MN I

Examen VIII

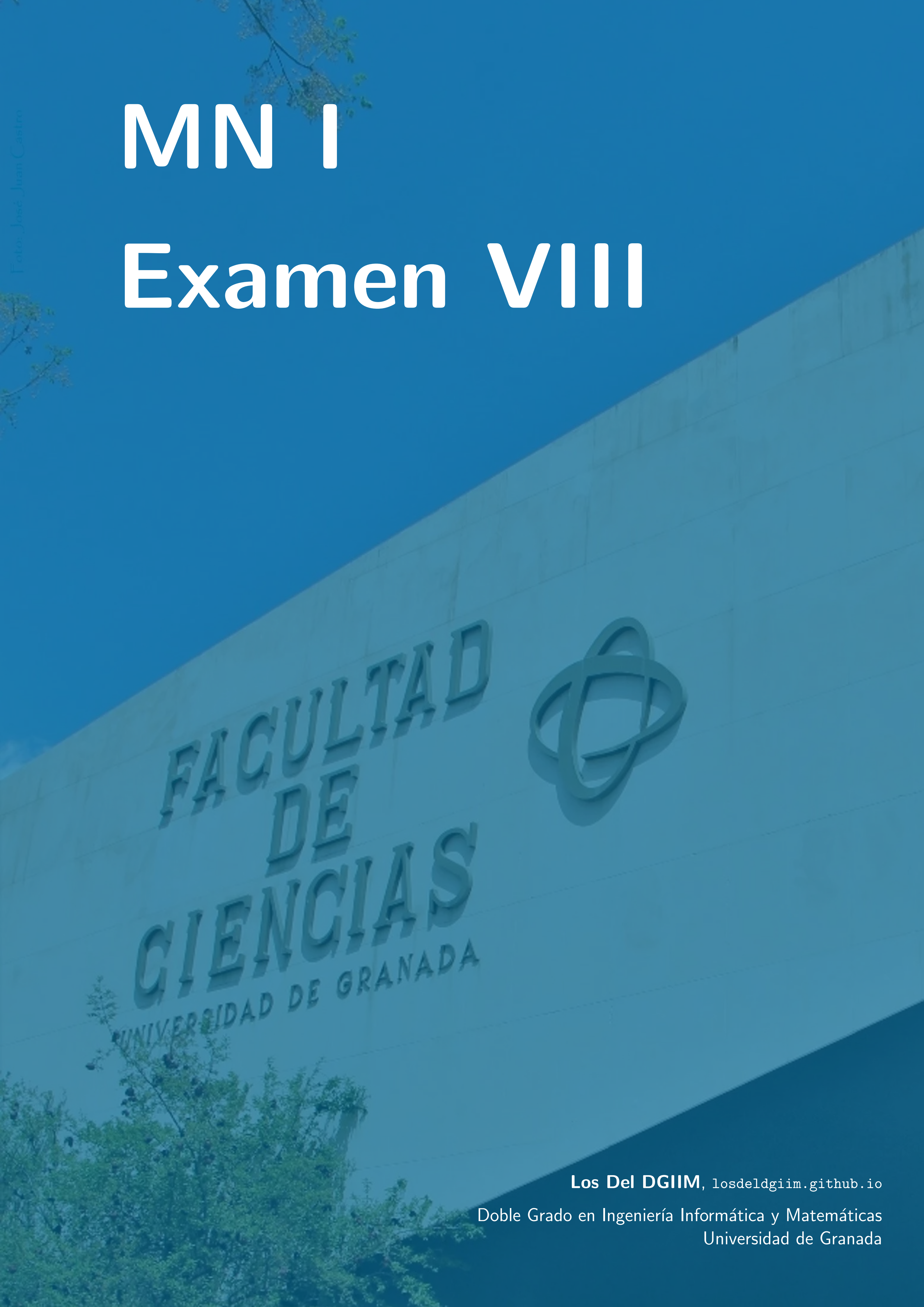

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

MN I
Examen VIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Roxana Acedo Parra

Granada, 2024

Asignatura Métodos Numéricos I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Juan José Nieto Muñoz.

