Mecánica Celeste

Examen I

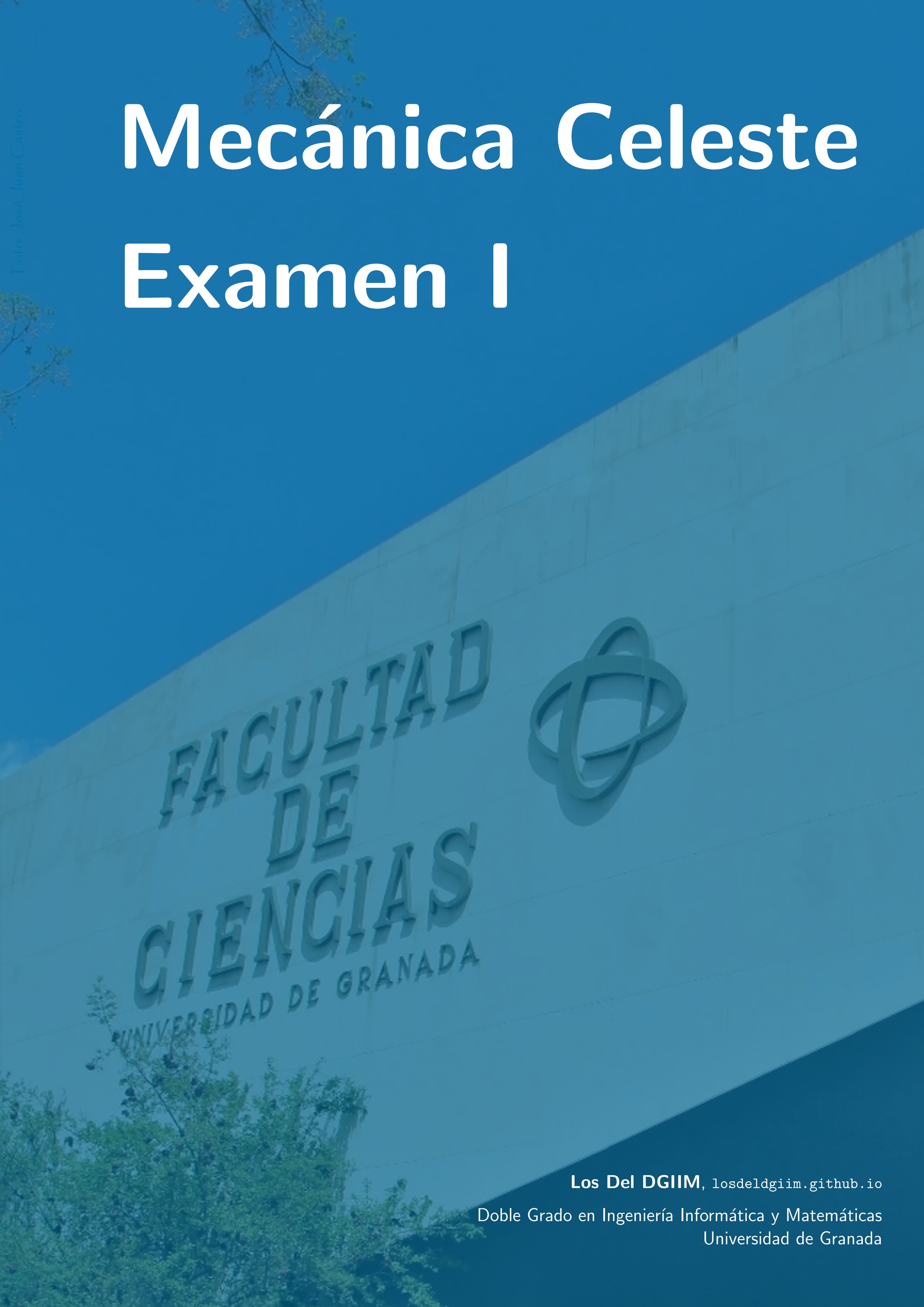

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Mecánica Celeste
Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2025

Asignatura Mecánica Celeste.

