

# Topología II

# Examen VII

Foto: José Juan Castro



**Los Del DGIIM**, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Topología II

# Examen VII

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

**Asignatura** Topología II.

**Curso Académico** 2025/26.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Grupo Único.

**Profesor** José Antonio Gálvez.

**Descripción** Examen del Tema 1.

**Fecha** 28 de noviembre de 2025.

**Duración** Una hora.

**Ejercicio 1** (5 puntos). Elija una pregunta de las siguientes:

- a) Sea  $T$  un toro de  $\mathbb{R}^3$ . Prueba que no existe una retracción  $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow T$ .
- b) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación continua y acotada. Demuestra que existe un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  tal que  $f(x_0) = x_0$ .

**Ejercicio 2.** Sean  $R_1$  y  $R_2$  las rectas de  $\mathbb{R}^3$  con ecuaciones paramétricas respectivas  $(\lambda, 0, -1)$  y  $(\mu, 0, 1)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Calcula el grupo fundamental de

$$X = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \cup R_1 \cup R_2$$

en el punto  $p_0 = (1, 0, 0)$ . Determina lazos basados en  $p_0$  cuyas clases de equivalencia generen  $\pi_1(X, p_0)$ .

**Solución.**

**Ejercicio 1** (5 puntos). Elija una pregunta de las siguientes:

- a) Sea  $T$  un toro de  $\mathbb{R}^3$ . Prueba que no existe una retracción  $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow T$ .

Por reducción al absurdo, si existiera una retracción  $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow T$  tendríamos entonces que fijado  $x \in T$  la inclusión  $i : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  induce un homomorfismo de grupos inyectivo  $i_* : \pi_1(T, x) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3, x)$ , pero tenemos que  $\mathbb{R}^3$  es simplemente conexo, con lo que  $\pi_1(\mathbb{R}^3, x) = \{[\varepsilon_x]\}$  y sabemos además que:

$$\pi_1(T, x) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Por lo que tenemos un homomorfismo de grupos  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{1\}$  inyectivo, hemos llegado a una contradicción.

- b) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación continua y acotada. Demuestra que existe un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  tal que  $f(x_0) = x_0$ .

Tenemos que existe  $R \in \mathbb{R}^+$  de forma que:

$$f(\mathbb{R}^2) \subseteq \overline{B}(0, R)$$

de esta forma, tenemos que la aplicación  $\bar{f} : \overline{B}(0, R) \rightarrow \overline{B}(0, R)$  es continua. Como  $\overline{B}(0, R)$  es homeomorfo a  $\overline{\mathbb{D}}$ , el Teorema del punto fijo de Brouwer nos dice que existe  $x_0 \in \overline{B}(0, R)$  de forma que:

$$x_0 = \bar{f}(x_0) = f(x_0)$$

**Ejercicio 2.** Sean  $R_1$  y  $R_2$  las rectas de  $\mathbb{R}^3$  con ecuaciones paramétricas respectivas  $(\lambda, 0, -1)$  y  $(\mu, 0, 1)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Calcula el grupo fundamental de

$$X = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \cup R_1 \cup R_2$$

en el punto  $p_0 = (1, 0, 0)$ . Determina lazos basados en  $p_0$  cuyas clases de equivalencia generen  $\pi_1(X, p_0)$ .

Está resuelto en el Examen 6.