

Topología II

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Topología II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Índice general

1. Relaciones de Ejercicios	5
1.1. Conexión por arcos	5
1.2. El grupo fundamental	12

1. Relaciones de Ejercicios

1.1. Conexión por arcos

Ejercicio 1.1.1. Muestra que cualquier esfera de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ es arcoconexa con la topología usual.

Es decir, queremos ver que \mathbb{S}^n es arcoconexa para $n \geq 1$.
(notemos que $\mathbb{S}^0 = \{x \in \mathbb{R} : \|x\| = 1\} = \{-1, 1\}$ no es un conjunto arcoconexo).

Para ello, sea $n \geq 2$, sabemos que $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ (con $p \in \mathbb{S}^n$) es homeomorfa a \mathbb{R}^{n-1} , que es un conjunto arcoconexo por ser convexo (es un espacio vectorial). Como la arcoconexión es una propiedad topológica, esta se conserva por homeomorfismo, luego $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ es un conjunto arcoconexo, $\forall p \in \mathbb{S}^n$.

Tomando $N = (0, \dots, 0, 1)$, $S = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{S}^n$, podemos ver \mathbb{S}^n como unión de dos conjuntos arcoconexos:

$$\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \cup (\mathbb{S}^n \setminus \{S\})$$

no disjuntos:

$$(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \cap (\mathbb{S}^n \setminus \{S\}) = \mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}$$

Por lo que \mathbb{S}^n es un conjunto arcoconexo, $\forall n \geq 2$.

Ejercicio 1.1.2. Demuestra que si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de arcoconexos de X tales que todos intersecan a uno de ellos, es decir,

$$A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset, \quad \forall i \in I,$$

entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es arcoconexo.

Sean $x, y \in \bigcup_{i \in I} A_i$, entonces existen $i, j \in I$ de forma que $x \in A_i$ y $y \in A_j$. Como $A_i \cap A_{i_0}, A_j \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, podemos tomar $a \in A_i \cap A_{i_0}$ y $b \in A_j \cap A_{i_0}$.

- A_i es un conjunto arcoconexo con $x, a \in A_i$, por lo que existe un camino, α , que une x con a .
- A_j también es un conjunto arcoconexo con $y, b \in A_j$, por lo que existe un camino, β , que une y con b .
- Además, A_{i_0} es un conjunto arcoconexo con $a, b \in A_{i_0}$, por lo que existe un tercer camino, γ , que une a con b .

De esta forma, podemos tomar:

$$\sigma = \alpha * (\gamma * \tilde{\beta})$$

Que es un camino que une x con y . Como x e y eran arbitrarios, podemos unir cualesquiera dos puntos de $\bigcup_{i \in I} A_i$, por lo que dicho conjunto es arcoconexo.

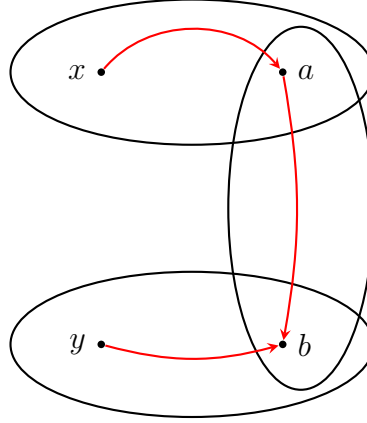


Figura 1.1: Forma de unir dos puntos cualesquiera.

Ejercicio 1.1.3. Sea X un conjunto, $x_0 \in X$, y consideramos la topología (del punto incluido) dada por

$$T = \{U \subset X : x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$$

¿Es (X, T) arcoconexo?

Sí: sea $x \in X$, veamos que la aplicación $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} x & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ x_0 & \text{si } t \in]1/2, 1] \end{cases} \quad \forall t \in [0, 1]$$

es continua. Sea $U \in T$:

- Si $U = \emptyset$, entonces $\alpha^{-1}(U) = \emptyset \in \mathcal{T}_u|_{[0,1]}$.
- Si $x_0 \in U$ y $x \notin U$, entonces $\alpha^{-1}(U) =]1/2, 1] \in \mathcal{T}_u|_{[0,1]}$.
- Si $x_0, x \in U$, entonces $\alpha^{-1}(U) = [0, 1] \in \mathcal{T}_u|_{[0,1]}$.

Como la preimagen de cualquier conjunto abierto es abierta, tenemos que α es continua, luego es un arco que une x con x_0 .

Ahora, si $x, y \in X$, tenemos que existen $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ de forma que α une x con x_0 y β une y con x_0 ; por lo que $\alpha * \tilde{\beta}$ es un arco que une x con y . Como x e y eran arbitrarios, concluimos que X es arcoconexo.

Ejercicio 1.1.4. Demuestra que en \mathbb{R}^n con la topología usual, todo abierto conexo es arcoconexo. ¿Es cierto que todo cerrado conexo de \mathbb{R}^n es arcoconexo?

En teoría vimos que:

$$\text{Un conjunto es arcoconexo} \iff \begin{cases} \text{Es conexo} \\ \text{Todo punto admite un entorno arcoconexo} \end{cases}$$

Sea U un abierto conexo de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, falta ver que todo punto suyo admite un entorno arcoconexo en la topología inducida en U para ver que U es arcoconexo. Para ello, sea $x \in U$, como U es abierto existe $r \in \mathbb{R}^+$ de forma que $B(x, r) \subset U$. $B(x, r)$ es un conjunto arcoconexo por ser convexo, luego es un entorno arcoconexo de x en U . Como x era un punto arbitrario de U , todo punto suyo admite un entorno arcoconexo, y como U era conexo, tenemos que U es arcoconexo.

Ahora, no es cierto que todo cerrado conexo de \mathbb{R}^n es arcoconexo, ya que si consideramos $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Tenemos que

$$C = \overline{Gr(f)} = \overline{\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^+\}} = Gr(f) \cup (\{0\} \times [-1, 1])$$

es un conjunto cerrado y conexo (se vio en Topología I) pero que no es arcoconexo, puede probarse por un razonamiento similar a un ejemplo visto en teoría.

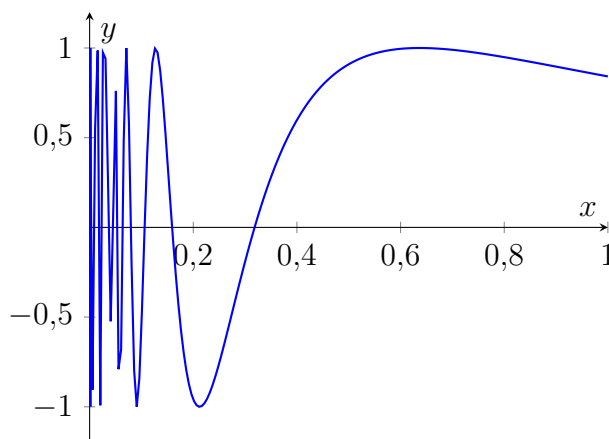


Figura 1.2: Dibujo de la adherencia de la gráfica de $f(x)$.

Ejercicio 1.1.5. Prueba que la componente arcoconexa de un punto x_0 está contenida en la componente conexa de x_0 .

Sea (X, T) un espacio topológico, $x_0 \in X$ y C la componente arcoconexa de x_0 en X , en particular tenemos que C es un conjunto arcoconexo, luego es conexo, por lo que está contenida en la componente conexa de x , al ser esta el mayor conjunto conexo que contiene a x .

