# Variable Compleja I
# Examen XVII


Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Variable Compleja I
# Examen XVII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

**Asignatura** Variable Compleja I.

**Curso Académico** 2020-21.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Javier Merí de la Maza.

**Descripción** Convocatoria Ordinaria.

**Fecha** 16 de Junio de 2022.

**Duración** 3.5 horas.

**Ejercicio 1** (2.5 puntos)**.** Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2+a^2)^2}\, dx = \frac{2a^3(1+at)}{e^{at}}.$$

**Ejercicio 2** (2.5 puntos)**.** Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{e^{\frac{z^3}{1+t}}}{1+t^2}\, dt \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

1. Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.
2. Probar que la serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

**Ejercicio 3** (2.5 puntos)**.** Probar que no hay más funciones enteras e inyectivas que los polinomios de grado uno.

**Ejercicio 4** (2.5 puntos)**.** Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $r \in (0,1)$ se verifica

$$\max \{|f(z)| : |z| = r\} = r^n.$$

Probar que existe $\alpha \in \mathbb{T}$ tal que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in D(0,1)$.

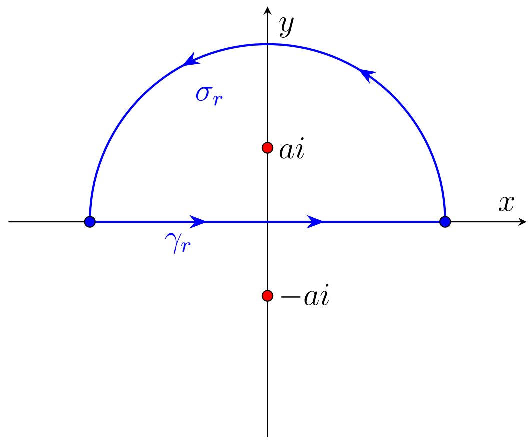


Figura 1: Ciclo de integración $\Sigma_R$ del Ejercicio 1.

**Ejercicio 1** (2.5 puntos)**.** Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{2a^3(1+at)}{e^{at}}.$$

Calculamos las raíces del denominador:

$$x^2 + a^2 = 0 \implies x^2 = -a^2 \implies x \in A := \{-ai, ai\}.$$

Definimos la función:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}\setminus A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{e^{itz}}{(z^2+a^2)^2} \end{array}$$

Notemos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus A)$, y que $A' = \emptyset$, por lo que podemos aplicar el Teorema de los Residuos. Como $\mathbb{C}$ es homológicamente conexo, podemos aplicar el Teorema de los Residuos para cualquier ciclo $\Sigma$ en $\mathbb{C}\setminus A$.

Para todo $R > a$, consideramos el siguiente ciclo $\Sigma_R = \gamma_R + \sigma_R$, representado en la Figura 1, donde:

$$\begin{array}{rccc} \gamma_R: & [-R, R] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & t \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \sigma_R: & [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & Re^{it} \end{array}$$

De esta forma, tenemos que:

$$\int_{\Sigma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_0\in A} \operatorname{Res}(f, z_0)\operatorname{Ind}_{\Sigma_R}(z_0)$$

Calculemos la primera integral que nos ha resultado:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{itz}}{(z^2+a^2)^2}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{\cos(tz)}{(z^2+a^2)^2}\,dz + i\int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sen}(tz)}{(z^2+a^2)^2}\,dz$$

Notemos que la integral pedida es la parte real de la integral. Veamos la siguiente integral:

$$\int_{\sigma_R} f(z)\,dz \leqslant \pi R \cdot \sup\left\{\left|\frac{e^{itz}}{(z^2+a^2)^2}\right| : z \in \sigma_R^*\right\} \leqslant \frac{\pi R}{(R^2-a^2)^2}$$

donde hemos usado que, si $z \in \sigma_R^*$, entonces $|z| = R$ y, como $R > a > 0$, tenemos que $R^2 > a^2$, por lo que:

$$\begin{aligned} |z^2+a^2| &\geqslant \big||z^2|-|a^2|\big| = \big|R^2-a^2\big| = R^2-a^2 \\ |e^{itz}| &= e^{-t\,\mathrm{Im}(z)} \leqslant e^0 = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, como la expresión anterior es válida para cualquier $R > a$, podemos hacer $R \to +\infty$ y tenemos que:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\sigma_R} f(z)\,dz = 0.$$

Calculamos ahora los índices. Por la forma en la que se ha definido el ciclo $\Sigma_R$, para todo $R > a$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_{\Sigma_R}(-ai) &= 0 \\ \mathrm{Ind}_{\Sigma_R}(ai) &= 1. \end{aligned}$$

Por tanto, tan solo hemos de calcular el residuo en el polo $ai$.

