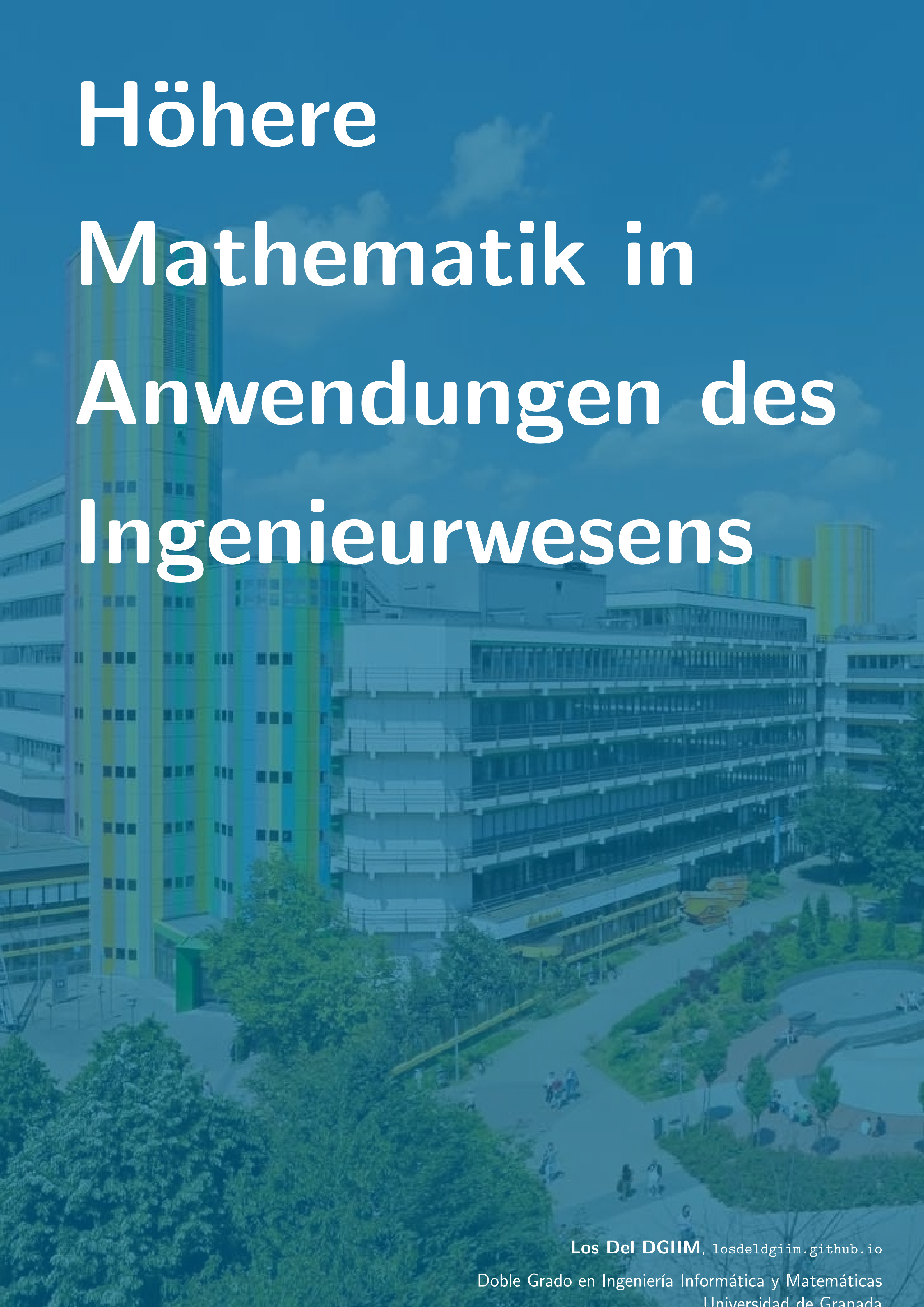

Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Universidad de Granada

Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Übungs Blätter

1.3. Rechnen mit physikalischen Größen

Ejercicio 1.3.1 (Fährverbindung)**.** Eine Fähre bewegt sich mit der Eigengeschwindigkeit $v_0 = 4\,\mathrm{m/s}$ (relativ zum Fluss) vom Uferpunkt A aus auf kürzestem Weg zum gegenüberliegenden Flussufer (Punkt B; Abb. 1.1).

