Mecánica Celeste

Examen IV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Mecánica Celeste
Examen IV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2025

Asignatura Mecánica Celeste.

Curso Académico 2024-25.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo A.

Profesor Margarita Arias López.

Descripción Primer Parcial.

Fecha 25 de Octubre de 2024.

Duración 1 hora y 30 minutos.

El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio o apartado.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Sea $x : I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ una solución de la ecuación

$$\ddot{x} = -\frac{1}{|x|^3}x$$

Justifica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) [1] Si $x(0) = (0, 0, 1)$ y $\dot{x}(0) = (0, 0, a)$, con $a > 0$, $x(t)$ está definida para todo $t \geqslant 0$ y su órbita recorre el semieje vertical positivo.

b) [1] Si $x(0) = (0, 0, 1)$ y $\dot{x}(0) = (a, 0, 0)$, con $a > 0$, la órbita de $x(t)$ recorre una elipse en el plano $\{x_2 = 0\}$.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Sabiendo que el semieje mayor de la órbita de Saturno es aproximadamente de $9,5$ a.u., determina su periodo orbital en días.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Se sabe que la densidad ρ de un planeta, que se supone esférico, es constante y que $\rho = \frac{3}{4\pi G}$, con G la constante de gravitación. Si un saltador es capaz de impulsarse con una velocidad de 6 m/s, ¿qué radio debe tener el planeta para que el saltador pueda escaparse de un brinco?[1]

Ejercicio 4 (4 puntos)**.** Un satélite gira alrededor de un planeta de masa igual al inverso de la constante de gravitación universal $MG = 1$ describiendo una trayectoria elíptica. Se sabe que la excentricidad de la elipse que describe es $\varepsilon = 0{,}2$ y que el semieje mayor es $a = 10^3$ km. Se pide:

a) Determinar las distancias máxima y mínima del satélite al planeta.

b) Calcular el tiempo que tarda el satélite en dar una vuelta completa a su órbita.

c) Determinar la velocidad del satélite en los puntos en que su órbita atraviesa los ejes de la elipse que describe (puntos $Q_i, i = 1, 2, 3, 4$ de la Figura 1)

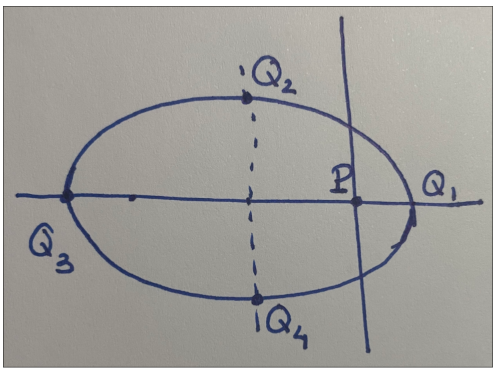


Figura 1: Trayectoria elíptica descrita

[1]recuerda que el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Sea $x : I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ una solución de la ecuación

$$\ddot{x} = -\frac{1}{|x|^3}x$$

Justifica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) [1] Si $x(0) = (0, 0, 1)$ y $\dot{x}(0) = (0, 0, a)$, con $a > 0$, $x(t)$ está definida para todo $t \geqslant 0$ y su órbita recorre el semieje vertical positivo.

Dado que estamos en un c.f.c. (campo de fuerzas centrales), sabemos que el momento angular será constante. Podemos obtener

$$c(0) = x(0) \wedge \dot{x}(0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a \\ i & j & k \end{vmatrix} = (0, 0, 0) \Longrightarrow |c| = 0$$

Es decir, el movimiento se da, salvo isometría, a lo largo de una semirrecta. En tal caso, $x(t) = r(t)v$, con $v \in \mathbb{R}^3$ y $|v| = 1$. Por teoría, sabemos que hay tres casos posibles (dado que el campo es atractivo), aunque en todos ellos el intervalo maximal es de la forma $]\alpha, \omega[$. Por ser c.f.c. tenemos que es conservativo, luego la energía total

$$E = \frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 - \frac{\mu}{|x(t)|}$$

se conserva. Usando los valores dados en $t = 0$, e identificando $\mu = 1$ por la forma de la ecuación dada,

$$E = \frac{1}{2}|\dot{x}(0)|^2 - \frac{1}{|x(0)|} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{1} = \frac{a^2}{2} - 1$$

