Topología II
Examen IX

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`
Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología II
Examen IX

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2025

Asignatura Topología II.

Curso Académico 2025/26.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Grupo Único.

Profesor José Antonio Gálvez.

Descripción Segundo Parcial.

Fecha 19 de diciembre de 2025.

Duración 1 hora.

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Existe una aplicación recubridora $p : \mathbb{RP}^3 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

b) Si X es un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo tal que toda aplicación continua $f : X \to \mathbb{S}^1$ se puede levantar a una aplicación continua $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ (para el recubridor usual $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$) entonces X es simplemente conexo.

Ejercicio 2 (5 puntos)**.** Consideremos la aplicación $p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dada por

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = \big(x_1x_3 - x_2x_4, x_1x_4 + x_2x_3, x_1(x_3^2 - x_4^2) - 2x_2x_3x_4, 2x_1x_3x_4 + x_2(x_3^2 - x_4^2)\big)$$

o equivalentemente,

$$p(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi) = (\cos(\theta + \varphi), \operatorname{sen}(\theta + \varphi), \cos(\theta + 2\varphi), \operatorname{sen}(\theta + 2\varphi))$$

Demuestra que p es una aplicación recubridora (3.5 puntos). Además, para el punto $x_0 = (1, 0, 1, 0)$ calcula $p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, x_0))$ (1.5 puntos).

Solución.

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Existe una aplicación recubridora $p : \mathbb{RP}^3 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Es falsa: por reducción al absurdo, supuesto que existe $p : \mathbb{RP}^3 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ aplicación recubridora como $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ es recubridor universal de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ por la aplicación $Id_{\mathbb{S}^2} \times p$ donde $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ es la aplicación usual:

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \mathrm{sen}(2\pi x))$$

Tenemos entonces que $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ recubre a $\mathbb{RP}^3$, y $\mathbb{S}^3$ es el recubridor universal de $\mathbb{RP}^3$ (basta considerar la proyección al cociente), por lo que tendremos entonces que $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^3$, pero esto es una contradicción, ya que $\mathbb{S}^3$ es compacto y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ no lo es.

b) Si X es un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo tal que toda aplicación continua $f : X \to \mathbb{S}^1$ se puede levantar a una aplicación continua $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ (para el recubridor usual $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$) entonces X es simplemente conexo.

Es falsa: podemos tomar tomar $X = \mathbb{RP}^2$ y sea $f : X \to \mathbb{S}^1$ cualquier aplicación continua, si tomamos $x_0 \in X$, $b_0 = f(x_0)$ y $r_0 \in p^{-1}(b_0)$ tenemos entonces que $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$, grupo finito, con lo que $f_*(\pi_1(X, x_0))$ también ha de ser un subgupo finito de $\pi_1(B, b_0) \cong \mathbb{Z}$. Como el único subgrupo finito de $\mathbb{Z}$ es $\{0\}$ ha de ser:

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) = \{[\varepsilon_{b_0}]\}$$

Tenemos así que $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{R}, r_0))$, por lo que f se puede levantar. Vemos además que X no es simplemente conexo, pues $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$.

Ejercicio 2 (5 puntos)**.** Consideremos la aplicación $p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dada por

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = \big(x_1x_3 - x_2x_4, x_1x_4 + x_2x_3, x_1(x_3^2 - x_4^2) - 2x_2x_3x_4, 2x_1x_3x_4 + x_2(x_3^2 - x_4^2)\big)$$

o equivalentemente,

$$p(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, \cos\varphi, \mathrm{sen}\,\varphi) = (\cos(\theta + \varphi), \mathrm{sen}(\theta + \varphi), \cos(\theta + 2\varphi), \mathrm{sen}(\theta + 2\varphi))$$

Demuestra que p es una aplicación recubridora (3.5 puntos). Además, para el punto $x_0 = (1, 0, 1, 0)$ calcula $p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, x_0))$ (1.5 puntos).

Vemos que p es claramente una aplicación continua. Definimos ahora la aplicación $q : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dada por:

$$q(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, \cos\varphi, \mathrm{sen}\,\varphi) = (\cos(2\theta - \varphi), \mathrm{sen}(2\theta - \varphi), \cos(\varphi - \theta), \mathrm{sen}(\varphi - \theta))$$

vemos que es una aplicación continua, y que:

$$\begin{aligned}
&p(q(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, \cos\varphi, \mathrm{sen}\,\varphi)) = p(\cos(2\theta - \varphi), \mathrm{sen}(2\theta - \varphi), \cos(\varphi - \theta), \mathrm{sen}(\varphi - \theta))\\
&= (\cos(2\theta - \varphi + \varphi - \theta), \mathrm{sen}(2\theta - \varphi + \varphi - \theta), \cos(2\theta - \varphi + 2\varphi - 2\theta), \mathrm{sen}(2\theta - \varphi + 2\varphi - 2\theta))\\
&= (\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta), \cos(\varphi), \mathrm{sen}(\varphi))\\
&q(p(\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta), \cos(\varphi), \mathrm{sen}(\varphi))) = q(\cos(\theta + \varphi), \mathrm{sen}(\theta + \varphi), \cos(\theta + 2\varphi), \mathrm{sen}(\theta + 2\varphi))\\
&= (\cos(2(\theta + \varphi) - (\theta + 2\varphi)), \mathrm{sen}(2(\theta + \varphi) - (\theta + 2\varphi)),\\
&\qquad \cos(\theta + 2\varphi - (\theta + \varphi)), \mathrm{sen}(\theta + 2\varphi - (\theta + \varphi)))\\
&= (\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta), \cos(\varphi), \mathrm{sen}(\varphi))
\end{aligned}$$

Por lo que q es la aplicación inversa de p, con lo que p es un homeomorfismo, luego una aplicación recubridora.

Para $x_0 = (1, 0, 1, 0)$, tenemos que $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, x_0)$ está generador por $[\alpha], [\beta]$, donde $\alpha, \beta : [0, 1] \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ vienen dadas por:

$$\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), 1, 0), \qquad \beta(t) = (1, 0, \cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$$

Si calculamos su imagen mediante p obtenemos que:

$$\begin{aligned} p(\alpha(t)) &= (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), \cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) \\ p(\beta(t)) &= (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), \cos(4\pi t), \operatorname{sen}(4\pi t)) \end{aligned}$$

Vemos así que $[p(\alpha)] = [\alpha] * [\beta]$ y que $[p(\beta)] = [\alpha] * [\beta] * [\beta]$, como tenemos la imagen de los generadores de $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, x_0)$ tenemos pues que:

$$p_*(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, x_0) = \langle [\alpha] * [\beta], [\alpha] * [\beta] * [\beta] \rangle$$

Podemos además observar que:

$$[\beta] = ([\alpha] * [\beta] * [\beta]) * ([\alpha]^{-1} * [\beta]^{-1})$$

de donde $[\beta]$ también está en dicho grupo y por tanto:

$$[\alpha] = [\alpha] * [\beta] * [\beta]^{-1}$$

En definitiva, tenemos que:

$$p_*(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, x_0) = \langle [\alpha] * [\beta], [\alpha] * [\beta] * [\beta] \rangle = \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p(x_0))$$