1. Unter welchem Winkel α muss die Fähre gegen die Strömung gesteuert werden, wenn die Geschwindigkeit der Strömung den Betrag $v_s = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$ hat?

   The Ferry wants to get to B in an straight line. Therefore, it must compensate the flow velocity by steering at an angle α against the flow. It is then needed that:

   $$v_s = v_0 \sin(\alpha) \implies \alpha = \arcsin\left(\frac{v_s}{v_0}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}5}{4}\right) \approx 0{,}3844\,\mathrm{rad} \approx 22{,}024\,^\circ$$

2. Wie groß ist dann die resultierende Geschwindigkeit v_r der Fähre?

   The resulting velocity v_r of the ferry is given by:

   $$v_r = v_0 \cos(\alpha) = 4\cos(0{,}3844) \approx 3{,}7081\,\mathrm{m/s}$$

Ejercicio 1.3.2 (Elektrische Punktladungen im Koordinatensystem)**.** Eine Punktladung $q_1 = 6{,}0\,\mu\mathrm{C}$ befindet sich in einem kartesischen Koordinatensystem bei $x_1 = 1{,}0\,\mathrm{m}$, $y_1 = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Eine zweite Ladung $q_2 = -2{,}5\,\mu\mathrm{C}$ befindet sich in dessen Ursprung. Ein Elektron, d.h. eine dritte Punktladung, ist in einem Punkt mit den Koordinaten (x_e, y_e). Berechnen Sie die Werte für x_e und y_e, bei denen sich das

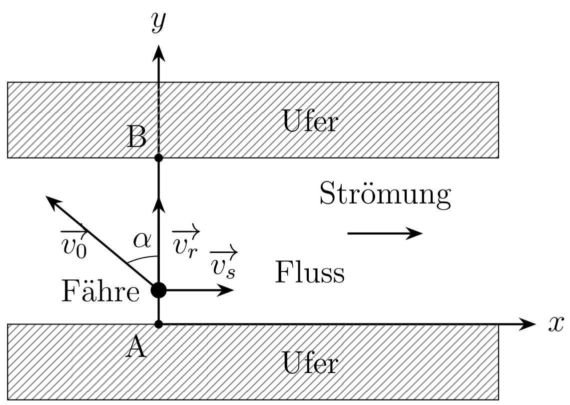

Figura 1.1: Fährverbindung über einen Fluss mit Strömung.

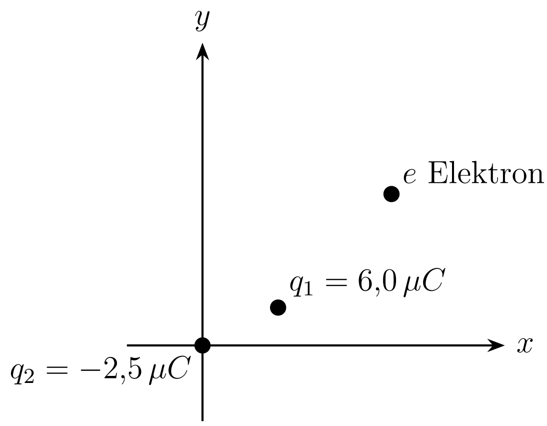

Figura 1.2: Punktladungen im Koordinatensystem.

Elektron im Gleichgewicht befindet, d.h. bei dem die Gesamtkraft auf das Elektron verschwindet.

