

MN II

# Examen I

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# MN II

# Examen I

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Granada, 2025

**Asignatura** Lidia Fernández Rodríguez.

**Curso Académico** 2024-25.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Lidia Fernández Rodríguez.

**Descripción** Prueba 1. Temas 1 y 2 (Derivación).

**Fecha** 2 de abril de 2025.

**Duración** 3 horas.

Los enunciados no son los originales y pueden contener variaciones o errores.

**Ejercicio 1.** Si tenemos un sistema de ecuaciones:

$$F(X) = 0$$

al que le aplicamos un método numérico para obtener la sucesión de aproximaciones  $\{X_n\}$ , si consideramos el sistema:

$$F(AZ + b) = 0$$

donde  $b$  es un vector y  $A$  una matriz no singular, si aplicamos el mismo método numérico, obtenemos la sucesión de aproximaciones  $\{Z_n\}$ . Demuestra que si se cumple que  $X_0 = AZ_0 + b$ , entonces:

$$X_n = AZ_n + b \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Ejercicio 2.** Se considera el polinomio:

$$p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$$

Estudia un intervalo donde se encuentren todas sus raíces reales, calcula su sucesión de Sturm y úsala para hayar el número de raíces reales de  $p$ .

**Ejercicio 3.** Consideramos la ecuación:

$$\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}(\pi x) - x - \frac{3}{2} = 0$$

- a) Encuentra un intervalo de la forma  $[a, b]$  de longitud 1 donde se encuentre una solución de la ecuación.
- b) Si  $g$  es una función contráctil definida en un intervalo  $[a, b]$  que verifica que:

$$\left| g\left(a + \frac{b}{2}\right) - a + \frac{b}{2} \right| \leq (1 - L)b - \frac{a}{2}$$

Entonces,  $g(x) \in [a, b]$  para todo  $x \in [a, b]$ .

Pista: estudiar  $|g(x) - m|$ , donde  $m$  es el punto medio entre  $a$  y  $b$ .

- c) Sea  $g(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}(\pi x) - \frac{3}{2}$ , comprueba que cumple las hipótesis del apartado anterior para el intervalo obtenido en el primer apartado.
- d) Estudia la convergencia del método  $x_{n+1} = g(x_n)$ , y en caso de que sea convergente, estudia el orden de convergencia del método.
- e) Realiza dos iteraciones tomando  $x_0 = -1,5$ .
- f) Indica un método con orden de convergencia mayor que el método propuesto. Realiza dos iteraciones con las mismas condiciones iniciales y justifica la convergencia del método propuesto.

**Ejercicio 4.** Consideramos la fórmula de derivación:

$$f' \left( \frac{2}{3} \right) = a_0 f(a) + a_1 f(0) + a_2 f'(0) + R(f)$$

- a) Calcula  $a_0, a_1, a_2$  y  $a$  para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible. ¿Cuál es dicho grado?
- b) Expresa el error que se comete al aproximar  $f$  por la fórmula obtenida en el apartado anterior, imponiendo suposiciones sobre la regularidad de  $f$ .
- c) Aplica la fórmula a  $\cos(\pi x)$  y acota el error obtenido.