$$\lim_{z\to ai}(z-ai)f(z) = \lim_{z\to ai}(z-ai)\cdot\frac{e^{itz}}{[(z-ai)(z+ai)]^2} = \lim_{z\to ai}\frac{e^{itz}}{(z+ai)^2(z-ai)} = +\infty.$$

$$\lim_{z\to ai}(z-ai)^2 f(z) = \lim_{z\to ai}\frac{e^{itz}}{(z+ai)^2} = \frac{e^{itai}}{(2ai)^2} = \frac{e^{-at}}{-4a^2} = -\frac{e^{-at}}{4a^2} \in \mathbb{C}^*$$

Por tanto, deducimos que el orden del polo $ai$ es 2, y que el residuo es:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f,ai) &= \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left((z-ai)^2 f(z)\right) = \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{itz}}{(z+ai)^2}\right) = \\ &= \lim_{z\to ai}\frac{ite^{itz}(z+ai)^2 - e^{itz}\cdot 2(z+ai)}{(z+ai)^4} = \lim_{z\to ai}\frac{ite^{itz}(z+ai)-2e^{itz}}{(z+ai)^3} = \\ &= \lim_{z\to ai} e^{itz}\frac{it(z+ai)-2}{(z+ai)^3} = e^{-at}\cdot\frac{it(2ai)-2}{(2ai)^3} = e^{-at}\cdot\frac{-at-1}{-4a^3 i} = e^{-at}\cdot\frac{at+1}{4a^3 i} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\int_{\Sigma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(e^{-at}\cdot\frac{at+1}{4a^3 i}\cdot 1\right) = \frac{\pi\cdot e^{-at}(at+1)}{2a^3}.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\int_{-R}^{R}\frac{\cos(tz)}{(z^2+a^2)^2}\,dz + i\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{sen}(tz)}{(z^2+a^2)^2}\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz = \frac{\pi\cdot e^{-at}(at+1)}{2a^3}.$$

Como esta expresión es válida para cualquier $R > a$, podemos hacer $R \to +\infty$ y tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tz)}{(z^2+a^2)^2}\,dz + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(tz)}{(z^2+a^2)^2}\,dz = \frac{\pi \cdot e^{-at}(at+1)}{2a^3}.$$

Igualando las partes reales, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tz)}{(z^2+a^2)^2}\,dz = \frac{\pi \cdot e^{-at}(at+1)}{2a^3}.$$

como queríamos demostrar.

**Ejercicio 2** (2.5 puntos)**.** Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{e^{\frac{z^3}{1+t}}}{1+t^2}\,dt \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

1. Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

   Definimos la función:

   $$\begin{array}{rrcl} \Phi : & [n,n+1]\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (t,z) & \longmapsto & \dfrac{e^{\frac{z^3}{1+t}}}{1+t^2} \end{array}$$

   Como $1+t^2 > 0$, $1+t > 0$ para todo $t \in [n, n+1]$, tenemos que $\Phi$ está bien definida. $\Phi$ es continua en $[n,n+1]\times\mathbb{C}$, y para cada $t \in [n,n+1]$, la función $z \mapsto \Phi(t,z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$. Por tanto, por el Teorema de Holomorfía de integrales dependientes de un parámetro, tenemos que $f_n$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

2. Probar que la serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

   Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Para todo $z \in K$, $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

   $$|f_n(z)| = \left|\int_n^{n+1} \frac{e^{\frac{z^3}{1+t}}}{1+t^2}\,dt\right| \leqslant \sup\left\{\left|\frac{e^{\frac{z^3}{1+t}}}{1+t^2}\right| : t \in [n,n+1]\right\}$$

   Hacemos uso de que, para todo $t \in [n, n+1]$, tenemos que:

   $$\begin{gathered} |1+t^2| \geqslant 1+t^2 \geqslant 1+n^2 \geqslant n^2 \\ \left|e^{\frac{z^3}{1+t}}\right| = e^{\frac{\operatorname{Re}(z^3)}{1+t}} \leqslant e^{\frac{\operatorname{Re}(z^3)}{n+1}} \leqslant e^{\frac{\operatorname{Re}(z^3)}{n}} \end{gathered}$$

   Por ser $K$ compacto y Re continua, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que:

   $$M = \max\left\{\operatorname{Re}(z^3) : z \in K\right\}.$$

Por tanto, para todo $z \in K$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$|f_n(z)| \leqslant \frac{e^{\frac{M}{n}}}{n^2} \leqslant \frac{e^{\frac{M}{1}}}{n^2} = e^M \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Como dicha serie es convergente, por el Test de Weierstrass, tenemos que la serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en $K$.

Por el Teorema de Convergencia de Weierstrass, tenemos que la suma de la serie de funciones es una función holomorfa en $\mathbb{C}$.

