Parcial-1.pdf

crgs_

Topología Ii

4º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

Topología II. 2023–24.

Control del tema 1: El grupo fundamental.

1a. Sea $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ una aplicación continua e inyectiva. Demuestra que f es sobreyectiva.

1b. Prueba que no existe una retracción $r : \mathbb{S}^2 \longrightarrow E$, donde E es el ecuador de la esfera, es decir,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : \ z = 0\}.$$

2. Sean S_1 y S_2 las esferas de $\mathbb{R}^3$ de radio 1 con centros respectivos los puntos $(2, 0, 0)$ y $(-2, 0, 0)$. Calcula el grupo fundamental de

$$X = S_1 \cup S_2 \cup R$$

en el origen; donde $R = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : \ x \in \mathbb{R}\}$. Determina lazos basados en el origen cuyas clases de equivalencia generen $\pi_1(X, (0, 0, 0))$.

Debes hacer el ejercicio 2 y elegir solo uno entre los ejercicios 1a y 1b.

Granada, 21 de noviembre de 2024.

① a) $f: S^2 \to S^2$ continua e inyectiva $\Rightarrow f$ es sobreyectiva

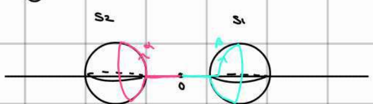
Borsuk Ulam: sea $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ continua, $\exists x_0 \in S^2 : f(x_0) = f(-x_0)$

Sup que f no es sobreyectiva $\Rightarrow \exists y \in S^2 : f(x) \neq y \ \forall x \in S^2 \Rightarrow f: S^2 \to S^2 \setminus \{y\} \cong \mathbb{R}^2$ continua e inyectiva !!! Contradice el Tª Borsuk Ulam

b) No existe $r: S^2 \to E = \{(x,y,z) \in S^2 : z=0\}$ Suponemos que existe $\Rightarrow i_*: \pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(S^2)$ es inyectiva

Como $\pi_1(S^2)$ es trivial, tenemos que i_* es trivial !!!

②



A

Como $\overbrace{S_1 \cup S_2 \cup \{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 : x \in [-3,3]\}}^{A}$ es rdd de X, vamos a calcular el grupo fundamental de este que es más sencillo ya que son isomorfos.

Tomamos $U = A \setminus \{(-3,0,0)\} \Rightarrow \underbrace{S_1 \cup \{(x,0,0) : x \in [1,3]\}}_{B}$ es rdd de U. Veamos $\pi_1(U)$:

Sea $U_1 = B \setminus \{(2,0,0)\} \Rightarrow S_2$ es rdd de $U_1 \Rightarrow \pi_1(U_1) = \{\varepsilon\}$

Sea $V_1 = B \setminus \{(2,1,0)\} \Rightarrow$  es rdd de $V_1 \Rightarrow \pi_1(V_1) = \mathbb{Z}$

$U_1 \cap V_1 = B \setminus \{(2,0,0),(2,1,0)\} \Rightarrow \{(2,-1,0)\}$ es rdd de $U_1 \cap V_1 \Rightarrow \pi_1(U_1 \cap V_1) = \{\varepsilon\}$

$\xRightarrow{\text{Tª SVK}} \pi_1(U) = \mathbb{Z}$

Tomamos $V = A \setminus \{(3,0,0)\} \Rightarrow S_2 \cup \{(x,0,0) : x \in [-3,-1]\}$ es rdd de V. Este conjunto es homeomorfo a B, y hemos visto que $\pi_1(B) = \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \pi_1(V) = \mathbb{Z}$

$U \cap V = A \setminus \{(3,0,0),(-3,0,0)\} \Rightarrow \{(0,0,0)\}$ es rdd de $U \cap V \Rightarrow \pi_1(U \cap V) = \{\varepsilon\} \xRightarrow[\text{Tª SVK}]{} \pi_1(A) = \pi_1(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

TOPOLOGÍA II. 2023–24.

Control del tema 1: El grupo fundamental.

1a. Sea $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ una aplicación continua e inyectiva. Demuestra que f es sobreyectiva.

1b. Prueba que no existe una retracción $r : \mathbb{S}^2 \longrightarrow E$, donde E es el ecuador de la esfera, es decir,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : \ z = 0\}.$$

2. Sean S_1 y S_2 las esferas de $\mathbb{R}^3$ de radio 1 con centros respectivos los puntos $(2, 0, 0)$ y $(-2, 0, 0)$. Calcula el grupo fundamental de

$$X = S_1 \cup S_2 \cup R$$

en el origen; donde $R = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : \ x \in \mathbb{R}\}$. Determina lazos basados en el origen cuyas clases de equivalencia generen $\pi_1(X, (0, 0, 0))$.

Debes hacer el ejercicio 2 y elegir solo uno entre los ejercicios 1a y 1b.

Granada, 21 de noviembre de 2024.

① a) $f: S^2 \to S^2$ continua e inyectiva $\Rightarrow f$ es sobreyectiva

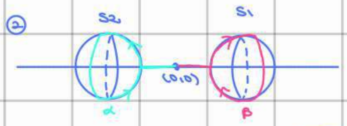
Red. absurdo: sup que no es sobreyectiva $\Rightarrow \exists y \in S^2 : f(x) \neq y \ \forall x \in S^2 \Rightarrow y \notin \operatorname{Im} f \Rightarrow f: S^2 \to S^2 \setminus \{y\}$

Como $S^2 \setminus \{y\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, tenemos $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ continua $\underset{\text{Tª Borsuk Ulam}}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in S^2 : f(x_0) = f(-x_0)$!!! pues f es inyectiva

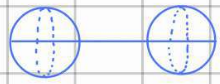
b) Red. Absurdo : sup $\exists r: S^2 \to E$ una retracción $\Rightarrow i_* : E \to S^2$ es inyectivo, pero como $\pi_1(S^2)$ es trivial $\Rightarrow i_*$ es trivial!!!
(no es inyectivo)

$E = \{(x,y,z) \in S^2 : z = 0\}$

②



$\Rightarrow$



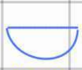
es rdd de $X \Rightarrow \tilde{X}$

$U = \tilde{X} \setminus \{(-3,0,0)\} \Rightarrow$

$\underbrace{\text{es rdd de } U}_{A}$

$U_1 = A \setminus \{x\} \Rightarrow S^1$ es rdd de $U_1 \Rightarrow \pi_1(U_1) = \{\varepsilon\}$

$V_1 = A \setminus \{y\} \Rightarrow$



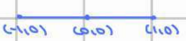
es rdd de $V_1 \Rightarrow \pi_1(V_1) = \mathbb{Z} = [\beta]$

$V = \tilde{X} \setminus \{(3,0,0)\} \Rightarrow$

$U_1 \cap V_1 = A \setminus \{x, y\} \Rightarrow$ simp. conexo $\Rightarrow \pi_1(U_1 \cap V_1) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \pi_1(U) = \mathbb{Z} = F(\beta)$

es rdd de V (igual que U) $\Rightarrow \pi_1(V) = \mathbb{Z} = F(\alpha)$

$U \cap V = \tilde{X} \setminus \{(-3,0,0), (3,0,0)\} \Rightarrow$



es rdd de $U \cap V \Rightarrow \pi_1(U \cap V) = \{\varepsilon\} \Rightarrow \pi_1(\tilde{X}) = \pi_1(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F(\alpha, \beta)$