Topología II

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Índice general

1. Relaciones de Ejercicios

1.1. Conexión por arcos

Ejercicio 1.1.1. Muestra que cualquier esfera de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ es arcoconexa con la topología usual.

Es decir, queremos ver que $\mathbb{S}^n$ es arcoconexa para $n \geqslant 1$.
(notemos que $\mathbb{S}^0 = \{x \in \mathbb{R} : \|x\| = 1\} = \{-1, 1\}$ no es un conjunto arcoconexo).

Para ello, sea $n \geqslant 2$, sabemos que $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ (con $p \in \mathbb{S}^n$) es homeomorfa a $\mathbb{R}^{n-1}$, que es un conjunto arcoconexo por ser convexo (es una espacio vectorial). Como la arcoconexión es una propiedad topológica, esta se conserva por homeomorfismo, luego $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ es un conjunto arcoconexo, $\forall p \in \mathbb{S}^n$.

Tomando $N = (0, \dots, 0, 1), S = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{S}^n$, podemos ver $\mathbb{S}^n$ como unión de dos conjuntos arcoconexos:

$$\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \cup (\mathbb{S}^n \setminus \{S\})$$

no disjuntos:

$$(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \cap (\mathbb{S}^n \setminus \{S\}) = \mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}$$

Por lo que $\mathbb{S}^n$ es un conjunto arcoconexo, $\forall n \geqslant 2$.

Ejercicio 1.1.2. Demuestra que si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de arcoconexos de X tales que todos intersecan a uno de ellos, es decir,

$$A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset, \qquad \forall i \in I,$$

entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ es arcoconexo.

Sean $x, y \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, entonces existen $i, j \in I$ de forma que $x \in A_i$ y $y \in A_j$. Como $A_i \cap A_{i_0}, A_j \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, podemos tomar $a \in A_i \cap A_{i_0}$ y $b \in A_j \cap A_{i_0}$.

- A_i es un conjunto arcoconexo con $x, a \in A_i$, por lo que existe un camino, α, que une x con a.
- A_j también es un conjunto arcoconexo con $y, b \in A_j$, por lo que existe un camino, β, que une y con b.
- Además, A_{i_0} es un conjunto arcoconexo con $a, b \in A_{i_0}$, por lo que existe un tercer camino, γ, que une a con b.

De esta forma, podemos tomar:

$$\sigma = \alpha * \left(\gamma * \tilde{\beta}\right)$$

Que es un camino que une x con y. Como x e y eran arbitrarios, podemos unir cualesquiera dos puntos de $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, por lo que dicho conjunto es arcoconexo.

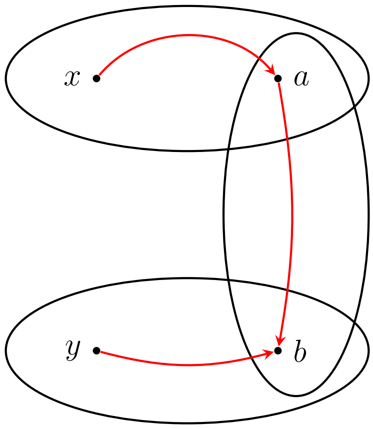

Figura 1.1: Forma de unir dos puntos cualesquiera.

Ejercicio 1.1.3. Sea X un conjunto, $x_0 \in X$, y consideramos la topología (del punto incluido) dada por

$$T = \{U \subset X : x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$$

¿Es (X, T) arcoconexo?

Sí: sea $x \in X$, veamos que la aplicación $\alpha : [0,1] \to X$ dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} x & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ x_0 & \text{si } t \in]1/2, 1] \end{cases} \qquad \forall t \in [0,1]$$

es continua. Sea $U \in T$:

- Si $U = \emptyset$, entonces $\alpha^{-1}(U) = \emptyset \in \mathcal{T}_u\big|_{[0,1]}$.
- Si $x_0 \in U$ y $x \notin U$, entonces $\alpha^{-1}(U) =]1/2, 1] \in \mathcal{T}_u\big|_{[0,1]}$.
- Si $x_0, x \in U$, entonces $\alpha^{-1}(U) = [0,1] \in \mathcal{T}_u\big|_{[0,1]}$.

Como la preimagen de cualquier conjunto abierto es abierta, tenemos que α es continua, luego es un arco que une x con x_0.

Ahora, si $x, y \in X$, tenemos que existen $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ de forma que α une x con x_0 y β une y con x_0; por lo que $\alpha * \tilde{\beta}$ es un arco que une x con y. Como x e y eran arbitrarios, concluimos que X es arcoconexo.

Ejercicio 1.1.4. Demustra que en $\mathbb{R}^n$ con la topología usual, todo abierto conexo es arcoconexo. ¿Es cierto que todo cerrado conexo de $\mathbb{R}^n$ es arcoconexo?

