# Álgebra II
# Examen VI

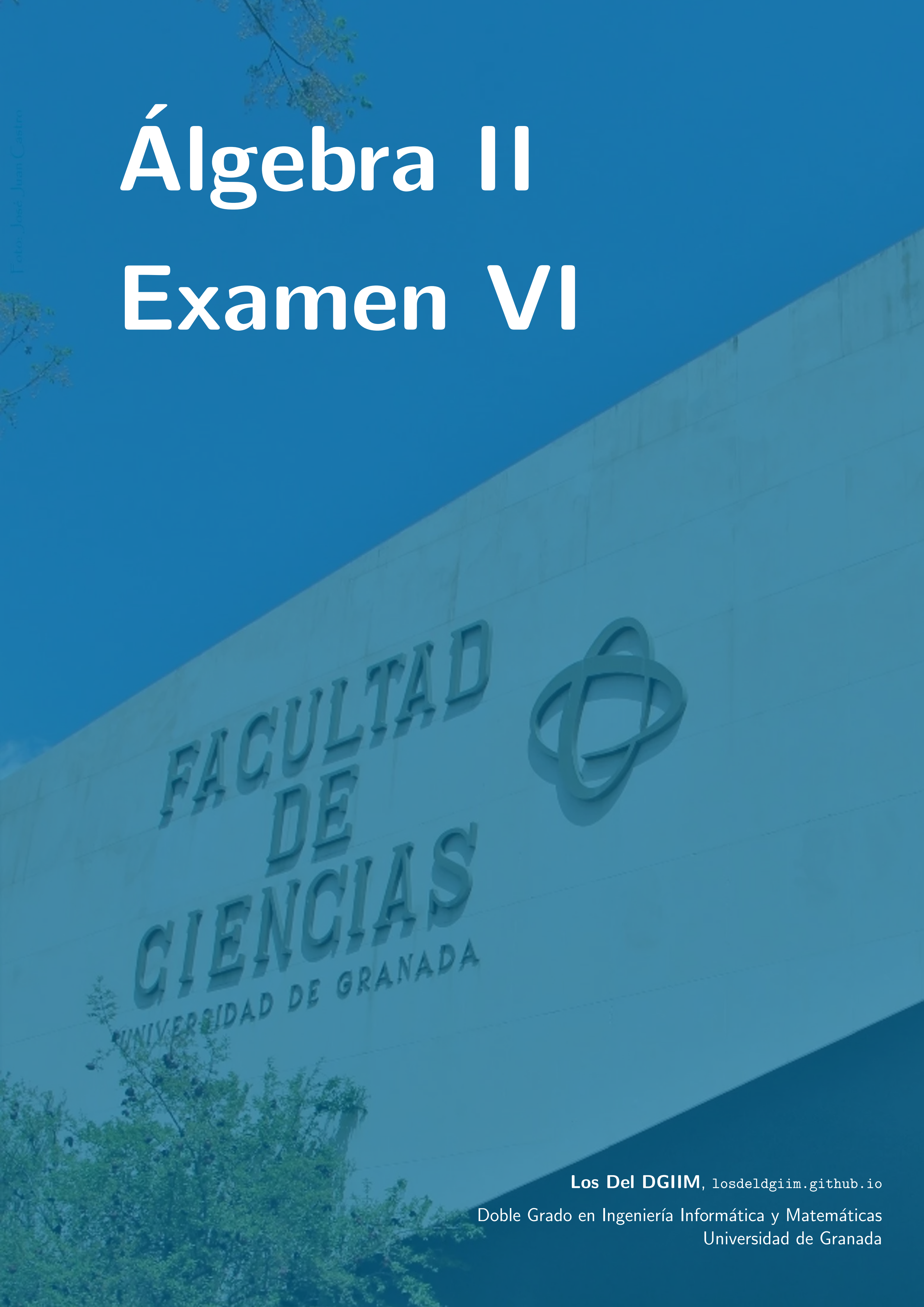


Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Álgebra II
# Examen VI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

**Asignatura** Álgebra II.

**Curso Académico** 2022-23.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Manuel Bullejos Lorenzo.

**Descripción** Convocatoria Extraordinaria.

**Ejercicio 1.** Da la descomposición en ciclos disjuntos y en transposiciones de la permutación $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(2\ 3\ 5)(1\ 2)$. Calcula su orden.

**Ejercicio 2.** Sea $G$ un grupo no abeliano de orden 27. Razona que su centro $Z(G)$ es un grupo cíclico.

**Ejercicio 3.** Prueba que todo grupo de orden 18 es un producto semidirecto.

**Ejercicio 4.** Da las descomposiciones cíclica y cíclica primaria del grupo $\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_6$.

