Modelos Matemáticos I Examen III

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Modelos Matemáticos I Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

David Muñoz Gómez

Granada, 2025

Asignatura Modelos Matemáticos I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Maria José Cáceres Granados.

Descripción Prueba 1. Temas 0,1 y parte del 2.

Fecha 25 de abril de 2025.

Duración 2 horas.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ con $0 \neq a_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Se considera la ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = a_n x_n \tag{1}$$

1. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ determina x_n en función de la sucesión $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ para que $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ sea solución de la ecuación.

   Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ si $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ es solución de la ecuación, entonces verifica:

   $$x_{n+1} = a_n x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

   Por tanto, podemos intuir que:

   $$\begin{aligned} x_1 &= a_0 x_0 \\ x_2 &= a_1 x_1 = a_1 a_0 x_0 \\ &\Downarrow \\ x_n &= \prod_{k=0}^{n-1} a_k x_0 \end{aligned}$$

   Lo demostramos por inducción:

   - $n = 1$

     $$x_1 = a_0 x_0 = \prod_{k=0}^{0} a_k x_0$$

   - Supuesto cierto para n, veamos para $n + 1$

     $$x_{n+1} = a_n x_n = a_n \prod_{k=0}^{n-1} a_k x_0 = \prod_{k=0}^{n} a_k x_0 \qquad \blacksquare$$

   Por tanto la solución es:

   $$x_n = \prod_{k=0}^{n-1} a_k x_0$$

2. ¿Qué debe verificar la sucesión $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ para que la Ecuación 1 admita soluciones constantes no triviales? ¿Cuáles son las soluciones constantes en este caso?

   Si buscamos las soluciones constantes de la ecuación Ecuación 1 vemos que $c = a_n c \Rightarrow c = 0$ (Pero esta solución es trivial) o bien $a_n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$. En este caso la ecuación en diferencias pasa a ser:

   $$x_{n+1} = x_n$$

   donde $\{x_n\} = c\ \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ es solución constante $\forall c \in \mathbb{R}$.

3. Encuentra el término general de $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ en el caso de que $a_n = \frac{1}{2^n}$

4. En este caso la ecuación en diferencias pasa a ser: $x_{n+1} = \frac{1}{2^n} x_n$

   Como en el apartado a hemos encontrado un término general en función de $\{a_n\}$ podemos aprovecharlo para este apartado, así sabemos que:

$$x_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} x_0$$

   Es el término general de nuestra ecuación en diferencias, sin embargo para que el ejercicio esté enteramente bien debemos desarrollar la fórmula para encontrar una algo más simple.

$$\begin{aligned} x_n &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} x_0 \\ &\Downarrow \\ x_n &= \frac{1}{2^0} \times \frac{1}{2^1} \times \frac{1}{2^2} \cdots \frac{1}{2^{n-1}} x_0 \\ x_n &= \frac{1}{2^{\sum_{k=0}^{n-1} k}} x_0 \\ &\Downarrow (*) \\ x_n &= \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} x_0 = \frac{1}{\sqrt{2^{n(n-1)}}} x_0 \end{aligned}$$

   Donde en $(*)$ se ha utilizado la fórmula de la suma de los n primeros naturales.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Una empresa de pesticidas modela sus niveles de contaminación mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + b_n \tag{2}$$

Donde x_n representa el nivel de contaminación en el periodo n y $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$ es una sucesión de números reales.

Se sabe que $\left\{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right\}_{n\geqslant 0}$ es una solución particular de la Ecuación 2.

1. Determina una solución de la Ecuación 2 que cumple que $x_0 = 3$.

   En primer lugar, la solución qu enos otorgan cuando $n = 0$ toma el valor 2, por tanto no nos sirve.

   Sabemos que todas las soluciones de la Ecuación 2 se obtienen como suma de una solución de la parte homogénea y una solución particular.

   La parte homogénea tiene por solución:

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= \frac{h_n}{2} \\ &\Downarrow \\ h_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n h_0 \end{aligned}$$

Así podemos afirmar que toda solución de la Ecuación 2 es de la forma:

$$x_n = h_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Si imponemos que $x_0 = 3 \Rightarrow 3 = h_0 + 2 \Rightarrow h_0 = 1$
Por tanto la solución que buscamos es:

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

2. ¿Qué nivel de contaminación tendrá a largo plazo la empresa si en el periodo 0 el nivel de contaminación fue 3?

   Nos preguntan por el comportamiento asintótico de x_n cuando $x_0 = 3$. Del ejercicio anterior sabemos que:

   $$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

   Tomando límites:

   $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$$

   Por tanto se espera que a largo plazo el nivel de contaminación de la empresa sea e.

3. Según este modelo. ¿Podría encontrarse un nivel de contaminación inicial para que a largo plazo el nivel de contaminación sea inferior a 1.8? Razona tu respuesta.

   Nos preguntan por un valor de x_0 para que la contaminación a largo plazo calculada anteriormente sea inferior a 1.8.

