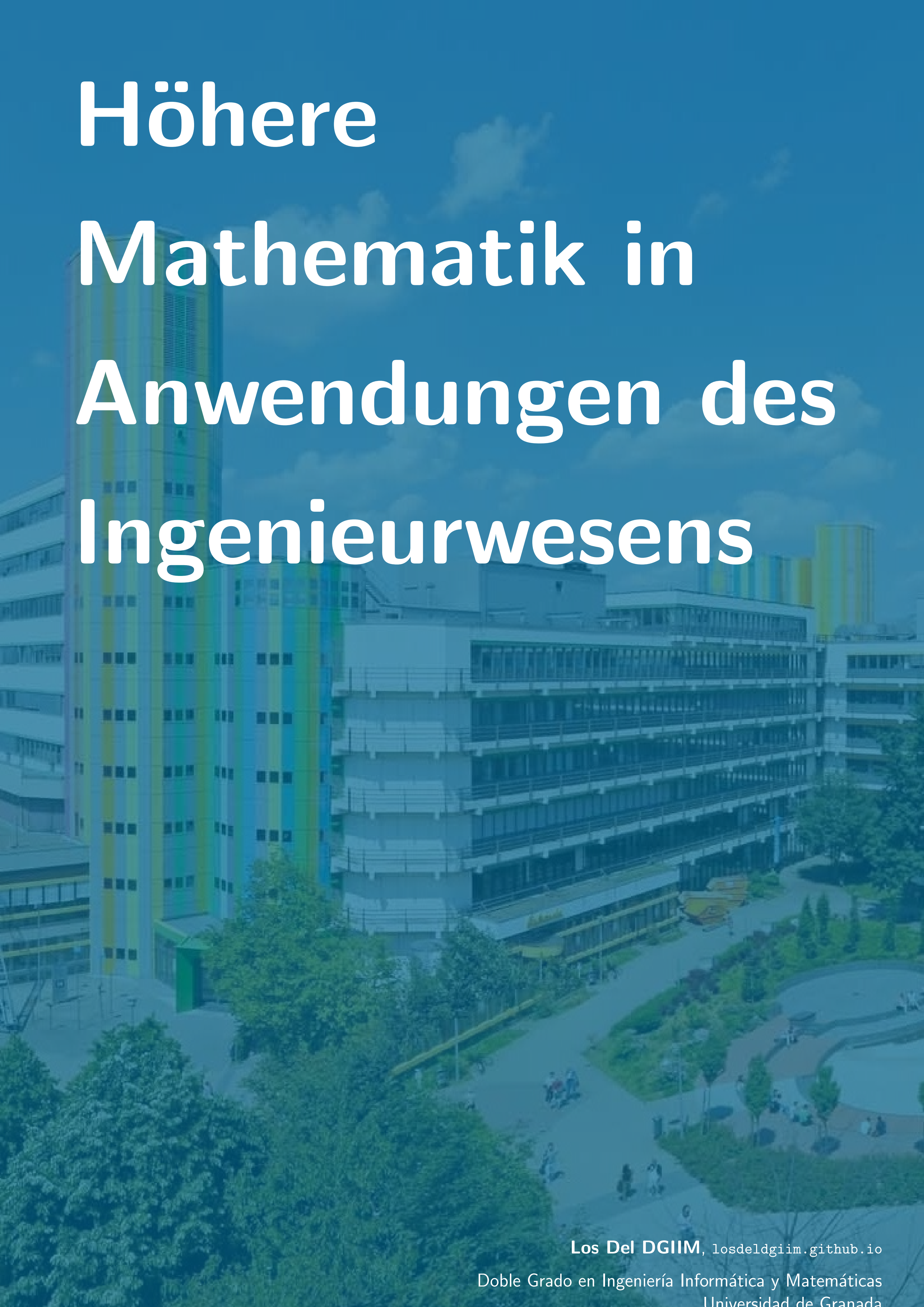

Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Universidad de Granada

Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Übungs Blätter

1.3. Rechnen mit physikalischen Größen

Ejercicio 1.3.1 (Fährverbindung)**.** Eine Fähre bewegt sich mit der Eigengeschwindigkeit $v_0 = 4\,\mathrm{m/s}$ (relativ zum Fluss) vom Uferpunkt A aus auf kürzestem Weg zum gegenüberliegenden Flussufer (Punkt B; Abb. 1.1).

