Geometría I
Examen VII

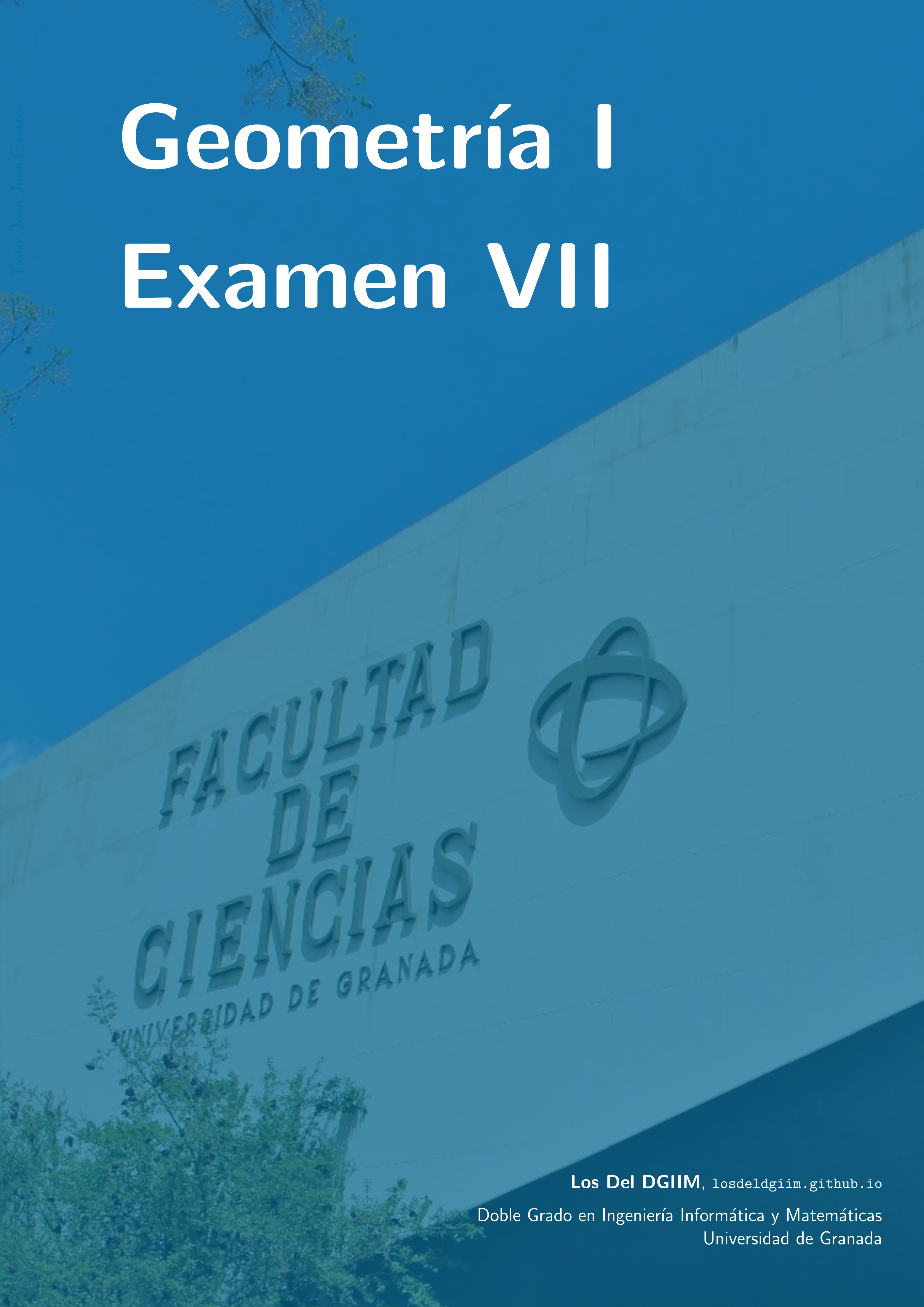

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría I
Examen VII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Ana María Hurtado Cortegana y Antonio Ros Mulero[1].

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 15 de enero de 2024.

Duración 3 horas.

[1]El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Enuncia y demuestra la fórmula de Grassmann.

Ejercicio 2 (1.5 puntos)**.** Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales finitamente generados sobre el mismo cuerpo K. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. La aplicación f es sobreyectiva si y sólo si f^t es inyectiva, donde f^t es la aplicación transpuesta de f.

2. Si $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ es un subconjunto de V tal que $\{f(v_1), \dots, f(v_k)\}$ es un sistema de generadores de V', entonces S es un sistema de generadores de V.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, se considera el endomorfismo $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base usual es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2\lambda - 3 \\ 0 & 2-\lambda & -\lambda \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Hallar bases de $\mathrm{Im}(f_\lambda)$ y $\mathrm{Ker}(f_\lambda)$ según los valores del parámetro λ. Determinar para qué valores de λ, f_λ es un isomorfismo.

2. Obtener, según los valores de λ, una base de $\mathrm{Ker}(f_\lambda) \cap \mathrm{Im}(f_\lambda)$ y otra base de $\mathrm{Ker}(f_\lambda) + \mathrm{Im}(f_\lambda)$. ¿Para qué valores $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f_\lambda) \oplus \mathrm{Im}(f_\lambda)$?.

3. Hallar bases de $\mathrm{Im}(f_\lambda^t)$ y $\mathrm{Ker}(f_\lambda^t)$ para cada valor de λ.

Ejercicio 4 (3 puntos)**.** Sea $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y definimos el subconjunto de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$U = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : CA^t = A\}.$$

1. Demostrar que U es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y obtener una base $\mathcal{B}_U$ de U.

2. Ampliar $\mathcal{B}_U$ a una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y calcular la base dual de $\mathcal{B}$.

3. Hallar una base del espacio vectorial cociente $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})/U$ y obtener las coordenadas de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + U$ en dicha base.