

# Variable Compleja I

## Examen XIII

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Variable Compleja I

## Examen XIII

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

**Asignatura** Variable Compleja I.

**Curso Académico** 2024-25.

**Grado** Grado en Matemáticas y Doble Grado en Matemáticas y Física.

**Grupo** Único.

**Profesor** Javier Merí de la Maza.

**Descripción** Convocatoria Extraordinaria.

**Fecha** 10 de Febrero de 2025.

**Duración** 3.5 horas.

**Ejercicio 1** (2.5 puntos). Sean  $S$  un conjunto finito de puntos en un dominio  $\Omega$  homológicamente conexo y  $f$  una función holomorfa en  $\Omega \setminus S$ . Prueba que  $f$  tiene una primitiva en  $\Omega \setminus S$  si y solo si

$$\operatorname{Res}(f, w) = 0, \quad \forall w \in S.$$

**Ejercicio 2** (2.5 puntos). Sea  $f : \overline{D}(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  continua en  $\overline{D}(0, 1)$  y holomorfa en  $D(0, 1)$  de modo que  $f(z) \in \mathbb{R}$  para cada  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| = 1$ . Prueba que  $f$  es constante.

**Ejercicio 3** (2.5 puntos). Demuestra que no puede existir una función  $f$  entera verificando

$$|f(z)| > |z| + |\operatorname{sen}(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

**Ejercicio 4** (2.5 puntos). Sean  $f, g$  holomorfas en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  verificando  $f(n) = n^2 g(n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Supongamos que existen  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$  y  $\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 g(z) \in \mathbb{C}$ . Prueba que

$$f(z) = z^2 g(z) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

**Ejercicio 1** (2.5 puntos). Sean  $S$  un conjunto finito de puntos en un dominio  $\Omega$  homológicamente conexo y  $f$  una función holomorfa en  $\Omega \setminus S$ . Prueba que  $f$  tiene una primitiva en  $\Omega \setminus S$  si y solo si

$$\text{Res}(f, w) = 0, \quad \forall w \in S.$$

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $f$  tiene una primitiva  $F$  en  $\Omega \setminus S$ . Fijado  $w \in S$ , queremos calcular:

$$\text{Res}(f, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(w, r)} f(z) dz,$$

para cualquier  $r \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\overline{D}(w, r) \cap S = \{w\}$ . Consideramos por tanto  $r \in \mathbb{R}^+$  suficientemente pequeño de manera que  $\overline{D}(w, r) \cap S = \{w\}$ . Como  $C(w, r)$  es un camino cerrado en  $\Omega \setminus S$  y  $f$  admite una primitiva en  $\Omega \setminus S$ , tenemos que

$$\int_{C(w, r)} f(z) dz = 0.$$

Por tanto,  $\text{Res}(f, w) = 0$ .

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $\text{Res}(f, w) = 0$  para cada  $w \in S$ . Sea  $\gamma$  un camino cerrado en  $\Omega \setminus S$ . Como  $S \subset \Omega$  es finito, tenemos que  $S' \cap \Omega = \emptyset$ . Como  $\Omega$  es homológicamente conexo, podemos aplicar el Teorema de los Residuos sobre el camino  $\gamma$ , obteniendo:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{w \in S} \text{Res}(f, w) = 0.$$

Por la caracterización de las funciones que admiten primitivas, como  $\gamma$  era arbitrario, tenemos que  $f$  admite una primitiva en  $\Omega \setminus S$ .

**Ejercicio 2** (2.5 puntos). Sea  $f : \overline{D}(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  continua en  $\overline{D}(0, 1)$  y holomorfa en  $D(0, 1)$  de modo que  $f(z) \in \mathbb{R}$  para cada  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| = 1$ . Prueba que  $f$  es constante.

