Análisis Funcional

Examen III

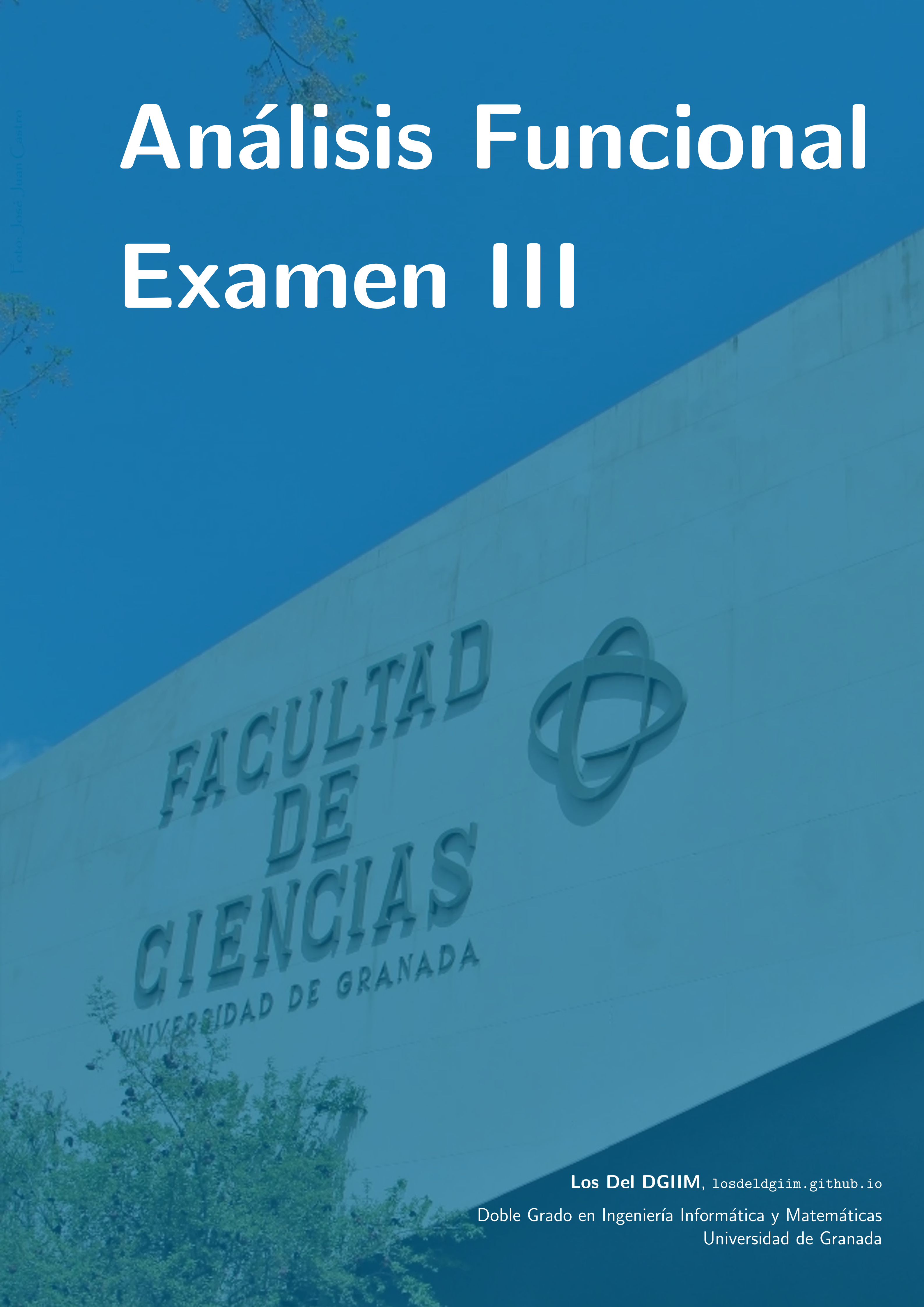


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Funcional
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2025

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2024/25.

Grado Grado en Matemáticas.

Descripción Examen Ordinario.

Fecha 15 de enero de 2025.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Sea $X = C([0,1],\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$. Se define

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\ dt, \qquad \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} \qquad \forall f \in X$$

y se escribe $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_\infty = (X, \|\cdot\|_\infty)$. Definimos el funcional lineal $\delta : X \to \mathbb{R}$ por

$$\delta(f) = f(0) \qquad \forall f \in X$$

a) Demuestra que $\delta \in X_\infty^*$ y calcula su norma.

b) ¿Es δ continuo respecto a $\|\cdot\|_1$? Justifica tu respuesta.

c) ¿Son equivalente $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en X? Justifica tu respuesta.

d) ¿Es X_1 completo? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Sea X un espacio reflexivo e Y un espacio de Banach. Pruébese que si existe $T \in L(X,Y)$ sobreyectiva, entonces Y es reflexivo.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Sean $S : c_0 \to c_0$ y $T : l_1 \to l_1$ operadores lineales y supongamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} [Sx](k)y(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)[Ty](k) \qquad \forall x \in c_0, \quad \forall y \in l_1$$

Demuestra que S y T son continuos.

Ejercicio 4 (4 puntos)**.** Desearrolla el siguiente tema: "*Mejor aproximación en espacios de Hilbert; teorema de la proyección ortogonal; teorema de Riesz-Fréchet*".

Ejercicio 5. (Ejercicio extra)
Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador verificando que $\overline{T(B_X)}$ es un subconjunto compacto de Y. Demuestra que T^* alcanza su norma.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Sea $X = C([0,1],\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$. Se define

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt, \qquad \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} \qquad \forall f \in X$$

y se escribe $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_\infty = (X, \|\cdot\|_\infty)$. Definimos el funcional lineal $\delta : X \to \mathbb{R}$ por

$$\delta(f) = f(0) \qquad \forall f \in X$$

a) Demuestra que $\delta \in X_\infty^*$ y calcula su norma.