Fecha 10 de junio de 2025.

Duración máximo 3 horas.

Descripción Los que se examinaban de la parte uno, debían hacer los ejercicios 1 (sobre 2), 2 (sobre 4), 3 (sobre 4) y 4 (sobre 4). Mientras que los que se examinaban de la segunda, los ejercicios 5 (sobre 2), 6 (sobre 4), 7 (sobre 4) y 8 (sobre 4). Por otro lado, los que se examinaban de ambas hicieron el 1 (sobre 2), 2 (sobre 4), 3 (sobre 4), 5 (sobre 2), 6 (sobre 4) y 7 (sobre 4).

Ejercicio 1. Determina razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si dos polinomios de grado exactamente 5 interpolan los mismos 5 datos, entonces esos polinomios han de ser iguales.

b) Si en un espacio vectorial de funciones prehilbertiano $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tenemos una función f y su mejor aproximación u_f en un cierto subespacio H de dimensión finita, entonces se verifica:

$$d(f, H)^2 = (\text{distancia de } f \text{ a } H)^2 = \langle f - u_f, f - u_f \rangle^2 = \|f\|^2 - \|u_f\|^2.$$

Ejercicio 2. Considera el espacio vectorial $V = C([0, 1])$ con el producto escalar con peso siguiente:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)x\,dx,$$

y el subespacio $H = \{u(x) \in V : u(x) = a + bx^3 + c(x^3 - x) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

a) Calcula una base del subespacio H e indica si es ortogonal.

b) Dada la función $f(x) = x$, calcula su mejor aproximación u_f en H.

Ejercicio 3. Considera la función $f(x) = e^{x^2}$ y los nodos $X = \{-1, 0, 1\}$.

a) Calcula un polinomio $p(x) \in \mathbb{P}_2[x]$ que interpole a f en los nodos dados sin usar el método de los coeficientes indeterminados.

b) Sabiendo que $|f'''(x)| < 4$ en el intervalo $[-1, 1]$, da una estimación lo más ajustada posible del error cometido en el intervalo.

c) Usa $p(x)$ para aproximar la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

d) Estima el error cometido al calcular la integral anterior.

Ejercicio 4. Dado el siguiente spline:

$$s(x) = \begin{cases} 3 + x - 9x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + x^3 & \text{si } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

a) Determina los valores de a, b y c para que $s(x)$ sea un spline cúbico de clase 2.

b) Determina qué problema de interpolación de tipo Lagrange en los nodos $X = \{0, 1, 2\}$ resuelve $s(x)$.

c) Justifica si $s(x)$ es el único spline cúbico de clase 2 que resuelve dicho problema.

Ejercicio 5. Determina razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Toda matriz A para la cual sea posible encontrar una matriz L triangular inferior tal que se verifique $A = LL^T$ ha de ser simétrica y regular.

b) Toda matriz estrictamente diagonal dominante (por filas) posee un valor propio que es simple y mayor en módulo que todos los demás valores propios.

Ejercicio 6. Al aplicar el método de Jacobi a un SEL 2×2 se han obtenido las siguientes iteraciones:

k	0	1	2	3	4	...
x_k	0	$3/2$	$7/5$	$37/20$	$91/50$	...
y_k	0	$-1/5$	$7/10$	$16/25$	$91/100$	...

a) Determina un SEL del cual provengan estas iteraciones.

b) Decide si el SEL encontrado es el único que corresponde a tales iteraciones.

c) Justifica si el método convergerá o no.

Ejercicio 7. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que la matriz de coeficientes del sistema admite una descomposición de tipo LU.

b) Halla la descomposición LU que verifica $u_{i,i} = i$, para $i = 1, 2, 3$.

c) Utiliza dicha factorización para hallar la solución del SEL.

d) Aparte de la factorización anterior, ¿es posible encontrar (otra) matriz L tal que $A = LL^T$?

