

Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Übungs Blätter	5
1.3. Rechnen mit physikalischen Größen	5

1. Übungs Blätter

1.3. Rechnen mit physikalischen Größen

Ejercicio 1.3.1 (Fährverbindung). Eine Fähre bewegt sich mit der Eigengeschwindigkeit $v_0 = 4 \text{ m/s}$ (relativ zum Fluss) vom Uferpunkt A aus auf kürzestem Weg zum gegenüberliegenden Flussufer (Punkt B ; Abb. 1.1).

- Unter welchem Winkel α muss die Fähre gegen die Strömung gesteuert werden, wenn die Geschwindigkeit der Strömung den Betrag $v_s = 1,5 \text{ m/s}$ hat?

The Ferry wants to get to B in a straight line. Therefore, it must compensate the flow velocity by steering at an angle α against the flow. It is then needed that:

$$v_s = v_0 \sin(\alpha) \implies \alpha = \arcsin\left(\frac{v_s}{v_0}\right) = \arcsin\left(\frac{1,5}{4}\right) \approx 0,3844 \text{ rad} \approx 22,024^\circ$$

- Wie groß ist dann die resultierende Geschwindigkeit v_r der Fähre?

The resulting velocity v_r of the ferry is given by:

$$v_r = v_0 \cos(\alpha) = 4 \cos(0,3844) \approx 3,7081 \text{ m/s}$$

Ejercicio 1.3.2 (Elektrische Punktladungen im Koordinatensystem). Eine Punktladung $q_1 = 6,0 \mu\text{C}$ befindet sich in einem kartesischen Koordinatensystem bei $x_1 = 1,0 \text{ m}$, $y_1 = 0,5 \text{ m}$. Eine zweite Ladung $q_2 = -2,5 \mu\text{C}$ befindet sich in dessen Ursprung. Ein Elektron, d.h. eine dritte Punktladung, ist in einem Punkt mit den Koordinaten (x_e, y_e) . Berechnen Sie die Werte für x_e und y_e , bei denen sich das

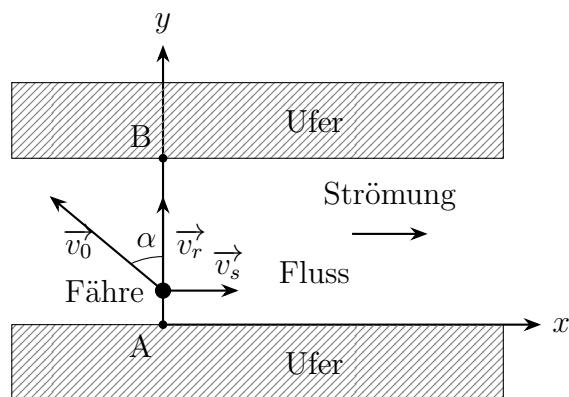


Figura 1.1: Fährverbindung über einen Fluss mit Strömung.

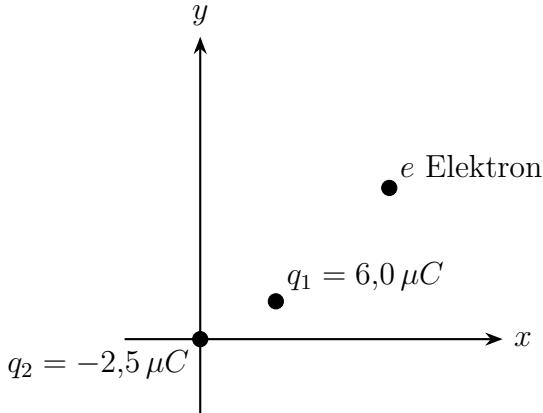


Figura 1.2: Punktladungen im Koordinatensystem.

Elektron im Gleichgewicht befindet, d.h. bei dem die Gesamtkraft auf das Elektron verschwindet.

Option 1 :

The forces acting on the electron due to the other two charges must cancel each other out for equilibrium. Let \vec{F}_{ei} be the force on the electron due to charge q_i . The forces can be expressed as:

$$\vec{F}_{e1} + \vec{F}_{e2} = 0$$

where, using that $q_e = -e < 0$ (the charge of the electron):

$$\vec{F}_{e1} = -k_e \frac{|q_1 e|}{r_{e1}^2} \hat{r}_{e1}, \quad \vec{F}_{e2} = k_e \frac{|q_2 e|}{r_{e2}^2} \hat{r}_{e2}$$