   Si cogemos la solución genérica de la ecuación:

   $$x_n = h_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

   Como h_0 queda determinado por x_0 tomamos límite aquí para ver si encontramos alguna condición. Sin embargo:

   $$\lim_{n\to\infty} \left(h_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right) = e$$

   Como h_0 está multiplicado por $\frac{1}{2^n} \to 0$ no interviene en el valor a largo plazo. Por tanto da igual el valor de x_0 (que nos determina el valor de h_0) el valor de la contaminación a largo plazo siempre es e.

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** Se considera la ecuación en diferencias real

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n^2 - 2} \tag{3}$$

1. Determina las soluciones constantes de la Ecuación 3 y estudia su estabilidad.

   Notemos que la Ecuación 3 viene dada por $x_{n+1} = f(x_n)$ donde:

   $$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}\backslash]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{2x^2-2} \end{array}$$

   Buscamos un $c \in \mathbb{R}\backslash]-1,1[$ tal que:

   $$\begin{aligned} &c = \sqrt{2c^2-2} \Rightarrow c^2 = 2c^2 - 2 \\ &c = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

   Sin embargo, como hemos visto, la imagen de f es $\mathbb{R}_0^+$ y por tanto tomando $x_0 = -\sqrt{2}$ tenemos que $x_1 = \sqrt{2}$ y por tanto no es solución constante. Por tanto nuestra única solución constante es $x_0 = \sqrt{2}$

   Para estudiar su estabilidad podemos calcular $f'(x)$ para aplicar el criterio de la primera derivada:

   $$f'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2-2}}$$

   Por lo que $f'(\sqrt{2}) = 2 > 1$ lo que nos indica que la solución constante $x_0 = \sqrt{2}$ es inestable.

2. Para la Ecuación 3 ¿Existen ciclos no triviales? Razona tu respuesta.

   Hagamos unas observaciones sobre la función f.

   Para empezar, dado $x_0 \leqslant -1 \Rightarrow x_1 = f(x_0) > 0$ Y como $Im(f) = \mathbb{R}_0^+$ Necesariamente $x_n \geqslant \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant 1$

   Por tanto los $x_0 \leqslant -1$ no pueden formar n-ciclos de ningún tipo.

   Ahora bien, si $x_0 \geqslant 1$ el razonamiento es diferente. Ahora usaremos que f es una función creciente ya que es composición de crecientes. Por tanto:

   - Si $f(x_0) < x_0$ Estaríamos diciendo que $x_1 < x_0$ y por tanto $f(x_1) < f(x_0) \Rightarrow x_2 < x_1$. Inductivamente la sucesión x_n es decreciente y por tanto no admite ciclos de ningún tipo.
   - Si $f(x_0) > x_0$ Sucede lo mismo pero en este caso la sucesión x_n es creciente y tampoco admite ciclos de ningún tipo.

   Por tanto no existen ciclos distintos de los triviales para la Ecuación 3

3. Dada una solución $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ de la Ecuación 3 considera el cambio de variable $y_n := x_n^2$. Prueba que la sucesión $\{y_n\}_{n\geqslant 0}$ verifica una ecuación lineal de primer orden y resuélvela.

Realizamos el cambio de variable:

$$y_{n+1} = x_{n+1}^2 = 2x_n^2 - 2 = 2y_n - 2$$
$$y_{n+1} = 2y_n - 2$$

Para resolverla buscamos una solución particular, en este caso constante nos sirve y la solución de su parte homogénea.

$$c = 2c - 2 \iff c = 2$$

Por tanto la solución de y_n es:

$$y_n = 2^n c_0 + 2$$

Para dejarla en términos de y_0 calculamos c_0 en función suya:

$$y_0 = c_0 + 2 \iff c_0 = y_0 - 2$$

Y tenemos que la solución es:

$$y_n = 2^n(y_0 - 2) + 2$$

4. Utilizando el apartado anterior, demuestra que si $x_0 \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$. Entonces la solución de la Ecuación 3 con ese dato inicial cumple que $x_n > \sqrt{2}$ para todo $n \geqslant 1$

   Dado $x_0 \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty) \Rightarrow x_0^2 = y_0 \in (2, \infty)$ Por tanto veamos que $y_n > 2 \;\; \forall n \geqslant 1$ Y por tanto $x_n > \sqrt{2} \;\; \forall n \geqslant 1$

   Como $y_0 > 2 \Rightarrow 2^n(y_0 - 2) > 0 \Rightarrow 2^n(y_0 - 2) + 2 > 2$

   Si tenemos que $y_n > 2 \Rightarrow |x_n| > \sqrt{2} \quad \forall n \geqslant 1$ Pero realmente este valor absoluto es innecesario pues con $n \geqslant 1$ necesariamente $x_n = f(x_{n-1}) > 0$ y por tanto se tiene lo que queríamos demostrar. ■