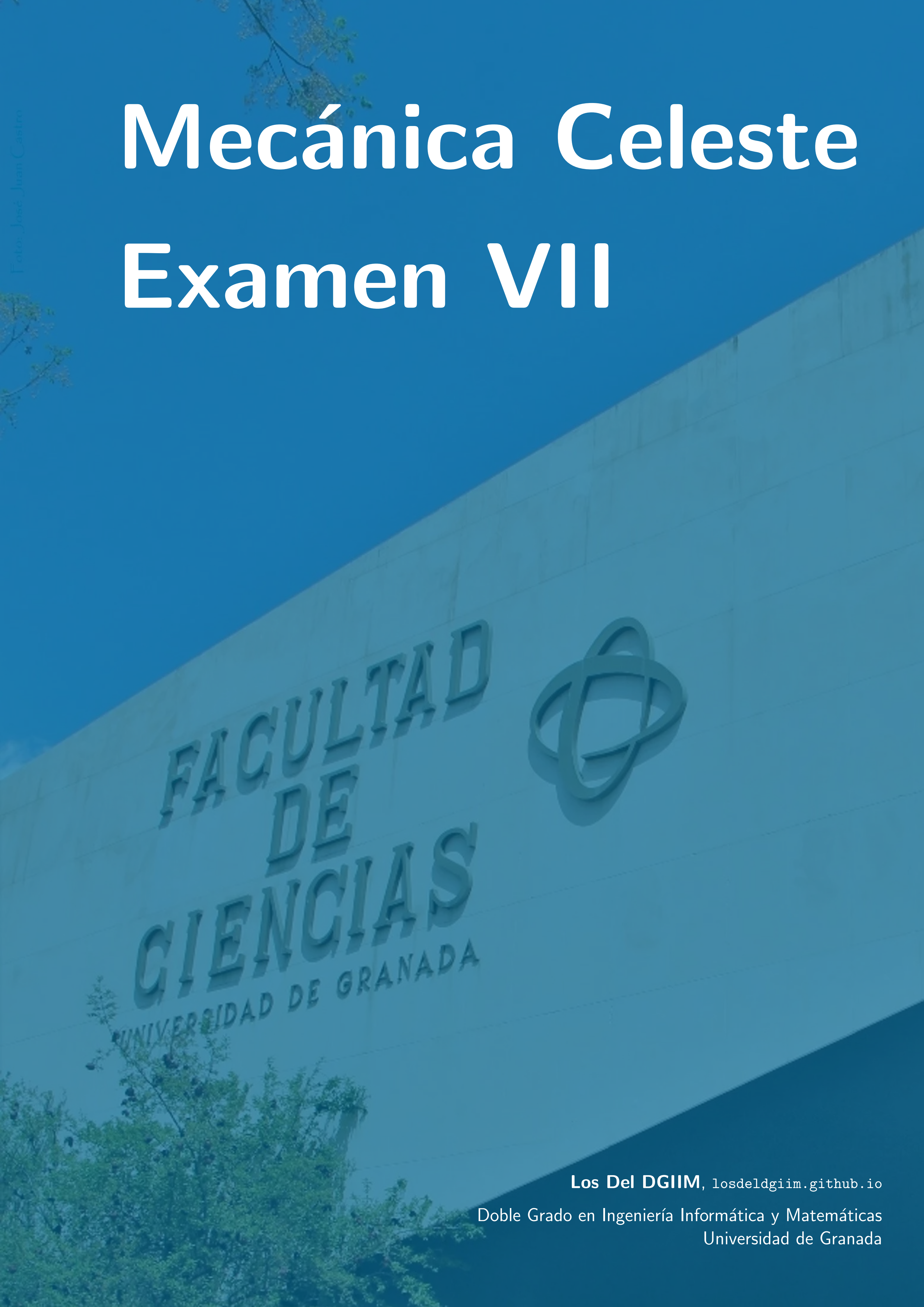
Mecánica Celeste

Examen VII



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Mecánica Celeste
Examen VII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2025

Asignatura Mecánica Celeste.

Curso Académico 2025-26.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo A.

Profesor Margarita Arias López.

Descripción Primer Parcial.

Fecha 6 de Noviembre de 2025.

