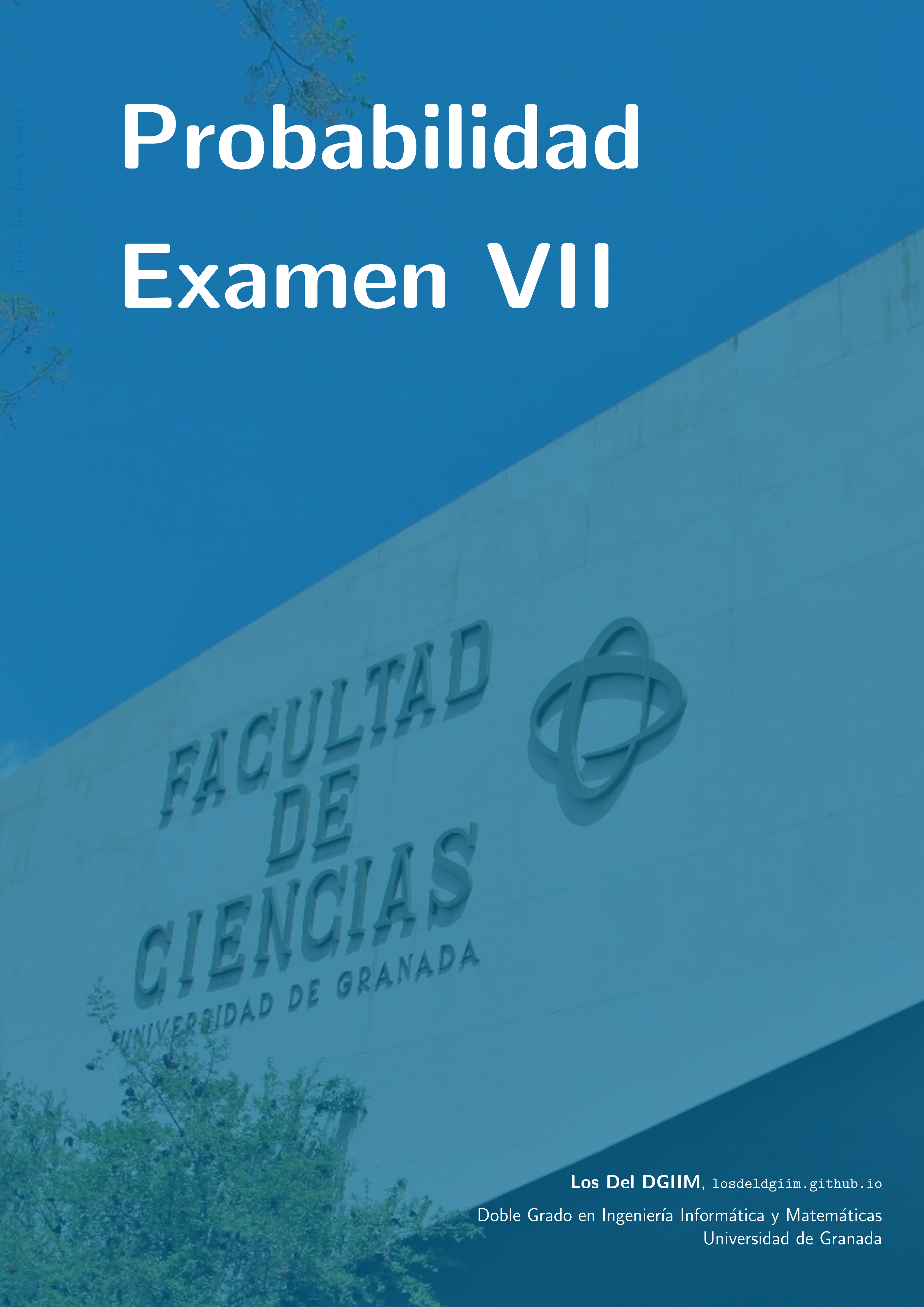
Probabilidad
Examen VII



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Probabilidad
Examen VII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos
José Juan Urrutia Milán

Granada, 2024-2025

Asignatura Probabilidad.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Examen Extraordinario.

Fecha 15 de febrero de 2022.