1. Unter welchem Winkel α muss die Fähre gegen die Strömung gesteuert werden, wenn die Geschwindigkeit der Strömung den Betrag $v_s = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$ hat?

   The Ferry wants to get to B in an straight line. Therefore, it must compensate the flow velocity by steering at an angle α against the flow. It is then needed that:

   $$v_s = v_0 \sin(\alpha) \implies \alpha = \arcsin\left(\frac{v_s}{v_0}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}5}{4}\right) \approx 0{,}3844\,\mathrm{rad} \approx 22{,}024\,^\circ$$

2. Wie groß ist dann die resultierende Geschwindigkeit v_r der Fähre?

   The resulting velocity v_r of the ferry is given by:

   $$v_r = v_0 \cos(\alpha) = 4\cos(0{,}3844) \approx 3{,}7081\,\mathrm{m/s}$$

Ejercicio 1.3.2 (Elektrische Punktladungen im Koordinatensystem)**.** Eine Punktladung $q_1 = 6{,}0\,\mu\mathrm{C}$ befindet sich in einem kartesischen Koordinatensystem bei $x_1 = 1{,}0\,\mathrm{m}$, $y_1 = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Eine zweite Ladung $q_2 = -2{,}5\,\mu\mathrm{C}$ befindet sich in dessen Ursprung. Ein Elektron, d.h. eine dritte Punktladung, ist in einem Punkt mit den Koordinaten (x_e, y_e). Berechnen Sie die Werte für x_e und y_e, bei denen sich das

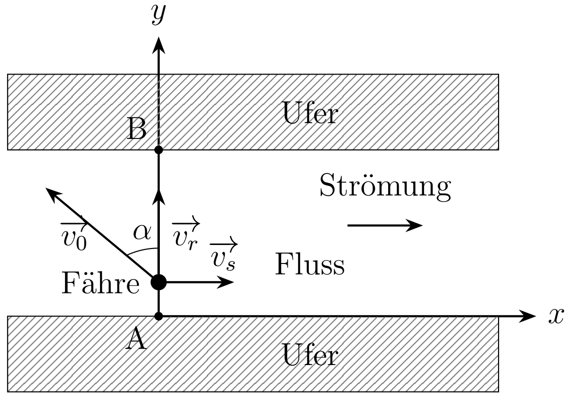

Figura 1.1: Fährverbindung über einen Fluss mit Strömung.

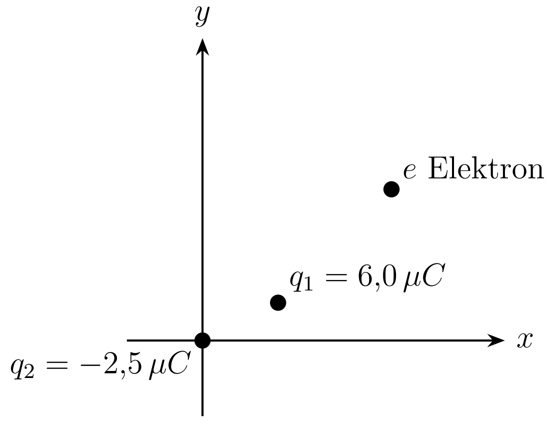

Figura 1.2: Punktladungen im Koordinatensystem.

Elektron im Gleichgewicht befindet, d.h. bei dem die Gesamtkraft auf das Elektron verschwindet.