**Ejercicio 5.** Sea $G$ un grupo de orden 18. ¿Puedes asegurar que $G$ tiene un elemento de orden 3? ¿Y de orden 9? Razona las respuestas.

**Ejercicio 6.** Sea $G$ un grupo de orden 18 no abeliano y $g \in G$ un elemento de orden 9. Razona que $G$ es isomorfo a $D_9$.

**Ejercicio 7.** ¿Es el grupo $D_8/Z(D_8)$ abeliano?

**Ejercicio 8.** Demuestra si se tiene que $S_3 \cong \mathrm{Aut}(C_9)$ o $C_6 \cong \mathrm{Aut}(C_9)$. Da el isomorfismo.

**Ejercicio 9.** Considera los grupos $C_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle$, $K = \langle b, c \mid b^2 = c^2 = (bc)^2 = 1 \rangle$ y la acción de $C_3$ sobre $K$ determinada por ${}^a b = bc$ y ${}^a c = b$. En el producto semidirecto $G = K \rtimes C_3$ calcula el producto $(b, a)^{-1}(bc, a^2)(c, a)^{-1}$.

**Ejercicio 10.** Para el grupo $G = K \rtimes C_3$ del ejercicio anterior, calcula el conmutador $[G, G]$.

**Ejercicio 1.** Da la descomposición en ciclos disjuntos y en transposiciones de la permutación $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(2\ 3\ 5)(1\ 2)$. Calcula su orden.

$$\sigma = (1\ 4)(3\ 5) \Longrightarrow O(\sigma) = \text{mcm}(2,2) = 2.$$

**Ejercicio 2.** Sea $G$ un grupo no abeliano de orden 27. Razona que su centro $Z(G)$ es un grupo cíclico.

Sea $Z(G)$ el centro de $G$. Como $|G| = 27 = 3^3$, $G$ es un $3-$grupo. Como $Z(G) < G$, sabemos que $|Z(G)| \mid 27$, luego $|Z(G)| \in \{1, 3, 9, 27\}$.

- Si $|Z(G)| = 1$, entonces $Z(G) = \{1\}$, pero $G$ es un $3-$grupo, luego llegamos a una contradicción con el Teorema de Burnside.
- Como $G$ es no abeliano, $Z(G) \neq G$, luego $|Z(G)| \neq 27$.
- Supongamos que $|Z(G)| = 9$. Entonces, como $Z(G) \lhd G$, tenemos que:

$$|G/Z(G)| = \frac{|G|}{|Z(G)|} = \frac{27}{9} = 3$$

  Luego $G/Z(G)$ es cíclico, y por tanto $G$ es abeliano, lo cual contradice la hipótesis.

Por tanto, $|Z(G)| = 3$, luego $Z(G) \cong C_3$ cíclico.

**Ejercicio 3.** Prueba que todo grupo de orden 18 es un producto semidirecto.

Sea $G$ un grupo de orden $18 = 2 \cdot 3^2$. Sea $n_p$ el número de $p$-subgrupos de Sylow de $G$. Por el Segundo Teorema de Sylow, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} n_3 \equiv 1 \mod 3 \\ n_3 \mid 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_3 = 1$$

Por tanto, hay un único 3-subgrupo de Sylow, que llamaremos $P_3$. Como $n_3 = 1$, $P_3$ es normal en $G$. Por el Primer Teorema de Sylow, tenemos $n_2 \geqslant 1$, luego sea $P_2$ un 2-subgrupo de Sylow de $G$.

- $P_3 \lhd G$ y $P_2 < G$.
- Como $|P_3| = 9$ y $|P_2| = 2$, razonando por órdenes tenemos que $P_3 \cap P_2\{1\}$.
- Por el Segundo Teorema de Isomorfía, tenemos que:

$$\frac{P_2}{P_2 \cap P_3} \cong \frac{P_2P_3}{P_3} \Longrightarrow |P_2P_3| = |P_2| \cdot |P_3| = 2 \cdot 9 = 18$$

  Por tanto, $P_2P_3 = G$.

Concluimos por tanto que $G \cong P_3 \rtimes P_2$.

**Ejercicio 4.** Da las descomposiciones cíclica y cíclica primaria del grupo $\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_6$.

La descomposición cíclica primaria de $\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_6$ es:

$$\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_6 \cong C_4 \oplus C_5 \oplus C_2 \oplus C_3$$

La descomposición cíclica de $\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_6$ es:

$$\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_6 \cong C_{60} \oplus C_2$$

**Ejercicio 5.** Sea $G$ un grupo de orden 18. ¿Puedes asegurar que $G$ tiene un elemento de orden 3? ¿Y de orden 9? Razona las respuestas.

