Parciales-resueltos-1-y-2-Manana...

Tristejoker

Análisis Funcional

3º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

1

Análisis Funcional- Evaluación 1

1. *a*) (1 punto) Enuncia la caracterización de las aplicaciones lineales y continuas entre espacios normados.

   b) (1 punto) Definición y caracterización de los isomorfismos topológicos entre espacios normados.

   c) (1 punto) Enuncia el teorema de Riesz.

2. Sea $X = C([0,1],\mathbb{R})$. Se define $T : X \longrightarrow X$ mediante $T(f)(x) = \int_0^{x^3} f(t)dt$ $(x \in [0,1])$.

   a) (1 punto) Prueba que T es lineal, continua e inyectiva .

   b) (1 punto) Calcula la norma de T.

   c) (2 puntos) Prueba que T no es un isomorfismo topológico de X sobre $T(X)$.

3. (3 puntos) Sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios de grado menor o igual que 20 tal que, para cada $k = 0,1,2,\cdots,20$, la sucesión $\{P_n^{k)}(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Prueba que $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[-1,1]$.

(2) En primer lugar, si $f \in X = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, por el Teorema Fundamental del Cálculo, la aplicación $F: [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ $(x \in [0,1])$ es derivable (luego continua) y $T(f)(x) = F(x^3)$ $(x \in [0,1])$ con con lo que $T(f) \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ y T está bien definida

(a) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in X$. Entonces, para cada $x \in [0,1]$:

$$T(\alpha f + g)(x) = \int_0^{x^3} (\alpha f(t) + g(t))\,dt = \alpha \int_0^{x^3} f(t)\,dt + \int_0^{x^3} g(t)\,dt =$$
$$= \alpha T(f)(x) + T(g)(x) = [\alpha T(f) + T(g)](x)$$

y, por tanto, $T(\alpha f + g) = \alpha T(f) + T(g)$ y T es lineal.

$$|T(f)(x)| = \left| \int_0^{x^3} f(t)\,dt \right| \leq \int_0^{x^3} |f(t)|\,dt \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt \leq$$
$$\leq \|f\|_\infty \int_0^1 dt = \|f\|_\infty$$

Siendo $\|f\|_\infty = \text{Máx}\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$, luego $|T(f)(x)| \leq \|f\|_\infty$ $\forall x \in [0,1]$. En consecuencia

$$\|T(f)\|_\infty = \text{Máx}\{|T(f)(x)| \mid x \in [0,1]\} \leq \|f\|_\infty$$

Ya que T es lineal, podemos concluir que T es continua y $\|T\| \leq 1$.

Para probar que T es inyectiva, hay que probar que $Ker(T) = \{0\}$.

Sea $f \in Ker(T)$, entonces $T(f) = 0$, es decir, $T(f)(x) = \int_0^{x^3} f(t)dt = 0 \quad \forall x \in [0,1]$.

Como al principio $T(f)(x) = F(x^3) \quad \forall x \in [0,1]$ siendo $F(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (x \in [0,1])$ que, por el Teorema Fundamental del Calculo, es derivable y $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [0,1]$. Como $F(x^3) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$, derivamos usando la regla de la cadena y obtenemos $3x^2 F'(x^3) = 3x^2 f(x^3) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

luego $f(x^3) = 0 \quad \forall x \in]0,1]$. Si $t \in]0,1]$ entonces $\sqrt[3]{t} \in]0,1]$ y $f(t) = f((\sqrt[3]{t})^3) = 0$

luego $f(t) = 0 \quad \forall t \in]0,1]$ y, por ser f continua, $f(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1]$, es decir, $f = 0$.

H

Hemos probado que $\operatorname{Ker}(T)=\{0\}$ y, por tanto, T es inyectiva.

(b) Ya que, por el apartado anterior, $\|T\|\leq 1$, sea $f_0(t)=1$ $\forall t\in[0,1]$. Es claro que $f_0\in B_X$ y $\|T\|=\sup\{\|T(f)\|_\infty / f\in B_X\}\geq \|T(f_0)\|_\infty$

$$T(f_0)(x)=\int_0^{x^3} f_0(t)\,dt=\int_0^{x^3} dt=x^3 \quad \forall x\in[0,1],$$

luego $\|T(f_0)\|_\infty=\operatorname{Máx}\{|T(f_0)(x)| / x\in[0,1]\}=1$

y $\|T\|\geq \|T(f_0)\|_\infty=1$. En consecuencia

$\|T\|=1$

(c) Si T fuese un isomorfismo topológico de X sobre $T(X)$ existiría $m>0$ tal que

$$\|T(f)\|_\infty \geq m\|f\|_\infty \quad \forall f\in X.$$

Sea, para cada $n\in\mathbb{N}$, $f_n(t)=t^n$ $(t\in[0,1])$.