Ejercicio 1. Sean X_1, X_2, ..., X_n variables aleatorias continuas e independientes, tales que $\exists E[X_i]$ $\forall i = 1, \dots, n$, con momento no centrado de orden dos finito. Justificar que:

1. **(0.5 puntos)** $\exists \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \operatorname{Var}(X_i)$ $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.
2. **(0.5 puntos)** $(X_1, \dots, X_n)$ es un vector aleatorio continuo.

Ambos apartados se encuentran demostrados en el Tema correspondiente a independencia de variables aleatorias.

Ejercicio 2. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme en el recito

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \quad x, y \geqslant 0\}$$

Observación. Si necesitara obtener la primitiva de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, realizar el cambio de variable unidimensional $x = \operatorname{sen}(t)$.

1. **(1.25 puntos)** Calcular la función de distribución de probabilidad conjunta.

   Observación. Se obtiene **hasta 1 punto** si las integrales se dejan indicadas y **hasta 1.25 puntos** si se obtienen sus primitivas de forma explícita.

   Calculamos en primer lugar la función de densidad conjunta. Esta es constante en C, por lo que:

$$f(x, y) = \begin{cases} k, & x^2 + y^2 < 1, x, y \geqslant 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Para que f sea una función de densidad, tenemos que:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy$$

   Hay dos opciones:

   Integrando de la forma usual: Es necesario que:

$$1 = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} k\, dy\, dx = k \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

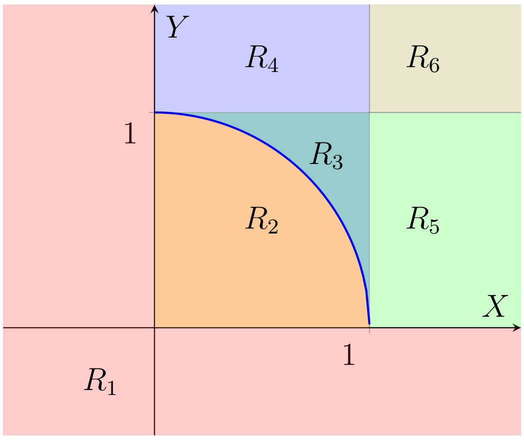
   Haciendo el cambio de variable $x = \operatorname{sen}(t)$, tenemos que:

$$1 = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos(t)\, dt = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\, dt =$$
$$= k \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = k \left[\frac{\pi}{4}\right] \Longrightarrow k = \frac{4}{\pi}.$$

Razonando la forma de C: Sabemos que C es un cuarto de círculo de radio 1, por lo que su área es $\pi/4$. Por tanto, tenemos que:

$$1 = \int_C f(x,y) = k\int_C 1 = k\cdot\lambda(C) = k\cdot\frac{\pi}{4} \Longrightarrow k = \frac{4}{\pi}.$$

Para calcular la función de distribución conjunta, dividimos el plano cartesiano en las distintas regiones:



Distinguimos casos:

- Si $x \leqslant 0 \quad \text{o} \quad y \leqslant 0$ (zona R_1):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = 0.$$

- Si $x \in \left]0,1\right[\quad \text{y} \quad y \in \left]0,\sqrt{1-x^2}\right[$ (zona R_2):

$$\begin{aligned}F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_0^x\int_0^y \frac{4}{\pi}\,dv\,du = \int_0^x \frac{4}{\pi}y\,du = \\ &= \frac{4}{\pi}\left[yu\right]_0^x = \frac{4}{\pi}\cdot xy\end{aligned}$$

- Si $x \in \left]0,1\right[\quad \text{y} \quad y \in \left]\sqrt{1-x^2},1\right[$ (zona R_3):

$$\begin{aligned}F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \\ &= \int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^y \frac{4}{\pi}\,dv\,du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{x}\int_0^{\sqrt{1-u^2}} \frac{4}{\pi}\,dv\,du = \\ &= \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{4}{\pi}y\,du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{x} \frac{4}{\pi}\sqrt{1-u^2}\,du\end{aligned}$$

Para resolver la segunda integral, hacemos el cambio de variable dado por $u = \operatorname{sen}(t)$, $du = \cos(t)dt$:

$$
\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \frac{4}{\pi} y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\int_{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\operatorname{arc\,sen}(x)} \cos^2(t)\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi} y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\int_{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\operatorname{arc\,sen}(x)} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi} y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\operatorname{arc\,sen}(x)} = \\
&= \frac{4}{\pi} y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(x))}{4} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2}))}{4}\right]
\end{aligned}
$$

