Variable Compleja I

Examen III

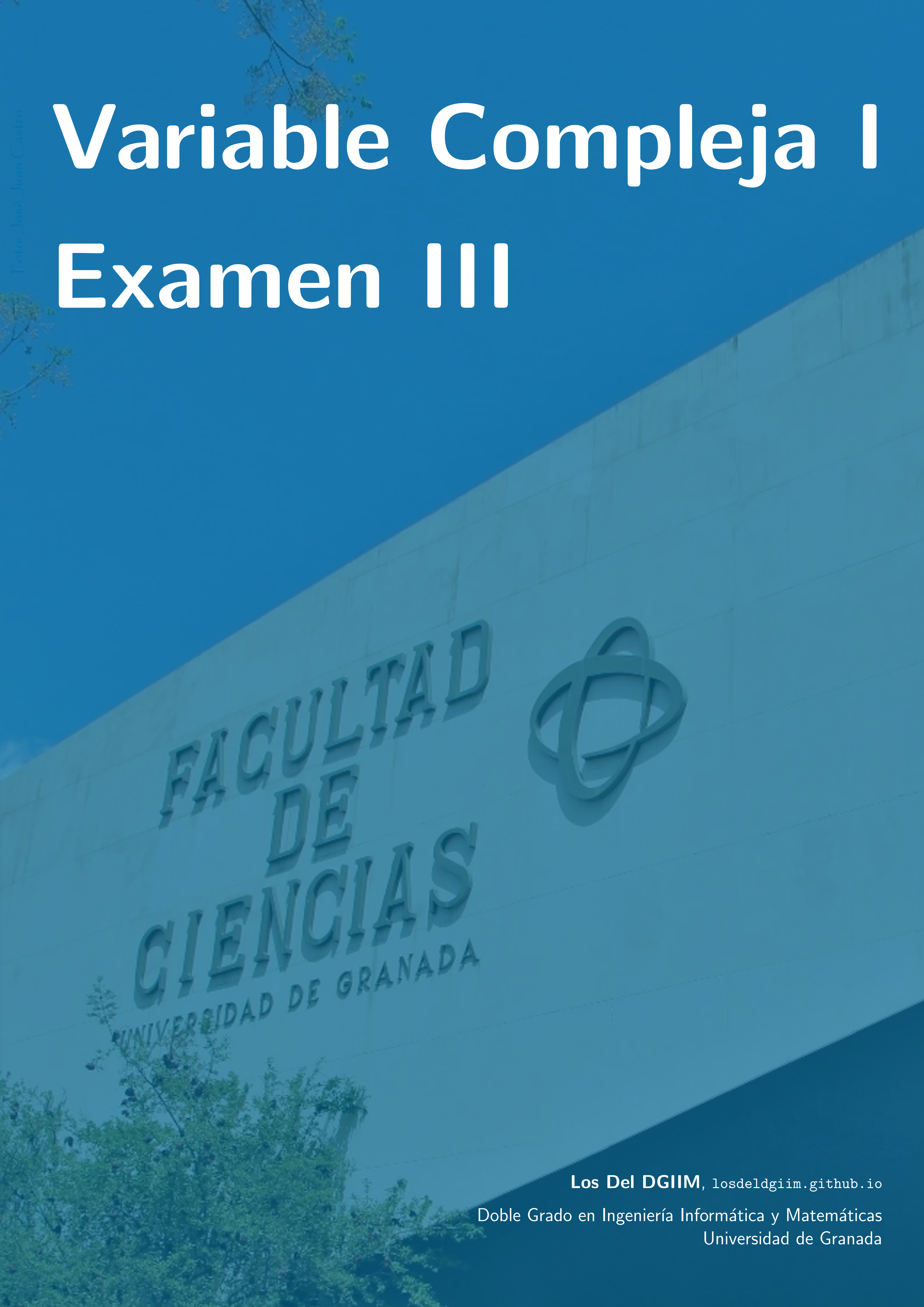

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Variable Compleja I
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 9 de Mayo de 2023.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Probar que que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -\ln(2) < \operatorname{Im} z < \ln(2)\}$. Estudiar la convergencia uniforme en subconjuntos de Ω. Probar que la función g siguiente es continua, y calcular la integral $\displaystyle\int_{C(0,1/2)} \frac{g(z)}{z}\, dz$:

$$\begin{array}{rccc} g: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n} \end{array}$$

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de la función f siguiente:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^{\overline{z}} \end{array}$$

Ejercicio 3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ un abierto. Decimos que una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica en Ω si $\varphi \in C^2(\Omega)$ y

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

1. **[1.5 puntos]** Sea $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica en Ω. Probar que la función g siguiente es holomorfa en Ω:

$$\begin{array}{rccc} g: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x+iy & \longmapsto & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) - i\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) \end{array}$$

2. **[1.5 puntos]** Suponiendo que Ω es un dominio estrellado, probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ de modo que $\operatorname{Re} f = \varphi$ y que f es única salvo una constante.

