

Topología II

Examen V



Los Del DGIIM, losdeldgim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Topología II

Examen V

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Asignatura Topología II.

Curso Académico 2024/25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Grupo Único.

Descripción Examen ordinario.

Fecha 10 de enero de 2025.

Duración 2 horas y media.

Responda la pregunta 1 y elija dos preguntas entre la 2, 3 y 4.

Ejercicio 1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ una aplicación continua y $F : A \rightarrow X$ una aplicación continua desde $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 1\}$ tal que $F|_{\mathbb{S}^1} = f$. Entonces f_* es trivial.
- b) Sea X un espacio topológico arcoconexo que admite un recubridor universal. Si $Y \subset X$ es arcoconexo entonces Y también tiene un recubridor universal.
- c) Si S_1 y S_2 son dos superficies compactas y conexas con S_1 no orientable entonces $S_1 \# S_2$ es no orientable.

Ejercicio 2. Calcula el grupo fundamental de los espacios topológicos X, Y siguientes:

- a) $X = E_1 \cup E_2$, donde E_1, E_2 son las esferas de \mathbb{R}^3 de radio 2 y centradas, respectivamente, en los puntos $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$.
- b) $Y = S_1 \cup S_2$, donde $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ son dos superficies topológicas conexas que se cortan en un único punto y con grupos fundamentales isomorfos, respectivamente, a los grupos G_1 y G_2 .

Ejercicio 3. Sean $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ con $N = (0, 0, 1)$, $S = (0, 0, -1)$ y $r : X \rightarrow A$ la aplicación continua

$$r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

donde $A = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, y, z) : z = 0\}$.

- a) Demuestra que $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ dada por

$$H((x, y, z), t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

es una homotopía entre r y la identidad en X .

- b) Si $Y = \mathbb{RP}^2 \setminus \{[N]\}$, comprueba que H se puede inducir a una homotopía

$$\overline{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$$

y utiliza esto para calcular el grupo fundamental del plano proyectivo menos un punto.

Ejercicio 4. Sean \mathbb{T} el toro y S_1, S_2 las superficies siguientes:

- a) S_1 está dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e; ab^{-1}cde, ad^{-1}e^{-1}bc^{-1} \rangle$$

- b) $S_2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}$.

¿Son S_1 y S_2 homeomorfas?

Solución.

Ejercicio 1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ una aplicación continua y $F : A \rightarrow X$ una aplicación continua desde $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 1\}$ tal que $F|_{\mathbb{S}^1} = f$. Entonces f_* es trivial.

Es falsa, si consideramos $X = \mathbb{S}^1$ y tomamos $f = Id_{\mathbb{S}^1}$ y $F : A \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por:

$$F(x) = \frac{x}{|x|}$$

Tenemos que f y F son continuas, así como que $F|_{\mathbb{S}^1} = f$. Como f es un homeomorfismo, tendremos que $f_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$ es un isomorfismo de grupos, por lo que f_* no puede ser trivial, al ser $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.

- b) Sea X un espacio topológico arcoconexo que admite un recubridor universal. Si $Y \subset X$ es arcoconexo entonces Y también tiene un recubridor universal.

Es falsa, si consideramos $X = \mathbb{R}^2$ tenemos que X admite un recubridor universal (él mismo con la aplicación identidad). Si denotamos ahora por $S(x, r)$ a la circunferencia de centro x y radio r y consideramos:

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

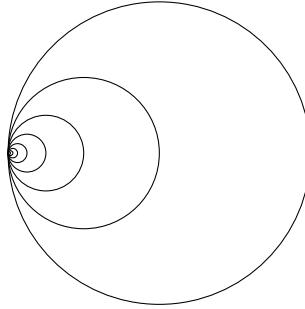


Figura 1: Conjunto Y .