Ejercicio 8. Una señora dejó junto a la ventana los resultados de su análisis de sangre y con el sol se borraron los correspondientes al Hematocrito (medido en %), la Hemoglobina (medida en gramos/decilitro) y los Hematíes (medidos en millones/mililitro). Recordaba sin embargo que el Hematocrito triplicaba la Hemoglobina y sextuplicaba los Hematíes, y curiosamente sabía que la cantidad de Hematocrito menos 33 era igual a la mitad de los Hematíes.

a) Determina el SEL que han de resolver estas tres cantidades.

b) Ordénalo para que no se pueda aplicar el método de Jacobi.

c) Ordénalo de nuevo para que se pueda aplicar el método de Gauss–Seidel y sea convergente.

d) Teniendo en cuenta que los Hematíes han de estar entre 3 y 5 millones por mililitro, determina si la señora los tiene bajos, altos o dentro de lo normal.

Ejercicio 1. Determina razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si dos polinomios de grado exactamente 5 interpolan los mismos 5 datos, entonces esos polinomios han de ser iguales.

Solución. $\boxed{\text{Falso.}}$ El espacio $\mathcal{P}_5[x]$ tiene dimensión 6; por tanto, al interpolar solo 5 datos sabemos que hay existencia pero no unicidad. Por tanto, damos un contraejemplo sencillo (interpolando ceros).

$$p_1(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4), \qquad \text{y} \quad p_2(x) = 43 \cdot p_1(x),$$

que interpolan los puntos

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0	0	0	0	0

b) Si en un espacio vectorial de funciones prehilbertiano $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tenemos una función f y su mejor aproximación u_f en un cierto subespacio H de dimensión finita, entonces se verifica:

$$d(f,H)^2 = (\text{distancia de } f \text{ a } H)^2 = \langle f - u_f, f - u_f \rangle^2 = \|f\|^2 - \|u_f\|^2.$$

Solución. $\boxed{\text{Falso.}}$ Sobra un cuadrado:

$$d(f,H)^2 = \langle f - u_f, f - u_f \rangle = \|f\|^2 - \|u_f\|^2.$$

Ejercicio 2. Considera el espacio vectorial $V = C([0,1])$ con el producto escalar con peso siguiente:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)x\,dx,$$

y el subespacio $H = \{u(x) \in V : u(x) = a + bx^3 + c(x^3 - x) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

a) Calcula una base del subespacio H e indica si es ortogonal.

Por la propia definición de H, es claro que $u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = x^3, \quad u_3(x) = x^3 - x$, constituyen una base (generan H y son polinomios linealmente independientes). Veamos que no son ortogonales haciendo solo un producto escalar, aunque en realidad ninguno de los $\langle u_i, u_j \rangle$ sale 0.

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \int_0^1 1 \cdot x^3 \cdot x\,dx = \int_0^1 x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{5}.$$

b) Dada la función $f(x) = x$, calcula su mejor aproximación u_f en H.

Podríamos aplicar el teorema principal de aproximación visto en clase, que dice que la mejor aproximación es la única función $u_f(x) = au_1(x) + bu_2(x) + cu_3(x)$ cuyos coeficientes resuelven el sistema de Gramm:

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, u_1\rangle & \langle u_1, u_2\rangle & \langle u_1, u_3\rangle \\ \langle u_2, u_1\rangle & \langle u_2, u_2\rangle & \langle u_2, u_3\rangle \\ \langle u_3, u_1\rangle & \langle u_3, u_2\rangle & \langle u_3, u_3\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, u_1\rangle \\ \langle f, u_2\rangle \\ \langle f, u_3\rangle \end{pmatrix}$$

Y todos estos productos son integrales de polinomios fáciles de calcular, aunque llevan un ratito... Pero, en este caso, simplemente observamos que $f(x) = x = x - x^3 + x^3 = u_3(x) + u_2(x)$, y, por lo tanto, f está en H y ¡ella misma es su mejor aproximación!

Ejercicio 3. Considera la función $f(x) = e^{x^2}$ y los nodos $X = \{-1, 0, 1\}$.

a) Calcula un polinomio $p(x) \in \mathbb{P}_2[x]$ que interpole a f en los nodos dados sin usar el método de los coeficientes indeterminados.

