Geometría II
Examen VII

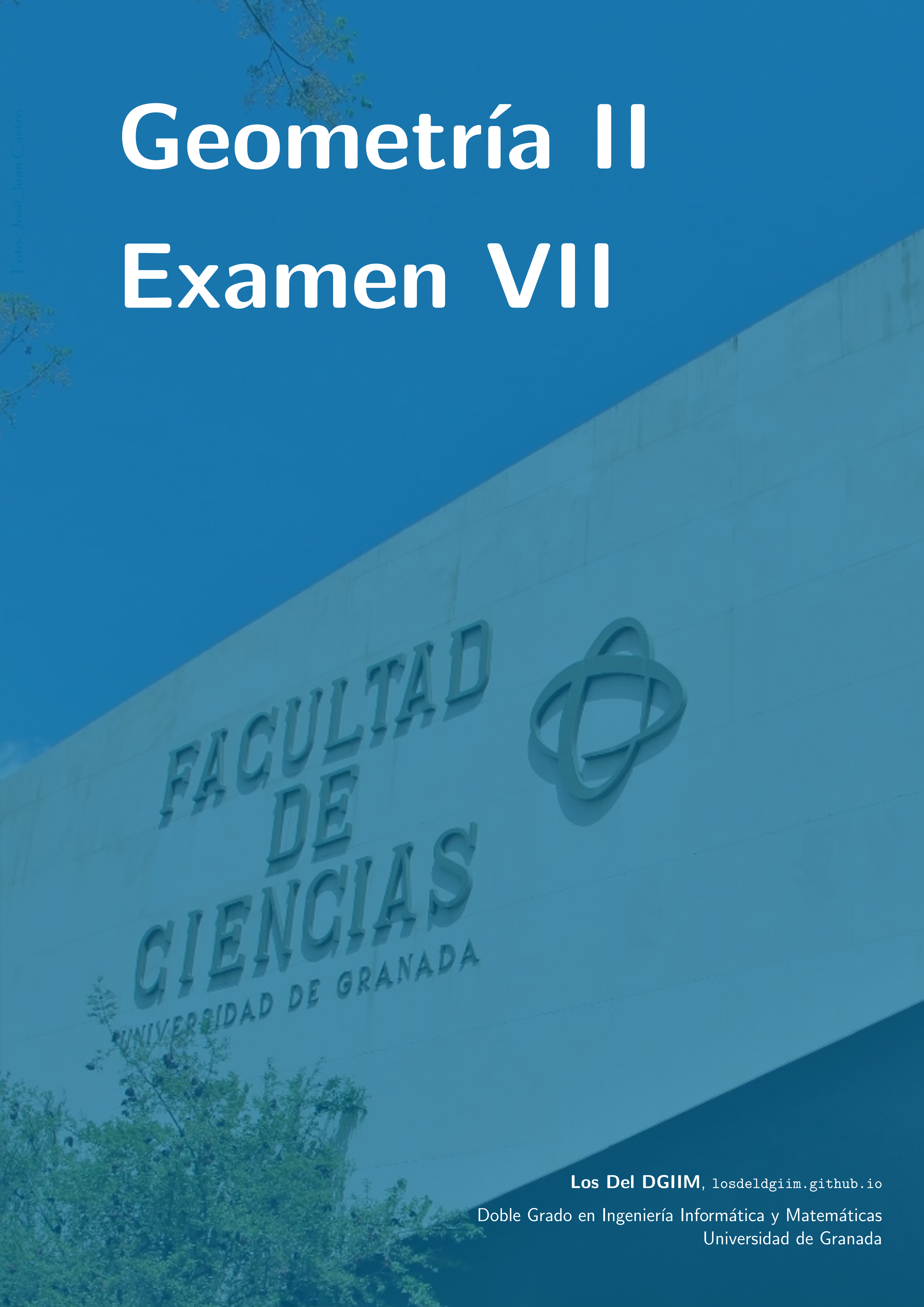

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría II
Examen VII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Geometría II.