Entonces $f_n\in S_X$ $\forall n\in\mathbb{N}$, es decir, $\|f_n\|_\infty=1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y $T(f_n)(x)=\int_0^{x^3} t^n\,dt=\left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{t=x^3}=$

$$=\frac{x^{3n+3}}{n+1} \quad \forall x\in[0,1].$$

de donde se sigue que $\|T(f_n)\|_\infty = \frac{1}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y se tendría $\|T(f_n)\|_\infty \geq n \|f_n\|_\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir $\frac{1}{n+1} \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ lo que nos lleva a contradicción.

3) Sea $X = \{P \mid P$ es polinomio de grado menor o igual a $20\}$

Es claro que X es un espacio vectorial de dimensión 21, luego cualesquiera dos normas definidas en X son equivalentes. En concreto, consideramos en X, la norma: $\|P\|_\infty = \text{Máx}\{|P(t)| \,/\, t \in [-1,1]\}$ es una norma en X. También consideramos la norma $\|P\| = \sum_{k=0}^{20} |P^{k)}(0)|$ $(P \in X)$.

Es de comprobación inmediata que $\|\cdot\|$ es una norma en X (si $P(x) = \sum_{k=0}^{20} \alpha_k x^k$ con $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{20} \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha_k = \frac{P^{k)}(0)}{k!}$ $\forall k = 0, \dots, 20$ y si $\|P\| = 0$, entonces $\alpha_k = 0$ $\forall k = 0, \dots, 20$ y $P = 0$).

Hay varias formas de resolver este ejercicio:

(i) Como, por hipótesis, la sucesión $\{P_n^{k)}(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, es una sucesión de Cauchy $\forall k=0,\dots,20$ y, ya que $\|P_n - P_m\| = \sum_{k=0}^{20} |P_n^{k)}(0) - P_m^{k)}(0)|$ $\forall n,m\in\mathbb{N}$, se sigue que $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(X, \|\cdot\|)$ y, como $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en X que es equivalente a $\|\cdot\|$, se tiene que $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(X, \|\cdot\|_\infty)$, que es un espacio de Banach por ser X de dimensión finita, luego $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $(X, \|\cdot\|_\infty)$ y la convergencia en este espacio es la convergencia uniforme en $[-1,1]$

(ii) Si $\{P_n^{k)}(0)\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow a_k \in \mathbb{K}$ $\forall k=0,1,2,\dots,20$. Se define $P(x) = \sum_{k=0}^{20} \frac{a_k}{k!} x^k$, entonces $P\in X$ y $P^{k)}(0) = a_k$ $\forall k=0,1,\dots,20$, luego $\{P_n^{k)}(0)\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow P^{k)}(0)$ $\forall k=0,\dots,20$ y

$$\|P_n - P\| = \sum_{k=0}^{20} |P_n^{k)}(0) - P^{k)}(0)| \longrightarrow 0,$$ luego

$\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}} \longrightarrow P$ en $(X, \|\cdot\|)$, y, ya que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\infty$ son normas equivalentes en X, se obtiene que $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}} \longrightarrow P$ en $(X, \|\cdot\|_\infty)$, es decir, $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente hacia P en $[-1, 1]$.

(iii) Como en el apartado anterior:

$\forall m\in\mathbb{N}$ $\quad P_m(x) = \sum_{k=0}^{20} \frac{P_m^{k)}(0)}{k!} x^k$

y $P(x) = \sum_{k=0}^{20} \frac{a_k}{k!} x^k$ siendo $a_k = \lim_m \{P_m^{k)}(0)\}_{m\in\mathbb{N}}$

$\forall k = 0, 1, 2, .., 20$, entonces, si $x \in [-1, 1]$

$$|P_m(x) - P(x)| = \left| \sum_{k=0}^{20} \frac{P_m^{k)}(0)}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{20} \frac{a_k}{k!} x^k \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{20} \frac{P_m^{k)}(0) - a_k}{k!} x^k \right| \leq \sum_{k=0}^{20} \frac{|P_m^{k)}(0) - a_k|}{k!} |x|^k \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{20} \frac{|P_m^{k)}(0) - a_k|}{k!} \qquad (|x| \leq 1)$$

y ~~lim~~ Luego $\|P_m - P\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{20} \frac{|P_m^{k)}(0) - a_k|}{k!}$

y $\lim_m \sum_{k=0}^{20} \frac{|P_m^{k)}(0) - a_k|}{k!} = 0 \Rightarrow \{P_m\}_{m\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} P$

Es decir, $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente hacia P en $[-1,1]$.

