Variable Compleja I

Examen VIII

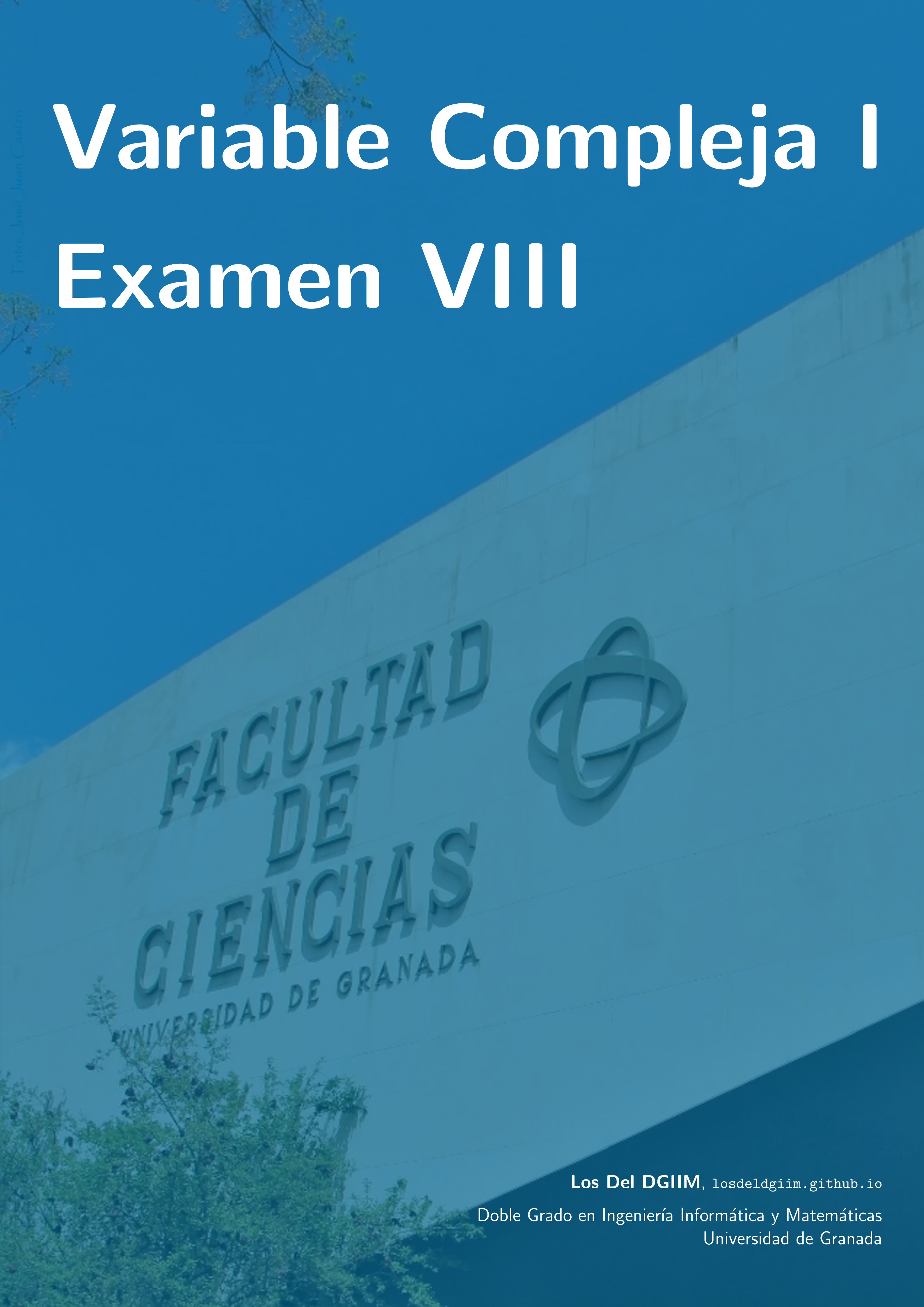

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen VIII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2017-18.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 25 de Abril de 2018.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (3.5 puntos)**.** Probar que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-zn}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω. Deducir que la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-zn}$$

es continua en Ω y calcular $\displaystyle\int_{C(2,1)} g(z)\, dz$.

Ejercicio 2 (3.5 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = \cos(\overline{z}) \qquad g(z) = (z-1)f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que la función $|f|$ no puede tener ningún máximo relativo estricto. Es decir, no pueden existir $z_0 \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ con $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ de modo que $|f(z_0)| > |f(z)|$ para cada $z \in \overline{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Ejercicio 1 (3.5 puntos)**.** Probar que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-zn}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω. Deducir que la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-zn}$$

es continua en Ω y calcular $\displaystyle\int_{C(2,1)} g(z)\, dz$.

Estudiamos en primer lugar la convergencia sobre compactos. Sea K un compacto de Ω. Como K es compacto y la parte real es continua, tenemos que $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$M = \text{mín}\{\operatorname{Re}(z) : z \in K\}$$

Por lo tanto, para todo $z \in K$ se tiene que:

$$\left|e^{-zn}\right| = e^{-\operatorname{Re}(zn)} = e^{-n\operatorname{Re}(z)} \leqslant e^{-nM} = (e^{-M})^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $e^{-M} < 1$, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (e^{-M})^n$ converge. Por el Test de Weierstrass, la serie de partida converge uniformemente en K.

