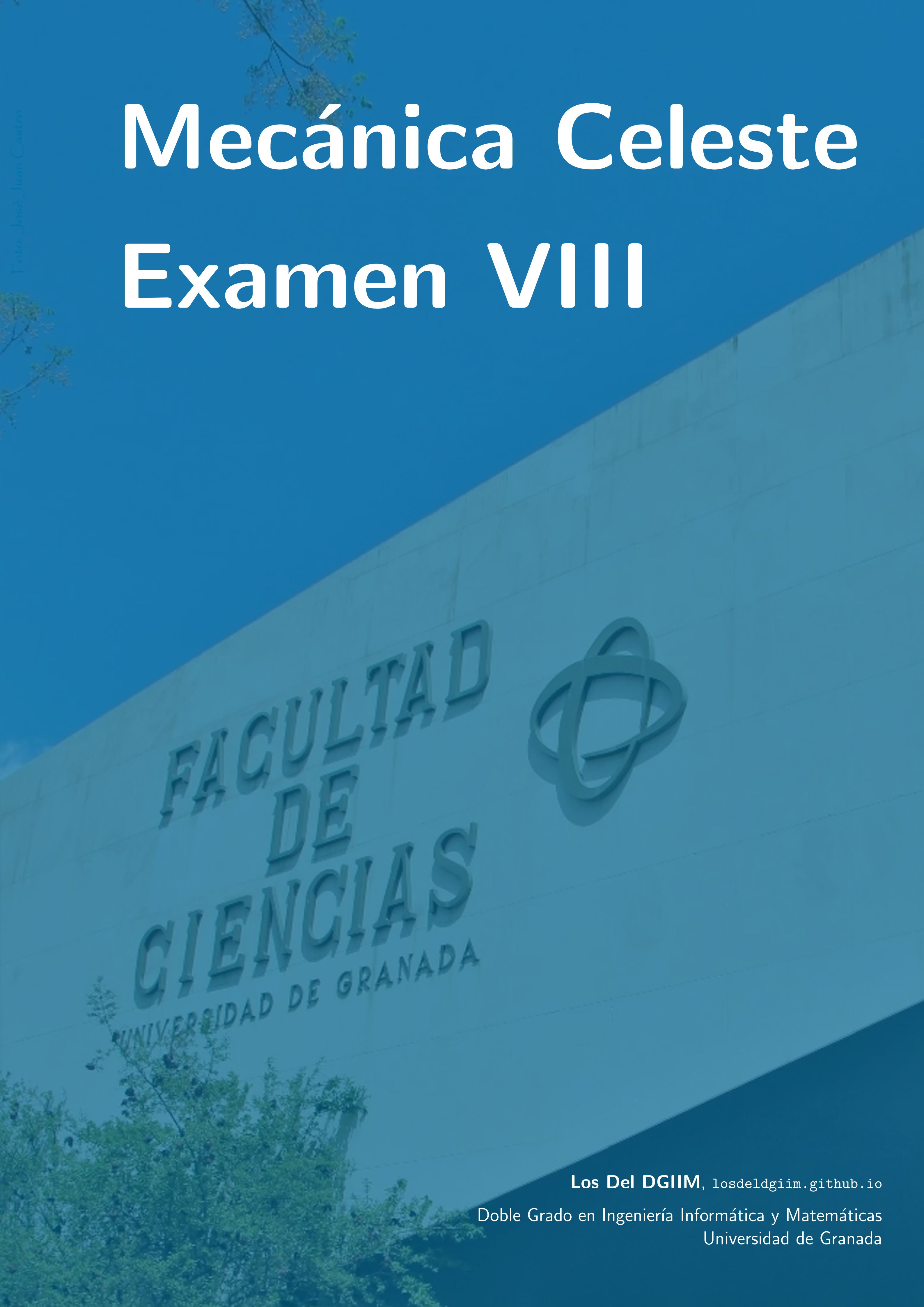
Mecánica Celeste

Examen VIII

Foto: José Juan Castro



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Mecánica Celeste
Examen VIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2025

Asignatura Mecánica Celeste.

Curso Académico 2025-26.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo A.

Profesor Margarita Arias López.

Descripción Segundo Parcial.

Fecha 18 de Diciembre de 2025.

Duración 1 hora y 30 minutos.

