WUOLAH

prueba-tema-1-2024.pdf

Anónimo

Topología Ii

3º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Topología II (grupo A). Curso 2023-2024
Grados en Física-Matemáticas y en Matemáticas
Prueba de evaluación del tema 1

1. (7'5 puntos). Sea $X_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,/\, \|x\| \geq 2\}$ con la topología usual inducida.

   a) Encontrar un retracto de deformación de X_n distinto de X_n (detallar la retracción y la homotopía).

   b) Estudiar si $X_1 \cong X_n$ cuando $n \geq 2$.

2. (2'5 puntos). Sea X un conjunto con $\#X \geq 2$. Fijado $x_0 \in X$ se considera la topología

$$T = \{U \subseteq X \,/\, x_0 \notin U\} \cup \{X\}.$$

   ¿Es (X, T) contráctil?

Granada, 25 de abril de 2024

Soluciones

1.- a). Es claro que $X_n = \mathbb{R}^{n+1} - B(0,2)$, donde $B(0,2) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,/\, \|x\| < 2\}$. Veamos que el subconjunto $A_n = \mathbb{S}^n(0,2) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,/\, \|x\| = 2\}$ es un retracto de deformación de X_n.

Tomamos $r : X_n \to A_n$ como $r(x) = \frac{2x}{\|x\|}$ (no dividimos por cero porque $0 \notin X_n$). La aplicación r está bien definida porque $\|r(x)\| = 2$ para cada $x \in X_n$. Es claro que r es continua. Además, si $x \in A_n$, entonces $\|x\| = 2$ y, por tanto, $r(x) = x$. Luego A_n es un retracto de X_n.

Para probar que A_n es un retracto de deformación de X_n debemos mostrar que $I_{X_n} \sim i_{A_n} \circ r$, siendo $i_{A_n} : A_n \to X_n$ la inclusión. Para cada $x \in X_n$ la homotopía debe conectar x con $r(x)$ de forma continua. Consideramos $H : X_n \times [0,1] \to X_n$ como $H(x,s) = (1-s)\,x + s\,r(x)$ (homotopía de los segmentos que unen x con $r(x)$). Es obvio que H es continua con $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = r(x)$ para cada $x \in X_n$. Como X_n no es convexo hay que justificar que H está bien definida, es decir, que $H(x,s) \in X_n$ para cada $(x,s) \in X_n \times [0,1]$.

Sean $x \in X_n$ y $s \in [0,1]$. Queremos ver que $H(x,s) \in X_n$, es decir, $\|H(x,s)\| \geq 2$. Tenemos:

$$\|H(x,s)\| = \left\|(1-s)\,x + \frac{2sx}{\|x\|}\right\| = \left(1 - s + \frac{2s}{\|x\|}\right)\|x\| = (1-s)\,\|x\| + 2s \geq 2(1-s) + 2s = 2,$$

donde hemos usado que $\|x\| \geq 2$ y $s \in [0,1]$.

b). Como $A_n = \mathbb{S}^n(0,2)$ es un retracto de deformación de X_n entonces $r : X_n \to A_n$ es una equivalencia homotópica. Por la invarianza homotópica del grupo fundamental se sigue que $r_* : \pi_1(X_n, x_0) \to \pi_1(A_n, x_0)$ es un isomorfismo para cada $x_0 \in A_n$. Por otro lado es claro que $A_n = \mathbb{S}^n(0,2) \cong \mathbb{S}^n$ (basta tomar la homotecia $h(x) = x/2$). Por la invarianza topológica del grupo fundamental y el cálculo de $\pi_1(\mathbb{S}^n)$ obtenemos:

$$\pi_1(X_n, x_0) \cong \pi_1(A_n, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & si \quad n = 1, \\ trivial & si \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Así, de ocurrir que $X_1 \cong X_n$ para algún $n \geq 2$, la invarianza topológica del grupo fundamental nos diría que $\mathbb{Z}$ es isomorfo al grupo trivial, llegando a una contradicción.

2.- Vamos a probar que X es contráctil respecto de la topología T. Esto significa que X es del tipo de homotopía de un espacio con un único punto. Basta probar que el conjunto $A = \{x_0\}$ es un retracto de deformación de X. Es obvio que la aplicación $r : X \to A$ dada por $r(x) = x_0$ define una retracción de X en A. Necesitamos encontrar una homotopía entre I_X e $i_A \circ r$, siendo $i_A : A \to X$ la inclusión. Definimos $H : X \times [0,1] \to X$ como:

$$H(x,s) = \begin{cases} x & si \quad (x,s) \in X \times [0,1), \\ x_0 & si \quad (x,s) \in X \times \{1\}. \end{cases}$$

Es claro que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = x_0 = r(x)$ para cada $x \in X$. Veamos que H es continua. Dado un abierto U en X, la definición de H implica que:

$$H^{-1}(U) = \{(x,s) \in X \times [0,1] \,/\, H(x,s) \in U\} = \begin{cases} U \times [0,1) & si \quad x_0 \notin U, \\ X \times [0,1] & si \quad x_0 \in U. \end{cases}$$

Se sigue que $H^{-1}(U)$ es producto de abiertos y, por tanto, abierto en $X \times [0,1]$.