Duración 1 hora y 30 minutos.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Sea $x : (\alpha, \omega) \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ una solución de la ecuación

$$\ddot{x} = -\frac{1}{|x|^3} x$$

Determina de forma razonada si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si $x(0) = (1, 0, 1)$ y $\dot{x}(0) = (3, 0, 0)$, $x(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y pertenece al plano $\{x_2 = 0\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

b) Si $x(0) = (1, 0, 1)$ y $\dot{x}(0) = (3, 0, 0)$, la órbita $x(t)$ está acotada.

c) Si $x(0) = (1, 0, 1)$ y $\dot{x}(0) = (3, 0, 0)$, el área que barre el segmento que une $x(t)$ con el origen varía a velocidad $\sqrt{2}/2$.

d) Si $x(0) = (1, 0, 1)$ y $\dot{x}(0) = (-3, 0, -3)$, la órbita recorre la semi-recta $\{((1, 0, 1)s : s > 0)\}$, ω es finito y $x(t)$ se aproxima al origen cuando $t \to \omega$.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Desde un observatorio astronómico se está controlando un meteorito que se aproxima a Marte siguiendo la órbita

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x = k$$

en un sistema de referencia sobre el plano del movimiento con origen en el centro de masas de Marte y unidades en miles de kilómetros. El meteorito se encuentra aún muy lejos y no se puede precisar con exactitud el valor de $k > 0$. Se pide:

a) Determinar el tipo de órbita que describe y la energía total del movimiento.

b) Calcular la distancia mínima del meteorito a Marte y su velocidad en el punto de mínima distancia en términos del valor de k.[1]

c) Si se supone que el radio de Marte es aproximadamente de $3,5$ unidades, ¿tienen los marcianos que empezar a preparar las maletas?[2]

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Un satélite describe una órbita circular en sentido antihorario a altura 1 alrededor de un planeta de masa $1/G$ y radio 3.

a) Determina el módulo de la velocidad a la que orbita en cada instante y el tiempo que tarda el satélite en dar una vuelta completa a su órbita.

b) En el instante en que el satélite pasa por la vertical del polo norte del planeta se aumenta su velocidad en un 20 % manteniendo la misma dirección. Determina cómo se modifica su órbita.

[1] los resultados se pueden dejar en términos de μ también.

[2] Nos preguntan si se va a chocar el meteorito con el planeta.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Sea $x : (\alpha, \omega) \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ una solución de la ecuación

$$\ddot{x} = -\frac{1}{|x|^3}x$$

Determina de forma razonada si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si $x(0) = (1, 0, 1)$ y $\dot{x}(0) = (3, 0, 0)$, $x(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y pertenece al plano $\{x_2 = 0\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Dado que estamos en un c.f.c. (campo de fuerzas centrales), sabemos que el momento angular será constante. Podemos obtener

$$c(0) = x(0) \wedge \dot{x}(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (0, -3, 0) \Longrightarrow |c| \neq 0.$$

Por la Primera Ley de Kepler, como estamos en un campo newtoniano, el movimiento estará contenido en una de las tres siguientes cónicas; elipse, parábola o hipérbola, y el intervalo de definición maximal del movimiento será $(\alpha, \omega) = \mathbb{R}$. También sabemos por la clasificación de movimientos según el módulo del momento angular, que $x(t) \in \Pi \quad \forall t \in \mathbb{R}$, con $\Pi = \{c\}^\perp$, es decir, el plano que tiene vector normal c, y pasa por el origen. Dicho plano verifica la ecuación

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0 \overset{(x_1,x_2,x_3)=(0,-3,0)}{\Longrightarrow} -3x_2 = 0 \overset{-3\neq 0}{\Longrightarrow} x_2 = 0$$

por lo tanto, la afirmación es $\boxed{\text{verdadera.}}$

b) Si $x(0) = (1, 0, 1)$ y $\dot{x}(0) = (3, 0, 0)$, la órbita $x(t)$ está acotada.

Por el apartado anterior sabemos que $|c| \neq 0$, y nuevamente la órbita $x(t)$ quedará contenida en una elipse, parábola o hipérbola. La única manera de que la órbita esté acotada es que $h < 0$. De lo contrario, la cónica sería una parábola o hipérbola, ambas con trayectorias abiertas, y, por tanto, no están acotadas. Obtenemos entonces la energía total

$$h = \frac{1}{2}|\dot{x}(0)|^2 - \frac{1}{|x(0)|} = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{9 - \sqrt{2}}{2} \approx 3{,}79 \geqslant 0$$

y como la trayectoria no es elíptica (de hecho es hiperbólica), no estará acotada, y la afirmación es $\boxed{\text{falsa.}}$

c) Si $x(0) = (1, 0, 1)$ y $\dot{x}(0) = (3, 0, 0)$, el área que barre el segmento que une $x(t)$ con el origen varía a velocidad $\sqrt{2}/2$.

