de pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito $\theta \in]0, 1[$ ”, por lo que X sigue una distribución geométrica con probabilidad de éxito θ , $X \rightsquigarrow G(\theta)$, $\theta \in]0, 1[$. Para ver que la familia de distribuciones de X es regular:

- i) El espacio paramétrico es $\Theta =]0, 1[$, un intervalo abierto de \mathbb{R} .
- ii) El espacio muestral es $\mathcal{X} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, que no depende de θ .
- iii) Para comprobar la tercera condición, recordamos que la función masa de probabilidad viene dada por:

$$P_{\theta}[X = x] = (1 - \theta)^x \theta$$

que es derivable respecto θ . Calculamos la derivada del logaritmo de la función masa de probabilidad:

$$\begin{aligned}\ln P_{\theta}[X = x] &= \ln((1 - \theta)^x \theta) = x \ln(1 - \theta) + \ln \theta \\ \frac{\partial \ln P_{\theta}[X = x]}{\partial \theta} &= \frac{-x}{1 - \theta} + \frac{1}{\theta} = \frac{1 - \theta - x\theta}{\theta(1 - \theta)}\end{aligned}$$

Y si calculamos su esperanza:

$$E \left[\frac{\partial \ln P_{\theta}[X = x]}{\partial \theta} \right] = E \left[\frac{1 - \theta - X\theta}{\theta(1 - \theta)} \right] = \frac{1 - \theta - \theta E[X]}{\theta(1 - \theta)} \stackrel{(*)}{=} \frac{1 - \theta - (1 - \theta)}{\theta(1 - \theta)} = 0$$

donde en $(*)$ usamos que $E[X] = \frac{1-\theta}{\theta}$. En definitiva, se cumple también la tercera condición de las familias exponenciales.

Calculamos ahora la función de información asociada a la muestra:

$$I_X(\theta) = \text{Var} \left(\frac{\partial \ln P_\theta[X = x]}{\partial \theta} \right) = \text{Var} \left(\frac{1 - \theta - X\theta}{\theta(1 - \theta)} \right) = \frac{\theta^2}{\theta^2(1 - \theta)^2} \text{Var}(X)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{1 - \theta}{(1 - \theta)^2 \theta^2} = \frac{1}{\theta^2(1 - \theta)}$$

donde en $(*)$ hemos usado que $\text{Var}(X) = \frac{1-\theta}{\theta^2}$.

- b) Especificar la clase de funciones paramétricas que admiten estimadores eficientes y los correspondientes estimadores.

Una vez que sabemos que la familia es exponencial y que $0 < I_X(\theta) < \infty$, lo que hacemos es buscar las funciones $a(\theta)$ y $g(\theta)$ que se usan en el enunciado del Teorema de caracterización de los estimadores eficientes. Para ello:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln P_\theta[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln P_\theta[X = x_i]}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - \theta - x_i \theta}{\theta(1 - \theta)} \right) \\ &= \frac{n(1 - \theta) - \theta \sum_{i=1}^n x_i}{\theta(1 - \theta)} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n(1 - \theta)}{\theta}}{\theta - 1} \end{aligned}$$

Por lo que tomando:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i, \quad g(\theta) = \frac{n(1 - \theta)}{\theta}, \quad a(\theta) = \frac{1}{\theta - 1}$$

Tenemos que $a(\theta) \neq 0 \quad \forall \theta \in]0, 1[$, que g es derivable, con:

$$g'(\theta) = \frac{-n}{\theta^2} \neq 0 \quad \forall \theta \in]0, 1[$$

Además, observamos que:

$$a(\theta)g'(\theta) = \frac{-n}{\theta^2(\theta - 1)} = \frac{n}{\theta^2(1 - \theta)} = nI_X(\theta) = I_{(X_1, \dots, X_n)}(\theta) \quad \forall \theta \in]0, 1[$$

Así como que T es un estimador, pues:

$$T(]0, 1[) =]0, n[= g(]0, 1[)$$

Finalmente, por un Corolario visto en teoría sabemos que las únicas funciones paramétricas que admiten estimadores eficientes son de la forma:

$$a \cdot \frac{n(1 - \theta)}{\theta} + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

y que sus estimadores eficientes son de la forma:

$$a \cdot \sum_{i=1}^n X_i + b$$

- c) Calcular la varianza de cada estimador eficiente y comprobar que coincide con las correspondiente cota de Fréchet-Cramér-Rao.

Si calculamos ahora la varianza de $T = a \cdot \sum_{i=1}^n X_i$ y la cota de Fréchet-Cramér-Rao:

$$Var(T) = Var\left(a \cdot \sum_{i=1}^n X_i + b\right) \stackrel{(*)}{=} a^2 \sum_{i=1}^n Var(X_i) = a^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1-\theta}{\theta^2}\right) = \frac{a^2 n(1-\theta)}{\theta^2}$$

$$\frac{(ag'(\theta))^2}{I_{(X_1, \dots, X_n)}(\theta)} = \frac{\left(\frac{-an}{\theta^2}\right)^2}{\frac{n}{\theta^2(1-\theta)}} = \frac{a^2 n(1-\theta)}{\theta^2}$$

- d) Calcular, si existen, los UMVUE para $P_\theta[X = 0]$ y para $E_\theta[X]$ y decir si son eficientes.