Ejercicio 1.1.6. En \mathbb{R} con la topología de Sorgenfrey, esto es, la topología que tiene como base

$$\mathcal{B}_S = \{[a, b) \subset \mathbb{R} : a < b\},$$

determina sus componentes arcoconexas.

En Topología I vimos que las componentes conexas de la topología de Sorgenfrey eran los conjuntos de puntos unitarios $\{x\}$, ya que si tenemos un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ con al menos dos puntos distintos x e y (suponemos $x < y$), entonces en la topología inducida en A podemos considerar los abiertos:

$$U = [-\infty, y) \cap A, \quad V = [y, +\infty) \cap A$$

de forma que $U, V \neq \emptyset$, $U \cup V = A$ y $U \cap V = \emptyset$, por lo que A (cualquier conjunto con al menos dos puntos distintos) es desconexo, luego las componentes conexas han de ser los conjuntos unitarios, ya que los conjuntos unitarios son conexos en cualquier topología.

Como las componentes arcoconexas se encuentran contenidas en las componentes conexas, no queda más salida que las componentes arcoconexas de la topología de Sorgenfrey sean los conjuntos unitarios.

Ejercicio 1.1.7. Sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo entre espacios topológicos. Demuestra que $A \subset X$ es una componente arcoconexa de X si y solo si $f(A)$ es una componente arcoconexa de Y . Deduce que el número de componentes arcoconexas es invariante por homeomorfismos.

Sea $A \subset X$ una componente arcoconexa de X , veamos que $f(A)$ es una componente arcoconexa de Y . Para ello, por reducción al absurdo, si $f(A)$ no fuera una componente arcoconexa de Y podría ser por dos razones:

- $f(A)$ no es un conjunto arcoconexo, algo que llevaría a una contradicción, ya que se vio que la imagen por una función continua de un conjunto arcoconexo era arcoconexa.
- Porque existe $B \subset Y$ un conjunto arcoconexo distinto de $f(A)$ de forma que $f(A) \subset B \subset Y$. En dicho caso, si aplicamos f^{-1} en la anterior inclusión tenemos que:

$$f^{-1}(f(A)) = A \subset f^{-1}(B) \subset X$$

Por lo que tenemos $f^{-1}(B)$, un conjunto arcoconexo¹ distinto de A que contiene a A , luego A no era una componentes arcoconexa de X , contradicción.

En definitiva, si $A \subset X$ es una componente arcoconexa entonces $f(A)$ también lo es de Y . Ahora, si $f(A)$ es una componente arcoconexa de Y , basta aplicar que f^{-1} también es un homeomorfismo para concluir que $f^{-1}(f(A)) = A$ es una componente arcoconexa de X .

Sea Z un espacio topológico, notaremos en este ejercicio:

$$\Gamma_Z = \{U \subset Z : U \text{ es una componente arcoconexa de } Z\}$$

¹por ser imagen por una función continua de un conjunto arcoconexo.

Recuperando el homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$, definimos

$$\begin{aligned} \Phi : \Gamma_X &\longrightarrow \Gamma_Y \\ U &\longmapsto f(U) \end{aligned}$$

- Φ está bien definida (es decir, $f(U) \in \Gamma_Y$ para $U \in \Gamma_X$), ya que hemos visto que la imagen de una componente arcoconexa de X es una componente arcoconexa de Y .
- Φ es inyectiva, ya que si $U, V \in \Gamma_X$ con $f(U) = f(V)$, entonces por ser f inyectiva tenemos que $U = V$.
- Φ es sobreyectiva, ya que si $W \in \Gamma_Y$, entonces $f^{-1}(W) \in \Gamma_X$, con:

$$\Phi(f^{-1}(W)) = f(f^{-1}(W)) = W$$

Por ser Φ biyectiva concluimos que $|\Gamma_X| = |\Gamma_Y|$; es decir, el número de componentes arcoconexas es invariante por homeomorfismos.

Ejercicio 1.1.8. En $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ se considera la topología que tiene por base

$$\mathcal{B} = \{]a, b[\times \{0, 1\} : a < b\}.$$

Demuestra que X es arcoconexo. ¿Es X homeomorfo a \mathbb{R} con la topología usual?

Sean $\alpha = (x, a), \beta = (y, b) \in X$, vamos a tratar de crear un arco que una α con β :

- Si $a = b$, entonces $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ dada por:

$$\gamma(t) = ((1-t)x + ty, a) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Es una aplicación continua, ya que si tomamos $B =]a, b[\times \{0, 1\} \in \mathcal{B}$, tenemos:

$$\gamma^{-1}(B) = \gamma^{-1}(]a, b[\times \{0\}) \text{ abierto de } [0, 1]$$

Ya que el conjunto $]a, b[\times \{0\}$ es un abierto para la topología usual y α es una aplicación continua para la topología usual.

- Si $\alpha = (0, 0)$ y $\beta = (0, 1)$, entonces si tomamos $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta & \text{si } 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$$

tenemos que γ es continua, ya que si $B =]a, b[\times \{0, 1\} \in \mathcal{B}$, tenemos que:

$$\gamma^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 \notin]a, b[\\ [0, 1] & \text{si } 0 \in]a, b[\end{cases}$$

- Una vez discutidos dichos casos, suponemos ahora que $\alpha = (x, 0)$ y $\beta = (y, 1)$ (en caso contrario, sustituimos los papeles de α y β), en cuyo caso:
 - Sabemos de la existencia de un arco γ que une α con $(0, 0)$.

- Sabemos de la existencia de un arco τ que une $(0, 0)$ con $(0, 1)$.
- Sabemos de la existencia de un arco π que une β con $(0, 1)$.

Si consideramos el arco $\gamma * (\tau * \tilde{\pi})$ obtenemos un arco que une α con β .

Por tanto, X es arcoconexo, ya que somos capaces de unir cualesquiera dos puntos distintos de X por un arco.

Ahora, para responder a la pregunta de si $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es homeomorfo a X , la respuesta es que no, y tenemos dos formas de justificar la respuesta:

Opción 1. Sabemos que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es T_2 por ser un espacio topológico metrizable, mientras que podemos probar que X no es T_2 , ya que no existen ningún par de abiertos disjuntos uno conteniendo a $(0, 0)$ y otro conteniendo a $(0, 1)$, puesto que si U es un abierto de X que contiene a $(0, 0)$, entonces como \mathcal{B} es una base, existen $a, b \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$(0, 0) \in]a, b[\times \{0, 1\} \subset U$$

Sin embargo, tendríamos entonces que $(0, 1) \in]a, b[\times \{0, 1\}$, de donde $(0, 1) \in U$, por lo que X no es T_2 y como ser T_2 es una propiedad topológica, dichos espacios no pueden ser homeomorfos.

Opción 2. Otra forma sería suponer que son homeomorfos, con lo que existe un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \rightarrow X$. Sea $p \in \mathbb{R}$, resulta entonces que $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ es homeomorfo a $X \setminus \{(p, 0)\}$, pero:

- $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ no es arcoconexo.
- $X \setminus \{(p, 0)\}$ sí es arcoconexo, ya que podemos hacer que cualquier curva “salte” a $(p, 1)$ sin perder su continuidad, con lo que podemos seguir conectando dos puntos cualesquiera.