Option 1 :

The forces acting on the electron due to the other two charges must cancel each other out for equilibrium. Let F_{ei} be the force on the electron due to charge q_i. The forces can be expressed as:

$$\overrightarrow{F}_{e1} + \overrightarrow{F}_{e2} = 0$$

where, using that $q_e = -e < 0$ (the charge of the electron):

$$\overrightarrow{F}_{e1} = -k_e \frac{|q_1 e|}{r_{e1}^2}\ \hat{r}_{e1}, \quad \overrightarrow{F}_{e2} = k_e \frac{|q_2 e|}{r_{e2}^2}\ \hat{r}_{e2}$$

Here, k_e is Coulomb's constant, e is the elementary charge, r_{ei} is the distance between the electron and charge q_i, and $\hat{r}_{ei}$ is the unit vector pointing from charge q_i to the electron. Using the values of r_{e1} and r_{e2} based on the coordinates of the charges and the electron, we have:

$$\overrightarrow{r}_{e1} = (x_e - 1, y_e - 0{,}5), \quad \overrightarrow{r}_{e2} = (x_e, y_e)$$

Therefore, the equilibrium condition becomes:

$$-k_e \frac{|q_1 e|}{((x_e-1)^2 + (y_e-0{,}5)^2)} \cdot \frac{(x_e-1, y_e-0{,}5)}{\sqrt{(x_e-1)^2+(y_e-0{,}5)^2}} + k_e \frac{|q_2 e|}{(x_e^2+y_e^2)} \cdot \frac{(x_e, y_e)}{\sqrt{x_e^2+y_e^2}} = 0$$

This vector equation can be separated into its x and y components, leading to a system of two equations with two unknowns (x_e and y_e). Solving this system will yield the coordinates of the electron in equilibrium.

$$\begin{aligned} -\, k_e \frac{|q_1 e|(x_e-1)}{((x_e-1)^2+(y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e| x_e}{(x_e^2+y_e^2)^{3/2}} &= 0 \\ -\, k_e \frac{|q_1 e|(y_e-0{,}5)}{((x_e-1)^2+(y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e| y_e}{(x_e^2+y_e^2)^{3/2}} &= 0 \end{aligned}$$

In an easier way:

$$\frac{|q_1|(x_e-1)}{((x_e-1)^2+(y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} = \frac{|q_2|x_e}{(x_e^2+y_e^2)^{3/2}}$$
$$\frac{|q_1|(y_e-0{,}5)}{((x_e-1)^2+(y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} = \frac{|q_2|y_e}{(x_e^2+y_e^2)^{3/2}}$$

As we can see, this system of equations is nonlinear and may require numerical methods or iterative approaches to solve for x_e and y_e. We should then approach the problem using another method.

Option 2 :

Given that $\overrightarrow{F}_{e1} = -\overrightarrow{F}_{e2}$, the forces must have the same magnitude but opposite directions. This implies that the electron must lie along the line connecting the two charges, with $x_e, y_e < 0$. Therefore:

$$y_e = \frac{y_1}{x_1}x_e = \frac{1}{2}x_e$$

On the other hand, equating the magnitudes of the forces:

$$|\overrightarrow{F}_{e1}| = |\overrightarrow{F}_{e2}| \Longrightarrow k_e\frac{|q_1 e|}{r_{e1}^2} = k_e\frac{|q_2 e|}{r_{e2}^2} \Longrightarrow \frac{|q_1|}{r_{e1}^2} = \frac{|q_2|}{r_{e2}^2} \Longrightarrow \frac{|q_1|}{(x_e-1)^2+(y_e-0{,}5)^2} = \frac{|q_2|}{x_e^2+y_e^2}$$