Veamos cuánto vale anteriormente $\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(x))$ para cierto $x \in \mathbb{R}$:

$$
\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(x)) = 2\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(x))\cos(\operatorname{arc\,sen}(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}.
$$

Por tanto, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \frac{4}{\pi} y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{2} + \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{4} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}{2} - \frac{2\sqrt{1-y^2}\sqrt{y^2}}{4}\right] = \\
&= \frac{4}{\pi} y\sqrt{1-y^2} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(x) + \frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2} - \\
&\qquad - \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2}) - \frac{2}{\pi}y\sqrt{1-y^2}. = \\
&= \frac{2}{\pi} y\sqrt{1-y^2} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(x) + \frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})
\end{aligned}
$$

- Si $x \in]0,1[\quad \text{y} \quad y \geqslant 1$ (zona R_4):

$$
\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_0^x \int_0^{\sqrt{1-u^2}} \frac{4}{\pi}\,dv\,du = \\
&= \int_0^x \frac{4}{\pi}\sqrt{1-u^2}\,du
\end{aligned}
$$

Para resolver la integral, de nuevo hacemos el cambio de variable dado por $u = \operatorname{sen}(t)$, $du = \cos(t)dt$:

$$
\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\operatorname{arc\,sen}(x)} \cos^2(t)\,dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\operatorname{arc\,sen}(x)} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_0^{\operatorname{arc\,sen}(x)} = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(x))}{4}\right] = \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{2} + \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{4}\right] = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(x) + \frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2}.
\end{aligned}
$$

- <u>Si $y \in]0,1[\quad \text{y} \quad x \geqslant 1$</u> (zona R_5):

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \\
&= \int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^y \frac{4}{\pi}\,dv\,du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-u^2}} \frac{4}{\pi}\,dv\,du = \\
&= \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{4}{\pi}y\,du + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1} \frac{4}{\pi}\sqrt{1-u^2}\,du
\end{aligned}$$

Para resolver la segunda integral, de nuevo hacemos el cambio de variable dado por $u = \operatorname{sen}(t)$, $du = \cos(t)dt$:

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x,y) &= \frac{4}{\pi}y\,[u]_0^{\sqrt{1-y^2}} + \frac{4}{\pi}\int_{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\int_{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}^{\pi/2} = \\
&= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\pi/2}{2} + \frac{\operatorname{sen}(\pi)}{4} - \frac{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})}{2} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2}))}{4}\right] = \\
&= \frac{4}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2}) - \frac{2}{\pi}y\sqrt{1-y^2} = \\
&= \frac{2}{\pi}y\sqrt{1-y^2} + 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})
\end{aligned}$$

- <u>Si $x, y \geqslant 1$</u> (zona R_6):

$$F_{(X,Y)}(x,y) = 1.$$

Por tanto, tenemos que:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases}
0, & (x,y) \in R_1, \\
4/\pi\, xy, & (x,y) \in R_2, \\
2/\pi\left[y\sqrt{1-y^2} + x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})\right], & (x,y) \in R_3 \\
2/\pi\left[\operatorname{arc\,sen}(x) + x\sqrt{1-x^2}\right], & (x,y) \in R_4, \\
2/\pi\left[y\sqrt{1-y^2} + \pi/2 - \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{1-y^2})\right], & (x,y) \in R_5, \\
1, & (x,y) \in R_6.
\end{cases}$$

2. **(1.25 puntos)** Calcular las funciones de densidad condicionadas.

