

Cálculo II

Examen IV

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Cálculo II

Examen IV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María Victoria Velasco Collado.

Descripción Primer Parcial. Derivación. Temas 1-4.

Fecha 22 de abril de 2022.

Ejercicio 1. [2 puntos] Dada $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, demostrar las siguientes afirmaciones:

1. Si f es derivable en \mathbb{R}^+ y $|f'(x)| \leq f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^+$, entonces:

$$|\ln(f(y)) - \ln(f(x))| \leq |y - x| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Sea $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \ln x$, y consideramos $g \circ f$.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Usando que $|f'(x)| \leq f(x)$, tenemos que:

$$|(g \circ f)'(x)| = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \leq \frac{f(x)}{|f(x)|} \leq 1$$

Por tanto, como su derivada está acotada, tengo que $g \circ f$ es lipschitziana, con constante de Lipschitz menor o igual a la cota de la derivada; es decir, $M_0 \leq 1$.

Por tanto, por ser lipschitziana, tengo que:

$$|(g \circ f)(y) - (g \circ f)(x)| \leq M_0 |y - x| \leq |y - x| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Es decir, ha quedado demostrado.

2. Si f es dos veces derivable en \mathbb{R}^+ , entonces $\ln(f(x))$ es cóncava hacia arriba si y solo si:

$$f''(x)f(x) - f'(x)f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Sea $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \ln x$, y consideramos $g \circ f$.

Como f es dos veces derivable, tengo que g también lo es. Sé que $(g \circ f)(x)$ es cóncava hacia abajo si y solo si $(g \circ f)''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$. Calculo por tanto la segunda derivada:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$(g \circ f)''(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} \geq 0 \iff f''(x)f(x) - (f'(x))^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto, tenemos que el resultado es cierto.

Ejercicio 2. [2 puntos] Probar que $\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$, para cada $x > -1$.
¿Es constante la función $f(x) := \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan x$ en su dominio de definición?

Su dominio de definición es su dominio maximal. El dominio de $\arctan x$ es \mathbb{R} , por lo que:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Veamos ahora si es constante. f es derivable en $\mathbb{R} - \{-1\}$, por lo que calculo su primera derivada:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-1(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \\
&= \frac{-2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2}{2(1+x^2)} + \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}
\end{aligned}$$

Por tanto, tengo que f es constante en cada una de las restricciones a $] -1, +\infty[$ y $] -\infty, -1[$. No obstante, no tenemos asegurado que la imagen sea igual a ambos lados de $x = -1$.

$$f(0) = \arctan 1 + \arctan 0 = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$f(-2) = \arctan(-3) + \arctan(-2) < 0$$

Por tanto, tenemos que **no** es constante en su dominio de definición.

$$Im(f|_{]-1, +\infty[}) = \frac{\pi}{4} \quad Im(f|_{]-\infty, -1[}) = \arctan(-3) + \arctan(-2) < 0$$

Además, podemos afirmar que, efectivamente, $\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$, para cada $x > -1$.

Ejercicio 3. [2 puntos] Mediante el desarrollo de Taylor, calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3) - \tan^3(x)}{3x^5}.$$

Definimos $f(x) = \sin(x^3) - \tan^3(x)$. Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3) - \tan^3(x)}{3x^5} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^5} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_{5,0}^f(x)}{x^5} + \frac{P_{5,0}^f(x)}{x^5} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_{5,0}^f(x)}{x^5}$$

Calculamos por tanto los polinomios de Taylor:

$$P_{2,0}^{\sin x}(x) = x \implies P_{6,0}^{\sin(x^3)}(x) = x^3 = P_{5,0}^{\sin(x^3)}(x)$$

$$P_{5,0}^{\tan^3 x}(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \implies P_{5,0}^{\tan^3 x}(x) = \left[\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \right)^3 \right]_{n=5} = x^3 + 3 \cdot \frac{1}{3}x^5 = x^3 + x^5$$

Por tanto,

$$P_{5,0}^f(x) = P_{5,0}^{\sin(x^3)}(x) - P_{5,0}^{\tan^3 x}(x) = x^3 - x^3 - x^5 = -x^5$$

