

# Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025



# Índice general

<b>1. Übungs Blätter</b>	<b>5</b>
1.3. Rechnen mit physikalischen Größen . . . . .	5
1.5. Komplexe Rechnung in physikalisch-technischen Zusammenhängen . .	9



# 1. Übungs Blätter

## 1.3. Rechnen mit physikalischen Größen

**Ejercicio 1.3.1** (Fährverbindung). Eine Fähre bewegt sich mit der Eigengeschwindigkeit  $v_0 = 4 \text{ m/s}$  (relativ zum Fluss) vom Uferpunkt  $A$  aus auf kürzestem Weg zum gegenüberliegenden Flussufer (Punkt  $B$ ; Abb. 1.1).

- Unter welchem Winkel  $\alpha$  muss die Fähre gegen die Strömung gesteuert werden, wenn die Geschwindigkeit der Strömung den Betrag  $v_s = 1,5 \text{ m/s}$  hat?

The Ferry wants to get to  $B$  in a straight line. Therefore, it must compensate the flow velocity by steering at an angle  $\alpha$  against the flow. It is then needed that:

$$v_s = v_0 \sin(\alpha) \implies \alpha = \arcsin\left(\frac{v_s}{v_0}\right) = \arcsin\left(\frac{1,5}{4}\right) \approx 0,3844 \text{ rad} \approx 22,024^\circ$$

- Wie groß ist dann die resultierende Geschwindigkeit  $v_r$  der Fähre?

The resulting velocity  $v_r$  of the ferry is given by:

$$v_r = v_0 \cos(\alpha) = 4 \cos(0,3844) \approx 3,7081 \text{ m/s}$$

**Ejercicio 1.3.2** (Elektrische Punktladungen im Koordinatensystem). Eine Punktladung  $q_1 = 6,0 \mu\text{C}$  befindet sich in einem kartesischen Koordinatensystem bei  $x_1 = 1,0 \text{ m}$ ,  $y_1 = 0,5 \text{ m}$ . Eine zweite Ladung  $q_2 = -2,5 \mu\text{C}$  befindet sich in dessen Ursprung. Ein Elektron, d.h. eine dritte Punktladung, ist in einem Punkt mit den Koordinaten  $(x_e, y_e)$ . Berechnen Sie die Werte für  $x_e$  und  $y_e$ , bei denen sich das

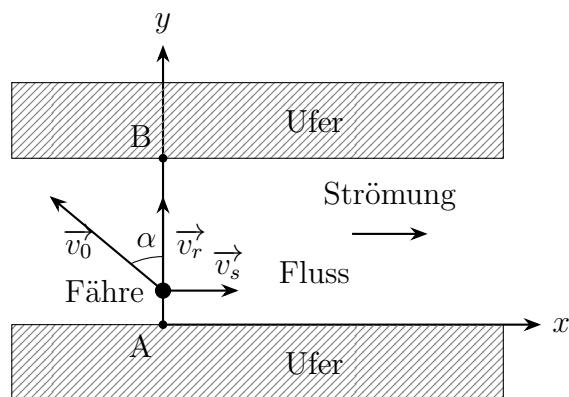


Figura 1.1: Fährverbindung über einen Fluss mit Strömung.

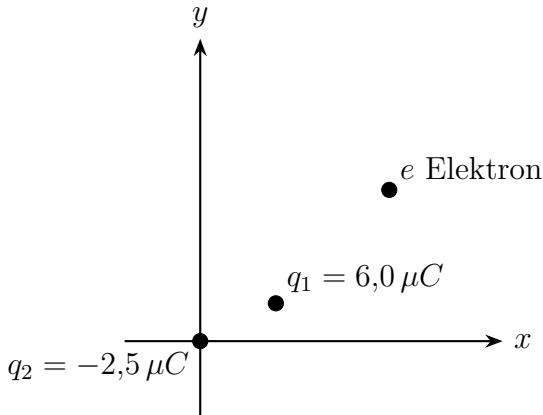


Figura 1.2: Punktladungen im Koordinatensystem.

Elektron im Gleichgewicht befindet, d.h. bei dem die Gesamtkraft auf das Elektron verschwindet.

