Métodos Numéricos II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Métodos Numéricos II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Relaciones de Ejercicios

1.1. Resolución numérica de ecuaciones y sistemas

1.1.1. Relación 1

Ejercicio 1.1.1.1. Se considera el problema de encontrar las soluciones reales de la ecuación $x + 1/2 - 2\operatorname{sen}(\pi x) = 0$ en el intervalo $[1/2, 3/2]$.

1. ¿Se puede utilizar el método de bisección para resolver dicho problema tomando $[1/2, 3/2]$ como intervalo inicial? ¿Por qué? En caso afirmativo, calcule las tres primeras iteraciones de dicho método.

   Definimos la función siguiente:

$$\begin{array}{rccl} f: & [1/2, 3/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x + 1/2 - 2\operatorname{sen}(\pi x) \end{array}$$

   Sabemos que $f \in C^\infty\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right)$, y además:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 4 > 0$$

   Por lo tanto, por el teorema de Bolzano, existe al menos una raíz en el intervalo $[1/2, 3/2]$. Por tanto, podemos aplicar el método de bisección. Calculamos las tres primeras iteraciones:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0,5	1,5	1	1,5
1	0,5	1	0,75	−0,1642
2	0,75	1	0,875	0,6096
3	0,75	0,875	0,8125	

2. Halle una cota del error que se comete si consideramos la última de las iteraciones del apartado anterior como el valor de la solución del problema dado.

   Tenemos que:

$$|e_3| \leqslant \frac{1}{2^4}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

3. ¿Cuántas iteraciones del método de bisección son necesarias para garantizar un error menor que 10^{-5}?

   Para garantizar un error menor que 10^{-5} necesitamos que:

$$|e_n| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-5} \iff 10^5 \leqslant 2^{n+1} \iff n \geqslant \log_2(10^5) - 1 \approx 15{,}6096$$

   Como n debe ser entero, necesitamos al menos 16 iteraciones.

Ejercicio 1.1.1.2. Se quiere calcular el inverso de un número real $c > 0$ sin efectuar divisiones. Para ello, se elige un valor $x_0 > 0$ y se considera el método iterativo dado por $x_{n+1} = x_n(2 - cx_n)$, $n \geqslant 0$.

1. Demuestre que la sucesión generada por dicho método converge a $1/c$ si y sólo si $0 < x_0 < 2/c$.

   Observación. Comience demostrando por inducción que $r_n = r_0^{2^n}$ $\forall n \geqslant 0$ siendo $r_n = 1 - cx_n$.

   Demostramos por inducción dicha observación:

   - Caso base: $n = 0$.
$$r_0^{2^0} = r_0^1 = r_0$$
   - Paso inductivo: Supongamos que $r_n = r_0^{2^n}$.
$$r_0^{2^{n+1}} = \left(r_0^{2^n}\right)^2 = r_n^2 = (1 - cx_n)^2 = 1 - 2cx_n + c^2x_n^2 = 1 - cx_n\,(2 - cx_n) = \\ = 1 - cx_{n+1} = r_{n+1}$$

   Por lo tanto, $r_n = r_0^{2^n}$ para todo $n \geqslant 0$. Por la suma geométrica, tenemos que:

$$\{x_n\} \text{ es convergente} \iff \{r_n\} \text{ es convergente} \iff \\ \iff |r_0| < 1 \iff |1 - cx_0| < 1 \iff 0 < cx_0 < 2 \iff \\ \iff 0 < x_0 < \frac{2}{c}$$

   En el caso de que sea convergente, por la unicidad del límite, se tiene que:

$$1 - c \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (1 - cx_n) = \lim_{n\to\infty} r_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{c}$$

2. Demuestre que la convergencia referida en el apartado anterior es al menos cuadrática. ¿Cuál es la constante asintótica del error?

   Definimos la función siguiente:

$$\begin{array}{rccl} g: & \left[0, \dfrac{2}{c}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x(2 - cx) \end{array}$$

   Tenemos que:

$$g\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c}\left(2 - \frac{c}{c}\right) = \frac{1}{c}$$

Calculamos las dos primeras derivadas de g:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2 - cx - cx = 2(1 - cx) \\
g''(x) &= -2c
\end{aligned}$$

Evaluando en el punto fijo de g:

$$\begin{aligned}
g'\left(\frac{1}{c}\right) &= 2(1 - c \cdot \frac{1}{c}) = 2(1 - 1) = 0 \\
g''\left(\frac{1}{c}\right) &= -2c \neq 0
\end{aligned}$$

Por tanto, el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ tiene orden de convergencia cuadrático, con constante asintótica del error:

$$C = \frac{1}{2} \cdot 2c = c$$

3. Compruebe que el método iterativo propuesto es el método de Newton-Raphson aplicado a una cierta ecuación $f(x) = 0$ cuya única raíz es $1/c$.

   Sea f la función que buscamos. Entonces:

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = g(x) = x(2 - cx) \Longrightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = x - 2x + cx^2 = cx^2 - x$$

   Podríamos intentar resolver dicha ecuación diferencial en variables separadas, pero directamente probaremos con varias funciones que tienen a $1/c$ como raíz, y veamos con cuál se da lo anterior.

   - $f(x) = x - 1/c$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 \\
\frac{f(x)}{f'(x)} &= f(x) = x - 1/c
\end{aligned}$$

     Por tanto, vemos que esta no es la función que buscamos.

   - $f(x) = c - 1/x$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1/x^2 \\
\frac{f(x)}{f'(x)} &= cx^2 - x
\end{aligned}$$

     Por tanto, esta es la función que buscamos.

   Por tanto, el método iterativo propuesto es el método de Newton-Raphson aplicado a la ecuación $f(x) = 0$ con $f(x) = c - 1/x$, cuya única raíz es $1/c$.

Ejercicio 1.1.1.3. Demuestre que la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ tiene una única solución en el intervalo $[1,4]$. Elija una semilla x_0 que permita hallar, usando el método de Newton-Raphson, una aproximación a dicha solución y justifique dicha elección. Calcule las dos primeras iteraciones.

Definimos la función siguiente:

$$\begin{array}{rrcl} f: & [1,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 - 2x^2 - 5 \end{array}$$

Sabemos que $f \in C^\infty([1,4])$, y además:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - 2 - 5 = -6 < 0 \\ f(4) &= 64 - 32 - 5 = 27 > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el teorema de Bolzano, existe al menos una raíz en el intervalo $[1,4]$. Veamos ahora que esta es única:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4) = 0 \iff x \in \left\{0, \frac{4}{3}\right\}$$

- Si $x \in [1, {}^4/_3]$, entonces $f'(x) \leqslant 0$.

  Como $f(1) < 0$ y f es continua, entonces f no tiene raíces reales en $[1, \frac{4}{3}]$.

- Si $x \in [{}^4/_3, 4]$, entonces $f'(x) \geqslant 0$.

  Como $f({}^4/_3) < 0$ y f en este intervalo es inyectiva, entonces, de tener una raíz, sería única.

Por tanto, la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ tiene una única solución en el intervalo $[{}^4/_3, 4]$. Buscamos ahora demostrar la convergencia de Newton-Raphson:

1. $f({}^4/_3)f(4) < 0$.

2. $f'(x)$ no se anula en $]{}^4/_3, 4]$.

3. $f''(x) = 6x - 4$ no se anula en $]{}^4/_3, 4]$.

4. Comprobemos que tomar $x_0 = 4$ sirve para garantizar la convergencia.

$$f(4)f''(4) = 27 \cdot 20 = 540 > 0$$

Por tanto, podemos aplicar el método de Newton-Raphson empleando como semilla $x_0 = 4$. Calculamos las dos primeras iteraciones:

n	x_n
0	4
1	3,15625
2	2,77860

Ejercicio 1.1.1.4. Deduzca la fórmula para el cálculo de las iteraciones del método de la secante a partir de su interpretación gráfica.

Dados dos puntos $(x_n, f(x_n))$ y $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, la recta secante que pasa por ellos es:

$$\frac{y - f(x_n)}{x - x_n} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

El punto de corte de la recta secante con el eje x es:

$$\begin{aligned}
\frac{0 - f(x_n)}{x - x_n} &= \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \\
x - x_n &= -f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
x &= x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}
\end{aligned}$$

Por tanto, denotamos por x_{n+1} a dicho punto de corte, y obtenemos la fórmula del método de la secante:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Ejercicio 1.1.1.5. Dada la ecuación $x - {}^1\!/_2 \cos(x) = 0$, se pide:

1. Demuestre que tiene una única solución real en el intervalo $[0, {}^\pi\!/_2]$.

   Definimos la función siguiente:

   $$\begin{array}{rccl} f: & [0, {}^\pi\!/_2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - {}^1\!/_2 \cos(x) \end{array}$$

   Sabemos que $f \in C^\infty([0, {}^\pi\!/_2])$. Estudiemos su monotonía:

   $$f'(x) = 1 + {}^1\!/_2 \operatorname{sen}(x) > 0 \ \forall x \in [0, {}^\pi\!/_2]$$

   Por tanto, f es inyectiva. Veamos ahora que tiene una única raíz:

   $$\begin{aligned} f(0) &= 0 - {}^1\!/_2 \cos(0) = {}^{-1}\!/_2 < 0 \\ f\left({}^\pi\!/_2\right) &= {}^\pi\!/_2 > 0 \end{aligned}$$

   Por el teorema de Bolzano, existe al menos una raíz en el intervalo $[0, {}^\pi\!/_2]$. Por la inyectividad de f, esta raíz es única.

2. Describa un método de iteración funcional, distinto del método de Newton-Raphson, que permita aproximar dicha solución, razonando la respuesta.

   Definimos la función siguiente:

   $$\begin{array}{rccl} g: & [0, {}^\pi\!/_2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & {}^1\!/_2 \cos(x) \end{array}$$

Veamos que las raíces de f son los puntos fijos de g:

$$f(x) = 0 \iff x = {}^1\!/_2 \cos(x) \iff x = g(x)$$

Comprobamos que la función será contractiva en un entorno del punto fijo s:

$$|g'(x)| = {}^1\!/_2 |\operatorname{sen}(x)| \leqslant {}^1\!/_2 < 1$$

Por tanto, podemos aplicar el método de iteración funcional $x_{n+1} = g(x_n)$ para aproximar la solución de la ecuación $x - {}^1\!/_2 \cos(x) = 0$ partiendo de una semilla x_0 suficientemente próxima a la solución. Para especificar cuánto es "suficientemente próxima", veamos que $g([0, {}^\pi\!/_2]) \subset [0, {}^\pi\!/_2]$. Sea $x \in [0, {}^\pi\!/_2]$, y entonces:

$$0 \leqslant g(x) = \frac{1}{2}\cos(x) \leqslant \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, g es una contracción en $[0, {}^\pi\!/_2]$, y por tanto, podemos aplicar el método de iteración funcional para aproximar la solución de la ecuación $x - {}^1\!/_2 \cos(x) = 0$.

3. Realice las dos primeras iteraciones del método descrito en el apartado anterior.

n	x_n
0	${}^\pi\!/_4 \approx 0{,}785398$
1	0,3535533
2	0,4690742
3	0,4459936

4. ¿Cuántas iteraciones es preciso realizar para garantizar un error menor que 10^{-2} en el método dado en el apartado 2?

   Para garantizar un error menor que 10^{-2} necesitamos que:

$$|e_n| \leqslant \frac{L^n}{1-L} \cdot |x_1 - x_0| \leqslant \frac{1}{2^n(1 - {}^1\!/_2)} \cdot |x_1 - x_0| = \frac{0{,}43199}{2^{n-1}} \leqslant 10^{-2} \iff$$
$$\iff 2^{n-1} \geqslant \frac{0{,}43199}{10^{-2}} = 43{,}199 \iff n \geqslant \log_2(43{,}199) + 1 \approx 6{,}4329$$

   Como n debe ser entero, necesitamos al menos 7 iteraciones.

Ejercicio 1.1.1.6. Usando algún resultado sobre convergencia para los métodos de iteración funcional, demuestre el teorema de convergencia local para ceros simples del método de Newton-Raphson.

Sea f una función de clase C^2 en un entorno de la raíz s de la ecuación $f(x) = 0$, y sea $f'(s) \neq 0$. Consideramos la función siguiente, definida en un entorno de s:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Sabemos que $g(s) = s$. Calculemos su derivada:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = 0 < 1$$

Por tanto, por el Teorema de Convergencia Local de los métodos de iteración funcional, existe un intervalo que contiene a la raíz de forma que el método de Newton-Raphson converge a la raíz de forma cuadrática para cualquier semilla en dicho intervalo.

Ejercicio 1.1.1.7. Para resolver la ecuación $f(x) = 0$ se considera el siguiente método, donde $m \neq 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m}$$

1. Interprete gráficamente el cálculo de las iteraciones según dicho método.

   Tenemos que:

   $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m} \Longrightarrow x_{n+1} - x_n = \frac{-f(x_n)}{m} \Longrightarrow m = \frac{0 - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

   Por tanto, pensando en la ecuación punto-pendiente de la recta, vemos que x_{n+1} se calcula como el punto de corte de la recta que pasa por el punto $(x_n, f(x_n))$ y tiene pendiente m con el eje x.

2. ¿Qué condiciones para la función f, para la constante m y para el valor inicial x_0 asegurarían unicidad de solución y convergencia a dicha solución del método considerado?

   Definimos la función siguiente:

   $$\begin{array}{rccc} g: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - \dfrac{f(x)}{m} \end{array}$$

   Debido a que no conocemos mucho sobre f, no podremos llegar a grandes resultados. Tan solo podremos garantizar resultados locales, por lo que usaremos el Teorema de la Convergencia Local. Consideramos $s \in I$ raíz de f, es decir, $f(s) = 0$. Entonces, $g(s) = s$. Calculamos la derivada de g:

   $$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{m}$$

   Imponemos ahora $|g'(s)| < 1$ para garantizar la convergencia local:

   $$|g'(s)| = \left|1 - \frac{f'(s)}{m}\right| < 1 \iff 0 < \frac{f'(s)}{m} < 2$$

   Por tanto, garantizando $0 < {}^{f'(s)}/_{m} < 2$ se tiene que el método converge a la raíz s de forma local; es decir, para semillas suficientemente cercanas a s.

Ejercicio 1.1.1.8. Localice un intervalo $[a, b]$ en el que se encuentren todas las soluciones reales de la ecuación $2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$, y sepárelas. Tomando $x_0 = -2$ como semilla, calcule las tres primeras iteraciones del método de Newton-Raphson usando el algoritmo de Horner.

En primer lugar, calculamos:

$$\alpha = \text{máx}\left\{\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}\right\} = 2$$

Por tanto, tenemos que todas las raíces de la ecuación $2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$ están en el intervalo $[-3, 3]$. Para separarlas, construimos la sucesión de Sturm correspondiente. Definimos:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= p(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 \\ f_1(x) &= f_0'(x) = 8x^3 - 6x + 3 \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_2(x)$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 & 8x^3 - 6x + 3 \\ \cline{2-2} -2x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x \phantom{{}-4} & \frac{1}{4}x \\ \hline -\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 4 & \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -4 \cdot R(f_0(x), f_1(x)) \\ &= -4 \cdot \left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 4\right) \\ &= 6x^2 - 9x + 16 \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_3(x)$.

$$\begin{array}{r|l} 8x^3 \qquad\quad - 6x \ \ + 3 & 6x^2 - 9x + 16 \\ \cline{2-2} -8x^3 + 12x^2 - \frac{64}{3}x \qquad & \frac{4}{3}x + 2 \\ \hline 12x^2 - \frac{82}{3}x \ \ + 3 & \\ -12x^2 + 18x - 32 & \\ \hline -\frac{28}{3}x - 29 & \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= -3 \cdot R(f_1(x), f_2(x)) \\ &= -3 \cdot \left(-\frac{28}{3}x - 29\right) \\ &= 28x + 87 \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_4(x)$.

$$\begin{array}{r|l} 6x^2 \quad - 9x \quad + 16 & 28x + 87 \\ \cline{2-2} -6x^2 - \frac{261}{14}x \qquad\quad & \frac{3}{14}x - \frac{387}{392} \\ \hline -\frac{387}{14}x \quad + 16 & \\ \frac{387}{14}x + \frac{33669}{392} & \\ \hline \frac{39941}{392} & \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned}
f_4(x) &= -\frac{392}{39941} \cdot R(f_2(x), f_3(x)) \\
&= -\frac{392}{39941} \cdot \left(\frac{39941}{392}\right) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión de Sturm es:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 \\
f_1(x) &= 8x^3 - 6x + 3 \\
f_2(x) &= 6x^2 - 9x + 16 \\
f_3(x) &= 28x + 87 \\
f_4(x) &= -1
\end{aligned}$$

Separamos ahora las raíces:

x	$\mathrm{sgn}(f_0(x))$	$\mathrm{sgn}(f_1(x))$	$\mathrm{sgn}(f_2(x))$	$\mathrm{sgn}(f_3(x))$	$\mathrm{sgn}(f_4(x))$	Nº Cambios Signo
-3	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	3
-2	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	3
-1	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	2
0	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	2
1	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	2
2	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	1
3	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	1

Por tanto, tenemos que hay una raíz en $[-2, -1]$ y otra en el intervalo $[1, 2]$. Calculamos ahora las tres primeras iteraciones del método de Newton-Raphson con semilla $x_0 = -2$ (aunque no hallamos demostrado la convergencia):

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	-2	10	-49
1	$-1{,}795918$	$1{,}741690$	$-32{,}563821$
2	$-1{,}742433$	$0{,}099956$	$-28{,}866623$
3	$-1{,}738970$		

donde tan solo se muestran las evaluaciones con Horner para x_0:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 0 & -3 & 3 & -4 \\
-2 & & -4 & 8 & -10 & 14 \\
\hline
 & 2 & -4 & 5 & -7 & \boxed{10} \\
-2 & & -4 & 16 & -42 & \\
\hline
 & 2 & -8 & 21 & \boxed{-49} &
\end{array}$$

Ejercicio 1.1.1.9. Sea $s = \sqrt{3}$. Para calcular s se considera el método de iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{con} \quad g(x) = \frac{ax + x^3}{3 + bx^2}.$$

Halle los valores de a y b para que, partiendo de una semilla x_0 suficientemente próxima a s, se asegure la convergencia al menos cuadrática. Para tales valores, calcule x_3 para $x_0 = 1$.

En primer lugar, es necesario probar que $g(s) = s$ para que s sea un punto fijo de g:

$$s = g(s) = \frac{as + s^3}{3 + bs^2} = \frac{as + 3s}{3 + 3b} \Longrightarrow as + 3s = 3s + 3bs \Longrightarrow a = 3b$$

Por otro lado, para asegurar la convergencia local al menos cuadrática, es necesario que $g'(s) = 0$:

$$g'(s) = \frac{(a + 3s^2)(3 + bs^2) - (as + s^3)2bs}{(3 + bs^2)^2} = \frac{(a + 9)(3 + 3b) - (as + 3s)2bs}{(3 + 3b)^2} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3 + 3b \neq 0 \\ (a + 9)(3 + 3b) - (as + 3s)2bs = 0 \end{cases}$$

Empleando que $a = 3b$, obtenemos:

$$(3b+9)(3+3b)-(3b+3)2bs^2 = 0 \Longrightarrow (3+3b)(3b+9-6b) = 0 \Longrightarrow -3b+9 = 0 \Longrightarrow b = 3$$

Por tanto, $a = 9$, $b = 3$. Calculamos ahora las tres primeras iteraciones con $x_0 = 1$ (aunque no hayamos demostrado la convergencia):

n	x_n
0	1
1	1,666667
2	1,732026
3	1,732051

Ejercicio 1.1.1.10. Se desea aplicar un método iterativo del siguiente tipo para obtener $\sqrt[3]{7}$.

$$x_{n+1} = p \cdot x_n + q \cdot \frac{7}{x_n^2} + r \cdot \frac{7^2}{x_n^5}$$

Halle los valores de p, q, r para que la convergencia local del método sea al menos cúbica. Realice dos iteraciones partiendo de $x_0 = 2$.

Definimos la función siguiente:

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & p \cdot x + q \cdot \dfrac{7}{x^2} + r \cdot \dfrac{49}{x^5} \end{array}$$

Sea ahora $s = \sqrt[3]{7}$, de la cual tan solo conocemos que $s^3 = 7$. En primer lugar, es necesario probar que s es un punto fijo de g:

$$s = g(s) = p \cdot s + q \cdot \frac{7}{s^2} + r \cdot \frac{49}{s^5}$$

Dividiendo entre s (que sabemos que es distinto de 0), obtenemos:

$$1 = p + q \cdot \frac{7}{s^3} + r \cdot \frac{49}{s^6} \Longrightarrow 1 = p + q \cdot \frac{7}{7} + r \cdot \frac{49}{49} \Longrightarrow 1 = p + q + r$$

Por otro lado, para asegurar la convergencia local al menos cúbica, es necesario que $g'(s) = g''(s) = 0$:

$$\begin{aligned} g'(s) &= p - \frac{7 \cdot 2q}{s^3} - \frac{49 \cdot 5r}{s^6} = 0 \Longrightarrow p - 2q - 5r = 0 \\ g''(s) &= \frac{7 \cdot 2 \cdot 3q}{s^4} + \frac{49 \cdot 5 \cdot 6r}{s^7} = 0 \Longrightarrow \frac{6q}{s} + \frac{30r}{s} = 0 \Longrightarrow q + 5r = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{cases} p + q + r = 1 \\ p - 2q - 5r = 0 \\ q + 5r = 0 \end{cases}$$

De la tercera ecuación, obtenemos $q = -5r$, y sustituyendo en la segunda obtenemos $p = q$. sustituyendo en la primera ecuación, tenemos:

$$-5r - 5r + r = 1 \Longrightarrow -9r = 1 \Longrightarrow r = -\frac{1}{9} \Longrightarrow \begin{cases} p = 5/9 \\ q = 5/9 \\ r = -1/9 \end{cases}$$

Realizamos ahora las dos primeras iteraciones con $x_0 = 2$ (aunque no hayamos demostrado la convergencia):

n	x_n
0	2
1	1,9131944
2	1,9129312

Ejercicio 1.1.1.11. Sea $f(x) = x^5 + x^2 - 1$.

1. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$?

   Podríamos demostrarlo estudiando la monotonía y haciendo uso del Teorema de Bolzano, pero de cara al último apartado lo haremos calculando la sucesión de Sturm. Definimos:

   $$\begin{aligned} f_0(x) &= p(x) = x^5 + x^2 - 1 \\ f_1(x) &= f_0'(x) = 5x^4 + 2x \end{aligned}$$

   Calculamos ahora $f_2(x)$.

   $$\begin{array}{rr|l} x^5 & +x^2 - 1 & 5x^4 + 2x \\ \cline{3-3} -x^5 & -\frac{2}{5}x^2 & \frac{1}{5}x \\ \cline{1-2} & \frac{3}{5}x^2 - 1 & \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= -5 \cdot R(f_0(x), f_1(x)) \\
&= -5 \cdot \left(\frac{3}{5}x^2 - 1\right) \\
&= -3x^2 + 5
\end{aligned}
$$

Calculamos ahora $f_3(x)$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
5x^4 & & +2x & & -3x^2+5 \\ \cline{5-5}
-5x^4 & +\frac{25}{3}x^2 & & & -\frac{5}{3}x^2-\frac{25}{9} \\ \cline{1-2}
 & \frac{25}{3}x^2 & +2x & & \\
 & -\frac{25}{3}x^2 & & +\frac{125}{9} & \\ \cline{2-4}
 & & 2x & +\frac{125}{9} &
\end{array}
$$

Para simplificar, establecemos:

$$
\begin{aligned}
f_3(x) &= -9 \cdot R(f_1(x), f_2(x)) \\
&= -9 \cdot \left(2x + \frac{125}{9}\right) \\
&= -18x - 125
\end{aligned}
$$

Calculamos ahora $f_4(x)$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
-3x^2 & & +5 & -18x-125 \\ \cline{4-4}
3x^2 & +\frac{125}{6}x & & \frac{1}{6}x-\frac{125}{108} \\ \cline{1-2}
 & \frac{125}{6}x & +5 & \\
 & -\frac{125}{6}x & -\frac{15625}{108} & \\ \cline{2-3}
 & & -\frac{15085}{108} &
\end{array}
$$

Para simplificar, establecemos:

$$
\begin{aligned}
f_4(x) &= -\frac{108}{15085} \cdot R(f_2(x), f_3(x)) \\
&= -\frac{108}{15085} \cdot \left(-\frac{15085}{108}\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Por tanto, la sucesión de Sturm es:

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= x^5 + x^2 - 1 \\
f_1(x) &= 5x^4 + 2x \\
f_2(x) &= -3x^2 + 5 \\
f_3(x) &= -18x - 125 \\
f_4(x) &= 1
\end{aligned}
$$

Antes de separar las raíces, calculamos un intervalo en el cual estén todas las raíces. Para ello, calculamos:

$$\alpha = \text{máx}\{1, 1, 1\} = 1$$

Por tanto, tenemos que todas las raíces de la ecuación $x^5 + x^2 - 1 = 0$ están en el intervalo $[-2, 2]$. Separamos ahora las raíces:

x	sgn($f_0(x)$)	sgn($f_1(x)$)	sgn($f_2(x)$)	sgn($f_3(x)$)	sgn($f_4(x)$)	Nº Cambios Signo
-2	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	3
-1	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	3
0	$-$	0	$+$	$-$	$+$	3
1	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	2
2	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	2

Por tanto, tan solo tiene una raíz real, y está en el intervalo $[0, 1]$.

2. Pruebe que el método de iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt{\frac{1}{x_n^3 + 1}}$$

converge en el intervalo $[0, 1]$ a una raíz de $f(x) = 0$.

Comprobemos en primer lugar que tiene puntos fijos. Tenemos que:

$$g(x) = x \iff x = \sqrt{\frac{1}{x^3+1}} \iff x^2 = \frac{1}{x^3+1} \iff x^5+x^2-1 = 0 \iff f(x) = 0$$

Por tanto, g tiene como único punto fijo la raíz de f en $[0, 1]$.

Comprobemos ahora que su primera derivada está acotada por uno. Calculémosla:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\sqrt{x^3+1}}{2} \cdot \frac{-3x^2}{(x^3+1)^2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{(x^3+1)^{3/2}} \\
g''(x) &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{2x(x^3+1)^{3/2} - x^2 \cdot 3/2 \cdot (x^3+1)^{1/2} \cdot 3x^2}{(x^3+1)^3} = \\
&= -\frac{3}{2} \cdot \frac{2x(x^3+1) - x^2 \cdot 3/2 \cdot 3x^2}{(x^3+1)^{5/2}} = \\
&= -\frac{12x(x^3+1) - x^2 \cdot 9 \cdot 3x^2}{4(x^3+1)^{5/2}} = -\frac{-15x^4+12x}{4(x^3+1)^{5/2}} = \frac{3x(5x^3-4)}{4(x^3+1)^{5/2}}
\end{aligned}$$

Por tanto, los candidatos a extremos relativos de g' son el 0 y $\sqrt[3]{4/5}$. Estudiamos la monotonía en $[0, 1]$:

- Si $x \in [0, \sqrt[3]{4/5}[$, entonces $g''(x) < 0$.
- Si $x \in]\sqrt[3]{4/5}, 1]$, entonces $g''(x) > 0$.

Evaluamos en el mínimo local y en los extremos del intervalo:

$$\begin{aligned}
g'(0) &= 0 \\
g'\left(\sqrt[3]{4/5}\right) &= -\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{16/25}}{(9/5)^{3/2}} = -\frac{\sqrt[6]{12500}}{9} \approx -0{,}53 \\
g'(1) &= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{4\sqrt{2}} \approx -0{,}53
\end{aligned}$$

Por tanto, uniendo ambos resultados, para cada $x \in [0,1]$ se tiene que:

$$-0{,}53 \leqslant g'(x) \leqslant 0 \Longrightarrow |g'(x)| < 1$$

Por tanto, g es contráctil. Notemos que no es necesario demostrar que $g([0,1]) \subseteq [0,1]$ ya que ya hemos demostrado la existencia y unicidad del punto fijo. Por tanto, por el Teorema de Convergencia de los Métodos de Iteración Funcional, el método de iteración funcional converge al punto fijo de g en $[0,1]$, que es la raíz de f en $[0,1]$.

3. Localice todas las raíces reales de $f(x)$.

   Ya se ha realizado en el primer apartado.

Ejercicio 1.1.1.12. A partir de la gráfica de $y = f(x)$ que se muestra, determine gráficamente las dos aproximaciones siguientes que generan los métodos de Newton-Raphson y de la secante partiendo de las semillas que aparecen en cada caso. Deduzca si hay convergencia y hacia qué solución de $f(x) = 0$.

1. Método de Newton-Raphson: El enunciado se muestra en la Figura 1.1, y la solución en la Figura 1.3.

   Podemos intuir que el método de Newton-Raphson convergerá a la segunda raíz de f comenzando por la izquierda.

2. Método de la secante: El enunciado se muestra en la Figura 1.2, y la solución en la Figura 1.4.

   Podemos intuir de nuevo que el método de la secante convergerá a la segunda raíz de f comenzando por la izquierda.

Ejercicio 1.1.1.13. Se considera la ecuación $xe^{-x/3} + 1 = 0$ y los métodos de iteración funcional $x_{n+1} = g(x_n)$ dados por las funciones

$$g_1(x) = -e^{x/3}, \qquad g_2(x) = e^{x/3},$$
$$g_3(x) = 3\ln(-x), \qquad g_4(x) = \frac{x - e^{x/3}}{2}.$$

1. Encuentre un intervalo de amplitud 1 donde haya una única raíz de la ecuación.

   Definimos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl}
f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& x & \longmapsto & xe^{-x/3} + 1
\end{array}$$

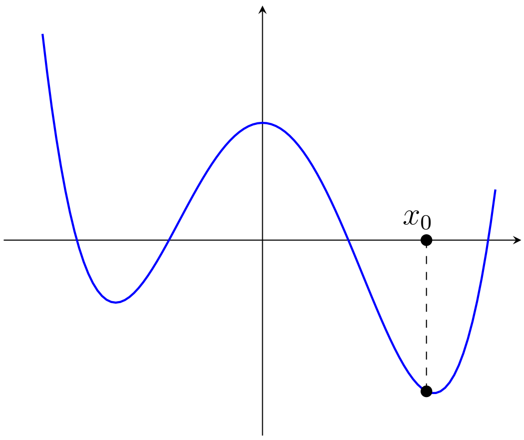


Figura 1.1: Semilla para el método de Newton-Raphson en el Ejercicio 1.1.1.12.

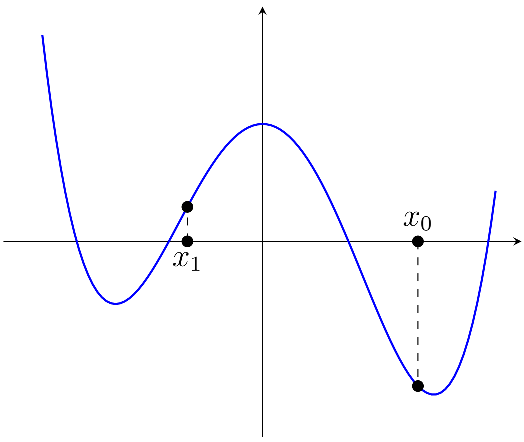


Figura 1.2: Semilla para el método de la Secante en el Ejercicio 1.1.1.12.

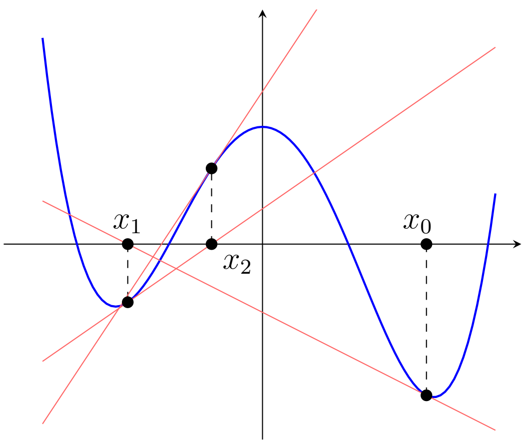


Figura 1.3: Solución para el método de Newton-Raphson en el Ejercicio 1.1.1.12.

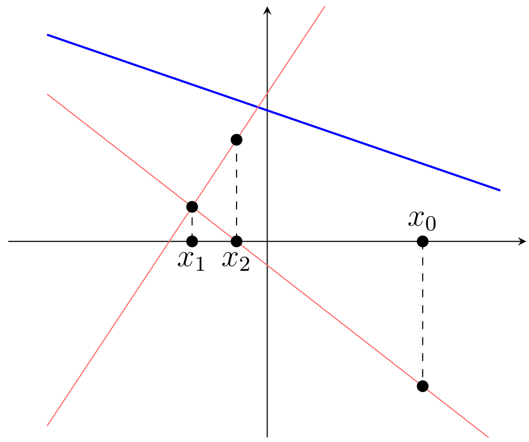


Figura 1.4: Solución para el método de la Secante en el Ejercicio 1.1.1.12.

Tenemos que $f \in C^1(\mathbb{R})$, y además:

$$f(0) = 1$$
$$f(-1) = -e^{1/3} + 1 < 0 \iff e^{1/3} > 1 \iff e > 1$$

Por tanto, la ecuación $xe^{-x/3} + 1 = 0$ tiene una raíz en el intervalo $[-1, 0]$. Veamos ahora si es la única en dicho intervalo.

$$f'(x) = e^{-x/3} - \frac{x}{3}e^{-x/3} = e^{-x/3}\left(1 - \frac{x}{3}\right) = 0 \iff x = 3$$

Por tanto, como f' no se anula en $[-1, 0]$, entonces f es inyectiva en $[-1, 0]$, y por tanto la raíz en $[-1, 0]$ es única.

2. Averigüe cuáles de los métodos propuestos son compatibles con la ecuación dada; es decir, para cuáles de ellos la solución es punto fijo.

$$g_1(x) = x \iff -e^{x/3} = x \iff -e^{x/3 - x/3} = xe^{-x/3} \iff -e^0 = xe^{-x/3} \iff$$
$$\iff xe^{-x/3} + 1 = 0 \iff f(x) = 0$$
$$g_2(x) = x \iff e^{x/3} = x \Longrightarrow x > 0 \Longrightarrow x \notin [-1, 0] \Longrightarrow g_2 \text{ no es compatible}$$
$$g_3(x) = x \iff 3\ln(-x) = x \iff \ln(-x) = x/3 \iff \ln(1) - \ln(-x) = -x/3 \iff$$
$$\iff \ln\left(1/-x\right) = -x/3 \iff 1/-x = e^{-x/3} \iff xe^{-x/3} + 1 = 0 \iff f(x) = 0$$
$$g_4(x) = x \iff \frac{x - e^{x/3}}{2} = x \iff x - e^{x/3} = 2x \iff -e^{x/3} = x \iff$$
$$\iff -1 = xe^{-x/3} \iff f(x) = 0$$

Por tanto, vemos que g_1, g_3 y g_4 son compatibles con la ecuación dada, mientras que g_2 no lo es.

3. De entre los métodos compatibles con la ecuación ¿cuáles son convergentes localmente? Justifique la respuesta.

Sea s una raíz de f. Ya hemos visto que s será un punto de fijo de g_i para $i \in \{1, 3, 4\}$. Para estudiar la convergencia local, necesitamos acotar la primera derivada en un entorno de s, y como desconocemos el valor de s, hemos de acotarla en todo el intervalo $[-1, 0]$.

- Para g_1:

  $$|g_1'(x)| = \frac{1}{3}e^{x/3} \leqslant \frac{1}{3}e^{0/3} = \frac{1}{3} < 1 \qquad \forall x \in [-1,0]$$

  Por tanto, g_1 es convergente localmente.

- Para g_3:

  $$|g_3'(x)| = \frac{3}{|x|} \geqslant 3 > 1 \qquad \forall x \in [-1,0]$$

  Por tanto, g_3 no es convergente para ningún $x \in [-1,0]$.

- Para g_4:

  $$|g_4'(x)| = \frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{3}e^{x/3}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}e^{x/3}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} < 1 \qquad \forall x \in [-1,0]$$

  Por tanto, g_4 es convergente localmente.

4. De entre los métodos convergentes localmente ¿cuál es el más rápido? ¿Por qué?

   En primer lugar, estudiamos si la primera derivada se anula o no. Sabemos que:

   $$\begin{aligned} g_1'(x) &= -\frac{1}{3}e^{x/3} \neq 0 \qquad \forall x \in [-1,0] \\ g_4'(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}e^{x/3}\right) = 0 \iff e^{x/3} = 3 \iff x = 3\ln(3) \notin [-1,0] \end{aligned}$$

   Por tanto, vemos que ambos tienen orden de convergencia lineal. Por tanto, para comparar cuál de ellos es más rápido, hemos de estudiar el valor de la constante asintótica del error. Notemos por C_1 y C_4 las constantes asintóticas de g_1 y g_4 respectivamente, y sea s la raíz de f en $[-1,0]$. Entonces, sabemos que:

   $$C_1 = |g_1'(s)| = \frac{1}{3}e^{s/3} \qquad C_4 = g_4'(s) = \frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{3}e^{s/3}\right| = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}e^{s/3}\right)$$

   Comparémoslas:

   $$C_1 \leqslant C_4 \iff \frac{1}{3}e^{s/3} \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}e^{s/3}\right) \iff \frac{1}{2}e^{s/3} \leqslant \frac{1}{2} \iff e^{s/3} \leqslant 1 \iff s \leqslant 0$$

   Como $s \in [-1,0]$, entonces $C_1 \leqslant C_4$. Por tanto, como a menor constante asintótica, mayor velocidad de convergencia, entonces g_1 es más rápido que g_4.

5. Para el método con mayor velocidad, aplique Steffensen con semilla $x_0 = -0{,}5$ hasta que dos iteraciones consecutivas disten menos de 10^{-3}.

Desarrollamos en primer lugar la aceleración de Aitken. Fijado $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Delta x_n &= x_{n+1} - x_n \\
\Delta^2 x_n &= \Delta\Delta x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n
\end{aligned}$$

Por tanto, la aceleración de Aitken es:

$$x_n^* = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

Por tanto, aplicamos Steffensen a g_1 con semilla $x_0 = -0{,}5$:

g_1	Δx_n	$\Delta^2 x_n$	Steffensen
$-0{,}5$			
$-0{,}846482$			
$-0{,}754152$	$-0{,}346482$	$0{,}438811$	$-0{,}773579$
$-0{,}773579$			
$-0{,}772703$			
$-0{,}772929$	$0{,}000876$	$-0{,}001101$	$-0{,}772883$
$-0{,}772883$			
$-0{,}772883$			
$-0{,}772883$	≈ 0	≈ 0	$-0{,}772883$

Ejercicio 1.1.1.14. Supongamos que se modifica el método de bisección cambiando el punto de división del intervalo por el valor $a + \frac{b-a}{3}$ (porque se cree que la solución está más cerca del extremo a). ¿Es convergente dicho método? ¿Cuál es la cota del error absoluto después de n iteraciones?

Sea a_n la sucesión de extremos izquierdos de los intervalos en la n-ésima iteración, y sea b_n la sucesión de extremos derechos de los intervalos en la n-ésima iteración. Entonces, por el Teorema de Bolzano aplicado a cada intervalo, tenemos que:

$$\exists s \in [a,b] \text{ tal que } s \in [a_n, b_n],\ f(s) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definimos ahora la sucesión de longitudes de los intervalos $l_n = b_n - a_n$. Calculamos ahora la longitud de los intervalos en la $n+1$-ésima iteración. Fijado el punto de disión $m_n = a_n + \dfrac{b_n - a_n}{3}$, caben dos posibilidades, quedarnos con el intervalo $[a_n, m_n]$ o con el intervalo $[m_n, b_n]$.

- Si optamos por el intervalo $[a_n, m_n]$, entonces:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n \\
b_{n+1} &= m_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{3} l_{n+1} \qquad = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{3} = \frac{l_n}{3}
\end{aligned}$$

- Si optamos por el intervalo $[m_n, b_n]$, entonces:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= m_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{3} \\
b_{n+1} &= b_n \\
l_{n+1} &= b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{3b_n - 3a_n - b_n + a_n}{3} = \frac{2b_n - 2a_n}{3} = \frac{2l_n}{3}
\end{aligned}$$

En cualquier caso, tenemos que:

$$0 \leqslant l_{n+1} \leqslant \max\left\{\frac{l_n}{3}, \frac{2l_n}{3}\right\} = \frac{2}{3}l_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2 l_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} l_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (b-a)$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, por el Lema del Sandwich, tenemos que:

$$\{a_n - b_n\} = \{l_n\} \to 0$$

La sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente por b, y la sucesión $\{b_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente por a. Por tanto, ambas sucesiones son convergentes, digamos que $a_n \to a^*$ y $b_n \to b^*$. Por tanto, por la unicidad del límite, tenemos que:

$$0 = \lim_{n\to\infty} (l_n) = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = b^* - a^* \Longrightarrow a^* = b^*$$

Por tanto, ambas sucesiones convergen al mismo límite, llamémosle L. Además, previamente hemos visto que $\exists s \in [a, b]$, con $f(s) = 0$, tal que:

$$a_n \leqslant s \leqslant b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, por el Teorema del Sandwich, tenemos que $L = s$. Por tanto, veamos que la sucesión formada por este método converge a s:

$$\{m_n\} = \left\{a_n + \frac{b_n - a_n}{3}\right\} \to s + \frac{s-s}{3} = s$$

Por tanto, el método es convergente. Por otro lado, la cota del error absoluto después de n iteraciones es:

$$|e_n| = |s - m_n| \leqslant l_{n+1} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (b-a)$$

En conclusión, el método es convergente, y la cota del error absoluto después de n iteraciones es mayor que la del método de bisección original, por lo que no hay garantías algunas de que sea preferible este método al original.

Ejercicio 1.1.1.15. Demuestre el teorema de convergencia global de los métodos de iteración funcional para sistemas.

Observación. Generalice al caso k-dimensional la demostración del teorema de convergencia global de los métodos de iteración funcional unidimensional.

1. El primer paso se tiene de forma directa por el Teorema del Punto Fijo de Banach, que ya se demostró en Análisis Matemático II para $\mathbb{R}^n$.

2. Sea S el punto fijo de G. Tenemos que:

$$\|X_n - S\| = \|G(X_{n-1}) - G(S)\| \leqslant L\|X_{n-1} - S\| \leqslant \ldots \leqslant L^n\|X_0 - S\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - S\| = 0 \Longrightarrow \{X_n\} \to S$$

Por tanto, el método es convergente.

3. Busquemos ahora una cota del error. Necesitamos para ello eliminar la dependencia de S de la cota anterior. Tenemos que:

$$\|X_0 - S\| = \|X_0 - X_1 + X_1 - S\| \leqslant \|X_0 - X_1\| + \|X_1 - S\| \leqslant \|X_0 - X_1\| + L\|X_0 - S\|$$

Despejando $\|X_0 - S\|$:

$$\begin{aligned} \|X_0 - S\| &\leqslant \|X_0 - X_1\| + L\|X_0 - S\| \\ (1-L)\|X_0 - S\| &\leqslant \|X_0 - X_1\| \\ \|X_0 - S\| &\leqslant \frac{1}{1-L}\|X_0 - X_1\| \end{aligned}$$

Por tanto, la cota del error es:

$$\|E_n\| = \|X_n - S\| \leqslant \frac{L^n}{1-L}\|X_0 - X_1\|$$

Ejercicio 1.1.1.16. Sea $D = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$ y sea $G : D \to \mathbb{R}^k$ con $G = (g_1, \dots, g_k)$ tal que $G \in C^1(D)$. Demuestre que si existe $L \in\,]0,1[$ tal que $\forall i, j = 1, \dots, k$ se verifique

$$\left|\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\right| \leqslant \frac{L}{k} \quad \forall x \in D,$$

entonces G es contráctil.

Observación. Considere la norma $\|\cdot\|_1$ o $\|\cdot\|_\infty$.

Para cada $x \in G$, consideramos $JG(x)$, que es la matriz jacobiana de G en x. Calculamos su norma 1, que es el máximo de las sumas de los valores absolutos de las columnas de $JG(x)$:

$$\|JG(x)\|_1 = \max_{j=1,\dots,k} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \right\} \leqslant \max_{j=1,\dots,k} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{L}{k} \right\} = \max_{j=1,\dots,k} \{L\} = L$$

Por tanto, por el Teorema del Valor Medio en $\mathbb{R}^k$, tenemos que:

$$\|G(x) - G(y)\| \leqslant L\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$$

Por tanto, G es contráctil, con constante de Lipschitz $L < 1$.

Ejercicio 1.1.1.17. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2}{2} - x + \frac{7}{24} &= 0, \\ xy - y + \frac{1}{9} &= 0. \end{aligned}$$

1. Demuestre que tiene una única solución en el rectángulo $D = [0, 0{,}4] \times [0, 0{,}4]$.

   Definimos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rccc} g_1 : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x^2 - y^2}{2} + \dfrac{7}{24} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g_2: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy + \dfrac{1}{9} \end{array}$$

Veamos en primer lugar que $g_1(D) \subset [0, 0{,}4]$. Sean $x, y \in [0, 0{,}4]$. Entonces:

$$0{,}21 \approx -\frac{0{,}4^2}{2} + \frac{7}{24} \leqslant g_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{7}{24} \leqslant \frac{0{,}4^2}{2} + \frac{7}{24} \approx 0{,}37$$

Por tanto, $g_1(D) \subset [0, 0{,}4]$. Veamos ahora que $g_2(D) \subset [0, 0{,}4]$. Sean de nuevo $x, y \in [0, 0{,}4]$. Entonces:

$$\frac{1}{9} \leqslant g_2(x,y) = xy + \frac{1}{9} \leqslant 0{,}4 \cdot 0{,}4 + \frac{1}{9} \approx 0{,}271$$

Por tanto, $g_2(D) \subset [0, 0{,}4]$. Definimos ahora $G = (g_1, g_2)$. Tenemos por tanto que $G : D \to D$. Veamos ahora que G es contráctil. Para ello, calculamos la matriz jacobiana de G:

$$JG(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora la norma de esta matriz:

$$\|JG(x,y)\|_1 = \text{máx}\,\{|x| + |-y|, |y| + |x|\} = \text{máx}\{x+y, y+x\} = x + y \leqslant 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8$$

Por tanto, G es contráctil, con constante de Lipschitz $L = 0{,}8 < 1$. Por tanto, por el Teorema del Punto Fijo de Banach, G tiene un único punto fijo en D. Además, sabemos que $X \in D$ es un punto fijo de G si y solo si X es solución del sistema de ecuaciones. Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene una única solución en D.