   Para ello, calculamos en primer lugar las funciones de densidad marginales. Para $x \in [0,1]$, ya que la función de densidad es constante, tenemos que:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{4}{\pi}\,dy = \frac{4}{\pi}\,[y]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{1-x^2}.$$

Para $y \in [0,1]$, ya que la función de densidad es constante, tenemos que:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{4}{\pi}\,dx = \frac{4}{\pi}\,[x]_0^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{1-y^2}.$$

Una vez calculadas estas, calculamos las funciones de densidad condicionadas. Dado $x^* \in [0,1]$, tenemos para $y \in [0, \sqrt{1-(x^*)^2}]$:

$$f_{Y|X=x^*}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x^*,y)}{f_X(x^*)} = \frac{{}^4/_\pi}{\frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{1-(x^*)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^*)^2}}.$$

Dado $y^* \in [0,1]$, tenemos para $x \in [0, \sqrt{1-(y^*)^2}]$:

$$f_{X|Y=y^*}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y^*)}{f_Y(y^*)} = \frac{{}^4/_\pi}{\frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{1-(y^*)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(y^*)^2}}.$$

Ejercicio 3. Sea considera (X,Y) la distribución uniforme en el cuadrado unidad.

1. **(1.25 puntos)** Calcular la función de densidad de probabilidad del vector aleatorio $Z = (X+Y, X-Y)$.

   Como cuadrado unidad, entendemos $C = [0,1]\times[0,1]$. La función de densidad conjunta es constante en C, por lo que:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y)\in C, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Para que $f_{(X,Y)}$ sea una función de densidad, tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = \\ &= \int_0^1\int_0^1 k\,dx\,dy = k\int_0^1 [x]_0^1\,dy = k\int_0^1 1\,dy = k\,[y]_0^1 = k. \end{aligned}$$

   Definimos ahora la transformación:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (X,Y) & \longmapsto & (Z,T) = (X+Y, X-Y) \end{array}$$

   Para obtener g^{-1}, buscamos despejar (X,Y) en función de (Z,T):

$$\left\{\begin{array}{c} Z = X+Y \\ T = X-Y \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} X = \dfrac{Z+T}{2} \\ Y = \dfrac{Z-T}{2} \end{array}\right\}$$

   Por tanto, la inversa es:

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (Z,T) & \longmapsto & (X,Y) = \left(\dfrac{Z+T}{2}, \dfrac{Z-T}{2}\right) \end{array}$$

Todas las componentes de g^{-1} son derivables, con:

$$\frac{\partial X}{\partial Z}(Z,T) = 1/2, \qquad \frac{\partial X}{\partial T}(Z,T) = 1/2,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial Z}(Z,T) = 1/2, \qquad \frac{\partial Y}{\partial T}(Z,T) = -1/2.$$

Además, tenemos que:

$$\det Jg^{-1}(z,t) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot 2 = -\frac{1}{2} \neq 0 \qquad \forall (z,t) \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto, $g(X,Y)$ es un vector aleatorio. Su función de densidad conjunta es:

$$f_{(Z,T)}(z,t) = f_{(X,Y)}\left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2}\right) \cdot |Jg^{-1}(z,t)| = \frac{1}{2} \qquad \left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2}\right) \in R$$

Veamos cuál es este conjunto. Tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant \dfrac{z+t}{2} \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \dfrac{z-t}{2} \leqslant 1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant z+t \leqslant 2 \\ 0 \leqslant z-t \leqslant 2 \end{array} \right\}$$

Por tanto, la función de densidad de probabilidad del vector aleatorio $Z = (X+Y, X-Y)$ es:

$$f_{(Z,T)}(z,t) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leqslant z+t \leqslant 2, 0 \leqslant z-t \leqslant 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2. **(1.25 puntos)** La función de densidad de proababilidad conjunta del máximo y el mínimo.

   Calculamos en primer lugar la función de distribución conjunta:

$$F_{(\text{máx}\{X,Y\}, \text{mín}\{X,Y\})}(z,t) = P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z, \text{mín}\{X,Y\} \leqslant t]$$

   Distinguimos en función de los valores de z y t:

   - Si $z \leqslant t$:

$$P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z, \text{mín}\{X,Y\} \leqslant t] = P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z] = P[X \leqslant z, Y \leqslant z]$$

     Distinguimos en función del valor de z:

     - Si $z \leqslant 0$:

$$P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z, \text{mín}\{X,Y\} \leqslant t] = P[X \leqslant z, Y \leqslant z] = 0$$

     - Si $0 \leqslant z \leqslant 1$:

$$P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z, \text{mín}\{X,Y\} \leqslant t] = P[X \leqslant z, Y \leqslant z] = \int_0^z \int_0^z 1 \; dxdy = z^2$$