### Option 1 :

The forces acting on the electron due to the other two charges must cancel each other out for equilibrium. Let  $\vec{F}_{ei}$  be the force on the electron due to charge  $q_i$ . The forces can be expressed as:

$$\vec{F}_{e1} + \vec{F}_{e2} = 0$$

where, using that  $q_e = -e < 0$  (the charge of the electron):

$$\vec{F}_{e1} = -k_e \frac{|q_1 e|}{r_{e1}^2} \hat{r}_{e1}, \quad \vec{F}_{e2} = k_e \frac{|q_2 e|}{r_{e2}^2} \hat{r}_{e2}$$

Here,  $k_e$  is Coulomb's constant,  $e$  is the elementary charge,  $r_{ei}$  is the distance between the electron and charge  $q_i$ , and  $\hat{r}_{ei}$  is the unit vector pointing from charge  $q_i$  to the electron. Using the values of  $r_{e1}$  and  $r_{e2}$  based on the coordinates of the charges and the electron, we have:

$$\vec{r}_{e1} = (x_e - 1, y_e - 0,5), \quad \vec{r}_{e2} = (x_e, y_e)$$

Therefore, the equilibrium condition becomes:

$$-k_e \frac{|q_1 e|}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)} \cdot \frac{(x_e - 1, y_e - 0,5)}{\sqrt{(x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2}} + k_e \frac{|q_2 e|}{(x_e^2 + y_e^2)} \cdot \frac{(x_e, y_e)}{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}} = 0$$

This vector equation can be separated into its  $x$  and  $y$  components, leading to a system of two equations with two unknowns ( $x_e$  and  $y_e$ ). Solving this system will yield the coordinates of the electron in equilibrium.

$$\begin{aligned} -k_e \frac{|q_1 e|(x_e - 1)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e|x_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} &= 0 \\ -k_e \frac{|q_1 e|(y_e - 0,5)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e|y_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} &= 0 \end{aligned}$$

In an easier way:

$$\frac{|q_1|(x_e - 1)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)^{3/2}} = \frac{|q_2|x_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}}$$

$$\frac{|q_1|(y_e - 0,5)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)^{3/2}} = \frac{|q_2|y_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}}$$

As we can see, this system of equations is nonlinear and may require numerical methods or iterative approaches to solve for  $x_e$  and  $y_e$ . We should then approach the problem using another method.

### Option 2 :

Given that  $\vec{F}_{e1} = -\vec{F}_{e2}$ , the forces must have the same magnitude but opposite directions. This implies that the electron must lie along the line connecting the two charges, with  $x_e, y_e < 0$ . Therefore:

$$y_e = \frac{y_1}{x_1}x_e = \frac{1}{2}x_e$$

On the other hand, equating the magnitudes of the forces:

$$|\vec{F}_{e1}| = |\vec{F}_{e2}| \implies k_e \frac{|q_1 e|}{r_{e1}^2} = k_e \frac{|q_2 e|}{r_{e2}^2} \implies \frac{|q_1|}{r_{e1}^2} = \frac{|q_2|}{r_{e2}^2} \implies \frac{|q_1|}{(x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2} = \frac{|q_2|}{x_e^2 + y_e^2}$$

Therefore, using the relation for  $y_e$  in terms of  $x_e$ , we have the following equation to solve for  $x_e$ :

$$\frac{|q_1|}{(x_e - 1)^2 + (\frac{1}{2}x_e - 0,5)^2} = \frac{|q_2|}{x_e^2 + (\frac{1}{2}x_e)^2}$$

$$6 \cdot \left(\frac{5}{4}x_e^2\right) = 2,5 \cdot \left(\frac{5}{4}x_e^2 - 2,5x_e + 1,25\right)$$

$$4,375x_e^2 + 6,25x_e - 3,125 = 0$$

$$x_e = \frac{-6,25 \pm \sqrt{(-6,25)^2 - 4 \cdot 4,375 \cdot (-3,125)}}{2 \cdot 4,375} = \frac{-5 \pm 2\sqrt{15}}{7}$$

Given that  $x_e < 0$ , we take:

$$x_e = -\frac{5 + 2\sqrt{15}}{7} \approx -1,8208 \text{ m}$$

$$y_e = \frac{1}{2}x_e = -\frac{5 + 2\sqrt{15}}{14} \approx -0,9104 \text{ m}$$

**Ejercicio 1.3.3** (Die magnetische Kraft). Ein punktförmiges Teilchen mit einer Ladung  $q = -3,64 \text{ nC}$  bewegt sich mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v} = 2,75 \cdot 10^6 \text{ m/s } \vec{e}_x$ , d.h. entlang der x-Achse. Berechnen Sie die Kraft, die folgende Felder auf das Teilchen ausüben:

1.  $\vec{B} = 0,38 \text{ T } \vec{e}_y$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \vec{e}_z = \\ &= -3,64 \cdot 10^{-9} \cdot 2,75 \cdot 10^6 \cdot 0,38 \vec{e}_z = -3,8038 \cdot 10^{-3} \text{ N } \vec{e}_z\end{aligned}$$

