Álgebra II

Examen I

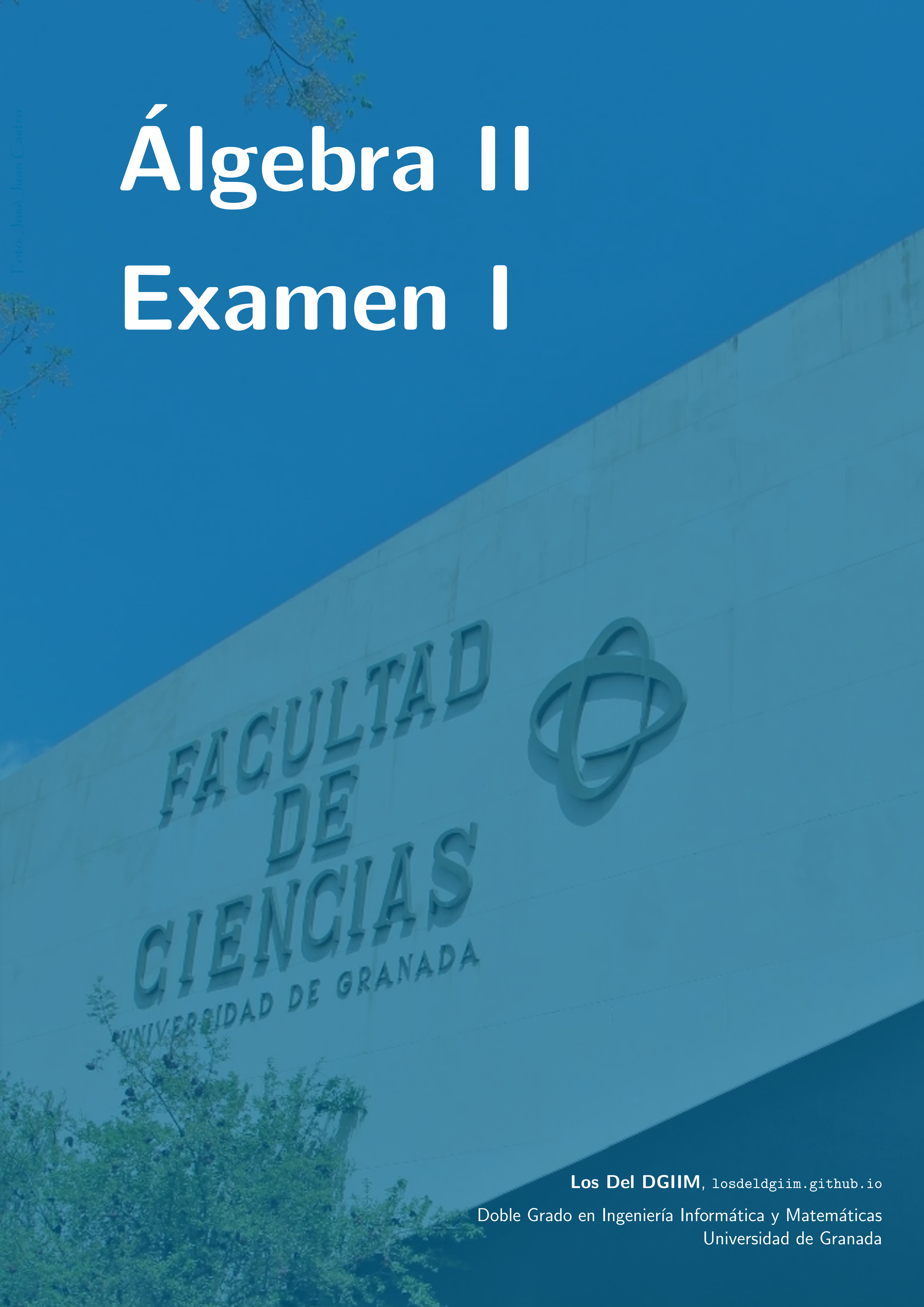

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra II
Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Asignatura Álgebra II.

Curso Académico 2017-18.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Parcial I.

Fecha Octubre de 2017.

Ejercicio 1.

