Análisis Funcional
Grado en Matemáticas
15 de enero de 2025

Ejercicio 1. (2 puntos) Sea $X = C([0,1],\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$. Se define

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\,dt, \quad \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)|\colon t\in[0,1]\} \qquad \forall f\in X$$

y se escribe $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_\infty = (X, \|\cdot\|_\infty)$. Definimos el funcional lineal $\delta\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\delta(f) = f(0) \qquad (f\in X).$$

(a) Demuestra que $\delta \in X_\infty^*$ y calcula su norma.

(b) ¿Es δ continuo respecto a $\|\cdot\|_1$? Justifica tu respuesta.

(c) ¿Son equivalentes $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en X? Justifica tu respuesta.

(d) ¿Es X_1 completo? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2. (2 puntos) Sea X un espacio reflexivo e Y un espacio de Banach. Pruébese que si existe $T\in L(X,Y)$ sobreyectiva, entonces Y es reflexivo.

Ejercicio 3. (2 puntos) Sean $S\colon c_0 \longrightarrow c_0$ y $T\colon \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ operadores lineales y supongamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} [Sx](k) y(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)[Ty](k) \qquad \forall x\in c_0,\ \forall y \in \ell_1.$$

Demuestra que S y T son continuos.

Tema. (4 puntos) Desarrolla el siguiente tema: *"Mejor aproximación en espacios de Hilbert; teorema de la proyección ortogonal; teorema de Riesz-Fréchet"*.

Ejercicio extra. Sean X, Y espacios normados y $T\colon X\longrightarrow Y$ un operador verificando que $\overline{T(B_X)}$ es un subconjunto compacto de Y. Demuestra que T^* alcanza su norma.

$\boxed{1}$ $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ $\quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$

$$\delta(f) = f(0) \quad \forall f \in C[0,1]$$

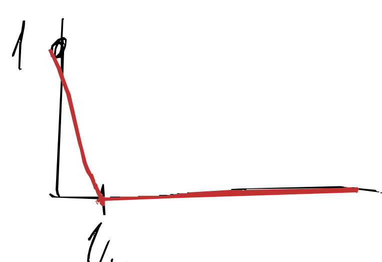
a) $|\delta(f)| = |f(0)| \le \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$

$\Rightarrow \delta \in X_\infty^*$ y $\|\delta\| \le 1$

Como $\delta(\mathbb{1}) = 1 = \|\mathbb{1}\|_\infty$

$\Rightarrow \|\delta\| = 1$

b) No. Tomamos f_n con gráfica



Entonces, $\|f_n\|_1 = \frac{2}{n} \longrightarrow 0$

pero $\delta(f_n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) No pueden ser equivalentes porque δ es continua respecto de $\|\cdot\|_\infty$ y no lo es respecto de $\|\cdot\|_1$

d) X_1 no es completo porque $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \ \forall f \in X$, luego $Id: X_\infty \longrightarrow X_1$ es continua, lineal y biyectiva, si X_1 fuese completo, sería un isomorfismo por el Tª de los isomorfismos de Banach. Por tanto, las normas serían equivalentes, lo que no es cierto.

$\boxed{2}$

$T: X \to Y$ sobre

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \\ X/\ker T \arrow[ur, "\tilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

$\tilde{T}$ es continua, lineal y biyectiva

$\Rightarrow \tilde{T}$ isomorfismo por el T^a de los isomorfismos de Banach.

Como X es reflexivo $\Rightarrow X/\ker T$ es reflexivo $\Rightarrow Y \simeq X/\ker T$ es reflexivo.

$\boxed{3}$ Para $x \in c_0$ e $y \in \ell_1 = c_0^*$, escribamos $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y(k) x(k)$

(la serie es convergente porque es absolutamente convergente por estar $\{x(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ acotada y $\sum_{k \geq 1} |y(k)| < \infty$

Veamos que S es continuo usando el T^a de la gráfica cerrada:

$\{x_n\} \subseteq c_0$ $\{x_n\} \xrightarrow{\|\ \|} 0$ tal que $\{Sx_n\} \xrightarrow{\|\ \|} z \in c_0$ ¿Es $z = 0$?

$\Rightarrow$ Para cada $y \in \ell_1$ se tiene que

$$\begin{array}{ccc} & & Sx_n \xrightarrow{\|\ \|} z \\ & & \downarrow \\ \langle y, Sx_n\rangle & \xrightarrow{\qquad\quad} & \langle y, z\rangle \\ \| & & \\ \langle Ty, x_n\rangle & \xrightarrow{\qquad\quad} & 0 \\ & \uparrow & \\ & x_n \xrightarrow{\|\ \|} 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \langle y, z\rangle = 0 \quad \forall y \in \ell_1 = c_0^*$$

$\Rightarrow z = 0$ por el Tª de Hahn-Banach

Ahora, el Tª de la gráfica cerrada dice que S es continua.

Veamos que $T = S^*$ y, por tanto, T será continua:

Por definición, para $x \in c_0$, $y \in \ell_1 = c_0^*$

$$\langle S^* y, x \rangle = \langle y, Sx \rangle =$$

$$= \langle Ty, x \rangle$$

$$\Longrightarrow \langle [S^* - T](y), x \rangle = 0$$

$\forall x \in c_0$

$$\Longrightarrow [S^* - T](y) = 0 \quad \forall y \in \ell_1 = c_0^*$$

$$\Longrightarrow S^* = T.$$

⊗ También se puede razonar de forma análoga a la primera parte para ver que T es continua directamente.

$\boxed{\text{Extra}}$

$T: \mathfrak{X} \longrightarrow Y$ tal que $\overline{T(B_{\mathfrak{X}})}$ es compacto en Y

1º T es continuo porque $T(B_{\mathfrak{X}})$ es acotado

2º Tomamos $(x_n) \subseteq B_{\mathfrak{X}}$ tal que $\|Tx_n\| \longrightarrow \|T\|$ y usamos que $\overline{T(B_{\mathfrak{X}})}$ es compacto para encontrar una sucesión parcial $(x_{\sigma(n)})$ tal que

$$Tx_{\sigma(n)} \longrightarrow y_0 \in \overline{T(B_{\mathfrak{X}})}$$

Como $\|Tx_{\sigma(n)}\| \longrightarrow \|T\|$ y también $\|Tx_{\sigma(n)}\| \longrightarrow \|y_0\|$, obtenemos que $\|y_0\| = \|T\|$.

3º Tomamos $y^* \in S_{Y^*}$ tal que $y^*(y_0) = \|y_0\| = \|T\|$

Como $Tx_{\sigma(n)} \xrightarrow{\|\ \|} y_0$, se tiene que $y^*(Tx_{\sigma(n)}) \to y^*(y_0)$

$\Rightarrow |y^*(Tx_{\sigma(n)})| \longrightarrow |y^*(y_0)| = \|T\|$

4º Finalmente,

$$\|T^* y^*\| \geq |[T^* y^*](x_{\sigma(n)})| =$$

$$= |y^*(Tx_{\sigma(n)})| \longrightarrow \|T\|$$

$\Rightarrow \|T^* y^*\| \geq \|T\|$ y, por tanto, T^* alcanza su norma.