

# Topología I

## Examen III

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Topología I

## Examen III

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

**Asignatura** Topología I.

**Curso Académico** 2023-24.

**Grado** Grado en Matemáticas.

**Grupo** B.

**Profesor** Miguel Ortega Titos.

**Descripción** Parcial 1.

**Fecha** 30 de octubre de 2023.

En  $\mathbb{R}$ , se considera la topología de Sorgenfrey,  $\mathcal{T}_S$ . En  $\mathbb{R}^2$ , se considera la topología producto  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_S \times \mathcal{T}_S$ .

**Ejercicio 1.** Dado el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x + y \leq 0\}$ , calcula:

1. (2 puntos) El interior de  $A$ .

Representemos en primer lugar el conjunto  $A$ :

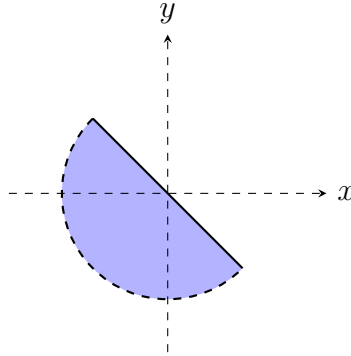


Figura 1: Representación de  $A$ .

Tenemos que, dado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , una base de entornos de  $(x, y)$  en  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  es:

$$\beta_{(x,y)} = \{[x, x + \varepsilon[ \times [y, y + \varepsilon'[ \mid \varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}^+\}$$

Por tanto, demostraremos que  $A^\circ = \tilde{A}$ , con:

$$\tilde{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x + y < 0\}$$

⊃) Veamos en primer lugar que  $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$ . Una base de  $\mathcal{T}$  es:

$$\mathcal{B}_S = \{[a, b[ \times [c, d[ \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$$

Una base de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$  es:

$$\mathcal{B}_u = \{]a, b[ \times ]c, d[ \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$$

Sea  $]a, b[ \times ]c, d[ \in \mathcal{B}_u$ , y sea  $(x, y) \in ]a, b[ \times ]c, d[$ . Entonces, como  $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}_S$ ,  $\exists [a', b'[ , [c', d'[$  tal que  $x \in [a', b'[ \subset ]a, b[$  y  $y \in [c', d'[ \subset ]c, d[$ . Por tanto,  $(x, y) \in [a', b'[ \times [c', d'[ \subset ]a, b[ \times ]c, d[$ . Por tanto,  $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$ .

Como  $\tilde{A} \in \mathcal{T}_u$  por ser intersección de dos abiertos,  $\tilde{A} \in \mathcal{T}$ . Además, como  $\tilde{A} \subset A$ , tenemos que  $\tilde{A} \subset A^\circ$ .

⊃) Veremos que, dado  $(x, y) \in A \setminus \tilde{A}$ , entonces  $(x, y) \notin A^\circ$ . Como  $(x, y) \in A \setminus \tilde{A}$ , entonces  $x^2 + y^2 < 1$  y  $x + y = 0$ , es decir,  $y = -x$ . Veamos que  $(x, -x) \notin A^\circ$ .

Supongamos que  $\exists V \in \beta_{(x,y)}$  tal que  $V \subset A$ . Entonces,  $\exists \varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}^+$  tal que:

$$V = [x, x + \varepsilon[ \times [y, y + \varepsilon'[ = [x, x + \varepsilon[ \times [-x, -x + \varepsilon'[ \subset A$$

De esta forma,  $(x + \frac{\varepsilon}{2}, -x + \frac{\varepsilon'}{2}) \in V \subset A$ , pero:

$$x + \frac{\varepsilon}{2} + \left(-x + \frac{\varepsilon'}{2}\right) = \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} > 0$$

Por tanto, llegamos a una contradicción, y  $(x, y) \notin A^\circ$ . De esta forma,  $A^\circ \subset \tilde{A}$ .

2. (2 puntos) La frontera de  $A$ .

Para calcular la frontera de  $A$ , calcularemos primero el cierre de  $A$ . Para ello, veremos que  $\overline{A} = \hat{A}$ , con:

$$\hat{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x + y \leq 0\}$$

- ⊂) Veamos que  $\overline{A} \subset \hat{A}$ . Como  $\hat{A} \in C_{\mathcal{T}_u}$  y  $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$ , entonces  $\hat{A} \in C_{\mathcal{T}}$ . Por tanto, como además  $A \subset \hat{A}$ , se tiene que  $\overline{A} \subset \hat{A}$ .
- ⊃) Veamos que  $\hat{A} \subset \overline{A}$ . Dado  $(x, y) \in \hat{A}$ , veremos que  $\forall V \in \beta_{(x,y)}, V \cap A \neq \emptyset$ . Como  $A \subset \hat{A}$ , tomaremos  $(x, y) \in \hat{A} \setminus A$ , ya que en el primer caso es trivial que  $(x, y) \in V \cap A \neq \emptyset$ . Por tanto, sea  $(x, y) \in \hat{A} \setminus A$ . Entonces,  $x^2 + y^2 = 1$  y  $x + y < 0$ . Veamos que  $(x, y) \in \overline{A}$ .

