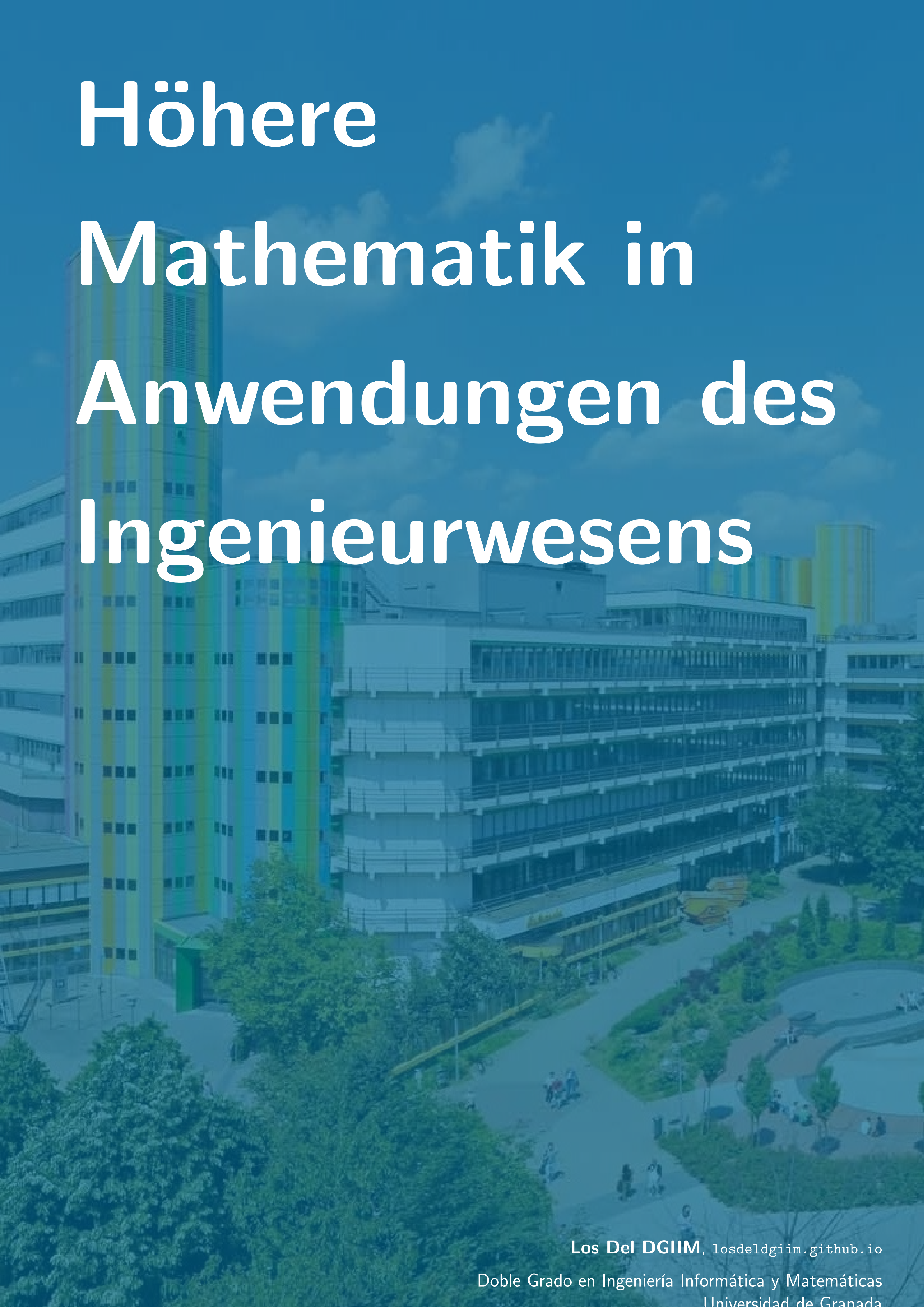

Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Übungs Blätter

1.3. Rechnen mit physikalischen Größen

Ejercicio 1.3.1 (Fährverbindung)**.** Eine Fähre bewegt sich mit der Eigengeschwindigkeit $v_0 = 4\,\mathrm{m/s}$ (relativ zum Fluss) vom Uferpunkt A aus auf kürzestem Weg zum gegenüberliegenden Flussufer (Punkt B; Abb. 1.1).

1. Unter welchem Winkel α muss die Fähre gegen die Strömung gesteuert werden, wenn die Geschwindigkeit der Strömung den Betrag $v_s = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$ hat?

   The Ferry wants to get to B in an straight line. Therefore, it must compensate the flow velocity by steering at an angle α against the flow. It is then needed that:

   $$v_s = v_0 \sin(\alpha) \implies \alpha = \arcsin\left(\frac{v_s}{v_0}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}5}{4}\right) \approx 0{,}3844\,\mathrm{rad} \approx 22{,}024\,^\circ$$

2. Wie groß ist dann die resultierende Geschwindigkeit v_r der Fähre?

   The resulting velocity v_r of the ferry is given by:

   $$v_r = v_0 \cos(\alpha) = 4\cos(0{,}3844) \approx 3{,}7081\,\mathrm{m/s}$$

Ejercicio 1.3.2 (Elektrische Punktladungen im Koordinatensystem)**.** Eine Punktladung $q_1 = 6{,}0\,\mu\mathrm{C}$ befindet sich in einem kartesischen Koordinatensystem bei $x_1 = 1{,}0\,\mathrm{m}$, $y_1 = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Eine zweite Ladung $q_2 = -2{,}5\,\mu\mathrm{C}$ befindet sich in dessen Ursprung. Ein Elektron, d.h. eine dritte Punktladung, ist in einem Punkt mit den Koordinaten (x_e, y_e). Berechnen Sie die Werte für x_e und y_e, bei denen sich das