Option 1 :

The forces acting on the electron due to the other two charges must cancel each other out for equilibrium. Let F_{ei} be the force on the electron due to charge q_i. The forces can be expressed as:

$$\overrightarrow{F}_{e1} + \overrightarrow{F}_{e2} = 0$$

where, using that $q_e = -e < 0$ (the charge of the electron):

$$\overrightarrow{F}_{e1} = -k_e \frac{|q_1 e|}{r_{e1}^2}\ \hat{r}_{e1}, \quad \overrightarrow{F}_{e2} = k_e \frac{|q_2 e|}{r_{e2}^2}\ \hat{r}_{e2}$$

Here, k_e is Coulomb's constant, e is the elementary charge, r_{ei} is the distance between the electron and charge q_i, and $\hat{r}_{ei}$ is the unit vector pointing from charge q_i to the electron. Using the values of r_{e1} and r_{e2} based on the coordinates of the charges and the electron, we have:

$$\overrightarrow{r}_{e1} = (x_e - 1, y_e - 0{,}5), \quad \overrightarrow{r}_{e2} = (x_e, y_e)$$

Therefore, the equilibrium condition becomes:

$$-k_e \frac{|q_1 e|}{((x_e-1)^2 + (y_e - 0{,}5)^2)} \cdot \frac{(x_e - 1, y_e - 0{,}5)}{\sqrt{(x_e-1)^2 + (y_e-0{,}5)^2}} + k_e \frac{|q_2 e|}{(x_e^2 + y_e^2)} \cdot \frac{(x_e, y_e)}{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}} = 0$$

This vector equation can be separated into its x and y components, leading to a system of two equations with two unknowns (x_e and y_e). Solving this system will yield the coordinates of the electron in equilibrium.

$$\begin{aligned} -\, k_e \frac{|q_1 e|(x_e - 1)}{((x_e-1)^2 + (y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e| x_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} &= 0 \\ -\, k_e \frac{|q_1 e|(y_e - 0{,}5)}{((x_e-1)^2 + (y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e| y_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} &= 0 \end{aligned}$$

In an easier way:

$$\frac{|q_1|(x_e-1)}{((x_e-1)^2+(y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} = \frac{|q_2|x_e}{(x_e^2+y_e^2)^{3/2}}$$
$$\frac{|q_1|(y_e-0{,}5)}{((x_e-1)^2+(y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} = \frac{|q_2|y_e}{(x_e^2+y_e^2)^{3/2}}$$

As we can see, this system of equations is nonlinear and may require numerical methods or iterative approaches to solve for x_e and y_e. We should then approach the problem using another method.

Option 2 :

Given that $\overrightarrow{F}_{e1} = -\overrightarrow{F}_{e2}$, the forces must have the same magnitude but opposite directions. This implies that the electron must lie along the line connecting the two charges, with $x_e, y_e < 0$. Therefore:

$$y_e = \frac{y_1}{x_1}x_e = \frac{1}{2}x_e$$

On the other hand, equating the magnitudes of the forces:

$$|\overrightarrow{F}_{e1}| = |\overrightarrow{F}_{e2}| \Longrightarrow k_e\frac{|q_1e|}{r_{e1}^2} = k_e\frac{|q_2e|}{r_{e2}^2} \Longrightarrow \frac{|q_1|}{r_{e1}^2} = \frac{|q_2|}{r_{e2}^2} \Longrightarrow \frac{|q_1|}{(x_e-1)^2+(y_e-0{,}5)^2} = \frac{|q_2|}{x_e^2+y_e^2}$$

Therefore, using the relation for y_e in terms of x_e, we have the following equation to solve for x_e:

$$\frac{|q_1|}{(x_e-1)^2+\left(\frac{1}{2}x_e-0{,}5\right)^2} = \frac{|q_2|}{x_e^2+\left(\frac{1}{2}x_e\right)^2}$$
$$6\cdot\left(\frac{5}{4}x_e^2\right) = 2{,}5\cdot\left(\frac{5}{4}x_e^2-2{,}5x_e+1{,}25\right)$$
$$4{,}375x_e^2+6{,}25x_e-3{,}125=0$$
$$x_e = \frac{-6{,}25\pm\sqrt{(-6{,}25)^2-4\cdot 4{,}375\cdot(-3{,}125)}}{2\cdot 4{,}375} = \frac{-5\pm 2\sqrt{15}}{7}$$