2. Encuentre una sucesión que converja a dicha solución, justificando la respuesta.

   Por el Teorema de Convergencia Global de los Métodos de Iteración Funcional para Sistemas, sabemos que el siguiente método es convergente al punto fijo de G para cualquier semilla $X_0 \in D$:

$$X_{n+1} = G(X_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   En forma matricial, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_n^2 - y_n^2}{2} + \dfrac{7}{24} \\ x_n y_n + {}^1\!/_9 \end{pmatrix} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Aunque no lo piden, calculamos las dos primeras iteraciones del método iterativo para la semilla $X_0 = (0{,}1, 0{,}2)$:

n	x_n	y_n
0	0,1	0,2
1	0,276667	0,131111
2	0,321344	0,147385
3	0,332436	0,158472

3. Calcule, tomando $x_0 = (0{,}1, 0{,}2)$, las dos primeras iteraciones del método de Newton-Raphson para el sistema.

   Definimos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rccc} f_1: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x^2-y^2}{2} - x + \dfrac{7}{24} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_2: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy - y + \dfrac{1}{9} \end{array}$$

   Calculamos ahora la matriz jacobiana de $F = (f_1, f_2)$:

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & -y \\ y & x-1 \end{pmatrix}$$

   Calculamos ahora el jacobiano de f en punto arbitrario $(x,y) \in D$:

$$|JF(x,y)| = (x-1)^2 + y^2 > 0 \qquad \forall (x,y) \in D$$

   Por tanto, $\exists JF(x,y)^{-1}$, y por tanto, el método de Newton-Raphson es aplicable. Este es:

$$X_{n+1} = X_n - JF(X_n)^{-1}F(X_n)$$

   Para resolverlo, tenemos dos opciones:

   Opción 1 Calcular la inversa de $JF(x,y)$.

   Tenemos que:

$$JF(x,y)^{-1} = \frac{1}{(x-1)^2+y^2}\begin{pmatrix} x-1 & y \\ -y & x-1 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, en forma matricial, el método de Newton-Raphson es:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{(x_n-1)^2+y_n^2}\begin{pmatrix} x_n-1 & y_n \\ -y_n & x_n-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{x_n^2-y_n^2}{2} - x_n + \dfrac{7}{24} \\ x_ny_n - y_n + \dfrac{1}{9} \end{pmatrix}$$

   Como vemos, los cálculos no son directos, puesto que hay que realizar diversas multiplicaciones de matrices a la hora de evaluar. No obstante, son cálculos sencillos. El resultado es:

n	x_n	y_n
0	0,1	0,2
1	0,30327	0,16863
2	0,3327	0,1666
3	0,33333	0,166667

Opción 2 Sin necesidad de calcular la inversa de $JF(x,y)$.

En este caso, el método de Newton-Raphson es:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n - JF(X_n)^{-1}F(X_n) \\ \Delta X_n &= -JF(X_n)^{-1}F(X_n) \\ JF(X_n)\Delta X_n &= -F(X_n) \end{aligned}$$

En cada paso, calcularemos ΔX_n resolviendo dicho sistema de ecuaciones, y así podremos obtener posteriormente X_{n+1}. Los cálculos son igualmente tediosos, pero siguen sin ser tediosos. De esta forma, sí es cierto que nos ahorramos el cálculo de la inversa de $JF(x,y)$, pero a cambio, hemos de resolver un sistema de ecuaciones en cada paso. El resultado es el mismo que en la Opción 1.

Ejercicio 1.1.1.18. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - xy &= {}^1\!/_{16}, \\ x^2 - y &= {}^{-1}\!/_8. \end{aligned}$$

1. Demuestre que tiene una única solución en el rectángulo $D = [0, {}^1\!/_8] \times [0, {}^1\!/_4]$.

   Definimos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rrcl} g_1: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy + {}^1\!/_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g_2: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2 + {}^1\!/_8 \end{array}$$

   Veamos en primer lugar que $g_1(D) \subset [0, {}^1\!/_8]$. Sean $x \in [0, {}^1\!/_8]$ e $y \in [0, {}^1\!/_4]$. Entonces:

$$0 \leqslant g_1(x,y) = xy + \frac{1}{16} \leqslant \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} = \frac{3}{32} < \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

   Por tanto, $g_1(D) \subset [0, {}^1\!/_8]$. Veamos ahora que $g_2(D) \subset [0, {}^1\!/_4]$. Sean de nuevo $x \in [0, {}^1\!/_8]$ e $y \in [0, {}^1\!/_4]$. Entonces:

$$0 \leqslant g_2(x,y) = x^2 + \frac{1}{8} \leqslant \frac{1}{8}^2 + \frac{1}{8} = \frac{1}{64} + \frac{1}{8} = \frac{9}{64} < \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

   Por tanto, $g_2(D) \subset [0, {}^1\!/_4]$. Definimos ahora $G = (g_1, g_2)$. Tenemos por tanto que $G : D \to D$. Veamos ahora que G es contráctil. Para ello, calculamos la matriz jacobiana de G:

$$JG(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora la norma de esta matriz:

$$\|JG(x,y)\|_1 = \text{máx}\left\{|y|+|x|,|2x|\right\} = \text{máx}\{x+y,2x\} \leqslant \text{máx}\left\{\frac{1}{8}+\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{8} < 1$$

Por tanto, G es contráctil, con constante de Lipschitz $L = 3/8 < 1$. Por tanto, por el Teorema del Punto Fijo de Banach, G tiene un único punto fijo en D. Además, sabemos que $X \in D$ es un punto fijo de G si y solo si X es solución del sistema de ecuaciones. Por tanto, el sistema de ecuaciones tiene una única solución en D.

2. Encuentre una sucesión que converja a dicha solución, justificando la respuesta.

   Por el Teorema de Convergencia Global de los Métodos de Iteración Funcional para Sistemas, sabemos que el siguiente método es convergente al punto fijo de G para cualquier semilla $X_0 \in D$:

$$X_{n+1} = G(X_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

3. Calcule, tomando $x_0 = (0{,}1, 0{,}2)$, las dos primeras iteraciones del método de Newton-Raphson para el sistema.

   Definimos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rccc} f_1: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x - xy - 1/16 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_2: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2 - y + 1/8 \end{array}$$

   Calculamos ahora la matriz jacobiana de $F = (f_1, f_2)$:

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

   Calculamos ahora el jacobiano de f en punto arbitrario $(x,y) \in D$:

$$|JF(x,y)| = (y-1)+2x^2 \leqslant \left(\frac{1}{4}-1\right)+2\left(\frac{1}{8}\right)^2 = -\frac{3}{4}+\frac{1}{32} = -\frac{24}{32}+\frac{1}{32} = -\frac{23}{32} < 0$$

   Por tanto, $\exists JF(x,y)^{-1}$, y por tanto, el método de Newton-Raphson es aplicable. Este es:

$$X_{n+1} = X_n - JF(X_n)^{-1}F(X_n)$$

   Para resolverlo, optamos por la primera opción, calculando la inversa de $JF(x,y)$:

$$JF(x,y)^{-1} = \frac{1}{(y-1)+2x^2}\begin{pmatrix} -1 & x \\ -2x & 1-y \end{pmatrix}$$

Por tanto, en forma matricial, el método de Newton-Raphson es:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{(y_n - 1) + 2x_n^2} \begin{pmatrix} 1 - y_n & -x_n \\ 2x_n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n - xy_n - 1/16 \\ x_n^2 - y_n + 1/8 \end{pmatrix}$$

Como vemos, los cálculos no son directos, puesto que hay que realizar diversas multiplicaciones de matrices a la hora de evaluar. No obstante, son cálculos sencillos. El resultado es:

n	x_n	y_n
0	0,1	0,2
1	0,06923076923077	0,12884615384615
2	0,07184796591410	0,13015528048751
3	0,07185252471221	0,13016278528674

1.1.2. Relación 2

Ejercicio 1.1.2.1. Sea la función $f(x) = e^x - ax^2$ con $a \in [3, 4]$.

1. Demuestra que tiene una raíz negativa, otra raíz en $[0, 1]$ y otra mayor que 1.

   Evaluamos f en los extremos del intervalo $[0, 1]$:

   $$\begin{aligned} f(0) &= e^0 - a \cdot 0^2 = 1 \\ f(1) &= e^1 - a \cdot 1^2 = e - a < 0 \Longleftrightarrow e < a \end{aligned}$$

   Calculamos además los límites de f en $\pm\infty$:

   $$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} e^x - ax^2 = \lim_{x\to-\infty} -ax^2 = -\infty \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} e^x - ax^2 = \infty \end{aligned}$$

   Para demostrar lo pedido, y debido a que f es continua, emplearemos el Teorema de Bolzano.

   - Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $f(0) = 1 > 0$, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $\mathbb{R}^-$.
   - Como $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = e - a < 0$, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $[0, 1]$.
   - Como $f(1) = e - a < 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $[1, \infty[$.

2. Demuestra que $x = g_1(x) = \sqrt{\frac{e^x}{a}}$ y $x = g_2(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{a}}$ son ecuaciones equivalentes a la de partida.

   Partiendo de las ecuaciones dadas, elevamos al cuadrado ambos lados, llegando en ambos casos a:

   $$x^2 = \frac{e^x}{a} \iff a \cdot x^2 = e^x \iff e^x - ax^2 = 0$$

   Por tanto, efectivamente son equivalentes. La ecuación $x = g_1(x)$ tiene sentido para $x \geqslant 0$ y la ecuación $x = g_2(x)$ para $x \leqslant 0$.

3. Toma $a = 3$. Demuestra la convergencia local hacia la raíz próxima a $-0{,}5$ partiendo de $x_0 = 0$ usando $g_2(x)$ y realiza dos iteraciones.

   Trabajaremos en el intervalo $[-1, 0]$. Veamos que $g_2([-1, 0]) \subset [-1, 0]$. Para ello, como $g_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$, calculamos su derivada:

   $$g_2'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{e^x}{a}}} \cdot \frac{e^x}{a} = -\frac{e^x}{2a\sqrt{\frac{e^x}{a}}} < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, tenemos que g_2 es continua y estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$. Además, evaluamos g_2 en los extremos del intervalo:

$$g_2(-1) = -\sqrt{\frac{e^{-1}}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3e}} \approx -0{,}35$$
$$g_2(0) = -\sqrt{\frac{e^{0}}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0{,}58$$

Por tanto, $g_2\left([-1,0]\right) = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3e}}\right] \subset [-1,0]$. Por tanto, podemos considerar $g_2 : [-1,0] \to [-1,0]$. Veamos ahora que g_2 es una contracción en $[-1,0]$:

$$|g_2'(x)| = \left|\frac{e^x}{6\sqrt{\frac{e^x}{3}}}\right| = \frac{e^x}{6\sqrt{\frac{e^x}{3}}} \leqslant \frac{e^0}{6\sqrt{\frac{e^{-1}}{3}}} \approx 0{,}47 < 1 \qquad \forall x \in [-1,0]$$

Por tanto, g_2 es una contracción en $[-1,0]$. Por el Teorema del Punto Fijo, g_2 tiene un único punto fijo en $[-1,0]$. Además, la sucesión $x_{n+1} = g_2(x_n)$ converge a dicho punto fijo para cualquier $x_0 \in [-1,0]$.
Veamos ahora las primeras dos iteraciones tomando $x_0 = 0$:

n	x_n	$g_2(x_n)$
0	0	$-0{,}57735$
1	$-0{,}57735$	$-0{,}4325829$
2	$-0{,}4325829$	$-0{,}4650559$

4. Toma $a = 3$. Demuestra la convergencia local hacia la raíz próxima a 1 partiendo de $x_0 = 0$ usando $g_1(x)$ y realiza dos iteraciones.

Trabajaremos en el intervalo $[0,2]$. Veamos que $g_1\left([0,2]\right) \subset [0,2]$. Para ello, como $g_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$, calculamos su derivada:

$$g_1'(x) = -g_2'(x) = \frac{e^x}{2a\sqrt{\frac{e^x}{a}}} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, tenemos que g_1 es continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Además, evaluamos g_1 en los extremos del intervalo:

$$g_1(0) = -g_2(0) = \sqrt{\frac{e^0}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$$
$$g_1(2) = \sqrt{\frac{e^2}{3}} = \frac{e}{\sqrt{3}} \approx 1{,}5694$$

Por tanto, $g_1\left([0,2]\right) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{e}{\sqrt{3}}\right] \subset [0,2]$. Por tanto, podemos considerar $g_1 : [0,2] \to [0,2]$. Veamos ahora que g_1 es una contracción en $[0,2]$:

$$|g_1'(x)| = |g_2'(x)| = \frac{e^x}{6\sqrt{\frac{e^x}{3}}} < 1 \iff e^{2x} < 36 \cdot \frac{e^x}{3} \iff e^x < 12 \iff x < \ln 12 \approx 2{,}48$$

Por tanto, g_1 es una contracción en $[0, 2]$. Por el Teorema del Punto Fijo, g_1 tiene un único punto fijo en $[0, 2]$. Además, la sucesión $x_{n+1} = g_1(x_n)$ converge a dicho punto fijo para cualquier $x_0 \in [0, 2]$.
Veamos ahora las primeras dos iteraciones tomando $x_0 = 0$:

n	x_n	$g_1(x_n)$
0	0	0,57735
1	0,57735	0,770565
2	0,770565	0,848722

5. Toma $a = 3$. Comprueba que la raíz mayor que 1 está en $[3, 4]$. Demuestra la no convergencia hacia la raíz próxima a 4 partiendo de x_0 muy próximo a ella (pero diferente de ella) usando $g_1(x)$ y encuentra una función para la iteración funcional, alternativa a las anteriores que converja a la raíz cercana a 4. Partiendo de $x_0 = 3{,}98$ obtén x_1 y x_2 con el método propuesto.

   Evaluamos f en los extremos del intervalo $[3, 4]$:

$$f(3) = e^3 - 3 \cdot 3^2 = e^3 - 3^3 < 0$$
$$f(4) = e^4 - 3 \cdot 4^2 = e^4 - 3 \cdot 4^2 > 0$$

   Por tanto, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $[3, 4]$.

   Para estudiar la no convergencia hacia la raíz próxima a 4 partiendo de x_0 muy próximo a ella, anteriormente vimos que:

$$|g'(x)| < 1 \iff x < \ln 12 \approx 2{,}48$$

   Por tanto, como el punto fijo s está en $[3, 4]$, tenemos que $g'(s) > 1$. Por tanto, la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$ no converge a s si x_0 es muy próximo a s.

   Para encontrar una función que converja a la raíz próxima a 4, tenemos que:

$$f(x) = 0 \iff e^x = ax^2 \iff x = \ln(ax^2)$$

   Por tanto, consideramos la función $h(x) = \ln(3x^2)$. Veamos que $h([3, 5]) \subset [3, 5]$. Para ello, calculamos la derivada de h:

$$h'(x) = \frac{6x}{3x^2} = \frac{2}{x} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

   Por tanto, h es continua y estrictamente creciente en $[3, 5]$. Además, evaluamos h en los extremos del intervalo:

$$h(3) = \ln(3 \cdot 3^2) = \ln 27 \approx 3{,}3$$
$$h(5) = \ln(3 \cdot 5^2) = \ln 75 \approx 4{,}32$$

Por tanto, $h([3,5]) = [\ln 27, \ln 75] \subset [3,5]$. Por tanto, podemos considerar $h : [3,5] \to [3,5]$.
Veamos ahora que h es una contracción en $[3,5]$:

$$|h'(x)| = \left|\frac{2}{x}\right| = \frac{2}{x} < \frac{2}{3} < 1 \qquad \forall x \in [3,5]$$

Por tanto, h es una contracción en $[3,5]$. Por el Teorema del Punto Fijo, h tiene un único punto fijo en $[3,5]$. Además, la sucesión $x_{n+1} = h(x_n)$ converge a dicho punto fijo para cualquier $x_0 \in [3,5]$.
Veamos ahora las primeras dos iteraciones tomando $x_0 = 3{,}98$:

n	x_n	$h(x_n)$
0	3,98	3,861176
1	3,861176	3,800556
2	3,800556	3,7689

Ejercicio 1.1.2.2. Sea la ecuación $p(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 15{,}2 = 0$.

1. Prueba que no tiene ninguna raíz menor que 1.

   Como $p \in C^\infty(\mathbb{R})$, podemos calcular la derivada de p y estudiar su signo:

$$\begin{aligned} &p'(x) = 3x^2 - 16x + 20 = 0 \iff \\ &\iff x = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 20}}{2 \cdot 3} \iff x = \frac{16 \pm 4}{6} \iff x \in \{2, {}^{10}/_{3}\} \end{aligned}$$

   Por tanto, p es estrictamente creciente en $]-\infty, 2[$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} p(1) = 1 - 8 + 20 - 15{,}2 = -2{,}2 < 0 \\ \lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty \end{aligned}$$

   Por tanto, deducimos que p no tiene raíces menores que 1.

2. Prueba que Newton-Raphson converge partiendo de $x_0 = 0$ hacia la raíz más pequeña y realiza dos iteraciones.

   Tenemos que:

$$\begin{aligned} p(1) &= -2{,}2 < 0 \\ p(2) &= 8 - 32 + 40 - 15{,}2 = 0{,}8 > 0 \end{aligned}$$

   Por tanto, por el Teorema de Bolzano, p tiene una raíz en $[1,2]$, y sabemos que es única por ser p estrictamente creciente en $]-\infty, 2[$. Por último, es la raíz más pequeña por no tener ninguna raíz menor que 1. Comprobemos ahora que cumple las condiciones del Teorema de Convergencia del Método de Newton-Raphson en $[1,2]$:

   a) $p(1)p(2) < 0$.

b) $p'(x) \neq 0$ en $]1,2[$.

c) $p''(x) = 6x - 16$ no cambia de signo en $]1,2[$, ya que:

$$p''(x) = 6x - 16 = 0 \iff x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67 \notin \,]1,2[$$

d) $p(x_0)p''(x_0) = (-15{,}2) \cdot (-16) > 0$.

Por tanto, el método de Newton-Raphson converge en $[1,2]$ a la raíz más pequeña partiendo desde $x_0 = 0$. Este método genera la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 8x_n^2 + 20x_n - 15{,}2}{3x_n^2 - 16x_n + 20} = \\ &= \frac{2x_n^3 - 8x_n^2 + 15{,}2}{3x_n^2 - 16x_n + 20} \end{aligned}$$

Por tanto, las dos primeras iteraciones son:

n	x_n
0	0
1	0,76
2	1,196844

3. Calcula la sucesión de Sturm y decide si existen raíces múltiples.

Definimos:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= p(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - \frac{76}{5} \\ f_1(x) &= f_0'(x) = 3x^2 - 16x + 20 \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_2(x)$.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -8x^2 & +20x & -\frac{76}{5} & 3x^2 - 16x + 20 \\ \cline{5-5} -x^3 & +\frac{16}{3}x^2 & -\frac{20}{3}x & & \frac{1}{3}x - \frac{8}{9} \\ \cline{1-3} & -\frac{8}{3}x^2 & +\frac{40}{3}x & -\frac{76}{5} & \\ & \frac{8}{3}x^2 & -\frac{128}{9}x & +\frac{160}{9} & \\ \cline{2-4} & & -\frac{8}{9}x & +\frac{116}{45} & \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -45 \cdot R(f_0(x), f_1(x)) \\ &= -45 \cdot \left(-\frac{8}{9}x + \frac{116}{45} \right) \\ &= 40x - 116 \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_3(x)$.

$$\begin{array}{rrr|l} 3x^2 & -16x & +20 & 40x - 116 \\ \cline{4-4} -3x^2 & +\frac{87}{10}x & & \frac{3}{40}x - \frac{73}{400} \\ \cline{1-2} & -\frac{73}{10}x & +20 & \\ & \frac{73}{10}x & -\frac{2117}{100} & \\ \cline{2-3} & & -\frac{117}{100} & \end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= -\frac{100}{117} \cdot R(f_1(x), f_2(x)) \\
&= -\frac{100}{117} \cdot \left(-\frac{117}{100}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión de Sturm es:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= x^3 - 8x^2 + 20x - 15{,}2 \\
f_1(x) &= 3x^2 - 16x + 20 \\
f_2(x) &= 40x - 116 \\
f_3(x) &= 1
\end{aligned}$$

Estudiemos ahora la existencia de raíces múltiples. Por el algoritmo extendido de euclídes, sabemos que:

$$\text{mcd}(f_0, f_1) = \text{mcd}(p, p') = 1$$

Supongamos ahora que existe una raíz múltiple de multiplicidad $m > 1$. Entonces:

$$\begin{aligned}
p(x) &= (x - x_0)^m \cdot q(x) \\
p'(x) &= (x - x_0)^{m-1} \left[m \cdot q(x) + (x - x_0)q'(x)\right]
\end{aligned}$$

Entonces, $(x - x_0)^{m-1}$ divide a p, p', lo que contradice que $\text{mcd}(p, p') = 1$. Por tanto, no existen raíces múltiples. De forma general, como el último resto no nulo es contante, entonces no existen raíces múltiples.

4. Separa las raíces reales de dicha ecuación.

   En primer lugar, buscamos acotar las raíces reales. Tenemos:

   $$\alpha = 20 \Longrightarrow |s| \leqslant 21$$

   Por tanto, sabemos que todas las raíces reales están en $[-21, 21]$. Por el primer apartado, sabemos que están en $[1, 21]$. Separamos ahora las raíces:

x	$\text{sgn}(f_0(x))$	$\text{sgn}(f_1(x))$	$\text{sgn}(f_2(x))$	$\text{sgn}(f_3(x))$	Nº Cambios Signo
1	$-$	$+$	$-$	$+$	3
2	$+$	0	$-$	$+$	2
3	$-$	$-$	$+$	$+$	1
4	$+$	$+$	$+$	$+$	0
21	$+$	$+$	$+$	$+$	0

   Por tanto, tenemos una raíz en $[1, 2]$, otra en $[2, 3]$ y otra en $[3, 4]$.

Ejercicio 1.1.2.3. Sea la ecuación $f(x) = e^{x-1} - ax^3 = 0$ siendo $a > 1$.

1. Demuestra que tiene al menos una raíz en $[0, 1]$.

   Como f es continua, podemos aplicar el Teorema de Bolzano. Evaluamos f en los extremos del intervalo:

$$f(0) = e^{-1} > 0$$
$$f(1) = e^{0} - a = 1 - a < 0$$

   Por tanto, por el Teorema de Bolzano, f tiene al menos una raíz en $[0, 1]$.

2. A partir de ahora considera $a = 2$. Calcula las dos primeras aproximaciones x_1 y x_2 obtenidas con bisección (siendo $x_0 = 0{,}5$). Indica el error máximo que se comete con x_2.

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1	0,5	0,3565
1	0,5	1	0,75	−0,0649
2	0,5	0,75	0,625	0,1990

   El error máximo que se comete con x_2 es:

$$|e_2| < \frac{1-0}{2^{2+1}} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

3. Realiza dos iteraciones con el método de la secante tomando como valores iniciales (o semillas) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Debes calcular x_2 y x_3.

   El método de la secante se define como:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \\ &= x_n - \frac{(e^{x_n - 1} - 2x_n^3)(x_n - x_{n-1})}{e^{x_n-1} - 2x_n^3 - e^{x_{n-1}-1} + 2x_{n-1}^3} \end{aligned}$$

   Por tanto, las dos primeras iteraciones son:

n	x_n
0	0
1	1
2	0,2689
3	0,4932

4. Evalúa la función en la segunda aproximación x_2 obtenida con bisección e indica, razonadamente con los resultados que se te han pedido, si se puede asegurar, o no, que la segunda aproximación obtenida con bisección está más cerca de la raíz que la segunda aproximación obtenida con la secante.

   Evaluamos f en x_2 obtenido con el método de bisección:

$$f(x_2) = f(0{,}625) = 0{,}199 > 0$$

Además, sabemos que $f(0{,}75) < 0$. Por tanto, si la raíz es s:

$$x_2 = 0{,}625 < s < 0{,}75$$

Como la segunda iteración del método de secante es $x_3 = 0{,}4932$, tenemos que:

$$x_3 = 0{,}4932 < x_2 = 0{,}625 < s < 0{,}75$$

Por tanto, la segunda aproximación obtenida con bisección está más cerca de la raíz que la segunda aproximación obtenida con la secante.

Ejercicio 1.1.2.4. Considera la ecuación $x^2 = a$ siendo $a > 0$.

1. Se pretende usar el método de Newton-Raphson en la ecuación anterior para hallar la raíz cuadrada de a. Deduce que el método se puede expresar, en este caso, de la forma
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

   Sea la función $f(x) = x^2 - a$. Aplicando el método de Newton-Raphson, tenemos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

2. Demuestra que el método es convergente partiendo de $x_0 = \text{máx}\{1, a\}$.

   Si $a = 1$, entonces $f(x_0) = f(1) = 0$. Por tanto, x_0 es raíz de f y hemos terminado. Suponemos por tanto en adelante que $a \neq 1$.

   Emplearemos el intervalo $[\text{mín}\{1, a\}, \text{máx}\{1, a\}]$. Calculamos la derivada de f:

$$f'(x) = 2x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

   Demostramos ahora los 4 puntos necesarios para el Teorema de Convergencia del Método de Newton-Raphson:

   a) $f(a)f(1) < 0$:

$$f(a) = a^2 - a = a(a-1)f(1) = 1 - a$$

   Por tanto:

$$f(a)f(1) = a(a-1)(1-a) = -a(a-1)^2 < 0$$

   b) $f'(x) \neq 0$ en $[\text{mín}\{1, a\}, \text{máx}\{1, a\}]$, pues el 0 no pertenece a dicho intervalo.

   c) $f''(x) = 2 > 0$ no cambia de signo en $\mathbb{R}$.

d) $f(x_0)f''(x_0)$

$$f(x_0)f''(x_0) = 2f(x_0) > 0 \iff x_0^2 > a \iff (\text{máx}\{1, a\})^2 > a$$

que sabemos que es cierto.

Por tanto, sabemos que el método de Newton-Raphson es convergente partiendo de $x_0 = \text{máx}\{1, a\}$.

3. Apoyándote en la expresión anterior obtén la segunda aproximación x_2 de la raíz cuadrada positiva de 13, partiendo de $x_0 = 13$.

   Tomando $a = 13$, la segunda aproximación de la raíz cuadrada positiva de 13 es:

n	x_n
0	13
1	7
2	4,428571

4. Determina la expresión del método de Newton-Raphson para la raíz cúbica de un número diferente de cero y aplícalo dos veces para aproximar la raíz cúbica de 13 partiendo de $x_0 = 13$.

   Sea la función $g(x) = x^3 - a$. Aplicando el método de Newton-Raphson, tenemos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = x_n - \frac{x_n}{3} + \frac{a}{3x_n^2} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$$

   Por tanto, tomando $a = 13$, las dos primeras iteraciones para aproximar la raíz cúbica de 13 son:

n	x_n
0	13
1	8,692308
2	5,852224

   Notemos que la convergencia a la raíz cúbica de 13 no la tenemos asegurada, sería necesario estudiarlo en este caso (similar al segundo apartado).

Ejercicio 1.1.2.5. Sea S la única solución en el dominio cuadrado $D = [0,1] \times [0,1]$ del sistema no lineal

$$\begin{cases} xy^2 + 4x - 1 = 0 \\ 4yx^2 + 6y - 1 = 0 \end{cases}$$

¿Es convergente a S la sucesión de iteraciones del método de iteración funcional definido por

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{4 + y_n^2} \\[2ex] y_{n+1} = \dfrac{1}{6 + 4x_n^2} \end{cases}$$

cualquiera que sea la aproximación inicial $(x_0, y_0) \in [0,1] \times [0,1]$?

Podemos reescribir el sistema dado como sigue:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4+y^2} \\ \\ y = \dfrac{1}{6+4x^2} \end{cases}$$

Definimos ahora la función siguiente:

$$\begin{array}{rccc} G = (G_1, G_2): & D & \longrightarrow & D \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(\dfrac{1}{4+y^2}, \dfrac{1}{6+4x^2}\right) \end{array}$$

Por tanto, la solución del sistema dado es el punto fijo de G. Veamos ahora si el método de iteración funcional converge a dicho punto fijo. En primer lugar, veamos que $G(D) \subset D$:

$$G_1(x,y) = \frac{1}{4+y^2} \in [0,1]$$
$$G_2(x,y) = \frac{1}{6+4x^2} \in [0,1]$$

Por tanto, $G(D) \subset D$. Veamos ahora que G es una contracción en D. Para ello, calculamos la matriz jacobiana de G:

$$J_G(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{2y}{(4+y^2)^2} \\ -\dfrac{8x}{(6+4x^2)^2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \forall (x,y) \in D$$

Además, tenemos que:

$$\frac{2y}{(4+y^2)^2} \leqslant \frac{2}{4^2} = \frac{1}{8} \qquad \forall y \in [0,1]$$
$$\frac{8x}{(6+4x^2)^2} \leqslant \frac{8}{6^2} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \qquad \forall x \in [0,1]$$

Por tanto, $\|J_G(x,y)\|_\infty \leqslant 2/9 < 1$. Como además sus derivadas parciales son continuas, G es una contracción en D. Por tanto, por el Teorema del Punto Fijo, G tiene un único punto fijo $S \in D$, y la sucesión:

$$X_{n+1} = G(X_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge a dicho punto fijo para cualquier $X_0 \in D$. Por tanto, la sucesión de iteraciones del método de iteración funcional converge a S para cualquier aproximación inicial $(x_0, y_0) \in [0,1] \times [0,1]$.

Ejercicio 1.1.2.6. Se sabe que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y posee un único cero en dicho intervalo. ¿Se puede aproximar siempre dicho cero mediante el método de bisección?

No, no siempre se puede aproximar el cero de una función mediante el método de bisección. Por ejemplo, sea la siguiente función:

$$\begin{array}{rrcl} f: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

En este caso, sabemos que hay una única raíz en $[-1, 1]$, que es $x = 0$. Sin embargo, el método de bisección no converge a dicha raíz, puesto que no hay un cambio de signo en dicho intervalo, por lo que no podemos construir la sucesión x_n que converge a la raíz. De hecho:

$$f(-1) = f(1) = 1 > 0$$

Por tanto, la condición que falla es que no hay cambio de signo en el intervalo $[-1, 1]$, por lo que no se puede aplicar el método de bisección en este caso.

Ejercicio 1.1.2.7. Se considera la ecuación $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$. Se pide:

1. Demuestra que la ecuación anterior tiene una única solución real s.

   Como $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, podemos calcular la derivada de f y estudiar su signo:

   $$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

   Estudiamos la monotonía de f, estudiando a su vez si hay raíces en dicho intervalo (por el Teorema de Bolzano):

   - <u>En $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$</u>: f es estrictamente creciente. Además:

     $$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$$

     Por tanto, f no tiene raíces en $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$.

   - <u>En $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$</u>: f es estrictamente decreciente. Además:

     $$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$$

     Por tanto, f no tiene raíces en $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$.

- En $\left]\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$: f es estrictamente creciente. Además:

  $$f(1) = -1 < 0 \qquad\qquad f(2) = 5 > 0$$

  Por tanto, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $]1, 2[$.

Por tanto, f tiene una única raíz real s, y sabemos que:

$$s \in]1, 2[$$

2. Encuentra un intervalo $[a, b]$ en el que al tomar cualquier punto $x_0 \in [a, b]$ como aproximación inicial del método de Newton-Raphson aplicado a $f(x)$ se asegure que la sucesión de iteraciones de dicho método converja a s con convergencia al menos cuadrática y demuestra que eso es así.

   Tomamos el intervalo $[1, 2]$. Estudiamos la función f en dicho intervalo:

   a) $f(1)f(2) < 0$.

   b) $f'(x) \neq 0$ en $[1, 2]$.

   $$\frac{1}{\sqrt{3}} < 1 \iff 1 < \sqrt{3} \iff 1 < 3$$

   Por tanto, $f'(x) \neq 0$ en $[1, 2]$.

   c) $f''(x) = 6x$ no cambia de signo en $[1, 2]$.

   d) Comprobemos la última condición:

   $$\left|\frac{f(1)}{f'(1)}\right| = \left|\frac{-1}{2}\right| < 1 \qquad \left|\frac{f(2)}{f'(2)}\right| = \frac{5}{11} < 1$$

   Por tanto, el método de Newton-Raphson converge a s con convergencia al menos cuadrática partiendo de cualquier punto $x_0 \in [1, 2]$.

   Para demostrar que efectivamente la convergencia es al menos cuadrática, consideramos la función g siguiente:

   $$\begin{array}{rccc} g: & [1, 2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

   Dada la raíz s de f, entonces:

   $$g(s) = s - \frac{f(s)}{f'(s)} = s - \frac{0}{f'(s)} = s$$

   Calculamos ahora la derivada de g:

   $$g'(s) = 1 - \frac{f'(s)f'(s) - f(s)f''(s)}{f'(s)^2} = 1 - \frac{f'(s)^2}{f'(s)^2} = 1 - 1 = 0$$

   Por tanto, el método iterativo de Newton-Raphson aplicado a f, que coincide con el método iterativo de punto fijo aplicado a g, converge a s con convergencia al menos cuadrática.

3. Calcula las dos primeras iteraciones del método de Newton-Raphson para resolver la ecuación dada tomando como aproximación inicial $x_0 = 1$.

   El método de Newton-Raphson se define como:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}$$

   Por tanto, las dos primeras iteraciones son:

n	x_n
0	1
1	1,5
2	1,347826

Ejercicio 1.1.2.8. Se pretende estimar el valor de $\sqrt[7]{2}$ usando un método iterativo.

1. Determina justificadamente una función f y un intervalo $[a, b]$ donde se pueda aplicar el método de bisección. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para conseguir un error inferior a 10^{-4}?

   Sea la función f siguiente:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^7 - 2 \end{array}$$

   Estudiamos la función f en el intervalo $[1, 2]$:

$$f(1) = -1 < 0 \qquad f(2) = 2^7 - 2 > 0$$

   Por tanto, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $]1, 2[$; y podemos aplicar el método de bisección en dicho intervalo. Calculamos el número de iteraciones necesarias para conseguir un error inferior a 10^{-4}:

$$e_n < \frac{2-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-4} \iff 2^{n+1} > 10^4 \iff$$
$$\iff n + 1 > \log_2(10^4) = 13{,}2877 \iff n > 12{,}2877$$

   Por tanto, necesitamos al menos 13 iteraciones para conseguir un error inferior a 10^{-4}.

2. Determina justificadamente un intervalo $[a, b]$ y un valor inicial x_0 que permita asegurar que el método de Newton-Raphson converge a $\sqrt[7]{2}$ y realiza 3 iteraciones del método.

   Consideramos el intervalo $[1, 2]$. Veamos que podemos aplicar el método de Newton-Raphson en dicho intervalo:

a) $f(1)f(2) < 0$.
b) $f'(x) = 7x^6$ no se anula en $[1, 2]$.
c) $f''(x) = 42x^5$ no cambia de signo en $[1, 2]$.
d) Comprobamos la última condición:

$$\left|\frac{f(1)}{f'(1)}\right| = \left|\frac{-1}{7}\right| < 1 \qquad \left|\frac{f(2)}{f'(2)}\right| = \frac{2^7-2}{7\cdot 2^6} = \frac{2^6-1}{7\cdot 2^5} = \frac{63}{7\cdot 32} < 1$$

Por tanto, el método de Newton-Raphson converge a $\sqrt[7]{2}$ para cualquier semilla $x_0 \in [1, 2]$. Realizamos 3 iteraciones del método tomando $x_0 = 1$:

n	x_n
0	1
1	1,142857
2	1,107819
3	1,104127

3. Se propone el método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{8x_n + 3x_n^8}{6 + 4x_n^7}$$

Realiza 3 iteraciones del método empezando en el mismo valor x_0 del apartado anterior.

Realizamos 3 iteraciones del método propuesto:

n	x_n
0	1
1	1,1
2	1,1040893
3	1,1040895

4. ¿Cuál de los dos métodos converge más rápidamente a la solución? Justifica la respuesta.

En primer lugar, hemos de demostrar que si $s \in \mathbb{R}$ es una raíz de f, $f(s) = 0$, entonces s es un punto fijo de la función g definida como:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{8x + 3x^8}{6 + 4x^7} \end{array}$$

Tenemos que:

$$g(s) = \frac{8s + 3s^8}{6 + 4s^7} = \frac{8s + 3\cdot 2s}{6 + 4\cdot 2} = \frac{14s}{14} = s$$

De forma análoga, definimos la función h empleada en Newton-Raphson:

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

Tenemos que $h(s) = g(s) = s$. Estudiamos las primeras derivadas:

$$\begin{aligned}
g'(s) &= \frac{(8 + 8 \cdot 3s^7)(6 + 4s^7) - (8s + 3s^8)(28s^6)}{(6 + 4s^7)^2} = \\
&= \frac{8(1 + 3s^7)}{6 + 4s^7} - \frac{28\,(8s^7 + 3s^{14})}{(6 + 4s^7)^2} = \\
&= \frac{8(1 + 3 \cdot 2)}{6 + 4 \cdot 2} - \frac{28\,(8 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2)}{(6 + 4 \cdot 2)^2} = 0 \\
h'(s) &= 1 - \frac{f'(s)f'(s) - f(s)f''(s)}{f'(s)^2} = \frac{f(s)f''(s)}{f'(s)^2} = 0
\end{aligned}$$

Como $g, h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ y s es un punto fijo de ambas funciones, entonces sabemos que ambos métodos convergen a la raíz s con convergencia al menos cuadrática. Estudiamos si convergerán con orden cúbico:

$$\begin{aligned}
g''(s) = 8 \cdot &\frac{3 \cdot 7s^6(6 + 4s^7) - (1 + 3s^7)(4 \cdot 7s^6)}{(6 + 4s^7)^2} - \\
&- 28 \cdot \frac{[8 \cdot 7s^6 + 3 \cdot 14s^{13}](6 + 4s^7) - [8s^7 + 3s^{14}] \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7s^6}{(6 + 4s^7)^3} = \\
= 8 \cdot &\frac{3 \cdot 7s^6 \cdot 14 - 7(4 \cdot 7s^6)}{14^2} - 28 \cdot \frac{[8 \cdot 7s^6 + 3 \cdot 28s^6]14 - 28 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7s^6}{14^3} = \\
= 4&s^6 - 4s^6 = 0 \\
h''(s) = &\frac{[f'(s)f''(s) + f(s)f'''(s)]f'(s)^2 - 2f(s)f''(s)f'(s)f''(s)}{f'(s)^4} = \\
= &\frac{[f'(s)f''(s) + \cancelto{0}{f(s)}f'''(s)]f'(s) - 2\cancelto{0}{f(s)}f''(s)^2}{f'(s)^3} = \\
= &\frac{[f'(s)f''(s)]f'(s)}{f'(s)^3} = \frac{f''(s)}{f'(s)} = \frac{7 \cdot 6 \cdot s^5}{7 \cdot s^6} = \frac{6}{s} \neq 0
\end{aligned}$$

Por tanto, el método de Newton-Raphson converge a s con convergencia al menos cuadrática, mientras que el método propuesto converge a s con convergencia al menos cúbica. Por tanto, el método propuesto converge más rápidamente a la solución.

Ejercicio 1.1.2.9. Relacionado con la Sucesión de Sturm:

1. Sea $\{f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$ una sucesión de Sturm en el intervalo $[a, b]$ y $k_i \in \mathbb{R}$ con $k_i > 0$ para $i = 0, \ldots, m$. Demuestra que si se define $\tilde{f}_i = k_i f_i$, entonces $\left\{\tilde{f}_0(x), \tilde{f}_1(x), \ldots, \tilde{f}_m(x)\right\}$ es también una sucesión de Sturm en $[a, b]$.

   En primer lugar, como el producto de funciones continuas por una constante es una función continua, $\tilde{f}_i \in \mathcal{C}[a, b]$. Hemos de comprobar ahora las 4 propiedades de la sucesión de Sturm:

   a) Como $f_0 \in \mathcal{C}^1[a, b]$, entonces $\tilde{f}_0 = k_0 f_0 \in \mathcal{C}^1[a, b]$.

b) Tenemos que:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_0(x) = k_0 f_0(x) = 0 \iff f_0(x) = 0 \Longrightarrow f_0'(x)f_1(x) \neq 0 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \tilde{f}_0'(x)\tilde{f}_1(x) = k_0k_1f_0'(x)f_1(x) \neq 0\end{aligned}$$

donde hemos usado que $k_0, k_1 > 0$.

c) Fijado $j = 1, \dots, m-1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_j(x) = k_j f_j(x) = 0 \iff f_j(x) = 0 \Longrightarrow f_{j-1}(x)f_{j+1}(x) \neq 0 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \tilde{f}_{j-1}(x)\tilde{f}_{j+1}(x) = k_{j-1}k_{j+1}f_{j-1}(x)f_{j+1}(x) \neq 0\end{aligned}$$

donde hemos usado que $k_{j-1}, k_{j+1} > 0$.

d) $\tilde{f}_m(x) = k_m f_m(x) \neq 0$ en $[a, b]$.

Por tanto, $\left\{\tilde{f}_0(x), \tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_m(x)\right\}$ es una sucesión de Sturm en $[a, b]$.

2. Dado el polinomio $p(x) = x^3 - x + 1$, determina justificadamente un intervalo en el que estén contenidas todas sus raíces.

   Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ el máximo de los valores absolutos de los coeficientes de p; es decir, $\alpha = \text{máx}\{1, 1, 1\} = 1$. Por el Teorema de Acotación de Raíces, sabemos que todas las raíces de p están contenidas en el intervalo $[-1-\alpha, 1+\alpha] = [-2, 2]$.

3. Construye una sucesión de Sturm para el polinomio p y utilízala para determinar el número de raíces reales así como intervalos de amplitud 1 en los que se encuentran.

   Definimos:

$$\begin{aligned}f_0(x) &= x^3 - x + 1 \\ f_1(x) &= 3x^2 - 1\end{aligned}$$

   Calculamos ahora $f_2(x)$.

$$\begin{array}{rl|l} x^3 & -x+1 & 3x^2-1 \\ \cline{3-3} -x^3 + \frac{1}{3}x & & \frac{1}{3}x \\ \hline & -\frac{2}{3}x + 1 & \end{array}$$

   Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned}f_2(x) &= -3 \cdot R(f_0(x), f_1(x)) \\ &= -3 \cdot \left(-\frac{2}{3}x + 1\right) \\ &= 2x - 3\end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_3(x)$.

$$\begin{array}{rrr|l}
3x^2 & & -1 & 2x-3 \\ \cline{4-4}
-3x^2+\frac{9}{2}x & & & \frac{3}{2}x+\frac{9}{4} \\ \cline{1-2}
 & \frac{9}{2}x & -1 & \\
 & -\frac{9}{2}x & +\frac{27}{4} & \\ \cline{2-3}
 & & \frac{23}{4} &
\end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= -\frac{4}{23} \cdot R(f_1(x), f_2(x)) \\
&= -\frac{4}{23} \cdot \left(\frac{23}{4}\right) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión de Sturm para el polinomio p es:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= x^3 - x + 1 \\
f_1(x) &= 3x^2 - 1 \\
f_2(x) &= 2x - 3 \\
f_3(x) &= -1
\end{aligned}$$

Separamos ahora las raíces:

x	$\operatorname{sgn}(f_0(x))$	$\operatorname{sgn}(f_1(x))$	$\operatorname{sgn}(f_2(x))$	$\operatorname{sgn}(f_3(x))$	Nº Cambios Signo
-2	$-$	$+$	$-$	$-$	2
-1	$+$	$+$	$-$	$-$	1
0	$+$	$-$	$-$	$-$	1
1	$+$	$+$	$-$	$-$	1
2	$+$	$+$	$+$	$-$	1

Por tanto, p tiene una única raíz real, y está contenida en el intervalo $[-2, -1]$.

4. Realiza dos iteraciones del método de la secante para calcular de forma aproximada el valor de la raíz más pequeña justificando la convergencia.

Tomemos como semillas los extremos del intervalo, $x_0 = -2$ y $x_1 = -1$. El método de la secante se define, para $n \geqslant 1$, como:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Realizamos dos iteraciones del método de la secante:

n	x_n	$f(x_n)$
0	-2	-5
1	-1	1
2	$-7/6$	0,578704
3	3,101627	

Observación. Con los conocimientos vistos, no podemos asegurar la convergencia del método de la secante.

Ejercicio 1.1.2.10. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

1. Se pretende resolver la ecuación $f(x) = 0$ utilizando el método de Newton-Raphson sabiendo que es convergente localmente ¿Qué debe cumplir (condición suficiente, no necesaria) la función f para que dicho método tenga convergencia local al menos cúbica?

   Sea I el intervalo de convergencia en el que además se encuentra la raíz s de f. Supongamos que $f \in \mathcal{C}^4(I)$ (algo que no es muy restrictivo por las funciones que se suelen estudiar en cálculo numérico).

   Definimos la función g auxiliar siguiente:

$$\begin{array}{rccc} g: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

   Vemos que el método de Newton-Raphson para f consiste en el método iterativo para g. Por tanto, estudiaremos el orden de convergencia para g. Como $f \in \mathcal{C}^4(I)$, entonces, $g \in \mathcal{C}^3(I)$. Calculamos las derivadas de g:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$
$$g''(x) = \frac{[f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x)]f'(x)^2 - 2f(x)f''(x)f'(x)f''(x)}{f'(x)^4}$$

   Supongamos ahora que $f'(s) = 0$, es decir, que no se trata de una raíz simple. Distinguimos casos, donde m es la multiplicidad de la raíz s:

   - <u>$m = 2$</u>: $f(x) = (x-s)^2 q(x)$ con $q(s) \neq 0$. Entonces:

$$f'(x) = 2(x-s)q(x) + (x-s)^2 q'(x) = (x-s)[2q(x) + (x-s)q'(x)]$$
$$f''(x) = 2q(x) + 2(x-s)q'(x) + (x-s)\left[2q'(x) + q'(x) + (x-s)q''(x)\right]$$

     Por tanto:

$$g'(x) = \frac{\cancel{(x-s)^2} q(x)\left[2q(x) + 2(x-s)q'(x) + (x-s)\left[2q'(x) + q'(x) + (x-s)q''(x)\right]\right]}{\cancel{(x-s)^2}[2q(x) + (x-s)q'(x)]^2}$$
$$g'(s) = \frac{2q^2(s)}{4q^2(s)} = \frac{1}{2} \neq 0$$

     Por tanto, el método de Newton-Raphson para f tiene convergencia lineal, pero no cuadrática (ni cúbica).