1. Demostrar que en un grupo de orden par el número de elementos de orden 2 es impar.

2. Describe dos grupos de orden 6 que sean isomorfos y otros dos que no lo sean. Razona la respuesta.

Ejercicio 2. Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones:

1. Dados grupos G y H:

    a) Si tienen el mismo orden son isomorfos.
    b) Si son isomorfos tienen el mismo orden.
    c) Si se pueden generar por el mismo número de elementos son isomorfos.

2. Elije la opción correcta:

    a) En D_4 todos los elementos tienen orden par.
    b) D_4 y S_4 son grupos isomorfos.
    c) Salvo isomorfismo, D_4 es el único grupo no abeliano de orden 8.

3. Si $f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos, entonces:

    a) $O(x)$ divide a $O(f(x))$ $\forall x \in G$.
    b) $O(f(x))$ divide a $O(x)$ $\forall x \in G$.
    c) $O(x) = O(f(x))$ $\forall x \in G$.

4. Dadas las permutaciones $\alpha = (2\ 3\ 6)(6\ 5\ 7\ 1\ 3\ 4)$, $\beta = (2\ 4\ 7\ 3) \in S_{10}$ se tiene que $\beta\alpha\beta^{-1}$:

    a) Es par.
    b) Su orden es 12.
    c) Es un ciclo de longitud 7.

5. Si μ_6 denota el grupo de las raíces sextas de la unidad, entonces:

    a) $\mu_6 \cong C_6$.
    b) $\mu_6 \cong S_3$.
    c) $\mu_6 \cong D_6$.

6. En S_4 se tiene que:

    a) $\{(1\ 2), (3\ 4)\}$ es un conjunto de generadores.
    b) $\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$ es un conjunto de generadores.
    c) $\{(1\ 2), (2\ 3), (3\ 4)\}$ es un conjunto de generadores.

7. Sea G un grupo y $f : G \to G$ la aplicación dada por $f(x) = x^{-1}$. Entonces:

   a) f es un homomorfismo de grupos.
   b) f es un automorfismo.
   c) Si f es un homomorfismo entonces G es abeliano.

8. Para cualquier permutación $\sigma \in S_n$, si $\varepsilon(\sigma)$ denota su signo o paridad, se tiene:
   a) $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.
   b) $\varepsilon(\sigma) = -\varepsilon(\sigma^{-1})$.
   c) Ninguna de las anteriores.

9. Cualquier permutación $\sigma \in S_n$:
   a) Se descompone de forma única como producto de trasposiciones.
   b) Es producto de trasposiciones.
   c) Se descompone de forma única como producto de trasposiciones disjuntas.

10. El grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{Z}_2$:
    a) Es un grupo no abeliano de orden 8.
    b) Es un grupo isomorfo a Z_6.
    c) Es un grupo isomorfo a S_3.

Ejercicio 1.

1. Demostrar que en un grupo de orden par el número de elementos de orden 2 es impar.

   En primer lugar, dado un grupo arbitrario G y fijado $k \in \mathbb{N}$, se define el conjunto siguiente:
   $$G_k = \{x \in G \mid O(x) = k\}$$

   Sabemos que $G_1 = \{1\}$. Ahora, vamos a ver que el orden de G_k para todo $k \geqslant 3$ es par. Dado $x \in G$ con $O(x) = k$, entonces $O(x^{-1}) = k$ y $x^{-1} = x^{k-1}$. Para $k \geqslant 3$, se tiene además que $x \neq x^{-1}$. Por tanto, para cada $x \in G_k$ con $k \geqslant 3$, se tiene que $x \neq x^{-1}$ y $x^{-1} \in G_k$, por lo que los elementos de G_k van por pares y, por tanto, $|G_k|$ es par.

   Supongamos ahora nuestra hipótesis, G un grupo de orden par (en particular, finito). Por tanto, todo elemento de G tiene orden finito y G se descompone en grupos disjuntos como sigue:
   $$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = \{1\} \cup G_2 \cup \left(\bigcup_{k=3}^{\infty} G_k\right)$$

   Considerando cardinales, puesto que son disjuntos, se tiene que:
   $$|G_2| = |G| - 1 - \sum_{k=3}^{\infty} |G_k|$$

   Como $|G|$ es par y $|G_k|$ es par para todo $k \geqslant 3$, se tiene que $|G_2|$ es impar. Por tanto, el número de elementos de orden 2 en un grupo de orden par es impar.

