Variable Compleja I
Examen XV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen XV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 22 de Junio de 2023.

Duración 3.5 horas.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Integrando una conveniente función sobre la poligonal Γ_R dada por

$$[-R, R, R + \pi i, -R + \pi i, -R]$$

con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}}\, dx.$$

Ejercicio 2 (2.5 + 1.5 puntos)**.** Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y supongamos que f diverge en 0 y en ∞. Probar que f se anula en algún punto de $\mathbb{C}^*$.

- Extra Demostrar que, de hecho, f se anula al menos dos veces (contando multiplicidad) y que tiene un número finito de ceros.

Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(t + z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)}{1 + t^4}\, dt$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

1. Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.
2. Probar que la serie de funciones entera $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 4 (2.5 puntos)**.** Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de modo que

$$f\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n^3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que una de las funciones es un polinomio de grado uno y que la otra es un polinomio de grado tres.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Integrando una conveniente función sobre la poligonal Γ_R dada por

$$[-R, R, R+\pi i, -R+\pi i, -R]$$

con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}}\,dx.$$

Veamos en primer lugar en qué puntos se anula el denominador de mi función a integrar:

$$e^z + e^{-z} = 0 \implies e^{2z} = -1 \implies 2z \in \operatorname{Log}(-1) = i\operatorname{Arg}(-1) = i\,(\pi + 2\pi\mathbb{Z}) \implies z \in i\pi\,({}^1\!/_2 + \mathbb{Z})\,.$$

Sea por tanto $A = i\pi\,({}^1\!/_2 + \mathbb{Z})$. Definimos la función:

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{C}\setminus A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} \end{array}$$

Notemos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus A)$, y que $A' = \emptyset$, por lo que podemos aplicar el Teorema de los Residuos. Como $\mathbb{C}$ es homológicamente conexo, podemos aplicar el Teorema de los Residuos para cualquier ciclo Σ en $\mathbb{C}\setminus A$. Para todo $R \in \mathbb{R}^+$, consideramos la poligonal siguiente:

$$\Gamma_R = [-R, R] + [R, R+\pi i] - [-R+\pi i, R+\pi i] - [-R, -R+\pi i]$$

representada en la Figura 1, donde:

$$\begin{array}{rrcl} [-R, R]: & [-R, R] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & t \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} [R, R+\pi i]: & [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & R + it \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} [-R+\pi i, R+\pi i]: & [-R, R] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & t + i\pi \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} [-R, -R+\pi i]: & [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & -R + it \end{array}$$

Por el Teorema de los Residuos, tenemos que:

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in A} \operatorname{Res}(f, z_0)\operatorname{Ind}_{\Gamma_R}(z_0).$$

Calculemos ahora los índices de los polos. Para cada $k \in \mathbb{Z}^*$, tenemos que:

$$|\operatorname{Im}(i\,({}^1\!/_2 + k)\,\pi)| = |({}^1\!/_2 + k)\,\pi| > \pi$$

Por tanto, para todo $R \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_{\Gamma_R}(i\,({}^1\!/_2 + k)\,\pi) &= 0 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}^* \\ \operatorname{Ind}_{\Gamma_R}(i\,({}^1\!/_2)\,\pi) &= 1. \end{aligned}$$

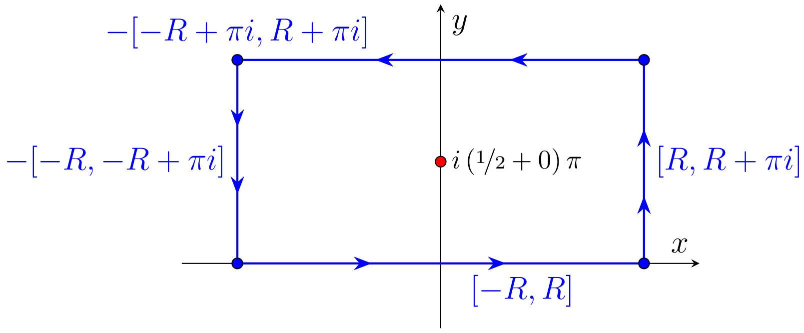

Figura 1: Poligonal de integración Γ_R del Ejercicio 1.