   - <u>$m \geqslant 3$</u>: $f(x) = (x-s)^m q(x)$ con $q(s) \neq 0$. Entonces:

$$f'(x) = (x-s)^{m-1} r(x) \qquad r(s) \neq 0$$
$$f''(x) = (x-s)^{m-2} t(x) \qquad t(s) \neq 0$$

Por tanto:

$$g'(x) = \frac{(x-s)^m q(x)\ (x-s)^{m-2} t(x)}{(x-s)^{2m-2} r(x)^2} = \frac{(x-s)^{2m-2} q(x) t(x)}{(x-s)^{2m-2} r(x)^2} = \frac{q(x)t(x)}{r(x)^2}$$
$$g'(s) = \frac{q(s)t(s)}{r(s)^2} \neq 0$$

Por tanto, el método de Newton-Raphson para f tiene convergencia lineal, pero no cuadrática (ni cúbica).

Por tanto, hemos de suponer $m = 1$, es decir, $f'(s) \neq 0$. En ese caso, los denominadores no se anulan, y tenemos que:

$$g'(s) = \frac{0}{f'(s)^2} = 0$$
$$g''(s) = \frac{f''(s)}{f'(s)} = 0 \iff f''(s) = 0$$

Por tanto, si $f \in \mathcal{C}^4(I)$, $f'(s) \neq 0$ y $f''(s) = 0$, entonces el método de Newton-Raphson para f tiene convergencia al menos cúbica.

2. Si sabemos que f tiene una única raíz real en el intervalo $[-1, 1]$, ¿Cuántas iteraciones del método de bisección hay que realizar para conseguir un error menor que 10^{-7}?

   Supongamos que podemos aplicar el método de bisección en dicho intervalo; es decir, que $f(-1)f(1) < 0$. Entonces:

$$|e_n| < \frac{1+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-7} \iff 2^n \geqslant 10^7 \iff n \geqslant 23{,}52$$

   Por tanto, serán necesarias, como máximo (ya que en iteraciones anteriores podría haber un error menor) 24 iteraciones, y a partir de entonces el error siempre será menor que 10^{-7}.

3. ¿Es el método de Newton-Raphson para resolver el sistema $F(X) = 0$ invariante frente a transformaciones lineales de F?

   Observación. Que sea invariante frente a transformaciones lineales quiere decir que la secuencia de aproximaciones $\{X_n\}$ es la misma si se aplica el método al sistema $F(X) = 0$ o si se aplica al sistema $AF(X) = 0$, siendo A una matriz no singular, partiendo del mismo vector inicial X_0.

   Consideramos el método de Newton-Raphson para resolver el sistema $F(X) = 0$:

$$X_{n+1} = X_n - JF(X_n)^{-1} F(X_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Dada ahora $A \in GL_k(\mathbb{R})$, consideramos ahora el método aplicado a $AF(X) = 0$:

$$X'_{n+1} = X'_n - J(AF)(X'_n)^{-1}(AF)(X'_n)$$

Por conocimientos de Análisis Matemático I, por ser F diferenciale, entonces AF es diferenciable con:

$$J(AF)(X) = A \cdot JF(X) \qquad \forall X \in \mathbb{R}^k$$

Además, como A es regular, si $JF(X)$ es regular, entonces $J(AF)(X)$ también lo es, cumpliendo:

$$(J(AF)(X))^{-1} = (A \cdot JF(X))^{-1} = JF(X)^{-1} \cdot A^{-1} \qquad \forall X \in \mathbb{R}^k$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} X'_{n+1} &= X'_n - J(AF)(X'_n)^{-1}(AF)(X'_n) = X'_n - JF(X'_n)^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot F(X'_n) \\ &= X'_n - JF(X'_n)^{-1} F(X'_n) \end{aligned}$$

Por tanto, y partiendo de la misma semilla $X_0 = X'_0$, el método de Newton-Raphson aplicado a $F(X) = 0$ es invariante frente a transformaciones lineales de F; es decir,

$$X_n = X'_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 1.1.2.11 (DGIIM 2023/2024)**.** El problema de trisección de un ángulo consiste en hallar las razones trigonométricas de $^{\alpha}/_{3}$, conociendo las de $\alpha \in]0, ^{\pi}/_{2}[$.

1. Llamando $x = \operatorname{sen}(^{\alpha}/_{3})$ y $a = \operatorname{sen}\alpha$, demuestra que x es solución de la ecuación $-4x^3 + 3x - a = 0$.

   Tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\alpha}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cos\left(\frac{2\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{3}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left[\cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right] + \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right] \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left[1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right] + 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left[1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) + 2\left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)\right] \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left[3 - 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right] = 3\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 4\operatorname{sen}^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) \end{aligned}$$

   Por tanto, $x = \operatorname{sen}(^{\alpha}/_{3})$ es solución de la ecuación $-4x^3 + 3x - a = 0$.

2. Construye una sucesión de Sturm de polinomios asociada al polinomio dado por $p(x) = -4x^3 + 3x - a$ y deduce que p tiene exactamente 3 raíces reales.

   Definimos:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= p(x) = -4x^3 + 3x - a \\ f_1(x) &= p'(x) = -12x^2 + 3 \end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_2(x)$.

$$\begin{array}{rr|l}
-4x^3 & +3x-a & -12x^2+3 \\ \cline{3-3}
4x^3 & -x & \frac{1}{3}x \\ \cline{1-2}
 & 2x-a &
\end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= -1 \cdot R(f_0(x), f_1(x)) \\
&= -1 \cdot \big(2x - a\big) \\
&= -2x + a
\end{aligned}$$

Calculamos ahora $f_3(x)$.

$$\begin{array}{rr|l}
-12x^2 & +3 & -2x+a \\ \cline{3-3}
12x^2-6ax & & 6x+3a \\ \cline{1-1}
-6ax & +3 & \\
6ax & -3a^2 & \\ \cline{1-2}
 & (3+-3a^2) &
\end{array}$$

Para simplificar, establecemos:

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= -\frac{1}{3} \cdot R(f_1(x), f_2(x)) \\
&= -\frac{1}{3} \cdot \big(3 + -3a^2\big) \\
&= -1 + a^2
\end{aligned}$$

Además, como $\alpha \in]0, \pi/2[$, entonces $a \in]0, 1[$, por lo que $-1 + a^2 < 0$. Por tanto, la sucesión de Sturm para el polinomio p es:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= -4x^3 + 3x - a \\
f_1(x) &= -12x^2 + 3 \\
f_2(x) &= -2x + a \\
f_3(x) &= -1 + a^2
\end{aligned}$$

Para ver cuántas raíces reales tiene, en primer lugar hemos de acotarlas. Definimos:

$$\alpha = \text{máx}\left\{\frac{3}{4}, \frac{a}{4}\right\} = \frac{3}{4}$$

Por el Teorema de Acotación de Raíces, sabemos que todas las raíces de p están contenidas en el intervalo $[-1-\alpha, 1+\alpha] = \left[-\dfrac{7}{4}, \dfrac{7}{4}\right]$.

Para deducir cuántas raíces reales tiene, hemos de estudiar los cambios de signo de la sucesión de Sturm en los extremos del intervalo:

x	$\mathrm{sgn}(f_0(x))$	$\mathrm{sgn}(f_1(x))$	$\mathrm{sgn}(f_2(x))$	$\mathrm{sgn}(f_3(x))$	Nº Cambios Signo
-2	$+$	$-$	$+$	$-$	3
0	$-$	$+$	$+$	$-$	2
$a/2$	$+$	$+$	0	$-$	1
1	$-$	$-$	$-$	$-$	0
2	$-$	$-$	$-$	$-$	0

donde las evaluaciones más problemáticas han sido:

$$\begin{aligned}
f_0\left(a/2\right) &= -4\left(\frac{a}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{a}{2}\right) - a = -\frac{a^3}{2} + \frac{3a}{2} - a = \frac{a}{2}(1-a^2) > 0 \\
f_1\left(a/2\right) &= -12\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3 = -3a^2 + 3 = 3(1-a^2) > 0 \\
f_2\left(a/2\right) &= -2 \cdot \frac{a}{2} + a = -a + a = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, p tiene exactamente 3 raíces reales.

3. Demuestra que $\mathrm{sen}\left(\alpha/3\right)$ es la única solución de la ecuación $p(x) = 0$, en el intervalo $]0, a/2[$ y que, tomando como valores iniciales $x_0 = a/3$ o $x_0 = a/2$, el método de Newton-Raphson converge.

   Sabemos que $\mathrm{sen}\left(\alpha/3\right)$ es solución de la ecuación $p(x) = 0$, y además sabemos que la solución del intervalo $]0, a/2[$ es única. Por tanto, tan solo nos queda demostrar que $\mathrm{sen}\left(\alpha/3\right) \in]0, a/2[$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{2} > \mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) &\iff \mathrm{sen}\,\alpha = 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 4\,\mathrm{sen}^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) > 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) \iff \\
&\iff 3 - 4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) > 2 \iff \mathrm{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) < \frac{1}{4} \iff \\
&\iff \mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) < \frac{1}{2} \iff \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{6} \iff \alpha < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

   Por tanto, $\mathrm{sen}\left(\alpha/3\right) \in]0, a/2[$, y te tiene demostrado que es la única solución de la ecuación $p(x) = 0$ en dicho intervalo.

   Comprobamos ahora que el método de Newton-Raphson converge para $x_0 = a/3$ y $x_0 = a/2$. Para ello, calculamos $p'(x)$:

$$p'(x) = -12x^2 + 3 = 0 \iff x = \pm\frac{1}{2}$$

   Comprobamos las 4 condiciones de convergencia para aplicar el método de Newton-Raphson en el intervalo $[0, a/2]$:

   a) $p(0)p(a/2) < 0$ se tiene, como hemos comprobado al estudiar los cambios de signo de la sucesión de Sturm.

   b) $p'(x) \neq 0$ para $x \in [0, a/2]$ por ser $a < 1$.

   c) $p''(x)$ no cambia de signo en $[0, a/2]$.

d) Comprobemos la última condición:

$$\begin{aligned}
p(0) &= -a \\
p'(0) &= 3 \\
p\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{a}{2}(1-a^2) \\
p'\left(\frac{a}{2}\right) &= 3(1-a^2)
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\left|\frac{p(0)}{p'(0)}\right| = \frac{a}{3} < \frac{a}{2}$$
$$\left|\frac{p\left(a/2\right)}{p'\left(a/2\right)}\right| = \frac{a/2(1-a^2)}{3(1-a^2)} = \frac{a}{6} < \frac{a}{2}$$

Por tanto, el método de Newton-Raphson converge para todo $x_0 \in [0, a/2]$, y en particular para $x_0 = a/3$ y $x_0 = a/2$.

4. Para resolver la ecuación anterior, se propone el método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{a}{3-4x_n^2}$$

Estudia bajo qué condiciones el método converge localmente a la solución. ¿Cuál de los dos métodos converge más rápidamente?

Vemos en primer lugar lo siguiente:

$$\frac{a}{2} < \frac{3}{4} \iff a < \frac{3}{2}$$

que se tiene de forma directa. Por tanto, podemos definir la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} g: & [0, a/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{a}{3-4x^2} \end{array}$$

Tenemos que $g \in \mathcal{C}^1\left([0, a/2]\right)$, y que:

$$|g'(x)| = \left|\frac{-8ax}{(3-4x^2)^2}\right| = \frac{8a|x|}{(3-4x^2)^2} \leqslant \frac{8a \cdot a/2}{(3-4\cdot(a/2)^2)^2} = \frac{4a^2}{(3-a^2)^2} < \frac{4}{(3-1)^2} = 1 \qquad \forall x \in [0, a/2]$$

Por tanto, el método propuesto converge localmente a la única solución de la ecuación $p(x) = 0$ en el intervalo $[0, a/2]$.

Respecto al orden de convergencia, como p tiene tres raíces reales sabemos que la multiplicidad de cada una de ellas es simple, por lo que el orden de convergencia es cuadrático. Por otro lado, para que este método tenga convergencia cuadrática es necesario que $g'(s) = 0$, siendo s la solución de la ecuación $p(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
g'(x) = 0 &\iff x = 0 \\
g(0) = 0 &\iff a = \operatorname{sen}\alpha = 0
\end{aligned}$$

No obstante, esto no es posible, ya que $\alpha \in]0, \pi/2[$. Por tanto, $g'(s) \neq 0$, y el método de Newton-Raphson converge más rápidamente que el método propuesto.

5. Tomando $a = 1/2$, realiza una iteración del método de Newton-Raphson partiendo de $x_0 = 1/6$ para obtener una aproximación de $\operatorname{sen}(\pi/18)$.

   Tomamos $a = 1/2$, $x_0 = 1/6$ y aplicamos una iteración del método de Newton-Raphson:

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = \frac{1}{6} - \frac{-4\left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2}}{-12\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3} =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{-1/54 + 1/2 - 1/2}{-1/3 + 3} = \frac{1}{6} + \frac{3}{54 \cdot 8} = \frac{25}{144} \approx 0{,}173611$$

n	x_n
0	$1/6$
1	0,173611

1.2. Derivación e integración numérica

1.2.1. Relación 1. Derivación Numérica

Ejercicio 1.2.1.1.

1. Use el método interpolatorio para obtener la fórmula de diferencia progresiva en dos nodos para aproximar $f'(a)$. ¿Cuál es el grado de exactitud de dicha fórmula? Justifique la respuesta.

   Supongamos que queremos aproximar $f'(a)$ mediante una fórmula de diferencia progresiva en dos nodos; es decir, sean los nodos $x_0 = a, x_1 = a+h$. Calculamos los polinomios básicos de Lagrange:

   $$\begin{aligned}
   \ell_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x-(a+h)}{a-(a+h)} = \frac{x-a-h}{-h} = \frac{a+h-x}{h} \\
   \ell_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x-a}{a+h-a} = \frac{x-a}{h} \\
   \ell_0'(x) &= {}^{-1}/_h \\
   \ell_1'(x) &= {}^{1}/_h
   \end{aligned}$$

   Por tanto, sabemos que:

   $$\begin{aligned}
   f(x) &= f(a)\ell_0(x) + f(a+h)\ell_1(x) + E(x) \\
   f'(x) &= f(a)\ell_0'(x) + f(a+h)\ell_1'(x) + E'(x)
   \end{aligned}$$

   Además, el error cometido al interpolar f en $a, a+h$ mediante dos nodos es:

   $$\begin{aligned}
   E(x) &= f[a, a+h, x]\Pi(x) \\
   E'(x) &= f[a, a+h, x, x]\Pi(x) + f[a, a+h, x]\Pi'(x)
   \end{aligned}$$

   Por tanto:

   $$\begin{aligned}
   f'(a) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + R(f) \\
   R(f) &= E'(a) = f[a, a+h, a]\Pi'(a) = -h \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \qquad \xi \in \,]a, a+h[
   \end{aligned}$$

   Por tanto, sabemos que esta fórmula es exacta en $\mathbb{P}_1$, pueso que en estos casos se anulará la segunda derivada. No es exacta en $\mathbb{P}_2$ porque el error no se anula.

2. Utilice la fórmula de Taylor para hallar la fórmula mencionada en el apartado anterior y la expresión de su error cuando $f \in C^2[a, a+h]$.

   Desaroollamos f en cada uno de los nodos alrededor del punto a hasta el segundo término:

   $$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(\xi_1) \qquad \xi_1 \in \,]a, a+h[$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi_1) \qquad \xi_1 \in \,]a, a+h[$$

3. Use el método interpolatorio para obtener la fórmula de diferencia centrada en dos nodos para aproximar $f'(a)$. ¿Cuál es el grado de exactitud de dicha fórmula? Justifique la respuesta.

   Supongamos que queremos aproximar $f'(a)$ mediante una fórmula de diferencia centrada en dos nodos; es decir, sean los nodos $x_0 = a - h, x_1 = a + h$. Calculamos los polinomios básicos de Lagrange:

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - (a + h)}{a - h - (a + h)} = \frac{x - a - h}{-2h} \\
\ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - (a - h)}{a + h - (a - h)} = \frac{x - a + h}{2h} \\
\ell_0'(x) &= {}^{-1}\!/_{2h} \\
\ell_1'(x) &= {}^{1}\!/_{2h}
\end{aligned}$$

   Por tanto, sabemos que:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a - h)\ell_0(x) + f(a + h)\ell_1(x) + E(x) \\
f'(x) &= f(a - h)\ell_0'(x) + f(a + h)\ell_1'(x) + E'(x)
\end{aligned}$$

   Además, el error cometido al interpolar f en $a - h, a + h$ mediante dos nodos es:

$$\begin{aligned}
E(x) &= f[a - h, a + h, x]\Pi(x) \\
E'(x) &= f[a - h, a + h, x, x]\Pi(x) + f[a - h, a + h, x]\Pi'(x)
\end{aligned}$$

   Por tanto:

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} + R(f) \\
R(f) &= E'(a) = f[a - h, a + h, a, a]\Pi(a) = -h^2\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}
\end{aligned}$$

   Por tanto, sabemos que esta fórmula es exacta en $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$, pueso que en estos casos se anulará la tercera derivada. Por tanto, el grado de exactitud de esta fórmula es 2.

4. Utilice la fórmula de Taylor para hallar la fórmula mencionada en el apartado anterior y la expresión de su error cuando $f'' \in C^3[a - h, a + h]$.

   Desaroollamos f en cada uno de los nodos alrededor del punto a hasta el segundo término:

$$\begin{aligned}
f(a + h) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1) \qquad \xi_1 \in]a, a + h[\\
f(a - h) &= f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2) \qquad \xi_2 \in]a - h, a[
\end{aligned}$$

Realizamos una combinación lineal de ambas expresiones, forzando a que el coeficiente de $f'(a)$ sea 1 y el coeficiente de $f(a)$ sea 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ h & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 1/2h \\ \alpha_1 = -1/2h \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} + R(f) \\ R(f) &= -\frac{h^2}{12} \left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right) \qquad \xi_1, \xi_2 \in\,]a-h, a+h[\\ &\overset{(*)}{=} -\frac{h^2}{6} f'''(\xi) \qquad \xi \in\,]a-h, a+h[\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos empleado el Teorema del Valor Medio.

Ejercicio 1.2.1.2. Usando el método de los coeficientes indeterminados deduzca la fórmula de diferencia centrada en tres nodos para aproximar $f'(a)$ y compruebe que coincide con la fórmula de diferencia centrada en dos nodos.

Queremos aproximar $f'(a)$ mediante una fórmula de diferencia centrada en tres nodos; es decir, sean los nodos $x_0 = a - h, x_1 = a, x_2 = a + h$. Como lo realizamos mediante el método de los coeficientes indeterminados, debemos imponer exactitud en $\{1, x, x^2\}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= (a-h)\alpha_0 + a\alpha_1 + (a+h)\alpha_2 \\ 2a &= (a-h)^2\alpha_0 + a^2\alpha_1 + (a+h)^2\alpha_2 \end{aligned}$$

Resolvemos ahora dicho sistema para hallar los coeficientes. Equivalentemente:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= a\left(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\right) - h\left(\alpha_0 - \alpha_2\right) \\ 2a &= a^2\left(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\right) + h^2\left(\alpha_0 + \alpha_2\right) - 2ah\left(\alpha_0 - \alpha_2\right) \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= -h\left(\alpha_0 - \alpha_2\right) \\ 2a &= h^2\left(\alpha_0 + \alpha_2\right) - 2ah\left(\alpha_0 - \alpha_2\right) \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= -h\left(\alpha_0 - \alpha_2\right) \\ 2a &= h^2\left(\alpha_0 + \alpha_2\right) + 2a \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\
1 &= -h\left(\alpha_0 - \alpha_2\right) \\
0 &= h^2\left(\alpha_0 + \alpha_2\right)
\end{aligned}$$

De la última ecuación, tenemos que $\alpha_0 = -\alpha_2$, y sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos que $\alpha_1 = 0$. Por tanto, vemos que el peso del nodo central es 0, lo que nos lleva a la fórmula de diferencia centrada en dos nodos. No obstante, comprobémoslo. De la segunda ecuación, tenemos que:

$$1 = -2h\alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_0 = -\frac{1}{2h} \Longrightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2h}$$

Por tanto, la fórmula de diferencia centrada en tres nodos para aproximar $f'(a)$ es:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

que coincide con la fórmula de diferencia centrada en dos nodos.

Ejercicio 1.2.1.3. Obtenga la fórmula de diferencia progresiva en tres nodos para aproximar $f'(a)$ calculando directamente sus coeficientes mediante la base de Lagrange del problema de interpolación unisolvente asociado a dicha fórmula. Halle la expresión del error para esta fórmula cuando $f \in C^4[a, a+2h]$.

Queremos aproximar $f'(a)$ mediante una fórmula de diferencia progresiva en tres nodos; es decir, sean los nodos $x_0 = a, x_1 = a+h, x_2 = a+2h$. Calculamos los polinomios básicos de Lagrange:

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x-(a+h)}{a-(a+h)} \cdot \frac{x-(a+2h)}{a-(a+2h)} = \frac{x-a-h}{-h} \cdot \frac{x-a-2h}{-2h} \\
\ell_1(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x-a}{a+h-a} \cdot \frac{x-(a+2h)}{(a+h)-(a+2h)} = \frac{x-a}{h} \cdot \frac{x-a-2h}{-h} \\
\ell_2(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 2}}^{2} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{x-a}{a+2h-a} \cdot \frac{x-(a+h)}{(a+2h)-(a+h)} = \frac{x-a}{2h} \cdot \frac{x-a-h}{h}
\end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas de los polinomios básicos de Lagrange:

$$\begin{aligned}
\ell_0'(x) &= \frac{x-a-2h+x-a-h}{2h^2} = \frac{2x-2a-3h}{2h^2} \\
\ell_1'(x) &= \frac{x-a-2h+x-a}{-h^2} = \frac{2x-2a-2h}{-h^2} \\
\ell_2'(x) &= \frac{x-a-h+x-a}{2h^2} = \frac{2x-2a-h}{2h^2}
\end{aligned}$$

Como buscamos aproximar $f'(a)$, evaluamos cada una de las derivadas de los polinomios básicos de Lagrange en a:

$$\ell_0'(a) = \frac{-3h}{2h^2} = -\frac{3}{2h}$$
$$\ell_1'(a) = \frac{-2h}{-h^2} = \frac{2}{h}$$
$$\ell_2'(a) = \frac{-h}{2h^2} = -\frac{1}{2h}$$

Por tanto, la fórmula de diferencia progresiva en tres nodos para aproximar $f'(a)$ es la siguiente:

$$f'(a) \approx -\frac{3}{2h}f(a) + \frac{2}{h}f(a+h) - \frac{1}{2h}f(a+2h)$$

Para el error, definimos:

$$\Pi(x) = \prod_{i=0}^{2}(x - x_i) = (x-a)(x-a-h)(x-a-2h)$$
$$\Pi'(x) = (x-a-h)(x-a-2h) + (x-a)(x-a-2h) + (x-a)(x-a-h)$$

Por tanto, el error cometido al interpolar f en $a, a+h, a+2h$ mediante tres nodos es:

$$E(x) = f[a, a+h, a+2h, x]\Pi(x)$$
$$E'(x) = f[a, a+h, a+2h, x, x]\Pi(x) + f[a, a+h, a+2h, x]\Pi'(x)$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} R(f) = E'(a) &= f[a, a+h, a+2h, a, a]\Pi(a) + f[a, a+h, a+2h, a]\Pi'(a) = \\ &= 2h^2 f[a, a+h, a+2h, a] = 2h^2 \cdot \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} = h^2 \cdot \frac{f^{(3)}(\xi)}{3} \qquad \xi \in \left]a, a+2h\right[\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.1.4. Se considera la fórmula de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_n$ siguiente:

$$f''(c) \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

con $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Demuestre que si $f \in C^{n+3}[a, b]$ con $[a, b]$ tal que $x_0, x_1, \ldots, x_n, c \in [a, b]$, entonces

$$R(f) = 2 \cdot \frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}\Pi(c) + 2 \cdot \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}\Pi'(c) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}\Pi''(c)$$

siendo $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \left]\text{mín}\{x_0, c\}, \text{máx}\{x_n, c\}\right[$ y $\Pi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Sabemos que el error cometido con la interpolación de f en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mediante $p \in \mathbb{P}_n$ es:

$$E(x) = f(x) - p(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\Pi(x)$$

Calculemos cada una de las derivadas de $E(x)$:

$$E'(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x]\Pi(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\Pi'(x)$$
$$E''(x) = 2f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x, x]\Pi(x) + 2f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x]\Pi'(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\Pi''(x)$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}R(f) &= L(f-p) = L(E) = E''(c) = \\ &= 2f[x_0, x_1, \ldots, x_n, c, c, c]\Pi(c) + 2f[x_0, x_1, \ldots, x_n, c, c]\Pi'(c) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, c]\Pi''(c) = \\ &= 2 \cdot \frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}\Pi(c) + 2 \cdot \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}\Pi'(c) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}\Pi''(c)\end{aligned}$$

con $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \left]\text{mín}\{x_0, c\}, \text{máx}\{x_n, c\}\right[$, donde hemos empleado que los nodos están ordenados; es decir, $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.

Ejercicio 1.2.1.5. Use el método de los coeficientes indeterminados para obtener la fórmula de diferencia regresiva en tres nodos para aproximar $f''(a)$. Halle la expresión del error de truncamiento para esta fórmula cuando $f \in C^5[a-2h, a]$.

Sabemos que la fórmula de diferencia regresiva en tres nodos para aproximar $f''(a)$ es de la forma:

$$f''(a) \approx \alpha_0 f(a-2h) + \alpha_1 f(a-h) + \alpha_2 f(a)$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ son los coeficientes que debemos determinar. Para ello, imponemos exactitud en $\mathbb{P}_2$:

$$\begin{aligned}0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 &= (a-2h)\alpha_0 + (a-h)\alpha_1 + a\alpha_2 \\ 2 &= (a-2h)^2\alpha_0 + (a-h)^2\alpha_1 + a^2\alpha_2\end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned}0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 &= a(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) - 2h\alpha_0 - h\alpha_1 \\ 2 &= a^2(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) + 4h^2\alpha_0 + h^2\alpha_1 - 4ah\alpha_0 - 2ah\alpha_1\end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned}0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 &= h(2\alpha_0 + \alpha_1) \\ 2 &= 2h^2\alpha_0 + h^2(2\alpha_0 + \alpha_1) - 2ah(2\alpha_0 + \alpha_1)\end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\left\{\begin{array}{ll} 0 & = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 & = 2\alpha_0 + \alpha_1 \\ 1 & = h^2\alpha_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \alpha_0 & = {}^1/_{h^2} \\ \alpha_1 & = -2\alpha_0 = {}^{-2}/_{h^2} \\ \alpha_2 & = -\alpha_0 - \alpha_1 = \alpha_0 = {}^1/_{h^2} \end{array}\right\}$$

Por tanto, la fórmula de diferencia regresiva en tres nodos para aproximar $f''(a)$ es:

$$f''(a) \approx \frac{1}{h^2} f(a-2h) - \frac{2}{h^2} f(a-h) + \frac{1}{h^2} f(a)$$

Para el error, definimos:

$$\begin{aligned}
\Pi(x) &= \prod_{i=0}^{2} (x-(a-ih)) = (x-a+2h)(x-a+h)(x-a) \\
\Pi'(x) &= (x-a+h)(x-a) + (x-a+2h)(x-a) + (x-a+2h)(x-a+h) \\
\Pi''(x) &= 2(x-a) + 2(x-a+h) + 2(x-a+2h)
\end{aligned}$$

Por el Ejercicio 1.2.1.4, puesto que $f \in C^5[a-2h, a]$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
R(f) &= 2 \cdot \frac{f^{(5)}(\xi_2)}{5!} \cancelto{0}{\Pi(a)} + 2 \cdot \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} \Pi'(a) + \frac{f^{(3)}(\xi_0)}{3!} \Pi''(a) = \\
&= 2 \cdot 2h^2 \cdot \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} + 6h \cdot \frac{f^{(3)}(\xi_0)}{3!} = \\
&= h^2 \cdot \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{6} + h \cdot f^{(3)}(\xi_0)
\end{aligned}$$

con $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \,]a-2h, a[$.

Ejercicio 1.2.1.6. Use la fórmula de Taylor para obtener, cuando se tenga que $f \in C^4[a-h, a+h]$, la fórmula de diferencia centrada en tres nodos para aproximar $f''(a)$ y la expresión de su error. ¿Cuál es el orden de precisión de esta fórmula? ¿Por qué?

Consideramos tres nodos, $x_0 = a-h, x_1 = a, x_2 = a+h$. Desarrollamos f en cada uno de los nodos alrededor del punto a. Podríamos desarrollar hasta el tercer término, pero vemos que al sumar el término de tercer orden se anulará. Por tanto, desarrollamos hasta el cuarto término:

$$\begin{aligned}
f(a-h) &= f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) - \frac{h^3}{6} f'''(a) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_1) \qquad \xi_1 \in \,]a-h, a[\\
f(a) &= f(a) \\
f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f'''(a) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_2) \qquad \xi_2 \in \,]a, a+h[
\end{aligned}$$

Multiplicamos la ecuación $i-$ésima por el coeficiente α_i y sumamos:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h) &= (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f(a) - h(\alpha_0 - \alpha_2) f'(a) + \\
&+ \frac{h^2}{2} (\alpha_0 + \alpha_2) f''(a) - \frac{h^3}{6} (\alpha_0 - \alpha_2) f'''(a) + \frac{h^4}{24} \left(\alpha_0 f^{(4)}(\xi_1) + \alpha_2 f^{(4)}(\xi_2) \right)
\end{aligned}$$

Usando el Teorema del Valor Medio, $\exists \xi \in \,]a-h, a+h[$ tal que:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h) &= (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f(a) - h(\alpha_0 - \alpha_2) f'(a) + \\
&+ \frac{h^2}{2} (\alpha_0 + \alpha_2) f''(a) - \frac{h^3}{6} (\alpha_0 - \alpha_2) f'''(a) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi) \cdot \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_2}
\end{aligned}$$

Imponemos ahora las siguientes igualdades, donde vemos por qué hemos tenido que desarrollar hasta el cuarto término:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_0 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, tenemos que $\alpha_0 = \alpha_2$, y sustituyendo en la tercera ecuación, obtenemos que $\alpha_0 = \alpha_2 = 1/2$. Por tanto, $\alpha_1 = -1$, y la ecuación anterior queda:

$$\alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h) = \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi)$$

Por tanto, la fórmula de diferencia centrada en tres nodos para aproximar $f''(a)$ es:

$$f''(a) \approx \frac{2\alpha_0}{h^2} f(a-h) + \frac{2\alpha_1}{h^2} f(a) + \frac{2\alpha_2}{h^2} f(a+h) = \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}$$

Respecto al error, tenemos que:

$$R(f) = -\frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi) \left(\frac{2}{h^2}\right) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

Por tanto, vemos que el orden de precisión de esta fórmula es 3, pues el error se anula en $\mathbb{P}_3$ pero no en $\mathbb{P}_4$.

Ejercicio 1.2.1.7.

1. Halle la fórmula de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$ de la forma

$$f'(a) \approx \alpha_0 f(a-h_1) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h_2)$$

con $h_1, h_2 > 0$, así como la expresión de su error de truncamiento cuando $f \in C^4[a-h_1, a+h_2]$. ¿Cuál es el grado de exactitud de esta fórmula? Justifique la respuesta.

Imponemos exactitud en $\{1, x, x^2\}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= (a-h_1)\alpha_0 + a\alpha_1 + (a+h_2)\alpha_2 \\ 2a &= (a-h_1)^2\alpha_0 + a^2\alpha_1 + (a+h_2)^2\alpha_2 \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= a(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) - h_1\alpha_0 + h_2\alpha_2 \\ 2a &= a^2(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_0 h_1 (h_1 - 2a) + \alpha_2 h_2 (h_2 + 2a) \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\
1 &= -h_1\alpha_0 + h_2\alpha_2 \\
2a &= \alpha_0 h_1 (h_1 - 2a) + \alpha_2 h_2 (h_2 + 2a)
\end{aligned}$$

De la segunda ecuación, obtenemos $h_2\alpha_2 = 1 + h_1\alpha_0$, y sustituyendo en la tercera ecuación, obtenemos:

$$2a = \alpha_0 h_1 (h_1 - 2a) + (1 + h_1\alpha_0)(h_2 + 2a) = \alpha_0 h_1^2 - \cancel{2a\alpha_0 h_1} + h_2 + 2a + h_1 h_2 \alpha_0 + \cancel{2a\alpha_0 h_1}$$

Por tanto:

$$0 = \alpha_0 h_1 (h_1 + h_2) + h_2 \Longrightarrow \alpha_0 = -\frac{h_2}{h_1 (h_1 + h_2)} \Longrightarrow \alpha_2 = \frac{h_1}{h_2 (h_1 + h_2)}$$

De la primera ecuación, obtenemos:

$$\alpha_1 = -\alpha_0 - \alpha_2 = \frac{h_2^2 - h_1^2}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)} = \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2}$$

Por tanto, la fórmula de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$ para aproximar $f'(a)$ es:

$$f'(a) \approx -\frac{h_2}{h_1 (h_1 + h_2)} f(a - h_1) + \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} f(a) + \frac{h_1}{h_2 (h_1 + h_2)} f(a + h_2)$$

Para el error, definimos:

$$\begin{aligned}
\Pi(x) &= \prod_{i=0}^{2} (x - (a + (i-1)h_i)) = (x - a - h_1)(x - a)(x - a + h_2) \\
\Pi'(x) &= (x - a)(x - a + h_2) + (x - a - h_1)(x - a + h_2) + (x - a - h_1)(x - a)
\end{aligned}$$

El error cometido al interpolar f en $a - h_1, a, a + h_2$ mediante tres nodos es:

$$\begin{aligned}
E(x) &= f[a - h_1, a, a + h_2, x]\Pi(x) \\
E'(x) &= f[a - h_1, a, a + h_2, x, x]\Pi(x) + f[a - h_1, a, a + h_2, x]\Pi'(x)
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$R(f) = E'(a) = f[a - h_1, a, a + h_2, a]\Pi'(a) = -h_1 h_2 \cdot \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \qquad \xi \in \,]a - h_1, a + h_2[$$

Por tanto, el grado de exactitud de esta fórmula es 2, pues el error se anula en $\mathbb{P}_2$ pero no en $\mathbb{P}_3$.

2. Use la tabla de valores

x	$f(x)$
0,7	$-0{,}1$
1,25	0,2
1,5	0,3
1,75	0,25

para dar valores aproximados de $f'(0{,}7)$, $f'(1{,}25)$, $f'(1{,}5)$ y $f'(1{,}75)$ utilizando para cada uno de ellos la fórmula de derivación numérica más adecuada. Indique la fórmula usada en cada caso y justifique su uso.

- Para $f'(0{,}7)$:
  En este caso, hemos de usar una fórmula progresiva. Empleamos la fórmula progresiva con dos nodos, usando $a = 0{,}7$, $h = 1{,}25 - 0{,}7 = 0{,}55$. Tenemos que:
  $$f'(0{,}7) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(1{,}25) - f(0{,}7)}{0{,}55} = \frac{0{,}2 + 0{,}1}{0{,}55} = \frac{0{,}3}{0{,}55} \approx 0{,}545455$$
- Para $f'(1{,}25)$:
  Empleamos la fórmula del apartado anterior, con $a = 1{,}25$, $h_1 = 1{,}25 - 0{,}7 = 0{,}55$, $h_2 = 1{,}5 - 1{,}25 = 0{,}25$. Tenemos que:
  $$\begin{aligned} f'(1{,}25) &\approx -\frac{0{,}25}{0{,}55 \cdot 0{,}8} f(0{,}7) + \frac{0{,}25 - 0{,}55}{0{,}55 \cdot 0{,}25} f(1{,}25) + \frac{0{,}55}{0{,}25 \cdot 0{,}8} f(1{,}5) \\ &\approx -\frac{0{,}25}{0{,}44}(-0{,}1) + \frac{-0{,}3}{0{,}1375}(0{,}2) + \frac{0{,}55}{0{,}2}(0{,}3) \approx 0{,}445455 \end{aligned}$$
- Para $f'(1{,}5)$:
  Empleamos la fórmula centrada con 2 nodos (o 3 nodos, puesto que hemos visto que es la misma) con $a = 1{,}5$, $h = 0{,}25$. Tenemos que:
  $$f'(1{,}5) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{f(1{,}75) - f(1{,}25)}{0{,}5} = \frac{0{,}25 - 0{,}2}{0{,}5} = \frac{0{,}05}{0{,}5} = 0{,}1$$
- Para $f'(1{,}75)$:
  Empleamos la fórmula regresiva con dos nodos, usando $a = 1{,}75$, $h = 0{,}25$. Tenemos que:
  $$f'(1{,}75) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h} = \frac{f(1{,}75) - f(1{,}5)}{0{,}25} = \frac{0{,}25 - 0{,}3}{0{,}25} = \frac{-0{,}05}{0{,}25} = -0{,}2$$

Ejercicio 1.2.1.8. Halle una cota del valor absoluto del error que se comete al aproximar la derivada de la función $f(x) = \cos^2 x$ en $x = 0{,}8$ mediante la correspondiente fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio que usa los valores de f en los puntos 0,6, 0,8 y 1.

Podríamos ver que se trata de una fórmula centrada en tres nodos, pero vamos a calcular directamente el error. Definimos:

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= (x - 0{,}6)(x - 0{,}8)(x - 1) \\ \Pi'(x) &= (x - 0{,}8)(x - 1) + (x - 0{,}6)(x - 1) + (x - 0{,}6)(x - 0{,}8) \end{aligned}$$

El error cometido al interpolar f en $0{,}6, 0{,}8, 1$ mediante tres nodos es:

$$\begin{aligned}
E(x) &= f[0{,}6, 0{,}8, 1, x]\Pi(x) \\
E'(x) &= f[0{,}6, 0{,}8, 1, x, x]\Pi(x) + f[0{,}6, 0{,}8, 1, x]\Pi'(x)
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$R(f) = E'(0{,}8) = f[0{,}6, 0{,}8, 1, 0{,}8]\Pi'(0{,}8) = -0{,}04 \cdot \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \qquad \xi \in \,]0{,}6, 1[$$

Para acotarlo, calculamos $f^{(3)}(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos^2 x \\
f'(x) &= -2\cos x \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} 2x \\
f''(x) &= -2\cos 2x \\
f^{(3)}(x) &= 4\operatorname{sen} 2x
\end{aligned}$$

Por tanto, una cota del error es:

$$|R(f)| = \left|-\frac{0{,}04}{6} \cdot 4\operatorname{sen}(2\xi)\right| \leqslant \frac{0{,}04}{6} \cdot 4 = \frac{2}{75} \approx 0{,}0266667$$

1.2.2. Relación 2. Derivación Numérica

Ejercicio 1.2.2.1.

1. Obtén la fórmula progresiva de derivación numérica de tipo interpolatorio clásico para aproximar $f'(a)$ a partir de $f(a)$ y $f(a+h)$, mediante desarrollo de Taylor de $f(a+h)$ en torno a a hasta el cuarto término.

   Buscamos obtener $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ tales que:

   $$f'(a) = \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(a+h) + R(f)$$

   Desarrollando en serie de Taylor $f(a)$ y $f(a+h)$ en torno a a hasta el cuarto término, tenemos:

   $$\begin{aligned} f(a) &= f(a) \\ f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(a) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

   donde $\xi \in \,]a, a+h[$. Multiplicando por α_0 y α_1 respectivamente y sumando, obtenemos:

   $$\alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(a+h) = (\alpha_0+\alpha_1)f(a) + \alpha_1 hf'(a) + \frac{\alpha_1 h^2}{2}f''(a) + \frac{\alpha_1 h^3}{6}f'''(a) + \frac{\alpha_1 h^4}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$\left\{\begin{array}{r} \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 \cdot h = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_0 = -\dfrac{1}{h} \\ \alpha_1 = \dfrac{1}{h} \end{array}\right\}$$

   Por lo tanto, la fórmula progresiva de derivación numérica de tipo interpolatorio clásico para aproximar $f'(a)$ a partir de $f(a)$ y $f(a+h)$ es:

   $$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + R(f)$$

   Respecto al error, tenemos que:

   $$R(f) = -\frac{h}{2}f''(a) - \frac{h^2}{6}f'''(a) - \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

2. Si notamos por $F(a,h)$ la aproximación de $f'(a)$ obtenida anteriormente, expresa el valor exacto de $f'(a)$ en función de $F(a,h)$ y los restantes términos en el desarrollo de Taylor.

   $$f'(a) = F(a,h) - \frac{h}{2}f''(a) - \frac{h^2}{6}f'''(a) - \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

3. A partir de una combinación de los valores $F(a,h)$ y $F(a,{}^h/_2)$ obtén una fórmula con mayor orden de precisión que $F(a,h)$.

   Sabemos que:

$$\begin{aligned} F(a,h) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ F(a,{}^h/_2) &= \frac{f(a+{}^h/_2)-f(a)}{{}^h/_2} = \frac{2\left(f(a+{}^h/_2)-f(a)\right)}{h} \end{aligned}$$

   Empleando lo obtenido para el error, pero usando ahora ${}^h/_2$, tenemos que:

$$f'(a) = F(a,{}^h/_2) - \frac{h}{4}f''(a) - \frac{h^2}{4!}f'''(a) - \frac{h^3}{8\cdot 4!}f^{(4)}(\xi)$$

   Multiplicamos por 2 esta nueva expresión, y le restamos la expresión anterior:

$$\begin{aligned} f'(a) &= 2f'(a) - f'(a) = \\ &= 2\left(F(a,{}^h/_2) - \frac{h}{4}f''(a) - \frac{h^2}{4!}f'''(a) - \frac{h^3}{8\cdot 4!}f^{(4)}(\xi)\right) - \\ &\qquad - \left(F(a,h) - \frac{h}{2}f''(a) - \frac{h^2}{6}f'''(a) - \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(\xi)\right) = \\ &= \left(2F(a,{}^h/_2) - \cancel{\frac{h}{2}f''(a)} - \frac{h^2}{12}f'''(a) - \frac{h^3}{4\cdot 4!}f^{(4)}(\xi)\right) - \\ &\qquad - \left(F(a,h) - \cancel{\frac{h}{2}f''(a)} - \frac{h^2}{6}f'''(a) - \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(\xi)\right) = \\ &= 2F(a,{}^h/_2) - F(a,h) + \frac{h^2}{12}f'''(a) - \frac{h^3}{4\cdot 4!}f^{(4)}(\xi) + \frac{h^3}{4!}f^{(4)}(\xi) = \\ &= 2F(a,{}^h/_2) - F(a,h) + \frac{h^2}{12}f'''(a) + \frac{3h^3}{4\cdot 4!}f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

   Como vemos, hemos conseguido una fórmula que, en vez de ser exacta en $\mathbb{P}_1$, es exacta en $\mathbb{P}_2$.

4. Aplica las dos fórmulas obtenidas para aproximar $f'(2)$ con $h = 0{,}1$ para la función $f(x) = \ln(x)$, $x \in [1,3]$.

Ejercicio 1.2.2.2. Para evaluar el funcional $L(f) = 2f'(a) - f''(a)$ se propone una fórmula del tipo

$$2f'(a) - f''(a) \approx \alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h):$$

1. Imponiendo exactitud en el espacio correspondiente halla la fórmula anterior para que sea de tipo interpolatorio clásico.

   En este caso, como hay 3 nodos, es necesario imponer exactitud en $\mathbb{P}_2$, o equivalentemente, en $\mathcal{L}\{1,x,x^2\}$. Por tanto, buscamos $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned} 2\cdot 0 - 0 &= \alpha_0\cdot 1 + \alpha_1\cdot 1 + \alpha_2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 - 0 &= \alpha_0\cdot(a-h) + \alpha_1\cdot a + \alpha_2\cdot(a+h) \\ 2\cdot 2a - 2 &= \alpha_0\cdot(a-h)^2 + \alpha_1\cdot a^2 + \alpha_2\cdot(a+h)^2 \end{aligned}$$

Por tanto, se trata de resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-h & a & a+h \\ (a-h)^2 & a^2 & (a+h)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4a-2 \end{pmatrix}$$

Planteamos la matriz ampliada, y aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a-h & a & a+h & 2 \\ (a-h)^2 & a^2 & (a+h)^2 & 4a-2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3' = F_3 - (a-h)F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a-h & a & a+h & 2 \\ 0 & ah & 2h(a+h) & 2(a+h-1) \end{array}\right) \xrightarrow{F_2' = F_2 - (a-h)F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & h & 2h & 2 \\ 0 & ah & 2h(a+h) & 2(a+h-1) \end{array}\right) \xrightarrow{F_3' = F_3 - aF_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & h & 2h & 2 \\ 0 & 0 & 2h^2 & 2(h-1) \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \dfrac{h-1}{h^2} \\ \alpha_1 = \dfrac{2 - 2\cdot\frac{h-1}{h}}{h} = \dfrac{2}{h^2} \\ \alpha_0 = -\dfrac{2+h-1}{h^2} = -\dfrac{1+h}{h^2} \end{cases}$$

Por tanto, al ser exacta en $\mathbb{P}_2$, la siguiente fórmula es de tipo interpolatorio clásico:

$$2f'(a) - f''(a) \approx -\frac{1+h}{h^2}f(a-h) + \frac{2}{h^2}f(a) + \frac{h-1}{h^2}f(a+h)$$

2. Obtén una expresión del error de la fórmula en función de unas o varias derivadas de la función de órdenes superiores a dos.

