Ecuaciones Diferenciales I
Examen VII

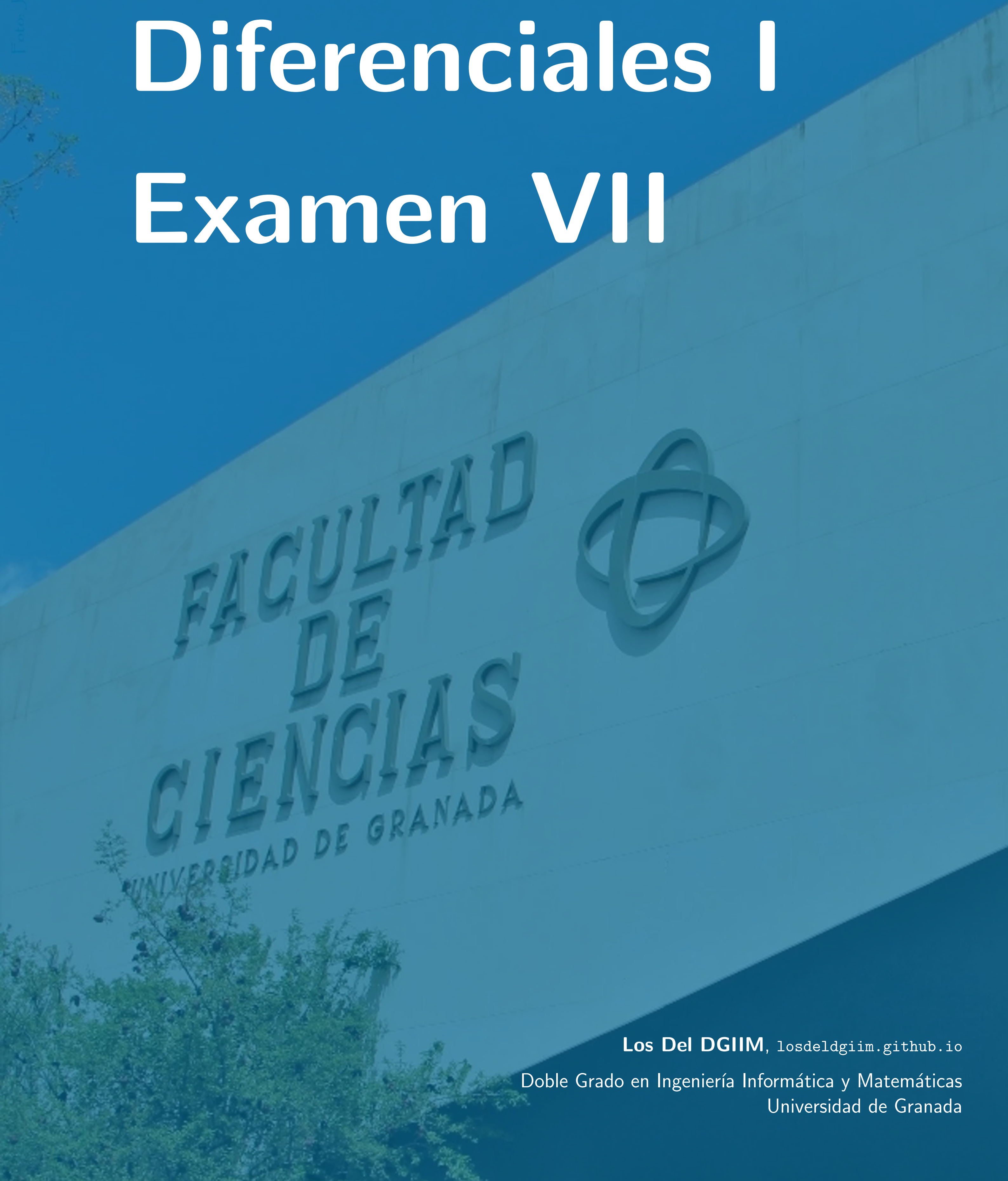

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen VII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I.

Curso Académico 2018-2019.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Convocatoria Ordinaria

Fecha 18 de junio de 2019.

1. Primera Parte

Ejercicio 1.1 (6 puntos)**.** Se considera una ecuación diferencial del tipo

$$x' = a(t)x^5 + b(t)x, \tag{1}$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas definidas en un intervalo abierto I.

1. (2 puntos) Dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se definen las nuevas variables

   $$s = t, \quad y = x^\alpha.$$

   Encuentra dominios del plano D y D' de manera que la transformación dada por $(t, x) \in D \mapsto (s, y) \in D'$ sea un cambio admisible para la ecuación (1).

