

Topología II

Examen II

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Topología II

Examen II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Asignatura Topología II.

Curso Académico 2024/25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Grupo Único.

Descripción Prueba del Tema 1.

Fecha 21 de noviembre de 2024.

Ejercicio 1. Elija uno de los siguientes ejercicios:

- a) Sea $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ una aplicación continua e inyectiva. Demuestra que f es sobreyectiva.
- b) Prueba que no existe una retracción $r : \mathbb{S}^2 \rightarrow E$ donde E es el ecuador de la esfera, es decir

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z = 0\}$$

Ejercicio 2. Sean S_1 y S_2 las esferas de \mathbb{R}^3 de radio 1 con centros respectivos en los puntos $(2, 0, 0)$ y $(-2, 0, 0)$, calcula el grupo fundamental de

$$X = S_1 \cup S_2 \cup R$$

en el origen, donde $R = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$. Determina lazos basados en el origen cuyas clases de equivalencia generen $\pi_1(X, (0, 0, 0))$.

Solución.

Ejercicio 1. Elija uno de los siguientes ejercicios:

- a) Sea $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ una aplicación continua e inyectiva. Demuestra que f es sobreyectiva.

Supuesto que $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una aplicación continua, inyectiva y no sobreyectiva, tenemos entonces que existe $y \in \mathbb{S}^2$ de forma que $f(x) \neq y \quad \forall x \in \mathbb{S}^2$. Como $\mathbb{S}^2 \setminus \{y\}$ es homeomorfo a \mathbb{R}^2 , podemos considerar un homeomorfismo $g : \mathbb{S}^2 \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}^2$. De esta forma, tenemos que $(g \circ f) : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación continua e inyectiva (como composición de aplicaciones inyectivas), pero esto contradice el Teorema de Borsuk-Ulam: si $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es continua entonces existe $x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $h(x_0) = h(-x_0)$.

- b) Prueba que no existe una retracción $r : \mathbb{S}^2 \rightarrow E$ donde E es el ecuador de la esfera, es decir

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z = 0\}$$

Por reducción al absurdo, si existiera una retracción $r : \mathbb{S}^2 \rightarrow E$, tendríamos entonces que la inclusión $i : E \hookrightarrow \mathbb{S}^2$ induce un homomorfismo inyectivo entre grupos fundamentales (no especificamos el punto en los grupos fundamentales, pensando en que como los dos conjuntos son arcoconexos estos serán isomorfos):

$$i_* : \pi_1(E) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^2)$$

Como $\pi_1(\mathbb{S}^2) = \{1\}$, ha de ser entonces $\pi_1(E) = \{1\}$ para que i_* sea inyectiva. Sin embargo, tenemos que:

$$E = \mathbb{S}^1 \times \{0\} \cong \mathbb{S}^1$$

Por lo que:

$$\pi_1(E) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

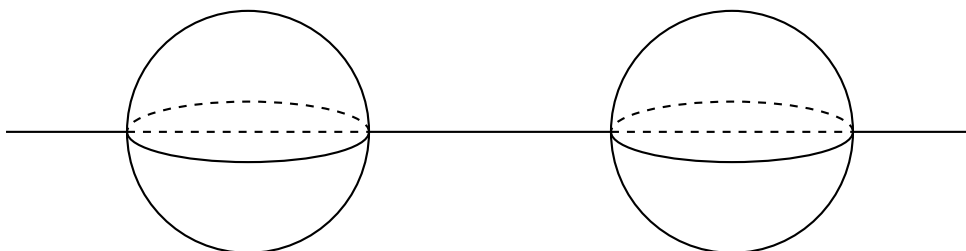
Hemos llegado a una contradicción.

Ejercicio 2. Sean S_1 y S_2 las esferas de \mathbb{R}^3 de radio 1 con centros respectivos en los puntos $(2, 0, 0)$ y $(-2, 0, 0)$, calcula el grupo fundamental de

$$X = S_1 \cup S_2 \cup R$$

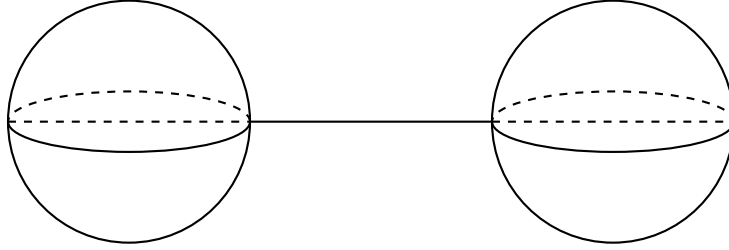
en el origen, donde $R = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$. Determina lazos basados en el origen cuyas clases de equivalencia generen $\pi_1(X, (0, 0, 0))$.

Tenemos el conjunto:



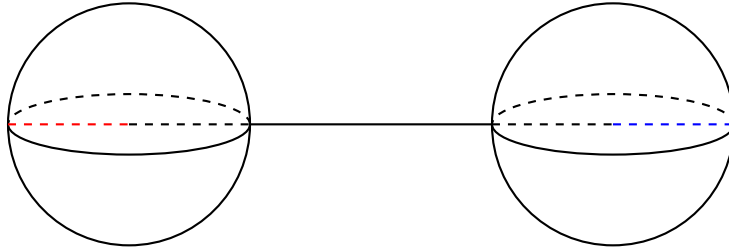
Que tiene como retracto de deformación el conjunto:

$$Y = S_1 \cup S_2 \cup [(-3, 0, 0), (3, 0, 0)]$$



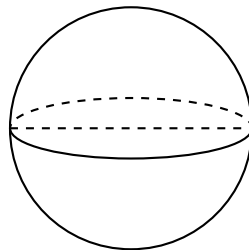
Podemos considerar los conjuntos:

$$U = Y \setminus [(-3, 0, 0), (-2, 0, 0)], \quad V = Y \setminus [(2, 0, 0), (3, 0, 0)]$$



Y tenemos que:

- Claramente $Y = U \cup V$ con U y V abiertos.
- U , V y $U \cap V$ son arcoconexos como unión de ciertos conjuntos arcoconexos con intersección no vacía.
- $U \cap V$ tiene como retracto de deformación el conjunto $[(-1, 0, 0), (1, 0, 0)]$, que claramente es simplemente conexo.
- U tiene como retracto de deformación el conjunto $Z = S_2 \cup [(1, 0, 0), (3, 0, 0)]$:



Si en este tomamos:

$$W = Z \setminus \{(2, 0, 0)\}, \quad K = Z \setminus \{(3, 0, 1)\}$$

Tenemos:

- W y K son abiertos con $Z = W \cup K$.
- W , K y $W \cap K$ son arcoconexos como unión de conjuntos arcoconexos con intersección no vacía.
- W tiene a S_2 como retracto de deformación, por lo que W es simplemente conexo.
- $W \cap K$ tiene a $S_2 \setminus \{(3, 0, 1)\}$ como retracto de deformación, que es homeomorfo a \mathbb{R}^2 , por lo que $W \cap K$ es simplemente conexo.
- K tiene al conjunto:

$$[(1, 0, 0), (3, 0, 0)] \cup \{(x, 0, z) \in S_2 : z \leq 0\}$$

como retracto de deformación, homeomorfo a \mathbb{S}^1 , por lo que $\pi_1(K) \cong \mathbb{Z}$.

Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen obtenemos que $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$.

- U y V son claramente homeomorfos (basta considerar una rotación), por lo que también será $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$.

Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen concluimos que:

$$\pi_1(X) = \pi_1(Y) = \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$