Análisis Funcional

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Foto: José Juan Castro

Análisis Funcional

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Índice general

Se recomienda encarecidamente acompañar la asignatura de la lectura del libro "Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equations", de Haim Brezis, que puede encontrarse en la bibliografía de la asignatura.

1. El Espacio Dual

El objetivo de este capítulo es definir el concepto de espacio dual de un espacio normado, así como sus principales propiedades, que nos dotan de muchos ejemplos de espacios de Banach. Para ello, será necesario primero repasar conceptos básicos vistos ya en asignaturas anteriores de Análisis Matemático.

1.1. Repaso

Definición 1.1 (Espacio métrico)**.** Un espacio métrico es una tupla (E, d) donde E es un conjunto no vacío y $d : E \times E \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

- **Desigualdad triangular.** $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \qquad \forall x, y, z \in E$
- **Simetría.** $d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall x, y \in E$
- **No degeneración.** $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

Definición 1.2 (Espacio normado)**.** Un espacio normado es una tupla $(E, \|\cdot\|)$ donde E es un espacio vectorial y $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

- **Desigualdad triangular.** $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in E$
- **Homogeneidad por homotecia.** $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$
- **No degeneración.** $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$

A partir de estas propiedades pueden deducirse muchas otras, entre las cuales destacamos:

Proposición 1.1. *Si* $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado, entonces:*

- $\|0\| = 0$.
- $\|x\| \geqslant 0 \qquad \forall x \in E$.

Demostración. Veamos cada propiedad:

- Para la primera: $\|0\| = \|0 \cdot v\| = 0\|v\| = 0$.
- Para la segunda, basta observar que si $x \in E$, entonces:

$$0 = \|0\| = \|x + (-x)\| \leqslant 2\|x\| \Longrightarrow \|x\| \geqslant 0$$

□

Proposición 1.2. *Si* $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado y definimos la aplicación* $d : E \times E \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$d(x, y) = \|y - x\| \qquad \forall x, y \in E$$

Se verifica que (E, d) *es un espacio métrico.*

Definición 1.3 (Espacio métrico completo)**.** Sea (E, d) un espacio métrico, decimos que es completo (o que la distancia d es completa) si toda sucesión de Cauchy para la distancia d es también convergente a un elemento de E para la distancia d.

Hemos visto ya que cualquier espacio normado puede dotarse de estructura de espacio métrico, así como la definición de espacio métrico completo, ambos conceptos tratados ya en asignaturas previas.

Definición 1.4 (Espacio de Banach)**.** Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, decimos que es de Banach si el espacio métrico (E, d) obtenido de la forma usual a partir de la norma $\|\cdot\|$ es un espacio métrico completo.

Definición 1.5 (Espacio prehilbertiano)**.** Un espacio prehilbertiano es una tupla $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ donde H es un espacio vectorial y $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

- **Bilinealidad.** La aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es lineal en ambas variables.
- **Simetría.** $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \qquad \forall x, y \in E$
- **Definida positiva.** $\langle x, x\rangle > 0 \qquad \forall x \in H \setminus \{0\}$

Proposición 1.3. *Si* $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un espacio prehilbertiano y definimos la aplicación* $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad \forall x \in E$$

Se verifica que $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado.*

Definición 1.6 (Espacio de Hilbert)**.** Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio prehilbertiano, decimos que es de Hilbert si el espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ obtenido de la forma usual a partir del producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un espacio métrico de Banach.

1.1.1. Ejemplos

- Sea $N \in \mathbb{N}$, en $\mathbb{R}^N$ podemos definir para cada $p \geqslant 1$ la aplicación $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por:

  $$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

  Que hace que $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$ sea un espacio normado, que de hecho es de Banach, como se vió en Análisis Matemático II, puesto que todo espacio normado de dimensión finita es de Banach.

- En el caso anterior, si tomamos $p = 2$ se verifica que además si definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

  Obtenemos que $(\mathbb{R}^N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio prehilbertiano (compruébese) cuyo espacio normado canónico coincide con $(\mathbb{R}^N, \| \cdot \|_2)$, por lo que es un espacio de Hilbert.

- Como otro ejemplo de espacio normado sobre $\mathbb{R}^N$, podemos definir $\| \cdot \|_\infty : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : i \in \{0, \ldots, N\}\}$$

  Se cumple igualmente que $(\mathbb{R}^N, \| \cdot \|_\infty)$ es un espacio normado que además es de Banach, por la misma razón que antes.

- Como primer ejemplo de espacio normado que no se construye sobre los vectores de un espacio de la forma $\mathbb{R}^N$, si tomamos un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$, y definimos[1]:

$$\mathcal{C}_b(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y } f \text{ es acotada en } A\}$$

  Junto con la aplicación $\| \cdot \| : \mathcal{C}_b(A) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : x \in A\}$$

  Se verifica que $(\mathcal{C}_b(A), \| \cdot \|)$ es una espacio normado que de hecho es de Banach (compruébese).

- Sea ahora $K \subset \mathbb{R}^N$ un compacto, si definimos:

$$\mathcal{C}(K) = \{f : K \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$$

  resulta que podemos definir una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{C}(K) \times \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\langle f, g \rangle = \int_K f(x) g(x) \; dx$$

  que hace que $(\mathcal{C}(K), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sea un espacio prehilbertiano, que nos induce un espacio normado donde la norma es:

$$\|f\|_2 = \left(\int_K f(x)^2 \; dx \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall f \in \mathcal{C}(K)$$

  Sin embargo, este espacio prehilbertiano **no es de Hilbert**:

  Por ejemplo, si tomamos $K = [0, 2] \subset \mathbb{R}$, si tomamos $f_n : K \to \mathbb{R}$ de forma que la gráfica de f_n sea algo parecido a la de la Figura 1.1

[1] El subíndice "b" de $\mathcal{C}_b(A)$ viene de la palabra inglesa "bounded".

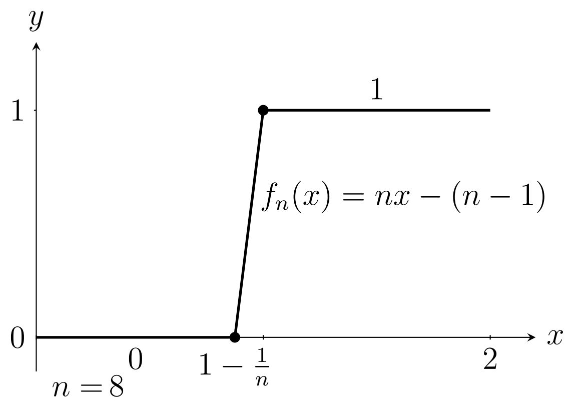


Figura 1.1: Gráfica de la función f_n.

Si definimos $f = \chi_{[1,2]}$ la función característica del intervalo $[1, 2]$ (que no pertence a $\mathcal{C}(K)$), tenemos que:

$$\|f - f_n\|_2^2 = \int_0^2 (f(x) - f_n(x))^2 \, dx = \frac{1}{2n} \to 0$$

Por lo que f_n es una sucesión de Cauchy pero cuyo límite no está en el espacio que consideramos, por lo que no es convergente, luego $\mathcal{C}(K)$ no es un espacio completo.

1.2. Espacios de Lebesgue

Un ejemplo interesante de espacios de Banach son los espacios de Lebesgue, que ya se trabajaron un poco en la asignatura de Análisis Matemático II. En este documento volveremos a definir dicho espacio, puesto que la construcción es importante tenerla clara. En un primer lugar, hemos de repasar ciertas desigualdades para poder construir la estructura de espacio normado.

1.2.1. Desigualdades importantes

Para la primera desigualdad, es conveniente la siguiente motivación, que nos dará una breve justificación del origen de la desigualdad: sean $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ dos números reales no negativos, es bien conocido que:

$$0 \geqslant (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Longrightarrow ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

Definición 1.7. Sea $p \geqslant 1$ un número real, definimos su "exponente conjugado" por:

$$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{si } p \neq 1 \\ \infty & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

De esta forma (admitiendo el convenio de que $0 = 1/\infty$ de la recta real extendida), tenemos que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Usaremos en esta sección la notación p' para denotar al exponente conjugado de p.

Proposición 1.4 (Desigualdad de Young). *Sean $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ y $p \in \mathbb{R}$ con $p > 1$, se verifica que:*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

Demostración. La concavidad[2] del logaritmo nos dice:

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}\right) \geqslant \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{p'}\log\left(b^{p'}\right) = \log(a) + \log(b) = \log(ab)$$

Y si ahora aplicamos la función exponencial y usamos que es creciente obtenemos:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

□

Recordemos que en Análisis Matemático I definíamos para cualquier conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ medible el conjunto de las funciones integrables sobre Ω:

$$\mathcal{L}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega f < \infty \right\}$$

Pues bien, dado $p \geqslant 1$, podemos definir ahora:

$$\mathcal{L}_p(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{L}(\Omega) : \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}$$

Teorema 1.5 (Desigualdad de Hölder). *Sea $p > 1$, si $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$ y $g \in \mathcal{L}_{p'}(\Omega)$, entonces $fg \in \mathcal{L}(\Omega)$ y además:*

$$\int_\Omega |fg| \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Demostración. Si notamos por comodidad:

$$\alpha = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \beta = \left(\int_\Omega |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Si $\alpha = 0$, entonces $f^p = 0$ casi por doquier, de donde $|fg| = 0$ casi por doquier, luego:

$$\int_\Omega |fg| = 0$$

Si $\beta = 0$ la situación es simétrica. Suponiendo ahora que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, la desigualdad de Young nos dice que:

$$\frac{|f(x)|}{\alpha}\frac{|g(x)|}{\beta} \leqslant \frac{|f(x)|^p}{p\alpha^p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'\beta^{p'}} \qquad \forall x \in \Omega$$

[2] Recordamos que si f era una función cóncava, entonces $f(tx + (1-t)y) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y)$, para cualquier $t \in [0, 1]$, x,y en el dominio de definición de f.

Si ahora aplicamos la integral de Lebesgue a ambos lados usando el crecimiento de dicho funcional, obtenemos que (usando la definición de α y β):

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int_\Omega |fg| \leqslant \frac{1}{p\alpha^p}\int_\Omega |f|^p + \frac{1}{p'\beta^{p'}}\int_\Omega |g|^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

de donde $fg \in \mathcal{L}(\Omega)$ y despejando de la desigualdad:

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int_\Omega |fg| \leqslant 1$$

Obtenemos la desigualdad buscada. □

La desigualdad de Hölder nos proporcionará la desigualdad de Cauchy-Schwartz de la norma del futuro espacio normado, y nos permitirá probar la desigualdad de Minkowski.

Teorema 1.6 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Para $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$ y $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega)$, se cumple que:*

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Demostración. Si notamos por comodidad:

$$\alpha = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \beta = \left(\int_\Omega |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \gamma = \left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = 1$, entonces la desigualdad triangular nos dice que $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, donde aplicamos el crecimiento de la integral y ya tenemos el Teorema demostrado. Sabemos por el resultado anterior que $\gamma < \infty$, puesto que $\mathcal{L}_p(\Omega) \subset \mathcal{L}(\Omega)$, y la desigualdad buscada es obvia si $\gamma = 0$. Supuesto ahora que $p > 1$ y $\gamma > 0$, si tomamos:

$$h = |f+g|^{p-1}$$

tenemos entonces que:

$$h^{p'} = |f+g|^{(p-1)p'} = |f+g|^p$$

luego:

$$\int_\Omega h^{p'} = \gamma^p < \infty$$

Por lo que $h \in \mathcal{L}_p(\Omega)$. Tenemos:

$$|f+g|^p = |f+g|h \leqslant |f|h + |g|h$$

Y por la desigualdad de Hölder:

$$\gamma^p \leqslant \int_\Omega |f|h + \int_\Omega |g|h \leqslant (\alpha+\beta)\left(\int_\Omega h^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = (\alpha+\beta)\gamma^{\frac{p}{p'}}$$

Y si dividimos por $\gamma^{\frac{p}{p'}}$ tenemos la desigualdad buscada. □

1.2.2. Definición de los espacios de Lebesgue

Fijado $p \geqslant 1$, podemos tratar de dotar a $\mathcal{L}_p(\Omega)$ de una norma. Pensamos en un principio en la aplicación $\varphi_p : \mathcal{L}_p(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$$

Que:

- Verifica la desigualdad triangular gracias a la desigualdad de Minkowski.
- Verifica la homegeneidad por homotecias, ya que:
$$\varphi_p(\alpha f) = |\alpha| \varphi_p(f) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$
- $\varphi_p(f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ casi por doquier.

Por lo que dicha función **no es una norma** en $\mathcal{L}_p(\Omega)$ al no verificar la no degeneración de la norma, puesto que la integral "es ciega" a la hora de diferenciar la función constantemente igual a 0 de otras funciones con integral cero.

Para solucionar el problema con el que nos acabamos de topar (el problema de no poder definir una norma de dicha forma), podemos constuir una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathcal{L}_p(\Omega)$ que identifique a las funciones que son iguales casi por doquier, pudiendo considerar el espacio cociente:

$$L_p(\Omega) = \frac{\mathcal{L}_p(\Omega)}{\sim}$$

Donde ya $(L_p(\Omega), \varphi_p)$ sí que es un espacio normado, donde denotaremos normalmente $\varphi_p = \|\cdot\|_p$.

Teorema 1.7 (Riesz-Fischer). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto medible y $p \geqslant 1$, se cumple que $(L_p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.*

1.2.3. Más ejemplos de espacios de Banach

- Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible, si definimos:
$$\sup_\Omega |f| = \text{ínf}\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \text{ casi para todo } x \in \Omega\}$$
El conjunto:
$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \sup_\Omega |f| < \infty \right\}$$
junto con la norma:
$$\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f|$$
es un espacio de Banach, donde la desigualdad de Hölder se comple considerando que $p = \infty$ y $p' = 1$:
Si $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ y $g \in \mathcal{L}(\Omega)$, entonces $fg \in \mathcal{L}(\Omega)$, con:
$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1$$

- Para $1 \leqslant p < \infty$ podemos considerar otro tipo de espacios:

$$l^p = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\}$$

que junto con la aplicación:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall x \in l^p$$

forman un espacio de Banach (compruébese).

En dichos espacios, se tiene que si $x \in l^p$ y $y \in l^{p'}$, entonces $xy \in l$, con:

$$\|xy\| \leqslant \|x\|_p \|y\|_{p'}$$

- En el caso anterior, si $p = 2$, podemos definir la aplicación:

$$\langle x, y \rangle_2 = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \qquad \forall x, y \in l^2$$

Con lo que $(l^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ es un espacio de Hilbert.

- Al igual que sucedía con las normas $p-$ésimas en $\mathbb{R}^N$, podemos considerar:

$$l^\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ acotada}\}$$

junto con la aplicación $\| \cdot \| : l^\infty \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$$

y obtenemos un espacio de Banach.

- $C = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ es convergente}\}$ es un subespacio de l^∞.

- $C_0 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ converge a } 0\}$ es un subespacio de C.

Proposición 1.8. *El espacio normado l^p es de Banach para $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Demostración. **Para $p = \infty$.** Recordamos que trabajamos en el espacio:

$$l^\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ acotada}\}, \qquad \|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$$

Sea $\{x_m\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de l^∞, queremos probar que $\{x_m\}$ es convergente en l^∞. Para ello, primero vemos que fijado $n \in \mathbb{N}$ tenemos que la sucesión de números reales $\{x_m(n)\}$ es de Cauchy, pues dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $m_0 \in \mathbb{N}$ (gracias a que $\{x_m\}$ es de Cauchy) de foma que:

$$|x_p(n) - x_q(n)| \leqslant \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_p(k) - x_q(k)| = \|x_p - x_q\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall p, q \geqslant m_0$$

Como $\mathbb{R}$ es completo, tenemos que la sucesión $\{x_m(n)\}$ es convergente, para cada $n \in \mathbb{N}$, lo que nos permite definir

$$\begin{array}{rccl} x: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & \lim\{x_m(n)\} \end{array}$$

Obteniendo que $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, y la demostración de este caso terminará probando que $x \in l^\infty$ y que $\{\|x_m - x\|\} \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ de forma que de forma que:

$$\|x_p - x_q\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall p, q \geqslant m_0$$

Fijado $m \geqslant m_0$, tenemos para todo $k \in \mathbb{N}$ que:

$$|x_m(k) - x(k)| = \lim_{n \to \infty} |x_m(k) - x_n(k)| \leqslant \varepsilon$$

Por lo que $x_m - x \in l^\infty$, de donde:

$$x = x_m - (x_m - x) \in l^\infty$$

por ser l^∞ un espacio vectorial. Más aún, hemos probado que:

$$\|x_m - x\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall m \geqslant m_0$$

lo que nos dice que $\{\|x_m - x\|_\infty\} \to 0$.

Para $1 \leqslant p < \infty$. Trabajamos ahora en el espacio:

$$l^p = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\}, \qquad \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Sea $\{x_m\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de l^p, queremos probar que $\{x_m\}$ es convergente en l^p. Para ello, observemos primero que:

$$|x(k)| \leqslant \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall x \in l^p, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

de donde deducimos que $\{x_m(k)\}$ es de Cauchy, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por ser $\mathbb{R}$ completo tenemos que dicha sucesión es convergente, lo que nos permite definir

$$\begin{array}{rccl} x: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & k & \longmapsto & \lim\{x_m(k)\} \end{array}$$

Obteniendo que $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, y basta probar que $x \in l^p$ y que $\{\|x_m - x\|\} \to 0$. Fijado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$\|x_t - x_s\|_p < \varepsilon \qquad \forall t, s \geqslant m_0$$

fijados $m \geqslant m_0$ y $N \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{N} |x_m(k) - x_n(k)|^p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x_m(k) - x_n(k)|^p = (\|x_m - x_n\|)^p < \varepsilon^p \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde:

$$\sum_{k=1}^{N} |x_m(k) - x(k)|^p = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |x_m(k) - x_n(k)|^p \leqslant \varepsilon^p \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$

por lo que la serie $\sum_{k\geqslant 1} |x_m(k) - x(k)|^p$ es convergente, de donde $x_m - x \in l^p$, por lo que:

$$x = x_m - (x_m - x) \in l^p$$

Más aún, la última desigualdad nos dice que:

$$\|x_m - x\|_p = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_m(k) - x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon \qquad \forall m \geqslant m_0$$

de donde deducimos que $\{\|x_m - x\|\} \to 0$.

□

1.3. Espacio dual

Para introducir la noción de espacio dual, nos será necesario primero destacar unos resultados:

Proposición 1.9. *Si H es un espacio prehilbertiano, entonces:*

1. *Se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz:*

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\| \qquad \forall u, v \in H$$

2. *Se cumple la identidad del paralelogramo:*

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2) \qquad \forall u, v \in H$$

Teorema 1.10 (de la Proyección)**.** *Sea H un espacio de Hilbert, sea $\emptyset \neq K \subset H$ un conjunto convexo y cerrado, entonces $\forall f \in H\ \exists_1 u \in K$ de forma que:*

$$\|f - u\| = d(f, K) = \inf\{d(f, v) : v \in K\}$$

Además, dicho elemento u está caracterizado por:

- *$u \in K$.*
- *$\langle f - u, v - u\rangle \leqslant 0 \qquad \forall v \in K$.*

Por tanto, a dicho único elemento u lo notaremos por $P_K f$.

Demostración. Como $0 \leqslant d(f,v) \quad \forall v \in K$, tenemos entonces que dicho ínfimo existe. Tenemos por tanto que existe $\{v_n\}$ una sucesión de elementos de K de forma que $\{d(f,v_n)\} \to d(f,K)$. Sean $n,m \in \mathbb{N}$ y usando la identidad del paralelogramo con $f-v_n$ y $f-v_m$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{f-v_n+f-v_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{f-v_n-(f-v_m)}{2}\right\|^2 &= \frac{1}{2}\left(\|f-v_n\|^2+\|f-v_m\|^2\right) \\
\left\|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{v_m-v_n}{2}\right\|^2 &= \frac{1}{2}\left(\|f-v_n\|^2+\|f-v_m\|^2\right) \\
\frac{\|v_m-v_n\|^2}{4} &= \frac{1}{2}\left(\|f-v_n\|^2+\|f-v_m\|^2\right) - \left\|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2 \\
\|v_m-v_n\|^2 &= 2\left(\|f-v_n\|^2+\|f-v_m\|^2\right) - 4\left\|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2
\end{aligned}$$

Como K es convexo, tenemos que $\frac{v_n+v_m}{2} \in K$, por lo que:

$$\left\|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right\| \geqslant d(f,K)$$

Por lo que:

$$0 \leqslant \|v_m-v_n\|^2 \leqslant 2(\|f-v_n\|^2+\|f-v_m\|^2) - 4d(f,K)^2$$

Como $\{\|f-v_n\|^2\} \to d(f,K)^2$ y $\{\|f-v_m\|^2\} \to d(f,K)^2$, tenemos por el Lema del Sandwich que $\{\|v_n-v_m\|^2\} \to 0$, por lo que $\{v_n\}$ es de Cauchy. Como H es completo, existe $u \in H$ de forma que $\{v_n\} \to u$, pero por ser K cerrado tendremos que $u \in K$.

Como $\{v_n\} \to u$, tenemos entonces que $\{d(f,v_n)\} \to d(f,u)$, pero $\{d(f,v_n)\}$ convergía también a $d(f,K)$. No queda más salida que $d(f,u) = d(f,K)$.

Una vez probada la existencia de u, veamos que:

$$u \in K \text{ con } \|f-u\| = d(f,K) \Longleftrightarrow u \in K \text{ y } \langle f-u, v-u\rangle \leqslant 0 \quad \forall v \in K$$

$\Longrightarrow$) Supongamos que $u \in K$ y sabemos que $\|f-u\| \leqslant \|f-v\|$ para todo $v \in K$. Tomamos ahora $w \in K$ y consideramos el segmento que une u con w. Entonces $\forall w \in K$ y $\forall t \in [0,1]$, al ser K convexo tendremos que

$$(1-t)u+tw \in K \quad \text{y} \quad \|f-u\|^2 \leqslant \|f-(1-t)u-tw\|^2$$

Aplicando la bilinealidad podemos reescribir esta última expresión como

$$\begin{aligned}
\|f-(1-t)u-tw\|^2 &= \langle f-(1-t)u-tw, f-(1-t)u-tw\rangle = \\
&= \|f-u\|^2 + t^2\|w-u\|^2 - 2t(f-u,w-u)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión que teníamos anteriormente nos queda que:

$$0 \leqslant t^2\|w-u\|^2 - 2t\langle f-u, w-u\rangle \quad \forall t \in (0,1]$$

Al dividir entre t nos queda

$$0 \leqslant t\|w-u\|^2 - 2\langle f-u, w-u\rangle \quad \forall t \in (0,1]$$

y tomando ahora el límite cuando t tiende a 0 por la derecha queda que

$$0 \leqslant -2\langle f-u, w-u\rangle \Rightarrow \langle f-u, w-u\rangle \leqslant 0 \qquad \forall w \in K$$

$\Longleftarrow$)

$$\|f-v\|^2 = \|f-u+u-v\|^2 = \|f-u\|^2 + 2\langle f-u, u-v\rangle + \|u-v\|^2 \qquad \forall v \in K$$

De donde:

$$0 \geqslant 2\langle f-u, v-u\rangle - \|u-v\|^2 = \|f-u\|^2 - \|f-v\|^2$$

Luego:

$$\|f-u\|^2 \leqslant \|f-v\|^2 \qquad \forall v \in K$$

Para probar finalmente la unicidad, supongamos que existen $u, w \in K$ de forma que:

$$\langle f-u, v-u\rangle, \langle f-w, v-w\rangle \leqslant 0 \qquad \forall v \in K$$

Entonces:

$$\langle f-u, w-u\rangle, \langle f-w, u-w\rangle = \langle u-f, w-u\rangle \leqslant 0$$

Por lo que:

$$\langle f-u, w-u\rangle + \langle w-f, w-u\rangle = \langle w-u, w-u\rangle \leqslant 0$$

de donde $\langle w-u, w-u\rangle = 0$, por lo que $\|w-u\|^2 = d(w,u)^2 = 0$, luego $w = u$. □

Proposición 1.11. *Dado $\emptyset \neq K \subset H$ un conjunto convexo y cerrado, tenemos que la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} P_K: & H & \longrightarrow & H \\ & f & \longmapsto & P_K f \end{array}$$

es lipschitziana. De hecho:

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leqslant \|f_1 - f_2\| \qquad \forall f_1, f_2 \in H$$

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in H$, $u_1 = P_K f_1$, $u_2 = P_K f_2$, estos verifican:

$$\langle f_1 - u_1, v - u_1\rangle, \langle f_2 - u_2, v - u_2\rangle \leqslant 0 \qquad \forall v \in K$$

Por lo que:

$$\langle f_1 - u_1, u_2 - u_1\rangle \leqslant 0$$
$$\langle f_2 - u_2, u_1 - u_2\rangle \leqslant 0 \Longrightarrow \langle f_2 - u_2, u_2 - u_1\rangle \geqslant 0$$

De donde $\langle f_1 - u_2 - f_2 + u_2, u_2 - u_1\rangle \leqslant 0$, por lo que:

$$\langle f_1 - f_2 + (u_2 - u_1), (u_2 - u_1)\rangle = \langle f_1 - f_2, u_2 - u_1\rangle + \langle u_2 - u_1, u_2 - u_1\rangle$$

Luego:

$$\|u_2 - u_1\|^2 = \langle u_2 - u_1, u_2 - u_1\rangle \leqslant -\langle f_1 - f_2, u_2 - u_1\rangle \overset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leqslant} \|f_1 - f_2\|\|u_2 - u_1\|$$

Por lo que:

$$\|u_2 - u_1\| \leqslant \|f_1 - f_2\|$$

Si $\|u_2 - u_1\| \neq 0$, cierto también si $\|u_2 - u_1\| = 0$. □

Pensemos ahora en un ejemplo de conjuntos convexos con propiedades interesantes, como lo son los espacios vectoriales:

Corolario 1.11.1 (Proyección Ortogonal)**.** *Sea $M \subset H$ un subespacio vectorial cerrado de H, un espacio de Hilbert, entonces:*

$$\forall f \in H \ \exists_1 u \in M \ \text{tal que} \ \|f - u\| = d(f, M)$$

Además, la caracterización de u puede mejorarse por:

$$u \in M \qquad y \qquad \langle f - u, w \rangle = 0 \quad \forall w \in M$$

Demostración. Bajo las hipótesis de que M es un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert H, basta probar:

$$u \in M \wedge \langle f - u, v - u \rangle \leqslant 0 \quad \forall v \in M \Longleftrightarrow u \in M \wedge \langle f - u, w \rangle = 0 \quad \forall w \in M$$

$\Longleftarrow$) Si $v \in M$, tenemos por ser M un espacio vectorial que $v - u \in M$, de donde $\langle f - u, v - u \rangle = 0$, por lo que en particular es menor o igual que 0.

$\Longrightarrow$) Si tomamos $v \in M$ y $t \in \mathbb{R}^*$, como M es un espacio vectorial tendremos que $v/t \in M$, por lo que:

$$\left\langle f - u, \frac{v}{t} - u \right\rangle \leqslant 0 \qquad \forall v \in M, \forall t \in \mathbb{R}^*$$

- Si $t > 0$, entonces $\langle f - u, v - tu \rangle \leqslant 0 \ \forall v \in M$, de donde tomando límite cuando $t \to 0$, tenemos que $\langle f - u, v \rangle \leqslant 0 \ \forall v \in M$.
- Si $t < 0$, entonces $\langle f - u, v - tu \rangle \geqslant 0 \ \forall v \in M$, de donde tomando límite cuando $t \to 0$, tenemos que $\langle f - u, v \rangle \geqslant 0 \ \forall v \in M$.

En consecuencia, tenemos que $\langle f - u, v \rangle = 0 \ \forall v \in M$.

□

Proposición 1.12. *Sea $M \subset H$ un subespacio vectorial cerrado de H, un espacio de Hilbert, la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} P_M : & H & \longrightarrow & H \\ & f & \longmapsto & P_M f \end{array}$$

es lineal.

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in H$, $u_1 = P_M f_1$, $u_2 = P_M f_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle \lambda f_1 + f_2 - (\lambda u_1 + u_2), w \rangle &= \langle \lambda f_1 - \lambda u_1 + f_2 - u_2, w \rangle \\ &= \lambda \langle f_1 - u_1, w \rangle + \langle f_2 - u_2, w \rangle = 0 \qquad \forall w \in M \end{aligned}$$

Por lo que por el Corolario anterior, tenemos que:

$$P_M(\lambda f_1 + f_2) = \lambda u_1 + u_2 = \lambda P_M(f_1) + P_M(f_2)$$

de donde P_M es lineal. □

Definición 1.8. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, definimos el espacio dual topológico de E por:

$$E^* = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ es lineal y continua}\}$$

Nos será necesaria la siguiente Proposición para comprender mejor las propiedades de las aplicaciones lineales. Más concretamente, la relación existente entre la acotación y la continuidad de una aplicación lineal.

Proposición 1.13. *Sea $T : E \to F$ una aplicación lineal entre dos espacios normados E y F, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\exists M \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\|T(x)\| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E$.

(2) T es lipschitziana.

(3) T es continua.

(4) T es continua en 0.

(5) T es acotada (es decir, si $A \subset E$ es acotado, entonces $T(A)$ es acotado).

(6) $T(\overline{B}(0,1))$ es acotado.

(7) $T(B(0,1))$ es acotado.

Demostración. Veamos la equivalencia entre todas ellas:

$(1) \Longleftrightarrow (2)$ Por doble implicación:

$\Longrightarrow)$ Sean $x, y \in E$, entonces $x - y \in E$, de donde:

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leqslant M\|x - y\|$$

Por lo que T es lipschitziana con constante de Lipschitz menor o igual que M.

$\Longleftarrow)$ Sea $x \in E$, si M es mayor o igual que la constante de Lipschitz de T, entonces:

$$\|T(x)\| = \|T(2x - x)\| = \|T(2x) - T(x)\| \leqslant M\|2x - x\| = M\|x\|$$

$(2) \Longrightarrow (3)$ Es conocida de Cálculo II.

$(3) \Longrightarrow (4)$ Si T es continua, en particular lo es en 0.

$(4) \Longrightarrow (1)$ Supuesto que T es continua en 0, es decir, que:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|T(x)\| < \varepsilon \ \forall x \in B(0, \delta)$$

Tomando $\varepsilon = 1$, la continuidad nos da un δ cumpliendo la afirmación anterior. Sea $x \in E$ arbitrario, tenemos:

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\frac{\delta}{2}\frac{2\|x\|}{\delta}\right)\right\| = \frac{2\|x\|}{\delta}\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\frac{\delta}{2}\right)\right\| < \frac{2}{\delta}\|x\|$$

Ya que $\dfrac{x\delta}{2\|x\|} \in B(0, \delta)$, por lo que tomando $M = \frac{2}{\delta}$ tenemos la implicación.

(5) $\Longrightarrow$ (6) Como $\overline{B}(0,1)$ es acotado, $T(\overline{B}(0,1))$ será acotado por ser T acotada.

(6) $\Longrightarrow$ (7) Como $B(0,1) \subset \overline{B}(0,1)$, entonces $T(B(0,1)) \subset T(\overline{B}(0,1))$.

(7) $\Longrightarrow$ (4) Si $\exists R \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\|T(x)\| \leqslant R$ para todo $x \in B(0,1)$, dado $\varepsilon > 0$, si tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2R}$, si $x \in B(0,\delta)$, entonces:

$$\|T(x)\| = \left\|T\left(\frac{x}{2\|x\|}2\|x\|\right)\right\| = 2\|x\|\left\|T\left(\frac{x}{2\|x\|}\right)\right\| \leqslant 2\|x\|R < 2\delta R = \varepsilon$$

(1) $\Longrightarrow$ (5) Sea $A \subset E$ acotado, entonces $\exists r \in \mathbb{R}^+$ de forma que $A \subset B(0,r)$, por lo que:

$$\|T(x)\| \leqslant M\|x\| \leqslant Mr \qquad \forall x \in A$$

De donde $T(A) \subset B(0, Mr)$, por lo que es un conjunto acotado.

□

Proposición 1.14. *Sea E un espacio normado, observemos que E^* es un espacio vectorial, sobre el que definimos la aplicación $\|\cdot\| : E^* \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| \qquad \forall f \in E^*$$

Se verifica que:

1. *$(E^*, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.*
2. *$(E^*, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.*
3. *Sea $f \in E^*$, entonces:*

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

4. *Sea $f \in E^*$, entonces:*

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \|f\| = \inf\{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E\}$$

Demostración. Veamos cada una de las propiedades:

1. Para la primera, hemos de probar:
   - **No degeneración.** Sea $f \in E^*$ de forma que $\sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \|f\| = 0$, entonces:

   $$0 \leqslant |f(x)| \leqslant 0 \quad \forall x \in \overline{B}(0,1) \Longrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

   de donde:

   $$f(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\|x\|\right) = \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0 \qquad \forall x \in E$$

   Por lo que $f = 0$.

- **Homogeneidad por homotecias.** Sea $f \in E^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|\lambda f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\lambda f(x)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\lambda||f(x)| = |\lambda| \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = |\lambda|\|f\|$$

- **Desigualdad triangular.** Sean $f, g \in E^*$:

$$\begin{aligned}\|f+g\| &= \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)+g(x)| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} (|f(x)|+|g(x)|) \\ &\leqslant \sup_{\|x\|\leqq 1} |f(x)| + \sup_{\|x\|\leqslant 1} |g(x)| = \|f\| + \|g\|\end{aligned}$$

2. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de E^*, sean $\varepsilon, r > 0$, la condición de Cauchy para ε/r nos da $m \in \mathbb{N}$ de forma que si $p, q \geqslant m$, entonces:

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} |f_p(x) - f_q(x)| = \|f_p - f_q\| < \frac{\varepsilon}{r}$$

de donde:

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{r} \qquad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

pero entonces:

$$|f_p(rx) - f_q(rx)| = r|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

lo que equivale a que:

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in \overline{B}(0,r)$$

Por tanto, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy para todo $x \in \overline{B}(0,r)$, pero como r era arbitrario, dicha condición se cumple para todo $r \in \mathbb{R}^+$, tenemos que $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy para todo $x \in E$. Como $\mathbb{R}$ es completo, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es convergente para todo $x \in E$, lo que nos permite definir $f : E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \lim\{f_n(x)\} \qquad \forall x \in E$$

Se verifica que f es lineal, ya que:

$$\begin{aligned}f(\lambda x + y) &= \lim\{f_n(\lambda x + y)\} = \lim\{\lambda f_n(x) + f_n(y)\} \\ &= \lambda \lim\{f_n(x)\} + \lim\{f_n(y)\} = \lambda f(x) + f(y) \\ &\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E\end{aligned}$$

Ahora, como $\{f_n\}$ era de Cauchy, tenemos que fijado $r \in \mathbb{R}^+$ y dado $\varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ de forma que para $p, q \geqslant m$ se tiene:

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in \overline{B}(0,r)$$

Fijado ahora dicho p, tenemos:

$$|f_p(x) - f(x)| = \lim_{q\to\infty} |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por lo que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $B(0,r)$, para todo $r \in \mathbb{R}^+$. En particular, $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en cada conjunto acotado de E. Como $\{f_n\}$ es continua $\forall n \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in E$ tenemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $B(x,1)$, entonces tenemos que f es continua en x, de donde f es continua en E. En consecuencia, $f \in E^*$.

Por último, para ver que $\{f_n\}$ converge a f, dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geqslant m$, entonces:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

de donde:

$$\|f_n - f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por lo que $\{f_n\} \to f$.

3. La desigualdad $\geqslant$ es obvia. Para la otra, sea $x \in B(0,1)$:

$$|f(x)| = \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \|x\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \|x\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

4. Buscamos probar que:

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = \text{ínf}\{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E\}$$

$\geqslant$) Para ver que el supremo es mayor o igual que el ínfimo, veamos que el supremo pertence al conjunto de la derecha:

$$|f(x)| = \|x\| \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \leqslant \|x\| \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$$

Por tanto, $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \in \{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E\}$.

$\leqslant$) Para ver el el ínfimo es mayor o igual que el supremo, veamos que el ínfimo es un mayorante del conjunto de la izquierda, si tomamos:

$$M_0 = \text{ínf}\{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E\}$$

entonces:

$$|f(x)| \leqslant M\|x\| \leqslant M \qquad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

Por lo que M_0 es un mayorante de $\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1\}$, por lo que es mayor o igual que su supremo.

□

1.3.1. Espacio dual de un espacio de Hilbert

Proposición 1.15. *Se verifica que si $v \in H$, entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_v: & H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \langle u, v\rangle \end{array}$$

verifica que $\varphi_v \in H^*$ y en cuyo caso, $\|\varphi_v\| = \|v\|$.

Más aún, podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & H & \longrightarrow & H^* \\ & v & \longmapsto & \varphi_v \end{array}$$

que es una aplicación lineal e inyectiva.

Demostración. Como el producto escalar es bilineal es evidente que φ_v es lineal. Vemos que:

$$|\varphi_v(u)| = |\langle u, v\rangle| \overset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leqslant} \|u\|\|v\| \qquad \forall u \in E$$

Por lo que φ_v es lipschitziana, y por la última Proposición tenemos que $\|\varphi_v\| \leqslant \|v\|$. Si $v = 0$ tenemos la igualdad de forma obvia y si $v \neq 0$, entonces:

$$\|v\| = \frac{\|v\|^2}{\|v\|} = \frac{\langle v, v\rangle}{\|v\|} = \left\langle \frac{v}{\|v\|}, v \right\rangle = \varphi_v\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$$

luego:

$$\|v\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\varphi_v(x)| = \|\varphi_v\|$$

Para ver que Φ es lineal, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u, v \in H$:

$$\Phi(\lambda u + v) = \varphi_{\lambda u+v} \overset{?}{=} \lambda\varphi_u + \varphi_v = \lambda\Phi(u) + \Phi(v)$$

donde la igualdad puede demostrarse para cada $w \in H$:

$$\varphi_{\lambda u+v}(w) = \langle w, \lambda u + v\rangle = \langle w, \lambda u\rangle + \langle w, v\rangle = \lambda\langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle = \lambda\varphi_u(w) + \varphi_v(w)$$

Como $\|\varphi_v\| = \|v\|$, obtenemos de forma inmediata la continuidad de Φ, por ser una isometría:

$$\|\Phi(u)\| = \|\varphi_u\| = \|u\| \qquad \forall u \in H$$

Para ver que Φ es inyectiva, supongamos que $u, v \in H$ con $\Phi(u) = \Phi(v)$, de donde:

$$\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle \qquad \forall w \in H$$

Luego:

$$\langle u, w\rangle - \langle v, w\rangle = \langle u - v, w\rangle = 0 \qquad \forall w \in H$$

En particular, tomando $w = u - v$, tenemos que:

$$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v\rangle = 0$$

Por lo que $u = v$, de donde Φ es inyectiva. □

Teorema 1.16 (de Riesz-Fréchet, Representación del dual de un Hilbert)**.**
Sea H un espacio de Hilbert, $\forall \varphi \in H^* \ \exists_1 v \in H$ de forma que:

$$\varphi(u) = \langle u, v\rangle \qquad \forall u \in H$$

y además:

$$\|\varphi\| = \|v\|$$

Demostración. Si conseguimos probar la primera parte del Teorema, la segunda la tendremos ya probada gracias a la Proposición anterior. Sea por tanto $f \in H^*$, si $f = 0$ tomando $v = 0$ se tiene la tesis. Suponemos por tanto que $f \neq 0$, por lo que $M = f^{-1}(\{0\}) \subsetneq H$ es un subespacio vectorial de H distinto del total. Como f es continua, tenemos además que M es un conjunto cerrado.

Como $M \subsetneq H$, podemos tomar $z_o \in H \setminus M$. Por el Teorema de la Proyección Ortogonal, tomamos $z_1 = P_M z_0 \in M$, que verifica:

$$\langle z_0 - z_1, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in M$$

Como $z_0 \in H \setminus M$ y $z_1 \in M$, tenemos que $z_0 \neq z_1$, lo que nos permite definir:

$$z = \frac{z_0 - z_1}{\|z_0 - z_1\|}$$

Con esta definición, es claro que $\|z\| = 1$, así como que:

$$\langle z, v\rangle = \frac{1}{\|z_0 - z_1\|}\langle z_0 - z_1, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in M$$

Como $z_0 \notin M$ la situación $z \in M$ es imposible, por lo que $z \notin M$, luego $f(z) \neq 0$. Veamos ahora que:

$$x - \frac{f(x)}{f(z)} z \in M \qquad \forall x \in H$$

ya que:

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z)} z\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)} f(z) = 0$$

Por lo que tenemos que:

$$\left\langle z, x - \frac{f(x)}{f(z)} z\right\rangle = 0$$

Pero tenemos:

$$0 = \left\langle z, x - \frac{f(x)}{f(z)} z\right\rangle = \langle z, x\rangle - \frac{f(x)}{f(z)}\langle z, z\rangle = \langle z, x\rangle - \frac{f(x)}{f(z)}\|z\|^2$$

Por lo que podemos despejar $f(x)$, obteniendo:

$$f(x) = f(z)\langle z, x\rangle = \langle x, z f(z)\rangle \qquad \forall x \in H$$

En consecuencia, tomando $v = z f(z)$ tenemos la existencia probada.

Para la unicidad, supongamos que $\exists v, w \in H$ de forma que:

$$\langle x, v\rangle = f(x) = \langle x, w\rangle \qquad \forall x \in H$$

En consecuencia:

$$\langle x, v - w\rangle = 0 \qquad \forall x \in H$$

Luego si tomamos $x = v - w$:

$$\|v - w\|^2 = \langle v - w, v - w\rangle = 0$$

Por lo que $v = w$. $\square$

A partir del Teorema anterior tenemos que $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$, l^2 y $L^2(\Omega)$ son todos isomorfos a sus duales.

Ejercicio 1.3.1. Calcular el dual de l^p, para $p > 1$, $p \neq 2$.

Puede encontrarse en la Sección 1.6.

Notación. Si $x \in E$ y $f \in E^*$, a menudo notaremos:

$$\langle f, x\rangle = f(x)$$

Esta notación se debe a que la evaluación de una aplicación lineal y continua f en un punto x cumplen unas propiedades que nos recuerdan a la del producto escalar:

1. $\langle \lambda f + g, x\rangle = \lambda\langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle$.
2. $\langle f, \lambda x + y\rangle = \lambda\langle f, x\rangle + \langle f, y\rangle$.
3. $\langle f, x\rangle \leqslant \|f\|\|x\|$.

1.4. Teorema de Hahn-Banach

Si tenemos un espacio normado E de dimensión finita, resulta fácil dar una aplicación lineal y continua $f : E \to \mathbb{R}$, pero en dimensión infinita el problema se complica. A continuación veremos el Teorema de Hahn-Banach, que entre sus muchas utilidades una de ellas es probar que si E es un espacio normado de dimensión infinita entonces $E^* \neq \{0\}$. Para resolver este problema, como somos capaces de calcular aplicaciones lineales y continuas en dimensión finita y dentro de espacios de dimensión infinita somos capaces de encontrar espacios de dimensión finita, nos preguntamos:

Problema
Sea E un espacio de Banach, $G \subset E$ un subespacio suyo y $g : G \to \mathbb{R}$ lineal y continua, ¿podemos garantizar entonces que existe $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $f\big|_G = g$?

Como ya vimos en la Proposición 1.13, que g sea continua significa que $\exists k \in \mathbb{R}^+$ de forma que $|g(x)| \leqslant k\|x\|$ $\forall x \in G$. Para resolver el problema, necesitamos encontrar una aplicación $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y $k' \in \mathbb{R}^+$ de forma que:

$$f\big|_G = g \qquad \text{y} \qquad |f(x)| \leqslant k'\|x\| \qquad \forall x \in E$$

Ejercicio 1.4.1. Sea $p : (E, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$p(x) = k\|x\| \qquad \forall x \in E$$

Demostrar que la función p verifica:

- $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E.$
- $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E.$

Demostración. Sean $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$:

$$p(x+y) = k\|x+y\| \leqslant k(\|x\| + \|y\|) = k\|x\| + k\|y\| = p(x) + p(y)$$
$$p(\lambda x) = k\|\lambda x\| = \lambda k\|x\| = \lambda p(x)$$

□

Aunque no lo demostraremos, el Teorema de Hahn-Banach resulta ser equivalente al axioma de elección. Para realizar la demostración del Teorema de Hahn-Banach es necesario usar el Lema de Zorn, que a su vez es también equivalente al axioma de elección, por lo que conviene realizar un breve repaso del mismo.

Lema de Zorn

Definición 1.9. Sea $\emptyset \neq P$ un conjunto con una relación $\leqslant$ de orden, es decir, una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, decimos que:

- Un subconjunto $Q \subset P$ es <u>totalmente ordenado</u> si:

  $$\forall a, b \in Q \Longrightarrow a \leqslant b \ \vee \ b \leqslant a$$

- Si $Q \subset P$ y $x \in P$, decimos que x es una <u>cota superior</u> de Q si y solo si:

  $$a \leqslant x \qquad \forall a \in Q$$

- Si $m \in P$, decimos que m es un <u>elemento maximal</u> de P si y solo si:

  $$\{x \in P : m \leqslant x\} = \{m\}$$

- Diremos que P es <u>inductivo</u> si todo subconjunto $Q \subset P$ que sea totalmente ordenado posee una cota superior.