9

Análisis Funcional- Evaluación 2

1. *a*) (1 punto) Enuncia el teorema de la proyección ortogonal.

   b) (1 punto) Enuncia el teorema de Riesz-Fréchet.

   c) (1 punto) Enuncia la caracterización de las bases ortonormales en un espacio de Hilbert.

2. Sea $X = L_2([0,1])$

   a) (0,5 puntos) Prueba que $M = \left\{ x \in X : \int_0^{\frac{1}{2}} x(t)\, dt = 0 \right\}$ es un subespacio vectorial cerrado de X.

   b) (1 puntos) Describe $M^{\perp}$.

   c) (1,5 puntos) Calcula P_M y $P_{M^{\perp}}$

   d) (0,5 puntos) Calcula la mínima distancia de la función $x_0(t) = t$ al subespacio M.

3. Sea $M = \left\{ x \in \ell_2 : x(1) = 0 \ \text{ y } \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(2n)}{n} = 0 \right\}$.

   a) (0,5 puntos) Prueba que M es un subespacio cerrado de ℓ_2.

   b) (1 puntos) Describe $M^{\perp}$.

   c) (1,5 puntos) Calcula P_M y $P_{M^{\perp}}$.

   d) (0,5 puntos) Calcula la mínima distancia en ℓ_2 de $e_1 + e_3$ a M.

2 a) Sea $x_0^*: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $x_0^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si } t \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

es decir $x_0^* = \mathcal{X}_{[0,\frac{1}{2}]}$. Es claro que $x_0^* \in X = L_2([0,1])$ y

$$M = \{x \in X \mid (x \mid x_0^*) = \int_0^1 x(t)\overline{x_0^*(t)}\,dt = 0\} =$$
$$= Ker(\varphi)$$

siendo $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$\varphi(x) = (x \mid x_0^*) = \int_0^1 x(t)\overline{x_0^*(t)}\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} x(t)\,dt$$

Es claro que $\varphi \in X^*$ (consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz), luego $Ker(\varphi)$ es un subespacio cerrado de X.

b) Del apartado anterior se tiene que $M = (\{x_0^*\})^\perp$, luego $M^\perp = \{x_0^*\}^{\perp\perp} = \overline{lin\{x_0^*\}}$ (Consecuencia del Teorema de la proyección ortogonal) y, como $lin\{x_0^*\}$ es de dimensión finita, es cerrado en X, luego $M^\perp = lin\{x_0^*\} = \mathbb{K}x_0^*$

c

Si $u = \frac{x_0^*}{\|x_0^*\|_2}$, $M^\perp = \text{lin}\{u\}$ y $\{u\}$ es una base ortonormal de $M^\perp$, luego, para $x \in X$,

$$P_{M^\perp}(x) = (x|u)u = \left(x \,\Big|\, \frac{x_0^*}{\|x_0^*\|_2}\right) \frac{x_0^*}{\|x_0^*\|_2} =$$

$$= \frac{1}{\|x_0^*\|_2^2}(x|x_0^*)x_0^* = \frac{1}{\|x_0^*\|_2^2}\left(\int_0^1 x(t)\overline{x_0^*(t)}dt\right)x_0^*$$

$$= \frac{1}{\|x_0^*\|_2^2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x(t)dt\right)x_0^*$$

Ya que $\|x_0^*\|_2^2 = (x_0^*|x_0^*) = \int_0^1 |x_0^*(t)|^2 dt = \int_0^{\frac{1}{2}} 1\, d = \frac{1}{2}$

se tiene que $P_{M^\perp}(x) = \left(2\int_0^{\frac{1}{2}} x(t)dt\right)x_0^*$

y $P_M(x) = x - P_{M^\perp}(x) = x - \left(2\int_0^{\frac{1}{2}} x(t)dt\right)x_0^*$

para cada $x \in X$.

d $\text{dist}(x_0, M) = \|x_0 - P_M(x_0)\|_2 = \|P_{M^\perp}(x_0)\|_2$

Por c $P_{M^\perp}(x_0) = \left(2\int_0^{\frac{1}{2}} x_0(t)dt\right)x_0^*$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x_0(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