Sea  $V \in \beta_{(x,y)}$ , por lo que  $V = [x, x + \varepsilon[ \times [y, y + \varepsilon'[ \subset \mathbb{R}^2$  con  $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ . Buscamos ver que  $V \cap A \neq \emptyset$ , algo que intuitivamente es claro, como se ve en el dibujo:

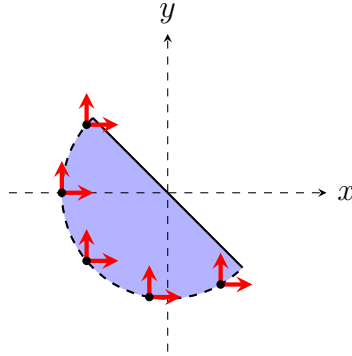


Figura 2: Representación de  $A$  y de los entornos de  $(x, y) \in \hat{A} \setminus A$ .

En la Figura 2, se representa  $A$  y los entornos de  $(x, y) \in \hat{A} \setminus A$ , y se ve claramente que  $\forall V \in \beta_{(x,y)}, V \cap A \neq \emptyset$ . Por tanto, veremos que  $(x, y) \in \overline{A}$ . Si  $y < 0$ , tomaremos un punto de corte que consista en desplazarnos en el eje vertical, mientras que si  $y \geq 0$ , tomaremos un punto de corte que consista en desplazarnos en el eje horizontal.

- a) Supongamos  $y < 0$ . Entonces, veamos que  $\exists \delta \in \mathbb{R}^+, 0 < \delta < \varepsilon'$  tal que  $(x, y + \delta) \in V \cap A$ . Veamos que pertenece a  $A$ :

$$\begin{aligned} x^2 + (y + \delta)^2 &= x^2 + y^2 + 2y\delta + \delta^2 = 1 + 2y\delta + \delta^2 < 1 \iff \\ &\iff \delta(2y + \delta) < 0 \iff \delta < -2y \\ x + y + \delta &\leq 0 \iff \delta \leq -x - y = -(x + y) \end{aligned}$$

Como  $y < 0$ , entonces  $-2y > 0$ , y como  $x + y < 0$ , entonces sea  $\delta = \min\{-2y, -(x + y)\}$ , y sin pérdida de generalidad suponemos  $\delta < \varepsilon'$ , que en caso contrario tomaríamos  $0 < \delta' < \varepsilon' \leq \delta$  y se tendría.

- b) Supongamos  $y \geq 0$ . Entonces, veamos que  $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ ,  $0 < \delta < \varepsilon$  tal que  $(x + \delta, y) \in V \cap A$ . Como  $x + y < 0$  e  $y \geq 0$ , entonces  $x < 0$ . Entonces, para que pertenezca a  $A$ :

$$\begin{aligned}(x + \delta)^2 + y^2 &= x^2 + y^2 + 2x\delta + \delta^2 = 1 + 2x\delta + \delta^2 < 1 \iff \\ &\iff \delta(2x + \delta) < 0 \iff \delta < -2x \\ x + y + \delta &\leq 0 \iff \delta \leq -x - y = -(x + y)\end{aligned}$$

De manera análoga, tomando  $\delta = \min\{-2x, -(x + y)\}$  y suponiendo  $\delta < \varepsilon$ , tenemos que pertenece a  $A \cap V$ .

Por tanto,  $\forall V \in \beta_{(x,y)}$ ,  $V \cap A \neq \emptyset$ , y por tanto  $(x, y) \in \bar{A}$ .

Por tanto, tenemos que:

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x + y = 0\}$$

**Ejercicio 2** (1 punto). Estudia si el espacio topológico  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  es o no T2.

Veamos que  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  sí es T2. Sean  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$  con  $(x, y) \neq (x', y')$ . Entonces, como  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$  es T2,  $\exists U, V \in \mathcal{T}_u$  tales que  $(x, y) \in U$ ,  $(x', y') \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ . Entonces, como  $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$ ,  $U, V \in \mathcal{T}$ , y por tanto  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  es T2.

