

# Topología II

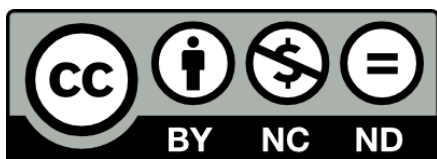
## Examen III

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Topología II

## Examen III

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

**Asignatura** Topología II.

**Curso Académico** 2021/22.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Grupo Único.

**Descripción** Recopilación de ejercicios de repaso de varios temas.

**Ejercicio 1.** Sea  $M = \frac{I \times I}{\sim}$  con  $I = [0, 1]$  la banda de Möbius con  $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ . Probar que  $\frac{I \times \{\frac{1}{2}\}}{\sim}$  es un retracto de deformación de  $M$  y deducir que  $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$ . Probar que el borde  $\frac{I \times \{0, 1\}}{\sim}$  es un lazo y hallar qué clase da en  $\pi_1(M)$ .

**Ejercicio 2.** Hallar el grupo fundamental de:

- a)  $(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]) \cup (\mathbb{D}^2 \cup \{0, 1\})$ .
- b)  $\mathbb{S}^1(-1, 0) \cup \mathbb{S}^1(1, 0) \cup [(-2, 0), (2, 0)]$ .
- c) Tres esferas de  $\mathbb{R}^3$  donde cada una es tangente a las otras dos.

**Ejercicio 3.** Sea  $G$  un grupo de homeomorfismos de  $X$  actuando de manera natural. Si  $G$  actúa propia y discontinuamente sobre  $X$ , probar que la aplicación proyección  $p : X \rightarrow X/G$  es recubridora.

**Ejercicio 4.** Si  $Y$  es un espacio topológico discreto, probar que  $(X \times Y, p_1 : X \times Y \rightarrow X)$  es recubridor de  $X$ .

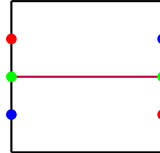
**Ejercicio 5.** Probar:

- a) El grupo fundamental de un plano proyectivo menos un punto.
- b) Un espacio contráctil es arcoconexo.
- c) Si el recubridor de un espacio simplemente conexo también es simplemente conexo, entonces ambos espacios son homeomorfos.
- d) Si  $\overline{X}$  es simplemente conexo, entonces  $|\pi_1(X)|$  es el número de hojas.

**Solución.**

**Ejercicio 1.** Sea  $M = \frac{I \times I}{\sim}$  con  $I = [0, 1]$  la banda de Möbius con  $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ . Probar que  $\frac{I \times \{1/2\}}{\sim}$  es un retracto de deformación de  $M$  y deducir que  $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$ . Probar que el borde  $\frac{I \times \{0, 1\}}{\sim}$  es un lazo y hallar qué clase da en  $\pi_1(M)$ .

Nos piden probar que el conjunto  $C = \frac{I \times \{1/2\}}{\sim}$  es un retracto de deformación de  $M$ :



Consideramos la aplicación  $H : M \times [0, 1] \rightarrow M$  dada por:

$$H((x, y), t) = (1 - t)(x, y) + t(x, 1/2) = (x, (1 - t)y + t/2)$$

Que está bien definida, ya que si  $(x, y) \sim (u, v)$ , entonces:

- Bien  $(x, y) = (u, v)$ , en cuyo caso es claro que  $H(x, y) = H(u, v)$ .
- Bien  $x = 0, u = 1$  y  $y = 1 - v$ . En dicho caso:

$$H(u, v) = H(1, v) = (1, (1 - t)v + t/2)$$

$$\begin{aligned} H(x, y) &= H(0, 1 - v) = (0, (1 - t)(1 - v) + t/2) = (0, (1 - v) - t(1 - v) + t/2) \\ &= (0, 1 - t + t/2 - (1 - t)v) = (0, 1 - (1 - t)v - t/2) \quad \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Observamos que  $H(u, v) \sim H(x, y)$ .

Vemos que  $H$  es continua. Vemos además que:

- $H((x, y), 0) = (x, y) \quad \forall (x, y) \in M$ .
- $H((x, y), 1) = (x, 1/2) \in C \quad \forall (x, y) \in M$ .
- $H((u, v), 1) = (u, 1/2) = (u, v) \quad \forall (u, v) \in C$ .