2. Describe dos grupos de orden 6 que sean isomorfos y otros dos que no lo sean. Razona la respuesta.

   En un ejercicio, vimos que todo grupo de orden 6 o es cíclico o es isomorfo a D_3. Consideramos por tanto los grupos siguientes:
   $$C_6 \ncong D_3 \cong S_3$$

   Sabemos que C_6 es conmutativo y S_3 no, por lo que $C_6 \ncong S_3$ y por tanto $D_3 \cong S_3$.

Ejercicio 2. Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones:

1. Dados grupos G y H:

   a) Si tienen el mismo orden son isomorfos.
   No es correcta, pues $D_3 \ncong C_6$ y ambos tienen orden 6.

b) Si son isomorfos tienen el mismo orden.
Correcta, pues si todo isomorfismo en particular es una biyección. Por tanto, si $G \cong H$ entonces $|G| = |H|$.

c) Si se pueden generar por el mismo número de elementos son isomorfos.
No es correcta, pues $D_3 \ncong D_4$ y ambos se generan por dos elementos.

Por tanto, la opción correcta es la **b)**.

2. Elije la opción correcta:

a) En D_4 todos los elementos tienen orden par.
Sabemos que $O(1) = 1$, luego es incorrecta.

b) D_4 y S_4 son grupos isomorfos.
Falso, pues $|D_4| = 8 \neq 24 = |S_4|$.

c) Salvo isomorfismo, D_4 es el único grupo no abeliano de orden 8.
Consideramos el grupo de los cuaternios Q_2. Tenemos que:

$$ij = k \neq -k = ji$$

Por tanto, Q_2 no es abeliano, y $|Q_2| = 8$. Veamos que no es isomorfo a D_4. Los órdenes de los elementos de Q_2 son:

$$O(1) = 1, \quad O(-1) = 2, \qquad O(\pm i) = O(\pm j) = O(\pm k) = 4$$

Los órdenes de los elementos de D_4 son:

$$\begin{gathered} O(1) = 1, \quad O(r) = O(r^3) = 4 \\ O(r^2) = O(s) = O(sr) = O(sr^2) = O(sr^3) = 2 \end{gathered}$$

Por tanto, $Q_2 \ncong D_4$ y ambos son no abelianos y de orden 8. Por tanto, es incorrecta.

Por tanto, no hay ninguna opción correcta.

3. Si $f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos, entonces:

a) $O(x)$ divide a $O(f(x))$ $\forall x \in G$.
Consideramos el homomorfismo trivial:

$$\begin{array}{rccc} f: & G & \longrightarrow & H \\ & x & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Tenemos que $O(f(x)) = O(1) = 1$ para todo $x \in G$. Por tanto, tomando $x \in G \setminus \{1\}$, tenemos que $O(x) \nmid 1$, por lo que no es cierta.

b) $O(f(x))$ divide a $O(x)$ $\forall x \in G$.
Supongamos $O(x)$ finito (puesto que si no, no tiene sentido hablar de división). Entonces:

$$1 = f(1) = f\left(x^{O(x)}\right) = f(x)^{O(x)} \Longrightarrow O(f(x)) \mid O(x) \qquad \forall x \in G$$

c) $O(x) = O(f(x))\ \forall x \in G$.
Esto sabemos que es cierto si f es un monomorfismo, pero no de forma general. De hecho, el homomorfismo trivial es un contraejemplo.

Por tanto, la opción correcta es la **b)**.

4. Dadas las permutaciones $\alpha = (2\ 3\ 6)(6\ 5\ 7\ 1\ 3\ 4)$, $\beta = (2\ 4\ 7\ 3) \in S_{10}$ se tiene que $\beta\alpha\beta^{-1}$:

   a) Es par.
   b) Su orden es 12.
   c) Es un ciclo de longitud 7.