Ejercicio 1.1.9. En \mathbb{R}^3 con la topología usual, calcula las componentes arcoconexas de

$$X = \{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1\}$$

Notemos que como $xyz = 1$, ninguno de ellos puede ser igual a 0, por lo que:

$$X = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{xy}, \quad xy \neq 0 \right\}$$

Si tomamos:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$$

y definimos $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y) = \frac{1}{xy} \quad \forall (x, y) \in \Gamma$$

Tenemos que $X = Gr(f)$. Por tanto, definiendo $h : \Gamma \rightarrow X$ por:

$$h(x, y) = (x, y, f(x, y)) \quad \forall (x, y) \in \Gamma$$

Obtenemos (como vimos en Topología I) un homeomorfismo entre Γ y X . Como Γ tiene 4 componentes arcoconexas:

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-, \quad \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-, \quad \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$$

y las componentes arcoconexas se convierten por homeomorfismos tal y como acabamos de ver en el ejercicio 7, tenemos que:

$$h(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+), \quad h(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-), \quad h(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-), \quad h(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+)$$

son las componentes arcoconexas de X .

Ejercicio 1.1.10. En \mathbb{R}^2 con la topología usual consideremos las rectas horizontales $A_n = \mathbb{R} \times \{1/n\}$, $B_n = \mathbb{R} \times \{-1/n\}$ y el eje de ordenadas menos el origen, esto es, $C = \{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Calcula las componentes conexas y arcoconexas de

$$X = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \cup C \cup \{(1, 0)\}.$$

1.2. El grupo fundamental

Ejercicio 1.2.1. Prueba que en un espacio topológico simplemente conexo X , dos arcos cualesquiera $\alpha, \beta \in \Omega(X, x, y)$ son homotópicos por arcos.

Sean $\alpha, \beta \in \Omega(X, x, y)$, tenemos que $\alpha * \tilde{\beta}$ es un lazo basado en x , y por ser X simplemente conexo tenemos que $[\alpha * \tilde{\beta}] = [\varepsilon_x]$, de donde:

$$[\alpha] * [\tilde{\beta}] = [\alpha * \tilde{\beta}] = [\varepsilon_x] \implies [\alpha] = [\beta]$$

Ejercicio 1.2.2. Sean X un subconjunto de \mathbb{R}^n y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación. Demuestra que si f se puede extender a una aplicación continua $F : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$, entonces f_* es el homomorfismo trivial, es decir, el homomorfismo que lleva todo elemento en el neutro.

Como F es una extensión de f , tenemos que $f \circ i = F$, es decir:

$$\begin{array}{ccc} X & \xhookrightarrow{i} & \mathbb{R}^n \xrightarrow{F} Y \\ & \searrow f & \nearrow \end{array}$$

Y como cada una de ellas es continua (f es continua por ser $f = F|_X$), podemos inducir el diagrama a grupos fundamentales, obteniendo para cada $x_0 \in X$:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(X, x_0) & \xhookrightarrow{i_*} & \pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) & \xrightarrow{F_*} & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ & \searrow f_* & & \nearrow & \end{array}$$

de donde:

$$f_*([\alpha]_X) = F_*(i_*([\alpha]_X)) = F_*([\alpha]_{\mathbb{R}^n}) \stackrel{(*)}{=} F_*([\varepsilon_{x_0}]_{\mathbb{R}^n}) = [\varepsilon_{f(x_0)}]_Y \quad \forall [\alpha]_X \in \pi_1(X, x_0)$$

donde en $(*)$ hemos usado que \mathbb{R}^n es simplemente conexo.

Ejercicio 1.2.3. Se dice que un grupo G con operación \cdot es un grupo topológico si G tiene una topología de forma que las aplicaciones producto e inversión

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y \\ \\ \text{ : } G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

son continuas. Sea e el elemento neutro en G :

- a) Dados $\alpha, \beta \in \Omega(G, e)$, se define $\alpha \cdot \beta : [0, 1] \rightarrow G$ como $(\alpha \cdot \beta)(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t)$. Demuestra que $\alpha \cdot \beta \in \Omega(G, e)$.

Hemos de probar que $\alpha \cdot \beta$ es un lazo basado en e . Para ello:

- $\alpha \cdot \beta$ es continua, puesto que si consideramos:

$$\begin{aligned}\Phi : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi : [0, 1] &\longrightarrow G \times G \\ t &\longmapsto (\alpha(t), \beta(t))\end{aligned}$$

Tenemos que $\alpha \cdot \beta = \Phi \circ \Psi$:

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t) = \Phi(\alpha(t), \beta(t)) = \Phi(\Psi(t)) \quad \forall t \in [0, 1]$$

con Φ continua por hipótesis y Ψ continua por ser $\Psi = (\alpha, \beta)$, con sus dos componentes funciones continuas, por ser arcos.

- Observemos que:

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot \beta)(0) &= \alpha(0) \cdot \beta(0) = e \cdot e = e \\ (\alpha \cdot \beta)(1) &= \alpha(1) \cdot \beta(1) = e \cdot e = e\end{aligned}$$

Con lo que $\alpha \cdot \beta \in \Omega(G, e)$.

- b) Comprueba que $(\alpha * \varepsilon_e) \cdot (\varepsilon_e * \beta) = \alpha * \beta$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Omega(G, e)$.

Sean $\alpha, \beta \in \Omega(G, e)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}((\alpha * \varepsilon_e) \cdot (\varepsilon_e * \beta))(t) &= (\alpha * \varepsilon_e)(t) \cdot (\varepsilon_e * \beta)(t) \\ &= \begin{cases} \alpha(2t) \cdot \varepsilon_e(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \varepsilon_e(2t-1) \cdot \beta(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t) \cdot e & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ e \cdot \beta(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= (\alpha * \beta)(t) \quad \forall t \in [0, 1]\end{aligned}$$

- c) Sean $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e)$. Prueba que la operación $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$ está bien definida.

Sean $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma' \in \Omega(G, e)$ de forma que:

$$[\alpha] = [\alpha'], \quad [\gamma] = [\gamma'] \quad (1.1)$$

hemos de probar que $[\alpha \cdot \gamma] = [\alpha' \cdot \gamma']$. De las igualdades (1.1) sabemos que existen $H_1, H_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ aplicaciones continuas con:

$$\begin{aligned}H_1(s, 0) &= \alpha(s), & H_1(s, 1) &= \alpha'(s), & H_1(0, t) &= e = H_1(1, t) \\ H_2(s, 0) &= \gamma(s), & H_2(s, 1) &= \gamma'(s), & H_2(0, t) &= e = H_2(1, t)\end{aligned}$$

Si definimos $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ dada por:

$$H(s, t) = H_1(s, t) \cdot H_2(s, t) \quad \forall (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

tenemos que H es continua, ya que podemos verla como $H = \Phi \circ (H_1, H_2)$, al igual que hicimos en el apartado a), así como que:

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= H_1(s, 0) \cdot H_2(s, 0) = \alpha(s) \cdot \gamma(s) = (\alpha \cdot \gamma)(s) \\ H(s, 1) &= H_1(s, 1) \cdot H_2(s, 1) = \alpha'(s) \cdot \gamma'(s) = (\alpha' \cdot \gamma')(s) \\ H(0, t) &= H_1(0, t) \cdot H_2(0, t) = e \cdot e = e = e \cdot e = H_1(1, t) \cdot H_2(1, t) = H(1, t) \end{aligned}$$

Con lo que H es una homotopía, lo que nos dice que $[\alpha \cdot \gamma] = [\alpha' \cdot \gamma']$, luego la operación está bien definida.

d) Muestra que $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha] * [\beta]$, para cada $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e)$.

