Curvas y Superficies

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Curvas y Superficies

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

Índice general

1. Curvas en el plano y en el espacio

1.1. Definición. Curva regular. Longitud de arco

Definición 1.1. Una **curva** en el espacio es una aplicación diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.

Normalmente, si queremos señalar explícitamente las componentes de α, escribiremos:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

En realidad, a un geómetra solo le interesa la llamada "traza de la curva":

$$\operatorname{tr} \alpha = \operatorname{im} \alpha = \alpha(I)$$

Ejemplo. Sean $a \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$, definimos $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por:

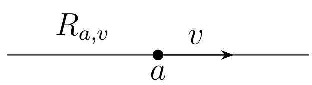
$$\alpha(t) = a + tv$$

En dicho caso:

$$\operatorname{tr} \alpha = \begin{cases} \{a\} & \text{si } v = 0 \\ R_{a,v} & \text{si } v \neq 0 \end{cases}$$

donde denotamos por $R_{a,v}$ a la única recta que pasar por a y con dirección v:

$$R_{a,v} = a + \langle v \rangle$$



Definición 1.2. Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ se llama "**plana**" si existe un plano $P \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{tr} \alpha \subset P$.

Como P y $P(z = 0)$ son equivalentes salvo un movimiento rígido[1] de $\mathbb{R}^3$, podemos considerar que la curva α está definida como $\alpha : I \to P(z = 0) \subset \mathbb{R}^3$, cuyas componentes son:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), 0) \equiv (x(t), y(t))$$

De esta forma, podemos abstraernos y pensar que una curva plana es una aplicación diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$.

[1]Es decir, una aplicación afín que conserve longitudes y ángulos.

En los libros es común llamar a estar curvas "parametrizadas" y "diferenciables". En nuestra definición imponemos que una curva ha de ser diferenciable, y el adjetivo parametrizada se debe a la dependencia de la variable independiente.

Ejemplo. Varios ejemplos de curvas:

1. Extrapolando el ejemplo anterior:

$$\alpha(t) = a + tv$$

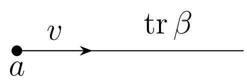
   para $a \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha'(t) = v$. Se trata de un Movimiento Rectilíneo Uniforme. Ahora, vemos que $\alpha''(t) = 0$, no hay aceleración ninguna.

2. Tomando $a \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, consideramos $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\beta(t) = a + t^2 v$$

   Observamos ahora que tenemos $\operatorname{tr}\beta \subset \operatorname{tr}\alpha$, y la traza de esta curva es la semirrecta de extremo a y dirección v:

$$\operatorname{tr}\beta = R_0^+(a, v)$$



   Desde el punto de vista físico, muy en el pasado (límite en $-\infty$) estábamos muy alejados del punto a. A medida que nos vamos acercando a tiempo 0 nos vamos acercando al punto a con una velocidad de módulo decreciente que se hace cero cuando alcanzamos el instante $t = 0$ y que luego aumenta posteriormente mientras el móvil se aleja del punto a en la dirección en la que vino.

   Vemos que tenemos una velocidad $\beta'(t) = 2tv$, así como una aceleración $\beta''(t) = 2v$, que es constante, por lo que estamos ante un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado.

Ejercicio 1.1.1. Estudiar $\gamma(t) = a + t^3 v$, con $a \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
Es claro que $\operatorname{tr}\gamma = R_{a,v} = \operatorname{tr}\alpha$. En este caso tenemos:

$$\gamma'(t) = 3t^2, \qquad \gamma''(t) = 6t$$

Vemos que la velocidad es siempre positiva y en este caso la aceleración no es constante: es decreciente cuando $t < 0$ y es creciente cuando $t > 0$, simula la situación en la que un móvil se acerca al punto a frenando cada vez más fuerte y a medida que pasa el punto a comienza a acelerar cada vez más rápido.

Ejemplo. Siguiendo con más ejemplos:

3. Consideramos ahora $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\delta(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$$

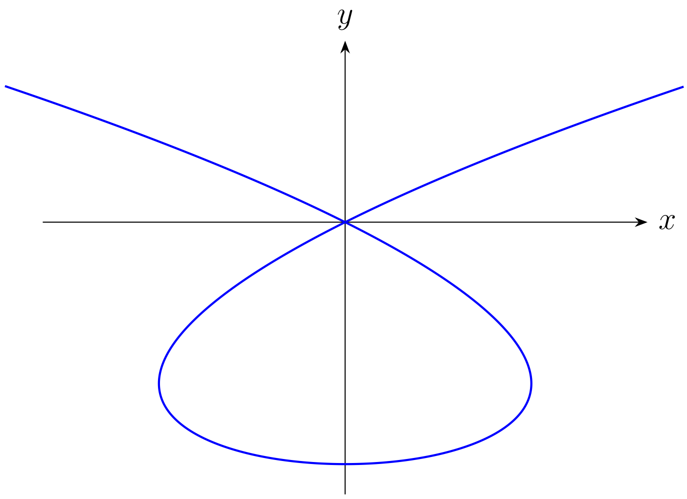
Para pensar la curva primero analizamos dónde esta corta el eje x:

$$t^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow t = \pm 2$$

En dichas abscisas, la curva toma la ordenada:

$$\delta(-2) = 0 = \delta(2)$$

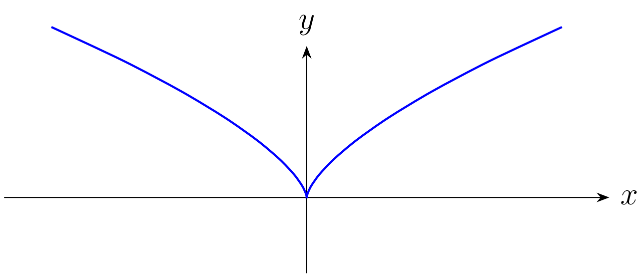
Por lo que en ambos instantes de tiempo la curva pasa por el origen. Si estudiamos el corte con el eje y vemos que tiene 3 puntos de corte, dos de ellos ya los conocemos y el que falta es en el instante $t = 0$; donde alcanza una ordenada de -4. Teniendo en cuenta también los límites en $-\infty$ y en $+\infty$ podemos finalmente deducir que la curva será algo del estilo:



4. Si consideramos $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varepsilon(t) = (t^3, t^2)$.

Su velocidad es $\varepsilon'(t) = (3t^2, 2t)$, que se anula en el origen. Observamos que en el dibujo de la traza vemos un pico.

Aunque ε sea diferenciable, $\operatorname{tr} \varepsilon$ tiene "picos". Observamos además que $\operatorname{im} \varepsilon$ es la gráfica de la aplicación[2] $y = x^{2/3}$. Esta función no es derivable en el origen.



[2] Lo hemos obtenido igualando $x = t^3$, $y = t^2$, despejando t de la primera e igualando en la segunda.