Curso Académico 2023-24.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo A.

Descripción Primer Parcial.

Fecha 7 de Noviembre de 2023.

Ejercicio 1. Desde un observatorio astronómico fijo se está estudiando un sistema de dos asteroides que se mueven bajo la acción de la ley de gravitación de Newton. Cuando se comienzan las observaciones sus posiciones respecto al observatorio son

$$x(0) = (0, 1, -1), \quad y(0) = (0, -2, 2),$$

y las velocidades con las que se mueven

$$\dot{x}(0) = (1, -1, 1) \quad \dot{y}(0) = (1, -2, 1).$$

Se estima que la masa del asteroide que ocupa la posición x es el doble de la que ocupa la y. Se pide:

a) Deduce el comportamiento del centro de masas del sistema que se observa desde la posición del observatorio.

b) Determina el movimiento que se observa desde el centro de masas en función de la masa m del asteroide más pequeño.

c) Explica cuál será el movimiento que verán los astrónomos desde el observatorio si la masa $m \gg 1$.

Ejercicio 2. Responde, de forma razonada, a las siguientes cuestiones:

a) Determina qué condiciones debe cumplir la función $\alpha(t)$ para que la función

$$x(t) = (\cos(\alpha(t)), \operatorname{sen}(\alpha(t)))$$

sea solución de la ecuación

$$\ddot{x} = f(|x|)\frac{x}{|x|}$$

con $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una función continua dada.

b) Clasifica la cónica

$$\sqrt{x^2 + y^2} + y/2 = 2$$

y determina sus focos, su eje de excentricidad, su pericentro y su apocentro.

c) De un planeta que se mueve bajo la acción de un Sol de masa M situado en el origen de coordenadas se sabe que su posición en un determinado instante es $x_0 = (1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ y su velocidad en dicho instante $\dot{x}_0 = (-\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$. Determina el eje de excentricidad del movimiento que describe, supuesto que $GM = 1$ y especifica, si es posible, dicho movimiento.

Ejercicio 1. Desde un observatorio astronómico fijo se está estudiando un sistema de dos asteroides que se mueven bajo la acción de la ley de gravitación de Newton. Cuando se comienzan las observaciones sus posiciones respecto al observatorio son

$$x(0) = (0, 1, -1), \quad y(0) = (0, -2, 2),$$

y las velocidades con las que se mueven

$$\dot{x}(0) = (1, -1, 1) \quad \dot{y}(0) = (1, -2, 1).$$

Se estima que la masa del asteroide que ocupa la posición x es el doble de la que ocupa la y. Se pide:

a) Deduce el comportamiento del centro de masas del sistema que se observa desde la posición del observatorio.

Sabemos por teoría que $\ddot{C}(t) = 0$, o equivalentemente, $C(t) = \alpha + \beta t$, con $\alpha = C(t_0)$, $\beta = \dot{C}(t_0)$, siempre que $t_0 \in I$ pertenezca al intervalo maximal de definición[1]. El enunciado dice cuando "se comienzan las observaciones", por lo que ubicamos ahí el origen, y tomamos $t_0 = 0$. Entonces, denotando por m_1 a la masa del asteroide que ocupa la posición x, e igualmente m_2 a la masa del asteroide de posición y, se tiene que $m_1 = 2m_2$. Si $m_2 = m > 0$, se verifica $m_1 + m_2 = 3m$.

