Geometría III

Examen I

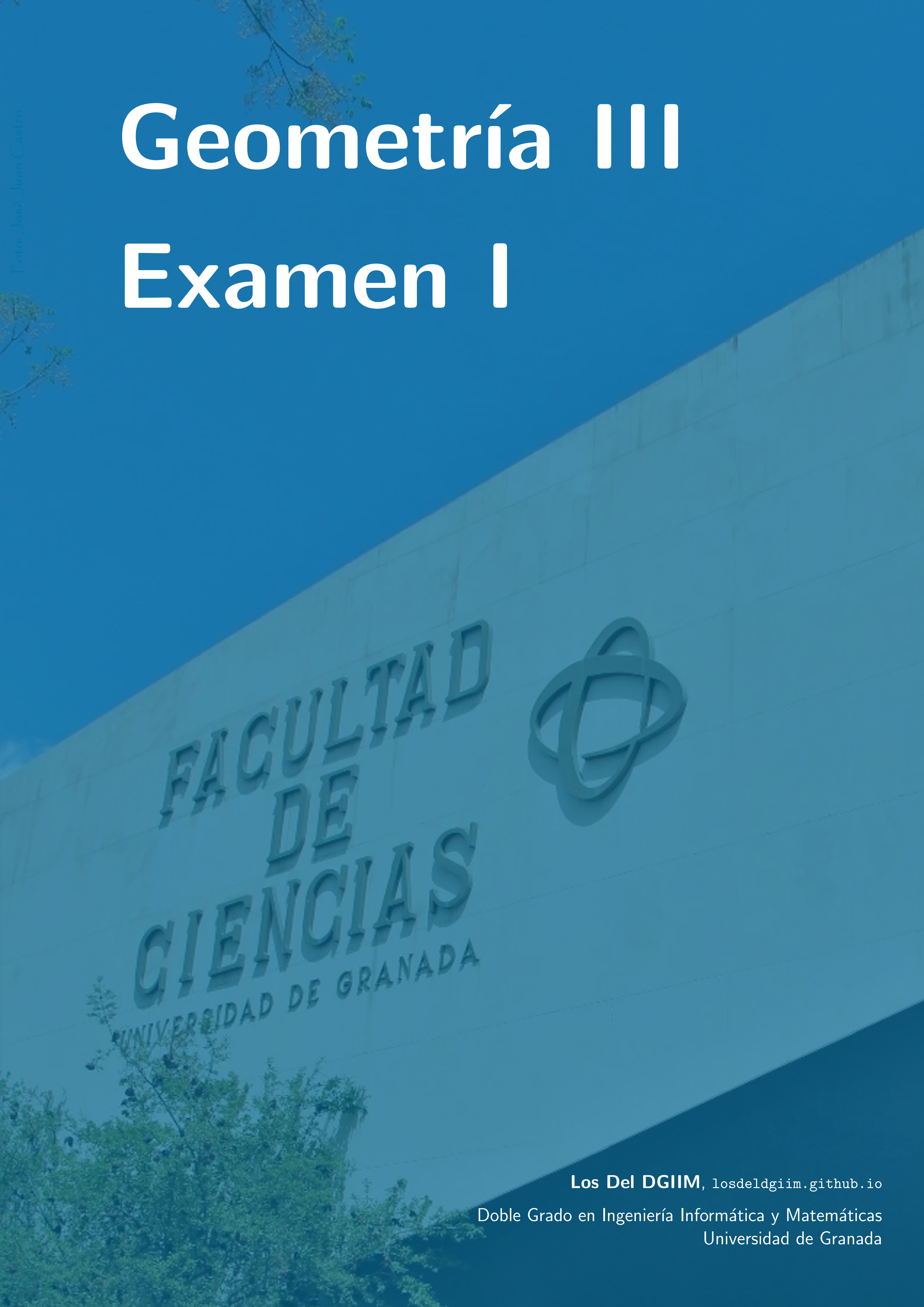

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría III
Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría III.

Curso Académico 2023-24.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo B.

Profesor José María Espinar García.

Descripción Parcial de los Temas 2 y 3.

Fecha 11 de diciembre de 2023.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Clasificar afínmente las cónicas que se obtienen al cortar el cono de ecuación $x^2+y^2=z^2$ con un plano arbitrario $ax+bz+c=0$, con $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Sea $H\equiv x^2+y^2-z^2=0$ el cono, y $\pi\equiv ax+bz+c=0$ el plano. Tenemos que:

$$H\cap\pi=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2=z^2, ax+bz+c=0\right\}$$

Distinguimos en función de los siguientes casos:

- $\underline{b=0}$:

  En este caso, $\pi\equiv ax+c=0$, y por tanto, $x=-{}^c/_a$. Sustituyendo en la ecuación del cono, tenemos que:

  $$\left(-\frac{c}{a}\right)^2+y^2=z^2\Longrightarrow y^2-z^2=-\frac{c^2}{a^2}$$

  Por tanto, tenemos que:

  $$H\cap\pi=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid y^2-z^2=-\frac{c^2}{a^2}, x=-\frac{c}{a}\right\}$$

