

MN II

Examen I

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

MN II

Examen I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Asignatura Métodos Numéricos II

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Lidia Fernández Rodríguez.

Descripción Prueba 1. Temas 1 y 2 (Derivación).

Fecha 2 de abril de 2025.

Duración 3 horas.

Observaciones Los enunciados no son los originales y pueden contener variaciones o errores.

Ejercicio 1. Si tenemos un sistema de ecuaciones:

$$F(X) = 0$$

al que le aplicamos un método numérico para obtener la sucesión de aproximaciones $\{X_n\}$, si consideramos el sistema:

$$F(AZ + b) = 0$$

donde b es un vector y A una matriz no singular, si aplicamos el mismo método numérico, obtenemos la sucesión de aproximaciones $\{Z_n\}$. Demuestra que si se cumple que $X_0 = AZ_0 + b$, entonces:

$$X_n = AZ_n + b \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejercicio 2. Se considera el polinomio:

$$p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$$

Estudia un intervalo donde se encuentren todas sus raíces reales, calcula su sucesión de Sturm y úsala para hallar el número de raíces reales de p .

Ejercicio 3. Consideramos la ecuación:

$$\frac{\pi}{2} \sin(\pi x) - x - \frac{3}{2} = 0$$

- a) Encuentra un intervalo de la forma $[a, b]$ de longitud 1 donde se encuentre una solución de la ecuación.
- b) Si g es una función contráctil definida en un intervalo $[a, b]$ que verifica que:

$$\left| g\left(a + \frac{b}{2}\right) - a + \frac{b}{2} \right| \leq (1 - L)b - \frac{a}{2}$$

Entonces, $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$.

Pista: estudiar $|g(x) - m|$, donde m es el punto medio entre a y b .

- c) Sea $g(x) = \frac{\pi}{2} \sin(\pi x) - \frac{3}{2}$, comprueba que cumple las hipótesis del apartado anterior para el intervalo obtenido en el primer apartado.
- d) Estudia la convergencia del método $x_{n+1} = g(x_n)$, y en caso de que sea convergente, estudia el orden de convergencia del método.
- e) Realiza dos iteraciones tomando $x_0 = -1,5$.
- f) Indica un método con orden de convergencia mayor que el método propuesto. Realiza dos iteraciones con las mismas condiciones iniciales y justifica la convergencia del método propuesto.

Ejercicio 4. Consideramos la fórmula de derivación:

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = a_0 f(a) + a_1 f(0) + a_2 f'(0) + R(f)$$

- a) Calcula a_0, a_1, a_2 y a para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible. ¿Cuál es dicho grado?
- b) Expresa el error que se comete al aproximar f por la fórmula obtenida en el apartado anterior, imponiendo suposiciones sobre la regularidad de f .
- c) Aplica la fórmula a $\cos(\pi x)$ y acota el error obtenido.