

# Topología II

# Examen V



**Los Del DGIIM**, [losdeldgim.github.io](https://losdeldgim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Topología II

# Examen V

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Granada, 2025

**Asignatura** Topología II.

**Curso Académico** 2024/25.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Grupo Único.

**Descripción** Examen ordinario.

**Fecha** 10 de enero de 2025.

**Duración** 2 horas y media.

**Responda la pregunta 1 y elija dos preguntas entre la 2, 3 y 4.**

**Ejercicio 1.** Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Sea  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  una aplicación continua y  $F : A \rightarrow X$  una aplicación continua desde  $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 1\}$  tal que  $F|_{\mathbb{S}^1} = f$ . Entonces  $f_*$  es trivial.
- b) Sea  $X$  un espacio topológico arcoconexo que admite un recubridor universal. Si  $Y \subset X$  es arcoconexo entonces  $Y$  también tiene un recubridor universal.
- c) Si  $S_1$  y  $S_2$  son dos superficies compactas y conexas con  $S_1$  no orientable entonces  $S_1 \# S_2$  es no orientable.

**Ejercicio 2.** Calcula el grupo fundamental de los espacios topológicos  $X, Y$  siguientes:

- a)  $X = E_1 \cup E_2$ , donde  $E_1, E_2$  son las esferas de  $\mathbb{R}^3$  de radio 2 y centradas, respectivamente, en los puntos  $(1, 0, 0)$  y  $(-1, 0, 0)$ .
- b)  $Y = S_1 \cup S_2$ , donde  $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$  son dos superficies topológicas conexas que se cortan en un único punto y con grupos fundamentales isomorfos, respectivamente, a los grupos  $G_1$  y  $G_2$ .

**Ejercicio 3.** Sean  $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$  con  $N = (0, 0, 1)$ ,  $S = (0, 0, -1)$  y  $r : X \rightarrow A$  la aplicación continua

$$r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

donde  $A = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, y, z) : z = 0\}$ .

- a) Demuestra que  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$  dada por

$$H((x, y, z), t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

es una homotopía entre  $r$  y la identidad en  $X$ .

- b) Si  $Y = \mathbb{RP}^2 \setminus \{[N]\}$ , comprueba que  $H$  se puede inducir a una homotopía

$$\overline{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$$

y utiliza esto para calcular el grupo fundamental del plano proyectivo menos un punto.

**Ejercicio 4.** Sean  $\mathbb{T}$  el toro y  $S_1, S_2$  las superficies siguientes:

- a)  $S_1$  está dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e; ab^{-1}cde, ad^{-1}e^{-1}bc^{-1} \rangle$$

- b)  $S_2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}$ .

¿Son  $S_1$  y  $S_2$  homeomorfas?

**Solución.**

**Ejercicio 1.** Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Sea  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  una aplicación continua y  $F : A \rightarrow X$  una aplicación continua desde  $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 1\}$  tal que  $F|_{\mathbb{S}^1} = f$ . Entonces  $f_*$  es trivial.

Es falsa, si consideramos  $X = \mathbb{S}^1$  y tomamos  $f = Id_{\mathbb{S}^1}$  y  $F : A \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por:

$$F(x) = \frac{x}{|x|}$$

Tenemos que  $f$  y  $F$  son continuas, así como que  $F|_{\mathbb{S}^1} = f$ . Como  $f$  es un homeomorfismo, tendremos que  $f_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$  es un isomorfismo de grupos, por lo que  $f_*$  no puede ser trivial, al ser  $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ .

- b) Sea  $X$  un espacio topológico arcoconexo que admite un recubridor universal. Si  $Y \subset X$  es arcoconexo entonces  $Y$  también tiene un recubridor universal.

Es falsa, si consideramos  $X = \mathbb{R}^2$  tenemos que  $X$  admite un recubridor universal (él mismo con la aplicación identidad). Si denotamos ahora por  $S(x, r)$  a la circunferencia de centro  $x$  y radio  $r$  y consideramos:

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

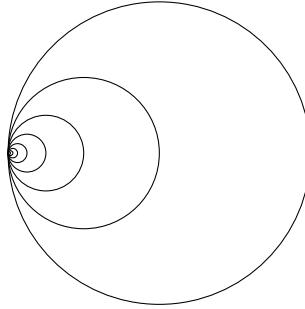


Figura 1: Conjunto  $Y$ .