Los datos a interpolar, a partir de f, son:

x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	$1/e$	1	$1/e$

Por lo que el polinomio interpolador es (usamos, por ejemplo, la fórmula de Lagrange):

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{e}\cdot\frac{(x)(x-1)}{(-1)(-1-1)} + 1\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} + \frac{1}{e}\cdot\frac{(x+1)(x)}{(1+1)(1)} \\ &= \frac{1}{2e}(x^2 - x) - (x^2 - 1) + \frac{1}{2e}(x^2 + x) \\ &= \left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{2e}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{2e} + \frac{1}{2e}\right)x - x^2 + 1 \\ &= \left(\frac{1}{e} - 1\right)x^2 + 1 \\ &\approx 1 - 0{,}6321x^2 \end{aligned}$$

b) Sabiendo que $|f'''(x)| < 4$ en el intervalo $[-1, 1]$, da una estimación lo más ajustada posible del error cometido en el intervalo.

Aquí usamos el teorema que caracteriza el error de interpolación mediante una derivada de f junto con la cota de las derivadas que nos proporciona el enunciado, obtenemos:

$$f(x) - p(x) := E(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}\cdot\Pi(x)$$
$$\Rightarrow |f(x) - p(x)| \leqslant \frac{4}{6}\cdot|x(x^2 - 1)| \leqslant \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}2566$$

donde hemos calculado el siguiente máximo valor absoluto:

$$\max_{x\in[-1,1]} |x(x^2 - 1)| = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

c) Usa $p(x)$ para aproximar la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \int_{-1}^{1} ({}^{1}\!/\!{}_{e})-1)x^2+1\,dx = \left[\frac{1-e}{3e}x^3+x\right]_{-1}^{1} = 2\frac{1-e}{3e}+2 \approx 1{,}5132.$$

d) Estima el error cometido al calcular la integral anterior.

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - 1{,}579\right| = \left|\int_{-1}^{1} (f(x)-p(x))\,dx\right| \leqslant \int_{-1}^{1} |E(x)|\,dx$$
$$\leqslant \int_{-1}^{1} \frac{4}{9\sqrt{3}}\,dx = \frac{8}{9\sqrt{3}} \approx 0{,}5132$$

Ejercicio 4. Dado el siguiente spline:

$$s(x) = \begin{cases} 3+x-9x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ a+b(x-1)+c(x-1)^2+x^3 & \text{si } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

a) Determina los valores de a, b y c para que $s(x)$ sea un spline cúbico de clase 2.

Sólo hemos de recordar que un spline cúbico de clase 2 es una función a trozos, que en cada trozo es un polinomio de grado 3, como mucho, y que es 2 veces derivable (lo que se chequea sólo en las "juntas" porque en el resto de puntos, por ser polinómica, ya es derivable todas las veces que se quiera). En este caso, sólo hemos de imponer que los dos trozos a la izquierda y derecha de $x=1$ (la única junta) se "peguen bien" tanto las funciones, como sus derivadas primera y segunda.

Para simplificar ponemos nombres a las expresiones en cada trozo:

$$s_1(x) := 3+x-9x^2 \quad \text{y} \quad s_2(x) := a+b(x-1)+c(x-1)^2+x^3$$

Comenzamos imponiendo continuidad (que se peguen bien las funciones en cada trozo).

$$s_1(1) = s_2(1), \quad -5 = a+0+0+1 \iff \boxed{a=-6}.$$

Continuamos imponiendo derivabilidad (que se peguen bien las derivadas de las funciones en cada trozo)

$$s_1'(1) = s_2'(1) \iff (1-18x)\big|_{x=1} = \big(b+2c(x-1)+3x^2\big)\big|_{x=1}$$
$$\iff -17 = b+0+3 \iff \boxed{b=-20}.$$

Y concluimos imponiendo clase 2 (que se peguen bien las segundas derivadas de las funciones en cada trozo)

$$s_1''(1) = s_2''(1) \iff (-18)\big|_{x=1} = (2c+6x)\big|_{x=1} \iff -18 = 2c+6 \iff \boxed{c=-12}.$$

Por lo tanto, basta que $a=-6$, $b=-20$ y $c=-12$ para que s(x) sea un spline cúbico de clase 2.

b) Determina qué problema de interpolación de tipo Lagrange en los nodos $X = \{0, 1, 2\}$ resuelve $s(x)$.