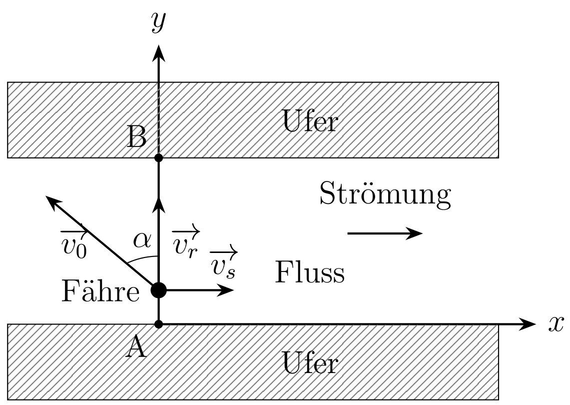

Figura 1.1: Fährverbindung über einen Fluss mit Strömung.

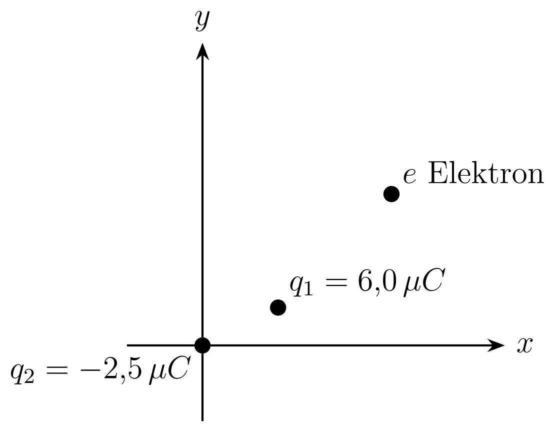

Figura 1.2: Punktladungen im Koordinatensystem.

Elektron im Gleichgewicht befindet, d.h. bei dem die Gesamtkraft auf das Elektron verschwindet.

The forces acting on the electron due to the other two charges must cancel each other out for equilibrium. Let F_{ei} be the force on the electron due to charge q_i. The forces can be expressed as:

$$\overrightarrow{F}_{e1} + \overrightarrow{F}_{e2} = 0$$

where, using that $q_e = -e < 0$ (the charge of the electron):

$$\overrightarrow{F}_{e1} = -k_e \frac{|q_1 e|}{r_{e1}^2}\ \hat{r}_{e1}, \quad \overrightarrow{F}_{e2} = k_e \frac{|q_2 e|}{r_{e2}^2}\ \hat{r}_{e2}$$

Here, k_e is Coulomb's constant, e is the elementary charge, r_{ei} is the distance between the electron and charge q_i, and $\hat{r}_{ei}$ is the unit vector pointing from charge q_i to the electron. Using the values of r_{e1} and r_{e2} based on the coordinates of the charges and the electron, we have:

$$\overrightarrow{r}_{e1} = (x_e - 1, y_e - 0{,}5), \quad \overrightarrow{r}_{e2} = (x_e, y_e)$$

Therefore, the equilibrium condition becomes:

$$-k_e \frac{|q_1 e|}{((x_e-1)^2 + (y_e - 0{,}5)^2)} \cdot \frac{(x_e - 1, y_e - 0{,}5)}{\sqrt{(x_e-1)^2 + (y_e-0{,}5)^2}} + k_e \frac{|q_2 e|}{(x_e^2 + y_e^2)} \cdot \frac{(x_e, y_e)}{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}} = 0$$

This vector equation can be separated into its x and y components, leading to a system of two equations with two unknowns (x_e and y_e). Solving this system will yield the coordinates of the electron in equilibrium.

$$\begin{aligned} -k_e \frac{|q_1 e|(x_e - 1)}{((x_e-1)^2 + (y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e| x_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} &= 0 \\ -k_e \frac{|q_1 e|(y_e - 0{,}5)}{((x_e-1)^2 + (y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e| y_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} &= 0 \end{aligned}$$

In an easier way:

$$\begin{aligned} \frac{|q_1|(x_e - 1)}{((x_e-1)^2 + (y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} &= \frac{|q_2| x_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} \\ \frac{|q_1|(y_e - 0{,}5)}{((x_e-1)^2 + (y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} &= \frac{|q_2| y_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.3.3 (Die magnetische Kraft)**.** Ein punktförmiges Teilchen mit einer Ladung $q = -3{,}64\,\text{nC}$ bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $\overrightarrow{v} = 2{,}75 \cdot 10^6\,{}^{\text{m}}\!/\!_{\text{s}}\ \overrightarrow{e_x}$, d.h. entlang der x-Achse. Berechnen Sie die Kraft, die folgende Felder auf das Teilchen ausüben:

1. $\overrightarrow{B} = 0{,}38\,\text{T}\ \overrightarrow{e_y}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F} &= q \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ v_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \overrightarrow{e_z} = \\ &= -3{,}64 \cdot 10^{-9} \cdot 2{,}75 \cdot 10^6 \cdot 0{,}38\ \overrightarrow{e_z} = -3{,}8038 \cdot 10^{-3}\,\text{N}\ \overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

2. $\overrightarrow{B} = T\,0{,}75\ \overrightarrow{e_x} + T\,0{,}75\ \overrightarrow{e_y}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F} &= q \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \overrightarrow{e_z} = \\ &= -3{,}64 \cdot 10^{-9} \cdot 2{,}75 \cdot 10^6 \cdot 0{,}75\ \overrightarrow{e_z} = -7{,}5075 \cdot 10^{-3}\,\text{N}\ \overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$