Por el Teorema de Cauchy, como 3 es primo y $3 \mid 18$, tenemos que $\exists g \in G$ tal que $O(g) = 3$. Por tanto, $G$ tiene un elemento de orden 3.

Por otro lado, sea $G = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$. Supongamos que $\exists (a, b, c) \in G$ tal que $O((a, b, c)) = 9$. Entonces:

$$9 = \text{mcd}(O(a), O(b), O(c))$$

No obstante, tenemos que $O(a), O(b) \in \{1, 3\}$ y $O(c) \in \{1, 2\}$. Por tanto, no puede ser que $\text{mcd}(O(a), O(b), O(c)) = 9$. Por tanto, para este grupo $G$ no hay elementos de orden 9.

**Ejercicio 6.** Sea $G$ un grupo de orden 18 no abeliano y $g \in G$ un elemento de orden 9. Razona que $G$ es isomorfo a $D_9$.

Por el Ejercicio 3, sabemos que $G$ tiene un único 3-subgrupo de Sylow. Como $O(g) = 9$, entonces $|\langle G \rangle| = 9$, luego $\langle g \rangle$ es el único 3-subgrupo de Sylow de $G$. Por tanto:

$$G \cong \langle g \rangle \rtimes P_2$$

Buscamos ahora los homomorfismos $\theta : P_2 \to \text{Aut}(\langle g \rangle)$. Para ello, veamos en primer lugar los generadores de $\langle g \rangle$.

$$|\langle g \rangle| = 9 \Longrightarrow \varphi(9) = 2 \cdot 3 = 6$$

Por tanto, $\langle g \rangle$ tiene 6 generadores. Estos son:

$$\langle g \rangle = \langle g^2 \rangle = \langle g^4 \rangle = \langle g^5 \rangle = \langle g^7 \rangle = \langle g^8 \rangle$$

Por tanto, para cada $i \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, tenemos el automorfismo:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & \langle g \rangle & \longrightarrow & \langle g \rangle \\ & g & \longmapsto & g^i \end{array}$$

Ahora, hemos de ver qué automorfismos son válidos. Como $P_2$ es cíclico de orden 2, sea $P_2 = \langle b \mid b^2 = 1 \rangle$. Como $O(b) = 2$, entonces $O(\theta(b)) \mid 2$, luego $O(\theta(b)) \in \{1, 2\}$.

- Si $O(\theta(b)) = 1$, entonces $\theta(b) = Id$, luego $G \cong \langle g \rangle \times P_2$ es abeliano, lo cual contradice la hipótesis de que $G$ es no abeliano.

Por tanto, $O(\theta(b)) = 2$. Veamos ahora qué automorfismos son de orden 2:

$$(\varphi_i \circ \varphi_i)(g) = \varphi_i(\varphi_i(g)) = \varphi_i(g^i) = g^{i^2} = g \iff i^2 \equiv 1 \mod 9$$

Por tanto, tenemos que $i \in \{1, 8\}$. Pero como $O(\theta(b)) \neq 1$, tenemos que $i \neq 1$. Por tanto, $i = 8$. Por tanto, el único automorfismo válido es $\varphi_8$, luego:

$$bgb^{-1} = \varphi_8(g) = g^8 = g^{-1} \Longrightarrow bg = g^{-1}b$$

Por el Teorema de Dyck, como $b^2 = 1$, $g^9 = 1$ y $bg = g^{-1}b$, tenenemos que $f : D_9 \to G$ dada por:

$$f(s) = b \qquad f(r) = g$$

es un homomorfismo. Como $b, g$ son generadores de $P_2$ y $\langle g \rangle$ respectivamente, tenemos que $G = \langle g, b \rangle$, por lo que es sobreyectivo. Además, como $|G| = 18 = |D_9|$, tenemos que $f$ es un isomorfismo. Por tanto, $G \cong D_9$.

**Ejercicio 7.** ¿Es el grupo $D_8/Z(D_8)$ abeliano?

Por un ejercicio de las Relaciones, sabemos que $Z(D_8) = \{1, r^4\}$. Veamos que $D_8/Z(D_8)$ no es abeliano. Para ello, vemos que:

$$\begin{aligned}
&srZ(D_8) = \{sr, sr^5\} \\
&rsZ(D_8) = \{rs, rsr^4\} = \{sr^7, sr^7r^4\} = \{sr^7, sr^3\}
\end{aligned}$$

Como $srZ(D_8) \neq rsZ(D_8)$, tenemos que $D_8/Z(D_8)$ no es abeliano.