**Ejercicio 3** (2.5 puntos)**.** Probar que no hay más funciones enteras e inyectivas que los polinomios de grado uno.

Sea $f$ una función entera e inyectiva. Supongamos que $f$ no es polinómica. Entonces, fijado $R \in \mathbb{R}^+$, por el Corolario del Teorema de Casorati:

$$\overline{f(\mathbb{C} \setminus D(0,R))} = \mathbb{C}.$$

Por otro lado, como $\in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ no es constante, por el Teorema de la Aplicación Abierta, tenemos que $f(D(0,R))$ es un abierto. Como el conjunto $f(\mathbb{C} \setminus D(0,R))$ es denso en $\mathbb{C}$, interseca a todos los abiertos no vacíos de $\mathbb{C}$, y por tanto, también interseca a $f(D(0,R))$. Por tanto, existe $w_0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$w_0 \in f(\mathbb{C} \setminus D(0,R)) \cap f(D(0,R)) \neq \emptyset.$$

Por tanto, existe $z_1 \in \mathbb{C} \setminus D(0,R)$ y $z_2 \in D(0,R)$ tales que $f(z_1) = f(z_2) = w_0$. Como $|z_1| > R$ y $|z_2| < R$, tenemos que $z_1 \neq z_2$. Por tanto, $f$ no es inyectiva, lo cual contradice la hipótesis. Por tanto, $f$ es un polinomio.

Supongamos ahora que $f$ es un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

donde $a_n \neq 0$. Como $f$ es inyectiva, entonces $f$ no es constante, luego $n \geqslant 1$. Por la caracterización de la inyectividad local, tenemos que:

$$0 \neq f'(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por tanto, $f'$ no tiene raíces. Como $f'$ es un polinomio y no tiene raíces, por el recíproco del Teorema Fundamental del Álgebra, tenemos que $f'$ es constante y no nulo, por lo que $f'$ es un polinomio de grado 0. Por tanto, $f$ es un polinomio de grado 1.

**Ejercicio 4** (2.5 puntos)**.** Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $r \in ]0,1[$ se verifica

$$\text{máx}\,\{|f(z)| : |z| = r\} = r^n.$$

Probar que existe $\alpha \in \mathbb{T}$ tal que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in D(0,1)$.

Definimos la función:

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{g}: & D(0,1) \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{f(z)}{z^n} \end{array}$$

Como $\widetilde{g} \in \mathcal{H}(D(0,1) \setminus \{0\})$, por el Teorema de Extensión de Riemman, $\exists g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tal que:

$$g(z) = \widetilde{g}(z) = \frac{f(z)}{z^n} \quad \forall z \in D(0,1) \setminus \{0\}.$$

Fijado ahora $r \in ]0,1[$, consideramos la restricción de $g$ a $\overline{D}(0,r)$. Como $g$ es continua en dicho conjunto y holomorfa en su interior, por el Principio del Módulo Máximo, tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{máx}\,\{|g(z)| : |z| \leqslant r\} = \text{máx}\,\{|g(z)| : |z| = r\} = \text{máx}\left\{\left|\frac{f(z)}{z^n}\right| : |z| = r\right\} = \\ = \text{máx}\left\{\frac{|f(z)|}{r^n} : |z| = r\right\} = \frac{1}{r^n}\,\text{máx}\,\{|f(z)| : |z| = r\} = 1. \end{aligned}$$

Como esta expresión es válida para todo $r \in ]0,1[$, tenemos que:

$$\text{máx}\,\{|g(z)| : |z| < 1\} = 1.$$

Sea ahora $r \in ]0,1[$, y consideramos $z_r \in C(0,r)^*$ tal que:

$$|g(z_r)| = \text{máx}\,\{|g(z)| : |z| = r\} = 1.$$

Por tanto, tenemos que $z_r \in D(0,1)$ y:

$$1 = |g(z_r)| \geqslant |g(z)|\,\forall z \in D(0,1).$$

Por tanto, $z_r$ es un máximo de $g$ en $D(0,1)$, y por el Teorema del Módulo Máximo, tenemos que $g$ es constante. Por tanto, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que:

$$g(z) = \alpha \quad \forall z \in D(0,1).$$

Por tanto, tenemos que:

$$f(z) = g(z)z^n = \alpha z^n \quad \forall z \in D(0,1).$$

Reescribimos por tanto la ecuación dada. Para todo $r \in ]0,1[$, tenemos que:

$$r^n = \text{máx}\,\{|f(z)| : |z| = r\} = \text{máx}\,\{|\alpha z^n| : |z| = r\} = |\alpha| r^n.$$

Despejando, obtenemos $|\alpha| = 1$, por lo que $\alpha \in \mathbb{T}$.