Curso Académico 2016-17.

Grado Matemáticas.

Profesor Desconocido[1].

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 6 de junio de 2017.

[1]El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1 (2.5 puntos). Enuncia y demuestra el Teorema de Cayley Hamilton.

Ejercicio 2 (2.5 puntos). En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica g cuya matriz en la base usual viene dada por:

$$G = M(g, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y el endomorfismo $f \in End(\mathbb{R}^3)$ dado por:

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, -x - y - 2z, x + y + 2z)$$

1. Comprueba que g es una métrica euclídea.

   El enunciado ya nos afirma que es una métrica, por lo que solo es necesario que sea euclídea (definida positiva). Para ello, compruebo que todos sus menores principales son positivos:

   $$|3| = 3 > 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0 \qquad |G| = 6 - 3 - 2 = 1 > 0$$

   Por tanto, tenemos que es definida positiva y, por tanto, euclídea.

2. ¿Es f autoadjunto respecto de la métrica g?

   Tenemos que:

   $$F = M(f, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Tenemos que F es autoadjunto respecto de $(\mathbb{R}^3, g) \iff F^tG = GF$:

   $$F^tG = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   $$GF = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, tenemos que sí es autoadjunto respecto de g.

3. En caso afirmativo, encuentra una base ortonormal de vectores propios de f.

   Calculamos en primer lugar el polinomio característico:

   $$\begin{aligned} P_f(\lambda) = |F - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ -3 & -1-\lambda & -2 \\ 3-\lambda & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ -3 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) \end{aligned}$$

Por tanto, los valores propios son $\{0,1,2\}$. Calculamos los subespacios propios:

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} 2x+y+z=0 \\ -x-y-2z=0 \\ x+y+2z=0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ -x-2y-2z=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} y+z=0 \\ -x-3y-2z=0 \\ x+y=0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por tanto, tenemos que una base ortogonal de vectores propios es:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{e_1, e_2, e_3\}$$

Para que sea ortonormal, calculamos la norma de cada uno de los vectores. Al no ser la base usual ortonormal con esta métrica, hemos de calcular la norma de cada uno de los vectores:

$$g(e_1,e_1) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3-1 = 2$$

$$g(e_2,e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$g(e_3,e_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto, tenemos que la base ortonormal de vectores propios de f es:

$$\bar{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio 3 (3 puntos). Responde a las siguientes cuestiones:

1. Encuentra, si es posible, un endomorfismo diagonalizable de $\mathbb{R}^3$ que verifique que:

$$Im(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$$

y otro endomorfismo no diagonalizable de $\mathbb{R}^3$ que verifique que:

$$Im(g) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0, \quad y+z=0\}$$

y da su matriz en la base usual de $\mathbb{R}^3$.

Busco primero f. Como tengo que todos los endomorfismos autoadjuntos son diagonalizables, busco que f sea autoadjunto. Como $\mathcal{B}_u = \{e_1, e_2, e_3\}$ es ortonormal para $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$, si su matriz asociada en dicha base es simétrica, entonces será diagonalizable. Por tanto, a la hora de calcular la base de la imagen de f, busco dos vectores que permitan que la matriz sea simétrica.

$$Im(f) = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} := \mathcal{L}\{f(e_1), f(e_2)\}$$

Para elegir $f(e_3)$, quiero que sea combinación lineal de los dos vectores que generan la base. Por tanto, elijo:

$$f(e_3) = -f(e_2) - f(e_1)$$

Por tanto, tengo que:

$$M(f, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que la imagen de f es la dada y, por ser su matriz respecto de una base ortonormal simétrica es autoadjunto y, por tanto, diagonalizable.

Trabajamos ahora con g. Tenemos que:

$$Im(g) = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Por tanto, sea g el endomorfismo con la siguiente matriz asociada:

$$G = M(g, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que la imagen es la dada. Veamos que no es diagonalizable. Su polinomio característico es:

$$P_g(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)$$

$$\dim V_0 = \dim Ker(g) = 3 - \dim Im(g) = 1$$

Por tanto, como tenemos que las multiplicidades algebraicas y geométricas del 0 no coinciden, tenemos que no es diagonalizable.

