Cálculo II

Examen XII

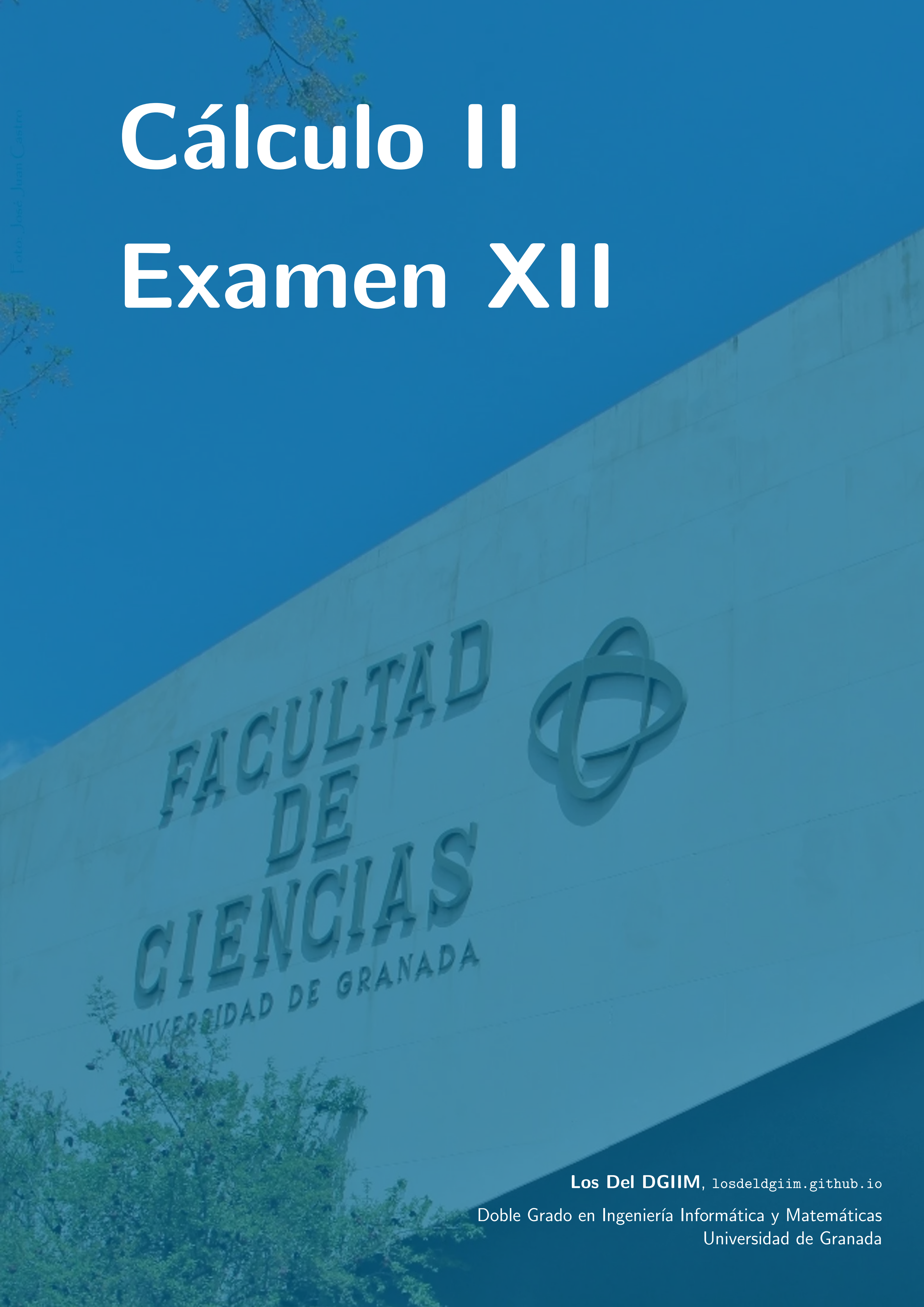

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo II
Examen XII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María Victoria Collado Velasco.

Fecha 20 de junio de 2023.

Descripción Convocatoria Ordinaria + Parcial II. Cálculo Integral (Temas 5-7).

- <u>Examen Final:</u> Ejercicios 1, 2, 3 y 4.
- <u>Parcial II:</u> Ejercicios 3, 4.1, 5, 6 y 7.

Este día se realizó en primer lugar el examen final. Posteriormente se dejó un tiempo de descanso y, finalmente, se realizaron los ejercicios que faltaban para completar el Parcial II.

Se calificaron independientemente y se obtuvieron dos notas por separado.

Ejercicio 1. [2 puntos] Probar la veracidad o la falsedad de las afirmaciones 1 y 2:

1. Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es n veces derivable y su derivada $n-$ésima es constante, entonces f es un polinomio de grado menor o igual a n.

2. La función $h(x) := x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ es uniformemente continua en $\left]0, \frac{1}{2\pi}\right]$.

Ejercicio 2. [2 puntos] Dados los puntos del plano $A = (0, 2)$ y $B = (6, 10)$, determinar el punto $C = (c, 0)$ del eje de abcisas que minimiza el perímetro del triángulo de vértices A, B y C.

Ejercicio 3. [3 puntos] Sea $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^{(x-1)^2} e^{-t^2}\,dt$.

1. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos absolutos y relativos, los puntos de inflexión y la concavidad de F.

2. Determinar la imagen de F, sabiendo que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   Demostrar que $0 \leqslant F(x) \leqslant (x-1)^2$, para cada $x \geqslant 0$.

3. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{F(x)}{1-\cos(x-1)+F(x)^2}$.

Ejercicio 4. Responder a los siguientes apartados:

1. **[2 puntos]** Calcular la longitud de la curva determinada por la gráfica de la función $f(x) = \ln(\cos x)$ entre los puntos $(0, 0)$ y $\left(\frac{\pi}{4}, \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. **[1 punto]** Demostrar que, dados $a, b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, existe un valor c comprendido entre a y b tal que
$$\ln\left(\frac{\cos a}{\cos b}\right) = (b-a)\tan(c).$$

Ejercicio 5. [1.5 puntos] Calcular el área limitada por la gráfica de la función dada por $f(x) = \dfrac{-x^3}{\sqrt{1-x^2}}$, el eje de abcisas y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ejercicio 6. [2 puntos] Determinar el conjunto de valores $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ para los cuales la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{a+x^n}{(x-1)x^2}\,dx$ es convergente, calculando el valor de la correspondiente integral.

Ejercicio 7. [1.5 puntos] Calcular el volumen del sólido de revolución que engendra la función $f(x) = \tan x$, donde $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, al girar sobre el eje de abcisas.