Ahora, por definición, el centro de masas es

$$C(t) = \frac{m_1 x(t) + m_2 y(t)}{m_1 + m_2}$$

y su derivada es

$$\dot{C}(t) = \frac{m_1 \dot{x}(t) + m_2 \dot{y}(t)}{m_1 + m_2}$$

Obtenemos $\alpha = C(0)$ y $\beta = \dot{C}(0)$.

$$\alpha = C(0) = \frac{2x(0) + y(0)}{3}$$

Como $2x(0) + y(0) = 2(0, 1, -1) + (0, -2, 2) = (0, 0, 0)$, entonces

$$\alpha = \frac{1}{3}(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

Análogamente, $2\dot{x}(0) + \dot{y}(0) = 2(1, -1, 1) + (1, -2, 1) = (3, -4, 3)$, luego

$$\beta = \frac{1}{3}(3, -4, 3) = \left(1, -\frac{4}{3}, 1\right)$$

Por lo tanto,

$$\boxed{C(t) = \left(1, -\frac{4}{3}, 1\right) t}$$

[1]También por el Teorema de Existencia y Unicidad de las Ecuaciones Lineales visto en Ecuaciones Diferenciales I

b) Determina el movimiento que se observará desde el centro de masas en función de la masa m del asteroide menor.

Consideramos el sistema con centro de masas fijo en el origen, utilizando el Principio de Relatividad de Galileo, $\tilde{x}(t) = x(t) - \alpha - \beta t$, $\tilde{y}(t) = y(t) - \alpha - \beta t$ donde $C(t) = \alpha + \beta t$ ya calculado en el apartado anterior.

Sabemos que entonces $(\tilde{x}, \tilde{y})$ es solución al mismo problema de los dos cuerpos y el centro de masas en este sistema verifica $\widetilde{C}(t) \equiv 0$. Consecuentemente

$$m_1\tilde{x} + m_2\tilde{y} = 0 \Longrightarrow \tilde{y} = -\frac{m_1}{m_2}\tilde{x} = -2\tilde{x}$$

Si el asteroide identificado por $\tilde{x}$ sigue la cónica $|\tilde{x}| + \langle e, \tilde{x}\rangle = k$ con $e \in \mathbb{R}^3$ y $k > 0$ entonces se ha visto en teoría que el asteroide identificado por y sigue la cónica $|\tilde{y}| + \langle -e, \tilde{y}\rangle = 2k$, es decir, las dos cónicas son del mismo tipo, y los ejes de excentricidad opuestos.

El asteroide identificado por $\tilde{x}$ (visto en teoría) sigue un problema de Kepler

$$\ddot{\tilde{x}} = -G\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}\frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|^3} = -G\frac{m}{9}\frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|^3} = -\mu\frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|^3}$$

Estudiamos uno de los dos asteroides, y el otro ya lo tendremos. Obtenemos el momento angular $c_{\tilde{x}}$, primero viendo que

$$\tilde{x}(0) = x(0) - \alpha = (0, 1, -1), \quad \dot{\tilde{x}}(0) = \dot{x}(0) - \beta = \left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$$c_{\tilde{x}} = \tilde{x}(0) \wedge \dot{\tilde{x}}(0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (-1/3, 0, 0) \Longrightarrow |c_{\tilde{x}}| \neq 0$$

Tenemos entonces que ambos cuerpos se moverán sobre una elipse, hipérbola o parábola, con un foco en el origen, por la Primera Ley de Kepler. Para determinar la cónica, obtenemos la energía total.

$$h = \frac{1}{2}|\dot{\tilde{x}}(0)|^2 - \frac{\mu}{|\tilde{x}(0)|}$$

Viendo que

$$|\tilde{x}(0)|^2 = 0^2 + 1^2 + (-1)^2 = 2 \Longrightarrow |\tilde{x}(0)| = \sqrt{2}$$

y

$$|\dot{\tilde{x}}(0)|^2 = \frac{1}{9}$$

Como

$$h = \frac{1}{2}|\dot{\tilde{x}}(0)|^2 - \frac{\mu}{|\tilde{x}(0)|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} - \frac{Gm}{9}\frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{1}{18} - \frac{\sqrt{2}Gm}{18} = \frac{1-\sqrt{2}Gm}{18}$$

el tipo de movimiento visto desde el sistema con centro de masas fijo en el origen dependerá entonces de la masa m.