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \varepsilon_e] \cdot [\varepsilon_e * \beta] = [(\alpha * \varepsilon_e) \cdot (\varepsilon_e * \beta)] \stackrel{b)}{=} [\alpha * \beta] = [\alpha] * [\beta]$$

e) Demuestra que $\pi_1(G, e)$ es abeliano.

Sean $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} [\alpha] * [\beta] &= [\alpha * \beta] = [(\alpha * \varepsilon_e) \cdot (\varepsilon_e * \beta)] = [\alpha * \varepsilon_e] \cdot [\varepsilon_e * \beta] = [\varepsilon_e * \alpha] \cdot [\beta * \varepsilon_e] \\ &= \left[\begin{cases} e \cdot \beta(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \alpha(2t-1) \cdot e & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \right] = [\beta * \alpha] = [\beta] * [\alpha] \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.4. Sean X un espacio topológico y $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ aplicaciones continuas con $g(x) \neq -f(x)$ para cada $x \in X$. Prueba que f y g son homotópicas. Deduce que si $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ es continua y carece de puntos fijos, entonces f es homotópica a $-Id_{\mathbb{S}^n}$.

Definimos $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ dada por:

$$H(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|_2} \quad \forall (x, t) \in X \times [0, 1]$$

- H está bien definida (es decir, el denominador no se anula), ya que si tenemos $x \in X$ y $t \in [0, 1]$ de forma que $(1-t)f(x) + tg(x) = 0$, entonces:

$$(1-t)f(x) = -tg(x)$$

de donde:

$$1-t = (1-t)\|f(x)\|_2 = \|(1-t)f(x)\|_2 = \|-tg(x)\|_2 = t\|g(x)\|_2 = t$$

por lo que ha de ser $t = 1/2$. Sin embargo, la condición $g(x) \neq -f(x)$ implica que $f(x) \neq -1/2g(x)$, por lo que es imposible que el denominador se anule.

- H es continua.
- Observamos que:

$$H(x, 0) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|_2} = f(x) \quad H(x, 1) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|_2} = g(x)$$

con lo que H es una homotopía entre f y g .

Sea ahora $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ una aplicación sin puntos fijos, entonces:

$$f(x) \neq x = -(-x) = -(-Id_{\mathbb{S}^n})(x) \quad \forall x \in \mathbb{S}^n$$

y si aplicamos la parte del ejercicio que acabamos de probar, obtenemos que f es homotópica a $-Id_{\mathbb{S}^n}$.

Ejercicio 1.2.5. Sea $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora y $b \in B$. Demuestra que el subespacio topológico $p^{-1}(\{b\}) \subset R$ tiene la topología discreta.

Sea $X = p^{-1}(\{b\})$, como p es una aplicación recubridora, podemos tomar un abierto O_b que contiene a b y está regularmente recubierto, con lo que existen $\{A_i\}_{i \in I}$ conjuntos abiertos de R de forma que:

$$p^{-1}(O_b) = \bigsqcup_{i \in I} A_i$$

Sea $r \in X \subseteq p^{-1}(O_b)$, tenemos entonces que existe un índice $j \in I$ de forma que $r \in A_j$. Veamos que A_j no puede contener dos elementos distintos de X , pues si $r, r' \in A_j \cap X$, tenemos que:

$$p|_{A_j}(r) = b = p|_{A_j}(r')$$

y como $p|_{A_j} : A_j \rightarrow O_b$ es un homeomorfismo por ser p una aplicación recubridora, tenemos en particular que es inyectiva, luego $r = r'$. En definitiva, hemos probado que si $r \in X$, entonces existe un índice $j \in I$ de forma que $\{r\} = X \cap A_j$, con A_j un abierto de R , por lo que $\{r\}$ es un abierto de X , $\forall r \in X$, con lo que X tiene la topología discreta.

Ejercicio 1.2.6. Demuestra que toda aplicación recubridora es una aplicación abierta.

Sea $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora y U un abierto de R , queremos probar que $p(U)$ es un abierto de B . Para ello, sea $y \in p(U)$, existirá $x \in R$ de forma que $p(x) = y$. Como p es una aplicación recubridora, existirá O_y abierto de B con $y \in O_y$ y de forma que O_y está regularmente recubierto, es decir, existe una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de abiertos disjuntos de R de forma que:

$$x \in p^{-1}(O_y) = \bigsqcup_{i \in I} A_i$$

con lo que tenemos un cierto índice $j \in I$ de modo que $x \in A_j$, luego $x \in U \cap A_j$, siendo $U \cap A_j$ un conjunto abierto, como intersección de conjuntos abiertos. Como $p|_{A_j} : A_j \rightarrow O_y$ es un homeomorfismo por ser p una aplicación recubridora, en particular $p|_{A_j}$ es abierta, luego $p|_{A_j}(U \cap A_j)$ es un abierto contenido en $p(U) \cap O_y$, que contiene a y . Como este procedimiento podemos repetirlo para todo $y \in p(U)$, concluimos que $p(U)$ es un abierto de B .

Ejercicio 1.2.7. Sea $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, con B conexo. Demuestra que si $p^{-1}(b_0)$ tiene k elementos para algún $b_0 \in B$, entonces $p^{-1}(b)$ tiene k elementos para todo $b \in B$. En tal caso, se dice que R es un recubridor de k hojas de B .

Sea:

$$A = \{x \in B : p^{-1}(x) \text{ tiene } k \text{ elementos}\}$$

Como $b_0 \in A$, tenemos que $A \neq \emptyset$. Veamos que A es abierto y cerrado:

- Si $a \in A$, existe un abierto regularmente recubierto O_a de B que contiene a a , con lo que existe una familia de abiertos $\{A_i\}_{i \in I}$ de R de forma que:

$$p^{-1}(O_a) = \bigsqcup_{i \in I} A_i$$

y tal que $p|_{A_i} : A_i \rightarrow O_a$ es un homeomorfismo, $\forall i \in I$. Para cada $x \in O_a$ podemos construir la aplicación $\Phi_x : I \rightarrow p^{-1}(x)$ de forma que a cada índice i le hace corresponder aquel elemento de A_i cuya imagen por p es x .

- La aplicación Φ_x está bien definida, pues si $i \in I$, como la aplicación $p|_{A_i} : A_i \rightarrow O_a$ es un homeomorfismo, ha de existir un único elemento $y \in A_i$ tal que $p(y) = x$.
- Φ_x es inyectiva, pues si $i, j \in I$ con $\Phi_x(i) = \Phi_x(j)$, entonces tenemos $y \in A_i \cap A_j$ de forma que $p(y) = x$. Como la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ es disjunta, ha de ser $i = j$.
- Φ_x es sobreyectiva, pues si:

$$y \in p^{-1}(x) \subseteq p^{-1}(O_a) = \bigsqcup_{i \in I} A_i$$

entonces ha de existir $y \in A_i$ para cierto índice i de forma que $p(y) = x$, con lo que $\Phi_x(i) = y$.