   El cambio de variable viene definido por:

   $$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : & D & \longrightarrow & D' \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) = (t, x^\alpha) \end{array}$$

   Su inversa no obstante depende de los valores de α, al igual que los dominios. Distinguimos en los siguientes casos:

   - Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$: Hay que volver a distinguir casos:
     - Si $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z}$: Hay que distinguir entre si es par o impar.
       - Si $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z}$ y es par:
         Tenemos que la función $y = x^\alpha$ está definida en todo $\mathbb{R}$, pero tan solo es inyectiva en $\mathbb{R}^+$ o en $\mathbb{R}^-$. Consideramos por tanto:
         - $x \in \mathbb{R}^+$:
           En este caso, tenemos que la inversa, por poder despejar de forma única t, x en función de s, y, es:

           $$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1} : & D' & \longrightarrow & D \\ & (s, y) & \longmapsto & (t, x) = (s, y^{1/\alpha}) = (s, \sqrt[\alpha]{y}) \end{array}$$

           Los dominios son:

           $$D = I \times \mathbb{R}^+, \quad D' = I \times \mathbb{R}^+.$$

         - $x \in \mathbb{R}^-$:
           En este caso, tenemos que la inversa, por poder despejar de forma única t, x en función de s, y, es:

           $$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1} : & D' & \longrightarrow & D \\ & (s, y) & \longmapsto & (t, x) = (s, -y^{1/\alpha}) = (s, -\sqrt[\alpha]{y}) \end{array}$$

           Los dominios son:

           $$D = I \times \mathbb{R}^-, \quad D' = I \times \mathbb{R}^+.$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z}$ y es impar:
  Tenemos que la función $y = x^\alpha$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es biyectiva, por lo que podemos despejar de forma única t, x en función de s, y. Por tanto, la inversa es:

$$\begin{array}{cccc} \varphi^{-1}: & D' & \longrightarrow & D \\ & (s,y) & \longmapsto & (t,x) = (s, y^{1/\alpha}) = (s, \sqrt[\alpha]{y}) \end{array}$$

  Los dominios son:

$$D = D' = \mathbb{R}^2.$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$:
  En este caso, tenemos que la función $y = x^\alpha$ tan solo está definida en $\mathbb{R}^+$, por lo que la inversa es:

$$\begin{array}{cccc} \varphi^{-1}: & D' & \longrightarrow & D \\ & (s,y) & \longmapsto & (t,x) = (s, y^{1/\alpha}) \end{array}$$

  Los dominios son:

$$D = D' = I \times \mathbb{R}^+.$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^-$:
  Volvemos a distinguir casos:
  - Si $\alpha \in \mathbb{R}^- \cap \mathbb{Z}$: Hay que distinguir entre si es par o impar.
    - Si $\alpha \in \mathbb{R}^- \cap \mathbb{Z}$ y es par:
      Tenemos que la función $y = x^\alpha$ está definida en $\mathbb{R}^*$, y el dominio ha de ser un intervalo. Distinguimos:
      - $x \in \mathbb{R}^+$:
        En este caso, tenemos que la inversa, por poder despejar de forma única t, x en función de s, y, es:

$$\begin{array}{cccc} \varphi^{-1}: & D' & \longrightarrow & D \\ & (s,y) & \longmapsto & (t,x) = (s, y^{1/\alpha}) = \left(s, \dfrac{1}{\sqrt[-\alpha]{y}}\right) \end{array}$$

        Los dominios son:

$$D = I \times \mathbb{R}^+, \quad D' = I \times \mathbb{R}^+.$$

      - $x \in \mathbb{R}^-$:
        En este caso, tenemos que la inversa, por poder despejar de forma única t, x en función de s, y, es:

$$\begin{array}{cccc} \varphi^{-1}: & D' & \longrightarrow & D \\ & (s,y) & \longmapsto & (t,x) = (s, -y^{1/\alpha}) = \left(s, -\dfrac{1}{\sqrt[-\alpha]{y}}\right) \end{array}$$

        Los dominios son:

$$D = I \times \mathbb{R}^-, \quad D' = I \times \mathbb{R}^+.$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^- \cap \mathbb{Z}$ y es impar:
  Tenemos que la función $y = x^\alpha$ está definida en $\mathbb{R}^*$ y es biyectiva. Por tanto, la inversa es:

$$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1}: & D' & \longrightarrow & D \\ & (s,y) & \longmapsto & (t,x) = (s, y^{1/\alpha}) = \left(s, \dfrac{1}{\sqrt[-\alpha]{y}}\right) \end{array}$$

  Hay dos posibles dominios, ya que ha de ser conexo:

$$D_1 = D_1' = I \times \mathbb{R}^+,$$
$$D_2 = D_2' = I \times \mathbb{R}^-.$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}$:
  En este caso, tenemos que la función $y = x^\alpha$ está definida en $\mathbb{R}^+$, por lo que la inversa es:

$$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1}: & D' & \longrightarrow & D \\ & (s,y) & \longmapsto & (t,x) = (s, y^{1/\alpha}) = \left(s, \dfrac{1}{\sqrt[-\alpha]{y}}\right) \end{array}$$

  Los dominios son:

$$D = D' = I \times \mathbb{R}^+.$$

En cualquier caso, tenemos que es admisible puesto que no modifica la variable independiente.

2. (2 puntos) Transforma la ecuación (1) mediante el cambio del apartado anterior. ¿Para qué valores de α se obtiene una ecuación lineal?

