WUOLAH

examenes-parcial-2021-2022-TOPO2...

jmarg6

Topología Ii

4º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

TOPOLOGÍA II

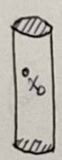
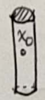
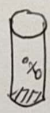
PARCIAL 2021/2022

(1) Sea $M = \frac{I \times I}{\sim}$, con $I = [0,1]$, la banda de Möbius con $(0,y) \sim (1, 1-y)$. Probar que $\frac{I \times \{\frac{1}{2}\}}{\sim}$ es un retracto de deformación de M y deducir que $\pi(M) = \mathbb{Z}$. Probar que el borde $\frac{I \times \{0,1\}}{\sim}$ es un lazo y hallar qué clase da en $\pi(M)$.

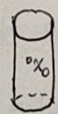
Lo dejo sin mirar.

(2) Hallar el grupo fundamental de:

a) $(\mathbb{S}^1 \times [0,1]) \cup (\mathbb{D}^2 \times \{0,1\})$.

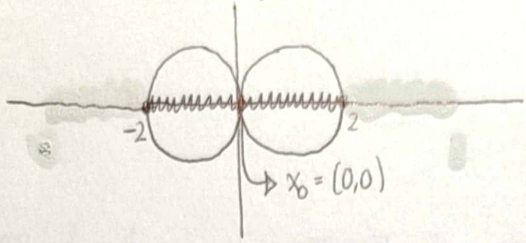
$X =$  $U =$ , $V =$  abiertos y arcoconexos.

$U \cup V = X$.

$U \cap V =$  $\neq \emptyset$ abierto y arcoconexo.

- $U \underset{r.d.}{\approx} \mathbb{D}^2 \times \{1\} \Rightarrow \pi(U, x_0) = \pi(\mathbb{D}^2 \times \{1\}) = \{1\}$
- $V \underset{r.d.}{\approx} \mathbb{D}^2 \times \{0\} \Rightarrow \pi(V, x_0) = \pi(\mathbb{D}^2 \times \{0\}) = \{1\}$
- $U \cap V \underset{r.d.}{\approx} x_0 \Rightarrow \pi(U \cap V, x_0) = \{1\}$ ($U \cap V$ es simplemente conexo ya que es contráctil)
- Por el Teorema de S-VK, $\pi(X, x_0) = \{1\}$.

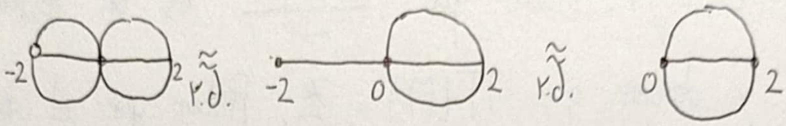
b) $\mathbb{S}^1(-1,0) \cup \mathbb{S}^1(1,0) \cup [(-2,0),(2,0)]$.

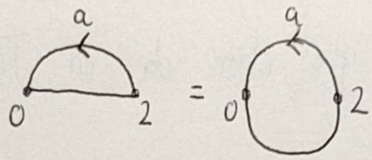
$X =$ 

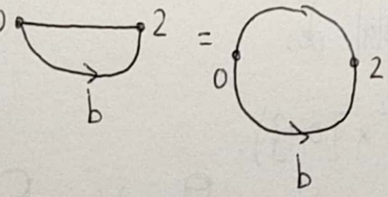
$U = X \setminus \{(-2,0)\}$, $V = X \setminus \{(2,0)\}$ abiertos y arcoconexos.

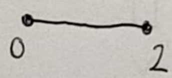
$U \cup V = X$.

$U \cap V = X \setminus \{(-2,0),(2,0)\} \neq \emptyset$ abierto y arcoconexo.

