# Análisis Funcional


**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Análisis Funcional

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2023-2024

# Índice general

# Repaso

**Definición 0.1** (Espacio normado)**.** $E$ un espacio vectorial y $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ una función que verifica:

1. $\|x\| \geqslant 0 \ \forall x \in E$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
4. $\|\lambda x\| = |\lambda| \ \forall x, y \in E, \ \lambda \in \mathbb{R}$

A esta función la llamaremos **norma** y diremos que $E$ es un **espacio normado**

Podemos definir además una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \|x - y\|$ $\forall x, y \in E$ a la que llamaremos **distancia**.

Decimos que un espacio $E$ es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Si $E$ es un espacio normado completo, entonces $(E, \|.\|)$ es un **espacio de Banach**.

**Definición 0.2** (Espacio prehilbertiano)**.** Sea $H$ es un espacio vectorial, un **producto escalar** es una función $(\cdot, \cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ tal que verifica las siguientes propiedades:

1. **Bilineal:** para todo $x, y, z \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$
$$(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z)$$

2. **Simétrica:** $(x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in H$
3. **Positiva:** $(x, x) \geqslant 0 \quad \forall x \in H$
4. **Definida positiva:** $(x, x) > 0 \quad \forall x \in H \setminus \{0\}$

Las dos últimas propiedades se pueden resumir en $(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Diremos que $(H, (\cdot, \cdot))$ es un **espacio prehilbertiano**.

Todo espacio prehilbertiano es en particular un espacio normado, ya que podemos definir $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ que es claramente una norma.

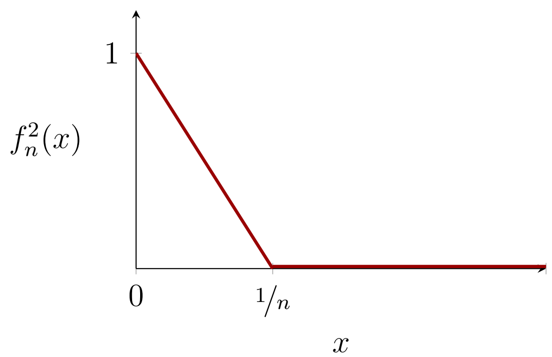
Si $\|\cdot\|$ es completa, diremos que $(H, (\cdot, \cdot))$ es un **espacio de Hilbert**.

**Ejemplo.** Los siguientes espacios son de Banach:

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. $(\mathbb{R}^N, |\cdot|)$, donde $|x| = |(x_1, x_2, \ldots, x_N)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}$. Además es de Hilbert ya que $(x, y) = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$ es un producto escalar.
3. Dado[1] $A \subset \mathbb{R}^N$ tomamos $\mathcal{C}_b(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y acotada en } A\}$. Podemos definir una norma en este espacio como
$$\|f\|_{\mathcal{C}_b(A)} = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$$
4. Tomamos $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto. Consideramos el conjunto de las funciones continuas en $K$ denotado por $\mathcal{C}(K)$ y el espacio $(K, (\cdot, \cdot))$, donde
$$(f, g) = \int_K f(x) g(x) dx$$
es un producto escalar que hace a este un espacio prehilbertiano. Tendríamos
$$\|f\| = \left( \int_K f(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

**Ejemplo** (El espacio del punto 4 No es de Hilbert)**.** Veámoslo con un contraejemplo.

Tomamos $K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ y podemos definir $\forall n \in \mathbb{N}$ la función $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ tal que $f_n^2$ viene dada por la siguiente gráfica:




De esta forma tenemos que
$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 f_n^2(x) dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2n} \Rightarrow \|f_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n}} \to 0$$
y vemos que
$$\begin{cases} \{f_n(x)\} \to 0 & \forall x \in (0, 1] \\ \{f_n(0) = 1\} \to 1 & \end{cases}$$

[1] la $b$ de $\mathcal{C}_b$ viene de *bounded* (acotado en inglés)

Con esto tenemos que la sucesión $\{f_n\} \to 0$ en $(\mathcal{L}([0,1]), (\cdot,\cdot))$ (ya que la norma converge a 0).

PARA MAÑANA RESOLVER QUÉ ES LO QUE NO ESTÁ CLARO (la contradicción para ser espacio de Hilbert).

