

# Análisis Funcional

# Examen II



**Los Del DGIIM**, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Análisis Funcional

# Examen II

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Granada, 2025

**Asignatura** Análisis Funcional.

**Curso Académico** 2023/24.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Descripción** Examen Ordinario.

**Ejercicio 1** (3 puntos). Teorema de representación de Riesz-Fréchet en espacios de Hilbert.

**Ejercicio 2** (2.5 puntos). Sea  $E = \{u \in C([0, 1]) : u(0) = 0\}$  con la norma usual

$$\|u\| = \max_{t \in [0, 1]} |u(t)|$$

Consideremos el funcional lineal  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$f(u) = \int_0^1 u(t) \, dt \quad \forall u \in E$$

- a) Probad que  $f \in E^*$  y calculad  $\|f\|_{E^*}$ .
- b) ¿Existe  $u \in E$  tal que  $\|u\| = 1$  y  $f(u) = \|f\|_{E^*}$ ?

**Ejercicio 3** (2.5 puntos). Sea  $E$  un espacio de Banach. Probad que si un subconjunto  $A \subset E$  es compacto en la topología débil  $\sigma(E, E^*)$ , entonces  $A$  es acotado.

**Ejercicio 4** (2 puntos). Sea  $E$  un espacio de Banach reflexivo y  $K \subset E$  un subconjunto convexo, cerrado y acotado. Dotamos a  $K$  con la topología débil  $\sigma(E, E^*)$  (que hace compacto a  $K$ ). Sea  $F = C(K)$  con la norma usual. Si  $\mu \in F^*$  con  $\|\mu\| = 1$  y

$$\langle \mu, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in C(K) \quad \text{tal que} \quad u \geq 0 \text{ en } K$$

probad que existe un único elemento  $x_0 \in K$  tal que

$$\langle \mu, f|_K \rangle = \langle f, x_0 \rangle \quad \forall f \in E^*$$

(**Pista:** Encontrad primero  $x_0 \in E$  verificando  $\langle \mu, f|_K \rangle = \langle f, x_0 \rangle \quad \forall f \in E^*$  y a continuación probado que  $x_0 \in K$  usando el teorema de Hahn-Banach).