Tenemos que  $Y$  es arcoconexo como la unión de conjuntos arcoconexos que se interseca en un punto (en el punto  $(0, 0)$ ) y que  $Y$  no es semilocalmente simplemente conexo, pues para  $x_0 = (0, 0)$  todo entorno  $U$  de  $x_0$  ha de contener alguna circunferencia de radio  $1/n$ , y el arco cuya imagen rodea dicha circunferencia no puede cerrarse en  $U$  pero sí en  $X$ , por lo que  $(i_U)_*$  no es trivial, lo que prueba que  $Y$  no es semilocalmente simplemente conexo, luego no puede tener recubridor universal.

- c) Si  $S_1$  y  $S_2$  son dos superficies compactas y conexas con  $S_1$  no orientable entonces  $S_1 \# S_2$  es no orientable.

Es verdadera, para ambas superficies podemos encontrar representaciones poligonales suyas  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  con una única expresión, con lo que serán de la forma:

$$\mathcal{P}_1 = \langle a_1, \dots, a_n; w_1 \rangle, \quad \mathcal{P}_2 = \langle b_1, \dots, b_m; w_2 \rangle$$

Como  $S_1$  no es orientable y  $\mathcal{P}_1$  tiene una expresión tendremos que esta expresión contiene dos letras con el mismo exponente. Hemos visto en teoría que la presentación:

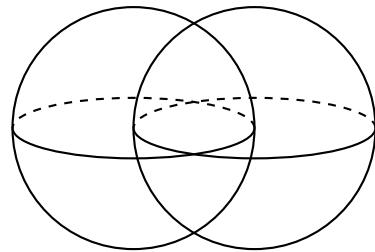
$$\mathcal{P} = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m; w_1 w_2 \rangle$$

es una presentación poligonal de  $S_1 \# S_2$ , que contiene una letra con el mismo exponente, al contener la expresión  $w_1 w_2$  la palabra  $w_1$ , por lo que  $S_1 \# S_2$  no es orientable.

**Ejercicio 2.** Calcula el grupo fundamental de los espacios topológicos  $X, Y$  siguientes:

- a)  $X = E_1 \cup E_2$ , donde  $E_1, E_2$  son las esferas de  $\mathbb{R}^3$  de radio 2 y centradas, respectivamente, en los puntos  $(1, 0, 0)$  y  $(-1, 0, 0)$ .

El conjunto que nos dan es el siguiente:

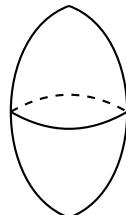


Si consideramos los conjuntos:

$$U = X \setminus \{(2, 0, 0)\}, \quad V = X \setminus \{(-2, 0, 0)\}$$

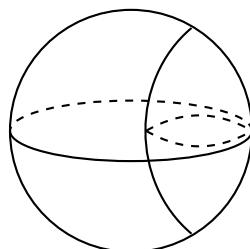
Tenemos:

- Claramente  $X = U \cup V$  con  $U$  y  $V$  abiertos.
- $U, V$  y  $U \cap V$  son arcoconexos como unión de conjuntos arcoconexos que se intersecan.
- $U \cap V$  tiene como retracto de deformación el conjunto:



Que es homeomorfo a  $\mathbb{S}^2$ , por lo que es simplemente conexo.

- $U$  tiene como retracto de deformación el conjunto  $Z$ :

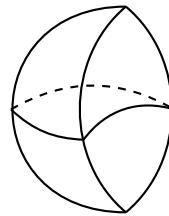


Si consideramos:

$$W = Z \setminus \{(-1, 0, 0)\}, \quad O = Z \setminus \{(1, 0, 0)\}$$

Tenemos que:

- $Y = W \cup O$ , con  $W$  y  $O$  abiertos.
- $W, O$  y  $W \cap O$  son arcoconexos.
- $W$  tiene a  $E_2$  como retracto de deformación, por lo que  $\pi_1(W) = \{1\}$ .
- $O$  tiene al conjunto:



Como retracto de deformación, que es homeomorfo a  $\mathbb{S}^2$ , por lo que  $\pi_1(O) = \{1\}$ .

- Claramente  $V$  es homeomorfo a  $U$  (basta considerar una rotación), por lo que también será  $\pi_1(V) = \{1\}$ .

Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen concluimos que  $\pi_1(X) = \{1\}$ .