**Ejemplo.** Consideramos $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$ medible, entonces podemos definir

$$L^2(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega)/\sim = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \int_\Omega f(x)^2 dx < \infty\}$$

$L^2(\Omega)$ con la norma definida anteriormente (en el punto 4) es un espacio de Hilbert (teorema de Fischer)

**Ejemplo.** Sea $1 \leqslant p < \infty$. Consideramos el conjunto

$$L^p(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medibles } : \int_\Omega |f|^p dx < \infty\right\}$$

Entonces tenemos que con la norma definida como

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p}$$

es un espacio de Banach. Recordemos para este resultado la desigualdad de Hölder y Minkowski. Definimos para ello el conjugado de $p$ de la siguiente forma[2]:

$$p' = \left\{\begin{array}{lll} \frac{p}{p-1} & \text{si} & 1 < p < \infty \\ \\ \infty & \text{si} & p = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \forall p \in [1, \infty)$$

Con esto tendremos que

$$\left.\begin{array}{l} f \in L^p(\Omega) \\ g \in L^{p'}(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow fg \in L^1(\Omega)$$

Además, se tiene que

$$\int |f(x)g(x)| dx \leqslant \left(\int |f|^p dx\right)^{1/p} \left(\int |f|^{p'} dx\right)^{1/p'} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

**Ejemplo.**

1. $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$ con $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^N |x_i|^p)^{1/p} (x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$.
2. $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$ con $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| : i = 1, \dots, N\}$

[2]donde asumimos que $1/\infty = 0$

3. Sea $p = \infty$. Tenemos

$$L^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\} < \infty\}$$

A este supremo lo llamaremos **supremo esencial**, que se define de la siguiente forma[3]:

$$\sup_\Omega |f| = \text{ínf}\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \quad a.e. \ x \in \Omega\}$$

En algunos libros se denota por $ess \sup$.

Podremos reescribir lo anterior como

$$L^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \sup_\Omega |f| < \infty\}$$

Entonces el espacio $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ con $\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f|$ es un espacio de Banach.

La desigualdad de Hölder con $p = \infty$, $p' = 1$ nos dice que para $f \in L^\infty(\Omega)$, $g \in L^1(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y $\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1}$ es una norma en $H$.

**Ejemplo.** Consideramos $1 \leqslant p < \infty$ y definimos el conjunto de sucesiones.

$$\mathcal{L}^p = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p < \infty\}$$

Si definimos ahora

$$\|x\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p\right)^{1/p}$$

entonces $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach. Para verlo podemos tomar $x \in \mathcal{L}^p$, $y \in \mathcal{L}^{p'}$ y tenemos que

$$xy \in \mathcal{L}^1 \quad \text{y} \quad \|xy\|_{\mathcal{L}^1} \leqslant \|x\|_{\mathcal{L}^p} \|y\|_{\mathcal{L}^{p'}}$$

de la que se deduce la desigualdad de Mikowsky.

Para $p = 2$ tenemos que $(\mathcal{L}^2, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Hilbert. Para $p = \infty$ podemos definir $\mathcal{L}^\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ sucesión acotada}\}$ y con $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ es un espacio de Banach.

**Ejemplo.** Podemos considerar los siguientes subespacios que seguirán siendo espacios de Banach:

1. Tomamos $C = \{x \in \mathcal{L}^\infty : x \text{ es convergente}\}$ y es un subespacio de $\mathcal{L}^\infty$.

2. Podemos tomar otro subespacio de este, $C_0 = \{x \in C : x \text{ es convergente a } 0\}$ que de nuevo es un subespacio de $\mathcal{L}^\infty$.

[3] *a.e* viene de *almost everywhere* (casi por doquier en inglés)

## 0.1. Espacios de Hilbert

Recordemos que un espacio de Hilbert es un par $(H, (\cdot,\cdot))$ donde $H$ es un espacio vectorial y $(\cdot,\cdot)$ es una función bilineal simétrica y definida positiva.

**Proposición 0.1.** *Si $H$ es prehilbertiano entonces se tiene:*

1. *Se cumple la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, es decir*

$$|(u,v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|, \quad \forall u, v \in H$$

2. *Se verifica la desigualdad del paralelogramo*

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right), \quad \forall u, v \in H$$

**Teorema 0.2** (Teorema de la Proyección)**.** *Supongamos que $H$ es un espacio Hilbertiano y $\emptyset \neq K \subset H$ un conjunto convexo y cerrado, entonces $\forall f \in H$ $\exists_1 u \in K$ tal que $\|f-u\| = dist(f,K)$. Además, dicho $u$ está caracterizado por:*

$$\begin{cases} u \in K \\ (f-u, v-u) \leqslant 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$$

*Notaremos a dicho $u$ por $P_K f$ y* ***diremos que es la proyección de $f$ sobre $K$***

*Demostración.* En primer lugar tendremos que ver que $d(f,K) = \inf\{\|f-v\| : v \in K\}$ existe y se alcanza. Al ser un ínfimo de cantidades positivas sabemos que existe y nos quedará ver que se alcanza.

