Cálculo II

Examen I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo II
Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María Victoria Velasco Collado.

Descripción Primer Parcial. Cálculo diferencial. Temas 1-4.

Fecha 11 de mayo de 2023.

Ejercicio 1. [2 puntos]

1. Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que
$$\arctan x - \frac{\pi}{4} \leqslant x - 1$$

2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables verificando que $f(0) = g(0)$ y que $f'(x) > g'(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $f(x) > g(x)$, si y solo si, $x > 0$.

Ejercicio 2. [2 puntos] Determinar el polinomio de Taylor de orden 3, centrado en el origen, de las funciones $f(x) = \ln^2(1+x)^2 - \ln(1+x^2)$ y $g(x) = x - xe^{-x}$. Calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+x)^2 - \ln(1+x^2)}{x - xe^{-x}}$$

Tenemos que:
$$P^f_{3,0}(x) = 3x^2 - 4x^3 \qquad P^g_{3,0}(x) = x^2 - \frac{x^3}{2}$$

Entonces:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+x)^2 - \ln(1+x^2)}{x - xe^{-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{\frac{g(x)}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x) - P^f_{3,0}(x)}{x^2} + \frac{P^f_{3,0}(x)}{x^2}}{\frac{g(x) - P^g_{3,0}(x)}{x^2} + \frac{P^g_{3,0}(x)}{x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x) - P^f_{3,0}(x)}{x^2} + \frac{3x^2 - 4x^3}{x^2}}{\frac{g(x) - P^g_{3,0}(x)}{x^2} + \frac{x^2 - \frac{x^3}{2}}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \frac{f(x) - P^f_{3,0}(x)}{x^3} + 3 - 4x}{x \cdot \frac{g(x) - P^g_{3,0}(x)}{x^3} + 1 - \frac{x}{2}} = \frac{0 \cdot 0 + 3 - 0}{0 \cdot 0 + 1 - 0} = 3$$

Ejercicio 3. [2 puntos] Justificar, de forma razonada, la veracidad o la falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. Toda función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ tiene tangente horizontal en algún punto $c \in]a, b[$.

2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces $\exists f^{-1}$ (es decir, la inversa de f) y dicha función es derivable. Además, la derivada de f^{-1} y la de f están relacionadas.

3. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dos veces derivable y tal que $f''(x) \geqslant 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable que tiene un punto de inflexión en $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x_0) = 0$.

Ejercicio 4. [2 puntos] Calcular la mayor área que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide un metro.

Ejercicio 5. [2 puntos] Sea $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, para cada $x \in \mathbb{R}$. ¿Existe $r > 0$ tal que f sea lipschitziana en el intervalo $[r, +\infty[$ y uniformemente continua en $[-r, r[$? ¿Es f uniformemente continua en $\mathbb{R}$? ¿Es f lipschitziana en $\mathbb{R}$?