•) $U =$ 

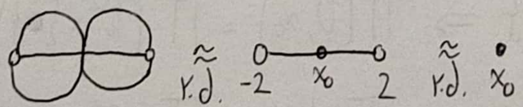
*) $U' =$  $\Rightarrow \pi(U', x_0) = F([a])$

*) $V' =$  $\Rightarrow \pi(V', x_0) = F([b])$

*) $U' \cap V' =$  $\Rightarrow \pi(U' \cap V', x_0) = \{1\}$

*) Por el Teorema de S-VK, $\pi(U, x_0) = F([a],[b]) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

•) Análogamente, $\pi(V, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

•) $U \cap V =$  $\Rightarrow \pi(U \cap V, x_0) = \{1\}$

(U∩V es simplemente conexo al ser contráctil)

•) Por el Teorema de S-VK, $\pi(X, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

c) Tres esferas de $\mathbb{R}^3$ donde cada una es tangente a las otras dos.

Ya hecho en los apuntes.

$\pi(X, x_0) = \mathbb{Z}$.

③ Sea G un subgrupo de homeomorfismos de X actuando de manera natural. Si G actúa propia y discontinuamente sobre X, probar que la aplicación proyección $p: X \longrightarrow X/G$ es recubridora.

Lo dejo sin mirar.

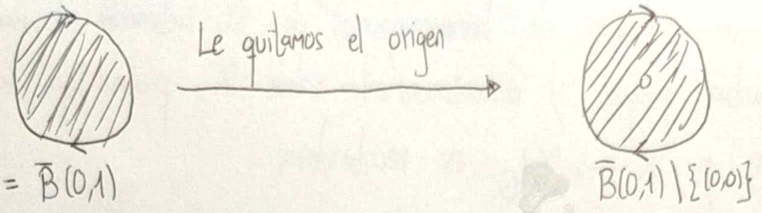
④ Si Y es discreto, probar que $(X\times Y, p_1: X\times Y \longrightarrow X)$ es recubridor de X.

Tenemos que p_1 es continua y sobreyectiva, pues se trata de la proyección a la primera coordenada de $X\times Y$. Tenemos que $Y = \bigcup_{y\in Y} \{y\}$, donde $\{y\}$ es abierto con la topología discreta en Y, y además es arcoconexo, luego, ya tenemos una partición de Y en componentes arcoconexas. Por tanto, si tomamos $U\subset X$ un entorno abierto y arcoconexo de un punto $p\in X$, tenemos que $p_1^{-1}(U) = U\times \bigcup_{y\in Y}\{y\}$
Sea $p_{1|U\times\{y\}}: U\times\{y\} \longrightarrow U$. Tenemos que $p_{1|U\times\{y\}}$ es continua por ser restricción de una aplicación continua a un abierto (producto de abiertos), es sobreyectiva, pues $p_{1|U\times\{y\}}(U\times\{y\}) = p_1(U\times\{y\}) = U$, es inyectiva, pues si $p_{1|U\times\{y\}}(x,y) = p_{1|U\times\{y\}}(x',y) \Rightarrow x = x'$, y es abierta, pues es la restricción de una aplicación abierta (la proyección) a un abierto. Por tanto, $p_{1|U\times\{y\}}$ es homomorfismo $\forall y\in Y \Rightarrow (X\times Y, p_1: X\times Y\longrightarrow X)$ es recubridor de X. ∎

⑤ Probar:

a) El grupo fundamental de un plano proyectivo menos un punto.

Vemos el plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$ como $\frac{\overline{B}(0,1)}{\sim}$, donde $\overline{B}(0,1) = \{x\in\mathbb{R}^2 / \|x\|\leq 1\}$ y $x\sim y \Leftrightarrow \|x-y\| = 2$, $\forall x,y\in \overline{B}(0,1)$, es decir, $x\sim y \Leftrightarrow x = -y$ $\forall x,y \in Fr(\overline{B}(0,1))$.



Esta última figura se retrae en el borde pues $r: X\setminus\{0\} \longrightarrow X\setminus\{0\}$ dada por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ está bien definida (pues el origen no está en el dominio) y existe $H: X\setminus\{0\} \times [0,1] \longrightarrow X\setminus\{0\}$ dada por $H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$ que es claramente continua y vemos como $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = \frac{x}{\|x\|} = r(x)$.
Además, para $x \in \mathbb{S}^1$, $x = \frac{x}{\|x\|}$, se tiene que $H(x,t) = s \in \mathbb{S}^1$. Por tanto, $\underset{\sim}{X\setminus\{0\}}$ se retrae fuertemente en $\underset{\sim}{\mathbb{S}^1} \Rightarrow \Pi(\mathbb{RP}^2\setminus\{0\}) = \Pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

b) Un espacio contráctil es arcoconexo.