El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio o apartado.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Se consideran dos cuerpos sobre los que actúa únicamente la fuerza de gravitación Newtoniana. Determina razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) [1] Los dos cuerpos se mueven siempre en un mismo plano.

b) [1] Si el centro de masas de los dos cuerpos permanece fijo en el origen y su momento angular es cero, se mueven sobre una recta.

c) [1] Si los dos cuerpos tienen la misma masa $m = 4/G$ y en $x(0) = (0,0,1)$, $\dot{x}(0) = (0,1,0)$, los cuerpos se alejan infinitamente de un observador situado sobre su centro de masas.

d) [1] Si los dos cuerpos tienen la misma masa $m = 4/G$ y en un instante $x(t_0) = (0,0,1)$, $\dot{x}(t_0) = (0,1,0)$, el otro puede estar en $y(t_0) = (0,0,-1)$ con velocidad $\dot{y}(t_0) = (0,-2,0)$

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Se consideran tres cuerpos de igual masa m sobre los que actúa únicamente la fuerza de gravitación Newtoniana.

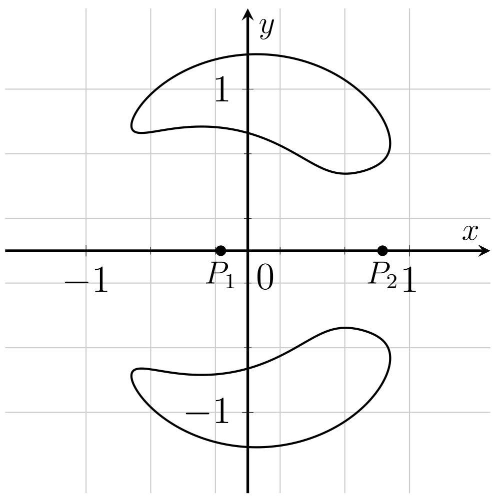
a) [1] Determina su masa si cada cuerpo gira en un mismo plano a velocidad angular 3 alrededor del origen y $|r_i(t) - r_j(t)| = 1 \quad i \neq j$ para todo $t \in \mathbb{R}$

b) [2] Supongamos que los tres cuerpos se encuentran siempre a la misma distancia, esto es, $|r_i(t) - r_j(t)| = d, \quad i \neq j$, ¿podemos afirmar que el movimiento se efectúa sobre un plano? En el supuesto de que se muevan en un mismo plano, ¿tiene que girar alrededor del origen a velocidad angular constante? De ser posible, pon un ejemplo concreto en cada caso.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** En un problema de tres cuerpos restringido circular se sabe que la masa de la primaria mayor es 5 veces la de la primaria más pequeña.

a) [1.5] Determina los puntos de libración L_4 y L_5 y haz un esbozo de las tres masas si situamos un satélite de masa despreciable sobre L_5 con velocidad cero.

b) [1.5] Las curvas



representan $\{z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\} : \Phi(z) = C\}$ para cierto valor de $C > 0$, con

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1-\mu}{|z-P_1|} + \frac{\mu}{|z-P_2|} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu),$$

y μ el valor resultante en el caso que estamos considerando. ¿Podemos obtener alguna información sobre la trayectoria de un satélite si lo soltamos dentro de la región de arriba con velocidad nula?

Razona tus respuestas.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Se consideran dos cuerpos sobre los que actúa únicamente la fuerza de gravitación Newtoniana. Determina razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) [1] Los dos cuerpos se mueven siempre en un mismo plano.

Consideramos $m_1 = m_2 = m > 0$. Sabemos por teoría que las trayectorias

$$x(t) = (\cos \omega t, \operatorname{sen} \omega t, t), \quad y(t) = (-\cos \omega t, -\operatorname{sen} \omega t, t)$$

son solución al problema de dos cuerpos si ω se escoge de forma apropiada, y las órbitas son helicoidales. Por lo tanto, la afirmación es $\boxed{\text{falsa}}$.

b) [1] Si el centro de masas de los dos cuerpos permanece fijo en el origen y su momento angular es cero, se mueven sobre una recta.

Por teoría sabemos que si el centro de masas está fijo en el origen pero $c_x = 0$ entonces el movimiento de ambas partículas será rectilíneo. Esto se justifica porque el problema de los dos cuerpos se reduce a dos problemas de Kepler, y ahí ya se estudió que si el momento angular es 0, entonces el movimiento es rectilíneo. Como el centro de masas está en la envolvente convexa de sus vértices de posición (en el caso de dos cuerpos, el segmento que los une) y siempre permanece fijo en el origen, entonces necesariamente ambos cuerpos deben moverse sobre una recta. Por lo tanto, la afirmación es $\boxed{\text{verdadera}}$.

c) [1] Si los dos cuerpos tienen la misma masa $m = 4/G$ y en $x(0) = (0, 0, 1)$, $\dot{x}(0) = (0, 1, 0)$, los cuerpos se alejan infinitamente de un observador situado sobre su centro de masas.