Por definición de ínfimo tenemos que

$$\exists \{v_n\} \subset K \text{ tal que } \|f - v_n\| \to d$$

Aplicando la desigualdad del paralelogramo para $u = f - v_n$ y $v = f - v_m$, con $n, m \in \mathbb{N}$

$$\left\|\frac{f-v_n+f-v_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{f-v_n-(f-v_m)}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2\right)$$

$$\left\|f - \frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{v_m-v_n}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2\right)$$

$$\frac{\|v_m-v_n\|^2}{4} = \frac{1}{2}\left(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2\right) - \left\|f - \frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2$$

$$\|v_m-v_n\|^2 = 2\left(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2\right) - 4\left\|f - \frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2$$

Como $K$ es convexo y $v_n, v_m \in K$ tendremos que $d\frac{v_n+v_m}{2} \in K$ y además $\left\|f - \frac{v_n+v_m}{2}\right\| \geqslant d$ por lo que tenemos

$$\|v_m-v_n\|^2 = 2\left(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2\right) - 4d^2$$

Cuando $n \to \infty$ tenemos que $\|f - v_n\| \to d$ y $\|f - v_m\| \to d$ por lo que el término de la derecha tenderá a 0 cuando $n, m \to \infty$. Esto significa que la sucesión $\{v_n\}$ es de Cauchy.

Como $H$ es de Hilbert, en particular es completo por lo que sabemos que $\{v_n\} \to u$ en $(H, (\cdot, \cdot))$.

Como además $\{v_n\} \subset K$ y $K$ es cerrado, el límite $u \in K$. Tendremos que

$$d = \lim_{n\to\infty} \|f - v_n\| = \|f - u\|$$

Y tendremos probada la existencia de $u$.

Veamos ahora la equivalencia entre la primera y la segunda parte del teorema, es decir

$$\left.\begin{array}{l} u \in K \\ \|f-u\| = dist(f,K) \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} u \in K \\ (f-u, v-u) \leqslant 0 \quad \forall v \in K \end{array}\right.$$

Veamos las dos implicaciones:

$\Rightarrow$) Supongamos que $u \in K$ y sabemos que $\|f - u\| \leqslant \|f - v\|$ para todo $v \in K$. Tomamos ahora $w \in K$ y consideramos el segmento que une $u$ con $w$. Entonces $\forall w \in K$ y $\forall t \in [0, 1]$, al ser $K$ convexo tendremos que

$$(1-t)u + tw \in K \quad \text{y} \quad \|f-u\|^2 \leqslant \|f-(1-t)u-tw\|^2$$

Aplicando la bilinealidad podemos reescribir esta última expresión como

$$\begin{aligned} \|f-(1-t)u-tw\|^2 &= (f-(1-t)u-tw, f-(1-t)u-tw) = \\ &= \|f-u\|^2 + t^2\|w-u\|^2 - 2t(f-u, w-u) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión que teníamos anteriormente nos queda que:

$$0 \leqslant t^2\|w-u\|^2 - 2t(f-u, w-u) \quad \forall t \in (0, 1]$$

Al dividir entre $t$ nos queda

$$0 \leqslant t\|w-u\|^2 - 2(f-u, w-u) \quad \forall t \in (0, 1]$$

y tomando ahora el límite cuando $t$ tiende a 0 por la derecha queda que

$$0 \leqslant -2(f-u, w-u) \Rightarrow (f-u, w-u) \leqslant 0$$

Se deja como ejercicio demostrar la otra implicación y la unicidad de $u$. □

**Proposición 0.3.** *La aplicación dada por*

$$\begin{aligned} P_K : H &\to H \\ f &\mapsto P_K f \end{aligned}$$

*es Lipschitziana, es decir,* $\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leqslant \|f_1 - f_2\|$ *para todo* $f_1, f_2 \in H$.

*Demostración.* Tomamos $f_1, f_2 \in H$ y consideramos $u_1 = P_K f_1$, $u_2 = P_K f_2$ y tenemos que

$$\begin{aligned}(f_1 - u_1, v - u_1) \leqslant 0 \quad \forall v \in K\\ (f_2 - u_2, v - u_2) \leqslant 0 \quad \forall v \in K\end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$\begin{aligned}(f_1 - u_1, u_2 - u_1) \leqslant 0\\ (f_2 - u_2, u_1 - u_2) \leqslant 0\end{aligned}$$

Aprovechando la bilinealidad tenemos que

$$(f_2 - u_2, u_2 - u_1) \geqslant 0 \Rightarrow ((f_1 - u_1) - (f_2 - u_2), u_2 - u_1) \leqslant 0$$

Y además

$$\begin{aligned}((f_1 - u_1) - (f_2 - u_2), u_2 - u_1) = ((f_1 - f_2) - (u_1 - u_2), u_2 - u_1) =\\ = (f_1 - f_2, u_2 - u_1) + (u_2 - u_1, u_2 - u_1)\end{aligned}$$

