Análisis Funcional

Examen III

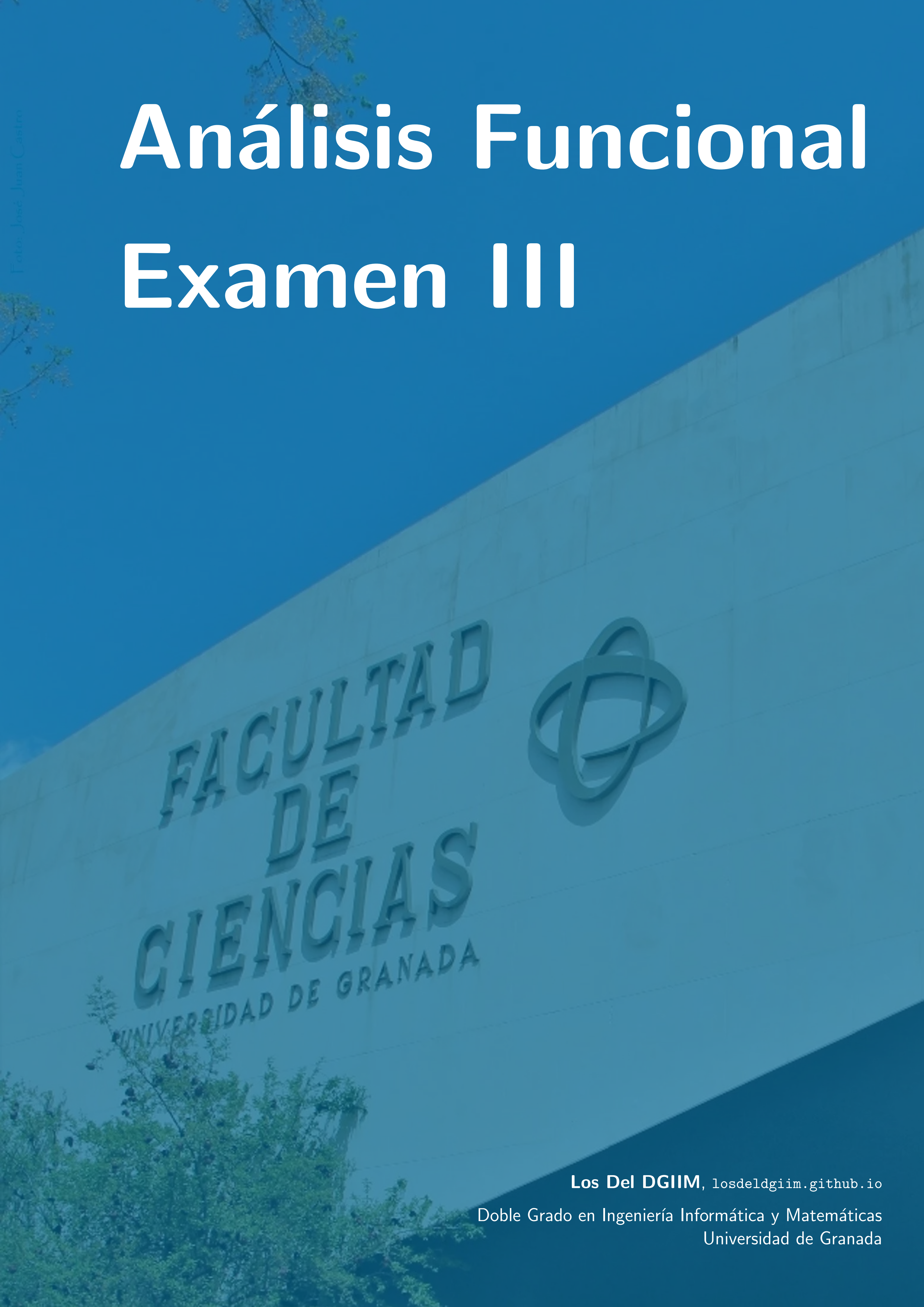


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Funcional
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Daniel Morán Sánchez

Granada, 2025

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2024/25.

Grado Grado en Matemáticas.

Descripción Examen Ordinario.

