

Análisis Funcional

Examen XII



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Análisis Funcional

Examen XII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2025-26.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor David Arcoya Álvarez.

Descripción Primer Parcial.

Fecha 19 de Noviembre de 2025.

Duración 2 horas.

Ejercicio 1 (3.5 Puntos). Sea E un espacio normado, $M \subset E$ un subespacio vectorial y $x_0 \in E$ verificando

$$d := \inf_{y \in M} \|x_0 - y\| > 0.$$

Prueba que existe un funcional $f \in E^*$ tal que

$$\langle f, x_0 \rangle = d, \quad \|f\| = 1 \quad \text{y} \quad \langle f, y \rangle = 0 \quad \forall y \in M$$

Ejercicio 2 (3.5 Puntos). Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach y $T : E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Prueba que si

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in E\} \quad \text{y} \quad \|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F,$$

entonces

$$G(T) \text{ es cerrado} \iff (E, \|\cdot\|_1) \text{ es un espacio de Banach.}$$

Ejercicio 3 (3 Puntos). Enunciar y demostrar el Teorema de Riesz-Fréchet.

¹En el examen se aclaró que si se necesita usar que $\|\cdot\|_1$ es una norma, hay que demostrarlo.

Solución.

Ejercicio 1 (3.5 Puntos). Sea E un espacio normado, $M \subset E$ un subespacio vectorial y $x_0 \in E$ verificando

$$d := \inf_{y \in M} \|x_0 - y\| > 0.$$

Prueba que existe un funcional $f \in E^*$ tal que

$$\langle f, x_0 \rangle = d, \quad \|f\| = 1 \quad \text{y} \quad \langle f, y \rangle = 0 \quad \forall y \in M$$

Opción 1. Observemos que como $d > 0$ tenemos que $x_0 \notin M$. Más aún, veamos que $B(x_0, d) \cap M = \emptyset$, pues si existiera $y_0 \in B(x_0, d) \cap M$ tendríamos entonces que $y_0 \in M$ con $\|x_0 - y_0\| < d$, lo que contradice la definición de d . Como $B(x_0, d)$ y M son conjuntos convexos y $B(x_0, d)$ es abierto, podemos aplicar la primera versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach, obteniendo $\alpha \in \mathbb{R}$ y una aplicación $g \in E^*$ no constantemente igual a 0 de forma que:

$$g(y) \leq \alpha \leq g(x_0 + dz) \quad \forall y \in M, \quad \forall z \in B(0, 1)$$

De la primera desigualdad deducimos² que $g(y) = 0 \quad \forall y \in M$, puesto que M es un espacio vectorial y $g|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal cuya imagen está acotada por α . Tenemos por tanto que:

$$0 \leq g(x_0 + dz) = g(x_0) + dg(z) \quad \forall z \in B(0, 1)$$

de donde tomando $-z$ en lugar de z vemos que:

$$0 \leq g(x_0) - dg(z) \quad \forall z \in B(0, 1)$$

Deduzcamos por tanto que:

$$d\|g\| \leq g(x_0)$$

Para la otra desigualdad, por la definición de d podemos encontrar $\{y_n\}$ sucesión de puntos de M de forma que $\{\|x_0 - y_n\|\} \rightarrow d$, por lo que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$g(x_0) = g(x_0 - y_n) \leq \|g\|\|x_0 - y_n\|$$

y como $\{\|g\|\|x_0 - y_n\|\} \rightarrow \|g\|d$ concluimos que $g(x_0) \leq \|g\|d$, por lo que ha de ser:

$$g(x_0) = d\|g\|$$

Como $g \neq 0$ tenemos que $\|g\| \neq 0$, por lo que si tomamos ahora $f = \frac{g}{\|g\|} \in E^*$, tenemos que $\|f\| = 1$, así como que:

$$f(y) = \frac{g(y)}{\|g\|} = 0 \quad \forall y \in M, \quad f(x_0) = \frac{g(x_0)}{\|g\|} = \frac{d\|g\|}{\|g\|} = d$$

²Ya se ha usado varias veces este argumento.