Una condición necesaria para que $x(t)$ esté definida para todo $t \geqslant 0$ es que $E \geqslant 0$, de lo contrario, r tendría un cambio de monotonía y estaríamos en el caso en que $-\infty < \alpha < \omega < +\infty$, luego no estaría definida $[0, +\infty[$. Sin embargo, esto no es cierto en general, ya que la condición

$$E < 0 \iff \frac{a^2}{2} - 1 < 0 \iff \frac{a^2}{2} < 1 \iff a^2 < 2 \iff |a| < \sqrt{2} \iff -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$$

La primera desigualdad está clara, porque $a > 0$, pero la segunda no, porque en principio,

$$0 < a < \sqrt{2}$$

y podría ser que $a < \sqrt{2}$, por lo que no es cierta en general.

b) [1] Si $x(0) = (0, 0, 1)$ y $\dot{x}(0) = (a, 0, 0)$, con $a > 0$, la órbita de $x(t)$ recorre una elipse en el plano $\{x_2 = 0\}$.

Nuevamente, hallamos el valor del momento angular en $t = 0$:

$$c(0) = x(0) \wedge \dot{x}(0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (0, a, 0) \Longrightarrow |c| = a > 0$$

por tanto, como $|c| \neq 0$, por teoría sabemos que el movimiento se hará en el plano $\Pi = \{c^{\perp}\}$, es decir, aquel plano con vector normal c que pase por el origen. El plano verifica la ecuación

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0 \Longrightarrow ax_2 = 0 \overset{a>0}{\Longrightarrow} x_2 = 0$$

En efecto, la órbita de $x(t)$ queda contenida en el plano $\{x_2 = 0\}$. Falta ver que es una elipse.

Para ello, podemos usar la energía igual que en el apartado anterior

$$h = \frac{1}{2}|\dot{x}(0)|^2 - \frac{1}{|x(0)|} = \frac{a^2}{2} - 1$$

Sabemos que $h < 0 \iff |e| < 1$, es decir, comprobar que $h < 0$ es equivalente a comprobar que $x(t)$ recorre una elipse, pero eso no tiene porqué ser cierto, por el mismo motivo que el apartado anterior. Solo es cierto si $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$, y como $a > 0$, la condición sobre el parámetro a para que esta afirmación sea verdadera es que

$$\boxed{0 < a < \sqrt{2}}$$

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Sabiendo que el semieje mayor de la órbita de Saturno es aproximadamente de $9,5$ a.u., determina su periodo orbital en días.

Usaremos la Tercera Ley de Kepler, que nos dice que el cuadrado de los periodos de revolución es proporcional al cubo de las distancias medias de las órbitas. En el caso del sistema solar, esta constante de proporcionalidad es la misma para todos los planetas. Por tanto, dado que la Tierra tiene 1 a.u. y periodo 1 año, entonces

$$\frac{p^2}{a^3} = k = \frac{(1 \text{ año})^2}{(1 \text{ a.u.})^3} = 1$$

Así, para cualquier planeta del sistema solar, considerando el Sol como el cuerpo central, se tiene que $p^2 = a^3$. Dado que ya tenemos la longitud del semieje mayor, y sabemos que si a está en a.u., entonces p está en años, queda usar el factor de conversión 1 año = 365 días (supondremos que no es bisiesto), y entonces se obtiene el periodo orbital en días

$$p = a^{3/2} = 9,5^{3/2} \cancel{\text{ años}} \cdot \frac{365 \text{ días}}{\cancel{1 \text{ año}}} = 10687,55278 \approx 10678 \text{ días}$$

Ejercicio 3 (2 puntos). Se sabe que la densidad ρ de un planeta, que se supone esférico, es constante y que $\rho = \frac{3}{4\pi G}$, con G la constante de gravitación. Si un saltador es capaz de impulsarse con una velocidad de 6 m/s, ¿qué radio debe tener el planeta para que el saltador pueda escaparse de un brinco?

