Álgebra II
Examen V

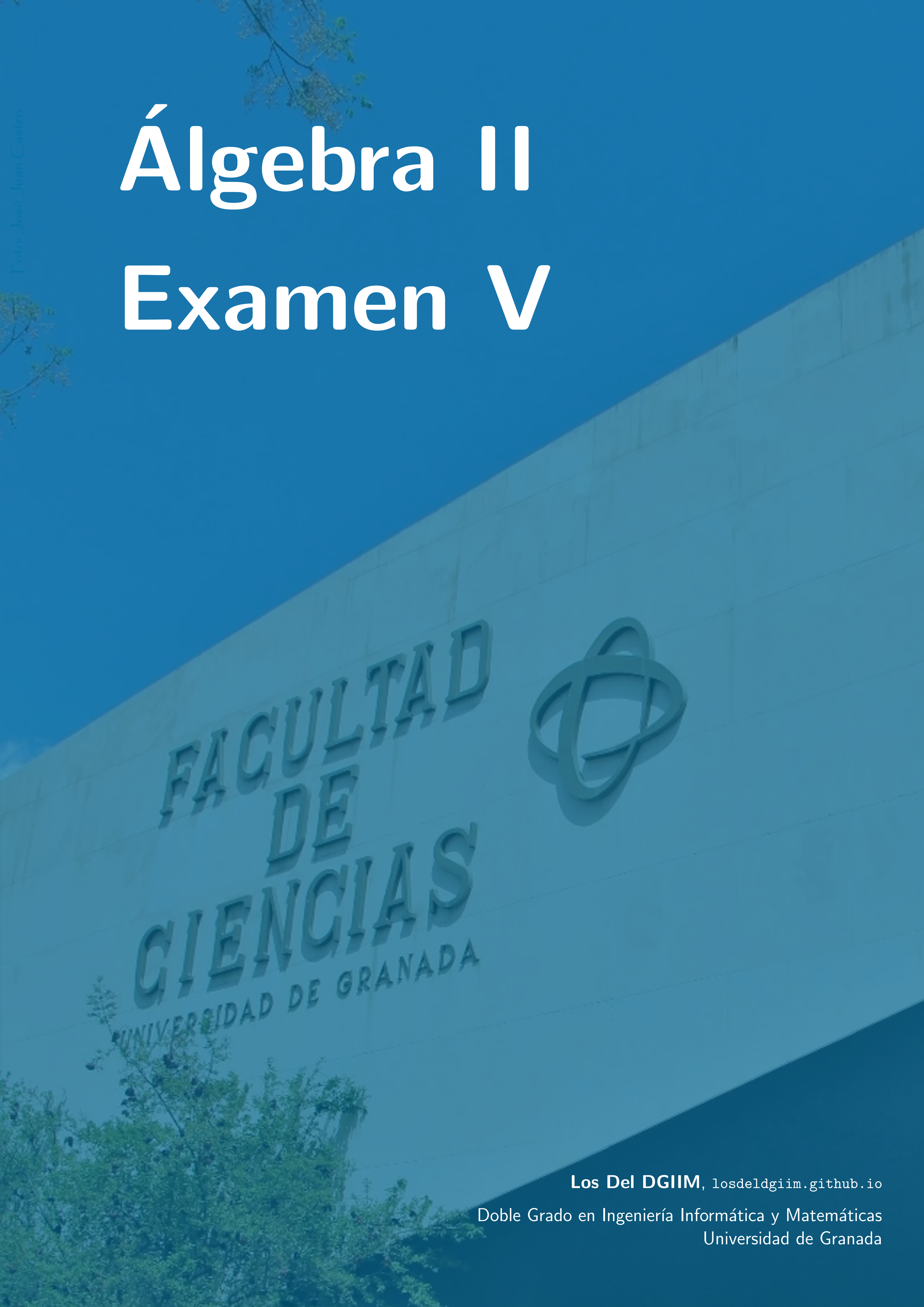

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra II
Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Asignatura Álgebra II.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Manuel Bullejos Lorenzo.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Ejercicio 1. Sea A el grupo abeliano siguiente. Indique las descomposiciones Cíclica Primaria y Cíclica de A, así como su orden y el rango de su parte libre. Clasifique, indicando sus descomposiciones Cíclicas Primaria y Cíclicas todos los grupos abelianos del mismo orden que A.

$$A = \left\langle x, y, z \;\middle|\; \begin{array}{rcl} 10x + 12y + 4z & = & 0 \\ 8x + 11y + 6z & = & 0 \\ 4x + 6y + 8z & = & 0 \end{array} \right\rangle$$

Ejercicio 2. Sea $G = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle \leqslant S_5$.

