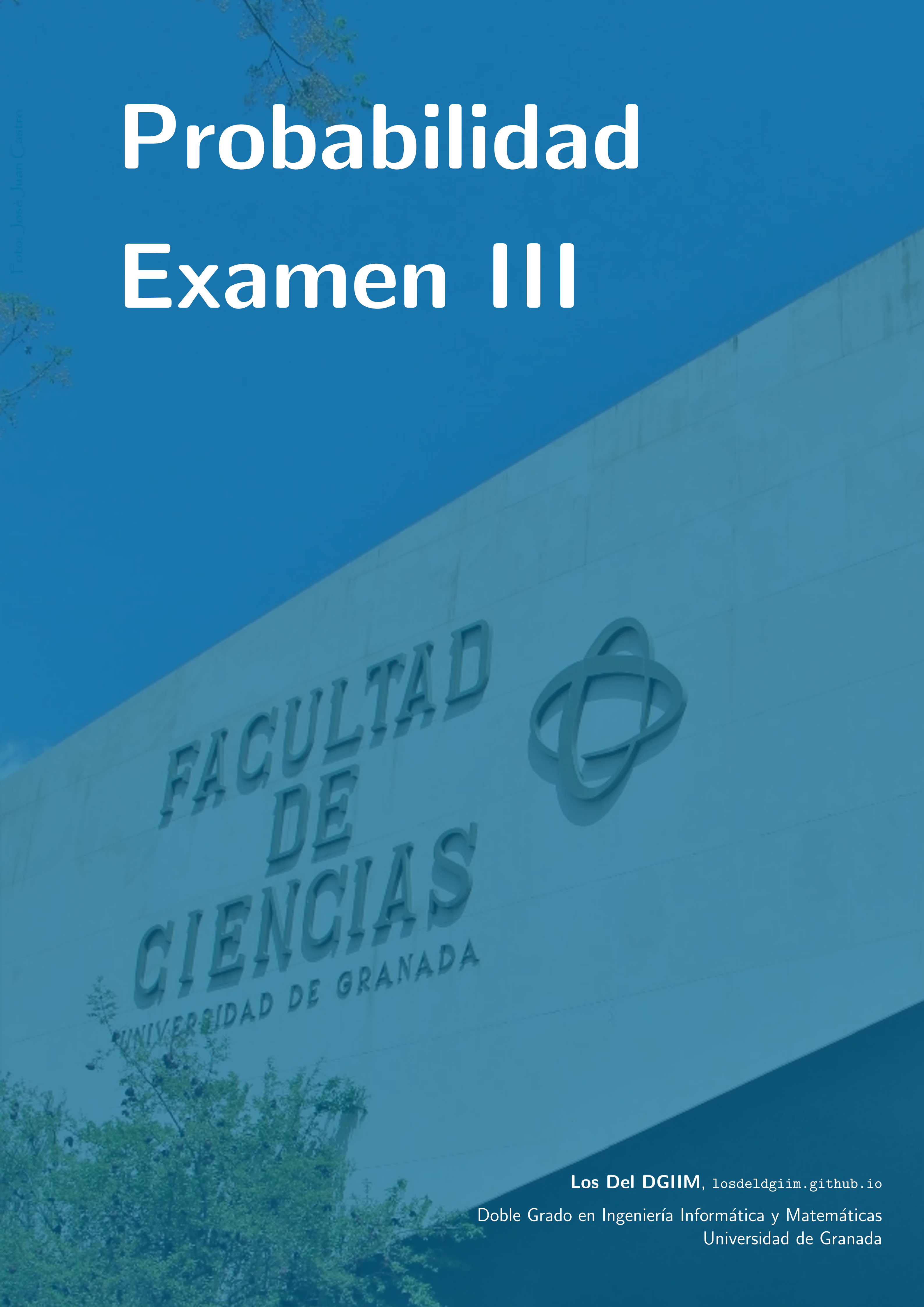

Foto: José Juan Castro

Probabilidad
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Probabilidad
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos
Miguel Ángel De la Vega Rodríguez

Granada, 2024-2025

Asignatura Probabilidad.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Examen Ordinario

Fecha 11 de enero de 2023.