   Definimos en primer lugar:

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= (x-a+h)(x-a)(x-a-h) \\ \Pi'(x) &= (x-a)(x-a-h) + (x-a+h)(x-a-h) + (x-a+h)(x-a) \\ \Pi''(x) &= 2(x-a+h) + 2(x-a) + 2(x-a-h) \end{aligned}$$

   Sabemos que el error del polinomio de interpolación en los 3 nodos dados es:

$$E(x) = f[a-h, a, a+h, x]\Pi(x)$$

   Calculemos su derivada primera y segunda:

$$\begin{aligned} E'(x) &= f[a-h, a, a+h, x, x]\Pi(x) + f[a-h, a, a+h, x]\Pi'(x) \\ E''(x) &= 2f[a-h, a, a+h, x, x, x]\Pi(x) + 2f[a-h, a, a+h, x, x]\Pi'(x) + f[a-h, a, a+h, x]\Pi''(x) \end{aligned}$$

Evaluamos cada una de las derivadas en a:

$$\begin{aligned}E'(a) &= -f[a-h,a,a+h,a]h^2\\ E''(a) &= -2f[a-h,a,a+h,a,a]h^2\end{aligned}$$

Por ser de tipo interpolatorio clásico, el error de la fórmula es:

$$\begin{aligned}R(f) &= L(E) = 2E'(a) - E''(a)\\ &= -2f[a-h,a,a+h,a]h^2 + 2f[a-h,a,a+h,a,a]h^2 =\\ &= 2h^2\left(f[a-h,a,a+h,a,a] - f[a-h,a,a+h,a]\right) =\\ &= 2h^2\left(\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} - \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!}\right) \qquad \text{para algún } \xi_1,\xi_2 \in \,]a-h,a+h[\end{aligned}$$

3. Aplica la fórmula obtenida para aproximar $2f'(2) - f''(2)$ con $h = 0{,}1$ para la función $f(x) = \ln(x)$, $x \in [1,3]$.

$$\begin{aligned}2f'(2) - f''(2) &\approx -\frac{1+0{,}1}{0{,}1^2}f(1{,}9) + \frac{2}{0{,}1^2}f(2) + \frac{0{,}1-1}{0{,}1^2}f(2{,}1)\\ &= -\frac{1{,}1}{0{,}01}\ln(1{,}9) + \frac{2}{0{,}01}\ln(2) + \frac{-0{,}9}{0{,}01}\ln(2{,}1) \approx 1{,}2511476\end{aligned}$$

4. Compara el error real obtenido en en el apartado anterior con respecto a una cota deducida de 2).

   El valor real es:

$$2f'(2) - f''(2) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2^2}\right) = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

   Por tanto, el error real obtenido es:

$$\text{Error real} \approx 1{,}25 - 1{,}2511476 \approx -0{,}147607\cdot 10^{-3}$$

   El error obtenido en 2) es:

$$2\cdot 0{,}1^2\left(\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} - \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!}\right) = 0{,}02\left(\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} - \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!}\right) \qquad \xi_1,\xi_2 \in \,]1{,}9, 2{,}1[$$

   Para poder acotarlo, necesitamos acotar las derivadas cuarta y tercera de f. Como $f(x) = \ln(x)$, tenemos que:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} \qquad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

   Observación. Notemos que este ejercicio carece de sentido práctico, puesto que si podemos calcular las funciones derivadas podemos calcular el funcional pedido. No obstante, en la práctica se supone que no podremos calcular estas derivadas, pero sí las tendremos acotadas de alguna forma (por ejemplo, piénsese en las funciones trigonométricas).

Por tanto, la cota del error es:

$$\begin{aligned}
|\text{Error Predicho}| &\leqslant 0{,}02\left(\frac{|f^{(4)}(\xi_1)|}{4!}+\frac{|f^{(3)}(\xi_2)|}{3!}\right)\leqslant 0{,}02\left(\frac{6}{1{,}9^4\cdot 4!}+\frac{2}{1{,}9^3\cdot 3!}\right)\\
&\leqslant 0{,}02\left(\frac{1}{1{,}9^4\cdot 4}+\frac{1}{1{,}9^3\cdot 3}\right)\approx 1{,}355627\cdot 10^{-3}
\end{aligned}$$

5. Aplica la fórmula para obtener $2f'(0)-f''(0)$ suponiendo que tienes la siguiente tabla de valores de f:

x_i	$f(x_i)$
$-0{,}2$	9
0	10
0,2	9
0,4	12

Tomando $h=0{,}2$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
2f'(0)-f''(0) &\approx -\frac{1+0{,}2}{0{,}2^2}f(-0{,}2)+\frac{2}{0{,}2^2}f(0)+\frac{0{,}2-1}{0{,}2^2}f(0{,}2)\\
&=-\frac{1{,}2}{0{,}04}\cdot 9+\frac{2}{0{,}04}\cdot 10+\frac{-0{,}8}{0{,}04}\cdot 9=50
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.2.3. Considera la fórmula de tipo interpolatorio clásico siguiente

$$f'(a)\approx \alpha_0 f(a-h)+\alpha_1 f(a+3h)$$

1. Da una expresión del error de dicha fórmula.

Definimos en primer lugar:

$$\begin{aligned}
\Pi(x)&=(x-a+h)(x-a-3h)\\
\Pi'(x)&=(x-a-3h)+(x-a+h)
\end{aligned}$$

Sabemos que el error del polinomio de interpolación en los 2 nodos dados es:

$$E(x)=f[a-h,a+3h,x]\Pi(x)$$

Calculemos su derivada primera:

$$E'(x)=f[a-h,a+3h,x,x]\Pi(x)+f[a-h,a+3h,x]\Pi'(x)$$

Por ser de tipo interpolatorio clásico, el error de la fórmula es:

$$\begin{aligned}
R(f)=L(E)=E'(a)&=f[a-h,a+3h,a,a]\Pi(a)+f[a-h,a+3h,a]\Pi'(a)\\
&=-3h^2f[a-h,a+3h,a,a]-2hf[a-h,a+3h,a]=\\
&=-3h^2\left(\frac{f^{(3)}(\xi_1)}{3!}\right)-2h\left(\frac{f^{(2)}(\xi_2)}{2!}\right)=\\
&=-h^2\left(\frac{f^{(3)}(\xi_1)}{2}\right)-h\left(f^{(2)}(\xi_2)\right)\qquad \text{para algún } \xi_1,\xi_2\in\,]a-h,a+3h[
\end{aligned}$$

2. Úsala para aproximar la derivada $f'(3)$ siendo $f(x) = x^3$ con $h = 0{,}1$.

   Calculamos los polinomios fundamentales de Lagrange:

$$\ell_0(x) = \frac{x-(a+2h)}{a-h-(a+3h)} = \frac{x-a-2h}{-4h} \Longrightarrow \ell_0'(x) = -\frac{1}{4h}$$
$$\ell_1(x) = \frac{x-(a-h)}{a+3h-(a-h)} = \frac{x-a+h}{4h} \Longrightarrow \ell_1'(x) = \frac{1}{4h}$$

   Por tanto, la fórmula de derivación numérica es:

$$f'(3) \approx -\frac{1}{0{,}4}f(3-0{,}1) + \frac{1}{0{,}4}f(3+0{,}3) = 28{,}87$$

Ejercicio 1.2.2.4 (DGIIM 2023/2024)**.** Dada la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio:

$$f''(0) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + R(f), \quad x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_1 \neq x_2.$$

1. Sin realizar ningún cálculo, ¿puedes indicar el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula? Justifica la respuesta.

   Como tiene 3 nodos y se trata de la segunda derivada, sabemos que no puede ser exacta en $\mathbb{P}_5$, por lo que el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula es 4.

2. Determina los valores de α_0, α_1, α_2, x_1 y x_2 para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible. ¿Cuál es ese grado de exactitud?

   Imponemos exactitud en $\mathbb{P}_4$, o equivalentemente, en $\mathcal{L}\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Por tanto, buscamos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\
0 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\
2 &= \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 \\
0 &= \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3 \\
0 &= \alpha_1 x_1^4 + \alpha_2 x_2^4
\end{aligned}$$

   Veamos qué es necesario para que el sistema sea compatible:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & 2 \\ x_1^3 & x_2^3 & 0 \end{vmatrix} = -2\left(x_1x_2^3 - x_1^3x_2\right) = -2x_1x_2(x_2^2 - x_1^2) = -2x_1x_2(x_2+x_1)(x_2-x_1)$$

   Por tanto, por el Teorema de Rouché-Frobenius, si $x_2 \neq -x_1$, el sistema es incompatible y no tiene solución. Por tanto, imponemos $x_2 = -x_1$ y el sistema queda:

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\
0 &= x_1(\alpha_1 - \alpha_2) \\
2 &= x_1^2(\alpha_1 + \alpha_2) \\
0 &= x_1^3(\alpha_1 - \alpha_2) \\
0 &= x_1^4(\alpha_1 + \alpha_2)
\end{aligned}$$

Como $x_1 \neq 0$, obtenemos que este sistema es incompatible. Por tanto, no es posible imponer exactitud en $\mathbb{P}_4$. Veamos si es posible imponer exactitud en $\mathbb{P}_3$:

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\
0 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\
2 &= \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 \\
0 &= \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3
\end{aligned}$$

Anteriormente vimos que es necesario imponer $x_2 = -x_1$. Por tanto, el sistema queda:

$$\left\{\begin{array}{ll}
0 & = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\
0 & = x_1(\alpha_1 - \alpha_2) \\
2 & = x_1^2(\alpha_1 + \alpha_2) \\
0 & = x_1^3(\alpha_1 - \alpha_2)
\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll}
\alpha_0 & = -\dfrac{2}{x_1^2} \\
\alpha_1 & = \dfrac{1}{x_1^2} \\
\alpha_2 & = \dfrac{1}{x_1^2}
\end{array}\right\}$$

Por tanto, el grado máximo de exactitud es 3 y la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio es:

$$f''(0) = -\frac{2}{x_1^2} f(0) + \frac{1}{x_1^2} f(x_1) + \frac{1}{x_1^2} f(-x_1) + R(f)$$

donde notemos que hemos impuesto que los nodos sean simétricos respecto al origen.

3. Determina la expresión del error indicando las condiciones sobre derivabilidad de la función f. ¿Hay alguna otra conclusión que obtengas respecto a los nodos?

Definimos en primer lugar:

$$\begin{aligned}
\Pi(x) &= x(x-x_1)(x-x_2) \\
\Pi'(x) &= (x-x_1)(x-x_2) + x(x-x_2) + x(x-x_1) \\
\Pi''(x) &= 2(x-x_1) + 2(x-x_2) + 2x
\end{aligned}$$

Sabemos que el error del polinomio de interpolación en los 3 nodos dados es:

$$\begin{aligned}
E(x) &= f[0, x_1, x_2, x]\Pi(x) \\
E'(x) &= f[0, x_1, x_2, x, x]\Pi(x) + f[0, x_1, x_2, x]\Pi'(x) \\
E''(x) &= 2f[0, x_1, x_2, x, x, x]\Pi(x) + 2f[0, x_1, x_2, x, x]\Pi'(x) + f[0, x_1, x_2, x]\Pi''(x)
\end{aligned}$$

Por ser de tipo interpolatorio clásico, el error de la fórmula es:

$$\begin{aligned}
R(f) = L(E) = E''(0) &= -2x_1^2 f[0, x_1, x_2, 0, 0] + 2f[0, x_1, x_2, 0]\left(-x_1 + x_1\right) \\
&= -2x_1^2 f[0, x_1, x_2, 0, 0] = \\
&= -2x_1^2 \left(\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}\right) \qquad \text{para algún } \xi_1 \in \left]\min\{-x_1, x_1\}, \max\{-x_1, x_1\}\right[
\end{aligned}$$

Por tanto, vemos que el error es proporcional a x_1^2. Por tanto, si x_1 es pequeño, el error será pequeño. Por tanto, es conveniente que x_1 sea pequeño.

4. Aplica el resultado para la función xe^{x^2+1}.

   Definimos la función siguiente:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & xe^{x^2+1} \end{array}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$f''(0) \approx -\frac{2}{x_1^2}f(0) + \frac{1}{x_1^2}f(x_1) + \frac{1}{x_1^2}f(-x_1) = \frac{x_1e^{x_1^2+1} - x_1e^{x_1^2+1}}{x_1^2} = 0$$

Ejercicio 1.2.2.5. Dada la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio:

$$f'(0) = \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(1) + \alpha_2 f(2) + \alpha_3 f(a) + R(f), \quad a \neq -1, 1, 2.$$

1. Sin realizar ningún cálculo, ¿puedes indicar el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula? Justifica la respuesta.

   Como tiene 4 nodos y se trata de la primera derivada, sabemos que no puede ser exacta en $\mathbb{P}_5$, por lo que el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula es 4.

2. Determina los valores de α_0, α_1, α_2, α_3 y a para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible. ¿Cuál es ese grado de exactitud?

   Imponemos exactitud en $\mathbb{P}_4$, o equivalentemente, en $\mathcal{L}\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Por tanto, buscamos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\
1 &= -\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + a\alpha_3 \\
0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + 4\alpha_2 + a^2\alpha_3 \\
0 &= -\alpha_0 + \alpha_1 + 8\alpha_2 + a^3\alpha_3 \\
0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + 16\alpha_2 + a^4\alpha_3
\end{aligned}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 & a^2 & 0 \\ -1 & 1 & 8 & a^3 & 0 \\ 1 & 1 & 16 & a^4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4'=F_4+F_1]{F_2'=F_2+F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & a^3+1 & 0 \\ 1 & 1 & 16 & a^4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_5'=F_5-F_1]{F_3'=F_3-F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & a^3+1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & a^4-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4'=F_4-F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & a(a^2-1) & -1 \\ 0 & 0 & 15 & a^4-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_5'=F_5-5F_3]{F_4'=F_4-2F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a^2-1)(a-2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a^4-5a^2+4 & 0 \end{array}\right)$$

Para que el sistema tenga solución, es necesario que:

$$a^4-5a^2+4=0 \iff a^2 = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{5\pm 3}{2} \iff a^2=4 \vee a^2=1 \iff$$
$$\iff a \in \{-2, 2, -1, 1\}$$

Distinguimos valores:

- Si $a \notin \{1,-1,2,-2\}$, por la última ecuación $\alpha_3 = 0$, pero entonces la penúltima ecuación queda $0 = -1$, por lo que no hay solución.
- Si $a \in \{1,-1,2\}$, la última penúltima ecuación queda $0 = -1$, por lo que no hay solución.
- Si $a = -2$, el sistema queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = {}^{-2}/_{3} \\ \alpha_1 = {}^{2}/_{3} \\ \alpha_2 = {}^{-1}/_{12} \\ \alpha_3 = {}^{1}/_{12} \end{cases}$$

Por tanto, para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible, $a = -2$ y el grado máximo de exactitud es 4. La fórmula es:

$$f'(0) = -\frac{2}{3}f(-1) + \frac{2}{3}f(1) - \frac{1}{12}f(2) + \frac{1}{12}f(-2) + R(f)$$

3. Determina la expresión del error indicando las condiciones sobre derivabilidad de la función f.

Definimos en primer lugar:

$$\begin{aligned}
\Pi(x) &= (x+1)(x-1)(x-2)(x+2)\\
\Pi'(x) &= (x-1)(x-2)(x+2) + (x+1)(x-2)(x+2) + (x+1)(x-1)(x+2)+\\
&\qquad + (x+1)(x-1)(x-2)
\end{aligned}$$

Sabemos que el error del polinomio de interpolación en los 4 nodos dados es:

$$\begin{aligned}
E(x) &= f[-1,1,2,-2,x]\Pi(x)\\
E'(x) &= f[-1,1,2,-2,x,x]\Pi(x) + f[-1,1,2,-2,x]\Pi'(x)
\end{aligned}$$

Por ser de tipo interpolatorio clásico, el error de la fórmula es:

$$\begin{aligned}
R(f) = L(E) = E'(0) &= f[-1,1,2,-2,0,0]\Pi(0) + f[-1,1,2,-2,0]\Pi'(0)\\
&= 4f[-1,1,2,-2,0,0] + f[-1,1,2,-2,0]\cdot(4-4-2+2) =\\
&= 4f[-1,1,2,-2,0,0] = \frac{f^{(5)}(\xi)}{30} \qquad \text{para algún } \xi \in\ ]-2,2[
\end{aligned}$$

4. Aplica el resultado para la función xe^{x^2+1}.

Definimos la función siguiente:

$$\begin{array}{rccc}
f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\
 & x & \longmapsto & xe^{x^2+1}
\end{array}$$

Por tanto, tenemos que:

$$f'(0) \approx -\frac{2}{3}f(-1) + \frac{2}{3}f(1) - \frac{1}{12}f(2) + \frac{1}{12}f(-2)$$

Tenemos que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que:

$$\begin{aligned}
f'(0) &\approx \frac{2}{3}f(1) + \frac{2}{3}f(1) - \frac{1}{12}f(2) - \frac{1}{12}f(-2) =\\
&= \frac{4}{3}f(1) - \frac{1}{6}f(2) = \frac{4}{3}e^2 - \frac{1}{6}\cdot\left(2e^5\right) = \frac{4}{3}e^2 - \frac{1}{3}e^5 = \frac{e^2(4-e^3)}{3} \approx -39{,}619
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.2.6. Razonar por qué es posible calcular los coeficientes de una fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio clásico para aproximar $f'(a)$ mediante el procedimiento de ajuste de polinomios de Taylor, y que siga siendo válida la fórmula obtenida para calcular $R(f)$.

Observación. Este ejercicio fue propuesto por la profesora en clase para obtener 0,5 puntos adicionales. El desarrollo hecho por mí fue exhaustivo, y es adecuada su lectura para comprender este métdo para la obtención de los coeficientes α_i.

Fijado $a \in \mathbb{R}$, consideramos el siguiente funcional lineal objetivo:

$$\begin{array}{rccc}
F: & \mathbb{F} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\
 & f & \longmapsto & f'(a)
\end{array}$$

Además, fijados $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, consideramos el siguiente funcional lineal para cada $i = 0, \dots, n$:

$$\begin{array}{rccc} F_i: & \mathbb{F} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & f(x_i) \end{array}$$

Consideramos la siguiente fórmula numérica para aproximar $f'(a)$:

$$\begin{aligned} L(f) = f'(a) &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i F_i(f) + R(f) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + R(f) \end{aligned}$$

Veamos una forma posible de calcular los coeficientes α_i. Consideramos el desarrollo de Taylor de f en torno a cada uno de los nodos alrededor de a, donde definimos $h_i = x_i - a$ para cada $i = 0, \dots, n$:

$$f(x_i) = f(a) + f'(a)h_i + \frac{f''(a)}{2}h_i^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h_i^n + \dots + f^{(m)}(\xi_i)\frac{h_i^m}{(m)!}$$

Multiplicamos por α_i en cada término de la ecuación anterior y sumamos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(a) + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f'(a)h_i + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{f''(a)}{2}h_i^2 + \dots + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h_i^n + \\ + \dots + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f^{(m)}(\xi_i)\frac{h_i^m}{(m)!} \\ = f(a)\sum_{i=0}^{n} \alpha_i + f'(a)\sum_{i=0}^{n} \alpha_i h_i + \frac{f''(a)}{2}\sum_{i=0}^{n} \alpha_i h_i^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\sum_{i=0}^{n} \alpha_i h_i^n + \\ + \dots + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f^{(m)}(\xi_i)\frac{h_i^m}{(m)!} \end{aligned}$$

Por tanto, para poder llegar a la expresión buscada para $L(f)$, necesitamos que se cumpla:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 0 \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i h_i = 1 \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i h_i^2 = 0 \qquad \dots \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i h_i^n = 0$$

Es decir, necesitamos resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ h_0^2 & h_1^2 & h_2^2 & \dots & h_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_0^n & h_1^n & h_2^n & \dots & h_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Una vez obtenidos los coeficientes α_i, tenemos que:

$$L(f) = f'(a) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + R(f)$$

Llegados a este punto, buscamos obtener el valor de $R(f)$. Para ello, veamos que la fórmula en cuestión es de tipo interpolatorio; es decir, considerado el polinomio $p \in \mathbb{P}_n$ único interpolante de f en los nodos $x_0, \ldots, x_n$, veamos que:

$$L(p) = p'(a) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p(x_i)$$

Para ello, buscamos obtener $p'(a)$ de una forma similar al desarrollo llevado a cabo hasta ahora. Consideramos el desarrollo de Taylor de p en cada nodo alrededor de a, haciendo además uso de que, como $p \in \mathbb{P}_n$, se tiene que $p^{(n+1)}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$p(x_i) = p(a) + p'(a)h_i + \frac{p''(a)}{2}h_i^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}h_i^n + \cancelto{0}{p^{(n+1)}(\xi_i)} \frac{h_i^{n+1}}{(n+1)!}$$

Repitiendo la idea anterior, multiplicamos por β_i en cada término de la ecuación anterior y sumamos:

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_i p(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i p(a) + \sum_{i=0}^{n} \beta_i p'(a)h_i + \sum_{i=0}^{n} \beta_i \frac{p''(a)}{2}h_i^2 + \cdots + \sum_{i=0}^{n} \beta_i \frac{p^{(n)}(a)}{n!}h_i^n$$

Imponemos que se cumpla:

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_i = 0 \qquad \sum_{i=0}^{n} \beta_i h_i = 1 \qquad \sum_{i=0}^{n} \beta_i h_i^2 = 0 \qquad \ldots \qquad \sum_{i=0}^{n} \beta_i h_i^n = 0$$

Es decir, obtenemos cada valor de β_i resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ h_0 & h_1 & h_2 & \ldots & h_n \\ h_0^2 & h_1^2 & h_2^2 & \ldots & h_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_0^n & h_1^n & h_2^n & \ldots & h_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Una vez obtenidos los coeficientes β_i, tenemos que:

$$L(p) = p'(a) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i p(x_i)$$

No obstante, tenemos que los sistemas de las Ecuaciones (1.1) y (1.2) son iguales, y la matriz de coeficientes es la matriz de Vandermonde de los nodos $h_0, \ldots, h_n$, todos ellos distintos. Por tanto, el sistema es compatible y determinado, por lo que hay una única solución. Así, $\alpha_i = \beta_i$ para todo $i = 0, \ldots, n$. Por tanto:

$$L(p) = p'(a) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

Por tanto, y usando la linealidad de L, tenemos que:

$$L(f) = L(p) + R(f) \Longrightarrow L(f-p) = R(f) \Longrightarrow R(f) = L(E) = E'(a)$$

donde E es el error de interpolación de f en los nodos $x_0, \ldots, x_n$, que sabemos que viene dado por:

$$E(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

para algún $\xi \in [\text{mín}\{x_0, \ldots, x_n\}, \text{máx}\{x_0, \ldots, x_n\}]$.

1.2.3. Relación 1. Integración Numérica

Ejercicio 1.2.3.9. Se considera la siguiente fórmula de integración numérica:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1).$$

1. Halle de tres formas distintas los valores $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$ para que dicha fórmula sea de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$.

   a) Integración de los polinomios fundamentales de Lagrange:

   $$\begin{aligned}
   \alpha_0 &= \int_{-1}^{1} \ell_0(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2-x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \\
   &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}, \\
   \alpha_1 &= \int_{-1}^{1} \ell_1(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}dx = \int_{-1}^{1} -x^2 + 1dx = 2 \cdot \int_{0}^{1} 1 - x^2 dx = \\
   &= 2 \cdot \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}, \\
   \alpha_2 &= \int_{-1}^{1} \ell_2(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2+x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \\
   &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}.
   \end{aligned}$$

   b) Imponiendo exactitud en $\mathbb{P}_2$:

   $$\begin{aligned}
   2 &= \int_{-1}^{1} 1dx = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2, \\
   0 &= \int_{-1}^{1} xdx = -\alpha_0 + \alpha_2, \\
   2/3 &= \int_{-1}^{1} x^2dx = \alpha_0 + \alpha_2
   \end{aligned}$$

   Sustituyendo la tercera ecuación en la primera:

   $$2 = \alpha_1 + \frac{2}{3} \Longrightarrow \alpha_1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

   Sumando la segunda y la tercera, obtenemos:

   $$\alpha_2 = \frac{1}{3} = \alpha_0.$$

   c) Integrando el polinomio de interpolación de Newton:

La tabla de diferencias divididas asociada a los nodos -1, 0 y 1 es:

$$\begin{array}{c|ccc}
x_i & f[x_i] & & \\
 & & & \\
-1 & \mathbf{f(-1)} & & \\
 & & \mathbf{f(0) - f(-1)} & \\
0 & f(0) & & {}^{1\!}/_{2}(\mathbf{f(1) - 2f(0) + f(-1)}) \\
 & & f(1) - f(0) & \\
1 & f(1) & &
\end{array}$$

Por tanto, el polinomio de interpolación es:

$$\begin{aligned}
p(x) &= f(-1) + (f(0) - f(-1))(x+1) + \frac{1}{2}(f(1) - 2f(0) + f(-1))\, x(x+1) = \\
&= f(-1)\left(1 - 1 - x + \frac{x(x+1)}{2}\right) + f(0)\left(1 + x - x(x+1)\right) + f(1)\left(\frac{x(x+1)}{2}\right) \\
&= f(-1)\left(\frac{x(x-1)}{2}\right) + f(0)\left(1 - x^2\right) + f(1)\left(\frac{x(x+1)}{2}\right).
\end{aligned}$$

Empleando las integrales de los polinomios fundamentales de Lagrange ya vistos, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} p(x)dx &= f(-1)\int_{-1}^{1}\frac{x(x-1)}{2}dx + f(0)\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx + f(1)\int_{-1}^{1}\frac{x(x+1)}{2}dx = \\
&= \frac{1}{3}\cdot f(-1) + \frac{4}{3}\cdot f(0) + \frac{1}{3}\cdot f(1).
\end{aligned}$$

En cualquiera de los casos, obtenemos que:

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{1}{3}, \qquad \alpha_1 = \frac{4}{3}.$$

La fórmula de integración numérica obtenida es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1).$$

2. Halle el grado de exactitud de la fórmula obtenida en el apartado anterior.

   Por construcción, sabemos que la fórmula es exacta en $\mathbb{P}_2$. Veamos si es exacta en x^3 y x^4:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^3 dx &= 0 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\
\int_{-1}^{1} x^4 dx &= \frac{2}{5} \neq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

   Por tanto, la fórmula es exacta en $\mathbb{P}_3$ y no es exacta en $\mathbb{P}_4$, por lo que su grado de exactitud es 3.

3. Proporcione una fórmula de la forma propuesta que no sea de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$. Justifique la respuesta.

   Para ello, basta encontrar valores de α_0, α_1 y α_2 de forma que la fórmula no sea exacta en $\mathbb{P}_2$. Suponiendo por ejemplo $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$, tenemos:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-1) + f(0) + f(1),$$
$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \neq 1 + 1 + 1 = 3.$$

Ejercicio 1.2.3.10. Para evaluar el funcional lineal $L(f) = f(1/2) + \int_0^1 f(x)dx$ con $f \in C^1[0,1]$ se propone la siguiente fórmula de aproximación lineal:

$$L(f) \approx \frac{1}{8}(13f(0) + 5f'(0) + 3f(1)).$$

1. ¿La fórmula es exacta para $f(x) = x^3$? ¿Por qué? ¿Cuál es el grado de exactitud de la fórmula? ¿Por qué?

$$L(x^3) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} = \frac{1}{8}(13 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1).$$

   Por tanto, la fórmula es exacta para $f(x) = x^3$. Para ver el grado de exactitud, veamos en primer lugar si es exacta en $\{1, x, x^2\}$:

$$L(1) = 1 + 1 = 2 = \frac{1}{8}(13 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1) = \frac{16}{8},$$
$$L(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \frac{1}{8}(13 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = \frac{8}{8},$$
$$L(x^2) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} \neq \frac{1}{8}(13 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1) = \frac{3}{8}$$

   Como es exacta en $\{1, x\}$ pero no lo es en $\{1, x, x^2\}$, el grado de exactitud de la fórmula es 1.

2. ¿La fórmula es de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$? ¿Por qué? Si no lo es, deduzca los coeficientes de la fórmula para que sí lo sea.

   No, no lo es porque no es exacta en x^2. Para que sea de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$, debe ser exacta en $\{1, x, x^2\}$, por lo que debemos imponer:

$$L(1) = 2 = \alpha_0 + \alpha_2$$
$$L(x) = 1 = \alpha_1 + \alpha_2$$
$$L(x^2) = \frac{7}{12} = \alpha_2$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= {}^7\!/_{12}, \\
\alpha_1 &= 1 - {}^7\!/_{12} = {}^5\!/_{12}, \\
\alpha_0 &= 2 - {}^7\!/_{12} = {}^{17}\!/_{12}.
\end{aligned}$$

Por tanto, la fórmula de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$ es:

$$L(f) \approx \frac{1}{12}\left(17f(0) + 5f'(0) + 7f(1)\right).$$

3. Deduzca el error de la fórmula obtenida en el apartado anterior suponiendo $f \in C^3[0,1]$.

   El error de interpolación cometido es:

$$E(x) = f[0,0,1,x]\Pi(x) \qquad \text{con } \Pi(x) = \prod_{i=0}^{2}(x-x_i) = (x-0)(x-0)(x-1) = x^2(x-1).$$

   Por tanto, tenemos que:

$$R(f) = L(E) = f[0,0,1,{}^1\!/_2] \cdot \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \int_0^1 f[0,0,1,x] \cdot x^2(x-1)dx$$

   Puesto que $x^2(x-1)$ no cambia de signo en $[0,1]$, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio Generalizado para integrales para deducir que $\exists \zeta \in [0,1]$ tal que:

$$\begin{aligned}
R(f) &= -\frac{f[0,0,1,{}^1\!/_2]}{8} + f[0,0,1,\zeta] \cdot \int_0^1 x^2(x-1)dx = \\
&= -\frac{f[0,0,1,{}^1\!/_2]}{8} + f[0,0,1,\zeta] \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \\
&= -\frac{f[0,0,1,{}^1\!/_2]}{8} - \frac{f[0,0,1,\zeta]}{12}.
\end{aligned}$$

   Por las propiedades de las diferencias divididas, $\exists \xi_1, \xi_2 \in [0,1]$ tales que:

$$R(f) = -\frac{1}{8} \cdot \frac{f'''(\xi_1)}{3!} - \frac{1}{12} \cdot \frac{f'''(\xi_2)}{3!} = -\frac{f'''(\xi_1)}{48} - \frac{f'''(\xi_2)}{72} = -\frac{1}{144}\left(3f'''(\xi_1) + 2f'''(\xi_2)\right).$$

   Por tanto, tenemos que $\exists \xi \in [0,1]$ tal que:

$$R(f) = -\frac{5}{144} \cdot f'''(\xi).$$

4. ¿Qué fórmula se obtiene si deseamos que sea de tipo interpolatorio en el espacio $V = \langle 1, \operatorname{sen}(\pi x), \cos(\pi x)\rangle$?

Imponemos que la fórmula sea exacta en $\{1, \operatorname{sen}(\pi x), \cos(\pi x)\}$:

$$\begin{aligned} L(1) &= 2 = \alpha_0 + \alpha_2, \\ L(\operatorname{sen}(\pi x)) &= 1 + \frac{2}{\pi} = \pi\alpha_1 \\ L(\cos(\pi x)) &= 0 = \alpha_0 - \alpha_2. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, \\ \alpha_1 &= \frac{\pi+2}{\pi^2}, \\ \alpha_2 &= 1. \end{aligned}$$

Por tanto, la fórmula de tipo interpolatorio en V es:

$$L(f) \approx f(0) + \frac{\pi+2}{\pi^2} f'(0) + f(1).$$

Ejercicio 1.2.3.11.

1. Use el método interpolatorio para obtener la fórmula del rectángulo izquierda y deduzca la expresión del error de esta fórmula cuando $f \in C^1[a,b]$. ¿Cuál es el grado de exactitud de dicha fórmula? Justifique la respuesta.

   En este caso, el polinomio de interpolación de f en el nodo a es:

   $$p(x) = f(a)$$

   Por tanto, la fórmula del rectángulo izquierda es:

   $$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \int_a^b f(a)dx = f(a)(b-a).$$

   El error de interpolación cometido es:

   $$E(x) = f[a,x]\Pi(x) \qquad \text{con } \Pi(x) = x - a.$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$R(f) = \int_a^b E(x)dx = \int_a^b f[a,x](x-a)dx$$

   Puesto que $x-a$ no cambia de signo en $[a,b]$, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio Generalizado para integrales para deducir que $\exists \xi_1 \in [a,b]$ tal que:

   $$\begin{aligned} R(f) &= f[a,\xi_1] \cdot \int_a^b (x-a)dx = f[a,\xi_1] \cdot \left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_a^b = f[a,\xi_1] \cdot \left(\frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2\right) = \\ &= f[a,\xi_1] \cdot \left(\frac{b^2 + a^2 - 2ab}{2}\right) = f[a,\xi_1] \cdot \left(\frac{(b-a)^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Por las propiedades de las diferencias divididas, $\exists \xi \in [a, b]$ tal que:

$$R(f) = f'(\xi) \cdot \frac{(b-a)^2}{2}$$

Por tanto, el grado de exactitud de la fórmula es 0.

2. Utilice el método interpolatorio para obtener la fórmula del punto medio y deduzca la expresión del error de esta fórmula cuando $f \in C^2[a, b]$.

   En este caso, el polinomio de interpolación de f en el nodo $m = {}^{a+b}/_{2}$ es:

$$p(x) = f(m)$$

   Por tanto, la fórmula del punto medio es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \int_a^b f(m)dx = f(m)(b-a).$$

   El error de interpolación cometido es:

$$E(x) = f[m, x]\Pi(x) \qquad \text{con } \Pi(x) = x - m.$$

   Por tanto, tenemos que:

$$R(f) = \int_a^b E(x)dx = \int_a^b f[m, x](x-m)dx$$

   Como $x-m$ cambia de signo en $[a, b]$, no podemos aplicar el Teorema del Valor Medio Generalizado para integrales. Por las propiedades de las diferencias divididas, tenemos que:

$$f[m, m, x] = \frac{f[m, x] - f[m, m]}{x - m} \Longrightarrow f[m, x] = f[m, m, x](x-m) + f[m, m]$$

   Por tanto, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio Generalizado para integrales, por lo que $\exists \xi_1 \in [a, b]$ tal que:

$$\begin{aligned}
R(f) &= \int_a^b f[m, m, x](x-m)^2dx + f[m, m]\int_a^b (x-m)dx = \\
&= \int_a^b f[m, m, x](x-m)^2dx + f'(m) \cdot 0 = \\
&= f[m, m, \xi_1] \cdot \int_a^b (x-m)^2dx = f[m, m, \xi_1] \cdot \left[\frac{(x-m)^3}{3}\right]_a^b = \\
&= f[m, m, \xi_1] \cdot \left(\frac{(b-m)^3}{3} - \frac{(a-m)^3}{3}\right) = f[m, m, \xi_1] \cdot \left(\frac{(b-a)^3}{24} - \frac{(a-b)^3}{24}\right) = \\
&= f[m, m, \xi_1] \cdot \left(\frac{(b-a)^3}{12}\right).
\end{aligned}$$

Por las propiedades de las diferencias divididas, $\exists \xi \in [a,b]$ tal que:

$$R(f) = f''(\xi) \cdot \frac{(b-a)^3}{24}.$$

Por tanto, el grado de exactitud de la fórmula es 1. Como vemos, en este caso tiene un grado de exactitud mayor que el que le corresponde por construcción.

Ejercicio 1.2.3.12. Obtenga la fórmula del trapecio calculando directamente sus coeficientes mediante la base de Lagrange del problema de interpolación unisolvente asociado a dicha fórmula. Halle la expresión del error de cuadratura de esta fórmula cuando $f \in C^2[a,b]$ y deduzca cuál es su grado de exactitud.

La fórmula del trapecio consiste en usar como nodos los extremos del intervalo de integración, a y b. Por tanto, calculamos ambos coeficientes integrando los polinomios fundamentales de Lagrange asociados a dichos nodos:

$$\alpha_0 = \int_a^b \ell_0(x)dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}dx = \frac{1}{a-b}\left[\frac{(x-b)^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{a-b}\left(0 - \frac{(a-b)^2}{2}\right) = -\frac{(a-b)}{2} = \frac{b-a}{2},$$
$$\alpha_1 = \int_a^b \ell_1(x)dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{(b-a)^2}{2} - 0\right) = \frac{(b-a)}{2}.$$

Por tanto, la fórmula del trapecio es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}f(a) + \frac{b-a}{2}f(b) = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)).$$

El error de interpolación cometido es:

$$E(x) = f[a,b,x]\Pi(x) \qquad \text{con } \Pi(x) = (x-a)(x-b).$$

Por tanto, tenemos que:

$$R(f) = \int_a^b E(x)dx = \int_a^b f[a,b,x](x-a)(x-b)dx$$

Puesto que $(x-a)(x-b)$ no cambia de signo en $[a,b]$, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio Generalizado para integrales para deducir que $\exists \xi_1 \in [a,b]$ tal que:

$$\begin{aligned}
R(f) &= f[a,b,\xi_1] \cdot \int_a^b (x-a)(x-b)dx = f[a,b,\xi_1] \cdot \int_a^b \left(x^2 - (a+b)x + ab\right) dx = \\
&= f[a,b,\xi_1] \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{(a+b)x^2}{2} + abx\right]_a^b = \\
&= f[a,b,\xi_1] \cdot \left(\frac{b^3-a^3}{3} - \frac{(a+b)(b^2-a^2)}{2} + ab(b-a)\right) = \\
&= f[a,b,\xi_1] \cdot \left(\frac{2b^3 - 2a^3 - 3ab^2 + 3a^3 - 3b^3 + 3a^2b + 6ab^2 - 6a^2b}{6}\right) = \\
&= f[a,b,\xi_1] \cdot \left(\frac{-b^3 + 3ab^2 - 3a^2b + a^3}{6}\right) = -f[a,b,\xi_1] \cdot \frac{(b-a)^3}{6}
\end{aligned}$$

Por las propiedades de las diferencias divididas, $\exists \xi \in [a,b]$ tal que:

$$R(f) = -\frac{f''(\xi)}{12} \cdot (b-a)^3.$$

Por tanto, el grado de exactitud de la fórmula del trapecio es 1.

Ejercicio 1.2.3.13. Halle la fórmula de Newton-Cotes abierta con dos nodos.

Lo resolveremos en el intervalo $[-1,1]$, y luego generalizaremos el resultado al intervalo $[a,b]$, para poder así simplificar las cuentas. Sea $h = {}^2/_3$, por lo que los nodos serán $x_0 = {}^{-1}/_3$ y $x_1 = {}^1/_3$. La fórmula de Newton-Cotes abierta con dos nodos es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1).$$

Para calcular los coeficientes α_0 y α_1, imponemos que la fórmula sea exacta en $\mathbb{P}_1$, por lo que debe ser exacta en 1 y x:

$$\int_{-1}^{1} 1dx = 2 = \alpha_0 + \alpha_1,$$
$$\int_{-1}^{1} xdx = 0 = -\frac{1}{3}\alpha_0 + \frac{1}{3}\alpha_1.$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda, tenemos:

$$0 = -\frac{1}{3}\alpha_0 + \frac{1}{3}(2-\alpha_0) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\alpha_0 \Longrightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = 1.$$

Por tanto, la fórmula de Newton-Cotes abierta con dos nodos en el intervalo $[-1,1]$ es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right).$$

Ahora, generalicemos el resultado al intervalo $[a,b]$. Buscamos un cambio de variable que nos permita transformar el intervalo $[-1,1]$ en el intervalo $[a,b]$. Sea $x = a + (b-a)\frac{1+t}{2}$, donde $t \in [-1,1]$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{-1}^{1} f\left(a + (b-a)\frac{1+t}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2}dt = \\
&= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(a + (b-a)\frac{1+t}{2}\right)dt \approx \\
&\approx \frac{b-a}{2}\left(f\left(a + (b-a)\frac{1+({}^{-1}/_3)}{2}\right) + f\left(a + (b-a)\frac{1+{}^1/_3}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{b-a}{2}\left(f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + f\left(a + 2\cdot\frac{b-a}{3}\right)\right)
\end{aligned}$$

Definiendo $h = \frac{b-a}{3}$, tenemos que la fórmula de Newton-Cotes abierta con dos nodos en el intervalo $[a,b]$ es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f\left(a+h\right) + f\left(a+2h\right)\right).$$

Ejercicio 1.2.3.14. Aproxime el valor de $\ln 2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ usando cada una de las siguientes fórmulas, y calcule una cota del valor absoluto del error que se comete en cada una de las aproximaciones obtenidas:

1. La fórmula del punto medio,

   Definimos la siguiente aplicación:

   $$\begin{array}{rccc} f: & [1,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

   La aproximación del valor de la integral es:

   $$\ln 2 = \int_1^2 f(x)dx \approx f\left(\frac{1+2}{2}\right) \cdot (2-1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} = 0{,}666666\ldots$$

   Respecto al error cometido, tenemos que $\exists \xi \in [1,2]$ tal que:

   $$R(f) = \frac{f''(\xi)}{24}$$

   Calculamos la segunda derivada de f:

   $$f'(x) = -\frac{1}{x^2},$$
   $$f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$|R(f)| = \left|\frac{f''(\xi)}{24}\right| = \left|\frac{1}{12\xi^3}\right| \leqslant \frac{1}{12} = 0{,}083333\ldots$$

2. La fórmula del trapecio,

   La aproximación del valor de la integral es:

   $$\ln 2 = \int_1^2 f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(1)+f(2)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

   Respecto al error cometido, tenemos que $\exists \xi \in [1,2]$ tal que:

   $$R(f) = -\frac{f''(\xi)}{12} \cdot (2-1)^2 = -\frac{f''(\xi)}{12}.$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$|R(f)| = \left|\frac{f''(\xi)}{12}\right| = \left|\frac{1}{6\xi^2}\right| \leqslant \frac{1}{6} = 0{,}166666\ldots$$

3. La fórmula de Simpson.

   La aproximación del valor de la integral es:

$$\begin{aligned}
\ln 2 = \int_1^2 f(x)dx &\approx \frac{1}{6}(f(1) + 4f(1{,}5) + f(2)) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1} + 4\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{25}{36} = 0{,}694444\ldots
\end{aligned}$$

   Respecto al error cometido, tenemos que $\exists \xi \in [1, 2]$ tal que:

$$R(f) = -\frac{f^{(iv)}(\xi)}{2880}$$

   Calculamos la cuarta derivada de f:

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= -\frac{6}{x^4}, \\
f^{(iv)}(x) &= \frac{24}{x^5}.
\end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$|R(f)| = \left|-\frac{f^{(iv)}(\xi)}{2880}\right| = \left|-\frac{1}{120\xi^5}\right| \leqslant \frac{1}{120} = 0{,}008333\ldots$$

Ejercicio 1.2.3.15. Halle la expresión del error de la fórmula del trapecio compuesta cuando $f \in C^2[a, b]$.

El error cometido al aplicar la fórmula simple del trapecio en el intervalo $[a, b]$ es:

$$R(f) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi) \qquad \xi \in [a, b].$$

Si consideramos una partición uniforme del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $h = {}^{b-a}/_{n}$, el error cometido al aplicar la fórmula del trapecio compuesta es la suma de los errores cometidos en cada uno de los subintervalos:

$$R(f) = \sum_{i=1}^{n} R_i(f) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{h^3}{12}f''(\xi_i) = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = -\frac{h^3}{12}\cdot n\cdot f''(\xi) \qquad \xi \in [a, b],$$

donde ξ es un punto del intervalo $[a, b]$. Puesto que $n = \frac{b-a}{h}$, podemos escribir el error de la fórmula del trapecio compuesta como:

$$R(f) = -\frac{h^2(b-a)}{12}f''(\xi) \qquad \xi \in [a, b].$$

Ejercicio 1.2.3.16. La fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_3$ de la forma

$$\int_a^b f(x)dx \approx \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(b) + \alpha_2 f'(a) + \alpha_3 f'(b)$$

es conocida como *fórmula del trapecio corregida.*

1. Halle dicha fórmula, así como la expresión de su error si $f \in C^4[a,b]$. ¿Cuál es su grado de exactitud? Razone la respuesta.

   Imponemos exactitud en $\{1, x, x^2, x^3\}$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b 1dx &= b - a = \alpha_0 + \alpha_1, \\
\int_a^b xdx &= \frac{b^2 - a^2}{2} = \alpha_0 \cdot a + \alpha_1 \cdot b + \alpha_2 + \alpha_3, \\
\int_a^b x^2dx &= \frac{b^3 - a^3}{3} = \alpha_0 \cdot a^2 + \alpha_1 \cdot b^2 + \alpha_2 \cdot 2a + \alpha_3 \cdot 2b, \\
\int_a^b x^3dx &= \frac{b^4 - a^4}{4} = \alpha_0 \cdot a^3 + \alpha_1 \cdot b^3 + \alpha_2 \cdot 3a^2 + \alpha_3 \cdot 3b^2.
\end{aligned}$$

   Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{b-a}{2}, \\
\alpha_1 &= \frac{b-a}{2}, \\
\alpha_2 &= \frac{(b-a)^2}{12}, \\
\alpha_3 &= -\frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}$$

   Por tanto, la fórmula del trapecio corregida es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) + \frac{(b-a)^2}{12}\left(f'(a) - f'(b)\right).$$

   El error de interpolación cometido es:

$$E(x) = f[a, a, b, b, x]\Pi(x) \qquad \text{con } \Pi(x) = (x-a)^2(x-b)^2.$$

   Por tanto, tenemos que:

$$R(f) = \int_a^b E(x)dx = \int_a^b f[a, a, b, b, x](x-a)^2(x-b)^2dx$$

   Puesto que $(x-a)^2(x-b)^2$ no cambia de signo en $[a,b]$, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio Generalizado para integrales para deducir que $\exists \xi_1 \in [a,b]$ tal que:

$$R(f) = f[a, a, b, b, \xi_1] \cdot \int_a^b (x-a)^2(x-b)^2dx = f[a, a, b, b, \xi_1] \cdot \frac{(b-a)^5}{30}$$

   Por las propiedades de las diferencias divididas, $\exists \xi \in [a,b]$ tal que:

$$R(f) = f^{(4)}(\xi) \cdot \frac{(b-a)^5}{4! \cdot 30}.$$

2. Escriba la fórmula de cuadratura compuesta que se obtiene a partir de ella para una partición uniforme del intervalo de integración y halle la expresión de su error cuando $f \in C^4[a,b]$.

   Sea n el número de subintervalos de la partición uniforme del intervalo $[a,b]$, y sea $h = {}^{b-a}/_{n}$ la longitud de cada subintervalo. Entonces, la fórmula del trapecio corregida compuesta es:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{h}{2}\left(f(a+ih)+f(a+(i+1)h)\right)+\frac{h^2}{12}\left(f'(a+ih)-f'(a+(i+1)h)\right)\right) = \\ &= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(a+ih)+f(a+(i+1)h))+\frac{h^2}{12}\sum_{i=0}^{n-1}(f'(a+ih)-f'(a+(i+1)h)) = \\ &= \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+ih)\right)+\frac{h^2}{12}\left(f'(a)-f'(b)\right)\end{aligned}$$

   Respecto al error cometido, tenemos que el error de la fórmula del trapecio corregida compuesta es la suma de los errores cometidos en cada uno de los subintervalos:

$$R(f) = \sum_{i=0}^{n-1}R_i(f) = \sum_{i=0}^{n-1}f^{(4)}(\xi_i)\cdot\frac{h^5}{4!\cdot 30} = \frac{h^5}{4!\cdot 30}\sum_{i=0}^{n-1}f^{(4)}(\xi_i) = \frac{h^5}{4!\cdot 30}\cdot n\cdot f^{(4)}(\xi) \qquad \xi\in[a,b]$$

   Puesto que $n = \frac{b-a}{h}$, podemos escribir el error de la fórmula del trapecio corregida compuesta como:

$$R(f) = \frac{h^4(b-a)}{4!\cdot 30}f^{(4)}(\xi) \qquad \xi\in[a,b].$$

   Por tanto, el grado de exactitud de la fórmula del trapecio corregida compuesta es 3, ya que es exacta en $\mathbb{P}_3$.

