$\boxed{5.22}$ Let $C \subset H$ be a nonempty closed convex set and let $T : C \to C$ be a nonlinear contraction, i.e.,

$$|Tu - Tv| \le |u - v| \quad \forall u, v \in C.$$

1. Let (u_n) be a sequence in C such that

$$u_n \rightharpoonup u \text{ weakly and } (u_n - Tu_n) \to f \text{ strongly.}$$

   Prove that $u - Tu = f$.
   [**Hint**: Start with the case $C = H$ and use the inequality $((u-Tu)-(v-Tv), u-v) \ge 0 \ \forall u, v$.]
2. Deduce that if C is bounded and $T(C) \subset C$, then T has a fixed point.
   [**Hint**: Consider $T_\varepsilon u = (1-\varepsilon)Tu + \varepsilon a$ with $a \in C$ being fixed and $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$.]

(1) Supongamos primero que $C = H$.

$H \supseteq \{u_n\} \rightharpoonup u \iff [\{\langle h, u_n\rangle\} \to \langle h, u\rangle \quad \forall h \in H^*\}]$

$\{u_n - Tu_n\} \to f \iff \{\|u_n - Tu_n - f\|\} \to 0$

$$\boxed{\begin{aligned} ((u-Tu)-(v-Tv), u-v) &= ((u-v)-(Tu-Tv), u-v) \\ &= (u-v, u-v) - (Tu-Tv, u-v) \\ \text{C-S.} \longrightarrow &\ge \|u-v\|^2 - \|Tu-Tv\| \cdot \|u-v\| \\ T \text{ contracción} \longrightarrow &\ge \|u-v\|^2 - \|u-v\| \cdot \|u-v\| = 0 \quad \forall u, v \in C = H \end{aligned}}$$

u_n, $u + tv$, $v \in H$, $t \in \mathbb{R}$

$\{u_n - u - tv\} \rightharpoonup -tv$

$\{u_n - Tu_n - (u + tv - T(u+tv))\} \longrightarrow f - u - tv + T(u+tv)$

$$0 \le ((u_n - Tu_n) - (u + tv - T(u+tv)), u_n - u - tv)$$

$$\Longrightarrow (f - u - tv + T(u+tv), -tv) \ge 0$$

Como T es una contracción, $\|T(u+tv) - T(u)\| \le \|tv\|$.

Tomando $t \to 0$, tenemos que $T(u+tv) \xrightarrow{t \to 0} T(u)$

Además:

$$\begin{cases} t>0 \implies (f-u-tv+T(u+tv), v) \leq 0 \\ t<0 \implies (f-u-tv+T(u+tv), v) \geq 0. \end{cases}$$

Tomando $t \nearrow 0$ y $t \searrow 0$ tenemos que

$$(f-u+Tu, v) = 0 \qquad \forall v \in H$$

$$\implies f-u+Tu = 0$$

Para el caso $C \neq H$, podemos considerar la aplicación $S: H \longrightarrow H$ dada por $S = T \circ P_C$.

$\|Su-Sv\| = \|T(P_C(u)) - T(P_C(v))\| \leq \|P_C(u)-P_C(v)\| \leq \|u-v\|$

Tendremos que $f-u+Su=0 \iff f-u+T(P_C(u))=0$

Como C es convexo, $\overline{C}^{\sigma(E,E^*)} = C$, luego $u \in C$ y $f-u+Tu=0$

2. Deduce that if C is bounded and $T(C) \subset C$, then T has a fixed point.
[**Hint**: Consider $T_\varepsilon u = (1-\varepsilon)Tu+\varepsilon a$ with $a \in C$ being fixed and $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$.]

Sea $\varepsilon > 0$. y $a \in C$. Definimos $T_\varepsilon : C \longrightarrow C$

por
$$T_\varepsilon u = (1-\varepsilon)Tu + \varepsilon a \quad \forall u \in C.$$

Notemos que $T_\varepsilon u \in C$ $\forall u \in C$ porque C es convexo y $Tu, a \in C$.

$$\|T_\varepsilon u - T_\varepsilon v\| = \|(1-\varepsilon)Tu + \varepsilon a - (1-\varepsilon)Tv - \varepsilon a\|$$
$$= (1-\varepsilon)\|Tu - Tv\| \leq (1-\varepsilon)\|u-v\|$$

$\implies T_\varepsilon$ es una contracción estricta. Como H es completo y $C \subseteq H$ es cerrado, C es completo.

$\xRightarrow{\text{pto fijo Banach}} \exists_1 u_\varepsilon \in C : T_\varepsilon u_\varepsilon = u_\varepsilon.$

Notemos que $T_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} T$. Como C está acotado, La sucesión $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ también. Como H es Hilbert, tiene una parcial débilmente convergente, $\{u_\alpha\} \longrightarrow u \in C$.

pq. C cerrado y convexo

$$T_\varepsilon u_\varepsilon = (1-\varepsilon) T u_\varepsilon + \varepsilon a$$

$$\Longrightarrow u_\varepsilon - T u_\varepsilon = u_\varepsilon - \frac{T_\varepsilon u_\varepsilon - \varepsilon a}{1-\varepsilon} = \frac{u_\varepsilon (1-\varepsilon) - u_\varepsilon - \varepsilon a}{1-\varepsilon} = \frac{-\varepsilon (u_\varepsilon - a)}{1-\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow \{u_\varepsilon - T u_\varepsilon\} \longrightarrow 0$$

$$\xrightarrow{1^{\text{er}} \text{ apartado}} u - Tu = 0 \Longleftrightarrow Tu = u.$$