- Será elíptica si y solo si

$$h < 0 \iff \frac{1-\sqrt{2}Gm}{18} < 0 \iff 1 < \sqrt{2}Gm \iff m > \frac{1}{\sqrt{2}G} = \frac{\sqrt{2}}{2G}$$

- Será parabólica si y solo si

$$h = 0 \iff m = \frac{\sqrt{2}}{2G}$$

- Será hiperbólica si y solo si

$$h > 0 \iff m < \frac{\sqrt{2}}{2G}$$

Y el otro cuerpo seguirá la misma cónica.

c) Explica cuál será el movimiento que vean los astrónomos desde el observatorio si la masa $m \gg 1$.

Si $m \gg 1$ (suponiendo unidades normalizadas), en particular

$$m \gg \frac{\sqrt{2}}{2G}$$

de donde $h \ll 0$, luego la trayectoria de ambos cuerpos será elíptica, con ejes de excentricidad opuestos. Teniendo en cuenta que los astrónomos observan desde el observatorio, y que el centro de masas está en movimiento, pues, por el apartado a), sabemos que $C(t) = \left(1, -\frac{4}{3}, 1\right)t$, entonces las trayectorias elípticas se producirán simultáneamente con la traslación del centro de masas a lo largo de la recta $r \equiv \left(1, -\frac{4}{3}, 1\right)t$, resultando en movimientos helicoidales descritos por ambos cuerpos a lo largo de la recta r. Esto se ha representado en la Figura 1 siguiente:

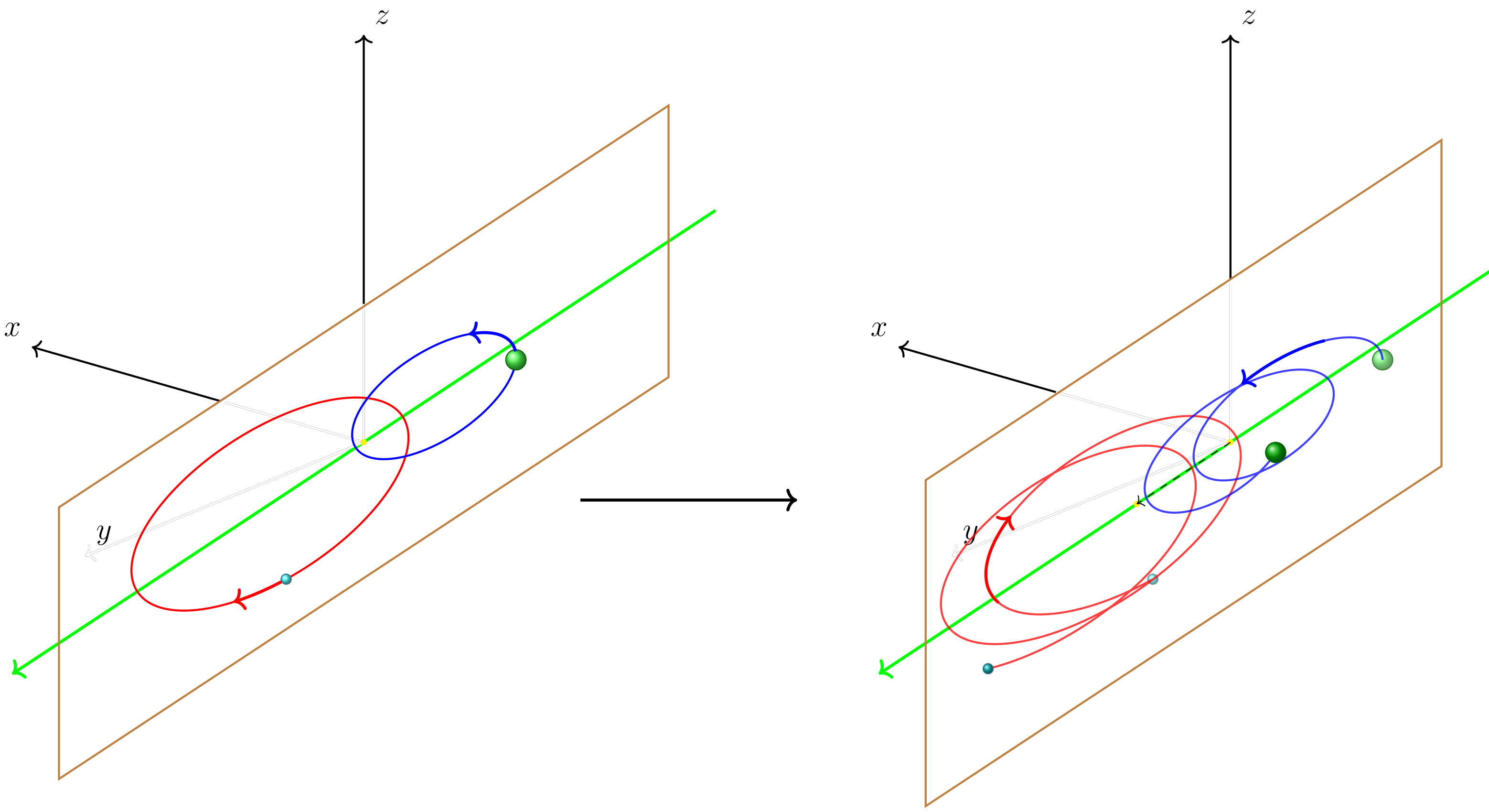

Figura 1: Situación del apartado c)

Ejercicio 2. Responde, de forma razonada, a las siguientes cuestiones:

a) Determina qué condiciones debe cumplir la función $\alpha(t)$ para que la función

$$x(t) = (\cos(\alpha(t)), \operatorname{sen}(\alpha(t)))$$

sea solución de la ecuación

$$\ddot{x} = f(|x|)\frac{x}{|x|}$$

con $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una función continua dada.

Por definición de $x(t)$, vemos que $|x(t)| \equiv 1$. Así pues, la ecuación toma la forma

$$\ddot{x} = f(1)x$$

Derivamos dos veces $x = x(t)$, no escribiendo explícitamente la dependencia de α y x de t:

$$\dot{x} = \dot{\alpha}(-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)$$
$$\ddot{x} = \ddot{\alpha}(-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha) - (\dot{\alpha})^2(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$$

Vemos que para que se verifique la ecuación necesariamente

$$\ddot{\alpha}(-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha) = 0 \Longrightarrow \ddot{\alpha} = 0 \Longrightarrow \alpha(t) = \alpha_0 + \omega t$$

para ciertos $\alpha_0, \omega \in \mathbb{R}^2$, de donde $\dot{\alpha}(t) = \omega$

La ecuación entonces queda en

$$\ddot{x} = f(1)x = -\omega^2 x$$

y se deduce que la condición que debe cumplir $\alpha(t)$ para lo que se pide en el enunciado es

$$f(1) = -\omega^2 \leqslant 0$$

b) Clasifica la cónica

$$\sqrt{x^2 + y^2} + y/2 = 2$$

y determina sus focos, su eje de excentricidad, su pericentro y su apocentro.

Sabemos por teoría que la ecuación de la cónica es $|x| + \langle e, x\rangle = k$, con $e \in \mathbb{R}^2$ y $k > 0$. Por comparación directa, vemos que $e = (0, 1/2)$ y $k = 2$. Como $|e| = 1/2 < 1$, la cónica es una elipse.

Para seguir, pasamos a coordenadas polares

$$r = \frac{k}{1 + \varepsilon\cos(\theta - \omega)}, \quad e = \varepsilon(\cos\omega, \operatorname{sen}\omega)$$

Nuevamente, dado que ya sabemos que $e = 1/2(0,1)$, vemos que $\omega = \pi/2$.