Opción 1. Usando la fórmula de la velocidad de escape.

Por definición de densidad, $\rho = \frac{M}{V}$, con M la masa del planeta, y V su respectivo volumen. Como conocemos el volumen de la esfera y su densidad, podemos obtener una relación entre G, M y el radio R (para que la densidad sea finita, como es el caso, estamos suponiendo que $R > 0$), que luego usaremos en la fórmula de la velocidad de escape.

$$\rho = \frac{M}{V} \iff \frac{\cancel{3}}{\cancel{4\pi} G} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\cancel{3}M}{\cancel{4\pi} R^3} \iff \frac{1}{G} = \frac{M}{R^3} \iff 1 = \frac{GM}{R^3} \overset{R>0}{\iff} R^2 \overset{(*)}{=} \frac{GM}{R}$$

También sabemos por la Física de Bachillerato que la velocidad de escape tiene por fórmula

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

y como el saltador puede llegar hasta 6 m/s, imponiendo que esta sea la velocidad de escape, despejamos el radio, y obtendremos el valor del radio que debe tener el planeta para que el saltador pueda escaparse de un brinco

$$6 \text{ m/s} = v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}} \overset{(*)}{=} \sqrt{2R^2} \overset{R\geq 0}{=} \sqrt{2}R$$

de donde, el radio buscado es

$$\boxed{R = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \approx 4,24 \text{ m}}$$

Sin embargo, si $0 < R \leqslant 3\sqrt{2}$, también se cumple (lo cual es lógico porque, si con una velocidad inicial determinada escapa de un radio, lo hará también para un radio menor con esa misma velocidad inicial), por tanto, los valores que puede tomar el radio para que el saltador pueda escapar de un brinco son

$$\boxed{0 < R \leqslant 3\sqrt{2} \text{ m}}$$

Opción 2. No usando la fórmula de la velocidad de escape.

Consideramos la definición de densidad
$$\rho = \frac{M}{V}$$
Usando que $\rho = \frac{3}{4\pi G}$, y $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, obtenemos el valor de la masa M
$$M = \rho V = \frac{\cancel{3}}{\cancel{4\pi} G} \cdot \frac{\cancel{4\pi}}{\cancel{3}} R^3 = \frac{R^3}{G}$$
Teniendo en cuenta que estamos en un campo gravitatorio newtoniano de masa M, entonces se verifica la ecuación
$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{|x|^3}x \quad \mu = GM$$
es decir, $\mu = GM = G\frac{R^3}{G} = R^3$, y la ecuación resulta ser
$$\ddot{x} = -\frac{R^3}{|x|^3}x$$
Como el campo newtoniano es un c.f.c., en particular es conservativo, con potencial conocido, $V(x) = -\frac{\mu}{|x|}$. Podemos obtener entonces la energía total
$$E = \frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 + V(x(t)) = \frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 - \frac{\mu}{|x(t)|} \overset{\mu=R^3}{=} \frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 - \frac{R^3}{|x(t)|}$$
Suponemos que el saltador brinca en una dirección radial, de tal manera que podemos imponer las condiciones iniciales siguientes
$$x(0) = R\beta, \quad \dot{x}(0) = 6\beta, \quad |\beta| = 1$$
y concluir que
$$c(0) = x(0) \wedge \dot{x}(0) = 0 \Longrightarrow |c| = 0$$
porque x y $\dot{x}$ son paralelos, y consecuentemente el movimiento es rectilíneo. En tal caso, podemos clasificar dicho movimiento por medio de la energía. Por teoría sabemos que $x(t) = r(t)v$, con $|v| = 1$. Como $\dot{r}(0) = 6 > 0$, entonces si $E \geqslant 0$, $r(t)$ es estrictamente creciente y no acotada, luego el saltador escapa. Por tanto hay que imponer que $E \geqslant 0$. De lo contrario, habría un cambio de monotonía, y estaríamos en el caso en que $-\infty < \alpha < \omega < +\infty$, y el intervalo maximal de la solución (del movimiento) sería de la forma $]\alpha, \omega[\subset \mathbb{R}$. Obteniendo la energía en $t = 0$, y usando la conservación de la energía total
$$E = \frac{1}{2}|\dot{x}(0)|^2 - \frac{R^3}{|x(0)|} = \frac{1}{2} \cdot 6^2 - \frac{R^3}{R} \overset{R>0}{=} 18 - R^2$$
Como debe ser $E \geqslant 0$, entonces la condición sobre el radio es
$$E \geqslant 0 \iff 18 - R^2 \geqslant 0 \iff 18 \geqslant R^2 \iff |R| \leqslant \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \iff -3\sqrt{2} \leqslant R \leqslant 3\sqrt{2}$$
y por la naturaleza del problema, $R > 0$, y entonces para que el saltador pueda escapar, debe cumplirse que
$$\boxed{0 < R \leqslant 3\sqrt{2} \text{ m}}$$