Basta estudiar el cuerpo identificado por x, y el otro quedará determinado. Además, podemos suponer que el centro de masas está fijo en el origen, ya que el observador se encuentra situado sobre su centro de masas. Primero hallamos el momento angular

$$c(0) = x(0) \wedge \dot{x}(0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (1, 0, 0) \Longrightarrow |c| = 1 > 0$$

Como $c \neq 0$, por la Primera Ley de Kepler, x se moverá sobre una cónica; elipse, hipérbola o parábola, con un foco en el origen. Además, si la cónica que verifica x sigue la ecuación $|x| + \langle e, x\rangle = k$ con $e \in \mathbb{R}^3$ y $k > 0$, entonces la cónica que verifica y es $|y| + \langle -e, y\rangle = \lambda k$ con $\lambda = \frac{m_1}{m_2} x$ (viene de suponer que el centro de masas está en el origen $m_1 x + m_2 y = 0$).

Para que los cuerpos se alejen infinitamente del centro de masas, la energía total debe ser no negativa (para que la trayectoria no esté acotada).

El problema de Kepler que cumple x verifica $\mu = \frac{Gm}{4}$, luego la energía total será

$$h = \frac{1}{2}|\dot{x}(0)|^2 - \frac{\mu}{|x(0)|} = \frac{1}{2} - \frac{Gm}{4} = \frac{1}{2} - \frac{G}{4}\frac{4}{G} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = -0{,}5 < 0$$

Sabemos que $h < 0 \iff |e| < 1$, por lo que la trayectoria que sigue x será elíptica, así como la de y, y, en particular, los cuerpos **no** se alejan infinitamente de un observador situado sobre su centro de masas. Por lo tanto, la afirmación es $\boxed{\text{falsa}}$.

d) [1] Si los dos cuerpos tienen la misma masa $m = 4/G$ y en un instante $x(t_0) = (0, 0, 1)$, $\dot{x}(t_0) = (0, 1, 0)$, el otro puede estar en $y(t_0) = (0, 0, -1)$ con velocidad $\dot{y}(t_0) = (0, -2, 0)$

Sabemos que el conjunto $\Omega = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \setminus \Delta$, con $\Delta = \{(\xi, \xi) : \xi \in \mathbb{R}^3\}$ es un dominio (abierto, conexo y no vacío). Además, como $x(t_0) \neq y(t_0)$, dado que el campo de fuerzas es regular, existe una solución del sistema (función regular)

$$\begin{array}{rrcl} (x, y) : & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega \\ & t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

Por lo tanto, la afirmación es $\boxed{\text{verdadera}}$.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Se consideran tres cuerpos de igual masa m sobre los que actúa únicamente la fuerza de gravitación Newtoniana.

a) [1] Determina su masa si cada cuerpo gira en un mismo plano a velocidad angular 3 alrededor del origen y $|r_i(t) - r_j(t)| = 1 \quad i \neq j$ para todo $t \in \mathbb{R}$

Utilizaremos el siguiente teorema:

Teorema 0.1. *Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$ tres puntos no alineados. Entonces*

$$r_i(t) = R[\omega t]z_i, \quad i = 1, 2, 3$$

es solución del problema de tres cuerpos si y solo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

a) El centro de masas está en el origen, es decir,

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0$$

b) Los puntos z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero de lado $d > 0$.

c) $|\omega| = \sqrt{\dfrac{GM}{d^3}}, \quad M = m_1 + m_2 + m_3$

La hipótesis del Teorema 0.1 se cumple, puesto que $|r_i(t) - r_j(t)| = 1 \quad i \neq j$ para todo $t \in \mathbb{R}$ impone necesariamente que los tres cuerpos formen un triángulo equilátero de lado 1. En particular, los tres cuerpos no están alineados. También por hipótesis, como se "consideran tres cuerpos de igual masa m sobre los que actúa únicamente la fuerza de gravitación Newtoniana" se está diciendo que estos tres cuerpos son solución al problema de los tres cuerpos.