Fecha 15 de enero de 2025.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Sea $X = C([0,1],\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$. Se define

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt, \qquad \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} \qquad \forall f \in X$$

y se escribe $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_\infty = (X, \|\cdot\|_\infty)$. Definimos el funcional lineal $\delta : X \to \mathbb{R}$ por

$$\delta(f) = f(0) \qquad \forall f \in X$$

a) Demuestra que $\delta \in X_\infty^*$ y calcula su norma.

b) ¿Es δ continuo respecto a $\|\cdot\|_1$? Justifica tu respuesta.

c) ¿Son equivalente $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en X? Justifica tu respuesta.

d) ¿Es X_1 completo? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Sea X un espacio reflexivo e Y un espacio de Banach. Pruébese que si existe $T \in L(X,Y)$ sobreyectiva, entonces Y es reflexivo.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Sean $S : c_0 \to c_0$ y $T : \ell^1 \to \ell^1$ operadores lineales y supongamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} [Sx](k)y(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)[Ty](k) \qquad \forall x \in c_0, \quad \forall y \in \ell^1$$

Demuestra que S y T son continuos.

Ejercicio 4 (4 puntos)**.** Desearrolla el siguiente tema: "*Mejor aproximación en espacios de Hilbert; teorema de la proyección ortogonal; teorema de Riesz-Fréchet*".

Ejercicio 5. (Ejercicio extra)
Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador verificando que $\overline{T(B_X)}$ es un subconjunto compacto de Y. Demuestra que T^* alcanza su norma.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Sea $X = C([0,1],\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$. Se define

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt, \qquad \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} \qquad \forall f \in X$$

y se escribe $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_\infty = (X, \|\cdot\|_\infty)$. Definimos el funcional lineal $\delta : X \to \mathbb{R}$ por

$$\delta(f) = f(0) \qquad \forall f \in X$$

a) Demuestra que $\delta \in X_\infty^*$ y calcula su norma.

Veamos que $\delta \in X_\infty^*$:

- δ es lineal, pues si $f, g \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que:

$$\delta(\lambda f + g) = (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda\delta(f) + \delta(g)$$

- δ es continuo, pues si $f \in X$ tenemos:

$$|\delta(f)| = |f(0)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$$

Por lo que $\delta \in X_\infty^*$. De hecho, en el último apartado hemos probado además que $\|\delta\| \leqslant 1$. Veamos que $\|\delta\| = 1$, puesto que si consideramos cualquier función $f \in X$ de forma que $\max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)| = |f(0)|$ tenemos entonces que:

$$|\delta(f)| = |f(0)| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$$

b) ¿Es δ continuo respecto a $\|\cdot\|_1$? Justifica tu respuesta.

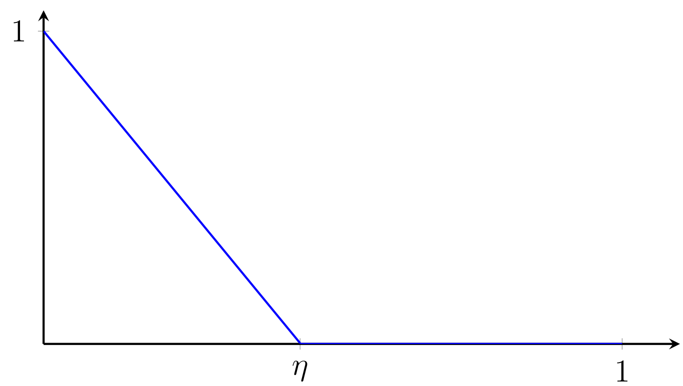
Si δ fuera continuo respecto a $\|\cdot\|_1$, en particular será continua en la función constantemente igual a 0, por lo que:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 : \|f\|_1 < \eta \Longrightarrow |\delta(f)| < \varepsilon$$

Es decir, si δ fuera continua podríamos acotar el valor de cualquier función $f \in X$ en 0 sabiendo acotar el valor de su integral. No parece que esto sea posible, por lo que tratamos de probar que δ no es continua. Para ello, buscamos probar que:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \eta > 0\ \exists f \in X \quad \text{con} \quad \|f\|_1 < \eta \quad \text{y} \quad |\delta(f)| > \varepsilon$$

Si consideramos $\varepsilon = 1/2$ y nos dan $\eta > 0$, si consideramos la función cuya gráfica es:



Es decir, que en el intervalo $[0,\eta]$ es la recta que une el punto $(0,1)$ con el $(\eta,0)$ y en el intervalo $[\eta,1]$ vale 0, tenemos que $f \in X$, así como que:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\ dt = \int_0^1 f(t)\ dt = \int_0^\eta f(t)\ dt + \int_\eta^1 f(t)\ dt = \frac{\eta}{2} < \eta$$

