

# Cálculo I

## Examen III

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Cálculo I

## Examen III

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

**Asignatura** Cálculo I.

**Curso Académico** 2023-24.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** José Luis Gámez Ruíz.

**Descripción** Convocatoria Ordinaria.

**Fecha** 24 de enero de 2024.

**Ejercicio 1** (2 puntos). Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto no vacío.

1. Demostrar que las dos siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - a)  $A$  está acotado.
  - b) El conjunto  $|A| = \{|a| : a \in A\}$  está mayorado.
2. Probar que si  $A$  acotado entonces existe una sucesión  $\{a_n\}$  de puntos de  $A$ , que verifica  $\{|a_n|\} \rightarrow \sup |A|$ . ¿Se puede conseguir que tal  $\{a_n\}$  sea monótona? Justificar las respuestas.

**Ejercicio 2.**

1. (2 puntos) Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones calculando, en su caso, el límite:
  - a)  $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
  - b)  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\}.$
2. (1 punto) Estudiar la convergencia de la serie:  $\sum_{n \geq 1} \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{4^n}.$

**Ejercicio 3** (2 puntos). Sea la sucesión  $\{a_n\}$  verificando  $|a_n - 1| \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Se pide:

1. Probar que la serie  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{(a_n - 1)}{n}$  converge absolutamente.
2. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de la serie  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{a_n}{n}.$

*Observación.* Nótese que  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{(a_n - 1)}{n} = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{a_n}{n} - \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}.$

**Ejercicio 4** (3 puntos). Considérese la función  $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} - \ln x, \forall x \in [1, 2]$ . Responder las siguientes cuestiones, enunciando todos los teoremas que se usen.

1. Demostrar que  $\exists c \in ]1, 2[$  tal que  $f(c) = c - 1$ .
2. Determinar la imagen de  $f$ .
- c) ¿Existe la inversa de  $f$ ? En caso afirmativo, ¿es  $f^{-1}$  monótona?, ¿es  $f^{-1}$  continua? Justificar las respuestas.