- Si $1 \leqslant z$:

$$P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z, \text{mín}\{X,Y\} \leqslant t] = P[X \leqslant z, Y \leqslant z] = 1$$

- Si $t < z$:

$$\begin{aligned} P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z, \text{mín}\{X,Y\} \leqslant t] = \\ &= P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z] - P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z, \text{mín}\{X,Y\} > t] = \\ &= P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z] - P[t < X \leqslant z, t < Y \leqslant z] \end{aligned}$$

Distinguimos en función del valor de z (para tener así la distribución del máximo calculada):

- Si $z \leqslant 0$:

$$P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z, \text{mín}\{X,Y\} \leqslant t] = -P[t < X \leqslant z, t < Y \leqslant z]$$

Como la probabilidad debe ser positiva, tenemos que:

$$P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z, \text{mín}\{X,Y\} \leqslant t] = 0$$

- Si $0 \leqslant z \leqslant 1$:

$$P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z, \text{mín}\{X,Y\} \leqslant t] = z^2 - P[t < X \leqslant z, t < Y \leqslant z]$$

Distinguimos ahora en función de t:

  - Si $t \leqslant 0$:

$$P[t < X \leqslant z, t < Y \leqslant z] = \int_0^z \int_0^z 1 \; dxdy = z^2$$

Por tanto:

$$P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z, \text{mín}\{X,Y\} \leqslant t] = z^2 - z^2 = 0$$

  - Si $0 \leqslant t < z \leqslant 1$:

$$P[t < X \leqslant z, t < Y \leqslant z] = \int_t^z \int_t^z 1 \; dxdy = (z-t)^2$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z, \text{mín}\{X,Y\} \leqslant t] &= z^2 - (z-t)^2 = \\ &= z^2 - z^2 - t^2 + 2tz = t(2z-t) \end{aligned}$$

- Si $1 \leqslant z$:

$$P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z, \text{mín}\{X,Y\} \leqslant t] = 1 - P[t < X \leqslant z, t < Y \leqslant z]$$

Distinguimos ahora en función de t:

- Si $t \leqslant 0$:

$$P[t < X \leqslant z, t < Y \leqslant z] = \int_0^1 \int_0^1 1 \; dxdy = 1$$

Por tanto:

$$P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z, \text{mín}\{X,Y\} \leqslant t] = 1 - 1 = 0$$

- Si $0 \leqslant t < 1 \leqslant z$:

$$P[t < X \leqslant z, t < Y \leqslant z] = \int_t^1 \int_t^1 1 \; dxdy = (1-t)^2$$

Por tanto:

$$P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z, \text{mín}\{X,Y\} \leqslant t] = 1 - (1-t)^2 = 1 - 1 - t^2 + 2t = t(2-t)$$

- Si $1 \leqslant t < z$:

$$P[t < X \leqslant z, t < Y \leqslant z] = 0$$

Por tanto:

$$P[\text{máx}\{X,Y\} \leqslant z, \text{mín}\{X,Y\} \leqslant t] = 1 - 0 = 1$$

Por tanto, y uniendo las distintos conjuntos, tenemos que la función de distribución conjunta queda:

$$F_{(\text{máx}\{X,Y\},\text{mín}\{X,Y\})}(z,t) = \begin{cases} 0 & z \leqslant 0 \vee t \leqslant 0 \qquad (R_0) \\ z^2 & z \leqslant t, \; 0 \leqslant z \leqslant 1 \qquad (R_1) \\ t(2z-t) & 0 \leqslant t \leqslant z \leqslant 1 \qquad (R_2) \\ t(2-t) & 0 \leqslant t \leqslant 1 \leqslant z \qquad (R_3) \\ 1 & 1 \leqslant z \wedge 1 \leqslant t \qquad (R_4) \end{cases}$$

En la Figura 1 comprobamos que cubrimos la totalidad del plano.