(ya que el área del triángulo es base por altura entre 2) y tenemos que:

$$|\delta(f)| = |f(0)| = 1 > \frac{1}{2}$$

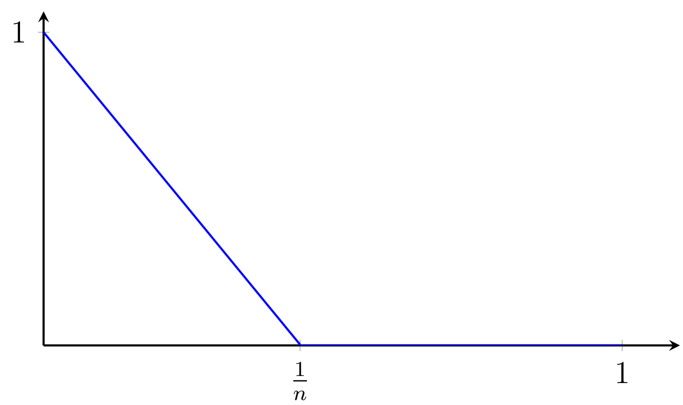
Acabamos de probar que δ no es continua para $\|\cdot\|_1$.

c) ¿Son equivalentes $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en X? Justifica tu respuesta.

No pueden ser equivalentes: si fueran equivalentes tendríamos que las topologías que da cada norma serían iguales, pero sin embargo tenemos que δ es continua para $\|\cdot\|_\infty$ y no es continua para $\|\cdot\|_1$, por lo que sus topologías no pueden contener los mismos abiertos (recordamos que δ es continua si y solo si la preimagen de todo abierto de $\mathbb{R}$ es un abierto en la topología que consideramos en X), por lo que las dos normas no pueden ser equivalentes.

d) ¿Es X_1 completo? Justifica tu respuesta.

No es completo, si consideramos la sucesión $\{f_n\}$ de funciones de X donde cada f_n es la función que en el intervalo $[0, 1/n]$ une el punto $(0,1)$ con el $(1/n, 0)$ y en el intervalo $[1/n, 1]$ es constantemente igual a 0, tendremos que la gráfica de cada función es:



Tenemos que esta sucesión es de Cauchy para X_1, pues si $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$:

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\ dt = \int_0^1 f_n(t)\ dt - \int_0^1 f_m(t)\ dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) < \frac{1}{2n}$$

Y sin embargo dicha sucesión de funciones no es convergente, pues en $L^1([0,1])$ convergen (con la misma norma) a la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Y tenemos que $f \notin X_1$, por lo que $\{f_n\}$ no es convergente en X_1 pero sí es de Cauchy, con lo que X_1 no puede ser completo.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Sea X un espacio reflexivo e Y un espacio de Banach. Pruébese que si existe $T \in L(X,Y)$ sobreyectiva, entonces Y es reflexivo.

Sea $N := \ker T$, que es un subespacio cerrado de X (por continuidad de T). Consideremos el cociente X/N con la norma cociente y la aplicación inducida, con la idea de obtener una aplicación biyectiva y aplicar el 1er corolario del teorema de la aplicación abierta

$$\widetilde{T} : X/N \longrightarrow Y, \qquad \widetilde{T}([x]) := T(x),$$

donde $[x] = x + N$.

- $\widetilde{T}$ está bien definida y es lineal. Si $[x] = [x']$, entonces $x - x' \in N = \ker T$, luego $T(x) = T(x')$, y por tanto $\widetilde{T}$ está bien definida. La linealidad es inmediata.
- $\widetilde{T}$ es biyectiva.
  - Es sobreyectiva porque T lo es: dado $y \in Y$ existe $x \in X$ con $T(x) = y$, y entonces $\widetilde{T}([x]) = y$.
  - Es inyectiva porque si $\widetilde{T}([x]) = 0$, entonces $T(x) = 0$, luego $x \in \ker T = N$, y por tanto $[x] = 0$ en X/N.
- $\widetilde{T}$ es un isomorfismo de Banach. Como X es Banach y N es cerrado, X/N es Banach. Además, $\widetilde{T}$ es continua y biyectiva entre espacios de Banach, así que por el 1er corolario del teorema de la aplicación abierta su inversa $\widetilde{T}^{-1}$ es continua. Por tanto, $\widetilde{T}$ es un isomorfismo topológico.
- Como X es reflexivo y N es cerrado, el cociente X/N es reflexivo. Finalmente, al ser Y isomorfo a X/N, se deduce que Y es reflexivo.