Therefore, using the relation for y_e in terms of x_e, we have the following equation to solve for x_e:

$$\frac{|q_1|}{(x_e-1)^2+\left(\frac{1}{2}x_e-0{,}5\right)^2} = \frac{|q_2|}{x_e^2+\left(\frac{1}{2}x_e\right)^2}$$
$$6\cdot\left(\frac{5}{4}x_e^2\right) = 2{,}5\cdot\left(\frac{5}{4}x_e^2-2{,}5x_e+1{,}25\right)$$
$$4{,}375x_e^2+6{,}25x_e-3{,}125 = 0$$
$$x_e = \frac{-6{,}25\pm\sqrt{(-6{,}25)^2-4\cdot 4{,}375\cdot(-3{,}125)}}{2\cdot 4{,}375} = \frac{-5\pm 2\sqrt{15}}{7}$$

Given that $x_e < 0$, we take:

$$x_e = -\frac{5+2\sqrt{15}}{7} \approx -1{,}8208\,\mathrm{m}$$
$$y_e = \frac{1}{2}x_e = -\frac{5+2\sqrt{15}}{14} \approx -0{,}9104\,\mathrm{m}$$

Ejercicio 1.3.3 (Die magnetische Kraft)**.** Ein punktförmiges Teilchen mit einer Ladung $q = -3{,}64\,\mathrm{nC}$ bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $\overrightarrow{v} = 2{,}75\cdot 10^6\,\mathrm{m/s}\,\overrightarrow{e_x}$, d.h. entlang der x-Achse. Berechnen Sie die Kraft, die folgende Felder auf das Teilchen ausüben:

1. $\overrightarrow{B} = 0{,}38\,\mathrm{T}\ \overrightarrow{e_y}$

$$\overrightarrow{F} = q \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ v_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \overrightarrow{e_z} =$$
$$= -3{,}64 \cdot 10^{-9} \cdot 2{,}75 \cdot 10^{6} \cdot 0{,}38\ \overrightarrow{e_z} = -3{,}8038 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}\ \overrightarrow{e_z}$$

2. $\overrightarrow{B} = T\,0{,}75\ \overrightarrow{e_x} + T\,0{,}75\ \overrightarrow{e_y}$

$$\overrightarrow{F} = q \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \overrightarrow{e_z} =$$
$$= -3{,}64 \cdot 10^{-9} \cdot 2{,}75 \cdot 10^{6} \cdot 0{,}75\ \overrightarrow{e_z} = -7{,}5075 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}\ \overrightarrow{e_z}$$

1.5. Komplexe Rechnung in physikalisch-technischen Zusammenhängen

Ejercicio 1.5.1. Zeigen Sie durch Rechnung in komplexer Form: Drei gleichfrequente, sinusförmige Wechselströme i_1, i_2 und i_3 mit den Amplituden i_0, der Kreisfrequenz $\omega > 0$ und den Nullphasenwinkeln $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = {}^2\!/_3\pi$ und $\varphi_3 = {}^4\!/_3\pi$ löschen sich bei ungestörter Überlagerung gegenseitig aus, d.h. $i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

Let $\underline{i}_1(t)$, $\underline{i}_2(t)$ und $\underline{i}_3(t)$ be:

$$\begin{aligned}
\underline{i}_1(t) &= i_0 \cdot e^{\jmath(\omega t+0)} = i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \\
\underline{i}_2(t) &= i_0 \cdot e^{\jmath(\omega t+2/3\pi)} = i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \cdot e^{\jmath 2/3\pi} \\
\underline{i}_3(t) &= i_0 \cdot e^{\jmath(\omega t+4/3\pi)} = i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \cdot e^{\jmath 4/3\pi}
\end{aligned}$$

Therefore:

$$\begin{aligned}
\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \underline{i}_3(t) &= i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \left(e^{\jmath 0} + e^{\jmath 2/3\pi} + e^{\jmath 4/3\pi}\right) = \\
&= i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + \jmath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \jmath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \\
&= i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Therefore, we have shown that:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = \Im\left(\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \underline{i}_3(t)\right) = \Im(0) = 0$$