3. **[1 punto]** Deducir que una función armónica en un dominio estrellado es, de hecho, de clase C^∞.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Probar que que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -\ln(2) < \operatorname{Im} z < \ln(2)\}$. Estudiar la convergencia uniforme en subconjuntos de Ω. Probar que la función g siguiente es continua, y calcular la integral $\displaystyle\int_{C(0,1/2)} \frac{g(z)}{z}\,dz$:

$$\begin{array}{rccc} g: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n} \end{array}$$

Probemos en primer lugar que, dado $A \subset \Omega$, la serie converge uniformemente en A si y solo si:

$$\sup\{|\operatorname{Im} z| : z \in A\} < \ln(2)$$

$\Longrightarrow$) Demostraremos el recíproco. Como $A \subset \Omega$, no puede darse que dicho supremo sea mayor que $\ln(2)$. Supongamos por tanto que dicho supremo es $\ln 2$. Entonces, por la caracterización del supremo mediante sucesiones, existe una sucesión $\{\widetilde{z}_n\}$ de puntos de A tal que $\{|\operatorname{Im}\widetilde{z}_n|\} \to \ln 2$. Tomando una parcial suya, existe una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de A tal que $|\operatorname{Im} z_n| > \ln 2 - 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(nz_n)}{2^n}\right| \geqslant \frac{|\operatorname{senh}(n\operatorname{Im} z_n)|}{2^n} = \frac{\operatorname{senh}(n|\operatorname{Im} z_n|)}{2^n} = \frac{e^{n|\operatorname{Im} z_n|} - e^{-n|\operatorname{Im} z_n|}}{2^{n+1}} >$$
$$> \frac{e^{n\ln 2 - 1} - 1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

Tenemos por tanto que:

$$\left\{\frac{1}{2e} - \frac{1}{2^{n+1}}\right\} \to \frac{1}{2e} > 0 \Longrightarrow \left\{\frac{\operatorname{sen}(nz_n)}{2^n}\right\} \not\to 0$$

Por tanto, como hemos encontrado una sucesión de puntos de A tal que el término general no converge a 0, entonces el término general no converge uniformemente a 0. Por tanto, la serie no converge uniformemente en A.

$\Longleftarrow$) Sea dicho supremo $r < \ln 2$. Entonces, para todo $z \in A$ y todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}\right| < \left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{2}\right)^n < \left(\frac{e^r}{2}\right)^n$$

Como $r < \ln(2)$, tenemos que $e^r < 2$, por lo que la base de la potencia es menor que 1. Por tanto, la serie geométrica de razón dicho cociente es convergente. Por el Test de Weierstrass, la serie de partida converge uniformemente en A.

En particular, dado $K \subset \Omega$ compacto, en particular es cerrado, y el supremo en cuestión se alcanza. Como es un subconjunto de Ω, entonces:

$$\sup\{|\operatorname{Im} w| : w \in K\} = \max\{|\operatorname{Im} w| : w \in K\} < \ln(2)$$

Por tanto, la serie converge uniformemente en compactos de Ω.

Para la convergencia absoluta, consideramos $z \in \Omega$ fijo. Como $\{z\}$ es compacto, por el Test de Weierstrass tenemos que converge absolutamente en $\{z\}$. Como z es arbitrario, tenemos que la serie converge absolutamente en todo punto de Ω.

Para probar que g es continua, consideramos $z \in \Omega$. Como Ω es abierto, existe $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(z, R) \subset \Omega$. Considerando $R/2$, tenemos que $z \in \overline{D}(z, R/2) \subset \Omega$. Por ser este compacto, la serie converge uniformemente en $\overline{D}(z, R/2)$. Como el término general de la serie es continuo para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces g es continua en z. Como z es arbitrario, g es continua en Ω.

Estudiemos ahora la convergencia uniforme del integrando en $C(0, 1/2)$. Como $C(0, 1/2)$ es compacto y $1/2 < \ln 2$, entonces g converge uniformemente y $z \mapsto 1/z$ es acotado. Por tanto, el integrando converge uniformemente en $C(0, 1/2)$, luego podemos intercambiar la sumatoria y la integral, algo que nos será de utilidad a la hora de calcular la integral:

$$\int_{C(0,1/2)} \frac{g(z)}{z}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C(0,1/2)} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{z2^n}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{C(0,1/2)} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{z}\, dz \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{sen}(n \cdot 0) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

donde en $(*)$ hemos aplicado la Fórmula de Cauchy para la circunferencia, usando que el seno es una función entera.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de la función f siguiente:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^{\overline{z}} \end{array}$$

Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Definimos $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re}(g(x + iy)) = \operatorname{Re}(e^{x-iy}) = e^x \cos(-y) \\ v(x, y) &= \operatorname{Im}(g(x + iy)) = \operatorname{Im}(e^{x-iy}) = e^x \operatorname{sen}(-y) \end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas parciales de u y v:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= e^x \cos(-y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = e^x \operatorname{sen}(-y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= e^x \operatorname{sen}(-y) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -e^x \cos(-y) \end{aligned}$$

La primera ecuación de Cauchy-Riemann nos dice:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(-y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -e^x \cos(-y)$$

Para que esto se de, es necesario que, o bien $e^x = 0$ (lo cual no se da), o bien que $\cos(-y) = cos(y) = 0$.

