Topología II

Examen V

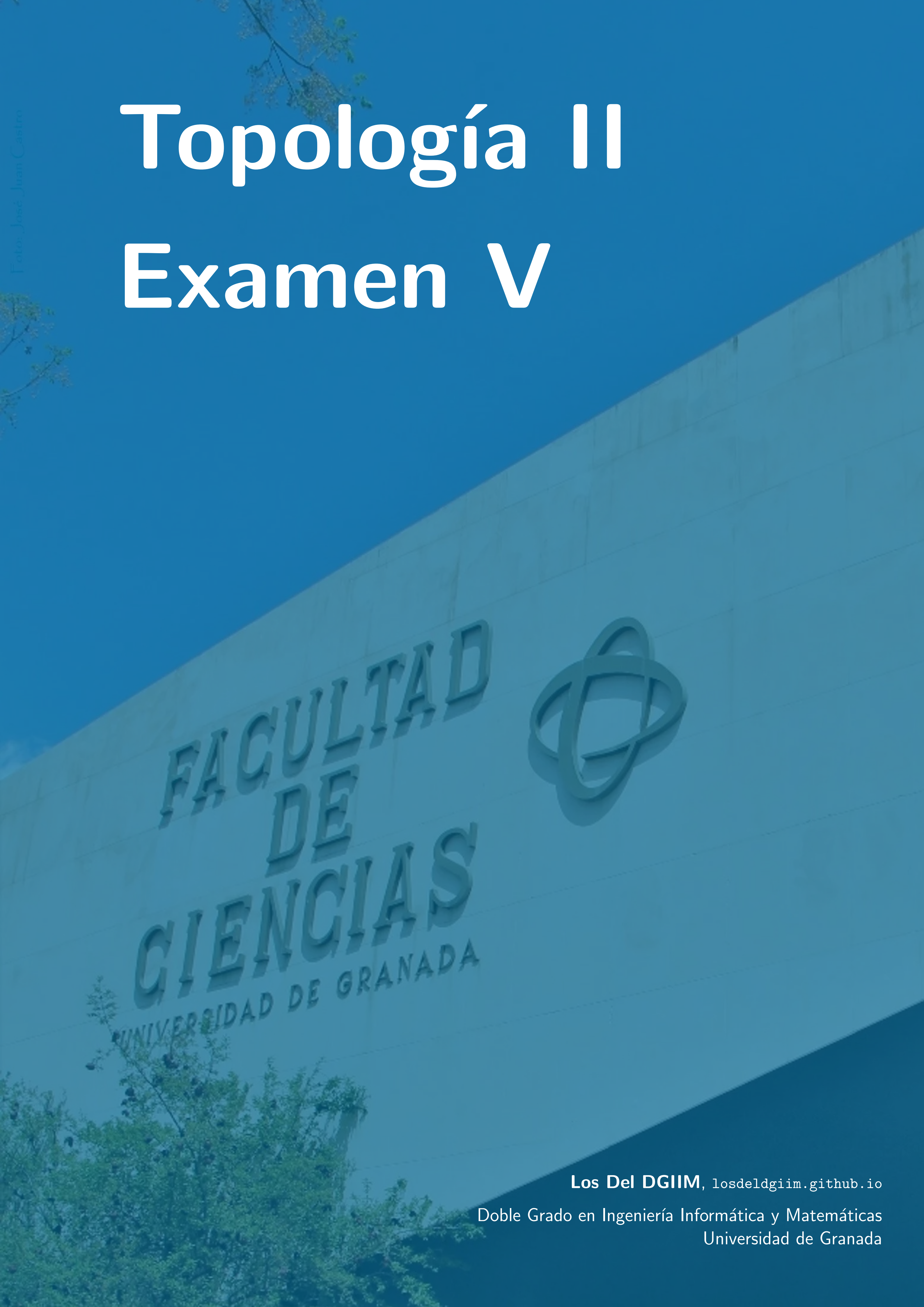

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología II
Examen V

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Asignatura Topología II.

Curso Académico 2024/25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Grupo Único.

Descripción Examen ordinario.

Fecha 10 de enero de 2025.

Duración 2 horas y media.

Responda la pregunta 1 y elija dos preguntas entre la 2, 3 y 4.

Ejercicio 1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Sea $f : \mathbb{S}^1 \to$ una aplicación continua y $F : A \to X$ una aplicación continua desde $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geqslant 1\}$ tal que $F\big|_{\mathbb{S}^1} = f$. Entonces f_* es trivial.

b) Sea X un espacio topológico arcoconexo que admite un recubridor universal. Si $Y \subset X$ es arcoconexo entonces Y también tiene un recubrido universal.

c) Si S_1 y S_2 son dos superficies compactas y conexas con S_1 no orientable entonces $S_1 \# S_2$ es no orientable.

Ejercicio 2. Calcula el grupo fundamental de los espacios topológicos X, Y siguientes:

a) $X = E_1 \cup E_2$, donde E_1, E_2 son las esferas de $\mathbb{R}^3$ de radio 2 y centradas, respectivamente, en los puntos $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$.

b) $Y = S_1 \cup S_2$, donde $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ son dos superficies topológicas conexas que se cortan en un único punto y con grupos fundamentales isomorfos, respectivamente, a los grupos G_1 y G_2.

Ejercicio 3. Sean $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ con $N = (0, 0, 1)$, $S = (0, 0, -1)$ y $r : X \to A$ la aplicación continua

$$r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

donde $A = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, y, z) : z = 0\}$.

a) Demuestra que $H : X \times [0, 1] \to X$ dada por

$$H((x, y, z), t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

es una homotopía entre r y la identidad en X.

b) Si $Y = \mathbb{RP}^2 \setminus \{[N]\}$, comprueba que H se puede inducir a una homotopía

$$\overline{H} : Y \times [0, 1] \to Y$$

y utiliza esto para calcular el grupo fundamental del plano proyectivo menos un punto.

Ejercicio 4. Sean $\mathbb{T}$ el toro y S_1, S_2 las superficies siguientes:

a) S_1 es´ta dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e; ab^{-1}cde, ad^{-1}e^{-1}bc^{-1}\rangle$$

b) $S_2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}$.

¿Son S_1 y S_2 homeomorfas?