Topología II
Examen VI

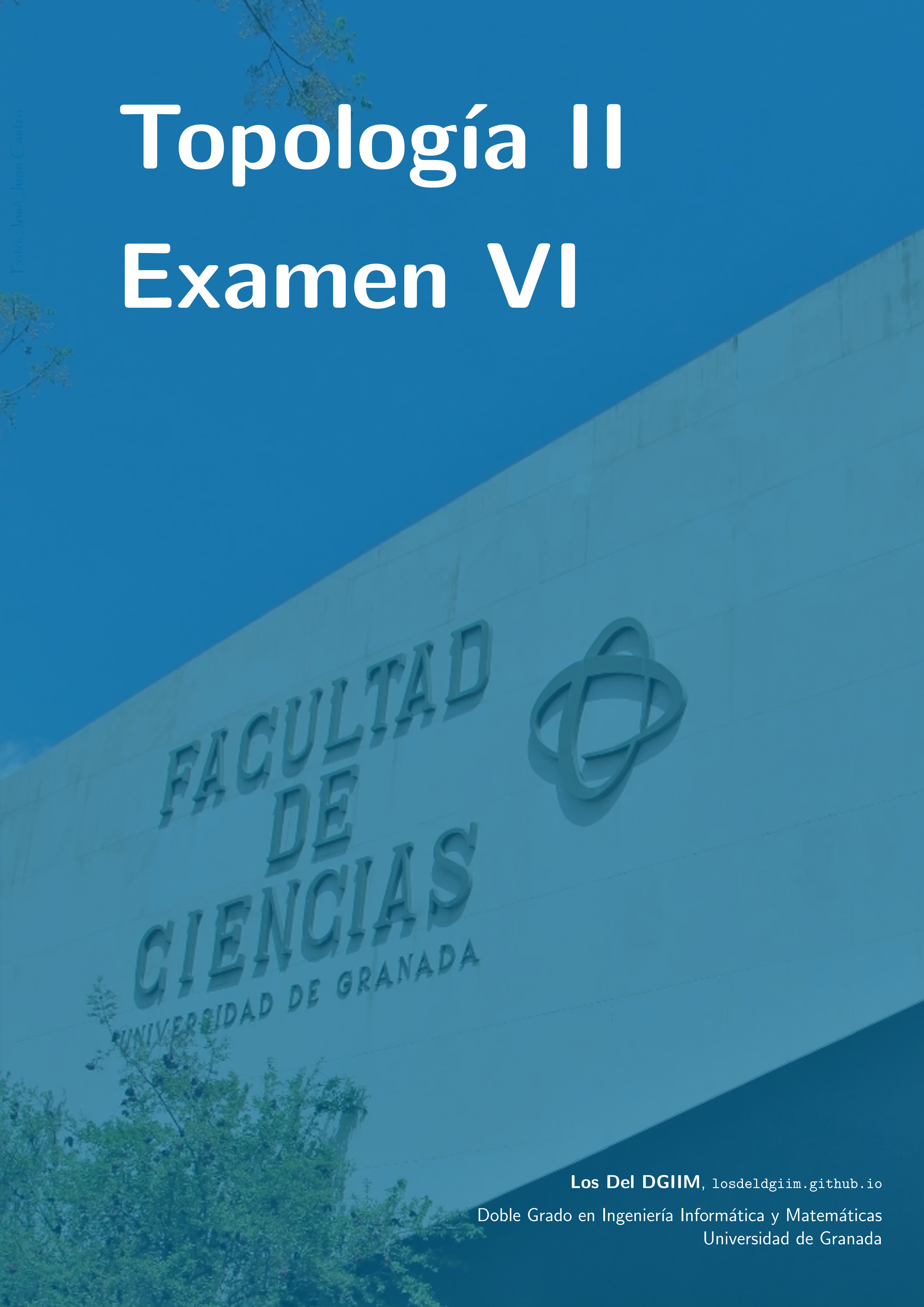


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología II
Examen VI

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Asignatura Topología II.

Curso Académico 2024/25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Grupo Único.

Descripción Examen extraordinario.

Fecha 10 de febrero de 2025.

Duración 2 horas y media.

Responda la pregunta 1 y elija tres preguntas entre la 2, 3, 4 y 5.

Ejercicio 1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Dadas las circunferencias

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}, \qquad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 1\}$$

no existe una aplicación recubridora desde $X = C_1 \cup C_2$ en $\mathbb{S}^1$.

b) Si $p : X \to Y$ es una aplicación recubridora con X compacto, entonces $p^{-1}(y)$ es finito para todo $y \in Y$.

c) Toda aplicación continua $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ es homotópicamente nula.

Ejercicio 2. Consideremos el cilindro vertical $C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ y las rectas horizonatales

$$R_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = -1\}, \qquad R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = 1\}$$

Calcula el grupo fundalmental de

$$X = C \cup R_1 \cup R_2$$

Ejercicio 3. Sea $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ una aplicación continua cumpliendo que $f\big|_{Fr(\overline{\mathbb{D}})} : Fr(\overline{\mathbb{D}}) \to Fr(\overline{\mathbb{D}})$ es un homeomorfismo. Demuestra que f es sobreyectiva.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^1$ una aplicación continua. Demuestra que f es homotópicamente nula si $n \geqslant 2$.