Tenemos que Y es arcoconexo como la unión de conjuntos arcoconexos que se interseca en un punto (en el punto $(0, 0)$) y que Y no es semilocalmente simplemente conexo, pues para $x_0 = (0, 0)$ todo entorno U de x_0 ha de contener alguna circunferencia de radio $1/n$, y el arco cuya imagen rodea dicha circunferencia no puede cerrarse en U pero sí en X , por lo que $(i_U)_*$ no es trivial, lo que prueba que Y no es semilocalmente simplemente conexo, luego no puede tener recubridor universal.

- c) Si S_1 y S_2 son dos superficies compactas y conexas con S_1 no orientable entonces $S_1 \# S_2$ es no orientable.

Es verdadera, para ambas superficies podemos encontrar representaciones poligonales suyas \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 con una única expresión, con lo que serán de la forma:

$$\mathcal{P}_1 = \langle a_1, \dots, a_n; w_1 \rangle, \quad \mathcal{P}_2 = \langle b_1, \dots, b_m; w_2 \rangle$$

Como S_1 no es orientable y \mathcal{P}_1 tiene una expresión tendremos que esta expresión contiene dos letras con el mismo exponente. Hemos visto en teoría que la presentación:

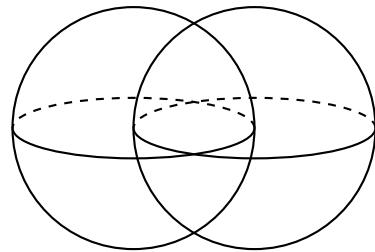
$$\mathcal{P} = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m; w_1 w_2 \rangle$$

es una presentación poligonal de $S_1 \# S_2$, que contiene una letra con el mismo exponente, al contener la expresión $w_1 w_2$ la palabra w_1 , por lo que $S_1 \# S_2$ no es orientable.

Ejercicio 2. Calcula el grupo fundamental de los espacios topológicos X, Y siguientes:

- a) $X = E_1 \cup E_2$, donde E_1, E_2 son las esferas de \mathbb{R}^3 de radio 2 y centradas, respectivamente, en los puntos $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$.

El conjunto que nos dan es el siguiente:

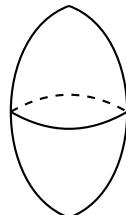


Si consideramos los conjuntos:

$$U = X \setminus \{(3, 0, 0)\}, \quad V = X \setminus \{(-3, 0, 0)\}$$

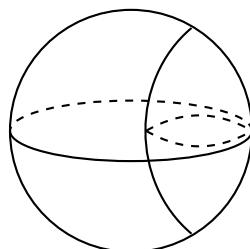
Tenemos:

- Claramente $X = U \cup V$ con U y V abiertos.
- U, V y $U \cap V$ son arcoconexos como unión de conjuntos arcoconexos que se intersecan.
- $U \cap V$ tiene como retracto de deformación el conjunto:



Que es homeomorfo a \mathbb{S}^2 , por lo que es simplemente conexo.

- U tiene como retracto de deformación el conjunto Z :

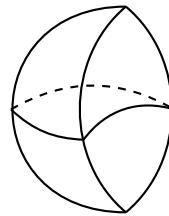


Si consideramos:

$$W = Z \setminus \{(-1, 0, 0)\}, \quad O = Z \setminus \{(1, 0, 0)\}$$

Tenemos que:

- $Y = W \cup O$, con W y O abiertos.
- W, O y $W \cap O$ son arcoconexos.
- W tiene a E_2 como retracto de deformación, por lo que $\pi_1(W) = \{1\}$.
- O tiene al conjunto:



Como retracto de deformación, que es homeomorfo a \mathbb{S}^2 , por lo que $\pi_1(O) = \{1\}$.

- Claramente V es homeomorfo a U (basta considerar una rotación), por lo que también será $\pi_1(V) = \{1\}$.

Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen concluimos que $\pi_1(X) = \{1\}$.

- b) $Y = S_1 \cup S_2$, donde $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ son dos superficies topológicas conexas que se cortan en un único punto y con grupos fundamentales isomorfos, respectivamente, a los grupos G_1 y G_2 .