La segunda ecuación de Cauchy-Riemann nos dice:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = e^x \operatorname{sen}(-y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -e^x \operatorname{sen}(-y)$$

Para que esto se de, es necesario que, o bien $e^x = 0$ (lo cual no se da), o bien que $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen}(y) = 0$.

Como no es posible que el seno y el coseno reales se anulen simultáneamente, se concluye que g no es derivable en z (puesto que no se cumplen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann).

Ejercicio 3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ un abierto. Decimos que una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica en Ω si $\varphi \in C^2(\Omega)$ y

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

1. **[1.5 puntos]** Sea $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica en Ω. Probar que la función g siguiente es holomorfa en Ω:

$$\begin{array}{rccc} g: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x+iy & \longmapsto & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) - i\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{array}$$

Definimos las funciones $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$, con vistas a aplicar las Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} g(x+iy) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} g(x+iy) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{aligned}$$

Calculamos cada una de las derivadas parciales de u y v:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} & \qquad \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{array}$$

Comprobemos que se cumplen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \iff \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}\right) = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Notemos que la primera ecuación se cumple por hipótesis, y la segunda se cumple por el Teorema de Clairaut. Por tanto, se cumplen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann, y por tanto g es holomorfa en Ω.

2. **[1.5 puntos]** Suponiendo que Ω es un dominio estrellado, probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ de modo que $\operatorname{Re} f = \varphi$ y que f es única salvo una constante.

   Como Ω es un dominio estrellado y $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, por el Teorema Local de Cauchy, $\exists f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una primitiva de g en Ω. Por tanto, tenemos que:

$$f'(x+iy) = g(x+iy) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) - i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

   Definimos ahora de nuevo $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ como:

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$$
$$v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$$

   Por las Ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

   Para calcular $u = \operatorname{Re} f$, integramos la primera ecuación respecto de x:

$$u(x,y) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx = \varphi(x,y) + h(y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

   donde h es una función de y que no depende de x y representa la constante de integración. Derivando respecto de y, tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) + h'(y) \Longrightarrow h'(y) = 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

   Por tanto, h es constante, por lo que $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que:

$$u(x,y) = \varphi(x,y) + C \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

   Como $u = \operatorname{Re} f$, y por hipótesis buscamos que $\operatorname{Re} f = \varphi$, tenemos que $C = 0$. Por tanto, tenemos que:

$$\operatorname{Re} f(x,y) = \varphi(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

   Por tanto, la existencia está probada. Supongamos ahora que existe otra función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\operatorname{Re} g = \varphi$. Definimos $h = f - g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces, tenemos que:

$$\operatorname{Re} h = \operatorname{Re} f - \operatorname{Re} g = \varphi - \varphi = 0$$

   Como h es holomorfa, está definida en un dominio, y su parte real es nula, entonces h es constante, luego $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tal que:

$$f(z) = g(z) + \lambda \qquad \forall z \in \Omega$$

   Por tanto, f es única salvo una constante.

3. **[1 punto]** Deducir que una función armónica en un dominio estrellado es, de hecho, de clase C^∞.

Por el apartado anterior, sabemos que $\exists f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\operatorname{Re} f = \varphi$. Como f es holomorfa, es infinitamente derivable. Calculemos su primera derivada empleando las Ecuaciones de Cauchy-Riemann y que $\operatorname{Re} f = \varphi$:

$$f'(x+iy) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) - i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Como $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$, en particular es continua, por lo que las derivadas de orden 1 de φ son continuas. Por tanto, $\varphi \in C^1(\Omega)$.

Aplicamos ahora las ecuaciones de Cauchy-Riemann a la función f':

$$\begin{aligned} f''(x+iy) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) - i \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y) \\ &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) - i \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega \end{aligned}$$

Como $f'' \in \mathcal{H}(\Omega)$, en particular es continua, por lo que las 4 derivadas de orden 2 de φ son continuas. Por tanto, $\varphi \in C^2(\Omega)$.

Aplicando de nuevo las Ecuaciones de Cauchy-Riemann a la función f'' para obtener f''', podríamos obtener que las 8 derivadas de orden 3 de φ son continuas. Por tanto, $\varphi \in C^3(\Omega)$; y así sucesivamente.