# Ecuaciones Diferenciales I Examen VIII

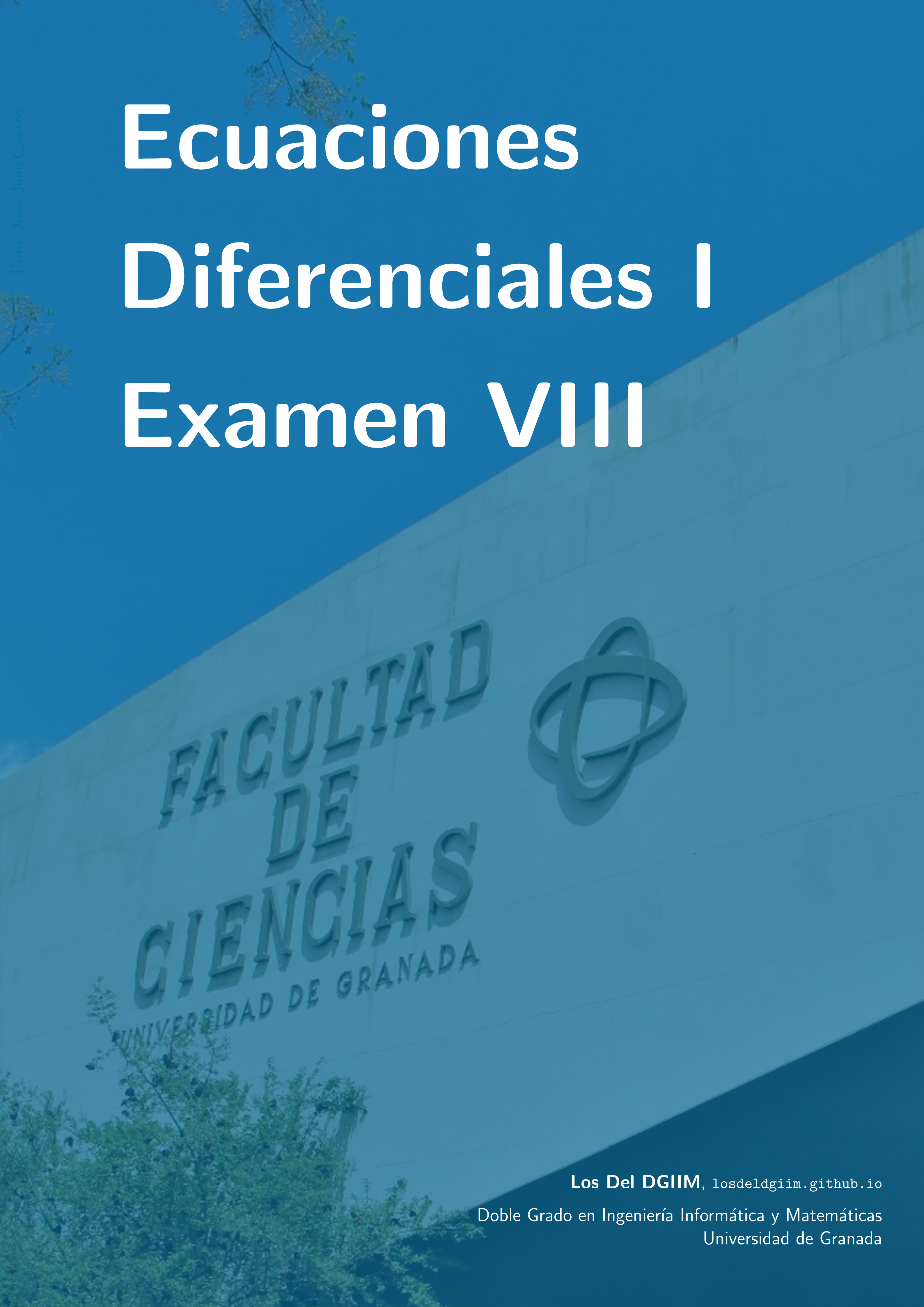


Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Ecuaciones Diferenciales I Examen VIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

**Asignatura** Ecuaciones Diferenciales I

**Curso Académico** 2022-23.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Rafael Ortega Ríos.

**Descripción** Primer parcial.

**Fecha** 7 de noviembre de 2022.

**Duración** 120 minutos.

**Ejercicio 1.** Encuentra la ecuación diferencial de las curvas $(x, y(x))$ con la siguiente propiedad geométrica: en cada punto de la curva, su segunda coordenada coincide con la suma de las coordenadas del punto de intersección de la recta tangente con la bisectriz del primer cuadrante.

