Ecuaciones Diferenciales I

Examen XIII

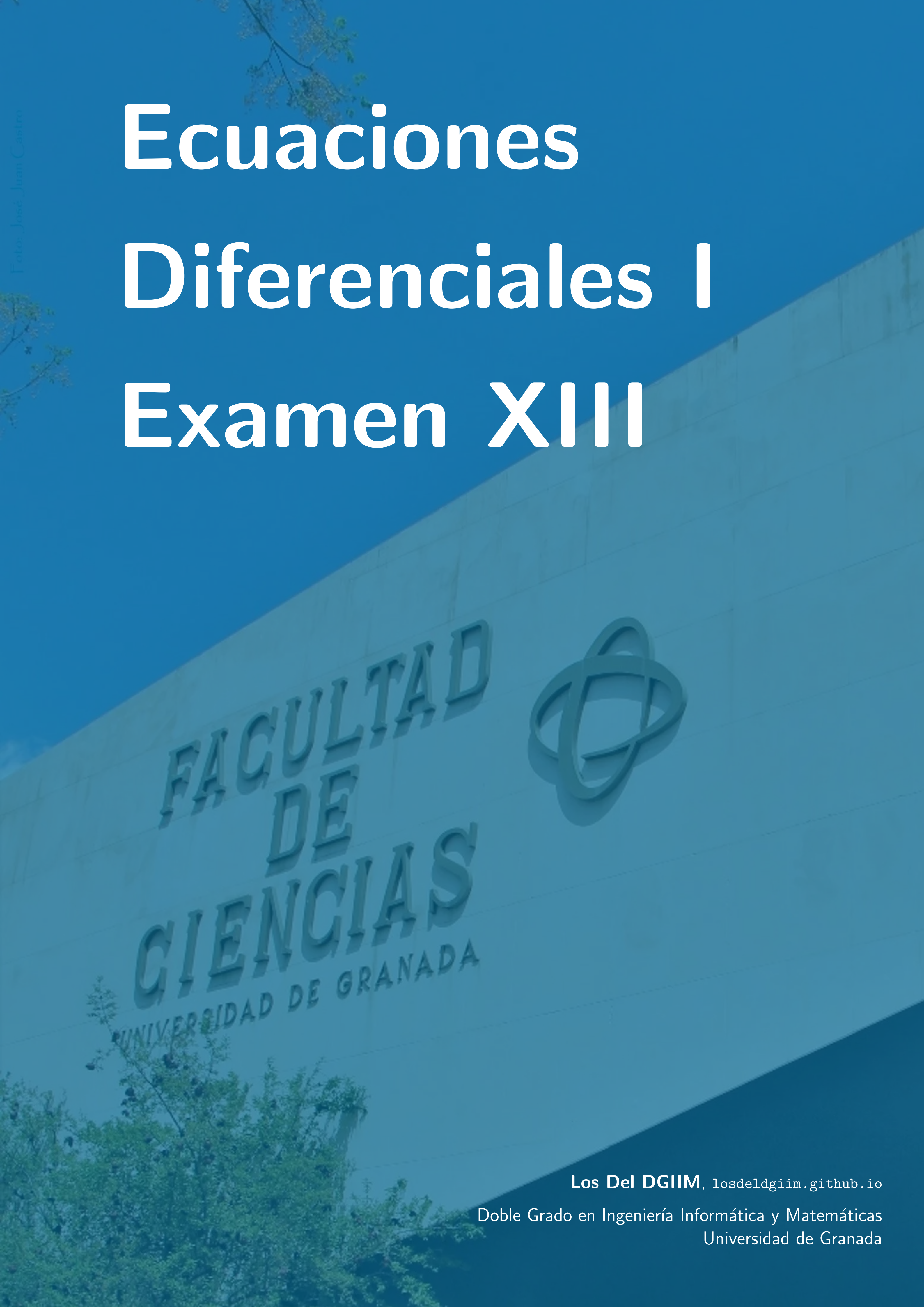


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen XIII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2018-19.

Grupo A.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial B.

Fecha 13 de Mayo de 2019.

Ejercicio 1. Resuelve el problema

$$x' = \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2, \quad x(1) = 1.$$

¿En qué intervalo está definida la solución?