Así, la masa nos la dará la condición c), dado que ya conocemos el módulo de la velocidad angular, y que los tres cuerpos tienen la misma masa, pongamos $m_i = m > 0 \quad i = 1, 2, 3$, de donde $M = m_1 + m_2 + m_3 = 3m$. La obtenemos

$$3 = |\omega| = \sqrt{\frac{GM}{d^3}} = \sqrt{\frac{3Gm}{1^3}} = \sqrt{3Gm} \iff 9 = 3Gm \iff m = \frac{9}{3G} = \frac{3}{G}$$

b) [2] Supongamos que los tres cuerpos se encuentran siempre a la misma distancia, esto es, $|r_i(t) - r_j(t)| = d, \quad i \neq j$, ¿podemos afirmar que el movimiento se efectúa sobre un plano? En el supuesto de que se muevan en un mismo plano, ¿tiene que girar alrededor del origen a velocidad angular constante? De ser posible, pon un ejemplo concreto en cada caso.

La primera pregunta se responde con sí. Como $|r_i(t) - r_j(t)| = d > 0, \quad i \neq j$, los tres cuerpos forman en cada instante de tiempo t un triángulo equilátero. Como la distancia entre cuerpos es fija siempre e igual a d, el movimiento es rígido. Además, por teoría sabemos que el momento angular total en el problema de los n cuerpos se conserva, lo que necesariamente implica que el movimiento se realiza mediante una rotación rígida alrededor de un eje fijo que pasa por el centro de masas. Por tanto, las trayectorias quedan contenidas en un plano fijo perpendicular a dicho eje.

Un ejemplo concreto serían las soluciones circulares de Lagrange, que son las que tienen la forma del Teorema 0.1.

Para la segunda pregunta, la respuesta es que no. La velocidad angular sí que debe ser constante, en el caso de que $|r_i(t) - r_j(t)| = d, \quad i \neq j$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De otra manera las distancias no se mantendrían constantes entre cuerpos. Sin embargo, la rotación no tiene por qué ser alrededor del origen, dado que el eje de rotación pasa por el centro de masas, y este último puede no coincidir con el origen.

Por ejemplo, considerando las soluciones circulares de Lagrange desplazadas, $r_i(t) = a + R[\omega t]z_i, \quad i = 1, 2, 3$, para un cierto $a \neq 0$ vector constante, la solución sigue siendo circular de Lagrange al problema de los tres cuerpos (verifica todas las hipótesis del Teorema 0.1), pero la rotación no se produce alrededor del origen.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** En un problema de tres cuerpos restringido circular se sabe que la masa de la primaria mayor es 5 veces la de la primaria más pequeña.

a) [1.5] Determina los puntos de libración L_4 y L_5 y haz un esbozo de las tres masas si situamos un satélite de masa despreciable sobre L_5 con velocidad cero.

Sabemos que $m_1 = 1 - \mu$, $m_2 = \mu$, $\mu \in]0, 1/2]$ y $m_1 + m_2 = 1$. Como "la masa de la primaria mayor es 5 veces la de la primaria más pequeña", entonces $m_1 = 5m_2$ y $m_1 + m_2 = 6m_2 > 0$, por lo que la masa μ en las unidades apropiadas será

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\cancel{m_2}}{6\cancel{m_2}} = \frac{1}{6}$$

Por teoría sabemos que tanto L_4 como L_5, colocándolos como vértices, forman un triángulo equilátero de lado 1 con las primarias. Por lo tanto, los puntos de libración L_4 y L_5 son aquellos $z \in \mathbb{R}^2$ que verifican

$$|z - P_1| = |z - P_2| = |P_1 - P_2| = 1$$

Deducimos entonces que la abscisa de L_4 y L_5 está en la mediatriz de las primarias, es decir:

$$M = \frac{P_1 + P_2}{2} = \left(\frac{-\mu + 1 - \mu}{2}, 0\right) = \left(\frac{1 - 2\mu}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2} - \mu, 0\right)$$

Denotando por $z = (x, y)$, entonces $x = 1/2 - \mu$.

Para obtener la altura, imponemos $|z - P_1| = 1$ (también se podría imponer $|z - P_2| = 1$). Como

$$z - P_1 = \left(\frac{1}{2} - \mu - (-\mu), y\right) = \left(\frac{1}{2}, y\right)$$

Entonces

$$|z - P_1| = 1 \iff |z - P_1|^2 = 1 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \iff y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \iff y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