Lema 1.17 (de Zorn)**.** *Si P es un conjunto no vacío con una relación de orden $\leqslant$ y P es inductivo, entonces P tiene un elemento maximal.*

Teorema 1.18 (de Hahn-Banach, versión analítica)**.** *Sea E un espacio vectorial, sea $p : E \to \mathbb{R}$ una aplicación verificando:*

- $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E.$
- $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in E.$

Sea $G \subset E$ un subespacio vectorial y $g : G \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que

$$g(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in G$$

Entonces, $\exists f : E \to \mathbb{R}$ lineal de forma que:

1. $f(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in E$.
2. $f\big|_G = g$.

Demostración. Definimos el conjunto P de todas aquellas aplicaciones lineales h que tienen por dominios subespacios vectoriales de E que contienen a G de forma que $h\big|_G = g$ y que cumplen la desigualdad $h(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in D(h)$ (donde $D(h)$ denota el dominio de h); es decir:

$$P = \left\{ h : D(h) \to \mathbb{R} : \begin{array}{l} G \subset D(h) \text{ subespacio vectorial de } E \\ h(x) = g(x) \quad \forall x \in G \\ h \text{ lineal y } h(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in D(h) \end{array} \right\}$$

Tendremos entonces en P todas aquellas aplicaciones lineales definidas en espacios vectoriales que son extensiones de g y que cumplen la condición de estar dominadas por p. Buscamos aplicar el Lema de Zorn sobre P, obteniendo un elemento maximal que luego probaremos que ha de tener como dominio E.

Hemos pues de definir una relación de orden en P que nos permita conseguir lo que queremos. Para ello, definiremos la relación $\leqslant$ de la siguiente forma:

$$h_1 \leqslant h_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D(h_1) \subset D(h_2) \\ h_2\big|_{D(h_1)} = h_1 \end{array} \right. \qquad \forall h_1, h_2 \in P$$

es decir, $h_1 \leqslant h_2$ si h_2 es una extensión de h_1. Podemos comprobar que esta efectivamente es una relación de orden en P:

- **Reflexiva.** Si $h \in P$, trivialmente tenemos que $D(h) \subset D(h)$ y $h\big|_{D(h)} = h$, lo que nos dice que $h \leqslant h$.

- **Antisimétrica.** Sean $h_1, h_2 \in P$ de forma que $h_1 \leqslant h_2$ y $h_2 \leqslant h_1$, entonces:

  $$D(h_1) \subset D(h_2) \ \wedge \ D(h_2) \subset D(h_1) \Longrightarrow D(h_1) = D(h_2)$$

  Y de esta condición junto con $h_2 = h_2\big|_{D(h_2)} = h_2\big|_{D(h_1)} = h_1$ concluimos que $h_2 = h_1$.

- **Transitiva.** Si $h_1, h_2, h_3 \in P$ con $h_1 \leqslant h_2$ y $h_2 \leqslant h_3$, tenemos entonces que $D(h_1) \subset D(h_2)$ y que $D(h_2) \subset D(h_3)$. La transitividad de $\subset$ nos dice que $D(h_1) \subset D(h_3)$. Ahora, si tenemos que $h_3\big|_{D(h_2)} = h_2$ y que $h_2\big|_{D(h_1)} = h_1$, obtenemos que:

  $$h_3\big|_{D(h_1)} = h_2\big|_{D(h_1)} = h_1$$

  De donde $h_1 \leqslant h_3$.

Tratemos ahora de probar que P es inductivo. Para ello, sea $Q \subset P$ un subconjunto totalmente ordenado, para buscar una cota superior de Q consideraremos:

$$V_0 = \bigcup_{h \in Q} D(h)$$

Vemos que V_0 es un subespacio vectorial de E, ya que si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in V_0$, tenemos entonces que $\exists h, h' \in Q$ de forma que $u \in D(h), v \in D(h')$. Como Q es totalmente ordenado, tendremos entonces que $h \leqslant h'$ o que $h' \leqslant h$. Supondremos sin pérdida de generalidad que $h \leqslant h'$, lo que nos dice que $D(h) \subset D(h')$, por lo que $u \in D(h')$ y como $D(h')$ es un subespacio vectorial de E, tenemos entonces que:

$$\alpha u + v \in D(h') \subset V_0$$

Una vez salvada esta cuestión, vemos claro que V_0 contiene a G, puesto que $G \subset D(h)$ para cada $h \in Q$. Definimos ahora $h_0 : V_0 \to \mathbb{R}$ por:

$$h_0(x) = h(x) \qquad \text{si } x \in D(h)$$

que está bien definida, ya que si $x \in D(h_1) \cap D(h_2)$, sucederá bien $h_1 \leqslant h_2$ bien $h_2 \leqslant h_1$, luego suponiendo que $h_1 \leqslant h_2$, tendremos que $h_2\big|_{D(h_1)} = h_1$, luego se cumplirá $h_1(x) = h_2(x)$. Además h_0 es lineal, ya que si $x, y \in V_0$, por ser V_0 espacio vectorial tendremos que $x + y \in V_0$, de donde $\exists h, h', h'' \in Q$ de forma que $x \in D(h)$, $y \in D(h')$, $x + y \in D(h'')$, con lo que:

$$h_0(x + y) = h''(x + y) = h''(x) + h''(y) = h(x) + h'(y) = h_0(x) + h_0(y)$$

Y finalmente es claro que $h_0(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in V_0$, puesto que si $x \in V_0$, entonces $\exists h \in Q$ de forma que $x \in D(h)$, con lo que:

$$h_0(x) = h(x) \leqslant p(x)$$

En definitiva, tenemos que h_0 es una aplicación lineal extensión de g que cumple $h(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in V_0$ y con V_0 un subespacio vectorial de E que contiene a G, con lo que $h_0 \in P$ y además tenemos por la forma de definir h_0 que $h \leqslant h_0$ $\forall h \in Q$, por lo que h_0 es una cota superior de Q, de donde tenemos que P es inductivo. Por el Lema de Zorn, existe $f \in P$ elemento maximal de P.

Para concluir la demostración del Teorema, nos falta probar que si f es un elemento maximal de P entonces $D(f) = E$. Para ello, supongamos por reducción al absurdo que fuese $D(f) \subsetneq E$, luego existe $x_0 \in E \setminus D(f)$. Si consideramos[3]:

$$D(f) + \mathbb{R}x_0$$

Tenemos que si $v \in D(f) + \mathbb{R}x_0$, entonces v se escribe como $v = x + tx_0$, con $x \in D(f)$ y $t \in \mathbb{R}$, lo que nos permite definir $\hat{f} : D(f) + \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\hat{f}(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$$

Siendo α un número real que por ahora no concretaremos (puesto que necesitamos buscar luego una condición sobre α para garantizar que $\hat{f} \in P$). Veamos que $\hat{f} \in P$:

[3]Aquí hemos usado $\mathbb{R}x_0 := \{rx_0 : r \in \mathbb{R}\}$, que es un subespacio vectorial de E de dimensión 1.

- Es automático que $\hat{f}\big|_{D(f)} = f$, por lo que $\hat{f}(x) = g(x) \quad \forall x \in G$.
- $D(f) + \mathbb{R}x_0$ es un subespacio vectorial de E que contiene a G.
- Es fácil ver que $\hat{f}$ es lineal, ya que si $x, y \in D(f)$ y $t, t' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x + tx_0 + y + t'x_0) &= \hat{f}((x + y) + (t + t')x_0) = f(x + y) + (t + t')\alpha \\ &= f(x) + f(y) + t\alpha + t'\alpha = \hat{f}(x + tx_0) + \hat{f}(y + t'x_0)\end{aligned}$$

- Tenemos que ver finalmente que

$$\hat{f}(x + tx_0) \leqslant p(x + tx_0) \qquad \forall x \in D(f), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

que sucede si y solo si:

$$t\hat{f}(z + x_0) = \hat{f}(tz + tx_0) \leqslant p(tz + tx_0) = p(t(z + x_0)) \qquad \forall z \in D(f), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

  - En el caso $t = 0$ la desigualdad es obvia.
  - Si $t > 0$, tenemos que:

$$t(f(z) + \alpha) = t\hat{f}(z + x_0) \leqslant p(t(z + x_0)) = tp(z + x_0) \qquad \forall z \in D(f)$$

que es equivalente a

$$\alpha \leqslant -f(z) + p(z + x_0) \qquad \forall z \in D(f)$$

  - Si $t < 0$, tenemos:

$$-t(-f(z)-\alpha) = -t\hat{f}(-z-x_0) = t\hat{f}(z+x_0) \leqslant p(t(z+x_0)) = -tp(-z-x_0) \\ \forall z \in D(f)$$

que es equivalente a

$$-f(z) - p(-z - x_0) \leqslant \alpha \qquad \forall z \in D(f)$$

En definitiva, ver (1.1) es equivalente a ver que:

$$\sup\{f(-z) - p(-z - x_0) : z \in D(f)\} \leqslant \alpha \leqslant \inf\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

que a su vez equivale a:

$$\sup\{f(w) - p(w - x_0) : w \in D(f)\} \leqslant \alpha \leqslant \inf\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

Por tanto, si probamos que el supremo de la izquierda es menor o igual que el ínfimo de la derecha, elegiendo α cualquier valor real comprendido entre ambos (o incluso igual al supremo o al ínfimo) habremos construido una aplicación $\hat{f}$ que cumple con los tres puntos anteriores y con la condición (1.1), que es la condición que veníamos buscando.

Para demostrar la desigualdad entre supremo e ínfimo, basta observar que para $z, w \in D(f)$ se verifica:

$$f(z) + f(w) = f(z + w) \leqslant p(z + w) = p(z + x_0 - x_0 + w) \leqslant p(z + x_0) + p(w - x_0)$$

y despejando llegamos a que:

$$f(w) - p(w - x_0) \leqslant -f(z) + p(z + x_0) \qquad \forall z, w \in D(f)$$

Lo que demuestra que:

$$\sup\{f(-z) - p(-z - x_0) : z \in D(f)\} \leqslant \inf\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

Como hemos comentado anteriormente, tomando por ejemplo:

$$\alpha = \sup\{f(-z) - p(-z - x_0) : z \in D(f)\} \in \mathbb{R}$$

en la definición de $\hat{f}$ nos garantiza la condición (1.1), que junto con las otras condiciones nos dice que $\hat{f} \in P$. Además, por la definición de $\hat{f}$ es claro que $f \leqslant \hat{f}$, donde f era un elemento maximal de P. Hemos llegado a una <u>contradicción</u>, que venía de suponer que $D(f) \subsetneq E$, por lo que $D(f)$ ha de ser igual a E, luego hemos encontrado la aplicación que el Teorema enunciaba, lo que concluye la demostración.

□

Volviendo al caso que nos interesaba, tenemos ya respuesta al Teorema anteriormente planteado:

Corolario 1.18.1. *Sea E un espacio vectorial, $G \subset E$ un subespacio vectorial suyo y $g : G \to \mathbb{R}$ lineal y continua, existe entonces $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua de forma que $f\big|_G = g$. Además:*

$$\|f\| = \|g\|$$

Demostración. Como g es una aplicación lineal y continua, si recordamos que:

$$\|g\| = \inf\{M > 0 : |g(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in G\}$$

Si definimos $p : E \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = \|g\|\|x\|$ para $x \in E$, vimos en el Ejercicio 1.4.1 que p verificaba:

- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E$
- $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E$

y la condición que hemos expresado arriba nos dice que $g(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in G$. Aplicando el Teorema de Hahn-Banach, tenemos que existe una aplicación $f : E \to \mathbb{R}$ lineal que verifica:

- $f\big|_G = g$
- $f(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in E$

falta ver que f es continua para acabar la demostración. Para ello, observemos que la condición $f(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in E$ implica:

$$-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x) = \|g\|\| - x\| = \|g\|\|x\| = p(x) \qquad \forall x \in E$$

Por lo que tenemos que $|f(x)| \leqslant \|g\|\|x\| \quad \forall x \in E$, y vimos en la Proposición 1.13 que esta condición para una aplicación lineal era equivalente a que la aplicación sea continua. Además, esta desigualdad implica que $\|f\| \leqslant \|g\|$. Si observamos ahora que:

$$|g(x)| = |f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \qquad \forall x \in G$$

Deducimos entonces que $\|g\| \leqslant \|f\|$, por lo que $\|f\| = \|g\|$. □

Corolario 1.18.2. *Sea E un espacio vectorial, $\forall x_0 \in E$ $\exists f_0 \in E^*$ de forma que:*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad y \quad f_0(x_0) = \|x_0\|^2$$

Demostración. Si $x_0 = 0$, tomando $f_0 = 0$ se tiene. Suponemos por tanto que $x_0 \neq 0$. Sea $G = \mathbb{R}x_0$, defino $g : G \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(tx_0) = t\|x_0\|^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

es fácil ver que g es lineal. Además es continua, ya que:

$$|g(tx_0)| = |t|\|x_0\|^2 = \|x_0\|\|tx_0\| \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

en particular, acabamos de ver que $\|g\| \leqslant \|x_0\|$, pero como:

$$|g(x_0)| = \|x_0\|^2 = \|x_0\|\|x_0\|$$

deducimos que $\|g\| = \|x_0\|$. Aplicando el Corolario anterior, existe $f_0 \in E^*$ de forma que:

$$f_0\big|_G = g \qquad \|f_0\| = \|g\| = \|x_0\|$$

de donde:

$$f_0(x_0) = f_0\big|_G(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|^2$$

□

Corolario 1.18.3. *Para todo $x_0 \in E$ se tiene que:*

$$\|x_0\| = \sup\{|f(x_0)| : f \in E^*, \|f\| \leqslant 1\} = \text{máx}\{|f(x_0)| : f \in E^*, \|f\| \leqslant 1\}$$

Demostración. Si $x_0 = 0$, cualquier aplicación lineal cumple $f(0) = 0$, luego es obvio el resultado. Supuesto que $x_0 \in E \setminus \{0\}$, dada $f \in E^*$ con $\|f\| \leqslant 1$, tenemos entonces que:

$$|f(x_0)| \leqslant \|f\|\|x_0\| \leqslant \|x_0\| \Longrightarrow \|x_0\| \geqslant \sup\{|f(x_0)| : f \in E^*, \|f\| \leqslant 1\}$$

Para la otra desigualdad, por el Corolario anterior para x_0 sabemos que $\exists f_0 \in E^*$ de forma que:

$$\|f_0\| = \|x_0\|, \qquad f_0(x_0) = \|x_0\|^2$$

Si tomamos $f = {}^{f_0}/_{\|x_0\|}$, tenemos entonces que:

$$\|f\| = \left\| \frac{f_0}{\|x_0\|} \right\| = \frac{\|f_0\|}{\|x_0\|} = 1$$

Y además:

$$f(x_0) = \frac{f(x_0)}{\|x_0\|} = \frac{\|x_0\|^2}{\|x_0\|} = \|x_0\|$$

Por lo que el supremo se alcanza, luego es un máximo. □

1.4.1. Versiones geométricas del Teorema

Aunque no lo demostraremos, las sucesivas versiones geométricas del teorema de Hahn-Banach son equivalentes a la ya vista. Para realizar la formulación del Teorema será necesario tener claros ciertos conceptos:

Definición 1.10 (Hiperplano afín)**.** Sea E un espacio vectorial, un hiperplano afín de E es un subconjunto $H \subset E$ de la forma:

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$$

donde $f : E \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal no nula y $\alpha \in \mathbb{R}$. En dicho caso, escribiremos $H = [f = \alpha]$.

Observación. Cuando trabajábamos en asignaturas anteriores en espacios vectoriales de dimensión finita (digamos n), para nosotros un hiperplano era un subespacio vectorial de dimensión $n - 1$. Ahora, si nos encontramos en un espacio vectorial E genérico (no necesariamente de dimensión finita), el primer Teorema de Isomorfía de aplicaciones lineales aplicado a f nos da el isomorfismo lineal

$$E/\ker f \cong \mathrm{Im} f$$

Como f no es idénticamente nula y $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}$, debemos tener obligatoriamente $\dim\, \mathrm{Im} f = 1$. Observemos que en el caso $H = [f = 0] = \ker f$, tenemos que $\dim(E/H) = 1$, de donde si E es de dimensión finita, tenemos $\dim H = \dim E - 1$. Si consideramos ahora $H = [f = \alpha]$ con $\alpha \neq 0$ y fijado $x \in f^{-1}(\alpha)$, tenemos que:

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\} = \{x + v : v \in \ker f\}$$

$\supseteq$) Si $v \in \ker f$, tenemos que $f(x + v) = f(x) + f(v) = f(x) = \alpha$.

$\subseteq$) Si $y \in H$, tenemos entonces que $f(y) = \alpha = f(x)$, por lo que $y - x \in \ker f$. Podemos escribir:

$$y = x + y - x \in x + \ker f$$

Por lo que podemos ver H como un trasladado de $\ker f$, como un subespacio afín, con espacio de direcciones $\ker f$.

Proposición 1.19. *El hiperplano $H = [f = \alpha]$ es cerrado si y solo si f es continua.*

Demostración. Por doble implicación:

$\Longleftarrow$) Si f es continua, tenemos que $H = f^{-1}(\{\alpha\})$, por lo que H será un conjunto cerrado, como imagen inversa de un conjunto cerrado por una aplicación continua.

$\Longrightarrow$) Supuesto que H es cerrado, tenemos entonces que $E \setminus H$ es abierto y no vacío (ya que f no se anula totalmente). Sea $x_0 \in E \setminus H$ tenemos que $f(x_0) \neq \alpha$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f(x_0) < \alpha$.

Fijado $r > 0$ de forma que $B(x_0, r) \subset E \setminus H$, se cumple que $f(x) < \alpha$ $\forall x \in B(x_0, r)$, ya que si $f(x_1) > \alpha$ para cierto $x_1 \in B(x_0, r)$, como el conjunto $B(x_0, r)$ es convexo, tenemos que:

$$\{x_t = (1 - t)x_0 + tx_1 : t \in [0, 1]\} \subset B(x_0, r) \subset E \setminus H$$

por lo que $f(x_t) \neq \alpha \quad \forall t \in [0,1]$, pero si tomamos:

$$t = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \in [0,1]$$

tendremos que $f(x_t) = \alpha$, lo que lleva a una contradicción. En definitiva, tenemos que:

$$f(x_0 + rz) < \alpha \qquad \forall z \in B(0,1)$$

de donde f es continua, por ser acotada.

□

La condición que nos va a interesar es buscar bajo qué condiciones cuando nos dan dos subconjuntos de un espacio normado vamos a poder separarlos mediante un hiperplano afín. Para ello, es necesario formalizar la idea de "separar dos subconjuntos de un espacio".

Definición 1.11. Sea E un espacio vectorial, $A, B \subset E$, diremos que el hiperplano $H = [f = \alpha]$ separa A y B si:

$$f(x) \leqslant \alpha \leqslant f(y) \qquad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

Además, diremos que la separación es estricta (o que H separa estrictamente A y B) si $\exists \varepsilon > 0$ de forma que:

$$f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leqslant f(y) \qquad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

Teorema 1.20 (Hahn Banach, primera versión geométrica)**.** *Sea E un espacio normado, $\emptyset \neq A, B \subset E$ con $A \cap B = \emptyset$, ambos convexos y A abierto, entonces existe un hiperplano cerrado*[4] *$H = [f = \alpha]$ que separa A y B.*

Demostración. El Teorema se demuestra en dos pasos:

Paso 1. Supongamos en una versión más débil que B se reduce a un punto, es decir, existe $x_0 \in E$ de forma que $B = \{x_0\}$ y que $A \subset E$ es un conjunto abierto y convexo con $x_0 \notin A$.

Elegimos $z_0 \in A$ y definimos $C = A - z_0$, que:

- Contiene al 0, ya que como $z_0 \in A$, entonces $0 = z_0 - z_0 \in C$.
- Es abierto, ya que si consideramos la traslación según el vector z_0:

$$\begin{array}{rccc} t_{z_0}: & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x + z_0 \end{array}$$

tenemos que t_{z_0} es una aplicación continua, con inversa $t_{z_0}^{-1} = t_{-z_0}$. Como $C = t_{-z_0}(A) = t_{z_0}^{-1}(A)$ y tenemos que A era abierto y t_{z_0} una aplicación continua, concluimos que C es abierto.

[4]Luego habrá una aplicación lineal y contina $f : E \to \mathbb{R}$, por lo que $E^* \neq \{0\}$.

- Es convexo, ya que si $x, y \in C = A - z_0$ tenemos entonces que existen $u, v \in A$ de forma que:

$$x = u - z_0, \qquad y = v - z_0$$

Si tomamos $t \in [0, 1]$, entonces:

$$tx + (1-t)y = t(u - z_0) + (1-t)(v - z_0) = \underbrace{tu + (1-t)v}_{\in A} - z_0 \in C$$

El punto $y_0 = x_0 - z_0 \notin C$, de donde $y_0 \neq 0$. Por lo que $\mathbb{R}y_0$ es un subespacio vectorial de E de dimensión 1. Definimos $G = \mathbb{R}y_0$ y tomamos

$$\begin{array}{rccc} g: & G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ty_0 & \longmapsto & t \end{array}$$

que es una aplicación lineal (compruébese) y verificando $g(y_0) = 1$. La función g nos permitirá "separar el corte de C con G". En este punto conviene estudiar el funcional de Minkowski del conjunto C, que se define en la Definición 1.12 y cuyas propiedades se aclaran en la Proposición 1.21. Sea p el funcional de Minkowski de C, veamos que p domina a g:

- Si $t \geqslant 0$, como $y_0 \notin C$ entonces[5] $p(y_0) \geqslant 1$, de donde:

$$g(ty_0) = t \leqslant tp(y_0) \overset{(1)}{=} p(ty_0)$$

- Si $t < 0$, tenemos que:

$$g(ty_0) = t < 0 \leqslant p(ty_0)$$

En cualquier caso, $g(ty_0) \leqslant p(ty_0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Nos encontramos en las hipótesis del Teorema de Hahn-Banach, por lo que podemos encontrar $f : E \to \mathbb{R}$ lineal de forma que:

$$f\big|_G = g \qquad \text{y} \qquad f(y) \leqslant p(y) \quad \forall y \in E$$

La propiedad 2 del funcional nos dice que $\exists M > 0$ de forma que:

$$f(y) \leqslant p(y) \leqslant M\|y\| \qquad \forall y \in E$$

Si aplicamos esta propiedad para $-y$:

$$-f(y) = f(-y) \leqslant M\| - y\| = M\|y\|$$

De donde:

$$|f(y)| \leqslant M\|y\| \qquad \forall y \in E$$

Como f es lineal, la Proposición 1.13 nos dice que f es continua.

[5]Usando la propiedad 3 del funcional.

Si ahora usamos la propiedad 3 del funcional de Minkoski, observamos que:

$$f(x) \leqslant p(x) < 1 = f(y_0) \qquad \forall x \in C$$

por lo que el hiperplano cerrado $H' = [f = 1]$ separa C y $B' = \{y_0\}$.

Si volvemos al problema de separar A y $B = \{x_0\}$, observamos que:

$$f(x) = f(y + z_0) = f(y) + f(z_0) \leqslant 1 + f(z_0) = f(y_0 + z_0) = f(x_0) \qquad \forall x \in A$$

Por lo que el hiperplano cerrado $H = [f = f(x_0)]$ separa A y $B = \{x_0\}$, como queríamos probar en este primer paso.

Paso 2. Volviendo al caso que nos plantea el Teorema siendo B un conjunto convexo y disjunto de A, tomamos:

$$A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$$

Observemos que:

- $0 \notin A - B$, ya que $A \cap B = \emptyset$.
- $A - B$ es abierto, ya que podemos escribir:

  $$A - B = \bigcup_{b \in B} (A - b)$$

  y en la demostración del paso anterior ya probamos que la traslación de un conjunto abierto sigue siendo abierto.
- $A - B$ es convexo, ya que si $\alpha, \beta \in A - B$, existen $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ de forma que:

  $$\alpha = a - b, \qquad \beta = a' - b'$$

  Por lo que:

  $$t\alpha + (1-t)\beta = t(a-b) + (1-t)(a'-b') = \underbrace{ta + (1-t)b}_{\in A} - [\underbrace{tb + (1-t)b'}_{\in B}] \in C$$

  donde hemos usado que tanto A como B son convexos.

Estamos en las condiciones del paso anterior, por lo que existen $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua y $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que el hiperplano cerrado $H = [f = \alpha]$ separa $A - B$ del conjunto $\{0\}$, es decir:

$$f(a) - f(b) = f(a - b) \leqslant \alpha \leqslant f(0) = 0 \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

de donde:

$$f(a) \leqslant f(b) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Si tomamos cualquier $\beta \in \mathbb{R}$ que verifique:

$$\sup\{f(a) : a \in A\} \leqslant \beta \leqslant \inf\{f(b) : b \in B\}$$

Tenemos que el hiperplano cerrado $H' = [f = \beta]$ separa los conjuntos A y B.

$\square$

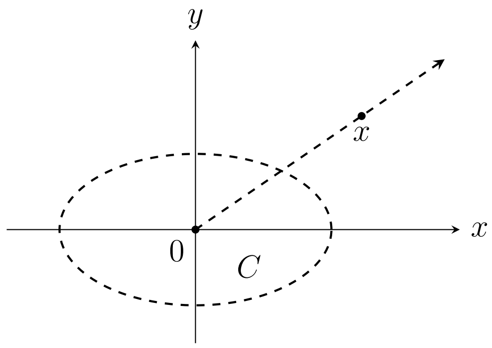
Funcional de Minkowski de un conjunto

En este subapartado definiremos el funcional de Minkowski de un conjunto, una cierta aplicación con propiedades interesantes que nos permite realizar la demostración de la primera versión geométrica del Teorema de Hahn Banach y que además tiene cierto interés fuera de esta demostración, como luego se pondrá de manifiesto en los ejercicios a realizar.

Definición 1.12 (Funcional de Minkowski)**.** Sea E un espacio normado y $C \subset E$ un conjunto convexo, abierto y con $0 \in C$, definimos el funcional de Minkowski de C como la aplicación $p : E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$p(x) = \text{ínf}\left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} \qquad \forall x \in E$$

Observación. Bajo las hipótesis de la definición del funcional de Minkowski, observamos que lo que estamos haciendo es, fijado un punto $x \in E \setminus \{0\}$, tomar la recta de origen 0 que pasa por x, y si multiplicamos x por un escalar positivo, nos movemos por dicha recta. En particular, si multiplicamos x por el inverso de un escalar positivo, si aumentamos dicho escalar, nos estaremos acercando a 0, y si decrementamos dicho escalar, nos alejaremos de 0. Notemos que lo que estamos haciendo por la definición del funcional de Minkowski es tomar aquel valor más "pequeño" para el cual si multiplicamos x por el inverso de un escalar que se queda por encima suya no nos saldremos del conjunto C.



Observemos que $p(0) = 0$. Además, el funcional de Minkowski tiene ciertas propiedades resaltables.

Proposición 1.21. *Sea E un espacio normado y $C \subset E$ un conjunto convexo, abierto y con $0 \in C$, el funcional de Minkowski de C verifica:*

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$
2. $\exists M > 0$ *tal que* $0 \leqslant p(x) \leqslant M\|x\| \qquad \forall x \in E$
3. $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$
4. $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E$

Demostración. Demostramos cada una de las propiedades:

1. Para la primera, basta usar que $\lambda > 0$ y observar:

$$p(\lambda x) = \text{ínf}\left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha/\lambda} = \frac{\lambda x}{\alpha} \in C\right\} = \text{ínf}\left\{\lambda\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C\right\}$$
$$= \lambda\,\text{ínf}\left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} = \lambda p(x) \qquad \forall x \in E$$

2. Dado $x \in E$, como $0 \in C$ es abierto $\exists r > 0$ de forma que $B(0, r) \subset C$. Si tomamos:
$$\alpha > \frac{\|x\|}{r} \Longrightarrow \left\|\frac{x}{\alpha}\right\| < r \Longrightarrow \frac{x}{\alpha} \in B(0, r) \subset C$$
Por tanto:
$$\left]\frac{\|x\|}{r}, +\infty\right[\subset \left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C\right\}$$
de donde el ínfimo de la derecha será menor o igual que el ínfimo de la izquierda:
$$p(x) \leqslant \frac{\|x\|}{r}$$
Tomamos $M = \frac{1}{r}$.

3. Queremos ver que $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$:

   $\supset$) Sea $x \in E$ con $p(x) < 1$, el ínfimo nos garantiza la existencia de $\alpha_0 \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\alpha_0 < 1$ y $\frac{x}{\alpha_0} \in C$. Como C es convexo y $0 \in C$, tenemos entonces que:
   $$x = \alpha_0 \frac{x}{\alpha_0} + (1 - \alpha_0) \cdot 0 \in C$$

   $\subset$) Sea $x \in C$, por ser C abierto $\exists r > 0$ de forma que $B(x, r) \subset C$. Ahora, si tomamos $\varepsilon > 0$ de forma que:
   $$\frac{\|x\|}{r} < \frac{1}{\varepsilon}$$
   tendremos entonces que:
   $$\|(1 + \varepsilon)x - x\| = \|\varepsilon x\| = \varepsilon\|x\| < r \Longrightarrow (1 + \varepsilon)x \in B(x, r)$$
   En dicho caso, tendremos que:
   $$p(x) \leqslant \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1$$

4. Dados $x, y \in E$, sabemos que el conjunto:
$$\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\}$$
es un intervalo no acotado superiormente y acotado inferiormente por $p(x)$, pero no sabemos si el intervalo contiene a $p(x)$ (en cuyo caso se trataría de un mínimo) o si no. Sin embargo, lo que sí sabemos es que:
$$\frac{x}{p(x) + \varepsilon}, \frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in C \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Si usamos el apartado 3, tenemos que:

$$p\left(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}\right) < 1$$

Como C es convexo, si tomamos:

$$t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \leqslant 1$$

tenemos entonces que:

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} = t\frac{x}{p(x)+\varepsilon} + (1-t)\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C \qquad \forall x,y \in E$$

Usando de nuevo la propiedad 3:

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)+2\varepsilon \qquad \forall x,y \in E, \quad \forall \varepsilon > 0$$

De donde deducimos la propiedad buscada. □

Observación. Notemos que si $C = B(0,1)$, tenemos entonces que:

$$p(x) = \text{ínf}\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} = \|x\| \qquad \forall x \in E$$

Ejercicio 1.4.2. Sea E un espacio vectorial y C un conjunto abierto, convexo y que contiene al 0, parece ser que p tiene propiedades deseables para ser una norma en E de forma que:

$$B_p(0,1) = C$$

es decir, el funcional de Minkoski de alguna forma resuelve el problema de dado un conjunto que quiero que sea la bola unidad, ¿qué norma considero?.

Se pide razonar las propiedades que ha de cumplir un conjunto $C \subset E$ abierto, convexo y que contiene al 0 para garantizar que el funcional de Minkowski de C sea una norma.

Teorema 1.22 (Hahn Banach, segunda versión geométrica)**.** *Sea E un espacio normado, $\emptyset \neq A, B \subset E$ con $A \cap B = \emptyset$ ambos convexos, A cerrado y B compacto, entonces existe un hiperplano cerrado que separa estrictamente A y B. Es decir, existen $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ de forma que:*

$$f(a) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon \leqslant f(b) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Demostración. Sea $C = A - B$, tenemos que:

- $0 \notin C$, ya que $A \cap B = \emptyset$.
- C es convexo, ya que A y B son convexos (se hizo en la prueba del Teorema anterior).

- C es cerrado, ya que A es cerrado y B es compacto: sea $\{x_n\} \to x \in E$ con $x_n \in C \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces existen $\{a_n\}$ sucesión de puntos de A y $\{b_n\}$ sucesión de puntos de B con:

  $$x_n = a_n - b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

  Como B es compacto, existe una parcial $\{b_{\sigma(n)}\}$ convergente a $b \in B$. Si vemos que:

  $$x_{\sigma(n)} = a_{\sigma(n)} - b_{\sigma(n)} \Longrightarrow a_{\sigma(n)} = x_{\sigma(n)} + b_{\sigma(n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

  Tenemos entonces que $\{a_{\sigma(n)}\} \to x+b$ y como A es cerrado, ha de ser $x+b \in A$. En definitiva:

  $$x = x + b - b$$

  Con $x + b \in A$ y $b \in B$, por lo que $x \in C$, lo que demuestra que C es cerrado.

Como C es cerrado y $0 \notin C$, tenemos entonces que $E \setminus C$ es abierto y $0 \in E \setminus C$, de donde $\exists r > 0$ con que $B(0, r) \cap C = \emptyset$. Si usamos la primera versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach para los conjuntos $B(0, r)$ y C, obtenemos un hiperplano cerrado $H = [f = \alpha]$ de forma que:

$$f(x) \leqslant \alpha \leqslant f(y) \qquad \forall x \in C, \quad \forall y \in B(0, r)$$

por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} f(a - b) &\leqslant \inf\{f(z) : z \in B(0, r)\} = r \inf\{f(z) : z \in B(0, 1)\} \\ &= -r \sup\{-f(z) : z \in B(0, 1)\} = -r \sup\{f(z) : z \in B(0, 1)\} = -r\|f\| \\ &\qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B \end{aligned}$$

Si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2}r\|f\|$, tenemos entonces que:

$$f(a) + \varepsilon \leqslant f(b) - \varepsilon \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Tomando $\beta = \min\{f(b) : b \in B\} - \varepsilon$ (observemos que B es compacto), tenemos entonces que:

$$f(a) \leqslant \beta - \varepsilon < \beta + \varepsilon \leqslant f(b) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Es decir, el hiperplano cerrado $H = [f = \beta]$ separa estrictamente A y B. □

Parece ser a priori un Teorema más potente que la primera versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach, pero en dimensión infinita apenas hay conjuntos compactos.

Corolario 1.22.1. *Sea E un espacio vectorial, $F \subset E$ un subespacio vectorial de forma que $\overline{F} \neq E$, entonces existe $f \in E^*$, $f \neq 0$ de forma que:*

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in F$$

Demostración. Como $\overline{F} \neq E$, tomamos $x_0 \in E \backslash \overline{F}$ y tenemos que $\{x_0\}$ es compacto, así como que $\{x_0\} \cap \overline{F} = \emptyset$, con $\overline{F}$ cerrado. Además, como F es un subespacio vectorial, tenemos que $\overline{F}$ es un subespacio vectorial, luego convexo. Si aplicamos la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach, obtenemos $H = [f = \alpha]$ hiperplano cerrado que separa estrictamente $\overline{F}$ y $\{x_0\}$. Es decir, $\exists \varepsilon > 0$ de forma que:

$$f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leqslant f(x_0) \qquad \forall x \in \overline{F}$$

Tenemos que $f \in E^*$ así como que $f \neq 0$ (ya que tenemos una separación estricta de $f(x_0)$). Finalmente:

$$f(x) < \alpha < f(x_0) \qquad \forall x \in \overline{F}$$

Fijaremos $\lambda \in \mathbb{R}^*$, tenemos que:

$$\lambda f(x) = f(\lambda x) < \alpha \qquad \forall x \in \overline{F}$$

- Si $\lambda > 0$, tenemos entonces que:

  $$f(x) < \frac{\alpha}{\lambda} \qquad \forall \lambda > 0$$

  luego $f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in F$.

- Si $\lambda < 0$, tenemos que:

  $$f(x) > \frac{\alpha}{\lambda} \qquad \forall \lambda < 0$$

  de la misma forma, $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in F$.

□

Observación. Notemos que el enunciado de este teorema es equivalente a:

Sea E un espacio vectorial, $G \subset E$ un subespacio vectorial cerrado de E con $G \neq E$, entonces existe $f \in E^*$, $f \neq 0$ de forma que:

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in G$$

Aunque esta forma de enunciarlo parezca más sencilla, preferimos enunciarlo de la primera forma, ya que lo que nos va a interesar del enunciado es su contrarrecíproco:

Sea E un espacio vectorial y $F \subset E$ un subespacio vectorial, si $\forall f \in E^*$, $f \neq 0$, $\exists x \in F$ con $f(x) \neq 0$, entonces F es denso en E.

Enunciado de otra forma más sencilla:

Sea $f \in E^*$, si la condición $f\big|_F = 0$ implica $f = 0$, entonces F es denso en E.

Acabamos de encontrar una condición suficiente que nos permite probar que ciertos subespacios vectoriales de un espacio vectorial son densos, mediante una idea muy ingeniosa.

1.5. Espacio bidual

Sea E un espacio normado, habíamos ya definido el espacio E^*, que probamos que era también un espacio normado, con la norma:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle f, x\rangle|$$

esto nos permite considerar $(E^*)^*$, al que llamaremos espacio bidual de E, y notaremos por E^{**}. Será costumbre denotar a sus elementos por letras griegas, y la norma en este espacio vendrá dada por:

$$\|\chi\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |\langle \chi, f\rangle|$$

Proposición 1.23. *Sea E un espacio normado, E^{**} contiene una copia isométrica de E.*

Demostración. Es decir, queremos probar que existe un subconjunto de E^{**} que es isométrico con E, o en otras palabras, que existe una aplicación $J : E \to E^{**}$ que sea lineal, inyectiva y que preserve la norma. Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} J: & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & \chi_x \end{array}$$

donde χ_x es la aplicación dada por:

$$\begin{array}{rccc} \chi_x: & E^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \langle f, x\rangle \end{array}$$

Comprobemos primero que J está bien definida, es decir, que $\chi_x \in E^{**}$. Para ello:

- χ_x es lineal, puesto que:

$$\chi_x(\lambda f+g) = \langle \lambda f+g, x\rangle = \lambda\langle f, x\rangle+\langle g, x\rangle = \lambda\chi_x(f)+\chi_x(g) \qquad \forall f, g \in E^*, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

- χ_x es continua, ya que:

$$\|\chi_x\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |\chi_x(f)| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |\langle f, x\rangle| \overset{(*)}{=} \|x\|$$

  donde en $(*)$ hemos usado el Corolario 1.18.3 del Teorema de Hahn-Banach. Además, hemos probado que $\|\chi_x\| = \|x\|$, por lo que J preserva la norma.

Nos falta comprobar que J es lineal e inyectiva:

- Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$:

$$J(\lambda x + y) = \chi_{(\lambda x+y)} \overset{(*)}{=} \lambda\chi_x + \chi_y = \lambda J(x) + J(y)$$

  donde en $(*)$ hemos usado que:

$$\chi_{(\lambda x+y)}(f) = \langle f, \lambda x + y\rangle = \lambda\langle f, x\rangle + \langle f, y\rangle = \lambda\chi_x(f) + \chi_y(f) \qquad \forall f \in E^*$$

- Sean $x, y \in E$ de forma que $J(x) = J(y)$, tenemos entonces que:

  Opción 1.

  $$J(x-y) = 0 \Longrightarrow 0 = \|J(x-y)\| \overset{(*)}{=} \|x-y\| \Longrightarrow x-y = 0$$

  donde en $(*)$ usamos que J conserva la norma.

  Opción 2. Supuesto que $x \neq y$, si tomamos $v = x-y$ y consideramos $G = \mathbb{R}v$ podemos definir el funcional lineal y continuo:

  $$g(tv) = t\|v\|$$

  El Corolario 1.18.1 nos da la existencia de $f \in E^*$ de forma que $f(v) = \|v\|$, pero tenemos que:

  $$f(v) = f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$$

  por lo que $v = 0$, lo que es una contradicción.

Hemos probado que E es isométrico con $J(E) \subset E^{**}$. □

Definición 1.13. Sea E un espacio normado, decimos que es reflexivo si la aplicación J de la proposición anterior es sobreyectiva.

1.6. Dual de l_p, para $1 \leqslant p < \infty$

Consideramos nuevamente el espacio:

$$l_p = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\}, \qquad \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

y estaremos interesados en calcular su espacio dual, l_p^*. Para ello, si para cada $k \in \mathbb{N}$ denotamos por e_k al vector que verifica:

$$e_k(n) = \delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

claramente tenemos que $e_k \in l_p$, $\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \in [1, \infty[$. Consideraremos el espacio:

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \mathcal{L}(\{e_i : i \in \mathbb{N}\}) \subset l_p$$

Y dado $p \in [1, \infty[$, consideraremos siempre que p^* cumple que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1, \qquad p^* = \infty \text{ si } p = 1$$

Trataremos de probar que $\boxed{(l_p)^* \cong l_{p^*}}$

Proposición 1.24. *Si $p \in [1, \infty[$, se verifica que:*

$$\overline{\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}} = l_p$$

Demostración. Sea $x \in l_p$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x(k) e_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

es decir, s_n será el vector cuyas $n-$ésimas primeras componentes coinciden con las de x y el resto de componentes son 0:

$$\begin{aligned} s_1 &= (x(1), 0, \ldots) \\ s_2 &= (x(1), x(2), 0, \ldots) \\ s_3 &= (x(1), x(2), x(3), 0, \ldots) \end{aligned}$$

Es evidente que $s_n \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así como que $s_n(k) = x(k)$ siempre que $k \leqslant n$. De esta última observación deducimos que:

$$(\|x - s_n\|_p)^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} (|x(k)|)^p \to 0$$

por lo que $\{s_n\} \to x$ en l_p. □

Proposición 1.25. *Si $1 \leqslant p < \infty$, el espacio $(l_p)^*$ contiene una copia isométrica de l_{p^*}.*

Demostración. Tomaremos $y \in l_{p^*}$ y definiremos $\Phi_y : l_p \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\Phi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \qquad \forall x \in l_p$$

que está bien definida (la serie es convergente), puesto que:

$$x \in l_p, y \in l_{p^*} \Longrightarrow xy \in l_1 \qquad \text{y} \qquad \|xy\|_1 \leqslant \|x\|_p \|y\|_{p^*}$$

Veamos que Φ_y es lineal, continua y que $\|\Phi_y\| = \|y\|_{p^*}$, puesto que:

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, z \in l_p$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\Phi_y(\lambda x + z) &= \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda x(n) + z(n))y(n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) + \sum_{n=1}^{\infty} z(n)y(n) \\ &= \lambda \Phi_y(x) + \Phi_y(z)\end{aligned}$$

- Para ver que Φ_y es continua, veamos que:

$$|\Phi_y(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)||y(n)| \overset{(*)}{\leqslant} \|y\|_{p^*}\|x\|_p$$

  donde en $(*)$ usamos la desigualdad de Hölder, con lo que Φ_y es continua. Además hemos visto ya que, $\|\Phi_y\| \leqslant \|y\|_{p^*}$.

- Para la otra desigualdad, distinguimos casos:

  - Para $p = 1$, tenemos que:

$$|y(n)| = |\Phi_y(e_n)| \leqslant \|\Phi_y\| \|e_n\|_p = \|\Phi_y\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

    de donde:

$$\|y\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |y(n)| \leqslant \|\Phi_y\|$$

  - Para $1 < p < \infty$, tomamos:

$$x(n) = (|y_n|)^{p^*-2} y_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

    y razonando como en el Ejercicio 4.1.2 obtenemos la desigualdad:

$$\|y\|_{p^*} \leqslant \|\Phi_y\|$$

A partir de eso, veamos que:

$$\begin{array}{rccc}\Phi : & l_{p^*} & \longrightarrow & {l_p}^* \\ & y & \longmapsto & \Phi_y\end{array}$$

es lineal, inyectiva y que conserva la norma:

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, y \in l_{p^*}$, tenemos que:

$$\Phi(\lambda x + y) = \Phi_{(\lambda x+y)} \overset{(*)}{=} \lambda \Phi_x + \Phi_y = \lambda \Phi(x) + \Phi(y)$$

  donde en $(*)$ hemos usado que:

$$\begin{aligned}\Phi_{(\lambda x+y)}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z(n)(\lambda x(n) + y(n)) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} z(n)x(n) + \sum_{n=1}^{\infty} z(n)y(n) \\ &= \lambda \Phi_x(z) + \Phi_y(z)\end{aligned}$$

- Hemos visto ya que $\|\Phi_y\| = \|y\|_{p^*}$ para todo $y \in l_{p^*}$.
- Como Φ preserva la norma y es lineal, tenemos que si $x, y \in l_{p^*}$ con $\Phi(x) = \Phi(y)$, entonces:

$$0 = \Phi(x - y) \Longrightarrow 0 = \|\Phi(x - y)\| = \|x - y\| \Longrightarrow x = y$$

  por lo que Φ es inyectiva.

□

Proposición 1.26. *Si $1 \leqslant p < \infty$, entonces ${l_p}^*$ es isométrico a l_{p^*}.*

Demostración. La demostración se basa en probar que la aplicación Φ de la Proposición anterior es sobreyectiva. Para ello, fijado $f \in l_p^*$, definimos:

$$y(n) = f(e_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Si $p = 1$, escribimos:

$$|y(k)| = \alpha_k y(k), \qquad \alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{si } y(k) \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } y(k) < 0 \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$|y(n)| = |f(e_n)| \leqslant \|f\| \|e_n\| = \|f\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

  Por lo que la sucesión y está acotada, es decir, $y \in l_\infty$, y tenemos que $\Phi(y) = f$.

- Si $p > 1$, fijado $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (|y(k)|)^{p^*} &= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k y(k))^{p^*-1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (|y(k)|)^{p^*-1} f(e_k) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (|y(k)|)^{p^*-1} e_k\right) \\ &\leqslant \|f\| \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (|y(k)|)^{p^*-1} e_k\right\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} (|y(k)|)^{(p^*-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} (|y(k)|)^{p^*}\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

  Es decir:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|\right)^{p^*} \leqslant \|f\| \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|\right)^{p^*}\right)^{\frac{1}{p}}$$

de donde:

$$\|f\| \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

por lo que $y \in l_{p^*}$. Tenemos que:

$$\Phi_y(e_n) = y(n) = f(e_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde $f(x) = \Phi_y(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Como es un conjunto denso, han de coincidir por continuidad en todo el espacio, con lo que:

$$f(x) = \Phi_y(x) \qquad \forall x \in l_p$$

de donde $\Phi_y = f$

□

A partir de los resultados vistos en esta sección, se propone:

Ejercicio 1.6.1. Calcular el dual de c_0, y comprobar que es isométrico con l_1.