Por tanto, tenemos que:

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\,\text{Res}(f, i\,(1/2)\,\pi).$$

Antes de calcular el residuo, calculemos las integrales resultantes. Tenemos que:

$$\int_{[-R,R]} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}\,dz$$

Tomando límite con $R \to +\infty$, la parte que nos interesa es la parte real. Por tanto, vamos por buen camino. Calculamos el resto de las integrales:

$$\left|\int_{[R,R+\pi i]} f(z)\,dz\right| \leqslant \pi \cdot \sup\left\{\left|\frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}\right| : z \in [R, R+\pi i]\right\}$$

donde, para todo $z \in [R, R+\pi i]^*$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |e^{iz}| &= e^{-\operatorname{Im} z} \leqslant e^0 = 1 \\ |e^z + e^{-z}| &\geqslant \big||e^z| - |e^{-z}|\big| = \left|e^{\operatorname{Re} z} - e^{-\operatorname{Re} z}\right| = \left|e^R - e^{-R}\right| = e^R - e^{-R}. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\left|\int_{[R,R+\pi i]} f(z)\,dz\right| \leqslant \pi \cdot \frac{1}{e^R - e^{-R}}.$$

Como esta expresión es válida para cualquier $R > 0$, podemos hacer $R \to +\infty$ y tenemos que:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{[R,R+\pi i]} f(z)\,dz = 0.$$

Veamos ahora qué ocurre con la integral sobre el segmento $[-R, -R+\pi i]$:

$$\left|\int_{[-R,-R+\pi i]} f(z)\,dz\right| \leqslant \pi \cdot \sup\left\{\left|\frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}\right| : z \in [-R, -R+\pi i]\right\}$$

donde, para todo $z \in [-R, -R+\pi i]^*$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |e^{iz}| &= e^{-\operatorname{Im} z} \leqslant e^0 = 1 \\ |e^z + e^{-z}| &\geqslant \big||e^z| - |e^{-z}|\big| = \left|e^{\operatorname{Re} z} - e^{-\operatorname{Re} z}\right| = \left|e^{-R} - e^R\right| = e^R - e^{-R}. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\left|\int_{[-R,-R+\pi i]} f(z)\,dz\right| \leqslant \pi \cdot \frac{1}{e^R - e^{-R}}.$$

Como esta expresión es válida para cualquier $R > 0$, podemos hacer $R \to +\infty$ y tenemos que:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,-R+\pi i]} f(z)\,dz = 0.$$

Veamos ahora qué ocurre con la integral sobre el segmento $[-R+\pi i, R+\pi i]$:

$$\begin{aligned}\int_{[-R+\pi i,R+\pi i]} f(z)\,dz &= \int_{-R}^{R} f(t+i\pi)\,dt = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i(t+i\pi)}}{e^{t+i\pi}+e^{-(t+i\pi)}}\,dt = \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}e^{-\pi}}{e^te^{i\pi}+e^{-t}e^{-i\pi}}\,dt = \\ &= e^{-\pi}\int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{-e^t-e^{-t}}\,dt = -e^{-\pi}\int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{e^t+e^{-t}}\,dt = -e^{-\pi}\int_{-R}^{R} f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Por tanto, uniendo todas las integrales que hemos calculado, y tomando el límite con $R \to +\infty$, tenemos que:

$$2\pi i\,\mathrm{Res}(f, i\,(1/2)\,\pi) = \left(1+e^{-\pi}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz$$

Ahora calculemos el residuo en el punto $i\,(1/2)\,\pi$:

$$\lim_{z\to i\cdot\frac{\pi}{2}} \left(z - i\cdot\frac{\pi}{2}\right) f(z) = \lim_{z\to i\cdot\frac{\pi}{2}} \left(z - i\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{e^{iz}}{e^z+e^{-z}}$$

Por el Teorema de la Regla de L'Hôpital, tenemos que:

$$\lim_{z\to i\cdot\frac{\pi}{2}} \left(z - i\cdot\frac{\pi}{2}\right) f(z) = e^{-\frac{\pi}{2}}\cdot\lim_{z\to i\cdot\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^z-e^{-z}} = e^{-\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}-e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}}} = e^{-\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{i-(-i)} = e^{-\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2i}$$

Por tanto, sabemos que f tiene un polo simple en $i\cdot\frac{\pi}{2}$, y que:

$$\mathrm{Res}\left(f, i\cdot\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2i}.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = \frac{2\pi i\,\mathrm{Res}\left(f, i\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{1+e^{-\pi}} = \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{2}}}{1+e^{-\pi}}.$$

Por tanto, como buscamos la parte real de la integral anterior, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x+e^{-x}}\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\pi e^{-\frac{\pi}{2}}}{1+e^{-\pi}}\right) = \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{2}}}{1+e^{-\pi}}$$

Ejercicio 2 (2.5 + 1.5 puntos)**.** Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y supongamos que f diverge en 0 y en ∞. Probar que f se anula en algún punto de $\mathbb{C}^*$.

- <u>Extra</u> Demostrar que, de hecho, f se anula al menos dos veces (contando multiplicidad) y que tiene un número finito de ceros.

