Final (Incidencias)- Análisis Funcional - 2024-25

1. Sean

$$F = \{f \in C([-1,1],\mathbb{R}) : f(1) = 0\}, \quad G = \{f \in C^1([-1,1],\mathbb{R}) : f(1) = 0\},$$

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\}, \qquad \forall f \in X$$

a) **[1,5 puntos]** ¿Es $(F, \|\cdot\|_\infty)$ un espacio de Banach? Justifica tu respuesta.

b) **[1,5 puntos]** ¿Es $(G, \|\cdot\|_\infty)$ un espacio de Banach? Justifica tu respuesta.

Solución a) Dado que $(\mathcal{C}([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach, para ver que $(F, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach, bastará ver que F es un subespacio cerrado de $C([-1,1])$.

- F es un subespacio porque

$$f, g \in F \Rightarrow f, g \in C([-1,1]), \ f(1) = g(1) = 0$$

$$\Rightarrow f+g \in C([-1,1]), \ (f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0$$

$$\Rightarrow f+g \in F$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, f \in F \Rightarrow f \in C([-1,1],\mathbb{R}), \ f(1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha f \in C([-1,1],\mathbb{R}), \ (\alpha f)(1) = \alpha f(1) = \alpha 0 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha f \in F.$$

- F es cerrado pues si $\{f_n\} \subset F$ y $f \in C([-1,1])$ verifican

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \Leftrightarrow \{f_n(t)\} \to f(t) \text{ c.u. en } [-1,1]$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccc} f_n(1) & \longrightarrow & f(1) \\ (f_n \in F) \ \| & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f \in F.$$

b) $(G, \|\cdot\|_\infty)$ no es un espacio de Banach porque aunque G es subespacio de $(C([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$, no es cerrado. Por ejemplo: Si

$$f_n(t) := |t|^{\frac{n+1}{n}} - 1 \quad , \quad t \in [-1,1]$$

$$\Rightarrow \{f_n\} \subset G \quad y \quad \|f_n(t) - (|t|-1)\|_\infty \longrightarrow 0 .$$

En efecto, $\{f_n\} \subset G$ es fácil de ver. Y

$$\|f_n(t) - (|t|-1)\|_\infty = \sup_{-1\leq t\leq 1} \left| |t|^{\frac{n+1}{n}} - |t| \right| \xrightarrow{(n\to\infty)} 0$$

$$(|t| \text{ es par}) \quad = \max_{0\leq t\leq 1} |t^{\frac{n+1}{n}} - t|$$

y como $\varphi(t) := t^{\frac{n+1}{n}} - t$ verifica $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$ y $\varphi'(t_0) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} t_0^{1/n} = 1 \Leftrightarrow t_0 = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, entonces

$$\|f_n(t) - (|t|-1)\|_\infty = \max_{0\leq t\leq 1} |t^{\frac{n+1}{n}} - t| = |\varphi(t_0)| =$$

$$= \left| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(-\frac{1}{n+1}\right) \right| \longrightarrow e \cdot 0 = 0.$$

2. **[3 puntos]** Supongamos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas completas en el espacio vectorial E. Prueba que si se verifica la propiedad

$$\text{“toda sucesión } \{x_n\} \subset E \text{ verificando } \begin{cases} \{x_n\} \xrightarrow{(E,\|\cdot\|_1)} x \\ \{x_n\} \xrightarrow{(E,\|\cdot\|_2)} y, \end{cases} \text{ cumple } x = y\text{”},$$

entonces $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

Solución. Consideremos la aplicación

$$T: (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2)$$
$$x \longmapsto x$$

que claramente es lineal.

Puesto que $(E, \|\cdot\|_1)$ y $(E, \|\cdot\|_2)$ son espacios de Banach, podemos usar el teorema de gráfica cerrada para ver que T es continua. En efecto la graf $(T) = \{(x, x) : x \in E\}$ es cerrado en $(E, \|\cdot\|_1) \times (E, \|\cdot\|_2)$ pues si

$$\{(x_n, x_n)\} \subset \text{Graf } T \quad \text{con} \quad \{(x_n, x_n)\} \xrightarrow{\|\cdot\|_1 \times \|\cdot\|_2} (x, y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \{x_n\} \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x \\ \{x_n\} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} y \end{cases}$$

y usando la hipótesis del ejercicio, deducimos

$$x = y$$

es decir,

$$(x, y) = (x, x) \in \text{Graf}(T).$$

Por tanto Graf (T) es cerrado y T es continua o sea $\exists\, k > 0$ t.q.

$$\|Tx\|_2 = \|x\|_2 \leq k \|x\|_1 \qquad \forall x \in E$$

Aplicando un corolario del Teorema de la aplicación abierta deducimos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