En definitiva, Φ_x es biyectiva para cada $x \in O_a$. Como en particular $p^{-1}(a)$ tiene k elementos, tendremos entonces que I tiene k elementos, de donde $p^{-1}(x)$ tiene k elementos, $\forall x \in O_a$, con lo que $O_a \subseteq A$. De donde deducimos que A es abierto.

- Sea $x \in \overline{A}$, como p es recubridora, existe un abierto regularmente recubierto O_x de B que contiene a x . Como $x \in \overline{A}$, se verifica que $\exists a \in O_x \cap A$. Como O_x está regularmente recubierto, existe una familia de abiertos $\{A_i\}_{i \in I}$ de R de forma que:

$$p^{-1}(O_x) = \bigsqcup_{i \in I} A_i$$

tal que $p|_{A_i} : A_i \rightarrow O_x$ es un homeomorfismo $\forall i \in I$. Al igual que antes, para cada $y \in O_x$ podemos construir la aplicación $\Phi_y : I \rightarrow p^{-1}(y)$ de forma que a cada índice i le hace corresponder aquel elemento de A_i cuya imagen por p es y , obteniendo una aplicación biyectiva. Como $a \in O_x \cap A$, tenemos que $p^{-1}(a)$

tiene k elementos, por lo que I ha de tener k elementos, de donde deducimos que $p^{-1}(y)$ tiene k elementos, para todo $y \in O_x$. En particular, $x \in O_x$, de donde $p^{-1}(x)$ tiene k elementos, es decir, $x \in A$.

Ejercicio 1.2.8. Sean $p_1 : X \rightarrow Y$ y $p_2 : Y \rightarrow Z$ dos aplicaciones recubridoras. Prueba que si $p_2^{-1}(z)$ es finito para todo $z \in Z$, entonces $p_2 \circ p_1 : X \rightarrow Z$ es una aplicación recubridora.

Ejercicio 1.2.9. Consideremos una aplicación recubridora $p : R \rightarrow B$ y la relación de equivalencia \mathcal{R}_p en R dada por

$$r_1 \mathcal{R}_p r_2 \iff p(r_1) = p(r_2)$$

Demuestra que R/\mathcal{R}_p es homeomorfo a B .

Sabemos que p es continua y sobreyectiva. Además, el Ejercicio 1.2.6 nos dice que p es abierta, por lo que p es una identificación, de donde si consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \hat{p} : R/\mathcal{R}_p &\longrightarrow B \\ [r] &\longmapsto p(r) \end{aligned}$$

tenemos, por la teoría desarrollada en Topología I, que \hat{p} está bien definida y es un homeomorfismo, con lo que R/\mathcal{R}_p es homeomorfo a B .

Ejercicio 1.2.10. Sea $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, con R arcoconexo y B simplemente conexo. Prueba que p es un homeomorfismo.

Sabemos ya que p es continua, sobreyectiva y (por el Ejercicio 1.2.6) abierta, con lo que bastará probar que p es inyectiva. Para ello, sean $x, y \in R$ con $p(x) = z = p(y)$, como R es arcoconexo existirá un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow R$ que une x con y , con lo que $p \circ \alpha$ es un arco uniendo $p(x)$ con $p(y)$, es decir, un lazo basado en z . Como B es simplemente conexo, ha de ser $[p \circ \alpha] = [\varepsilon_z]$.

Sea ahora $\beta : [0, 1] \rightarrow R$ un levantamiento de ε_z , es decir, $p \circ \beta = \varepsilon_z$, queremos ver que β es un lazo trivial. Para ello, si existiera $t \in [0, 1]$ de forma que $\beta(t) \notin p^{-1}(z)$, entonces $p(\beta(t)) \neq z = \varepsilon_z(t)$, con lo que β no sería un levantamiento de ε_z , por lo que ha de ser $\beta([0, 1]) \subseteq p^{-1}(z)$. Queremos ver ahora que β es constante:

Opción 1. β es una aplicación de un conjunto conexo en $p^{-1}(z)$, que en el Ejercicio 1.2.5 vimos que tiene la topología discreta, con lo que β ha de ser constante.

Opción 2. Como p es una aplicación recubridora, z estará contenida en cierto abierto O_z de B regularmente recubierto, con lo que existe una familia de abiertos $\{A_i\}_{i \in I}$ de forma que:

$$p^{-1}(z) \in p^{-1}(O_z) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

con $p|_{A_i} : A_i \rightarrow O_z$ homeomorfismo $\forall i \in I$. Supongamos ahora que $\exists s, t \in [0, 1]$ de forma que $\beta(s) \neq \beta(t)$. Como $\beta(s) \in p^{-1}(z)$, supongamos que $\beta(s) \in A_i$, con lo que tomando:

$$U = A_i \cap \beta([0, 1]), \quad V = \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} (A_j \cap \beta([0, 1]))$$

Tenemos que $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = \beta([0, 1])$ y que U y V son abiertos de $\beta([0, 1])$, por lo que $\beta([0, 1])$ no es conexo, lo que contradice que β es continua y $[0, 1]$ es conexo, contradicción que viene de suponer que existen $s, t \in [0, 1]$ con $\beta(s) \neq \beta(t)$. En consecuencia, β es constante.

Ahora, si fijamos x como preimagen de z , sabemos que existen respectivamente únicos levantamientos de $p \circ \alpha$ y de ε_z que empiezan en x . Como $\alpha(0) = x$ y α es un levantamiento de $p \circ \alpha$, α es el levantamiento que buscamos para $p \circ \alpha$. Si ahora tomamos β aquel levantamiento de ε_z con $\beta(0) = x$, hemos probado anteriormente que β ha de ser constante, es decir, $\beta = \varepsilon_x$. Como además teníamos (por un resultado visto en teoría) que $[p \circ \alpha] = [\varepsilon_z]$, tendremos pues que $[\alpha] = [\varepsilon_x]$, de donde resulta que α ha de ser un lazo basado en x , por lo que $y = x$, de donde p es inyectiva, por lo que podemos concluir que p es un homeomorfismo.

Ejercicio 1.2.11. Dado un espacio topológico Y , prueba que estas afirmaciones son equivalentes:

- a) Y es contráctil.
- b) Para cualesquiera $f, g : X \rightarrow Y$ continuas se tiene que f y g son homotópicas.
- c) Cada aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ es nulhomótota.
- d) La identidad Id_Y es nulhomótota.
- e) Cada conjunto $\{y_0\}$ con $y_0 \in Y$ es un retracto de deformación de Y .

Probamos las implicaciones:

- a) \implies b) Si Y es contráctil, entonces existen $y_0 \in Y$ y una aplicación continua $H : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ de forma que:

$$H(y, 0) = y, \quad H(y, 1) = y_0 \quad \forall y \in Y$$

Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas, definimos $H' : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ dada por:

$$H'(x, t) = \begin{cases} H(f(x), 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H(g(x), 2(1-t)) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Y tenemos que:

- H' está bien definida en $1/2$, ya que:

$$H\left(f(x), 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = H(f(x), 1) = y_0 = H(g(x), 1) = H\left(g(x), 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

- H' es continua en $X \times [0, 1/2]$ y en $X \times [1/2, 1]$, como composición de funciones continuas. Como ambos son conjuntos cerrados, podemos aplicar el Lema del Pegado, para obtener que H' es continua.
- H' es una homotopía entre f y g , puesto que:

$$H'(x, 0) = H(f(x), 0) = f(x), \quad H'(x, 1) = H(g(x), 0) = g(x) \quad \forall x \in X$$

$b) \implies c)$ Para ver que cada aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ es nulhomótota (es decir, que es homotópica a una aplicación constante), como cualquier aplicación constante es continua tendremos que es homotópica a f .