Ejercicio 1.6.2. Calcular el dual de c y comprobar que es isométrico con l_1.

Ejercicio 1.6.3. Demostrar que c_0 no es reflexivo.

Ejercicio 1.6.4. Demostrar que l_p es reflexivo para $1 < p < \infty$.

2. Principio de acotación uniforme y Tª de la gráfica cerrada

Definición 2.1. Sean E, F espacios normados, definimos:

$$L(E,F) = \{f : E \to F : f \text{ lineal y continua}\}$$

y notaremos normalmente $L(E) := L(E,E)$.

Proposición 2.1. *Al igual que como sucedía con aplicaciones lineales y continuas de un espacio normado E en $\mathbb{R}$, si E, F son espacios normados y $T \in L(E,F)$ tenemos*[1]*:*

1. *T es continua $\Longleftrightarrow$ T es continua en 0 $\Longleftrightarrow$ $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| < \infty$*

2. *Si definimos:*

$$\|T\| := \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| \qquad \forall T \in L(E,F)$$

   Tenemos que $\|\cdot\|$ es una norma en $L(E,F)$.

3. *Se verifica que:*

$$\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\|, \quad \forall x \in E\}$$

2.1. Principio de acotación uniforme

Con vistas a demostrar el Principio de acotación uniforme, demostramos el siguiente Lema:

Lema 2.2. *Sean E, F espacios normados y $T \in L(E,F)$, entonces:*

$$\sup_{\|x-x_0\|\leqslant r} \|Tx\| \geqslant r\|T\| \qquad \forall x_0 \in E, \quad \forall r > 0$$

Demostración. Fijado $r \in \mathbb{R}^+$, sean $x_0, y \in E$ con $\|y\| \leqslant r$:

$$\begin{aligned}
\|Ty\| &= \left\| T\left(\frac{1}{2}\left[x_0 + y - (x_0 - y)\right]\right)\right\| = \frac{1}{2}\|T(x_0 + y - (x_0 - y))\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\|T(x_0+y)\| + \|T(x_0-y)\|\right) \leqslant \max\{\|T(x_0+y)\|, \|T(x_0-y\|)\} \\
&\leqslant \sup_{\|y\|\leqslant r} \max\{\|T(x_0+y)\|, \|T(x_0-y)\|\} \leqslant \sup_{\|z-x_0\|\leqslant r} \|Tz\|
\end{aligned}$$

[1]Resultados análogos que se realizan con las mismas pruebas.

Si ahora observamos que:

$$\sup_{\|y\|\leqslant r} \|Ty\| = r \sup_{\|z\|\leqslant 1} \|Tz\| = r\|T\|$$

Acabamos de probar que $\sup\limits_{\|x-x_0\|\leqslant r} \|Tx\| \geqslant r\|T\|$. □

Teorema 2.3 (Principio de acotación uniforme, de Banach-Steinhaus)**.** *Sea E un espacio de Banach, F un espacio normado y $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L(E,F)$, entonces:*

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < +\infty \quad \forall x \in E \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < +\infty$$

Demostración. Demostraremos el contrarrecíproco:

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| = \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| = \infty$$

Supongamos pues que $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}} \|T\| = \infty$, por lo que existe una sucesión de elementos de $\mathcal{F}$, llamémosla $\{T_n\}$, de forma que:

$$\|T_n\| \geqslant 4^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definimos por inducción una sucesión de puntos de E:

- $x_0 = 0 \in E$.
- Tomando $r = 1/3$, el Lema 2.2 nos dice:

  $$\sup_{\|x-x_0\|<\frac{1}{3}} \|T_1x\| \geqslant \frac{1}{3}\|T_1\| > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\|T_1\|$$

  Como $2/3 \cdot 1/3 \cdot \|T_1\|$ es estrictamente menor que el supremo de la izquierda, tenemos que no puede ser una cota superior de $\|T_1x\|$ para $x \in B(x_0, 1/3)$, con lo que $\exists x_1 \in B(x_0, 1/3)$ de forma que:

  $$\|T_1x_1\| > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\|T_1\|$$

- Supuesto que hemos construido hasta x_{n-1}, veamos cómo construir x_n:

  Tomando $r = 1/3^n$, el Lema 2.2 nos dice que:

  $$\sup_{\|x-x_{n-1}\|<\frac{1}{3^n}} \|T_nx\| \geqslant \frac{1}{3^n}\|T_n\| > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\|$$

  Y por el mismo razonamiento de antes podemos encontrar $x_n \in B(x_{n-1}, 1/3^n)$ de forma que:

  $$\|T_nx_n\| > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\|$$

Veamos ahora que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Para ello, buscamos acotar $\|x_m - x_n\|$ para n, m índices bastante avanzados. Supondremos sin pérdida de generalidad que $n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n$, donde tendremos:

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &= \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n\| \\
&\leqslant \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\leqslant \frac{1}{3^m} + \frac{1}{3^{m-1}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n}\left[\frac{1}{3^{m-n}} + \ldots + \frac{1}{3}\right] \\
&\leqslant \frac{1}{3^n}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{3^j} = \frac{1}{3^n}\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

En definitiva, tenemos que:

$$\|x_m - x_n\| = \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}$$

Por lo que $\{x_n\}$ es de Cauchy en E, que era de Banach, por lo que $\{x_n\}$ converge a cierto $x \in E$. Observemos que:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n} \geqslant \lim_{m\to\infty}\|x_m - x_n\| \overset{(*)}{=} \left\|\lim_{m\to\infty}(x_m - x_n)\right\| = \|x - x_n\|$$

donde en $(*)$ hemos usado la continuidad de $\|\cdot\|$. Calculamos ahora:

$$\begin{aligned}
\|T_n x\| = \|T_n(x - x_n + x_n)\| \geqslant \|T_n x_n\| - \|T_n(x - x_n)\| &\geqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\| - \|T_n\|\|x - x_n\| \\
\geqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\| - \|T_n\|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3^n}\|T_n\| &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\| \geqslant \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\sup_{T\in\mathcal{F}}\|Tx\| \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n x\| = \infty$$

Como queríamos probar. □

Introducimos ahora una serie de Corolarios que nos da el Principio de acotación uniforme:

Corolario 2.3.1. *Sean E, F dos espacios de Banach, sea $\{T_n\}$ una sucesión de elementos de $L(E, F)$ de forma que $\{T_n(x)\} \to T(x)$ para todo $x \in E$. Entonces:*

(a) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\| < \infty$.

(b) $T \in L(E, F)$.

(c) $\|T\| \leqslant \liminf_{n\to\infty}\|T_n\|$.

Demostración. Demostramos cada apartado:

(a) Dado $x \in E$, como $\{T_n(x)\} \to T(x)$, tenemos que $\exists m \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$T_n(x) \in B(T(x), 1) \qquad \forall n \geqslant m$$

Por lo que $\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado, puesto que podemos verlo como la unión de un conjunto acotado y uno finito:

$$\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\} = \{T_n(x) : n \geqslant m\} \cup \{T_n(x) : n < m\}$$

En definitiva, tenemos que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty$ para todo $x \in E$, de donde aplicando el Principio de acotación uniforme tenemos que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.

(b) Veamos que $T : E \to F$ es lineal y continua:

- Es fácil ver que T es lineal:

$$\begin{aligned} T(\lambda x + y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda T_n(x) + T_n(y)) \\ &= \lambda \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) = \lambda T(x) + T(y) \qquad \forall x, y \in E \end{aligned}$$

- Para ver que T es continua podemos usar el apartado (a):

$$\|T_n(x)\| \leqslant \|T_n\|\|x\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|\|x\| \qquad \forall x \in E$$

Y como $\{\|T_n(x)\|\} \to \|T(x)\|$, tenemos que:

$$\|T(x)\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|\|x\| \qquad \forall x \in E$$

lo que nos dice que T es continua.

(c) Para ver que $\|T\| \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \|T_n\|$, notemos que:

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \left\|\lim_{n\to\infty} T_n(x)\right\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| = \liminf \|T_n(x)\| \leqslant \liminf(\|T_n\|\|x\|) \\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geqslant k}(\|T_n\|\|x\|) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geqslant k} \|T_n\| \cdot \|x\| = \liminf \|T_n\| \cdot \|x\| \qquad \forall x \in E \end{aligned}$$

De donde $\|T\| \leqslant \liminf \|T_n\|$.

□

Corolario 2.3.2. *Sea G un espacio de Banach y $B \subset G$, si para toda $f \in G^*$ el conjunto $f(B)$ está acotado (en $\mathbb{R}$), entonces B está acotado.*

Demostración. Comenzamos la demostración pensando a lo que queremos llegar, pues así nos será más fácil comenzar la demostración. Queremos probar que B está acotado, es decir, que existe $M > 0$ de forma que:

$$\|b\| \leqslant M \qquad \forall b \in B$$

Si recordamos que el Corolario 1.18.3 nos dice que:

$$\|b\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |f(b)|$$

observemos que lo queremos es buscar una cota superior de $|f(b)|$, donde b está fija y f se mueve. Para ello, podemos pensar en definir ciertos funcionales $T_b(f)$ de forma que tras aplicar el Principio de Acotación Uniforme obtengamos para $\|f\| \leqslant 1$:

$$|f(b)| = |T_b(f)| \leqslant \|T_b\|\|f\| \leqslant \|T_b\| \leqslant \sup_{b\in B} \|T_b\| < \infty$$

Con lo que nuestra constante M la tomaremos como $\sup\limits_{b\in B} \|T_b\|$. Comenzando ahora con la demostración, fijado $b \in B$, definimos la aplicación $T_b : G^* \to \mathbb{R}$ dada por:

$$T_b(f) = f(b) \qquad \forall f \in G^*$$

Con lo que $T_b \in L(G^*, \mathbb{R})$:

- Es claro que T_b es lineal.
- T_b es continua, ya que $|T_b(f)| = |f(b)| \leqslant \|b\|\|f\| \quad \forall f \in G^*$.

Como $f(B)$ es acotado para toda $f \in G^*$, tenemos entonces que:

$$\sup_{b\in B} |T_b(f)| = \sup_{b\in B} |f(b)| < \infty \qquad \forall f \in G^*$$

Con lo que aplicando el Principio de acotación uniforme tenemos:

$$\sup_{b\in B} \|T_b\| < \infty$$

Ahora, si tomamos $f \in G^*$ con $\|f\| \leqslant 1$, buscamos usar que $\|x\| = \sup\limits_{\|f\|\leqslant 1} |f(x)|$:

$$|f(b)| = |T_b(f)| \leqslant \|T_b\|\|f\| \leqslant \sup_{b\in B} \|T_b\|\|f\| \leqslant \sup_{b\in B} \|T_b\|$$

Por lo que $\|b\| \leqslant \sup\limits_{b\in B} \|T_b\| < \infty \quad \forall b \in B$, lo que nos dice que B está acotado. $\square$

Este último corolario nos dice que si $B \subset G$ es un conjunto cualquiera, una forma de estudiar si B es un conjunto acotado es tratar de calcular su imagen bajo cualquier función $f \in G^*$, que es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Recordemos que en $\mathbb{R}^n$ un conjunto era acotado si y solo si cada una de sus proyecciones es un conjunto acotado. Este Corolario hace ese papel en espacios de dimensión infinita, que junto con el siguiente son muy utilizados.

Corolario 2.3.3. *Sea G un espacio de Banach y sea $B^* \subset G^*$, si el conjunto:*

$$B^*(x) = \{f(x) : f \in B^*\}$$

está acotado para todo $x \in G$, entonces B^* está acotado.

Demostración. Al igual que antes empezamos por el final, pues así nos será más fácil comenzar la demostración. Queremos concluir que B^* está acotado, es decir, que:

$$\|f\| \leqslant M \qquad \forall f \in B^*$$

para cierta constante $M > 0$. Para ello, si recordamos la definición de $\|f\|$, vemos que:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$$

donde f está fija y movemos la x, con lo que trataremos de definir funcionales $T_f(x)$ de forma que para $\|x\| \leqslant 1$:

$$|f(x)| = |T_f(x)| \leqslant \|T_f\|\|x\| \leqslant \|T_f\| \leqslant \sup_{f \in B^*} \|T_f\|$$

Comenzando ahora con la demostración, para cada $f \in B^*$ definimos la aplicación $T_f : G \to \mathbb{R}$ dada por:

$$T_f(x) = f(x) \qquad \forall x \in G$$

con lo que $T_f \in G^*$ para todo $f \in B^*$:

- Es fácil ver que T_f es lineal para cualquier $f \in B^*$.
- No es difícil ver que T_f es continua para $f \in B^*$, ya que:

$$|T_f(x)| = |f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \qquad \forall x \in G$$

Como el conjunto $B^*(x)$ está acotado para todo $x \in G$, tenemos que:

$$\sup_{f \in B^*} \|T_f(x)\| = \sup_{f \in B^*} |f(x)| < \infty$$

nos encontramos en las hipótesis del Principio de acotación uniforme, que nos dice que entonces:

$$\sup_{f \in B^*} \|T_f\| < \infty$$

en cuyo caso, si $\|x\| \leqslant 1$, entonces:

$$|f(x)| = |T_f(x)| \leqslant \|T_f\|\|x\| \leqslant \|T_f\| \leqslant \sup_{f \in B^*} \|T_f\| \qquad \forall f \in B^*$$

con lo que:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \leqslant \sup_{f \in B^*} \|T_f\| \qquad \forall f \in B^*$$

de donde deducimos que B^* está acotado. □

2.2. Otra demostración del Principio de acotación uniforme

Repetiremos ahora la demostración del Principio de acotación uniforme de otra forma, usando el Lema de Baire, un resultado clásico que nos da de forma no muy complicada la demostración del Principio.

Lema 2.4 (de Baire)**.** *Sea X un espacio métrico completo, sea $\{X_n\}$ una sucesión de subconjuntos de X todos ellos cerrados y con interior vacío, entonces:*

$$\operatorname{Int}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \emptyset$$

Demostración. Tomaremos $O_n = X \setminus X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, con lo que O_n es abierto y denso para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que:

$$\overline{O_n} = \overline{X \setminus X_n} = X \setminus \operatorname{Int} X_n = X \setminus \emptyset = X \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Y la prueba terminará probando que $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ es denso, ya que en dicho caso tendremos:

$$X = \overline{G} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus X_n} = \overline{X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n} = X \setminus \operatorname{Int}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)$$

de donde podremos deducir que $\operatorname{Int}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \emptyset$. Para probar que G es denso, sea ω un abierto no vacío de X, tenemos que probar que $\omega \cap G \neq \emptyset$. Como ω es abierto, dado $x_0 \in \omega$ podemos encontrar $r_0 > 0$ de forma que:

$$\overline{B(x_0, r_0)} \subset \omega$$

Tras esto, como O_1 es abierto y denso, podremos elegir $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$ y $r_1 > 0$ de forma que:

$$\overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_0, r_0) \cap O_1 \quad \text{y} \quad 0 < r_1 < \frac{r_0}{2}$$

De forma inductiva, como cada O_n es abierto y denso, seremos capaces de encontrar dos sucesiones: $\{x_n\}$ de puntos de X y $\{r_n\}$ de reales positivos de forma que se cumpla:

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1} \quad \text{y} \quad 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Veamos que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Para ello, sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \geqslant n$, tendremos que:

$$x_m \in B(x_{m-1}, r_{m-1}) \subset \ldots \subset B(x_n, r_n)$$
$$r_n < \frac{r_{n-1}}{2} < \frac{r_{n-2}}{2^2} < \ldots < \frac{r_0}{2^n}$$

Por lo que:

$$\|x_m - x_n\| < r_n < \frac{r_0}{2^n}$$

de donde deducimos que $\{x_n\}$ es de Cauchy en X, y como X era completo, existe $l \in X$ de forma que $\{x_n\} \to l$. Finalmente, como $x_{n+p} \in B(x_n, r_n)$ para $n, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tomando límite cuando $p \to \infty$ obtenemos que:

$$l \in \overline{B(x_n, r_n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

En particular, $l \in \omega \cap G$, por lo que G es denso, lo que concluye la demostración. □

Cabe destacar que una de las formas en las que más se utiliza el Lema de Baire es mediante su contrarrecíproco:

Sea X un espacio métrico completo, sea $\{X_n\}$ una sucesión de subconjuntos de X todos ellos cerrados, entonces:

$$\operatorname{Int}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n\right) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \operatorname{Int}(X_{n_0}) \neq \emptyset$$

Ahora, volveremos a demostrar el Principio de acotación uniforme usando el Lema de Baire.

Teorema 2.5 (Principio de acotación uniforme, de Banach-Steinhaus)**.** *Sea E un espacio de Banach, F un espacio normado y $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L(E, F)$, entonces:*

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < +\infty \quad \forall x \in E \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| < +\infty$$

Demostración. Suponiendo que indexamos nuestra familia mediante un conjunto I: $\mathcal{F} = \{T_i\}_{i \in I}$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \{x \in E : \|T_i x\| \leqslant n, \quad \forall i \in I\}$$

que verifica:

- X_n es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que si tomamos $\{x_m\}$ una sucesión de puntos de X_n convergente a $x \in E$, tenemos entonces que $\|T_i x_m\| \leqslant n$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Usando que $\|\cdot\|$ y que T_i son las dos funciones continuas obtenemos que:
$$\|T_i x\| \leqslant n$$
con lo que $x \in X_n$.

- Fijado $x \in E$, como $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty$, tenemos que existe $M \in \mathbb{N}$ de forma que $\|Tx\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{F}$, con lo que $x \in X_M$. De aquí se deduce que:
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = E$$

Como E es abierto y es un espacio vectorial, tenemos que $\operatorname{Int} E = E \neq \emptyset$. Por el Lema de Baire tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $\operatorname{Int}(X_{n_0}) \neq \emptyset$, lo que nos permite tomar $x_0 \in E$ y $r > 0$ de forma que $B(x_0, r) \subset X_{n_0}$, lo que nos dice por la definición de X_{n_0} que:

$$\|T_i(x_0 + rz)\| \leqslant n_0 \qquad \forall i \in I, \quad \forall z \in B(0, 1)$$

como:

$$n_0 \geqslant \|T_i(x_0 + rz)\| \geqslant \|T_i(rz)\| - \|T_i(x_0)\| \quad \Longrightarrow \quad r\|T_i(z)\| \leqslant n_0 + \|T_i(x_0)\| \qquad \forall i \in I, \quad \forall z \in B(0,1)$$

tendremos:

$$r\|T_i\| \leqslant n_0 + \|T_i(x_0)\| \leqslant n_0 + \sup_{T \in \mathcal{F}} \|T(x_0)\| < \infty \qquad \forall i \in I$$

de donde concluimos que $\sup\limits_{T \in \mathcal{F}} \|T\| < \infty$ $\square$

2.3. Teorema de la aplicación abierta

Ejercicio 2.3.1. Sean X, Y dos espacios de Banach, $T \in L(X,Y)$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $y \in Y$:

$$\|y\|_n := \text{ínf}\{\|u\| + n\|v\| : u \in X, v \in Y \text{ con } y = T(u) + v\}$$

Probar que $\|\cdot\|_n$ es una norma en Y para todo $n \in \mathbb{N}$, que verifica:

$$\|y\|_n \leqslant n\|y\| \qquad \forall y \in Y$$

Además, si $y = T(x)$ con $x \in X$, entonces:

$$\|y\|_n \leqslant \|x\|$$

Veamos en primer lugar que $\|\cdot\|_n$ es una norma en Y para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, fijaremos $n \in \mathbb{N}$ y veremos las propiedades de una norma:

- Para la no degeneración, supongamos que $y \in Y$ con $\|y\|_n = 0$. Por definición del ínfimo, existen sucesiones $\{u_m\}$ de puntos de X y $\{v_m\}$ de puntos de Y de forma que:

  $$\{\|u_m\| + n\|v_m\|\} \to 0 \qquad y = T(u_m) + v_m \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

  como $\|u_m\|, \|v_m\| \geqslant 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, tenemos entonces que:

  $$\{\|u_m\|\}, \{\|v_m\|\} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \{u_m\}, \{v_m\} \to 0$$

  usando ahora que $y = T(u_m) + v_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, observemos que:

  $$\{T(u_m) + v_m\} \to 0$$

  donde hemos usado que T y la suma son continuas, con lo que $y = 0$.

- Para la homogeneidad por homotecias, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $y \in Y$:

  $$\begin{aligned}
  |\lambda|\|y\|_n &= \text{ínf}\{|\lambda|(\|u\| + n\|v\|) : u \in X, v \in Y \text{ con } y = T(u) + v\} \\
  &= \text{ínf}\{\|\lambda u\| + n\|\lambda v\| : u \in X, v \in Y \text{ con } y = T(u) + v\} \\
  &= \text{ínf}\left\{\|u\| + n\|v\| : u \in X, v \in Y \text{ con } y = T\left(\frac{u}{\lambda}\right) + \frac{v}{\lambda}\right\} \\
  &= \text{ínf}\{\|u\| + n\|v\| : u \in X, v \in Y \text{ con } \lambda y = T(u) + v\} = \|\lambda y\|_n
  \end{aligned}$$

- Finalmente, para la desigualdad triangular, sean $y_1, y_2 \in Y$, para todo $\varepsilon > 0$ tenemos por la caracterización del ínfimo que existen $u_1, u_2 \in X$, $v_1, v_2 \in Y$ de forma que:

$$y_i = T(u_i) + v_i \quad \text{y} \quad \|u_i\| + n\|v_i\| \leqslant \|y_i\|_n + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall i \in \{1, 2\}$$

de donde $y_1 + y_2 = T(u_1) + v_1 + T(u_2) + v_2 = T(u_1 + u_2) + v_1 + v_2$, por lo que:

$$\begin{aligned}\|y_1 + y_2\|_n \leqslant \|u_1 + u_2\| + n\|v_1 + v_2\| &\leqslant \|u_1\| + n\|v_1\| + \|u_2\| + n\|v_2\| \\ &\leqslant \|y_1\|_n + \|y_2\|_n + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0\end{aligned}$$

En definitiva, hemos probado que $\|y_1 + y_2\| \leqslant \|y_1\| + \|y_2\|$.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, sea ahora $y \in Y$, tomando $u = 0 \in X$ y $v = y \in Y$, tenemos que:

$$y = 0 + y = T(u) + v$$

por lo que:

$$\|y\|_n \leqslant \|u\| + n\|v\| = n\|y\|$$

Si tenemos ahora que $y = T(x)$ para $x \in X$, podemos tomar $u = x \in X$ y $v = 0 \in Y$ con lo que:

$$y = y + 0 = T(x) + v$$

por lo que:

$$\|y\|_n \leqslant \|u\| + n\|v\| = \|x\|$$

Ejercicio 2.3.2. Si $T : X \to Y$ es una aplicación lineal entre dos espacios normados:

$$T \text{ es abierta} \iff \exists \delta > 0 : B(0, \delta) \subset T(B(0, 1))$$

Demostración. Lo vemos por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Como $B(0, 1)$ es un conjunto abierto de X, entonces $T(B(0, 1))$ es un conjunto abierto de Y por ser T abierta. En particular, para 0 existirá $\delta > 0$ de forma que $B(0, \delta) \subseteq T(B(0, 1))$.

$\Longleftarrow$) Sea $U \subset X$ un conjunto abierto, queremos ver que $T(U)$ es abierto. Para ello, sea $y \in T(U)$, existirá $x \in U$ de forma que $y = T(x)$. Como U es abierto, existe $r > 0$ de forma que $B(x, r) \subset U$. En este punto, tendremos aplicando T que:

$$T(x) + rT(B(0, 1)) = T(x) + T(B(0, r)) = T(B(x, r)) \subset T(U)$$

Si usamos ahora que $y = T(x)$ y la hipótesis, tenemos que $\exists \delta > 0$ de forma que $B(0, \delta) \subset T(B(0, 1))$, lo que nos permite escribir:

$$B(y, r\delta) = y + rB(0, \delta) \subset y + rT(B(0, 1)) = T(B(x, r)) \subset T(U)$$

Por lo que $T(U)$ es abierto.

□

Teorema 2.6 (de la aplicación abierta)**.**
Sean X, Y espacios de Banach, sea $T \in L(X, Y)$ sobreyectiva, entonces T es una aplicación abierta.

Demostración. La demostración se completa en dos pasos:

Paso 1. Veamos que $\exists r > 0$ de forma que $B(0, r) \subset \overline{T(B(0, 1))}$:

Consideramos en Y la norma:

$$\|y\|_n = \text{ínf}\{\|u\| + n\|v\| : y = T(u) + v, u \in X, v \in Y\} \qquad \forall y \in Y, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Que abreviaremos por:

$$\|y\|_n = \inf_{y=T(u)+v} \{\|u\| + n\|v\|\}$$

Cuyas propiedades fueron vistas en el Ejercicio 2.3.1. Consideramos ahora Z como el espacio de todas aquellas sucesiones casi nulas[2] $\{z_n\}$ de puntos de Y. Consideraremos en dicho espacio:

$$\|\{z_n\}\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} \|z_n\|_n \qquad \forall \{z_n\} \in Z$$

Que es una norma:

- No degeneración: Si $\{z_n\} \in Z$ con $\max\limits_{n\in\mathbb{N}} \|z_n\|_n = \|\{z_n\}\|_\infty = 0$, entonces tenemos que:

$$\|z_n\|_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad z_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Homogeneidad por homotecias:

$$\begin{aligned}\|\lambda\{z_n\}\|_\infty = \|\{\lambda z_n\}\|_\infty &= \max_{n\in\mathbb{N}} \|\lambda z_n\|_n = \max_{n\in\mathbb{N}}(|\lambda|\|z_n\|_n) = |\lambda| \max_{n\in\mathbb{N}} \|z_n\|_n \\ &= |\lambda|\|\{z_n\}\|_\infty\end{aligned}$$

- Desigualdad triangular:

$$\begin{aligned}\|\{z_n\} + \{c_n\}\|_\infty &= \max_{n\in\mathbb{N}}(\|z_n + c_n\|_n) \leqslant \max_{n\in\mathbb{N}}(\|z_n\|_n + \|c_n\|_n) \\ &\leqslant \max_{n\in\mathbb{N}} \|z_n\|_n + \max_{n\in\mathbb{N}} \|c_n\|_n = \|\{z_n\}\|_\infty + \|\{c_n\}\|_\infty\end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la aplicación $T_n : Y \to Z$ dada por:

$$T_n(y) = \{\delta_{n,k} \cdot y\}_{k\in\mathbb{N}}$$

donde usamos la δ de Kronecker:

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$$

Veamos que $T_n \in L(Y, Z)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, dado $n \in \mathbb{N}$; vemos que:

[2]Es decir, con un número finito de términos no nulos.

- Es lineal, ya que si $y_1, y_2 \in Y$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T_n(\lambda y_1 + y_2) &= \{\delta_{n,k} \cdot (\lambda y_1 + y_2)\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\delta_{n,k} \cdot \lambda y_1 + \delta_{n,k} \cdot y_2\}_{k\in\mathbb{N}} \\ &= \{\delta_{n,k} \cdot \lambda y_1\}_{k\in\mathbb{N}} + \{\delta_{n,k} \cdot y_2\}_{k\in\mathbb{N}} = \lambda T_n(y_1) + T_n(y_2) \end{aligned}$$

- Para ver que $T_n : (Y, \|\cdot\|) \to (Z, \|\cdot\|_\infty)$ es continua:

$$\begin{aligned} \|T_n(y)\|_\infty &= \|\{\delta_{n,k} \cdot y\}_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty = \max_{k\in\mathbb{N}} \|\delta_{n,k} \cdot y\|_k \\ &= \max_{k\in\mathbb{N}} (\delta_{n,k} \cdot \|y\|_k) = \|y\|_n \overset{(*)}{\leqslant} n\|y\| \qquad \forall y \in Y \end{aligned}$$

  donde en $(*)$ hemos usado el Ejercicio 2.3.1.

Veamos ahora que para cada $y \in Y$, la sucesión $\{T_n(y)\}$ está acotada. Para ello, sea $y \in Y$, como T es sobreyectiva $\exists x \in X$ de forma que $T(x) = y$, con lo que:

$$\|T_n(y)\|_\infty = \|y\|_n \overset{(*)}{\leqslant} \|x\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde en $(*)$ hemos vuelto a usar el Ejercicio 2.3.1. Aplicando el Principio de acotación uniforme, tenemos que $\{\|T_n\|\}$ está acotada, es decir, existe $M > 0$ de forma que:

$$\|T_n\| \leqslant M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

con lo que:

$$\|y\|_n = \|T_n(y)\|_\infty \leqslant M\|y\| \qquad \forall y \in Y$$

Sea $y \in B\left(0, {}^1/_M\right)$, queremos deducir que $y \in \overline{T(B(0,1))}$:

$$\|y\|_n = \inf_{y=T(u)+v} \{\|u\| + n\|v\|\} \leqslant M\|y\| < \frac{M}{M} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como el ínfimo de dicho conjunto es menor que 1, han de existir sucesiones $\{u_m\}$ en X y $\{v_m\}$ en Y de forma que:

$$y = T(u_m) + nv_m \qquad \|u_m\| + n\|v_m\| < 1 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, tenemos entonces que:

$$\|u_m\|,\ n\|v_m\| < 1 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

luego $\|v_m\| < {}^1/_n$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora:

$$T(u_m) = T(u_m) + v_m - v_m = y - v_m \overset{(*)}{\to} y$$

donde en $(*)$ usamos que $\|v_m\| < {}^1/_n$. Observamos ahora que $u_n \in B(0,1)$ y que $v_n \to 0$, por lo que ha de ser $y \in \overline{T(B(0,1))}$. Tomando $r = {}^1/_M$ tenemos el paso 1.

Paso 2. Veamos ahora que $B\left(0, \frac{r}{2}\right) \subset T(B(0,1))$.

Sabemos del paso 1 que $\exists r > 0$ de forma que $B(0,r) \subset \overline{T(B(0,1))}$, con lo que:

$$B\left(0, \frac{r}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} B(0,r) \subset \frac{1}{2^n} \overline{T(B(0,1))} = \overline{T\left(B\left(0, \frac{1}{2^n}\right)\right)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Para $n = 1$ tenemos:
$$B\left(0, \frac{r}{2}\right) \subset \overline{T\left(B\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)}$$
por lo que si $y \in B\left(0, \frac{r}{2}\right)$, tenemos entonces que existe $x_1 \in B\left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que[3] $\|y - T(x_1)\| < \frac{r}{2^2}$, de donde $y - T(x_1) \in B\left(0, \frac{r}{2^2}\right)$
- Para $n = 2$:
$$B\left(0, \frac{r}{2^2}\right) \subset \overline{T\left(B\left(0, \frac{1}{2^2}\right)\right)}$$
Como $y - T(x_1) \in B\left(0, \frac{r}{2^2}\right)$, podemos encontrar $x_2 \in B\left(0, \frac{1}{2^2}\right)$ tal que $\|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \frac{r}{2^3}$, de donde $y - T(x_1) - T(x_2) \in B\left(0, \frac{r}{2^3}\right)$.
- En definitiva, hemos obtenido $x_n \in B\left(0, \frac{1}{2^n}\right)$ tal que:
$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} T(x_k) \right\| < \frac{r}{2^{n+1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

Con lo que:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$
Por lo que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente en norma, y como X es de Banach, tenemos que $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ es converegente, a cierto $x \in X$. Ahora:
$$\|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$
De la ecuación (2.1) obtenemos que:
$$\sum_{n=1}^{\infty} T(x_k) = y$$
Finalmente:
$$\begin{aligned} T(x) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_k\right) = T\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \\ = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} T(x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} T(x_k) = y \end{aligned}$$
donde en $(*)$ usamos que T es continua. En defintiva, hemos probado que $y \in T(B(0,1))$, ya que $\|x\| < 1$.

□

[3]Esta distancia podemos acotarla tanto como queramos.

Corolario 2.6.1. *Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T \in L(E, F)$ biyectiva, entonces T^{-1} es también continua.*

Demostración. Por el Teorema de la aplicación abierta tenemos que T es abierta

Opción 1. Deducimos que T es un homeomorfismo, luego T^{-1} es continua.

Opción 2. Sea $U \subset E$ abierto, observamos que:

$$\left(T^{-1}\right)^{-1}(U) = T(U)$$

y como T es abierta concluimos que $T(U)$ es abierto, con lo que T^{-1} es continua.

□

Corolario 2.6.2. *Sea E un espacio vectorial con normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$. Supongamos que E es de Banach para ambas normas y que existe una constante $C \geqslant 0$ de forma que:*

$$\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1 \qquad \forall x \in E$$

Entonces, las dos normas son equivalentes, es decir, existe una constante $c > 0$ de forma que:

$$\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2 \qquad \forall x \in E$$

Demostración. Sea $T : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$ dada por $T(x) = x$, tenemos claramente que T es lineal, así como que:

$$\|T(x)\|_2 = \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1 \qquad \forall x \in E$$

por lo que T es continua. Es claro que también $T \in L(E, E)$ es biyectiva, con lo que por el Ejercicio anterior tenemos que T^{-1} es también continua. Es obvio que $T^{-1} : (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1)$ viene dada por $T^{-1}(x) = x$. Es claro que se verifica la igualdad:

$$\|x\|_1 = \|T^{-1}(x)\|_1 \leqslant \|T^{-1}\|\|x\|_2 \qquad \forall x \in E$$

Por lo que tomando $c = \|T^{-1}\|$ se tiene el resultado. □

Por tanto, si tenemos dos normas completas, es suficiente comprobar una desigualdad para obtener la otra que nos demuestra que las dos normas son equivalentes.

2.4. Teorema de la gráfica cerrada

Sea $T : E \to F$ una aplicación continua con E, F espacios normados, sabemos entonces que $Gr(T)$ es cerrado en $E \times F$.

Demostración. Sea $\{(x_n, T(x_n))\}$ una sucesión de elementos de $Gr(T)$ convergente a un elemento (x, y) de $E \times F$, tenemos entonces que $\{x_n\} \to x$ y como T es continua, deducimos que:

$$y \leftarrow \{T(x_n)\} \to T(x)$$

Por lo que $y = T(x)$, de donde $(x, y) \in Gr(T)$, luego $Gr(T)$ es cerrado. □

Teorema 2.7 (de la Gráfica Cerrada)**.** *Sean E, F dos espacios de Banach y sea $T : E \to F$ una aplicación lineal. Si $Gr(T)$ es cerrado, entonces T es continua.*

Demostración. Definimos una nueva norma en E, que depende del funcional T:

$$\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F \qquad \forall x \in E$$

Que es una norma:

- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$, usando que T es lineal:
$$\|\lambda x\|_T = \|\lambda x\|_E + \|T(\lambda x)\|_F = |\lambda|(\|x\|_E + \|T(x)\|_F) = |\lambda|\|x\|_T$$
- Tenemos que:
$$\|x\|_T = 0 \iff \|x\|_E + \|Tx\|_F = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \|x\|_E = 0 \\ \|Tx\|_F = 0 \end{array} \right. \iff x = 0$$
- Si $x_1, x_2 \in E$:
$$\begin{aligned} \|x_1 + x_2\|_T = \|x_1 + x_2\|_E + \|T(x_1 + x_2)\|_F &\leqslant \|x_1\|_E + \|x_2\|_E + \|Tx_1\|_F + \|Tx_2\|_F \\ &= \|x_1\|_T + \|x_2\|_T \end{aligned}$$

Además, $(E, \|\cdot\|_T)$ es completo. Para ello, si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de E de Cauchy para $\|\cdot\|_T$, entonces:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geqslant n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_T < \varepsilon$$

Como:

$$\|x_n - x_m\|_T = \|x_n - x_m\|_E + \|T(x_n - x_m)\|_F \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \|x_n - x_m\|_E < \varepsilon \\ \|T(x_n - x_m)\|_F < \varepsilon \end{array} \right.$$

Por lo que $\{x_n\}$ es de Cauchy para $\|\cdot\|_E$ en E y $\{T(x_n)\}$ es de Cauchy en F. Como ambos son espacios de Banach, existe $x \in E$ y $y \in F$ de forma que:

$$\|x_n - x\|_E \to 0 \qquad \|T(x_n) - y\|_F \to 0$$

Como $(x_n, Tx_n) \in Gr(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos entonces que $\{(x_n, Tx_n)\}$ es una sucesión de puntos de $Gr(T)$ convergente a (x, y). Como por hipótesis $Gr(T)$ es cerrado, tenemos entonces que $(x, y) \in Gr(T)$, por lo que $y = T(x)$.

Tenemos por tanto que $\|x_n - x\|_E, \|Tx_n - Tx\|_F \to 0$, de donde:

$$\|x_n - x\|_T = \|x_n - x\|_E + \|Tx_n - Tx\|_F \to 0$$

Por lo que $\{x_n\}$ es convergente para $\|\cdot\|_T$ a x, de donde $(E, \|\cdot\|_T)$ es completo.

Observemos ahora que $\|x\|_E \leqslant \|x\|_T$ para todo $x \in E$. Como las dos normas son completas, tenemos por el Corolario 2.6.2 que son equivalentes. Tenemos entonces que existe $k \geqslant 0$ de forma que:

$$\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F \leqslant k\|x\|_E \qquad \forall x \in E$$

de donde $k \geqslant 1$, con lo que:

$$\|Tx\|_F \leqslant (k-1)\|x\|_E \qquad \forall x \in E$$

Por lo que T es continua en E. □

3. Topologías Débiles

3.1. Topologías iniciales

Trabajaremos sobre un conjunto X y una familia de espacios topológicos $\{Y_i\}_{i\in I}$ junto con una familia de aplicaciones $\varphi_i : X \to Y_i, \quad \forall i \in I$.

Observamos que si consideramos en X la topología discreta:

$$\tau_d = \{A : A \subset X\}$$

tenemos que φ_i es continua, para todo $i \in I$. Sin embargo, hemos sido "muy brutos" al considerar esta topología sobre X. Nos preguntamos por definir alguna topología en X que haga que todas las funciones de la familia $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ sean continuas con el menor número de abiertos.

Observación. Observemos que como pretendemos que las funciones φ_i sean continuas, necesitaremos que esta topología τ buscada verifique que:

$$\tau \supset \{\varphi_i^{-1}(\omega_i) : \omega_i \text{ es un abierto de } Y_i, \quad \forall i \in I\}$$

De esta forma, el problema podemos reformularlo como:

Dado un conjunto X y una familia $\mathcal{U} = \{U_\lambda \subset X : \lambda \in \Lambda\}$, buscar la topología τ con menor cantidad de abiertos de forma que $\mathcal{U} \subset \tau$.

Para ello, si pretendemos que los U_λ estén en τ, estos serán abiertos, luego toda intersección finita de ellos lo seguirá siendo, con lo que la intersección finita de los conjuntos U_λ también tiene que seguir estando en τ. Es decir, si consideramos:

$$\mathcal{V} = \left\{ V = \bigcap_{i=1}^{n} U_{\lambda_i} : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

Tenemos que $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, y nos preguntamos si $\mathcal{V}$ es una topología. Observamos:

- Primero, que $\mathcal{V}$ es estable por intersecciones finitas.
- Sin embargo, la familia no es cerrada por uniones arbitrarias de elementos del conjunto.

Para solucionar el segundo problema, consideramos:

$$\left\{ \bigcup_{\eta\in\Lambda_0} V_\eta : V_\eta \in \mathcal{V}, \Lambda_0 \subset \Lambda \right\}$$

Y tenemos que la topología más pequeña que buscamos debe contener este conjunto. Se demuestra que este conjunto es, de hecho, una topología.

Observación. Observemos que el vacío es resultado de una unión vacía.

Sin embargo, faltaría unir el total.

¿Cómo se forma una base de entornos de dicha topología en X?

Definición 3.1. Sea X un conjunto, $\{Y_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones $\varphi_i : X \to Y_i$, definimos la topología inicial para la familia $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ sobre X a la topología dada por la base de entornos:

$$\left\{\bigcap_{i\in J} \varphi_i^{-1}(V_i) : V_i \text{ entorno de } \varphi_i(x) \in Y_i, \quad J \subset I \text{ finito}\right\}$$

Aunque no conozcamos en profundidad la topología (puesto que no hemos dado de forma explícita quiénes son sus abiertos), es sencillo en ocasiones probar ciertas propiedades topológicas, usando para ellos las dos proposiciones siguientes, que nos permiten comprobar propiedades sobre la topología inicial sin tener que usarla, sino tratar de buscar problemas equivalentes realizando composiciones con las aplicaciones φ_i de la familia que nos da la topología inicial.

Proposición 3.1. *Sea (X, τ) con τ la topología inicial asociada a una familia de aplicaciones $\{\varphi_i\}_{i\in I}$, sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de X y $x \in X$:*

$$\{x_n\} \to x \quad \Longleftrightarrow \quad \{\varphi_i(x_n)\} \to \varphi_i(x) \quad \forall i \in I$$

Demostración. Por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Para cada $i \in I$, τ hace que φ_i sea continua, por lo que:

$$\{x_n\} \to x \Longrightarrow \{\varphi_i(x_n)\} \to \varphi_i(x)$$

$\Longleftarrow$) Si consideramos un entorno U de x, este ha de contener un entorno de la base de entornos, luego existe una familia finita $\{V_i\}_{i\in J}$ de entornos de $\varphi_i(x)$ en cada Y_i con $i \in J$ de forma que:

$$W = \bigcap_{i\in J} \varphi_i^{-1}(V_i)$$

es un entorno básico contenido en U. Observemos que para cada $i \in J$ tenemos:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_i(x) \in V_i \\ \{\varphi_i(x_n)\} \to \varphi_i(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists N_i \in \mathbb{N} : \varphi_i(x_n) \in V_i \quad \forall n \geqslant N_i$$

Sin embargo, como J es finito, podemos tomar $N = \max\limits_{i\in J} N_i$ y tendremos que:

$$n \geqslant N \Longrightarrow \varphi_i(x_n) \in V_i \qquad \forall i \in J$$

de donde:

$$x_n \in W = \bigcap_{i\in J} \varphi_i^{-1}(V_i) \subset U \quad \forall n \geqslant N$$

Por lo que $\{x_n\} \to x$. □

Por lo que conociendo la convergencia de las sucesiones en los espacios Y_i, estudiar la convergencia de X con la topología inicial se reduce a estudiar las convergencias de sus imágenes por φ_i, esto hace fácil trabajar con sucesiones en la topología inicial. Sin embargo, no todos los conceptos topológicos se pueden caracterizar por sucesiones.

Otra propiedad útil de las topologías iniciales es la siguiente:

Proposición 3.2. *Sea (X, τ) con τ la topología inicial asociada a una familia de aplicaciones $\{\varphi_i\}_{i\in I}$. Si Z es un espacio topológico y tenemos una aplicación entre espacios topológicos $\psi : Z \to X$, entonces:*

$$\psi \text{ es continua} \Longleftrightarrow \varphi_i \circ \psi : Z \to Y_i \text{ es continua} \quad \forall i \in I$$

Demostración. Por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Si $\psi : Z \to X$ es continua, τ hace que cada φ_i sea continua, por lo que cada aplicación $\varphi_i \circ \psi$ es continua.

$\Longleftarrow$) Para esta, tenemos que si $U \in \tau$, entonces podemos escribir:

$$U = \bigcup \bigcap_J \varphi_i^{-1}(\omega_i)$$

para ciertos conjuntos abiertos ω_i de Y_i, de donde:

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup \bigcap_J \psi^{-1}(\varphi_i^{-1}(\omega_i)) = \bigcup \bigcap_J (\varphi_i \circ \psi_i)^{-1}(\omega_i)$$

como la intersección finita de abiertos en Z es un abierto de Z y la unión arbitraria de abiertos de Z también lo es, tenemos que $\psi^{-1}(U)$ es abierto en Z, para cada $U \in \tau$, por lo que ψ es continua.

□

Y la idea es la misma de la Proposición anterior: aunque no conozcamos con exactitud los abiertos de la topología inicial, estudiar las funciones continuas $Z \to X$ se reduce al problema de estudiar la continuidad de cada una de las funciones resultantes tras componer con φ_i, obteniendo funciones $Z \to Y_i$. Este procedimiento hace que sea muy fácil comprobar qué aplicaciones $Z \to X$ son continuas.

3.2. Topología débil

Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio de Banach, tenemos ya sobre E una topología, la asociada a la norma $\|\cdot\|_E$, que denotaremos a veces por $\tau_{\|\cdot\|_E}$. Definiremos sobre este espacio E otra topología:

Definición 3.2 (Topología débil de un espacio normado)**.** Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado, definimos la topología débil en E como la topología inicial en E que hace que todas las aplicaciones de la familia E^* sean continuas, y denotaremos a esta topología por $\sigma(E, E^*)$.

Observación. Observaciones que hay que tener en cuenta al trabajar con $\sigma(E, E^*)$:

- La notación $\sigma(E, E^*)$ hay que pensarla como la "topología débil en E es la topología inicial en E que hace continuos todos aquellos elementos de E^*".

- Tenemos $Y_f = \mathbb{R}$ para cada $f \in E^*$, donde tomamos como conjunto de índices $I = E^*$.