Por lo que  $C$  es un retracto de deformación de  $M$ . Ahora, si consideramos la aplicación  $f : I \times \{1/2\} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por:

$$f(x, 1/2) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

Tenemos claramente que  $f$  es continua y sobreyectiva. Como va de un conjunto compacto en un T2 tenemos también que es cerrada, por lo que  $f$  es una identificación. Vemos finalmente que:

$$f(0, 1/2) = (1, 0) = f(1, 1/2)$$

Por lo que podemos inducir  $f$  al cociente  $\frac{I \times \{1/2\}}{\sim}$ , lo que nos da un homeomorfismo entre  $C$  y  $\mathbb{S}^1$ . De esta forma:

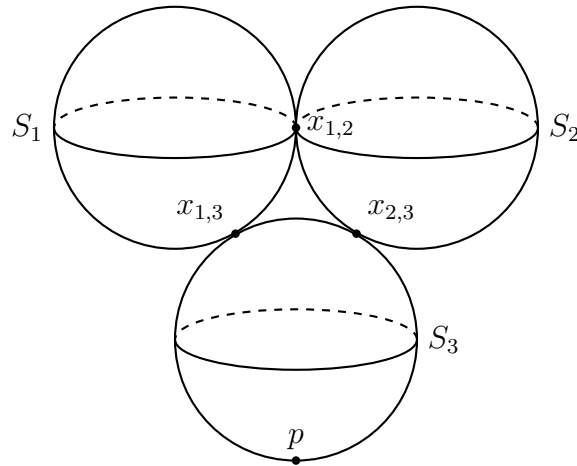
$$\pi_1(M) = \pi_1(C) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

**Ejercicio 2.** Hallar el grupo fundamental de:

- a)  $(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]) \cup (\mathbb{D}^2 \cup \{0, 1\})$ .
- b)  $\mathbb{S}^1(-1, 0) \cup \mathbb{S}^1(1, 0) \cup [(-2, 0), (2, 0)]$ .
- c) Tres esferas de  $\mathbb{R}^3$  donde cada una es tangente a las otras dos.

Tenemos que  $X = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ , con:

$$S_1 \cap S_2 = \{x_{1,2}\}, \quad S_1 \cap S_3 = \{x_{1,3}\}, \quad S_2 \cap S_3 = \{x_{2,3}\}$$



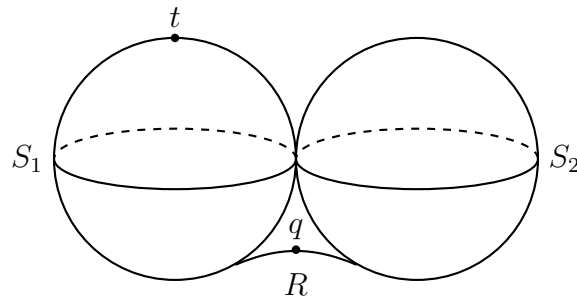
y consideramos los conjuntos:

$$U = X \setminus \{x_{1,2}\}$$

$$V = X \setminus \{p\}, \quad p \in S_3 \setminus \{x_{1,3}, x_{2,3}\}$$

tenemos que:

- $X = U \cup V$  con  $U, V$  abiertos.
- $U, V$  y  $U \cap V$  son arcoconexos.
- $U$  tiene por retracto de deformación el conjunto  $S_3$ , por lo que  $U$  es simplemente conexo.
- $U \cap V$  tiene por retracto de deformación el conjunto  $S_3 \setminus \{q\}$ , que a su vez es contráctil, por lo que  $U \cap V$  es contráctil, luego simplemente conexo.
- $V$  tiene como retracto de deformación el conjunto  $Y$ :

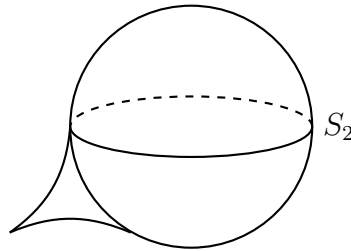


Al que tratamos de calcularle el grupo fundamental, usando para ello nuevamente el Teorema de Seifert-van Kampen. Si denotamos por  $R$  al segmento restante de  $S_3$  en  $Y$  que une  $x_{1,3}$  con  $x_{2,3}$  (luego  $Y = S_1 \cup S_2 \cup R$ ), consideramos ahora los conjuntos:

$$\begin{aligned} W &= Y \setminus \{q\}, & q &\in R \setminus \{x_{1,3}, x_{2,3}\} \\ O &= Y \setminus \{t\}, & t &\in S_1 \setminus \{x_{1,2}, x_{1,3}\} \end{aligned}$$

Tenemos que:

- $Y = W \cup O$  con  $W$  y  $O$  abiertos.
- $W, O$  y  $O \cap W$  son arcoconexos.
- $W$  tiene a  $S_1 \cup S_2$  como retracto de deformación, y en teoría vimos que este espacio topológico es simplemente conexo.
- $W \cap O$  tiene a  $(S_1 \setminus \{t\}) \cup S_2$  como retracto de deformación, y este último tiene a su vez a  $S_2$  como retracto de deformación, por lo que  $W \cap O$  es simplemente conexo.
- $O$  tiene el conjunto:



como retracto de deformación, y en teoría también se calculó el grupo fundamental de este espacio topológico, pues podemos ver  $R$  como la imagen de cierto arco  $\alpha$ , por lo que sabemos que dicho espacio topológico tiene grupo fundamental isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , por lo que el grupo fundamental de  $O$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen obtenemos que:

$$\pi_1(V) \cong \pi_1(Y) \cong \pi_1(W) * \pi_1(O) \cong \{1\} * \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

Aplicando nuevamente el Teorema de Seifert-van Kampen obtenemos:

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \{1\} * \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

**Ejercicio 3.** Sea  $G$  un grupo de homeomorfismos de  $X$  actuando de manera natural. Si  $G$  actúa propia y discontinuamente sobre  $X$ , probar que la aplicación proyección  $p : X \rightarrow X/G$  es recubridora.