Obviamente los datos tipo Lagrange que interpola son $(0, s(0))$, $(1, s(1))$ y $(2, s(2))$; en este caso:

$$s(0) = s_1(0) = 3, \quad s(1) = s_1(1) = 3 + 1 - 9 = -5,$$

$$s(2) = s_2(2) = -6 - 20(2-1) - 12(2-1)^2 + 2^3 = -30.$$

Si no se especificase "de tipo Lagrange", se pueden proponer montones de problemas de interpolación de los cuales es solución nuestro spline; pero entonces, habría que ser consecuentes en el siguiente apartado...

c) Justifica si $s(x)$ es el único spline cúbico de clase 2 que resuelve dicho problema.

No, no es el único. Sabemos que el espacio de splines cúbicos de clase dos, en tres nodos, tiene dimensión 5 y por tanto, hay infinitos splines de este espacio resolviendo las tres condiciones pedidas. Como ya sabemos, hacen falta dos condiciones adicionales para que quede unívocamente determinado.

Ejercicio 5. Determina razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Toda matriz A para la cual sea posible encontrar una matriz L triangular inferior tal que se verifique $A = LL^T$ ha de ser simétrica y regular.

Solución. $\boxed{\text{Falso.}}$ La regularidad no es necesaria; contraejemplo: $A = 0$ y $L = 0$.

b) Toda matriz estrictamente diagonal dominante (por filas) posee un valor propio que es simple y mayor en módulo que todos los demás valores propios.

Solución. $\boxed{\text{Falso.}}$ Ser EDD y tener valor propio dominante no tienen nada que ver. Contraejemplo: $A = I$.

Ejercicio 6. Al aplicar el método de Jacobi a un SEL 2×2 se han obtenido las siguientes iteraciones:

k	0	1	2	3	4	...
x_k	0	$3/2$	$7/5$	$37/20$	$91/50$	...
y_k	0	$-1/5$	$7/10$	$16/25$	$91/100$	...

a) Determina un SEL del cual provengan estas iteraciones.

Como sabemos, al aplicar el método de Jacobi a un sistema 2×2 nos queda un método de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x_{k+1} = a \cdot y_k + b, \\ y_{k+1} = c \cdot x_k + d, \end{cases}$$

por lo que calcularemos a, b, c y d. Usando el paso de $k = 0$ a $k = 1$ obtenemos

$$\begin{cases} 3/2 = 0 \cdot a + b, \\ -1/5 = 0 \cdot c + d, \end{cases} \Rightarrow \quad \boxed{b = 3/2} \quad \text{y} \quad \boxed{d = -1/5}.$$

Usando ahora el paso de $k = 1$ a $k = 2$, junto con los valores calculados, obtenemos

$$\begin{cases} 7/5 = -1/5 \cdot a + 3/2, \\ 7/10 = 3/2 \cdot c - 1/5, \end{cases} \Rightarrow \quad \boxed{a = 1/2} \quad \text{y} \quad \boxed{c = 3/5}.$$

El resto de iteraciones no son necesarias, pero podemos usarlas para verificar que no nos hemos equivocado. Recordando ahora que las ecuaciones de Jacobi se calculan despejando cada incógnita de su correspondiente ecuación, deducimos un SEL:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1/2 \cdot y^k + 3/2, \\ y_{k+1} = 3/5 \cdot x^k - 1/5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3, \\ -3x + 5y = -1. \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Decide si el SEL encontrado es el único que corresponde a tales iteraciones.