Ejercicio 3 (2 puntos).
Opción 1: Directamente:
Sean $S : c_0 \to c_0$ y $T : \ell^1 \to \ell^1$ operadores lineales y supongamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} [Sx](k)y(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)[Ty](k) \qquad \forall x \in c_0, \quad \forall y \in \ell^1$$

Demuestra que S y T son continuos.
Recordemos que las normas de dichos espacios son $\|\cdot\|_\infty$ para c_0 y $\|\cdot\|_1$ para ℓ^1

Recordemos el emparejamiento c_0–ℓ^1: para $x \in c_0$ e $y \in \ell^1$ definimos

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k),$$

que está bien definido (convergencia absoluta) y satisface

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1.$$

La hipótesis se reescribe como

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad \forall x \in c_0,\ \forall y \in \ell^1. \tag{$*$}$$

1) S **es continuo.** Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $e_n \in \ell^1$, definido por

$$e_n(k) = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Aplicando la identidad $(*)$ con $y = e_n$, se obtiene para todo $x \in c_0$

$$(Sx)(n) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\,(Te_n)(k).$$

Por tanto,

$$|(Sx)(n)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|\,|(Te_n)(k)| \leq \|x\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} |(Te_n)(k)| = \|x\|_\infty\,\|Te_n\|_1.$$

Tomando supremo en $n \in \mathbb{N}$ se deduce

$$\|Sx\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(Sx)(n)| \leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|_1\right) \|x\|_\infty, \qquad \forall x \in c_0. \tag{1}$$

Por tanto, si $\sup_n \|Te_n\|_1 < \infty$, el operador S es acotado.

Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el funcional lineal

$$\varphi_n : c_0 \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_n(x) := (Sx)(n).$$

Por $(*)$ con $y = e_n$ se tiene, para todo $x \in c_0$,

$$\varphi_n(x) = (Sx)(n) = \langle Sx, e_n\rangle = \langle x, Te_n\rangle.$$

En particular
$$|\varphi_n(x)| = |\langle x, Te_n\rangle| \le \|x\|_\infty \, \|Te_n\|_1,$$
luego $\varphi_n \in (c_0)^*$ y además $\|\varphi_n\| \le \|Te_n\|_1$.

Por otro lado, como $Sx \in c_0 \subset \ell^\infty$, para cada $x \in c_0$ se cumple
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(Sx)(n)| = \|Sx\|_\infty < \infty.$$
Por tanto, la familia $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (c_0)^*$ es puntualmente acotada. Aplicando el teorema de Banach–Steinhaus, concluimos que
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\| < \infty. \tag{2}$$
Finalmente, para cada n,
$$\|Te_n\|_1 = \sup_{\|x\|_\infty \le 1} |\langle x, Te_n\rangle| = \sup_{\|x\|_\infty \le 1} |\varphi_n(x)| = \|\varphi_n\|.$$
Juntando esto con (2) obtenemos
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|_1 < \infty.$$
Sustituyendo en (1) concluimos que S es acotado (luego continuo).

2) T es continuo. Sea $y \in \ell^1$ arbitrario. Para $N \in \mathbb{N}$ definimos $x^{(N)} \in c_0$ por
$$x^{(N)}(k) = \begin{cases} \operatorname{sgn}([Ty](k)), & 1 \le k \le N, \\ 0, & k > N. \end{cases}$$
Entonces $\|x^{(N)}\|_\infty \le 1$ y, usando $(*)$,
$$\sum_{k=1}^N |[Ty](k)| = \sum_{k=1}^N x^{(N)}(k)[Ty](k) = \sum_{k=1}^\infty x^{(N)}(k)[Ty](k) = \langle x^{(N)}, Ty\rangle = \langle Sx^{(N)}, y\rangle.$$
Por la "desigualdad de Hölder"para el emparejamiento antes definido $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para c_0–ℓ^1,
$$|\langle Sx^{(N)}, y\rangle| \le \|Sx^{(N)}\|_\infty \, \|y\|_1 \le \|S\| \, \|x^{(N)}\|_\infty \, \|y\|_1 \le \|S\| \, \|y\|_1.$$
Luego, para todo N,
$$\sum_{k=1}^N |[Ty](k)| \le \|S\| \, \|y\|_1.$$
Haciendo $N \to \infty$ obtenemos
$$\|Ty\|_1 = \sum_{k=1}^\infty |[Ty](k)| \le \|S\| \, \|y\|_1,$$
lo cual prueba que T es acotado (y por tanto continuo).