Sabemos, por la Segunda Ley de Kepler, que la velocidad areolar tiene por fórmula

$$v_{\text{areolar}} = \frac{|c|}{2}$$

así como que por el primer apartado $c = (0, -3, 0) \Longrightarrow |c| = 3$, y sustituyendo vemos que

$$v_{\text{areolar}} = \frac{3}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

luego la afirmación es $\boxed{\text{falsa.}}$

d) Si $x(0) = (1, 0, 1)$ y $\dot{x}(0) = (-3, 0, -3)$, la órbita recorre la semi-recta $\{((1, 0, 1)s : s > 0)\}$, ω es finito y $x(t)$ se aproxima al origen cuando $t \to \omega$.

Primero, vemos que $\dot{x}(0) = -3x(0)$, es decir, ambos vectores son paralelos, luego $\widehat{x(0), \dot{x}(0)} = 0$, y $|c| = 0$. Por la teoría de clasificación de movimientos según el módulo del momento angular, sabemos que el movimiento es rectilíneo, y $x(t) = r(t)v$, con $v \equiv x(t)/|x(t)|$, $|v| = 1$, y $x(t) \in \mathbb{R}_+ v$, es decir, el movimiento se da a lo largo de la semirrecta con extremo inferior en el origen, y la dirección y sentido de v. Como

$$v = \frac{x(t)}{|x(t)|} = \frac{x(0)}{|x(0)|} = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}} \parallel (1, 0, 1)$$

la primera parte del enunciado es cierta. Ahora, hay dos opciones para que el resto sea cierto, y es que $h < 0$, con lo cual habría un cambio de monotonía en r y se cumplirían ambas cosas, o que $h \geqslant 0$, y $\dot{r} < 0$, ubicándonos entonces en el caso en que $-\infty = \alpha < \omega < +\infty$, y $\lim\limits_{t \to \omega} r(t) = 0$. La primera opción se descarta viendo el signo de la energía total

$$h = \frac{1}{2}|\dot{x}(0)|^2 - \frac{1}{|x(0)|} = \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{2})^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{18 - \sqrt{2}}{2} \approx 8{,}29 \geqslant 0.$$

Por teoría, la energía total en este tipo de movimiento también verifica

$$h = \frac{1}{2}|\dot{r}(t)|^2 - \frac{1}{|r(t)|}$$

y usando que $h > 0$

$$h = \frac{1}{2}|\dot{r}(t)|^2 - \frac{1}{|r(t)|} > 0 \iff \frac{1}{2}|\dot{r}(t)|^2 > \frac{1}{|r(t)|} \iff |\dot{r}(t)| > \sqrt{\frac{2}{|r(t)|}}$$

como $r(t) > 0 \Longrightarrow |r(t)| > 0$ y $\sqrt{\frac{2}{|r(t)|}} > 0$, luego

$$|\dot{r}(t)| > \sqrt{\frac{2}{|r(t)|}} > 0$$

En particular, $\dot{r}(t) \neq 0$ para cualquier $t > 0$. Como r es una función continua (por ser solución), entonces r es estrictamente monótona, con lo que basta obtener $\dot{r}(t_0)$ para algún $t_0 > 0$ para determinar el crecimiento o decrecimiento estricto de r. Como

$$\dot{r}(t) \overset{|v|=1}{=} \dot{r}(t)\langle v, v\rangle = \langle \dot{r}(t)v, v\rangle \overset{\dot{x}(t)=\dot{r}(t)v}{=} \langle \dot{x}(t), v\rangle$$

en particular, para $t = 0$

$$\dot{r}(0) = \langle \dot{x}(0), v\rangle = -3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{0}{\sqrt{2}} - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-6}{\sqrt{2}} = -3\sqrt{2} < 0.$$

Concluimos finalmente que $\dot{r} < 0$, luego, por lo explicado en el segundo caso de la distinción que hemos hecho, la afirmación es $\boxed{\text{verdadera.}}$

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Desde un observatorio astronómico se está controlando un meteorito que se aproxima a Marte siguiendo la órbita

$$\sqrt{x^2+y^2}+x=k$$

en un sistema de referencia sobre el plano del movimiento con origen en el centro de masas de Marte y unidades en miles de kilómetros. El meteorito se encuentra aún muy lejos y no se puede precisar con exactitud el valor de $k>0$. Se pide:

a) Determinar el tipo de órbita que describe y la energía total del movimiento.