Opción Complicada y sin el Extra

Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ tal que:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{z\to +\infty} f(z) = +\infty.$$

Supongamos por reducción al absurdo que f no tiene ceros. Entonces, podemos definir:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{1}{f(z)} \end{array}$$

Notemos que g es holomorfa en $\mathbb{C}^*$. Veamos cómo definirla en el origen:

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

donde hemos usado que $f(z) \to +\infty$ cuando $z \to 0$. Por tanto, podemos definir (notemos el abuso de notación):

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ \frac{1}{f(z)} & \text{si } z \in \mathbb{C}^*. \end{cases} \end{array}$$

Como $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y g continua en el origen, por el Teorema de Extensión de Riemann, tenemos que $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Veamos ahora que g es acotada en $\mathbb{C}$. Para todo $R \in \mathbb{R}^+$, como g es continua y $\overline{D}(0,R)$ es compacto, tenemos que $g\left(\overline{D}(0,R)\right)$ es acotado. Además, veamos el comportamiento de g en el infinito:

$$\lim_{z\to +\infty} g(z) = \lim_{z\to +\infty} \frac{1}{f(z)} = 0$$

donde hemos usado que $f(z) \to +\infty$ cuando $z \to +\infty$. Por tanto, tenemos que g es acotada en $\mathbb{C}$. Por el Teorema de Liouville, tenemos que g es constante, pero esto es una contradicción, puesto que f no es constante. Por tanto, f tiene al menos un cero. Por tanto, $\exists z_0 \in \mathbb{C}^*$ y $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ con $g(z_0) \neq 0$ tal que:

$$f(z) = (z - z_0)g(z)$$

Veamos ahora que el número de ceros de f es finito y mayor o igual que 2 (contando multiplicidad). Supongamos que f tiene un número infinito de ceros (que sabemos que será numerable). Consideramos la siguiente sucesión de ceros:

$$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Z(f)$$

Como f diverge en $+\infty$, sabemos que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, por lo que admite una parcial $\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \to z_0 \in \mathbb{C}.$$

Supongamos que $z_0 = 0$. Consideramos la sucesión de imágenes de los ceros:

$$\{f(z_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}} = \{f(0)\}_{k\in\mathbb{N}} = \{0\}_{k\in\mathbb{N}} \to 0$$

No obstante, esto contradice el hecho de que f diverge en el origen. Por tanto, $z_0 \neq 0$. Como hemos encontrado un punto de acumulación de $Z(f)$ en $\mathbb{C}^*$, tenemos que f es idénticamente nula, lo que contradice el hecho de que f diverge en el origen. Por tanto, f tiene un número finito de ceros.

Opción Directa y que, además, incluye el apartado extra

Como f diverge en el origen, sabemos que el 0 es un polo de orden $k \in \mathbb{N}$ de f. Por tanto, $\exists \Psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que:

$$f(z) = \frac{\Psi(z)}{z^k} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

donde $\Psi(0) \neq 0$. De esta forma:

$$\Psi(z) = z^k f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

Puesto que conocemos el comportamiento de f en el infinito, sabemos que $\Psi(z)$ diverge en el infinito. Por tanto, como $\Psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y Ψ diverge en el infinito, por el Corolario del Corolario del Teorema de Casorati, tenemos que Ψ es un polinomio. Estudiemos ahora el grado de Ψ. Haciendo uso de que f diverge en el infinito, tenemos que:

$$\lim_{z\to+\infty} f(z) = \lim_{z\to+\infty} \frac{\Psi(z)}{z^k} = +\infty$$

Este es un límite de un cociente de polinomios que diverge, por lo que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Por tanto, se tiene $\deg \Psi = m \in \mathbb{N}$, donde $m > k$. Por el Teorema Fundamental del Álgebra, sabemos que Ψ tiene m raíces. Como sabemos que:

$$f(z) = \frac{\Psi(z)}{z^k} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*,$$

Sabemos que $Z(f) = Z(\Psi)$, y por tanto f tiene m ceros.

Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(t+z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)}{1+t^4}\, dt$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

1. Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

   Definimos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & [n,n+1]\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (t,z) & \longmapsto & \dfrac{\cos(t+z^2)+\operatorname{sen}(t^2-z)}{1+t^4} \end{array}$$

   Veamos que Φ está bien definida; es decir, que no se anula el denominador. Como $t \geqslant n \geqslant 0$, tenemos que $1+t^4 \geqslant 1 > 0$. Por tanto, Φ está bien definida. Por tanto, Φ es continua y, fijado $t \in [n, n+1]$, tenemos que la aplicación $z \mapsto \Phi(t,z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$. Por tanto, por el Teorema de Holomorfía de Integrales dependientes de Parámetros, tenemos que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