Given that $x_e < 0$, we take:

$$x_e = -\frac{5+2\sqrt{15}}{7} \approx -1{,}8208\,\mathrm{m}$$
$$y_e = \frac{1}{2}x_e = -\frac{5+2\sqrt{15}}{14} \approx -0{,}9104\,\mathrm{m}$$

Ejercicio 1.3.3 (Die magnetische Kraft)**.** Ein punktförmiges Teilchen mit einer Ladung $q = -3{,}64\,\mathrm{nC}$ bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $\overrightarrow{v} = 2{,}75\cdot 10^6\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!{}_{\mathrm{s}}\,\overrightarrow{e_x}$, d.h. entlang der x-Achse. Berechnen Sie die Kraft, die folgende Felder auf das Teilchen ausüben:

1. $\overrightarrow{B} = 0{,}38\,\mathrm{T}\ \overrightarrow{e_y}$

$$\overrightarrow{F} = q \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ v_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \overrightarrow{e_z} =$$
$$= -3{,}64 \cdot 10^{-9} \cdot 2{,}75 \cdot 10^{6} \cdot 0{,}38\ \overrightarrow{e_z} = -3{,}8038 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}\ \overrightarrow{e_z}$$

2. $\overrightarrow{B} = T\,0{,}75\ \overrightarrow{e_x} + T\,0{,}75\ \overrightarrow{e_y}$

$$\overrightarrow{F} = q \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \overrightarrow{e_z} =$$
$$= -3{,}64 \cdot 10^{-9} \cdot 2{,}75 \cdot 10^{6} \cdot 0{,}75\ \overrightarrow{e_z} = -7{,}5075 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}\ \overrightarrow{e_z}$$

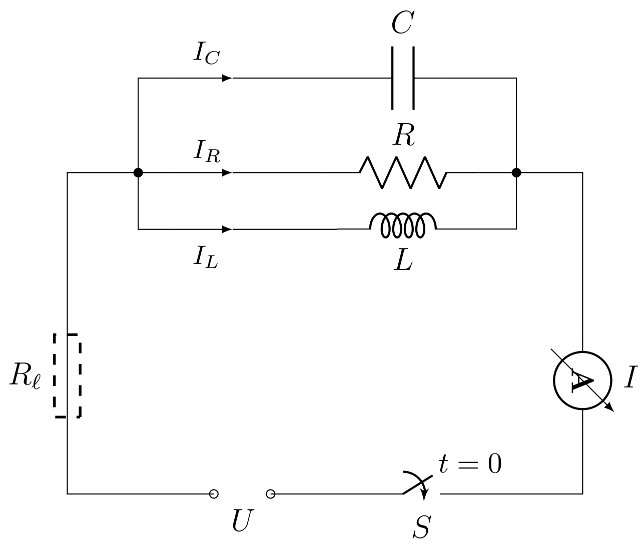

Figura 1.3: Skizze zur Aufgabe 1.5.2

1.5. Komplexe Rechnung in physikalisch-technischen Zusammenhängen

Ejercicio 1.5.1. Zeigen Sie durch Rechnung in komplexer Form: Drei gleichfrequente, sinusförmige Wechselströme i_1, i_2 und i_3 mit den Amplituden i_0, der Kreisfrequenz $\omega > 0$ und den Nullphasenwinkeln $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = {}^2\!/\!_3\pi$ und $\varphi_3 = {}^4\!/\!_3\pi$ löschen sich bei ungestörter Überlagerung gegenseitig aus, d.h. $i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

Let $\underline{i}_1(t)$, $\underline{i}_2(t)$ und $\underline{i}_3(t)$ be:

$$\begin{aligned}
\underline{i}_1(t) &= i_0 \cdot e^{\jmath(\omega t + 0)} = i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \\
\underline{i}_2(t) &= i_0 \cdot e^{\jmath(\omega t + 2/3\pi)} = i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \cdot e^{\jmath 2/3\pi} \\
\underline{i}_3(t) &= i_0 \cdot e^{\jmath(\omega t + 4/3\pi)} = i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \cdot e^{\jmath 4/3\pi}
\end{aligned}$$