Ejercicio 4 (4 puntos)**.** Un satélite gira alrededor de un planeta de masa igual al inverso de la constante de gravitación universal $MG = 1$ describiendo una trayectoria elíptica. Se sabe que la excentricidad de la elipse que describe es $\varepsilon = 0{,}2$ y que el semieje mayor es $a = 10^3$ km. Se pide:

a) Determinar las distancias máxima y mínima del satélite al planeta.

Por teoría, dado que estamos en una órbita elíptica, sabemos que los puntos a los que nos referimos son, respectivamente, el apoastro, y el periastro. Aplicando la Primera Ley de Kepler al satélite y al planeta, el planeta está en uno de los focos de la trayectoria elíptica (según la Figura 1 en el origen de coordenadas).

Si la ecuación de la elipse viene dada por $|x| + \langle e, x\rangle = k$, o por su expresión en polares

$$r = \frac{k}{1 + \varepsilon\cos(\theta - \omega)}$$

las fórmulas de las distancias del planeta al apoastro y al periastro son, respectivamente

$$r_{\text{máx}} = \frac{k}{1-\varepsilon} \quad r_{\text{mín}} = \frac{k}{1+\varepsilon}$$

y como $a = \frac{k}{1-\varepsilon^2}$, podemos despejar k, y obtener ambas distancias.

$$a = \frac{k}{1-\varepsilon^2} \iff k = a(1-\varepsilon^2) = 10^3(1 - 0{,}2^2) = 960 \text{ km}$$

y

$$\boxed{r_{\text{máx}} = \frac{960}{1-0,2} = 1200 \text{ km}} \quad \boxed{r_{\text{mín}} = \frac{960}{1+0,2} = 800 \text{ km}}$$

De esta manera

$$\boxed{\text{la distancia máxima del satélite al planeta es de 1200 kilómetros}}$$

y

$$\boxed{\text{la distancia mínima del satélite al planeta es de 800 kilómetros}}$$

b) Calcular el tiempo que tarda el satélite en dar una vuelta completa a su órbita.

Podemos usar la Tercera Ley de Kepler, obteniendo que

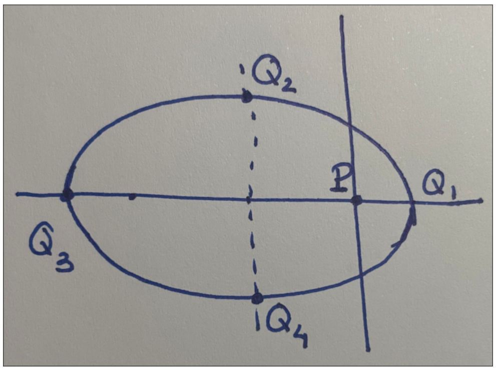
$$p = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$$

donde $\mu = GM = 1 \text{ m}^3/\text{s}^2$ (unidades del SI) por el enunciado. Como a está dado en kilómetros, por las unidades de μ, hay que pasarlo a metros, luego $a = 10^3$ km $= 10^6$ m, de tal manera que el periodo vendrá expresado en segundos

$$p = \frac{2\pi}{\sqrt{1}}(10^6)^{3/2} \approx 6283185307 \text{ s} \approx 104719755 \text{ min} \approx 1745329 \text{ h} \approx 72722 \text{ días} \approx 199 \text{ años}$$

