

# Análisis Matemático I Examen I

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Análisis Matemático I Examen I

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

**Asignatura** Análisis Matemático I.

**Curso Académico** 2023-24.

**Grado** Grado en Matemáticas.

**Grupo** B.

**Profesor** Salvador Villegas Barranco.

**Fecha** 20 de noviembre de 2023.

**Ejercicio 1** (4 puntos).

1. Sean  $(E, d)$  y  $(E, \rho)$  dos espacios métricos de un mismo espacio  $E$ . Demostrar que son equivalentes:
  - a) Las métricas  $d$  y  $\rho$  generan la misma topología en  $E$ .
  - b)  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  si y solo si  $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ , siendo  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ ,  $x \in E$ .
2. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico. Definimos  $\rho : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  mediante:

$$\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} \quad \forall x, y \in E$$

Demostrar que  $\rho$  es una métrica y que genera la misma topología en  $E$  que  $d$ .

**Ejercicio 2** (3 puntos). Sea  $X = \{f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua} \mid \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$ . Demostrar que  $X$  es un espacio normado considerando

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{2^n} + \int_1^{\infty} \frac{|f(x)|}{x^2} dx, \quad f \in X$$

1. ¿Es la aplicación  $T : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(f) = f(4)$  lineal y continua?
2. ¿Es la aplicación  $T : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(f) = f(\pi)$  lineal y continua?

**Ejercicio 3** (3 puntos). Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales, continuidad de las derivadas parciales, y diferenciabilidad en  $(0, 0)$  de la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \sin(xy) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$