1. Calcula el número de conjugados de $(1\ 2\ 3\ 4)$ y demuestra que G no es normal en S_5.
2. Demuestra que G no es un 2-subgrupo de Sylow de S_5.
3. Construye un 2-subgrupo de Sylow de S_5 que contenga a G.

Ejercicio 3. Sea G un grupo de orden 125.

1. Sea x un elemento de G de orden 25, y sea $K = \langle x \rangle$. Demuestra que K es normal en G.
2. Sea y un elemento de G que no está en K y que tiene orden 5. Sea ahora $H = \langle y \rangle$. Demuestra que $G = K \rtimes H$.
3. Prueba que ${}^y x = x^6$ es una acción de grupos de H en K.
4. Si se cumple $yxy^{-1} = x^6$, demuestra que $\langle a, b \mid a^{25} = b^5 = 1, ba = a^6 b \rangle$ es una presentación de G.

Ejercicio 4. Demuestra que:

1. Ningún grupo de orden 390 es simple.
2. Ningún grupo de orden 30 es simple.
3. Todo grupo de orden 390 es resoluble.

Ejercicio 1. Sea A el grupo abeliano siguiente. Indique las descomposiciones Cíclica Primaria y Cíclica de A, así como su orden y el rango de su parte libre. Clasifique, indicando sus descomposiciones Cíclicas Primaria y Cíclicas todos los grupos abelianos del mismo orden que A.

$$A = \left\langle x, y, z \;\middle|\; \begin{array}{rcl} 10x + 12y + 4z & = & 0 \\ 8x + 11y + 6z & = & 0 \\ 4x + 6y + 8z & = & 0 \end{array} \right\rangle$$

La matriz de relaciones de A es:

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 4 \\ 8 & 11 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Calculamos su forma normal de Smith:

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 4 \\ 8 & 11 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1'=F_1-F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 8 & 11 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 11 & 8 & 6 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3'=F_3-6F_1]{F_2'=F_2-11F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -14 & 28 \\ 0 & -8 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2'=C_2-2C_1]{C_3'=C_3+2C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 28 \\ 0 & -8 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2'=F_2-2F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0 & -8 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3'=-(F_3+4F_2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3'=C_3+6C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la descomposición cíclica de A es:

$$A \cong C_2 \oplus C_{28}$$

La descomposición cíclica primaria de A es:

$$A \cong C_2 \oplus C_4 \oplus C_7$$

El orden de A es:

$$|A| = 2 \cdot 28 = 56$$

El rango de la parte libre de A es:

$$3 - 3 = 0$$

Clasificamos ahora los grupos abelianos de orden $56 = 2^3 \cdot 7$. Estos se muestran en la Tabla 1.

Ejercicio 2. Sea $G = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle \leqslant S_5$.

1. Calcula el número de conjugados de $(1\ 2\ 3\ 4)$ y demuestra que G no es normal en S_5.

	Fact. Inv.	**Div. element.**	**Desc. cíclica primaria**	**Desc. cíclica**
$\begin{pmatrix} 2^3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$d_1 = 56$	$\{2^3; 7\}$	$C_8 \oplus C_7$	C_{56}
$\begin{pmatrix} 2^2 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$	$d_1 = 28$ $d_2 = 2$	$\{2^2; 2; 7\}$	$C_4 \oplus C_2 \oplus C_7$	$C_{28} \times C_2$
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$d_1 = 14$ $d_2 = 2$ $d_3 = 2$	$\{2; 2; 2; 7\}$	$C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \oplus C_7$	$C_{14} \times C_2 \times C_2$

Tabla 1: Grupos abelianos de orden 56.

Puesto que la conjugación mantiene la estructura de las permutaciones, sabemos que los conjugados de $(1\ 2\ 3\ 4)$ son los $4-$ ciclos de S_5. En total:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4} = 30$$

Por tanto, el número de conjugados de $(1\ 2\ 3\ 4)$ es 30.