Therefore:

$$\begin{aligned}
\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \underline{i}_3(t) &= i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \left(e^{\jmath 0} + e^{\jmath 2/3\pi} + e^{\jmath 4/3\pi}\right) = \\
&= i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + \jmath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \jmath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \\
&= i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Therefore, we have shown that:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = \Im\left(\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \underline{i}_3(t)\right) = \Im(0) = 0$$

Ejercicio 1.5.2 (Resonanz im Parallelschwingkreis)**.** Der in Abbildung 1.3 skizzierte Parallelschwingkreis mit dem ohmschen Widerstand $R = 10\,\Omega$, der Induktivität $L = 0{,}2\,\mathrm{H}$ und der Kapazität $C = 10\,\mathrm{mF}$ wird durch eine Wechselstromquelle mit dem Effektivwert $I = 10\,\mathrm{A}$ und der variablen Kreisfrequenz ω zu elektromagnetischen Schwingungen angeregt.

1. Im Resonanzfall sind der Gesamtstrom I und die angelegte Spannung U in Phase, d.h. $\varphi_I - \varphi_U = 0$. Bei welcher Kreisfrequenz ω_0 tritt dieser Fall ein? Wie groß ist dann der komplexe Gesamtwiderstand Z?

   The complex resistance is:

   $$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\sqrt{2}Ue^{\jmath(\omega t+\varphi_U)}}{\sqrt{2}Ie^{\jmath(\omega t+\varphi_I)}} = \frac{U}{I}e^{\jmath(\varphi_U-\varphi_I)} \overset{(*)}{=} \frac{U}{I}e^{\jmath 0} = \frac{U}{I} \in \mathbb{R}$$

   where in $(*)$ we used the fact that in resonance $\varphi_U = \varphi_I$.

   We can calculate the complex resistance as:

   $$\begin{aligned}\frac{1}{\underline{Z}} &= \frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_C} \\ &= \frac{1}{R} + \frac{1}{\jmath\omega L} + \jmath\omega C \\ &\Longrightarrow \underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} - \jmath\frac{1}{\omega L} + \jmath\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \jmath\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)}\end{aligned}$$

   Given that $\underline{Z} \in \mathbb{R}$, we have that the imaginary part must be zero:

   $$\begin{aligned}-\frac{1}{\omega_0 L} + \omega_0 C = 0 \Longrightarrow &\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \Longrightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow &\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{0{,}2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}} = \sqrt{500} \approx 22{,}36\,{}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

   Therefore, we have that:

   $$\underline{Z} = Z = R = 10\,\Omega$$

2. Wie ändert sich die Situation, wenn die Zuleitungen nicht mehr als ideal angenommen werden und einen ohmschen Widerstand R_ℓ beitragen? Welche Werte haben ω_0 und Z dann?

   In this case, we have:

   $$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \jmath\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)} + R_\ell$$

   Therefore, ω_0 does not change, but:

   $$\underline{Z} = Z = R + R_\ell = 10 + R_\ell$$

Ejercicio 1.5.3 (Wechselstromparadoxon)**.** Der in Bild 1.4 dargestellte Wechselstromkreis enthält die ohmschen Widerstände R und R_x und einen zu R_x parallel geschalteten Kondensator mit der Kapazität C. Beim Anlegen einer Wechselspannung $\underline{U}$ mit der Kreisfrequenz ω fließt der Gesamtstrom $\underline{I}$, dessen Effektivwert I

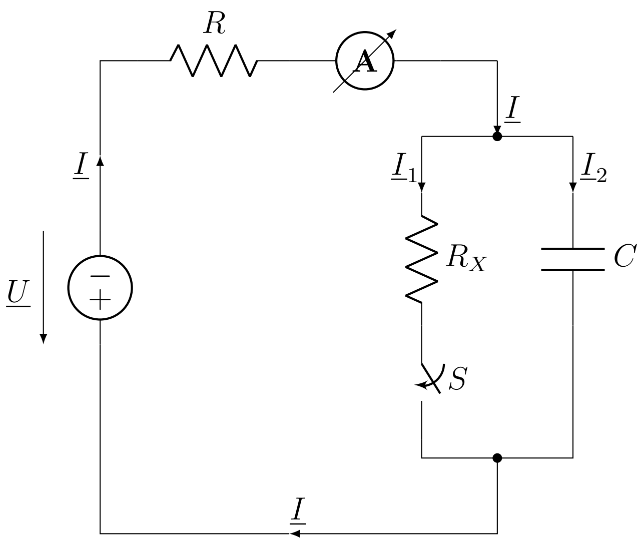

Figura 1.4: Skizze zur Aufgabe 1.5.3.