Ejercicio 2. La ecuación diferencial

$$x' = \frac{2x + t + 1}{2x + t + 7}$$

pertenece a una de las familias estudiadas en clase. ¿De qué familia se trata? Encuentra un cambio de variable que la transforme en una ecuación de variables separadas, especificando los dominios sobre los que actúa este cambio.

Ejercicio 3. Se considera la ecuación $x' = x + t$. ¿Tiene soluciones polinómicas? ¿Cuántas?

Ejercicio 4. Se consideran los dominios del plano

$$\Omega_1 =]0, 1[\times]0, 1[, \quad \Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 < 1\}.$$

¿Tienen forma de estrella?

1. Ω_1.

   Veamos que es convexo. Dados (x, y), $(x', y') \in \Omega_1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
[(x, y), (x', y')] &= \{t(x, y) + (1 - t)(x', y') \mid t \in [0, 1]\} = \\
&= \{(tx + (1 - t)x', ty + (1 - t)y') \mid t \in [0, 1]\} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} tx + (1 - t)x' \in]0, 1[\\ ty + (1 - t)y' \in]0, 1[\end{cases} \qquad \forall t \in [0, 1].
\end{aligned}$$

   En primer lugar, como $x, y, x', y' > 0$ y $t, (1 - t) \geqslant 0$ sin anularse a la vez, tenemos que:

$$tx + (1 - t)x' > 0, \quad ty + (1 - t)y' > 0. \qquad \forall t \in [0, 1].$$

   En segundo lugar, distinguimos en función de x y x':

   - Si $x \leqslant x'$, entonces:

$$tx + (1 - t)x' \leqslant tx' + (1 - t)x' = x' < 1.$$

   - Si $x' \leqslant x$, entonces:

$$tx + (1 - t)x' \geqslant tx + (1 - t)x = x < 1.$$

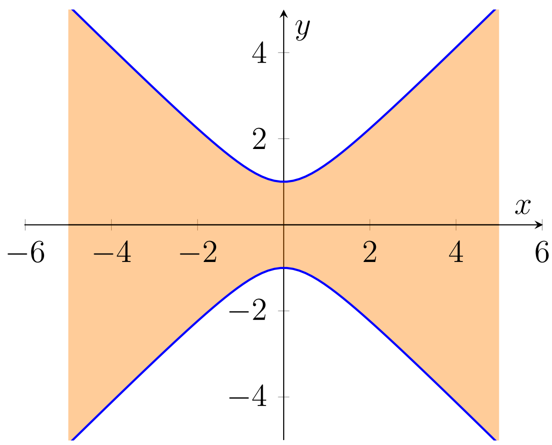
   En cualquier caso, (y análogamente para y y y') tenemos que:

$$tx + (1 - t)x' \in]0, 1[, \quad ty + (1 - t)y' \in]0, 1[.$$

   Por tanto, Ω_1 es convexo, y por tanto tiene forma de estrella.

2. Ω_2.

   Veamos en primer lugar su forma:



   Veamos que tiene forma de estrella desde el punto $(0,0)$. Dados $(x,y) \in \Omega_2$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
[(0,0),(x,y)] &= \{t(0,0)+(1-t)(x,y) \mid t \in [0,1]\} = \\
&= \{(0,0)+t(x,y) \mid t \in [0,1]\} = \\
&= \{(tx,ty) \mid t \in [0,1]\} \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \left\{(ty)^2-(tx)^2 < 1 \qquad \forall t \in [0,1]. \Longleftrightarrow \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{t^2(y^2-x^2) < 1 \qquad \forall t \in [0,1]. \right.
\end{aligned}$$

   donde esta última desigualdad se cumple para cualquier $t \in [0,1]$ por ser $y^2 - x^2 < 1$ $(x,y) \in \Omega_2$.

   Por tanto, Ω_2 tiene forma de estrella.

Ejercicio 5. Se considera la ecuación diferencial $x' = a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t)$, donde $a_0, a_1, a_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. En el dominio $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ se efectúa el cambio de variable $s = -t$, $y = {}^1\!/_x$. ¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes a_0, a_1 y a_2 para que la ecuación permanezca invariante por este cambio de variable?