Ejercicio 1 (1.5 puntos)**.** Justificar las siguientes relaciones:

1. (0.25 puntos) Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una ley Binomial $B(3, 1/2)$. Justificar que:

$$P[X_1 + X_2 = 8] = 0$$

Tenemos que:

$$X_1, X_2 \sim B(3, 1/2)$$

Por la reproductividad de la distribución binomial, tenemos que:

$$X_1 + X_2 \sim B(6, 1/2)$$

Por tanto, tenemos que:

$$\sum_{k=0}^{6} P[X_1 + X_2 = k] = 1$$

Por lo que:

$$P[X_1 + X_2 = 8] = 0$$

2. (0.25 puntos) Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una ley de Poisson, $\mathcal{P}(3)$. Justificar que:

$$P[X_1 + X_2 + X_3 > 0] = \frac{e^9 - 1}{e^9}$$

Tenemos que:

$$X_1, X_2, X_3 \sim \mathcal{P}(3)$$

Por la reproductividad de la distribución de Poisson, tenemos que:

$$X_1 + X_2 + X_3 \sim \mathcal{P}(9)$$

Por tanto, tenemos que:

$$P[X_1+X_2+X_3 > 0] = 1-P[X_1+X_2+X_3 = 0] = 1-\frac{e^{-9}9^0}{0!} = 1-e^{-9} = \frac{e^9 - 1}{e^9}$$

3. (1 punto) Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una ley de Bernoulli de parámetro p. Se considera $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, la variable aleatoria que define las sumas parciales de la sucesión. Justificar que:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

Observación. Hay que demostrar el/los resultados empleados para justificar la relación pedida, salvo la Desigualdad de Chebychev.

Sabemos que:
$$E[X_n] = p \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, tenemos que:
$$E[S_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = np \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por la Ley Débil de los Grandes Números, tenemos que:
$$\frac{S_n}{n} - p = \frac{S_n - np}{n} \xrightarrow{P} 0$$

Por tanto, tenemos que:
$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

Ejercicio 2 (1.5 puntos)**.** Sean $X_1, \ldots, X_n$ n variables aleatorias continuas, independientes e idénticamente distribuidas con distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$. Deducir la expresión analítica de la función de densidad de la variable aleatoria $Z = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Tenemos que:
$$X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}([0,1])$$

Por tanto, tenemos que:
$$P[Z \leqslant z] = P[X_1 \leqslant z, \ldots, X_n \leqslant z] \overset{(*)}{=} P[X_1 \leqslant z] \cdot \ldots \cdot P[X_n \leqslant z] \overset{(**)}{=} (P[X_1 \leqslant z])^n$$

donde en $(*)$ hemos usado la independencia de las variables aleatorias y en $(**)$ hemos usado que son idénticamente distribuidas. Por tanto, tenemos que:
$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{d}{dz}P[Z \leqslant z] = \frac{d}{dz}\left(P[X_1 \leqslant z]\right)^n = n\left(P[X_1 \leqslant z]\right)^{n-1} \cdot \frac{d}{dz}P[X_1 \leqslant z] = \\ &= n\left(P[X_1 \leqslant z]\right)^{n-1} \cdot f_{X_1}(z) \qquad \forall z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Por ser X_1 uniformemente distibuida, tenemos que:
$$f_{X_1}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [0,1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Además, tenemos que:
$$P[X_1 \leqslant z] = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \int_0^z 1\,dx = z & \text{si } z \in [0,1] \\ 1 & \text{si } z > 1 \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que:
$$f_Z(z) = \begin{cases} n \cdot z^{n-1} & \text{si } z \in [0,1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

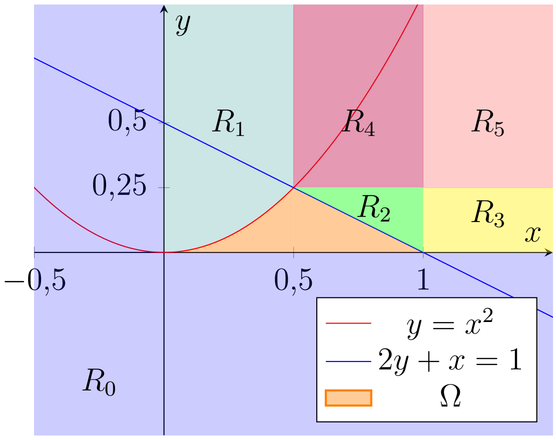

Figura 1: Conjunto descrito por las ecuaciones dadas.

Ejercicio 3 (5 puntos)**.** Dado el vector aleatorio (X, Y) con distribución uniforme en el recinto acotado limitado por el exterior de la parábola $y = x^2$, la recta de ecuación $2y + x = 1$ y la recta de ecuación $y = 0$:

1. (0.25 puntos) Obtener la función de densidad conjunta.

   Buscamos en primer lugar entender el conjunto descrito, el cual se muestra en la Figura 1.