Dado un punto $P = (x, (y(x)))$, necesitamos calcular el punto de corte de la recta tangente a $y(x)$ por $P$ con la bisectriz del primer cuadrante. Usando la ecuación punto$-$pendiente en las variables $(u, v)$, tenemos que la recta tangente a $y(x)$ por $u$ es:

$$y'(x) = \frac{v - y(x)}{u - x} \Longrightarrow r_t \equiv v = y'(x)(u - x) + y(x)$$

La bisectriz del primer cuadrante, en las variables $(u, v)$, es:

$$b \equiv v = u$$

Por tanto, el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} r_t \equiv v = y'(x)(u - x) + y(x) \\ b \equiv v = u \end{cases}$$

Igualando las componentes $v$, tenemos que:

$$y'(x)(u - x) + y(x) = u \Longrightarrow u = v = \frac{y(x) - y'(x)x}{1 - y'(x)}$$

Por tanto, la ecuación diferencial planteada es:

$$y = 2 \cdot \frac{y - y'x}{1 - y'}$$

En forma normal (aunque no es deseado por reducir el dominio), esta es:

$$y' = \frac{y - 2y}{-2x + y}$$

**Ejercicio 2.** Resuelve el problema de valores iniciales siguiente:

$$y^3 e^x + 3y^2 e^x y' = e^{-x}, \quad y(0) = 1.$$

Para ello, usa un cambio de variable del tipo $y = u^\alpha$ para $\alpha$ adecuada. Estudia el intervalo maximal de definición de la solución.

**Ejercicio 3.** Responda a los siguientes apartados:

1. Sean $P, Q$ funciones de clase $C^1$ definidas en un dominio del plano. Argumenta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: si $\mu(x)$ es un factor integrante para la ecuación $P(x, y)dx + Q(x, y)y' = 0$, entonces también lo es para la ecuación $P(x, y) + Q(x, y)y' = h(x)$, con $h$ función real de variable real de clase $C^1$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ el dominio del plano descrito. Por ser $\mu$ factor integrante de la ecuación $P(x,y)dx + Q(x,y)y' = 0$, se tiene que las siguientes derivadas parciales son iguales:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu)}{\partial y}P + \mu\frac{\partial(P)}{\partial y} = 0 \cdot P + \mu\left(\frac{\partial(P)}{\partial y}\right) = \mu\left(\frac{\partial(P)}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu)}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial(Q)}{\partial x} = m'Q + \mu\frac{\partial(Q)}{\partial x}$$

Definimos $\widetilde{P}$ como sigue:

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{P}: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & P(x,y) - h(x) \end{array}$$

De esta forma, $\widetilde{P} \in C^1(\Omega)$ y la ecuación $P(x,y) + Q(x,y)y' = h(x)$ se puede reescribir como $\widetilde{P}(x,y) + Q(x,y)y' = 0$. Por tanto, para que $\mu$ sea factor integrante de la ecuación $P(x,y) + Q(x,y)y' = h(x)$, debe cumplir que:

- $\mu(x) > 0$ en $\pi_1(\Omega)$. Esto se tiene por ser $\mu$ factor integrante de la ecuación $P(x,y)dx + Q(x,y)y' = 0$.
- Tras multiplicar por $\mu$, la ecuación $\widetilde{P}(x,y)+Q(x,y)y' = 0$ debe ser exacta.

Veamos si se da la condición de exactitud tras multiplicar por $\mu$:

$$\frac{\partial(\mu \widetilde{P})}{\partial y} = \frac{\partial(\mu)}{\partial y}\widetilde{P} + \mu\frac{\partial(\widetilde{P})}{\partial y} = 0 \cdot \widetilde{P} + \mu\left(\frac{\partial(P)}{\partial y}\right) = \mu\left(\frac{\partial(P)}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu)}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial(Q)}{\partial x} = m'Q + \mu\frac{\partial(Q)}{\partial x}$$

Por tanto, por ser $\mu$ factor integrante de la ecuación $P(x,y)dx+Q(x,y)y' = 0$, hemos visto anteriormente que estas dos derivadas parciales son iguales. Por tanto, $\mu$ es factor integrante de la ecuación $P(x,y) + Q(x,y)y' = h(x)$.

