Mecánica Celeste
Examen IV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Mecánica Celeste
Examen IV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2025

Asignatura Mecánica Celeste.

Curso Académico 2023-24.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo A.

Profesor Margarita Arias López.

Descripción Segundo Parcial.

Fecha 20 de Diciembre de 2023.

Duración 1 hora y 30 minutos.

El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio o apartado.

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Decide si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: en el problema de n cuerpos existe una solución maximal

$$r = (r_1, r_2, \cdots, r_n) :]\alpha, \omega[\to \mathbb{R}^{3n}$$

que cumple

$$|r_i(t) - r_j(t)| \geqslant 1, \quad t \in]\alpha, \omega[, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$

y tal que $\omega < +\infty$.

Ejercicio 2 (7 puntos)**.** Dos masas, $m_1 = 3 \cdot 10^{24}$ Kg y $m_2 = 10^{24}$ Kg, se mueven en órbitas circulares coplanarias alrededor de su centro de masas. Se pretende colocar satélites en órbita en los puntos de libración L_4 y L_5 correspondientes a esas masas primarias, que sabemos que son estables para el problema restringido de los tres cuerpos circular. Se pide:

a) [1] Determinar la masa μ de la primaria más pequeña en las unidades apropiadas para que la masa total de las primarias sea 1.

b) [2] Encontrar las coordenadas de los puntos de libración L_4 y L_5 en el sistema de referencia con origen el centro de masas de las primarias, supuesto que la primaria de mayor masa se sitúa en el punto $P_1 = (-\mu, 0)$ y la otra en el $P_2 = (1 - \mu, 0)$, con μ el valor obtenido en el apartado anterior.

c) [2] Hacer un esbozo del movimiento de los tres cuerpos si el satélite se sitúa en L_4.

d) [2] Con los valores obtenidos en los apartados anteriores, probar que la función potencial

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1-\mu}{|P_1 - z|} + \frac{\mu}{|P_2 - z|} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu), \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\},$$

alcanza su mínimo absoluto en los puntos L_4 y L_5 y calcular el valor de la constante de Jacobi en esos puntos.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** En el sistema del ejercicio anterior, un satélite se sitúa a distancia menor que $1/4$ de la primaria de mayor masa con velocidad cero. Demuestra que dicho satélite no se sale de la región

$$\{\, |P_1 - z| < 1/4 \,\}.$$

(Sugerencia: utiliza las regiones de Hill).

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Decide si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: en el problema de n cuerpos existe una solución maximal

$$r = (r_1, r_2, \cdots, r_n) :]\alpha, \omega[\to \mathbb{R}^{3n}$$

que cumple

$$|r_i(t) - r_j(t)| \geqslant 1, \quad t \in]\alpha, \omega[, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$

y tal que $\omega < +\infty$.

Sea $\rho(t) = \min\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |r_i(t) - r_j(t)|$. Si $\omega < +\infty$, entonces por un teorema visto en teoría sabemos que $\rho(t) \to 0$ cuando $t \to \omega$. Esto es una contradicción con la hipótesis $|r_i(t) - r_j(t)| \geqslant 1, \quad t \in]\alpha, \omega[, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n$, por lo que la afirmación necesariamente debe ser falsa.

Ejercicio 2 (7 puntos)**.** Dos masas, $m_1 = 3 \cdot 10^{24}$ Kg y $m_2 = 10^{24}$ Kg, se mueven en órbitas circulares coplanarias alrededor de su centro de masas. Se pretende colocar satélites en órbita en los puntos de libración L_4 y L_5 correspondientes a esas masas primarias, que sabemos que son estables para el problema restringido de los tres cuerpos circular. Se pide:

a) [1] Determinar la masa μ de la primaria más pequeña en las unidades apropiadas para que la masa total de las primarias sea 1.

Sabemos que $m_1 = 1 - \mu$, $m_2 = \mu$, $\mu \in]0, 1/2]$ y $m_1 + m_2 = 1$, por lo que la masa μ en las unidades apropiadas será

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{10^{24}\,\text{Kg}}{3 \cdot 10^{24}\,\text{Kg} + 10^{24}\,\text{Kg}} = \frac{1}{4}$$

b) [2] Encontrar las coordenadas de los puntos de libración L_4 y L_5 en el sistema de referencia con origen el centro de masas de las primarias, supuesto que la primaria de mayor masa se sitúa en el punto $P_1 = (-\mu, 0)$ y la otra en el $P_2 = (1 - \mu, 0)$, con μ el valor obtenido en el apartado anterior.