Tenemos que $S_1 \cap S_2 = \{x_0\}$. Sabemos que los discos regulares de S_1 forman una base de entornos abiertos en S_1 , y que los discos regulares de S_2 forman una base de entornos abiertos de S_2 . Sean por tanto D_1 un disco regular que contiene a x_0 en S_1 y D_2 un disco regular que contiene a x_0 en S_2 , podemos considerar los conjuntos:

$$U = S_2 \cup D_1, \quad V = S_1 \cup D_2$$

Vemos que:

- U y V son arcoconexos como unión de dos conjuntos arcoconexos con intersección no vacía, pues:

$$S_2 \cap D_1 = \{x_0\} = S_1 \cap D_2$$

- $U \cap V$ es también arcoconexo como unión de dos conjuntos arcoconexos como intersección no vacía:

$$U \cap V = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap D_2 = \{x_0\}$$

- U y V son abiertos, pues D_1 y D_2 son abiertos y tenemos además que S_1 y S_2 son conjuntos abiertos, puesto que podemos ver cada superficie como la unión de todos los discos regulares contenidos en dicha superficie, todos ellos conjuntos abiertos.

- Para calcular el grupo fundamental de U vemos que U tiene como retracto de deformación a S_2 , pues podemos contraer D_1 a $\{x_0\}$, obtenido así que:

$$\pi_1(U) \cong \pi_1(S_2) \cong G_2$$

- Para calcular el grupo fundamental de V podemos hacer un razonamiento análogo, pues tiene a S_1 como retracto de deformación, con lo que:

$$\pi_1(V) \cong \pi_1(S_1) \cong G_1$$

- Tenemos que $U \cap V = D_1 \cup D_2$ tiene por retracto de deformación $\{x_0\}$, con lo que $U \cap V$ es simplemente conexo.

Así, aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen vemos que:

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong G_2 * G_1$$

Ejercicio 3. Sean $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ con $N = (0, 0, 1)$, $S = (0, 0, -1)$ y $r : X \rightarrow A$ la aplicación continua

$$r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

donde $A = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, y, z) : z = 0\}$.

- a) Demuestra que $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ dada por

$$H((x, y, z), t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

es una homotopía entre r y la identidad en X .

Vemos que:

$$H((x, y, z), t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)r(x, y, z) \quad \forall ((x, y, z), t) \in X \times [0, 1]$$

La aplicación H es continua, como suma de aplicaciones continuas. Vemos además que:

$$H((x, y, z), 0) = (x, y, z) = Id_X(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in X$$

$$H((x, y, z), 1) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0) = r(x, y, z) \in A \quad \forall (x, y, z) \in X$$

Por lo que H es una homotopía entre Id_X y $i \circ r$.

- b) Si $Y = \mathbb{RP}^2 \setminus \{[N]\}$, comprueba que H se puede inducir a una homotopía

$$\overline{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$$

y utiliza esto para calcular el grupo fundamental del plano proyectivo menos un punto.

Definimos la aplicación $\overline{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ dada por:

$$\overline{H}([(x, y, z)], t) = \left[\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0) \right]$$

Que está bien definida, pues si (x, y, z) está relacionado con otro punto mediante la relación de equivalencia:

- El caso (x, y, z) es trivial.
- Si está relacionado con $(-x, -y, -z)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \overline{H}([(-x, -y, -z)], t) &= \left[\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(-x, -y, -z) + \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-x, -y, 0) \right] \\ &= \left[-\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0) \right) \right] \\ &= \left[\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0) \right] \end{aligned}$$

Sea $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ la aplicación proyección al cociente, recordamos que vimos en teoría que esta aplicación es recubridora. Vemos además que el siguiente diagrama es comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X \\ p \times Id \downarrow & & \downarrow p \\ Y \times [0, 1] & \xrightarrow{\overline{H}} & Y \end{array}$$