Sea X un espacio contráctil. Sabemos que X admite como retracto de deformación a un punto, $\{p_0\} \subset X$. Por tanto, existen $r: X \longrightarrow \{p_0\}$ ($r(x) = p_0,\ \forall x \in X$) una retracción y $H: X \times [0,1] \longrightarrow X$ ($H(x,t) = (1-t)x + tp_0$) una homotopía asociadas. [Supongamos que X no es arcoconexo. Entonces, existen dos componentes arcoconexas distintas, C_1 y C_2.
Sea $x \in C_1$. Podemos definir el arco $H_x(t): [0,1] \longrightarrow X$ dado por $H_x(t) = H(x,t)$, de forma que $H_x(0) = x$ y $H_x(1) = r(x) = p_0$, luego, $p_0 \in C_1$. De igual forma, sea $y \in C_2$, definir el arco $H_y(t): [0,1] \longrightarrow X$ dado por $H_y(t) = H(y,t)$, de forma que $H_y(0) = y$ y $H_y(1) = r(y) = p_0$, luego, $p_0 \in C_2$. Pero $C_1 \cap C_2 = \emptyset$!! Contradicción. En conclusión, X es arcoconexo.] (Y hemos visto que $p_0 \in C_1 \cap C_2$)

Otra forma: [Sean $x, y \in X$. Definimos el arco $\alpha: [0,1] \longrightarrow X$ dado por

$$\alpha(t) = \begin{cases} (1-2t)x + 2tp_0 & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ (2-2t)p_0 + (2t-1)y & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

. El arco está bien definido pues $[(1-2t)x + 2tp_0](1/2) = p_0$ y $[(2-2t)p_0 + (2t-1)y](1/2) = p_0$ y, además, $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$, por lo que α es un arco entre x e y $\underset{x,y \text{ arbitrarios}}{\Rightarrow}$ X es arcoconexo.]

c) Si el recubridor de un espacio simplemente conexo también es simplemente conexo, entonces ambos espacios son homeomorfos.

Sabemos que si $(\tilde{X}, \pi)$ es un recubridor de X, $x_0 \in X$ y $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, entonces la aplicación $\left(\dfrac{\Pi(X,x_0)}{\pi_*(\Pi(\tilde{X},\tilde{x}_0))}\right) \longrightarrow \pi^{-1}(x_0)$ es una biyección.

Como X y $\tilde{X}$ son simplemente conexos $\Rightarrow \begin{cases} \Pi(X,x_0) = \{1\} \\ \Pi(\tilde{X},\tilde{x}_0) = \{1\} \Rightarrow \pi_*(\Pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)) = \{1\} \end{cases}$

Por tanto, $\left|\dfrac{\Pi(X,x_0)}{\pi_*(\Pi(\tilde{X},\tilde{x}_0))}\right| = \underbrace{1 = |\pi^{-1}(x_0)|}$. Esto nos dice que π es una aplicación inyectiva y, por tanto, al ser π una aplicación recubridora, $\begin{cases} \text{continua} \\ \text{sobreyectiva} \\ \text{abierta} \end{cases}$ se tiene que π es un homeomorfismo $\Rightarrow X$ y $\tilde{X}$ son homeomorfos. ∎

d) Si $\tilde{X}$ es simplemente conexo, entonces $|\Pi(X)|$ es el número de hojas.

Utilizando el mismo razonamiento que en el apartado c), se tiene en este caso que $\left|\dfrac{\Pi(X,x_0)}{\pi_*(\Pi(\tilde{X},\tilde{x}_0))}\right| = \left|\dfrac{\Pi(X,x_0)}{1}\right| = \underbrace{|\Pi(X,x_0)| = |\pi^{-1}(x_0)|}$ y, como el número de hojas se define como $\pi^{-1}(x_0)$ $\forall x_0 \in X$, tenemos lo que se pide. ∎