Opción 2. Como $d > 0$ tenemos entonces que $x_0 \notin M$ (ya que si $x_0 \in M$ tendríamos entonces que $\inf_{y \in M} \|x_0 - y\| = \|x_0 - x_0\| = 0$), por lo que si tomamos $E_0 = \mathcal{L}\{x_0\}$ tendremos entonces que $E_0 \cap M = \{0\}$. Si tomamos $E_1 = E_0 \oplus M$ podemos definir la aplicación lineal $g : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$g(tx_0 + y) = td \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in M$$

Observemos que si $y \in M$ y $t \in \mathbb{R}^*$ tenemos entonces que $-\frac{y}{t} \in M$, así como que:

$$d \leq \|x_0 - \left(-\frac{y}{t}\right)\| = \frac{1}{|t|} \|tx_0 + y\| \quad \forall y \in M$$

de donde deducimos que para todo $x = tx_0 + y \in E_1$ con $t \in \mathbb{R}$ y $y \in M$ se tiene:

$$|g(x)| = |t|d \leq \|tx_0 + y\| = \|x\|$$

por lo que $g \in E_1^*$, con $\|g\| \leq 1$. Para ver que $\|g\| = 1$, fijado $\varepsilon > 0$ elegimos $y \in M$ de forma que $\|x_0 - y\| < d + \varepsilon$ y tomando

$$z = \frac{x_0 - y}{\|x_0 - y\|}$$

se tiene que:

$$|g(z)| = \frac{|g(x_0 - y)|}{\|x_0 - y\|} = \frac{d}{\|x_0 - y\|} > \frac{d}{d + \varepsilon} = \frac{d}{d + \varepsilon} \|z\|, \quad \|g\| \geq \frac{d}{d + \varepsilon}$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, obtenemos que $\|g\| \geq 1$, de donde $\|g\| = 1$. Si aplicamos el Teorema de Hahn-Banach, obtenemos que existe $f \in E^*$ con $\|f\| = \|g\| = 1$ y $f|_{E_1} = g$, en particular:

$$f(y) = g(y) = 0 \quad \forall y \in M, \quad f(x_0) = g(x_0) = d$$

Ejercicio 2 (3.5 Puntos). Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach y $T : E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Prueba que si

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in E\} \quad \text{y} \quad \|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F,$$

entonces

$$G(T) \text{ es cerrado} \iff (E, \|\cdot\|_1) \text{ es un espacio de Banach.}$$

Veamos primero que $\|\cdot\|_1$ es una norma en E :

- Si $\|x\|_1 = 0$ entonces $\|x\|_E + \|Tx\|_F = 0$, por lo que como $\|x\|_E, \|Tx\|_F \geq 0$ tenemos entonces que $\|x\|_E = 0$, de donde $x = 0$.
- Si $x, y \in E$ entonces:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_1 &= \|x + y\|_E + \|T(x + y)\|_F = \|x + y\|_E + \|Tx + Ty\|_F \\ &\leq \|x\|_E + \|Tx\|_F + \|y\|_E + \|Ty\|_F = \|x\|_1 + \|y\|_1 \end{aligned}$$

- Si $x \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_1 &= \|\lambda x\|_E + \|T(\lambda x)\|_F = \|\lambda x\|_E + \|\lambda Tx\|_F \\ &= |\lambda| \|x\|_E + |\lambda| \|Tx\|_F = |\lambda| (\|x\|_E + \|Tx\|_F) = |\lambda| \|x\|_1\end{aligned}$$

\iff) Para esta implicación:

Opción 1. Si $(E, \|\cdot\|_1)$ es de Banach, como $\|Tx\|_F \geq 0 \quad \forall x \in E$ tenemos entonces que:

$$\|x\|_E \leq \|x\|_E + \|Tx\|_F = \|x\|_1 \quad \forall x \in E$$

Como tanto $\|\cdot\|_E$ como $\|\cdot\|_1$ son completas en E tenemos por un Corolario del Teorema de la aplicación abierta que existe $k \in \mathbb{R}_0^+$ de forma que:

$$\|x\|_E + \|Tx\|_F = \|x\|_1 \leq k\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

Por lo que:

$$\|Tx\|_F \leq (k-1)\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

Luego T es continua, de donde $G(T)$ es cerrado.