$c) \implies d)$ Id_Y es continua, luego nulhomótota.

$d) \implies a)$ Como Id_Y es nulhomótota, existen $y_0 \in Y$ y $H : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ de forma que:

$$H(y, 0) = Id_Y(y) = y, \quad H(y, 1) = y_0, \quad \forall y \in Y$$

Por lo que $\{y_0\}$ es un retracto de deformación de Y , luego Y es contráctil.

Una vez tenemos que $a)$, $b)$, $c)$ y $d)$ son equivalentes:

$b) \implies e)$ Dado $y_0 \in Y$, consideramos $Id_Y : Y \rightarrow Y$ y la aplicación $f_0 : Y \rightarrow Y$ constantemente igual a y_0 , ambas continuas, luego son homotópicas, es decir, existe $H : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ de forma que:

$$H(y, 0) = Id_Y(y) = y, \quad H(y, 1) = f_0(y) = y_0 \quad \forall y \in Y$$

En otras palabras, tenemos que $\{y_0\}$ es retracto de deformación de Y .

$e) \implies a)$ Trivial.

Ejercicio 1.2.12. Prueba que $X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup ((K \cup \{0\}) \times [0, 1]) \subset \mathbb{R}^2$ es contráctil, donde $K = \{\frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}\}$.

Tenemos el conjunto de la Figura 1.3

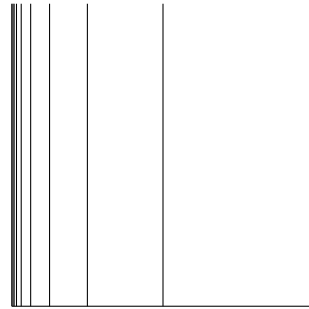


Figura 1.3: Conjunto X .

Si consideramos la aplicación $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ dada por:

$$H((x, y), t) = \begin{cases} (x, (1 - t/2)y) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (2(1 - t)x, 0) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Tenemos que:

■ H está bien definida, pues:

$$\left(x, \left(1 - \frac{1/2}{2}\right)y\right) = (x, (1 - 1)y) = (x, 0) = \left(2\left(1 - \frac{1}{2}\right)x, 0\right)$$

- H es claramente continua en $X \times [0, 1/2]$ y en $X \times [1/2, 1]$, por lo que por el Lema del Pegado obtenemos que H es continua.
- H cumple que:

$$H((x, y), 0) = (x, y), \quad H((x, y), 1) = (0, 0) \quad \forall (x, y) \in X$$

Por lo que hemos probado que $\{(0, 0)\}$ es retracto de deformación de X , luego X es contráctil.

Ejercicio 1.2.13. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua. Definimos el conjunto:

$$S_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (f(z))^2\}$$

- a) Estudia el conjunto $S_f \cap \{z = z_0\}$ con $z_0 \in \mathbb{R}$.

Fijado $z_0 \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$S_f \cap \{z = z_0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (f(z_0))^2\}$$

que se trata de una circunferencia de centro $(0, 0, z_0)$ y de radio $f(z_0)$. Podemos interpretar S_f como el sólido de revolución obtenido a partir de la gráfica de f .

- b) Demuestra que cualesquiera dos conjuntos S_f son homeomorfos entre sí.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua, consideramos $\Phi : S_f \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dada por:

$$\Phi(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right)$$

Así como la aplicación $\Psi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S_f$ dada por:

$$\Psi(x, y, z) = (f(z)x, f(z)y, z)$$

Es claro que Φ y Ψ son continuas, así como que:

$$\begin{aligned} \Phi(\Psi(x, y, z)) &= \Phi(f(z)x, f(z)y, z) = \\ &= \left(\frac{f(z)x}{\sqrt{(f(z)x)^2 + (f(z)y)^2}}, \frac{f(z)y}{\sqrt{(f(z)x)^2 + (f(z)y)^2}}, z \right) \\ &= \left(\frac{f(z)x}{\sqrt{(f(z))^2(x^2 + y^2)}}, \frac{f(z)y}{\sqrt{(f(z))^2(x^2 + y^2)}}, z \right) = \left(\frac{f(z)x}{\sqrt{(f(z))^2}}, \frac{f(z)y}{\sqrt{(f(z))^2}}, z \right) \\ &= \left(\frac{f(z)x}{f(z)}, \frac{f(z)y}{f(z)}, z \right) = (x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ \Psi(\Phi(x, y, z)) &= \Psi \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right) = \left(\frac{f(z)x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{f(z)y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right) = (x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in S_f \end{aligned}$$

Por lo que Φ es un homeomorfismo.

c) Calcula el grupo fundamental de S_f .

Dado $(x, y, z) \in S_f$, el homeomorfismo Φ anterior induce un isomorfismo:

$$\Phi_* : \pi_1(S_f, (x, y, z)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \Phi(x, y, z))$$

Y como $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \Phi(x, y, z)) \cong \mathbb{Z}$, tenemos que $\pi_1(S_f, (x, y, z)) \cong \mathbb{Z}$.

Ejercicio 1.2.14. Prueba que $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ no es homeomorfo a \mathbb{R}^2 . ¿Son del mismo tipo de homotopía?

Por reducción al absurdo, si $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ fuera homeomorfo a \mathbb{R}^2 , existiría un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$, por lo que la restricción de f $f|_{(\mathbb{R} \times [0, +\infty[) \setminus \{(0,0)\}} : (\mathbb{R} \times [0, +\infty[) \setminus \{(0,0)\}} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{f(0,0)\}$ seguiría siendo un homeomorfismo, que induciría un isomorfismo entre sus grupos fundamentales.

Sin embargo, $(\mathbb{R} \times [0, +\infty[) \setminus \{(0,0)\}}$ es un conjunto convexo, luego es simplemente conexo y $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0,0)\}$ es homeomorfo a \mathbb{S}^1 , que tiene \mathbb{Z} como grupo fundamental, por lo que no pueden ser homeomorfos, contradicción que viene de suponer la que $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ y \mathbb{R}^2 son homeomorfos.

Sí son del mismo tipo de homotopía. Para verlo, veamos que $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ es un retracto de deformación de \mathbb{R}^2 , ya que definiendo $H : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$H((x, y), t) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[\\ (x, (1-t)y) & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 0] \end{cases}$$

Tenemos que:

- H está bien definida, puesto que:

$$(x, 0) = (x, (1-t)0), \quad \forall t \in [0, 1]$$

- H es continua, puesto que es continua en los cerrados $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\times [0, 1]$, $\mathbb{R} \times]-\infty, 0] \times [0, 1]$, luego podemos aplicar el Lema del Pegado.
- Se verifica que:

$$H((x, y), 0) = (x, y), \quad H((x, y), 1) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \quad H((a, b), 1) = (a, b) \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$$

Por lo que $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ es retracto de deformación de \mathbb{R}^2 para $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ dada por $r(x, y) = H((x, y), 1)$, que induce un isomorfismo entre grupos fundamentales $r_* : \pi_1(\mathbb{R}^2, (x, y)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, r(x, y)) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, luego $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ y \mathbb{R}^2 son del mismo tipo de homotopía.