   Calculamos en primer lugar α como producto de ciclos disjuntos:

$$\alpha = (1\ 6\ 5\ 7)(2\ 3\ 4)$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}\beta\alpha\beta^{-1} &= \beta(1\ 6\ 5\ 7)\beta^{-1}\ \beta(2\ 3\ 4)\beta^{-1} = \\ &= (1\ 6\ 5\ 3)(4\ 2\ 7)\end{aligned}$$

   Por tanto, sabemos que $\varepsilon(\beta\alpha\beta^{-1}) = -1$, que no es un ciclo, y que:

$$O(\beta\alpha\beta^{-1}) = mcm(4, 3) = 12$$

   Por tanto, la opción correcta es la **b)**.

5. Si μ_6 denota el grupo de las raíces sextas de la unidad, entonces:

   a) $\mu_6 \cong C_6$.
   Es cierta, pues $\mu_6 = \langle \xi \mid \xi^6 = 1 \rangle$. El isomorfismo se obtiene gracias al Teorema de Dyck.
   b) $\mu_6 \cong S_3$.
   No es correcta, pues μ_6 es abeliano y S_3 no.
   c) $\mu_6 \cong D_6$.
   No es correcta, pues $|D_6| = 12 \neq 6 = |\mu_6|$.

6. En S_4 se tiene que:

   a) $\{(1\ 2), (3\ 4)\}$ es un conjunto de generadores.
   Falso, puesto que no se podría generar la trasposición $(2\ 3)$.
   b) $\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$ es un conjunto de generadores.
   De serlo, S_4 sería cíclico y, por tanto, abeliano, lo cual no es cierto.
   c) $\{(1\ 2), (2\ 3), (3\ 4)\}$ es un conjunto de generadores.
   Cierto, puesto que se vió que:

$$S_n = \langle (1\ 2), (2\ 3), \ldots, (n-1\ n) \rangle$$

7. Sea G un grupo y $f : G \to G$ la aplicación dada por $f(x) = x^{-1}$. Entonces:

   a) f es un homomorfismo de grupos.

   b) f es un automorfismo.

   c) Si f es un homomorfismo entonces G es abeliano.

   En la relación se ha visto que:

   $$f \text{ es un homomorfismo} \Longleftrightarrow G \text{ es abeliano}$$

   Por tanto, en el caso de que G no sea abeliano, la opción *a*) es incorrecta, luego *b*) también lo es. De hecho, la opción correcta es la **c)**.

8. Para cualquier permutación $\sigma \in S_n$, si $\varepsilon(\sigma)$ denota su signo o paridad, se tiene:

   a) $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

   b) $\varepsilon(\sigma) = -\varepsilon(\sigma^{-1})$.

   c) Ninguna de las anteriores.

   Pues que la signatura depende del número de trasposiciones de longitud par y esta es invariante al tomar la inversa de una permutación, la opción correcta es la **a)**.

9. Cualquier permutación $\sigma \in S_n$:

   a) Se descompone de forma única como producto de trasposiciones.

   b) Es producto de trasposiciones.

   c) Se descompone de forma única como producto de trasposiciones disjuntas.

   Sabemos que toda permutación se descompone de forma única como producto de *ciclos* disjuntos *salvo el orden*. No obstante, respecto a las trasposiciones tan solo sabemos que toda permutación se descompone como producto de trasposiciones, pero no de forma única. Por tanto, la opción correcta es la **b)**.

10. El grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{Z}_2$:

    a) Es un grupo no abeliano de orden 8.

    b) Es un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_6$.

    c) Es un grupo isomorfo a S_3.

    Calculemos el orden:

    $$|\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)| = (2^2 - 1)(2^2 - 2) = 3 \cdot 2 = 6$$

    Veamos ahora que no es abeliano:

    $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, sabemos que no es abeliano. Por ser de orden 6, sabemos que, o bien es cíclico (que no puede serlo por no ser abeliano), o es isomorfo a D_3. Por tanto:

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \cong D_3 \cong S_3$$

Por tanto, la opción correcta es la **c)**.