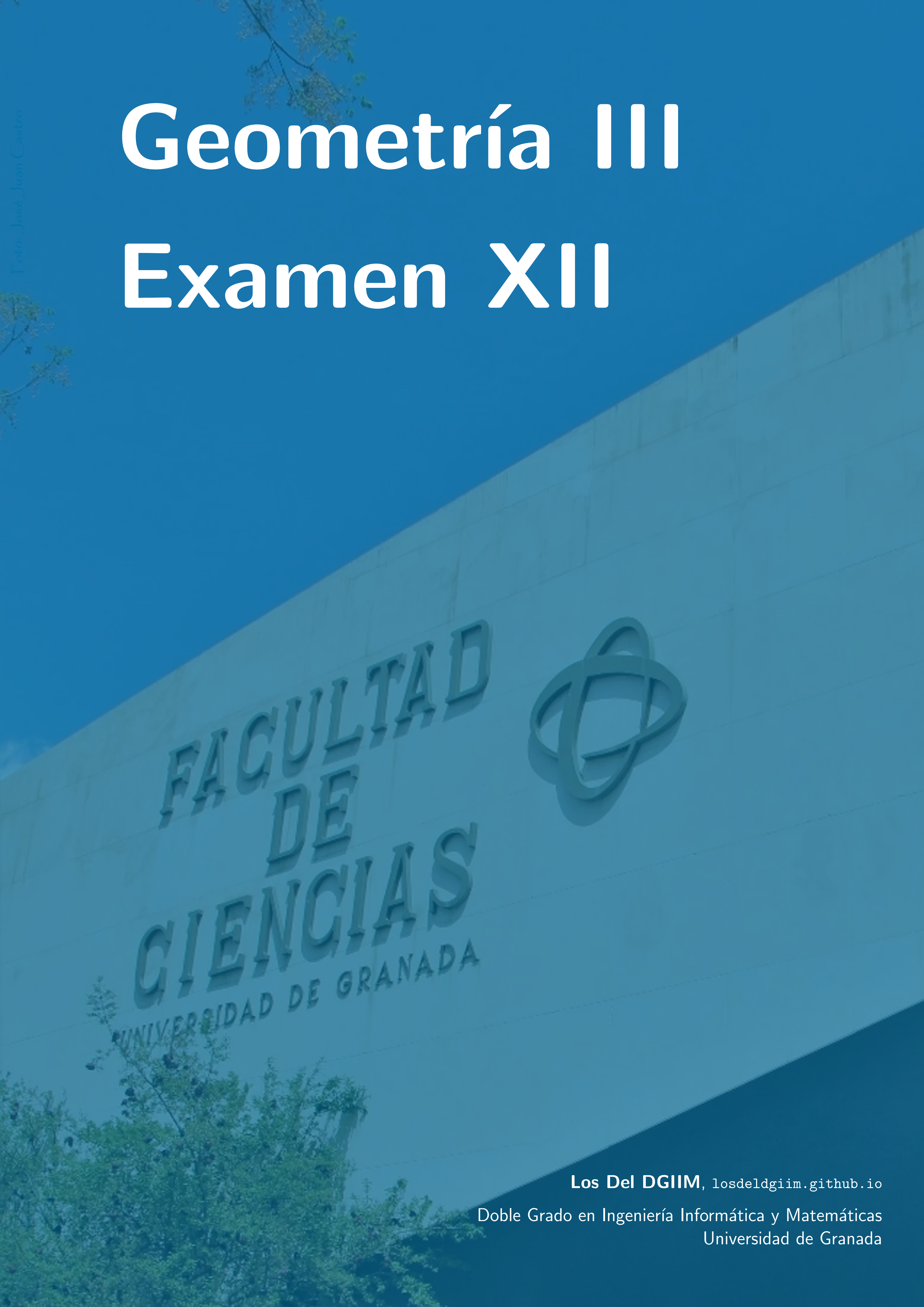

Foto: José Juan Castro

Geometría III

Examen XII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría III
Examen XII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Jesús Muñoz Velasco
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría III.

Curso Académico 2023-24.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo A.

Profesor María Magdalena Rodríguez Pérez.

Descripción Prueba de clase (Tema 1).

Fecha 14 de noviembre de 2023.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Encuentra un sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^2$ en el que los puntos $(1,2)$ y $(3,4)$ tengan coordenadas, respectivamente, $(0,0)$ y $(0,1)$. Calcula el cambio de coordenadas de $\mathcal{R}$ al sistema de referencia usual.