Para ello, basta determinar el vector de excentricidad, por comparación directa de la ecuación de una cónica con foco en el origen $|x|+\langle e,x\rangle=k$, con la dada $\sqrt{x^2+y^2}+x=k$. Por un lado, $|x|=\sqrt{x^2+y^2}$, luego necesariamente será $\langle e,x\rangle=x \iff e=(1,0)$. Así, $\varepsilon=|e|=1$, y estamos ante un $\boxed{\text{movimiento parabólico.}}$

Para la energía total, podríamos calcularla como hemos hecho en el ejercicio anterior, o usar la relación

$$2h|c|^2=\mu^2(\varepsilon^2-1)\overset{\varepsilon^2=1}{=}0 \overset{|c|\neq 0}{\iff} h=0$$

y concluir que la energía total del movimiento es 0 (hemos usado que el movimiento es parabólico, luego $|c|\neq 0$).

b) Calcular la distancia mínima del meteorito a Marte y su velocidad en el punto de mínima distancia en términos del valor de k.[3]

Usando la expresión en polares de $|x|+\langle e,x\rangle=k$

$$r=\frac{k}{1+\varepsilon\cos(\theta-\omega)}$$

como $e=\varepsilon(\cos\omega,\operatorname{sen}\omega)$ y $\varepsilon=1$, por igualación directa tenemos que $e=(1,0)=(\cos\omega,\operatorname{sen}\omega) \iff \cos\omega=1\wedge\operatorname{sen}\omega=0 \iff \omega=0$ (salvo múltiplo entero de 2π).

La ecuación entonces de la parábola es

$$r=\frac{k}{1+\cos(\theta)}$$

y la distancia mínima del meteorito a Marte se obtiene cuando el denominador es máximo, es decir, $\cos(\theta)=1$, y tal punto es

$$r_{\text{mín}}=\frac{k}{1+1}=\frac{k}{2}\ \text{m}$$

[3]los resultados se pueden dejar en términos de μ también.

Por la definición de energía total

$$h = \frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 - \frac{1}{|x(t)|}$$

y por ser el movimiento parabólico hemos visto que $h = 0$, luego, juntando ambas cosas

$$0 = \frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 - \frac{1}{|x(t)|} \iff \frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 = \frac{1}{|x(t)|} \iff |\dot{x}(t)| = \sqrt{\frac{2}{|x(t)|}}$$

y sustituyendo $|x(t)|$ por el periastro $r_{\text{mín}}$, obtenemos dicha velocidad, suponiendo que t_* es el instante de tiempo en que el meteorito se encuentra a la mínima distancia

$$|\dot{x}(t_*)| = \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{k}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{4}{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}} = \frac{2\sqrt{k}}{k} \text{ m/s}$$

y como $k > 0$, dicho valor tiene sentido (usamos las unidades del SI, luego $[k] = [\text{m}]$)

c) Si se supone que el radio de Marte es aproximadamente de $3,5$ unidades, ¿tienen los marcianos que empezar a preparar las maletas?[4]

Chocarán en el caso de que $r_{\text{mín}} \leqslant R$, con R el radio de marte. Por lo tanto, planteamos la inecuación sustituyendo ambos valores.

$$\frac{k}{2} \text{ m} \leqslant 3,5 \cdot 10^3 \ \cancel{\text{km}} \cdot \frac{10^3 \text{ m}}{1 \ \cancel{\text{km}}} \iff k \text{ m} \leqslant 7 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Así pues

$$\boxed{\text{si } k \leqslant 7 \cdot 10^6 \text{ m, el meteorito chocará con el planeta. De lo contrario, no habrá colisión.}}$$

[4]Nos preguntan si se va a chocar el meteorito con el planeta.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Un satélite describe una órbita circular en sentido antihorario a altura 1 alrededor de un planeta de masa $1/G$ y radio 3.

La situación es la que se muestra en la Figura 1, con $R = 3$ m, y masa $M = 1/G$ kg.