Veamos ahora que G no es normal en S_5. Como $|G| = 4$, sea γ un $4-$ciclo de $S_5 \setminus G$. Como γ y $(1\ 2\ 3\ 4)$ son conjugados, sea $\tau \in S_5$ tal que $\tau(1\ 2\ 3\ 4)\tau^{-1} = \gamma$. Entonces:

$$\tau(1\ 2\ 3\ 4)\tau^{-1} = \gamma \notin G \Longrightarrow G \not\triangleleft S_5$$

2. Demuestra que G no es un 2-subgrupo de Sylow de S_5.

   Como $|S_5| = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, los 2-subgrupos de Sylow de S_5 tienen orden 8. Como $|G| = 4$, tenemos que G no es un 2-subgrupo de Sylow de S_5.

3. Construye un 2-subgrupo de Sylow de S_5 que contenga a G.

   Simplemente, tenemos que construir un grupo de orden 8 que contenga a G. Para no tener que realizar pruebas, buscaremos tomarlo isomorfo a D_4. Como $(1\ 2\ 3\ 4)^4 = (1)$, buscamos una transposición τ tal que los siguientes resultados coincidan:

$$(1\ 2\ 3\ 4)^3 = (1\ 4\ 3\ 2)$$
$$\tau(1\ 2\ 3\ 4)\tau^{-1} = (\tau(1)\ \tau(2)\ \tau(3)\ \tau(4))$$

   Consideramos por tanto $\tau = (2\ 4)$. De esta forma, por el Teorema de Dyck, tenemos que:

$$Q = \langle(1\ 2\ 3\ 4), (2\ 4)\rangle \cong D_4$$

   Tenemos por tanto que Q es un 2-subgrupo de Sylow de S_5 que contiene a G.

Ejercicio 3. Sea G un grupo de orden 125.

1. Sea x un elemento de G de orden 25, y sea $K = \langle x \rangle$. Demuestra que K es normal en G.

   Como $[G : K] = 5$ y 5 es el menor primo que divide a $|G|$, tenemos que K es normal en G.

2. Sea y un elemento de G que no está en K y que tiene orden 5. Sea ahora $H = \langle y \rangle$. Demuestra que $G = K \rtimes H$.

   Supongamos que $H \cap K \neq \{1\}$. Por tanto, $\exists i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $y^i \in K$. Como $\varphi(5) = 4$, tenemos que $H = \langle y^i \rangle$, luego $y \in K$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $H \cap K = \{1\}$.

   Por el Segundo Teorema de Isomorfía, tenemos que:

   $$\frac{H}{H \cap K} \cong \frac{HK}{K} \Longrightarrow |HK| = |H| \cdot |K| = 5 \cdot 25 = 125 = |G| \Longrightarrow HK = G$$

   Por tanto, $G = K \rtimes H$.

3. Prueba que ${}^{y}x = x^6$ es una acción de grupos de H en K.

   Esto equivale a probar que:

   $$\begin{array}{rccc} \theta : & H & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(k) \\ & y & \longmapsto & \theta(y) \end{array}$$

   $$\begin{array}{rccc} \theta(y) : & K & \longrightarrow & K \\ & x & \longmapsto & {}^{y}x = x^6 \end{array}$$

   es un homomorfismo de grupos. Por el Teorema de Dyck, puesto que $H = \langle y \rangle$, bastará con comprobar que $\theta^5(y) = Id_K$.

   $$\theta^5(y)(x) = x^{6^5} = x^{7776} \qquad \forall x \in K$$

   Dado $x \in K$, tenemos que $O(x) \in \{1, 5, 25\}$. En cualquier caso:

   $$x^{7776} = x^1 = x$$

   Por tanto, $\theta^5(y) = Id_K$, luego θ es un homomorfismo de grupos, y por tanto ${}^{y}x = x^6$ es una acción de grupos de H en K.

4. Si se cumple $yxy^{-1} = x^6$, demuestra que $\langle a, b \mid a^{25} = b^5 = 1, ba = a^6 b \rangle$ es una presentación de G.

   Sea $Q = \langle a, b \mid a^{25} = b^5 = 1, ba = a^6 b \rangle$. Sea $f : Q \to G$ el homomorfismo de grupos definido por:

   $$f(a) = x$$
   $$f(b) = y$$

   Comprobamos que x, y cumplen las relaciones de Q:

   $$x^{25} = 1 \qquad y^5 = 1 \qquad yx = x^6 y \iff yxy^{-1} = x^6$$

Por tanto, f es un homomorfismo de grupos. Además, como $G \cong K \rtimes H$, tenemos que x, y generan G. Por tanto, f es sobreyectivo. Por tanto, $|Q| \geqslant |G| = 125$.