Veamos que $\delta \in X_\infty^*$:

- δ es lineal, pues si $f, g \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que:
$$\delta(\lambda f + g) = (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda\delta(f) + \delta(g)$$
- δ es continuo, pues si $f \in X$ tenemos:
$$|\delta(f)| = |f(0)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$$

Por lo que $\delta \in X_\infty^*$. De hecho, en el último apartado hemos probado además que $\|\delta\| \leqslant 1$. Veamos que $\|\delta\| = 1$, puesto que si consideramos cualquier función $f \in X$ de forma que $\max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)| = |f(0)|$ tenemos entonces que:

$$|\delta(f)| = |f(0)| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$$

b) ¿Es δ continuo respecto a $\|\cdot\|_1$? Justifica tu respuesta.

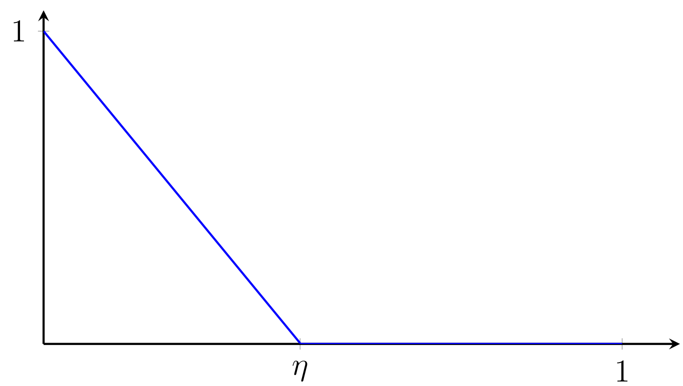
Si δ fuera continuo respecto a $\|\cdot\|_1$, en particular será continua en la función constantemente igual a 0, por lo que:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 : \|f\|_1 < \eta \Longrightarrow |\delta(f)| < \varepsilon$$

Es decir, si δ fuera continua podríamos acotar el valor de cualquier función $f \in X$ en 0 sabiendo acotar el valor de su integral. No parece que esto sea posible, por lo que tratamos de probar que δ no es continua. Para ello, buscamos probar que:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \eta > 0\ \exists f \in X \quad \text{con} \quad \|f\|_1 < \eta \quad \text{y} \quad |\delta(f)| > \varepsilon$$

Si consideramos $\varepsilon = 1/2$ y nos dan $\eta > 0$, si consideramos la función cuya gráfica es:



Es decir, que en el intervalo $[0, \eta]$ es la recta que une el punto $(0, 1)$ con el $(\eta, 0)$ y en el intervalo $[\eta, 1]$ vale 0, tenemos que $f \in X$, así como que:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\ dt = \int_0^1 f(t)\ dt = \int_0^\eta f(t)\ dt + \int_\eta^1 f(t)\ dt = \frac{\eta}{2} < \eta$$

(ya que el área del triángulo es base por altura entre 2) y tenemos que:

$$|\delta(f)| = |f(0)| = 1 > \frac{1}{2}$$

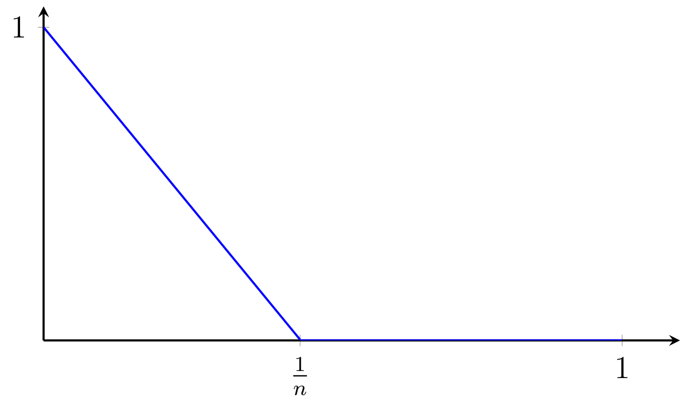
Acabamos de probar que δ no es continua para $\|\cdot\|_1$.

c) ¿Son equivalentes $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en X? Justifica tu respuesta.

No pueden ser equivalentes: si fueran equivalentes tendríamos que las topologías que da cada norma serían iguales, pero sin embargo tenemos que δ es continua para $\|\cdot\|_\infty$ y no es continua para $\|\cdot\|_1$, por lo que sus topologías no pueden contener los mismos abiertos (recordamos que δ es continua si y solo si la preimagen de todo abierto de $\mathbb{R}$ es un abierto en la topología que consideramos en X), por lo que las dos normas no pueden ser equivalentes.

d) ¿Es X_1 completo? Justifica tu respuesta.

No es completo, si consideramos la sucesión $\{f_n\}$ de funciones de X donde cada f_n es la función que en el intervalo $[0, 1/n]$ une el punto $(0, 1)$ con el $(1/n, 0)$ y en el intervalo $[1/n, 1]$ es constantemente igual a 0, tendremos que la gráfica de cada función es:



Tenemos que esta sucesión es de Cauchy para X_1, pues si $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$:

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\ dt = \int_0^1 f_n(t)\ dt - \int_0^1 f_m(t)\ dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) < \frac{1}{2n}$$

Y sin embargo dicha sucesión de funciones no es convergente, pues en $L^1([0, 1])$ convergen (con la misma norma) a la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Y tenemos que $f \notin X_1$, por lo que $\{f_n\}$ no es convergente en X_1 pero sí es de Cauchy, con lo que X_1 no puede ser completo.