2.  $\vec{B} = T 0,75 \vec{e}_x + T 0,75 \vec{e}_y$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \vec{e}_z = \\ &= -3,64 \cdot 10^{-9} \cdot 2,75 \cdot 10^6 \cdot 0,75 \vec{e}_z = -7,5075 \cdot 10^{-3} \text{ N } \vec{e}_z\end{aligned}$$

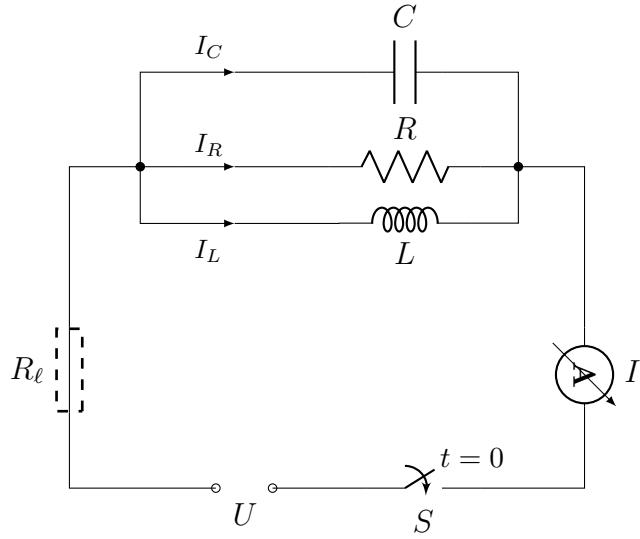


Figura 1.3: Skizze zur Aufgabe 1.5.2

## 1.5. Komplexe Rechnung in physikalisch-technischen Zusammenhängen

**Ejercicio 1.5.1.** Zeigen Sie durch Rechnung in komplexer Form: Drei gleichfrequente, sinusförmige Wechselströme  $i_1$ ,  $i_2$  und  $i_3$  mit den Amplituden  $i_0$ , der Kreisfrequenz  $\omega > 0$  und den Nullphasenwinkeln  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 2/3\pi$  und  $\varphi_3 = 4/3\pi$  löschen sich bei ungestörter Überlagerung gegenseitig aus, d.h.  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ .

Let  $\underline{i}_1(t)$ ,  $\underline{i}_2(t)$  und  $\underline{i}_3(t)$  be:

$$\begin{aligned}\underline{i}_1(t) &= i_0 \cdot e^{j(\omega t+0)} = i_0 \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{i}_2(t) &= i_0 \cdot e^{j(\omega t+2/3\pi)} = i_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j2/3\pi} \\ \underline{i}_3(t) &= i_0 \cdot e^{j(\omega t+4/3\pi)} = i_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j4/3\pi}\end{aligned}$$

Therefore:

$$\begin{aligned}\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \underline{i}_3(t) &= i_0 \cdot e^{j\omega t} (e^{j0} + e^{j2/3\pi} + e^{j4/3\pi}) = \\ &= i_0 \cdot e^{j\omega t} \left( 1 + \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \\ &= i_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Therefore, we have shown that:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = \Im(\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \underline{i}_3(t)) = \Im(0) = 0$$

**Ejercicio 1.5.2** (Resonanz im Parallelschwingkreis). Der in Abbildung 1.3 skizzierte Parallelschwingkreis mit dem ohmschen Widerstand  $R = 10 \Omega$ , der Induktivität  $L = 0,2 \text{ H}$  und der Kapazität  $C = 10 \text{ mF}$  wird durch eine Wechselstromquelle mit dem Effektivwert  $I = 10 \text{ A}$  und der variablen Kreisfrequenz  $\omega$  zu elektromagnetischen Schwingungen angeregt.

1. Im Resonanzfall sind der Gesamtstrom  $I$  und die angelegte Spannung  $U$  in Phase, d.h.  $\varphi_I - \varphi_U = 0$ . Bei welcher Kreisfrequenz  $\omega_0$  tritt dieser Fall ein? Wie groß ist dann der komplexe Gesamtwiderstand  $Z$ ?

The complex resistance is:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\sqrt{2}Ue^{j(\omega t+\varphi_U)}}{\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\varphi_I)}} = \frac{U}{I}e^{j(\varphi_U-\varphi_I)} \stackrel{(*)}{=} \frac{U}{I}e^{j0} = \frac{U}{I} \in \mathbb{R}$$

where in  $(*)$  we used the fact that in resonance  $\varphi_U = \varphi_I$ .