Por otro lado, como $ba = a^6 b$, tenemos que todo elemento de Q es de la forma $a^i b^j$, con $0 \leqslant i < 25$ y $0 \leqslant j < 5$. Por tanto, $|Q| \leqslant 25 \cdot 5 = 125$. Por tanto, $|Q| = |G| = 125$. Por el Teorema de Dyck, tenemos que f es un isomorfismo de grupos, luego $G \cong Q$.

$$G \cong \langle a, b \mid a^{25} = b^5 = 1, ba = a^6 b \rangle$$

Ejercicio 4. Demuestra que:

1. Ningún grupo de orden 390 es simple.

   Sea G un grupo de orden $390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$. Por el Segundo Teorema de Sylow, tenemos que:

   $$\left.\begin{array}{l} n_{13} \equiv 1 \mod 13 \\ n_{13} \mid 30 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_{13} \in \{1, \cancel{3}, \cancel{6}, \cancel{10}, \cancel{15}, \cancel{30}\}$$

   Por tanto, $n_{13} = 1$, luego hay un único 13-subgrupo de Sylow de G, que por ser único es normal. Además, como su orden es 13, es un subgrupo normal propio de G. Por tanto, G no es simple.

2. Ningún grupo de orden 30 es simple.

   Sea G un grupo de orden $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Por el Segundo Teorema de Sylow, tenemos que:

   $$\left.\begin{array}{l} n_5 \equiv 1 \mod 5 \\ n_5 \mid 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_5 \in \{1, \cancel{2}, \cancel{3}, 6\}$$

   Por otro lado, tenemos que:

   $$\left.\begin{array}{l} n_3 \equiv 1 \mod 3 \\ n_3 \mid 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_3 \in \{1, \cancel{2}, \cancel{5}, 10\}$$

   Supongamos que $n_5 = 6$ y $n_3 = 10$.

   - Como $n_5 = 6$, tenemos que hay 6 5-subgrupos de Sylow, cada uno de orden 5 (luego cíclicos). Además, la intersección de dos 5-subgrupos de Sylow es trivial, luego hay $6 \cdot 4 = 24$ elementos de orden 5.
   - Como $n_3 = 10$, tenemos que hay 10 3-subgrupos de Sylow, cada uno de orden 3 (luego cíclicos). Además, la intersección de dos 3-subgrupos de Sylow es trivial, luego hay $10 \cdot 2 = 20$ elementos de orden 3.
   - Por tanto, hay $24 + 20 = 44$ elementos de orden 5 o 3, pero $|G| = 30$.

   Llegamos a una contradicción, luego $n_5 = 1$ o $n_3 = 1$. Por tanto, hay un único 5-subgrupo de Sylow o un único 3-subgrupo de Sylow, que por ser único es normal. Además, como su orden es 5 o 3, es un subgrupo normal propio de G. Por tanto, G no es simple.

3. Todo grupo de orden 390 es resoluble.

   Sea G un grupo de orden 390. Como hemos visto en el primer apartado, hay un único 13-subgrupo de Sylow de G (llamémoslo P_{13}), que es normal.

   Consideramos por tanto G/P_{13}. Sabemos que P_{13} es abeliano, luego resoluble. Estudiamos ahora el cociente:

$$|G/P_{13}| = \frac{|G|}{|P_{13}|} = \frac{390}{13} = 30$$

   Por tanto, por el apartado anterior, G/P_{13} tiene un grupo (llamémoslo H) normal propio de orden 3 o 5. En cualquier caso, H es abeliano, luego resoluble. Además:

$$\left|\frac{G/P_{13}}{H}\right| = \frac{|G/P_{13}|}{|H|} = \frac{30}{|H|} \in 2 \cdot \{3, 5\}$$

   Por tanto, $\frac{G/P_{13}}{H}$ es de la forma pq, con p, q primos distintos, es resoluble. Como H también es resoluble, tenemos que G/P_{13} es resoluble.

   Como P_{13} es resoluble y G/P_{13} es resoluble, tenemos que G es resoluble.