   Sea Ω el conjunto descrito por las ecuaciones dadas, donde el punto de corte dibujado es:

$$x^2 = \frac{1-x}{2} \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cancel{x_1 = -1} \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \end{array} \right\} \Longrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

   Tenemos que:

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y} = \int_\Omega k = k\int_0^{1/4}\int_{\sqrt{y}}^{1-2y} dx\,dy = k\int_0^{1/4} 1 - 2y - \sqrt{y}dy = k\left[y - y^2 - \frac{2}{3}y\sqrt{y}\right]_0^{1/4}$$
$$= k\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right) = k\cdot\frac{5}{48} \Longrightarrow k = \frac{48}{5}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{48}{5} & \text{si } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. (1.50 puntos) Obtener la función de distribución de probabilidad conjunta.

   Observación. Se obtienen hasta 1,25 puntos si las integrales se dejan indicadas y hasta 1,50 puntos si se obtienen sus valores de forma explícita.

La división en conjuntos se encuentra en la Figura 1. Calculamos el valor de la función de distribución en cada uno de los conjuntos:

- Si $(x,y) \in R_0$ ($x<0$ o $y<0$):

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)du\,dv = \int_0^x\int_0^y 0\,du\,dv = 0$$

- Si $(x,y) \in \Omega$ ($2y+x<1$ y $0 \leqslant y \leqslant x^2$):

$$\begin{aligned}F_{X,Y}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)du\,dv = \int_0^y\int_{\sqrt{v}}^{x} kdu\,dv = k\int_0^y x-\sqrt{v}dv = \\ &= k\left[xv - \frac{2}{3}v\sqrt{v}\right]_0^y = k\left[xy - \frac{2}{3}y\sqrt{y}\right]\end{aligned}$$

- Si $(x,y) \in R_1$ ($0<x<1/2$ y $y<x^2$):

$$\begin{aligned}F_{X,Y}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)du\,dv = \int_0^x\int_0^{u^2} k\,dv\,du = k\int_0^x u^2\,du = k\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^x = \\ &= k\cdot\frac{x^3}{3}\end{aligned}$$

- Si $(x,y) \in R_2$ ($0<y<1/4$ y $2y+x>1$):

$$\begin{aligned}F_{X,Y}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)du\,dv = \\ &= \int_0^{\sqrt{y}}\int_0^{u^2} k\,dv\,du + \int_{\sqrt{y}}^{1-2y}\int_0^y k\,dv\,du + \int_{1-2y}^{x}\int_0^{\frac{1-u}{2}} k\,dv\,du = \\ &= k\int_0^{\sqrt{y}} u^2\,du + k\int_{\sqrt{y}}^{1-2y} y\,du + k\int_{1-2y}^{x}\frac{1-u}{2}\,du = \\ &= k\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{\sqrt{y}} + k\,[yu]_{\sqrt{y}}^{1-2y} + k\left[\frac{u}{2}-\frac{u^2}{4}\right]_{1-2y}^{x} = \\ &= k\left[\frac{y\sqrt{y}}{3} + y(1-2y) - y\sqrt{y} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{1-2y}{2} + \frac{(1-2y)^2}{4}\right]\end{aligned}$$

- Si $(x,y) \in R_3$ ($1 \leqslant x$ y $0<y<1/4$):

$$\begin{aligned}F_{X,Y}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)du\,dv = \\ &= \int_0^y\int_{\sqrt{v}}^{1-2v} k\,du\,dv = k\int_0^y 1-2v-\sqrt{v}\,dv = k\left[v - v^2 - \frac{2}{3}v\sqrt{v}\right]_0^y = \\ &= k\left[y - y^2 - \frac{2}{3}y\sqrt{y}\right]\end{aligned}$$

- Si $(x, y) \in R_4$ ($1/2 < x < 1$ y $1/4 < y$):

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)du\,dv = \\
&= \int_{0}^{1/2}\int_{0}^{u^2} k\,dv\,du + \int_{1/2}^{x}\int_{0}^{\frac{1-u}{2}} k\,dv\,du = k\int_{0}^{1/2} u^2\,du + k\int_{1/2}^{x}\frac{1-u}{2}\,du = \\
&= k\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{1/2} + k\left[\frac{u}{2} - \frac{u^2}{4}\right]_{1/2}^{x} = k\left[\frac{1}{24} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right] = \\
&= k\left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{7}{48}\right]
\end{aligned}$$

- Si $(x, y) \in R_5$ ($1 \leqslant x$ y $1/4 < y$):