- Observemos que:
$$\sigma(E, E^*) \subset \tau_{\|\cdot\|_E}$$
Ya que toda aplicación $f \in E^*$ es continua en $\tau_{\|\cdot\|_E}$ y $\sigma(E, E^*)$ es, por definición de topología inicial, la topología más pequeña que hace que las aplicaciones de E^* sean continuas.

Destacaremos a continuación propiedades destacables de la topología débil de un espacio normado E, donde siempre que hagamos referencia a $\sigma(E, E^*)$, estaremos trabajando sobre un espacio normado E arbitrario.

Proposición 3.3. *$\sigma(E, E^*)$ es Hausdorff.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in E$ distintos, tomamos:
$$A = \{x_1\}, \qquad B = \{x_2\}$$
que son dos conjuntos convexos, disjuntos y cerrados para $\tau_{\|\cdot\|_E}$, lo que nos permite aplicar la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.22), obteniendo $f \in E^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que:
$$\langle f, x_1\rangle < \alpha < \langle f, x_2\rangle$$
de donde tomando:
$$x_1 \in \Theta_1 := \{x \in E : \langle f, x\rangle < \alpha\} = f^{-1}(]-\infty, \alpha[) \in \sigma(E, E^*)$$
$$x_2 \in \Theta_2 := \{x \in E : \langle f, x\rangle > \alpha\} = f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in \sigma(E, E^*)$$
Tenemos que Θ_1, Θ_2 son disjuntos entre sí, con lo que nos dan la condición de Hausdorff que buscábamos. $\square$

Veamos ahora una base de entornos en $\sigma(E, E^*)$, aplicando el procedimiento que hicimos anteriormente al construir la topología inicial.

Proposición 3.4. *Dado $x_0 \in E$ y $f_1, \dots, f_k \in E^*$, tenemos que:*

1. *$V = V(f_1, \dots, f_k; \varepsilon) = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, \quad i \in \{1, \dots, k\}\}$ es un entorno de x_0 en $\sigma(E, E^*)$, para todo $\varepsilon > 0$.*

2. *Además, $\mathcal{V} = \{V(f_1, \dots, f_k; \varepsilon) : \varepsilon > 0, \quad f_1, \dots, f_k \in E^*\}$ es base de entornos de x_0 en $\sigma(E, E^*)$.*

Demostración. Veamos cada apartado:

1. Dado $\varepsilon > 0$ y $x \in V(f_1, \ldots, f_k, \varepsilon)$, tenemos que:

$$|\langle f_i, x - x_0\rangle| = |\langle f_i, x\rangle - \langle f_i, x_0\rangle| < \varepsilon \Longleftrightarrow \langle f_i, x_0\rangle - \varepsilon \leqslant \langle f_i, x\rangle \leqslant \langle f_i, x_0\rangle + \varepsilon$$

que a su vez equivale a:

$$x \in f_i^{-1}\left(]\langle f_i, x_0\rangle - \varepsilon, \langle f_i, x_0\rangle + \varepsilon[\right)$$

Si definimos:

$$a_i = \langle f_i, x_0\rangle \qquad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$$

podemos escribir:

$$V = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[)$$

como cada f_i es continua para la topología débil, el conjunto V ha de ser abierto para $\sigma(E, E^*)$, como intersección finita de conjuntos abiertos; y es claro que $x_0 \in V$, por lo que V es un entorno abierto de x_0.

2. Para ver que es base de entornos, si tomamos U un entorno abierto de x_0 en $\sigma(E, E^*)$, tenemos entonces que existe un entorno de la base de entornos de $\sigma(E, E^*)$, luego existen $f_1, \ldots, f_k \in E^*$ y $V_1, \ldots, V_k \subset \mathbb{R}$ entornos de su correspondiente punto $f_1(x_0), \ldots, f_k(x_0)$ de forma que:

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}(V_j) \subset U$$

como cada V_j es un entorno de $f_j(x_0)$ en la topología usual en $\mathbb{R}$ y tenemos una cantidad finita de ellos, ha de existir $\varepsilon > 0$ de forma que:

$$]f_j(x_0) - \varepsilon, f_j(x_0) + \varepsilon[\subset V_j \qquad \forall j \in \{1, \ldots, k\}$$

de donde:

$$V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}(V_j) \subset U$$

□

Esta proposición nos permite, tomado $x \in E$ y U un entorno de x, han de existir $f_1, \ldots, f_k \in E^*$ y $\varepsilon > 0$ de forma que:

$$x \in V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon) \subset U$$

Ejercicio 3.2.1. Probar que $dimE < \infty \Longrightarrow \sigma(E, E^*) = \tau_{\|\cdot\|_E}$.

$\subseteq$) Tenemos que $\sigma(E, E^*)$ es la topología más pequeña que hace continuos todos aquellos elementos de E^*, y tenemos que $\tau_{\|\cdot\|_E}$ hace continuos todos aquellos elementos de E^*, por lo que se tiene esta inclusión.

$\supseteq$) Podemos hacerla de dos formas distintas:

Opción 1. En el caso de que $dimE$ es finita, si fijamos una base $\{x_1, \ldots, x_N\}$ tenemos que $\tau_{\|\cdot\|_E}$ es la topología inicial que hace continuas las aplicaciones $\{\pi_1, \ldots, \pi_N\}$, donde $\pi_i : E \to \mathbb{R}$ viene dada por:

$$\pi_i\left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k\right) = \lambda_i \qquad i \in \{1, \ldots, N\}$$

Como $\{\pi_1, \ldots, \pi_N\} \subset E^*$, tendremos que $\tau_{\|\cdot\|_E} \subset \sigma(E, E^*)$.

Opción 2. Fijado $x_0 \in E$, si U es un entorno suyo en $\tau_{\|\cdot\|_E}$ tenemos entonces que existe $r > 0$ de forma que $B(x_0, r) \subset U$. Fijada una base $\{e_1, \ldots, e_N\}$ de E de vectores de norma 1, podemos considerar las aplicaciones $\pi_1, \ldots, \pi_N$, donde $\pi_i : E \to \mathbb{R}$ viene dada por:

$$\pi_i\left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k\right) = \lambda_i \qquad i \in \{1, \ldots, N\}$$

y observamos que:

$$\|x - x_0\| = \left\|\sum_{k=1}^{N} \pi_i(x - x_0)\|e_k\|\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |\pi_i(x - x_0)| \qquad \forall x \in E$$

Por lo que si consideramos $x \in V(\pi_1, \ldots, \pi_N, \frac{r}{N})$ tendremos que:

$$\|x - x_0\| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |\pi_i(x - x_0)| < \sum_{k=1}^{N} \frac{r}{N} = r$$

de donde $x \in B(x_0, r)$, es decir:

$$V\left(\pi_1, \ldots, \pi_N, \frac{r}{N}\right) \subset B(x_0, r) \subset U$$

Por lo que U también es un entorno de $\sigma(E, E^*)$, lo que prueba que $\tau_{\|\cdot\|_E} \subset \sigma(E, E^*)$.

Observemos que como $\sigma(E, E^*) = \tau_{\|\cdot\|_E}$ tendremos en particular que:

$$\{x_n\} \overset{\sigma(E,E^*)}{\longrightarrow} x \Longleftrightarrow \{x_n\} \overset{\|\cdot\|_E}{\longrightarrow} x$$

Resumimos en la siguiente proposición cada una de las relaciones entre las convergencias de sucesiones en los distintos espacios topológicos que manejamos. Antes de ello, introducimos la siguiente notación:

Notación. Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio normado, consideraremos sobre él habitualmente dos topologías posiblemente distintas (por lo que obtendremos distintas convergencias de sucesiones):

$$\tau_{\|\cdot\|_E} \qquad \text{y} \qquad \sigma(E, E^*)$$

Si tenemos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de E y un punto $x \in E$, será costumbre para nosotros:

- notar por "$\{x_n\} \to x$" si la sucesión $\{x_n\}$ es convergente en $\tau_{\|\cdot\|_E}$ al elemento x, diciendo en alguna ocasión que la sucesión $\{x_n\}$ "converge" o que "converge fuertemente" al elemento x.
- notar por "$\{x_n\} \rightharpoonup x$" si la sucesión $\{x_n\}$ es convergente en $\sigma(E, E^*)$ al elemento x, diciendo en alguna ocasión que la sucesión $\{x_n\}$ "converge débilmente" al elemento x.

Todavía no está del todo claro la relación entre estas dos convergencias distintas de sucesiones de puntos de E, que aclararemos en la siguiente Proposición, pero ya podremos hablar de convergencia de sucesiones de puntos de E de forma cómoda, sin confundir en ningún momento la convergencia de $\sigma(E, E^*)$ con la de $\tau_{\|\cdot\|_E}$.

Proposición 3.5. *Sea E un espacio de Banach y $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de E:*

1. $\{x_n\} \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \{\langle f, x_n\rangle\} \to \langle f, x\rangle \quad \forall f \in E^*$.
2. $\{x_n\} \to x \Longrightarrow \{x_n\} \rightharpoonup x$.
3. $\{x_n\} \rightharpoonup x \Longrightarrow \{\|x_n\|\}$ *acotada y* $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$.
4. *Tenemos:*
$$\left.\begin{array}{l}\{x_n\} \rightharpoonup x\\ \{f_n\} \to f\end{array}\right\} \Longrightarrow \{\langle f_n, x_n\rangle\} \to \langle f, x\rangle$$

Demostración. Demostramos cada una de las propiedades:

1. Es la Proposición 3.1 pero usando la notación para la topología débil de E.
2. Si tenemos $\{x_n\} \to x$, entonces para $f \in E^*$:
$$|\langle f, x_n - x\rangle| \leqslant \|f\|\|x_n - x\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
y como $\|x_n - x\| \to 0$, deducimos que $\langle f, x_n - x\rangle \to 0$, luego tenemos que:
$$\{\langle f, x_n\rangle\} \to \langle f, x\rangle \qquad \forall f \in E^*$$
y usando 1 tenemos que $\{x_n\} \rightharpoonup x$.
3. Tomamos $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, que verifica para $f \in E^*$:
$$f(B) = \{\langle f, x_n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$$
Como $\{x_n\} \rightharpoonup x$, el apartado 1 nos dice que $f(B)$ es acotado, $\forall f \in E^*$. Por el Corolario 2.3.2 deducimos que B es acotado, es decir, que $\{\|x_n\|\}$ está acotada.
Para la segunda parte, si tomamos $f \in E^*$, tenemos que:
$$|\langle f, x_n\rangle| \leqslant \|f\|\|x_n\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
si tomamos límite inferior:
$$\langle f, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, x_n\rangle = \liminf \langle f, x_n\rangle \leqslant \|f\| \liminf \|x_n\| \qquad \forall f \in E^*$$
En particular, si tomamos $\|f\| = 1$, tenemos que:
$$\|x\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} \langle f, x\rangle \leqslant \|f\| \liminf \|x_n\| = \liminf \|x_n\|$$

4. Estudiamos la diferencia:

$$\begin{aligned}|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &\leqslant |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle| \\ &\leqslant \|f_n - f\|\|x_n\| + |\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \qquad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Y tenemos que $\|f_n - f\| \to 0$, que $\{\|x_n\|\}$ está acotada, y que $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, de donde deducimos que $|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \to 0$.

□

Para entender mejor el punto 3 de esta Proposición, introducimos el siguiente concepto:

Definición 3.3. Sea (E, τ) un espcio topológico, sea $f : (E, \tau) \to \mathbb{R}$ una aplicación, decimos que la función f es secuencialmente semicontinua inferiormente si se cumple que:

$$\{x_n\} \to x \Longrightarrow f(x) \leqslant \liminf f(x_n)$$

Notemos que sabíamos que la aplicación

$$\|\cdot\| : (E, \tau_{\|\cdot\|_E}) \to \mathbb{R}$$

es continua. Sin embargo, en vista de la Proposición y la Definición anterior, sabemos que la aplicación

$$\|\cdot\| : (E, \sigma(E, E^*)) \to \mathbb{R}$$

es secuencialmente semicontinua inferiormente.

Nos preguntamos ahora por el recícproco de la propiedad 3, si tenemos una sucesión $\{\|x_n\|\}$ acotada con $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de E, ¿será cierto que $\{x_n\} \rightharpoonup x$? La respuesta a esta pregunta es rotundamente negativa, pues sabemos que en dimensión finita $\sigma(E, E^*) = \tau_{\|\cdot\|_E}$, y sabemos de la existencia de sucesiones acotadas que no son convergentes en cualquier espacio normado $N-$dimensional.

Sin embargo, si recordamos el Teorema de Bolzano-Weierstrass, en todo espacio normado $N-$dimensional siempre que teníamos una sucesión acotada podríamos extraer una parcial suya convergente. Veremos próximamente que una propiedad similar a esta se cumple en la topología débil de E, lo que nos permitirá llegar a un Teorema que relacione los conjuntos compactos de $\sigma(E, E^*)$ con los conjuntos cerrados y acotados, brindándonos un espacio topológico con una cantidad abundante de conjuntos compactos, cosa que no sucede en $\tau_{\|\cdot\|_E}$ cuando la dimensión del espacio E no es finita.

Esta propiedad de $\sigma(E, E^*)$ es totalmente natural, pues al considerar como $\sigma(E, E^*)$ la menor topología sobre E que hace que las aplicaciones de E^* sean continuas lo que estamos haciendo es eliminar de $\tau_{\|\cdot\|_E}$ abiertos que no nos interesa considerar en ciertos momentos, haciendo más fácil que un conjunto sea compacto, pues cuantos menos abiertos contenga una topología más fácil será que un conjunto sea compacto, por la propia definición de conjunto compacto en un espacio topológico general.

3.2.1. Cierre de la esfera

Notación. Sea E un espacio normado, denotaremos:

$$B = B(0,1), \qquad \overline{B} = \overline{B}(0,1), \qquad S = S(0,1)$$

Además, llamaremos a los conjuntos abiertos de $\sigma(E, E^*)$ débilmente abiertos, y análogamente débilmente cerrados a los conjuntos cerrados de $\sigma(E, E^*)$.

Observación. Si $E = \mathbb{R}^N$, tenemos que $\tau_{\|\cdot\|}$ y $\sigma(E, E^*)$ son iguales (con $\|\cdot\|$ cualquier norma en $\mathbb{R}^N$, puesto que todas son equivalentes). De esta forma, vemos que:

$$\overline{S}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{S} = S$$

Si ahora tenemos que $dimE = \infty$, nos va a interesar calcular también $\overline{S}^{\sigma(E,E^*)}$, y resulta que:

$$\overline{S}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{B}$$

Nos da un resultado muy sorprendente, pues no es nada intuitivo.

Proposición 3.6. *Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, se tiene que:*

$$\overline{S}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{B}$$

Demostración. Por doble inclusión:

$\subseteq$) Para esta inclusión, como tenemos que $S \subset \overline{B}$, basta probar que $\overline{B}$ es débilmente cerrado, con lo que:

$$\overline{S}^{\sigma(E,E^*)} \subset \overline{(\overline{B})}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{B}$$

Para ello, recordamos que:

$$\overline{B} = \{x \in E : \|x\| \leqslant 1\}$$

Y el Corolario 1.18.3 del Teorema de Hahn-Banach nos dice que:

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(x)| \qquad \forall x \in E$$

Por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned}\overline{B} = \{x \in E : |f(x)| \leqslant 1 \quad \forall f \in E^* \text{ con } \|f\| \leqslant 1\} &= \bigcap_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leqslant 1}} \{x \in E : |f(x)| \leqslant 1\} \\ &= \bigcap_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leqslant 1}} f^{-1}([-1,1])\end{aligned}$$

De donde deducimos que $\overline{B}$ es $\sigma(E, E^*)-$cerrado.

$\supseteq$) Probemos primero que:

$$B \subset \overline{S}^{\sigma(E,E^*)}$$

Para ello, sea $x_0 \in B$, si consideramos V un entorno de x_0 en la topología débil, tenemos que existen $f_1, \ldots, f_k \in E^*$ y $\varepsilon > 0$ de forma que:

$$V \supseteq V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon) = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon \quad i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

La demostración termina probando que $V \cap S \neq \emptyset$. Para ello, definimos la función $\psi : E \to \mathbb{R}^k$ dada por:

$$\psi(x) = \langle \psi, x\rangle = (\langle f_1, x\rangle, \langle f_2, x\rangle, \ldots, \langle f_k, x\rangle)$$

Tenemos que ψ es lineal y que no puede ser inyectiva, ya que $dim E = \infty$ y tenemos que $dim\mathbb{R}^k = k$. Como ψ no es inyectiva, tenemos que existe $y_0 \in E\backslash\{0\}$ con $\langle \psi, y_0\rangle = 0$.

Consideramos ahora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(t) = \|x_0 + ty_0\| \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

que es una función continua, con $g(0) = \|x_0\| < 1$, así como que $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$, ya que:

$$\|x_0 + ty_0\| \geqslant |\|x_0\| + |t|\|y_0\||$$

Por el Teorema de Bolzano, tenemos que existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ de forma que $g(t_0) = 1$, es decir, $x_0 + t_0y_0 \in S$. Además, tenemos que $x_0 + t_0y_0 \in V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon)$, ya que:

$$|\langle f_i, x_0 + t_0y_0 - x_0\rangle| = |\langle f_i, t_0y_0\rangle| = |t_0\langle f_i, y_0\rangle| \overset{(*)}{=} 0 < \varepsilon \qquad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$$

donde en $(*)$ usamos que $y_0 \in \ker\psi$. En definitiva, tenemos que $x_0 + t_0y_0 \in S \cap V$, donde V era un entorno arbitrario de x_0 para la topología débil. Hemos probado que $x_0 \in \overline{S}^{\sigma(E,E^*)}$ para cada $x_0 \in B$, por lo que tenemos la inclusión que queríamos:

$$B \subset \overline{S}^{\sigma(E,E^*)}$$

Por otra parte, es obvio que $S \subset \overline{S}^{\sigma(E,E^*)}$, por lo que:

$$\overline{B} = B \cup S \subset \overline{S}^{\sigma(E,E^*)}$$

$\square$

Observación. Observemos que según la prueba anterior, la elección de t_0 no nos da la condición de $x_0 + t_0y_0 \in V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon)$, sino que la existencia de $y_0 \in \ker\psi$ nos dice que:

$$x_0 + ty_0 \in V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Es decir, dicho entorno básico contiene a toda una recta afín de E, algo que no sigue la idea intuitiva de entorno básico.

Corolario 3.6.1. *Como consecuencias a destacar, si E es un espacio de Banach de dimensión infinita:*

- *S no es débilmente cerrado.*
- *B no es débilmente abierta.*

Demostración. Para la segunda, supongamos por reducción al absurdo que B fuera $\sigma(E, E^*)-$abierta, con lo que $E \setminus B$ es $\sigma(E, E^*)-$cerrado, con lo que el conjunto

$$S = (E \setminus B) \cap \overline{B}$$

es $\sigma(E, E^*)-$cerrado, lo que contradice el primer punto, que viene de la Proposición anterior. □

3.2.2. Relación entre débilmente cerrados y cerrados

Sea E un espacio de Banach:

- la Proposición 3.6 nos dice que los cerrados de E no son necesariamente débilmente cerrados.
- como $\sigma(E, E^*) \subset \tau_{\|\cdot\|}$, tenemos que todo conjunto débilmente cerrado tambien será cerrado.

Buscamos ahora una condición sencilla que podemos añadir a los conjuntos cerrados para que siempre sean también débilmente cerrados. Para ello:

Teorema 3.7. *Sea E un espacio de Banach y $A \subset E$ un conjunto convexo, entonces:*

$$A \text{ es } \sigma(E, E^*) - \text{cerrado} \Longleftrightarrow A \text{ es cerrado}$$

Demostración. Por doble implicación:

$\Longrightarrow$) La hemos discutido anteriormente, pues se tiene que:

$$\sigma(E, E^*) \subset \tau_{\|\cdot\|}$$

$\Longleftarrow$) Si A es un subconjunto de E que es cerrado y convexo, queremos ver que es $\sigma(E, E^*)-$cerrado. Para ello, veamos que $E \setminus A$ es débilmente abierto. Para esto último, si tomamos $x_0 \in E \setminus A$ tenemos por la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach ($\{x_0\}$ es compacto y A cerrado con $x_0 \notin A$) que existen $f \in E^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\langle f, x_0 \rangle < \alpha < \langle f, x \rangle \qquad \forall x \in A$$

Tenemos por tanto que:

$$x_0 \in \{y \in E : \langle f, y \rangle < \alpha\} = f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$$

con $f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ un conjunto $\sigma(E, E^*)-$abierto[1], por la definición de $\sigma(E, E^*)$. Como $f^{-1}(]-\infty, \alpha[) \cap A = \emptyset$, tenemos que:

$$x_0 \in f^{-1}(]-\infty, \alpha[) \subset E \setminus A$$

Como x_0 era un punto de $E \setminus A$ arbitrario, tenemos que $E \setminus A$ es $\sigma(E, E^*)-$abierto, lo que concluye la demostración. □

[1] También podríamos haber dicho que $f^{-1}(]-\infty, \alpha[) = V(f; \alpha)$.

Observación. Por tanto, para decir que un conjunto abierto es abierto en la topología débil basta ver que su complementario es convexo.

Corolario 3.7.1 (Teorema de Mazur)**.** *Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de E débilmente convergente a $x \in E$, $\{x_n\} \rightharpoonup x$. Entonces existe una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de E tal que:*

1. *$\forall n \in \mathbb{N}$, y_n es una combinación convexa finita de $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.*
2. *$\{y_n\} \to x$.*

Envolvente convexa de un conjunto

Para realizar su demostración, conviene tener claros ciertos conceptos:

Definición 3.4. Sea E un espacio vectorial, si $\emptyset \neq X \subset E$ definimos la envolvente convexa de X como:

$$\operatorname{conv}(X) = \bigcap \{C \subset E : C \text{ es convexo y } X \subset C\}$$

Este subconjunto de E verifica ser el menor conjunto convexo que contiene a X.

Proposición 3.8. *Sea E un espacio vectorial y $\emptyset \neq X \subset E$, tenemos que:*

$$\operatorname{conv}(X) = \left\{ \sum_{i \in I} t_i x_i : \begin{array}{l} I \text{ es finito} \\ t_i \in \mathbb{R}_0^+, x_i \in X \quad \forall i \in I \\ \sum\limits_{i \in I} t_i = 1 \end{array} \right\}$$

Demostración. Por doble inclusión y llamando Y al conjunto de la derecha:

$\subseteq$) Para esta inclusión, veamos que Y es convexo. Para ello, si $\sum\limits_{i \in I} t_i x_i, \sum\limits_{j \in J} \lambda_j x_j \in Y$ y $t \in [0,1]$ observamos que:

$$\begin{aligned} t \sum_{i \in I} t_i x_i + (1-t) \sum_{j \in J} \lambda_j x_j &= \sum_{i \in I} t t_i x_i + \sum_{j \in J} (1-t) \lambda_j x_j \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{i \in I \setminus J} t t_i x_i + \sum_{j \in J \setminus I} (1-t) \lambda_j x_j + \sum_{k \in I \cap J} (t t_k + (1-t)\lambda_k) x_k \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos agrupado por cada x_k, si definimos:

$$\alpha_i = \begin{cases} t t_i + (1-t)\lambda_i & \text{si } i \in I \cap J \\ t t_i & \text{si } i \in I \setminus J \\ (1-t)\lambda_i & \text{si } i \in J \setminus I \end{cases}$$

tenemos que:

$$\sum_{i \in I \setminus J} t t_i x_i + \sum_{j \in J \setminus I} (1-t) \lambda_j x_j + \sum_{k \in I \cap J} (t t_k + (1-t)\lambda_k) x_k = \sum_{i \in I \cup J} \alpha_i x_i$$

con $I \cup J$ finito y además:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I\cup J} \alpha_i &= \sum_{i\in I\setminus J} tt_i + \sum_{j\in J\setminus I} (1-t)\lambda_j + \sum_{k\in I\cap J} (tt_k + (1-t)\lambda_k) \\
&= \sum_{i\in I} tt_i + \sum_{j\in J}(1-t)\lambda_j = t\sum_{i\in I} t_i + (1-t)\sum_{j\in J}\lambda_j \\
&\overset{(*)}{=} t + (1-t) = 1
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que $\sum\limits_{i\in I} t_i = 1 = \sum\limits_{j\in J} \lambda_j$.

$\supseteq$) Sea $\sum\limits_{i\in I} t_i x_i \in Y$, veamos que $\sum\limits_{i\in I} t_i x_i \in \operatorname{conv}(X)$, por inducción sobre $|I| = n$:

- Para $n = 1$ tenemos tx con $t = 1$, $x \in X$, luego $x = tx \in X \subset \operatorname{conv}(X)$.
- Para $n = 2$ tenemos que $I = \{p, q\}$:

$$\sum_{i\in I} t_i x_i = t_p x_p + t_q x_q \qquad \text{con} \qquad t_p + t_q = 1 \Longrightarrow t_q = 1 - t_p$$

  de donde $\sum\limits_{i\in I} t_i x_i$ es combinación convexa de dos elementos de X, por lo que ha de ser $\sum\limits_{i\in I} t_i x_i \in \operatorname{conv}(X)$.

- Supuesto para $n = m-1$, veámoslo si $|I| = m$. Tomando $J = I \setminus \{k\}$ con $k \in I$, vemos que:

$$\sum_{i\in I} t_i x_i = t_k x_k + \sum_{j\in J} t_j x_j = t_k x_k + (1-t_k)\sum_{j\in J} \frac{t_j}{(1-t_k)} x_j$$

  Observemos que:

$$t_k + \sum_{j\in J} t_j = \sum_{i\in I} t_i = 1 \Longrightarrow \sum_{j\in J} t_j = 1 - t_k$$

  Por lo que:

$$\sum_{j\in J} \frac{t_j}{(1-t_k)} = \frac{1}{1-t_k}\sum_{j\in J} = 1$$

  Por hipótesis de inducción (recordemos que $|J| = m-1$) tenemos que $\sum\limits_{j\in J} \frac{t_j}{1-t_k} x_j \in \operatorname{conv}(X)$, por lo que hemos probado que $\sum\limits_{i\in I} t_i x_i$ es conbinación convexa de dos elementos de $\operatorname{conv}(X)$, por lo que tiene que estar en $\operatorname{conv}(X)$. □

Estamos ya en condiciones de probar el Corolario anterior:

Corolario 3.8.1 (Teorema de Mazur)**.** *Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de E débilmente convergente a $x \in E$, $\{x_n\} \rightharpoonup x$. Entonces existe una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de E tal que:*

1. *$\forall n \in \mathbb{N}$, y_n es una combinación convexa finita de $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.*

2. $\{y_n\} \to x$.

Demostración. Llamando $C = \operatorname{conv}(\{x_k : k \in \mathbb{N}\})$, si $\{x_n\} \rightharpoonup x$ tenemos entonces que $x \in \overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}^{\sigma(E,E^*)}$, luego:

$$x \in \overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}^{\sigma(E,E^*)} \subset \overline{C}^{\sigma(E,E^*)}$$

tenemos que $\overline{C}^{\sigma(E,E^*)}$ es un conjunto débilmente cerrado, luego es un conjunto cerrado para la norma de E. En estas condiciones:

- Como $\overline{C}^{\sigma(E,E^*)}$ es un cerrado que contiene a C, ha de ser $\overline{C} \subset \overline{C}^{\sigma(E,E^*)}$.
- Como tenemos también que $C \subset \overline{C}$, tomando cierre débil a ambos lados obtenemos:
$$\overline{C}^{\sigma(E,E^*)} \subset \overline{(\overline{C})}^{\sigma(E,E^*)}$$
  Pero como $\overline{C}$ es un conjunto cerrado y convexo, es débilmente cerrado, por lo que:
$$\overline{C}^{\sigma(E,E^*)} \subset \overline{(\overline{C})}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{C}$$

En definitiva, $\overline{C} = \overline{C}^{\sigma(E,E^*)}$ y tenemos que $x \in \overline{C}$, por lo que existe una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de C de forma que $\{y_n\} \to x$. □

Teorema 3.9. *Sean E, F dos espacios de Banach y $T : E \to F$ lineal, entonces equivalen:*

1. $T : (E, \tau_{\|\cdot\|_E}) \to (F, \tau_{\|\cdot\|_F})$ *es continua.*
2. $T : (E, \tau_{\|\cdot\|_E}) \to (F, \sigma(F, F^*))$ *es continua.*
3. $T : (E, \sigma(E, E^*)) \to (F, \sigma(F, F^*))$ *es continua.*

Demostración. Demostremos todas las implicaciones:

$1 \Longrightarrow 2)$ Para probar que $T : (E, \tau_{\|\cdot\|_E}) \to (F, \sigma(F, F^*))$ es continua:

Opción 1. Si tomamos un abierto $U \in \sigma(F, F^*) \subset \tau_{\|\cdot\|_F}$ tendremos entonces que $T^{-1}(U) \in \tau_{\|\cdot\|_E}$.

Opción 2. Si tomamos cualquier $f \in F^*$, tenemos que $f : (F, \tau_{\|\cdot\|_F}) \to \mathbb{R}$ es continua, por lo que $f \circ T : (E, \tau_{\|\cdot\|_E}) \to \mathbb{R}$ será también continua, y podemos aplicar la Proposición 3.2

$2 \Longrightarrow 3)$ Para esta implicación:

Opción 1. Sea $f \in F^*$, tenemos que:

$$f \circ T : (E, \tau_{\|\cdot\|_E}) \to (\mathbb{R}, \tau_u) \in E^*$$

Por lo que $f \circ T : (E, \sigma(E, E^*)) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ ha de ser continua por la definición de $\sigma(E, E^*)$, para toda $f \in F^*$, de donde tenemos finalmente que $T : (E, \sigma(E, E^*)) \to (F, \sigma(F, F^*))$ es continua.

Opción 2. Si $U \in \sigma(F, F^*)$, tenemos entonces que:

$$U = \bigcup_{arb} \bigcap_{fin} f^{-1}(\omega)$$

con $f \in F^*$, ω abierto de $\mathbb{R}$, de donde:

$$T^{-1}(U) = \bigcup_{arb} \bigcap_{fin} T^{-1}(f^{-1}(\omega)) = \bigcup_{arb} \bigcap_{fin} (f \circ T)^{-1}(\omega)$$

Como $f \circ T \in E^*$, tenemos por definición de topología débil que:

$$T^{-1}(U) = \bigcup_{arb} \bigcap_{fin} (f \circ T)^{-1}(\omega) \in \sigma(E, E^*)$$

$3 \Longrightarrow 1)$ Para esta última implicación:

Opción 1. Si tomamos una sucesión de puntos de la gráfica convergente, $\{(x_n, T(x_n))\} \to (x, y)$, tendremos:

$$\begin{aligned} \{x_n\} \to x \quad &\Longrightarrow \quad \{x_n\} \rightharpoonup x \\ \{T(x_n)\} \to y \quad &\Longrightarrow \quad \{T(x_n)\} \rightharpoonup y \end{aligned}$$

la primera implica usando la hipótesis que $\{T(x_n)\} \rightharpoonup T(x)$, de donde $T(x) = y$ (ya que $\sigma(F, F^*)$ es Hausdorff), por lo que $(x, y) \in Gr(T)$, de donde la gráfica es cerrada en $(E \times F, \tau_E \times \tau_F)$. Como E y F son Banach, tenemos por el Teorema de la aplicación cerrada que T es continua.

Opción 2. Si tomamos una sucesión de puntos de la gráfica convergente, $\{(x_n, T(x_n))\} \to (x, y)$, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \{x_n\} \to x \quad &\Longrightarrow \quad \{x_n\} \rightharpoonup x \quad \Longleftrightarrow \quad \{f(x_n)\} \to f(x) \quad \forall f \in E^* \\ \{T(x_n)\} \to y \quad &\Longrightarrow \quad \{T(x_n)\} \rightharpoonup y \quad \Longleftrightarrow \quad \{g(T(x_n))\} \to g(y) \quad \forall g \in F^* \end{aligned}$$

Dada $g \in F^*$, como $T : (E, \sigma(E, E^*)) \to (F, \sigma(F, F^*))$ es continua tendremos pues que $g \circ T : (E, \sigma(E, E^*)) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ es continua, de donde $g \circ T \in E^*$, por lo que tendremos que $\{g(T(x_n))\} \to g(T(x))$, de donde deducimos que $g(y) = g(T(x))$. Como g era arbitraria esto implica que $y = T(x)$, ya que si no $\{T(x)\}$ y $\{y\}$ serían dos conjuntos disjuntos, cerrados, convexos y compactos de F, luego podríamos aplicar la segunda versión geométrica de Hahn-Banach, obteniendo cierta $g \in F^*$ de forma que $g(T(x)) < g(y)$, pero esto es una contradicción. Por tanto, hemos probado que:

$$Gr(T) \subset (E \times F, \tau_{\|\cdot\|_E} \times \tau_{\|\cdot\|_F})$$

es cerrado, por lo que aplicando el Teorema de la Gráfica cerrada tenemos que $T : (E, \tau_{\|\cdot\|_E}) \to (F, \tau_{\|\cdot\|_F})$ es continua.

Opción 3. Si consideramos:

$$Gr(T) = \{(x, Tx) : x \in E\} \subset E \times F$$

Si T es continua, entonces $Gr(T)$ es cerrado en la topología producto $(E \times F, \sigma(E, E^*) \times \sigma(F, F^*))$. Puede probarse que:

$$\sigma(E, E^*) \times \sigma(F, F^*) = \sigma(E \times F, (E \times F)^*)$$

Finalmente hay que probar que $Gr(T)$ es cerrado en $(E \times F, \tau_{\|\cdot\|_{E\times F}})$, donde consideramos por ejemplo la norma:

$$\|(x, y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$$

De donde $Gr(T)$ es cerrado en $\tau_{\|\cdot\|_{E\times F}}$, y por el Teorema de la Gráfica cerrada se llega a que T es continua.

$\square$

3.3. Topología débil$-*$

Sea E un espacio normado, tenemos que E^* es de Banach, con lo que podemos considerar su topología débil, $\sigma(E^*, E^{**})$. Recordemos que siempre tenemos una inyección canónica

$$\begin{array}{rccc} J: & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & J(x) \end{array}$$

donde teníamos para cada $x \in E$:

$$\begin{array}{rccc} J(x): & E^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \langle f, x\rangle \end{array}$$

Definición 3.5. Sea E un espacio normado, si consideramos como J la inyección canónica en su bidual, la topología débil$-*$ de E será $\sigma(E^*, J(E))$, es decir, la topología inicial sobre E^* que hace continuas todas aquellas aplicaciones de $J(E) \subset E^{**}$.

Observación. Sea E un espacio normado, si consideramos la topología débil de su dual, $\sigma(E^*, E^{**})$ tenemos que esta es la topología inicial sobre E^* que hace continuos todos aquellos elementos de E^{**}. Como $J(E) \subset E^{**}$, tendremos pues que:

$$\sigma(E^*, J(E)) \subset \sigma(E^*, E^{**})$$

es decir, la toplogía débil$-*$ de E está contenida en la topología débil de E^*. Observemos que si E es reflexivo tendremos que $J(E) = E^{**}$, por lo que en dicho caso:

$$\sigma(E^*, J(E)) = \sigma(E^*, E^{**})$$

Notación. A veces notaremos:

$$\sigma(E^*, E) = \sigma(E^*, J(E))$$

Pensando en identificar $J(E)$ con E dentro de E^{**}, puesto que J es una aplicación lineal inyectiva y que preserva la norma.

Proposición 3.10. $\sigma(E^*, J(E))$ *es Hausdorff.*

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in E^*$ distintos, entonces existe $x \in E$ de forma que $\langle f_1, x\rangle \neq \langle f_2, x\rangle$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que:

$$\langle f_1, x\rangle < \langle f_2, x\rangle$$

Con lo que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$\langle f_1, x\rangle < \alpha < \langle f_2, x\rangle$$

Tomando ahora:

$$O_1 = \{f \in E^* : \langle f, x\rangle < \alpha\} = \{f \in E^* : J(x)(f) < \alpha\} = J(x)^{-1}(]-\infty, \alpha[) \in \sigma(E^*, J(E))$$
$$O_2 = \{f \in E^* : \langle f, x\rangle > \alpha\} = \{f \in E^* : J(x)(f) > \alpha\} = J(x)^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in \sigma(E^*, J(E))$$

Tenemos que $f_1 \in O_1$, $f_2 \in O_2$ con $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, por lo que $\sigma(E^*, J(E))$ es Hausdorff. □

Proposición 3.11. *Dada $f_0 \in E^*$ y $x_1, \ldots, x_k \in E$, tenemos que:*

1. *$V = V(x_1, \ldots, x_k; \varepsilon) = \{f \in E^* : |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon, \quad i \in \{1, \ldots, k\}\}$ es un entorno de f_0 en $\sigma(E^*, J(E))$, para todo $\varepsilon > 0$.*
2. *Además $\mathcal{V} = \{V(x_1, \ldots, x_k; \varepsilon) : \varepsilon > 0, x_1, \ldots, x_k \in E\}$ es una base de entornos de f_0 en $\sigma(E^*, J(E))$.*

Demostración. Es análoga a la de la Proposición 3.4:

1. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, defino $a_i = \langle f_0, x_i\rangle$. Vemos que:

   $$|\langle f, x_i\rangle - a_i| = |\langle f, x_i\rangle - \langle f_0, x_i\rangle| = |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon$$

   Por lo que:

   $$V = \bigcap_{i=1}^{k} J(x_i)^{-1}\left(]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[\right)$$

   Con lo que V es abierto en $\sigma(E^*, J(E))$, por intersección finita de abiertos, luego es entorno de todos sus puntos. En particular $f_0 \in V$, de donde V es entorno de f_0.

2. Sea U un entorno de f_0 en $\sigma(E^*, J(E))$, tenemos que existe $k \in \mathbb{N}$ de forma que $f_0 \in W \subset U$, donde:

   $$W = \bigcap_{i=1}^{k} J(x_i)^{-1}(\omega_i)$$

   donde cada ω_i es un abierto de $\mathbb{R}$ que contiene a a_i. Podemos tomar $\varepsilon > 0$ de forma que $]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[\subset \omega_i \quad \forall \varepsilon \in \{1, \ldots, k\}$. Si tomamos ahora:

   $$V = V(x_1, \ldots, x_k; \varepsilon)$$

   Tenemos entonces que $f_0 \in V \subset W \subset U$.

□

Notación. Si tenemos una sucesión de elementos de E^* que converge a f en la topología $\sigma(E^*, J(E))$, escribiremos:

$$\{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} f$$

Proposición 3.12. *Sea E un espacio de Banach y $\{f_n\}$ una sucesión de elementos de E^*:*

1. $\{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} f \iff \{f_n(x)\} \to f(x) \quad \forall x \in E.$
2. $\{f_n\} \to f \implies \{f_n\} \rightharpoonup f \implies \{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} f.$
3. $\{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} f \implies \{\|f_n\|\}$ *acotada y* $\|f\| \leqslant \liminf \|f_n\|.$
4. *Tenemos:*

$$\left.\begin{array}{l} \{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} f \\ \{x_n\} \to x \end{array}\right\} \implies \{\langle f_n, x_n\rangle\} \to \langle f, x\rangle$$

Demostración. Es análoga a la de la Proposición 3.5:

1. Es caso particular de la Proposición 3.2:

$$\{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} f \iff \{f_n(x)\} = \{Jx(f_n)\} \to Jx(f) = f(x) \qquad \forall x \in E$$

2. Sabemos ya que $\{f_n\} \to f \implies \{f_n\} \rightharpoonup f$, por la Proposición 3.5 aplicada a $\sigma(E^*, E^{**})$. Ahora, la Proposición 3.2 nos dice que:

$$\{f_n\} \rightharpoonup f \iff \{\chi(f_n)\} \to \chi(f) \quad \forall \chi \in E^{**}$$

En particular, para cada $x \in E$ tenemos que $Jx \in E^{**}$, luego tendremos que $\{Jx(f)\} \to Jx(f) \quad \forall x \in E$ que equivale, nuevamente por la Proposición 3.2, a que $\{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

3. Sabemos por 1 que $\{f_n(x)\} \to f(x)$ para todo $x \in E$, por lo que en particular la sucesión $\{f_n(x)\}$ está acotada, es decir, el conjunto:

$$\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

está acotado $\forall x \in E$. Usando el Corolario 2.3.3 tenemos entonces que $\{f_n\}$ está acotada, es decir, que $\{\|f_n\|\}$ está acotada. Por otra parte:

$$|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|\|x\| \qquad \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\{f_n\}$ está acotada, podemos tomar límite inferior a ambos lados, obteniendo que:

$$|f(x)| \leqslant \liminf \|f_n\|\|x\| = \|x\| \liminf \|f_n\| \qquad \forall x \in E$$

Esto prueba que f es continua y si recordamos que:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$$

y aplicamos la desigualdad anterior a $x \in \overline{B}$ vemos que:

$$\|f\| \leqslant \liminf \|f_n\|$$

4. Tenemos para todo $n \in \mathbb{N}$ que:

$$\begin{aligned}|f_n(x_n) - f(x)| &= |f_n(x_n) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x - x_n)| + |(f_n - f)(x)| \\ &\leqslant \|f_n\|\|x - x_n\| + |(f_n - f)(x)|\end{aligned}$$

   Por el apartado 1 tenemos que $(f_n - f)(x)$ tiende a 0, y por el apartado 3 tenemos que $\|f_n\|$ está acotada. Finalmente, como $\{x_n\} \to x$, hemos probado que $\{f_n(x_n)\} \to f(x)$. $\square$

Nos preguntamos ahora por las aplicaciones $\chi^* \to \mathbb{R}$ lineales que son $\sigma(E^*, E)-$continuas: sabemos ya que $Jx : E^* \to \mathbb{R}$ será $\sigma(E^*, E)-$continua para cada $x \in E$, pero no sabemos si hay aplicaciones de $E^{**} \setminus J(E)$ que sean $\sigma(E^*, E)-$continuas.

Ejercicio 3.3.1. Sea X un espacio vectorial y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi : X \to \mathbb{R}$ lineales. Si se cumple que:

$$\varphi_i(v) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \Longrightarrow \quad \varphi(v) = 0$$

Entonces, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$$

En particular:

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \text{ depende linealmente de } \varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

Demostración. Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} T: & X & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \end{array}$$

que verifica:

$$\ker T = \{x \in X : \varphi_1(x) = \ldots = \varphi_n(x) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i$$

Por el Primer Teorema de Isomorfía lineal tenemos que T induce un isomorfismo lineal

$$\overline{T} : \frac{X}{\ker T} \to Im(T) \subset \mathbb{R}^n$$

Como $\ker T = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi$, podemos también inducir φ al cociente, obteniendo una aplicación lineal

$$\begin{array}{rccl} \overline{\varphi}: & \dfrac{X}{\ker T} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & [x] & \longmapsto & \varphi(x) \end{array}$$

que estará bien definida. Podemos definir ahora $\overline{L} : Im(T) \to \mathbb{R}$ dada por (recordamos que $Im(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$):

$$\overline{L}(x_1, \ldots, x_n) = \overline{\varphi}\left(\overline{T}^{-1}(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

Y como $Im(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ podemos extender $\overline{L}$ a todo $\mathbb{R}^n$, obteniendo una aplicación $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de forma que $L\big|_{Im(T)} = \overline{L}$. Como $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal, han de existir $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$L(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \qquad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Finalmente, si tomamos $x \in X$ observamos que:

$$\varphi(x) = \overline{L}(T(x)) = L(T(x)) = \lambda_1 (T(x))_1 + \cdots + \lambda_n (T(x))_n = \lambda_1 \varphi_1(x) + \cdots + \lambda_n \varphi_n(x)$$

Por lo que $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$, como queríamos probar. □

Proposición 3.13. *Sea E de Banach, si consideramos $\varphi : E^* \to \mathbb{R}$ lineal:*

$$\text{Si } \varphi \text{ es } \sigma(E^*, E) - \text{continua} \quad \Longrightarrow \quad \exists x \in E : J(x) = \varphi$$

La condición $J(x) = \varphi$ es equivalente a que $\langle \varphi, f \rangle = \langle f, x \rangle \quad \forall f \in E^*$.

Demostración. Que φ sea continua significa que existe V un entorno de 0 en $\sigma(E^*, E)$ de forma que:

$$|\varphi(f)| \leqslant M \qquad \forall f \in V$$

Tenemos entonces que existen $x_1, \ldots, x_n \in E$, $\varepsilon > 0$ de forma que:

$$V(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{f \in E^* : |\langle f, x_i \rangle| < \varepsilon \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset V$$

Observemos que si $f \in E^*$ verifica:

$$\langle f, x_i \rangle = 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

tendremos entonces que $\lambda f \in V(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) \subset V$, por lo que:

$$|\lambda||\varphi(f)| = |\varphi(\lambda f)| \leqslant M \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

de donde ha de ser $\varphi(f) = 0$.

Si definimos ahora $\varphi_i : E^* \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\varphi_i(f) = \langle f, x_i \rangle \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

tenemos por el Ejercicio 3.3.1 y por la condición:

$$\langle f, x_i \rangle = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \Longrightarrow \quad \varphi(f) = 0$$

que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$$

Observamos finalmente que:

$$\varphi(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f, x_i \rangle = \left\langle f, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\rangle = J\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)(f) \qquad \forall f \in E^*$$

□

Por lo que las únicas aplicaciones lineales que son $\sigma(E^*, E)-$continuas son las que ya conocíamos.