$\boxed{\text{Así, el satélite tarda aproximadamente 199 años en dar una vuelta completa a su órbita.}}$

c) Determinar la velocidad del satélite en los puntos en que su órbita atraviesa los ejes de la elipse que describe (puntos $Q_i, i = 1, 2, 3, 4$ de la Figura 1)



Usando que estamos en un campo newtoniano, entonces el campo es conservativo, es decir, la energía total

$$h = \frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 - \frac{\mu}{|x(t)|}$$

se conserva (es constante). Además sabemos por la teoría de clasificación de movimientos en cónicas según su energía, que, como estamos en una órbita elíptica, debe ser $h < 0$. De hecho, esa relación sale de

$$\mu^2(\varepsilon^2 - 1) = 2h|c|^2 \quad (**)$$

Conocemos también el valor de k de la ecuación de la elipse en polares, que es $k = \frac{c^2}{\mu} \iff c^2 = \mu k$. Usando que $k = a(1-\varepsilon^2)$ (visto en el apartado anterior), obtenemos la ecuación vis-viva como sigue. Primero, despejamos h en $(**)$

$$\mu^2(\varepsilon^2-1) = 2h|c|^2 \iff h = \frac{\mu^2[\varepsilon^2-1]}{2|c|^2} \quad (***)$$

Sustituimos en $(***)$ que $|c|^2 = c^2 = \mu k$, y luego que $k = a(1-\varepsilon^2)$

$$h = \frac{\mu^2(\varepsilon^2-1)}{2|c|^2} = \frac{\mu^{\cancel{2}}(\varepsilon^2-1)}{2\cancel{\mu}k} = \frac{\mu(\varepsilon^2-1)}{2a(1-\varepsilon^2)} = -\frac{\mu\cancel{(1-\varepsilon^2)}}{2a\cancel{(1-\varepsilon^2)}} \overset{(1)}{=} -\frac{\mu}{2a} < 0 \quad (\mu, a > 0)$$

donde en (1) hemos usado que el movimiento se da en una elipse, luego

$$\varepsilon = |e| < 1 \Longrightarrow \varepsilon^2 < 1 \Longrightarrow 1-\varepsilon^2 > 0$$

Igualando ambas expresiones de la energía total, obtenemos

$$\frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 - \frac{\mu}{|x(t)|} = -\frac{\mu}{2a} \overset{\cdot 2}{\iff} |\dot{x}(t)|^2 - \frac{2\mu}{x(t)} = -\frac{\mu}{a} \iff |\dot{x}(t)|^2 = \frac{2\mu}{x(t)} - \frac{\mu}{a} = \mu\left(\frac{2}{x(t)} - \frac{1}{a}\right)$$

$$\Longrightarrow \dot{x}(t) = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{x(t)} - \frac{1}{a}\right)}$$

Ahora, falta obtener $x(t_i)$, donde t_i es el instante en que el planeta se encuentra en el respectivo punto Q_i, $i = 1, 2, 3, 4$, y obtendremos la velocidad en cada punto. Notemos que Q_1 y Q_3 se corresponden con el periastro y el apoastro, respectivamente. Q_2 y Q_4 se encuentran a altura módulo la longitud del semieje menor, que sabemos que es $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = 10^3\sqrt{1-0{,}2^2} \approx 979,8$ km. Por tanto, la distancia hacia ambos puntos de la órbita es la misma, o sea, $d(P, Q_2) = d(P, Q_4) \equiv d$ y verifica el Teorema de Pitágoras