Ejercicio 1.2.15. Sea S un subespacio afín de \mathbb{R}^n de dimensión $k \leq n - 2$. Calcula $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus S)$.

- Para $n = 2$, tenemos que $\dim S = 2 - 2 = 0$, por lo que $S = \{p\}$ para $p \in \mathbb{R}^2$. Como $\mathbb{R}^2 \setminus S \cong \mathbb{S}^1$, tenemos que:

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus S) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

- Para $n = 3$, tenemos que $\dim S = 3 - 2 = 1$, por lo que S es una recta afín, tenemos que para cierto punto $p \in \mathbb{R}^3$ los siguientes espacios topológicos son homeomorfos:

$$\mathbb{R}^3 \setminus S \cong (\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) \times \mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$$

de donde deducimos que:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z} \times \{1\} \cong \mathbb{Z}$$

- Para $n \geq 3$, tenemos que $\dim S = n - 2$, por lo que tenemos que para cierto punto $p \in \mathbb{R}^n$ los siguientes conjuntos son homeomorfos:

$$\mathbb{R}^n \setminus S \cong (\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) \times \mathbb{R}^{n-2} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-2}$$

de donde deducimos que:

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus S) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-2}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{R}^{n-2}) \cong \mathbb{Z} \times \{1\} \cong \mathbb{Z}$$

Ejercicio 1.2.16. Prueba que si X es de Hausdorff y $A \subseteq X$ es un retracto de X , entonces A es cerrado en X . Deduce que una bola abierta en \mathbb{R}^n no es un retracto de \mathbb{R}^n . ¿Lo es una bola cerrada?

Para probar que A es cerrado, veamos que $X \setminus A$ es abierto. Para ello, sea $x \in X \setminus A$, tendremos entonces que $a = r(x) \neq x$. Como X es de Hausdorff, podemos encontrar abiertos U_x, U_a con:

$$x \in U_x, \quad a \in U_a, \quad U_x \cap U_a = \emptyset$$

Si consideramos $W = U_x \cap r^{-1}(U_a)$, tenemos que W es abierto como intersección de dos abiertos, así como que $x \in W$. Si existiera $b \in W \cap A$, tendríamos entonces que $b \in U_x \cap r^{-1}(U_a) \cap A$, por lo que:

$$U_x \ni b = r(b) \in U_a \implies b \in U_x \cap U_a$$

contradicción que viene de suponer que $W \cap A \neq \emptyset$, luego $x \in W \subseteq X \setminus A$, de donde $X \setminus A$ es abierto.

Sea $B(x, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ una bola abierta para ciertos puntos $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^+$, esta no puede ser un retracto de \mathbb{R}^n puesto que no es cerrada, ya que si tomamos como t_n una sucesión de puntos del intervalo $[0, r[$ convergente a r (por ejemplo $r - \frac{1}{n}$), tenemos entonces que $\left\{x + \frac{x}{\|x\|} t_n\right\}$ es una sucesión de puntos de $B(x, r)$:

$$\left\|x + \frac{x}{\|x\|} t_n - x\right\| = \frac{t_n \|x\|}{\|x\|} = t_n < r$$

convergente a $x + r \frac{x}{\|x\|}$, con:

$$\left\|x + r \frac{x}{\|x\|} - x\right\| = \frac{r \|x\|}{\|x\|} = r \implies x + r \frac{x}{\|x\|} \notin B(x, r)$$

Sea ahora $\overline{B}(x, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ una bola cerrada para ciertos puntos $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^+$, podemos construir la aplicación $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{B}(x, r)$ dada por:

$$r(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in \overline{B}(x, r) \\ c(y) & \text{si } y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(x, r) \end{cases}$$

donde $c(y)$ es la aplicación que a cada punto y le hace corresponder aquel punto de la semirrecta con origen en x y que pasa por y con módulo r . En teoría vimos en un ejemplo parecido que la aplicación c era continua, por lo que aplicando el Lema del Pegado vemos que r es continua, así como que:

$$r(y) = y \quad \forall y \in \overline{B}(x, r)$$

por lo que $\overline{B}(x, r)$ es un retracto de \mathbb{R}^n .

Ejercicio 1.2.17. En este ejercicio demostraremos que *un abierto de \mathbb{R}^2 no puede ser homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n si $n \geq 3$* . Supongamos que $f : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo entre abiertos no vacíos $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^2$ con $n \geq 3$.

- Prueba que existen bolas abiertas $B_1 \subset U$ y $B_2, B'_2 \subset V$ (estas últimas con el mismo centro $y_0 \in \mathbb{R}^2$) tales que $\overline{B'_2} \subset f(\overline{B_1}) \subset \overline{B_2}$.
- Si $i : \overline{B'_2} \setminus \{y_0\} \rightarrow \overline{B_2} \setminus \{y_0\}$ es la inclusión, deduce de a) que el homomorfismo inducido en cualquier punto i_* es trivial.
- Prueba que $\overline{B'_2} \setminus \{y_0\}$ es un retracto de deformación de $\overline{B_2} \setminus \{y_0\}$. Concluye que i_* es un isomorfismo no trivial, lo que contradice b).

Ejercicio 1.2.18. Demuestra que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - \arctan(x^2 - y^3) = 2 \\ \cos(x) + \sin(xy^3) + e^x + e^{y^2} + \frac{1}{y} = -5 \end{cases}$$

tiene al menos una solución en \mathbb{R}^2 .

Ejercicio 1.2.19. Sean M una matriz cuadrada real de orden 3 por 3 cuyas entradas son números reales positivos y $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal $f(v) = Mv$. Demuéstrese que:

- El conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$ es homeomorfo al disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$.
- La aplicación $g : A \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $g(v) = \frac{f(v)}{|f(v)|}$ está bien definida y $g(A) \subset A$.
- f tiene un valor propio real y positivo.

Ejercicio 1.2.20. Teorema de Lusternik-Schnirelmann. Demuestra que si \mathbb{S}^2 es la unión de tres subconjuntos cerrados C_1, C_2, C_3 , entonces alguno de ellos contiene dos puntos antípodas. Para ello prueba que la función $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x) = (\text{dist}(x, C_1), \text{dist}(x, C_2))$$

tiene un punto $x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$, donde $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ denota la función distancia en \mathbb{R}^3 .

Sean C_1, C_2, C_3 tres subconjuntos cerrados de \mathbb{S}^2 tales que:

$$C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \mathbb{S}^2$$

definimos la aplicación $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(x) = (\text{dist}(x, C_1), \text{dist}(x, C_2)) \quad \forall x \in \mathbb{S}^2$$

donde:

$$\text{dist}(x, C_i) = \min\{d(x, c) : c \in C_i\} \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

como cada aplicación $x \mapsto \text{dist}(x, C_i)$ es continua, tenemos que la aplicación f es continua, y si aplicamos el Teorema de Borsuk-Ulam tenemos que $\exists x_0 \in \mathbb{S}^2$ de forma que:

$$(\text{dist}(x_0, C_1), \text{dist}(x_0, C_2)) = f(x_0) = f(-x_0) = (\text{dist}(-x_0, C_1), \text{dist}(-x_0, C_2))$$

de donde:

$$\text{dist}(x_0, C_1) = \text{dist}(-x_0, C_1), \quad \text{dist}(x_0, C_2) = \text{dist}(-x_0, C_2)$$

distinguimos casos:

- Si $\text{dist}(x_0, C_1), \text{dist}(x_0, C_2) > 0$, tenemos entonces que tanto x_0 como $-x_0$ están en C_3 .
- Si $\text{dist}(x_0, C_1) = 0$, tenemos que $x_0, -x_0 \in C_1$.
- Si $\text{dist}(x_0, C_2) = 0$, tenemos que $x_0, -x_0 \in C_2$.

