

Topología II

Examen VI

Foto: José Juan Castro

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Topología II

Examen VI

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Asignatura Topología II.

Curso Académico 2024/25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Grupo Único.

Descripción Examen extraordinario.

Fecha 10 de febrero de 2025.

Duración 2 horas y media.

Responda la pregunta 1 y elija tres preguntas entre la 2, 3, 4 y 5.

Ejercicio 1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Dadas las circunferencias

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1\}, \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 = 1\}$$

no existe una aplicación recubridora desde $X = C_1 \cup C_2$ en \mathbb{S}^1 .

b) Si $p : X \rightarrow Y$ es una aplicación recubridora con X compacto, entonces $p^{-1}(y)$ es finito para todo $y \in Y$.

c) Toda aplicación continua $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ es homotópicamente nula.

Ejercicio 2. Consideremos el cilindro vertical $C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ y las rectas horizontales

$$R_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = -1\}, \quad R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = 1\}$$

Calcula el grupo fundamental de

$$X = C \cup R_1 \cup R_2$$

Ejercicio 3. Sea $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ una aplicación continua cumpliendo que $f|_{Fr(\overline{\mathbb{D}})} : Fr(\overline{\mathbb{D}}) \rightarrow Fr(\overline{\mathbb{D}})$ es un homeomorfismo. Demuestra que f es sobreyectiva.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicación continua. Demuestra que f es homotópicamente nula si $n \geq 2$.

Ejercicio 5. Determina la superficie compacta S dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e, f, g, h, i; afc^{-1}, deb^{-1}, hia^{-1}, dbc, ehg^{-1}, gfi^{-1} \rangle$$

Solución.

Ejercicio 1. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Dadas las circunferencias

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1\}, \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 = 1\}$$

no existe una aplicación recubridora desde $X = C_1 \cup C_2$ en \mathbb{S}^1 .

- b) Si $p : X \rightarrow Y$ es una aplicación recubridora con X compacto, entonces $p^{-1}(y)$ es finito para todo $y \in Y$.
- c) Toda aplicación continua $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ es homotópicamente nula.

Ejercicio 2. Consideremos el cilindro vertical $C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ y las rectas horizontales

$$R_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = -1\}, \quad R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = 1\}$$

Calcula el grupo fundamental de

$$X = C \cup R_1 \cup R_2$$

Ejercicio 3. Sea $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ una aplicación continua cumpliendo que $f|_{Fr(\overline{\mathbb{D}})} : Fr(\overline{\mathbb{D}}) \rightarrow Fr(\overline{\mathbb{D}})$ es un homeomorfismo. Demuestra que f es sobreyectiva.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicación continua. Demuestra que f es homotópicamente nula si $n \geq 2$.

Ejercicio 5. Determina la superficie compacta S dada por la presentación poligonal

$$\langle a, b, c, d, e, f, g, h, i; afc^{-1}, deb^{-1}, hia^{-1}, dbc, ehg^{-1}, gfi^{-1} \rangle$$