Ejercicio 5. Determina la superficie compacta S dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e, f, g, h, i; afc^{-1}, deb^{-1}, hia^{-1}, dbc, ehg^{-1}, gfi^{-1} \rangle$$

Solución.

Ejercicio 1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Dadas las circunferencias

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 = 1\}, \qquad C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2+y^2 = 1\}$$

no existe una aplicación recubridora desde $X = C_1 \cup C_2$ en $\mathbb{S}^1$.

b) Si $p : X \to Y$ es una aplicación recubridora con X compacto, entonces $p^{-1}(y)$ es finito para todo $y \in Y$.

Si Y es T1 es cierta, pues para todo $y \in Y$ tendremos que $\{y\}$ es cerrado por ser Y T1, por lo que $p^{-1}(\{y\}) \subseteq X$ es un conjunto cerrado. Como X es compacto, tenemos que $p^{-1}(\{y\})$ también será compacto. Como p es una aplicación recubridora, para y existirá O_y un abierto de Y regularmente recubierto, por lo que:

$$p^{-1}(O_y) = \biguplus_{i\in I} A_i$$

con A_i abierto y $p\big|_{A_i} : A_i \to O_y$ homeomorfismo, para cada $i \in I$. Tenemos un recubrimiento por abiertos de $p^{-1}(\{y\}) \subseteq p^{-1}(O_y)$, por lo que por ser $p^{-1}(\{y\})$ compacto existirá $J \subseteq I$ finito de forma que:

$$p^{-1}(\{y\}) \subseteq \biguplus_{i\in J} A_i$$

Como los conjuntos A_i son disjuntos tenemos entonces que solo puede haber una cantidad finita de preimágenes de y.

c) Toda aplicación continua $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es homotópicamente nula.

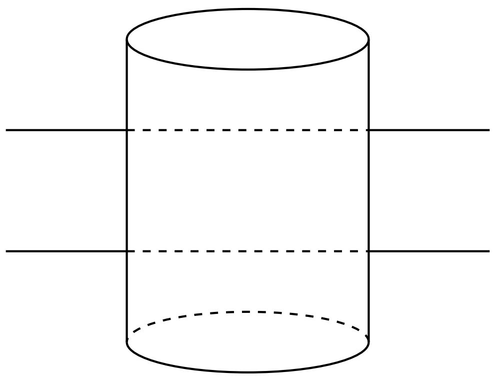
Ejercicio 2. Consideremos el cilindro vertical $C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ y las rectas horizonatales

$$R_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = -1\}, \qquad R_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = 1\}$$

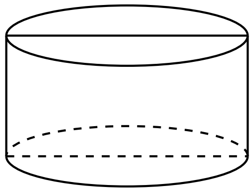
Calcula el grupo fundalmental de

$$X = C \cup R_1 \cup R_2$$

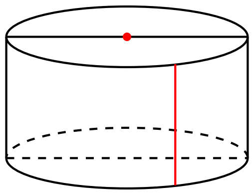
Tenemos el conjunto:



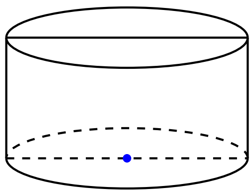
Que tiene por retracto de deformación el conjunto:



Si tomamos como U:



Y como V:



Puede probarse que $U \cap V$ es simplemente conexo, que U tiene grupo fundamental $\mathbb{Z}$ y V tiene $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, de donde:

$$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Ejercicio 3. Sea $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ una aplicación continua cumpliendo que $f\big|_{Fr(\overline{\mathbb{D}})} : Fr(\overline{\mathbb{D}}) \to Fr(\overline{\mathbb{D}})$ es un homeomorfismo. Demuestra que f es sobreyectiva.

Por reducción al absurdo suponemos que f no es sobreyectiva, es decir, que existe $y \in \overline{\mathbb{D}} \setminus f(\overline{\mathbb{D}})$ (notemos que $y \in \mathbb{D}$, ya que si no esto contradeciría la existencia del homeomorfismo enunciado). De esta forma, podemos considerar la restricción en codominio $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}} \setminus \{y\}$. Ahora, el conjunto $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{y\}$ tiene por retracto de deformación al conjunto $\mathbb{S}^1$. En definitiva, podemos considerar la siguiente cadena de composiciones de aplicaciones continuas:

$$\overline{\mathbb{D}} \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{D}} \setminus \{y\} \xrightarrow{r} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{S}^1$$

donde usamos que $Fr(\overline{\mathbb{D}}) = \mathbb{S}^1$, obteniendo así una aplicación continua de $\overline{D}$ en $\mathbb{S}^1$ que mantiene fijos los puntos de $\mathbb{S}^1$, <u>contradicción</u>.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^1$ una aplicación continua. Demuestra que f es homotópicamente nula si $n \geqslant 2$.

Ejercicio 5. Determina la superficie compacta S dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e, f, g, h, i; afc^{-1}, deb^{-1}, hia^{-1}, dbc, ehg^{-1}, gfi^{-1} \rangle$$