Por teoría sabemos que tanto L_4 como L_5, colocándolos como vértices, forman un triángulo equilátero de lado 1 con las primarias. Por lo tanto, los puntos de libración L_4 y L_5 son aquellos $z \in \mathbb{R}^2$ que verifican

$$|z - P_1| = |z - P_2| = |P_1 - P_2| = 1$$

Deducimos entonces que la abscisa de L_4 y L_5 está en la mediatriz de las primarias, es decir:

$$M = \frac{P_1 + P_2}{2} = \left(\frac{-\mu + 1 - \mu}{2}, 0\right) = \left(\frac{1 - 2\mu}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2} - \mu, 0\right)$$

Denotando por $z = (x, y)$, entonces $x = {}^1\!/_2 - \mu$.

Para obtener la altura, imponemos $|z - P_1| = 1$ (también se podría imponer $|z - P_2| = 1$). Como

$$z - P_1 = \left(\frac{1}{2} - \mu - (-\mu), y\right) = \left(\frac{1}{2}, y\right)$$

Entonces

$$|z - P_1| = 1 \iff |z - P_1|^2 = 1 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \iff y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \iff y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

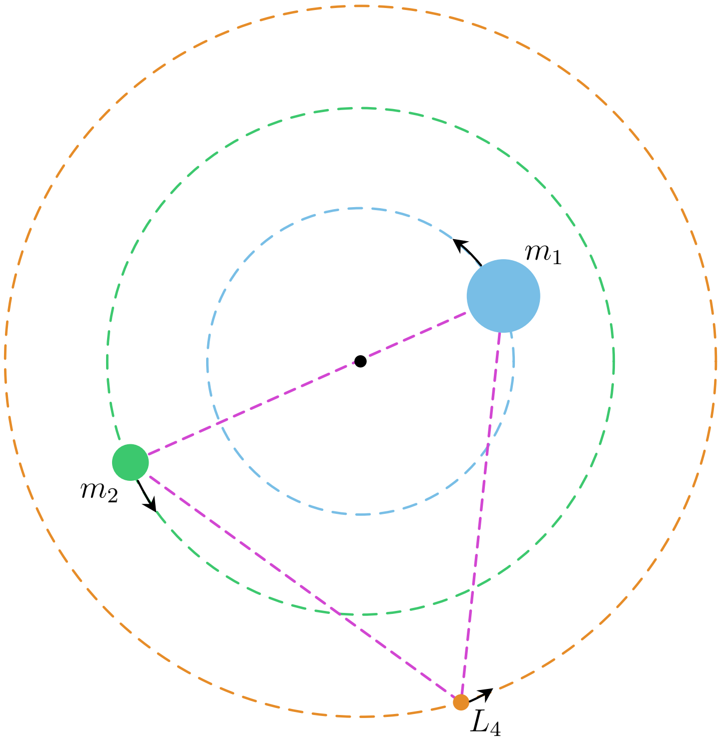
Consecuentemente

$$L_4 = \left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad L_5 = \left(\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Sustituyendo $\mu = {}^1\!/_4$ del apartado anterior

$$L_4 = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad L_5 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

c) [2] Hacer un esbozo del movimiento de los tres cuerpos si el satélite se sitúa en L_4.



En el sistema inercial (con centro de masas fijo en el origen) las dos primarias describen una órbita circular a la misma velocidad angular, así como el satélite situado en L_4. De esta manera, en cada instante los tres vértices están a distancia fija $|P_1 - P_2| = 1$, formando un triángulo equilátero de lado 1, que rota rígidamente (sin deformarse) alrededor del centro de masas.

d) [2] Con los valores obtenidos en los apartados anteriores, probar que la función potencial

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1-\mu}{|P_1 - z|} + \frac{\mu}{|P_2 - z|} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu), \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\},$$

alcanza su mínimo absoluto en los puntos L_4 y L_5 y calcular el valor de la constante de Jacobi en esos puntos.

Sea $\rho_1 = |z - P_1|$ y $\rho_2 = |z - P_2|$. Buscamos expresar $|z|^2$ en función de ρ_1 y ρ_2. Primero

$$|z - P_1|^2 = |z|^2 + |P_1|^2 - 2zP_1$$
$$|z - P_2|^2 = |z|^2 + |P_2|^2 - 2zP_2$$

Multiplicando la primera por $(1-\mu)$ y la segunda por μ, y sumándolas, obtenemos

$$(1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 = |z|^2 + (1-\mu)|P_1|^2 + \mu|P_2|^2 - 2z \cdot ((1-\mu)P_1 + \mu P_2) \quad (1)$$

Como el centro de masas está en el origen, entonces $(1-\mu)P_1 + \mu P_2 = 0$, y además sabemos que $|P_1|^2 = \mu^2$ y $|P_2|^2 = (1-\mu)^2$, de donde

$$(1-\mu)|P_1|^2 + \mu|P_2|^2 = (1-\mu)\mu^2 + \mu(1-\mu)^2 = \mu(1-\mu) \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$(1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 = |z|^2 + \mu(1-\mu) \iff |z|^2 = (1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 - \mu(1-\mu) \quad (3)$$