2. Probar que la serie de funciones entera $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

   Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Veamos que la serie de funciones converge uniformemente en K. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $z \in K$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |f_n(z)| &= \left|\int_n^{n+1} \frac{\cos(t+z^2)+\operatorname{sen}(t^2-z)}{1+t^4}\,dt\right| \\ &\leqslant \sup\left\{\left|\frac{\cos(t+z^2)+\operatorname{sen}(t^2-z)}{1+t^4}\right| : t \in [n,n+1]\right\} \end{aligned}$$

   donde hemos hecho uso de que:

$$\begin{aligned} |1+t^4| &= 1+t^4 \geqslant 1+n^4 \\ |\cos(t+z^2)+\operatorname{sen}(t^2-z)| &\leqslant |\cos(t+z^2)| + |\operatorname{sen}(t^2-z)| = \\ &= |\cos(t)\cos(z^2) - \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(z^2)| + |\operatorname{sen}(t^2)\cos(z) + \cos(t^2)\operatorname{sen}(z)| \leqslant \\ &\leqslant |\cos(t)\cos(z^2)| + |\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(z^2)| + |\operatorname{sen}(t^2)\cos(z)| + |\cos(t^2)\operatorname{sen}(z)| \leqslant \\ &\leqslant |\cos(z^2)| + |\operatorname{sen}(z^2)| + |\cos(z)| + |\operatorname{sen}(z)| \end{aligned}$$

   En importante destacar que no podemos acotar el seno y el coseno complejos.

   Como K es compacto y las funciones seno, coseno y módulo son continuas, tenemos que $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$M = \max\left\{|\cos(z^2)| + |\operatorname{sen}(z^2)| + |\cos(z)| + |\operatorname{sen}(z)| : z \in K\right\}.$$

   Por tanto, tenemos que:

$$|f_n(z)| \leqslant \frac{M}{1+n^4} \leqslant \frac{M}{n^4} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } z \in K.$$

   Por tanto, por el Test de Weierstrass, tenemos que la serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en K.

   Como $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema de la Convergencia de Weierstrass, tenemos que la suma es una función entera.

Ejercicio 4 (2.5 puntos)**.** Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de modo que

$$f\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n^3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que una de las funciones es un polinomio de grado uno y que la otra es un polinomio de grado tres.

Definimos el siguiente conjunto:

$$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Como $A' = \{0\} \subset \mathbb{C}$, podemos aplicar el Pincipio de Identidad, y deducir que:

$$f\left(g(z)\right) = z^3 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Supongamos que g es una función entera no polinómica. Por el Corolario del Teorema de Casorati, $\exists \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ con $\{z_n\} \to \infty$ tal que:

$$\{g(z_n)\} \to 0.$$

Ese hecho, junto con la continuidad de f, nos permite deducir que:

$$\{f(g(z_n))\} \to f(0).$$

Por otro lado, $\{z_n\} \to \infty$, junto con la continuidad de f, g y que $f(g(z)) = z^3$, nos permite deducir que:

$$\{f(g(z_n))\} \to \infty.$$

Por tanto, llegamos a que la sueción $\{f(g(z_n))\}$ es a la vez convergente y divergente, lo que es una contradicción. Por tanto, g es un polinomio.

Suponemos ahora que f no es un polinomio. Por el Corolario del Teorema de Casorati, $\exists \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ con $\{w_n\} \to \infty$ tal que:

$$\{f(w_n)\} \to 0.$$

Ahora, haciendo uso de que g es sobreyectiva por ser un polinomio (gracias al Teorema Fundamental del Álgebra), podemos encontrar una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tal que:

$$g(z_n) = w_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\{f(g(z_n))\} = \{f(w_n)\} \to 0.$$

Por otro lado, supongamos que $\{z_n\} \to \alpha \in \mathbb{C}$. Entonces, por la continuidad de g tenemos que:

$$\{g(z_n)\} = \{w_n\} \to g(\alpha)$$

En contradicción con que $\{w_n\} \to \infty$. Por tanto, $\{z_n\} \to \infty$. Por la continuidad de f, g y que $f(g(z)) = z^3$, tenemos que:

$$\{f(g(z_n))\} = \{z_n^3\} \to \infty.$$

Por tanto, llegamos a que la sueción $\{f(g(z_n))\}$ es a la vez convergente y divergente, lo que es una contradicción. Por tanto, f es un polinomio.

Por tanto, f y g son polinomios. Como $f(g(z)) = z^3$, tenemos que:

$$\deg(f) \cdot \deg(g) = 3 \Longrightarrow \{\deg(f), \deg(g)\} = \{1, 3\}.$$

Por tanto, una de las funciones es un polinomio de grado uno y la otra es un polinomio de grado tres.