Geometría III

Examen XIV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría III
Examen XIV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría III.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único[1].

Descripción Convocatoria ordinaria

[1]El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Construye, si existe, una aplicación afín $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ que cumpla:

$$f(1,-1)=(4,-3),\quad f(1,1)=(2,1),\quad f(2,1)=(4,2),\quad \text{y}\quad f(0,1)=(0,0)$$

Si existe, da su expresión en coordenadas del sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^2$; si no existe, justifica el motivo.

Consideremos el sistema de referencia dado por

$$\mathcal{R}=\{(1,-1),\mathcal{B}=\{(0,2),(1,2)\}\}$$

Como f es afín,

$$\begin{aligned}\vec{f}(0,2)&=\overrightarrow{f(1,-1)f(1,1)}=\overrightarrow{(4,-3)(2,1)}=(-2,4)\\ \vec{f}(1,2)&=\overrightarrow{f(1,-1)f(2,1)}=\overrightarrow{(4,-3),(4,2)}=(0,5)\end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$M(f;\mathcal{R}_0\leftarrow\mathcal{R})=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline 4&-2&0\\ -3&4&5\end{array}\right)$$

$$M(Id;\mathcal{R}_0\leftarrow\mathcal{R})=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline 1&0&1\\ -1&2&2\end{array}\right)$$

$$M(Id;\mathcal{R}\leftarrow\mathcal{R}_0)=M(Id;\mathcal{R}_0\leftarrow\mathcal{R})^{-1}=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline 3/2&-1&1/2\\ -1&-1&0\end{array}\right)$$

$$M(f;\mathcal{R}_0)=M(f;\mathcal{R}_0\leftarrow\mathcal{R})\cdot M(Id;\mathcal{R}\leftarrow\mathcal{R}_0)=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline 1&2&-1\\ -2&1&2\end{array}\right)$$

La expresión en coordenadas será por tanto:

$$f(x,y)=(2x-y+1,x+2y-2)$$

Veamos si satisface la última condición:

$$f(0,1)=(2\cdot 0-1+1,0+2\cdot 1-2)=(0,0)\Longrightarrow f\text{ existe}$$

Tenemos por tanto que sí existe y su expresión en coordenadas es la dada.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Sea $T=\{p_1,p_2,p_3\}$ un triángulo en un plano afín A. Consideramos los puntos

$$p_{ij}=p_i+\frac{1}{3}\overrightarrow{p_ip_j},\quad \text{para } i,j\in\{1,2,3\} \text{ distintos},$$

que trisecan los lados del triángulo T. Demuestra:

1. Que para cualesquiera $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ distintos, la recta R_{jk} que pasa por los puntos p_{ij} y p_{ik} es paralela a la recta que pasa por p_j y p_k.
2. Que las rectas R_{12}, R_{23} y R_{31} se cortan dos a dos, y los puntos de intersección forman un triángulo $T' = \{p'_1, p'_2, p'_3\}$.
3. Las medianas del triángulo T' coinciden con las del triángulo T.
4. Los baricentros de los triángulos T y T' coinciden.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Consideremos las rectas afines

$$r_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = 0,\ x + y + 2z = 3\},$$
$$r_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = -1,\ y + z = 4\}.$$

Estudia la posición relativa de r_1 y r_2. Calcula la distancia de r_1 a r_2. Deternuba yba recta qye sea perpendicular común a ambas rectas.

Ejercicio 4 (3 puntos)**.** Clasifica desde un punto de vista afín la cuádrica de $\mathbb{R}^3$ de ecucación

$$x^2 + 10xy + 14xz - 2x + y^2 - 2yz + 14y + z^2 + 10z + 1 = 0$$

y determina un sistema de referencia afín en el que esta cónica tenga una expresión reducida.