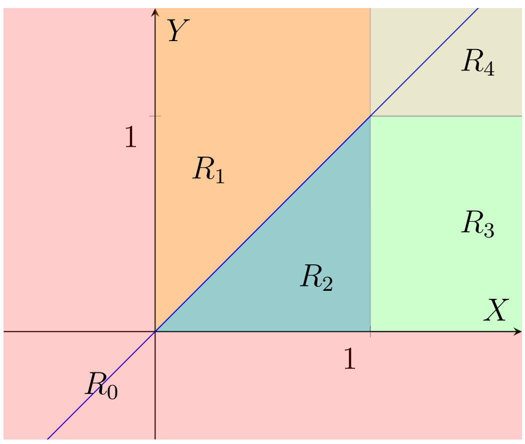


Figura 1: Comprobación de la función de distribución conjunta.

Una vez calculada la función de distribución, su función de densidad es:

$$f_{(\text{máx}\{X,Y\},\text{mín}\{X,Y\})}(z,t) = \frac{\partial^2 F_{(\text{máx}\{X,Y\},\text{mín}\{X,Y\})}(z,t)}{\partial z \partial t} = \begin{cases} 0 & z \leqslant 0 \lor t \leqslant 0 \qquad (R_0) \\ 0 & z \leqslant t,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 \qquad (R_1) \\ 2 & 0 \leqslant t \leqslant z \leqslant 1 \qquad (R_2) \\ 0 & 0 \leqslant t \leqslant 1 \leqslant z \qquad (R_3) \\ 0 & 1 \leqslant z \lor 1 \leqslant t \qquad (R_4) \end{cases}$$

Uniendo casos, tenemos que:

$$f_{(\text{máx}\{X,Y\},\text{mín}\{X,Y\})}(z,t) = \begin{cases} 2 & 0 \leqslant t \leqslant z \leqslant 1 \qquad (R_2) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Notemos que $f_{(\text{máx}\{X,Y\},\text{mín}\{X,Y\})}(z,t)$ es la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua uniformemente distribuida en el triángulo R_2. Por tanto, tenemos que:

$$(\text{máx}\{X,Y\}, \text{mín}\{X,Y\}) \sim \mathcal{U}(R_2).$$

Ejercicio 4. Dado un vector aleatorio con función generatriz de momentos

$$M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = \left(\frac{e^{t_1}}{2} + \frac{e^{t_2}}{4} + \frac{1}{4}\right)^5 \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Calcular la razón de correlación y el coeficiente de correlación lineal de las variables X_1 y X_2.

Sabemos que la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X tal que $X \sim M_2(n, p_1, p_2)$ es:

$$M_X(t_1,t_2) = \left(p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + (1 - p_1 - p_2)\right)^n.$$

Por tanto, tenemos que:

$$(X_1, X_2) \sim M_2(5, 1/2, 1/4)$$

Por tanto, sabemos que $X_1 \sim B(5, 1/2)$ y $X_2 \sim B(5, 1/4)$. Además,

$$\text{Cov}[X_1, X_2] = -n \cdot p_1 p_2$$

Al tratarse de una multinomial, tenemos que las curvas de regresión son rectas, luego la razón de correlación es:

$$\eta^2_{X_1/X_2} = \eta^2_{X_2/X_1} = \rho^2_{X_1,X_2} = \frac{\text{Cov}^2[X_1,X_2]}{\text{Var}[X_1]\,\text{Var}[X_2]} = \frac{n^2 p_1^2 p_2^2}{np_1(1-p_1) \cdot np_2(1-p_2)} = \frac{p_1 p_2}{(1-p_1)(1-p_2)} =$$
$$= \frac{1/2 \cdot 1/4}{1/2 \cdot 3/4} = \frac{1}{3}$$

Por otro lado, como $\text{Cov}[X_1, X_2] = -np_1p_2 < 0$, tenemos que el coeficiente de correlación lineal es:

$$\rho_{X_1,X_2} = -\sqrt{\rho^2_{X_1,X_2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicio 5. Dado el vector bidimensional (X, Y) con la siguiente función masa de probabilidad conjunta:

$X\|Y$	0	1	2
1	$1/4$	0	0
2	0	$1/4$	0
3	$1/4$	0	$1/4$

1. **(1.25 puntos)** Obtener la mejor aproximación minimo-cuadrática a la variable Y conocidos valores de la variable X, así como calcular una medida de la bondad del ajuste.

