

# Álgebra III

## Examen VI

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



**Los Del DGIIM**, [losdeldgim.github.io](https://losdeldgim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Álgebra III

# Examen VI

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Granada, 2025

**Asignatura** Álgebra III.

**Curso Académico** 2022/23.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** José Gómez Torrecillas.

**Descripción** Examen Extraordinario.

**Ejercicio 1.** Tomemos  $f = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]$  y  $K$  el cuerpo de descomposición de  $f$  sobre  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ .

- a) Calcular razonadamente  $[K : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$ .
- b) Describir los elementos del grupo  $\text{Aut}_{(\mathbb{Q}(\sqrt{3}))}(K)$ .
- c) Calcular todas las subextensiones de la extensión  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \leq K$ .
- d) Dar todas las subextensiones de  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \leq K$  que contienen al número  $\sqrt{3} + i$ .

**Ejercicio 2.** Consideremos una raíz cónica primitiva de la unidad  $w \in \mathbb{C}$ . Decidir razonadamente si  $\mathbb{Q}(w) = \mathbb{Q}(\frac{1}{w+1})$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $g = x^3 + x^2 - 1 \in \mathbb{F}_3[x]$  y  $F$  un cuerpo de descomposición sobre  $\mathbb{F}_3$  de  $g$ .

- a) Describir los elementos del grupo  $\text{Aut}(F)$  y calcular todos los subcuerpos de  $F$ .
- b) Si  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$  son las raíces de  $g$ , decidir si  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \in \mathbb{F}_3$ .
- c) Resolver la ecuación  $x^2 + 1 = 0$  en  $F$ .

**Ejercicio 4.** Decidir razonadamente sobre la veracidad de las siguientes afirmaciones:

- a)  $\sqrt[6]{32} - \sqrt[6]{16} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$ .
- b) Si  $F \leq K$  es una extensión de Galois y  $\alpha \in K$  es tal que  $\sigma(\alpha) \neq \alpha$  para todo  $\sigma \in \text{Aut}_F(K)$  distinto de la identidad, entonces  $K = F(\alpha)$ .
- c) Si  $f \in \mathbb{Q}[x]$  es un polinomio de grado 3 y tiene una raíz construible, entonces  $f$  es reducible.
- d) Sea  $F$  un cuerpo de descomposición de  $f = x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_5[x]$  y  $\alpha \in F$  una raíz de  $f$ . Para  $g = \text{Irr}(\alpha + 1, \mathbb{F}_5)$  se tiene que  $g(\alpha) = 3\alpha$ .