Ejercicio 3 (2 puntos)**.**
Opción 2: Usando el teorema de la gráfica cerrada.
Sean $S : c_0 \to c_0$ y $T : \ell^1 \to \ell^1$ operadores lineales y supongamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Sx)(k)\, y(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\, (Ty)(k) \qquad \forall x \in c_0,\ \forall y \in \ell^1.$$

Demuestra que S y T son continuos.
Recordemos el emparejamiento c_0–ℓ^1: para $x \in c_0$ e $y \in \ell^1$ definimos

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k),$$

que está bien definido (convergencia absoluta) y satisface

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1.$$

La hipótesis se reescribe como

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad \forall x \in c_0,\ \forall y \in \ell^1. \tag{$*$}$$

1) S **es continuo.** Como c_0(dominio e imagen) es espacio de Banach, por el teorema de la gráfica cerrada basta probar que la gráfica de S es cerrada.

Sea $\{x_n\} \subset c_0$ tal que $x_n \to x$ en c_0 y $Sx_n \to z$ en c_0. Queremos probar que $z = Sx$.

Fijado $y \in \ell^1$, por la continuidad del emparejamiento en cada variable,

$$\langle z, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Sx_n, y\rangle.$$

Usando $(*)$,

$$\langle Sx_n, y\rangle = \langle x_n, Ty\rangle.$$

Además, como $x_n \to x$ en c_0 y $Ty \in \ell^1$, de nuevo por continuidad del emparejamiento,

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, Ty\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

En resumen:

$$\langle z, y\rangle \xleftarrow[n\to\infty]{} \langle Sx_n, y\rangle = \langle x_n, Ty\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x, Ty\rangle,$$

y como $\langle Sx_n, y\rangle = \langle x_n, Ty\rangle$ para todo n, se deduce que

$$\langle z, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

Por tanto,

$$\langle z, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

Aplicando otra vez $(*)$ (pero con x fijo),

$$\langle x, Ty\rangle = \langle Sx, y\rangle,$$

y obtenemos

$$\langle z, y \rangle = \langle Sx, y \rangle \qquad \forall y \in \ell^1.$$

Luego

$$\langle z - Sx, y \rangle = 0 \qquad \forall y \in \ell^1.$$

Como $\ell^1 = (c_0)^*$ y los funcionales separan puntos[1], se deduce $z - Sx = 0$, es decir, $z = Sx$. La gráfica de S es cerrada y, por el teorema de la gráfica cerrada, S es continuo.

[1] es decir, si $\forall y \in \ell^1$ visto como funcional aplicado a $x \in c_0$ es igual a 0 entonces $x = 0$

2) T es continuo.

- **Opción 1**

  Análogamente, como ℓ^1 y ℓ^1 son Banach, basta probar que la gráfica de T es cerrada.

  Sea $(y_n) \subset \ell^1$ tal que $y_n \to y$ en ℓ^1 y $Ty_n \to w$ en ℓ^1. Queremos ver que $w = Ty$.

  Fijado $x \in c_0$, por continuidad del emparejamiento,

  $$\langle x, w\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, Ty_n\rangle.$$

  Usando $(*)$,

  $$\langle x, Ty_n\rangle = \langle Sx, y_n\rangle.$$

  Como $Sx \in c_0$ y $y_n \to y$ en ℓ^1, otra vez por continuidad,

  $$\lim_{n\to\infty} \langle Sx, y_n\rangle = \langle Sx, y\rangle.$$

  En resumen:

  $$\langle x, w\rangle \xleftarrow[n\to\infty]{} \langle x, Ty_n\rangle = \langle Sx, y_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle Sx, y\rangle,$$

  Por tanto,

  $$\langle x, w\rangle = \langle Sx, y\rangle.$$

  Y por $(*)$ aplicado a (x, y),

  $$\langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle,$$

  con lo que

  $$\langle x, w\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad \forall x \in c_0.$$

  Luego

  $$\langle x, w - Ty\rangle = 0 \qquad \forall x \in c_0.$$

  Como $c_0 = (\ell^1)^*$ separa puntos de ℓ^1, se concluye $w - Ty = 0$, esto es, $w = Ty$. La gráfica de T es cerrada y, por el teorema de la gráfica cerrada, T es continuo.

