

# Curvas y Superficies

Foto: José Juan Castro

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



**Los Del DGIIM**, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Curvas y Superficies

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026



# Índice general

<b>1. Curvas en el plano y en el espacio</b>	<b>5</b>
1.1. Definición. Curva regular. Longitud de arco . . . . .	5



# 1. Curvas en el plano y en el espacio

## 1.1. Definición. Curva regular. Longitud de arco

**Definición 1.1.** Una **curva** en el espacio es una aplicación diferenciable  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  donde  $I \subseteq \mathbb{R}$  es un intervalo abierto.

Normalmente, si queremos señalar explícitamente las componentes de  $\alpha$ , escribiremos:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

En realidad, a un geómetra solo le interesa la llamada “traza de la curva”:

$$\text{tr } \alpha = \text{im } \alpha = \alpha(I)$$

**Ejemplo.** Sean  $a \in \mathbb{R}^3$ ,  $v \in \mathbb{R}^3$ , definimos  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

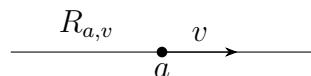
$$\alpha(t) = a + tv$$

En dicho caso:

$$\text{tr } \alpha = \begin{cases} \{a\} & \text{si } v = 0 \\ R_{a,v} & \text{si } v \neq 0 \end{cases}$$

donde denotamos por  $R_{a,v}$  a la única recta que pasar por  $a$  y con dirección  $v$ :

$$R_{a,v} = a + \langle v \rangle$$



**Definición 1.2.** Una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  se llama “**plana**” si existe un plano  $P \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $\text{tr } \alpha \subset P$ .

Como  $P$  y  $P(z = 0)$  son equivalentes salvo un movimiento rígido<sup>1</sup> de  $\mathbb{R}^3$ , podemos considerar que la curva  $\alpha$  está definida como  $\alpha : I \rightarrow P(z = 0) \subset \mathbb{R}^3$ , cuyas componentes son:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), 0) \equiv (x(t), y(t))$$

De esta forma, podemos abstraernos y pensar que una curva plana es una aplicación diferenciable  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

---

<sup>1</sup>Es decir, una aplicación afín que conserve longitudes y ángulos.

En los libros es común llamar a estar curvas “parametrizadas” y “diferenciables”. En nuestra definición imponemos que una curva ha de ser diferenciable, y el adjetivo parametrizada se debe a la dependencia de la variable independiente.

**Ejemplo.** Varios ejemplos de curvas:

1. Extrapolando el ejemplo anterior:

$$\alpha(t) = a + tv$$

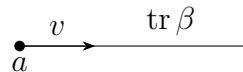
para  $a \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{R}^2$  y  $\alpha'(t) = v$ . Se trata de un Movimiento Rectilíneo Uniforme. Ahora, vemos que  $\alpha''(t) = 0$ , no hay aceleración ninguna.

2. Tomando  $a \in \mathbb{R}^2$  y  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , consideramos  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$\beta(t) = a + t^2v$$

Observamos ahora que tenemos  $\text{tr } \beta \subset \text{tr } \alpha$ , y la traza de esta curva es la semirrecta de extremo  $a$  y dirección  $v$ :

$$\text{tr } \beta = R_0^+(a, v)$$



Desde el punto de vista físico, muy en el pasado (límite en  $-\infty$ ) estábamos muy alejados del punto  $a$ . A medida que nos vamos acercando a tiempo 0 nos vamos acercando al punto  $a$  con una velocidad de módulo decreciente que se hace cero cuando alcanzamos el instante  $t = 0$  y que luego aumenta posteriormente mientras el móvil se aleja del punto  $a$  en la dirección en la que vino.

Vemos que tenemos una velocidad  $\beta'(t) = 2tv$ , así como una aceleración  $\beta''(t) = 2v$ , que es constante, por lo que estamos ante un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado.

El punto  $a$  (que se alcanza en  $t = 0$ ) es un punto extraño, es el único punto de  $\text{tr } \beta$  en su frontera. Además, podemos observar que en dicho punto tenemos  $\beta'(0) = 0$ .

**Ejercicio 1.1.1.** Estudiar  $\gamma(t) = a + t^3v$ , con  $a \in \mathbb{R}^2$  y  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

Es claro que  $\text{tr } \gamma = R_{a,v} = \text{tr } \alpha$ . En este caso tenemos:

$$\gamma'(t) = 3t^2v, \quad \gamma''(t) = 6tv$$

Vemos que la velocidad es siempre positiva y en este caso la aceleración no es constante: es decreciente cuando  $t < 0$  y es creciente cuando  $t > 0$ , simula la situación en la que un móvil se acerca al punto  $a$  frenando cada vez más fuerte y a medida que pasa el punto  $a$  comienza a acelerar cada vez más rápido.

