

# Probabilidad

## Examen II

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Probabilidad

## Examen II

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

**Asignatura** Probabilidad.

**Curso Académico** 2024-25.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Francisco Javier Esquivel Sánchez.

**Descripción** Parcial de los Temas 1 y 2.1.

**Fecha** 22 de octubre de 2024.

**Duración** 50 minutos.

**Ejercicio 1** (1 punto). Calcular razonadamente la función generatriz de momentos de una variable aleatoria  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Recordemos que la función de densidad de  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}$$

Este ejercicio está demostrado en la Teoría. La función generatriz de momentos de una variable aleatoria  $\mathcal{N}(0, 1)$  es:

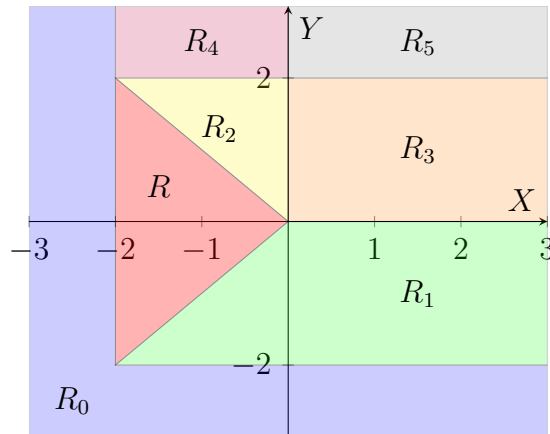
$$M_X(t) = e^{t^2/2}$$

**Ejercicio 2.** Dado el vector bidimensional  $(X, Y)$  distribuido uniformemente en el recinto limitado

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq y \leq -x\}$$

- (1 punto) Obtener su función de densidad conjunta.

Representamos en primer lugar dicho conjunto:



Tenemos que, para  $x \in [-2, 0]$  y  $y \in [x, -x]$ , la función de densidad conjunta es:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = k, \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Para que sea una función de densidad, hemos de tener que:

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f = \int_R f = \int_R k$$

Tenemos dos opciones:

**Integración Normal:**

$$\begin{aligned} 1 &= \int_R k = \int_{-2}^0 \int_x^{-x} k \, dy \, dx = \int_{-2}^0 k(-2x) \, dx = \\ &= -2k \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 = -2k [0 - 2] = 4k \implies k = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

**Razonando según la Forma de  $R$ :**

$$1 = \int_R k = k\lambda(R) = k \cdot \frac{4 \cdot 2}{2} = 4k \implies k = \frac{1}{4}$$

En cualquier caso, para el valor de  $k = 1/4$ , la función de densidad conjunta integrable, no negativa e integra 1.

2. (6,5 puntos) Obtener su función de distribución conjunta.

Distinguimos casos:

- Si  $x < -2$  o  $y < -2$  (Zona  $R_0$ ):

$$F_{(X,Y)}(x, y) \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{(X,Y)}(u, v) dv du = 0$$

- Si  $x \in [-2, 0]$  y  $y \in [x, -x]$  (Zona  $R$ ):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{(X,Y)}(u, v) dv du = \int_{-2}^x \int_u^y \frac{1}{4} dv du = \\ &= \int_{-2}^x \frac{1}{4}(y - u) du = \frac{1}{4} \left[ yu - \frac{u^2}{2} \right]_{-2}^x = \frac{1}{4} \left[ yx - \frac{x^2}{2} + 2y + 2 \right] \end{aligned}$$

- Si  $y < 0$  y  $x > y$  (Zona  $R_1$ ):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{(X,Y)}(u, v) dv du = \int_{-2}^y \int_u^y \frac{1}{4} dv du = \\ &= \int_{-2}^y \frac{1}{4}(y - u) du = \frac{1}{4} \left[ yu - \frac{u^2}{2} \right]_{-2}^y = \frac{1}{4} \left[ y^2 - \frac{y^2}{2} + 2y + 2 \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{y^2}{2} + 2y + 2 \right] \end{aligned}$$

- Si  $x \in [-2, 0]$  y  $y \in [-x, 2]$  (Zona  $R_2$ ):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{(X,Y)}(u, v) dv du = \int_{-2}^{-y} \int_u^y \frac{1}{4} dv du + \int_{-y}^x \int_u^{-u} \frac{1}{4} dv du = \\ &= \int_{-2}^{-y} \frac{1}{4}(y - u) du + \int_{-y}^x \frac{1}{4}(-2u) du = \frac{1}{4} \left[ yu - \frac{u^2}{2} \right]_{-2}^{-y} + \frac{1}{4} [-u^2]_{-y}^x = \\ &= \frac{1}{4} \left[ y(-y) - \frac{(-y)^2}{2} + 2y + 2 \right] + \frac{1}{4} [-x^2 + y^2] = \\ &= \frac{1}{4} \left[ 2y + 2 - \frac{y^2}{2} - x^2 \right] \end{aligned}$$