- **Opción 2**

  Una vez probado que S es continuo, deducimos la continuidad de T identificándolo con el adjunto de S.

  Recordemos que $c_0^* \simeq \ell^1$ mediante el emparejamiento

  $$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k), \qquad x \in c_0,\ y \in \ell^1.$$

  Sea $y \in \ell^1$. Definimos $S^*y \in \ell^1$ como el funcional de c_0^* dado por

  $$\langle x, S^*y\rangle := \langle Sx, y\rangle \qquad \forall x \in c_0.$$

Entonces, usando la hipótesis $(*)$, para todo $x \in c_0$ se tiene

$$\langle x, S^* y\rangle = \langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

Es decir,

$$\langle x, S^* y - Ty\rangle = 0 \qquad \forall x \in c_0.$$

Como los elementos de c_0 separan puntos de ℓ^1 (por ejemplo, tomando $x = e_n \in c_0$ se obtiene la n-ésima coordenada), concluimos que $S^* y = Ty$ para todo $y \in \ell^1$. Por tanto,

$$T = S^*.$$

Finalmente, como S es continuo (acotado), su adjunto $S^* : \ell^1 \to \ell^1$ también es continuo y satisface

$$\|T\| = \|S^*\| = \|S\|.$$

En particular, T es continuo.

Ejercicio 4 (4 puntos)**.** Desearrolla el siguiente tema: "*Mejor aproximación en espacios de Hilbert; teorema de la proyección ortogonal; teorema de Riesz-Fréchet*".

Consultar los apuntes de teoría

Ejercicio 5. (Ejercicio extra)
Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador verificando que $\overline{T(B_X)}$ es un subconjunto compacto de Y. Demuestra que T^* alcanza su norma.

1. Sea $K := \overline{T(B_X)} \subset Y$. Por hipótesis, K es compacto; en particular, es acotado, luego $T(B_X)$ es acotado y por tanto T es acotado (continuo).

2. Si $T = 0$, entonces $T^* = 0$ y alcanza su norma trivialmente. Supongamos $T \neq 0$. Por definición de norma de un funcional,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{y\in T(B_X)} \|y\| = \sup_{y\in K} \|y\|.$$

   Como K es compacto y la función $y \mapsto \|y\|$ es continua, existe $y_0 \in K$ tal que

$$\|y_0\| = \max_{y\in K} \|y\| = \|T\|.$$

   Además, como $y_0 \in K = \overline{T(B_X)}$, existe una sucesión $\{x_n\} \subset B_X$ tal que

$$Tx_n \to y_0 \quad \text{en } Y.$$

   Aplicando continuidad de la norma,

$$\|Tx_n\| \to \|y_0\| = \|T\|.$$

3. Por el teorema de Hahn–Banach (forma de soporte), existe $y_0^* \in Y^*$ con

$$\|y_0^*\| = 1 \qquad \text{y} \qquad y_0^*(y_0) = \|y_0\| = \|T\|.$$

   Entonces, para cada n,

$$(T^*y_0^*)(x_n) = y_0^*(Tx_n).$$

   Tomando valores absolutos y pasando al límite usando que $Tx_n \to y_0$ y la continuidad de y_0^*,

$$\lim_{n\to\infty} |(T^*y_0^*)(x_n)| = \lim_{n\to\infty} |y_0^*(Tx_n)| = |y_0^*(y_0)| = \|T\|.$$

4. Pero como $\|x_n\| \leq 1$ para todo n,

$$|(T^*y_0^*)(x_n)| \leq \|T^*y_0^*\| \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

   y por tanto

$$\|T^*y_0^*\| \geq \|T\|.$$

   Por otro lado, siempre se cumple $\|T^*\| = \|T\|$ y, en particular,

$$\|T^*y_0^*\| \leq \|T^*\| \, \|y_0^*\| = \|T\|.$$

   Concluimos que

$$\|T^*y_0^*\| = \|T^*\|.$$

   Es decir, T^* alcanza su norma en el funcional $y_0^* \in Y^*$ con $\|y_0^*\| = 1$.