**Ejemplo.** Siguiendo con más ejemplos:

3. Consideramos ahora  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$\delta(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$$

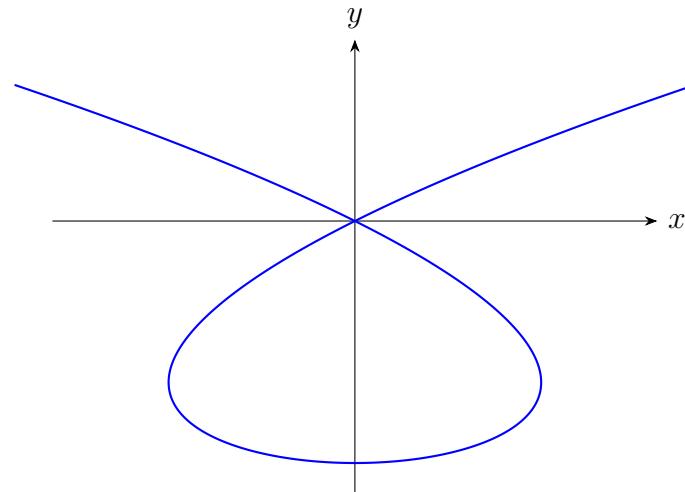
Para pensar la curva primero analizamos dónde esta corta el eje  $x$ :

$$t^2 - 4 = 0 \iff t = \pm 2$$

En dichas abscisas, la curva toma la ordenada:

$$\delta(-2) = 0 = \delta(2)$$

Por lo que en ambos instantes de tiempo la curva pasa por el origen. Si estudiamos el corte con el eje  $y$  vemos que tiene 3 puntos de corte, dos de ellos ya los conocemos y el que falta es en el instante  $t = 0$ ; donde alcanza una ordenada de  $-4$ . Teniendo en cuenta también los límites en  $-\infty$  y en  $+\infty$  podemos finalmente deducir que la curva será algo del estilo:



Vemos que esta curva tiene autointersecciones, por lo que las curvas no tienen por qué ser inyectivas.

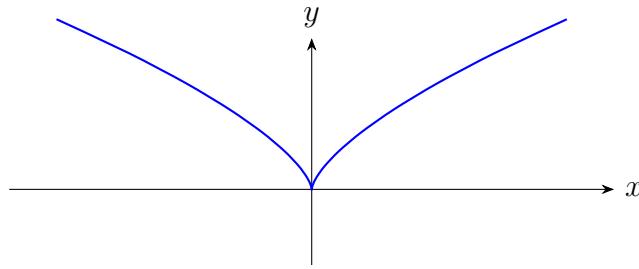
4. Si consideramos  $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\varepsilon(t) = (t^3, t^2)$ .

Su velocidad es  $\varepsilon'(t) = (3t^2, 2t)$ , que se anula en el origen. Observamos que en el dibujo de la traza vemos un pico.

Aunque  $\varepsilon$  sea diferenciable,  $\text{tr } \varepsilon$  tiene “picos”. Observamos además que  $\text{im } \varepsilon$  es la gráfica de la aplicación<sup>2</sup>  $y = x^{2/3}$ . Esta función no es derivable en el origen, a pesar de que la curva sí lo sea.

---

<sup>2</sup>Lo hemos obtenido igualando  $x = t^3$ ,  $y = t^2$ , despejando  $t$  de la primera e igualando en la segunda.



5. Sea  $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\zeta(t) = a + r (\cos(\frac{t}{r}) e_1 + \sin(\frac{t}{r}) e_2)$  donde  $a \in \mathbb{R}^3$ ,  $e_1, e_2$  con  $|e_1| = 1 = |e_2|$  con  $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$  y  $r > 0$ .

Observamos que tenemos siempre:

$$\zeta(t) \in P = a + \langle \{e_1, e_2\} \rangle \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Por lo que:

$$\text{im } \zeta = \text{tr } \zeta \subset P$$

Es decir,  $\zeta$  es una curva plana. Además, vemos que:

$$|\zeta(t) - a|^2 = r^2 \implies |\zeta(t) - a| = r \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Como  $\text{tr } \zeta$  no se puede salir del plano y equidista una cantidad  $r$  de  $a$ , tenemos que  $\text{tr } \zeta \subset C(a, r) \subset P$ .

A esta curva la llamaremos **la<sup>3</sup>** circunferencia de centro  $a$  y radio  $r > 0$  en  $P$ .

Observamos que:

$$\zeta'(t) = -\sin\left(\frac{t}{r}\right) e_1 + \cos\left(\frac{t}{r}\right) e_2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

No es constante, por lo que no es un MRU. Además vemos que  $\zeta''(t)$  no es constante, por lo que tampoco es un MRUA. Sin embargo, apreciamos que  $|\zeta''(t)|$  sí que es constante, así como que  $|\zeta'(t)| = 1$ .