Ejercicio 1.2.3.17. De una función $f(x)$ se conocen los valores

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	1	0,5	0,75	1,5

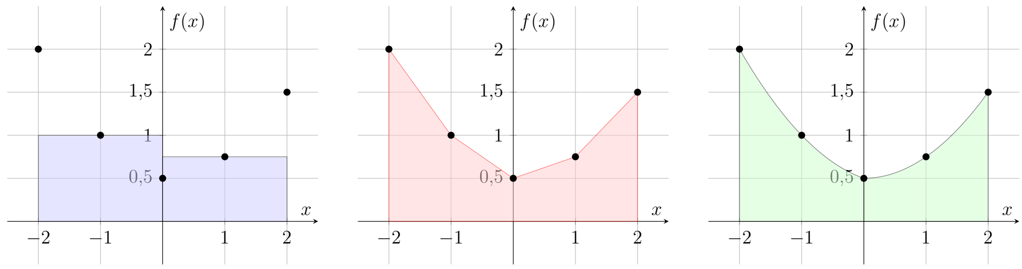
Se pide:

1. Calcule un valor aproximado de $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ usando las siguientes fórmulas.

   a) Fórmula del punto medio compuesta,

   En este caso, los nodos de interpolación que vamos a considerar son los puntos medios de los intervalos, por lo que hemos de considerar los intervalos $[-2,0]$, $[0,2]$. La aproximación dada es:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx 2\cdot(f(-1)+f(1)) = 3{,}5$$



(a) Pto. medio compuesta (b) Trapecio compuesta (c) Simpson compuesta

Figura 1.5: Aproximaciones de $\int_{-2}^{2} f(x)dx$

b) Fórmula del trapecio compuesta,

En este caso, los nodos de interpolación que vamos a considerar son los extremos de los intervalos, por lo que hemos de considerar los intervalos $[-2,-1]$, $[-1,0]$, $[0,1]$, $[1,2]$. La aproximación dada es:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left(f(-2)+f(2)\right)+\left(f(-1)+f(0)+f(1)\right)=4$$

c) Fórmula de Simpson compuesta.

En este caso, los nodos de interpolación que vamos a considerar son los extremos de los intervalos y los puntos medios de los mismos, por lo que hemos de considerar los intervalos $[-2,0]$, $[0,2]$. La aproximación dada es:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx \frac{2}{6}\left(f(-2)+4f(-1)+f(0)\right)+\frac{2}{6}\left(f(0)+4f(1)+f(2)\right)=3{,}833333\ldots$$

2. Interprete geométricamente cada una de las fórmulas anteriores para aproximar $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ y haga un dibujo que ilustre la respuesta.

   En el primer caso, en la fórmula del punto medio compuesta, se considera el área de los rectángulos formados por los puntos medios de los intervalos. En el segundo caso, en la fórmula del trapecio compuesta, se considera el área de la poligonal formada por los puntos de la función, uniendo los extremos de los intervalos. En el tercer caso, en la fórmula de Simpson compuesta, se considera el área bajo la parábola que pasa por los tres puntos que se consideran en cada intervalo. Las representaciones gráficas de cada una de estas aproximaciones se muestran en la Figura 1.5.

Ejercicio 1.2.3.18. Calcule valores aproximados para $\ln 2 = \int_1^2 1/x\ dx$ usando las siguientes fórmulas y calcule una cota del valor absoluto del error que se comete en cada una de las aproximaciones obtenidas. Compare además los resultados obtenidos con los del problema 1.2.3.14.

1. La fórmula del punto medio compuesta con 4 subintervalos,

   Los 4 subintervalos de la partición uniforme del intervalo $[1,2]$ son $[1,1{,}25]$, $[1{,}25,1{,}5]$, $[1{,}5,1{,}75]$, $[1{,}75,2]$. La aproximación dada es:

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx 0{,}25\cdot\left(\frac{1}{1{,}125}+\frac{1}{1{,}375}+\frac{1}{1{,}625}+\frac{1}{1{,}875}\right)=0{,}6912198\ldots$$

Respecto al error cometido, tenemos que $\exists \xi \in [1,2]$ tal que:

$$R(f) = \frac{f''(\xi)}{24} \cdot \frac{1}{4^2}$$

Calculamos la segunda derivada de f:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Por tanto, tenemos que:

$$|R(f)| = \left|\frac{f''(\xi)}{24} \cdot \frac{1}{16}\right| = \left|\frac{1}{12\xi^3} \cdot \frac{1}{16}\right| \leqslant \frac{1}{192} = 0{,}0052083\ldots$$

2. La fórmula del trapecio compuesta con 4 subintervalos,

   Los 4 subintervalos de la partición uniforme del intervalo $[1,2]$ son $[1, 1{,}25]$, $[1{,}25, 1{,}5]$, $[1{,}5, 1{,}75]$, $[1{,}75, 2]$. La aproximación dada es:

   $$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx \frac{0{,}25}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + 0{,}25 \cdot \left(\frac{1}{1{,}25} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{1{,}75}\right) = 0{,}6970238\ldots$$

   Respecto al error cometido, tenemos que $\exists \xi \in [1,2]$ tal que:

   $$R(f) = -\frac{f''(\xi)}{12} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$|R(f)| = \left|-\frac{f''(\xi)}{12} \cdot \frac{1}{16}\right| = \left|-\frac{1}{6\xi^2} \cdot \frac{1}{16}\right| \leqslant \frac{1}{96} = 0{,}0104166\ldots$$

3. La fórmula de Simpson compuesta con 2 subintervalos.

   Los 2 subintervalos de la partición uniforme del intervalo $[1,2]$ son $[1, 1{,}5]$, $[1{,}5, 2]$. La aproximación dada es:

   $$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx \frac{0{,}5}{6} \cdot \left(\frac{1}{1} + 4 \cdot \frac{1}{1{,}25} + 2 \cdot \frac{1}{1{,}5} + 4 \cdot \frac{1}{1{,}75} + \frac{1}{2}\right) = 0{,}693253968\ldots$$

   Respecto al error cometido, tenemos que $\exists \xi \in [1,2]$ tal que:

   $$R(f) = -\frac{f^{(iv)}(\xi)}{2880} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

   Calculamos la cuarta derivada de f:

   $$f'''(x) = -\frac{6}{x^4},$$
   $$f^{(iv)}(x) = \frac{24}{x^5}.$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$|R(f)| = \left|-\frac{f^{(iv)}(\xi)}{2880} \cdot \frac{1}{16}\right| = \left|-\frac{1}{120\xi^5} \cdot \frac{1}{16}\right| \leqslant \frac{1}{1920} = 0{,}000520833\ldots$$

Ejercicio 1.2.3.19. Se quiere calcular $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ usando la fórmula del punto medio compuesta. ¿Cuántos subintervalos deberá tener la partición uniforme a considerar para que el valor absoluto del error que se cometa al aproximar dicha integral sea menor que $5 \cdot 10^{-7}$?

Definimos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{-x^2} \end{array}$$

.

El error cometido al aplicar la fórmula del punto medio compuesta en el intervalo $[0,1]$ es:

$$R(f) = \frac{f''(\xi)}{24} \cdot h^2 = \frac{f''(\xi)}{24} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 \qquad \xi \in [0,1],$$

donde $h = {}^1/_n$ es la longitud de cada subintervalo de la partición uniforme del intervalo $[0,1]$, y n es el número de subintervalos de dicha partición.

Calculamos la segunda derivada de f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2}, \\ f''(x) &= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2-2). \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$|R(f)| = \left|\frac{f''(\xi)}{24} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2\right| = \left|\frac{e^{-\xi^2}(4\xi^2-2)}{24} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2\right| \leqslant \frac{2}{24} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{12n^2} \leqslant 5 \cdot 10^{-7} \iff$$

$$\iff n^2 \geqslant \frac{1}{12 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = \frac{5 \cdot 10^5}{3} \iff n \geqslant \sqrt{\frac{5 \cdot 10^5}{3}} \approx 408{,}248.$$

Por tanto, el número de subintervalos de la partición uniforme del intervalo $[0,1]$ deberá ser al menos $n = 409$ para que el valor absoluto del error cometido al aproximar la integral sea menor que $5 \cdot 10^{-7}$.

Ejercicio 1.2.3.20. Se quiere hallar un valor aproximado de $\int_1^2 \ln^2(x)dx$.

1. ¿Cuántos subintervalos deberá tener la partición uniforme para que el valor absoluto del error que se cometa al aproximar dicha integral usando la fórmula del trapecio compuesta sea menor que 10^{-3}?

   Definimos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl} f: & [1,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln^2(x) \end{array}$$

   Calculamos las derivadas de f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln(x)}{x}, \\ f''(x) &= \frac{2-2\ln(x)}{x^2} = \frac{2(1-\ln(x))}{x^2}, \\ f^{iii)}(x) &= \frac{-2 \cdot {}^1/_x \cdot x^2 - 4x(1-\ln(x))}{x^4} = \frac{-2-4(1-\ln(x))}{x^3} = \frac{4\ln(x)-6}{x^3}, \\ f^{(iv)}(x) &= \frac{4 \cdot {}^1/_x \cdot x^3 - 3x^2(4\ln(x)-6)}{x^6} = \frac{4-3(4\ln(x)-6)}{x^4} = \frac{-12\ln(x)+22}{x^4}. \end{aligned}$$

El error cometido al aplicar la fórmula del trapecio compuesta en el intervalo $[1,2]$ es:

$$R(f) = -\frac{f''(\xi)}{12} \cdot h^2 = -\frac{f''(\xi)}{12} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

donde $h = {}^1\!/\!_n$ es la longitud de cada subintervalo de la partición uniforme del intervalo $[1,2]$, y n es el número de subintervalos de dicha partición. Por tanto, tenemos que:

$$|R(f)| = \left|-\frac{f''(\xi)}{12n^2}\right| = \left|-\frac{2(1-\ln(\xi))}{12\xi^2 n^2}\right| \leqslant \frac{2}{12n^2} = \frac{1}{6n^2} \leqslant 10^{-3} \iff$$
$$\iff n^2 \geqslant \frac{1}{6 \cdot 10^{-3}} = \frac{1000}{6} \iff n \geqslant \sqrt{\frac{1000}{6}} \approx 12{,}9099$$

Por tanto, el número de subintervalos de la partición uniforme del intervalo $[1,2]$ deberá ser al menos $n = 13$ para que el valor absoluto del error cometido al aproximar la integral sea menor que 10^{-3}.

2. ¿Cuántos subintervalos deberá tener la partición uniforme para que el valor absoluto del error que se cometa al aproximar dicha integral utilizando la fórmula de Simpson compuesta sea menor que 10^{-3}?

   El error cometido al aplicar la fórmula de Simpson compuesta en el intervalo $[1,2]$ es:

$$R(f) = -\frac{f^{(iv)}(\xi)}{2880} \cdot h^4 = -\frac{f^{(iv)}(\xi)}{2880n^4} = -\frac{-12\ln(\xi)+22}{2880\xi^4 n^4}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$|R(f)| = \left|-\frac{-12\ln(\xi)+22}{2880\xi^4 n^4}\right| \leqslant \frac{22}{2880n^4} \leqslant 10^{-3} \iff$$
$$\iff n^4 \geqslant \frac{22}{2880 \cdot 10^{-3}} = \frac{22000}{2880} \iff n \geqslant \sqrt[4]{\frac{22000}{2880}} \approx 1{,}662484$$

   Por tanto, el número de subintervalos de la partición uniforme del intervalo $[1,2]$ deberá ser al menos $n = 2$ para que el valor absoluto del error cometido al aproximar la integral sea menor que 10^{-3}.

3. ¿Cuál de las fórmulas compuestas de los apartados anteriores será preferible utilizar para aproximar la integral dada? Justifique la respuesta.

   En el primer caso, se necesitan al menos $n = 13$ subintervalos para que el error sea menor que 10^{-3}, que son por tanto 14 evaluaciones de la función f. En el segundo caso, se necesitan al menos $n = 2$ subintervalos para que el error sea menor que 10^{-3}, que son por tanto 5 evaluaciones de la función f. Por tanto, es preferible utilizar la fórmula de Simpson compuesta, ya que requiere menos evaluaciones de la función para alcanzar el mismo grado de precisión.

Ejercicio 1.2.3.21. Se consideran las fórmulas simples del rectángulo, del punto medio, del trapecio y de Simpson. ¿Alguna de ellas es una fórmula de cuadratura gaussiana? Justifique la respuesta.

Una fórmula con $n+1$ nodos distintos es de tipo gaussiano si su grado de exactitud es $2n+1$. Expresamos la siguiente tabla, en la que queda reflejado este hecho:

	Rectángulo	Punto medio	Trapecio	Simpson
Nodos $(n+1)$	1	1	2	3
Grado por construcción (n)	0	0	1	2
Grado real	0	1	1	3
Grado máximo $(2n+1)$	1	1	3	5
¿Es gaussiana?	No	Sí	No	No

Ejercicio 1.2.3.22.

1. La fórmula numérica $f''(a) \approx \frac{3f(-2h)-5f(0)+2f(3h)}{15h^2}$:

   a) ¿Es de tipo interpolatorio clásico?
   Para ello, ha de ser exacta en $\mathbb{P}_2$, es decir, ha de ser exacta en $\{1, x, x^2\}$.

   - Para $f(x) = 1$:

   $$f''(a) = 0 = \frac{3-5+2}{15h^2} = \frac{0}{15h^2} = 0.$$

   - Para $f(x) = x$:

   $$f''(a) = 0 = \frac{3(-2h)-5(0)+2(3h)}{15h^2} = \frac{0}{15h^2} = 0.$$

   - Para $f(x) = x^2$:

   $$f''(a) = 2 = \frac{3(-2h)^2-5(0)+2(3h)^2}{15h^2} = \frac{12h^2+18h^2}{15h^2} = \frac{30h^2}{15h^2} = 2.$$

   Por tanto, la fórmula es exacta en $\mathbb{P}_2$, y por tanto es de tipo interpolatorio clásico.

   b) ¿Cuál es su grado de exactitud?
   Veamos ahora si es exacta en $\mathbb{P}_3$, es decir, si es exacta en $\{1, x, x^2, x^3\}$. Para $f(x) = x^3$ tenemos:

   $$f''(a) = 6a = \frac{3(-2h)^3-5(0)+2(3h)^3}{15h^2} = \frac{-24h^3+54h^3}{15h^2} = \frac{30h^3}{15h^2} = 2h$$

   Por tanto, la fórmula no es exacta en $\mathbb{P}_3$ si y solo si $a = h/3$. Veamos si es exacta en x^4:

   $$f''(a) = 12a^2 = \frac{3(-2h)^4-5(0)+2(3h)^4}{15h^2} = \frac{48h^4+162h^4}{15h^2} = \frac{210h^4}{15h^2} = 14h^2$$

   Como la condición $12a^2 = 14h^2$ es incompatible con $a = h/3$, la fórmula no es exacta en $\mathbb{P}_4$.

2. ¿Existe alguna fórmula de derivación numérica, basada en $n+1$ nodos distintos, de la forma $f''(a) \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$ que sea de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_n$ y tenga grado de exactitud $n+3$? Justifique la respuesta.

   No, hemos visto que no puede ser exacta en $n+1+2$.

3. Justifique que la fórmula de integración numérica

$$\int_0^2 f(x)dx = \frac{2}{3}(3f(0) + 3f'(0) + 2f''(0)) + R(f)$$

   es de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$ y para $f \in C^3[0,2]$ su error se puede escribir como $R(f) = \frac{2}{3}f'''(\xi)$ con $\xi \in]0,2[$.

   Para que la fórmula sea de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$, ha de ser exacta en $\{1, x, x^2\}$.

   - Para $f(x) = 1$:

$$\int_0^2 1dx = 2 = \frac{2}{3} \cdot 3$$

   - Para $f(x) = x$:

$$\int_0^2 xdx = 2 = \frac{2}{3}(0+3+0) = \frac{2}{3} \cdot 3$$

   - Para $f(x) = x^2$:

$$\int_0^2 x^2dx = \frac{8}{3} = \frac{2}{3}(0+0+4) = \frac{2}{3} \cdot 4$$

   Por tanto, la fórmula es exacta en $\mathbb{P}_2$, y por tanto es de tipo interpolatorio.

   El error de interpolación cometido es:

$$E(x) = f[0,0,0,x]x^3$$

   Por tanto, el error de la fórmula de integración numérica es:

$$R(f) = \int_0^2 E(x)dx = \int_0^2 f[0,0,0,x]x^3dx$$

   Como x^3 no cambia de signo en $[0,2]$, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio Integral Generalizado, que nos dice que existe un $\xi_1 \in [0,2]$ tal que:

$$\int_0^2 E(x)\ dx = f[0,0,0,\xi_1]\int_0^2 x^3dx = f[0,0,0,\xi_1] \cdot \frac{16}{4} = 4f[0,0,0,\xi_1].$$

   Por las propiedades de las diferencias divididas, sabemos que $\exists \xi \in [0,2]$ tal que:

$$R(f) = 4f[0,0,0,\xi_1] = 4 \cdot \frac{f'''(\xi)}{6} = \frac{2}{3}f'''(\xi).$$

Ejercicio 1.2.3.23.

1. Calcule la fórmula de Gauss-Legendre con 2 nodos y halle la expresión de su error cuando $f \in C^4[-1,1]$.

   Buscamos encontrar $x_1, x_2 \in [-1,1]$ y α_0, α_1 tales que la fórmula siguiente sea exacta en $2 \cdot 1 + 1 = 3$:
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1).$$

   Para ello, definimos el siguiente polinomio:
$$\Pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) = x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0x_1$$

   Como $\Pi(x) \in \mathbb{P}_2$, entonces $\exists b, c \in \mathbb{R}$ tales que:
$$\Pi(x) = x^2 + bx + c$$

   Como buscamos que sea exacta en $1 + 2$, hemos de imponer exactitud en $\{\Pi(x), x\Pi(x)\}$. Tenemos que:
$$\int_{-1}^{1} \Pi(x)dx = \int_{-1}^{1} (x^2 + bx + c)dx = 2 \cdot \frac{1}{3} + b \cdot 0 + c \cdot 2 = \frac{2}{3} + 2c,$$
$$\int_{-1}^{1} x\Pi(x)dx = \int_{-1}^{1} (x^3 + bx^2 + cx)dx = 0 + b \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} + c \cdot 0 = \frac{2b}{3}.$$

   Por tanto, e imponiendo que la fórmula sea exacta en $\Pi(x)$ y $x\Pi(x)$, tenemos el siguiente sistema:
$$\frac{2}{3} + 2c = 0,$$
$$\frac{2b}{3} = 0.$$

   Por tanto, tenemos que $b = 0$ y $c = -1/3$. Por tanto:
$$\Pi(x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

   Por tanto, las raíces de $\Pi(x)$, que son los nodos de la fórmula, son:
$$x_0 = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$
$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

   Por tanto, la fórmula de Gauss-Legendre con 2 nodos es:
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha_0 f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \alpha_1 f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

   Para hallar los coeficientes α_0 y α_1, hemos de imponer que la fórmula sea exacta en $\{1, x, x^2\}$.

- Para $f(x) = 1$:

$$\int_{-1}^{1} 1dx = 2 = \alpha_0 + \alpha_1.$$

- Para $f(x) = x$:

$$\int_{-1}^{1} xdx = 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha_0 + \frac{\sqrt{3}}{3}\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(\alpha_1 - \alpha_0).$$

Por tanto, concluimos que $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$. Por tanto, la fórmula de Gauss-Legendre con 2 nodos es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Respecto al error cometido, tenemos que $\exists \xi \in [-1, 1]$ tal que:

$$R(f) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi) \cdot \int_{-1}^{1} \Pi^2(x)dx$$

Calculamos la integral:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \Pi^2(x)dx &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) dx \\
&= 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{9}x\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) = 2\cdot\frac{4}{45} = \frac{8}{45}
\end{aligned}$$

Por tanto, el error de la fórmula de Gauss-Legendre con 2 nodos es:

$$R(f) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\cdot\frac{8}{45} = \frac{f^{(4)}(\xi)}{135}.$$

2. Usando la fórmula del apartado anterior, obtenga una fórmula para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ con $[a, b]$ un intervalo cualquiera. ¿Cuál es la expresión del error de dicha fórmula cuando f es suficientemente regular?

   Buscamos emplear el apartado anterior, por lo que buscamos un cambio de variable que transforme el intervalo $[-1, 1]$ en el intervalo $[a, b]$. Sea este el cambio de variable:

$$x = a + (b - a)\cdot\frac{t+1}{2}, \qquad t \in [-1, 1].$$

   De esta forma, tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(a + (b-a)\cdot\frac{t+1}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(a + (b-a)\cdot\frac{t+1}{2}\right)dt.$$

Definimos por tanto la función:

$$\begin{array}{rccl} g: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f\left(a+(b-a)\cdot\dfrac{t+1}{2}\right) \end{array}$$

Por tanto, la fórmula de Gauss-Legendre con 2 nodos para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ es:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 g(t)dt$$

Aproximamos la integral anterior usando la fórmula de Gauss-Legendre con 2 nodos:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{b-a}{2}\left(g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \\ &= \frac{b-a}{2}\left(f\left(a+\frac{b-a}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)+f\left(a+\frac{b-a}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Respecto al error cometido, tenemos que $\exists \xi_1 \in [-1,1]$ tal que:

$$R(f) = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{g^{(4)}(\xi)}{135} = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{f^{(4)}\left(a+(b-a)\cdot\frac{\xi+1}{2}\right)}{135}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^4$$

Por tanto, $\exists \xi \in [a,b]$ tal que:

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4320}\cdot(b-a)^5.$$

Ejercicio 1.2.3.24. Calcule la fórmula de Gauss-Legendre con 3 nodos y halle la expresión de su error cuando $f \in C^6[-1,1]$.

Buscamos encontrar $x_0, x_1, x_2 \in [-1,1]$ y $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ tales que la fórmula siguiente sea exacta en $2\cdot 2+1=5$:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \alpha_0 f(x_0)+\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2).$$

Para ello, definimos el siguiente polinomio:

$$\Pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Como $\Pi(x) \in \mathbb{P}_3$, entonces $\exists b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\Pi(x) = x^3+bx^2+cx+d.$$

Como buscamos que sea exacta en 1+2, hemos de imponer exactitud en $\{\Pi(x), x\Pi(x), x^2\Pi(x)\}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
0 = \int_{-1}^{1} \Pi(x)dx &= \int_{-1}^{1} (x^3 + bx^2 + cx + d)dx = 0 + b \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} + c \cdot 0 + 2d = \frac{2b}{3} + 2d,\\
0 = \int_{-1}^{1} x\Pi(x)dx &= \int_{-1}^{1} (x^4 + bx^3 + cx^2 + dx)dx = 2 \cdot \frac{1}{5} + 0 + 2 \cdot c \cdot \frac{1}{3} + 0 = \frac{2}{5} + \frac{2c}{3},\\
0 = \int_{-1}^{1} x^2\Pi(x)dx &= \int_{-1}^{1} (x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2)dx = 0 + 2 \cdot b \cdot \frac{1}{5} + 0 + d \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2b}{5} + \frac{2d}{3}.
\end{aligned}$$

Por tanto, e imponiendo que la fórmula sea exacta en $\Pi(x)$, $x\Pi(x)$ y $x^2\Pi(x)$, tenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl}
{}^{2b}/_3 + 2d &=& 0,\\
{}^{2}/_5 + {}^{2c}/_3 &=& 0,\\
{}^{2b}/_5 + {}^{2d}/_3 &=& 0.
\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}
c = {}^{-3}/_5,\\
b = d = 0
\end{array}\right.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\Pi(x) = x^3 - \frac{3}{5}x.$$

Por tanto, las raíces de $\Pi(x)$, que son los nodos de la fórmula, son:

$$\begin{aligned}
x_0 &= -\sqrt{\frac{3}{5}} = -\frac{\sqrt{15}}{5},\\
x_1 &= 0,\\
x_2 &= \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.
\end{aligned}$$

Por tanto, la fórmula de Gauss-Legendre con 3 nodos es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha_0 f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right).$$

Para hallar los coeficientes α_0, α_1 y α_2, hemos de imponer que la fórmula sea exacta en $\{1, x, x^2, x^3\}$.

- Para $f(x) = 1$:

$$\int_{-1}^{1} 1dx = 2 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2.$$

- Para $f(x) = x$:

$$\int_{-1}^{1} xdx = 0 = -\frac{\sqrt{15}}{5}\alpha_0 + 0 \cdot \alpha_1 + \frac{\sqrt{15}}{5}\alpha_2 = \frac{\sqrt{15}}{5}(\alpha_2 - \alpha_0).$$

- Para $f(x) = x^2$:

$$\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} = \frac{15}{25}(\alpha_0 + \alpha_2)$$

En primer lugar, vemos que $\alpha_0 = \alpha_2$. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
2 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_0 = 2\alpha_0 + \alpha_1, \\
{}^2\!/_3 &= \frac{15}{25}(2\alpha_0) = \frac{6\alpha_0}{5} \iff \alpha_0 = \frac{5}{9}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\alpha_1 = 2 - 2 \cdot \dfrac{5}{9} = \dfrac{8}{9}$. Por tanto, la fórmula de Gauss-Legendre con 3 nodos es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right).$$

Respecto al error cometido, tenemos que $\exists \xi \in [-1, 1]$ tal que:

$$R(f) = \frac{1}{6!} f^{(6)}(\xi) \cdot \int_{-1}^{1} \Pi^2(x)dx$$

Calculamos la integral:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \Pi^2(x)dx &= \int_{-1}^{1} \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} \left(x^6 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{9}{25}x^2\right) dx \\
&= 2\left(\frac{1}{7} - \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{175}.
\end{aligned}$$

Por tanto, el error de la fórmula de Gauss-Legendre con 3 nodos es:

$$R(f) = \frac{1}{6!} f^{(6)}(\xi) \cdot \frac{8}{175} = \frac{f^{(6)}(\xi)}{15750}.$$

Ejercicio 1.2.3.25. Calcule la fórmula gaussiana con dos nodos de la forma

$$\int_{-1}^{1} |x| f(x)dx \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1)$$

y halle la expresión de su error cuando $f \in C^4[-1, 1]$.

Buscamos encontrar $x_0, x_1 \in [-1, 1]$ y α_0, α_1 tales que la fórmula siguiente sea exacta en $2 \cdot 1 + 1 = 3$:

$$\int_{-1}^{1} |x| f(x)dx \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1).$$

Para ello, definimos el siguiente polinomio:

$$\Pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) = x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0 x_1$$

Como $\Pi(x) \in \mathbb{P}_2$, entonces $\exists b, c \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\Pi(x) = x^2 + bx + c.$$

Como buscamos que sea exacta en 1+2, hemos de imponer exactitud en $\{\Pi(x), x\Pi(x)\}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-1}^{1} |x|\Pi(x)dx = \int_{-1}^{1} |x|(x^2 + bx + c)dx = 2\int_{0}^{1} x^3 + cx\ dx = 2\left(\frac{1}{4} + \frac{c}{2}\right) = \frac{1}{2} + c, \\
0 &= \int_{-1}^{1} x|x|\Pi(x)dx = \int_{-1}^{1} x|x|(x^2 + bx + c)dx = 2\int_{0}^{1} bx^3\ dx = 2 \cdot b \cdot \frac{1}{4} = \frac{b}{2}.
\end{aligned}$$

Por tanto, e imponiendo que la fórmula sea exacta en $\Pi(x)$ y $x\Pi(x)$, tenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{2}+c & = & 0, \\ \dfrac{b}{2} & = & 0. \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} c = -1/2, \\ b = 0. \end{array}\right.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\Pi(x) = x^2 - \frac{1}{2}.$$

Por tanto, las raíces de $\Pi(x)$, que son los nodos de la fórmula, son:

$$\begin{aligned} x_0 &= -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, la fórmula gaussiana con 2 nodos es:

$$\int_{-1}^{1} |x| f(x)dx \approx \alpha_0 f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \alpha_1 f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Para hallar los coeficientes α_0 y α_1, hemos de imponer que la fórmula sea exacta en $\{1, x, x^2\}$.

- Para $f(x) = 1$:

$$\int_{-1}^{1} |x|dx = 2\int_{0}^{1} xdx = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 = \alpha_0 + \alpha_1.$$

- Para $f(x) = x$:

$$\int_{-1}^{1} |x|xdx = 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1 - \alpha_0).$$

Por tanto, concluimos que $\alpha_0 = \alpha_1 = 1/2$. Por tanto, la fórmula gaussiana con 2 nodos es:

$$\int_{-1}^{1} |x| f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$$

Respecto al error cometido, tenemos que $\exists \xi \in [-1, 1]$ tal que:

$$R(f) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \cdot \int_{-1}^{1} |x|\Pi^2(x)dx$$

Calculamos la integral:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} |x|\Pi^2(x)dx &= \int_{-1}^{1} |x| \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 dx = 2\int_{0}^{1} x\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= 2\int_{0}^{1} \left(x^5 - x^3 + \frac{1}{4}x\right) dx = 2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Por tanto, el error de la fórmula gaussiana con 2 nodos es:

$$R(f) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \cdot \frac{1}{12} = \frac{f^{(4)}(\xi)}{288}.$$

Ejercicio 1.2.3.26.

1. Determine los valores de A, B, C de forma que la fórmula de cuadratura $\int_0^3 f(x)dx \approx Af(0) + Bf(C)$ tenga el máximo grado de exactitud posible.

   Sabemos que será exacta en $\mathbb{P}_1$ por construcción, y que el grado de exactitud máximo será $2 \cdot 1 + 1 = 3$. No podemos garantizar que podamos encontrar valores de A, B y C que hagan la fórmula exacta en $\mathbb{P}_3$, puesto que uno de los nodos ya ha sido fijado a 0.

   Definimos el siguiente polinomio:

   $$\Pi(x) = (x - 0)(x - C) = x^2 - Cx.$$

   Como buscamos que sea exacta en $\mathbb{P}_2$, hemos de imponer exactitud en $\{\Pi(x)\}$. Tenemos que:

   $$0 = \int_0^3 \Pi(x)dx = \int_0^3 (x^2 - Cx)dx = \frac{27}{3} - C \cdot \frac{9}{2} = 9 - \frac{9C}{2} = 9\left(1 - \frac{C}{2}\right).$$

   Por tanto, e imponiendo que la fórmula sea exacta en $\Pi(x)$, tenemos que $C = 2$. Imponemos también que la fórmula sea exacta en $\{1, x\}$ para determinar los valores de A y B:

   - Para $f(x) = 1$:

     $$\int_0^3 1dx = 3 = A + B.$$

   - Para $f(x) = x$:

     $$\int_0^3 xdx = \frac{9}{2} = 0 \cdot A + 2B = 2B \Longrightarrow B = \frac{9}{4}.$$

   Por tanto, $A = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$. Por tanto, la fórmula de cuadratura es:

   $$\int_0^3 f(x)dx \approx \frac{3}{4} f(0) + \frac{9}{4} f(2).$$

   Veamos ahora si es exacta en x^3:

   $$\int_0^3 x^3 dx = \frac{81}{4} \neq \frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{9}{4} \cdot 8 = 18.$$

   Por tanto, no es exacta en $\mathbb{P}_3$ y la fórmula de cuadratura tiene grado de exactitud máximo 2.

2. Utilizando la fórmula obtenida en el apartado anterior, obtenga una fórmula para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ con $[a,b]$ un intervalo cualquiera.

   De nuevo, buscamos emplear el apartado anterior, por lo que buscamos un cambio de variable que transforme el intervalo $[0,3]$ en el intervalo $[a,b]$. Sea este el cambio de variable:

$$x = a + (b-a)\cdot\frac{t}{3}, \qquad t \in [0,3].$$

   De esta forma, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_0^3 f\left(a+(b-a)\cdot\frac{t}{3}\right)\cdot\frac{b-a}{3}dt\\ &= \frac{b-a}{3}\int_0^3 f\left(a+(b-a)\cdot\frac{t}{3}\right)dt.\end{aligned}$$

   Definimos por tanto la función:

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f\left(a+(b-a)\cdot\frac{t}{3}\right) \end{array}$$

   Por tanto, la fórmula de cuadratura asociada a la obtenida en el apartado anterior para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ es:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3}\int_0^3 g(t)dt.$$

   Aproximamos la integral anterior usando la fórmula de cuadratura obtenida en el apartado anterior:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{b-a}{3}\left(\frac{3}{4}g(0)+\frac{9}{4}g(2)\right) = \frac{b-a}{3}\left(\frac{3}{4}f(a)+\frac{9}{4}f\left(a+\frac{2(b-a)}{3}\right)\right) =\\ &= \frac{b-a}{4}\left(f(a)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right).\end{aligned}$$

3. Deduzca la fórmula de cuadratura compuesta asociada a la fórmula obtenida en el apartado anterior para una partición uniforme del intervalo de integración $[a,b]$ en N subintervalos.

   Tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1}\frac{h}{4}\left(f(x_i)+3f\left(\frac{x_i+2x_{i+1}}{3}\right)\right) =\\ &= \frac{h}{4}\left[\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) + 3\sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{x_i+2x_{i+1}}{3}\right)\right]\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.3.27. Halle la fórmula de cuadratura de la forma siguiente que tiene el máximo grado de exactitud posible. ¿Cuál es ese grado de exactitud máximo? ¿Se trata de una fórmula de cuadratura gaussiana? ¿Por qué?

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(1)$$

Sabemos que será exacta en $\mathbb{P}_2$ por construcción, y que el grado de exactitud máximo será $2 \cdot 2 + 1 = 5$. No podemos garantizar que podamos encontrar valores de α_0, α_1 y α_2 que hagan la fórmula exacta en $\mathbb{P}_5$, puesto que dos de los nodos ya han sido fijados a -1 y 1.

Definimos el siguiente polinomio:

$$\Pi(x) = (x+1)(x-x_1)(x-1) = (x^2-1)(x-x_1) = x^3 - x_1x^2 - x + x_1.$$

Como buscamos que sea exacta en $\mathbb{P}_3$, hemos de imponer exactitud en $\{\Pi(x)\}$. Tenemos que:

$$0 = \int_{-1}^{1} \Pi(x)dx = \int_{-1}^{1} (x^3 - x_1x^2 - x + x_1)dx = 0 - x_1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} + 0 + 2x_1 = 2x_1\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4x_1}{3}$$

Por tanto, $x_1 = 0$. Imponemos también que la fórmula sea exacta en $\{1, x, x^2\}$ para determinar los valores de α_0, α_1 y α_2:

- Para $f(x) = 1$:

$$\int_{-1}^{1} 1dx = 2 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2.$$

- Para $f(x) = x$:

$$\int_{-1}^{1} xdx = 0 = -\alpha_0 + 0 \cdot \alpha_1 + \alpha_2 = -\alpha_0 + \alpha_2.$$

- Para $f(x) = x^2$:

$$\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} = \alpha_0 + 0 \cdot \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0 + \alpha_2.$$

Por tanto, tenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 &=& 2, \\ -\alpha_0 + \alpha_2 &=& 0, \\ \alpha_0 + \alpha_2 &=& \dfrac{2}{3}. \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_0 = 1/3, \\ \alpha_1 = 4/3, \\ \alpha_2 = 1/3. \end{array}\right.$$

Por tanto, la fórmula de cuadratura es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) = \frac{1}{3}\left[f(-1) + 4f(0) + f(1)\right].$$

Sabemos por tanto que dicha fórmula de cuadratura tiene grado de exactitud máximo 5, pero veamos si efectivamente lo alcanza. Sabemos que es exacta en $\mathbb{P}_2$.

- Para $f(x) = x^3$:

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = \frac{1}{3}[-1+1]$$

- Para $f(x) = x^4$:

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \neq \frac{1}{3}[1+0+1] = \frac{2}{3}.$$

Por tanto, tiene grado de exactitud 3. No es una fórmula de cuadratura gaussiana, puesto que no alcanza su grado de exactitud máximo.

Ejercicio 1.2.3.28. Las fórmulas gaussianas de Laguerre corresponden a una integral del tipo

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx.$$

1. Obtenga la fórmula de Laguerre con dos nodos.

   Buscamos encontrar $x_0, x_1 \in [0, \infty[$ y α_0, α_1 tales que la fórmula siguiente sea exacta en $2 \cdot 1 + 1 = 3$:

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1).$$

   Definimos el siguiente polinomio:

$$\Pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) = x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0 x_1.$$

   Como $\Pi(x) \in \mathbb{P}_2$, entonces $\exists b, c \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\Pi(x) = x^2 + bx + c.$$

   Como buscamos que sea exacta en $1 + 2$, hemos de imponer exactitud en $\{\Pi(x), x\Pi(x)\}$. Tenemos que:

$$0 = \int_0^\infty e^{-x}\Pi(x) dx = \int_0^\infty e^{-x}(x^2 + bx + c) dx = 2 + b + c,$$
$$0 = \int_0^\infty e^{-x} x\Pi(x) dx = \int_0^\infty e^{-x}(x^3 + bx^2 + cx) dx = 6 + 2b + c.$$

   Por tanto, e imponiendo que la fórmula sea exacta en $\Pi(x)$ y $x\Pi(x)$, tenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2+b+c & = & 0, \\ 6+2b+c & = & 0. \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} b=-4, \\ c=2. \end{array}\right.$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\Pi(x) = x^2 - 4x + 2.$$

Por tanto, las raíces de $\Pi(x)$, que son los nodos de la fórmula, son:

$$x_0 = 2 - \sqrt{2},$$
$$x_1 = 2 + \sqrt{2}.$$

Por tanto, la fórmula de Laguerre con 2 nodos es:

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx \approx \alpha_0 f(2-\sqrt{2}) + \alpha_1 f(2+\sqrt{2}).$$

Para hallar los coeficientes α_0 y α_1, hemos de imponer que la fórmula sea exacta en $\{1, x\}$.

- Para $f(x) = 1$:

$$\int_0^\infty e^{-x} 1dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1 = \alpha_0 + \alpha_1.$$

- Para $f(x) = x$:

$$\int_0^\infty e^{-x} xdx = 1 = \alpha_0(2-\sqrt{2}) + \alpha_1(2+\sqrt{2}).$$

Por tanto, tenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_0 + \alpha_1 & = & 1, \\ \alpha_0(2-\sqrt{2}) + \alpha_1(2+\sqrt{2}) & = & 1. \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_0 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}, \\ \alpha_1 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}. \end{array}\right.$$

Por tanto, la fórmula de Laguerre con 2 nodos es:

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx \approx \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2}).$$

2. Aplique la fórmula obtenida para aproximar $\int_0^\infty e^{-x}x^4dx$.

$$\int_0^\infty e^{-x} x^4dx \approx \frac{2+\sqrt{2}}{4}(2-\sqrt{2})^4 + \frac{2-\sqrt{2}}{4}(2+\sqrt{2})^4 = 20$$

Ejercicio 1.2.3.29. Se denominan fórmulas de integración de Lobatto a aquellas que usan como nodos los dos extremos del intervalo de integración, y eligen los restantes para alcanzar la máxima exactitud posible. Trapecio y Simpson son ejemplos de fórmulas de Lobatto, siendo la del trapecio la más sencilla.

1. Obtenga la fórmula de Lobatto del tipo

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(1)$$

Sabemos que será exacta en $\mathbb{P}_3$ por construcción, y que el grado de exactitud máximo será $2 \cdot 3 + 1 = 7$. No podemos garantizar que podamos encontrar valores de α_0, α_1, α_2 y α_3 que hagan la fórmula exacta en $\mathbb{P}_7$, puesto que dos de los nodos ya han sido fijados a -1 y 1.
Definimos el siguiente polinomio:

$$\Pi(x) = (x+1)(x-x_1)(x-x_2)(x-1) = (x^2-1)(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2).$$

Como $(x-x_1)(x-x_2) \in \mathbb{P}_2$, entonces $\exists b, c \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\Pi(x) = (x^2-1)(x^2+bx+c) = x^4 + bx^3 + (c-1)x^2 - bx - c.$$

Como buscamos que sea exacta en $\mathbb{P}_4$, hemos de imponer exactitud en $\{\Pi(x), x\Pi(x)\}$.
Tenemos que:

$$\begin{aligned}
0 = \int_{-1}^{1} \Pi(x)dx &= \int_{-1}^{1} (x^4 + bx^3 + (c-1)x^2 - bx - c)dx = \\
&= 2 \cdot \frac{1}{5} + 0 + 2(c-1) \cdot \frac{1}{3} - 0 - 2c = -\frac{4}{15} - \frac{4c}{3} \Longrightarrow c = -\frac{1}{5}, \\
0 = \int_{-1}^{1} x\Pi(x)dx &= \int_{-1}^{1} (x^5 + bx^4 + (c-1)x^3 - bx^2 - cx)dx = \\
&= 0 + 2b \cdot \frac{1}{5} + 0 - 2b \cdot \frac{1}{3} - 0 = \frac{2b}{5} - \frac{2b}{3} \Longrightarrow b = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\Pi(x) = x^4 - \frac{6}{5}x^2 + \frac{1}{5}.$$

Por tanto, las raíces de $\Pi(x)$, que son los nodos de la fórmula, son:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$
$$x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Por tanto, la fórmula de Lobatto con 4 nodos es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \alpha_2 f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \alpha_3 f(1).$$

Para hallar los coeficientes α_0, α_1, α_2 y α_3, hemos de imponer que la fórmula sea exacta en $\{1, x, x^2, x^3\}$.

- Para $f(x) = 1$:

$$\int_{-1}^{1} 1dx = 2 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

- Para $f(x) = x$:

$$\int_{-1}^{1} xdx = 0 = -\alpha_0 + \alpha_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \alpha_2\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \alpha_3 = -\alpha_0 + \frac{\sqrt{5}}{5}(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_3.$$

- Para $f(x) = x^2$:

$$\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} = \alpha_0 + \alpha_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \alpha_2\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \alpha_3 = \alpha_0 + \frac{1}{5}(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3.$$

- Para $f(x) = x^3$:

$$\int_{-1}^{1} x^3dx = 0 = -\alpha_0 + \alpha_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3 + \alpha_2\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3 + \alpha_3 = -\alpha_0 + \frac{\sqrt{5}}{25}(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_3.$$

Por tanto, tenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 2, \\ -\alpha_0 + \frac{\sqrt{5}}{5}(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_3 & = & 0, \\ \alpha_0 + \frac{1}{5}(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 & = & \dfrac{2}{3}, \\ -\alpha_0 + \frac{\sqrt{5}}{25}(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_3 & = & 0. \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_0 = \alpha_3 = 1/6, \\ \alpha_1 = \alpha_2 = 5/6. \end{array}\right.$$

Por tanto, la fórmula de Lobatto con 4 nodos es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{6}\left[f(-1) + 5f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 5f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + f(1)\right].$$

2. Obtenga la expresión del error de dicha fórmula.

Ejercicio 1.2.3.30. Se quiere aproximar la siguiente integral, para que tenga precisión máxima:

$$\int_0^1 xf(x)\,dx \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1)$$

1. Determina α_0, α_1 y x_0, x_1 para que la fórmula anterior (con peso $\omega(x) = x$) tenga precisión máxima.

   Como hay 2 nodos, el grado máximo es $2 \cdot 1 + 1 = 3$. Definimos:

$$\Pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

   Como $\Pi(x) \in \mathbb{P}_2$, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\Pi(x) = x^2 + ax + b$$

   Por comodidad, debido a que lo usaremos muchas veces, tenemos que:

$$\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2} \qquad \int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3} \qquad \int_0^1 x^3\ dx = \frac{1}{4} \qquad \int_0^1 x^4\ dx = \frac{1}{5}$$

Como buscamos que la fórmula sea exacta en $1+2$, hemos de imponer que lo sea en $\Pi(x)$ y $x\Pi(x)$:

$$0 = \int_0^1 x\cdot\Pi(x)\ dx = \int_0^1 x^3+ax^2+bx\ dx = \frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$$
$$0 = \int_0^1 x^2\cdot\Pi(x)\ dx = \int_0^1 x^4+ax^3+bx^2\ dx = \frac{1}{5}+\frac{a}{4}+\frac{b}{3}$$

Por tanto, el sistema a resolver es:

$$\left\{\begin{array}{rcl} {}^1/_4+{}^a/_3+{}^b/_2 & = & 0\\ {}^1/_5+{}^a/_4+{}^b/_3 & = & 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & {}^{-6}/_5\\ b & = & {}^3/_{10}\end{array}\right.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\Pi(x) = (x-x_0)(x-x_1) = x^2-\frac{6}{5}\cdot x+\frac{3}{10}$$

Como x_0, x_1 son las raíces de $\Pi(x)$, las podemos calcular:

$$x^2-\frac{6}{5}\cdot x+\frac{3}{10} = 0 \iff x = \frac{6\pm\sqrt{6}}{10}$$

Por tanto, podemos tomar (la elección contaria también es posible):

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0 & = & \dfrac{6+\sqrt{6}}{10}\\ x_1 & = & \dfrac{6-\sqrt{6}}{10}\end{array}\right.$$

Por tanto, la fórmula de integración queda:

$$\int_0^1 xf(x)\,dx \approx \alpha_0 f\left(\frac{6+\sqrt{6}}{10}\right)+\alpha_1 f\left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}\right)$$

De esta fórmula, la siguiente fórmula será exacta al menos en $\mathbb{P}_3$. Imponiendo exactitud en, por ejemplo, $\{1, x\}$, tenemos que:

$$\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2} = \alpha_0\cdot 1+\alpha_1\cdot 1$$
$$\int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3} = \alpha_0\cdot x_0+\alpha_1\cdot x_1$$

De la primera ecuación, obtenemos $\alpha_0 = {}^1/_2-\alpha_1$. Sustituyendo en la segunda ecuación, tenemos que:

$$\frac{1}{3} = ({}^1/_2-\alpha_1)\cdot x_0+\alpha_1\cdot x_1 \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{\frac{1}{3}-\frac{x_0}{2}}{x_1-x_0}$$

De los valores de x_0 y x_1, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{10}{6}\cdot\frac{2-3x_0}{\cancel{6}-\sqrt{6}-\cancel{6}-\sqrt{6}} = -5\sqrt{6}\cdot(2-3x_0) = \\
&= -\frac{5\sqrt{6}}{6^2}\cdot\left(2-\frac{3\cdot\left(6+\sqrt{6}\right)}{10}\right) = -\frac{5\sqrt{6}}{6^2}\cdot\left(\frac{20-18-3\sqrt{6}}{10}\right) = \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{6^2}\cdot\left(\frac{2-3\sqrt{6}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{6^2}\cdot\left(1-\frac{3\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{9-\sqrt{6}}{6^2}
\end{aligned}$$

Por tanto, el valor de α_0 es:

$$\alpha_0 = \frac{18}{36} - \frac{9-\sqrt{6}}{6^2} = \frac{9+\sqrt{6}}{6^2}$$

Por tanto, la fórmula de integración queda:

$$\int_0^1 xf(x)\,dx \approx \frac{9+\sqrt{6}}{36}f\left(\frac{6+\sqrt{6}}{10}\right) + \frac{9-\sqrt{6}}{36}f\left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}\right)$$

2. Da una expresión del error.

   El error de viene dado por:

$$R(f) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\cdot\int_0^1 x\Pi^2(x)\ dx \qquad \xi\in\left]\frac{6-\sqrt{6}}{10},\frac{6+\sqrt{6}}{10}\right[\subset\left]0{,}355, 0{,}845\right[$$

   Calculemos dicha integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\Pi^2(x)\ dx &= \int_0^1 x\left(x^2-\frac{6}{5}x+\frac{3}{10}\right)^2\ dx = \\
&= \int_0^1 x\left(x^4+\frac{36}{25}x^2+\frac{9}{100}-\frac{12}{5}x^3+\frac{3}{5}x^2-\frac{18}{25}x\right)\ dx = \\
&= \int_0^1 \left(x^5-\frac{12}{5}x^4+\left(\frac{36}{25}+\frac{3}{5}\right)x^3-\frac{18}{25}x^2+\frac{9}{100}x\right)\ dx = \\
&= \frac{1}{6}-\frac{12}{5}\cdot\frac{1}{5}+\left(\frac{36}{25}+\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{4}-\frac{18}{25}\cdot\frac{1}{3}+\frac{9}{100}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{600}
\end{aligned}$$

   Por tanto, el error de la aproximación es:

$$R(f) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\cdot\int_0^1 x\Pi^2(x)\ dx = \frac{1}{24}\cdot f^{(4)}(\xi)\cdot\frac{1}{600} = \frac{f^{(4)}(\xi)}{14400}$$

1.2.4. Relación 2. Integracion Numérica

Ejercicio 1.2.4.1. En la integración numérica se obtienen fórmulas simples, con pocos nodos, para aproximar la integral en un intervalo $[a,b]$. Estas fórmulas, al tener pocos nodos, no dan resultados satisfactorios en ocasiones, pero unas tienen un mayor grado de exactitud que otras.