Como $\mathcal{R}$ es un sistema de referencia de $\mathbb{R}^2$, será de la forma

$$\mathcal{R} = \{p\ ,\ \mathcal{B} = \{e_1, e_2\}\}\ \ p \in \mathbb{R}^2,\ \ \ e_1, e_2 \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}$$

Sabemos que $p = (1,2)$, ya que sus coordenadas son el $(0,0)_{\mathcal{R}}$. Además, el segundo vector de la base de $\mathcal{R}$ es el $\overrightarrow{(1,2)(3,4)} = (2,2)$, ya que $(3,4) = (0,1)_{\mathcal{R}}$, y por tanto $(3,4) = (0,0)_{\mathcal{R}} + 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 = (1,2) + e_2 \Rightarrow e_2 = (2,2)$. Nos faltará encontrar solo e_1. Como no se impone ninguna condición adicional en el enunciado bastará con que sea linealmente independiente de e_2. El $(1,0)$ nos vale. Consideremos entonces

$$\mathcal{R} = \{(1,2), \{(1,0), (2,2)\}\}$$

Con esto nos queda

$$M(\mathcal{R}_0 \leftarrow \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow (x,y)_{\mathcal{R}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (x,y)_{\mathcal{R}_0} = (x + 2y + 1, 2y + 2)_{\mathcal{R}}$$

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Demuestra que si a, b, c, d son cuatro puntos de un espacio afín $\mathcal{A}$ tales que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd}$, entonces se cumple que $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{bd}$.

Esta es la identidad del paralelogramo. Su demostración es sencilla:

$$\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cd} = \overrightarrow{bd}$$

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Calcula la expresión explícita en coordenadas usuales de una aplicación afín de $\mathbb{R}^2$ cuyo conjunto de puntos fijos sea la recta de ecuación implícita $x = 1$ (en coordenadas de sistema de referencia usual) y tal que la imagen del origen sea el punto $(2,2)$. ¿De qué aplicación se trata?

Como $f(0,0) = (2,2)$ y sabiendo que f es una aplicación afín de $\mathbb{R}^2$ podemos considerar

$$A = M(f; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & a & b \\ 2 & c & d \end{array}\right)$$

Sabemos que tiene una recta de puntos fijos. Es decir, $(A - I)(1,p) = 0 \Leftrightarrow p \in P_f$.

$$(A - I) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & a-1 & b \\ 2 & c & d-1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & a-1 & b \\ 2 & c & d-1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2 + a - 1 + bp_2 = 0 \\ 2 + c + p_2(d-1) = 0 \end{array}\right\} a = -1,\ b = 0,\ c = -2,\ d = 1$$

Esta solución verifica la condición $\forall p_2 \in \mathbb{R}^2$. Por tanto nos queda

$$A = M(f; \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Veamos ahora qué aplicación es. Tenemos que $|A| = -1$ por lo que tenemos un movimiento inverso con una recta de puntos fijos. Se trata de una reflexión axial con respecto a la recta dada por $x = 1$. Sin embargo no es ortogonal, como se puede ver al calcular $f(0,0)$. Estará orientada con respecto al vector $\overrightarrow{(0,0)f(0,0)} = \overrightarrow{(0,0)(2,2)} = (2,2)$.

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Sean $\mathcal{A}$ un espacio afín, $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación afín y $\mathcal{S} = p_0 + \mathcal{L}(\{v_0\})$ una recta en $\mathcal{A}$. Demuestra que $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ si, y solo si, $\overrightarrow{p_0 f(p_0)} \in \mathcal{L}(\{v_0\})$ y v_0 es un vector propio de $\overrightarrow{f}$ de autovalor no nulo.

Veamos ambas implicaciones:

$\Rightarrow$) Sea $p_0 \in \mathcal{S}$. Entonces, $f(p_0) \in f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, por lo que $\overrightarrow{p_0 f(p_0)} \in \overrightarrow{\mathcal{S}} = \mathcal{L}(\{v_0\})$. Falta por ver que v_0 es un vector propio de $\overrightarrow{f}$ de autovalor no nulo. Como $v_0 \in \overrightarrow{\mathcal{S}}$, entonces $\overrightarrow{f}(v_0) \in \overrightarrow{f}(\mathcal{S}) = \overrightarrow{f(\mathcal{S})} = \overrightarrow{\mathcal{S}} = \mathcal{L}(\{v_0\})$. Por tanto, se tiene que $\overrightarrow{f}(v_0) = \lambda v_0$, con $\lambda \neq 0$.

$\Leftarrow$) Sea $p_0 \in \mathcal{S}$, y veamos que $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Tenemos que $f(S) = f(p_0) + \mathcal{L}\{\overrightarrow{f}(v_0)\}$, y como v_0 es un vector propio de $\overrightarrow{f}$ de autovalor no nulo, entonces se tiene que $f(S) = f(p_0) + \mathcal{L}\{v_0\}$.

Como $p_0 \in \mathcal{S}$ y $\overrightarrow{p_0 f(p_0)} \in \overrightarrow{\mathcal{S}}$, entonces $f(p_0) \in \mathcal{S}$, por lo que $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.