- b)  $Y = S_1 \cup S_2$ , donde  $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$  son dos superficies topológicas conexas que se cortan en un único punto  $y$  con grupos fundamentales isomorfos, respectivamente, a los grupos  $G_1$  y  $G_2$ .

Tenemos que  $S_1 \cap S_2 = \{x_0\}$ . Sabemos que los discos regulares de  $S_1$  forman una base de entornos abiertos en  $S_1$ , y que los discos regulares de  $S_2$  forman una base de entornos abiertos de  $S_2$ . Sean por tanto  $D_1$  un disco regular que contiene a  $x_0$  en  $S_1$  y  $D_2$  un disco regular que contiene a  $x_0$  en  $S_2$ , podemos considerar los conjuntos:

$$U = S_2 \cup D_1, \quad V = S_1 \cup D_2$$

Vemos que:

- $U$  y  $V$  son arcoconexos como unión de dos conjuntos arcoconexos con intersección no vacía, pues:

$$S_2 \cap D_1 = \{x_0\} = S_1 \cap D_2$$

- $U \cap V$  es también arcoconexo como unión de dos conjuntos arcoconexos como intersección no vacía:

$$U \cap V = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap D_2 = \{x_0\}$$

- $U$  y  $V$  son abiertos, pues  $D_1$  y  $D_2$  son abiertos y tenemos además que  $S_1$  y  $S_2$  son conjuntos abiertos, puesto que podemos ver cada superficie como la unión de todos los discos regulares contenidos en dicha superficie, todos ellos conjuntos abiertos.

- Para calcular el grupo fundamental de  $U$  vemos que  $U$  tiene como retracto de deformación a  $S_2$ , pues podemos contraer  $D_1$  a  $\{x_0\}$ , obtenido así que:

$$\pi_1(U) \cong \pi_1(S_2) \cong G_2$$

- Para calcular el grupo fundamental de  $V$  podemos hacer un razonamiento análogo, pues tiene a  $S_1$  como retracto de deformación, con lo que:

$$\pi_1(V) \cong \pi_1(S_1) \cong G_1$$

- Tenemos que  $U \cap V = D_1 \cup D_2$  tiene por retracto de deformación  $\{x_0\}$ , con lo que  $U \cap V$  es simplemente conexo.

Así, aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen vemos que:

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong G_2 * G_1$$

**Ejercicio 3.** Sean  $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$  con  $N = (0, 0, 1)$ ,  $S = (0, 0, -1)$  y  $r : X \rightarrow A$  la aplicación continua

$$r(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

donde  $A = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, y, z) : z = 0\}$ .

- a) Demuestra que  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$  dada por

$$H((x, y, z), t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

es una homotopía entre  $r$  y la identidad en  $X$ .

Vemos que:

$$H((x, y, z), t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)r(x, y, z) \quad \forall ((x, y, z), t) \in X \times [0, 1]$$

La aplicación  $H$  es continua, como suma de aplicaciones continuas. Vemos además que:

$$H((x, y, z), 0) = (x, y, z) = Id_X(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in X$$

$$H((x, y, z), 1) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0) = r(x, y, z) \in A \quad \forall (x, y, z) \in X$$

Por lo que  $H$  es una homotopía entre  $Id_X$  y  $i \circ r$ .

- b) Si  $Y = \mathbb{RP}^2 \setminus \{[N]\}$ , comprueba que  $H$  se puede inducir a una homotopía

$$\overline{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$$

y utiliza esto para calcular el grupo fundamental del plano proyectivo menos un punto.

Definimos la aplicación  $\bar{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$  dada por:

$$\bar{H}([(x, y, z)], t) = \left[ \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0) \right]$$

Que está bien definida, pues si  $(x, y, z)$  está relacionado con otro punto mediante la relación de equivalencia:

- El caso  $(x, y, z)$  es trivial.
- Si está relacionado con  $(-x, -y, -z)$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \bar{H}([(-x, -y, -z)], t) &= \left[ \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(-x, -y, -z) + \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-x, -y, 0) \right] \\ &= \left[ -\left( \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0) \right) \right] \\ &= \left[ \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)(x, y, z) + \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0) \right] \end{aligned}$$

Sea  $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  la aplicación proyección al cociente, recordamos que vimos en teoría que esta aplicación es recubridora. Vemos además que el siguiente diagrama es comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X \\ p \times Id \downarrow & & \downarrow p \\ Y \times [0, 1] & \xrightarrow{\bar{H}} & Y \end{array}$$