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)du\,dv = 1$$

Por tanto, tenemos que:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases}
0 & \text{si } (x,y) \in R_0 \\
k \cdot \dfrac{x^3}{3} & \text{si } (x,y) \in R_1 \\
k\left[-\dfrac{2y\sqrt{y}}{3} + y(1-2y) - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1-2y}{2} + \dfrac{(1-2y)^2}{4}\right] & \text{si } (x,y) \in R_2 \\
k\left[y - y^2 - \dfrac{2}{3}y\sqrt{y}\right] & \text{si } (x,y) \in R_3 \\
k\left[\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{7}{48}\right] & \text{si } (x,y) \in R_4 \\
1 & \text{si } (x,y) \in R_5
\end{cases}$$

3. (0.75 puntos) Obtener las funciones de densidad condicionadas.

   Calculamos en primer lugar las funciones de densidad marginales. Respecto a la marginal de X, tenemos que:

   - Si $0 < x < 1/2$:

   $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{0}^{x^2} k\,dy = kx^2$$

   - Si $1/2 < x < 1$:

   $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{0}^{\frac{1-x}{2}} k\,dy = k\left[\frac{1-x}{2}\right]$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$f_X(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{si } 0 < x < 1/2 \\ k\left[\dfrac{1-x}{2}\right] & \text{si } 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

Respecto a la marginal de Y, tenemos que, si $0 < y < 1/4$:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{\sqrt{y}}^{1-2y} k\,dx = k(1-2y-\sqrt{y})$$

Por tanto, tenemos que:

$$f_Y(y) = \begin{cases} k(1-2y-\sqrt{y}) & \text{si } 0 < y < 1/4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calculamos ahora las funciones de densidad condicionadas. Respecto a la condicionada de X dado $y^* \in [0, 1/4]$, tenemos que:

$$f_{X|Y=y^*}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y^*)}{f_Y(y^*)} = \frac{k}{k(1-2y^*-\sqrt{y^*})} = \frac{1}{1-2y^*-\sqrt{y^*}} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \mid (x,y^*) \in \Omega$$

Respecto a la condicionada de Y, distinguimos en función del valor de $x^* \in [0,1]$.

- Si $0 < x^* < 1/2$:

$$f_{Y|X=x^*}(y) = \frac{f_{X,Y}(x^*,y)}{f_X(x^*)} = \frac{k}{kx^2} = \frac{1}{x^2}$$

- Si $1/2 < x^* < 1$:

$$f_{Y|X=x^*}(y) = \frac{f_{X,Y}(x^*,y)}{f_X(x^*)} = \frac{k}{k\left[\frac{1-x^*}{2}\right]} = \frac{2}{1-x^*}$$

Por tanto, tenemos que:

$$f_{Y|X=x^*}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } 0 < x^* < 1/2 \\ \dfrac{2}{1-x^*} & \text{si } 1/2 < x^* < 1 \end{cases} \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

4. (0.50 puntos) Obtener la probabilidad de que $X \geqslant \frac{1}{2}$.

   Del apartado anterior, tenemos la marginal de X. Por tanto:

$$P[X \geqslant 1/2] = \int_{1/2}^{1} f_X(x)dx = \int_{1/2}^{1} k\left[\frac{1-x}{2}\right]dx = k\left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_{1/2}^{1} =$$
$$= k\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right] = \frac{k}{16} = \frac{3}{5}$$

5. (1.25 puntos) Obtener la mejor aproximación mínimo cuadrática a la variable X conocidos los valores de la variable Y.

Del apartado anterior, tenemos que, para $y^* \in [0, 1/4]$:

$$\begin{aligned}
E[X \mid Y = y^*] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y=y^*}(x)dx = \int_{\sqrt{y^*}}^{1-2y^*} x \cdot \frac{1}{1-2y^*-\sqrt{y^*}}dx = \\
&= \left[\frac{x^2}{2\left(1-2y^*-\sqrt{y^*}\right)}\right]_{\sqrt{y^*}}^{1-2y^*} = \frac{(1-2y^*)^2-\left(\sqrt{y^*}\right)^2}{2\left(1-2y^*-\sqrt{y^*}\right)} = \\
&= \frac{(1-2y^*+\sqrt{y^*})\cancel{(1-2y^*-\sqrt{y^*})}}{2\cancel{(1-2y^*-\sqrt{y^*})}} = \frac{1-2y^*+\sqrt{y^*}}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto, la mejor aproximación mínimo cuadrática a la variable X conocidos los valores de la variable Y es:

$$E[X \mid Y] = \frac{1-2Y+\sqrt{Y}}{2}$$

6. (0.50 puntos) Obtener la mejor aproximación de la variable aleatoria Y sin observar la variable X y dar una medida del error cuadrático medio cometido en esta aproximación.