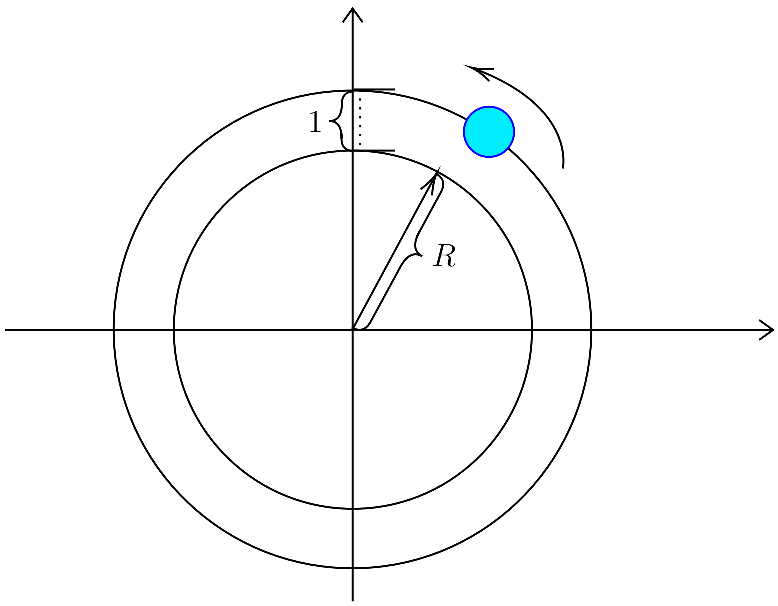


Figura 1: Esquema Ejercicio 3.

a) Determina el módulo de la velocidad a la que orbita en cada instante y el tiempo que tarda el satélite en dar una vuelta completa a su órbita.

En primer lugar, el radio de órbita del satélite será $r = R+1 = 3+1 = 4$ m. Ahora, consideramos el campo gravitatorio newtoniano dado por la ecuación

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{|x|^3}x$$

como $M = 1/G \Longrightarrow \mu = GM = 1\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$ y la ecuación resulta en

$$\ddot{x} = -\frac{1}{|x|^3}x$$

Por teoría, sabemos que $x_r(t) = r(\cos(\omega t), \operatorname{sen}(\omega t))$ es solución de esta ecuación si y solo si

$$|\omega| = \frac{\sqrt{\mu}}{r^{3/2}} = \frac{1}{r^{3/2}}$$

Por la Física de Bachillerato también sabemos que la velocidad lineal es la angular por el radio, es decir,

$$v = |\omega|r = \frac{1}{r^{3/2}}r = \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{r}}{r}\ \mathrm{m/s}$$

Como $r = 4$ m, entonces el módulo de la velocidad en cada instante es

$$\boxed{v = \frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ m/s}}$$

El tiempo que tarda un satélite en dar una vuelta completa a su órbita no es más que el periodo, que sabemos que se relaciona con la velocidad angular por medio de

$$\boxed{p = \frac{2\pi}{|\omega|}\text{s} = 2\pi r^{3/2} = 2\pi 4^{3/2} = 2\pi 8 = 16\pi \text{ s}}$$

Por lo tanto

El módulo de la velocidad a la que orbita en cada instante el satélite es $v = 0.5$ m/s y su periodo es $p = 16\pi$ s.

b) En el instante en que el satélite pasa por la vertical del polo norte del planeta se aumenta su velocidad en un 20 % manteniendo la misma dirección. Determina cómo se modifica su órbita.

La situación es la que se muestra en la Figura 2, denotando con subíndice 0 y 1 a las magnitudes antes y después del impulso, respectivamente.