Como p es una aplicación recubridora y $Id : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ también (de hecho es un homeomorfismo), tenemos que $p \times Id$ es una aplicación recubridora, luego será continua, sobreyectiva y abierta, es decir, una identificación. Tenemos así que:

$$\overline{H} \text{ es continua} \iff \overline{H} \circ (p \times Id) \text{ es continua}$$

Pero como $\overline{H} \circ (p \times Id) = p \circ H$ y $p \circ H$ es continua como composición de aplicaciones continuas deducimos que \overline{H} es continua. Como H era una homotopía entre Id_X y r , vemos ahora que \overline{H} es una homotopía entre Id_Y y $p \circ r$, por lo que hemos probado que $p(A) = \mathbb{RP}$ es un retracto de deformación de Y , por lo que:

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(\mathbb{RP})$$

Sin embargo, en Topología I se vió que $\mathbb{RP} \cong \mathbb{S}^1$, de donde:

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(\mathbb{RP}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

Por lo que el grupo fundamental de Y es isomorfo a \mathbb{Z} .

Ejercicio 4. Sean \mathbb{T} el toro y S_1, S_2 las superficies siguientes:

a) S_1 está dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e; ab^{-1}cde, ad^{-1}e^{-1}bc^{-1} \rangle$$

b) $S_2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}$.

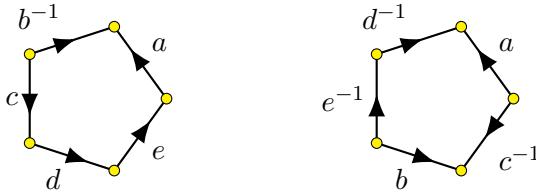
¿Son S_1 y S_2 homeomorfas?

Tratamos de clasificar las superficies S_1 y S_2 :

a) Para S_1 , tenemos que:

- $C = 2$.
- $A = 5$.
- $V = 1$.

Y hemos calculado el número de vértices viendo que:



Por lo que:

$$\chi(S_1) = V - A + C = 1 - 5 + 2 = -2$$

Luego $S_1 \cong \mathbb{T}_2$ ó $S_1 \cong \mathbb{RP}_4^2$. Para distinguir cual es, buscamos una presentación poligonal equivalente pero solo de una expresión, mediante transformaciones elementales vemos que:

$$ab^{-1}cde, ad^{-1}e^{-1}bc^{-1} \rightsquigarrow ab^{-1}cde, e^{-1}bc^{-1}ad^{-1} \rightsquigarrow ab^{-1}cdbc^{-1}ad^{-1}$$

Por lo que una presentación poligonal equivalente para S_1 es:

$$\langle a, b, c, d; ab^{-1}cdbc^{-1}ad^{-1} \rangle$$

Vemos que esta es no orientada, puesto que a aparece con el mismo exponente, por lo que deducimos que S_1 es una superficie no orientable, con lo que debe ser:

$$S_1 \cong \mathbb{RP}_4^2$$

b) Para S_2 aplicamos la fórmula (donde S y T son superficies compactas y conexas):

$$\chi(S \# T) = \chi(S) + \chi(T) - 2$$

Vista en teoría, por lo que:

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}) &= \chi(\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2) + \chi(\mathbb{T}) - 2 = \chi(\mathbb{RP}^2) + \chi(\mathbb{RP}^2) + \chi(\mathbb{T}) - 4 \\ &= 1 + 1 + 0 - 4 = -2 \end{aligned}$$

Al igual que antes tenemos que $S_2 \cong \mathbb{T}_2$ ó $S_2 \cong \mathbb{RP}_4^2$. Como hemos visto en el Ejercicio 1 c) de este examen, la suma conexa de una superficie no orientable con otra superficie es no orientable, y como:

$$S_2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T} = \mathbb{RP}^2 \# (\mathbb{RP}^2 \# T)$$

Vemos que S_2 es no orientable, con lo que $S_2 \cong \mathbb{RP}_4^2$.

En definitiva vemos que S_1 y S_2 sí son homeomorfas, ya que:

$$S_1 \cong \mathbb{RP}_4^2 \cong S_2$$