Geometría II

Examen IV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría II
Examen IV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Geometría II.

Curso Académico 2022-23.

Grado Matemáticas.

Grupo A.

Profesor Francisco Milán López.

Descripción Parcial del Tema 2. Formas Bilineales Simétricas.

Fecha 16 de mayo de 2023.

Ejercicio 1. [7 puntos] En $\mathbb{R}^3$ consideramos para cada $a \in \mathbb{R}$ la métrica g_a, cuya matriz en la base usual viene dada por:

$$A_a = M(g_a, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ -a & a^2-1 & -2a \\ 1 & -2a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Calcular una base de Sylvester para g_a y su signatura.

En primer lugar, clasifico la métrica.

$$|A_a| = -(a^2-1)^2+2a^2+2a^2-(a^2-1)-4a^2-a^2(1-a^2) = -a^4-1+2a^2-a^2+1-a^2+a^4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -a \\ -a & a^2-1 \end{vmatrix} = a^2-1-a^2 = -1$$

Por tanto, tengo que $Nul(g_a) = 1\ \forall a$. Además, $g(e_1, e_1) = 1$. Por tanto, tenemos que:

$$A_a \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad A_a \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

- <u>Para $a \neq \pm 1$</u>:

  $$g(e_2, e_2) = a^2-1 = -(1-a^2) = -g(e_3, e_3)$$

  Como $a \neq 1 \Longrightarrow a^2-1 \neq 0 \Longrightarrow g(e_2, e_2) = -g(e_3, e_3) \neq 0$. Por tanto, al menos uno de los dos cuadrados es negativo, por lo que:

  $$A_a \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

- <u>Para $a = 1$</u>:

  $$A_1 = M(g_1, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

  $$g_1(e_1+e_2, e_1+e_2) = 1+0+2g(e_1, e_2) = 1+2(-1) = -1 < 0$$

  Por tanto, tenemos que g no es semidefinida positiva. Por tanto, estamos ante el segundo caso.

  $$A_a \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

- <u>Para $a = -1$</u>:

  $$A_1 = M(g_1, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

  $$g_1(e_1-e_2, e_1-e_2) = 1+0-2g(e_1, e_2) = 1-2(1) = -1 < 0$$

  Por tanto, tenemos que g no es semidefinida negativa. Por tanto, estamos ante el segundo caso.

  $$A_a \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, en los tres casos tenemos que:

$$\text{Signatura} = (1,1) \qquad Nul(g_a) = 1 \qquad Ind(g_a) = 1$$

Para hallar la base de Sylvester, calculo en primer lugar $Ker(g_a)$:

$$Ker(g_a) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid g_a(v,u) = 0 \quad \forall u \in V\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ -a & a^2-1 & -2a \\ 1 & -2a & 1-a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{c} x_1 - ax_2 + x_3 = 0 \\ -ax_1 + (a^2-1)x_2 - 2ax_3 = 0 \\ x_1 - 2ax_2 + (1-a^2)x_3 = 0 \end{array} \right. \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} -1-a^2 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sea $\mathcal{B}_s = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\}$ la base de Sylvester. Sea $\bar{e_1} = e_1$, $\bar{e_3} = (-1-a^2, -a, 1)^t$. Para obtener $\bar{e_2}$, necesito que $\bar{e_2} \perp \bar{e_1}$:

$$< \bar{e_1} >^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid g(\bar{e_1}, v) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{e_1}^t A_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (1,0,0) \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ -a & a^2-1 & -2a \\ 1 & -2a & 1-a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (1,-a,1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - ax_2 + x_3 = 0 \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Sea $\bar{e_2} = (a,1,0)^t$. Tengo que:

$$g(\bar{e_2}, \bar{e_2}) = a^2 g(e_1,e_1) + g(e_2,e_2) + 2ag(e_1,e_2) = a^2 + a^2 - 1 + 2a(-a) = -1$$

Por tanto, la base de Sylvester es:

$$\mathcal{B}_S = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1-a^2 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M(g_a, \mathcal{B}_S) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. [**3 puntos**] Sean (V,g) un espacio vectorial métrico con $\dim V = 2$ y $\mathcal{B}$ una base de V para la cual

$$|M(g;\mathcal{B})| = -3$$

Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. $\exists\ \mathcal{B}_1$ base de V tal que $|M(g;\mathcal{B}_1)| = 3$.

   Esto es **falso**, ya que el signo del determinante es un invariante para la misma métrica independientemente de la base.

   Como ambas matrices representan la misma base respecto de distintas métricas, tenemos que son congruentes, es decir, $\exists\ P$ regular tal que:

$$M(g;\mathcal{B}_1) = P^t M(g;\mathcal{B})P$$

   Por tanto, tomando determinante,

$$|M(g;\mathcal{B}_1)| = |P^t M(g;\mathcal{B})P| = |P|^2 |M(g;\mathcal{B})|$$

   Por tanto, tenemos que:

$$|M(g;\mathcal{B}_1)| \cdot |M(g;\mathcal{B})| > 0$$

   No obstante, tenemos que $-3 \cdot 3 < 0$, por lo que esto no es posible.

2. $\exists\ \mathcal{B}_2$ base de V tal que $|M(g;\mathcal{B}_2)| = -7$.

   Como ambas matrices representan la misma base respecto de distintas métricas, tenemos que son congruentes, es decir, $\exists\ P$ regular tal que:

$$M(g;\mathcal{B}_2) = P^t M(g;\mathcal{B})P$$

   Por tanto, tomando determinante,

$$|M(g;\mathcal{B}_2)| = |P^t M(g;\mathcal{B})P| = |P|^2 |M(g;\mathcal{B})| \Longrightarrow |P|^2 = \frac{7}{3} \Longrightarrow |P| = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$$

   Un ejemplo, por tanto, de matriz P podría ser:

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{7}{3}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Como $P = M(\mathcal{B}_2;\mathcal{B})$, tenemos que, dado $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$, tendríamos que:

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \sqrt{\frac{7}{3}} e_1, e_2 \right\}$$

   Por tanto, es **cierto**, y la base dada es un ejemplo.

3. $\exists\ \mathcal{B}_3$ base de Sylvester de V tal que:

$$M(g;\mathcal{B}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Como tenemos que $|M(g;\mathcal{B})| = -3 \neq 0$, tenemos que $rg(M(g;\mathcal{B})) = 2$, por lo que $Nul(g) = 0$. Además, como el signo del determinante es un invariante, tenemos que es necesario que $|M(g;\mathcal{B})| < 0$. Por tanto, el Teorema de Sylvester afirma que este enunciado es **cierto**.