Opción 2. Sea $\{(x_n, T(x_n))\}$ una sucesión en $G(T)$ que converge a (x, y) en $E \times F$, si consideramos la norma:

$$\|(x, y)\|_{E \times F} = \|x\|_E + \|y\|_F \quad \forall (x, y) \in E \times F$$

tenemos entonces que la sucesión $\{(x_n, T(x_n))\}$ es de Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : m > n \geq n_0 \implies \|x_n - x_m\|_E + \|Tx_n - Tx_m\|_F = \|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon$$

Por lo que $\{x_n\}$ es de Cauchy en el espacio $(E, \|\cdot\|_1)$, y como este es de Banach, ha de ser la sucesión convergente hacia cierto punto $z \in E$. Si observamos que:

$$\begin{aligned}\|(z, Tz) - (x, y)\|_{E \times F} &\leq \|(z, Tz) - (x_n, Tx_n)\|_{E \times F} + \|(x, y) - (x_n, Tx_n)\|_{E \times F} \\ &= \|z - x_n\|_1 + \|(x, y) - (x_n, Tx_n)\|_{E \times F}\end{aligned}$$

las convergencias de $\{x_n\}$ en $(E, \|\cdot\|_1)$ y de $\{(x_n, Tx_n)\}$ en $E \times F$ nos dicen que:

$$z = x, \quad y = Tz = Tx$$

Por lo que $(x, y) = (x, Tx) \in G(T)$ y $G(T)$ es cerrado.

\implies) Para esta otra implicación:

Opción 1. Para ver que $(E, \|\cdot\|_1)$ es de Banach, sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de E de Cauchy para $\|\cdot\|_1$ queremos ver que $\{x_n\}$ es convergente para $\|\cdot\|_1$. Para ello, como $\{x_n\}$ es de Cauchy para $\|\cdot\|_1$ tenemos que:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geq m \implies \|x_p - x_q\|_1 < \varepsilon$$

Fijado $\varepsilon > 0$ y considerando $m \in \mathbb{N}$ que nos da la condición de Cauchy, tenemos entonces que para $p, q \geq m$:

$$\|x_p - x_q\|_E + \|Tx_p - Tx_q\|_F = \|x_p - x_q\|_E + \|T(x_p - x_q)\|_F = \|x_p - x_q\|_1 < \varepsilon$$

de donde deducimos que $\|x_p - x_q\|_E, \|Tx_p - Tx_q\|_F < \varepsilon$, por lo que $\{x_n\}$ es de Cauchy para $\|\cdot\|_E$ y $\{T(x_n)\}$ es de Cauchy en F . Como $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ son de Banach, existen $x \in E$ y $y \in F$ de forma que $\{x_n\} \rightarrow x$ para $\|\cdot\|_E$ y $\{T(x_n)\} \rightarrow y$ en F . Observemos que $\{(x_n, T(x_n))\}$ es una sucesión de puntos de $G(T)$ convergente a (x, y) , siendo $G(T)$ un conjunto cerrado, por lo que $(x, y) \in G(T)$, de donde $y = T(x)$. Si tomamos ahora $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que para $n \geq n_0$ tengamos:

$$\|x_n - x\|_E < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|T(x_n) - T(x)\|_F < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tenemos entonces que para $n \neq n_0$:

$$\|x_n - x\|_1 = \|x_n - x\|_E + \|T(x_n) - T(x)\|_F < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo que $\{x_n\}$ es convergente a x para $\|\cdot\|_1$, de donde deducimos que $(E, \|\cdot\|_1)$ es de Banach.

Opción 2. Como $G(T)$ es cerrado, el teorema de la gráfica cerrada implica que T es acotado. Así:

$$\|x\|_E \leq \|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F \leq \|x\|_E + \|T\| \|x\|_E = (1 + \|T\|) \|x\|_E \quad \forall x \in E$$

por lo que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_E$ son equivalentes, y como $\|\cdot\|_E$ es una norma completa concluimos que $\|\cdot\|_1$ también ha de serlo.