3. Sea E un espacio de Banach.

a) **[1,5 punto]** Si C es un subconjunto convexo de E, prueba que

$$C \text{ es cerrado en la topología de la norma } \Leftrightarrow C \text{ es cerrado en la topología débil } \sigma(E,E^*).$$

b) **[0,75 puntos]** Sea una sucesión $\{f_n\} \subset E^*$ verificando

$$\{\langle f_n, x\rangle\} \text{ es convergente para todo } x \in E.$$

Prueba que existe $f \in E^*$ tal que

$$\{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ en } \sigma(E^*,E).$$

c) **[0,75 puntos]** Supongamos que E es reflexivo y sea $\{x_n\}$ una sucesión en E tal que

$$\{\langle f, x_n\rangle\} \text{ es convergente para cada } f \in E^*.$$

Prueba que existe $x \in E$ tal que

$$\{x_n\} \rightharpoonup x \text{ en } \sigma(E,E^*).$$

d) **[1 punto]** Da un ejemplo de una sucesión $\{x_n\} \subset E = c_0$ tal que $\{\langle f, x_n\rangle\}$ es convergente para cada $f \in E^*$, pero no sea convergente débilmente en $\sigma(E,E^*)$.

Solución: a) Teoría

b) $\{f_n\} \subset E^*$ Como

$\forall x \in E \quad \exists \lim_{n\to\infty} \langle f_n, x\rangle \in \mathbb{R} \qquad (*)$

podemos definir

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle f, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, x\rangle$$

1) f_n lineal $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f$ lineal (fácil)

2) $(*) \Rightarrow \forall x \in E \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle f_n, x\rangle| < \infty \underset{\text{Steinhaus}}{\overset{\text{Banach}}{\Longrightarrow}} M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{E^*} < \infty$

Así por definición de $\|f_n\|_{E^*}$:

$$|\langle f_n, x\rangle| \leq \|f_n\|_{E^*} \|x\| \leq M \|x\|_E \qquad \forall x \in E$$

y tomando $\lim_{n\to\infty}$:

$$|\langle f, x\rangle| \leq M\|x\|_E, \ \forall x \in E$$

es decir, f es acotada.

$\left.\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \in E^*$ Además, como por definición de $\langle f, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, x\rangle$

$$\langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle \quad \forall x \in E$$

entonces (caracterización de la convergencia débil $*$)

$$\{f_n\} \xrightarrow{*} f$$

c) E reflexivo $\Leftrightarrow J(E) = E^{**}$

Si $\{x_n\} \subset E$ t.q. $\{\langle f, x_n\rangle\}$ es convergente $\forall f \in E^*$, entonces podemos definir

$$\varphi : E^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \langle \varphi, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, x_n\rangle$$

Como en a), por Banach-Steinhauss φ es lineal y acotada; es decir,

$$\varphi \in E^{**} \underset{(E\text{ reflex.})}{=} J(E)$$

y así $\exists x \in E$ tal que $\varphi = J(x)$, o lo que es igual

$$\langle \varphi, f\rangle = \langle f, x\rangle, \quad \forall f \in E^*$$

Usando la caracterización de la convergencia débil, como

$$\langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle \varphi, f\rangle = \langle f, x\rangle, \ \forall f \in E^* \Rightarrow x_n \xrightarrow{\sigma(E,E^*)} x.$$

d) $E = c_0$ "sucesiones convergentes a cero con $\|\cdot\|_\infty$"

$$x_n = \{1, 1, \ldots, \overset{n)}{1}, 0, 0, \ldots\ldots\} \in c_0$$

Recordemos que $c_0^* = \ell^1$, más concretamente tenemos la isometría

$$\varphi : \ell^1 \longrightarrow c_0^*$$
$$y = \{y_k\} \longmapsto \varphi_y : c_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\varphi_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k \qquad \forall x = \{x_k\} \in c_0$$

$$\varphi_y(x_n) = \sum_{k=1}^{n} y_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \|y\| \qquad \forall y \in \ell^1$$

Puesto que φ es sobreyectiva $\left(\varphi(\ell^1) = c_0^*\right)$, la convergencia anterior da:

$$\{\langle f, x_n\rangle\} \text{ es converg. } \forall f \in c_0^*$$

Pero

$$\nexists\, x \in E = c_0 \text{ t.q. } \quad x_n \longrightarrow z = \{z_k\}$$

Si existiera tendría que verificarse

$$\langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle \qquad \forall f \in c_0^*$$

o sea

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} y_k z_k \qquad \forall \{y_k\} \in \ell^1$$

Eligiendo como sucesión $\{y_k\}$:

- $\{0, 0 \dots 0, \overset{i}{1}, 0 \dots\} \quad \Rightarrow \quad 1 = y_i \longrightarrow y_i z_i \Rightarrow z_i = 1$

Por tanto $\quad z = \{1, 1 \dots 1, 1 \dots\} \notin c_0 \quad \lightning$