Supongamos que  $f$  no es constante, y llegaremos a una contradicción. Consideramos la parte imaginaria de  $f$ , que es una aplicación continua. Como  $\overline{D}(0, 1)$  es compacto, existen  $z_1, z_2 \in \overline{D}(0, 1)$  tales que:

$$\text{Im } f(z_1) = \min\{\text{Im } f(z) : z \in \overline{D}(0, 1)\} \leq \max\{\text{Im } f(z) : z \in \overline{D}(0, 1)\} = \text{Im } f(z_2).$$

Como  $\mathbb{T} \subset \overline{D}(0, 1)$  y  $\text{Im } f(\mathbb{T}) = \{0\}$  por hipótesis, tenemos que:

$$\text{Im } f(z_1) = \min\{\text{Im } f(z) : z \in \overline{D}(0, 1)\} \leq 0 \leq \max\{\text{Im } f(z) : z \in \overline{D}(0, 1)\} = \text{Im } f(z_2).$$

Por otro lado, como  $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$  no es constante, por el Teorema de la Aplicación Abierta tenemos que  $f(D(0, 1))$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{C}$ . En particular, dado  $z_0 \in f(D(0, 1))$ , existe  $r \in \mathbb{R}^+$  tal que  $D(z_0, r) \subset f(D(0, 1))$ . Por tanto, deducimos que  $\text{Im } f(z_1) < \text{Im } f(z_2)$ .

Como  $\text{Im } f(z_1) \leq 0 \leq \text{Im } f(z_2)$ ,  $\exists j \in \{1, 2\}$  tal que  $\text{Im } f(z_j) \neq 0$ , y por la hipótesis dada se tiene que  $z_j \in D(0, 1)$ .

Aplicamos ahora de nuevo el Teorema de la Aplicación Abierta, obteniendo que  $f(D(0, 1))$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{C}$  con  $f(z_j) \in f(D(0, 1))$  y  $\text{Im } f(z_j) \neq 0$ . Por tanto, existe  $r \in \mathbb{R}^+$  tal que:

$$D(f(z_j), r) \subset f(D(0, 1)).$$

De aquí, deducimos que:

$$\text{Im } f(z_j) \neq \max\{\text{Im } f(z) : z \in \overline{D}(0, 1)\}$$

$$\text{Im } f(z_j) \neq \min\{\text{Im } f(z) : z \in \overline{D}(0, 1)\}$$

Por tanto, hemos llegado a una contradicción, y concluimos que  $f$  es constante.

**Ejercicio 3** (2.5 puntos). Demuestra que no puede existir una función  $f$  entera verificando

$$|f(z)| > |z| + |\text{sen}(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Supongamos que existe una función  $f$  entera verificando la desigualdad dada. Por tanto:

$$|f(z)| > |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por tanto:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty.$$

Por tanto, por el Corolario del Corolario del Teorema de Casorati-Weierstrass, tenemos que  $f$  es un polinomio. Por otro lado, tenemos que:

$$|\text{sen}(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por tanto, como  $\text{sen}(z)$  es una función entera con crecimiento subpolinómico, tenemos que  $\text{sen}(z)$  es un polinomio (clara contradicción). Por tanto, no puede existir una función  $f$  entera verificando la desigualdad dada.

**Ejercicio 4** (2.5 puntos). Sean  $f, g$  holomorfas en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  verificando  $f(n) = n^2 g(n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Supongamos que existen  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$  y  $\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 g(z) \in \mathbb{C}$ . Prueba que

$$f(z) = z^2 g(z) \quad \text{para cada } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Trabajar con los límites en  $+\infty$  no es tan sencillo, puesto que  $\{n \in \mathbb{N}\}$  no tiene puntos de acumulación en  $\mathbb{C}$ . Por tanto, consideramos el siguiente conjunto:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Definimos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1 : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_2 : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z^2} \cdot g\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{h}_1(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L_1 \in \mathbb{C}, \\ \lim_{z \rightarrow 0} \tilde{h}_2(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^2} \cdot g\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 g(z) = L_2 \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Definimos por tanto las extensiones  $h_1, h_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de  $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$  respectivamente, de modo que:

$$\begin{aligned}h_1(0) &= L_1, \\ h_2(0) &= L_2.\end{aligned}$$

De esta forma, tenemos que  $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$  y continuas en  $\mathbb{C}$ . Por tanto, por Teorema de Extensión de Riemman, tenemos que  $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ .

Tenemos que  $A' = \{0\} \subset \mathbb{C}$ , y:

$$h_1\left(\frac{1}{n}\right) = f(n) = n^2 g(n) = h_2\left(\frac{1}{n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, por el Principio de Identidad de funciones holomorfas, tenemos que:

$$h_1(z) = h_2(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Para cada  $z \in \mathbb{C}^*$ , evaluamos dicha igualdad en  $1/z$ , obteniendo:

$$f(z) = h_1\left(\frac{1}{z}\right) = h_2\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 g(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

como queríamos demostrar.