Ejercicio 1.2.21. Calcula $\pi_1(X)$ en los siguientes casos:

- a) $X = \mathbb{S}^2 \cup (\mathbb{D} \times \{0\})$.
- b) $X = (\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]) \cup (\mathbb{D} \times \{-1, 1\})$.
- c) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (z + 1)^2, -1 \leq z \leq 0\} \cup (\mathbb{S}^2 \cap \{z \geq 0\})$.
- d) $X = S_1 \cup S_2 \cup L$, donde S_1, S_2 son cerrados disjuntos simplemente conexos de \mathbb{R}^n y $L \subset \mathbb{R}^n$ es un segmento tal que $L \cap S_i = \{x_i\}$, $i = 1, 2$.
- e) $X \subset \mathbb{R}^3$ es la unión de una circunferencia y de una esfera que se tocan en un único punto.
- f) $X = \mathbb{S}^2 \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + (z - 2)^2 = 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + (z + 2)^2 = 1\}$.
- g) $X = S_1 \cup (\mathbb{S}^1 \times \{0\}) \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son, respectivamente, las esferas de radio 1 centradas en el $(0, -2, 0)$ y en el $(0, 2, 0)$.

- h) $X \subset \mathbb{R}^2$ es la unión de las tres circunferencias de radio 1 centradas en los puntos $(-2, 0)$, $(0, 0)$ y $(2, 0)$.
- i) $X = \mathbb{S}^1 \cup [(-1, 0), (1, 0)]$.

Ejercicio 1.2.22. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Sean $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \Omega(X, x_0)$ con $[\alpha_1 * \beta_1] = [\alpha_2 * \beta_2]$. Entonces $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ y $[\beta_1] = [\beta_2]$.

Es falsa, puesto que si consideramos $X = \mathbb{S}^1$, $x_0 = (1, 0)$, el arco:

$$\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Y tomamos:

$$\alpha_1 = \alpha = \beta_2, \quad \alpha_2 = \varepsilon_{x_0} = \beta_1$$

Tenemos que $[\alpha_1] \neq [\alpha_2]$, $[\beta_1] \neq [\beta_2]$ y $[\alpha_1 * \beta_1] = [\alpha_2 * \beta_2]$.

- b) Sean $f : A \rightarrow Y$ una aplicación continua con $A \subset X$ y X simplemente conexo. Si existe $F : X \rightarrow Y$ continua con $F|_A = f$, entonces f_* es trivial.

Es verdadera, como F es una extensión de f , tenemos que $f \circ i = F$, es decir:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xhookrightarrow{i} & X & \xrightarrow{F} & Y \\ & \searrow f & & \nearrow & \end{array}$$

Y como cada una de ellas es continua, podemos inducir el diagrama a grupos fundamentales, obteniendo para cada $x_0 \in A$:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(A, x_0) & \xhookrightarrow{i_*} & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{F_*} & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ & \searrow f_* & & \nearrow & \end{array}$$

de donde:

$$f_*([\alpha]_A) = F_*(i_*([\alpha]_A)) = F_*([\alpha]_X) \stackrel{(*)}{=} F_*([\varepsilon_{x_0}]_X) = [\varepsilon_{f(x_0)}]_Y \quad \forall [\alpha]_A \in \pi_1(A, x_0)$$

donde en $(*)$ hemos usado que X es simplemente conexo.

- c) Si $f : X \rightarrow Y$ es continua y nulhomótopa, entonces f_* es trivial.

Veradera, si $f : X \rightarrow Y$ es continua y nulhomótopa, existe entonces una constante $y_0 \in Y$ de forma que la aplicación constantemente igual a y_0

$$\begin{array}{ccc} c : X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & y_0 \end{array}$$

sea homotópica a f , es decir, existe una aplicación continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ de forma que:

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = c(x) = y_0 \quad \forall x \in X$$

En esta caso, hemos visto en teoría que para cada $x_0 \in X$ existe un isomorfismo $\varphi : \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ & \nearrow f_* & \downarrow \varphi \\ \pi_1(X, x_0) & & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow c_* & \end{array}$$

De donde deducimos que:

$$f_* = \varphi^{-1} \circ c_*$$

Luego si tomamos $\alpha \in \Omega(X, x_0)$, tenemos que:

$$f_*([\alpha]) = \varphi^{-1}(c_*([\alpha])) = \varphi^{-1}([c \circ \alpha]) = \varphi^{-1}([\varepsilon_{y_0}]) = [\varepsilon_{f(x_0)}]$$

de donde deducimos que f_* es trivial.

- d) Si $f : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ es continua y no sobreyectiva, entonces es nulhomótota.
- e) Si X es simplemente conexo y $A \subset X$ un retracto de X , entonces A es simplemente conexo.

Verdadera, puesto que si A es un retracto de X , entonces fijado $x_0 \in A$ la aplicación inclusión $i : A \rightarrow X$ induce un monomorfismo entre grupos fundamentales $i_* : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Como

$$\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$$

ha de ser $\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$.

- f) Si $f : X \rightarrow Y$ es continua e inyectiva con $f(x_0) = y_0$ entonces el homomorfismo $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ es un monomorfismo.

Falsa, puesto que la aplicación inclusión

$$\begin{array}{ccc} i : \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

es continua e inyectiva, y si tomamos $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$, tenemos el homomorfismo $i_* : \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2, x_0)$ que no es inyectivo, puesto que:

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}, \quad \pi_1(\mathbb{R}^2, x_0) \cong \{1\}$$

- g) Sea $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia homotópica y $A \subset X$. La restricción $f|_A : A \rightarrow f(A)$ es una equivalencia homotópica.

- h) \mathbb{S}^1 no tiene ningún retracto de deformación $A \neq \mathbb{S}^1$.
- i) Existe un homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que intercambia las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1$.
- j) Si A es un retracto del disco unidad cerrado de \mathbb{R}^2 , entonces toda aplicación continua $f : A \rightarrow A$ tiene al menos un punto fijo.

Verdadera, si A es un retracto de \mathbb{D} tenemos entonces que existe $r : \mathbb{D} \rightarrow A$ continua de forma que $r(a) = a \quad \forall a \in A$. Sea ahora una aplicación continua $f : A \rightarrow A$, tenemos que la aplicación $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ dada como la siguiente composición de funciones continuas:

$$\mathbb{D} \xrightarrow{r} A \xrightarrow{f} A \xhookrightarrow{i} \mathbb{D}$$

tiene un punto fijo por el Teorema de Brouwer, es decir, existe $x_0 \in \mathbb{D}$ de forma que:

$$x_0 = h(x_0) = i(f(r(x_0))) = f(r(x_0))$$

como f toma valores en A tenemos que $x_0 \in A$, por lo que $r(x_0) = x_0$, con lo que:

$$x_0 = f(r(x_0)) = f(x_0)$$

Por lo que f tiene un punto fijo.