Ecuaciones Diferenciales II

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

Índice general

1. Movimiento de partículas en un fluido

Fijado un espacio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, supondremos siempre que será abierto[1] y conexo[2].

Notación. A cada punto de Ω lo notaremos normalmente por $p \in \Omega$, que tendrá coordenadas:

$$p = (x, y, z)$$

El fluido suele llevar en cada punto una dirección y una velocidad, por lo que en cada punto $p \in \Omega$ tendremos un vector v que determina la velocidad del fluido, la cual supondremos conocida siempre. Este vector no tiene por qué ser constante sino que puede depender del tiempo, por lo que generalmente v será una función $v = v(t, p)$, es decir, $v : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación que a cada momento t y posición p le asigna un vector $v(t, p)$.

Si tenemos una partícula en el fluido que se mueve esta determinará una trayectoria, que podemos modelar como una curva parametrizada $p(t)$.

Podremos medir la velocidad de la partícula de dos formas: observando la velocidad de la partícula de forma interna (como el cuentakilómetros de un coche) o suponiendo que es una partícula que se deja llevar por la corriente y que su velocidad es la del fluido. La velocidad es la derivada de p.

En el segundo caso:

$$\dot{p}(t) = V(t, p(t))$$

Estamos ante una ecuación diferencial. Observemos que es un sistema de primer orden en forma normal, puesto que las coordenadas de p son funciones del tiempo. Si escribimos $V = (u, v, w)$ tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = u(t, x, y, z) \\ \dot{y} = v(t, x, y, z) \\ \dot{z} = w(t, x, y, z) \end{array}\right.$$

Un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas, que conocidas las velocidades del fluido determina la trayectoria de la partícula.

[1]Queremos estudiar movimientos de partículas en un fluido y pasan cosas no deseadas en la frontera.

[2]Por comodidad.

Observación. Observemos que en la notación primera hemos escrito explícitamente que $\dot{p}$ está en función de t. En la segunda notación estamos usando la notación habitual en las ecuaciones diferenciales, omitiendo la dependencia de t y pensándola de forma implícita. Podemos así reescribir la primera ecuación como:

$$\dot{p} = V(t, p)$$

Una vez denotamos $\dot{p}(t)$ estamos diciendo que es una solución concreta, por lo que será una variable dependiente de t. Sin embargo, cuando hablamos de $V(t, p)$ vemos p como una variable independiente.

Aparecerán sistemas autónomos, que representan fluidos estacionarios, donde la velocidad $V(t, p)$ no depende del tiempo.

Ejemplo. Comenzamos primero con dos ejemplos de fluidos estacionarios (el vector en cada posición no depende del tiempo):

- Consideramos $\Omega = \mathbb{R}^3$ y tomamos:

  $$V(t, x, y, z) = (0, 1, 0)$$

  Observamos que es un sistema autónomo (no depende del tiempo) y en el que la velocidad tampoco depende de la posición:

  $$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 1 \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

  Con lo que las soluciones son de la forma:

  $$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \\ y(t) &= t + c_2 \\ z(t) &= c_3 \end{aligned}$$

  Es una familia que depende de 3 parámetros.

- Tomamos la ecuación de un vórtice lineal, $\Omega = \mathbb{R}^3$ y:

  $$V(t, x, y, z) = (y, -x, 0)$$

  Tenemos el sistema:

  $$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

  Es un sistema lineal homogéneo, que nos da las soluciones:

  $$z(t) = c_3$$

  Reducimos a una ecuación de segundo orden, derivando en la primera:

  $$\ddot{x} + \dot{x} = 0$$

Por lo que:
$$x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t)$$

Y también tendremos:

$$y(t) = -c_1 \operatorname{sen}(t) + c_2 \cos(t)$$

Para ciertas condiciones iniciales $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Nuestro objetivo ahora es tratar de probar que el sistema:

$$\dot{p} = V(t, p)$$

con la condición inicial $p(t_0) = p_0$ tiene una solución. Luego trataremos de ver que en cada condición inicial tenemos una única solución. Demostraremos el Teorema de existencia y unicidad en cualquier número de dimensiones.

Notación. Notaremos a los puntos por $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ y al campo que define la ecuación diferencial por X, que será función de t y de x, que estará definido en un conjunto $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ y exigiremos que sea abierto y conexo. Así, tendremos

$$\begin{array}{rccc} X: & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ & (t,x) & \longmapsto & X(t,x) \end{array}$$

donde el campo X tiene d coordenadas:

$$X = (X_1, \ldots, X_d)$$

donde tratamos de resolver la ecuación $\dot{x} = X(t, x)$, que en realidad es un sistema de ecuaciones:
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x_1} = X_1(t, x_1, \ldots, x_d) \\ \vdots \\ \dot{x_d} = X_d(t, x_1, \ldots, x_d) \end{array} \right.$$
Supondremos siempre que X es una función continua.

Tomaremos $(t_0, x_0) \in D$ y queremos resolver el problema de condiciones iniciales

$$\dot{x} = X(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

que consiste en resolver la ecuación diferencial superrior mediante una solución que cumpla la condición enunciada.