



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

## Variable Compleja I Examen IX

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2016-17.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 27 de Abril de 2017.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (3.5 puntos). Probar que la serie  $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n^z}$  converge absolutamente en todo punto del dominio  $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re} z>1\}$  y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en  $\Omega.$ 

Ejercicio 2 (3 puntos). Estudiar la derivabilidad de las funciones  $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$  dadas por

$$f(z) = z^2 + z\overline{z}$$
  $g(z) = (z - 1)f(z)$   $\forall z \in \mathbb{C}$ .

**Ejercicio 3** (3.5 puntos). Dada  $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ , probar que existe una única función entera f verificando

$$f(z) + zf'(z) = g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

**Ejercicio 1** (3.5 puntos). Probar que la serie  $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n^z}$  converge absolutamente en todo punto del dominio  $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re} z>1\}$  y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en  $\Omega$ .

Estudiamos en primer lugar la convergencia uniforme. Sea  $K \subset \Omega$  compacto. Como la parte real de z es continua,  $\exists M \in \mathbb{R}$  tal que:

$$M = \min\{\operatorname{Re} z : z \in K\} > 1$$

Entonces, para todo  $z \in K$  se tiene que:

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^{\text{Re}\,z}} \leqslant \frac{1}{n^M} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como M>1, la serie  $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^M}$  converge, y por el Test de Weierstrass, la serie

$$\sum_{n>1} \frac{1}{n^z}$$
 converge uniformemente en  $K$ .

Para la convergencia absoluta, consideramos  $z \in \Omega$  fijo. Como  $\{z\}$  es compacto, por el Test de Weierstrass tenemos que converge absolutamente en  $\{z\}$ . Como z es arbitrario, tenemos que la serie converge absolutamente en todo punto de  $\Omega$ .

**Ejercicio 2** (3 puntos). Estudiar la derivabilidad de las funciones  $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$  dadas por

$$f(z) = z^2 + z\overline{z}$$
  $g(z) = (z-1)f(z)$   $\forall z \in \mathbb{C}$ .

Estudiamos la función f. En vistas de aplicar las condiciones de Cauchy-Riemann, definimos  $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$  como:

$$u(x,y) = \text{Re } f(x+iy) = x^2 - y^2 + x^2 + y^2 = 2x^2$$
  
 $v(x,y) = \text{Im } f(x+iy) = 2xy$ 

Entonces, tenemos que:

$$\begin{split} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= 4x & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= 2y & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2x \end{split}$$

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 4x = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

Por tanto, tenemos que f tan solo es derivable en el origen, mientras que no es derivable en  $\mathbb{C}^*$ .

Ahora, estudiamos la función g. Fijado  $z \in \mathbb{C}$ , tenemos que:

• Si z = 0:

Como f es derivable en 0, tenemos que g también lo es.

• Si z = 1:

$$g'(1) = \lim_{z \to 1} \frac{g(z) - g(1)}{z - 1} = \lim_{z \to 1} \frac{(z - 1)f(z)}{z - 1} = \lim_{z \to 1} f(z) = f(1) = 2$$

• Si  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ :

Entonces, tenemos que:

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - 1}$$

Si g fuese derivable en z, entonces f también lo sería. No obstante, como f no es derivable en z, tampoco lo es g.

Por tanto, g es derivable en 0 y 1, pero no en ningún otro punto de  $\mathbb{C}$ .

**Ejercicio 3** (3.5 puntos). Dada  $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ , probar que existe una única función entera f verificando

$$f(z) + zf'(z) = g(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Como  $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ , existe una sucesión  $\{\alpha_n\}$  tal que:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Supongamos ahora la existencia de una función entera f que verifique la ecuación dada. Entonces, existe una sucesión  $\{\beta_n\}$  tal que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Por el Teorema de Holomorfía de funciones dadas como suma de serie de potencias, tenemos que:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n z^{n-1} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Podemos por tanto escribir la ecuación dada como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n + z \sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n z^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} n \beta_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (1+n) z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Por el Principio de Identidad, se tiene que:

$$\alpha_n = \beta_n(1+n) \Longrightarrow \beta_n = \frac{\alpha_n}{1+n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Por tanto, se tiene que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{1+n} z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Comprobemos que dicha función es entera. Como g es entera, entonces su radio de convergencia es  $R_g = \infty$ , por lo que  $\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\} \to 0$ . Por tanto:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\alpha_n}{1+n}\right|} = \frac{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}}{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1+n}} = \frac{0}{1} = 0$$

Por tanto, f es entera, demostrando así la existencia de una función entera f que verifique la ecuación dada. Además, esta es única por el Principio de Identidad.