Y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|u_2 - u_1\|^2 = (u_2 - u_1, u_2 - u_1) &\leqslant -(f_1 - f_2, u_2 - u_1)\\ &\leqslant \|f_1 - f_2\|\|u_2 - u_1\| \Rightarrow \|u_2 - u_1\| \leqslant \|f_1 - f_2\|\end{aligned}$$

□

**Corolario 0.3.1** (Proyección ortogonal)**.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert y $\emptyset \neq M \subset H$ un subespacio vectorial cerrado. Entonces se tiene que*

$$\forall f \in H \quad \exists_1 u \in M \text{ tal que } \|f - u\| = dist(f, M)$$

*Además, $u$ está caracterizado por*

- $u \in M$
- $(f - u, w) = 0 \qquad \forall w \in M$

*Además, $P_M : H \to H$ es lineal.*

*Demostración.* Comencemos con la primera parte del corolario. Sabemos que $u \in K$ y $(f - u, v - u) \leqslant 0 \quad \forall v \in M$ del teorema de la proyección. Tendremos que probar la equivalencia entre esto y $(f - u, w) = 0 \quad \forall w \in M$ cuando $M$ es un subespacio vectorial. Veamos ambas implicaciones:

$\Leftarrow$) Evidente por ser $M$ un espacio vectorial.

$\Rightarrow$) Tenemos que $(f - u, v - u) \leqslant 0 \quad \forall v \in M$. Tomamos ahora $v \in M$, $t \neq 0$ y como $M$ es un subespacio vectorial, entonces $\frac{v}{t} \in M$ por lo que

$$(f - u, \frac{v}{t} - u) \leqslant 0 \quad \forall v \in M,\ t \neq 0$$

Hagamos una distinción de casos:

$$\begin{cases} \text{Si } t > 0 & \Rightarrow \quad (f-u, v-tu) \leqslant 0 \quad \forall t > 0, v \in M \\ \text{Si } t < 0 & \Rightarrow \quad (f-u, v-tu) \geqslant 0 \quad \forall t < 0, v \in M \end{cases}$$

Tomando límite cuando $t$ tiende a 0

$$\begin{cases} (f-u, v) \leqslant 0 \quad \forall t > 0, v \in M \\ (f-u, v) \geqslant 0 \quad \forall t < 0, v \in M \end{cases}$$

Y por tanto $(f-u, v) = 0 \quad \forall v \in M$

La demostración de que $P_M$ es lineal se deja como ejercicio. □

## 0.2. Espacios Duales

**Definición 0.3** (Dual algebráico)**.** Sea $E$ un espacio vectorial, llamamos **dual algebráico** al siguiente espacio:

$$E^{\#} = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ es lineal}\}$$

**Definición 0.4** (Dual topológico)**.** Dado $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, llamamos **dual topológico** a

$$E^{\#} = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ es lineal y continua}\}$$

*Observación.* Si tenemos $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios normados y una aplicación $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

(i) $T$ es continua

(ii) $T$ es continua en 0

(iii) $T(B_E(0,1))$ es un conjunto acotado de $F$, es decir que $\exists R > 0 : \|T(x)\|_F \leqslant R \quad \forall x \in E$ con $\|x\| < 1$

(iv) $T$ es acotada, es decir, $T(A)$ es acotada en $F$ para todo $A \subset E$ que esé acotado

(v) $T$ es Lipschitziana.

La demostración se deja como ejercicio.

**Definición 0.5.** Dado $E$ un espacio vectorial, consideramos su dual topológico $E^*$ y definimos la norma

$$\|f\|_{E^*} := \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\| \quad \forall f \in E^*$$

**Ejercicio 0.2.1.** Demostrar que $\|f\|_{E^*}$ es una norma.

**Ejercicio 0.2.2.** Demostrar que $(E^*, \|\cdot\|_{E*})$ es de Banach.

**Ejercicio 0.2.3.** Demostrar que $\|f\|_{E^*} = \inf\{M \geqslant 0 : \|f(x)\| \leqslant M\|x\|_E \quad \forall x \in E\}$

## 0.3. Espacio Dual de un Espacio de Hilbert

*Observación.* Es elemental que si tomo $v \in H$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_v : H &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varphi(u) = (u, v) \end{aligned}$$

verifica que $\varphi_v \in H^*$ y $\|\varphi_v\|_{H^*} = \|v\|_H$. Además, podemos definir la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \Psi : H &\to H^* \\ v &\mapsto \phi_v \end{aligned}$$

que será lineal por lo que tenemos que un espacio de Hilbert y su dual topológico serán isomorfos.

*Demostración.* La demostración se deja como ejercicio. $\square$

**Teorema 0.4** (Teorema de Riesz-Fischer)**.** *Para toda $\varphi \in H^*$, se tiene que $\exists_1 v \in H$ tal que $\varphi(u) = (u, v) \quad \forall u \in H$. Además, se tiene que $\|\varphi\|_{H^*} = \|v\|_H$*