

Álgebra III

Examen V

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Álgebra III

Examen V

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Asignatura Álgebra III.

Curso Académico 2022/23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Gómez Torrecillas.

Descripción Examen Ordinario.

Ejercicio 1. Tomemos $f = x^3 + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ y K el cuerpo de descomposición sobre \mathbb{Q} de f .

- a) Decidir razonadamente si $\sqrt[3]{3} \in K$.
- b) Describir los elementos del grupo $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$.
- c) Calcular todos los subcuerpos de K . Señalar cuáles son extensiones de Galois de \mathbb{Q} .
- d) Calcular el cardinal del grupo $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K(i))$.

Ejercicio 2. Consideremos el número real $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Decidir razonadamente si $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\frac{1}{\alpha^2+1})$

Ejercicio 3. Sea $g = x^3 + x - 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ y F un cuerpo de descomposición sobre \mathbb{F}_3 de g .

- a) Describir los elementos del grupo $\text{Aut}_{\mathbb{F}_3}(F)$.
- b) Calcular todos los subcuerpos de F .
- c) Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$ son las raíces de g , decidir si $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \in \mathbb{F}_3$.
- d) Resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ en F .

Ejercicio 4. Decidir razonadamente sobre la veracidad de las siguientes afirmaciones:

- a) El número real $\sum_{n=1}^8 \sqrt[n]{2}$ es algebraico sobre \mathbb{Q} .
- b) Si K es un cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in F[x]$ y $\alpha \in K$, entonces $\text{Irr}(\alpha, F)$ es un divisor de f .
- c) Dada una torre de cuerpos $F \leqslant E \leqslant K$, si $F \leqslant E$ y $E \leqslant K$ son de Galois, entonces $F \leqslant K$ es de Galois.
- d) Si $z \in \mathbb{C}$ tiene grado 4 sobre \mathbb{Q} , entonces z es un número construible.