Si nos preguntamos ahora por los hiperplanos que son cerrados para $\sigma(E^*, E)$:

Corolario 3.13.1. *Si H es un hiperplano en E^* que es $\sigma(E^*, E)-$cerrado, entonces existen $x \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que:*

$$H = \{f \in E^* : f(x) = \alpha\}$$

Demostración. Si H es un hiperplano en E^*, existen entonces $0 \neq \varphi : E^* \to \mathbb{R}$ lineal y $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$H = \{f \in E^* : \varphi(f) = \alpha\}$$

Como H es débil$-*$ cerrado, veamos a continuación que φ ha de ser $\sigma(E^*, E)-$continua. En dicho caso, tendremos por la Proposición anterior que existirá $x \in E$ de forma que $\varphi(f) = f(x) \quad \forall f \in E^*$, de donde:

$$H = \{f \in E^* : f(x) = \alpha\}$$

Veamos entonces que φ es $\sigma(E^*, E)-$continua, sabiendo que H es débil$-*$ cerrado. Por el contrarrecíproco, supongamos que φ no es $\sigma(E^*, E)-$continua. Como φ es lineal, equivale a que no sea $\sigma(E^*, E)-$continua en 0, por lo que podemos suponer que existe una parcial de cierta sucesión $\{f_n\}$ de puntos de E^* de forma que para cierto $\varepsilon_0 > 0$ se tiene que $\{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ y $|\varphi(f_n)| \geqslant \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Por tanto tenemos que $\varphi(f_0) \neq 0$. Podemos tomar por tanto λ para que se cumpla:

$$\frac{f_n}{\varphi(f_n)} - \lambda \frac{f_0}{\varphi(f_0)} \in H \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ya que:

$$\varphi\left(\frac{f_n}{\varphi(f_n)} - \lambda \frac{f_0}{\varphi(f_0)}\right) = \frac{1}{\varphi(f_n)}\varphi(f_n) - \frac{\lambda}{\varphi(f_0)}\varphi(f_0) = 1 - \lambda$$

Por lo que tomando $\lambda = 1 - \alpha$ se tiene que dicho elemento está en H. Nos preguntamos ahora por la convergencia de dicha cantidad:

- Tenemos que $\frac{f_n}{\varphi(f_n)} \to 0$.
- La segunda cantidad es constante

Por lo que:

$$\left\{\frac{f_n}{\varphi(f_n)} - \lambda \frac{f_0}{\varphi(f_0)}\right\} \to -\lambda \frac{f_0}{\varphi(f_0)} = -(1-\alpha)\frac{f_0}{\varphi(f_0)}$$

Y tenemos que:

$$\varphi\left(-(1-\alpha)\frac{f_0}{\varphi(f_0)}\right) = \frac{-(1-\alpha)}{\varphi(f_0)}\varphi(f_0) = \alpha - 1 \neq \alpha$$

Por lo que tenemos que:

$$0 - \frac{(1-\alpha)}{\varphi(f_0)} f_0 \notin H$$

Por lo que H no es débil$-*$ cerrado, lo que prueba el contrarrecíproco de la afirmación que queríamos probar. □

Sabíamos ya que $\sigma(E^*, E) \subset \sigma(E^*, E^{**})$, así como que:

$$\sigma(E^*, E) = \sigma(E^*, E^{**})$$

si E es reflexivo.

Corolario 3.13.2. *Sea E un espacio de Banach:*

$$\sigma(E^*, E) = \sigma(E^*, E^{**}) \iff E \text{ es reflexivo.}$$

Demostración. En vista de lo que ya conocemos basta probar que si E no es reflexivo entonces:

$$\sigma(E^*, E) \subsetneq \sigma(E^*, E^{**})$$

Para ello, si E no es reflexivo podemos encontrar $\chi \in E^{**} \setminus J(E)$, y considerar el hiperplano:

$$H = \ker \chi = \{f \in E^* : \chi(f) = 0\}$$

que es cerrado para $\sigma(E^*, E^{**})$ por ser χ $\sigma(E^*, E^{**})-$continua pero este conjunto no es $\sigma(E^*, E)-$cerrado, ya que esta condición implicaría la existencia de $x \in E$ de forma que $\chi = J(x)$, lo que llevaría a una contradicción. Hemos encontrado un conjunto cerrado en $\sigma(E^*, E^{**})$ que no es cerrado para $\sigma(E^*, E)$, por lo que no puede darse la otra inclusión. □

3.4. Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki

Consideraremos para nuestro espacio E:

$$\mathbb{R}^E = \{w : E \to \mathbb{R}\} = \{w = \{w_x\}_{x \in E}\}$$

Que es un espacio vectorial.

Para definir una topología sobre $\mathbb{R}^E$, como queremos que la convergencia en la topología de $\mathbb{R}^E$ equivalga a la convergencia en cada una de las proyecciones, tomamos lo topología inicial de la familia de proyecciones:

$$\begin{array}{rccc} \pi_x : & \mathbb{R}^E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & w & \longmapsto & w_x \end{array}$$

para cada $x \in E$.

Usaremos el Teorema de Tijonov[2]:

Teorema 3.14 (de Tijonov)**.** *El producto arbitrario de compactos es compacto.*

Teorema 3.15 (de Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.**

$$\overline{B}_{E^*} = \{f \in E^* : \|f\| \leqslant 1\} \text{ es débil}-* \text{ compacta}$$

[2]Que también es equivalente al axioma de elección.

Demostración. Es trivial que $E^* \subset \mathbb{R}^E$. Consideramos en $\mathbb{R}^E$ la topología τ, la topología inicial que hace continuas todas las proyecciones. De esta forma, cada vez que tengamos una aplicación φ que llegue a $(\mathbb{R}^E, \tau)$, tenemos que comprobar que la composición $\pi_x \circ \varphi$ (que llegan a $\mathbb{R}$) sea continua. Usaremos que:

$$(E^*, \sigma(E^*, E)) \xrightarrow{\Phi} (\mathbb{R}^E, \tau) \text{ es continua} \Longleftrightarrow (E^*, \sigma(E^*, E)) \xrightarrow{\pi_x \circ \Phi} \mathbb{R} \text{ es continua} \quad \forall x \in E$$

Si consideramos

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & E^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^E \\ & f & \longmapsto & f \end{array}$$

Por definición de $\sigma(E^*, E)$ tenemos que $\phi_x \circ \Phi = J(x)$ es continua, por lo que Φ es continua.

Tenemos que Φ es claramente inyectiva y es sobreyectiva, puesto que $\Phi(E^*) = E^*$.

$$(E^*, \tau\big|_{E^*}) \xrightarrow{\Phi^{-1}} (E^*, \sigma(E^*, E))$$

Para ver que Φ^{-1} sea continua, es equivalente a ver que:

$$(E^*, \tau\big|_{E^*}) \xrightarrow{J(x)\circ\Phi^{-1}} \mathbb{R}$$

es continua, para cada $x \in E$. Sin embargo, como cada una de estas es continua por hipótesis, tenemos que Φ^{-1} es continua. En definitiva:

$$(E^*, \sigma(E^*, E)) \xrightarrow{\Phi} (E^*, \tau\big|_{E^*})$$

es un homeomorfismo.

Bajo estas condiciones (tenemos además que $\|f\| = 1$), veamos quién es $\Phi(\overline{B}_{E^*})$:

$$K = \Phi(\overline{B}_{E^*}) = \left\{ w \in \mathbb{R}^E : \begin{array}{l} |w_x| \leqslant \|x\| \\ w_{x+y} = w_x + w_y \qquad \forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ w_{\lambda x} = \lambda w_x \end{array} \right\}$$

Veamos que K es compacto, pues si consideramos:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{w \in \mathbb{R}^E : |w_x| \leqslant \|x\| \qquad \forall x \in E\} \\ K_2 &= \{w \in \mathbb{R}^E : w_{x+y} = w_x + w_y \qquad \forall x, y \in E\} \\ K_3 &= \{w \in \mathbb{R}^E : w_{\lambda x} = \lambda w_x \forall x, y \in E\} \end{aligned}$$

Tenemos que $K = K_1 \cap K_2 \cap K_3$.

- Vemos fácilmente que:

  $$K_2 = \{w \in \mathbb{R}^E : w_{x+y} - w_x - w_y = 0 \qquad \forall x, y \in E\}$$

  Que claramente es un conjunto cerrado.

- Con la misma idea:

$$K_3 = \{w \in \mathbb{R}^E : w_{\lambda x} - \lambda w_x = 0 \qquad \forall x, y \in E\}$$

Podemos reescribir K_1 como:

$$K_1 = \{w \in \mathbb{R}^E : -\|x\| \leqslant w_x \leqslant \|x\| \qquad \forall x \in E\} = [-\|x\|, \|x\|]^E$$

Como $[-\|x\|, \|x\|]$ es compacto para todo $x \in E$, por el Teorema de Tijonov tenemos que K_1 es compacto, como producto de compactos. Finalmente, tenemos que K es un subconjunto cerrado de K_1, que es compacto, por lo que K es compacto. □

3.4.1. Espacios reflexivos

Teorema 3.16.

Si E es un espacio de Banach reflexivo, entonces $\overline{B}_{E^*}$ es débil-compacto

Demostración. Sabemos que $J : E \to E^{**}$ es lineal, inyectiva y continua, por lo que por el Teorema de la aplicación abierta restringiendo J a su imagen, tenemos que J es un embebimiento. Si E es reflexivo, tenemos de hecho que J es un homemomorfismo, pues $J(E) = E^{**}$. Como J es una isometría, es claro que:

$$J(\overline{B}_E) = \overline{B}_{E^{**}} = \overline{B}_{(E^*)^*}$$

Hemos visto en el teorema anterior que $\overline{B}_{(E^*)^*}$ es $\sigma(E^{**}, E^*)-$compacta. Dado cualquier $f \in E^*$, si consideramos:

$$\begin{array}{rrcl} f \circ J^{-1} : & (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \xi & \longmapsto & \xi(f) \end{array}$$

Tenemos que es continua, para cada $f \in E^*$, por lo que la aplicación:

$$(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)) \xrightarrow{J^{-1}} (E, \sigma(E, E^*))$$

es continua. Tenemos que $\overline{B}_E$ es compacto. □

La afirmación recíproca es también cierta[3], y se conoce como Teorema de Kakutani.

Proposición 3.17. *Sea E un espacio de Banach reflexivo, si M es un subespacio vectorial cerrado de E entonces M es reflexivo.*

Demostración. Tenemos que M es un espacio de Banach, por ser cerrado. Para ver que M es reflexivo, veamos que:

$$\overline{B}_M = \{x \in M : \|x\| \leqslant 1\}$$

es $\sigma(M, M^*)-$compacto, o equivalentemente, que es $\sigma(E, E^*)-$compacto.

Es sencillo probar que el Teorema de Hahn-Banach nos da la igualdad:

$$\sigma(E, E^*)\big|_M = \sigma(M, M^*)$$

[3]Su demostracion excede los conocimientos del curso, aunque el resultado se usará.

Como M es cerrado en E, entonces el conjunto $\overline{B}_M$ es también cerrado en E, así como que está dentro de un conjunto convexo, por lo que $\overline{B}_M$ es $\sigma(E,E^*)-$cerrado, y tenemos que $\overline{B}_M \subset \overline{B}_E$, y esta última es $\sigma(E,E^*)-$compacto, porque E es reflexivo. Como $\overline{B}_M$ es $\sigma(E,E^*)-$cerrado dentro de un $\sigma(E,E^*)-$compacto, tenemos que es $\sigma(E,E^*)-$compacto. □

Corolario 3.17.1. *Sea E un espacio de Banach:*

$$E \text{ es reflexivo} \Longleftrightarrow E^* \text{ es reflexivo}$$

Demostración. Por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Tenemos que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} J: & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & J(x) \end{array}$$

donde $J(x)(f) = f(x)$ para cada $f \in E^*$ es sobreyectiva.

Queremos llegar a ver que E^* es reflexivo, es decir, que su aplicación

$$\begin{array}{rccc} J: & E^* & \longrightarrow & (E^*)^{**} \\ & f & \longmapsto & J(f) \end{array}$$

donde $J(f)(\xi) = \xi(f)$ para cada $\xi \in E^{**}$, es sobreyectiva. Para ello, sea $\varphi \in (E^*)^{**}$, definimos $f : E \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \varphi(J(x)) \qquad \forall x \in E$$

Y la demostración terminará viendo que $J(f) = \varphi$.

$\Longleftarrow$) A partir de la otra implicación, tenemos que $E^{**} = (E^*)^*$ es reflexivo, y teníamos que la aplicación $J : E \to E^{**}$ era una inyección, por lo que $J(E)$ es un subespacio vectorial de E^{**}. Además, $J(E)$ es cerrado por ser de Banach, puesto que si $\{J(x_n)\} \to y$ con $J(x_n) \in J(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tendremos que (como J es una isometría) $\{x_n\}$ es de Cauchy en E. Como E es completo, existe $x \in E$ con $\{x_n\} \to x$, de donde ha de ser $y = J(x)$.

En definitiva, la Proposición anterior nos dice que $J(E)$ es reflexivo, y como J es una isometría, tendremos que E es reflexivo.

□

El siguiente resultado es muy útil a la hora de trabajar con análisis funcional aplicado:

Corolario 3.17.2. *Sea E un espacio de Banach reflexivo y $K \subset E$ un conjunto acotado, convexo y cerrado, entonces K es $\sigma(E,E^*)-$compacto.*

Demostración. Si K es convexo y cerrado entonces K es $\sigma(E,E^*)-$cerrado. Como K es acotado, podemos encontrar cierto radio $R \in \mathbb{R}^+$ de forma que $K \subset R\overline{B}_E$. Como E es reflexivo, tenemos que $\overline{B}_E$ es $\sigma(E,E^*)-$compacto, luego $R\overline{B}_E$ seguirá siendo $\sigma(E,E^*)-$compacto. Como K es $\sigma(E,E^*)-$*cerrado* tenemos automáticamente que K es $\sigma(E,E^*)-$compacto. □

Observemos que podemos sustituir las hipótesis de "convexo y cerrado" por que K sea $\sigma(E, E^*)-$cerrado, pues en realidad en la demostración del Corolario solo usamos esta propiedad.

Corolario 3.17.3. *Toda sucesión acotada de puntos de E con E un espacio de Banach reflexivo admite una parcial débilmente convergente.*

Ejercicio 3.4.1. Los espacios:

$$\mathbb{R}^N, \quad H \text{ Hilbert}, \quad l^p \ (1 < p < \infty), \quad L^p \ (1 < p < \infty)$$

son reflexivos.

- $C(K)$ no es reflexivo, con K compacto.
- ¿l^1 o l^∞ son reflexivos?
- ¿L^1 o L^∞ son reflexivos?

3.5. Espacios separables

Definición 3.6 (Espacio separable)**.** Sea E un espacio métrico, se dice que es separable si y solo si existe $D \subset E$ denso y numerable.

Ejercicio 3.5.1. Estudiar la separabilidad de los siguientes conjuntos:

- l^p es separable para $1 \leqslant p < \infty$.
- L^p es separable para $1 \leqslant p < \infty$.
- l^∞ no es separable.
- L^∞ no es separable.

Proposición 3.18. *Sea E es un espacio métrico separable y $F \subset E$, entonces F es separable.*

Demostración. Si E es separable ha de existir $D \subset E$ denso y numerable, por lo que podemos escribirlo como:

$$D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Como D es denso, para todo $x \in F$, y para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$d(x_{n_0}, x) < \frac{1}{m}$$

O equivalentemente, que $x \in B\left(x_{n_0}, \frac{1}{m}\right) \cap F$, por lo que dicha intersección es no vacía. Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ consideramos por tanto:

$$B\left(x_n, \frac{1}{m}\right) \cap F$$

Si la intersección no es vacía, existe $a_{m,n} \in B\left(x_n, \frac{1}{m}\right) \cap F$. Tomamos:

$$C = \left\{a_{m,n} : B\left(x_n, \frac{1}{m}\right) \cap F \neq \emptyset\right\} \subset F$$

Y C es claramente numerable. Calculamos ahora:

$$d(x, a_{m,n_0}) \leqslant d(x, x_0) + d(x_{n_0}, a_{m,n_0}) \leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$$

De aquí deducimos que C es denso en F. □

Teorema 3.19. *Sea E un espacio de Banach con E^* separable, entonces E es separable.*

Demostración. Como E^* es separable, entonces existe $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E^*$ denso. Recordemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$\|f_n\| = \sup_{\|x\|=1} f_n(x) \geqslant \frac{1}{2} \sup_{\|x\|=1} f_n(x)$$

Existe por tanto $x_n \in E$ con $\|x_n\| = 1$ de forma que:

$$\frac{1}{2}\|f_n\| \leqslant f_n(x_n) \leqslant \|f_n\|$$

Hay que tener en cuenta que si $\|f_n\| = 0$ es trivial y si no entonces la desigualdad anterior es estricta, lo que nos permite tomar x_n. Consideramos ahora el subespacio vectorial que genera $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$L = \left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Y también:

$$L_0 = \left\{\sum_{k=1}^{n} r_k x_k : r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Que es numerable, como unión numerable de conjuntos numerables:

$$L_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\sum_{k=1}^{n} r_k x_k : r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}\right\}$$

Es cierto además que L_0 es denso en L. Si probamos que L es denso en E tendremos entonces que L_0 es denso en E. Con vistas a usar el Corolario 1.22.1, tomamos $f \in E^*$ con $f\big|_L = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$\|f_n - f\| < \varepsilon$$

Y tenemos entonces que:

$$\frac{1}{2}\|f_n\| \leqslant \langle f_n, x_n\rangle \overset{(*)}{=} \langle f_n - f, x_n\rangle \leqslant \|f_n - f\|\cancelto{1}{\|x_n\|} < \varepsilon$$

donde en $(*)$ usamos que $f(x_n) = 0$. Si observamos ahora que:

$$\|f\| \leqslant \|f - f_n\| + \|f_n\| < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Por lo que $\|f\| = 0$, de donde $f = 0$, por lo que aplicando el Corolario 1.22.1 tenemos que L es denso en E. □

El recíproco es falso: l^∞ no es separable y l^1 sí, siendo $(l^1)^* = l^\infty$.

Corolario 3.19.1. *Si E es de Banach:*

$$E \text{ es reflexivo y separable} \Longleftrightarrow E^* \text{ es reflexivo y separable}$$

$\Longleftarrow$) *Si E^* es separable, entonces E es separable por el últimio Teorema, y si E^* es reflexivo, entonces E será también reflexivo, por el Corolario 3.17.1.*

$\Longrightarrow$) *Si E es reflexivo y separable, tenemos entonces que $J(E) = E^{**}$ con J una isometría, por lo que E^{**} es reflexivo y separable. Como $(E^*)^* = E^{**}$, la implicación anterior nos dice que E^* es reflexivo y separable.*

Teorema 3.20. *Sea E un espacio de Banach:*

$$E \text{ es separable} \Longleftrightarrow \left(\overline{B}_{E^*}, \sigma(E^*, E)\big|_{\overline{B}_{E^*}}\right) \text{ es metrizable.}$$

Demostración. Demostramos la doble implicación:

$\Longrightarrow$) Como E es separable, será también $\overline{B}_E$ un conjunto separable, luego existe $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{B}_E$ denso. Definimos ahora para cada $f \in E^*$:

$$[f] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f, x_n\rangle|$$

La aplicación está bien definida, puesto que:

$$\frac{1}{2^n}|\langle f, x_n\rangle| \leqslant \frac{1}{2^n}\|f\|\|x_n\| \leqslant \frac{1}{2^n}\|f\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde:

$$[f] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f, x_n\rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\|f\| = \|f\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \|f\|$$

Por lo que el límite que consideramos a la hora de definir $[f]$ tiene sentido. En particular, tenemos que $[f] \leqslant \|f\|$. Vemos ahora que:

- $[f]$ es una norma:
  - Si $f, g \in E^*$ tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
[f+g] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f+g, x_n\rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(|\langle f, x_n\rangle| + |\langle g, x_n\rangle|\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f, x_n\rangle| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle g, x_n\rangle| = [f] + [g]
\end{aligned}$$

  - Si $f \in E^*$ y considero $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$[\lambda f] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle \lambda f, x_n\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\lambda||\langle f, x_n\rangle| = |\lambda| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f, x_n\rangle| = |\lambda|[f]$$

- Si tenemos $f \in E^*$ tal que:

$$0 = [f] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f, x_n \rangle|$$

Tendremos entones que $\langle f, x_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Si tomamos ahora $x \in \overline{B}_E$, como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto denso, podemos tomar una sucesión de dichos puntos $\{y_n\}$ convergente a x. De esta forma, como f es continua:

$$\{0\} = \{f(y_n)\} \to f(x)$$

Por lo que ha de ser $f(x) = 0$ para todo punto $x \in \overline{B}_E$.

Consideraremos el espacio métrico inducido por el espacio normado:

$$d(f, g) = [f - g]$$

Observemos que $[f] \leqslant \|f\|$. Probaremos ahora que

$$(\overline{B}_{E^*}, \tau_d) = \left(\overline{B}_{E^*}, \sigma(E^*, E)|_{\overline{B}_{E^*}} \right)$$

donde τ_d es la topología asociada a d inducida en $\overline{B}_{E^*}$:

$\supseteq$) Sea $f_0 \in \overline{B}_{E^*}$ y U un entorno de f_0 en $\sigma(E^*, E)$, existe V un entorno básico (de la base concreta) de f_0 que está contenido en U, por lo que existirán $y_1, \ldots, y_k \in E$ y $\varepsilon > 0$ de manera que:

$$V = \{f \in E^* : |\langle f - f_0, y_i \rangle| < \varepsilon \quad \forall i \in \{1, ..., k\}\} \subset U$$

Además, podemos multiplicar cada y_i por una constante (ajustando luego ε), por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|y_i\| \leqslant 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

Queremos probar que $U \cap \overline{B}_{E^*}$ contiene un abierto de τ_d que contenga a f_0 o equivalentemente, que existe $r \in \mathbb{R}^+$ de forma que:

$$\{f \in E^* : d(f, f_0) < r\} \cap \overline{B}_{E^*} \subset V \cap \overline{B}_{E^*} \subset U \cap \overline{B}_{E^*}$$

Para ello, como $y_i \in \overline{B}_E$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, podemos tomar para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ cierto elemento x_{n_i} de forma que:

$$\|y_i - x_{n_i}\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

y tomamos $0 < r < \min\limits_{i \in \{1, \ldots, k\}} \left\{ \frac{\varepsilon}{2^{1+n_i}} \right\}$. Veamos ahora que este r nos sirve para la condición que buscábamos: sea $f \in \overline{B}_{E^*}$ de forma que $d(f, f_0) < r$, tenemos entonces que:

$$\frac{1}{2^{n_i}} |\langle f - f_0, x_{n_i} \rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f - f_0, x_n \rangle| < r \qquad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$$

de donde para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$:

$$\begin{aligned} |\langle f - f_0, y_i\rangle| &\leqslant |\langle f - f_0, y_i - x_{n_i}\rangle| + |\langle f - f_0, x_{n_i}\rangle| \\ &\leqslant \|f - f_0\|\|y_i - x_{n_i}\| + 2^{n_i} r \\ &\leqslant (\|f\| + \|f_0\|)\|y_i - x_{n_i}\| + 2^{n_i} r \\ &\leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + 2^{n_i} r = \frac{\varepsilon}{2} + 2^{n_i} r < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

De aquí tenemos que $f \in V \cap \overline{B}_{E^*}$, por lo que hemos demostrado esta inclusión.

$\subseteq$) Si tenemos ahora que $f_0 \in \overline{B}_{E^*}$, tomamos un entorno suyo en τ_d, que contendrá una bola de cierto radio r. Queremos probar que:

$$\{f \in E^* : d(f, f_0) < r\} \cap \overline{B}_{E^*} \supseteq V \cap \overline{B}_{E^*}$$

para un cierto V entorno básico de f_0 en $\sigma(E^*, E)\big|_{\overline{B}_{E^*}}$. Escogemos $\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ de forma que se tenga $\varepsilon + \frac{1}{2^{m-1}} < r$, y consideramos:

$$V = \{f \in E^* : |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}\}$$

Observamos que V es un entorno básico de f_0 en $\sigma(E^*, E)\big|_{\overline{B}_{E^*}}$. Veamos que tenemos la inclusión enunciada anteriormente, pues si $f \in V \cap \overline{B}_{E^*}$, tendremos entonces que:

$$\begin{aligned} d(f, f_0) = [f - f_0] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f - f_0, x_n\rangle| \\ &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}|\langle f - f_0, x_n\rangle| + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f - f_0, x_n\rangle| \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f - f_0, x_n\rangle| \leqslant \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f - f_0, x_n\rangle| \\ &\leqslant \varepsilon + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\|f - f_0\|\|x_n\| \leqslant \varepsilon + (\|f\| + \|f_0\|) \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &\leqslant \varepsilon + 2 \cdot \frac{1}{2^m} = \varepsilon + \frac{1}{2^{m-1}} < r \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) Tenemos que existe una distancia d de forma que:

$$\sigma(E^*, E)\big|_{\overline{B}_{E^*}} = \tau_d$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos:

$$U_n = \left\{f \in E^* : d(f, 0) < \frac{1}{n}\right\} \cap \overline{B}_{E^*} = \left\{f \in \overline{B}_{E^*} : d(f, 0) < \frac{1}{n}\right\}$$

Por lo que U_n es un entorno en la topología débil$-*$ inducida a $\overline{B}_{E^*}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego ha de contener a un entorno básico V_n, es decir, existen $\varepsilon_n > 0$ y Φ_n un subconjunto finito de E de forma que:

$$V_n = \{f \in \overline{B}_{E^*} : |\langle f, x\rangle| < \varepsilon_n \quad \forall x \in \Phi_n\}$$

Si tomamos:

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$$

tenemos que D es numerable, como unión numerable de conjuntos numerables (en realidad son finitos). Veamos ahora que D es denso en E, con vistas de aplicar el Corolario 1.22.1, supuesto que tenemos $f \in \overline{B}_{E^*}$ con $\langle f, x \rangle = 0$ para cada $x \in D$, tendremos entonces que $f \in V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego $f \in U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir:

$$d(f, 0) < \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo que $d(f, 0) = 0$, luego $f = 0$. Aplicando el Corolario 1.22.1 tenemos que D es denso, por lo que E es separable.

□

Observación. Notemos que cualesquiera dos bolas cerradas de un mismo espacio métrico son homeomorfas, por lo que podemos sustituir la bola del enunciado del Teorema por cualquier otra bola cerrada del mismo espacio.

Corolario 3.20.1. *Si E es un espacio de Banach separable, entonces toda sucesión acotada en E^* admite una sucesión parcial convergente en $\sigma(E^*, E)$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de puntos de E^* de forma que:

$$\|f_n\| \leqslant R \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

para cierto $R \in \mathbb{R}_0^+$, tenemos entonces que $f_n \in \overline{B}_{E^*}(0, R)$. El Teorema anterior nos dice que esta bola es metrizable, y el Teorema de Banach-Alaouglú-Bourbaki nos dice que $\overline{B}_{E^*}(0, R)$ es $\sigma(E^*, E)-$compacta. Como dicha bola es metrizable, tenemos entonces que la bola es secuencialmente compacta, por lo que la sucesión $\{f_n\}$ admite una parcial convergente, al estar contenida totalmente en $\overline{B}_{E^*}(0, R)$. □

Teorema 3.21. *Sea E un espacio de Banach:*

$$E^* \text{ es separable} \Longleftrightarrow \left(\overline{B}_E, \sigma(E, E^*)\big|_{\overline{B}_E}\right) \text{ es metrizable.}$$

Demostración. La demostración es análoga a la anterior, cambiando E por E^* y E^* por E:

$\Longrightarrow$) Como E^* es separable, será también $\overline{B}_{E^*}$ un conjunto separable, luego existe $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{B}_{E^*}$ denso. Definimos ahora para cada $x \in E$:

$$[x] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f_n, x \rangle|$$

La aplicación está bien definida, puesto que:

$$\frac{1}{2^n} |\langle f_n, x \rangle| \leqslant \frac{1}{2^n} \|f_n\| \|x\| \leqslant \frac{1}{2^n} \|x\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde:

$$[x] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f_n, x\rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|x\| = \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \|x\|$$

Por lo que el límite que consideramos a la hora de definir $[x]$ tiene sentido. En particular, tenemos que $[x] \leqslant \|x\|$. Vemos ahora que:

- $[x]$ es una norma:
  - Si $x, y \in E$ tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}[f+g] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f+g, x_n\rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(|\langle f, x_n\rangle| + |\langle g, x_n\rangle|\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f, x_n\rangle| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle g, x_n\rangle| = [f] + [g]\end{aligned}$$

  - Si $f \in E^*$ y considero $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$[\lambda f] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle \lambda f, x_n\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\lambda| |\langle f, x_n\rangle| = |\lambda| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f, x_n\rangle| = |\lambda| [f]$$

  - Si tenemos $x \in E$ tal que:

$$0 = [x] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f_n, x\rangle|$$

    Tendremos entones que $\langle f_n, x\rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Si tomamos ahora $f \in \overline{B}_{E^*}$, como $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto denso, podemos tomar una sucesión de dichas aplicaciones $\{g_n\}$ convergente a f. De esta forma:

$$\{0\} = \{g_n(x)\} \to f(x)$$

    Por lo que ha de ser $f(x) = 0$ para toda $f \in \overline{B}_{\overline{B}_{E^*}}$.

Consideraremos el espacio métrico inducido por el espacio normado:

$$d(x, y) = [x - y]$$

Observemos que $[x] \leqslant \|x\|$. Probaremos ahora que

$$(\overline{B}_E, \tau_d) = \left(\overline{B}_E, \sigma(E, E^*)\big|_{\overline{B}_E}\right)$$

donde τ_d es la topología asociada a d inducida en $\overline{B}_E$:

$\supseteq$) Sea $x_0 \in \overline{B}_E$ y U un entorno de x_0 en $\sigma(E, E^*)$, existe V un entorno básico (de la base concreta) de x_0 que está contenido en U, por lo que existirán $g_1, ..., g_k \in E^*$ y $\varepsilon > 0$ de manera que:

$$V = \{x \in E : |\langle g_i, x - x - 0\rangle| < \varepsilon \quad \forall i \in \{1, ..., k\}\} \subset U$$

Además, podemos multiplicar cada g_i por una constante (ajustando luego ε), por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|g_i\| \leqslant 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

Queremos probar que $U \cap \overline{B}_E$ contiene un abierto de τ_d que contenga a x_0 o equivalentemente, que existe $r \in \mathbb{R}^+$ de forma que:

$$\{x \in E : d(x, x_0) < r\} \cap \overline{B}_E \subset V \cap \overline{B}_E \subset U \cap \overline{B}_E$$

Para ello, como $g_i \in \overline{B}_{E^*}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, podemos tomar para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ cierto elemento f_{n_i} de forma que:

$$\|g_i - f_{n_i}\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

y tomamos $0 < r < \min\limits_{i \in \{1,\ldots,k\}} \left\{\dfrac{\varepsilon}{2^{1+n_i}}\right\}$. Veamos ahora que este r nos sirve para la condición que buscábamos: sea $x \in \overline{B}_E$ de forma que $d(x, x_0) < r$, tenemos entonces que:

$$\frac{1}{2^{n_i}} |\langle f_{n_i}, x - x_0\rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f_n, x - x_0\rangle| < r \qquad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$$

de donde para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$:

$$\begin{aligned}
|\langle g_i, x - x_0\rangle| &\leqslant |\langle g_i - f_{n_i}, x - x_0\rangle| + |\langle f_{n_i}, x - x_0\rangle| \\
&\leqslant \|x - x_0\| \|g_i - f_{n_i}\| + 2^{n_i} r \\
&\leqslant (\|x\| + \|x_0\|) \|g_i - f_{n_i}\| + 2^{n_i} r \\
&\leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + 2^{n_i} r = \frac{\varepsilon}{2} + 2^{n_i} r < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

De aquí tenemos que $x \in V \cap \overline{B}_E$, por lo que hemos demostrado esta inclusión.

$\subseteq$) Si tenemos ahora que $x_0 \in \overline{B}_E$, tomamos un entorno suyo en τ_d, que contendrá una bola de cierto radio r. Queremos probar que:

$$\{x \in E^* : d(x, x_0) < r\} \cap \overline{B}_E \supseteq V \cap \overline{B}_E$$

para un cierto V entorno básico de x_0 en $\sigma(E, E^*)\big|_{\overline{B}_E}$. Escogemos $\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ de forma que se tenga $\varepsilon + \frac{1}{2^{m-1}} < r$, y consideramos:

$$V = \{x \in E^* : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}\}$$

Observamos que V es un entorno básico de x_0 en $\sigma(E, E^*)\big|_{\overline{B}_E}$. Veamos que tenemos la inclusión enunciada anteriormente, pues si $x \in V \cap \overline{B}_E$, tendremos entonces que:

$$\begin{aligned}
d(x,x_0) = [x-x_0] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f_n, x-x_0\rangle| \\
&= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}|\langle f_n, x-x_0\rangle| + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f_n, x-x_0\rangle| \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f_n, x-x_0\rangle| \leqslant \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f_n, x-x_0\rangle| \\
&\leqslant \varepsilon + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\|f_n\|\|x-x_0\| \leqslant \varepsilon + (\|x\|+\|x_0\|) \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&\leqslant \varepsilon + 2\cdot \frac{1}{2^m} = \varepsilon + \frac{1}{2^{m-1}} < r
\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) Es el Ejercicio 3.24.

□

Corolario 3.21.1. *Si E es un espacio de Banach reflexivo, entonces toda sucesión acotada en E admite una sucesión parcial convergente en $\sigma(E,E^*)$.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de E de forma que:

$$\|x_n\| \leqslant R \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

para cierto $R \in \mathbb{R}_0^+$. Consideramos ahora $M = \overline{\mathcal{L}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$, que es un subespacio vectorial cerrado de E, por lo que M será reflexivo. Además, tenemos que M es separable, puesto que $\mathcal{L}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es separable (basta considerar combinaciones lineales con escalares racionales). Como M es reflexivo y separable, tendremos entonces que M^* es reflexivo y separable, de donde $\left(\overline{B}_M(0,R), \sigma(M,M^*)\big|_{\overline{B}_M(0,R)}\right)$ es metrizable por el Teorema anterior.

Anteriormente probamos que $\left(\overline{B}_M(0,R), \sigma(M,M^*)\big|_{\overline{B}_M(0,R)}\right)$ es compacto, por lo que por ser también metrizable, será secuencialmente compacto, de donde $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial convergente. □

3.6. Ejemplos de espacios reflexivos

3.6.1. Espacios l^p

Proposición 3.22. *l^p es reflexivo para $1 < p < \infty$*

Demostración. Tenemos que ver que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} J: & l^p & \longrightarrow & (l^p)^{**} \\ & x & \longmapsto & Jx \end{array}$$

Dada $\xi \in (l^p)^{**}$, como tenemos que $(l^p)^* \cong l^q$ para:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Tenemos que existe una isometría lineal:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & l^q & \longrightarrow & (l^p)^* \\ & y & \longmapsto & f \end{array}$$

de forma que:

$$\langle f, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \qquad \forall x \in l^p$$

Y tenemos que:

$$\langle \xi, f \rangle = \langle \xi, \varphi(y) \rangle = \langle \xi \circ \varphi, y \rangle$$

Tenemos por tanto la aplicación $\xi \circ \varphi : l^q \to \mathbb{R}$ continua y lineal, con lo que $\xi \circ \varphi \in (l^q)^*$. Por tanto, $\exists! x \in l^p$ de forma que:

$$(\xi \circ \varphi)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \qquad \forall y \in l^q$$

Por tanto:

$$\langle \xi \circ \varphi, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n = \langle f, x \rangle = \langle Jx, f \rangle \qquad \forall y \in l^q$$

Por tanto, tenemos que $\xi = Jx$. □

Necesitaremos la siguiente proposición:

Proposición 3.23. *Sea E un espacio normado:*

E es separable $\iff$ existe $Y \subset E$ subespacio denso y de dimensión numerable.

Demostración. Por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Tomamos $D \subset E$ denso y numerable, basta considerar $Y = \mathcal{L}(D)$.

$\Longleftarrow$) Suponemos que $Y = \mathcal{L}(U)$, con U un sistema de generadores de cardinal numerable. Fijado $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$E_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}, \quad u_1, \ldots, u_n \in U \right\}$$

Que es un conjunto numerable, pues la aplicación $f : \mathbb{Q}^n \times U^n \to E_n$ de forma que:

$$f((\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (u_1, \ldots, u_n)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$$

Y vemos que f es sobreyectiva con $\mathbb{Q}^n \times U^n$ numerable, con lo que E_n es numerable para cada $n \in \mathbb{N}$. Si tomamos ahora:

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

Tenemos que D es numerable, así como que $\overline{D}$ contiene a Y, por lo que:

$$E = \overline{Y} \subset \overline{D} \subset E$$

Por lo que E es separable.

□

Corolario 3.23.1. *C_0 y l_p con $1 \leqslant p < \infty$ es separable.*

Demostración. Tenemos que:

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{x \in \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x(n) = 0 \quad n \geqslant n_0\} = \mathcal{L}(\{e_n : n \in \mathbb{N}\})$$

Este espacio está dentro de c_0 y l^p con $1 \leqslant p < \infty$ es separable. □

Corolario 3.23.2. *l^∞ no es separable.*

Demostración. Tomamos $J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y consideramos $\chi_J : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\chi_J(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin J \\ 1 & \text{si } n \in J \end{cases}$$

Vemos que $\chi_J \in l^\infty$ para todo $J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Tomamos ahora:

$$B_J = B\left(\chi_J, \frac{1}{2}\right)$$

Vemos que si tomamos $J, P \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $J \neq P$ vemos que existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$|\chi_J(n) - \chi_P(n)| = 1 \geqslant \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \|\chi_J - \chi_P\|_\infty \geqslant 1$$

Lo que nos dice que B_J y B_P son disjuntas, ya que si existiera $x \in B_J \cap B_P$ tendríamos entonces que:

$$1 = \|\chi_J - \chi_P\|_\infty = \|(\chi_J - x) + (x - \chi_P)\|_\infty \leqslant \|(\chi_J - x)\|_\infty + \|(x - \chi_P)\|_\infty < 1$$

Por tanto, tenemos una familia de abiertos de l^∞ dos a dos disjuntos.

Sea ahora $D \subset l^\infty$ denso, tenemos por tanto que $D \cap B_J \neq \emptyset \quad \forall J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Usando el axioma de elección, existe $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to D$ de forma que

$$f(J) \in D \cap B_J \quad \forall J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Además tenemos que f es inyectiva, puesto que los conjuntos B_J eran dos a dos disjuntos. Como $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable, tendremos por tanto que D tiene un conjunto no numerable, por lo que D no puede ser numerable, de donde l^∞ no es separable. □

Proposición 3.24. *l^1 y l^∞ no son reflexivos.*

Demostración. Vimos ya que:

$$(l^1)^* \cong l^\infty \qquad (c_0)^* \cong l^1$$

Y tenemos:

$$J : c_0 \to c_0^{**} \cong (l^1)^* \cong l^\infty$$

Por lo que $c_0 \cong l^\infty$. □

4. Relaciones de Ejercicios

Las siguientes relaciones de ejercicios corresponden a los ejercicios que uno puede encontrar en el libro "Functional Analysis", de Haim Brezis. Concretamente, se encuentran los primeros ejercicios de los Capítulos 1 y 2.

4.1. El Espacio Dual

Ejercicio 4.1.1. Sea E un espacio normado, definimos $\forall x \in E$:

$$F(x) = \left\{f \in E^* : \|f\| = \|x\| \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|^2\right\}$$

Se pide:

a) Probar que

$$F(x) = \{f \in E^* : \|f\| \leqslant \|x\| \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|^2\}$$

y deducir que $F(x)$ es no vacío, cerrado y convexo.

$\subset$) Es evidente.

$\supset$) Si $x = 0$ la igualdad es evidente. Supuesto que $x \neq 0$, denotamos por $\tilde{F}(x)$ al conjunto de la derecha y tenemos que si $f \in \tilde{F}(x)$, entonces:

$$\|x\|^2 = |f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \Longrightarrow \|f\| \geqslant \|x\|$$

Por lo que $\|f\| = \|x\|$, de donde $\tilde{F}(x) = F(x)$.

- Por el Corolario 1.18.2 sabemos que $F(x) \neq \emptyset$.
- Sea $\{f_n\} \to f \in E^*$ con $f_n \in F(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \|x\|^2 = \|x\|^2$$

$$\|f\| = \left\|\lim_{n\to\infty} f_n\right\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x\| = \|x\|$$

Por lo que $f \in F(x)$, de donde $F(x)$ es cerrado.

- Sean $f, g \in F(x)$, si tomamos $t \in [0,1]$, definimos:

$$h = tf + (1-t)g$$

h es lineal y continua, luego $h \in E^*$, y además:

$$h(x) = tf(x) + (1-t)g(x) = t\|x\|^2 + (1-t)\|x\|^2 = \|x\|^2$$

$$\|h\| = \|tf + (1-t)g\| \leqslant t\|f\| + (1-t)\|g\| = t\|x\| + (1-t)\|x\| = \|x\|$$

Por lo que $h \in \{f \in E^* : \|f\| \leqslant \|x\| \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|^2\} = F(x)$, lo que demuestra que $F(x)$ es convexo.

b) Probar que si E^* es estrictamente convexo, entonces $F(x)$ se reduce a un punto.

Que E^* sea estrictamente convexo significa que si tomamos $f, g \in E^*$ con $f \neq g$ y $\|f\| = 1 = \|g\|$, entonces:

$$\|tf + (1-t)g\| < 1 \qquad \forall t \in]0,1[$$

Si $x = 0$ entonces $F(x)$ es unitario. Si $x \neq 0$, supongamos que existen dos funciones $g_1, g_2 \in F(x)$ con $g_1 \neq g_2$. En cuyo caso, podemos tomar:

$$f_1 = \frac{g_1}{\|x\|}, \qquad f_2 = \frac{g_2}{\|x\|}$$

que verifican $f_1 \neq f_2$ y $\|f_1\| = 1 = \|f_2\|$. Por la convexidad estricta de E^* tenemos que:

$$\|tf_1 + (1-t)f_2\| < 1 \qquad \forall t \in]0,1[$$

Sin embargo, fijado $t \in]0,1[$, vemos que:

$$\|x\| = t\|x\| + (1-t)\|x\| = (tf_1 + (1-t)f_2)(x) \leqslant \|tf_1 + (1-t)f_2\|\|x\|$$

de donde deducimos que $\|tf_1 + (1-t)f_2\| \geqslant 1$, contradicción, que viene de suponer que $F(x)$ contiene dos elementos distintos.

c) Probar que:

$$F(x) = \left\{ f \in E^* : \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \geqslant f(y-x) \quad \forall y \in E \right\}$$

$\subset$) Si $f \in F(x)$, entonces (usando que $(a-b)^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow ab \leqslant \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$):

$$f(y) \leqslant \|f\|\|y\| \leqslant \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 \qquad \forall y \in E$$

De donde si restamos $f(x) = \|x\|^2$ a ambos lados:

$$f(y-x) = f(y) - f(x) \leqslant \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \|x\|^2 = \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \quad \forall y \in E$$

$\supset$) Supongamos que tenemos $f \in E^*$, $x \in E$ fijo de forma que se cumple:

$$f(y-x) \leqslant \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \qquad \forall y \in E$$

Para probar primero que $f(x) = \|x\|^2$, tomaremos $y = \lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{R}^+$:

$$(\lambda - 1)f(x) = f(\lambda x - x) \leqslant \frac{1}{2}\|\lambda x\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2\left(\lambda^2 - 1\right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Distinguimos casos (notemos que si $\lambda = 1$ la desigualdad sigue siendo cierta):

- Si $\lambda > 1$, entonces:

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2}\|x\|^2\left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1}\right) \qquad \forall \lambda > 1$$

- Si $\lambda < 1$, entonces:

$$f(x) \geqslant \frac{1}{2}\|x\|^2 \left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1}\right) \qquad \forall \lambda \in]0, 1[$$

Como tenemos que:

$$\lim_{\lambda \to 1} \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1} = \lim_{\lambda \to 1} \frac{(\lambda + 1)(\lambda - 1)}{\lambda - 1} = \lim_{\lambda \to 1} (\lambda + 1) = 2$$

Del primer punto deducimos que $f(x) \leqslant \|x\|^2$, y del segundo punto que $f(x) \geqslant \|x\|^2$. Por tanto, tenemos que $f(x) = \|x\|^2$.
Para ver que $\|f\| \leqslant \|x\|$, tomamos $y \in E$ con $\|y\| = \delta > 0$, con lo que:

$$f(y) - f(x) = f(y - x) \leqslant \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2$$

de donde:

$$f(y) \leqslant \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2$$

Si ahora observamos que:

$$\delta\|f\| = \delta \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(\delta x)| = \sup_{\|x\|=\delta} |f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2$$

Si tomamos $\delta = \|x\|$, tenemos que:

$$\|x\|\|f\| \leqslant \|x\|^2 \Longrightarrow \|f\| \leqslant \|x\|$$

d) Deducir que:

$$(f - g)(x - y) \geqslant 0 \qquad \forall x, y \in E, \quad \forall f \in F(x), \quad \forall g \in F(y)$$

de hecho:

$$(f - g)(x - y) \geqslant (\|x\| - \|y\|)^2 \qquad \forall x, y \in E, \quad \forall f \in F(x), \quad \forall g \in F(y)$$

Para probar la primera desigualdad, sean $x, y \in E$, si tomamos $f \in F(x)$, $g \in F(y)$, entonces por el apartado anterior tenemos que:

$$f(z - x) \leqslant \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \qquad \forall z \in E$$
$$g(z - y) \leqslant \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 \qquad \forall z \in E$$

Tomando en la primera desigualdad $z = y$, $z = x$ en la segunda y sumando ambas obtenemos:

$$f(y - x) + g(x - y) \leqslant 0$$

De donde:

$$(f - g)(x - y) = f(x - y) - g(x - y) = -(f(y - x) + g(x - y)) \geqslant 0$$

Para probar que bajo las mismas hipótesis tenemos $(f-g)(x-y) \geqslant (\|x\| - \|y\|)^2$:

$$(f-g)(x-y) = f(x) - f(y) - g(x) + g(y) = \|x\|^2 - f(y) - g(x) + \|y\|^2$$

Ahora, observamos que:

$$f(y) + g(x) \leqslant \|f\|\|y\| + \|g\|\|x\| = 2\|x\|\|y\| \Longrightarrow -2\|x\|\|y\| \leqslant -f(y) - g(x)$$

de donde:

$$(f-g)(x-y) = \|x\|^2 - f(y) - g(x) + \|y\|^2 \geqslant \|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

e) Sea E^* un espacio estrictamente convexo con $x, y \in E$ de forma que:

$$(f-g)(x-y) = 0 \qquad \forall x, y \in E, \quad \forall f \in F(x), \quad \forall g \in F(y)$$

Probar que $F(x) = F(y)$.