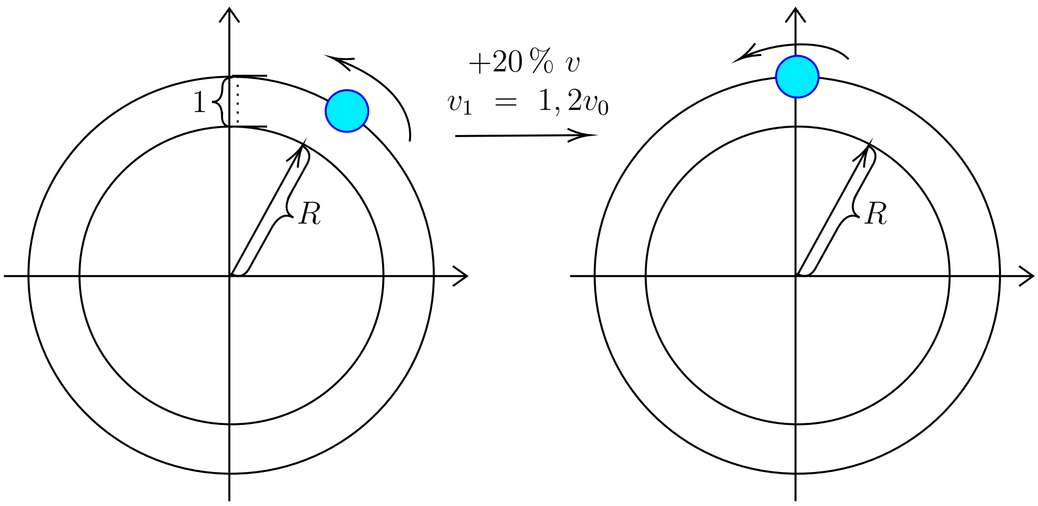


Figura 2: Esquema Ejercicio 3 Apartado b)

Para obtener el módulo del momento angular, primero recordamos que

$$|c| = |x(t)||\dot{x}(t)| \operatorname{sen}(\widehat{x(t), \dot{x}(t)}).$$

Como estamos en un MCU, $x(t) = r$, y $\dot{x}(t) = v$, y la velocidad es perpendicular al movimiento, luego $\operatorname{sen}(\widehat{x(t), \dot{x}(t)}) = 1$. Antes del impulso

$$v_0 = \frac{1}{2} \text{ m/s}$$

$$h_0 = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{r} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$
$$|c_0| = rv_0 = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$$

Después del impulso, el módulo de la velocidad se incrementa en un 20 %, y la dirección se mantiene, luego

$$v_1 = 1,2v_0 = 1,2\frac{1}{2} = 0,6 = \frac{3}{5}$$
$$h_1 = \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{r} = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{25} - \frac{1}{4} = -\frac{7}{100} < 0$$
$$|c_1| = rv_1 = 4\cdot\frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

Por la Primera Ley de Kepler, como $|c_1| \neq 0$, entonces el movimiento se da en una cónica, y como $h_1 < 0$, dicha cónica será una elipse.

Podemos obtener las magnitudes y puntos notables que determinan la nueva trayectoria. Primero obtenemos el semieje mayor, usando las siguientes relaciones

$$2h|c|^2 = \mu^2(\varepsilon^2-1); \quad k = \frac{|c|^2}{\mu} \iff |c|^2 = \mu k; \quad a = \frac{k}{1-\varepsilon^2} \iff k = a(1-\varepsilon^2)$$

Despejando h de la primera, y sustituyendo $|c|^2$ y k de la segunda y tercera, respectivamente, obtenemos

$$h = \frac{\mu^2(\varepsilon^2-1)}{2|c|^2} = \frac{\mu^{\cancel{2}}(\varepsilon^2-1)}{2\cancel{\mu}k} = \frac{\mu(\varepsilon^2-1)}{2a(1-\varepsilon^2)} = -\frac{\mu\cancel{(1-\varepsilon^2)}}{2a\cancel{(1-\varepsilon^2)}} \overset{(*)}{=} -\frac{\mu}{2a}$$

donde en $(*)$ hemos usado que la trayectoria es elíptica, luego

$$\varepsilon < 1 \Longrightarrow \varepsilon^2 < 1 \Longrightarrow \varepsilon^2 - 1 < 0 \Longrightarrow 1-\varepsilon^2 > 0 \Longrightarrow 1-\varepsilon^2 \neq 0$$

El semieje mayor a_1 será

$$h_1 = -\frac{\mu}{2a_1} \iff 2a_1 = -\frac{\mu}{h_1} \iff a_1 = -\frac{\mu}{2h_1} = -\frac{1}{2\cdot(-7/100)} = \frac{50}{7} \approx 7{,}14 \text{ m}$$

La excentricidad de la órbita elíptica puede obtenerse despejando en

$$2h|c|^2 = \mu^2(\varepsilon^2-1)$$

como sigue

$$2h|c|^2 = \mu^2(\varepsilon^2-1) \iff 2h|c|^2 = \mu^2\varepsilon^2 - \mu^2 \iff 2h|c|^2 + \mu^2 = \mu^2\varepsilon^2 \iff$$

$$\varepsilon^2 = \frac{2h|c|^2+\mu^2}{\mu^2} \iff \varepsilon = \sqrt{\frac{2h|c|^2+\mu^2}{\mu^2}}$$