Luego $P_{M^\perp}(x_0) = \frac{1}{4}x_0^*$ y $\|P_{M^\perp}(x_0)\|_2 = \frac{1}{4}\|x_0^*\|_2 =$

$= \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$ ($\|x_0^*\|_2$ se calculó en c)

3 a) Sea $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_{2n} = (0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \dots) \in \ell_2$

$M = \{x \in \ell_2 \mid (x|e_1) = 0 \text{ y } (x|x_0) = 0\} =$

$= M_1 \cap M_2$

Donde $M_1 = \{x \in \ell_2 \mid (x|e_1) = x(1) = 0\} = \text{Ker}(\varphi_1)$

siendo $\varphi_1 : \ell_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ definido por $\varphi_1(x) = x(1)$

Es claro que φ_1 es lineal y $|\varphi_1(x)| = |x(1)| \leq \|x\|_2$

luego $\varphi_1 \in \ell_2^*$ y $\text{Ker}(\varphi_1) = M_1$ es un subespacio cerrado de ℓ_2

y $M_2 = \{x \in \ell_2 \mid (x|x_0) = 0\} = \text{Ker}(\varphi_2)$

siendo $\varphi_2 : \ell_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ definido por $\varphi_2(x) = (x|x_0)$

es claro que φ_2 es lineal y es continuo por la desigualdad de Cauchy-Schwarz ($|\varphi_2(x)| \leq \|x_0\|_2 \|x\|_2$)

luego $\varphi_2 \in \ell_2^*$ y $\text{Ker}(\varphi_2) = M_2$ es un subespacio cerrado de ℓ_2 y, por tanto, $M = M_1 \cap M_2$ es un subespacio cerrado de ℓ_2

(b) Es claro que $M = \{e_1, x_0\}^\perp$, luego

$M^\perp = \{e_1, x_0\}^{\perp\perp} = \overline{\text{lin}\{e_1, x_0\}} = \text{lin}\{e_1, x_0\}$

$\text{lin}\{e_1, x_0\}$ es cerrado en ℓ_2 por ser de dimensión finita.

(c) Ya que $M^\perp = \text{lin}\{e_1, x_0\}$ y

$(e_1 | x_0) = 0$ y $\|e_1\|_2 = 1$, entonces

$u_1 = e_1$, $u_2 = \frac{x_0}{\|x_0\|_2}$, verifican que

$M^\perp = \text{lin}\{u_1, u_2\}$ y $\{u_1, u_2\}$ es una base ortonormal de $M^\perp$

$$\|x_0\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \alpha_0 \Rightarrow \|x_0\|_2 = \frac{\pi}{\sqrt{6}} = \sqrt{\alpha_0} = \alpha$$

Para cada $x \in \ell_2$, se tiene

$$P_{M^\perp}(x) = (x|u_1)u_1 + (x|u_2)u_2 =$$

$$= x(1)e_1 + \left(x \,\Big|\, \frac{x_0}{\alpha}\right)\frac{x_0}{\alpha} = x(1)e_1 + \frac{1}{\alpha^2}(x|x_0)x_0 =$$

$$= x(1)e_1 + \frac{1}{\alpha^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(2n)}{n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_{2n}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(x(1), \frac{\beta}{1}, 0, \frac{\beta}{2}, 0, \frac{\beta}{3}, 0, \frac{\beta}{4}, \ldots\right)$$

siendo $\beta = \frac{1}{\alpha^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(2n)}{n}\right) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(2n)}{n}$

$P_M(x) = x - P_{M^\perp}(x)$ para cada $x \in \ell_2$

$= (0, x(2)-\beta, x(3), x(4)-\frac{\beta}{2}, x(5), x(6)-\frac{\beta}{3}, 0, x(8)-\frac{\beta}{4}, \dots)$

$= \sum_{m=1}^{\infty} x(2m+1)\, e_{2m+1} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(x(2m) - \frac{\beta}{m}\right) e_{2m}$

d) $\text{dist}(e_1+e_3, M) = \|e_1+e_3+M\| = \|e_1+M\|$ $(e_3 \in M)$

$= \text{dist}(e_1, M) = \|e_1 - P_M(e_1)\|_2 = \|P_{M^\perp}(e_1)\|_2$

Por c) $P_{M^\perp}(e_1) = e_1$ (es claro ya que $e_1 \in M^\perp$)

luego $\text{dist}(e_1+e_3, M) = \|P_{M^\perp}(e_1)\|_2 = \|e_1\|_2 = 1$