Álgebra II
Examen VII

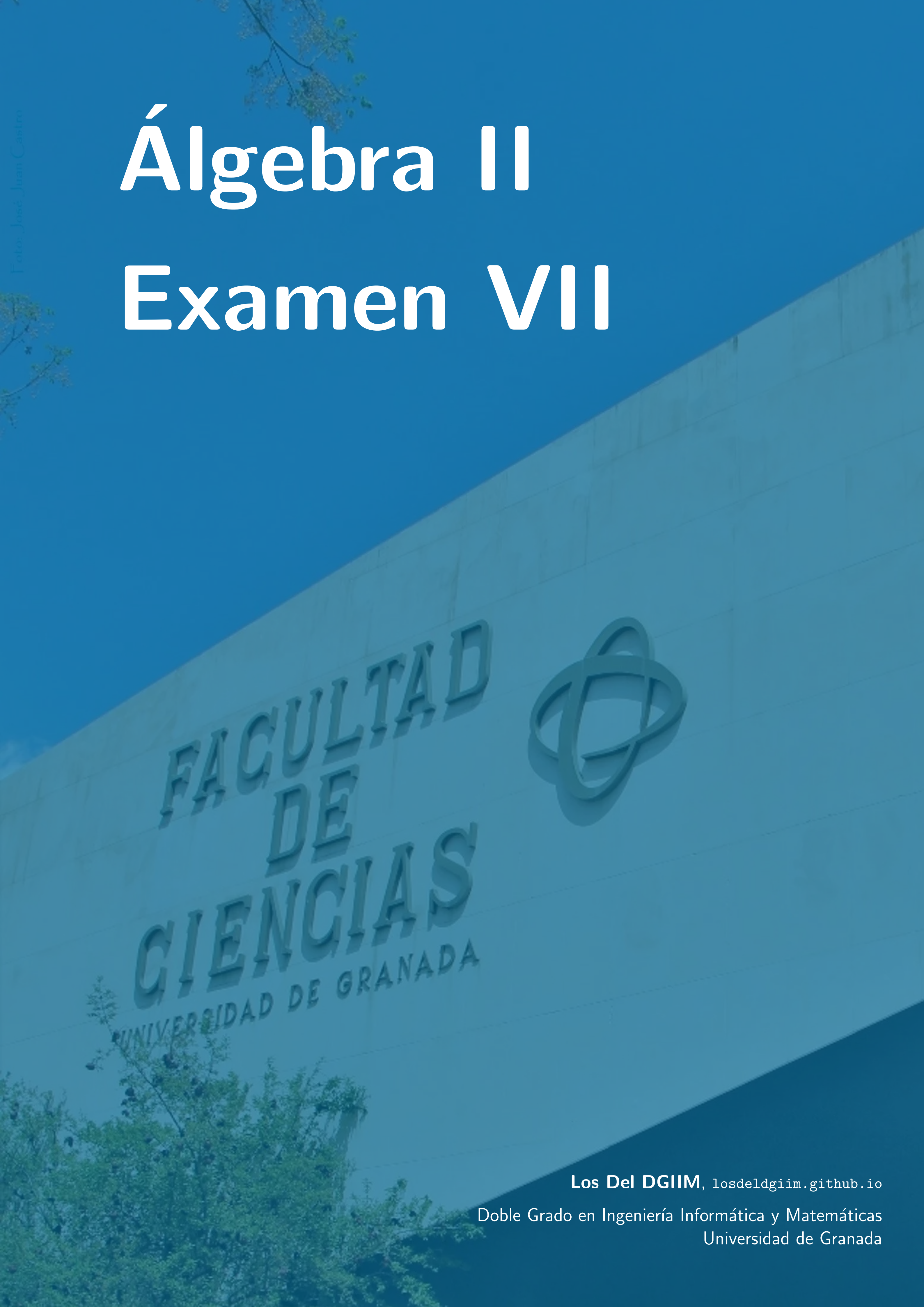

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra II
Examen VII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2025

Asignatura Álgebra II.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Aurora Inés del Río Cabeza.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 18 de Junio de 2025.

Duración 2 horas y 30 minutos.

Ejercicio 1 (1 punto). Prueba, utilizando el algoritmo explicado en clase, que la sucesión

$$3 \geq 3 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 2$$

es gráfica y, utilizando dicho algoritmo, encuentra un grafo en que los grados de sus vértices sean los términos de esa sucesión. Prueba que el grafo es plano y que satisface el teorema de la característica de Euler.

Ejercicio 2 (3 puntos). Se considera el grupo diédrico

$$D_9 = \langle r, s \mid r^9 = s^2 = 1,\ rs = sr^8 \rangle$$

(a) Calcula el orden de cada uno de los elementos de D_9.

(b) Calcula el número de subgrupos de Sylow de D_9 y descríbelos.

(c) ¿Es D_9 resoluble? En caso afirmativo, calcula la longitud y los factores de composición de D_9.

(d) Demuestra que el centralizador de r^i, con $i = 1, \ldots, 8$, es el subgrupo $\langle r \rangle$.

(e) Calcula el centro de D_9.

(f) ¿Es normal el subgrupo $H = \langle s \rangle \subseteq D_9$? En caso contrario, calcula su normalizador en D_9.

(g) Consideremos el subgrupo $N = \langle r^3, s \rangle \subseteq D_9$, prueba que N es isomorfo a D_3.

(h) ¿Es N un subgrupo normal de D_9?

Ejercicio 3 (2 puntos). Una presentación del grupo abeliano A está dada por:

$$A = \left\langle x, y, z \;\middle|\; \begin{array}{rcl} 6x - 4y + 4z & = & 0 \\ 8x + 4y + 6z + 6t & = & 0 \\ 6x + 4y + 4z + 6t & = & 0 \end{array} \right\rangle$$

(a) Calcula, de forma razonada, el rango (de la parte libre) y las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de A y, si $T(A)$ denota el grupo de torsión de A, determina su longitud y sus factores de composición.

(b) Clasifica, dando sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, todos los grupos abelianos cuyo orden sea el orden de $T(A)$ e identifica cuál de ellos es justamente $T(A)$.

Ejercicio 4 (2 puntos). Sea G un grupo de orden 28.

(a) Razona que G es el producto semidirecto $P_7 \rtimes P_2$ con P_7 y P_2 un 7-subgrupo y un 2-subgrupo de Sylow de G, respectivamente.

(b) Razona que si G tiene un elemento de orden 4, entonces hay exactamente dos productos semidirectos (no isomorfos) $P_7 \rtimes P_2$: uno de ellos abeliano y el otro no abeliano, da una presentación de este último.

(c) Concluye que hay sólo 4 grupos de orden 28, dos abelianos y dos no abelianos. Da las descomposiciones cíclicas de los abelianos y presentaciones de los no abelianos.

Ejercicio 5 (2 puntos)**.** Demuestra el Teorema de Cauchy. Concluye que, si G es finito, entonces G es un p-grupo si y sólo si su orden es una potencia de p.