Here, k_e is Coulomb's constant, e is the elementary charge, r_{ei} is the distance between the electron and charge q_i , and \hat{r}_{ei} is the unit vector pointing from charge q_i to the electron. Using the values of r_{e1} and r_{e2} based on the coordinates of the charges and the electron, we have:

$$\vec{r}_{e1} = (x_e - 1, y_e - 0,5), \quad \vec{r}_{e2} = (x_e, y_e)$$

Therefore, the equilibrium condition becomes:

$$-k_e \frac{|q_1 e|}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)} \cdot \frac{(x_e - 1, y_e - 0,5)}{\sqrt{(x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2}} + k_e \frac{|q_2 e|}{(x_e^2 + y_e^2)} \cdot \frac{(x_e, y_e)}{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}} = 0$$

This vector equation can be separated into its x and y components, leading to a system of two equations with two unknowns (x_e and y_e). Solving this system will yield the coordinates of the electron in equilibrium.

$$\begin{aligned} -k_e \frac{|q_1 e|(x_e - 1)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e|x_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} &= 0 \\ -k_e \frac{|q_1 e|(y_e - 0,5)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e|y_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} &= 0 \end{aligned}$$

In an easier way:

$$\frac{|q_1|(x_e - 1)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)^{3/2}} = \frac{|q_2|x_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}}$$

$$\frac{|q_1|(y_e - 0,5)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)^{3/2}} = \frac{|q_2|y_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}}$$

As we can see, this system of equations is nonlinear and may require numerical methods or iterative approaches to solve for x_e and y_e . We should then approach the problem using another method.

Option 2 :

Given that $\vec{F}_{e1} = -\vec{F}_{e2}$, the forces must have the same magnitude but opposite directions. This implies that the electron must lie along the line connecting the two charges, with $x_e, y_e < 0$. Therefore:

$$y_e = \frac{y_1}{x_1}x_e = \frac{1}{2}x_e$$

On the other hand, equating the magnitudes of the forces:

$$|\vec{F}_{e1}| = |\vec{F}_{e2}| \implies k_e \frac{|q_1 e|}{r_{e1}^2} = k_e \frac{|q_2 e|}{r_{e2}^2} \implies \frac{|q_1|}{r_{e1}^2} = \frac{|q_2|}{r_{e2}^2} \implies \frac{|q_1|}{(x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2} = \frac{|q_2|}{x_e^2 + y_e^2}$$

Therefore, using the relation for y_e in terms of x_e , we have the following equation to solve for x_e :

$$\frac{|q_1|}{(x_e - 1)^2 + (\frac{1}{2}x_e - 0,5)^2} = \frac{|q_2|}{x_e^2 + (\frac{1}{2}x_e)^2}$$

$$6 \cdot \left(\frac{5}{4}x_e^2\right) = 2,5 \cdot \left(\frac{5}{4}x_e^2 - 2,5x_e + 1,25\right)$$

$$4,375x_e^2 + 6,25x_e - 3,125 = 0$$

$$x_e = \frac{-6,25 \pm \sqrt{(-6,25)^2 - 4 \cdot 4,375 \cdot (-3,125)}}{2 \cdot 4,375} = \frac{-5 \pm 2\sqrt{15}}{7}$$

Given that $x_e < 0$, we take:

$$x_e = -\frac{5 + 2\sqrt{15}}{7} \approx -1,8208 \text{ m}$$

$$y_e = \frac{1}{2}x_e = -\frac{5 + 2\sqrt{15}}{14} \approx -0,9104 \text{ m}$$

Ejercicio 1.3.3 (Die magnetische Kraft). Ein punktförmiges Teilchen mit einer Ladung $q = -3,64 \text{ nC}$ bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{v} = 2,75 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ \vec{e}_x , d.h. entlang der x-Achse. Berechnen Sie die Kraft, die folgende Felder auf das Teilchen ausüben:

1. $\vec{B} = 0,38 \text{ T } \vec{e}_y$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \vec{e}_z = \\ &= -3,64 \cdot 10^{-9} \cdot 2,75 \cdot 10^6 \cdot 0,38 \vec{e}_z = -3,8038 \cdot 10^{-3} \text{ N } \vec{e}_z\end{aligned}$$

2. $\vec{B} = T 0,75 \vec{e}_x + T 0,75 \vec{e}_y$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \vec{e}_z = \\ &= -3,64 \cdot 10^{-9} \cdot 2,75 \cdot 10^6 \cdot 0,75 \vec{e}_z = -7,5075 \cdot 10^{-3} \text{ N } \vec{e}_z\end{aligned}$$