1. Explica cómo podrías obtener fórmulas de tipo interpolatorio clásico con más exactitud de n, cuando puedes elegir libremente los nodos de interpolación: $x_0,\dots,x_n$.

   Al tratarse de fórmulas de tipo interpolatorio con $n+1$ nodos, sabemos que tendrán grado mínimo de exactitud n. Para añadir k grados de exactitud más, hemos de imponer exactitud en $\{x^i\Pi(x) \mid i\in\{0,1,\dots,k-1\}\}$, donde $k\in\{1,2,n+1\}$.

2. Sea a igual a la suma de los dígitos de tu DNI; sea $b=a+3$. Calcula la fórmula con nodos a, x_1 de mayor grado de exactitud para aproximar la integral entre a y b.

   Buscamos por tanto la siguiente fórmula de tipo interpolatorio:

   $$\int_a^b f(x)dx \approx \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(x_1)$$

   Definimos el siguiente polinomio:

   $$\Pi(x) = (x-a)(x-x_1) = x^2-(a+x_1)x+ax_1$$

   Sabemos que será exacta en $\mathbb{P}_1$, y el grado máximo de exactitud es $2\cdot1+1=3$. Por tanto, buscamos por tanto imponer exactitud en $\{\Pi(x), x\Pi(x)\}$.

   $$\begin{aligned}
0 = \int_a^b \Pi(x)dx &= \int_a^b (x^2-(a+x_1)x+ax_1)dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{(a+x_1)x^2}{2}+ax_1x\right]_a^{a+3}\\
&= \left[\frac{(a+3)^3}{3}-\frac{(a+x_1)(a+3)^2}{2}+ax_1(a+3)\right]-\left[\frac{a^3}{3}-\frac{(a+x_1)a^2}{2}+ax_1a\right]\\
&= 3[a^2+3a+3]-\frac{(a+x_1)(6a+9)}{2}+3ax_1\\
&= \cancel{3a^2}+9a+9-\cancel{3a^2}-\cancel{3ax_1}-\frac{9}{2}(a+x_1)+\cancel{3ax_1}\\
&= \frac{9}{2}(2a+2-a-x_1) = \frac{9}{2}(a+2-x_1)
\end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que $x_1=a+2$, y ya tenemos determinados los nodos.

   $$\int_a^b f(x)dx \approx \alpha_0 f(a)+\alpha_1 f(a+2)$$

   Buscamos ahora los coeficientes α_0 y α_1, imponiendo exactitud en $\{1,x\}$:

   $$\int_a^b 1 = b-a = 3 = \alpha_0+\alpha_1$$

   $$\int_a^b x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^{a+3} = \frac{(a+3)^2}{2}-\frac{a^2}{2} = \frac{6a+9}{2} = \alpha_0\cdot a+\alpha_1\cdot(a+2)$$

Tenemos por tanto el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 = 3 \\ a(\alpha_0 + \alpha_1) + 2\alpha_1 = \dfrac{6a+9}{2} \end{cases}$$

La segunda ecuación queda como:

$$a \cdot 3 + 2\alpha_1 = \frac{6a+9}{2} \Longrightarrow 2\alpha_1 = \frac{6a+9-6a}{2} \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{9}{4}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\alpha_0 + \frac{9}{4} = 3 \Longrightarrow \alpha_0 = \frac{3}{4}$$

Por tanto, la fórmula de integración numérica es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3}{4}\left(f(a) + 3f(a+2)\right)$$

Sabemos que esta fórmula es exacta en $\mathbb{P}_2$, veamos ahora si lo es para x^3:

$$\begin{aligned} \int_a^b x^3 &= \left[\frac{x^4}{4}\right]_a^{a+3} = \frac{(a+3)^4}{4} - \frac{a^4}{4} = \frac{12a^3 + 54a^2 + 108a + 81}{4} \\ &\neq \frac{3}{4}\left(a^3 + 3(a+2)^3\right) = \frac{3}{4}\left(a^3 + 3(a^3 + 6a^2 + 12a + 8)\right) = \frac{3}{4}\left(4a^3 + 18a^2 + 36a + 24\right) = \\ &= \frac{12a^3 + 54a^2 + 108a + 72}{4} \end{aligned}$$

Por tanto, como la fórmula no es exacta en x^3, el grado de exactitud es 2.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases}$$

Aplica la fórmula simple obtenida para aproximar, previo cambio de variable si es necesario, el valor de la integral: $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Buscamos un cambio de variable que nos permita aplicar la fórmula obtenida, transformando el intervalo $[a, a+3]$ en $[x_0, x_0+h]$. Sea este cambio de variable:

$$x = x_0 + h \cdot \frac{t-a}{3} \qquad \forall t \in [a, a+3]$$

De esta forma, tenemos que:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = \int_a^{a+3} f\left(x_0 + h \cdot \frac{t-a}{3}\right) \cdot \frac{h}{3} dt$$

Por tanto, aplicando la fórmula obtenida:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\cdot\frac{3}{4}\left(f(x_0)+3f\left(x_0+h\cdot\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{h}{4}\left(f(x_0)+3f\left(x_0+h\cdot\frac{2}{3}\right)\right)$$

En nuestro caso, tenemos que $x_0=-1$, $h=2$. Por tanto:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &\approx \frac{2}{4}\left(f(-1)+3f\left(-1+\frac{2\cdot 2}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+3f\left(\frac{1}{3}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1+3\cdot-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

4. Aplica la fórmula compuesta asociada a la fórmula simple, haciendo dos subintervalos a partir del $[-1,1]$, para aproximar el mismo valor de la integral anterior.

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx &\approx \frac{1}{4}\left[f(-1)+3f\left(-1+\frac{2}{3}\right)+f(0)+3f\left(0+\frac{2}{3}\right)\right] =\\ &= \frac{1}{4}\left[f(-1)+3f\left(-\frac{1}{3}\right)+f(0)+3f\left(\frac{2}{3}\right)\right] =\\ &= \frac{1}{4}\left[1+3\cdot\frac{1}{9}+0-3\cdot\frac{4}{9}\right] = 0\end{aligned}$$

5. ¿Qué puedes decir del error de la fórmula simple obtenida, de la compuesta asociada a ella y de sus aplicaciones particulares en el apartado anterior?

El error de interpolación cometido al interpolar mediante los puntos $a, a+2$ es:

$$E(x) = f[a,a+2,x]\Pi(x) \qquad \text{donde} \qquad \Pi(x) = (x-a)(x-(a+2)) = x^2-2(1+a)x+a(a+2)$$

Por tanto, el error cometido al aproximar la integral por la fórmula simple es:

$$R(f) = \int_a^b E(x) = \int_a^{a+3} f[a,a+2,x]\Pi(x)dx$$

Como $\Pi(x)$ cambia de signo en $[a,a+3]$, no podemos aplicar el Teorema del Valor Medio Integral Generalizado. Usamos que:

$$\begin{aligned}f[a,a+2,a+2,x] &= \frac{f[a,a+2,x]-f[a,a+2,a+2]}{x-(a+2)} \Longrightarrow\\ &\Longrightarrow f[a,a+2,x] = f[a,a+2,a+2,x](x-(a+2)) + f[a,a+2,a+2]\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}R(f) &= \int_a^{a+3} \left(f[a,a+2,a+2,x](x-(a+2)) + f[a,a+2,a+2]\right)\Pi(x)dx =\\ &= \int_a^{a+3} f[a,a+2,a+2,x](x-(a+2))\Pi(x)dx + f[a,a+2,a+2]\int_a^{a+3}\Pi(x)dx\end{aligned}$$

Tenemos que calcular ahora ambas integrales. Por un lado, como es exacta en $\Pi(x)$, sabemos que:

$$\int_a^{a+3} \Pi(x)dx = 0$$

Por otro lado, como $(x-(a+2))\Pi(x)$ no cambia de signo en $[a, a+3]$ y es un polinomio de grado 3, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio Integral Generalizado. Por tanto, existe $\mu \in [a, a+3]$ tal que:

$$R(f) = f[a, a+2, a+2, \mu] \int_a^{a+2} (x-(a+2))\Pi(x)dx$$

Calculamos dicha integral:

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+2} (x-(a+2))\Pi(x)dx &= \int_a^{a+2} (x-a)(x-(a+2))^2 dx = \\
&= \int_a^{a+2} (x-a)((x-a)-2)^2 dx = \int_a^{a+2} (x-a)((x-a)^2-4(x-a)+4)dx = \\
&= \int_a^{a+2} (x-a)^3 - 4(x-a)^2 + 4(x-a)dx = \left[\frac{(x-a)^4}{4} - \frac{4(x-a)^3}{3} + 4\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^{a+2} = \\
&= \left[\frac{(3)^4}{4} - \frac{4(3)^3}{3} + 4\frac{(3)^2}{2}\right] = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Por tanto, el error cometido al aproximar la integral por la fórmula simple es:

$$R(f) = f[a, a+2, a+2, \mu] \cdot \frac{9}{4}$$

Por las propiedades de las diferencias divididas, sabemos que $\exists \xi \in [a, a+3]$ tal que:

$$R(f) = \frac{9f'''(\xi)}{4 \cdot 3!} = \frac{3f'''(\xi)}{8}$$

Por tanto, el error cometido al aproximar la integral por la fórmula compuesta es:

$$R(f) = \frac{3}{8}\left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right) = \frac{3}{4}f'''(\xi)$$

con $\xi \in [a, a+3]$.

Ejercicio 1.2.4.2. Determina razonadamente si es posible diseñar una fórmula numérica de tipo interpolatorio en el espacio generado por $\{1, x, x^2, x^4\}$ para aproximar

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{-2}^{2} |x|f(x)dx$$

usando para ello los datos $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, $\int_{-1}^{1} |x|f(x)dx$, $f(0)$ y $f'(0)$. En particular determina el peso de $f'(0)$.

En primer lugar, buscamos el interpolante $p \in V = \mathcal{L}\{1, x, x^2, x^4\}$ que verifique $L_i(p) = L_i(f)$ para $i = 0, 1, 2, 3$, donde:

$$\begin{aligned}
L_0(f) &= \int_{-1}^{1} f(x)dx,\\
L_1(f) &= \int_{-1}^{1} |x|f(x)dx,\\
L_2(f) &= f(0),\\
L_3(f) &= f'(0).
\end{aligned}$$

Recordemos que $L_i(f)$ es conocido para $i = 0, 1, 2, 3$. Sea por tanto:

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^4 \in V$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
&L_0(f) = L_0(p) = \int_{-1}^{1} p(x)dx = \int_{-1}^{1}(a + bx + cx^2 + dx^4)dx = 2\left[a + \frac{c}{3} + \frac{d}{5}\right]\\
&L_1(f) = L_1(p) = \int_{-1}^{1} |x|p(x)dx = \int_{-1}^{1} |x|(a + bx + cx^2 + dx^4)dx = 2\left[\frac{a}{2} + \frac{c}{4} + \frac{d}{6}\right]\\
&L_2(f) = L_2(p) = p(0) = a,\\
&L_3(f) = L_3(p) = p'(0) = b.
\end{aligned}$$

Por tanto, los valores de a y b ya están determinados, y tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}
2\left[a + \frac{c}{3} + \frac{d}{5}\right] = L_0(f)\\
2\left[\frac{a}{2} + \frac{c}{4} + \frac{d}{6}\right] = L_1(f)\\
a = L_2(f)\\
b = L_3(f)
\end{cases}$$

Para determinar si este sistema tiene solución (que es lo que nos interesa), basta con comprobar que el siguiente determinante es distinto de cero:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 2/5\\ 1 & 0 & 1/2 & 1/3\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2/3 & 2/5\\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{2}{9} + \frac{1}{5} \neq 0$$

Por tanto, el sistema tiene solución, y por tanto es posible encontrar el interpolante $p \in V$ que verifique las condiciones impuestas. Ahora, es necesario comprobar si existen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que:

$$\sum_{i=0}^{3} \alpha_i L_i(f) = L(p)$$

Calculamos $L(p)$:

$$L(p) = \int_{-2}^{2} p(x)dx + \int_{-2}^{2} |x|p(x)dx$$

Calculamos cada una de las integrales:

$$\int_{-2}^{2} p(x)dx = \int_{-2}^{2} (a + bx + cx^2 + dx^4)dx = 2\left[2a + \frac{c \cdot 2^3}{3} + \frac{d \cdot 2^5}{5}\right] = 4a + \frac{16c}{3} + \frac{64d}{5}$$

$$\int_{-2}^{2} |x|p(x)dx = \int_{-2}^{2} |x|(a + bx + cx^2 + dx^4)dx = 2\left[\frac{a \cdot 2^2}{2} + \frac{c \cdot 2^4}{4} + \frac{d \cdot 2^6}{6}\right] = 4a + 8c + \frac{64d}{3}$$

Por tanto, tenemos que:

$$L(p) = 8a + \frac{40c}{3} + \frac{512d}{15}$$

Para probar la existencia de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que se tiene lo pedido, basta con ver que lo anterior es una combinación lineal de los $L_i(f)$; y para ello, basta con comprobar que c y d son una combinación lineal de los $L_i(f)$, ya que a y b ya lo son. Observando el sistema vemos que esto se tiene (no van a quedar multiplicándose ni dividiéndose, solo sumando), luego queda demostrada la existencia de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que se tiene lo pedido.

Para obtener el peso de $f'(0)$, basta con obtener el coeficiente de b en la expresión de $L(p)$. Vemos que no aparece explícitamente, y tampoco aparecerá en c ni en d (puesto que c, d dependerán de sí mismos y de a). Pore tanto, el peso de $f'(0)$ es 0.

Ejercicio 1.2.4.3. Considera la fórmula de cuadratura simple del trapecio en la forma

$$\int_a^b f(x)dx = T(a, b) + R(f).$$

1. Obtén la expresión del error $R(f)$ para f suficientemente regular.

   La fórmula del trapecio es:

   $$T(a, b) = \frac{b - a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

   El error de interpolación cometido es:

   $$E(x) = f[a, b, x]\Pi(x) \qquad \text{donde} \qquad \Pi(x) = (x - a)(x - b)$$

   Por tanto, el error cometido al aproximar la integral por la fórmula del trapecio es:

   $$R(f) = \int_a^b E(x)dx = \int_a^b f[a, b, x]\Pi(x)dx$$

   Como $\Pi(x)$ no cambia de signo en $[a, b]$ y es un polinomio de grado 2, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio Integral Generalizado. Por tanto, existe $\mu \in [a, b]$ tal que:

   $$R(f) = f[a, b, \mu]\int_a^b \Pi(x)dx$$

Calculamos dicha integral:

$$\int_a^b \Pi(x)dx = \int_a^b (x-a)(x-b)dx = \int_a^b (x^2-(a+b)x+ab)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{(a+b)x^2}{2} + abx\right]_a^b$$
$$= \frac{b^3-a^3}{3} - \frac{(a+b)(b^2-a^2)}{2} + ab(b-a) =$$
$$= \frac{b^3-a^3}{3} - \frac{(a+b)^2(b-a)}{2} + ab(b-a) =$$
$$= \frac{2b^3-2a^3-3a^2(b-a)-\cancel{6ab(b-a)}-3b^2(b-a)+\cancel{6ab(b-a)}}{6} =$$
$$= \frac{2b^3-2a^3-3a^2b+3a^3-3b^3+3b^2a}{6} =$$
$$= \frac{-b^3+a^3-3a^2b+3b^2a}{6} = \frac{(a-b)^3}{6}$$

Por tanto, el error cometido al aproximar la integral por la fórmula del trapecio es:

$$R(f) = f[a,b,\mu] \cdot \frac{(a-b)^3}{6}$$

Por las propiedades de las diferencias divididas, sabemos que $\exists \xi \in [a,b]$ tal que:

$$R(f) = -\frac{f''(\xi)(b-a)^3}{12}$$

2. Obtén la fórmula compuesta asociada y la correspondiente expresión del error.

   Tenemos que la fórmula compuesta asociada a la del trapecio es:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right) = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right)$$

   donde $h = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + ih$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

   El error de interpolación cometido al aproximar la integral por la fórmula compuesta del trapecio es:

$$R(f) = \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{f''(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)^3}{12} = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = -\frac{h^3 n}{12} \cdot f''(\xi)$$

   con $\xi \in [a,b]$, donde n es el número de subintervalos en los que se ha dividido el intervalo $[a,b]$. Por tanto:

$$R(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} \cdot f''(\xi)$$

3. Llama $h = b - a$. De forma similar a la vista en clase para la integración adaptativa con la fórmula de Simpson, obtén un criterio de estimación del error

$$\int_a^b f(x)dx - T(a,m) - T(m,b)$$

basado en $T(a,b)$, $T(a,m)$ y $T(m,b)$, siendo $m = \frac{a+b}{2}$.

Tenemos que:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T(a,m) - T(m,b)\right| = |T(a,b) + R(f) - T(a,m) - T(m,b)|$$

Por otro lado, se tiene que:

$$T(a,b) + R(f) = T(a,m) + T(m,b) - \frac{f''\left(\widetilde{\xi}\right)(b-a)^3}{12} \cdot \frac{1}{4}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T(a,m) - T(m,b)\right| = \left|-\frac{f''\left(\widetilde{\xi}\right)(b-a)^3}{12} \cdot \frac{1}{4}\right|$$

Supongamos ahora por hipótesis que $f''(\xi) \approx f''\left(\widetilde{\xi}\right)$, y por tanto:

$$T(a,b) - \frac{f''\left(\widetilde{\xi}\right)(b-a)^3}{12} \approx T(a,m) + T(m,b) - \frac{f''\left(\widetilde{\xi}\right)(b-a)^3}{12} \cdot \frac{1}{4}$$

Despejando:

$$\frac{3}{4}f''\left(\widetilde{\xi}\right)(b-a)^3 \approx T(a,b) - T(a,m) - T(m,b) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{f''\left(\widetilde{\xi}\right)(b-a)^3}{12} \approx \frac{4}{3}\left(T(a,b) - T(a,m) - T(m,b)\right)$$

Por tanto, la aproximación del error cometido es:

$$\frac{1}{3}\left|T(a,b) - T(a,m) - T(m,b)\right|$$

4. Estima el error cometido en la aproximación en dos subintervalos

$$\int_4^8 \left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) dx \approx T(4,6) + T(6,8) = 4{,}0054471$$

sabiendo que $f(4) = 1{,}0045789$, $f(6) = 1{,}0004131$ y $f(8) = 1{,}0000419$.

Calculamos $T(a,b) = T(4,8)$:

$$T(4,8) = \frac{8-4}{2}\left(f(4) + f(8)\right) = 4{,}0092416$$

Por tanto, tenemos que:

$$\frac{1}{3}\left|T(4,8) - T(4,6) - T(6,8)\right| = \frac{1}{3}\left|4{,}0092416 - 4{,}0054471\right| \approx 1{,}2648333 \cdot 10^{-3}$$

Ejercicio 1.2.4.4. Se pretende aproximar una integral del tipo

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx$$

utilizando tres nodos, es decir:

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

1. Si fijamos los nodos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, determina el valor de los parámetros para que sea una fórmula de tipo interpolatorio, así como el orden de exactitud de dicha fórmula.

   Suponemos que pide una fórmula de tipo interpolatorio clásico. Obtenemos los coeficientes α_0, α_1 y α_2 imponiendo exactitud. En primer lugar, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1-x^2)dx &= 2\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3} \\
\int_{-1}^{1} x(1-x^2)dx &= 0 \\
\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx &= 2\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right] = \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

   Por tanto, tras imponer exactitud, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{4}{3} \\ -\alpha_0 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_2 = \dfrac{4}{15} \end{cases}$$

   Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{2}{15} \qquad \alpha_1 = \frac{16}{15}$$

   Por tanto, la fórmula de tipo interpolatorio es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx \approx \frac{2}{15}\left(f(-1) + 8f(0) + f(1)\right)$$

   Para determinar el orden de exactitud, tenemos que ver si la fórmula es exacta en $\{x^3, x^4\}$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^3(1-x^2)dx &= 0 \neq \frac{2}{15}(-1+1) = 0 \\
\int_{-1}^{1} x^4(1-x^2)dx &= 2\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right] = \frac{4}{35} \neq \frac{2}{15}(1+0+1) = \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

   Por tanto, la fórmula es exacta en $\{1, x, x^2, x^3\}$, pero no en $\{x^4\}$. Por tanto, el orden de exactitud es 3.

2. ¿Cuáles serían los nodos si utilizamos una fórmula de Newton-Cotes abierta?

   Como buscamos 3 nodos, estos deben estar equiespaciados en $]-1,1[$. Por tanto, los nodos serían:

$$x_0 = -\frac{1}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

3. Determina la fórmula gaussiana correspondiente así como la expresión del error.

   Como buscamos que sea gaussiana, ha de tener grado de exactitud $2\cdot 2+1=5$. Por tanto, imponemos exactitud en $\{\Pi(x), x\Pi(x), x^2\Pi(x)\}$, donde:

$$\Pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = x^3+ax^2+bx+c$$

   Calculamos los coeficientes a, b y c, para lo cual antes calcularemos las siguientes integrales:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \Pi(x)dx &= \int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx+c)dx = 2\left[\frac{a}{3}+c\right]\\
\int_{-1}^{1} x\Pi(x)dx &= \int_{-1}^{1} x(x^3+ax^2+bx+c)dx = 2\left[\frac{1}{5}+\frac{b}{3}\right]\\
\int_{-1}^{1} x^2\Pi(x)dx &= \int_{-1}^{1} x^2(x^3+ax^2+bx+c)dx = 2\left[\frac{a}{5}+\frac{c}{3}\right]\\
\int_{-1}^{1} x^3\Pi(x)dx &= \int_{-1}^{1} x^3(x^3+ax^2+bx+c)dx = 2\left[\frac{1}{7}+\frac{b}{5}\right]\\
\int_{-1}^{1} x^4\Pi(x)dx &= \int_{-1}^{1} x^4(x^3+ax^2+bx+c)dx = 2\left[\frac{a}{7}+\frac{c}{5}\right]
\end{aligned}$$

   Imponiendo exactitud, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)\Pi(x)dx = 2\left[\frac{a}{3}+c\right]-2\left[\frac{a}{5}+\frac{c}{3}\right] = 2\left[\frac{2}{15}a+\frac{2}{3}c\right] = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{5}a+c\right]\\
0 &= \int_{-1}^{1} x(1-x^2)\Pi(x)dx = 2\left[\frac{1}{5}+\frac{b}{3}\right]-2\left[\frac{1}{7}+\frac{b}{5}\right] = 2\left[\frac{2}{35}+\frac{2}{15}b\right] = \frac{4}{5}\left[\frac{1}{7}+\frac{1}{3}b\right]\\
0 &= \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)\Pi(x)dx = 2\left[\frac{a}{5}+\frac{c}{3}\right]-2\left[\frac{a}{7}+\frac{c}{5}\right] = 2\left[\frac{2}{35}a+\frac{2}{15}c\right] = \frac{4}{5}\left[\frac{1}{7}a+\frac{1}{3}c\right]
\end{aligned}$$

   Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$b = {}^{-3}/_{7}, \quad a=c=0.$$

   Por tanto, tenemos:

$$\Pi(x) = x^3-\frac{3}{7}x = x\left(x^2-\frac{3}{7}\right)$$

Por tanto, los nodos son:

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{7}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

Y la fórmula gaussiana es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx \approx \alpha_0 f\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$$

Para obtener los coeficientes α_0, α_1 y α_2, imponemos exactitud en $\{1, x, x^2\}$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1-x^2)dx &= 2\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3} = \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 \\
\int_{-1}^{1} x(1-x^2)dx &= 0 = \sqrt{\frac{3}{7}}\,(\alpha_2-\alpha_0) \\
\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx &= 2\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right] = \frac{4}{15} = \frac{3}{7}\,(\alpha_0+\alpha_2)
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{14}{45}, \quad \alpha_1 = \frac{32}{45}$$

Por tanto, la fórmula gaussiana es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx \approx \frac{2}{45}\left[7f\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + 16f(0) + 7\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)\right]$$

Respecto al error, tenemos que:

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot\int_{-1}^{1}(1-x^2)x^2\left(x^2-\frac{3}{7}\right)^2 dx$$

Calculamos la integral:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)x^2\left(x^2-\frac{3}{7}\right)^2 dx = 2\int_{0}^{1}(1-x^2)x^2\left(x^2-\frac{3}{7}\right)^2 dx = \frac{32}{2205}$$

Por tanto, el error es:

$$R(f) = \frac{16f^{(4)}(\xi)}{735} \qquad \text{con } \xi\in[-1,1].$$

4. Utiliza las fórmulas de los apartados 1 y 3 para aproximar

$$\int_{-1}^{1}\cos(x^2)(1-x^2)dx$$

Para el apartado 1, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\cos(x^2)(1-x^2)dx &\approx \frac{2}{15}\left[\cos(1)+8\cos(0)+\cos(1)\right] = \frac{2}{15}\left[\cos(-1)+8\cos(0)+\cos(1)\right]\\ &= \frac{2}{15}\left[2\cos(1)+8\right]\approx 1{,}210747\end{aligned}$$

Para el apartado 3, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\cos(x^2)(1-x^2)dx &\approx \frac{2}{45}\left[7\cos\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right)+16\cos(0)+7\cos\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)\right]\\ &= \frac{2}{45}\left[14\cos\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)+16\right]\approx 1{,}204694\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.4.5. Se considera la fórmula de integración numérica

$$\int_{-1}^{2} f(x)xdx \approx a_0 f(0)+a_1 f(2)+a_2 f'(0)+a_3 f'(2).$$

1. Determina los coeficientes a_0, a_1, a_2 y a_3 para que la fórmula anterior sea de tipo interpolatorio.

   Imponemos exactitud en $\{1, x, x^2, x^3\}$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} xdx &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2} = a_0+a_1\\ \int_{-1}^{2} x^2dx &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{8+1}{3} = 3 = 2a_1+a_2+a_3\\ \int_{-1}^{2} x^3dx &= \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} = \frac{16-1}{4} = \frac{15}{4} = 4a_1+4a_3\\ \int_{-1}^{2} x^4dx &= \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{2} = \frac{32+1}{5} = \frac{33}{5} = 8a_1+3\cdot 2^2\cdot a_3\end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_0+a_1 = 3/2\\ 2a_1+a_2+a_3 = 3\\ 4a_1+4a_3 = 15/4\\ 8a_1+12a_3 = 33/5\end{cases}$$

   Por tanto, resolviendo el sistema, obtenemos:

$$a_0 = \frac{27}{80},\qquad a_1 = \frac{93}{80},\qquad a_2 = \frac{9}{10},\qquad a_3 = -\frac{9}{40}.$$

   Por tanto, la fórmula de integración numérica es:

$$\int_{-1}^{2} f(x)xdx \approx \frac{3}{10}\left[\frac{9}{8}f(0)+\frac{31}{8}f(2)+3f'(0)-\frac{3}{4}f'(2)\right].$$

2. Indica el grado de exactitud de la fórmula anterior. ¿Es el grado de exactitud superior al esperado?

   Veamos si es exacta en x^4:
$$\int_{-1}^{2} x^4 x dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_{-1}^{2} = \frac{64-1}{6} = \frac{63}{6} = \frac{21}{2} \neq \frac{3}{10}\left[\frac{9}{8}\cdot 0 + \frac{31}{8}\cdot 2^4 + 3\cdot 0 - \frac{3}{4}\cdot 4\cdot 2^3\right] =$$
$$= \frac{3}{10}[2\cdot 31 - 3\cdot 8] = \frac{57}{5}$$

   Por tanto, la fórmula no es exacta en x^4, pero sí lo es en $\{1, x, x^2, x^3\}$. Por tanto, el grado de exactitud es 3, que es el esperado.

3. Si se pretende utilizar una fórmula gaussiana con 2 nodos para aproximar la integral, determina cuáles serían dichos nodos y la expresión del error cometido en la aproximación.

   Para que sea gaussiana, ha de tener grado de exactitud $2\cdot 1+1 = 3$. Para ello, definimos el polinomio:
$$\Pi(x) = (x-x_0)(x-x_1) = x^2 + ax + b$$

   Imponemos exactitud en $\{\Pi(x), x\Pi(x)\}$ para obtener los nodos:
$$0 = \int_{-1}^{2} x\Pi(x)dx = \int_{-1}^{2} x(x^2+ax+b)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2\right]_{-1}^{2} =$$
$$= \frac{16-1}{4} + \frac{a}{3}\cdot(8+1) + \frac{b}{2}\cdot(4-1) = \frac{15}{4} + 3a + \frac{3b}{2}$$
$$0 = \int_{-1}^{2} x^2\Pi(x)dx = \int_{-1}^{2} x^2(x^2+ax+b)dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3\right]_{-1}^{2} =$$
$$= \frac{32+1}{5} + \frac{a}{4}\cdot(16-1) + \frac{b}{3}\cdot(8+1) = \frac{33}{5} + \frac{15a}{4} + 3b$$

   Por tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} 15/4 + 3a + 3b/2 = 0 \\ 33/5 + 15a/4 + 3b = 0 \end{cases}$$

   Resolviendo el sistema, obtenemos:
$$a = -\frac{2}{5}, \quad b = -\frac{17}{10}$$

   Por tanto, tenemos que:
$$\Pi(x) = x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{17}{10}$$

   Los nodos son las raíces de $\Pi(x)$, que son:
$$x_0 = \frac{2-\sqrt{174}}{10}, \quad x_1 = \frac{2+\sqrt{174}}{10}$$

La fórmula gaussiana por tanto es:

$$\int_{-1}^{2} f(x)xdx \approx \alpha_0 f\left(\frac{2-\sqrt{174}}{10}\right) + \alpha_1 f\left(\frac{2+\sqrt{174}}{10}\right)$$

Para obtener los coeficientes α_0 y α_1, imponemos exactitud en $\{1, x\}$:

$$\int_{-1}^{2} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2} = \alpha_0 + \alpha_1$$

$$\int_{-1}^{2} x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{8+1}{3} = 3 = \alpha_0 \cdot \frac{2-\sqrt{174}}{10} + \alpha_1 \cdot \frac{2+\sqrt{174}}{10}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\alpha_0 = \frac{3}{4} - \frac{9\sqrt{174}}{116}, \quad \alpha_1 = \frac{3}{4} + \frac{9\sqrt{174}}{116}.$$

Por tanto, la fórmula gaussiana es:

$$\int_{-1}^{2} f(x)xdx \approx \left(\frac{3}{4} - \frac{9\sqrt{174}}{116}\right) f\left(\frac{2-\sqrt{174}}{10}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{9\sqrt{174}}{116}\right) f\left(\frac{2+\sqrt{174}}{10}\right)$$

Respecto al error cometido, tenemos que $\exists \xi \in [-1, 2]$ tal que:

$$R(f) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \cdot \int_{-1}^{2} x\Pi^2(x)dx$$

Calculemos la integral:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} x\Pi^2(x)dx &= \int_{-1}^{2} x\left(x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{17}{10}\right)^2 dx = \\ &= \int_{-1}^{2} x^5 - \frac{4}{5}x^4 - \frac{81}{25}x^3 + \frac{34}{25}x^2 + \frac{289}{100}xdx = \frac{297}{200}\end{aligned}$$

Por tanto, el error cometido es:

$$R(f) = \frac{99}{1600} f^{(4)}(\xi).$$

Ejercicio 1.2.4.6. Se pretende aproximar la integral

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = S_n(f) + R(f)$$

donde $S_n(f)$ es una fórmula de integración compuesta obtenida al hacer una partición uniforme del intervalo $[a, b]$ de la forma:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad x_i = x_{i-1} + h, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

y $R(f)$ es el error de integración numérica que tiene el siguiente desarrollo:

$$R(f) = a_1h^3 + a_2h^6 + \cdots + a_mh^{3m} + \cdots$$

Siguiendo el mismo argumento de la integración de Romberg, combina $S_n(f)$ con $S_{3n}(f)$ para obtener una aproximación más precisa para la integral. Aplica recursivamente el método.

Triplicando el número de subintervalos, obtenemos:

$$\int_a^b f(x)dx = S_{3n}(f) + a_1 \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^3 + a_2 \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^6 + \cdots + a_m \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^{3m} + \cdots$$

Combinando las dos aproximaciones, obtenemos:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3^3S_{3n}(f) - S_n(f)}{3^3 - 1} + \frac{1 - 3^3}{3^3} \cdot a_2h^6 + \cdots$$

Definimos por tanto como sigue la recursión para cada $j \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{0, 1, \ldots, j\}$:

$$\begin{aligned} R(j, 0) &= S_{3^jn}(f) \\ R(j, k) &= \frac{3^{3k}R(j, k-1) - R(j-1, k-1)}{3^{3k} - 1} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.4.7. A veces, para construir fórmulas de integración numérica es posible utilizar nodos que se encuentran fuera del intervalo de integración. Considera la fórmula:

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{5h}{12}f(a+h) + \frac{2h}{3}f(a) - \frac{h}{12}f(a-h) + R(f)$$

1. Demuestra que es de tipo interpolatorio y determina el grado de exactitud.

   Imponemos exactitud en $\{1, x, x^2, \ldots\}$:

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+h} 1dx &= h = \frac{5h}{12} + \frac{2h}{3} - \frac{h}{12} = h \\
\int_a^{a+h} xdx &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^{a+h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{2} = \frac{2ah + h^2}{2} = \frac{5h}{12}(a+h) + \frac{2h}{3}a - \frac{h}{12}(a-h) \\
\int_a^{a+h} x^2dx &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^{a+h} = \frac{(a+h)^3 - a^3}{3} = \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{3} = a^2h + ah^2 + \frac{h^3}{3} = \\
&= \frac{5h}{12}\left(a^2 + 2ah + h^2\right) + \frac{2h}{3}a^2 - \frac{h}{12}(a^2 - 2ah + h^2) \\
\int_a^{a+h} x^3dx &= \left[\frac{x^4}{4}\right]_a^{a+h} = \frac{(a+h)^4 - a^4}{4} = \frac{4a^3h + 6a^2h^2 + 4ah^3 + h^4}{4} \neq \\
&\neq \frac{5h}{12}(a+h)^3 + \frac{2h}{3}a^3 - \frac{h}{12}(a-h)^3 = \\
&= \frac{5h}{12}\left(a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3\right) + \frac{2h}{3}a^3 - \frac{h}{12}\left(a^3 - 3a^2h + 3ah^2 - h^3\right)
\end{aligned}$$

   donde la última desigualdad se cumple porque los coeficientes de h^4 no coinciden. Por tanto, el grado de exactitud es 2.

2. Proporciona una expresión para el error de integración numérica asociado a la fórmula.

   El error de interpolación es:

   $$E(x) = f[a, a+h, a-h, x] \cdot \Pi(x)$$
   $$\Pi(x) = (x-(a+h))(x-a)(x-(a-h)) = [(x-a)^2 - h^2](x-a) = (x-a)^3 - h^2(x-a)$$

   Como $\Pi(x)$ no cambia de signo en el intervalo $[a, a+h]$, por el Teorema del Valor Medio de la Integral Generalizado, existe $\xi \in [a, a+h]$ tal que:

   $$R(f) = \int_a^{a+h} E(x)dx = f[a, a+h, a-h, \xi] \cdot \int_a^{a+h} \Pi(x)dx$$

   Calculamos la integral:

   $$\begin{aligned}\int_a^{a+h} \Pi(x)dx &= \int_a^{a+h} \left[(x-a)^3 - h^2(x-a)\right] dx = \left[\frac{(x-a)^4}{4} - \frac{h^2(x-a)^2}{2}\right]_a^{a+h} \\ &= \left[\frac{h^4}{4} - \frac{h^2 \cdot h^2}{2}\right] = -\frac{h^4}{4}\end{aligned}$$

   Por tanto, el error de integración numérica es:

   $$R(f) = -\frac{h^4}{4} f[a, a+h, a-h, \xi].$$

   Por las propiedades de las diferencias divididas, tenemos que $\exists \eta \in [a-h, a+h]$ tal que:

   $$R(f) = -\frac{h^4}{24} f^{(3)}(\eta).$$

3. Deduce la fórmula compuesta asociada a dicha fórmula.

   Sea n el número de subintervalos en los que se divide el intervalo $[a, a+h]$. Entonces, tenemos que:

   $$\int_a^{a+h} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{5\widetilde{h}}{12} f(x_{i+1}) + \frac{2\widetilde{h}}{3} f(x_i) - \frac{\widetilde{h}}{12} f(x_{i-1})\right]$$

Ejercicio 1.2.4.8 (DGIIM 2023/24)**.** Se considera la fórmula de integración numérica

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + R(f).$$

1. Determina los nodos y los coeficientes para que la fórmula anterior tenga grado de exactitud máximo. ¿Cuál es ese grado de exactitud?

   Para obtener la fórmula Gaussiana, el grado de exactitud máximo es $2 \cdot 1 + 1 = 3$. Para ello, definimos el polinomio:

   $$\Pi(x) = (x-x_0)(x-x_1) = x^2 + ax + b$$

Imponemos exactitud en $\{\Pi(x), x\Pi(x)\}$ para obtener los nodos, pero previamente:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \Pi(x)dx &= \int_{-1}^{1} (x^2+ax+b)dx = 2\left[\frac{1}{3}+0+b\right] = \frac{2}{3}+2b \\
\int_{-1}^{1} x\Pi(x)dx &= \int_{-1}^{1} x(x^2+ax+b)dx = 2\left[0\frac{a}{3}+0\right] = \frac{2a}{3} \\
\int_{-1}^{1} x^2\Pi(x)dx &= \int_{-1}^{1} x^2(x^2+ax+b)dx = 2\left[\frac{1}{5}+0+\frac{b}{3}\right] = \frac{2}{5}+\frac{2b}{3} \\
\int_{-1}^{1} x^3\Pi(x)dx &= \int_{-1}^{1} x^3(x^2+ax+b)dx = 2\left[0+\frac{a}{5}+0\right] = \frac{2a}{5}
\end{aligned}$$

Por tanto, imponiendo exactitud en $\{\Pi(x), x\Pi(x)\}$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-1}^{1} \Pi(x)(1-x^2)dx = \frac{2}{3}+2b-\frac{2}{5}-\frac{2b}{3} = \frac{4}{15}+\frac{4b}{3} \Longrightarrow b = -\frac{1}{5} \\
0 &= \int_{-1}^{1} x\Pi(x)(1-x^2)dx = \frac{2a}{3}-\frac{2a}{5} = \frac{4a}{15} \Longrightarrow a = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\Pi(x) = x^2 - \frac{1}{5}$$

Los nodos son las raíces de $\Pi(x)$, que son:

$$x_0 = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

La fórmula gaussiana por tanto es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx \approx \alpha_0 f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \alpha_1 f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

Para obtener los coeficientes α_0 y α_1, imponemos exactitud en $\{1, x\}$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1-x^2)dx &= 2\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3} = \alpha_0+\alpha_1 \\
\int_{-1}^{1} x(1-x^2)dx &= 0 = \frac{\sqrt{5}}{5}(\alpha_1-\alpha_0)
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{2}{3}$$

Por tanto, la fórmula gaussiana es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx \approx \frac{2}{3}\left[f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right]$$

El grado de exactitud es 3, que es el máximo posible.

2. Obtén la expresión del error de dicha fórmula.

   El error cometido es:

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)\Pi^2(x)dx$$

   Calculamos la integral:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1-x^2)\Pi^2(x)dx &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)\left(x^2 - \frac{1}{5}\right)^2 dx = 2\int_{0}^{1} (1-x^2)\left(x^4 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{25}\right) dx \\
&= 2\int_{0}^{1} -x^6 + \frac{7}{5}x^4 - \frac{11}{25}x^2 + \frac{1}{25}dx = \\
&= 2\left[-\frac{1}{7} + \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{5} - \frac{11}{25}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{25}\right] = \frac{32}{525}
\end{aligned}$$

   Por tanto, el error de integración numérica es:

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \frac{32}{525} = \frac{16 f^{(4)}(\xi)}{175}.$$

   donde $\xi \in [-1, 1]$.

3. Utiliza la fórmula anterior para estimar el valor de

$$\int_{-1}^{1} \ln(x^2+1)(1-x^2)dx.$$

   Utilizando la fórmula gaussiana obtenida, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \ln(x^2+1)(1-x^2)dx &\approx \frac{2}{3}\left[\ln\left(\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 1\right) + \ln\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 1\right)\right] \\
&= \frac{4}{3}\left[2\ln\left(\frac{5}{25} + 1\right)\right] = \frac{4}{3}\cdot\ln\left(\frac{6}{5}\right) \approx 0{,}24309
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.4.9 (DGIIM 2023/24)**.** Considera la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio:

$$\int_{a}^{a+h} f(x)dx = \frac{3h}{4}f(a) + \frac{h}{4}f(a+2h) + R(f).$$

1. Proporciona una expresión para el error de integración numérica asociado a la fórmula.

   El error de interpolación es:

$$\begin{aligned}
E(x) &= f[a, a+2h, x]\cdot\Pi(x) \\
\Pi(x) &= (x-a)(x-(a+2h))
\end{aligned}$$

Como $\Pi(x)$ no cambia de signo en el intervalo $[a, a+h]$, por el Teorema del Valor Medio de la Integral Generalizado, existe $\xi \in [a, a+h]$ tal que:

$$R(f) = \int_a^{a+h} E(x)dx = f[a, a+2h, \xi] \cdot \int_a^{a+h} \Pi(x)dx$$

Calculamos la integral:

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+h} \Pi(x)dx &= \int_a^{a+h} (x-a)(x-(a+2h))dx = \int_a^{a+h} (x^2 - 2(a+h)x + a(a+2h))dx = \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - (a+h)x^2 + a(a+2h)x\right]_a^{a+h} = \\
&= \left[\frac{(a+h)^3 - a^3}{3} - (a+h)\left((a+h)^2 - a^2\right) + a(a+2h)(a+h-a)\right] = \\
&= \left[\frac{3a^2h + 3h^2a + h^3}{3} - (a+h)\left(2ah + h^2\right) + ah(a+2h)\right] = \\
&= \cancel{a^2h} + \cancel{ah^2} + \frac{h^3}{3} - \cancel{2a^2h} - \cancel{ah^2} - \cancel{2ah^2} - h^3 + \cancel{a^2h} + \cancel{2ah^2} = -\frac{2h^3}{3}
\end{aligned}$$

Por tanto, el error de integración numérica es:

$$R(f) = -\frac{2h^3}{3} f[a, a+2h, \xi].$$

Por las propiedades de las diferencias divididas, tenemos que $\exists \eta \in [a, a+2h]$ tal que:

$$R(f) = -\frac{h^3}{3} f^{(2)}(\eta).$$

2. Deduce la fórmula compuesta asociada a dicha fórmula incluyendo una expresión del error.

Sea n el número de subintervalos en los que se divide el intervalo $[a, a+h]$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+h} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{3\widetilde{h}}{4} f(x_i) + \frac{\widetilde{h}}{4} f(x_{i+2})\right] = \\
&= \frac{3\widetilde{h}}{4}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{\widetilde{h}}{4}\left[f(x_n) + f(x_{n+1})\right] + \widetilde{h} \sum_{i=2}^{n-1} f(x_i)
\end{aligned}$$

Respecto al error, tenemos que:

$$R(f) = \sum_{i=0}^{n-1} R_i(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(-\frac{\widetilde{h}^3}{3} f^{(2)}(\eta_i)\right) = -\frac{\widetilde{h}^3}{3} \sum_{i=0}^{n-1} f^{(2)}(\eta_i) = -\frac{\widetilde{h}^3 n}{3} f^{(2)}(\xi) = -\frac{h \cdot \widetilde{h}^2}{3} f^{(2)}(\xi)$$

donde $\xi \in [a, a+2h]$.

