Cálculo I
Examen XII

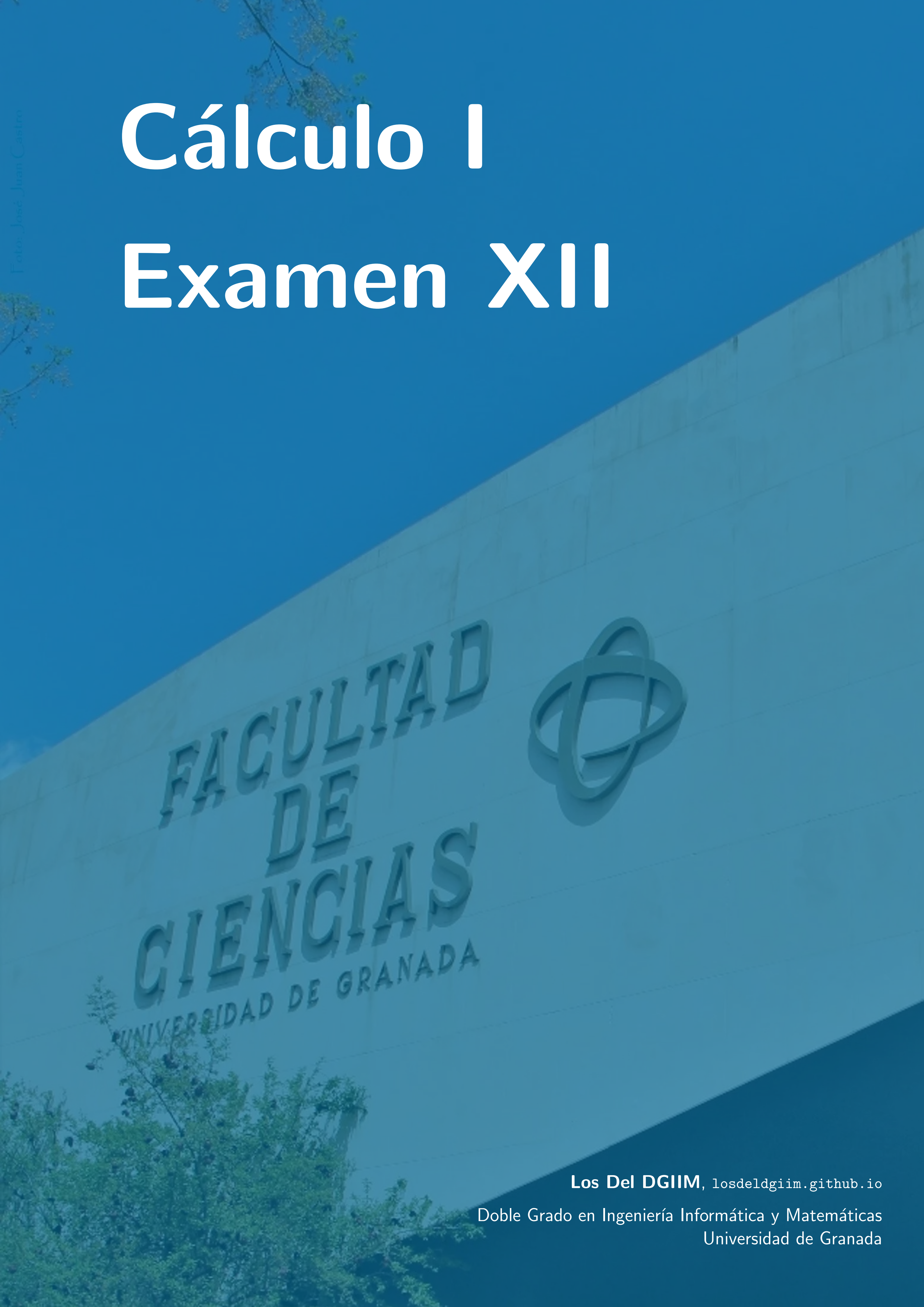

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo I
Examen XII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Asignatura Cálculo I.

Curso Académico 2025-26.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Luis Gámez Ruiz.

Descripción Examen de la evaluación continua.

Fecha 10 de noviembre de 2025.

Ejercicio 1. Enuncia:

a) Definición de *Conjunto mayorado.*

b) Definición de *Sucesión convergente.*

c) Definición de *Sucesión de Cauchy.*

d) Enuncia el *Teorema de Bolzano-Weierstrass.*

e) Enuncia el *Teorema de complitud de* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Decide **razonadamente** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $a, b \in \mathbb{R}$, $|ab| < |a| \Longrightarrow b < 1$.

b) Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.

c) Todo conjunto no vacío de números positivos tiene mínimo.

d) Toda sucesión monótona y mayorada es convergente.

e) Toda sucesión que admita una parcial de Cauchy, es acotada.

Ejercicio 3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Demostrar que:

$$\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 4. Estudiar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$, definida mediante:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{5x_n - 3}{x_n + 1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 1. Enuncia:

a) Definición de *Conjunto mayorado.*

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ decimos que está mayorado si existe $M \in \mathbb{R}$ de forma que $a \leqslant M \quad \forall a \in A$.

b) Definición de *Sucesión convergente.*

Una sucesión $\{x_n\}$ de números reales decimos que es convergente si:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

c) Definición de *Sucesión de Cauchy.*

Una sucesión $\{x_n\}$ de números reales decimos que es de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geqslant m \Longrightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon$$

d) Enuncia el *Teorema de Bolzano-Weierstrass.*

Toda sucesión de numeros reales acotada admite una sucesión parcial convergente.

e) Enuncia el *Teorema de complitud de* $\mathbb{R}$.

En $\mathbb{R}$ toda sucesión de Cauchy es convergente.

Ejercicio 2. Decide **razonadamente** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $a, b \in \mathbb{R}$, $|ab| < |a| \Longrightarrow b < 1$.

Es **verdadera**, puesto que si $a, b \in \mathbb{R}$ con $|ab| < |a|$, tenemos entonces que:

$$|a||b| = |ab| < |a| \Longleftrightarrow |b| < 1 \Longleftrightarrow b \in \left]-1, 1\right[$$

En particular, tenemos que $b < 1$.

b) Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.

Es **verdadera**, y se conoce como el principio de buena ordenación de los naturales.

c) Todo conjunto no vacío de números positivos tiene mínimo.

Es **falsa**, pues $]0, 1[$ es un conjuno no vacío de números positivos y no tiene mínimo.

d) Toda sucesión monótona y mayorada es convergente.

Es **falsa**, pues $\{-n\}$ es una sucesión monótona (es decreciente) y mayorada por 4 pero no es convergente.

e) Toda sucesión que admita una parcial de Cauchy, es acotada.

Es **falsa**, pues la sucesión $\{x_n\}$ dada por:

$$x_{2n} = 0, \qquad x_{2n+1} = n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Admite una parcial de Cauchy, $\{x_{2n}\} = \{0\}$, pero no es acotada.

Ejercicio 3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Demostrar que:

$$\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se demuestra fácilmente por inducción sobre n.

Ejercicio 4. Estudiar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$, definida mediante:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{5x_n - 3}{x_n + 1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$