**Ejercicio 3** (1.5 puntos). Encuentra un subconjunto  $B \subset \mathbb{R}^2$  tal que la topología inducida  $\mathcal{T}_B$  sea la discreta en  $B$ , pero la topología  $(\mathcal{T}_u^2)_B$  no sea la discreta.

Sea  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ . Entonces, dado  $(x, y) \in B$ , tenemos que es de la forma  $(x, -x)$ . Veamos que  $\{(x, -x)\} \in \mathcal{T}_B$ . Para ello, sea  $U = [x, x + 1[ \in \mathcal{T}_S$ ,  $V = [-x, -x + 1[ \in \mathcal{T}_S$ . Entonces,  $U \times V \in \mathcal{T}$ , y tenemos que:

$$(U \times V) \cap B = ([x, x + 1[ \times [-x, -x + 1[) \cap B = \{(x, -x)\}$$

Por tanto, tenemos que  $\{(x, y)\} \in \mathcal{T}_B$  para todo  $(x, y) \in B$ . Como la unión de abiertos es abierta, entonces  $\mathcal{T}_B = \mathcal{P}(B)$ , y por tanto  $\mathcal{T}_B$  es la topología discreta en  $B$ .

Veamos ahora que  $\mathcal{T}_B \neq (\mathcal{T}_u^2)_B$ . Para ello, veamos que  $\{(x, -x)\} \notin (\mathcal{T}_u^2)_B$ . Para ello, supongamos que  $\exists U \in \mathcal{T}_u$  tal que  $\{(x, -x)\} = U \cap B$ . Como  $(x, -x) \in U \in \mathcal{T}$ , entonces  $U$  es entorno de dicho punto, por lo que  $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$  tal que  $B[(x, -x), \varepsilon] \subset U$ . Consideramos ahora  $v = (x, -x) + \frac{\varepsilon}{4}(1, -1) = (x + \frac{\varepsilon}{4}, -x - \frac{\varepsilon}{4})$ . Veamos que  $v \in B[(x, -x), \varepsilon]$ :

$$d(v, (x, -x)) = \sqrt{\left(x + \frac{\varepsilon}{4} - x\right)^2 + \left(-x - \frac{\varepsilon}{4} + x\right)^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{8} + \frac{\varepsilon^2}{8}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por tanto,  $v \in B[(x, -x), \varepsilon] \subset U$ , y claramente  $v \in B$ . Por tanto,  $v \in U \cap B$ , pero  $v \neq (x, -x)$ , lo que es una contradicción, por lo que  $\{(x, -x)\} \notin (\mathcal{T}_u^2)_B$ .

**Ejercicio 4.** Estudia si el espacio topológico es:

1. (1 punto) 1AN.

Como  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$  es 1AN, entonces el producto  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  es 1AN.

2. (1 punto) 2AN.

De forma análoga, como  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$  no es 2AN, entonces el producto  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$  no es 2AN. Otra forma de verlo es por contradicción. Supongamos que sí lo es. Entonces, como ser 2AN es hereditario,  $(B, \mathcal{T}_B)$  sería 2AN, pero como la topología es la discreta y  $B$  es no numerable, entonces  $(B, \mathcal{T}_B)$  no es 2AN, lo que es una contradicción.

**Ejercicio 5** (1.5 puntos). Un subconjunto  $C$  se dice frontera si  $C \subset \partial C$ . Encuentra un subconjunto  $C \subset \mathbb{R}^2$  que sea frontera, infinito y que no esté incluido en  $B$ .

Veamos en primer lugar que, si  $C^\circ = \emptyset$ , entonces  $C$  es frontera. En efecto, si  $C^\circ = \emptyset$ , entonces  $C \subset \partial C = \overline{C}$ .

Por tanto, buscamos  $C \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $C^\circ = \emptyset$ ,  $C$  sea infinito y  $C \not\subset B$ . Sea  $C = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ . Veamos que  $C^\circ = \emptyset$ . Supongamos  $(x, y) \in C^\circ$ . Entonces,  $\exists \varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}^+$  tal que  $[x, x + \varepsilon[ \times [y, y + \varepsilon'[ \subset C$ . No obstante, por la densidad de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ , dicha inclusión no es posible, por lo que llegamos a una contradicción, y  $C^\circ = \emptyset$  y, por tanto,  $C$  es frontera.

Veamos que  $C' = \mathbb{R} \times \{0\}$  también sirve. Supongamos  $(x, 0) \in (C')^\circ$ . Entonces,  $\exists \varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}^+$  tal que  $[x, x + \varepsilon[ \times [0, \varepsilon'[ \subset C'$ , de lo que deducimos que  $\varepsilon' = 0$ , lo que es una contradicción. Por tanto,  $(C')^\circ = \emptyset$  y, por tanto,  $C'$  es frontera.