- Para $P_\theta[X = 0]$:

$$P_\theta[X = 0] = (1 - \theta)^0 \theta = \theta$$

Como ya hemos demostrado que $T = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estimador eficiente para $g(\theta) = \frac{n(1-\theta)}{\theta}$, tenemos automáticamente que T es un estadístico suficiente. Tomando ahora $Q(\theta)$ como una primitiva de $a(\theta)$, por ejemplo $Q(\theta) = \ln(|\theta - 1|)$, como:

$$Q(]0, 1[) =]-\infty, 0[$$

claramente contiene un abierto de \mathbb{R} concluimos que T es completo. Buscamos ahora una función h medible de forma que $h(T)$ sea insesgado para θ , sabiendo que $T \rightsquigarrow BN(n, \theta)$, con función masa de probabilidad:

$$P_\theta[T = t] = \binom{t+n-1}{t} (1-\theta)^t \theta^n$$

- Para $E_\theta[X]$:

Finalmente, observamos que como θ y $\frac{1-\theta}{\theta}$ no están en la clase de funciones paramétricas que admiten estimadores eficientes, estos no pueden ser eficientes.

Ejercicio 2.6.9. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con distribución exponencial.

- a) Probar que la familia de distribuciones de X es regular.

Supuesto que $X \rightsquigarrow \exp(\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$, la función de densidad de X viene dada por:

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

Y se cumple:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Comprobamos cada una de las propiedades:

- i) El espacio paramétrico es $\Theta = \mathbb{R}^+$, intervalo abierto de \mathbb{R} .
- ii) El espacio muestral es \mathbb{R}^+ , que no depende de λ .
- iii) Para la tercera, observamos que f_λ es derivable respecto λ , con:

$$\ln f_\lambda(X) = \ln(\lambda e^{-\lambda X}) = \ln \lambda - \lambda X \implies \frac{\partial \ln f_\lambda(X)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} - X$$

Y si calculamos:

$$E \left[\frac{\partial \ln f_\lambda(X)}{\partial \lambda} \right] = E \left[\frac{1}{\lambda} - X \right] = \frac{1}{\lambda} - E[X] = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = 0$$

- b) Encontrar la clase de funciones paramétricas que admiten estimador eficiente y el estimador correspondiente. Calcular la varianza de estos estimadores.

Calculamos primero la función de información de Fisher:

$$I_X(\lambda) = \text{Var} \left(\frac{\partial \ln f_\lambda(X)}{\partial \lambda} \right) = \text{Var} \left(\frac{1}{\lambda} - X \right) = \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

que como vemos verifica $0 < I_X(\lambda) < \infty$. Buscamos ahora las funciones a y g :

$$\frac{\partial \ln f_\lambda^n(x_1, \dots, x_n)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f_\lambda(x_i)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda} - x_i \right) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = - \left(\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{\lambda} \right)$$

Por lo que tomando:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i, \quad g(\lambda) = \frac{n}{\lambda}, \quad a(\lambda) = -1$$

Tenemos que $a(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$, que g es derivable con:

$$g'(\lambda) = \frac{-n}{\lambda^2} \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$$

y que T es un estimador, pues $T(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+ = g(\mathbb{R}^+)$. Finalmente, falta comprobar que:

$$a(\lambda)g'(\lambda) = \frac{n}{\lambda^2} = nI_X(\lambda) = I_{(X_1, \dots, X_n)}(\lambda)$$

Por lo que podemos deducir ya por el Teorema de caracterización de los estimadores eficientes que T es un estimador eficiente. Más aún, por un Corolario del mismo, tenemos que las únicas funciones paramétricas de dicha familia que admiten estimadores eficientes son de la forma:

$$a \cdot \frac{n}{\lambda} + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

y que dichos estimadores son $a \cdot T + b$. Nos disponemos a calcular la varianza de estos estimadores:

$$\text{Var}(a \cdot T + b) = a^2 \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = a^2 \sum_{i=1}^n \text{Var}(X) = a^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{na^2}{\lambda^2}$$

Veamos que coincide con la cota de Fréchet-Cramér-Rao, para comprobar nuestro trabajo calculando la familia de estimadores eficientes:

$$\frac{(ag'(\lambda))^2}{I_{(X_1, \dots, X_n)}(\lambda)} = \frac{\left(\frac{-an}{\lambda^2}\right)^2}{\frac{n}{\lambda^2}} = \frac{na^2}{\lambda^2} = \text{Var}(a \cdot T + b)$$

- c) Basándose en el apartado anterior, encontrar el UMVUE para la media de X .

