Inferencia Estadística Examen I

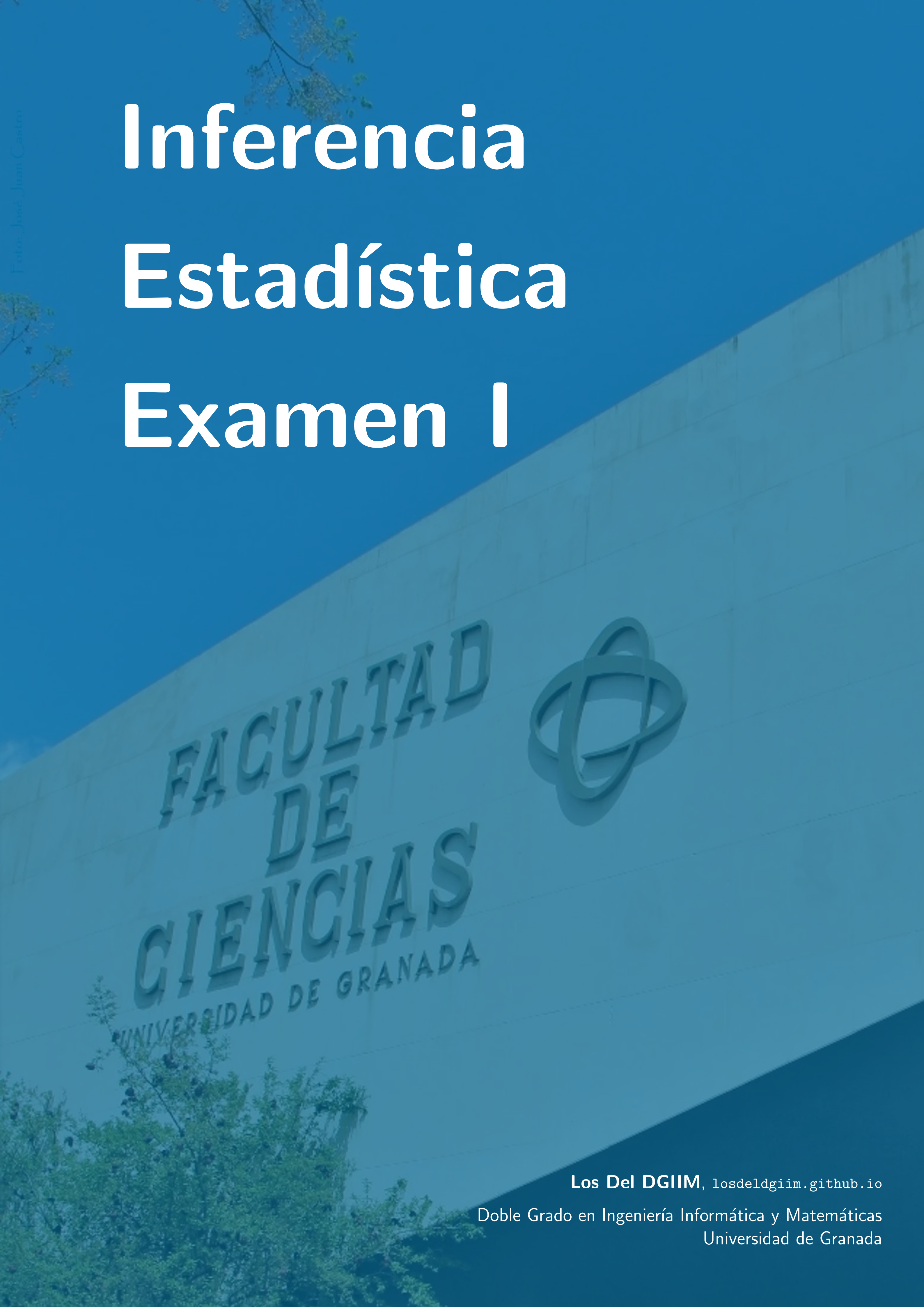

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Inferencia Estadística Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2026

Asignatura Inferencia Estadística.

Curso Académico 2025-26.

Grado Grado en Matemáticas y Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Descripción Examen Ordinario.

Fecha 9 de Enero de 2026.

Ejercicio 1 (1.9 puntos)**.** Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \frac{x}{\sqrt{\theta-1}\sqrt{x^2-1}}, \qquad 1 < x \leqslant \sqrt{\theta}$$

se pide calcular, si existe, un UMVUE para la función paramétrica $g(\theta) = (\theta-1)^{-1}$, y justificar detalladamente la no existencia del mismo cuando no exista.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Sea X una variable aleatoria con distribución en la familia $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ que se sabe que es regular y cuyas funciones de densidad vienen dadas por:

$$f_\theta(x) = exp[k_1 \ln\theta - k_2 x\theta + S(x)], \qquad x > 0, \quad \theta, k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$$

sabiendo que $Var_\theta(X) = (E_\theta[X])^2$.

a) ¿Para qué valores de n se puede asegurar que cualquier estimador regular insesgado en $g(\theta) = \ln\theta^2$ tiene varianza mayor o igual que 0,2 para cualquier valor del parámetro θ?

b) Para $n = 1$, si $U(X)$ es un estimador insesgado de $g(\theta) = \ln\theta^2$ regular, se pide calcular la covarianza de $U(X)$ y de X.

c) ¿Para qué valores de k_1 y k_2 existen funciones paramétricas con estimadores eficientes?

Ejercicio 3 (1.85 puntos)**.** Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable $X \rightsquigarrow \{P_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ y $S \equiv S(X_1, \ldots, X_n)$ un estimador de θ:

a) Si $S - \theta \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma_0^2) \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$. Partiendo de la función de verosimilitud de θ asociada a una realización de S, calcular la función de verosimilitud asociada a la función $\lambda = \theta^2 - 1$ y deducir a partir de ella el estimador máximo verosímil de λ.

b) Si $S - \theta \rightsquigarrow t(n) \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$. Encontrar el intervalo de confianza para θ de mínima longitud esperada a nivel de confianza $1-\alpha$ basado en S.

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{3(x-1)^2}{\theta^3}, \qquad 1 < x < \theta + 1$$

se pide obtener el test más potente de tamaño α que permita resolver el contraste $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta = \theta_1$ donde $\theta_1 < \theta_0$.

Calcule la potencia de cada test. Para $n = 2$ y $\theta_0 = 9$, obtener el mayor valor de θ_1 para que la potencia del test de Neymann-Pearson de tamaño 0,01 sea mayor o igual que 0,64.

Ejercicio 5 (1.25 puntos)**.** Si se tiene un modelo lineal de Gauss-Markov $Y = X\beta + \varepsilon$:

a) Si el modelo es de rango máximo, dar el estimador de mínimos cuadrados de β y calcular la media del vector de residuos del modelo estimado, solo con las condiciones iniciales del modelo.

b) Definir el concepto de función estimable y enunciar el Teorema de Gauss-Markov.

c) Describir la hipótesis lineal general y bajo hipótesis de normalidad, dar el test de razón de verosimilitudes de tamaño α que permite resolver el contraste, especificando detalladamente el estadístico de contraste.

Ejercicio 6 (1 punto)**.** Se ha medido el número de particulas de 100 muestras radioactivas en un intervalo de tiempo prefijado e igual a todas las muestras, obteniendo los siguientes datos:

Número de partículas	0	1	2	3	4	5	6
Número de muestras	29	25	20	14	8	3	1

Se pretende contrastar a nivel de significación 0,05 si la distribución de los datos se corresponde con la de una Poisson.