Se trata de la traza de un Movimiento Circular Uniforme.

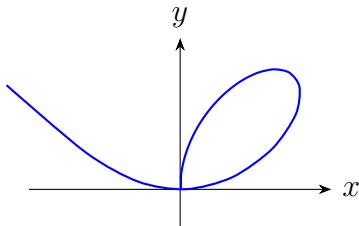
6. Sea  $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $I = ]-1, +\infty[$  dada por:

$$\eta(t) = \left( \frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$$

Si pensamos en su representación, tras un poco de análisis (límite en más y menos infinito, puntos de corte con los ejes, observar que si  $t > 0$  siempre se encuentra en el primer cuadrante, ...) podemos llegar a deducir que su forma ha de ser similar a algo como:

---

<sup>3</sup>A esta la parametrizaremos siempre de la misma forma, aunque distintas parametrizaciones den la misma traza.



Vemos que  $\eta(0) = (0, 0)$  y que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \eta(t) = (0, 0)$ , pero a pesar de ello la curva no se autointerseca, ya que podemos probar que es inyectiva:

Sean  $u, t \in \mathbb{R}$  con  $u, t > -1$  tales que  $\eta(t) = \eta(u)$  tenemos entonces que:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3t}{1+t^3} = \frac{3u}{1+u^3} \\ \frac{3t^2}{1+t^3} = \frac{3u^2}{1+u^3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3u^2}{1+u^3} = t \cdot \frac{3t}{1+t^3} = \frac{3ut}{1+u^3}$$

Si  $u \neq 0$  podemos dividir entre  $u$  y concluir que  $u = t$  y si  $u = 0$  ha de ser  $t = 0 = u$  para obtener  $\eta(t) = \eta(u)$ . Hemos probado que  $\eta$  es inyectiva.

Vemos otro hecho que hemos de tener en cuenta, y es que en este ejemplo  $I$  no es homeomorfo a  $\text{tr } \eta$ , puesto que si hubiera un homeomorfismo, podemos tomar cualquier entorno de  $\eta(0)$  este ha de contener una bola abierta de centro  $\eta(0)$  y radio  $r > 0$  lo suficientemente pequeña para que su intersección con  $\text{tr } \eta$  menos  $\eta(0)$  tenga 3 componentes conexas y la correspondiente imagen de este conjunto mediante el homeomorfismo tendría 2, lo que llevaría a una contradicción.

Si a esta curva le añadimos otra para que sea simétrica respecto al eje  $y = x$  obtenemos el *folium de Descartes*.

**Definición 1.3.** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva, definimos la **recta tangente** a la curva  $\alpha$  en el instante  $t \in I$  como la recta afín  $\alpha(t) + \langle \alpha'(t) \rangle$ , que denotaremos por  $R_{\alpha(t), \alpha'(t)} \equiv R_t$ .

Observemos que si  $\alpha'(t) = 0$  para cierto  $t \in I$   $\alpha(t) + \langle 0 \rangle$  no es una recta, es decir, en los puntos donde  $\alpha'(t) = 0$  no hay<sup>4</sup> recta tangente.

Los puntos  $\alpha(t)$  de  $\text{tr } \alpha$  tales que  $\alpha'(t) \neq 0$  se llaman **regulares**. En otro caso, los llamaremos **singulares**. La curva  $\alpha$  se dice **regular** si  $\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$ .

**Ejercicio 1.1.2.** Determinar las curvas regulares que han aparecido en los ejemplos anteriores.

- $\alpha(t) = a + tv$ , teníamos  $\alpha'(t) = v$ , por lo que  $\alpha$  es regular si y solo si  $v \neq 0$ .
- $\beta(t) = a + t^2v$ , tenemos  $\beta'(t) = 2tv$ , por lo que la curva no es regular, ya que el punto  $\beta(0)$  es singular.

<sup>4</sup>No diremos que la recta tangente es un punto.

- $\gamma(t) = a + t^3 v$ , tenemos  $\gamma'(t) = 3t^2 v$ , por lo que la curva no es regular, puesto que  $\gamma(0)$  es un punto singular.
- $\delta(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ , tenemos  $\delta'(t) = (3t^2 - 4, 2t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$  (la segunda componente solo se anula si  $t = 0$  y a la primera no le sucede esto), por lo que es una curva regular.
- $\varepsilon(t) = (t^3, t^2)$ ,  $\varepsilon'(t) = (3t^2, 2t)$  no es regular, el punto  $\varepsilon(0)$  es singular.
- $\zeta(t) = a + r(\cos(t/r)e_1 + \sin(t/r)e_2)$ , teníamos que  $|\zeta'(t)| = 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , por lo que se trata de una curva regular.
- $\eta : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por:

$$\eta(t) = \left( \frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$$

Tenemos que:

$$\eta'(t) = \left( \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}, \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \right)$$

Veamos si se anula la derivada en algún punto:

$$\begin{cases} 3-6t^3=0 & \iff t=\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \\ 6t-3t^3=0 & \iff t=0 \text{ ó } t=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Como ambos sucesos son incompatibles tenemos que  $\eta'(t) \neq 0 \quad \forall t \in ]-1, +\infty[$ .