Para la convergencia absoluta, consideramos $z \in \Omega$ fijo. Como $\{z\}$ es compacto, por el Test de Weierstrass tenemos que converge absolutamente en $\{z\}$. Como z es arbitrario, tenemos que la serie converge absolutamente en todo punto de Ω.

Para probar que g es continua, consideramos $z \in \Omega$. Como Ω es abierto, existe $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(z, R) \subset \Omega$. Considerando $R/2$, tenemos que $z \in \overline{D}(z, R/2) \subset \Omega$. Por ser este compacto, la serie converge uniformemente en $\overline{D}(z, R/2)$. Como el término general de la serie es continuo para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces g es continua en z. Como z es arbitrario, g es continua en Ω.

Como el integrando converge uniformemente en el compacto $C(2, 1) \subset \Omega$, podemos intercambiar la sumatoria y la integral, algo que nos será de utilidad a la hora de calcular la integral:

$$\int_{C(2,1)} g(z)\ dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C(2,1)} e^{-zn}\ dz \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

donde en $(*)$ hemos aplicado que dicha exponencial es entera y está definida en un dominio estrellado, luego por el Teorema Local de Cauchy admite primitiva en dicho dominio. Por lo tanto, la integral es nula.

Ejercicio 2 (3.5 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = \cos(\overline{z}) \qquad g(z) = (z-1)f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Estudiamos primero la función f. En vistas a aplicar el Teorema de Cauchy-Riemann, definimos $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy) = \cos(x)\cosh(-y) \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy) = -\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(-y) \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas parciales de u y v:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= -\operatorname{sen}(x)\cosh(-y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\cos(x)\operatorname{senh}(-y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= -\cos(x)\operatorname{senh}(-y) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= \operatorname{sen}(x)\cosh(-y) \end{aligned}$$

La primera condición de Cauchy-Riemann se cumple si y sólo si:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \iff \operatorname{sen}(x)\cosh(-y) = 0 \iff \operatorname{sen}(x) = 0$$

La segunda condición de Cauchy-Riemann se cumple si y sólo si:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \iff \cos(x)\operatorname{senh}(-y) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{c} \cos(x) = 0 \\ \vee \\ \operatorname{senh}(-y) = 0 \end{array} \right.$$

Para que se cumplan ambas condiciones, es necesario que se cumpla que $y = 0$ y $\operatorname{sen}(x) = 0$; es decir, $z \in \pi\mathbb{Z}$. Por tanto, f es holomorfa en $\pi\mathbb{Z}$ y no es holomorfa en ningún otro punto de $\mathbb{C}$.

Ahora, estudiamos la función g. Fijado $z \in \mathbb{C}$, distinguimos en función del valor de z:

- <u>Si $z \in \pi\mathbb{Z}$:</u>

  En este caso, f es derivable en z y por tanto g también lo es.

- <u>Si $z \notin \pi\mathbb{Z}$:</u>

  Distinguimos dos casos:

  - <u>Si $z = 1$:</u>

    $$g'(1) = \lim_{z \to 1} \frac{g(z) - g(1)}{z-1} = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)f(z)}{z-1} = \lim_{z \to 1} f(z) = f(1) = \cos 1$$

  - <u>Si $z \neq 1$:</u>

    Entonces:

    $$f(z) = \frac{g(z)}{z-1}$$

    Supuesto que g es derivable en z, entonces f también lo es. Pero como $z \notin \pi\mathbb{Z}$, f no es derivable en z. Por tanto, g no es derivable en z.

Por tanto, g es derivable en $\pi\mathbb{Z} \cup \{1\}$ y no lo es en ningún otro punto de $\mathbb{C}$.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que la función $|f|$ no puede tener ningún máximo relativo estricto. Es decir, no pueden existir $z_0 \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ con $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ de modo que $|f(z_0)| > |f(z)|$ para cada $z \in \overline{D}(z_0, r)\setminus\{z_0\}$.

Por reducción al absurdo, supongamos que existen $z_0 \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ y $|f(z_0)| > |f(z)|$ para cada $z \in \overline{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Entonces, para cada $z \in D(z_0, r)$, por la fórmul de Cauchy para la circunferencia se tiene que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z}\ dw$$

En particular, para $z_0 \in D(z_0, r)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi|i|} \left| \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z_0}\ dw \right| \leqslant \frac{2\pi r}{2\pi} \sup\left\{ \frac{|f(w)|}{|w - z_0|} : w \in C(z_0, r)^* \right\} \\
&= r \cdot \sup\left\{ \frac{|f(w)|}{r} : w \in C(z_0, r)^* \right\} = \sup\left\{|f(w)| : w \in C(z_0, r)^*\right\} \\
&\overset{(*)}{=} \max\left\{|f(w)| : w \in C(z_0, r)^*\right\} < |f(z_0)|
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos aplicado que f y el módulo son funciones continuas y $C(z_0, r)^*$ es compacto, luego dicho máximo se alcanza. La última desigualdad estricta se debe a la hipótesis, puesto que $C(z_0, r)^* \subset \overline{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Por tanto, hemos llegado a una contradicción.