El sistema, obviamente, no es único (hablamos del sistema, no de la solución), ya que si multiplicamos cualquier ecuación del sistema por una constante no nula (cosa que, de hecho, ya hemos hecho para simplificar denominadores), obtendríamos el mismo método de Jacobi.

c) Justifica si el método convergerá o no.

Como tenemos

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix},$$

se puede calcular que $\|B_J\|_1 = \|B_J\|_\infty = 0{,}6 < 1$, condición suficiente para la convergencia. También, en este caso, la matriz del sistema obtenido es claramente EDD, y esto es otra condición suficiente.

Ejercicio 7. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que la matriz de coeficientes del sistema admite una descomposición de tipo LU.

En rigor, cuando resolvamos 7.b) habremos respondido al 7.a)... No obstante, se puede verificar a priori que los determinantes principales de A son no nulos, lo que garantiza la descomposición LU.

b) Halla la descomposición LU que verifica $u_{i,i} = i$, para $i = 1, 2, 3$.

Basta seguir los pasos de clase ordenadamente, colocando en primer lugar la diagonal de U que nos han prescrito: $u_{1,1} = \boxed{1}$, $u_{2,2} = \boxed{2}$ y $u_{3,3} = \boxed{3}$, obteniendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0{,}5 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} = LU.$$

c) Utiliza dicha factorización para hallar la solución del SEL.

Basta recordar el orden de resolución: primero $Ly = b$ y luego $Ux = y$. Lo hacemos:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0{,}5 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

d) Aparte de la factorización anterior, ¿es posible encontrar (otra) matriz L tal que $A = LL^T$?

No, basta observar que, cuando esto ocurre, $A = LL^T$ resulta ser simétrica, pero nuestra matriz A no lo es, puesto que $a_{1,3} = 3$ y $a_{3,1} = 2$ no son iguales.

Ejercicio 8. Una señora dejó junto a la ventana los resultados de su análisis de sangre y con el sol se borraron los correspondientes al Hematocrito (medido en %), la Hemoglobina (medida en gramos/decilitro) y los Hematíes (medidos en millones/mililitro). Recordaba sin embargo que el Hematocrito triplicaba la Hemoglobina y sextuplicaba los Hematíes, y curiosamente sabía que la cantidad de Hematocrito menos 33 era igual a la mitad de los Hematíes.

a) Determina el SEL que han de resolver estas tres cantidades.

Para comenzar, ponemos nombres a las variables del problema:
x = Hematocrito (medido en %);
y = Hemoglobina (medida en gramos/decilitro);
z = Hematíes (medidos en millones/mililitro);

Y, trasladando los datos a fórmulas, obtenemos nuestro SEL: – el Hematocrito triplicaba la Hemoglobina: $x = 3y$;
– el Hematocrito sextuplicaba los Hematíes: $x = 6z$;
– la cantidad de Hematocrito menos 33 era igual a la mitad de los Hematíes: $x - 33 = \dfrac{z}{2}$

b) Ordénalo para que no se pueda aplicar el método de Jacobi.

Pasando todas las incógnitas a la izquierda, nos queda:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - 6z = 0 \\ x - {}^1\!/_2 z = 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Y, tal y como está, ya no se puede aplicar Jacobi, pues $a_{2,2} = 0$ no puede pasar dividiendo.

c) Ordénalo de nuevo para que se pueda aplicar el método de Gauss–Seidel y sea convergente.

Basta reordenar las ecuaciones (las filas de la matriz ampliada $(A|b)$) para que, primero, los elementos de la diagonal sean no nulos y se pueda aplicar y, segundo, buscando la convergencia del método; en este caso valen varias opciones, pero lo hacemos para que quede EDD, lo que produce convergencia:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 33 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0{,}5 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 33 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Teniendo en cuenta que los Hematíes han de estar entre 3 y 5 millones por mililitro, determina si la señora los tiene bajos, altos o dentro de lo normal.

Resolviendo el sistema (en realidad, solo calculando z) obtenemos $z = 6$ y como han de estar entre $z = 3$ y $z = 5$, concluimos que están altos.