We can calculate the complex resistance as:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}} &= \frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_C} \\ &= \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \\ \Rightarrow \underline{Z} &= \frac{1}{\frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} + j\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)} \end{aligned}$$

Given that  $\underline{Z} \in \mathbb{R}$ , we have that the imaginary part must be zero:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\omega_0 L} + \omega_0 C &= 0 \implies \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \implies \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \implies \\ \implies \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{0,2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}} = \sqrt{500} \approx 22,36 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Therefore, we have that:

$$\underline{Z} = Z = R = 10 \Omega$$

2. Wie ändert sich die Situation, wenn die Zuleitungen nicht mehr als ideal angenommen werden und einen ohmschen Widerstand  $R_\ell$  beitragen? Welche Werte haben  $\omega_0$  und  $Z$  dann?

In this case, we have:

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)} + R_\ell$$

Therefore,  $\omega_0$  does not change, but:

$$\underline{Z} = Z = R + R_\ell = 10 + R_\ell$$

**Ejercicio 1.5.3** (Wechselstrommessbrücke). Mit der in Abbildung 1.4 dargestellten Brückenschaltung lässt sich ein unbekannter komplexer Widerstand  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_X$  wie folgt bestimmen: Bei vorgegebenen (komplexen) Widerständen  $\underline{Z}_2$  und  $\underline{Z}_3$  wird der stetig veränderbare komplexe Widerstand  $\underline{Z}_4$  so eingestellt, dass der Brückenzweig A–B stromlos wird. Das in die Brücke geschaltete Wechselstromampermeter mit dem (bekannten) Innenwiderstand  $\underline{Z}_5$  dient dabei lediglich als Nullindikator.

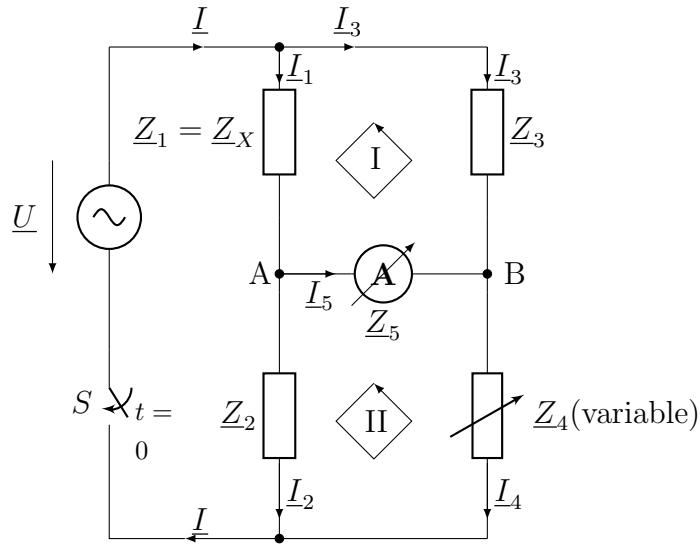


Figura 1.4: Skizze zur Aufgabe 1.5.3.

- Wie lautet die sogenannte Abgleichbedingung, d.h. die Bedingung für die Stromlosigkeit des Brückenzweiges A-B?
- In einem konkreten Fall haben die festen Widerstände  $Z_2$  und  $Z_3$  folgende Werte:

$$\begin{aligned}Z_2 &= 10\Omega - j \cdot 2\Omega, \\Z_3 &= 8\Omega - j \cdot 6\Omega.\end{aligned}$$

Die Brücke A-B wird dabei genau dann stromlos, wenn der variable Widerstand  $Z_4$  auf den Wert

$$Z_4 = 5\Omega - j \cdot 2\Omega$$

eingestellt wird. Welchen Wert besitzt dann der (zunächst noch unbekannte) Widerstand  $Z_x$ ?

**Ejercicio 1.5.4** (Wechselstromparadoxon). Der in Bild 1.5 dargestellte Wechselstromkreis enthält die ohmschen Widerstände  $R$  und  $R_x$  und einen zu  $R_x$  parallel geschalteten Kondensator mit der Kapazität  $C$ . Beim Anlegen einer Wechselspannung  $U$  mit der Kreisfrequenz  $\omega$  fließt der Gesamtstrom  $I$ , dessen Effektivwert  $I$  durch das zugeschaltete Wechselstrommessgerät  $A$  gemessen wird. Der Innenwiderstand  $R_i$  des Geräts sei im Widerstand  $R$  bereits enthalten. Zeigen Sie: Der ohmsche Widerstand  $R_x$  lässt sich so wählen, dass die Stromanzeige unabhängig ist von der Stellung des Schalters  $S$  (geschlossen oder offen; sog Wechselstromparadoxon).