durch das zugeschaltete Wechselstrommessgerät A gemessen wird. Der Innenwiderstand R_i des Geräts sei im Widertstand R bereits enthalten. Zeigen Sie: Der ohmsche Widerstand R_x lässt sich so wählen, dass die Stromanzeige unabhängig ist von der Stellung des Schalters S (geschlossen oder offen; sog Wechselstromparadoxon).

We have two options:

- Switch open: In this case, everything is connected in serial and $\underline{I}_1 = 0$. Therefore:

$$\underline{Z}_{\text{open}} = R + \frac{1}{\jmath\omega C} = R - \frac{1}{\omega C} \cdot \jmath$$

- Switch closed:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{\text{closed}} = R + \frac{1}{\dfrac{1}{R_X} + \jmath\omega C} &= \left(R + \frac{\frac{1}{R_X}}{\frac{1}{R_X^2} + \omega^2 C^2}\right) - \frac{\omega C}{\frac{1}{R_X^2} + \omega^2 C^2} \cdot \jmath = \\
&= \left(R + \frac{R_X}{1 + (R_X \omega C)^2}\right) - \frac{R_X^2 \omega C}{1 + (R_X \omega C)^2} \cdot \jmath = \\
&= \frac{R(1 + (R_X\omega C)^2) + R_X}{1 + (R_X \omega C)^2} - \frac{R_X^2 \omega C}{1 + (R_X \omega C)^2} \cdot \jmath
\end{aligned}$$

In order that the current does not depend on the position of the switch, it is needed:

$$\widehat{I}_{\text{closed}} = \widehat{I}_{\text{open}} \Longrightarrow |\underline{I}_{\text{closed}}| = |\underline{I}_{\text{open}}| \Longrightarrow \left|\frac{\underline{U}_{\text{closed}}}{\underline{Z}_{\text{closed}}}\right| = \left|\frac{\underline{U}_{\text{open}}}{\underline{Z}_{\text{open}}}\right|$$

Given that $\underline{U}_{\text{open}} = \underline{U}_{\text{closed}}$, we only need that:

$$|\underline{Z}_{\text{closed}}| = |\underline{Z}_{\text{open}}| \Longrightarrow |\underline{Z}_{\text{closed}}|^2 = |\underline{Z}_{\text{open}}|^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} = \frac{(R(1+(R_X\omega C)^2) + R_X)^2 + (R_X^2\omega C)^2}{(1+(R_X\omega C)^2)^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (R(1+(R_X\omega C)^2))^2 + \frac{(1+(R_X\omega C)^2)^2}{\omega^2 C^2} = (R(1+(R_X\omega C)^2))^2 + R_X^2 + 2R_X\ R(1+(R_X\omega C)^2) + ($$

$$\Longrightarrow \frac{(1+(R_X\omega C)^2)^2}{\omega^2 C^2} = R_X^2 + 2R_X\ R(1+(R_X\omega C)^2) + (R_X^2\omega C)^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1 + 2(R_X\omega C)^2 = (R_X\omega C)^2 + 2\omega^2 C^2 R_X\ R(1+(R_X\omega C)^2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1 + (R_X\omega C)^2 = 2\omega^2 C^2 R_X\ R(1+(R_X\omega C)^2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (2\omega^2 C^2 R_X\ R - 1)(1+(R_X\omega C)^2) = 0$$

Therefore, the only possible solution is:

$$R_X = \frac{1}{2R(\omega C)^2}$$

Using that value of R_X, we will measure the same current value with the switch opened and closed.