**Ejercicio 4.** Si  $Y$  es un espacio topológico discreto, probar que  $(X \times Y, p_1 : X \times Y \rightarrow X)$  es recubridor de  $X$ .

Sabemos ya que  $p_1$  es una aplicación continua y sobreyectiva, por ser la proyección en primera coordenada del espacio topológico producto  $X \times Y$ .

Dado  $x \in X$ , si consideramos como  $O_x$  cualquier entorno abierto de  $x$  tendremos entonces que:

$$p_1^{-1}(O_x) = O_x \times Y = \biguplus_{y \in Y} O_x \times \{y\}$$

Con cada  $O_x \times \{y\}$  abierto para todo  $y \in Y$ , puesto que  $O_x$  es abierto en  $X$  y  $\{y\}$  abierto en  $Y$  por tener  $Y$  la topología discreta. Es obvio finalmente que para cada  $y \in Y$  tenemos que  $p_1|_{O_x \times \{y\}} : O_x \times \{y\} \rightarrow O_x$  es un homeomorfismo.

**Ejercicio 5.** Probar:

- a) El grupo fundamental de un plano proyectivo menos un punto.
- b) Un espacio contráctil es arcoconexo.

Si  $X$  es un espacio topológico contráctil, existe entonces una aplicación continua  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$  de forma que:

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) = x_0 \quad \forall x \in X$$

Por tanto, si consideramos  $\alpha_x : [0, 1] \rightarrow X$  dada por:

$$\alpha_x(t) = H(x, t)$$

Tenemos que  $\alpha_x$  es una aplicación continua, luego es un arco que une  $\alpha_x(0) = H(x, 0) = x$  con  $\alpha_x(1) = H(x, 1) = x_0$ . Como este lazo lo podemos considerar para todo  $x \in X$ , dados dos puntos arbitrarios de  $X$   $x$  e  $y$ , el lazo  $\alpha_x * \widetilde{\alpha_y}$  une  $x$  con  $y$ , por lo que  $X$  es arcoconexo.

- c) Si el recubridor de un espacio simplemente conexo también es simplemente conexo, entonces ambos espacios son homeomorfos.

Sea  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora entre dos espacios topológicos simplemente conexos, por ser  $p$  una aplicación recubridora tenemos que es continua, sobreyectiva y abierta. Para probar que  $p$  es un homeomorfismo, basta ver que  $p$  es inyectiva.

**Opción 1.** Como  $R$  es simplemente conexo tenemos para cada  $b \in B$  que la aplicación correspondencia del levantamiento  $\phi : \pi_1(B, b) \rightarrow p^{-1}(b)$  es biyectiva, por lo que:

$$|p^{-1}(b)| = |\pi_1(B, b)| = |\{1\}| = 1$$

de donde cada elemento de  $B$  tiene una única preimagen por  $p$ , por lo que  $p$  es inyectiva.

**Opción 2.** Para ello, dados  $x, y \in R$  con  $p(x) = p(y)$ , como  $R$  es arcoconexo (por ser simplemente conexo) tenemos que existe un arco  $\alpha$  que une  $x$  con  $y$ , por lo que  $p \circ \alpha$  es un arco de  $B$  que une  $p(x)$  con  $p(y) = p(x)$ , por lo que es un lazo basado en  $p(x)$ . Como  $B$  es simplemente conexo:

$$[p \circ \alpha] = [\varepsilon_{p(x)}]$$

Ahora, tenemos que  $\alpha$  es el único levantamiento de  $p \circ \alpha$  que comienza en  $x$ , así como que  $\varepsilon_x$  es el único levantamiento de  $\varepsilon_{p(x)}$  que comienza en  $x$ . Tenemos por tanto que  $\alpha$  debe ser un lazo, y además  $[\alpha] = [\varepsilon_x]$ , de donde  $x = y$ , por lo que  $p$  es inyectiva, luego es un homeomorfismo.



Notemos que en este ejercicio solo hemos usado que  $R$  es arcoconexo y que  $B$  es simplemente conexo. Aunque parezca que la condición “ $R$  simplemente conexo” es necesaria para hacer el ejercicio según la opción 1, si  $R$  es solo arcoconexo tenemos que la correspondencia del levantamiento es sobreyectiva y por tanto que:

$$1 = |p^{-1}(b)| \leq |\pi_1(B, b)| = 1$$

Y habríamos llegado a la misma conclusión

- d) Si  $\overline{X}$  es simplemente conexo, entonces  $|\pi_1(X)|$  es el número de hojas.