**Ejercicio 8.** Demuestra si se tiene que $S_3 \cong \text{Aut}(C_9)$ o $C_6 \cong \text{Aut}(C_9)$. Da el isomorfismo.

Sea $C_9 = \langle g \mid g^9 = 1 \rangle$. En el Ejercicio 6 vimos los 6 elementos de $\text{Aut}(C_9)$. Consideramos $\varphi_2 \in \text{Aut}(C_9)$, que es el automorfismo dado por:

$$\begin{array}{rccc}
\varphi_2 : & C_9 & \longrightarrow & C_9 \\
& g & \longmapsto & g^2
\end{array}$$

Aplicando $\varphi_2$, tenemos que:

$$g \mapsto g^2 \mapsto g^4 \mapsto g^8 \mapsto g^7 \mapsto g^5 \mapsto g$$

Por tanto, $O(\varphi_2) = 6$, y como el orden se mantiene por isomorfismos y $S_3$ no tiene elementos de orden 6, tenemos que $\text{Aut}(C_9) \ncong S_3$. Por tanto, hemos de ver si $\text{Aut}(C_9) \cong C_6$. El isomorfismo es:

$$\begin{array}{rccc}
\varphi : & C_6 & \longrightarrow & \text{Aut}(C_9) \\
& g & \longmapsto & \varphi_2
\end{array}$$

Como $\varphi_2^2 = Id$, por el Teorema de Dyck tenemos que $\varphi$ es un homomorfismo. Además, como $\varphi_2$ es un generador de $\text{Aut}(C_9)$, tenemos que $\varphi$ es sobreyectivo. Finalmente, como $|C_6| = 6 = |\text{Aut}(C_9)|$, tenemos que $\varphi$ es un isomorfismo. Por tanto, $\text{Aut}(C_9) \cong C_6$.

**Ejercicio 9.** Considera los grupos $C_3 = \langle a \mid a^3 = 1\rangle$, $K = \langle b, c \mid b^2 = c^2 = (bc)^2 = 1\rangle$ y la acción de $C_3$ sobre $K$ determinada por ${}^ab = bc$ y ${}^ac = b$. En el producto semidirecto $G = K \rtimes C_3$ calcula el producto $(b,a)^{-1}(bc,a^2)(c,a)^{-1}$.

Calculamos cada parte por separado:

$$\begin{aligned}
(b,a)^{-1} &= \left({}^{a^{-1}}b^{-1}, a^{-1}\right) = \left({}^{a^2}b, a^2\right) = \left({}^abc, a^2\right) = \left({}^ab\,{}^ac, a^2\right) = \\
&= (bcb, a^2) = (c^{-1}, a^2) = (c, a^2) \\
(c,a)^{-1} &= \left({}^{a^{-1}}c^{-1}, a^{-1}\right) = \left({}^{a^2}c, a^2\right) = \left({}^ab, a^2\right) = (bc, a^2) \\
(bc,a^2)(bc,a^2) &= \left(bc\,{}^{a^2}bc, a^2 \cdot a^2\right) = \left(bc\,{}^{a^2}b\,{}^{a^2}c, a\right) = (bcc\,{}^ab, a) = (bbc, a) = (c,a) \\
(b,a)^{-1}(bc,a^2)(c,a)^{-1} &= (c,a^2)(c,a) = \left(c\,{}^{a^2}c, a^2 \cdot a\right) = (c\,{}^ab, 1) = (cbc, 1) = (b,1)
\end{aligned}$$

**Ejercicio 10.** Para el grupo $G = K \rtimes C_3$ del ejercicio anterior, calcula el conmutador $[G,G]$.

Sabemos que $G' = [G,G]$ es el menor subgrupo normal de $G$ tal que $G/G'$ es abeliano. Por definición de producto semidirecto, sabemos que $K \lhd G$ y $|G/K| = 3$, luego $G/K$ es abeliano. Por tanto, sabemos que:

$$[G,G] \leqslant K$$

Calculemos $[(b,a),(b,1)]$:

$$\begin{aligned}
(b,a)(b,1)(b,a)^{-1}(b,1)^{-1} &= (c,a)(c,a^2)(b,1) \\
&= (bc,1)(b,1) = (c,1)
\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que, en primer lugar, $G$ no es abeliano (es decir, $[G,G] \neq 1$) y en segundo lugar que $\langle c\rangle \leqslant [G,G]$. Comprobamos que $\langle c\rangle$ no es normal en $G$:

$$(1,a)(c,1)(1,a)^{-1} = (b,a)(1,a^2) = (b,1) \notin \langle c\rangle$$

Por tanto, $[G,G] \neq \langle c\rangle$, y como $\langle c\rangle \leqslant [G,G] \leqslant K$ y $|K/\langle c\rangle| = 2$ que es primo (es decir, no existe ningún otro grupo normal distinto que contenga a $\langle c\rangle$ y esté contenido en $K$), se tiene que $[G,G] = K$.