   Completamos en primer lugar la función masa de probabilidad conjunta calculando las marginales:

$X\backslash Y$	0	1	2	
1	$1/4$	0	0	$1/4$
2	0	$1/4$	0	$1/4$
3	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
	$1/2$	$1/4$	$1/4$	

   Mostramos ahora en la siguiente tabla la distribución condicionada a X, es decir, $P[Y|X = x]$:

$X\backslash Y$	0	1	2
1	1	0	0
2	0	1	0
3	$1/2$	0	$1/2$

   Por tanto, tenemos que:

   $$\begin{aligned}E[Y|X = 1] &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0\\ E[Y|X = 2] &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1\\ E[Y|X = 3] &= 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1/2 = 1\end{aligned}$$

   Por tanto, la mejor aproximación minimo-cuadrática a la variable Y conocidos valores de la variable X es:

   $$\hat{Y} = \begin{cases} 0 & \text{si } X = 1 \\ 1 & \text{si } X = 2, 3 \end{cases}$$

   Calculamos ahora una medida de la bondad del ajuste. Calculamos previamente:

$$\begin{aligned}
E[Y] &= 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/4 = 3/4 \\
E[Y^2] &= 0^2 \cdot 1/2 + 1^2 \cdot 1/4 + 2^2 \cdot 1/4 = 5/4 \\
\mathrm{Var}[Y] &= E[Y^2] - E[Y]^2 = 5/4 - 9/16 = 11/16 \\
E[(E[Y|X])^2] &= \sum_{x\in\{1,2,3\}} E[Y|X=x]^2 P[X=x] = 0^2 \cdot 1/4 + 1^2 \cdot 1/4 + 1^2 \cdot 1/2 = 3/4 \\
E[E[Y|X]] &= E[Y] = 3/4 \\
\mathrm{Var}[E[Y|X]] &= E[(E[Y|X])^2] - E[E[Y|X]]^2 = 3/4 - 9/16 = 3/16
\end{aligned}$$

Por tanto, la medida de la bondad del ajuste es:

$$\eta^2_{Y/X} = \frac{\mathrm{Var}[E[Y|X]]}{\mathrm{Var}[Y]} = \frac{3/16}{11/16} = \frac{3}{11}$$

2. **(1.25 puntos)** Obtener las ecuaciones de la rectas de regresión de $Y \mid X$ y $X \mid Y$ y el error cuadrático medio.

   Calculamos en primer lugar los resultados necesarios:

$$\begin{aligned}
E[X] &= 1 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/2 = 9/4 \\
E[X^2] &= 1^2 \cdot 1/4 + 2^2 \cdot 1/4 + 3^2 \cdot 1/2 = 23/4 \\
\mathrm{Var}[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = 23/4 - 81/16 = 11/16 \\
E[XY] &= 2 \cdot 1 \cdot 1/4 + 3 \cdot 2 \cdot 1/4 = 2 \\
\mathrm{Cov}[X,Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] = 2 - 9/4 \cdot 3/4 = 5/16
\end{aligned}$$

   Calculamos ahora las rectas de regresión.

   - Recta de regresión de Y sobre X:

$$\begin{aligned}
Y - E[Y] &= \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Var}[X]}(X - E[X]) \\
Y - \frac{3}{4} &= \frac{5/16}{11/16}\left(X - \frac{9}{4}\right) \\
Y &= \frac{5}{11}X - \frac{3}{11}
\end{aligned}$$

   - Recta de regresión de X sobre Y:

$$\begin{aligned}
X - E[X] &= \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Var}[Y]}(Y - E[Y]) \\
X - \frac{9}{4} &= \frac{5/16}{11/16}\left(Y - \frac{3}{4}\right) \\
X &= \frac{5}{11}Y + \frac{21}{11}
\end{aligned}$$

Respecto a los errores cuadráticos medios, tenemos que el error cuadrático medio de Y sobre X es:

$$\text{E.C.M.}(Y|X) = \text{Var}[Y] - \frac{\text{Cov}^2[X,Y]}{\text{Var}[X]} = \frac{11}{16} - \frac{(5/16)^2}{11/16} = \frac{6}{11}$$

Además, como $\text{Var}[X] = \text{Var}[Y]$, el error cuadrático medio de X sobre Y es el mismo:

$$\text{E.C.M.}(X|Y) = \frac{6}{11}$$