We have two options:

- Switch open: In this case, everything is connected in serial and  $I_1 = 0$ . Therefore:

$$Z_{\text{open}} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{1}{\omega C} \cdot j$$

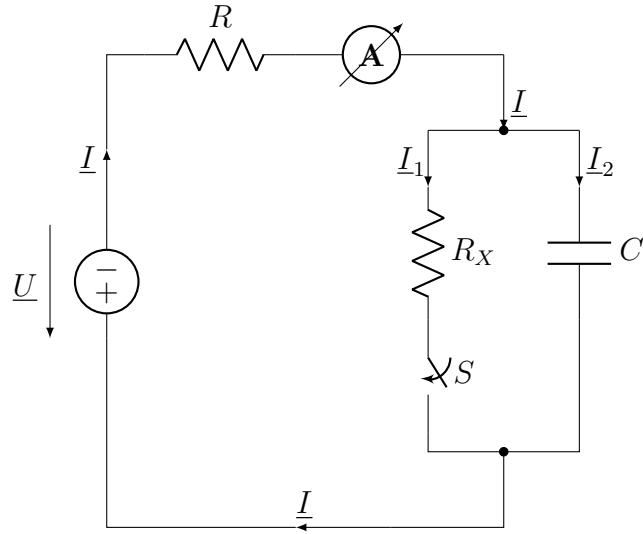


Figura 1.5: Skizze zur Aufgabe 1.5.4.

■ Switch closed:

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_{\text{closed}} &= R + \frac{1}{\frac{1}{R_X} + j\omega C} = \left( R + \frac{\frac{1}{R_X}}{\frac{1}{R_X^2} + \omega^2 C^2} \right) - \frac{j\omega C}{\frac{1}{R_X^2} + \omega^2 C^2} = \\
 &= \left( R + \frac{R_X}{1 + (R_X \omega C)^2} \right) - \frac{R_X^2 \omega C}{1 + (R_X \omega C)^2} \cdot j = \\
 &= \frac{R(1 + (R_X \omega C)^2) + R_X}{1 + (R_X \omega C)^2} - \frac{R_X^2 \omega C}{1 + (R_X \omega C)^2} \cdot j
 \end{aligned}$$

In order that the current does not depend on the position of the switch, it is needed:

$$\widehat{I}_{\text{closed}} = \widehat{I}_{\text{open}} \implies |\underline{I}_{\text{closed}}| = |\underline{I}_{\text{open}}| \implies \left| \frac{\underline{U}_{\text{closed}}}{\underline{Z}_{\text{closed}}} \right| = \left| \frac{\underline{U}_{\text{open}}}{\underline{Z}_{\text{open}}} \right|$$

Given that  $\underline{U}_{\text{open}} = \underline{U}_{\text{closed}}$ , we only need that:

$$\begin{aligned}
 |\underline{Z}_{\text{closed}}| &= |\underline{Z}_{\text{open}}| \implies |\underline{Z}_{\text{closed}}|^2 = |\underline{Z}_{\text{open}}|^2 \implies \\
 \implies R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} &= \frac{(R(1 + (R_X \omega C)^2) + R_X)^2 + (R_X^2 \omega C)^2}{(1 + (R_X \omega C)^2)^2} \implies \\
 \implies (R(1 + (R_X \omega C)^2))^2 + \frac{(1 + (R_X \omega C)^2)^2}{\omega^2 C^2} &= (R(1 + (R_X \omega C)^2))^2 + R_X^2 + 2R_X R(1 + (R_X \omega C)^2) + (R_X^2 \omega C)^2 \implies \\
 \implies \frac{(1 + (R_X \omega C)^2)^2}{\omega^2 C^2} &= R_X^2 + 2R_X R(1 + (R_X \omega C)^2) + (R_X^2 \omega C)^2 \implies \\
 \implies 1 + 2(R_X \omega C)^2 &= (R_X \omega C)^2 + 2\omega^2 C^2 R_X R(1 + (R_X \omega C)^2) \implies \\
 \implies 1 + (R_X \omega C)^2 &= 2\omega^2 C^2 R_X R(1 + (R_X \omega C)^2) \implies \\
 \implies (2\omega^2 C^2 R_X R - 1)(1 + (R_X \omega C)^2) &= 0
 \end{aligned}$$

Therefore, the only possible solution is:

$$R_X = \frac{1}{2R(\omega C)^2}$$

Using that value of  $R_X$ , we will measure the same current value with the switch opened and closed.