

# Análisis Funcional

## Examen XI



**Los Del DGIIM**, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada

o ofrecer servicios a los clientes finales y no para fines comerciales.

# Análisis Funcional

# Examen XI

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Granada, 2025

**Asignatura** Análisis Funcional.

**Curso Académico** 2025/26.

**Grado** Grado en Matemáticas.

**Descripción** Parcial 1.

**Fecha** En el mes de Noviembre.

**Ejercicio 1.** En el espacio de Banach  $C[0, 1]$  se considera el subespacio

$$X = \{f \in C[0, 1] : f(0) = f(1)\}$$

en el que se define el funcional lineal  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}$  dado por

$$\varphi(f) = \int_0^1 t^8 f(t) dt \quad \forall f \in X$$

- (a) Probar que  $X$  es completo.
- (b) Probar que  $\varphi$  es continuo y calcular su norma.
- (c) ¿Alcanza  $\varphi$  su norma?

**Ejercicio 2.** En el espacio  $C[0, 1]$  se define

$$F(x) = \int_0^1 t^{15} x(t^{21}) dt$$

para cada  $x \in C[0, 1]$ . Prueba que  $F$  es un funcional lineal y continuo y calcula su norma. ¿La alcanza?

**Ejercicio 3.** Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas, indica el resultado de teoría que lo justifique o proporciona una prueba; cuando sean falsas, indica un contraejemplo.

1. Un espacio normado tiene dimensión finita si y sólo si todos sus subespacios vectoriales son cerrados.
2. Si  $X$  e  $Y$  son espacios de Banach y la dimensión de  $Y$  es finita, entonces todo operador lineal de  $X$  en  $Y$  es continuo.
3. Sea  $X$  un espacio de Banach.  $X$  es separable si y sólo si todos sus subespacios cerrados son separables.
4. El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales no es abierto ni es cerrado en  $C[0, 1]$ .
5. El interior de un subconjunto compacto de un espacio de Banach es vacío.
6. El subespacio

$$X = \{f \in C[-1, 1] : f(t) = f(-t) \quad \forall t \in [0, 1]\}$$

considerado como subespacio del espacio  $C[-1, 1]$  con la norma del supremo es denso en  $C[-1, 1]$ .

7. En un espacio normado no completo, el único funcional lineal y continuo que alcanza su norma es el cero.
8. Dos hiperplanos cualesquiera de un espacio normado son isométricamente isomorfos.

9. Sea  $X$  un espacio de Banach. Si todo hiperplano cerrado de  $X$  es proximal, entonces  $X$  tiene dimensión finita.
10. En el espacio vectorial  $Z$  de los polinomios reales de grado menor o igual que  $N \in \mathbb{N}$ , consideramos la norma

$$\|p\| = \sup\{|p(t)| : t \in [0, 1]\} \quad \forall p \in Z$$

Entonces, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existe una constante  $M_k > 0$  tal que

$$|p(k)| \leq M_k \|p\| \quad \forall p \in Z$$

¿puede haber una constante  $M$  que valga para todo  $k \in \mathbb{N}$ ?