Como  $p$  es una aplicación recubridora y  $Id : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  también (de hecho es un homeomorfismo), tenemos que  $p \times Id$  es una aplicación recubridora, luego será continua, sobreyectiva y abierta, es decir, una identificación. Tenemos así que:

$$\bar{H} \text{ es continua} \iff \bar{H} \circ (p \times Id) \text{ es continua}$$

Pero como  $\bar{H} \circ (p \times Id) = p \circ H$  y  $p \circ H$  es continua como composición de aplicaciones continuas deducimos que  $\bar{H}$  es continua. Como  $H$  era una homotopía entre  $Id_X$  y  $r$ , vemos ahora que  $\bar{H}$  es una homotopía entre  $Id_Y$  y  $p \circ r$ , por lo que hemos probado que  $p(A) = \mathbb{RP}$  es un retracto de deformación de  $Y$ , por lo que:

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(\mathbb{RP})$$

Sin embargo, en Topología I se vió que  $\mathbb{RP} \cong \mathbb{S}^1$ , de donde:

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(\mathbb{RP}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

Por lo que el grupo fundamental de  $Y$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

**Ejercicio 4.** Sean  $\mathbb{T}$  el toro y  $S_1, S_2$  las superficies siguientes:

a)  $S_1$  está dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e; ab^{-1}cde, ad^{-1}e^{-1}bc^{-1} \rangle$$

b)  $S_2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}$ .

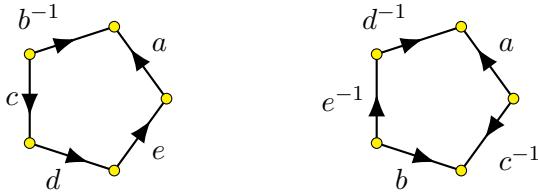
¿Son  $S_1$  y  $S_2$  homeomorfas?

Tratamos de clasificar las superficies  $S_1$  y  $S_2$ :

a) Para  $S_1$ , tenemos que:

- $C = 2$ .
- $A = 5$ .
- $V = 1$ .

Y hemos calculado el número de vértices viendo que:



Por lo que:

$$\chi(S_1) = V - A + C = 1 - 5 + 2 = -2$$

Luego  $S_1 \cong \mathbb{T}_2$  ó  $S_1 \cong \mathbb{RP}_4^2$ . Para distinguir cual es, buscamos una presentación poligonal equivalente pero solo de una expresión, mediante transformaciones elementales vemos que:

$$ab^{-1}cde, ad^{-1}e^{-1}bc^{-1} \rightsquigarrow ab^{-1}cde, e^{-1}bc^{-1}ad^{-1} \rightsquigarrow ab^{-1}cdbc^{-1}ad^{-1}$$

Por lo que una presentación poligonal equivalente para  $S_1$  es:

$$\langle a, b, c, d; ab^{-1}cdbc^{-1}ad^{-1} \rangle$$

Vemos que esta es no orientada, puesto que  $a$  aparece con el mismo exponente, por lo que deducimos que  $S_1$  es una superficie no orientable, con lo que debe ser:

$$S_1 \cong \mathbb{RP}_4^2$$

b) Para  $S_2$  aplicamos la fórmula (donde  $S$  y  $T$  son superficies compactas y conexas):

$$\chi(S \# T) = \chi(S) + \chi(T) - 2$$

Vista en teoría, por lo que:

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}) &= \chi(\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2) + \chi(\mathbb{T}) - 2 = \chi(\mathbb{RP}^2) + \chi(\mathbb{RP}^2) + \chi(\mathbb{T}) - 4 \\ &= 1 + 1 + 0 - 4 = -2 \end{aligned}$$

Al igual que antes tenemos que  $S_2 \cong \mathbb{T}_2$  ó  $S_2 \cong \mathbb{RP}_4^2$ . Como hemos visto en el Ejercicio 1 c) de este examen, la suma conexa de una superficie no orientable con otra superficie es no orientable, y como:

$$S_2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T} = \mathbb{RP}^2 \# (\mathbb{RP}^2 \# T)$$

Vemos que  $S_2$  es no orientable, con lo que  $S_2 \cong \mathbb{RP}_4^2$ .

En definitiva vemos que  $S_1$  y  $S_2$  sí son homeomorfas, ya que:

$$S_1 \cong \mathbb{RP}_4^2 \cong S_2$$