La ecuación transformada es:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} &= \alpha x^{\alpha-1}x' = \alpha x^{\alpha-1}\left(a(t)x^5 + b(t)x\right) = \alpha x^{4+\alpha}a(t) + \alpha x^\alpha b(t) = \\ &= \alpha y x^4 a(t) + \alpha y b(t). \end{aligned}$$

Para despejar x^4 en función de y, tenemos que $x = \pm y^{1/\alpha}$, dependiendo del caso. No obstante, como es x^4, no importa el signo, por lo que:

$$y' = y \cdot y^{4/\alpha}a(t) + yb(t) = y^{4+\alpha/\alpha}a(t) + yb(t) \qquad \text{con dominio } D'.$$

Para que sea lineal, ha de ser $4 + \alpha = 0$, es decir, $\alpha = -4$. Por tanto, la ecuación lineal es:

$$y' = a + by \qquad \text{con dominio } D' = I \times \mathbb{R}^+.$$

3. (2 puntos) Se supone $a(t) = -1/4t$, $b(t) = 1/4$, $I = \mathbb{R}$. Encuentra la solución de (1) que cumple $x(2) = 1$. ¿En qué intervalo está definida?

La ecuación a resolver es:

$$x' = -\frac{1}{4}tx^5 + \frac{1}{4}x \qquad \text{con dominio } D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Tomando el cambio de variable anterior para $\alpha = -4$, llegamos a:

$$y' = -\frac{1}{4}s + \frac{1}{4}y, \qquad \text{con dominio } D' = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

La solución de esta ecuación es:

$$y(s) = e^{s/4}\left(\int e^{-z/4} \cdot \frac{-z}{4} dz + C\right)$$

Para resolver dicha ecuación aplicamos el Método de Integración por Partes:

$$\left[\begin{array}{ll} u(z) = z, & u'(z) = 1 \\ v'(z) = -1/4 e^{-z/4}, & v(z) = e^{-z/4} \end{array}\right] \Longrightarrow \int e^{-z/4} \cdot \frac{-z}{4} dz = ze^{-z/4} - \int e^{-z/4} dz =$$
$$= ze^{-z/4} + 4e^{-z/4} + C$$

Por tanto, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y(s) = e^{s/4}\left(se^{-s/4} + 4e^{-s/4} + C\right) = s + 4 + e^{s/4}C.$$

Deshaciendo el cambio de variable, llegamos a:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t + 4 + e^{t/4}C}}$$

Aplicando la condición inicial de $x(2) = 1$, llegamos a:

$$x(2) = 1 = \frac{1}{\sqrt[4]{2 + 4 + e^{1/2}C}} \Longrightarrow C = -\frac{5}{e^{1/2}}$$

Por tanto, la solución de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t + 4 - 5e^{t-2/4}}}$$

Para que sea una solución válida en el dominio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, ha de tenerse que el argumento de la raíz sea positivo, por lo que:

$$t + 4 - 5e^{t-2/4} > 0$$

Ejercicio 1.2 (4 puntos)**.** Se considera el sistema autónomo definido en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}, \\ y' = \dfrac{-3x}{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

1. (2 puntos) Determina la ecuación de las órbitas y encuentra todas sus soluciones.
2. (2 puntos) Dibuja las órbitas del sistema.

2. Segunda Parte

Ejercicio 2.1 (5 puntos)**.** Se considera la ecuación diferencial

$$e^y + \cos x + (xe^y + 2y)y' = 0.$$

1. (2.5 puntos) Encuentra la ecuación que define en forma implícita a la solución que cumple la condición inicial $y(0) = 1$. (Se debe justificar que dicha ecuación define una función en un entorno de $x = 0$).
2. (2.5 puntos) ¿Existe una solución de la ecuación diferencial que cumpla $y(0) = 0$?

Ejercicio 2.2 (5 puntos)**.** Calcula en cada caso el trabajo para la fuerza F y el camino γ.

1. (2.5 puntos) $F(x, y) = (-y, x)$, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
2. (2.5 puntos) $F(x, y) = (4x^3 + y, 2y + x)$, $\gamma(t) = (\ln t, t)$, $t \in [1, e]$.

3. Tercera Parte

Ejercicio 3.1 (6 puntos)**.** Se considera la ecuación

$$t^2x'' + tx' + x = \operatorname{sen}(\ln t), \quad t > 0,$$

y se pide:

1. (2 puntos) Encuentra una constante $\alpha > 0$ de manera que las funciones
$$\phi_1(t) = \operatorname{sen}(\alpha \ln t), \quad \phi_2(t) = \cos(\alpha \ln t), \quad t > 0$$
formen un sistema fundamental de la ecuación homogénea asociada.
2. (2 puntos) Usando la fórmula de variación de constantes, encuentra una solución particular de la ecuación completa.
3. (2 puntos) Encuentra la solución de la ecuación completa que cumple $x(1) = 0$, $x'(1) = 0$.

Ejercicio 3.2 (4 puntos)**.** Encuentra la solución general de la ecuación

$$y''' + 2y'' + y' = 5e^t + \cos t.$$