



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría I Examen X

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Miguel Ángel De la Vega Rodríguez Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Juan de Dios Pérez Jiménez.

Descripción Convocatoria Extraordinaria¹.

Fecha 17 de febrero de 2023.

Duración 3 horas.

¹El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1 (2,5 puntos). Enuncia y demuestra el Teorema de Reflexividad.

Demostración. La aplicación Φ está definida consistentemente. Para demostrar que es lineal, debemos comprobar que $\Phi_{av+bw} = \Phi(av+bw)$ es igual a $a\Phi_v + b\Phi_w$ para todo $v, w \in V$, $a, b \in K$. Para ello, aplicamos ambos a una forma lineal genérica $\varphi \in V^*$:

$$\Phi_{av+bw}(\varphi) = \varphi(av + bw) = a\varphi(v) + b\varphi(w)$$
$$(a\Phi_v + b\Phi_w)(\varphi) = a\Phi_v(\varphi) + b\Phi_w(\varphi) = a\varphi(v) + b\varphi(w)$$

comprobándose que son iguales. Para demostrar la biyectividad de Φ , basta con comprobar su inyectividad (al tener V y V^{**} la misma dimensión finita), esto es, $\operatorname{Nuc}(\Phi) = \{0\}$. Sea $v \in V$ tal que Φ_v es la forma nula del bidual. Esto quiere decir $\Phi_v(\varphi) = 0$, esto es, $\varphi(v) = 0$ para todo $\varphi \in V^*$. lo que implica que v = 0.

Ejercicio 2 (2 puntos). Sea $V(\mathbb{R})$ un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y f un endomorfismo suyo que verifica $f \circ f = -I_V$ (I_V es la aplicación identidad en V). Demuestra que f es un automorfismo y que n no puede ser impar.

■ Biyectividad de f: Para ello, vamos a demostrar que $Ker(f) = \{0\}$.

Sea $v \in \text{Ker}(f)$, entonces f(v) = 0. Por ser f lineal $(f \circ f)(v) = 0$, Pero sabemos que $(f \circ f)(v) = -v$, luego $-v = 0 \Rightarrow v = 0$. Por tanto, f es inyectiva.

 \bullet n no puede ser impar:

Para ello, observamos lo siguiente:

$$\det(f \circ f) = \det(-I_V) \Rightarrow \det(f) \cdot \det(f) = (-1)^n \cdot 1 \leftrightarrow (\det(f))^2 = (-1)^n$$

Que para n impar es imposible, por tanto, n no puede ser impar.

Ejercicio 3 (5,5 puntos). Se consideran los espacios vectoriales $S_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}_2[x]$.

1. [3 Puntos] Construye una aplicación lineal $f: S_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ que verifique:

$$\ker(f) = \{A \in S_2(\mathbb{R}) : \operatorname{traza}(A) = 0\} \text{ y } \ker(f^t) = L\{\phi, \psi\} \text{ donde}$$

$$\phi(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 - a_2, \quad \psi(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 - a_2, \quad \forall a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Determina explícitamente $f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

En primer lugar, observamos que:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\right) = 0$$

También sabemos que $\ker(f^t) = L\{\phi, \psi\} = \operatorname{an}(\operatorname{Im}(f))$, es decir,

$$\operatorname{Im}(f) = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : \begin{array}{l} a_0 - a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L} \left\{ (1, 1, 1) \right\}$$

De donde deducimos que dim Ker(f) = 2, vamos a construir una base de Ker(f):

 $\operatorname{Ker}(f) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Ahora, para construir la aplicación lineal f, basta con calcular la imagen de cada uno de los vectores de la base de $S_2(\mathbb{R})$:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = 0$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 + x + x^{2}$$

De donde se obtine:

$$f(E_{11}) = 1 + x + x^{2}$$

$$f(E_{12}) = 0$$

$$f(E_{21}) = 0$$

$$f(E_{22}) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = 1 + x + x^{2}$$

Por tanto, la aplicación lineal f es:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = a(1+x+x^2) + c(1+x+x^2) = (a+c)(1+x+x^2)$$

2. [1 Punto] Construye, si es posible, un endomorfismo h de $S_2(\mathbb{R})$ distinto del endomorfismo nulo tal que $f \circ h$ sea la aplicación lineal nula.

Usando el apartado anterior, sabemos que

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = (a+c)(1+x+x^2)$$
, por tanto, tomando $h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

un endomorfismo no nulo, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tendríamos que $f \circ h = 0$. Veamos que h es un endomorfismo, para ello, comprobaremos que es lineal:

• Aditividad:

$$h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}\right) = h\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & c+c' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & -(a+a') \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & -a' \end{pmatrix} = h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) + h\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}\right)$$

Homogeneidad:

$$h\left(\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = h\left(\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & -\lambda a \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \lambda h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right)$$

Así, dada una matriz $A \in S_2(\mathbb{R})$, $f \circ h(A) = f(h(A)) = f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\right) = (a-a)(1+x+x^2) = 0.$

3. [1,5 Puntos] Calcula una base del espacio cociente $\mathbb{R}_2[x]/Im(f)$ y determina si este espacio es isomorfo a $S_2(\mathbb{R})/ker(f)$.

En primer lugar, comenzamos observando que dim $\mathbb{R}_2[x]/\text{Im}(f) = \dim \mathbb{R}_2[x] - \dim \text{Im}(f) = 3 - 1 = 2$. y por los apartados anteriores, $B_{\text{Im}(f)} = \{1 + x + x^2\}$. Ahora, ampliamos esta base a una base B' de $\mathbb{R}_2[x]$:

$$B' = \{1 + x + x^2, x, x^2\}$$

Donde se tiene que $W = \mathcal{L}\{x, x^2\}$ es suma directa con Im(f), por tanto, $\mathbb{R}_2[x] = \text{Im}(f) \oplus W$. Y por esto, podemos tomar $B = \{x + \text{Im}(f), x^2 + \text{Im}(f)\}$ como base de $\mathbb{R}_2[x]/\text{Im}(f)$. Por otro lado, dim $S_2(\mathbb{R})/\text{ker}(f) = \text{dim} S_2(\mathbb{R}) - \text{dim} \ker(f) = 3 - 2 = 1$, por tanto, no pueden ser isomorfos.