Sean $x, y \in E$, $f \in F(x)$, $g \in F(y)$, si aplicamos la desigualdad del apartado anterior junto con la propiedad que nos dan ahora:

$$0 = (f-g)(x-y) \geqslant (\|x\| - \|y\|)^2 \geqslant 0 \Longrightarrow \|x\| = \|y\|$$

Del apartado *c*) obtenemos que (usando además que $\|x\| = \|y\|$):

$$f(y) - \|x\|^2 = f(y-x) \leqslant \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 = 0 \Longrightarrow f(y) \leqslant \|x\|^2$$
$$g(x) - \|y\|^2 = g(x-y) \leqslant \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 = 0 \Longrightarrow g(x) \leqslant \|y\|^2 = \|x\|^2$$

Además, tenemos que:

$$0 = (f-g)(x-y) = f(x) - f(y) - g(x) + g(y) = \|x\|^2 - f(y) - g(x) + \|y\|^2$$

luego:

$$f(y) + g(x) = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2\|x\|^2$$

Sin embargo, como $f(y), g(x) \leqslant \|x\|^2$, concluimos que ha de ser:

$$g(x) = \|x\|^2 = \|y\|^2 = f(y)$$

Finalmente, como E^* es un espacio estrictamente convexo, tenemos por el apartado *b*) que tanto $F(x)$ como $F(y)$ se reducen a un punto:

$$\{f\} = F(x) = \{f \in E^* : \|f\| = \|x\| \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|^2\}$$

Sin embargo, tenemos que $\|g\| = \|x\|$ y que $g(x) = \|x\|^2$, lo que nos dice que $g \in F(x) = \{f\}$, por lo que $f = g$ y tenemos $F(x) = F(y)$.

Ejercicio 4.1.2. Sea E un espacio vectorial de dimensión n y sea $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ una base de E, dado $x \in E$ escribimos $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{R}$. Dado $f \in E^*$, definimos $f_i = f(e_i)$.

a) Considerar en E la norma:
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

a) Calcular explícitamente, en términos de f_i, la norma $\|f\|$ para $f \in E^*$.

Hemos visto que $\|f\| = \sup_{\|x\|_1=1} |f(x)|$, por lo que si tomamos $x \in E$ con $\|x\|_1 = 1$, tenemos entonces que $\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1$, de donde:
$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left| f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i||f_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i| \\ &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i|\end{aligned}$$

Luego $\|f\| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i|$. Sin embargo, si tenemos que $p \in \{1, \dots, n\}$ es el índice en el cual se maximiza $|f_i|$, es decir, $|f_p| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i|$, si tomamos:
$$x = e_p$$
Tenemos que $\|x\|_1 = 1$, así como que:
$$|f(x)| = |f(e_p)| = |f_p| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i|$$
Por lo que el supremo se alcanza, luego:
$$\|f\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i|$$

b) Determinar explícitamente el conjunto $F(x)$, para todo $x \in E$.

Veamos que:
$$f \in F(x) = \{f \in E^* : \|f\| = \|x\|_1 \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|_1^2\}$$
si y solo si
$$f_i = \begin{cases} sgn(x_i)\|x\|_1 & \text{si } x_i \neq 0 \\ \text{cualquier valor en } [-\|x\|_1, \|x\|_1] & \text{si } x_i = 0 \end{cases} \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$\Longleftarrow$) Notemos que:
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \sum_{i=1}^{n} x_i sgn(x_i)\|x\|_1 = \|x\|_1 \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1\|x\|_1 = \|x\|_1^2$$
y que:
$$\|f\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i| = \max\left\{\max_{x_i\neq 0} |sgn(x_i)\|x\|_1|,\ \max_{x_i=0}\{f_i\}\right\} \overset{(*)}{=} \max_{x_i\neq 0} |\|x\|_1| = \|x\|_1$$
donde en $(*)$ hemos usado que si $x_i = 0$, entonces el valor de f_i está en el intervalo $[-\|x\|_1, \|x\|_1]$.

$\Longrightarrow$) Sea $f \in E^*$ con $\|f\| = \|x\|_1$ y $f(x) = \|x\|_1^2$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = f(x) = \|x\|_1^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|x\|_1$$

Ahora, como $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i| = \|f\| = \|x\|_1$, tenemos que:

$$|f_i| \leqslant \|x\|_1 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Por lo que tenemos:

$$x_i f_i \leqslant |x_i||f_i| \leqslant |x_i|\|x\|_1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|x\|_1$$

Luego ha de ser:

$$x_i f_i = |x_i|\|x\|_1 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

De donde (si $x_i \neq 0$):

$$f_i = \frac{|x_i|\|x\|_1}{x_i} = sgn(x_i)\|x\|_1$$

y para el resto de valores podemos tomar cualquier valor que no se salga del intervalo $[-\|x\|_1, \|x\|_1]$, para no alterar el valor de $\|f\|$.

b) Las mismas preguntas pero para la norma:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

Sea $x \in E$ con $\|x\|_\infty = 1$, tenemos entonces que $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| = 1$, de donde:

$$|f(x)| = \left| f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i||f_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f_i|$$

por lo que $\|f\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f_i|$, pero si tomamos:

$$x = (sgn(f_1), sgn(f_2), \ldots, sgn(f_n))$$

tenemos entonces que $\|x\|_\infty = 1$, con:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \sum_{i=1}^{n} sgn(f_i) f_i = \sum_{i=1}^{n} |f_i|$$

Tenemos que el supremo se alcanza, por lo que:

$$\|f\| = \sum_{i=1}^{n} |f_i|$$

Si pensamos ahora en el conjunto $F(x)$, si definimos:

$$I = \{i \in \{1, \ldots, n\} : |x_i| = \|x\|_\infty\}$$

veamos que:

$$f \in F(x) = \{f \in E^* : \|f\| = \|x\|_\infty \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|_\infty^2\}$$
$$\text{si y solo si}$$
$$\left\{\begin{array}{ll} f_i = 0 & \forall i \notin I \\ x_i f_i \geqslant 0 & \forall i \in I \quad \text{y} \quad \sum_{i \in I} |f_i| = \|x\|_\infty \end{array}\right.$$

$\Longleftarrow$) Si las f_i cumplen lo enunciado, entonces:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i = \sum_{i \in I} x_i f_i = \sum_{i \in I} |x_i||f_i| = \|x\|_\infty \sum_{i \in I} |f_i| = \|x\|_\infty \|x\|_\infty = \|x\|_\infty^2$$

y también:

$$\|f\| = \sum_{i=1}^n |f_i| = \sum_{i \in I} |f_i| = \|x\|_\infty$$

$\Longrightarrow$) Sea $f \in E^*$ con $\|f\| = \|x\|_\infty$ y $f(x) = \|x\|_\infty^2$, entonces:

- Si $f_i = 0 \quad \forall i \notin I$, entonces:

  $$\|x\|_\infty = \|f\| = \sum_{i=1}^n |f_i| = \sum_{i \in I} |f_i|$$

  Además:

  $$\sum_{i \in I} x_i f_i = \sum_{i=1}^n x_i f_i = f(x) = \|x\|_\infty^2 = \sum_{i=1}^n |f_i| \|x\|_\infty = \sum_{i \in I} |f_i| \|x\|_\infty$$

  y tenemos las desigualdades:

  $$x_i \leqslant |x_i| \leqslant \|x\|, \qquad f_i \leqslant |f_i| \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

  lo que nos permite igualar término a término en la suma anterior, obteniendo:

  $$x_i f_i = |f_i| \|x\|_\infty = |f_i| \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|x_i|\} \Longrightarrow x_i f_i \geqslant 0 \quad \forall i \in I$$

  y se tienen las dos condiciones buscadas.
- Si suponemos ahora que existe $f_j \neq 0$ para $j \notin I$, tendremos entonces que $|x_j| < \|x\|$. Si observamos que:

  $$\sum_{i=1}^n x_i f_i = f(x) = \|x\|_\infty^2 = \sum_{i=1}^n |f_i| \|x\|$$

  y las desigualdades:

  $$x_i \leqslant |x_i| \leqslant \|x\|, \qquad f_i \leqslant |f_i| \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

  deducimos entonces que:

  $$x_i f_i = |f_i| \|x\| \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Sin embargo, tendríamos entonces que (para $i = j$ tenemos $f_j \neq 0$):

$$x_j = \frac{|f_j|\|x\|}{f_j} = sgn(f_j)\|x\|$$

de donde deducimos que $|x_j| = \|x\|$, contradicción, por lo que este caso es imposible.

c) Las mismas preguntas pero para la norma:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

y más generalmente para la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \in \left]1, +\infty\right[$$

Sea $x \in E$ con $\|x\|_p = 1$, tenemos entonces que $(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = 1$, de donde:

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i||f_i| \overset{(*)}{\leqslant} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

donde en $(*)$ he usado la desigualdad de Hölder. Deducimos por tanto que:

$$\|f\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad \forall f \in E^*$$

Si ahora para cada $f \in E^*$ consideramos el vector $x \in E$ cuyas componentes son:

$$x_i = |f_i|^{p'-1} f_i \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Tenemos para cada

Ejercicio 4.1.3. Sea $E = \{u \in C([0,1], \mathbb{R}) : u(0) = 0\}$ con la norma:

$$\|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$$

considera el funcional lineal $f : E \to \mathbb{R}$ dado por:

$$f(u) = \int_0^1 u(t)\ dt$$

a) Demuestra que $f \in E^*$ y calcula $\|f\|$.

Hemos de probar que f es lineal y continua:

- Por la forma de definir f es claro que es lineal:

$$f(\lambda u+v) = \int_0^1 \lambda u(t)+v(t)\ dt = \lambda \int_0^1 u(t)\ dt + \int_0^1 v(t)\ dt = \lambda f(u)+f(v)$$
$$\forall u, v \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- f es continua, ya que:

$$|f(u)| = \left|\int_0^1 u(t)\ dt\right| \leqslant \left|\int_0^1 \|u\|\ dt\right| = \|u\| \qquad \forall u \in E$$

En consecuencia, $f \in E^*$. En este último punto hemos probado además que $\|f\| \leqslant 1$. Para probar la otra desigualdad:

Opción 1. si para cada $\alpha > 0$ definimos $u_\alpha \in E$ dada por:

$$u_\alpha(t) = t^\alpha \qquad \forall t \in [0, 1]$$

tenemos entonces que:

$$f(u_\alpha) = \int_0^1 t^\alpha\ dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{1+\alpha} \qquad \forall \alpha > 0$$

de donde:

$$|f(u_\alpha)| \leqslant \|f\| \leqslant 1$$

con $\lim\limits_{\alpha\to 0} |f(u_\alpha)| = 1$, por lo que $\|f\| = 1$.

Opción 2. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in E$ dada por:

$$u_n(t) = \begin{cases} nt & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant n \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Tenemos que:

$$f(u_n) = \int_0^{\frac{1}{n}} nt\ dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 1\ dt = \frac{nt}{2} \int_0^{\frac{1}{n}} 1 + t\ dt = 1 - \frac{1}{2n}$$

por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = 1$$

luego $\|f\| = 1$.

b) ¿Puede encontrarse $u \in E$ con $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|$?

Opción 1. No, ya que la única función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua con integral 1 en $[0, 1]$ y con máximo 1 es la constantemente igual a 1, que no pertence a E (por no valer 0 en 0):

Supongamos que tenemos una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua con integral 1 en $[0, 1]$ y con máximo 1 distinta de la constantemente igual a 1. En dicho caso, ha de existir $x_0 \in [0, 1]$ de forma que $f(x_0) < 1$. Por continuidad de f podemos encontrar $\varepsilon, \delta > 0$ de forma que:

$$f(x) \leqslant 1 - \varepsilon \qquad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [0, 1]$$

En cuyo caso, llamando $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [0, 1]$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\ dx = \int_{[0,1]\setminus I} f(x)\ dx + \int_I f(x)\ dx \leqslant \int_{[0,1]\setminus I} 1\ dx + \int_I (1-\varepsilon)\ dx \\ = (1 - l(I)) + l(I)(1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon < 1\end{aligned}$$

Por lo que f no tiene integral 1 en $[0,1]$, contradicción, que viene de suponer que f no es constantemente igual a 1.

Tras este resultado, como la pertenencia al conjunto E obliga a que la función u no sea constantemente igual a 1, tenemos pues que no puede existir una tal función.

Opción 2. Supongamos que existe $u \in E$ de forma que $\|u\| = 1$ con $f(u) = 1$, esto es equivalente a que:

$$f(u) = \int_0^1 u(t)\ dt = 1 \iff \int_0^1 u(t) - 1\ dt = 0$$

Tomando $g(t) = u(t) - 1$, como $\|u\| = 1$ tenemos entonces que $u(t) \leqslant 1$ para todo $t \in [0,1]$, con lo que $g(t) \leqslant 0$ para $t \in [0,1]$, y como su integral en $[0,1]$ vale 0 concluimos que $g(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$, con lo que:

$$u(t) = 1 \qquad \forall t \in [0,1]$$

Pero teníamos que $u \in E$, luego $0 = u(0) = 1$, contradicción.

Ejercicio 4.1.4. Considera el espacio $E = C_0$ de sucesiones de números reales que convergen a cero con la norma

$$\|x\| = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \qquad \forall x \in E$$

Para cada elemento $u \in E$ definimos:

$$f(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} u(n)$$

a) Comprueba que $f \in E^*$ y calcula $\|f\|$.

En primer lugar vemos que f está bien definida, pues:

$$f(u) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u(n)|}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u\|}{2^n} = \|u\|$$

- Para ver que f es lineal:

$$f(\lambda u + v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda u(n) + v(n)}{2^n} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{2^n} = \lambda f(u) + f(v)$$
$$\forall u, v \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- Para ver que f es continuo:

$$|f(u)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{2^n} \right| \leqslant \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u\|}{2^n} \right| = \|u\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right| = \|u\|$$

Por lo que $f \in E^*$. En este último punto hemos visto también que $\|f\| \leqslant 1$. Si tomamos ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ el vector u_n donde:

$$u_n(k) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{array} \right.$$

tenemos claramente que $u_n \overset{k\to\infty}{\to} 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $u_n \in C_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos también:

$$f(u_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

De donde $\{f(u_n)\} \to 1$, por lo que $\|f\| = 1$.

b) ¿Puede encontrarse $u \in E$ con $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|$?

Opción 1. Supongamos que existe $u \in C_0$ con $\|u\| = 1 = f(u)$, con lo que:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u(n)|}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

de donde ha de ser obligatoriamente:

$$u(n) = |u(n)| = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pero sin embargo la función constantemente igual a 1 no es convergente a 0.

Opción 2. Si tomamos $u \in C_0$ con $\|u\| = 1$, como $u \in C_0$ tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$|u(n)| \leqslant \frac{1}{2} \qquad \forall n \geqslant m$$

Pero tenemos:

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{2^n} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{u(n)}{2^n} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{u(n)}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{n-1} \frac{|u(n)|}{2^n} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{|u(n)|}{2^n}$$

y usando ahora que $\|u\| = 1$, tenemos que $|u(n)| \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde:

$$f(u) \leqslant \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{m-1}} = 1 - \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m} < 1$$

Por lo que $f(u) < 1$, no es posible encontrar dicho $u \in E$.

Ejercicio 4.1.5. Sea E un espacio normado de dimensión infinita:

a) Demuestra (usando el Lema de Zorn) que existe una base algebraica $\{e_i\}_{i\in I}$ en E de forma que $\|e_i\| = 1 \quad \forall i \in I$.

Recordamos que una base algebraica (o de Hamel) es un subconjunto $\{e_i\}_{i\in I}$ de E de forma que todo $x \in E$ puede ser escrito de forma única como:

$$x = \sum_{i\in J} x_i e_i, \quad \text{con} \quad J \subset I, \quad J \text{ finito}$$

Consideramos (que es no vacío puesto que $\{x\} \in P$ para todo $x \in E$):

$$P = \{C \subset E : \text{los elementos de } C \text{ son linealmente independientes}\}$$

Y buscamos aplicar el Lema de Zorn a P. Para ello, definimos:

$$C \leqslant D \Longleftrightarrow C \subset D \qquad \forall C, D \in P$$

Ahora, hemos de probar primero que P es inductivo. Para ello, sea $Q \subset P$ un subconjunto totalmente ordenado, tratemos de probar que $\cup Q$ es una cota superior de Q. Es claro que $C \subset \cup Q$ para todo $C \in Q$, por lo que basta probar que $\cup Q \in P$. Si tomamos $x, y \in \cup Q$, tendremos entonces que existen $C, D \in Q$ de forma que $x \in C$ y $y \in D$. Como Q es totalmente ordenado, tendremos bien $C \subset D$ bien $D \subset C$. Aprovechando la simetría de la situación, supondremos que $C \subset D$, con lo que también tenemos $x \in D \in Q \subset P$, de donde x e y son linealmente independientes, como queríamos probar, lo que nos dice que $\cup Q \in P$.

Aplicando el Lema de Zorn, tenemos que P tiene un elemento maximal, es decir, existe $\mathcal{B} \in P$ de forma que si $C \subset E$ es un conjunto tal que todos sus elementos son linealmente independientes entonces $C \subset \mathcal{B}$. Probaremos ahora que $\mathcal{B}$ es una base de E. Para ello, sea $x \in E$, si x es linealmente independiente de los elementos de $\mathcal{B}$, entonces consideramos $B = \mathcal{B} \cup \{x\}$, que es un elemento de P mayor que el elemento maximal de P, contradicción, por lo que x ha de ser linealmente dependiente de los elementos de $\mathcal{B}$, es decir, existe una cantidad finita de ellos determinada por $J \subset I$ finito y unos escalares a_i de forma que:

$$x + \sum_{j\in J} a_j x_j = 0, \qquad x_j \in \mathcal{B}, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad \forall j \in J$$

Dicho de otra forma, si tomamos $b_j = -a_j \quad \forall j \in J$:

$$x = \sum_{j\in J} b_j x_j$$

Como la normalización de los vectores no modifica su independiencia lineal, podemos normalizar todos los elementos del conjunto $\mathcal{B}$ y este seguirá cumpliendo lo enunciado.

b) Construye un funcional lineal $f : E \to \mathbb{R}$ que no sea continuo.

Ejemplo particular. Si consideramos $E = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ el espacio de sucesiones casi nulas, una base del mismo es:

$$\mathcal{B} = \{e_n \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} : e_n(n) = 1, e_n(m) = 0, m \neq n\}$$

Si consideramos la norma:

$$\|x\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| \qquad \forall x \in E$$

Consideramos la aplicación lineal dada por la base:

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \\ & e_n & \longmapsto & 2^n \end{array}$$

Veamos que el funcional no es continuo en 0, pues para $\varepsilon = 1$, para todo $\delta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{2^n} < \delta$ de forma que $\|\delta e_n\| \leqslant \delta$:

$$|f(\delta e_n)| = \delta |f(e_n)| > \frac{1}{2^n} 2^n = 1$$

En general. Sea E un espacio normado de dimensión infinita, sabemos que existe una base unitaria $\mathcal{B}$ de E. Consideramos $\overline{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ un subconjunto infinito numerable, por lo que podemos enumerar sus elementos, definimos la aplicación $f : E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\begin{array}{rl} f(e_n) = 2^n & \qquad \forall e_n \in \overline{\mathcal{B}} \\ f(e) = 0 & \qquad \forall e \in \mathcal{B} \setminus \overline{\mathcal{B}} \end{array}$$

Al igual que antes, f no es continua en 0, pues para $\varepsilon = 1$, $\forall \delta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\frac{1}{2^n} < \delta$ con $\|\delta e_n\| = \delta$ y:

$$|f(\delta e_n)| = \delta |f(e_n)| > \frac{1}{2^n} 2^n = 1$$

c) Suponiendo que además E es un espacio de Banach, prueba que I no es numerable (**Pista:** usar "el Teorema de categoría de Baire").

Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, suponemos que existe $\mathcal{B}$ una base numerable del mismo. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \left\{ x \in E : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\}$$

Veamos que A_n es cerrado y que $\mathrm{Int}(A_n) = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

- Sea $\{x_m\} \to x \in E$ con $x_m \in A_n$ $\forall m \in \mathbb{N}$, como A_n es un subespacio vectorial de E de dimensión finita, entonces $A_n \cong \mathbb{R}^n$, luego A_n es completo y como $\{x_m\}$ es de Cauchy, ha de ser convergente en A_n, de donde $x \in A_n$.

- Sea $x \in A_n$, consideramos para cierto $\varepsilon > 0$ la bola $B(x, \varepsilon)$, y vemos que:

$$x + \frac{\varepsilon}{2} e_{n+1} \in B(x, \varepsilon)$$
$$x + \frac{\varepsilon}{2} e_{n+1} \notin A_n$$

  De donde $B(x, \varepsilon) \not\subset A_n$

Si consideramos $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$, el Lema de Baire nos dice que $\operatorname{Int} E = \emptyset$, contradicción, puesto que $\operatorname{Int} E = E$, que viene de suponer que la base $\mathcal{B}$ es numerable.

Ejercicio 4.1.6. Sea E un espacio normado y $H \subset E$ un hiperplano. Sea $V \subset E$ un subespacio afín que contiene a H.

a) Probar que $V = H$ o $V = E$.

Recordamos que un hiperplano es, dada $0 \neq f : E \to \mathbb{R}$ lineal y $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$$

Opción 1. Observemos que $x, y \in H \iff y - x \in \ker f$, por lo que fijado $x_0 \in H$, los vectores y que están en H son los de la forma $y - x_0 \in \ker f$. Es decir:

$$H = x_0 + \ker f$$

Opción 2. H es un espacio afín, por lo que será de la forma $H = x_0 + H_1$ con H_1 un cierto espacio vectorial. Tratamos de ver que $H_1 = \ker f$.

$\subseteq$) Si tomamos $v \in H_1$ tenemos que $v = x - y$ para $x, y \in H$; de donde:

$$f(v) = f(x - y) = f(x) - f(y) = \alpha - \alpha = 0 \Longrightarrow v \in \ker f$$

$\supseteq$) Si tomamos $v \in \ker f$ y consideramos $x \in H$ de donde:

$$f(x + v) = f(x) + f(v) = \alpha$$

Por lo que tomando $v = y - x$ tenemos que $v \in H_1$.

En definitiva, si aplicamos ahora el Teorema de Isomorfía para aplicaciones lineales:

$$\frac{E}{\ker f} \cong f(E) \subset \mathbb{R}$$

Como $dim\mathbb{R} = 1$ y f no es constantemente igual a 0, tenemos que $f(E)$ es un subespacio vectorial mayor que $\{0\}$, por lo que no queda más salida que $f(E) = \mathbb{R}$. En definitiva:

$$\frac{E}{\ker f} \cong \mathbb{R}$$

por lo que $dim\frac{E}{\ker F} = 1$. Usando que $x_0 \in H \subset V \subset E$, podemos ver $V = x_0 + V_1$ como espacio afín, con lo que tenemos:

$$\ker f = H_1 \subset V_1 \subset E_1$$

de donde:

$$\{0\} \cong \frac{H_1}{\ker f} \subset \frac{V_1}{\ker f} \subset \frac{E_1}{\ker f} \cong \mathbb{R}$$

Por lo que no queda más salida que $dim\frac{V_1}{\ker f} \in \{0, 1\}$:

- Si la dimensión es 0, entonces $V_1 = \ker f$, de donde:

$$V = x_0 + V_1 = x_0 + \ker f = H$$

- Si la dimensión es 1, entonces $V_1 = E_1$, por lo que:

$$V = x_0 + V_1 = x_0 + E_1 = E$$

Algo habitual al trabajar con espacios vectoriales de dimensión no finita es hablar de la "codimensión". En este ejemplo, teníamos por ejemplo que como $dim \frac{E}{\ker f} = 1$, entonces:

$$codim \ker f = 1$$

De esta forma, un hiperplano es un espacio afín de codimensión 1.

b) Deducir que H es cerrado o denso en E.

Supuesto que H no es cerrado, tenemos que $\overline{H} \neq H$, y además $\overline{H}$ es un espacio afín conteniendo H, por lo que por el apartado anterior ha de ser $\overline{H} = E$, es decir, H es denso en E.

Ejercicio 4.1.7. Sea E un espacio normado y $C \subset E$ un subconjunto convexo.

a) Prueba que $\overline{C}$ y $\operatorname{Int} C$ son convexos.

- Para $\overline{C}$, sean $x, y \in \overline{C}$, entonces existen sucesiones de puntos de C $\{x_n\}, \{y_n\}$ con $\{x_n\} \to x$ y $\{y_n\} \to y$, de donde si tomamos $t \in [0,1]$, tenemos que:

$$\{(1-t)x_n + ty_n\} \to (1-t)x + ty$$

Por lo que $(1-t)x + ty \in \overline{C}$ para todo $t \in [0,1]$.

- Para $\operatorname{Int} C$, sean $x, y \in \operatorname{Int} C$, entonces existe $r > 0$ de forma que $B(x,r), B(y,r) \subset C$. En dicho caso, como C es convexo, tenemos que:

$$tB(x,r) + (1-t)B(y,r) \subset C \qquad \forall t \in [0,1]$$

Pero como:

$$tB(x,r) + (1-t)B(y,r) = B(tx + (1-t)y, r)$$

tenemos entonces que $tx + (1-t)y \in B(tx + (1-t)y, r) \subset C \quad \forall t \in [0,1]$, con lo que $\operatorname{Int} C$ es convexo. La igualdad entre conjuntos que hemos usado se debe principalmente a:

$$B(x,r) = x + rB(0,1) \qquad \forall x \in E, \quad \forall r \in \mathbb{R}^+$$

$\supseteq$) Si $z \in B(0,1)$ entonces $\|z\| < 1$, de donde $\|rz\| < r$, por lo que $\|x - x + rz\| < r$, luego $x + rz \in B(x,r)$.

$\subseteq$) Si $z \in B(x,r)$, entonces $\|x - z\| < r$, por lo que:

$$z = x + r\left(\frac{z-x}{r}\right) \quad \text{con} \quad \left\|\frac{z-x}{r}\right\| < 1$$

Para ver:

$$tB(x,r) + (1-t)B(y,r) = B(tx + (1-t)y, r)$$

$\subseteq$) Si tomamos $z \in tB(x,r)+(1-t)B(y,r)$, tenemos entonces que existen $\alpha \in B(0,1)$ y $\beta \in B(0,1)$ de forma que:

$$z = t(x + r\alpha) + (1-t)(y + r\beta) = tx + (1-t)y + r(t\alpha + (1-t)\beta)$$

y como $t\alpha + (1-t)\beta \in B(0,1)$ por ser convexa, hemos probado que $z \in B(tx + (1-t)y, r)$.

$\supseteq$) Si tomamos ahora $z \in B(tx + (1-t)y, r)$, tenemos que existe un elemento $\alpha \in B(0,1)$ de forma que:

$$\begin{aligned} z &= tx + (1-t)y + r\alpha = tx + (1-t)y + tr\alpha + (1-t)r\alpha \\ &= t(x + r\alpha) + (1-t)(y + r\alpha) \in tB(x,r) + (1-t)B(y,r) \end{aligned}$$

b) Dado $x \in C$ y $y \in \operatorname{Int} C$, prueba que $tx + (1-t)y \in \operatorname{Int} C \quad \forall t \in]0,1[$.

Sea $r > 0$ de forma que $B(y,r) \subset C$, como C es convexo tenemos que:

$$tx + (1-t)B(y,r) \subset C \qquad \forall t \in [0,1]$$

lo que nos dice que:

$$C \ni tx+(1-t)(y+r\alpha) = tx+(1-t)y+(1-t)r\alpha \qquad \forall \alpha \in B(0,1), \quad \forall t \in [0,1]$$

por tanto, tendremos que $B(tx + (1-t)y, (1-t)r) \subset C$ para todo $t \in [0,1[$, de donde $tx + (1-t)y \in \operatorname{Int} C$, para todo $t \in [0,1[$.

c) Deduce que $\overline{C} = \overline{\operatorname{Int} C}$ siempre que $\operatorname{Int} C \neq \emptyset$.

Como $\operatorname{Int} C \subset C$, tenemos que $\overline{\operatorname{Int} C} \subset \overline{C}$. Sea ahora $x \in \overline{C}$, tenemos que existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C con $\{x_n\} \to x$. Como $\operatorname{Int} C \neq \emptyset$, podemos tomar $y \in \operatorname{Int} C$. Sea $\{t_n\}$ una sucesión de puntos de $[0,1]$ convergente a 1 (por ejemplo, $t_n = 1 - 1/n$), tenemos entonces que:

$$\{t_n x_n + (1-t_n)y\} \to x$$

con $t_n x_n + (1-t_n)y \in \operatorname{Int} C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por el apartado *b*)), de donde concluimos que $x \in \overline{\operatorname{Int} C}$.

Ejercicio 4.1.8. Sea E un espacio normado con norma $\|\cdot\|$. Sea $C \subset E$ un abierto convexo de forma que $0 \in C$. Si p denota el funcional de Minkowski de C:

a) Suponiendo que C es simétrico (es decir, que $-C = C$) y que es acotado, prueba que p es una norma equivalente a $\|\cdot\|$.

Veamos en primer lugar que p es una norma en E:

- p verifica la desigualdad triangular, como vimos en la Proposición 1.21.

- Sea $x \in E$ de forma que $p(x) = 0$, entonces $\lambda x \in C \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$. Si $x \neq 0$ podemos tomar la sucesión:

$$\left\{ n \frac{x}{\|x\|} \right\}$$

que verifica:

$$\left\| n \frac{x}{\|x\|} \right\| = \|n\| = n$$

por lo que $\{\|n \cdot {}^{x}/_{\|x\|}\|\} \to \infty$, lo que contradice que C esté acotado, contradicción que viene de suponer que $x \neq 0$, luego ha de ser $x = 0$.

- Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$, distinguimos casos:
  - Si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, la Proposición 1.21 nos dice que $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.
  - Si $\lambda = 0$, tenemos que $\lambda p(x) = 0 = p(0) = p(\lambda x)$.
  - Si $\lambda \in \mathbb{R}^-$, tenemos que:

$$p(\lambda x) = p((-\lambda)(-x)) \overset{(*)}{=} -\lambda p(-x) = |\lambda| p(-x)$$

donde en $(*)$ usamos que $-\lambda \in \mathbb{R}^+$. De la simetría de C concluimos que $x \in C \iff -x \in C$. Supuesto que $p(x) \neq p(-x)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p(x) < p(-x)$:

$$\text{ínf} \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C \right\} = p(x) < p(-x) = \text{ínf} \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{-x}{\alpha} \in C \right\}$$

por definición de ínfimo, ha de existir $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de forma que:

$$\frac{x}{\alpha} \in C \quad \text{y} \quad \frac{-x}{\alpha} \notin C$$

lo que contradice que ${}^{x}/_{\alpha} \in C \iff {-}^{x}/_{\alpha} \in C$, que viene de suponer que $p(x) \neq p(-x)$.

En conclusión, tenemos que p es una norma en E. Para ver que p es equivalente a $\|\cdot\|$:

- La Proposición 1.21 nos dice que $\exists M > 0$ de forma que:

$$p(x) \leqslant M\|x\| \qquad \forall x \in E$$

- Como C está acotado, ha de existir $L \geqslant 0$ de forma que:

$$\|x\| \leqslant L \qquad \forall x \in C$$

Fijado $x \in E$, sea $\alpha \in \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C \right\}$, tenemos que:

$$\frac{1}{\alpha}\|x\| = \left\| \frac{x}{\alpha} \right\| \leqslant L \Longrightarrow \frac{1}{L}\|x\| \leqslant \alpha$$

de donde deducimos que $\frac{1}{L}\|x\| \leqslant p(x) \quad \forall x \in E$, lo que nos da la otra desigualdad.

Por lo que p y $\|\cdot\|$ son normas equivalentes.

b) Sea $E = C([0,1], \mathbb{R})$ con la norma:

$$\|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$$

sea:

$$C = \left\{ u \in E : \int_0^1 |u(t)|^2 \, dt < 1 \right\}$$

Comprueba que C es convexo, simétrico y que $0 \in C$. ¿Está C acotado en E? Calcula el funcional de Minkowski p de C y prueba que p es una norma en E. ¿Es p equivalente a $\|\cdot\|$?

Veamos que C es convexo, simétrico y que $0 \in C$:

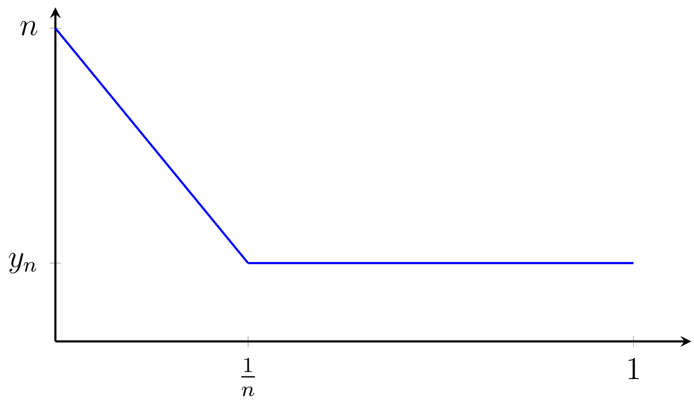
- Si consideramos la función $c_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $c_0(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$, tenemos que:
$$\int_0^1 |c_0(t)|^2 \, dt = \int_0^1 0 \, dt = 0 < 1$$
por lo que $0 = c_0 \in C$.
- Sea $u \in E$, tenemos que:
$$\int_0^1 |u(t)|^2 \, dt = \int_0^1 |-u(t)|^2 \, dt$$
de donde deducimos que $u \in C \iff -u \in C$, lo que nos dice que $C = -C$, que equivale a ser simétrico.
- Para ver que C es convexo, veamos que si $u, v \in C$ entonces se tiene que $w = tu + (1-t)v \in C$, para $t \in [0,1]$. Para ello, si denotamos por $\|\cdot\|_2$ a la norma en L^2:
$$\|u\|_2 = \left(\int_0^1 |u(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$
Observamos que:
$$\|w\|_2 = \|tu + (1-t)v\|_2 \leqslant t\|u\|_2 + (1-t)\|v\|_2 \leqslant t + (1-t) = 1$$
Por lo que $w \in C$.
- Intuitivamente podemos pensar que C no está acotado, pues exigir para una función $u \in E$ la condición de que la integral de su cuadrado sea menor que 1 no debe por qué implicar que la gráfica de todas ellas esté por debajo de cierta cota.

  Opción 1. Podemos considerar:
$$u_n(t) = \frac{\sqrt{n}}{1+nt} \qquad \forall t \in [0,1]$$
Que son funciones de C, pues para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que
$$\int_0^1 |u_n(t)|^2 \, dt = \int_0^1 \frac{n}{((1+nt))^2} \, dt = \int_1^{1+n} \frac{1}{s^2} \, ds = \left[\frac{-1}{s} \right]_1^{1+n} = \frac{n}{n+1} < 1$$

Y cumplen:

$$\|u_n\| = \max_{t\in[0,1]} \frac{\sqrt{n}}{1+nt} = \sqrt{n}$$

Opción 2. Construimos de una forma más visual un contraejemplo para ver que C no está acotado. Pensamos en considerar las funciones $u_n(t)$ de forma que $u_n(t)^2$ tenga la siguiente gráfica:



Y de forma que:

$$\int_0^1 |u_n(t)|^2 \, dt = 1 - \frac{1}{n} < 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Es claro que $u_n \in C \quad \forall n \in \mathbb{N}$, así como que:

$$\|u_n\| = \sqrt{n}$$

- Calcular p y ver que es una norma:

$$p(u) = \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{u}{\alpha} \in C\right\} = \inf\left\{\alpha > 0 : \int_0^1 \left|\frac{u(t)}{\alpha}\right|^2 \, dt < 1\right\}$$

Tenemos que:

$$\frac{1}{\alpha^2}\int_0^1 |u(t)|^2 \, dt < 1 \Longleftrightarrow \alpha^2 > \int_0^1 |u(t)|^2 \, dt$$

Por lo que:

$$p(u) = \inf\left\{\alpha > 0 : \alpha > \sqrt{\int_0^1 |u(t)|^2 \, dt}\right\} \qquad \forall u \in E$$

De donde:

$$p(u) = \sqrt{\int_0^1 |u(t)|^2 \, dt} = \|u\|_2$$

- Veamos que no son equivalentes, pues tenemos que:

$$p(u_n) = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1$$

y tenemos $\|u_n\| \to \infty$.

Ejercicio 4.1.9. Sea E un espacio normado de dimensión finita, sea $C \subset E$ un conjunto no vacío convexo con $0 \notin C$. Siempre hay un hiperplano que separa C y $\{0\}$ (Notemos que todo hiperplano es cerrado (¿por qué?). El mayor punto de este ejercicio es que no hace falta exigir nada más sobre C).

Como un hiperplano de E es un subespacio vectorial de E de dimensión finita, este será cerrado.

a) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ subconjunto numerable de C que es denso en C (¿por qué existe?). Para cada n definimos:

$$C_n = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\} = \left\{x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i : t_i \geqslant 0 \quad \forall i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\right\}$$

Comprueba que C_n es compacto y que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ es denso en C.

Vemos que es posible considerar dicho conjunto de hecho en todo el espacio E, puesto que como E es un espacio normado de dimensión finita, digamos n, existe un isomorfismo lineal $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$. En $\mathbb{R}^n$ sabemos que el conjunto $\mathbb{Q}^n$ es numerable y denso. Tendremos que $\Phi^{-1}(\mathbb{Q}^n)$ es numerable y como Φ es un isomorfismo lineal será también un homeomorfismo, con lo que el cierre de $\Phi^{-1}(\mathbb{Q}^n)$ será todo el espacio E. Para considerar el conjunto enunciado basta tomar $\Phi^{-1}(\mathbb{Q}^n) \cap C$.

Para ver que $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ es denso en C, observamos primero que como C es convexo tenemos que $\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\} \subset C \quad \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subset C$$

Usando que el conjunto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso en C y que $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, vemos que:

$$\overline{C} = \overline{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}} \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n} \subset \overline{C}$$

De donde deducimos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es denso en C.

Finalmente, para ver que C_n es compacto para cada $n \in \mathbb{N}$, fijado $n \in \mathbb{N}$ si consideramos una sucesión de elementos de C_n (indexada en k):

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} t_i^{(k)} x_i\right\}$$

Notemos que fijado $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que $\{t_i^{(k)}\}$ es una sucesión de números reales acotada, puesto que:

$$0 \leqslant t_i^{(k)} \leqslant 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Por lo que admite una parcial $\{t_i^{(\sigma_i(k))}\}$ convergente. Si aplicamos este razonamiento desde $\{t_0^{(k)}\}$ hasta $\{t_n^{(k)}\}$ razonando en cada caso con la parcial obtenida de la sucesión anterior[1], podemos obtener finalmente una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que haga que cada una de las sucesiones $\{t_i^{(\sigma(k))}\}$ sea convergente, a cierto t_i. De esta forma, tenemos que:

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} t_i^{(\sigma(k))} x_i\right\} \to \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$$

Donde:

$$\{1\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} t_i^{(\sigma(k))}\right\} \to \sum_{i=1}^{n} t_i$$

Por lo que $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i \in C_n$. Hemos probado que C_n es compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$.

b) Prueba que existe un $f_n \in E^*$ de forma que:

$$\|f_n\| = 1 \quad \text{y} \quad f_n(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in C_n$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, buscamos aplicar la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach. Para ello, observemos que como $C_n \subset C$ con $0 \notin C$ no puede ser $0 \in C_n$, por lo que tenemos $\{0\} \cap C_n = \emptyset$ con $\{0\}$ un conjunto cerrado y C_n un conjunto compacto (ambos convexos). Aplicando el Teorema enunciado tenemos que existen $g_n \in E^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$0 = g_n(0) < \alpha < g_n(x) \qquad \forall x \in C_n$$

Si definimos $f_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}$, tenemos que $f_n \in E^*$, con:

- Si $x \in C_n$:
$$f_n(x) = \frac{g_n(x)}{\|g_n\|} > \frac{\alpha}{\|g_n\|} > 0$$
- Tenemos que $\|f_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Deduce que existe $f \in E^*$ de forma que:

$$\|f\| = 1 \quad \text{y} \quad f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in C$$

Si consideramos la sucesión de funciones $\{f_n\}$ que hemos obtenido gracias al apartado anterior, observamos que $\|f_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que tenemos una sucesión acotada que, por ser $dimE < \infty$ tenemos que $dimE^* < \infty$, por lo que por el Teorema de Bolzano-Weierstrass tenemos que existe una sucesión parcial suya $\{f_{\sigma(n)}\}$ convergente a cierta función $f : E \to \mathbb{R}$ que:

- Es lineal, ya que si $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos:
$$f(\lambda x+y) = \lim_{n\to\infty} f_{\sigma(n)}(\lambda x+y) = \lambda \lim_{n\to\infty} f_{\sigma(n)}(x) + \lim_{n\to\infty} f_{\sigma(n)}(y) = \lambda f(x) + f(y)$$

[1]Esta idea se usa en la demostración del Teorema de Bolzano-Weierstrass para $\mathbb{R}^N$.

- Es continua, puesto que:

$$|f(x)| = \left|\lim_{n\to\infty} f_{\sigma(n)}(x)\right| = \lim_{n\to\infty} |f_{\sigma(n)}(x)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|f_{\sigma(n)}\|\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x\| = \|x\| \qquad \forall x \in E$$

Por lo que $f \in E^*$. Veamos ahora que f cumple las dos propiedades enunciadas:

- En primer lugar, veamos que $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in C$. Para ello, vemos primero que si $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que $x \in C_m$, y por la definición que hicimos de los conjuntos C_n también tenemos que:

$$x \in C_n \qquad \forall n \geqslant m$$

Por lo que tenemos que $f_{\sigma(n)}(x) \geqslant 0 \quad \forall n \geqslant m$, de donde deducimos que $f(x) \geqslant 0$. Como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es denso en C, tendremos también que $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in C$.

- Como $\|f_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y tenemos que $\{f_{\sigma(n)}\} \to f$, tendremos que $\|f\| = 1$.

d) Sean $A, B \subset E$ conjuntos no vacíos disjuntos y convexos. Prueba que existe algún hiperplano H que separa A y B.

Sea $C = A - B$, tenemos que C es no vacío, convexo (se probó en la primera versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach) y no contiene al 0 (ya que A y B eran disjuntos), si consideramos un subconjunto numerable de C $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que además sea denso en C (en el apartado a)) ya vimos por qué existía, podremos definir los conjuntos $C_n = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, que ya vimos que eran compactos y que su unión era densa en C, lo que nos permitía encontrar $f \in E^*$ de forma que $\|f\| = 1$ y $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in C$. Es decir:

$$f(0) = 0 \leqslant 0 \leqslant f(x) \qquad \forall x \in C$$

Por lo que el hiperplano $H = [f = 0]$ separa $\{0\}$ y C. Si vemos ahora que:

$$0 \leqslant f(a - b) = f(a) - f(b) \Longrightarrow f(b) \leqslant f(a) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Por lo que:

$$\sup\{f(b) : b \in B\} \leqslant \inf\{f(a) : a \in A\}$$

De donde tomando α entre esos dos números, tenemos que el hiperplano cerrado $H = [f = \alpha]$ separa A y B.

Ejercicio 4.1.10. Sea E un espacio normado y sea I cualquier conjunto de índices, fijado un subconjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ en E y otro $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ en $\mathbb{R}$. Demuestra que las siguientes propiedades son equivalentes:

1. Existe $f \in E^*$ de forma que $f(x_i) = \alpha_i \quad \forall i \in I$.

2. Existe una constante $M \geqslant 0$ de forma que para cada conjunto finito $J \subset I$ y para cada elección de números reales $\{\beta_i\}_{i\in J}$ tenemos:

$$\left|\sum_{i\in J} \beta_i \alpha_i\right| \leqslant M \left\|\sum_{i\in J} \beta_i x_i\right\|$$

Notemos que en la prueba $2 \Longrightarrow 1$ uno puede encontrar alguna $f \in E^*$ con $\|f\| \leqslant M$. (**Pista:** intenta primero definir f en el espacio lineal generado por $\{x_i\}_{i\in I}$).