   La mejor aproximación es su esperanza, y su error cuadrático medio es su varianza:

$$\begin{aligned}
E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)dy = \int_0^{1/4} y \cdot k(1-2y-\sqrt{y})dy = k\left[\frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} - \frac{2y^2\sqrt{y}}{5}\right]_0^{1/4} = \\
&= \frac{k}{120} = \frac{2}{25} = 0{,}08 \\
E[Y^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f_Y(y)dy = \int_0^{1/4} y^2 \cdot k(1-2y-\sqrt{y})dy = k\left[\frac{y^3}{3} - \frac{2y^4}{4} - \frac{2y^3\sqrt{y}}{7}\right]_0^{1/4} = \\
&= \frac{11k}{10752} = \frac{11}{1120} \\
\mathrm{Var}[Y] &= E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{11}{1120} - \left(\frac{2}{25}\right)^2 = \frac{11}{1120} - \frac{4}{25^2} = \frac{479}{14 \cdot 10^4} \approx 0{,}0034
\end{aligned}$$

   Por tanto, la mejor aproximación de la variable aleatoria Y sin observar la variable X es 0,08 y el error cuadrático medio cometido en esta aproximación es de, aproximadamente, 0,0034.

7. (0.25 puntos) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes? Justificar de forma muy breve la respuesta.

   No, ya que $f_{X,Y} \neq f_X \cdot f_Y$.

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución normal bidimensional. La moda de Y vale 4 y $\mathrm{Var}[Y \mid X = x_0] = \frac{\mathrm{Var}(Y)}{2} \neq 0$. La curva de regresión de Y/X es $y = x + 5$ y el error cuadrático medio asociado a esta aproximación es 3.

1. (1.25 puntos) Determinar los parámetros de la distribución de (X, Y).

   Sabemos que $(X, Y) \sim \mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$, con:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix}$$
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

   Sabemos que $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, y por el enunciado sabemos que $Mo[Y] = 4$. Al ser una distribución normal, tenemos que:

$$\mu_2 = E[Y] = Mo[Y] = 4$$

   Por otro lado, sabemos que:

$$Y \mid X = x_0 \sim \mathcal{N}\left(\mu_2 + \rho \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_0 - \mu_1), \sigma_2^2(1 - \rho^2)\right)$$

   Como $\text{Var}[Y \mid X = x_0] = \dfrac{\text{Var}(Y)}{2}$, tenemos que:

$$\sigma_2^2(1 - \rho^2) = \frac{\sigma_2^2}{2} \Longrightarrow 1 - \rho^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \rho = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

   Más adelante descartaremos uno de los valores. Como la recta de regresión de Y/X es $y = x + 5$, tenemos que:

$$y - \mu_2 = \rho \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1) \Longrightarrow y = \rho \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot x - \rho \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \mu_1 + \mu_2$$

   Igualando la pendiente, tenemos que:

$$\rho \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1 \Longrightarrow \rho = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \geqslant 0 \Longrightarrow \rho = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   Igualando la ordenada en el origen, tenemos que:

$$-\rho \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \mu_1 + \mu_2 = 5 \Longrightarrow -\mu_1 + 4 = 5 \Longrightarrow \mu_1 = -1$$

   Por otro lado, sabemos que:

$$\eta_{Y/X}^2 = 1 - \frac{\text{E.C.M.}(\widehat{Y})}{\text{Var}[Y]}$$

   Como la curva de regresión de Y/X es $y = x + 5$ (una recta), tenemos que:

$$\frac{1}{2} = \rho_{X,Y}^2 = 1 - \frac{3}{\sigma_2^2} \Longrightarrow \sigma_2^2 = \text{Var}[Y] = 6$$

Como $\rho = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, tenemos que:

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{3} \Longrightarrow \sigma_1^2 = \text{Var}[X] = 3$$

Por tanto, los parámetros de la distribución de (X, Y) son:

$$\mu = \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

2. (0.75 puntos) Especificar la función generatriz de momentos de (X, Y).

La función generatriz de momentos de (X, Y) es:

$$M_{X,Y}(t_1, t_2) = \exp\left(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{t_1^2\sigma_1^2 + t_2^2\sigma_2^2 + 2t_1t_2\rho\sigma_1\sigma_2}{2}\right) =$$
$$= \exp\left(-t_1 + 4t_2 + \frac{3t_1^2 + 6t_2^2 + 6t_1t_2}{2}\right)$$