

Topología II

Examen III



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Topología II

Examen III

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Asignatura Topología II.

Curso Académico 2021/22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Grupo Único.

Descripción Recopilación de ejercicios de repaso de varios temas.

Ejercicio 1. Sea $M = \frac{I \times I}{\sim}$ con $I = [0, 1]$ la banda de Möbius con $(0, y) \sim (1, 1-y)$. Probar que $\frac{I \times \{\frac{1}{2}\}}{\sim}$ es un retracto de deformación de M y deducir que $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$. Probar que el borde $\frac{I \times \{0,1\}}{\sim}$ es un lazo y hallar qué clase da en $\pi_1(M)$.

Ejercicio 2. Hallar el grupo fundamental de:

- a) $(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]) \cup (\mathbb{D}^2 \cup \{0, 1\})$.
- b) $\mathbb{S}^1(-1, 0) \cup \mathbb{S}^1(1, 0) \cup [(-2, 0), (2, 0)]$.
- c) Tres esferas de \mathbb{R}^3 donde cada una es tangente a las otras dos.

Ejercicio 3. Sea G un grupo de homeomorfismos de X actuando de manera natural. Si G actúa propia y discontinuamente sobre X , probar que la aplicación proyección $p : X \rightarrow X/G$ es recubridora.

Ejercicio 4. Si Y es un espacio topológico discreto, probar que $(X \times Y, p_1 : X \times Y \rightarrow X)$ es recubridor de X .

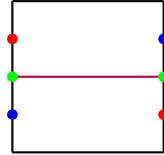
Ejercicio 5. Probar:

- a) El grupo fundamental de un plano proyectivo menos un punto.
- b) Un espacio contráctil es arcoconexo.
- c) Si el recubridor de un espacio simplemente conexo también es simplemente conexo, entonces ambos espacios son homeomorfos.
- d) Si \overline{X} es simplemente conexo, entonces $|\pi_1(X)|$ es el número de hojas.

Solución.

Ejercicio 1. Sea $M = \frac{I \times I}{\sim}$ con $I = [0, 1]$ la banda de Möbius con $(0, y) \sim (1, 1 - y)$. Probar que $\frac{I \times \{1/2\}}{\sim}$ es un retracto de deformación de M y deducir que $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$. Probar que el borde $\frac{I \times \{0,1\}}{\sim}$ es un lazo y hallar qué clase da en $\pi_1(M)$.

Nos piden probar que el conjunto $C = \frac{I \times \{1/2\}}{\sim}$ es un retracto de deformación de M :



Consideramos la aplicación $H : M \times [0, 1] \rightarrow M$ dada por:

$$H((x, y), t) = (1 - t)(x, y) + t(x, 1/2) = (x, (1 - t)y + t/2)$$

Que está bien definida, ya que si $(x, y) \sim (u, v)$, entonces:

- Bien $(x, y) = (u, v)$, en cuyo caso es claro que $H(x, y) = H(u, v)$.
- Bien $x = 0$, $u = 1$ y $y = 1 - v$. En dicho caso:

$$\begin{aligned} H(u, v) &= H(1, v) = (1, (1 - t)v + t/2) \\ H(x, y) &= H(0, 1 - v) = (0, (1 - t)(1 - v) + t/2) = (0, (1 - v) - t(1 - v) + t/2) \\ &= (0, 1 - t + t/2 - (1 - t)v) = (0, 1 - (1 - t)v - t/2) \quad \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Observamos que $H(u, v) \sim H(x, y)$.

Vemos que H es continua. Vemos además que:

- $H((x, y), 0) = (x, y) \quad \forall (x, y) \in M$.
- $H((x, y), 1) = (x, 1/2) \in C \quad \forall (x, y) \in M$.
- $H((u, v), 1) = (u, 1/2) = (u, v) \quad \forall (u, v) \in C$.

Por lo que C es un retracto de deformación de M . Ahora, si consideramos la aplicación $f : I \times \{1/2\} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por:

$$f(x, 1/2) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

Tenemos claramente que f es continua y sobreyectiva. Como va de un conjunto compacto en un T_2 tenemos también que es cerrada, por lo que f es una identificación. Vemos finalmente que:

$$f(0, 1/2) = (1, 0) = f(1, 1/2)$$

Por lo que podemos inducir f al cociente $\frac{I \times \{1/2\}}{\sim}$, lo que nos da un homeomorfismo entre C y \mathbb{S}^1 . De esta forma:

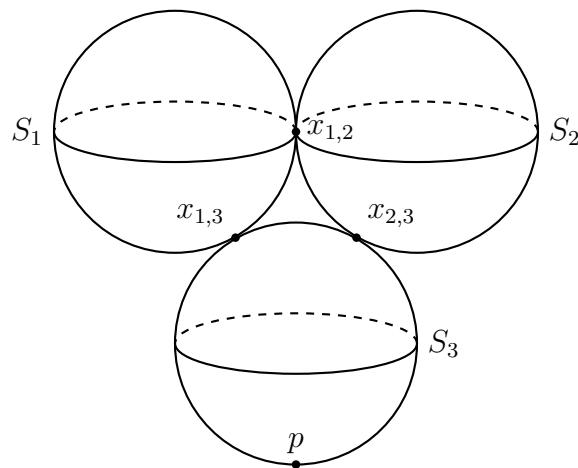
$$\pi_1(M) = \pi_1(C) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

Ejercicio 2. Hallar el grupo fundamental de:

- a) $(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]) \cup (\mathbb{D}^2 \cup \{0, 1\})$.
- b) $\mathbb{S}^1(-1, 0) \cup \mathbb{S}^1(1, 0) \cup [(-2, 0), (2, 0)]$.
- c) Tres esferas de \mathbb{R}^3 donde cada una es tangente a las otras dos.

Tenemos que $X = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, con:

$$S_1 \cap S_2 = \{x_{1,2}\}, \quad S_1 \cap S_3 = \{x_{1,3}\}, \quad S_2 \cap S_3 = \{x_{2,3}\}$$

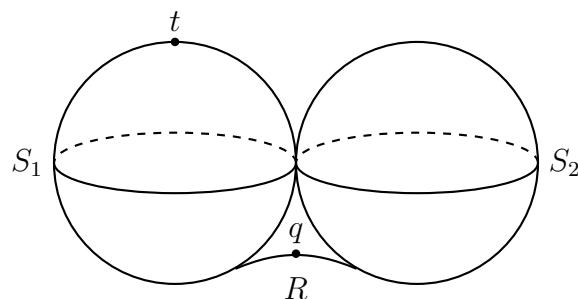


y consideramos los conjuntos:

$$\begin{aligned} U &= X \setminus \{x_{1,2}\} \\ V &= X \setminus \{p\}, \quad p \in S_3 \setminus \{x_{1,3}, x_{2,3}\} \end{aligned}$$

tenemos que:

- $X = U \cup V$ con U, V abiertos.
- U, V y $U \cap V$ son arcoconexos.
- U tiene por retracto de deformación el conjunto S_3 , por lo que U es simplemente conexo.
- $U \cap V$ tiene por retracto de deformación el conjunto $S_3 \setminus \{q\}$, que a su vez es contráctil, por lo que $U \cap V$ es contráctil, luego simplemente conexo.
- V tiene como retracto de deformación el conjunto Y :



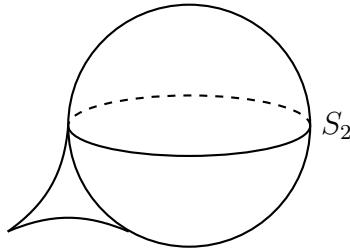
Al que tratamos de calcularle el grupo fundamental, usando para ello nuevamente el Teorema de Seifert-van Kampen. Si denotamos por R al segmento restante de S_3 en Y que une $x_{1,3}$ con $x_{2,3}$ (luego $Y = S_1 \cup S_2 \cup R$), consideramos ahora los conjuntos:

$$W = Y \setminus \{q\}, \quad q \in R \setminus \{x_{1,3}, x_{2,3}\}$$

$$O = Y \setminus \{t\}, \quad t \in S_1 \setminus \{x_{1,2}, x_{1,3}\}$$

Tenemos que:

- $Y = W \cup O$ con W y O abiertos.
- W, O y $O \cap W$ son arcoconexos.
- W tiene a $S_1 \cup S_2$ como retracto de deformación, y en teoría vimos que este espacio topológico es simplemente conexo.
- $W \cap O$ tiene a $(S_1 \setminus \{t\}) \cup S_2$ como retracto de deformación, y este último tiene a su vez a S_2 como retracto de deformación, por lo que $W \cap O$ es simplemente conexo.
- O tiene el conjunto:



como retracto de deformación, y en teoría tambien se calculó el grupo fundamental de este espacio topológico, pues podemos ver R como la imagen de cierto arco α , por lo que sabemos que dichos espacio topológico tiene grupo fundamental isomorfo a \mathbb{Z} , por lo que el grupo fundamental de O es isomorfo a \mathbb{Z} .

Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen obtenemos que:

$$\pi_1(V) \cong \pi_1(Y) \cong \pi_1(W) * \pi_1(O) \cong \{1\} * \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

Aplicando nuevamente el Teorema de Seifert-van Kampen obtenemos:

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1 k(V) \cong \{1\} * \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

Ejercicio 3. Sea G un grupo de homeomorfismos de X actuando de manera natural. Si G actúa propia y discontinuamente sobre X , probar que la aplicación proyección $p : X \rightarrow X/G$ es recubridora.

Ejercicio 4. Si Y es un espacio topológico discreto, probar que $(X \times Y, p_1 : X \times Y \rightarrow X)$ es recubridor de X .

Sabemos ya que p_1 es una aplicación continua y sobreyectiva, por ser la proyección en primera coordenada del espacio topológico producto $X \times Y$.

Dado $x \in X$, si consideramos como O_x cualquier entorno abierto de x tendremos entonces que:

$$p_1^{-1}(O_x) = O_x \times Y = \biguplus_{y \in Y} O_x \times \{y\}$$

Con cada $O_x \times \{y\}$ abierto para todo $y \in Y$, puesto que O_x es abierto en X y $\{y\}$ abierto en Y por tener Y la topología discreta. Es obvio finalmente que para cada $y \in Y$ tenemos que $p_1|_{O_x \times \{y\}} : O_x \times \{y\} \rightarrow O_x$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 5. Probar:

- a) El grupo fundamental de un plano proyectivo menos un punto.
- b) Un espacio contráctil es arcoconexo.

Si X es un espacio topológico contráctil, existe entonces una aplicación continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ de forma que:

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) = x_0 \quad \forall x \in X$$

Por tanto, si consideramos $\alpha_x : [0, 1] \rightarrow X$ dada por:

$$\alpha_x(t) = H(x, t)$$

Tenemos que α_x es una aplicación continua, luego es un arco que une $\alpha_x(0) = H(x, 0) = x$ con $\alpha_x(1) = H(x, 1) = x_0$. Como este lazo lo podemos considerar para todo $x \in X$, dados dos puntos arbitrarios de X x e y , el lazo $\alpha_x * \widetilde{\alpha_y}$ une x con y , por lo que X es arcoconexo.

- c) Si el recubridor de un espacio simplemente conexo también es simplemente conexo, entonces ambos espacios son homeomorfos.

Sea $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora entre dos espacios topológicos simplemente conexos, por ser p una aplicación recubridora tenemos que es continua, sobreyectiva y abierta. Para probar que p es un homeomorfismo, basta ver que p es inyectiva.

Opción 1. Como R es simplemente conexo tenemos para cada $b \in B$ que la aplicación correspondencia del levantamiento $\phi : \pi_1(B, b) \rightarrow p^{-1}(b)$ es biyectiva, por lo que:

$$|p^{-1}(b)| = |\pi_1(B, b)| = |\{1\}| = 1$$

de donde cada elemento de B tiene una única preimagen por p , por lo que p es inyectiva.

Opción 2. Para ello, dados $x, y \in R$ con $p(x) = p(y)$, como R es arcoconexo (por ser simplemente conexo) tenemos que existe un arco α que une x con y , por lo que $p \circ \alpha$ es un arco de B que une $p(x)$ con $p(y) = p(x)$, por lo que es un lazo basado en $p(x)$. Como B es simplemente conexo:

$$[p \circ \alpha] = [\varepsilon_{p(x)}]$$

Ahora, tenemos que α es el único levantamiento de $p \circ \alpha$ que comienza en x , así como que ε_x es el único levantamiento de $\varepsilon_{p(x)}$ que comienza en x . Tenemos por tanto que α debe ser un lazo, y además $[\alpha] = [\varepsilon_x]$, de donde $x = y$, por lo que p es inyectiva, luego es un homeomorfismo.

Notemos que en este ejercicio solo hemos usado que R es arcoconexo y que B es simplemente conexo. Aunque parezca que la condición “ R simplemente conexo” es necesaria para hacer el ejercicio según la opción 1, si R es solo arcoconexo tenemos que la correspondencia del levantamiento es sobreyectiva y por tanto que:

$$1 = |p^{-1}(b)| \leq |\pi_1(B, b)| = 1$$

Y habríamos llegado a la misma conclusión

- d) Si \overline{X} es simplemente conexo, entonces $|\pi_1(X)|$ es el número de hojas.