$$d^2 = b^2 + (a-800)^2 \Longrightarrow d = \sqrt{b^2 + (a-800)^2}$$

Este esquema puede verse en la Figura 2

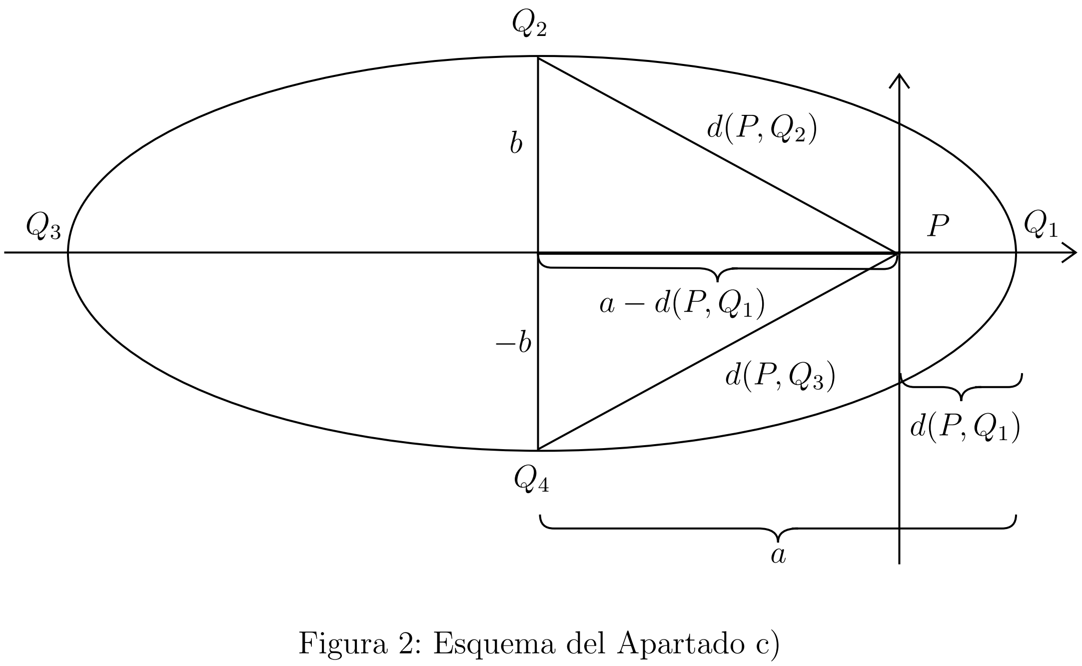


Figura 2: Esquema del Apartado c)

Ya podemos terminar el ejercicio, sin más que sustituir correctamente. Es importante que, al igual que en el apartado anterior, como $[\mu] = \text{m}^3/\text{s}^2$, entonces tanto las unidades en que expresemos $x(t_i), i = 1, 2, 3, 4$ como las de a deben ser igualmente metros.

1. Q_1. Se corresponde con el periastro, cuya distancia ya sabemos que es 800 kilómetros. Por tanto, la velocidad será

$$\dot{x}(t_1) = \sqrt{\left(\frac{2}{8 \cdot 10^5} - \frac{1}{10^6}\right)} \approx 0,001225 \text{ m/s}$$

2. Q_2 y Q_4. La distancia de ambos puntos de la trayectoria elíptica al planeta es d, luego

$$\dot{x}(t_2) = \dot{x}(t_4) = \sqrt{\left(\frac{2}{d \cdot 10^3} - \frac{1}{10^6}\right)} = 0,001 \text{ m/s}$$

3. Q_3. Se corresponde con el apoastro, cuya distancia ya sabemos que es 1200 kilómetros. Por tanto, la velocidad será

$$\dot{x}(t_3) = \sqrt{\left(\frac{2}{1,2 \cdot 10^6} - \frac{1}{10^6}\right)} \approx 0{,}000816 \text{ m/s}$$