**Ejemplo.** Más ejemplos de curvas:

1. La gráfica de una función real de variable real derivable es la traza de una curva (parametrizada diferenciable).

Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivable con  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto, tenemos:

$$\text{Gr } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y = f(x)\}$$

Definimos  $\alpha_f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha_f(t) = (t, f(t))$ .

Sin embargo, no toda curva es la gráfica de una función real de variable real, como por ejemplo la circunferencia.

2. Como primer ejemplo de una curva no plana,  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

$$\theta(t) = \left( a \cos \left( \frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), a \sin \left( \frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

para ciertos  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a^2 + b^2 = 0$ .

- Si  $a = 0$  (y por tanto  $b \neq 0$ ) obtenemos el eje  $z$  como  $\text{tr } \theta$ , es una curva plana.
- Si  $b = 0$  (y por tanto  $a \neq 0$ ) obtenemos una curva plana en el plano  $z = 0$ , cuya traza es  $C((0, 0, 0), |a|)$ .

- Si  $ab \neq 0$ , para  $t \in \mathbb{R}$  obtenemos:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = a^2$$

De donde:

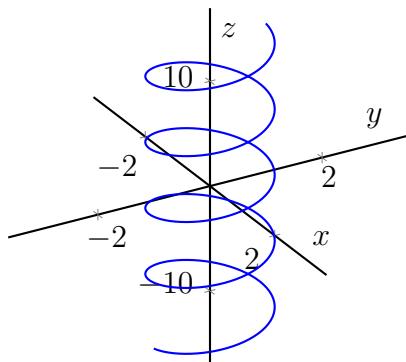
$$\theta(t) \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Así,  $\text{tr } \theta$  está contenido en un cilindro circular recto de eje el eje  $z$  y radio  $|a|$ .

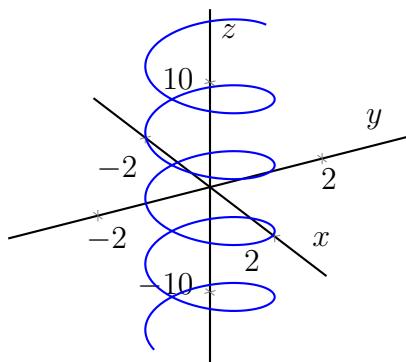
Si proyectamos la curva sobre el plano  $z = 0$  obtenemos puntos de la circunferencia, y cuando observamos la coordenada  $z$  a medida que incrementa  $t$  subimos o bajamos por el cilindro (dependiendo del signo de  $b$ ).

Esta traza recibe el nombre hélice circular recta de eje el eje  $z$  y radio  $|a|$ .

- Si  $ab > 0$  (ambos tienen el mismo signo), se dice que la hélice es levógira.



- En otro caso ( $ab < 0$ ) se dice que la hélice es dextrógira.



Ahora, si  $ab \neq 0$  veamos que la curva no es plana:

Por reducción al absurdo, si fuera plana tendríamos que existe un plano  $P \subset \mathbb{R}^3$

de forma que  $\text{tr } \theta \subset P$ . Podemos tomar los puntos de la curva:

$$\begin{aligned} p_1 &= \theta(0) = (a, 0, 0) \\ p_2 &= \theta\left(2\pi\sqrt{a^2 + b^2}\right) = (a, 0, 2b\pi) \\ p_3 &= \theta\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\right) = \left(0, a, \frac{\pi b}{2}\right) \\ p_4 &= \theta\left(\pi\sqrt{a^2 + b^2}\right) = (-a, 0, b\pi) \end{aligned}$$

Y como  $\text{tr } \theta \subset P$  tenemos por tanto que  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P$ . Si consideramos los vectores:

$$\begin{aligned} v_1 &= p_2 - p_1 = (0, 0, 2b\pi) \\ v_2 &= p_3 - p_1 = \left(-a, a, \frac{\pi b}{2}\right) \\ v_3 &= p_4 - p_1 = (-2a, 0, b\pi) \end{aligned}$$

Observemos que:

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & -2a \\ 0 & a & 0 \\ 2b\pi & \pi b/2 & b\pi \end{vmatrix} = 4a^2b\pi \neq 0$$

Por lo que  $v_1, v_2, v_3$  son tres vectores contenidos en un plano que son linealmente independientes, contradicción, que viene de suponer que  $\theta$  es una curva plana.