$1 \Longrightarrow 2)$ Sea $J \subset I$ finito y $\{\beta_i\}_{i\in J} \subset \mathbb{R}$, tenemos:

$$\left|\sum_{i\in J}\beta_i\alpha_i\right| = \left|\sum_{i\in J}\beta_i f(x_i)\right| = \left|f\left(\sum_{i\in J}\beta_i x_i\right)\right| \leqslant M\left\|\sum_{i\in J}\beta_i x_i\right\|$$

$2 \Longrightarrow 1)$ Sea:

$$G = \mathcal{L}(\{x_i\}_{i\in I}) = \left\{\sum_{i\in J}\beta_i x_i : J \subset I \text{ finito, } \beta_i \in \mathbb{R}\right\}$$

Definimos para cada $x \in G$:

$$g(x) = g\left(\sum_{i\in J}\beta_i x_i\right) = \sum_{i\in J}\beta_i\alpha_i$$

siempre que $x = \sum_{i\in J}\beta_i x_i$. Que está bien definida, puesto que si tenemos dos descomposiciones de x:

$$\sum_{i\in J}\beta_i x_i = x = \sum_{i\in J}\gamma_i x_i$$

tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} g\left(\sum_{i\in J}\beta_i x_i\right) - g\left(\sum_{i\in J}\gamma_i x_i\right) &= \sum_{i\in J}\beta_i\alpha_i - \sum_{i\in J}\gamma_i\alpha_i = \sum_{i\in J}(\beta_i-\gamma_i)\alpha_i \\ &\leqslant M\left\|\sum_{i\in J}(\beta_i-\gamma_i)x_i\right\| = M\left\|\sum_{i\in J}\beta_i x_i - \sum_{i\in J}\gamma_i x_i\right\| \\ &= M\|x-x\| = 0 \end{aligned}$$

Veamos que g es lineal y continua:

- Si tomamos

$$x = \sum_{i\in J_1}\beta_i x_i, \qquad y = \sum_{i\in J_2}\gamma_i x_i$$

definiendo:

$$\beta_i = \begin{cases} \beta_i & \text{si } j \in J_1 \\ 0 & \text{si } j \in J_2 \setminus J_1 \end{cases} \qquad \gamma_i = \begin{cases} \gamma_i & \text{si } j \in J_2 \\ 0 & \text{si } j \in J_1 \setminus J_2 \end{cases}$$

tenemos:

$$x = \sum_{i\in J_1\cup J_2}\beta_i x_i, \quad y = \sum_{i\in J_1\cup J_2}\gamma_i x_i \quad \Longrightarrow \quad x+y = \sum_{i\in J_1\cup J_2}(\beta_i+\gamma_i)x_i$$

Luego:

$$g(x+y) = \sum_{i\in J_1\cup J_2}(\beta_i+\gamma_i)\alpha_i = \sum_{i\in J_1}\beta_i\alpha_i + \sum_{i\in J_2}\gamma_i\alpha_i = g(x)+g(y)$$

Si ahora $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$g(\lambda x) = g\left(\sum_{i \in J} \lambda_i \beta_i x_i\right) = \sum_{i \in J} \lambda \beta_i \alpha_i = \lambda \sum_{i \in J} \beta_i \alpha_i = \lambda g(x)$$

- Por 2 sabemos que existe $M \geqslant 0$ de forma que:

$$|g(x)| = \left|\sum_{i \in J} \beta_i \alpha_i\right| \leqslant M \left\|\sum_{i \in J} \beta_i x_i\right\| = M\|x\|$$

Tenemos por tanto que $g \in G^*$ (en particular, al probar que g es continua hemos probado que $\|g\| \leqslant M$), y por un Corolario del Teorema de Hahn-Banach, existe $f \in E^*$ de forma que $f\big|_G = g$ y $\|f\| = \|g\|$. Tenemos pues que:

$$f(x_i) = g(x_i) = \alpha_i \qquad \forall i \in I$$

Ejercicio 4.1.11. Sea E un espacio normado y sea $M > 0$. Fijados n elementos $f_1, \ldots, f_n \in E^*$ y n números reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in E$ de forma que:

$$\|x_\varepsilon\| \leqslant M + \varepsilon \qquad \text{y} \qquad f_i(x_\varepsilon) = \alpha_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

2. Para toda elección de n números reales $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leqslant M \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|$$

(**Pista:** Para la prueba $2 \Longrightarrow 1$ considera primero el caso en el que las aplicaciones f_i son linealmente independientes)
Compara este ejercicio con el anterior.

$1 \Longrightarrow 2)$ Dados $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, como E^* es un espacio vectorial, podemos considerar la aplicación lineal y continua:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \in E^*$$

Para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar el x_ε que nos da 1, con lo que:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x_\varepsilon)\right| = \left|\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right)(x_\varepsilon)\right| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\| \|x_\varepsilon\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\| (M+\varepsilon)$$

De donde deducimos la desigualdad solicitada.

$2 \Longrightarrow 1)$ Démonos cuenta de que si definimos $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ dada por:

$$\varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \qquad \forall x \in E$$

Y escribiendo también $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ podemos reformular el enunciado preguntándonos si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que:

$$\alpha \in \varphi\left(\overline{B}(0, M+\varepsilon)\right)$$

Por reducción al absurdo, supongamos que no:

$$\alpha \notin \varphi\left(\overline{B}(0, M+\varepsilon)\right)$$

Con vistas a aplicar el Ejercicio 4.1.9:

- Veamos primero que φ es lineal, pues si $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x + y) &= (f_1(\lambda x + y), \ldots, f_n(\lambda x + y)) \\ &= (\lambda f_1(x) + f_1(y), \ldots, \lambda f_n(x) + f_n(y)) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)\end{aligned}$$

- Ahora veamos que $\varphi\left(\overline{B}(0, M+\varepsilon)\right)$ es un conjunto convexo, pues si tomamos $y, y' \in \varphi\left(\overline{B}(0, M+\varepsilon)\right)$ y $t \in [0,1]$, tenemos entonces que existen $x, x' \in \overline{B}(0, M+\varepsilon)$ de forma que $\varphi(x) = y$, $\varphi(x') = y'$. Como $\overline{B}(0, M+\varepsilon)$ es convexo tendremos que $tx + (1-t)x' \in \overline{B}(0, M+\varepsilon)$ y usando ahora que φ es lineal:

$$t\varphi(x) + (1-t)\varphi(x') = \varphi(tx + (1-t)x') \in \varphi(\overline{B}(0, M+\varepsilon))$$

  De hecho, toda imagen de un conjunto convexo por una función lineal es convexa, y la prueba es la misma que acabamos de hacer.

Tenemos entonces que $\{\alpha\}$ y $\varphi(\overline{B}(0, M+\varepsilon))$ son dos conjuntos disjuntos y convexos de $\mathbb{R}^n$, con lo que aplicando el Ejercicio 4.1.9 tenemos que existe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal y continua de forma que:

$$f(x) \leqslant f(\alpha) \qquad \forall x \in \varphi\left(\overline{B}(0, M+\varepsilon)\right)$$

O escrito de otra forma, que:

$$\sup_{x \in \varphi\left(\overline{B}(0, M+\varepsilon)\right)} f(x) \leqslant f(\alpha) \tag{4.1}$$

Como $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert podemos aplicar el Teorema de Riesz-Fréchet, obteniendo que existe $\beta \in \mathbb{R}^n$ de forma que:

$$f(x) = \langle x, \beta \rangle \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Si consideramos las componentes de β en $\mathbb{R}^n$:

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

Para terminar la demostración veamos finalmente que:

$$f \circ \varphi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i$$

pues:

$$(f \circ \varphi)(x) = \langle \varphi(x), \beta \rangle = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\beta_i = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \beta_i \right)(x) \qquad \forall x \in E$$

Si suponemos que $f_1, \dots f_n$ son linealmente independientes.

Tenemos entonces que:

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_i f_i \neq 0$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} M \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\| &< (M+\varepsilon) \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\| = (M+\varepsilon)\|f \circ \varphi\| \\ &\leqslant (M+\varepsilon) \sup_{x \in \overline{B}(0,1)} |(f \circ \varphi)(x)| \overset{(*)}{=} \sup_{x \in \overline{B}(0,1)} |(f \circ \varphi)((M+\varepsilon)x)| \\ &= \sup_{x \in \overline{B}(0,M+\varepsilon)} |(f \circ \varphi)(x)| \overset{(**)}{\leqslant} f(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \right| \end{aligned}$$

Donde:

- En $(*)$ usamos que $M + \varepsilon \geqslant 0$ y que tanto f como φ son lineales.
- En $(**)$ usamos la desigualdad (4.1).

Es decir, hemos encontrado $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$M \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\| < \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \right|$$

Lo que contradice 2, por lo que:

$$\alpha \in \varphi(\overline{B}(0, M+\varepsilon)) \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Que era lo que queríamos probar.

Si no son linealmente independientes.

Tomamos de $\{f_1, \dots, f_n\}$ un conjunto maximal (en cuanto a número de elementos) que sí sea linealmente independiente, supondremos sin pérdida de generalidad (salvo enumeración de los f_i) que $\{f_1, \dots, f_m\}$ para $m \geqslant 1$ es un conjunto maximal linealmente independiente, por lo que $f_{m+1}, \dots, f_n$ pueden obtenerse como combinación lineal de elementos de $\{f_1, \dots, f_m\}$, por lo que:

$$f_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{j,i} \cdot f_i \qquad \lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,n} \in \mathbb{R}, \quad \forall j \in \{m+1, \dots, n\}$$

Y realizando un razonamiento análogo al caso anterior tomando:

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{j,i} \cdot \alpha_i, \qquad \beta_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{j,i} \cdot \beta_i \qquad \forall j \in \{m+1, \ldots, n\}$$

Podemos llegar a probar la implicación que queremos.

Ejercicio 4.1.12. Sea E un espacio vectorial, dadas n funcionales lineales $f_1, \ldots, f_n$ en E^* y n números reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

1. Existe algún $x \in E$ de forma que $f_i(x) = \alpha_i$.
2. Para toda elección $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i = 0$$

Por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Para esta implicación, si tomamos $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ cumpiendo la primera igualdad, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right)(x) = 0$$

$\Longleftarrow$) Para esta, sea $F : E \to \mathbb{R}^N$ dada por:

$$F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \qquad \forall x \in E$$

Definimos:

$$V = ImF = \{F(x) : x \in E\}$$

Como tenemos que $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i f_i = 0$, tenemos para todo $x \in E$ que:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x) = 0 = \beta_1 f_1(x) + \ldots + \beta_n f_n(x) = \langle \beta, F(x) \rangle$$

Con $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Tenemos por tanto que $\beta \in V^\perp$:

$$V^\perp = \{\beta \in \mathbb{R}^N : \langle \beta, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V\}$$

Como tenemos que $\langle \beta, \alpha \rangle = 0$, tenemos que α es ortogonal a $\beta \in V^\perp$, con lo que $\alpha \in (V^\perp)^\perp = V$.

Ejercicio 4.1.13. Sea $E = \mathbb{R}^n$ y consideramos:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geqslant 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

Sea M un subespacio vectorial de E de forma que $M \cap P = \{0\}$. Prueba que existe algún hiperplano H en E de forma que

$$M \subset H \qquad \text{y} \qquad H \cap P = \{0\}$$

(**Pista:** Prueba primero que $M^\perp \cap \operatorname{Int} P \neq \emptyset$.)

Probamos que $H^\perp \cap \operatorname{Int} P \neq \emptyset$.

Para ello, por reducción al absurdo, supongamos que $M^\perp \cap \operatorname{Int} P = \emptyset$. En estas condiciones, vemos que:

- $\operatorname{Int} P$ es un conjunto convexo por ser P un conjunto convexo y aplicar el Ejercicio 4.1.7. Además es claramente un conjunto abierto.
- $M^\perp$ es un conjunto convexo ya que, de hecho, es un espacio vectorial[2].

Podemos aplicar[3] el Teorema de Hahn-Banach (la primera versión geométrica), obteniendo una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal y continua que no se anula en todo $\mathbb{R}^n$ de forma que:

$$f(x) \leqslant f(y) \qquad \forall x \in M^\perp, \quad \forall y \in \operatorname{Int} P$$

Observamos ahora que:

- $0 \in M^\perp$, por lo que:
$$0 = f(0) \leqslant f(y) \qquad \forall y \in \operatorname{Int} P$$
- Podemos tomar una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de $\operatorname{Int} P$ convergente a 0 (por ejemplo, podemos tomar $\{({}^1\!/\!{}_n, \ldots, {}^1\!/\!{}_n)\}$) y como:
$$f(x) \leqslant f(y_n) \qquad \forall x \in M^\perp \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
tendremos entonces que $f(x) \leqslant 0$ para todo $x \in M^\perp$.

Es decir:
$$f(x) \leqslant 0 \leqslant f(y) \qquad \forall x \in M^\perp, \quad \forall y \in \operatorname{Int} P$$
En este punto, aplicamos que:

Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales (con W espacio normado) y $f(V)$ está acotado, entonces $f(V) = \{0\}$.

Demostración. Si existiese $u \in V$ de forma que $v = f(u) \neq 0$, entonces tendríamos que el conjunto:

$$\{f(\lambda u) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda f(u) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

estaría acotado ($f(V)$ está acotado), pero esto solo puede pasar si $v = 0$. □

Por lo que obtenemos que de hecho $f(x) = 0 \quad \forall x \in M^\perp$. Aplicando el Teorema de Riesz-Fréchet obtenemos $\beta \in \mathbb{R}^n$ de forma que:

$$f(x) = \langle x, \beta \rangle \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Y observamos ahora que:

[2] Lo sabemos de Geometría II.

[3] De hecho bastaría aplicar el Ejercicio 4.1.9, ya que estamos trabajando en dimensión finita.

- $\beta \in M$, puesto que:
$$0 = f(x) = \langle x, \beta \rangle \qquad \forall x \in M^\perp$$
Por lo que $\beta \in (M^\perp)^\perp = M$.
- $\beta \in P$, puesto que si consideramos la base usual de $\mathbb{R}^n$:
$$\{e_1, \ldots, e_n\} \subset \operatorname{Int} P = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$$
tenemos entonces que:
$$\beta_i = \langle \beta, e_i \rangle = f(e_i) \geqslant 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$
De donde $\beta \in P$.

Tenemos por tanto que $\beta \in M \cap P = \{0\}$, de donde ha de ser $f = 0$, pero f no se podía anular en todo $\mathbb{R}^n$, luego hemos llegado a una contradicción.

Terminamos la demostración

Comenzando ahora la demostración con la hipótesis $M^\perp \cap \operatorname{Int} P \neq \emptyset$, podemos tomar $z \in M^\perp \cap \operatorname{Int} P$, por lo que:

- Tendremos que $\langle x, z \rangle = 0 \quad \forall x \in M$.
- Tendremos que $z_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Si definimos la aplicación lineal y continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por:
$$f(x) = \langle x, z \rangle \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
Y consideramos el hiperplano $H = [f = 0] = \ker f$, tenemos:

- Por una lado:
$$H = \ker f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, z \rangle = 0\} \supset M$$
- Por otro, si $y \in H \cap P$ tenemos entonces que $y_1, \ldots, y_n \geqslant 0$ por ser $y \in P$ y por ser $y \in M$ tenemos que:
$$0 = f(y) = \langle y, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i$$
Pero como $z_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ y las coordenadas de y no son negativas, esto solo puede suceder si $y_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ es decir, si $y = 0$.

Ejercicio 4.1.14. Sea $E = l^1$ y considera los conjuntos:
$$X = \{x = \{x_n\} \in E : x_{2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$
$$Y = \left\{y = \{y_n\} \in E : y_{2n} = \frac{1}{2^n} y_{2n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}\right\}$$
Recordamos que:
$$l_1 = \left\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < \infty\right\} \qquad \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|$$

a) Prueba que X e Y son subespacios cerrados de E y que $\overline{X+Y} = E$.

Veamos las tres propiedades:

- Para ver que X es cerrado, consideramos la aplicación $F : E \to \mathbb{R}$ dada por:
$$F(x) = \sum_{n\in 2\mathbb{N}} |x(n)|$$
Que claramente es lineal y es continua, puesto que:
$$|F(x)| = F(x) = \sum_{n\in 2\mathbb{N}} |x(n)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| = \|x\|_1 \qquad \forall x \in l^1$$
Observamos que:
$$F^{-1}(\{0\}) = X$$
Por lo que X es cerrado, y es claro que es un subespacio vectorial de E.
- Es claro que Y es un subespacio vectorial de E. Para ver que es cerrado, consideramos la aplicación $G : E \to E$ dada por:
$$G(y) = z$$
donde:
$$z_n = y_{2n} - \frac{1}{2^n} y_{2n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
Tenemos que G está bien definida ($G(y) \in E$ para cada $y \in E$), puesto que si $y \in E$ y $z = G(y)$, entonces:
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |z(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| y(2n) - \frac{1}{2^n} y(2n-1) \right| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(|y(2n)| + \left| \frac{1}{2^n} y(2n-1) \right| \right) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} |y(2n)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y(2n-1)|}{2^n} &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)| < \infty\end{aligned}$$
Además, es fácil ver que G es lineal, y tenemos que si $z = G(y)$:
$$\|G(y)\|_1 = \|z\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |z(n)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)| = \|y\|_1$$
Por lo que G es continua. Finalmente, vemos que $Y = G^{-1}(\{0\})$.
- Queremos ver finalmente que $\overline{X+Y} = E$.

b) Si consideramos $c \in E$ dada por:
$$\begin{cases} c_{2n-1} = 0 & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ c_{2n} = \frac{1}{2^n} & \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
Comprueba que $c \notin X + Y$.

c) Sea $Z = X - c$, comprueba que $Y \cap Z = \emptyset$. ¿Existe un hiperplano cerrado de E que separa Y y Z? Compara el resultado con la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach y con el Ejercicio 4.1.9.

d) Las mismas preguntas pero para $E = l^p$ con $p \in]1, +\infty[$ y con $E = c_0$.

Ejercicio 4.1.15. Sea E un espacio normado y $C \subset E$ convexo con $0 \in C$. Consideramos:

$$C^* = \{f \in E^* : \langle f, x\rangle \leqslant 1 \quad \forall x \in C\}$$
$$C^{**} = \{x \in E : \langle f, x\rangle \leqslant 1 \quad \forall f \in C^*\}$$

Se pide:

1. Probar que $C^{**} = \overline{C}$.

$\supseteq$) Para esta inclusión:

Opcion 1. Podemos probarlo directamente:
Si $x \in \overline{C}$, existe entonces una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C con $\{x_n\} \to x$. Sea $f \in C^*$, tenemos entonces que:

$$\langle f, x_n\rangle \leqslant 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Y como f es continua, tenemos que $\{\langle f, x_n\rangle\} \to \langle f, x\rangle$, por lo que ha de ser $\langle f, x\rangle \leqslant 1$, de donde $x \in C^{**}$.

Opcion 2. Veamos que $C \subset C^{**}$ y que C^{**} es cerrado:

- Si $x \in C$ y tomamos $f \in C^*$ tenemos entonces que $\langle f, x\rangle \leqslant 1$, por lo que $x \in C^{**}$.
- Podemos ver:

$$C^{**} = \bigcap_{f \in C^*} \{x \in E : \langle f, x\rangle \leqslant 1\}$$

donde cada uno de dichos conjuntos es la preimagen por una función continua de un conjunto cerrado, luego C^{**} es cerrado, como intersección de conjuntos cerrados.

Por lo que $\overline{C} \subset C^{**}$.

$\subseteq$) Supongamos que existe $x_0 \in C^{**} \setminus \overline{C}$, tenemos que $\{x_0\}$ es compacto y $\overline{C}$ cerrado, por lo que por la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach, existen $f_0 \in E^*$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ de manera que:

$$\langle f_0, x\rangle < \alpha_0 < \langle f_0, x_0\rangle \qquad \forall x \in \overline{C}$$

Sabemos por hipótesis que $0 \in C \subset \overline{C}$, por lo que:

$$0 = \langle f_0, 0\rangle < \alpha_0$$

Podemos tomar $f = \frac{1}{\alpha_0} f_0$, con lo que:

$$\frac{1}{\alpha_0}\langle f_0, x\rangle < 1 < \frac{1}{\alpha_0}\langle f_0, x_0\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle f, x\rangle < 1 < \langle f, x_0\rangle \qquad \forall x \in C$$

por lo que $f \in C^*$, pero esto es una contradicción, pues $x_0 \in C^{**}$, que venía de suponer que existe $x_0 \in C^{**} \setminus \overline{C}$.

2. ¿Qué le sucede a C^* si C es un subespacio vectorial de E?.

   Bajo estas condiciones, si $x \in C$, entonces $\lambda x \in C$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo que:
$$C^* = \{f \in E^* : \langle f, \lambda x\rangle \leqslant 1 \quad \forall x \in C\}$$
   Por lo que:
$$\langle f, \lambda x\rangle \leqslant 1 \overset{f\in E^*}{\Longrightarrow} \lambda\langle f, x\rangle \leqslant 1 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$
   Si fuese $\langle f, x\rangle \neq 0$, tenemos por tanto que:

   - $\lambda \leqslant \frac{1}{\langle f,x\rangle}$
   - $\lambda \geqslant \frac{1}{\langle f,x\rangle}$

   en ambos casos se llega a contradicción, por lo que ha de ser $\langle f, x\rangle = 0$. Para todo $x \in C$, y por definición de C^*:
$$C^* = \{f \in E^* : \langle f, x\rangle = 0 \quad \forall x \in C\} = an(C)$$
   A veces se llama a $an(C)$ por $C^\perp$, ya que en espacios de Hilbert realmente los elementos del dual son correspondientes por cada vector.

Ejercicio 4.1.22. Sea E un espacio normado y sea $A \subset E$ un conjunto cerrado y no vacío, sea:
$$\varphi(x) = dist(x, A) = \inf_{a\in A} \|x - a\| \qquad \forall x \in E$$

a) Prueba que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \|x - y\| \quad \forall x, y \in E$.

   Dados $x, y \in E$, tenemos que:
$$\|x - a\| = \|x - y + y - a\| \leqslant \|x - y\| + \|y - a\| \qquad \forall a \in A$$
   Por lo que:
$$\inf_{a\in A} \|x - a\| \leqslant \inf_{a\in A}(\|x - y\| + \|y - a\|) = \|x - y\| + \inf_{a\in A} \|y - a\|$$
   De donde:
$$\varphi(x) - \varphi(y) \leqslant \|x - y\|$$
   Si intercambiamos los papeles de x e y, obtenemos:
$$\varphi(y) - \varphi(x) \leqslant \|y - x\|$$
   Por lo que:
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \|x - y\|$$

b) Supuesto que A es convexo, prueba que φ es convexo.

   Recordamos que φ es convexo si dados $x, y \in E$ tenemos que:
$$\varphi(tx + (1 - t)y) \leqslant t\varphi(x) + (1 - t)\varphi(y) \qquad \forall t \in [0, 1]$$

Dados $x, y \in E$ y $t \in [0,1]$, fijado $\varepsilon > 0$ tenemos entonces que existen $a, b \in A$ de forma que:

$$\|x-a\| \leqslant \varphi(x) + \varepsilon, \qquad \|y-b\| \leqslant \varphi(y) + \varepsilon$$

Tenemos por tanto que:

$$\begin{aligned}
t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) + \varepsilon &\geqslant t\|x-a\| + (1-t)\|y-b\| \\
&= \|tx - ta\| + \|(1-t)y - (1-t)b\| \\
&\geqslant \|tx + (1-t)y - \underbrace{(ta + (1-t)b)}_{\in A}\| \\
&\geqslant \inf_{c\in A} \|tx + (1-t)y - c\| = \varphi(tx + (1-t)y) \qquad \forall \varepsilon > 0
\end{aligned}$$

Por lo que φ es convexo.

c) Recíprocamente, suponiendo que φ es convexo, prueba que A es convexo.

Tenemos que $A = \{x \in E : \varphi(x) = 0\}$. Dados $x, y \in A$, y dado $t \in [0,1]$, como φ es convexo tenemos que:

$$0 \leqslant \inf_{a\in A} \|tx + (1-t)y - a\| = \varphi(tx + (1-t)y) \leqslant t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) = 0$$

De donde deducimos que $tx + (1-t)y \in A$, por lo que A es convexo.

4.1.1. Ejercicios adicionales

Los siguientes ejercicios provienen en gran parte de los apuntes de Javier Pérez, cuyos apuntes pueden encontrarse en la bibliografía de la asignatura. Contamos además con ejercicios pendientes del Capítulo 1 que son interesantes de hacer o de conocer.

Ejercicio 4.1.23. Todo espacio de Hilbert es estrictamente convexo.

Recordamos que un espacio normado (o un conjunto convexo dentro de un espacio normado) es estricatamente convexo si siempre que tengamos dos elementos u y v distintos con $\|u\| = 1 = \|v\|$, entonces tendremos que:

$$\|tu + (1-t)v\| < 1 \qquad \forall t \in]0,1[$$

Sea H un espacio de Hilbert y sean $u, v \in H$ con $u \neq v$ y $\|u\| = 1 = \|v\|$, dado $t \in [0,1]$ calculamos:

$$\begin{aligned}
\|tu + (1-t)v\| &= \langle tu + (1-t)v, tu + (1-t)v\rangle = t^2\langle u, u\rangle + (1-t)^2\langle v, v\rangle + 2\langle tu, (1-t)v\rangle \\
&= t^2\|u\|^2 + (1-t)^2\|v\|^2 + 2t(1-t)\langle u, v\rangle \overset{(*)}{\leqslant} t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t)\|u\|\|v\| \\
&= t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) = t^2 + t^2 + 1 - 2t + 2t - 2t^2 = 1
\end{aligned}$$

Donde en $(*)$ hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Sabemos que en dicha desigualdad se da la igualdad si y solo si u y v son linealmente dependientes de forma positiva. De esta forma, tenemos que:

$$\|tu + (1-t)v\| \geqslant 1 \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : u = \lambda v$$

Suponiendo que estamos en este caso, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ de forma que $u = \lambda v$, luego tenemos que:

$$1 = \|u\| = \|\lambda v\| = \lambda\|v\| = \lambda \Longrightarrow \lambda = 1$$

Pero teníamos que $u \neq v$, por lo que este caso es imposible, luego tenemos que:

$$\|tu + (1-t)v\| < 1 \qquad \forall t \in]0,1[$$

Por lo que H es estrictamente convexo.

Ejercicio 4.1.24. Sean $X \neq \{0\}$ e Y espacios normados. Si el espacio $L(X, Y)$ es completo, entonces Y es completo.
(**Pista:** Considerar $T_n(x) = f(x)y_n$.)

Sea $\{y_n\}$ una sucesión de Cauchy de puntos de Y, como $X \neq \{0\}$ podemos encontrar $0 \neq x_0 \in X$. Si consideramos $g : \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(tx_0) = t\|x_0\| \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Tenemos que g es lineal y continua:

$$g(\lambda t x_0 + \mu x_0) = g((\lambda t + \mu)x_0) = (\lambda t + \mu)\|x_0\| = \lambda g(t x_0) + g(\mu x_0) \qquad \forall \lambda, t, \mu \in \mathbb{R}$$
$$|g(tx_0)| = |t\|x_0\|| = |t|\|x_0\| = \|tx_0\|$$

Si consideramos $p : E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$p(x) = \|g\|\|x\| \qquad \forall x \in E$$

Tenemos entones que:

$$p(x+y) = \|g\|\|x+y\| \leqslant \|g\|(\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in X$$
$$g(tx_0) \leqslant |g(tx_0)| \leqslant \|g\|\|tx_0\| = p(tx_0) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Estamos en las condiciones del Teorema de Hahn-Banach, por lo que existe $f \in E^*$ de forma que $f\big|_{\mathbb{R}x_0} = g$. En particular, tenemos que:

$$f(x_0) = g(x_0) = 1 \neq 0$$

Si consideramos ahora la sucesión de aplicaciones $\{T_n\}$ donde:

$$T_n(x) = f(x) y_n \qquad \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tenemos que $T_n \in L(X, Y)$, ya que:

- Para cada $n \in \mathbb{N}$ T_n es lineal:

$$T_n(\lambda x + y) = f(\lambda x + y) y_n = (\lambda f(x) + f(y)) y_n = \lambda f(x) y_n + f(y) y_n = \lambda T_n(x) + T_n(y)$$
$$\forall x, y \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que T_n es continua:

$$\|T_n(x)\| = \|f(x) y_n\| = \|y_n\||f(x)| \leqslant \|y_n\|\|f\|\|x\| \qquad \forall x \in X$$

Además, $\{T_n\}$ es de Cauchy, pues si $n, m \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\begin{aligned}\|T_n - T_m\| &= \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|T_n(x) - T_m(x)\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)(y_n - y_m)\| \\ &= \|y_n - y_m\| \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = \|y_n - y_m\|\|f\|\end{aligned}$$

Y teníamos que la sucesión $\{y_n\}$ era de Cauchy. Como $L(X, Y)$ es completo, ha de existir $T \in L(X, Y)$ de forma que $\{T_n\} \to T$. Si consideramos ahora (recordemos que $f(x_0) \neq 0$):

$$y = \frac{T(x_0)}{f(x_0)} \in Y$$

Vemos finalmente que:

$$\begin{aligned}\|y_n - y\| &= \frac{1}{|f(x_0)|}\|f(x_0) y_n - f(x_0) y\| = \frac{1}{|f(x_0)|}\|T_n(x_0) - T(x_0)\| \\ &= \frac{1}{|f(x_0)|}\|(T_n - T)(x_0)\| \leqslant \frac{\|x_0\|}{|f(x_0)|}\|T_n - T\|\end{aligned}$$

Por lo que $\{y_n\} \to y$, de donde Y es completo.

Ejercicio 4.1.25. Sean X e Y espacios normados, dados $a \in X$ con $a \neq 0$ y $b \in Y$, prueba que existe un operador $T \in L(X,Y)$ tal que $T(a) = b$ y $\|T\|\|a\| = \|b\|$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $b \neq 0$, pues si $b = 0$ el operador T constantemente igual a 0 verifica todas las propiedades del enunciado.

Como $a \neq 0$, tenemos que $\mathbb{R}a$ es un subespacio vectorial de X de dimensión 1. Definimos $g : \mathbb{R}a \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(ta) = t\|b\| \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Que es lineal y continua:

- $g(\lambda ta + \mu a) = g((\lambda t + \mu)a) = (\lambda t + \mu)\|b\| = \lambda g(ta) + g(\mu a) \quad \forall \lambda, t, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si $t \in \mathbb{R}$:
$$|g(ta)| = |t|\|b\| = |t|\frac{\|b\|}{\|a\|}\|a\| = \frac{\|b\|}{\|a\|}\|ta\|$$

En particular, en el segundo punto hemos probado que $\|g\| = {}^{\|b\|}/_{\|a\|}$. Por el Corolario 1.18.1 de Hahn-Banach, existe $f \in X^*$ con $\|f\| = \|g\|$ de forma que $f\big|_{\mathbb{R}a} = g$. Si consideramos ahora la aplicación $h : \mathbb{R} \to Y$ dada por:

$$h(t) = t\frac{b}{\|b\|} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Tenemos que h es claramente lineal y continua. Consideramos ahora la aplicación $T = h \circ f : X \to Y$, que es una aplicación lineal y continua como composición de dos aplicaciones lineales y continuas. Veamos que T verifica las dos condiciones pedidas:

$$T(a) = (h \circ f)(a) = h(f(a)) = h(g(a)) = h(\|b\|) = \|b\|\frac{b}{\|b\|} = b$$

Y además:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|h(f(x))\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \left\| f(x)\frac{b}{\|b\|} \right\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|f(x)\| = \|f\| = \frac{\|b\|}{\|a\|}$$

Ejercicio 4.1.26. Sea X un espacio normado separable. Prueba que existe un conjunto $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subset X^*$ tal que para todo $x \in X$ se verifica que $\|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(x)|$

4.2. Principio de acotación uniforme y Tª de la gráfica cerrada

Ejercicio 4.2.1. Continuidad de las funciones convexas.
Sea E un espacio de Banach y sea $\varphi : E \to]-\infty, +\infty]$ una función convexa secuencialmente semicontinua inferiormente. Supón que $x_0 \in \operatorname{Int} D(\varphi)$.

Antes de comenzar con el ejercicio:

- $D(\varphi) = \{x \in E : \varphi(x) < +\infty\}$.
- Que φ sea convexa significa que:

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leqslant t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \qquad \forall x, y \in E, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- Que φ sea secuencialmente semicontinua inferiormente significa que:

$$\{x_n\} \to x \Longrightarrow \varphi(x) \leqslant \liminf \varphi(x_n)$$

1. Prueba que existen dos constantes $R > 0$ y M de forma que:

$$\varphi(x) \leqslant M \qquad \forall x \in E \quad \text{con} \quad \|x - x_0\| \leqslant R$$

(**Pista:** Dado un $\rho > 0$ apropiado, considera los conjuntos

$$F_n = \{x \in E : \|x - x_0\| \leqslant \rho \quad \text{y} \quad \varphi(x) \leqslant n\})$$

Solución. Como $x_0 \in \operatorname{Int} D(\varphi)$, tenemos que existe $\rho > 0$ de forma que $\overline{B}(x_0, \rho) \subset D(\varphi)$. Consideramos:

$$F_n = \left\{x \in \overline{B}(x_0, \rho) : \varphi(x) \leqslant n\right\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tenemos que:

- Para cada $n \in \mathbb{N}$ veamos que F_n es cerrado, ya que si $\{x_m\} \to x$ con $x_m \in F_n \quad \forall m \in \mathbb{N}$ y $x \in E$ tendremos entonces que $x \in \overline{B}(x_0, \rho)$ por ser este conjunto cerrado y:

$$\varphi(x) \leqslant \liminf \varphi(x_n) \leqslant n$$

Por lo que $x \in F_n$.

- Como $\overline{B}(x_0, \rho) \subset D(\varphi)$, es claro que:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \overline{B}(x_0, \rho)$$

Por el Lema de Baire, tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que $\operatorname{Int} F_m \neq \emptyset$, por lo que existen $x_1 \in \operatorname{Int} F_m$ y $r > 0$ de forma que $\overline{B}(x_1, r) \subset F_m$. Es decir:

$$\varphi(x) \leqslant m \qquad \forall x \in \overline{B}(x_1, r)$$

Sea ahora $x \in \overline{B}(x_0, r/2)$ tenemos que existe $z \in \overline{B}(0,1)$ de forma que:

$$x = x_0 + \frac{r}{2}z = x_0 + \frac{r}{2}z + \frac{x_1}{2} - \frac{x_1}{2} = \frac{1}{2}(x_1 + rz) + \frac{1}{2}(2x_0 - x_1)$$

Si usamos la convexidad de φ:

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{2}(x_1 + rz) + \frac{1}{2}(2x_0 - x_1)\right) \leqslant \frac{1}{2}\varphi(x_1 + rz) + \frac{1}{2}\varphi(2x_0 - x_1)$$

Como tenemos que $x_1 + rz \in \overline{B}(x_1, r) \subset F_m$, tenemos que:

$$\varphi(x) \leqslant \frac{1}{2}\varphi(x_1 + rz) + \frac{1}{2}\varphi(2x_0 - x_1) \leqslant \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\varphi(2x_0 - x_1)$$

Por lo que tomando:

$$R = \frac{r}{2}, \qquad M = \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\varphi(2x_0 - x_1)$$

Tenemos que:

$$\varphi(x) \leqslant M \qquad \forall x \in \overline{B}(x_0, R)$$

2. Prueba que $\forall r < R$, $\exists L \geqslant 0$ de forma que

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant L\|x_1 - x_2\| \qquad \forall x_1, x_2 \in E \quad \text{con} \quad \|x_i - x_0\| \leqslant r, \quad i \in \{1,2\}$$

Más precisamente, uno puede tomar $L = \frac{2(M-\varphi(x_0))}{R-r}$.

Solución. Fijado $r < R$, si tomamos $x_1, x_2 \in \overline{B}(x_0, r)$, tenemos que existen $u \in S(x_0, R)$ y $t \in [0,1]$ de forma que:

$$x_2 = tx_1 + (1-t)u$$

Por lo que usando la convexidad de φ:

$$\varphi(x_2) = \varphi(tx_1 + (1-t)u) \leqslant t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(u)$$

de donde:

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \leqslant (1-t)(\varphi(u) - \varphi(x_1)) \leqslant (1-t)(M - \varphi(x_1))$$

Si observamos ahora que:

$$x_1 - x_2 = (1-t)(u - x_1)$$

tomando normas:

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\| &= (1-t)\|u - x_1\| = (1-t)\|u - x_0 + x_0 - x_1\| \\ &\geqslant (1-t)\,|\|u - x_0\| - \|x_0 - x_1\|| \geqslant (1-t)(R-r)\end{aligned}$$

por lo que:

$$(1-t) \leqslant \frac{\|x_1 - x_2\|}{R-r}$$

de donde:

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \leqslant (1-t)(M - \varphi(x_1)) \leqslant \frac{M - \varphi(x_1)}{R-r}\|x_1 - x_2\|$$

Ejercicio 4.2.2. Sea E un espacio vectorial y sea $p : E \to \mathbb{R}$ una función que cumple las siguientes propiedades:

1. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$.
2. Para cada $x \in E$ fijo la función $\lambda \longmapsto p(\lambda x)$ es continua.
3. Siempre que una sucesión de puntos de E $\{y_n\}$ verifique que $\{p(y_n)\} \to 0$, entonces $\{p(\lambda y_n)\} \to 0$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de E de forma que $\{p(x_n)\} \to 0$ y $\{\alpha_n\}$ es una sucesión de números reales acotada. Probar que $p(0) = 0$ y que $\{p(\alpha_n x_n)\} \to 0$.
(**Pista:** Dado $\varepsilon > 0$, considera los conjuntos:

$$F_n = \{\lambda \in \mathbb{R} : |p(\lambda x_k)| \leqslant \varepsilon \quad \forall k \geqslant n\}$$

Deduce que si $\{x_n\}$ es una sucesión de E de forma que $\{p(x_n - x)\} \to 0$ para algún $x \in E$ y $\{\alpha_n\}$ es una sucesión de forma que $\{\alpha_n\} \to \alpha$, entonces $\{p(\alpha_n x_n)\} \to p(\alpha x)$.)

Por un lado tenemos que:

$$p(0) \leqslant p(0) + p(0) = 2p(0) \Longrightarrow p(0) \geqslant 0$$

Por otro:

$$p(0) \leqslant p(x_n) + p(-x_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

con $\{p(x_n) + p(-x_n)\} \to 0$, por lo que $p(0) \leqslant 0$, de donde tenemos que $p(0) = 0$.
Siguiendo la pista, dado $\varepsilon > 0$ definimos:

$$F_n = \{\lambda \in \mathbb{R} : |p(\lambda x_k)| \leqslant \varepsilon \quad \forall k \geqslant n\}$$

Por reducción al absurdo, supongamos que $\{p(\alpha_n x_n)\} \not\to 0$, de donde existe una parcial con $|p(\alpha_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)})| \geqslant \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{\alpha_n\}$ está acotada, el Teorema de Weierstrass nos permite encontrar una parcial convergente. Supongmos que la parcial σ verifica esto, con lo que $\{\alpha_{\sigma(n)}\} \to \alpha$. Observemos que:

- F_n es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que:

  $$F_n = \bigcap_{k \geqslant n} \{\lambda \in \mathbb{R} : |p(\lambda x_k)| \leqslant \varepsilon\}$$

  Como (2) nos dice que $\lambda \longmapsto p(\lambda x_k)$ es continua, tenemos que cada uno de dichos conjuntos son cerrados, como preimagen de un conjunto cerrado por una función continua.

- Veamos que $\bigcup_{n \geqslant 1} F_n = \mathbb{R}$. Para ello, tomamos $\lambda \in \mathbb{R}$ y como por hipótesis $\{p(\lambda x_n)\} \to 0$, con lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que:

  $$|p(\lambda x_n)| < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant n_0$$

  Luego $\lambda \in F_{n_0}$

Por el contrarrecíproco del Lema de Baire, existe $F_{\overline{n}}$ con $F_{\overline{n}}^\circ \neq \emptyset$, por lo que existen $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ de forma que
$$B(\lambda_0, \delta) \subset F_{\overline{n}}^\circ$$
En otras palabras:
$$(|p((\lambda_0 + t)x_{\sigma(k)})| \leqslant \varepsilon \quad \forall k \geqslant \overline{n}) \quad \forall t \in]-\delta, \delta[$$
Ahora:
$$p(\alpha_{\sigma(k)}x_{\sigma(k)}) \leqslant p((\lambda_0 + \alpha_{\sigma(k)} - \alpha)x_{\sigma(k)}) + p((\alpha - \lambda_0)x_{\sigma(k)})$$
con $\{p((\alpha - \lambda_0)x_{\sigma(k)})\} \to 0$ y podemos acotar el primer sumando en valor absoluto:
$$|p((\lambda_0 + \alpha_{\sigma(k)} - \alpha)x_{\sigma(k)})| \leqslant \varepsilon$$
Luego:
$$p((\lambda_0 + \alpha_{\sigma(k)} - \alpha)x_{\sigma(k)}) \leqslant p((\lambda_0 - \alpha)x_{\sigma(k)}) + p(\alpha_{\sigma(k)}x_{\sigma(k)})$$
de donde:
$$p(\alpha_{\sigma(k)}x_{\sigma(k)}) \geqslant p((\lambda_0 + \alpha_{\sigma(k)} - \alpha)x_{\sigma(k)}) - p((\lambda_0 - \alpha)x_{\sigma(k)})$$
de forma que el segundo sumando tiende a 0 y el primero está acotado en valor absoluto por ε, de donde deducimos:
$$|p(\alpha_{\sigma(k)}x_{\sigma(k)})| \leqslant 2\varepsilon$$
Seguimos:
$$p(\alpha_n x_n) - p(\alpha x) \leqslant p(\alpha_n(x_n - x)) + \underbrace{p(\alpha_n x) - p(\alpha x)}_{\text{tiende a 0}}$$
Además, como $\{\alpha_n\}$ está acotada y $\{x_n - x\} \to 0$, nos queda simplemente acotar por debajo para aplicar el Lema del Sandwich:
$$p(\alpha_n x) \leqslant p(\alpha_n(x - x_n)) + p(\alpha_n x_n)$$
de donde:
$$p(\alpha_n x) - p(\alpha_n(x_n - x)) - p(\alpha x) \leqslant p(\alpha_n x_n) - p(\alpha x)$$
de donde $\{p(\alpha_n x_n)\} \to p(\alpha x)$.

Ejercicio 4.2.3. Sean E y F dos espacios de Banach y $\{T_n\}$ una sucesión en $L(E, F)$. Supongamos que para todo $x \in E$ se tiene que $\{T_n x\}$ converge a un cierto límite Tx. Probar que si $\{x_n\} \to x$ en E, entonces $\{T_n(x_n)\} \to Tx$ en F.

Dado $x \in E$, como $\{T_n x\}$ es convergente a Tx tenemos entonces que $\{T_n x\}$ es acotada, con lo que:
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| < \infty$$
Por el Principio de acotación uniforme, tenemos que $C = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|Tn\| < \infty$, de donde:
$$\begin{aligned}\|T_n x_n - Tx\| &= \|T_n x_n - T_n x + T_n x - Tx\| \leqslant \|T_n x_n - T_n x\| + \|T_n x - Tx\| \\ &= \|T_n(x_n - x)\| + \|T_n x - Tx\| \leqslant C\|x_n - x\| + \|T_n x - Tx\|\end{aligned}$$
Como $\|x_n - x\|, \|T_n x - Tx\| \to 0$, tenemos pues que $\|T_n x_n - Tx\| \to 0$, de donde $\{T_n(x_n)\} \to Tx$.

Ejercicio 4.2.4. Sean E, F dos espacios de Banach y sea $a : E \times F \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal que verifica:

1. Para cada $x \in E$, la aplicación $y \longmapsto a(x, y)$ es continua.
2. Para cada $y \in F$, la aplicación $x \longmapsto a(x, y)$ es continua.

Probar que existe una constante $C \geqslant 0$ de forma que:

$$|a(x, y)| \leqslant C\|x\|\|y\| \qquad \forall x \in E, \quad \forall y \in F$$

(**Pista:** Introduce un operador lineal $T : E \to F^*$ y prueba que T está acotada con ayuda del Corolario 2.3.3).

