Ecuaciones Diferenciales I
Examen XVI

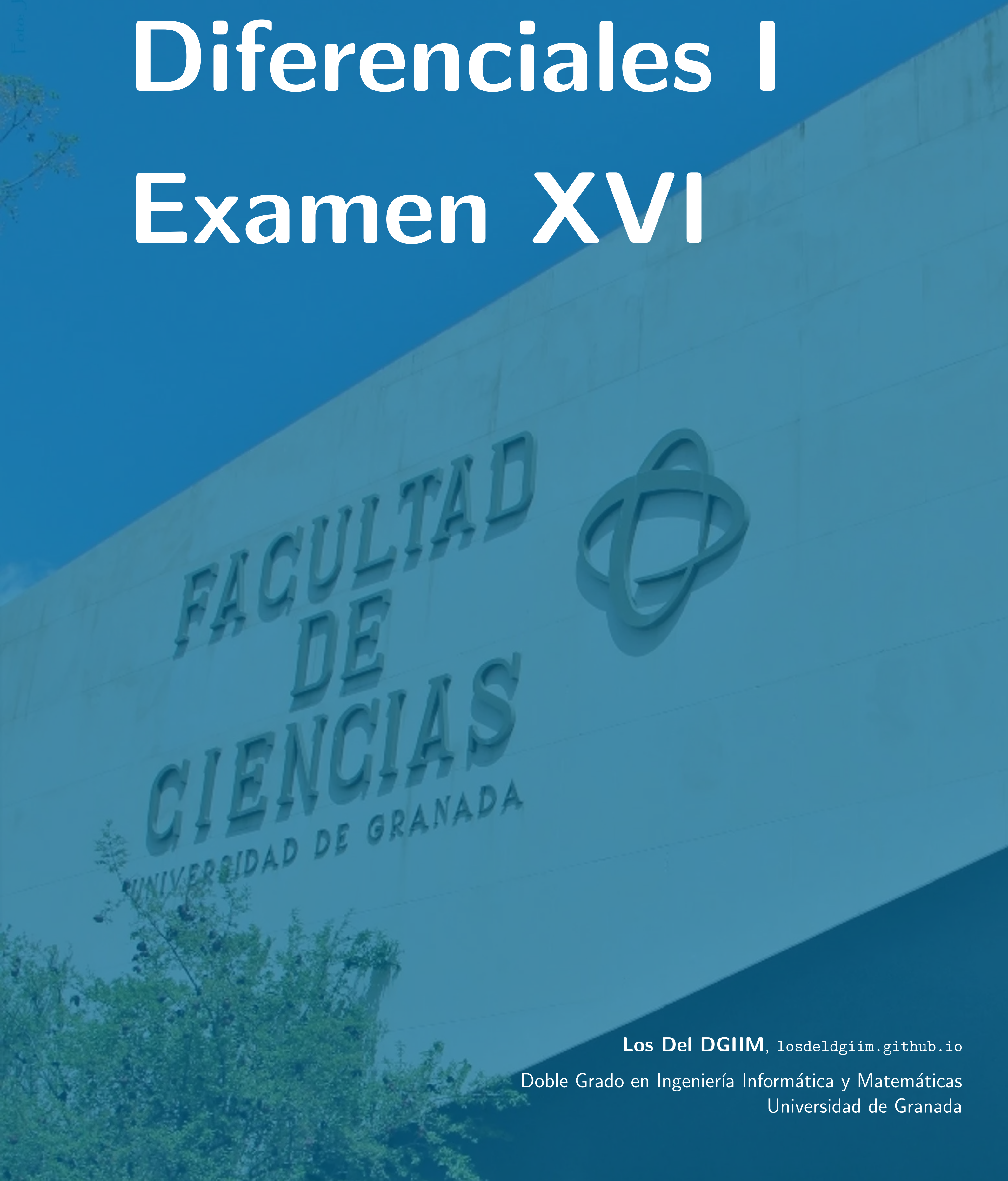

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen XVI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

Fecha 6 de Febrero de 2024.

Ejercicio 1 (40 puntos)**.**

1. Dados dos números $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ y un intervalo abierto I, se supone que $x(t)$ es una solución de
$$x'' + a_1 x' + a_0 x = 0$$
que cumple $x(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Se define la función
$$y(t) = \frac{x'(t)}{x(t)}, \quad t \in I.$$
Demuestra que $y(t)$ es una solución de una ecuación del tipo $y' = p(y)$ donde p es un polinomio de segundo grado.

2. Utiliza el apartado anterior para resolver el problema de valores iniciales
$$y' = -y^2 - y - 1, \quad y(0) = -\frac{1}{2}.$$

Ejercicio 2 (30 puntos)**.**

1. Dados números $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se considera la transformación de $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}^2$
$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2, \quad (t, x) \in \Omega \mapsto (s, y), \quad s = \lambda x, \quad y = \mu t.$$
Determina $\Omega_1 = \varphi(\Omega)$ y prueba que φ define un difeomorfismo entre Ω y Ω_1.

2. Dada la ecuación diferencial
$$x' = \frac{x}{t}.$$
¿Es admisible este difeomorfismo?

3. Se supone ahora que λ y μ son positivos. ¿Para qué valores de λ y μ se puede asegurar que la ecuación es invariante por el cambio de variable?

Ejercicio 3 (30 puntos)**.**

1. Se considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Encuentra el conjunto de todas las soluciones del sistema $x' = Ax$.

2. Calcula una matriz fundamental de $x' = Ax$.

3. Resuelve el problema $x' = Ax + b$, $x(0) = 0$ donde
$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$