2. Encuentra un factor integrante de la forma $\mu\left({}^{x}\!/_{y}\right)$ para la ecuación

$$x + y + (y - x)y' = 0.$$

Definimos:

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$
$$\begin{array}{rccc} Q: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & y - x \end{array}$$

Por tanto, la ecuación dada es $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$. Tras multiplicarla el factor integrante $\mu(x,y)$, ha de cumplirse la condición de exactitud. Las derivadas que aparecen en la condición de exactitud son:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu)}{\partial y}P + \mu\frac{\partial(P)}{\partial y}$$
$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu)}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial(Q)}{\partial x}$$

Igualando, llegamos a:

$$\frac{\partial(\mu)}{\partial y}P - \frac{\partial(\mu)}{\partial x}Q = \mu\left(\frac{\partial(Q)}{\partial x} - \frac{\partial(P)}{\partial y}\right)$$

Calculemos las derivadas parciales necesarias, usando que $\mu$ es de la forma $\mu(x,y) = m\left({}^{x}/_{y}\right)$ para alguna función $m$. Además, de aquí en adelante consideramos un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en el que $y$ no se anula, para poder considerar ese cociente:

$$\frac{\partial(P)}{\partial y}(x,y) = 1 \qquad\qquad \frac{\partial(Q)}{\partial x}(x,y) = -1$$
$$\frac{\partial(\mu)}{\partial y}(x,y) = m'\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right) \qquad\qquad \frac{\partial(\mu)}{\partial x}(x,y) = m'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{y}\right)$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
m'\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)(x+y) - m'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{y}\right)(y-x) &= m\left(\frac{x}{y}\right)(-1-1)\\
m'\left(\frac{x}{y}\right)\left[\left(-\frac{x}{y^2}\right)(x+y) - \left(\frac{1}{y}\right)(y-x)\right] &= -2m\left(\frac{x}{y}\right)\\
m'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{-x^2 - \cancel{xy} - y^2 + \cancel{xy}}{y^2}\right) &= -2m\left(\frac{x}{y}\right)\\
-m'\left(\frac{x}{y}\right)\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right] &= -2m\left(\frac{x}{y}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, como el factor integrante no se puede anular, y el otro término es siempre positiva, notando $\xi = {}^{x}/_{y}$, llegamos a que la función $m(\xi)$ buscada ha de ser solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$m' = 2m \cdot \frac{1}{1+\xi^2}$$

Se trata de una ecuación diferencial en variables separadas. Suponiendo $m(\xi) > 0$ para todo $\xi$ (en caso contrario, tendríamos un factor integrante igualmente válido), se tiene que:

$$m(\xi) = \exp(\arctan(\xi))$$

donde hemos elegido como constante de integración $e^{-2}$ por simplicidad. Por tanto, el factor integrante buscado es:

$$\mu(x,y) = \exp\left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

**Ejercicio 4.** Sean $P, Q$ funciones de clase $C^1$ definidas en un dominio del plano que verifican la condición de exactitud. Se define la función

$$U(x,y) = \int_0^1 [xP(\lambda x, \lambda^2 y) + 2\lambda y Q(\lambda x, \lambda^2 y)]\, d\lambda.$$

Calcula $\dfrac{\partial U}{\partial x}$.

Sea $\Omega$ el dominio del plano descrito. Definimos la función auxiliar:

$$\begin{array}{rccc} F: & \Omega\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,\lambda) & \longmapsto & xP(\lambda x,\lambda^2 y)+2\lambda yQ(\lambda x,\lambda^2 y) \end{array}$$

Por ser $P,Q$ funciones de clase $C^1$ en $\Omega$, la función $F$ es de clase $C^1$ en su dominio. Por tanto, por el Teorema de la Derivación de las Integrales dependientes de Parámetros, tenemos que $U\in C^1(\Omega)$, y en particular:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) &= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda)\ d\lambda \\
&= \int_0^1 \left[P(\lambda x,\lambda^2 y)+x\lambda\frac{\partial P}{\partial x}(\lambda x,\lambda^2 y)+2\lambda^2 y\frac{\partial Q}{\partial x}(\lambda x,\lambda^2 y)\right]\ d\lambda \\
&\overset{(*)}{=} \int_0^1 \left[P(\lambda x,\lambda^2 y)+x\lambda\frac{\partial P}{\partial x}(\lambda x,\lambda^2 y)+2\lambda^2 y\frac{\partial P}{\partial y}(\lambda x,\lambda^2 y)\right]\ d\lambda \\
&= \int_0^1 \left[P(\lambda x,\lambda^2 y)+\lambda\frac{\partial P}{\partial \lambda}(\lambda x,\lambda^2 y)\right]\ d\lambda \\
&= \int_0^1 \frac{d}{d\lambda}\left[\lambda P(\lambda x,\lambda^2 y)\right]\ d\lambda \\
&= \lambda P(\lambda x,\lambda^2 y)\Big|_0^1 \\
&= P(x,y)
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que cumplen la condición de exactitud, y en la penúltima igualdad hemos usado la Regla de Barrow.