Usando las fórmulas de pericentro y apocentro en polares, respectivamente

$$r_{\text{mín}} = \frac{k}{1+\varepsilon} = \frac{2}{1+\dfrac{1}{2}} = \frac{4}{3}, \quad r_{\text{máx}} = \frac{k}{1-\varepsilon} = \frac{2}{1-\dfrac{1}{2}} = 4$$

Por tanto, el pericentro y apocentro, en coordenadas, son

$$P = \left(0, \frac{4}{3}\right) \qquad A = (0, -4)$$

Para obtener los focos, primero obtenemos la longitud del semieje mayor a, usando que

$$a = \frac{k}{1-\varepsilon^2} = \frac{2}{1-(1/2)^2} = \frac{8}{3}$$

y usamos la siguiente relación

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \iff c = a\varepsilon = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

Hemos obtenido la distancia entre focos. Ahora falta el centro de la elipse, como el punto medio entre el pericentro y el apocentro

$$C = \frac{P+A}{2} = \left(0, \frac{4/3-4}{2}\right) = \left(0, -\frac{4}{3}\right)$$

Por lo tanto, los focos son

$$F_1 = C + (0,c) = \left(0, -\frac{4}{3}\right) + \left(0, \frac{4}{3}\right) = (0,0)$$
$$F_2 = C - (0,c) = \left(0, -\frac{4}{3}\right) - \left(0, \frac{4}{3}\right) = \left(0, -\frac{8}{3}\right)$$

c) De un planeta que se mueve bajo la acción de un Sol de masa M situado en el origen de coordenadas se sabe que su posición en un determinado instante es $x_0 = (1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ y su velocidad en dicho instante $\dot{x}_0 = (-\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$. Determina el eje de excentricidad del movimiento que describe, supuesto que $GM = 1$ y especifica, si es posible, dicho movimiento.

Sea t_0 el instante que se menciona en el ejercicio. Sabemos que, por estar en un c.f.c. newtoniano, el momento angular es constante. Basta obtenerlo en t_0:

$$c(t_0) = x(t_0) \wedge \dot{x}(t_0) = \begin{vmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (0,0,1) \Longrightarrow |c| = 1 > 0$$

por tanto, como $|c| \neq 0$, por teoría sabemos que el movimiento se hará en el plano $\Pi = \{c\}^{\perp}$, es decir, aquel plano con vector normal c que pase por el origen. El plano verifica la ecuación

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0 \Longrightarrow x_3 = 0$$

Así, la órbita de $x(t)$ queda contenida en el plano $\{x_3 = 0\}$. Por la Primera Ley de Kepler, sabemos que será una cónica; elipse, hipérbola o parábola.

Para determinarlo, podemos usar la energía total, usando que $\mu = GM = 1$

$$h = \frac{1}{2}|\dot{x}(t_0)|^2 - \frac{\mu}{|x(t_0)|} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{1} = -0{,}5 < 0$$

Sabemos que $h < 0 \iff |e| < 1$, luego el movimiento descrito será elíptico.

Ahora, podemos obtener el eje de excentricidad usando que

$$e = \frac{1}{\mu}\dot{x}(t) \wedge c - \frac{x(t)}{|x(t)|}$$

para cierto instante t de tiempo en el intervalo de definición maximal de la solución al problema de Kepler $x = x(t)$. Tomaremos t_0.

Primero, vemos que

$$\dot{x}(t_0) \wedge c = \begin{vmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (1/2, \sqrt{3}/2, 0) = x(t_0)$$

Así,

$$e = \frac{1}{\mu}\dot{x}(t_0) \wedge c - \frac{x(t_0)}{|x(t_0)|} = x(t_0) - x(t_0) = 0$$

Por lo tanto, el movimiento es circular, en el plano $\{x_3 = 0\}$, con velocidad angular $|\dot{x}(t_0)| = 1$.