- Si  $y \in [0, 2]$  y  $x \geq 0$  (Zona  $R_3$ ):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{(X,Y)}(u, v) dv du = \int_{-2}^{-y} \int_u^y \frac{1}{4} dv du + \int_{-y}^0 \int_u^{-u} \frac{1}{4} dv du = \\ &= \int_{-2}^{-y} \frac{1}{4} (y - u) du + \int_{-y}^0 \frac{1}{4} (-2u) du = \frac{1}{4} \left[ yu - \frac{u^2}{2} \right]_{-2}^{-y} + \frac{1}{4} [-u^2]_{-y}^0 = \\ &= \frac{1}{4} \left[ y(-y) - \frac{(-y)^2}{2} + 2y + 2 \right] + \frac{1}{4} [0 - y^2] = \\ &= \frac{1}{4} \left[ 2y + 2 - \frac{y^2}{2} \right] \end{aligned}$$

- Si  $x \in [-2, 0]$  y  $y \geq 2$  (Zona  $R_4$ ):

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{(X,Y)}(u, v) dv du = \int_{-2}^x \int_u^{-u} \frac{1}{4} dv du = \\ &= \int_{-2}^x \frac{1}{4} (-2u) du = \frac{1}{4} [-u^2]_{-2}^x = \frac{1}{4} [-x^2 + 4] \end{aligned}$$

- Si  $x \geq 0, y \geq 2$  (Zona  $R_5$ ):

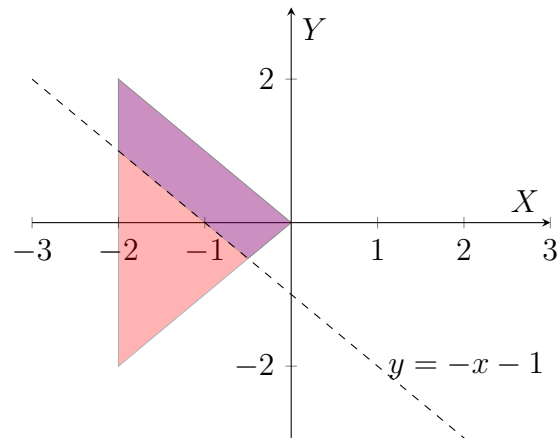
$$F_{(X,Y)}(x, y) = 1$$

Por tanto, la función de distribución conjunta es:

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \text{ o } y < -2 \\ \frac{1}{4} \left[ yx - \frac{x^2}{2} + 2y + 2 \right] & \text{si } x \in [-2, 0] \text{ y } y \in [x, -x] \\ \frac{1}{4} \left[ \frac{y^2}{2} + 2y + 2 \right] & \text{si } y < 0 \text{ y } x > y \\ \frac{1}{4} \left[ 2y + 2 - \frac{y^2}{2} - x^2 \right] & \text{si } x \in [-2, 0] \text{ y } y \in [-x, 2] \\ \frac{1}{4} \left[ 2y + 2 - \frac{y^2}{2} \right] & \text{si } y \in [0, 2] \text{ y } x \geq 0 \\ \frac{1}{4} [-x^2 + 4] & \text{si } x \in [-2, 0] \text{ y } y \geq 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 0, y \geq 2 \end{cases}$$

- (1,5 puntos) Obtener la probabilidad de que  $X + Y + 1 \geq 0$ .

Veamos qué conjunto representa  $X + Y + 1 \geq 0$ :



Tenemos por tanto que:

$$\begin{aligned}
 P[X + Y + 1 \geq 0] &= \int_{-2}^{-1/2} \int_{-x-1}^{-x} \frac{1}{4} dy dx + \int_{-1/2}^0 \int_x^{-x} \frac{1}{4} dy dx = \\
 &= \int_{-2}^{-1/2} \frac{1}{4} (-x + 1 + x) dx + \int_{-1/2}^0 \frac{1}{4} (-2x) dx = \\
 &= \int_{-2}^{-1/2} \frac{1}{4} dx + \int_{-1/2}^0 -\frac{1}{2} x dx = \\
 &= \frac{1}{4} [x]_{-2}^{-1/2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1/2}^0 = \frac{1}{4} \left[ \frac{-1}{2} + 2 \right] - \frac{1}{2} \left[ 0 - \frac{1}{8} \right] = \frac{7}{16}
 \end{aligned}$$

*Observación.* Notamos que este ejercicio fue repetido de exámenes de otros años.