2. Sean (V, g) un EVM de dimensión 3 y $\mathcal{B}$ una base de V. Prueba que g es una métrica euclídea si y solo si:

$$a_{33} > 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 \qquad |A| > 0$$

donde

$$A = M(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$) Suponemos g métrica euclídea. Entonces, A es definida positiva, por lo que sus menores principales son positivos. Por tanto, $|A| > 0$. Además, a_{33} es el cuadrado del tercer vector de la base, por lo que también es positivo. Nos falta ver que:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$$

Sea $\bar{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Definiendo $\bar{\mathcal{B}} = \{e_3, e_2, e_1\}$, tenemos que:

$$\bar{A} = M(g, \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{32} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Como g es definida positiva, tengo que los menores principales de $\bar{A}$ también. Por tanto,

$$0 < \begin{vmatrix} a_{33} & a_{32} \\ a_{32} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{F_2 \leftrightarrow F_1}{=} - \begin{vmatrix} a_{32} & a_{22} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_1}{=} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Por tanto, se tiene lo pedido.

$\Longleftarrow$) Suponemos g que métrica que cumple lo establecido en el enunciado. Entonces, por ser una métrica y supuesto $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, tenemos que:

$$a_{ij} = a_{ji} = g(e_i, e_j) = g(e_j, e_i)$$

Por tanto, definiendo $\bar{\mathcal{B}} = \{e_3, e_2, e_1\}$, tenemos que:

$$\bar{A} = M(g, \bar{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{32} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Veamos si $\bar{A}$ es definida positiva.

$$|a_{33}| = a_{33} > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{33} & a_{32} \\ a_{32} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{F_2 \leftrightarrow F_1}{=} - \begin{vmatrix} a_{32} & a_{22} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_1}{=} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$$

$$|\bar{A}| = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{32} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} \overset{F_3 \leftrightarrow F_1}{=} - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{21} & a_{11} \\ a_{32} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \overset{C_3 \leftrightarrow C_1}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$$

Por tanto, tenemos que $\bar{A}$ es definida positiva y, como $\bar{A} \sim_c A$, tenemos que A también es definida positiva, por lo que g es una métrica euclídea.

Ejercicio 4. En $(\mathbb{R}^3, g)$ encuentra, si es posible, una isometría f que lleve el subespacio U en el subespacio W, donde:

$$U = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\} \qquad W = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$$

Si es posible, da $M(f, \mathcal{B}_u)$, clasifica y describe la isometría f.

Sea $\mathcal{B}_u = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Observación. Gráficamente, deducimos que se trata de un giro de ángulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ sobre la recta $L = \mathcal{L}\{e_2\}$. Esto nos ayuda en las suposiciones que hacemos.

Tenemos que:

$$U = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3) \right\}$$

$$W = \mathcal{L}\left\{e_2, e_1\right\}$$

Definimos las condiciones para que $f(U) = W$ de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(e_2) = e_2 \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}[f(e_1) + f(e_3)] = e_1 \end{array} \right.$$

Además, imponemos como condición que $f(e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}[e_1 + e_3]$. Por tanto, tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(e_1) = \sqrt{2}e_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}[e_1 + e_3] = \dfrac{1}{\sqrt{2}}[e_1 - e_3] \\ \\ f(e_2) = e_2 \\ \\ f(e_3) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}[e_1 + e_3] \end{array} \right.$$

Por tanto, tenemos que isometría buscada tiene como matriz en la base usual:

$$M(f, \mathcal{B}_u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(3)$$

Tenemos que se trata de una isometría, ya que su matriz respecto de la base usual (que es ortonormal) es ortogonal. Esto se debe a que sus filas son base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Como además lleva una base de U en una base de W, tenemos que $f(U) = W$.