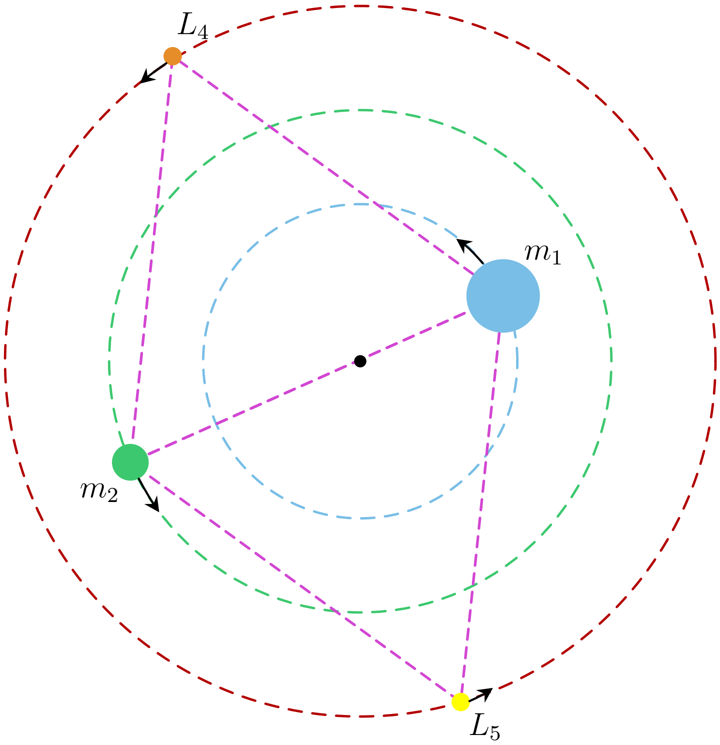
Consecuentemente

$$L_4 = \left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad L_5 = \left(\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Sustituyendo $\mu = 1/6$

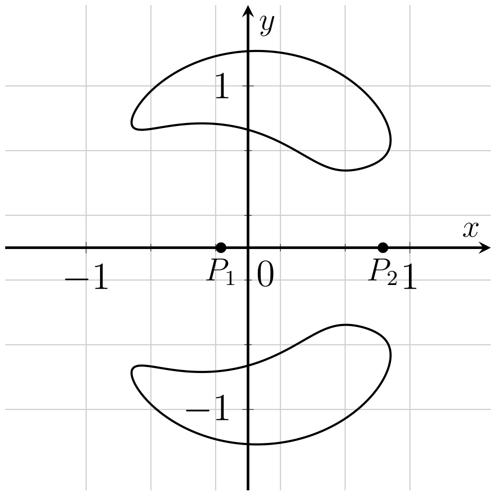
$$L_4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad L_5 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

El esbozo de las tres masas si situamos un satélite de masa despreciable sobre L_5 con velocidad cero sería el siguiente:



En el sistema de referencia en rotación, los puntos L_4 y L_5 son equilibrio, luego un satélite situado en ellos con velocidad inicial nula permanece en reposo. En el sistema inercial correspondiente, las primarias y el satélite describen órbitas circulares con la misma velocidad angular, formando un triángulo equilátero rígido de lado 1.

b) [1.5] Las curvas



representan $\{z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\} : \Phi(z) = C\}$ para cierto valor de $C > 0$, con

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1-\mu}{|z-P_1|} + \frac{\mu}{|z-P_2|} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu),$$

y μ el valor resultante en el caso que estamos considerando. ¿Podemos obtener alguna información sobre la trayectoria de un satélite si lo soltamos dentro de la región de arriba con velocidad nula?

La "región de arriba" se denota por R_1 en la Figura 1

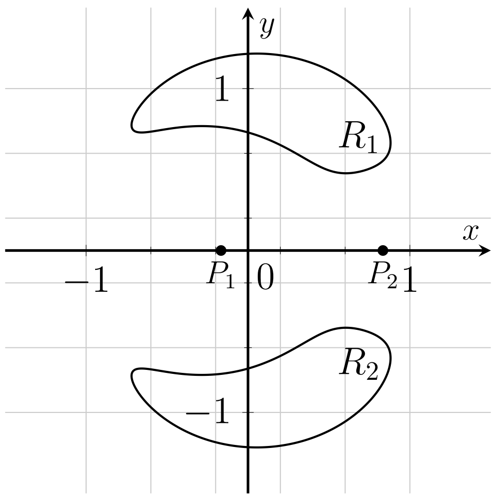


Figura 1: Regiones de Hill del Ejercicio 3b)

Teniendo en cuenta que R_1 es una componente conexa de la región de Hill asociada a C, por teoría sabemos que si una trayectoria empieza en una componente conexa, termina en la misma componente conexa. De esta manera, si se suelta el satélite en reposo (con velocidad nula), entonces está garantizado que la trayectoria del satélite quedará contenida en R_1.