3. Deduce un método multipaso lineal para aproximar la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = f(f, x) \\ x(t_0) = \mu \end{cases}$$

Ejercicio 1.2.4.10. Considerar la fórmula numérica siguiente:

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)\ dx = \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1) + R(f)$$

1. Hallar los valores de α_0, α_1 y α_2.

   Calculamos cada uno de los polinomios básicos de Lagrange:

$$\ell_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x(x-1)}{(-1)(-2)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$\ell_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{(x+1)(x-1)}{1(-1)} = -(x+1)(x-1)$$

$$\ell_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 2}}^{2} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x(x+1)}{(2)1} = \frac{x(x+1)}{2}$$

   Multiplicamos ahora cada uno de los polinomios por la función peso:

$$\ell_0(x)(1-x^2) = -\ell_0(x)(x+1)(x-1) = -\frac{x(x-1)^2(x+1)}{2} = -\frac{1}{2}(x^4 - x^3 - x^2 + x)$$
$$\ell_1(x)(1-x^2) = -\ell_1(x)(x+1)(x-1) = (x+1)^2(x-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$$
$$\ell_2(x)(1-x^2) = -\ell_2(x)(x+1)(x-1) = -\frac{x(x+1)^2(x-1)}{2} = -\frac{1}{2}(x^4 + x^3 - x^2 - x)$$

   Calculamos ahora los valores de α_0, α_1 y α_2:

$$\alpha_0 = \int_{-1}^{1} \ell_0(x)(1-x^2)\ dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^4 - x^3 - x^2 + x)\ dx = -\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{15}$$
$$\alpha_1 = \int_{-1}^{1} \ell_1(x)(1-x^2)\ dx = \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\ dx = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{16}{15}$$
$$\alpha_2 = \int_{-1}^{1} \ell_2(x)(1-x^2)\ dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^4 + x^3 - x^2 - x)\ dx = \frac{2}{15}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)\ dx &\approx \int_{-1}^{1} \left[\ell_0(x)f(-1) + \ell_1(x)f(0) + \ell_2(x)f(1)\right](1-x^2)\ dx \\
&= \left(\int_{-1}^{1} \ell_0(x)(1-x^2)\ dx\right) f(-1) + \left(\int_{-1}^{1} \ell_1(x)(1-x^2)\ dx\right) f(0) + \\
&\quad + \left(\int_{-1}^{1} \ell_2(x)(1-x^2)\ dx\right) f(1) \\
&= \frac{2}{15} f(-1) + \frac{16}{15} f(0) + \frac{2}{15} f(1)
\end{aligned}$$

2. Hallar una expresión del error $R(f)$.

   Tenemos que la expresión del error cometido al aproximar $f(x)$ por el polinomio de interpolación de Lagrange de grado 2 es:

$$E(x) = f[-1,0,1,x]\Pi(x) \qquad \text{donde} \qquad \Pi(x) = \prod_{j=0}^{2}(x - x_j) = x(x-1)(x+1)$$

   Por tanto:

$$R(f) = L(E) = \int_{-1}^{1} E(x)(1-x^2)\,dx = \int_{-1}^{1} f[-1,0,1,x]\Pi(x)(1-x^2)\,dx$$

   Sabemos que $\Pi(x)$ cambia de signo en $x = 0$. Para evitar esto, hacemos uso de que:

$$f[-1,0,0,1,x] = \frac{f[-1,0,1,x] - f[-1,0,0,1]}{x-0} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow f[-1,0,1,x] = f[-1,0,0,1,x]x + f[-1,0,0,1]$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
R(f) &= \int_{-1}^{1} (f[-1,0,0,1,x]x + f[-1,0,0,1])\,x(x-1)(x+1)(1-x^2)\,dx = \\
&= -\int_{-1}^{1} \big(f[-1,0,0,1,x]x^2 + f[-1,0,0,1]x\big)\,(x-1)^2(x+1)^2\,dx = \\
&= -\int_{-1}^{1} f[-1,0,0,1,x]x^2(x-1)^2(x+1)^2\,dx - f[-1,0,0,1]\int_{-1}^{1} x(x-1)^2(x+1)^2\,dx
\end{aligned}$$

   Por el Teorema del Valor Medio Integral Generalizado, $\exists \mu \in [-1,1]$ tal que:

$$\begin{aligned}
R(f) &= -f[-1,0,0,1,\mu]\int_{-1}^{1} x^2(x-1)^2(x+1)^2\,dx - f[-1,0,0,1]\int_{-1}^{1} x(x-1)^2(x+1)^2\,dx = \\
&= -f[-1,0,0,1,\mu]\int_{-1}^{1}(x^6 - 2x^4 + x^2)\,dx - f[-1,0,0,1]\int_{-1}^{1}(x^5 - 2x^3 + x)\,dx = \\
&= -2f[-1,0,0,1,\mu]\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) - f[-1,0,0,1]\cdot 0 \\
&= -\frac{16}{105}\cdot f[-1,0,0,1,\mu]
\end{aligned}$$

   Suponiendo $f \in C^4[-1,1]$, $\exists \xi \in [-1,1]$ tal que:

$$R(f) = -\frac{16}{105}\cdot\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = -\frac{2}{315}\cdot f^{(4)}(\xi)$$

Ejercicio 1.2.4.11. Se pretende aproximar mediante integración de Romberg la integral:

$$\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx.$$

Calcula para ello $R(2,2)$.

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccc} f: & [1,3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1/x \end{array}$$

Buscamos construir la siguiente tabla:

$$\begin{array}{lll} R(0,0) & & \\ R(1,0) & R(1,1) & \\ R(2,0) & R(2,1) & R(2,2) \end{array}$$

Calculamos en primer lugar $R(i,0)$ para cada $i \in \{0,1,2\}$:

$$\begin{aligned}
R(0,0) &= T_1 = (3-1)\cdot\frac{f(3)-f(1)}{2} = \frac{4}{3} \\
R(1,0) &= T_2 = \frac{3-1}{2\cdot 2}\left(f(1) + 2\cdot f\left(1+\frac{3-1}{2}\right) + f(3)\right) = \frac{7}{6} \\
R(2,0) &= T_4 = \\
&= \frac{3-1}{4\cdot 2}\left(f(1) + 2\left[f\left(1+\frac{3-1}{4}\right) + f\left(1+2\cdot\frac{3-1}{4}\right) + f\left(1+3\cdot\frac{3-1}{4}\right)\right] + f(3)\right) = \\
&= \frac{67}{60}
\end{aligned}$$

Una vez obtenidos esos valores, calculamos $R(i,j)$ para $i,j = 1,2$, con $j < i$:

$$\begin{aligned}
R(1,1) &= \frac{4R(1,0)-R(0,0)}{3} = \frac{10}{9} \\
R(2,1) &= \frac{4R(2,0)-R(1,0)}{3} = \frac{11}{10} \\
R(2,2) &= \frac{4^2R(2,1)-R(1,1)}{15} = \frac{742}{675} \approx 1{,}09925925
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.4.12. Dada la regla de integración numérica

$$\int_a^b f(x)\,dx = L_n(f,h) + c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + \dots$$

¿Cómo se haría un procedimiento similar a la integración de Romberg con esta fórmula?

Tomando $h/2$, llegamos a que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = L_n\left(f, h/2\right) + c_1\cdot\frac{h}{2} + c_2\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^2 + c_3\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \dots$$

Buscamos ahora eliminar el término del error de orden h. Multiplicando por 2 esta expresión y restándole la original, obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= 2L_n\left(f, {}^h\!/\!_2\right) - L_n(f,h) + c_1\cdot(h-h) + c_2\cdot\left(2\left(\frac{h}{2}\right)^2 - h^2\right) + c_3\cdot\left(2\left(\frac{h}{2}\right)^3 - h^3\right) + \dots\\ &= 2L_n\left(f, {}^h\!/\!_2\right) - L_n(f,h) - c_2\cdot\left(\frac{h^2}{2}\right) - c_3\cdot\left(\frac{3h^3}{4}\right) + \dots\end{aligned}$$

Hemos conseguido eliminar el término de orden h, pero nos quedan los términos de orden h^2 y h^3. De forma similar a la integración de Romberg, podemos definir los siguientes términos:

$$\begin{aligned}L(i,0) &= L_n(f, {}^h\!/\!_{2^i}), \qquad i = 0,1,\dots\\ L(i,j) &= \frac{2^jL(i,j-1) - L(i-1,j-1)}{2^j-1}, \quad i,j\in\{0,1,\dots\}, \quad j\leqslant i\end{aligned}$$

De esta forma, podemos aproximar la integral de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx L(N,N)$$

donde N es el número de pasos que hemos dado.

1.3. Problemas de Valores Iniciales (PVI)

1.3.1. Relación 1

En la mayoría de los ejercicios se hace referencia al problema de valores iniciales (PVI) siguiente:

$$x' = f(t, x), \quad f : D = [a = t_0, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x(t_0) = \mu, \quad (t_0, \mu) \in D \tag{1.3}$$

siendo $x = x(t)$ una función desconocida de t.

Ejercicio 1.3.1.1. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ continua y lipschitziana en su segunda variable con constante de Lipschitz M, y $f \in C^1(D)$. Sea $h = \frac{b-a}{N}$, con $N \in \mathbb{N}$. Se considera el método de Euler para resolver el PVI (1.3) con tamaño de paso h. Demuestre que:

- Si $M = 0$, entonces $|e_n| \leqslant \frac{(b-a)M^*}{2}h$ para todo $n = 0, \dots, N$.
- Si $M > 0$, entonces $|e_n| \leqslant \dfrac{e^{(b-a)M} - 1}{M} \cdot \frac{M^*}{2}h$ para todo $n = 0, \dots, N$,

donde e_n es el error de truncatura global del método en el punto t_n, y M^* es tal que $|x''(t)| \leqslant M^*$ para todo $t \in [a, b]$, siendo $x(t)$ la única solución de (1.3).

Ejercicio 1.3.1.2. Demuestre que el PVI $x' = {}^{-1}\!/_{2}x$, $x(0) = 2$ tiene una única solución en $[0, 1]$ y halle una cota del error de truncatura global en cada nodo del método de Euler de tamaño de paso h para aproximar dicha solución.

Ejercicio 1.3.1.3. Demuestre que si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y lipschitziana en su segunda variable, entonces el método del punto medio para resolver el PVI (1.3) es estable, consistente con (1.3) y converge a la solución de (1.3).

Buscamos obtener el método del punto medio para resolver el PVI (1.3). Tenemos que:

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(s)\, ds = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s))\, ds$$

Para aproximar la integral anterior, utilizamos el método del punto medio visto en integración numérica:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s))\, ds \approx hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right)$$

Para obtener el valor de $x(t_n + {}^{h}\!/_{2})$, lo aproximamos como sigue:

$$x\left(t_n + \frac{h}{2}\right) \approx x(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, x(t_n))$$

Por tanto, el método del punto medio para resolver el PVI (1.3) queda definido por la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = x_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n)\right)$$

Veamos que Φ es lipschitziana. Supongamos que f lo es con constante L.

$$\begin{aligned}
|\Phi(z;t,h) - \Phi(w;t,h)| &= \left| f\left(t + \frac{h}{2}, z + \frac{h}{2}f(t,z)\right) - f\left(t + \frac{h}{2}, w + \frac{h}{2}f(t,w)\right) \right| \\
&\leqslant L \left| z + \frac{h}{2}f(t,z) - w - \frac{h}{2}f(t,w) \right| \\
&\leqslant L\,|z-w| + \frac{h}{2}L\,|f(t,z) - f(t,w)| \\
&\leqslant L\,|z-w| + \frac{h}{2}L^2\,|z-w| \\
&= \left(L + \frac{h}{2}L^2\right)|z-w|
\end{aligned}$$

Por tanto, Φ es lipschitziana con constante de Lipschitz $L + \frac{h}{2}L^2$. Su polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda - 1$$

Para ver que es estable, es necesario ver que el módulo de las raíces del polinomio característico es menor o igual que 1, y en el caso de que sea igual a 1, que la raíz sea simple. En este caso, la única raíz es $\lambda = 1$, que es simple, por lo que el método del punto medio es estable.

Para ver que es consistente con el PVI (1.3) empleando la caracterización de la consistencia, tenemos que:

- $p(1) = 0$, que se tiene.
- $\Phi(x(t_n), t_n, 0) = p'(1)f(t_n, x(t_n))$:

  $$\Phi(x(t_n), t_n, 0) = f\left(t_n, x(t_n)\right) = p'(1)f(t_n, x(t_n))$$

  Por tanto, se tiene también.

Por tanto, el método del punto medio es consistente con el PVI (1.3). Como es estable y consistente, converge a la solución del PVI (1.3).

Ejercicio 1.3.1.4. Razone la veracidad o falsedad de la afirmación siguiente: El método de Euler modificado (Heun) proporciona la solución exacta de la EDO dada por $x' = -2\lambda t$.

La solución exacta de la EDO $x' = -2\lambda t$ es:

$$x(t) = -\lambda t^2 + C$$

El método de Euler modificado (Heun) para resolver el PVI $x' = f(t,x)$ consiste en aplicar la fórmula de integración numérica del trapecio:

$$x_{n+1} - x_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s))\,ds \approx \frac{h}{2}\left(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})\right)$$

Para obtener x_{n+1}, se aproxima por el método de Euler:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$$

Por tanto, el método de Euler modificado (Heun) para resolver el PVI $x' = -2\lambda t$ queda definido por la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_n + hf(t_n, x_n))\right)$$

Aplicada al PVI $x' = -2\lambda t$, la ecuación en diferencias queda:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left(-2\lambda t_n + (-2\lambda(t_n + h))\right) = x_n - \lambda h(t_n + t_n + h) = x_n - \lambda h(2t_n + h)$$

Veamos si efectivamente el método de Euler modificado (Heun) proporciona la solución exacta de la EDO $x' = -2\lambda t$. Para ello, hemos de suponer que el dato inicial x_0 proporcionado cumple que $x_0 = x(t_0)$. Supuesto esto:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = x(t_{n+1}) &= x(t_n + h) = -\lambda(t_n + h)^2 + C \\
&= -\lambda(t_n^2 + 2t_nh + h^2) + C \\
&= -\lambda t_n^2 - 2\lambda t_nh - \lambda h^2 + C \\
&= x(t_n) - \lambda h(2t_n + h) \\
&= x_n - \lambda h(2t_n + h)
\end{aligned}$$

Por tanto, por inducción, demostramos que el método de Euler modificado (Heun) proporciona la solución exacta de la EDO $x' = -2\lambda t$ si el dato inicial x_0 es tal que $x_0 = x(t_0)$.

Ejercicio 1.3.1.5. Demuestre que si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y lipschitziana en su segunda variable, entonces el método de Runge-Kutta clásico para resolver el PVI (1.3) es estable, consistente con (1.3) y converge a la solución de (1.3).

El método de Runge-Kutta clásico para resolver el PVI (1.3) se define por la siguiente ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) \\
K_1 &= f(t_n, x_n) \\
K_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_1\right) \\
K_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_2\right) \\
K_4 &= f(t_n + h, x_n + hK_3)
\end{aligned}$$

Su polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda - 1$$

Para ver que es estable, es necesario ver que el módulo de las raíces del polinomio característico es menor o igual que 1, y en el caso de que sea igual a 1, que la raíz sea simple. En este caso, la única raíz es $\lambda = 1$, que es simple, por lo que el método de Runge-Kutta clásico es estable.

Para ver que es consistente con el PVI (1.3) empleando la caracterización de la consistencia, tenemos que:

- $p(1) = 0$, que se tiene.
- $\Phi(x(t_n), t_n, 0) = p'(1)f(t_n, x(t_n))$:
  En primer lugar, hemos de ver que si $h = 0$ entonces:
  $$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = f(t_n, x_n)$$
  Por tanto:
  $$\Phi(x(t_n), t_n, 0) = \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = \frac{1}{6} \cdot 6f(t_n, x_n) = p'(1)f(t_n, x_n)$$
  Por tanto, se tiene también.

Por tanto, el método de Runge-Kutta clásico es consistente con el PVI (1.3). Como es estable y consistente, converge a la solución del PVI (1.3).

Ejercicio 1.3.1.6. Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. Al aplicar el método de un paso del punto medio al problema $x'(t) = -x(t)+1$, $x(0) = 2$ se obtiene la solución numérica $\{t_n, x_n\}_{n=0}^N$ donde $x_n = A^n + 1$ con $A = 1 - h + \frac{h^2}{2}$.

   El método del punto medio para resolver el PVI $x' = f(t, x)$ se define por la siguiente ecuación en diferencias:
   $$x_{n+1} = x_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)\right)$$
   Aplicada al PVI $x' = -x + 1$, la ecuación en diferencias queda:
   $$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h\left(-x_n - \frac{h}{2}(-x_n + 1) + 1\right) \\ &= x_n + h\left(-x_n + \frac{h}{2}x_n - \frac{h}{2} + 1\right) \end{aligned}$$
   Demostramos ahora por inducción.

   - Para $n = 0$, tenemos que:
     $$x_0 = 2 = A^0 + 1$$
   - Supongamos que se cumple para n, y demostremos que se cumple para $n + 1$:
     $$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h\left(-x_n + \frac{h}{2}x_n - \frac{h}{2} + 1\right) \\ &= A^n + 1 + h\left(-A^n - 1 + \frac{h}{2}(A^n + 1) - \frac{h}{2} + 1\right) \\ &= A^n + 1 + h\left(-A^n + \frac{h}{2}A^n\right) \\ &= 1 + A^n + hA^n\left(-1 + \frac{h}{2}\right) \\ &= 1 + A^n\left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right) \\ &= 1 + A^{n+1} \end{aligned}$$

Por tanto, se cumple para $n+1$.

Por tanto, por inducción, se tiene demostrado para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. El orden de un método explícito de un paso cuya ecuación en diferencias es:

$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(x_n; t_n, h), \qquad n = 0, \dots, N-1$$

con $\Phi(x; t, h) = f(t, x) + \frac{h}{2}x''(t)$ es al menos 2.

Tenemos que calcular:

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= x(t_{n+1}) - x(t_n) - h\Phi(x(t_n); t_n, h) = \\ &= x(t_{n+1}) - x(t_n) - hf(t_n, x(t_n)) - \frac{h^2}{2}x''(t_n) = \\ &= x(t_n + h) - x(t_n) - hx'(t_n) - \frac{h^2}{2}x''(t_n) \end{aligned}$$

El desarrollo de Taylor de $x(t_n + h)$ alrededor de t_n es:

$$x(t_n + h) = x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{h^2}{2}x''(t_n) + O(h^3)$$

Por tanto, tenemos que:

$$R_{n+1} = O(h^3)$$

Por tanto, el orden del método es al menos 2.

Ejercicio 1.3.1.7. Demuestre que el PVI $x' = t - x$, $x(0) = 1$ tiene una única solución en $[0, 1]$. ¿Se puede aproximar dicha solución mediante:

- el método de Taylor de orden 2?
- el método de Heun?
- el método del punto medio?

¿Por qué? Escriba la ecuación en diferencias de cada uno de estos métodos para resolver el PVI considerado. ¿Ocurre algo reseñable?

Sea $x' = f(t, x)$, con:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & t - x \end{array}$$

Veamos que f es continua y lipschitziana en su segunda variable. La continuidad de f es inmediata, y para ver que es lipschitziana, sean $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |(t - x) - (t - y)| = |y - x| \leqslant 1 \cdot |x - y| \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Por tanto, f es lipschitziana en su segunda variable con constante de Lipschitz $M = 1$. Por tanto, el PVI tiene una única solución en $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Se puede aproximar mediante los tres métodos, veámoslo:

1. El método de Taylor de orden 2 para resolver el PVI $x' = f(t, x)$ es:

$$x_{n+1} \approx x(t_n + h) \approx x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{h^2}{2}x''(t_n)$$

   Para aproximar $x'(t_n)$ y $x''(t_n)$, utilizamos que:

$$\begin{aligned} x'(t_n) &= f(t_n, x(t_n)) = t_n - x(t_n) \approx t_n - x_n \\ x''(t_n) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, x(t_n)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_n, x(t_n))x'(t_n) = 1 - 1 \cdot (t_n - x(t_n)) \approx 1 - t_n + x_n \end{aligned}$$

   Por tanto, la ecuación en diferencias del método de Taylor de orden 2 para resolver el PVI $x' = t - x$ es:

$$x_{n+1} = x_n + h(t_n - x_n) + \frac{h^2}{2}(1 - t_n + x_n)$$

2. El método de Heun para resolver el PVI $x' = f(t, x)$ es:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_n + hf(t_n, x_n))\right) = \\ &= x_n + \frac{h}{2}\left((t_n - x_n) + (t_{n+1} - (x_n + h(t_n - x_n)))\right) = \\ &= x_n + \frac{h}{2}\left(2t_n - x_n + h - x_n - ht_n + hx_n\right) = \\ &= x_n + h(t_n - x_n) + \frac{h^2}{2}\left(1 - t_n + x_n\right) \end{aligned}$$

3. El método del punto medio para resolver el PVI $x' = f(t, x)$ es:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)\right) = \\ &= x_n + h\left(t_n + \frac{h}{2} - (x_n + \frac{h}{2}(t_n - x_n))\right) = \\ &= x_n + h(t_n - x_n) + \frac{h^2}{2}(1 - t_n + x_n) \end{aligned}$$

El aspecto resañable es que los tres métodos resultan en el mismo. Tiene como polinomio característico:

$$p(\lambda) = \lambda - 1$$

Por tanto, es estable. Veamos ahora si es consistente con el PVI (1.3) empleando la caracterización de la consistencia, tenemos que:

- $p(1) = 0$, que se tiene.
- $\Phi(x(t_n), t_n, 0) = p'(1)f(t_n, x(t_n))$:

$$\Phi(x(t_n), t_n, 0) = t_n - x(t_n) = f(t_n, x(t_n)) = p'(1)f(t_n, x(t_n))$$

  Por tanto, se tiene también.

Por tanto, este método es estable y consistente, luego converge a la solución del PVI (1.3).

Ejercicio 1.3.1.8. Demuestre que el PVI $x' = t^2x$, $x(0) = 1$ tiene una única solución $x(t)$ en $[0, 1]$. Demuestre que el método de Taylor de orden 2 y el método de Runge-Kutta clásico convergen a $x(t)$ y halle las aproximaciones de cada uno de estos dos métodos para el tamaño de paso $h = 0{,}2$.

Sea $x' = f(t, x)$, con:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & t^2x \end{array}$$

Veamos que f es continua y lipschitziana en su segunda variable. La continuidad de f es inmediata, y para ver que es lipschitziana, sean $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |t^2x - t^2y| = |t^2||x-y| \leqslant |x-y| \qquad \forall t \in [0,1]$$

Por tanto, f es lipschitziana en su segunda variable con constante de Lipschitz $M \leqslant 1$. Por tanto, el PVI tiene una única solución en $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

1. El método de Taylor de orden 2 para resolver el PVI $x' = f(t, x)$ es:

   $$x_{n+1} \approx x(t_n + h) \approx x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{h^2}{2}x''(t_n)$$

   Para aproximar $x'(t_n)$ y $x''(t_n)$, utilizamos que:

   $$\begin{aligned} x'(t_n) &= f(t_n, x(t_n)) = t_n^2x(t_n) \approx t_n^2x_n \\ x''(t_n) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, x(t_n)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_n, x(t_n))x'(t_n) = 2t_nx(t_n) + t_n^2(t_n^2x(t_n)) = (2t_n + t_n^4)x(t_n) \end{aligned}$$

   Por tanto, la ecuación en diferencias del método de Taylor de orden 2 para resolver el PVI $x' = t^2x$ es:

   $$x_{n+1} = x_n + ht_n^2x_n + \frac{h^2}{2}(2t_n + t_n^4)x_n$$

   Su polinomio característico es:

   $$p(\lambda) = \lambda - 1$$

   Para ver que es estable, es necesario ver que el módulo de las raíces del polinomio característico es menor o igual que 1, y en el caso de que sea igual a 1, que la raíz sea simple. En este caso, la única raíz es $\lambda = 1$, que es simple, por lo que el método de Taylor de orden 2 es estable.

   Para ver que es consistente con el PVI (1.3) empleando la caracterización de la consistencia, tenemos que:

   - $p(1) = 0$, que se tiene.

- $\Phi(x(t_n), t_n, 0) = p'(1)f(t_n, x(t_n))$:
$$\Phi(x(t_n), t_n, 0) = t_n^2 x(t_n) = f(t_n, x(t_n)) = p'(1)f(t_n, x(t_n))$$
Por tanto, se tiene también.

Por tanto, el método de Taylor de orden 2 es consistente con el PVI (1.3). Como es estable y consistente, converge a la solución del PVI (1.3).

Para $h = 0{,}2$, tenemos que:

$$x_{n+1} = x_n + 0{,}2t_n^2 x_n + 0{,}0002(2t_n + t_n^4)x_n$$

n	t_n	x_n
0	0	1
1	0,2	1
2	0,4	1,00808

2. El método de Runge-Kutta clásico para resolver el PVI $x' = f(t, x)$ se define por la siguiente ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 &= f(t_n, x_n) \\
K_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_1\right) \\
K_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_2\right) \\
K_4 &= f(t_n + h, x_n + hK_3)
\end{aligned}$$

Este método ya se ha visto que es convergente. La primera evaluación es:

n	t_n	K_1	K_2	K_3	K_4	x_n
0	0					1
1	0,2	0,04	0,01004	0,01001004	0,04008008032	1,004006005

Ejercicio 1.3.1.9. Utilizando el método de Runge-Kutta clásico para resolver el PVI $x' = f(t)$, $x(0) = \mu$, deduzca una conocida fórmula de integración numérica e indique de qué fórmula se trata.

El método de Runge-Kutta clásico para resolver el PVI $x' = f(t)$, $x(0) = \mu$ se define por la siguiente ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 &= f(t_n, x_n) = f(t_n) \\
K_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_1\right) = f\left(t_n + \frac{h}{2}\right) \\
K_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_2\right) = f\left(t_n + \frac{h}{2}\right) \\
K_4 &= f(t_n + h, x_n + hK_3) = f(t_n + h)
\end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s)\,ds = x(t_{n+1}) - x(t_n) \approx x_{n+1} - x_n = \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) = \\ = \frac{h}{6}\left(f(t_n) + 2f\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + 2f\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + f(t_n + h)\right) = \\ = \frac{h}{6}\left(f(t_n) + 4f\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + f(t_n + h)\right)\end{aligned}$$

Por tanto, el método de Runge-Kutta clásico para resolver el PVI $x' = f(t)$, $x(0) = \mu$ es equivalente a la fórmula simple de Simpson.

Ejercicio 1.3.1.10. Para el método de Runge-Kutta de 2 evaluaciones con arreglo de Butcher:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & \frac{1-\alpha}{2} & \frac{1+\alpha}{2} \end{array}$$

1. Determine el orden del método según los valores del escalar α.

   El método es:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h\left(\frac{1-\alpha}{2}K_1 + \frac{1+\alpha}{2}K_2\right) \\ K_1 &= f(t_n + 0\cdot h, x_n + h(0K_1 + 0K_2)) = f(t_n, x_n) \\ K_2 &= f\left(t_n + \alpha h, x_n + h(\alpha K_1 + 0K_2)\right) = f\left(t_n + \alpha h, x_n + \alpha h K_1\right)\end{aligned}$$

2. Para α adecuado para que el método tenga orden máximo, ¿cuál es el término principal del error local de truncatura?

3. ¿Es estable (cero-estable) el método para todo α si $f(t,x)$ es continua y lipschitziana respecto de x sobre D?

   El polinomio característico del método es:

$$p(\lambda) = \lambda - 1$$

   Para ver que es estable, es necesario ver que el módulo de las raíces del polinomio característico es menor o igual que 1, y en el caso de que sea igual a 1, que la raíz sea simple. En este caso, la única raíz es $\lambda = 1$, que es simple, por lo que el método de Runge-Kutta de 2 evaluaciones con arreglo de Butcher es estable.

Ejercicio 1.3.1.11. Considere el MML definido por:

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = h(b_0 f_n + b_1 f_{n+1})$$

1. Exprese los valores de a_0, b_0, b_1 respecto de a_1 para que el método sea de orden, al menos, 2.

   Tenemos que:

$$x_{n+2} = -a_1 x_{n+1} - a_0 x_n + h(b_0 f_n + b_1 f_{n+1})$$

Para que el método sea de orden, al menos, 2, hemos de cumplir que:

$$\begin{aligned}
0 &= C_0 = 1 + a_1 + a_0 \\
0 &= C_1 = 2 + 0a_0 + a_1 - b_0 - b_1 \\
0 &= C_2 = \frac{2^2}{2!} + \frac{0^2}{2!}a_0 + \frac{1^2}{2!}a_1 - \frac{1^1}{1!}b_1 = 4 + a_1 - 2b_1
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$a_0 = -1 - a_1, \qquad b_1 = \frac{4 + a_1}{2}, \qquad b_0 = 2 + a_1 - b_1 = \frac{4 + 2a_1 - 4 - a_1}{2} = \frac{a_1}{2}$$

2. Para la familia de métodos obtenida en el apartado anterior, ¿qué valor(es) de a_1 hacen el MML estable?

   Para estudiar la estabilidad del MML, hemos de estudiar el polinomio característico:

$$\begin{aligned}
&p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = \lambda^2 + a_1\lambda - 1 - a_1 = 0 \iff \\
&\iff \lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4 + 4a_1}}{2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{(a_1 + 2)^2}}{2} = \frac{-a_1 \pm (a_1 + 2)}{2} \iff \\
&\iff \lambda \in \{1, -a_1 - 1\}
\end{aligned}$$

   Tenemos que:

$$|-a_1 - 1| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant a_1 + 1 \leqslant 1 \iff a_1 \in [-2, 0]$$

   Si $a_1 = -2$, entonces 1 es una raíz doble, por lo que no es estable. Por tanto, el MML es estable si y solo si $a_1 \in]-2, 0]$.

3. ¿Qué métodos particulares se obtienen si $a_1 = 0$ y $a_1 = -1$?

   - Si $a_1 = 0$, entonces:

     $$a_0 = -1, \qquad b_0 = 0, \qquad b_1 = 2$$

     Por tanto, el MML es:

     $$x_{n+2} = x_n + 2hf_{n+1}$$

     En este caso, se trata del MML basado en la fórmula de cuadratura del punto medio aplicada al segumento $[t_n, t_{n+2}]$.

   - Si $a_1 = -1$, entonces:

     $$a_0 = 0, \qquad b_0 = {-1}/{2}, \qquad b_1 = {3}/{2}$$

     Por tanto, el MML es:

     $$\begin{aligned}
     x_{n+2} &= x_{n+1} + h\left(-\frac{1}{2}f_n + \frac{3}{2}f_{n+1}\right) = \\
     &= x_{n+1} + \frac{h}{2}\left(3f_{n+1} - f_n\right)
     \end{aligned}$$

4. ¿Es estable y de orden 3 el MML para algún valor de a_1?

   Calculemos para ello C_3.

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{2^3}{3!} + 0 \cdot a_0 + \frac{1}{3!}a_1 - \frac{1}{2!}b_1 = \frac{8}{6} + \frac{a_1}{6} - \frac{4+a_1}{4} = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{a_1}{6} - \frac{a_1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{a_1}{12} = 0 \iff a_1 = 4 \end{aligned}$$

   No obstante, en ese caso $a_1 \notin]-2, 0]$, por lo que no es posible encontrar dicho valor de a_1 pedido.

Ejercicio 1.3.1.12. Determine los parámetros α, β para los que el método lineal de ecuación en diferencias:

$$x_{n+2} - (1+\alpha)x_{n+1} + \alpha x_n = h((1+\beta)f_{n+2} - (\alpha+\beta+\alpha\beta)f_{n+1} + \alpha\beta f_n)$$

con $n = 0, \dots, N-2$, tenga el mayor orden posible. ¿Cuál es dicho orden? ¿Es convergente el método obtenido? ¿Por qué?

Calculemos los valores de los C_i.

$$\begin{aligned} &C_0 = 1 - (1+\alpha) + \alpha = 0 \qquad \forall \alpha, \beta \\ &C_1 = 2 + 0 \cdot \alpha - (1+\alpha) - \alpha\beta + (\alpha+\beta+\alpha\beta) - (1+\beta) = 0 \qquad \forall \alpha, \beta \\ &C_2 = \frac{2^2}{2!} - \frac{1}{2!}(1+\alpha) + \frac{1}{1!}(\alpha+\beta+\alpha\beta) - \frac{2^1}{1!}(1+\beta) = -\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} - \beta + \alpha\beta = 0 \\ &C_3 = \frac{2^3}{3!} - \frac{1}{3!}(1+\alpha) + \frac{1}{2!}(\alpha+\beta+\alpha\beta) - \frac{2^2}{2!}(1+\beta) = -\frac{5}{6} + \frac{\alpha}{3} - \frac{3\beta}{2} + \frac{\alpha\beta}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, planteamos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha - 2\beta + 2\alpha\beta &=& 1 \\ 2\alpha - 9\beta + 3\alpha\beta &=& 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& 1 \\ \beta &=& -1/2 \end{array}\right\}$$

Por tanto, ya tenemos determinados los valores de α y β. Veamos si estos también cumplen que $C_4 = 0$:

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{2^4}{4!} - \frac{1}{4!}(1+\alpha) + \frac{1}{3!}(\alpha+\beta+\alpha\beta) - \frac{2^3}{3!}(1+\beta) = \\ &= \frac{16}{24} - \frac{2}{24} + \frac{1}{3!} \cdot 0 - \frac{8}{6 \cdot 2} = -\frac{1}{12} \neq 0 \end{aligned}$$

Por tanto, su orden exacto es 3. Veamos si es convergente. Su polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (1+\alpha)\lambda + \alpha = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Por tanto, y como las raíces de p de módulo 1 no son simples, el método no es estable y por tanto no podrá ser convergente.

Ejercicio 1.3.1.13. Construya una familia 1-paramétrica de MML implícitos de dos pasos con el mayor orden posible. ¿Cuál es dicho orden? Si $x(t)$ es suficientemente diferenciable, ¿cuál es la parte principal de error de truncatura local? ¿Qué valores del parámetro aseguran la convergencia?

Un MML genérico implícito de 2 pasos es:

$$x_{n+2} = \alpha_1 x_{n+1} + \alpha_0 x_n + h\left(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2}\right)$$

Como tenemos 5 parámetros y buscamos una solución uniparamétrica, necesitamos 4 ecuaciones.

$$\begin{aligned}
0 &= C_0 = 1 - \alpha_0 - \alpha_1 \\
0 &= C_1 = 2 - \alpha_1 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 \\
0 &= C_2 = \frac{2^2}{2!} - \frac{\alpha_1}{2!} - \frac{0^1}{1!}\beta_0 - \frac{1^1}{1!}\beta_1 - \frac{2^1}{1!}\beta_2 = 2 - \frac{\alpha_1}{2} - \beta_1 - 2\beta_2 \\
0 &= C_3 = \frac{2^3}{3!} - \frac{\alpha_1}{3!} - \frac{0^2}{2!}\beta_0 - \frac{1^2}{2!}\beta_1 - \frac{2^2}{2!}\beta_2 = \frac{8}{6} - \frac{\alpha_1}{6} - \frac{\beta_1}{2} - 2\beta_2
\end{aligned}$$

Planteamos por tanto el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl}
\alpha_0 + \alpha_1 &=& 1 \\
\alpha_1 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 &=& 2 \\
\alpha_1 + 2\beta_1 + 4\beta_2 &=& 4 \\
\alpha_1 + 3\beta_1 + 12\beta_2 &=& 8
\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}
\alpha_0 &=& -12\beta_2 + 5 \\
\alpha_1 &=& 12\beta_2 - 4 \\
\beta_0 &=& -5\beta_2 + 2 \\
\beta_1 &=& -8\beta_2 + 4
\end{array}\right\}$$

Por tanto, la familia de MML implícitos de 2 pasos con el mayor orden posible es:

$$x_{n+2} = (-12\beta_2 + 5)x_{n+1} + (12\beta_2 - 4)x_n + h\left((-5\beta_2 + 2)f_n + (-8\beta_2 + 4)f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2}\right)$$

Este MML es al menos de orden 3. Veamos el valor de C_4:

$$C_4 = \frac{2^4}{4!} - \frac{\alpha_1}{4!} - \frac{1^3}{3!}\beta_1 - \frac{2^3}{3!}\beta_2 = \frac{2}{3} - \frac{12\beta_2 - 4}{24} - \frac{-8\beta_2 + 4}{6} - \frac{8}{6}\beta_2 = \frac{1}{6} - \frac{\beta_2}{2}$$

Por tanto, distinguimos según el valor de β_2:

- Si $\beta_2 = 1/3$, el orden del MML es al menos 4.

  $$C_5 = \frac{2^5}{5!} - \frac{\alpha_1}{5!} - \frac{1^4}{4!}\beta_1 - \frac{2^4}{4!}\beta_2 = \frac{4}{15} - \frac{12 \cdot 1/3 - 4}{120} - \frac{-8 \cdot 1/3 + 4}{24} - \frac{2 \cdot 1/3}{3} = -\frac{1}{90} \neq 0$$

  Por tanto, el orden del MML es 4. La parte principal del error de truncatura local es:

  $$-\frac{1}{90}h^5 \cdot x^{(5)}(t_n)$$

- Si $\beta_2 \neq 1/3$, el orden del MML es 3. La parte principal del error de truncatura local es:

  $$\left(\frac{1}{6} - \frac{\beta_2}{2}\right) h^4 \cdot x^{(4)}(t_n)$$

Veamos ahora qué valores de β_2 aseguran la convergencia del MML. Como ya tenemos garantizada la consistencia, estudiamos la estabilidad. Para ello, hemos de estudiar el polinomio característico:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) = \lambda^2 - (12\beta_2 - 4)\lambda - (-12\beta_2 + 5) = 0 \iff \\
\iff \lambda &= \frac{(12\beta_2 - 4) \pm \sqrt{(12\beta_2 - 4)^2 + 4(-12\beta_2 + 5)}}{2} = \\
&= \frac{(12\beta_2 - 4) \pm 2\sqrt{4(3\beta_2 - 1)^2 + (-12\beta_2 + 5)}}{2} = \\
&= \frac{(12\beta_2 - 4) \pm 2\sqrt{4(9\beta_2^2 - 6\beta_2 + 1) - 12\beta_2 + 5}}{2} = \\
&= 6\beta_2 - 2 \pm \sqrt{36\beta_2^2 - 36\beta_2 + 9} = \\
&= 6\beta_2 - 2 \pm 3\sqrt{4\beta_2^2 - 4\beta_2 + 1} = \\
&= 6\beta_2 - 2 \pm 3(2\beta_2 - 1)
\end{aligned}$$

Por tanto, las raíces son:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 12\beta_2 - 5 \\
\lambda_2 &= 1
\end{aligned}$$

Estudiemos su módulo:

$$|\lambda_1| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant 12\beta_2 - 5 \leqslant 1 \iff 4 \leqslant 12\beta_2 \leqslant 6 \iff \frac{1}{3} \leqslant \beta_2 \leqslant \frac{1}{2}$$

En el caso de que $\beta_2 = 1/3$, tenemos que $\lambda_1 = -1$, pero si $\beta_2 = 1/2$, entonces $\lambda_1 = 1$, que es una raíz doble. Por tanto, el MML es convergente si y solo si $\beta_2 \in [1/3, 1/2[$.

Ejercicio 1.3.1.14. Obtenga la ecuación en diferencias del método de Adams-Bashforth de tres pasos y la del método de Adams-Moulton de dos pasos. Estudie la convergencia y el orden de dichos métodos.

El método de Adams-Bashforth de 3 pasos es:

$$x_{n+3} = x_{n+2} + h\left(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2}\right)$$

Puesto que tenemos 3 incógnitas, hemos de imponer que $C_i = 0$ para $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1 - 1 = 0 \qquad \forall \beta_0, \beta_1, \beta_2 \\
C_1 &= 3 - 2 \cdot 1 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 = 0 \\
C_2 &= \frac{3^2}{2!} - \frac{2^2}{2!} - \frac{1^1}{1!}\beta_1 - \frac{2^1}{1!}\beta_2 = \frac{5}{2} - \beta_1 - 2\beta_2 = 0 \\
C_3 &= \frac{3^3}{3!} - \frac{2^3}{3!} - \frac{1^2}{2!}\beta_1 - \frac{2^2}{2!}\beta_2 = \frac{19}{6} - \frac{\beta_1}{2} - 2\beta_2 = 0
\end{aligned}$$

Planteamos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl}
\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 &=& 1 \\
2\beta_1 + 4\beta_2 &=& 5 \\
\beta_1 + 4\beta_2 &=& 19/3
\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}
\beta_0 &=& 5/12 \\
\beta_1 &=& -4/3 \\
\beta_2 &=& 23/12
\end{array}\right\}$$

Por tanto, la ecuación en diferencias del método de Adams-Bashforth de 3 pasos es:

$$x_{n+3} = x_{n+2} + h\left(\frac{5}{12}f_n - \frac{4}{3}f_{n+1} + \frac{23}{12}f_{n+2}\right)$$

El método de Adams-Moulton de 2 pasos es:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + h\left(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2}\right)$$

Puesto que tenemos 3 incógnitas, hemos de imponer que $C_i = 0$ para $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1 - 1 = 0 \qquad \forall \beta_0, \beta_1, \beta_2 \\
C_1 &= 2 - 1 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 = 0 \\
C_2 &= \frac{2^2}{2!} - \frac{1^2}{2!} - \frac{1^1}{1!}\beta_1 - \frac{2^1}{1!}\beta_2 = \frac{3}{2} - \beta_1 - 2\beta_2 = 0 \\
C_3 &= \frac{2^3}{3!} - \frac{1^3}{3!} - \frac{1^2}{2!}\beta_1 - \frac{2^2}{2!}\beta_2 = \frac{7}{6} - \frac{\beta_1}{2} - 2\beta_2 = 0
\end{aligned}$$

Planteamos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl}
\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 &=& 1 \\
\beta_1 + 2\beta_2 &=& 3/2 \\
\beta_1 + 4\beta_2 &=& 7/3
\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}
\beta_0 &=& -1/12 \\
\beta_1 &=& 2/3 \\
\beta_2 &=& 5/12
\end{array}\right\}$$

Por tanto, la ecuación en diferencias del método de Adams-Moulton de 2 pasos es:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + h\left(-\frac{1}{12}f_n + \frac{2}{3}f_{n+1} + \frac{5}{12}f_{n+2}\right)$$

Ejercicio 1.3.1.15. Usando integración numérica sobre el intervalo $[t_{n+1}, t_{n+3}]$, deduzca dos métodos lineales de tres pasos explícitos diferentes para resolver el PVI de ecuación $x' = f(t, x)$ y condición inicial $x(t_0) = \mu$. ¿Es alguno de ellos un método óptimo? Justifique la respuesta.

Ejercicio 1.3.1.16. Dado el MML:

$$x_{n+3} + \alpha(x_{n+2} - x_{n+1}) - x_n = h\frac{(3+\alpha)}{2}(f_{n+1} + f_{n+2})$$

razone si es cierto que:

1. Para $\alpha = 9$, el orden es 4.

Calculamos los C_i:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= 1-1-\alpha+\alpha = 0 \qquad \forall\alpha\\
C_1 &= 3-\alpha+2\alpha-2\cdot\frac{3+\alpha}{2} = 0 \qquad \forall\alpha\\
C_2 &= \frac{3^2}{2!}-\frac{1^2}{2!}\alpha+\frac{2^2}{2!}\alpha-\frac{3+\alpha}{2}\left(\frac{1^1}{1!}+\frac{2^1}{1!}\right) = \frac{9}{2}-\frac{\alpha}{2}+2\alpha-\frac{3}{2}\cdot(3+\alpha) = 0 \qquad \forall\alpha\\
C_3 &= \frac{3^3}{3!}-\frac{1^3}{3!}\alpha+\frac{2^3}{3!}\alpha-\frac{3+\alpha}{2}\left(\frac{1^2}{2!}+\frac{2^2}{2!}\right) = \frac{9}{2}-\frac{\alpha}{6}+\frac{4\alpha}{3}-\frac{3+\alpha}{2}\cdot\frac{5}{2} =\\
&= \frac{3}{4}-\frac{\alpha}{12} = 0 \iff \alpha = 9\\
C_4 &= \frac{3^4}{4!}-\frac{1^4}{4!}\alpha+\frac{2^4}{4!}\alpha-\frac{3+\alpha}{2}\left(\frac{1^3}{3!}+\frac{2^3}{3!}\right) = \frac{9}{8}-\frac{\alpha}{24} = 0 \iff \alpha = 27
\end{aligned}
$$

Por tanto, el orden del MML es 3 para $\alpha = 9$.

2. Si $-3<\alpha<1$, el método es cero-estable.

   Calculamos su polinomio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^3+\alpha(\lambda^2-\lambda)-1 = (\lambda-1)(\lambda^2+(\alpha+1)\lambda+1)$$

   Una de sus raíces es $\lambda = 1$. Veamos las otras dos raíces:

$$\frac{-(\alpha+1)\pm\sqrt{(\alpha+1)^2-4}}{2} = \frac{-(\alpha+1)\pm\sqrt{\alpha^2+2\alpha-3}}{2}$$

   Tenemos que $\alpha^2+2\alpha-3\leqslant 0$ para todo $\alpha\in\,]-3,1[$, por lo que las raíces son complejas conjugadas. Estas son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\alpha+1)}{2}\pm i\frac{\sqrt{3-\alpha^2-2\alpha}}{2}$$

   El módulo de estas raíces es:

$$|\lambda_{1,2}| = \frac{(\alpha+1)^2+3-\alpha^2-2\alpha}{4} = 1$$

   Por tanto, las raíces del polinomio característico son de módulo 1, y tienen multiplicidad simple, por lo que el MML es cero-estable.

3. Si el MML dado es convergente, su orden es exactamente 2.

   Hemos visto que el orden del MML es al menos 2 para cualquier valor de α; y es exactamente 2 para todo $\alpha\neq 9$. Veamos que, si es convergente, no se puede dar que $\alpha = 9$.

