Curvas y Superficies

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Curvas y Superficies

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

Índice general

1. Introducción

test2

2. Curvas en el plano y en el espacio

2.1. Definición. Curva regular. Longitud de arco

Definición 2.1. Una **curva** en el espacio es una aplicación diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.

Normalmente, si queremos señalar explícitamente las componentes de α, escribiremos:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

En realidad, a un geómetra solo le interesa la llamada "traza de la curva":

$$\operatorname{tr} \alpha = \operatorname{im} \alpha = \alpha(I)$$

Ejemplo. Sean $a \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$, definimos $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\alpha(t) = a + tv$$

En dicho caso:

$$\operatorname{tr} \alpha = \begin{cases} \{a\} & \text{si } v = 0 \\ R_{a,v} & \text{si } v \neq 0 \end{cases}$$

donde denotamos por $R_{a,v}$ a la única recta que pasar por a y con dirección v:

$$R_{a,v} = a + \langle v \rangle$$

Definición 2.2. Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ se llama "**plana**" si existe un plano $P \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{tr} \alpha \subset P$.

Como P y $P(z = 0)$ son equivalentes salvo un movimiento rígido[1] de $\mathbb{R}^3$, podemos considerar que la curva α está definida como $\alpha : I \to P(z = 0) \subset \mathbb{R}^3$, cuyas componentes son:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), 0) \equiv (x(t), y(t))$$

De esta forma, podemos abstraernos y pensar que una curva plana es una aplicación diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$.

[1] Es decir, una aplicación afín que conserve longitudes y ángulos.

En los libros es común llamar a estar curvas "parametrizadas" y "diferenciables". En nuestra definición imponemos que una curva ha de ser diferenciable, y el adjetivo parametrizada se debe a la dependencia de la variable independiente.

Ejemplo. Varios ejemplos de curvas:

1. Extrapolando el ejemplo anterior:

$$\alpha(t) = a + tv$$

   para $a \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha'(t) = v$. Se trata de un Movimiento Rectilíneo Uniforme. Ahora, vemos que $\alpha''(t) = 0$, no hay aceleración ninguna.

2. Tomando $a \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, consideramos $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\beta(t) = a + t^2 v$$

   Observamos ahora que tenemos $\operatorname{tr}\beta \subset \operatorname{tr}\alpha$, y la traza de esta curva es la semirrecta de extremo a y dirección v:

$$\operatorname{tr}\beta = R_0^+(a, v)$$

   Tenemos $\beta'(t) = 2tv$, la velocidad depende de t, cuanto más nos acercamos a a de forma negativa vamos frenando, en a estamos a velocidad 0 y luego la velocidad aumenta.

   $\beta''(t) = 2v$, la aceleración es constante, se trata de un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado.

Ejercicio 2.1.1. Estudiar $\gamma(t) = a + t^3 v$, con $a \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Ejemplo.

1. Consideramos ahora $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\delta(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$$

   Se trata de una curva con autointersecciones. Folio 1.

   Su velocidad es $\delta'(t) = (3t^2 - 4, 2t)$, que no se anula en ningún punto.

2. Si consideramos $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varepsilon(t) = (t^3, t^2)$.

   Su velocidad es $\varepsilon'(t) = (3t^2, 2t)$, que se anula en el origen. Observamos que en el dibujo de la traza vemos un pico.

   Aunque ε sea diferenciable, $\operatorname{tr}\varepsilon$ tiene "picos". Observamos además que $\operatorname{im}\varepsilon$ es la gráfica de la aplicación[2] $y = x^{2/3}$. Esta función no es derivable en el origen.

[2]Lo hemos obtenido igualando $x = t^2$, $y = t^3$, despejando t de la segunda e igualando en la primera.