En conclusión, tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3) - \tan^3(x)}{3x^5} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_{5,0}^f(x)}{x^5} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^5}{x^5} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} -1 = -\frac{1}{3}$$

Ejercicio 4. [2 puntos] Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$. Estudiar el comportamiento en $x = 0$ de la función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \left(\frac{2a^x + 3b^x}{5} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

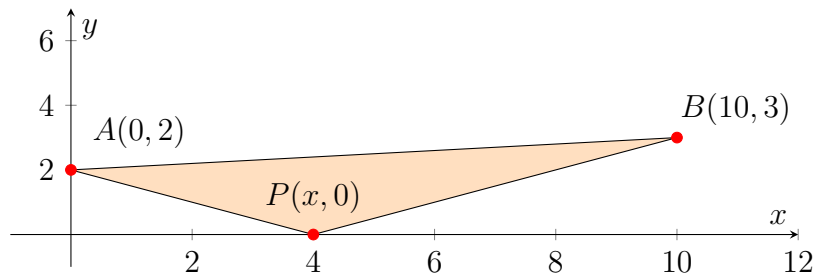
Estudiar su comportamiento en el 0 equivale a calcular el límite si $x \rightarrow 0^+$. Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2a^x + 3b^x}{5} \right)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(2a^x + 3b^x)}{x}} \stackrel{Ec. 1}{=} e^{\ln(\sqrt[5]{a^2 b^3})} = \sqrt[5]{a^2 b^3}$$

donde previamente he tenido que resolver el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{2a^x + 3b^x}{5}\right)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2a^x + 3b^x) - \ln 5}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'Hôpital}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2a^x \ln a + 3b^x \ln b}{2a^x + 3b^x} = \frac{2 \ln a + 3 \ln b}{5} = \ln\left(\sqrt[5]{a^2 b^3}\right) \quad (1) \end{aligned}$$

Ejercicio 5. [2 puntos] Para qué punto P del eje de abscisas el perímetro del triángulo de vértices $P = (x, 0)$, $A = (0, 2)$ y $B = (10, 3)$ es menor?



Calculamos la longitud de cada lado del triángulo:

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 4} & \overline{AB} &= \sqrt{10^2 + 1^2} = \sqrt{101} \\ \overline{PB} &= \sqrt{(10-x)^2 + 3^2} = \sqrt{109 + x^2 - 20x} \end{aligned}$$

Sea P la función que determina el perímetro:

$$\begin{aligned} P: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow P(x) = \overline{AP} + \overline{AB} + \overline{PB} = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{101} + \sqrt{109 + x^2 - 20x} \end{aligned}$$

Como los discriminantes son positivos $\forall x \in \mathbb{R}$, es derivable.

$$\begin{aligned} P'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} + \frac{x - 10}{\sqrt{109 + x^2 - 20x}} = 0 \iff \\ \iff x\sqrt{109 + x^2 - 20x} &= (10-x)\sqrt{x^2 + 4} \stackrel{(*)}{\iff} x^2(109 + x^2 - 20x) = (10-x)^2(x^2 + 4) \iff \\ \iff 109x^2 + x^4 - 20x^3 &= x^4 + 4x^2 + 100x^2 + 400 - 20x^3 - 80x \iff 5x^2 + 80x - 400 = 0 \iff \\ \iff x^2 + 16x - 80 &= 0 \iff \begin{cases} x = 4 \\ x = -20, \text{ ya que no cumple } (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Comprobamos ahora si, efectivamente, es un mínimo relativo.

- Para $x < 4$: $P'(x) < 0 \implies P(x)$ estrictamente decreciente.
- Para $x \geq 4$: $P'(x) > 0 \implies P(x)$ estrictamente creciente.

Por tanto, se confirma que es un mínimo relativo. También es absoluto, ya que es el único extremo de una función de clase 1 definida en un intervalo.

Por tanto, el punto que minimiza el perímetro del triángulo es:

$$P(x, 0) = P(4, 0)$$