Recuperando la función potencial dada en el enunciado, multiplicamos por 2 a ambos lados, obteniendo

$$2\Phi(z) = |z|^2 + \frac{2(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{2\mu}{\rho_2} + \mu(1-\mu), \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\}, \quad (4)$$

y sustituimos (3) en (4), llegando a

$$2\Phi(z) = [(1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 - \mu(1-\mu)] + \frac{2(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{2\mu}{\rho_2} + \mu(1-\mu) =$$
$$(1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 + \frac{2(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{2\mu}{\rho_2}$$

Factorizando con $(1-\mu)$ y μ, conseguimos la expresión cómoda

$$2\Phi(z) = (1-\mu)\left(\rho_1^2 + \frac{2}{\rho_1}\right) + \mu\left(\rho_2^2 + \frac{2}{\rho_2}\right) \quad (5)$$

Sea ahora la función

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \rho & \longmapsto & \rho^2 + \dfrac{2}{\rho} \end{array}$$

Vemos que

$$g'(\rho) = 2\rho - \frac{2}{\rho^2}, \quad g''(\rho) = 2 + \frac{4}{\rho^3} > 0 \quad \forall \rho > 0$$

Por lo que g es estrictamente convexa, y su mínimo global se alcanza en los puntos críticos $g'(\rho) = 0$, es decir,

$$g'(\rho) = 0 \iff 2\rho - \frac{2}{\rho^2} = 0 \iff \cancel{2}\rho = \frac{\cancel{2}}{\rho^2} \iff \rho^3 = 1 \iff \rho = 1$$

Además, $g(1) = 1 + 2 = 3$, y, por ser $\rho = 1$ mínimo, $g(\rho) \geqslant 3 \quad \forall \rho > 0$. Teniendo esto en cuenta, vemos que de (5) se deduce que

$$2\Phi(z) \geqslant (1-\mu) \cdot 3 + \mu \cdot 3 = 3 \Longrightarrow \Phi(z) \geqslant \frac{3}{2}$$

El mínimo de Φ se alcanza en caso de que $g(\rho_1) = 3 = g(\rho_2)$, es decir, $\rho_1 = 1 = \rho_2$, pero como $\rho_1 = |z - P_1| = 1 = |z - P_2| = \rho_2$, y los únicos puntos que verifican esto último son L_4 y L_5, por lo realizado en el apartado anterior, queda demostrado que Φ alcanza su mínimo absoluto en los puntos L_4 y L_5.

Falta calcular la constante de Jacobi en L_4 y L_5. Por definición,

$$J = 2\Phi(z(t)) - |\dot{z}(t)|^2$$

Como L_4 y L_5 son puntos de equilibrio en el problema restringido circular (demostrado en teoría), entonces la solución $z = z(t)$ es constante, $z(t) \equiv c$, luego $\dot{z}(t) \equiv 0$. Entonces $J(c) = 2\Phi(c)$, y como hemos visto que el mínimo absoluto de Φ se alcanza en L_4 y L_5, y además $\Phi(L_4) = \Phi(L_5) = 3/2$, concluimos que

$$J(L_4) = J(L_5) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** En el sistema del ejercicio anterior, un satélite se sitúa a distancia menor que $1/4$ de la primaria de mayor masa con velocidad cero. Demuestra que dicho satélite no se sale de la región

$$\{\, |P_1 - z| < 1/4 \,\}.$$

(Sugerencia: utiliza las regiones de Hill).

Sea $A = \{\, |P_1 - z| < 1/4 \,\}$ y supongamos que $z = z(t)$ define la posición del satélite. Como este se sitúa con velocidad zero, entonces $\dot{z}(0) = 0$, y la constante de Jacobi, suponiendo que se sitúa en $z(0) = z_0 \in A$, es $J = 2\Phi(z_0)$. Como siempre

$$|\dot{z}(t)|^2 = 2\Phi(z(t)) - J \geqslant 0 \Longrightarrow \Phi(z(t)) \geqslant \frac{J}{2} = \Phi(z_0)$$

Es decir, el movimiento quedaría siempre en la región de Hill asociada al nivel $\Phi(z_0)$, que, por definición, es

$$H = \{z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\} : \Phi(z) \geqslant \Phi(z_0)\}$$

Como $\Phi(z) \to +\infty$ cuando $z \to P_1$, existe una componente conexa H_{P_1} de H que contiene a P_1 y a z_0. Además, la curva $\Phi = \Phi(z_0)$ (de velocidad cero) es la barrera, pues en el exterior $\Phi < \Phi(z_0)$, lo cual implicaría que $|\dot{z}(t)|^2 < 0$ (contradicción). En particular, fijado $z_0 \in A$, la componente conexa H_{P_1} queda contenida en el disco A, por lo que la trayectoria no puede cruzar la circunferencia $|P_1 - z| = 1/4$. Así pues, concluimos que $z(t) \in A \quad \forall t \in I$, siendo I el intervalo maximal de la solución $z = z(t)$.