Tomando las magnitudes post-impulso

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{2h_1|c_1|^2+\mu^2}{\mu^2}} = \sqrt{\frac{2(-7/100)(12/5)^2+1}{1^2}} = \frac{11}{25} = 0{,}44$$

Podemos obtener también el semieje menor, sustituyendo en la relación

$$b_1 = a_1\sqrt{1-\varepsilon_1^2} = (50/7)\sqrt{1-(11/25)^2} = \frac{12\sqrt{14}}{7} \approx 6{,}4143 \text{ m}$$

y el nuevo centro de la elipse

$$|C_1| = \frac{\varepsilon_1 k}{1-\varepsilon_1^2} = \frac{\varepsilon_1 a_1(1-\varepsilon_1^2)}{1-\varepsilon_1^2} = \frac{(11/25)(50/7)(1-(11/25)^2)}{1-(11/25)^2} = \frac{22}{7} \approx 3{,}14 \text{ m}$$

Por último, las distancias al periastro y apoastro se obtienen, respectivamente, como

$$r_{\text{mín}} = \frac{k}{1+\varepsilon} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon} \quad r_{\text{máx}} = \frac{k}{1-\varepsilon} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon}$$

luego podemos calcularlas

$$r_{\text{mín}_1} = \frac{a_1(1-\varepsilon_1^2)}{1+\varepsilon_1} = \frac{(50/7)(1-(11/25)^2)}{1+(11/25)} = 4 \text{ m}$$

$$r_{\text{máx}_1} = \frac{a_1(1-\varepsilon_1^2)}{1-\varepsilon_1} = \frac{(50/7)(1-(11/25)^2)}{1-(11/25)} = \frac{72}{7} \approx 10{,}29 \text{ m}$$

y el cambio de órbita se muestra en la Figura 3

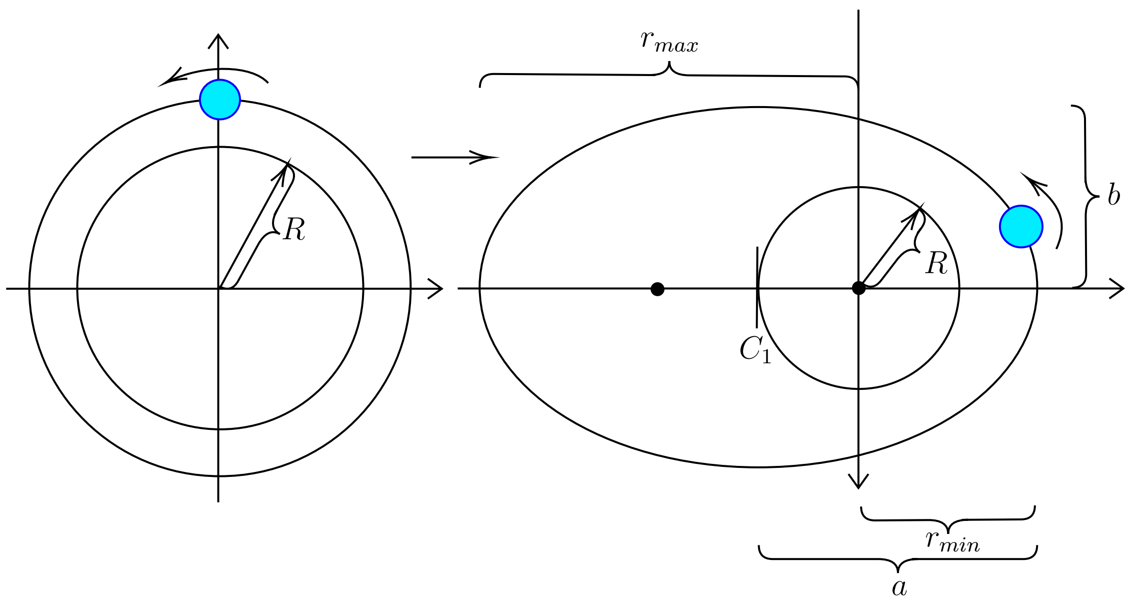


Figura 3: Cambio de Órbita del Ejercicio 3 Apartado b)

Nótese la rotación de 90º en sentido horario que se ha hecho para tener la representación usual de la elipse, y que se puede hacer por la autonomía de las soluciones del campo newtoniano, y, por tanto, por la invarianza frente a isometrías.