Opción 1. Fijado $x \in E$ definimos:

$$\begin{array}{rccc} f_x: & F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & a(x, y) \end{array}$$

y la linealidad de a en segunda variable así como la continuidad de la función $y \longmapsto a(x, y)$ nos dice que $f_x \in F^* \quad \forall x \in E$, con lo que podemos definir la función

$$\begin{array}{rccc} T: & E & \longrightarrow & F^* \\ & x & \longmapsto & f_x \end{array}$$

Queremos ver que si $B \subset E$ es un conjunto acotado entonces $T(B)$ es acotado. Para ello consideramos:

$$\langle T(B), y\rangle = \{\langle f_x, y\rangle : f_x \in T(B)\} = \{a(x, y) : x \in B\} = \{f_y(x) : x \in B\}$$

de donde:

$$|f_y(x)| \leqslant M\|x\| \qquad \forall x \in E$$

Luego por el Corolario 2.3.3 tenemos que $T(B)$ está acotado, así como que T es continua (acabamos de probar que es una aplicación acotada), por lo que existe $C \geqslant 0$ tal que $\|T(x)\| \leqslant C\|x\| \quad \forall x \in E$. Luego:

$$\|f_x\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} |f_x(y)| \leqslant C\|x\|$$

de donde:

$$\left| a\left(x, \frac{y}{\|y\|}\right) \right| \leqslant C\|x\| \Longrightarrow a(x, y) \leqslant C\|x\|\|y\|$$

Opción 2. Definimos:

$$\begin{array}{rccc} T: & E & \longrightarrow & F^* \\ & x & \longmapsto & Tx \end{array}$$

Donde el operador Tx viene dado para cada $x \in E$ por:

$$\begin{array}{rccc} Tx: & F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & a(x, y) \end{array}$$

Y vemos que:

- Como fijado $x \in E$ la aplicación $y \longmapsto a(x, y)$ es continua, Tx es continua para cada $x \in E$.
- Como a es lineal en segunda variable, Tx es lineal para cada $x \in E$, por lo que la aplicación T está bien definida (ya que $Tx \in F^*$ para cada $x \in E$).
- Como a es lineal en primera variable, T es lineal, puesto que si $x, z \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tendremos que $T(\lambda x + z) = \lambda Tx + Tz$, ya que:

$$T(\lambda x + z)(y) = a(\lambda x + z, y) = \lambda a(x, y) + a(z, y) = \lambda Tx(y) + Tz(y) \qquad \forall y \in F$$

- Veamos que T es continua usando para ello el Teorema de la Gráfica cerrada. Sea $\{(x, Tx)\}$ una sucesión de puntos de GrT convergente a cierto punto $(x, L) \in E \times F^*$, tenemos entonces que $\|x_n - x\|, \|Tx_n - L\| \to 0$. De la segunda desigualdad deducimos que para todo $y \in F$ se tiene:

$$\|a(x_n, y) - L(y)\| = \|Tx_n(y) - L(y)\| = \|(Tx_n - L)(y)\| \to 0$$

  Por lo que $\{a(x_n, y)\} \to L(y)$, pero usando que fijado $y \in F$ la aplicación $x \longmapsto a(x, y)$ es continua, teníamos que $\{a(x_n, y)\} \to a(x, y)$, por lo que ha de ser:

$$L(y) = a(x, y) = Tx(y) \qquad \forall y \in F \quad \Longrightarrow \quad L = Tx$$

  de donde GrT es cerrada, luego T es continua.

Podemos ya terminar la demostración, observando que:

$$|a(x, y)| = |Tx(y)| \leqslant \|Tx\|\|y\| \leqslant \|T\|\|x\|\|y\| \qquad \forall x \in E, \quad \forall y \in F$$

Ejercicio 4.2.5. Sea E un espacio de Banach y sea $\{\varepsilon_n\}$ una sucesión de reales positivos de forma que $\{\varepsilon_n\} \to 0$. Además, sea $\{f_n\}$ una sucesión de elementos de E^* que cumple la propiedad:

$$\begin{gathered}\exists r > 0 \ \forall x \in E \text{ con } \|x\| < r, \ \exists C(x) \in \mathbb{R} \text{ de forma que} \\ \langle f_n, x \rangle \leqslant \varepsilon_n \|f_n\| + C(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\end{gathered}$$

Prueba que la sucesión $\{f_n\}$ está acotada.
(**Pista:** Introduce $g_n = \frac{f_n}{(1+\varepsilon_n\|f_n\|)}$).

Consideramos:

$$g_n = \frac{f_n}{1 + \varepsilon_n \|f_n\|} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $f_n \in E^*$ tendremos también que $g_n \in E^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\exists r > 0$ tal que $\forall x \in B(0, r)$ existe $C(x) \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$f_n(x) \leqslant \varepsilon_n \|f_n\| + C(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

De esta forma:

- Si $x \in B(0, r)$, tenemos para cada $n \in \mathbb{N}$ que:

  $$g_n(x) = \frac{f_n(x)}{1 + \varepsilon_n \|f_n\|} \leqslant \frac{\varepsilon_n \|f_n\| + C(x)}{1 + \varepsilon_n \|f_n\|} = \frac{1 + \varepsilon_n \|f_n\| + C(x) - 1}{1 + \varepsilon_n \|f_n\|} = 1 + \frac{C(x) - 1}{1 + \varepsilon_n \|f_n\|}$$
  $$\overset{(*)}{\leqslant} 1 + C(x) - 1 = C(x)$$

  donde en $(*)$ hemos usado que $1 + \varepsilon_n \|f_n\| \geqslant 1$, al ser $\varepsilon_n \in \mathbb{R}^+$.

  Observamos ahora que:

  $$-g_n(x) = g_n(-x) \leqslant C(-x) \qquad \forall x \in B(0, r)$$

  Por lo que tenemos:

  $$|g_n(x)| \leqslant \tilde{C}(x) := \text{máx}\{C(x), C(-x)\} \qquad \forall x \in B(0, r)$$

- Si $x \in E$ con $\|x\| \geqslant r$, si consideramos $y = \frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|}$ tenemos que $y \in B(0, r)$, por lo que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos aplicar la cota anteriormente conseguida a y, y usando además que g_n es lineal obtenemos:

  $$\tilde{C}(y) \geqslant |g_n(y)| = \frac{r}{2\|x\|} |g_n(x)| \quad \Longrightarrow \quad |g_n(x)| \leqslant \frac{2\|x\|}{r} \tilde{C}(y)$$

En definitiva, hemos probado que:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |g_n(x)| < \infty \qquad \forall x \in E$$

Por lo que aplicando el Teorema de Banach-Steinhaus obtenemos que $C = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|g_n\| < \infty$, de donde:

$$\|g_n\| = \frac{\|f_n\|}{1 + \varepsilon_n \|f_n\|} \quad \Longrightarrow \quad \|g_n\|(1 + \varepsilon_n \|f_n\|) = \|f_n\|$$

Por lo que:

$$C \geqslant \|g_n\| = \|f_n\|(1 - \varepsilon_n \|g_n\|) \geqslant \|f_n\|(1 - \varepsilon_n M)$$

Y como $\{1 - \varepsilon_n M\} \to 1$, $\exists m \in \mathbb{N}$ de forma que

$$1 - \varepsilon_n M > \frac{1}{2} \qquad \forall n \geqslant m$$

Por lo que:

$$C \geqslant \|f_n\|(1 - \varepsilon_n M) > \|f_n\| \cdot \frac{1}{2} \Longrightarrow \|f_n\| \leqslant 2M \qquad \forall n \geqslant m$$

De donde tenemos que $\{f_n\}$ está acotada.

Ejercicio 4.2.6. (Operadores no lineales monótonos y localmente acotados)
Sea E un espacio de Banach y sea $D(A)$ cualquier subconjunto de E. Una aplicación (no lineal) $A : D(A) \subseteq E \to E^*$ se dice "monótona" si verifica

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geqslant 0 \qquad \forall x, y \in D(A)$$

1. Sea $x_0 \in \operatorname{Int} D(A)$. Prueba que existen dos constantes $R > 0$ y C de forma que
$$\|Ax\| \leqslant C \qquad \forall x \in D(A) \quad \text{con} \quad \|x - x_0\| < R$$
(**Pista:** Razona por reducción al absurdo y construye una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $D(A)$ de forma que $\{x_n\} \to x_0$ y $\{\|Ax_n\|\} \to \infty$. Elije $r > 0$ de forma que $B(x_0, r) \subset D(A)$. Usa la monotonía de A en x_n y en $(x_0 + r)$ con $\|x\| < r$. Aplica el Ejercicio 4.2.5).

2. Prueba la misma conclusión para un punto $x_0 \in \operatorname{Int}(\operatorname{conv} D(A))$.

3. Extiende la conclusión de la pregunta 1 al caso de que A sea multivaluada, es decir, para cada $x \in D(A)$, Ax es un conjunto no vacío de E^*, en este caso la monotonía se define como sigue:
$$\langle f - g, x - y\rangle \geqslant 0 \qquad \forall x, y \in D(A), \quad \forall f \in Ax, \quad \forall g \in Ay$$

Solución.

1. Sea $x_0 \in \operatorname{Int} D(A)$. Prueba que existen dos constantes $R > 0$ y C de forma que
$$\|Ax\| \leqslant C \qquad \forall x \in D(A) \quad \text{con} \quad \|x - x_0\| < R$$
Por reducción al absurdo, supongamos que:
$$\forall R, C \geqslant 0 \quad \exists x \in D(A) \quad \text{con} \quad \|x - x_0\| < R \quad \text{y} \quad \|Ax\| > C$$
Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$
$$\exists x_n \in D(A) \quad \text{con} \quad \|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \|Ax_n\| > C$$
Por lo que $\{x_n\} \to x_0$ y $\{\|Ax_n\|\} \to \infty$. Como $x_0 \in \operatorname{Int} D(A)$, sea $r > 0$ de forma que $B(x_0, r) \subset D(A)$, si tomamos $x \in E$ con $\|x\| < r$ tendremos entonces que:
$$\|x_0 + x - x_0\| = \|x\| < r \Longrightarrow x_0 + x \in B(x_0, r) \subset D(A)$$
Como A es monótona, tenemos que:
$$\begin{aligned}0 &\leqslant \langle Ax_n - A(x_0 + x), x_n - x_0 - x\rangle \\ &= \langle Ax_n, x\rangle + \langle Ax_n, x_n - x_0\rangle + \langle A(x_0 + x), x\rangle + \langle A(x_0 + x), x_0 - x_n\rangle\end{aligned}$$
de donde:
$$\begin{aligned}\langle Ax_n, x\rangle &\leqslant \|Ax_n\|\|x_n - x_0\| + \|A(x_0 + x)\|\|x\| + \|A(x_0 + x)\|\|x_0 - x_n\| \\ &= \|Ax_n\|\|x_n - x_0\| + \|A(x_0 + x)\|(\|x\| + \|x_0 - x_n\|) \\ &\overset{(*)}{\leqslant} \|Ax_n\| \underbrace{\|x_n - x_0\|}_{\varepsilon_n} + \underbrace{\|A(x_0 + x)\|(\|x\| + 1)}_{C(x)}\end{aligned}$$
Donde en $(*)$ hemos usado que $\|x_n - x_0\| < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Aplicando el Ejercicio 4.2.5, tenemos que $\{Ax_n\}$ está acotada, contradicción con que $\{\|Ax_n\|\} \to \infty$, por lo que tenemos el primer apartado.

2. Prueba la misma conclusión para un punto $x_0 \in \mathrm{Int}(\operatorname{conv} D(A))$.

   Tenemos que $\operatorname{conv} D(A)$ es el cierre convexo de $D(A)$:

$$\operatorname{conv} D(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k : v_k \in D(A),\ \text{con } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \right\}$$

   Repetiremos la misma prueba que en el apartado 1, cambiando un poco el final. Por Reducción al absurdo, de la misma forma podemos encontrar $\{x_n\} \to x_0$ con $\|x_n - x_0\| \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{\|Ax_n\|\} \to \infty$. Como $x_0 \in \mathrm{Int}(\operatorname{conv} D(A))$, sea $r > 0$ de forma que $B(x_0, r) \subset \operatorname{conv} D(A)$, si tomamos $x \in E$ con $\|x\| < r$ tendremos que $x_0 + x \in \operatorname{conv} D(A)$, por lo que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $v_1, \ldots, v_n \in D(A)$ con:

$$x_0 + x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$$

   Fijado $k \in \{1, \ldots, n\}$, podemos usar la monotonía de A:

$$0 \leqslant \langle Ax_n - Av_k, x_n - v_k \rangle \Longrightarrow \langle Ax_n, x_n - v_k \rangle \geqslant \langle Av_k, x_n - v_k \rangle$$

   Por lo que:

$$\lambda_k \langle Ax_n, x_n - v_k \rangle \geqslant \lambda_k \langle Av_k, x_n - v_k \rangle \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$$

   de donde:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle Ax_n, x_n - v_k \rangle \geqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle Av_k, x_n - v_k \rangle$$

   Vemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle Ax_n, x_n - v_k \rangle &= \left\langle Ax_n, \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k x_n - \lambda_k v_k) \right\rangle = \left\langle Ax_n, x_n - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \right\rangle \\
&= \langle Ax_n, x_n - x_0 - x \rangle = \langle Ax_n, x_n - x_0 \rangle - \langle Ax_n, x \rangle
\end{aligned}$$

   Por lo que:

$$\begin{aligned}
\langle Ax_n, x \rangle &\leqslant \langle Ax_n, x_n - x_0 \rangle + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle Av_k, v_k - x_n \rangle \\
&\leqslant \|Ax_n\| \|x_n - x_0\| + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \|Av_k\| \|v_k - x_n\|
\end{aligned}$$

   Pero:

$$\|v_k - x_n\| \leqslant \|v_k - x_0\| + \|x_0 - x_n\| \leqslant \|v_k - x_0\| + 1$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}
\langle Ax_n, x\rangle &\leqslant \langle Ax_n, x_n - x_0\rangle + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle Av_k, v_k - x_n\rangle \\
&\leqslant \|Ax_n\|\|x_n - x_0\| + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \|Av_k\|\|v_k - x_n\| \\
&\leqslant \|Ax_n\| \underbrace{\|x_n - x_0\|}_{\varepsilon_n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \|Av_k\|(\|v_k - x_0\| + 1)}_{C(x)}
\end{aligned}$$

Lo que nuevamente lleva a contradicción.

3. Extiende la conclusión de la pregunta 1 al caso de que A sea multivaluada.

   En este caso, queremos probar que existen $R > 0, C \geqslant 0$ de forma que:

$$\text{Si} \quad x \in D(A) \quad \text{con} \quad \|x - x_0\| < R \Longrightarrow \|f\| \leqslant C \qquad \forall f \in Ax$$

   Por reducción al absurdo, suponemos que

$$\forall R, C \geqslant 0 \quad \exists x \in D(A) \quad \text{con} \quad \|x - x_0\| < R \quad \text{y} \quad f \in Ax \quad \text{con} \quad \|f\| > C$$

   Por lo que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar un elemento $x_n \in D(A)$ con $\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n}$, y $f_n \in Ax_n$ con $\|f_n\| > C$. En definitiva, tenemos $\{x_n\} \to x_0$ y $\{\|f_n\|\} \to \infty$. Sea ahora $r > 0$ de forma que $B(x_0, r) \subset D(A)$, entonces si $x \in E$ con $\|x\| < r$ tendremos que $x_0 + x \in D(A)$. Si tomamos $g \in A(x_0 + x)$ y usamos la monotonía de A:

$$\langle f_n - g, x_n - x_0 - x\rangle \geqslant 0$$

   luego:

$$\begin{aligned}
\langle f_n, x\rangle &\leqslant \langle f_n, x_n - x_0\rangle + \langle g, x + x_0 - x_n\rangle \leqslant \|f_n\|\|x_n - x_0\| + \|g\|\|x + x_0 - x_n\| \\
&\leqslant \|f_n\|\|x_n - x_0\| + \|g\|(\|x\| + \|x_0 - x_n\|) \leqslant \|f_n\| \underbrace{\|x_n - x_0\|}_{\varepsilon_n} + \underbrace{\|g\|(\|x\| + 1)}_{C(x)}
\end{aligned}$$

   Lo que nos lleva a contradicción.

Ejercicio 4.2.7. Sea $\alpha = \{\alpha_n\}$ una sucesión de números reales y sea $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Supongamos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n||x_n| < \infty$ para cada elemento $x = \{x_n\}$ de l_p. Prueba que $\alpha \in l_{p'}$.

Recordamos que para $1 \leqslant p < \infty$ teníamos:

$$l_p = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ tales que } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}, \qquad \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall x \in l_p$$

Y para $p = \infty$:

$$l_\infty = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ tales que } \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}, \qquad \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, \quad x \in l_\infty$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $T_n : l^p \to \mathbb{R}$ dada por:

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(k)x(k)$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, es claro que T_n es lineal, y vemos que es continua, puesto que:

$$|T_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha(k)x(k) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha(k)||x(k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} (|\alpha(k)|\|x\|_p) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha(k)| \cdot \|x\|_p$$

Si definimos $T : l^p \to \mathbb{R}$ dada por:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(k)x(k)$$

Tenemos por la hipótesis del ejercicio que T está bien definida, así como que $\{T_n x\} \to Tx$. De esta forma, podemos aplicar el Teorema de Banach-Steinhaus, obteniendo que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. Tomando $C \in \mathbb{R}$ con $C \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|$ vemos que:

$$|T_n(x)| \leqslant \|T_n\|\|x\|_p \leqslant C\|x\|_p \qquad \forall x \in l^p, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo que:

$$|T(x)| \leqslant C\|x\|_p \qquad \forall x \in l^p$$

Distinguimos casos:

Si $p = \infty$. Consideramos como x la sucesión:

$$x = \{sgn(\alpha(n))\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$$

Y tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha(n)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha(n)| \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} T(x) \right| \leqslant C\|x\|_\infty = C$$

Por lo que $\|\alpha\|_1 < \infty$, de donde $\alpha \in l^1$.

Si $p = 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos:

$$x = e_n$$

Y tenemos que:

$$|\alpha(n)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha(k)e_n \right| = |T_n(x)| \leqslant C\|x\|_1 = C$$

Por lo que $\alpha \in l^\infty$.

Si $1 < p < \infty$. Dado $N \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$|T_N x| = \left|\sum_{k=1}^{N} \alpha(k)x(k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |\alpha(k)||x(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |\alpha(k)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |\alpha(k)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \|x\|_p \qquad \forall x \in l^p$$

Por lo que:

$$\|T_n x\| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |\alpha(k)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Si consideramos ahora la sucesión x dada por:

$$x_n = \begin{cases} sgn(\alpha_n)|\alpha_n|^{p'-1} & \text{si } 1 \leqslant n \leqslant N \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases} \in l^p$$

Tenemos entonces que:

$$|T_N x| = \left(\sum_{k=1}^{N} |\alpha(k)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \|x\|_p$$

Por lo que:

$$\|T_N x|| = \left(\sum_{k=1}^{N} |\alpha(k)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$

De donde tenemos que:

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |\alpha(k)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant C \qquad \forall N \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \in l^{p'}$$

Ejercicio 4.2.8. Sea E un espacio de Banach y sea $T : E \to E^*$ un operador lineal verificando que

$$\langle Tx, x\rangle \geqslant 0 \qquad \forall x \in E$$

Prueba que T es acotado.
(Se pueden aplicar dos métodos, bien usar el Ejercicio 4.2.6, bien aplicar el Teorema de la Gráfica Cerrada.)

Usando el Ejercicio 4.2.6. Es fácil ver que T es monótona, ya que:

$$\langle Tx - Ty, x - y\rangle = \langle T(x - y), x - y\rangle \geqslant 0 \qquad \forall x, y \in E$$

En dicho caso, por el Ejercicio 4.2.6 tenemos que para todo $x \in E$ existen $R > 0$, $C \geqslant 0$ de forma que:

$$y \in E \quad \text{con} \quad \|y - x\| < R \Longrightarrow \|Ty\| \leqslant C$$

Es decir, si $y \in B(x, R)$ tenemos entonces que $\|Ty\| \leqslant C$. Sea ahora $z \in B(0, 1)$, tenemos que:

$$\|Tz\| = \frac{\|T(Rz)\|}{R} \leqslant \frac{C}{R}$$

Por lo que $T(B(0, 1))$ es un conjunto acotado, y por una proposición vista en teoría concluimos que T es acotada.

Usando el Teorema de la Gráfica Cerrada. Sea $\{(x_n, Tx_n)\}$ una sucesión de GrT convergente a $(x, L) \in E \times E^*$, queremos ver que $L = Tx$ para concluir que GrT es cerrada. Para ello, observemos que para todo $y \in E$ tenemos:

$$0 \leqslant \langle T(x_n - y), x_n - y\rangle = \langle Tx_n - Ty, x_n - y\rangle \to \langle L - T_y, x - y\rangle$$

En particular, tomando $y = x + tz$ para $t \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$0 \leqslant \langle L - T(x + tz), -tz\rangle = \langle L - Tx - T(tz), -tz\rangle = -t\langle L - Tx, z\rangle + t^2\langle Tz, z\rangle$$

de donde:

$$t^2\langle Tz, z\rangle \geqslant t\langle L - Tx, z\rangle \qquad \forall z \in E, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- Si $t > 0$, tenemos que:

  $$t\langle Tz, z\rangle \geqslant \langle L - Tx, z\rangle \qquad \forall z \in E$$

  Por lo que tendiendo $t \to 0^+$, tenemos:

  $$0 \geqslant \langle L - Tx, z\rangle \qquad \forall z \in E$$

- Si $t < 0$, tenemos que:

  $$t\langle Tz, z\rangle \leqslant \langle L - Tx, z\rangle \qquad \forall z \in E$$

  Por lo que tendiendo $t \to 0^-$, tenemos:

  $$0 \leqslant \langle L - Tx, z\rangle \qquad \forall z \in E$$

En definitiva, tenemos que $\langle L - Tx, z\rangle = 0$ para todo $z \in E$, por lo que $L = Tx$, luego GrT es un conjunto cerrado. Por el Teorema de la gráfica cerrada, concluimos que T es continua, es decir, acotada.

Ejercicio 4.2.9. Sea E un espacio de Banach y sea $T : E \to E^*$ un operador lineal verificando

$$\langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle \qquad \forall x, y \in E$$

Prueba que T es acotado.

Usando el Ejercicio 4.2.4. Definimos $a : E \times E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$a(x, y) = \langle Tx, y\rangle \qquad \forall x, y \in E$$

Tenemos que:

- a es lineal en primera variable por ser T una aplicación lineal.
- a es lineal en segunda variable por ser Tx lineal, para cada $x \in E$.
- Fijado $x \in E$ tenemos que Tx es continua, es decir, la aplicación:

$$y \longmapsto a(x, y) = \langle Tx, y\rangle$$

  es continua.
- Fijado $y \in E$, tenemos que la aplicación Ty es continua, por lo que la aplicación:

$$x \longmapsto a(x, y) = \langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle$$

  también será continua.

Aplicando el Ejercicio 4.2.4, existe $C \geqslant 0$ de forma que:

$$|a(x, y)| \leqslant C\|x\|\|y\| \qquad \forall x, y \in E$$

De esta forma, tenemos que:

$$\|Tx\| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} |\langle Tx, y\rangle| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} |a(x, y)| \leqslant \sup_{\|y\|\leqslant 1} C\|x\|\|y\| = C\|x\| \qquad \forall x \in E$$

Por lo que T es acotado.

Usando el Teorema de la gráfica cerrada. Sea $\{(x_n, Tx_n)\}$ una sucesión de puntos de GrT convergente a $(x, L) \in E \times E^*$, buscamos probar que $Tx_n = L$ para probar que GrT es cerrado. Para ello, observamos que:

$$\langle L, z\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, z\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tz, x_n\rangle = \langle Tz, x\rangle = \langle Tx, z\rangle \qquad \forall z \in E$$

de donde deducimos que $L = Tx$, por lo que GrT es cerrada. Aplicando el Teorema de la gráfica cerrada concluimos que T es continua, luego acotada.

Ejercicio 4.2.10. Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T \in L(E, F)$ una aplicación sobreyectiva.

1. Sea $M \subset E$. Prueba que $T(M)$ es cerrado en F si y solo si $M + N(T)$ es cerrado en E.

   Donde $N(T)$ es el núcleo de T, por doble implicación tenemos que:

   $\Longleftarrow$) Si $M + N(T)$ es cerrado, entonces $E \setminus (M + N(T))$ es abierto, y como:

$$T(E \setminus (M + N(T))) = F \setminus T(M)$$

   ya que:

   $\supseteq$) Si $y \in F \setminus T(M)$, por ser T sobreyectiva existe $x \in E$ de forma que $T(x) = y$. Afirmo que $x \notin M + N(T)$, ya que si $x \in M + N(T)$ entonces existen $m \in M$, $n \in N(T)$ de forma que $x = m + n$, por lo que:

$$y = T(x) = T(m + n) = T(m) + T(n) = T(m) \in T(M)$$

   contradicción, luego $x \in E \setminus (M + N(T))$, de donde tenemos que $y \in T(E \setminus (M + N(T)))$.

$\subseteq$) Si $y \in T(E \setminus (M + N(T)))$ entonces existe $x \in E \setminus (M + N(T))$ de forma que $T(x) = y$. Si existiera $z \in M$ de forma que $T(z) = y$, tendríamos entonces que:

$$0 = y - y = T(x) - T(z) = T(x - z)$$

Por lo que existe $v \in N(T)$ de forma que $v = x - z$, de donde:

$$x = z + v \in M + N(T)$$

<u>contradicción</u>, luego $y \in F \setminus T(M)$.

si aplicamos ahora el Teorema de la Aplicación Abierta, obtenemos que $F \setminus T(M)$ es abierto, por lo que $T(M)$ es cerrado.

$\Longrightarrow$) Si $T(M)$ es cerrado, por ser T continua tenemos que $T^{-1}(T(M))$ es cerrado, y:

$$T^{-1}(T(M)) = M + N(T)$$

$\supseteq$) Si $x + n \in M + N(T)$, entonces:

$$T(x + n) = T(x) + T(n) = T(x) \in T(M)$$

Por lo que $x + n \in T^{-1}(T(x))$.

$\subseteq$) Si $x \in T^{-1}(T(M))$, entonces:

$$T(x) \in T(M) \Longrightarrow \exists m \in M \text{ con } T(x) = T(m)$$

de donde $T(x - m) = T(x) - T(m) = 0$. En conclusión, tenemos que:

$$x = m + x - m$$

con $m \in M$, $x - m \in N(T)$.

2. Deduce que si M es un subespacio vectorial cerrado de E y si $dimN(T) < \infty$, entonces $T(M)$ es cerrado.

   Si $dimN(T) < \infty$ tenemos entonces que $N(T)$ es un espacio vectorial de dimensión finita, luego es un conjunto cerrado. Como Además, M es un espacio vectorial cerrado, tendremos que $M + N(T)$ es cerrado, luego $T(M)$ será cerrado por el primer apartado.

En este último apartado hemos usado que:

Si E es un espacio normado y $M, N \subset E$ son subespacios vectoriales con M cerrado y N de dimensión finita, entonces $M + N$ es cerrado.

Demostración. Distingamos ciertos casos triviales que nos facilitan la prueba:

- Si $N \subset M$, entonces $M + N = M$, por lo que la prueba es trivial. Suponemos pues que $M \cap N \neq N$.

- Si $M \cap N \neq \{0\}$, entonces como N es de dimensión finita, podemos tomar una base suya B, de forma que $N = \mathcal{L}(B)$, y como $M \cap N$ es un subespacio de N ha de existir $B' \subsetneq B$ de forma que $M \cap N = \mathcal{L}(B')$, por lo que si consideramos $N' = \mathcal{L}(B \setminus B')$ tenemos que $M \cap N' = \{0\}$, con:

$$M + N = M + N'$$

  Podemos por tanto suponer que $M \cap N = \{0\}$.

Si tenemos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $M + N$ convergente a $x \in E$, queremos ver que $x \in M + N$. Para ello, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $u_n \in M$ y $v_n \in N$ de forma que:

$$x_n = u_n + v_n$$

Y la demostración se completa en dos pasos:

Ver que $\{v_n\}$ está acotada. Por reducción al absurdo, supongamos que $\{v_n\}$ no está acotada, con lo que podemos encontrar una parcial divergente $\{\|v_{\sigma(n)}\|\} \to \infty$, lo que nos dirá que (usando que $\{x_n\}$ está acotada por ser convergente):

$$\left\{\frac{u_{\sigma(n)} + v_{\sigma(n)}}{\|v_{\sigma(n)}\|}\right\} = \left\{\frac{x_{\sigma(n)}}{\|v_{\sigma(n)}\|}\right\} \to 0$$

Si tomamos:

$$w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

tenemos que $\|w_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y que $w_n \in N \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Es decir, una sucesión acotada en un espacio de dimensión finita, propiedad que también cumple $\{w_{\sigma(n)}\}$, por lo que ha de existir una parcial de esta última, $\{w_{\gamma(n)}\}$ que sea convergente a cierto $w \in E$ (por el Teorema de Bolzano-Weierstrass). Notemos que por ser N cerrado ha de ser $w \in N$, así como $\|w\| = 1$ por ser $\|\cdot\|$ una aplicación continua. Tenemos entonces que:

$$\left\{\frac{u_{\gamma(n)}}{\|v_{\gamma(n)}\|} + w_{\gamma(n)}\right\} = \left\{\frac{x_{\gamma(n)}}{\|v_{\gamma(n)}\|}\right\} \to 0$$

Fijado $\varepsilon > 0$, esta última convergencia nos da $n_1 \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$\left\|\frac{u_{\gamma(n)}}{\|v_{\gamma(n)}\|} + w_{\gamma(n)}\right\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geqslant n_1$$

y la convergencia $\{w_{\gamma(n)}\} \to w$ nos da $n_2 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\|w_{\gamma(n)} - w\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geqslant n_2$$

Por lo que tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ obtenemos que:

$$\left\|\frac{u_{\gamma(n)}}{\|v_{\gamma(n)}\|} + w\right\| \leqslant \left\|\frac{u_{\gamma(n)}}{\|v_{\gamma(n)}\|} + w_{\gamma(n)}\right\| + \|w_{\gamma(n)} - w\| < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant n_0$$

Es decir:

$$\left\{\frac{u_{\gamma(n)}}{\|v_{\gamma(n)}\|} + w\right\} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \left\{\frac{u_{\gamma(n)}}{\|v_{\gamma(n)}\|}\right\} \to -w$$

Y como M es cerrado y la sucesión que tenemos es de puntos de M deducimos que $-w \in M$, por lo que $w \in M$ por ser M un espacio vectorial. En definitiva, hemos probado que si la sucesión $\{v_n\}$ no está acotada, entonces podemos encontrar (recordamos que $\|w\| = 1$) $0 \neq w \in M \cap N$, contradicción con que $M \cap N = \{0\}$.

Ver que $x \in M + N$**.** Una vez sabemos que $\{v_n\}$ está acotada, como $dimN < \infty$, por Bolzano-Weierstrass ha de existir una parcial $\{v_{\alpha(n)}\}$ convergente a cierto $v \in E$, y por ser N de dimensión finita tenemos que es cerrado, con lo que $v \in N$. Fijado $\varepsilon > 0$, la convergencia $\{u_{\alpha(n)} + v_{\alpha(n)}\} \to x$ nos da $n_1 \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$\|u_{\alpha(n)} + v_{\alpha(n)} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geqslant n_1$$

y la convergencia $\{v_{\alpha(n)}\} \to v$ nos da $n_2 \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$\|v_{\alpha(n)} - v\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geqslant n_2$$

por lo que tomando $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \|u_{\alpha(n)} - x + v\| &= \|u_{\alpha(n)} + v_{\alpha(n)} - x - (v_{\alpha(n)} - v)\| \\ &\leqslant \|u_{\alpha(n)} + v_{\alpha(n)} - x\| + \|v_{\alpha(n)} - v\| < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant n_0 \end{aligned}$$

Por lo que $\{u_{\alpha(n)}\} \to x - v$ y como M es cerrado, $x - v \in M$. En definitiva, tenemos que:

$$x = x - v + v$$

con $x - v \in M$ y $v \in N$, por lo que $x \in M + N$.

□

Ejercicio 4.2.11. Sea E un espacio de Banach y $F = l^1$, sea $T \in L(E, F)$ una aplicación sobreyectiva. Prueba que existe $S \in L(F, E)$ de forma que $T \circ S = I_F$, es decir, S es la inversa por la derecha de T.
(**Pista:** Intenta definir S de forma explícita usando la base canónica de l^1.)

Recordamos que:

$$l^1 = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ tales que } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}, \qquad \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|, \quad x \in l^1$$

Consideramos:

$$\mathcal{B} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\} \subset l^1$$

donde para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $e_k(i) = \delta_{k,i} \quad \forall i \in \mathbb{N}$. De esta forma, es evidente que $\|e_k\| = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Como T es sobreyectiva y l^1 es de Banach, el Teorema de la aplicación abierta nos dice que T es abierta. Como $0 \in T(B(0, 1))$, existe $R \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\overline{B}(0, R) \subset T(B(0, 1))$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $Re_k \in \overline{B}(0, R)$, por lo que existe $v_k \in B(0, 1)$ de forma que $T(v_k) = Re_k$, de donde tomando:

$$u_k = \frac{v_k}{R}$$

tenemos que $T(u_k) = e_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Definimos $S : l^1 \to E$ por:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n \qquad \forall x \in l^1$$

Que está bien definida (la suma es convergente), porque:

$$\|x_n u_n\| = |x_n|\|u_n\| = \frac{1}{R}|x_n|\|v_n\| \leqslant \frac{|x_n|}{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

De donde:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n u_n\| \leqslant \frac{1}{R}\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$$

Por lo que la suma de la definición de S es absolutamente convergente, luego es convergente por ser E de Banach. Además:

- S es lineal, ya que si $x, y \in l^1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} S(\lambda x + y) &= \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda x_n + y_n)u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n u_n + y_n u_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n u_n \\ &= \lambda S(x) + S(y) \end{aligned}$$

- S es continua, ya que:

$$\|S(x)\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n\right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n u_n\| \leqslant \frac{1}{R}\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \frac{1}{R}\|x\| \qquad \forall x \in l^1$$

Finalmente, vemos que:

$$\begin{aligned} T(S(x)) &= T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n\right) = T\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k u_k\right) \overset{T \text{ cont.}}{=} \lim_{n\to\infty} T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k u_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k T(u_k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n T(u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n = x \qquad \forall x \in l^1 \end{aligned}$$

Ejercicio 4.2.12. Sean E, F dos espacios de Banach a cuyas normas denotamos por $\|\cdot\|$. Sea $T \in L(E,F)$ de forma que ImT es cerrado y $dim \ker T < \infty$. Sea $|\cdot|$ otra norma definida sobre E que cumple:

$$|x| \leqslant M\|x\| \qquad \forall x \in E$$

Prueba que existe una constante C de forma que:

$$\|x\| \leqslant C(\|Tx\| + |x|) \qquad \forall x \in E$$

(**Pista:** Razonar por reducción al absurdo)

Por reducción al absurdo, supongamos que:

$$\forall C \in \mathbb{R}^+ \ \exists x \in E \qquad \text{tal que} \qquad \|x\| > C(\|Tx\| + |x|)$$

Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in E$ de forma que:

$$\|u_n\| > n(\|Tu_n\| + |u_n|) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si tomamos:

$$x_n = \frac{u_n}{\|u_n\|} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tenemos entonces que:

$$\|x_n\| = \frac{\|u_n\|}{\|u_n\|} > \frac{n}{\|u_n\|}(\|Tu_n\|+|u_n|) = n\left(\left\|T\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)\right\| + \left|\frac{u_n}{\|u_n\|}\right|\right) = n(\|Tx_n\|+|x_n|)$$

Con $\|x_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que T es sobreyectiva, ya que como ImT es un subespacio vectorial cerrado de F tendremos que ImT también es de Banach. Bajo esta suposición tenemos por el Teorema de la aplicación abierta que T es abierta, con lo que existe $r \in \mathbb{R}^+$ de forma que $B(0, r) \subset T(B(0, 1))$. De la desigualdad superior vemos que:

$$\frac{1}{n} > \|Tx_n\| + |x_n| \Longrightarrow \|Tx_n\|, |x_n| \leqslant \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

De esta forma, vemos que:

$$Tx_n \in B\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}B(0,1) = \frac{1}{nr}B(0,r) \subset \frac{1}{nr}T(B(0,1)) = T\left(B\left(0, \frac{1}{nr}\right)\right)$$

Por lo que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in B\left(0, \frac{1}{nr}\right)$ tal que:

$$Ty_n = Tx_n$$

Tenemos entonces que $\{\|y_n\|\} \to 0$. Si definimos:

$$z_n = x_n - y_n \in \ker T \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tenemos que esta sucesión verifica:

- $\|z_n\| = \|x_n - y_n\| \leqslant \|x_n\| + \|y_n\| < 1 + \frac{1}{nr}$ por lo que $\{\|z_n\|\} \to 1$.
- $|z_n| = |x_n - y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \frac{1}{n} + M\|y_n\|$, por lo que $\{|z_n|\} \to 0$.

Como $dim \ker T < \infty$ tenemos que las normas $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ son equivalentes, pero sin embargo su convergencia para la sucesión $\{z_n\}$ no es la misma, hemos llegado a una contradicción.

Ejercicio 4.2.13. Sean E y F dos espacios de Banach, probar que el conjunto

$$\Omega = \{T \in L(E,F) : T \text{ admite una inversa por la izquierda}\}$$

es abierto en $L(E, F)$.
(**Pista:** probar primero que el conjunto

$$\mathcal{O} = \{T \in L(E,F) : T \text{ es biyectiva}\}$$

es abierto en $L(E, F)$.)

Ejercicio 4.2.14.

Ejercicio 4.2.15. Sean E_1, E_2 y F tres espacios de Banach, consideramos $T_1 \in L(E_1, F)$ y $T_2 \in L(E_2, F)$ de forma que:

$$ImT_1 \cap ImT_2 = \{0\} \qquad \text{y} \qquad ImT_1 + ImT_2 = F$$

Prueba que ImT_1 y ImT_2 son cerrados.

Definimos $T : E_1 \times E_2 \to F$ dada por:

$$T(x,y) = T_1(x) + T_2(y) \qquad \forall (x,y) \in E_1 \times E_2$$

Y tenemos que T es lineal, puesto que si $(x,y),(u,v) \in E_1 \times E_2$ y $t \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\begin{aligned} T(t(x,y) + (u,v)) &= T(tx+u, ty+v) = T_1(tx+u) + T_2(ty+v) \\ &= t(T_1(x) + T_2(y)) + T_1(u) + T_2(v) = tT(x,y) + T(u,v) \end{aligned}$$

Además, si consideramos en $E_1 \times E_2$ la norma de la suma, tenemos que T es continua, puesto que:

$$\begin{aligned} \|T(x,y)\| &= \|T_1(x) + T_2(y)\| \leqslant \|T_1(x)\| + \|T_2(y)\| \leqslant \|T_1\|\|x\| + \|T_2\|\|y\| \\ &\leqslant \max\{\|T_1\|, \|T_2\|\}(\|x\| + \|y\|) \end{aligned}$$

Observamos ahora que:

$$ImT = \{T(x,y) = T_1(x) + T_2(y) : (x,y) \in E_1 \times E_2\} = ImT_1 + ImT_2 = F$$

Por lo que T es sobreyectiva. Como E_1 y E_2 son de Banach, tendremos que $E_1 \times E_2$ es de Banach (con la norma de la suma), por lo que podemos aplicar el Teorema de la aplicación abierta, obteniendo que T es una aplicación abierta. Buscamos probar que ImT_1 es cerrado. Para ello, escribimos:

$$ImT_1 = \{T_1(x) : x \in E_1\} = \{T(x,y) : x \in E_1, y \in \ker T_2\} = T(E_1 \times \ker T_2)$$

Estamos en las condiciones del Ejercicio 4.2.10, por lo que tenemos que el conjunto $ImT_1 = T(E_1 \times \ker T_2)$ es cerrado en F si y solo si $(E_1 \times \ker T_2) + \ker T$ es cerrado en $E_1 \times E_2$. Observemos ahora que:

$$\ker T = \ker T_1 \times \ker T_2$$

$\supseteq$) Es clara.

$\subseteq$) Sea $(u,v) \in \ker T$, tenemos entonces que:

$$0 = T(u,v) = T_1(u) + T_2(v) \Longrightarrow T_1(u) = -T_2(v)$$

- Si $T_1(u) = 0$ entonces $T_2(v) = 0$ y tenemos que $(u,v) \in \ker T_1 \times \ker T_2$.
- Supuesto que $T_1(u) \neq 0$, tenemos entonces que $T_2(-v) = T_1(u)$, por lo que $T_1(u) \in ImT_1 \cap ImT_2 = \{0\}$, luego este caso es imposible.

Por lo que tenemos que:

$$(E_1 \times \ker T_2) + \ker T = (E_1 \times \ker T_2) + (\ker T_1 \times \ker T_2) = E_1 \times \ker T_2$$

de donde ImT_1 es cerrado si y solo si $E_1 \times \ker T_2$ es un conjunto cerrado, y este último conjunto sí que es cerrado, como producto cerrados ($\ker T_2$ es cerrado porque si $\{y_n\} \to y$ es una sucesión de $\ker T_2$ entonces $\{T_2(y_n)\} = \{0\} \to T_2(y)$, luego ha de ser $y \in \ker T_2$). Análogamente se comprueba que ImT_2 es cerrado, ya que por el Ejercicio 4.2.10 tenemos que este conjunto es cerrado si y solo si el conjunto:

$$(\ker T_1 \times E_2) + \ker T = \ker T_1 \times E_2$$

es cerrado.

Ejercicio 4.2.16. Sea E un espacio de Banach y sean G y L dos subespacios cerrados de E. Si existe una constante C de forma que:

$$dist(x, G \cap L) \leqslant Cdist(x, L) \qquad \forall x \in G$$

Prueba que $G + L$ es cerrado.

Ejercicio 4.2.27. Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T \in L(E, F)$. Si ImT tiene codimensión finita, es decir, existe un subespacio vectorial X de F de dimensión finita de forma que $X + ImT = F$ y $X \cap ImT = \{0\}$; prueba que ImT es cerrado.

Como $dimX < \infty$ tenemos que X es un subespacio vectorial cerrado de F, y como F es de Banach tendremos que X también será de Banach. Si consideramos:

$$\begin{array}{rccc} T_2 : & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

Tenemos que $T_2 \in L(X, X)$, y estamos en las hipótesis del Ejercicio 4.2.10 con $T_1 = T$. Deducimos que ImT es cerrado.

4.2.1. Ejercicios adicionales

La siguiente relación de ejercicios proviene de los apuntes de Javier Pérez, cuyos apuntes pueden encontrarse en la bibliografía de la asignatura

Ejercicio 4.2.28. Sea E un espacio métrico completo y supongamos que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ donde los F_n son conjuntos cerrados. Prueba que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Int} F_n$ es un abierto denso en E.

Ejercicio 4.2.29. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Se define una nueva norma en X mediante la expresión $|||x||| = \|x\| + \|T(x)\|$ para todo $x \in X$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) T es continua.

b) $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son equivalentes.

c) $|||\cdot|||$ es una norma completa en X.

Probamos las implicaciones:

c) $\Longrightarrow$ *b)* Como tenemos trivialmente que:

$$\|x\| \leqslant \|x\| + \|T(x)\| = |||x||| \qquad \forall x \in X$$

y $|||\cdot|||$ es también una norma completa, el Corolario 2.6.2 nos dice que las dos normas son equivalentes.

b) $\Longrightarrow$ *a)* Como las dos normas son equivalentes, ha de existir $C \in \mathbb{R}^+$ de forma que:

$$|||x||| \leqslant C\|x\| \qquad \forall x \in X$$

Por lo que:

$$\|x\| + \|T(x)\| = |||x||| \leqslant C\|x\| \quad \Longrightarrow \quad \|T(x)\| \leqslant (C-1)\|x\| \qquad \forall x \in X$$

a) $\Longrightarrow$ *c)* Si tomamos una sucesión de puntos de X que sea de Cauchy para $|||\cdot|||$: $\{x_n\}$, tenemos entonces que:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geqslant m \Longrightarrow |||x_p - x_q||| < \varepsilon$$

Pero tenemos:

$$|||x_p - x_q||| = \|x_p - x_q\| + \|T(x_p) - T(x_q)\| < \varepsilon \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \|x_p - x_q\| < \varepsilon \\ \|T(x_p) - T(x_q)\| < \varepsilon \end{array} \right.$$

Por lo que $\{x_n\}$ es de Cauchy para $\|\cdot\|$ y como esta norma es completa tenemos que existe $x \in X$ de forma que $\{x_n\} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Como T es continua, tendremos entones que $\{T(x_n)\} \to T(x)$. Finalmente, de la definición de $|||\cdot|||$ vemos que $\{x_n\} \xrightarrow{|||\cdot|||} x$, pues:

$$|||x_n - x||| = \|x_n - x\| + \|T(x_n) - T(x)\|$$

Ejercicio 4.2.30. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Prueba que T es inyectiva y $T(X)$ es cerrado en Y si, y sólo si, existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leqslant M\|T(x)\|$ para todo $x \in X$.

Ejercicio 4.2.31. Sean X, Y espacios de Banach y $T \in L(X, Y)$. Prueba que las siguentes afirmaciones son equivalentes:

a) $T(X)$ es cerrado en Y.

b) T es una aplicación abierta de X sobre $T(X)$.

c) Existe $K > 0$ tal que $\|x + \ker T\| \leqslant K\|Tx\|$ para todo $x \in X$.

d) Existe $M > 0$ tal que para todo $y \in T(X)$ existe $x \in T^{-1}(y)$ verificando $\|x\| \leqslant M\|y\|$.

Probamos las implicaciones:

a) $\Longrightarrow$ *b)* Si $T(X) \subset Y$ es cerrado, como Y es de Banach tendremos que $T(X)$ será también de Banach, y como T es sobreyectiva sobre su imagen, por el Teorema de la aplicación abierta tenemos que T es una aplicación abierta de X sobre $T(X)$.

b) $\Longrightarrow$ *c)*

Ejercicio 4.2.32. Prueba que si X e Y son espacios normados, $T : X \to Y$ es un operador lineal con gráfica cerrada y $T(X)$ tiene dimensión finita, entonces T es continuo.

Ejercicio 4.2.33. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L(X, Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\mathcal{F}$ está acotado.

b) Para cada $x \in X$ y cada $g \in Y^*$ el conjunto $\{g(T(x)) : T \in \mathcal{F}\}$ está acotado.

Ejercicio 4.2.34. Sea E un espacio métrico y X un espacio normado. Prueba que una aplicación $T : E \to X$ es lipschitziana si, y sólo si, lo es $x^* \circ T$, para todo $x^* \in X^*$.