Como ya sabemos que $T = \sum_{i=1}^n X_i$ es un estimador eficiente para $g(\lambda)$, tenemos automáticamente que T es suficiente. Para ver que T es completo, sea Q una primitiva de a , podemos tomar $Q(\lambda) = -\lambda$, tenemos que claramente $Q(\mathbb{R}^+)$ contiene un abierto de \mathbb{R} , por lo que T es completo.

Como en el apartado anterior vimos que T es eficiente para $g(\lambda) = \frac{n}{\lambda}$, tenemos entonces que $\frac{T}{n}$ es eficiente para $\tilde{g}(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{n} = \frac{1}{\lambda}$. Como la correspondencia $t \mapsto \frac{t}{n}$ es biunívoca, $\frac{T}{n}$ también será suficiente y completo (para ver que es completo no hace falta que la correspondencia sea unívoca). Por un Corolario del Teorema de caracterización de estimadores eficientes tenemos que T es UMVUE para $\frac{1}{\lambda} = E[X]$.

- d) Dar la cota de Fréchet-Cramér-Rao para la varianza de estimadores insesgados y regulares de λ^3 . ¿Es alcanzable dicha cota?

Si tomamos $g(\lambda) = \lambda^3$, la cota de Fréchet-Cramér-Rao tiene la forma:

$$\frac{(g'(\lambda))^2}{I_{(X_1, \dots, X_n)}(\lambda)} = \frac{(3\lambda^2)^2}{\frac{n}{\lambda^2}} = \frac{9\lambda^6}{n}$$

y como $g(\lambda)$ no es de la forma $a \cdot \frac{n}{\lambda} + b$, para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$, sabemos que esta cota no es alcanzable.

Ejercicio 2.6.10. Sea X una variable aleatoria con función de densidad de la forma

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1$$

- a) Sabiendo que $E_\theta[\ln X] = -\frac{1}{\theta}$ y $\text{Var}_\theta[\ln X] = \frac{1}{\theta^2}$, comprobar que esta familia de distribuciones es regular.

Veamos las propiedades, suponiendo que $\theta > 0$.

- i) El espacio paramétrico es $\Theta = \mathbb{R}^+$, intervalo abierto de \mathbb{R} .
- ii) El espacio muestral es $\mathcal{X} =]0, 1[$, que no depende de θ .
- iii) La función de densidad es derivable respecto θ , calculamos la derivada del logaritmo de la función de densidad:

$$\ln f_\theta(X) = \ln(\theta X^{\theta-1}) = \ln \theta + (\theta - 1) \ln X \quad \implies \quad \frac{\partial \ln f_\theta(X)}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} + \ln X$$

Con lo que:

$$E \left[\frac{\partial \ln f_\theta(X)}{\partial \theta} \right] = E \left[\frac{1}{\theta} + \ln X \right] = \frac{1}{\theta} + E[\ln X] = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} = 0$$

- b) Basándose en una muestra aleatoria simple de X , dar la clase de funciones paramétricas con estimador eficiente, los estimadores y su varianza.

Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de X , en primer lugar calculamos la función de información de Fisher:

$$I_X(\theta) = \text{Var} \left(\frac{\partial \ln f_\theta(X)}{\partial \theta} \right) = \text{Var} \left(\frac{1}{\theta} + \ln X \right) = \text{Var}(\ln X) = \frac{1}{\theta^2}$$

y observamos que $0 < I_X(\theta) < \infty$. Ahora, busquemos las funciones g y a :

$$\frac{\partial \ln f_\theta^n(x_1, \dots, x_n)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f_\theta(x_i)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\theta} + \ln x_i \right) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

Tomando:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \ln X_i, \quad g(\theta) = \frac{-n}{\theta}, \quad a(\theta) = 1$$

tenemos que $a(\theta) \neq 0$ para todo $\theta \in \mathbb{R}^+$, que g es derivable con:

$$g'(\theta) = \frac{n}{\theta^2} \neq 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

además de que T es un estimador, puesto que:

$$T([0, 1]^n) \subseteq]-\infty, 0[= g(\mathbb{R}^+)$$

Comprobemos que:

$$a(\theta)g'(\theta) = \frac{n}{\theta^2} = nI_X(\theta) = I_{(X_1, \dots, X_n)}(\theta)$$

Por lo que T es un estimador eficiente para $g(\theta) = \frac{-n}{\theta}$, luego las únicas funciones paramétricas que admiten estimadores eficientes son las de la forma:

$$a \cdot \frac{-n}{\theta} + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

cuyos estimadores eficientes son:

$$a \cdot T + b$$

Calculemos sus varianzas y veamos que coinciden con la cota de Fréchet-Cramér-Rao:

$$\begin{aligned} \text{Var}(a \cdot T + b) &= a^2 \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right) \stackrel{\text{indep.}}{=} a^2 \sum_{i=1}^n \text{Var}(\ln X_i) = a^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta^2} = \frac{a^2 n}{\theta^2} \\ \frac{(ag'(\theta))^2}{I_{(X_1, \dots, X_n)}(\theta)} &= \frac{\left(\frac{an}{\theta^2}\right)^2}{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{a^2 n}{\theta^2} \end{aligned}$$