   Si el MML es convergente, entonces su polinomio característico ha de ser estable. Como hemos visto, el polinomio característico es:

$$p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+(\alpha+1)\lambda+1)$$

Si $\alpha = 9$, entonces el polinomio característico es:

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 10\lambda + 1)$$

Las raíces de este polinomio son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4}}{2} = -5 \pm 2\sqrt{6}$$

Como $-5 - 2\sqrt{6} < -1$, tenemos que $|\lambda_2| > 1$, por lo que al menos una de sus raíces es de módulo mayor que 1, y por tanto el MML no es convergente. Por tanto, si el MML es convergente, su orden es exactamente 2.

Ejercicio 1.3.1.17. Para que un MML sea estable es necesario que las raíces del primer polinomio característico $p(\lambda)$ sean de módulo no mayor que 1, y todas las de módulo 1 sean simples. Cualquier MML ya tiene la raíz $\lambda = 1$ entre las de su primer polinomio característico. Podemos afinar algo más distinguiendo los MML que no tienen ninguna otra raíz de módulo 1, de aquellos en los que hay más de una raíz de módulo 1. Los primeros se denominan *fuertemente estables* y los segundos *débilmente estables*.

1. Compruebe que el método Adams-Bashforth de 4 pasos es fuertemente estable:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24}(-9f_{n-3} + 37f_{n-2} - 59f_{n-1} + 55f_n)$$

Notemos que esta notación no nos sirve para trabajar con el método. Este método en realidad es:

$$x_{n+4} = x_{n+3} + \frac{h}{24}(-9f_n + 37f_{n+1} - 59f_{n+2} + 55f_{n+3})$$

El polinomio característico del método es:

$$p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 = \lambda^3(\lambda - 1)$$

Sus raíces son $\lambda = 0$ (de multiplicidad 3) y $\lambda = 1$ (de multiplicidad 1). Como el único valor de módulo 1 es 1 y tiene multiplicidad 1, el MML es fuertemente estable.

2. Compruebe que la fórmula abierta de 4 pasos es débilmente estable:

$$x_{n+1} = x_{n-3} + \frac{4h}{3}(2f_{n-2} - f_{n-1} + 2f_n)$$

De nuevo, esta notación no nos sirve para trabajar con el método. Este método en realidad es:

$$x_{n+4} = x_n + \frac{4h}{3}(2f_{n+1} - f_{n+2} + 2f_{n+3})$$

El polinomio característico del método es:

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 1 \iff \lambda \in \{1, -1, i, -i\}$$

Todas sus raíces son de módulo 1 y simples, luego el MML es débilmente estable.

3. (Práctica) Considere el PVI $x' = -6x+6$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x(0) = 2$, que tiene como solución exacta $x(t) = 1 + e^{-6t}$. Con $h = 0{,}1$ y valores iniciales exactos x_0, x_1, x_2, x_3, aproxime $x(1)$ con las dos fórmulas anteriores, incluyendo los errores acumulados en cada paso para ambos métodos. Comente los resultados.

1.3.2. Relación 2

Ejercicio 1.3.2.1. Dado el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = \mu \end{cases}$$

se pretende utilizar el siguiente método numérico para estimar el valor de $x(b)$, con $b > a$:

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\alpha f(t_n, x_n) + (1-\alpha) f(t_{n+1}, x_{n+1})\right), \quad \alpha \in [0, 1]$$

1. ¿Podemos asegurar que el método es estable? Estudia su consistencia y su convergencia.

   Su polinomio característico es:

   $$p(\lambda) = \lambda - 1$$

   Por lo tanto, la única raíz es $\lambda = 1$, que es simple y tiene módulo 1. Por tanto, el método es estable. Respecto a la consistencia, necesitamos que:

   - $p(1) = 0$, que se tiene.
   - $\Phi(x(t_n), x(t_n), t_n, 0) = p'(1) f(t_n, x(t_n))$:

     $\Phi(x(t_n), x(t_n), t_n, 0) = \alpha f(t_n, x(t_n)) + (1-\alpha) f(t_n, x(t_n)) = f(t_n, x(t_n)) = p'(1) f(t_n, x(t_n))$

   Por lo tanto, el método es consistente. Por último, como es consistente y estable, es convergente.

2. Si sabemos que la función f es lipschitziana respecto a la segunda variable con constante de Lipschitz L, ¿cuánto debe valer h como máximo para que la ecuación tenga solución para cualquier valor de n?

   Definimos la función g como:

   $$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x_n + h\left(\alpha f(t_n, x_n) + (1-\alpha) f(t_{n+1}, x)\right) \end{array}$$

   Por tanto, el hecho de que la ecuación tenga solución para cualquier valor de n equivale a que g tenga un punto fijo, es decir, que exista x tal que $g(x) = x$. Por el Teorema del punto fijo de Banach, si g es una contracción, entonces tiene un único punto fijo.

   $$|g(x) - g(y)| = h(1-\alpha)|f(t_{n+1}, x) - f(t_{n+1}, y)| \leqslant h(1-\alpha)L|x - y|$$

   Por tanto, g es lipschitziana con constante de Lipschitz $h(1-\alpha)L$. Para que sea una contracción, necesitamos que:

   $$h(1-\alpha)L < 1 \implies h < \frac{1}{L(1-\alpha)} \qquad (\alpha \neq 1)$$

   Por tanto, si $\alpha = 1$, el método es el de Euler y no hay restricción en h. Si $\alpha < 1$, la restricción es:

   $$h < \frac{1}{L(1-\alpha)}$$

3. Determina el valor de α para que el método tenga orden 2. ¿Cuál es en este caso el error de truncatura local? ¿De qué orden es el error global de discretización?

   Para que el método tenga orden 2, necesitamos $C_0 = C_1 = C_2 = 0$, mientras que $C_3 \neq 0$.

$$\begin{aligned}
&C_0 = 1 - 1 = 0 \qquad \forall \alpha \in [0,1] \\
&C_1 = 1 - \alpha - (1-\alpha) = 0 \qquad \forall \alpha \in [0,1] \\
&C_2 = \frac{1}{2!} - \frac{1^1}{1!}(1-\alpha) = \frac{1}{2} - 1 + \alpha = 0 \iff \alpha = \frac{1}{2} \\
&C_3 = \frac{1}{3!} - \frac{1^2}{2!}(1-\alpha) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{1-3+3\alpha}{6} = -\frac{1}{12} \neq 0
\end{aligned}$$

   Por tanto, el valor de α que buscamos es $\alpha = 1/2$. En este caso, el error de truncatura local es:

$$R_{n+1} = -\frac{1}{12}h^3 x'''(\xi_n) \qquad \xi_n \in [t_{n-1}, t_{n+1}]$$

   El error global de discretización es de orden $O(h^2)$.

4. Para el valor obtenido en el apartado anterior, estudia si el método es A-estable. ¿Es el método A-estable para cualquier valor de α?

   Aplicamos el método a la ecuación $x' = \lambda x$, con $\Re(\lambda) < 0$.

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h\left(\alpha\lambda x_n + (1-\alpha)\lambda x_{n+1}\right) = x_n + h\lambda(\alpha x_n + (1-\alpha)x_{n+1}) = \\
&= (1 + h\lambda\alpha)\, x_n + h\lambda(1-\alpha)x_{n+1} = \left(\frac{1+h\lambda\alpha}{1-h\lambda(1-\alpha)}\right) x_n = \left(\frac{1+h\lambda\alpha}{1-h\lambda(1-\alpha)}\right)^n x_0
\end{aligned}$$

   Tenemos que el método es A-estable si:

$$\left|\frac{1+h\lambda\alpha}{1-h\lambda(1-\alpha)}\right| < 1$$

   Desarrollamos el módulo:

$$\begin{aligned}
|1 + h\lambda\alpha| &< |1 - h\lambda(1-\alpha)| \\
&\iff |1 + h\lambda\alpha|^2 < |(1 + h\lambda\alpha) - h\lambda|^2 \\
&\iff |1 + h\lambda\alpha|^2 < |1 + h\lambda\alpha|^2 + |h\lambda|^2 + 2\Re\left((1 + h\lambda\alpha)(\overline{-h\lambda})\right) \\
&\iff 0 < |h\lambda|^2 - 2\Re\left((1 + h\lambda\alpha)(h\overline{\lambda})\right) \\
&\iff 0 < |h\lambda|^2 - 2\left((1 + h\alpha\Re(\lambda))h\Re(\lambda) + h\Im(\lambda)\alpha h\Im(\lambda)\right) \\
&\iff 0 < |h\lambda|^2 - 2\left(h\Re(\lambda) + \alpha h^2\Re^2(\lambda) + h^2\Im^2(\lambda)\alpha\right) \\
&\iff 0 < |h\lambda|^2 - 2\left(h\Re(\lambda) + \alpha|h\lambda|^2\right) \\
&\iff (2\alpha - 1)|h\lambda|^2 < -2h\Re(\lambda)
\end{aligned}$$

   Por tanto, como $\Re(\lambda) < 0$, distinguimos en función de α:

- Si $\alpha \leqslant 1/2$, entonces se da dicha desigualdad. Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

  En este caso, el método es A-estable.

- Si $\alpha > 1/2$, entonces la desigualdad no se da. Por tanto, el método no es A-estable.

5. ¿De qué orden sería un método predictor-corrector en el que el predictor es el método de Euler y el corrector es el correspondiente al apartado 3?

   El corrector hemos visto que es de orden 2. El predictor es el método de Euler, que es de orden 1. Si por tanto utilizamos $m \geqslant 1$ correcciones, el orden del método predictor-corrector es:

$$\min\{2, 1+m\}$$

   Por tanto, el orden del método predictor-corrector es 2.

6. Aplica todo lo anterior al problema:

$$\begin{cases} x'(t) = -3x + t \\ x(0) = 0{,}3 \end{cases}$$

   para estimar el valor de $x(1)$. Realiza cuatro iteraciones haciendo en cada una una predicción con el método de Euler y una corrección con el método descrito en el apartado 3. Muestra todas las iteraciones.

   Como buscamos 4 iteraciones en un intervalo de longitud 1, tomamos $h = 1/4$. Las predicciones serán:

$$x_{n+1}^{(0)} = x_n + h(-3x_n + t_n) = x_n + \frac{1}{4}(-3x_n + t_n)$$

   Las correcciones serán:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}^{(0)})\right) = \\ &= x_n + \frac{h}{2}\left(-3x_n + t_n + (-3x_{n+1}^{(0)} + t_{n+1})\right) \end{aligned}$$

   Partimos de $x_0 = 0{,}3$ y $t_0 = 0$. Por tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} x_1^{(0)} &= x_0 + \frac{1}{4}(-3x_0 + t_0) = 0{,}3 + 0{,}25(-3\cdot 0{,}3 + 0) = 0{,}075 \\ x_1 &= x_0 + \frac{1}{8}\left(-3x_0 + t_0 + (-3x_1^{(0)} + t_1)\right) = \\ &= 0{,}3 + \frac{1}{8}\left(-3\cdot 0{,}3 + 0 + (-3\cdot 0{,}075 + 0{,}25)\right) = 0{,}190625 \end{aligned}$$

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	t_n	$x_n^{(0)}$	x_n
0	0		0,3
1	0,25	0,075	0,190625
2	0,5	0,11015625	0,17158203
3	0,75	0,16789551	0,20052795
4	1	0,23763199	0,25496798

Ejercicio 1.3.2.2. Dado el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = \mu \end{cases}$$

se pretende utilizar el siguiente método numérico para estimar el valor de $x(b)$, con $b > a$:

$$x_{n+2} = x_n + h\left(\beta_0 f(t_n, x_n) + \beta_1 f(t_{n+1}, x_{n+1}) + \beta_2 f(t_{n+2}, x_{n+2})\right)$$

1. ¿Podemos asegurar que el método es estable? Estudia su consistencia y su convergencia.

   Su polinomio característico es:

   $$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

   Por lo tanto, ambas raíces son simples y tienen módulo 1. Por tanto, el método es estable. Respecto a la consistencia, necesitamos que:

   - $p(1) = 0$, que se tiene.
   - $\Phi(x(t_n), x(t_n), t_n, 0) = p'(1)f(t_n, x(t_n))$:

   $$\begin{aligned} \Phi(x(t_n), x(t_n), t_n, 0) &= \beta_0 f(t_n, x(t_n)) + \beta_1 f(t_n, x(t_n)) + \beta_2 f(t_n, x(t_n)) = \\ &= (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) f(t_n, x(t_n)) = p'(1) f(t_n, x(t_n)) = \\ &= 2f(t_n, x(t_n)) \iff \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 2 \end{aligned}$$

   Por lo tanto, el método es consistente si y solo si $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 2$. Por tanto, tenemos que el método es convergente si y solo si:

   $$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 2$$

2. Determina el valor de los parámetros para que el método tenga orden al menos 3. ¿Es algún método conocido? ¿Cuál es en este caso el error de truncatura local? ¿De qué orden es el error global de discretización?

   Para que el método tenga orden al menos 3, necesitamos $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$.

   $$\begin{aligned} C_0 &= 1 - 1 = 0 \qquad \forall \beta_0, \beta_1, \beta_2 \\ C_1 &= 2 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 = 0 \\ C_2 &= \frac{2^2}{2!} - \frac{1^1}{1!}\beta_1 - \frac{2^1}{1!}\beta_2 = 2 - \beta_1 - 2\beta_2 = 0 \\ C_3 &= \frac{2^3}{3!} - \frac{1^2}{2!}\beta_1 - \frac{2^2}{2!}\beta_2 = \frac{4}{3} - \frac{\beta_1}{2} - 2\beta_2 = 0 \end{aligned}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 &=& 2 \\ -\beta_1 - 2\beta_2 &=& -2 \\ {}^{\beta_1}/_2 + 2\beta_2 &=& {}^4/_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \beta_0 &=& {}^1/_3 \\ \beta_1 &=& {}^4/_3 \\ \beta_2 &=& {}^1/_3 \end{array}\right.$$

Por tanto, el método resultante es:

$$x_{n+2} = x_n + h\left(\frac{1}{3}f(t_n, x_n) + \frac{4}{3}f(t_{n+1}, x_{n+1}) + \frac{1}{3}f(t_{n+2}, x_{n+2})\right) =$$
$$= x_n + \frac{h}{3}\left(f(t_n, x_n) + 4f(t_{n+1}, x_{n+1}) + f(t_{n+2}, x_{n+2})\right)$$

Como vemos, se trata del método obtenido a partir de la fórmula simple de Simpson aplicada al intervalo $[t_n, t_{n+2}]$. Para calcular el error de truncatura local, calculamos previamente el orden del método:

$$C_4 = \frac{2^4}{4!} - \frac{1^3}{3!}\beta_1 - \frac{2^3}{3!}\beta_2 = \frac{2}{3} - \frac{\beta_1}{6} - \frac{4\beta_2}{2} = 0$$
$$C_5 = \frac{2^5}{5!} - \frac{1^4}{4!}\beta_1 - \frac{2^4}{4!}\beta_2 = -\frac{1}{90} \neq 0$$

Por tanto, el orden del método es 4 y el error de truncatura local es:

$$R_{n+2} = -\frac{1}{90}h^5 x^{(5)}(\xi_n) \qquad \xi_n \in [t_{n-1}, t_{n+1}]$$

El error global de discretización es de orden $O(h^4)$.

3. ¿De qué orden sería un método predictor-corrector en el que el predictor es el método de Runge-Kutta óptimo de dos evaluaciones y el corrector es el correspondiente al apartado anterior?

   El corrector hemos visto que es de orden 4. El predictor es el método de Runge-Kutta óptimo de dos evaluaciones, que es de orden 2. Si por tanto utilizamos $m \geqslant 1$ correcciones, el orden del método predictor-corrector es:

   $$\text{mín}\{4, 2 + m\}$$

   Lo ideal será por tanto emplear $m = 2$ correcciones, de modo que el orden del método predictor-corrector sea 4.

4. Aplica todo lo anterior al problema:

   $$\begin{cases} x'(t) = -3x + t \\ x(0) = 0{,}3 \end{cases}$$

   para estimar el valor de $x(1)$. Realiza cuatro iteraciones haciendo en cada una predicción con el método de Runge-Kutta óptimo de dos evaluaciones y una corrección con el método descrito en el apartado anterior. Si necesitas algún valor inicial para empezar el método predictor-corrector, utiliza también

Runge-Kutta óptimo de dos evaluaciones para estimarlo. Muestra los resultados de todas las iteraciones que realices.

Como buscamos 4 iteraciones en un intervalo de longitud 1, tomamos $h = 1/4$. El método predictor es el Runge-Kutta óptimo de dos evaluaciones:

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^{(0)} &= x_n + \frac{h}{4}\left(f(t_n, x_n) + 3f\left(t_n + \frac{2h}{3}, x_n + \frac{2h}{3}f(t_n, x_n)\right)\right) = \\
&= x_n + \frac{h}{4}\left(-3x_n + t_n + 3\left(-3\left(x_n + \frac{2h}{3}(-3x_n + t_n)\right) + \left(t_n + \frac{2h}{3}\right)\right)\right) = \\
&= x_n + \frac{h}{4}\left(-3x_n + t_n - 9\left(x_n + \frac{2h}{3}(-3x_n + t_n)\right) + 3\left(t_n + \frac{2h}{3}\right)\right) = \\
&= x_n + \frac{h}{4}\left(-12x_n + 4t_n - 6h(-3x_n + t_n) + 2h\right)
\end{aligned}$$

El método corrector es el que hemos visto en el apartado anterior:

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= x_n + \frac{h}{3}\left(f(t_n, x_n) + 4f(t_{n+1}, x_{n+1}) + f(t_{n+2}, x_{n+2}^{(0)})\right) = \\
&= x_n + \frac{h}{3}\left(-3x_n + t_n + 4(-3x_{n+1} + t_{n+1}) + \left(-3x_{n+2}^{(0)} + t_{n+2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Vemos que este requiere de dos semillas. La segunda la obtenemos con el método de Runge-Kutta óptimo de dos evaluaciones:

$$x_1 = x_1^{(0)} = 0{,}190625$$

Realizamos ahora 4 iteraciones del método predictor-corrector, reflejadas en la siguiente tabla:

n	t_n	$x_n^{(0)}$	x_n
0	0		0,3
1	0,25	0,190625	0,190625
2	0,5	0,17158203	0,11647949
3	0,75	0,17125473	0,23367558
4	1	0,27257765	0,16053963

Ejercicio 1.3.2.3. Dado el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = \mu \end{cases}$$

se pretende utilizar el siguiente método numérico para estimar el valor de $x(b)$, con $b > a$:

$$x_{n+2} = \alpha_1 x_{n+1} + \alpha_0 x_n + h\left(\beta_1 f(t_{n+1}, x_{n+1}) + \beta_0 f(t_n, x_n)\right)$$

1. Determina el valor de los parámetros (en función del parámetro α_1) para que el método tenga orden al menos 2. ¿Sería consistente en ese caso?

Para que el método tenga orden al menos 2, necesitamos $C_0 = C_1 = 0$.

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1 - \alpha_1 - \alpha_0 = 0 \\
C_1 &= 2 - \alpha_1 - \beta_1 - \beta_0 \\
C_2 &= \frac{2^2}{2!} - \frac{1^2}{2!}\alpha_1 - \frac{1^1}{1!}\beta_1 = 2 - \frac{\alpha_1}{2} - \beta_1 = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución uniparamétrica del sistema es:

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\alpha_0 & = & 1 - \alpha_1 \\
\beta_0 & = & 2 - \alpha_1 - \beta_1 = -\frac{\alpha_1}{2} \\
\beta_1 & = & 2 - \frac{\alpha_1}{2}
\end{array}\right.$$

Por tanto, el método resultante es:

$$x_{n+2} = \alpha_1 x_{n+1} + (1 - \alpha_1)x_n + h\left(\left(2 - \frac{\alpha_1}{2}\right) f(t_{n+1}, x_{n+1}) - \frac{\alpha_1}{2} f(t_n, x_n)\right)$$

Este método es consistente, puesto que $C_0 = C_1 = 0$.

2. Estima el error de truncatura local (también en función de α_1). ¿De qué orden es el error global de discretización?

   Para calcular el error de truncatura local, calculamos previamente el orden del método:

$$C_3 = \frac{2^3}{3!} - \frac{1^3}{3!}\alpha_1 - \frac{1^2}{2!}\beta_1 = \frac{4}{3} - \frac{\alpha_1}{6} - \frac{2 - \frac{\alpha_1}{2}}{2} = \frac{4}{3} - \frac{\alpha_1}{6} - 1 + \frac{\alpha_1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{\alpha_1}{12}$$

   Por tanto, el orden del método es 3 y el error de truncatura local es:

$$R_{n+2} = \left(\frac{1}{3} + \frac{\alpha_1}{12}\right) h^3 x^{(3)}(\xi_n) \qquad \xi_n \in [t_{n-1}, t_{n+1}]$$

   El error global de discretización es de orden $O(h^2)$, puesto que el orden del método es 2.

3. Estudia la estabilidad y la convergencia en función del parámetro α_1.

   Respecto a la consistencia, hemos de imponer que $C_0 = C_1 = 0$, lo cual ya hemos hecho en el apartado anterior. Por tanto, el método es consistente. Respecto a la estabilidad, obtenemos el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \alpha_1\lambda - \alpha_0 = \lambda^2 - \alpha_1\lambda - (1 - \alpha_1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1 - \alpha_1)$$

   Por tanto, las raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \alpha_1 - 1$. Tenemos por tanto que es estable si y solo si $\alpha \in \overline{D}(1, 1) \setminus \{2\}$. Por tanto, es método es convergente si y solo si $\alpha_1 \in \overline{D}(1, 1) \setminus \{2\}$ y, además, $C_0 = C_1 = 0$.

4. Si $\alpha_1 = 0$, ¿encuentras relación con algún método conocido? ¿Y en el caso $\alpha_1 = 1$?

   Para $\alpha_1 = 0$, tenemos:

$$x_{n+2} = x_n + h\left(2f(t_{n+1}, x_{n+1})\right)$$

   Este es el método del punto medio, que surge de aplicar la fórmula de cuadratura del punto medio al intervalo $[t_n, t_{n+2}]$.

   Para $\alpha_1 = 1$, tenemos:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + h\left(\frac{3}{2}f(t_{n+1}, x_{n+1}) - \frac{1}{2}f(t_n, x_n)\right)$$

5. Utiliza este método con $\alpha_1 = 1/2$ en el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = -3x + t \\ x(0) = 0{,}3 \end{cases}$$

   para estimar el valor de $x(1)$. Realiza cuatro iteraciones del método haciendo uso del método de Euler para calcular los datos iniciales que necesites. Muestra todas las iteraciones.

   Como buscamos 4 iteraciones en un intervalo de longitud 1, tomamos $h = 1/4$. Este método necesita de dos semillas:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = 0{,}3 \\ x_1 &= x_0 + h(-3x_0 + 0) = 0{,}3 + \frac{1}{4}(-3 \cdot 0{,}3 + 0) = \frac{3}{40} = 0{,}075 \end{aligned}$$

   El método con $\alpha_1 = 1/2$ y aplicado a este problema es:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n + h\left(\frac{3}{4}f(t_{n+1}, x_{n+1}) - \frac{1}{4}f(t_n, x_n)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(x_{n+1} + x_n\right) + \frac{h}{4}\left(3f(t_{n+1}, x_{n+1}) - f(t_n, x_n)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(x_{n+1} + x_n\right) + \frac{h}{4}\left(3(-3x_{n+1} + t_{n+1}) - (-3x_n + t_n)\right) \end{aligned}$$

   Realizamos las iteraciones:

n	t_n	x_n
0	0	0,3
1	0,25	0,075
2	0,5	0,2484375
3	0,75	0,11416016
4	1	0,27304077

Ejercicio 1.3.2.4.

1. Para el PVI $x' = x - |t-2|$, $x(0) = 1$, $t \in [0,1]$ con $h = 0{,}1$, calcula x_1 con el MML asociado al arreglo de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/6 & 1/3 \end{array}$$

El método de Runge-Kutta asociado a este arreglo de Butcher es:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h\left(\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{6}K_2 + \frac{1}{3}K_3\right) \\ K_1 &= f(t_n + h, x_n + hK_1) = x_n + hK_1 - |t_n + h - 2| \\ K_2 &= f(t_n + h, x_n + hK_1) = x_n + hK_1 - |t_n + h - 2| \\ K_3 &= f(t_n + h, x_n) = x_n - |t_n - 2| \end{aligned}$$

Calculamos por tanto x_1, sabiendo que $t_0 = 0$, $x_0 = 1$ y $h = 0{,}1$:

$$\begin{aligned} K_1 &= 1 + 0{,}1K_1 - |0{,}1 - 2| = 1 + 0{,}1K_1 - 1{,}9 \Longrightarrow K_1 = \frac{-0{,}9}{0{,}9} = -1 \\ K_2 &= 1 + 0{,}1(-1) - |0{,}1 - 2| = 1 - 0{,}1 - 1{,}9 = -1 \\ K_3 &= 1 - |0 - 2| = 1 - 2 = -1 \\ x_1 &= 1 + 0{,}1\left(\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{3}(-1)\right) = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

2. Estudia las propiedades (estabilidad, consistencia, convergencia, orden, parte principal del error de truncatura local) del método

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{h}{3}(5f_n - f_{n-1}).$$

En primer lugar, hemos de cambiar la notación:

$$x_{n+2} = \frac{2}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n + \frac{h}{3}(5f_{n+1} - f_n).$$

El polinomio característico del método es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3} = 0 \iff \lambda \in \left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$$

Por tanto, el método es estable, puesto que ambas raíces están en el disco unidad, y la de módulo 1 es simple. Respecto a la consistencia, hemos de ver que $C_0 = C_1 = 0$:

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0 \\ C_1 &= 2 - \frac{2}{3} - \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el método es consistente. Como es consistente y estable, es convergente. Para ver el orden del método, calculamos los C_i:

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{2^2}{2!} - \frac{1^2}{2!} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1^1}{1!} \cdot \frac{5}{3} = 2 - \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = 0 \\
C_3 &= \frac{2^3}{3!} - \frac{1^3}{3!} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1^2}{2!} \cdot \frac{5}{3} = \frac{7}{18} \neq 0
\end{aligned}$$

Por tanto, el orden del método es 2 y el término principal del error de truncatura local es:

$$\frac{7}{18} h^3 x^{(3)}(t_n)$$

Ejercicio 1.3.2.5. Utiliza la fórmula de cuadratura del trapecio para deducir la fórmula del trapecio para resolución de PVI así como el error de truncatura local. Estudia también la A-estabilidad del método.

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n \approx x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))dt \approx \\
\approx \frac{h}{2} \left(f(t_n, x(t_n)) + f(t_{n+1}, x(t_{n+1})) \right) \approx \frac{h}{2} \left(f_n + f_{n+1} \right)
\end{aligned}$$

Por tanto, el método del trapecio es:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} \left(f_n + f_{n+1} \right)$$

Calculamos ahora el error de truncatura local:

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1 - 1 = 0 \\
C_1 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 \neq 0 \\
C_2 &= \frac{1}{2!} - \frac{1^1}{1!} \cdot \frac{1}{2} = 0 \\
C_3 &= \frac{1}{3!} - \frac{1^2}{2!} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12} \neq 0
\end{aligned}$$

Por tanto, el orden del método es 2 y el error de truncatura local es:

$$R_{n+1} = -\frac{1}{12} h^3 x^{(3)}(\xi_n) \qquad \xi_n \in [t_n, t_{n+1}]$$

Respecto a la A-estabilidad, consideramos el PVI $x' = \lambda x$, $x(0) = \mu$, con $\Re(\lambda) < 0$. En este caso, el método del trapecio es:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} \left(\lambda x_n + \lambda x_{n+1} \right) = x_n + \frac{\lambda h}{2} (x_n + x_{n+1}) = \left(1 + \frac{\lambda h}{2} \right) x_n + \frac{\lambda h}{2} x_{n+1} = \\
= \left(\frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right) x_n = \left(\frac{2 + \lambda h^n}{2 - \lambda h} \right) x_0
\end{aligned}$$

Sea ahora $w = \lambda h \in \mathbb{C}$, y calculemos la región de $A-$estabilidad del método:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2+w}{2-w}\right| < 1 \iff |2+w| < |2-w| \\
&\iff |2+w|^2 < |2-w|^2 \iff 2^2 + |w|^2 + 2\Re(w) < 2^2 + |w|^2 - 2\Re(w) \\
&\iff \Re(w) < 0
\end{aligned}$$

Como la región de $A-$estabilidad contiene al semiplano izquierdo, el método del trapecio es $A-$estable.

Ejercicio 1.3.2.6. Dado el método multipaso lineal

$$x_{n+2} = \frac{2a+1}{2}x_{n+1} - \frac{a}{2}x_n + h\left(\beta_0 f(t_n, x_n) + \beta_2 f(t_{n+2}, x_{n+2})\right)$$

1. Estudia la convergencia del método.

   Estudiemos en primer lugar la consistencia del método, para lo cual hemos de imponer que $C_0 = C_1 = 0$:

   $$C_0 = 1 - \frac{2a+1}{2} + \frac{a}{2} = 0 \iff 2 = a+1 \iff a = 1$$

   Por tanto, suponeos $a = 1$. Impongamos ahora que $C_1 = 0$:

   $$C_1 = 2 - \frac{3}{2} - \beta_0 - \beta_2 = 0 \iff \beta_0 + \beta_2 = \frac{1}{2}$$

   Por tanto, el método es consistente si y solo si $a = 1$ y $\beta_0 + \beta_2 = \frac{1}{2}$.

   Respecto a la estabilidad, el polinomio característico del método es:

   $$\begin{aligned}
   &p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{2a+1}{2}\lambda + \frac{a}{2} = 0 \iff 2\lambda^2 - 2a\lambda + a - 1 = 0 \iff \\
   &\iff \lambda = \frac{2a \pm \sqrt{(2a)^2 - 8(a-1)}}{4} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 8a + 8}}{4} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2a + 2}}{2}
   \end{aligned}$$

   El radicando es siempre positivo, por lo que siempre hay dos raíces reales distintas. Para que el método sea estable, hemos de imponer que ambas raíces estén en el disco unidad.

   $$\begin{aligned}
   \left|\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2a + 2}}{2}\right| \leqslant 1 &\iff \left|a \pm \sqrt{a^2 - 2a + 2}\right| \leqslant 2 \\
   &\iff -2 \leqslant a \pm \sqrt{a^2 - 2a + 2} \leqslant 2 \\
   &\iff -2 - a \leqslant \pm\sqrt{a^2 - 2a + 2} \leqslant 2 - a
   \end{aligned}$$

   Por tanto, el método es estable si y solo si:

   $$-2 - a \leqslant \pm\sqrt{a^2 - 2a + 2} \leqslant 2 - a$$

   Como tan solo nos piden estudiar la convergencia del método, no vamos a resolver estas desigualdades, puesto que sabemos que si $a \neq 1$ el método no es consistente y, por tanto, no es convergente. Si $a = 1$, hemos de estudiar las desigualdades anteriores para ver si el método es estable.

$$-3 \leqslant \pm 1 \leqslant 1$$

Por tanto, en ese caso, el método es estable también. Por tanto, el método es convergente si y solo si $a = 1$ y $\beta_0 + \beta_2 = \frac{1}{2}$.

2. Determina el valor de los parámetros para que el método sea convergente y tenga el mayor orden posible. ¿Cuál es ese orden? Indica el término principal del error de truncatura local en este caso.

   Imponemos que C_i se anulen para $i = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned}
&C_0 = 0 \iff a = 1\\
&C_1 = 0 \iff \beta_0 + \beta_2 = \frac{1}{2}\\
&C_2 = \frac{2^2}{2!} - \frac{1^2}{2!} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2^1}{1!} \cdot \beta_2 = 0 \iff \beta_2 = \frac{5}{8} \Longrightarrow \beta_0 = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}\\
&C_3 = \frac{2^3}{3!} - \frac{1^3}{3!} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2^2}{2!} \cdot \frac{5}{8} = \frac{4}{3} - \frac{1}{4} - \frac{10}{8} = -\frac{1}{6} \neq 0
\end{aligned}$$

   Por tanto, en este caso el método resultante es:

$$x_{n+2} = \frac{3}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n + \frac{h}{8}\left(-f(t_n, x_n) + 5f(t_{n+2}, x_{n+2})\right)$$

   En este caso, el orden del método es 2 y el término principal del error de truncatura local es:

$$-\frac{1}{6}h^3 x^{(3)}(t_n)$$

3. Para el PVI

$$\begin{cases} x'(t) = -3x + t^2\\ x(0) = 1 \end{cases}$$

   toma $h = 0{,}1$ y utiliza el método de Euler para aproximar $x(0{,}1)$. Realiza a continuación dos iteraciones del método que has obtenido en el apartado anterior para aproximar $x(0{,}3)$.

   Utilizando el método de Euler, tenemos:

$$\begin{aligned}
&x_0 = 1\\
&x_1 = x_0 + h(-3x_0 + t_0^2) = 1 + 0{,}1(-3 \cdot 1 + 0^2) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7
\end{aligned}$$

   El método del apartado anterior, en este caso, queda:

$$x_{n+2} = \frac{3}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n + \frac{h}{8}\left(3x_n - t_n^2 - 15x_{n+2} + 5t_{n+2}^2\right)$$

Realizamos ahora dos iteraciones del método, partiendo de $x_1 = 0{,}7$:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_0 + \frac{0{,}1}{8}\left(3x_0 - t_0^2 - 15x_2 + 5t_2^2\right) \\
&= \frac{11}{20} + 0{,}0125\,(3 - 15x_2 + 0{,}2) \\
&= 0{,}59 - 0{,}1875x_2 = \frac{0{,}59}{1 + 0{,}1875} \approx 0{,}4968421 \\
x_3 &= \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{0{,}1}{8}\left(3x_1 - t_1^2 - 15x_3 + 5t_3^2\right) \\
&= \frac{751}{1900} + 0{,}0125\,(2{,}09 - 15x_3 + 0{,}45) \\
&= 0{,}0125496 - 0{,}1875x_3 = \frac{0{,}0125496}{1 + 0{,}1875} \approx 0{,}010568
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.3.2.7. Para aproximar la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = \mu \end{cases}$$

se considera el método multipaso

$$x_{n+3} = x_n + h\left(\beta_1 f(t_{n+1}, x_{n+1}) + \beta_2 f(t_{n+2}, x_{n+2})\right)$$

1. ¿Qué relaciones deben existir entre los parámetros β_1 y β_2 para que el método anterior sea convergente?

   Como se trata de un MML, para estudiar la consistencia hemos de imponer que $C_0 = C_1 = 0$:

   $$\begin{aligned} C_0 &= 1 - 1 = 0 \\ C_1 &= 3 - \beta_1 - \beta_2 = 0 \iff \beta_1 + \beta_2 = 3 \end{aligned}$$

   Para estudiar la estabilidad, hemos de calcular el polinomio característico del método:

   $$p(\lambda) = \lambda^3 - 1 = 0 \iff \lambda^3 = 1$$

   Sabemos que esa ecuación tiene tres raíces complejas distintas de módulo 1, por lo que el método es estable. Por tanto, el método es convergente si y solo si $\beta_1 + \beta_2 = 3$.

2. Calcula los coeficientes β_1 y β_2 para que el método sea convergente y tenga orden máximo. Indica el error de convergencia local en este caso.

   Imponemos que $C_i = 0$ para $i = 0, 1, 2$:

   $$\begin{aligned} C_0 &= 1 - 1 = 0 \\ C_1 &= 3 - \beta_1 - \beta_2 = 0 \iff \beta_1 + \beta_2 = 3 \\ C_2 &= \frac{3^2}{2!} - \frac{1^1}{1!}\cdot\beta_1 - \frac{2^1}{1!}\cdot\beta_2 = \frac{9}{2} - \beta_1 - 2\beta_2 = 0 \end{aligned}$$

Resolvemos por tanto el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\beta_1+\beta_2 & = & 3\\ -\beta_1-2\beta_2 & = & -\frac{9}{2}\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\beta_1 & = & 7/2\\ \beta_2 & = & -1/2\end{array}\right.$$

Por tanto, el método resultante es:

$$x_{n+3}=x_n+\frac{h}{2}\left(7f(t_{n+1},x_{n+1})-f(t_{n+2},x_{n+2})\right)$$

Calculemos C_3:

$$C_3=\frac{3^3}{3!}-\frac{1^2}{2!}\cdot\beta_1-\frac{2^2}{2!}\cdot\beta_2=\frac{9}{2}-\frac{7}{4}+1=\frac{15}{4}\neq 0$$

Por tanto, el orden del método es 2 y el error de truncatura local es:

$$R_{n+3}=\frac{15}{4}h^3x^{(3)}(\xi_n)\qquad \xi_n\in[t_n,t_{n+3}]$$

3. Dado el PVI:

$$\begin{cases}x'=-5x+t^2\\ x(0)=1\end{cases}$$

realiza dos iteraciones del método de Euler y a continuación, usando esos valores como semilla, realiza otras dos iteraciones del método propuesto con $h=0{,}1$.

En este caso, el método de Euler es:

$$x_{n+1}=x_n+0{,}1(-5x_n+t_n^2)$$

El método propuesto es:

$$\begin{aligned}x_{n+3}&=x_n+\frac{h}{2}\left(7f(t_{n+1},x_{n+1})-f(t_{n+2},x_{n+2})\right)\\ &=x_n+0{,}05\left(-35x_{n+1}+7t_{n+1}^2+5x_{n+2}-t_{n+2}^2\right)\end{aligned}$$

Las aproximaciones realizadas son:

n	t_n	x_n
0	0	1
1	0,1	0,5
2	0,2	0,251
3	0,3	0,18925
4	0,4	0,1175625

Ejercicio 1.3.2.8. Dado el PVI

$$\begin{cases}x'=f(t,x)\\ x(t_0)=\mu\end{cases}$$

utiliza la fórmula

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{5h}{12}f(a+h) + \frac{2h}{3}f(a) - \frac{h}{12}f(a-h) + R(f)$$

para construir razonadamente un método lineal multipaso de la forma

$$x_{n+2} = x_{n+1} + h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

y contesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Es el método convergente?

   En primer lugar, construimos el método:

$$\begin{aligned}
x_{n+2} - x_{n+1} \approx x(t_{n+2}) - x(t_{n+1}) &= \int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} f(t, x(t))dt = \int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} f(t, x(t))dt \approx \\
&\approx \frac{5h}{12}f(t_{n+2}, x(t_{n+2})) + \frac{2h}{3}f(t_{n+1}, x(t_{n+1})) - \frac{h}{12}f(t_n, x(t_n)) \approx \\
&\approx \frac{5h}{12}f_{n+2} + \frac{2h}{3}f_{n+1} - \frac{h}{12}f_n
\end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que:

$$\beta_2 = \frac{5}{12}, \quad \beta_1 = \frac{2}{3}, \quad \beta_0 = -\frac{1}{12}$$

   Para ver si el método es convergente, hemos de estudiar en primer lugar si es consistente, para lo cual hemos de imponer que $C_0 = C_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1 - 1 = 0 \\
C_1 &= 2 - 1 - \frac{2}{3} - \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = 0
\end{aligned}$$

   Por tanto, sí es consistente. Ahora hemos de estudiar la estabilidad del método, para lo cual calculamos el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0 \iff \lambda = 0, 1$$

   Por tanto, el método es estable, puesto que una de las raíces es 0 y la otra es 1, ambas en el disco unidad. Como es consistente y estable, el método es convergente.

2. ¿Cuál es el orden de convergencia local del método?

   Para calcular el orden del método, hemos de calcular los C_i:

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{2^2}{2!} - \frac{1^2}{2!} \cdot 1 - \frac{1^1}{1!}\beta_1 - \frac{2^1}{1!}\beta_2 = 0 \\
C_3 &= \frac{2^3}{3!} - \frac{1^3}{3!} \cdot 1 - \frac{1^2}{2!} \cdot \beta_1 - \frac{2^2}{2!} \cdot \beta_2 = -\frac{1}{6} \neq 0
\end{aligned}$$

   Por tanto, el orden del método es 2.

3. Si queremos utilizar el método de Euler como predictor y este método como corrector para resolver el problema, ¿cuál es el número óptimo de correcciones que se deberían aplicar?

   El método de Euler es un método de orden 1, y este método es de orden 2. Por tanto, si $m \geqslant 1$ es el número de correcciones, el orden del método predictor-corrector será:
   $$\text{mín}\{2, 1+m\} = 2$$
   Por tanto, el número óptimo de correcciones es $m = 1$.

4. Se pretende aproximar $x(1)$ donde $x(t)$ es la solución del PVI
   $$\begin{cases} x' = 3x - 2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$
   Para ello, tomando $h = 1/3$, utiliza el método de Euler para la primera iteración. A continuación utiliza un método predictor-corrector donde el predictor es el método de Euler y el corrector es el método anterior con una única corrección en cada paso.

   El método de Euler es:
   $$x_{n+1}^{(0)} = x_n + h(3x_n - 2)$$
   El método corrector es:
   $$x_{n+2} = x_{n+1} + h\left(\frac{5}{12}\left(3x_{n+2}^{(0)} - 2\right) + \frac{2}{3}(3x_{n+1} - 2) - \frac{1}{12}(3x_n - 2)\right)$$
   Las aproximaciones son:

n	t_n	$x_n^{(0)}$	x_n
0	0		1
1	$1/3$	$4/3$	$4/3$
2	$2/3$	2	2,3055555
3	1	3,94444444	4,70833333

Ejercicio 1.3.2.9. Para resolver el PVI
$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = \mu \end{cases}$$
se propone el método:
$$x_{n+1} = x_n + \frac{3}{2}hf(t_{n+1}, x_{n+1}) - \frac{1}{2}hf(t_n, x_n)$$
Estudia su A-estabilidad.

Consideramos el PVI $x' = \lambda x$, $x(0) = \mu$, con $\Re(\lambda) < 0$. En este caso, el método es:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + \frac{3}{2}h\lambda x_{n+1} - \frac{1}{2}h\lambda x_n = \left(1 - \frac{1}{2}h\lambda\right) x_n + \frac{3}{2}h\lambda x_{n+1} \\
&= \frac{1 - \frac{1}{2}h\lambda}{1 - \frac{3}{2}h\lambda} x_n = \left(\frac{2 - h\lambda}{2 - 3h\lambda}\right) x_n = \left(\frac{2 - \lambda h}{2 - 3\lambda h}\right)^n x_0
\end{aligned}$$

Sea ahora $w = \lambda h \in \mathbb{C}$, y calculemos la región de A-estabilidad del método:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2 - w}{2 - 3w}\right| < 1 &\iff |2 - w| < |2 - 3w| \\
\iff |2 - w|^2 < |2 - 3w|^2 &\iff 4 + |w|^2 - 4\Re(w) < 4 + 9|w|^2 - 12\Re(w) \\
\iff 8|w|^2 - 8\Re(w) > 0 &\iff |w|^2 - \Re(w) > 0 \iff |w|^2 > \Re(w)
\end{aligned}$$

Como la región de A-estabilidad contiene al semiplano izquierdo, el método es A-estable.

Ejercicio 1.3.2.10 (DGIIM 2023/24)**.** Para resolver numéricamente el PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = \mu \end{cases}$$

se propone el método de Runge-Kutta Radau dado por el arreglo de Butcher

$$\begin{array}{c|cc}
0 & 1/4 & -1/4 \\
2/3 & 1/4 & 5/12 \\
\hline
 & 1/4 & 3/4
\end{array}$$

Estudia la convergencia del método. No es necesario que compruebes que Φ es Lipschitziana.

Este método es dado por:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h\left(\frac{1}{4}K_1 + \frac{3}{4}K_2\right) \\
K_1 &= f(t_n, x_n + h\left(\frac{1}{4}K_1 - \frac{1}{4}K_2\right)) \\
K_2 &= f\left(t_n + \frac{2}{3}h, x_n + h\left(\frac{1}{4}K_1 + \frac{5}{12}K_2\right)\right)
\end{aligned}$$

Para estudiar la consistencia del método, estudiamos en primer lugar su estabilidad. Su polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda - 1 = 0 \iff \lambda = 1$$

Como la única raíz del polinomio es 1, el método es estable. Ahora hemos de estudiar la consistencia del método. Por la caracterización vista, tenemos que:

- $p(1) = 0$, que se tiene.

- $\Phi(x(t_n), t_n, 0) = p'(1)f(t_n, x(t_n))$.

  Para comprobar esto, hemos de tener en cuenta que si $h = 0$, entonces:

$$K_1 = K_2 = f(t_n, x_n)$$

  Por tanto:

$$\Phi(x(t_n), t_n, 0) = \frac{1}{4}K_1 + \frac{3}{4}K_2 = \frac{1}{4}f(t_n, x_n) + \frac{3}{4}f(t_n, x_n) = f(t_n, x_n) = p'(1)f(t_n, x(t_n))$$

  Por tanto, se cumple la condición de consistencia. Notemos que simplemente es necesario que $1/4 + \frac{3}{4} = 1$, que es el caso.

Por tanto, el método es estable y consistente, por lo que es convergente.

Ejercicio 1.3.2.11 (DGIIM 2023/24)**.** Para aproximar la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = \mu \end{cases}$$

se considera el método multipaso

$$x_{n+3} = x_n + h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1})$$

1. ¿Qué relaciones deben existir entre los parámetros β_1 y β_2 para que el método anterior sea convergente? Justifica tu respuesta.

   En el ejercicio 1.3.2.7 apartado 1 vimos que este método es convergente si y solo si:
$$\beta_1 + \beta_2 = 3$$

2. Calcula los coeficientes β_1 y β_2 para que el orden de convergencia sea máximo. Indica el orden de convergencia y el término principal del error de curvatura local.

   En el ejercicio 1.3.2.7 apartado 1 vimos que el método resultante es:

$$x_{n+3} = x_n + \frac{h}{2}\left(7f_{n+1} - f_{n+2}\right)$$

   Además vimos que el orden del método era 2 y el término principal del error de truncatura local era:
$$\frac{15}{4}h^3 x^{(3)}(t_n)$$

3. Se pretende aproximar $x(1)$ donde $x(t)$ es la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = x + t \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

   Para ello, tomando $h = 1/4$, utiliza el método de Euler para obtener las condiciones iniciales que necesites. A continuación utiliza el método anterior hasta aproximar $x(1)$.

El método de Euler es:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) = x_n + h(x_n + t_n)$$

El método propuesto es:

$$x_{n+3} = x_n + \frac{h}{2}\left(7f_{n+1} - f_{n+2}\right) = x_n + \frac{h}{2}\left(7(x_{n+1} + t_{n+1}) - (x_{n+2} + t_{n+2})\right)$$

Las aproximaciones realizadas son:

n	t_n	x_n
0	0	1
1	$1/4$	1,25
2	$1/2$	1,625
3	$3/4$	2,046875
4	1	2,75976563