En teoría vimos que:

$$\text{Un conjunto es arcoconexo} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Es conexo} \\ \text{Todo punto admite un entorno arcoconexo} \end{cases}$$

Sea U un abierto conexo de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, falta ver que todo punto suyo admite un entorno arcoconexo en la topología inducida en U para ver que U es arcoconexo. Para ello, sea $x \in U$, como U es abierto existe $r \in \mathbb{R}^+$ de forma que $B(x,r) \subset U$. $B(x,r)$ es un conjunto arcoconexo por ser convexo, luego es un entorno arcoconexo de x en U. Como x era un punto arbitrario de U, todo punto suyo admite un entorno arcoconexo, y como U era conexo, tenemos que U es arcoconexo.

Ahora, no es cierto que todo cerrado conexo de $\mathbb{R}^n$ es arcoconexo, ya que si consideramos $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Tenemos que

$$C = \overline{Gr(f)} = \overline{\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^+\}} = Gr(f) \cup (\{0\} \times [-1,1])$$

es un conjunto cerrado y conexo (se vio en Topología I) pero que no es arcoconexo.

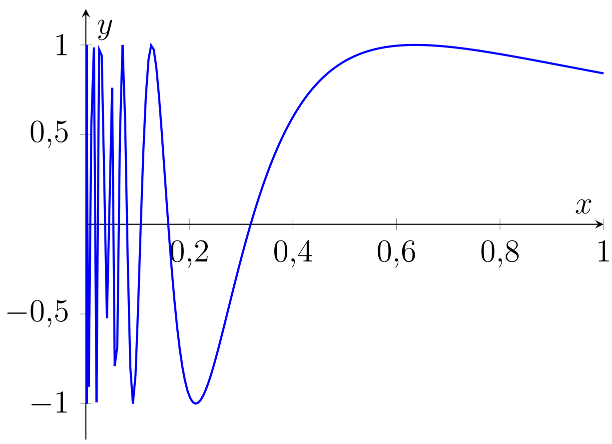

Figura 1.2: Dibujo de la adherencia de la gráfica de $f(x)$.

No demsotraremos de forma rigurosa por qué no es arcoconexo, pero sí desarrollaremos la demostración lo suficiente como para que se aprecie la idea de la misma:

Sea $z \in \{0\} \times [-1,1]$, si tratamos de unir $z = (0,u)$ para cierto $u \in [-1,1]$ con cualquier punto $a = (b,c) \in Gr(f)$ mediante una curva $\alpha : [0,1] \to \overline{Gr(f)}$, tendremos que existen ciertas funciones $x, y : [0,1] \to \mathbb{R}$ de forma que:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) \qquad \forall t \in [0,1]$$

siendo x e y funciones continuas. En dicho caso, como α une z con a, entonces x alcanzaría los valores 0 y b, y por el Teorema del Valor Medio, alcanzaría todos los valores del intervalo $[0, b]$, donde llegamos a una contradicción.

Ejercicio 1.1.5. Prueba que la componente arcoconexa de un punto x_0 está contenida en la componente conexa de x_0.

Sea (X, T) un espacio topológico, $x_0 \in X$ y C la componente arcoconexa de x_0 en X, en particular tenemos que C es un conjunto arcoconexo, luego es conexo, por lo que está contenida en la componente conexa de x, al ser esta el mayor conjunto conexo que contiene a x.

Ejercicio 1.1.6. En $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey, esto es, la topología que tiene como base

$$\mathcal{B}_S = \{[a, b) \subset \mathbb{R} : a < b\},$$

determina sus componentes arcoconexas.

Ejercicio 1.1.7. Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo entre espacios topológicos. Demuestra que $A \subset X$ es una componente arcoconexa de X si y solo si $f(X)$ es una componente arcoconexa de Y. Deduce que el número de componentes arcoconexas es invariante por homeomorfismos.

Ejercicio 1.1.8. En $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ se considera la topología que tiene por base

$$\beta = \{]a, b[\times \{0, 1\} : a < b\}.$$

Demuestra que X es arcoconexo. ¿Es X homeomorfo a $\mathbb{R}$ con la topología usual?

Ejercicio 1.1.9. En $\mathbb{R}^3$ con la topología usual, calcula las componentes arcoconexas de

$$X = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1\}$$

Ejercicio 1.1.10. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual consideremos las rectas horizontales $A_n = \mathbb{R} \times \{1/n\}$, $B_n = \mathbb{R} \times \{-1/n\}$ y el eje de ordenadas menos el origen, esto es, $C = \{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Calcula las componentes conexas y arcoconexas de

$$X = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \right) \cup C \cup \{(1, 0)\}.$$