  - $\underline{a=b=c=0}$: Tenemos que el plano no tiene ecuación, por lo que $\pi=\mathbb{R}^3$ y, por tanto, la intersección con H es H.
  - $\underline{a=b=0,\ c\neq 0}$: La ecuación del plano es $0=-c\neq 0$, por lo que $\pi=\emptyset$ y, por tanto, $H\cap\pi=\emptyset$.
  - $\underline{b=c=0,\ a\neq 0}$: En este caso, vemos que $H\cap\pi\equiv y^2-z^2=0$, por lo que se trata de un par de rectas secantes y perpediculares en el plano $x=0$.
  - $\underline{b=0,\ a,c\neq 0}$: En este caso, vemos que se trata de una hipérbola en el plano $x=-{}^c/_a$.

- $\underline{b\neq 0,\ a=0}$:

  En este caso, $\pi\equiv bz+c=0$, y por tanto, $z=-{}^c/_b$. Sustituyendo en la ecuación del cono, tenemos que:

  $$x^2+y^2=\left(-\frac{c}{b}\right)^2=0\Longrightarrow x^2+y^2=\frac{c^2}{b^2}$$

  Por tanto, tenemos que:

  $$H\cap\pi=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2=\frac{c^2}{b^2}, z=-\frac{c}{b}\right\}$$

  - $\underline{a=c=0,\ b\neq 0}$: En este caso, vemos que $H\cap\pi\equiv x^2+y^2=0$, por lo que se trata de un punto en el plano $z=0$, es decir, el origen.
  - $\underline{a=0,\ b,c\neq 0}$: En este caso, vemos que se trata de una circunferencia en el plano $z=-{}^c/_b$.

- $\underline{a, b \neq 0}$:
  En este caso, $\pi \equiv ax + bz + c = 0$, y por tanto, $z = -{}^{c+ax}/_{b}$. Sustituyendo en la ecuación del cono, tenemos que:

$$x^2+y^2 = \left(-\frac{c+ax}{b}\right)^2 = \frac{a^2x^2+c^2+2axc}{b^2} \Longrightarrow b^2x^2+b^2y^2 = a^2x^2+c^2+2axc \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (b^2-a^2)x^2 + b^2y^2 - 2axc - c^2 = 0$$

  Distinguimos en función de los valores de c:

  - $\underline{a, b \neq 0,\ c = 0}$:
    En este caso, tenemos que:

$$H \cap \pi = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (b^2-a^2)x^2 + b^2y^2 = 0, z = -\frac{ax}{b}\right\}$$

    Dintinguimos en funión de los valores de a y b:
    - $\underline{0 < |a| < |b|,\ c = 0}$:
      Tenemos que $b^2 - a^2 > 0$, por lo que $H \cap \pi$ es un punto, el origen.
    - $\underline{0 < |b| < |a|,\ c = 0}$:
      Tenemos que $b^2 - a^2 < 0$, por lo que $H \cap \pi$ es un par de rectas secantes.
    - $\underline{0 < |a| = |b|,\ c = 0}$:
      Tenemos que $b^2 - a^2 = 0$, por lo que $H \cap \pi$ es una recta dada por $y = 0$, $z = -{}^{ax}/_{b}$.
  - $\underline{a, b, c \neq 0}$:
    En este caso, tenemos que:

$$H \cap \pi = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (b^2-a^2)x^2 + b^2y^2 - 2axc - c^2 = 0, z = -\frac{c+ax}{b}\right\}$$

    - $\underline{0 < |a| = |b|,\ c \neq 0}$:
      Tenemos que $b^2 - a^2 = 0$, por lo que $H \cap \pi \equiv b^2y^2 - 2axc - c^2 = 0$. Por tanto, se trata de una parábola.
    - $\underline{0 < |a| \neq |b|,\ c \neq 0}$:
      En este caso, podemos dividir entre $b^2 - a^2$ y completar cuadrados para obtener:

$$(b^2-a^2)\left[x^2 - 2zx \cdot \frac{a}{b^2-a^2}\right] + b^2y^2 - c^2 = 0$$
$$(b^2-a^2)\left(x - \frac{za}{b^2-a^2}\right)^2 - \frac{z^2a^2}{(b^2-a^2)^2} + b^2y^2 - c^2 = 0$$
$$(b^2-a^2)\left(x - \frac{za}{b^2-a^2}\right)^2 + b^2y^2 = c^2 + \frac{z^2a^2}{(b^2-a^2)^2}$$

      El término independiente de la ecuación siempre es positivo, por lo que distinguimos en función de los valores de a, b:

- $\diamond$ $\underline{0 < |a| < |b|,\ c \neq 0}$:
  Tenemos que $b^2 - a^2 > 0$, por lo que $H \cap \pi$ es una elipse.
- $\diamond$ $\underline{0 < |b| < |a|,\ c \neq 0}$:
  Tenemos que $b^2 - a^2 < 0$, por lo que $H \cap \pi$ es una hipérbola.

Ejercicio 2 (4 puntos)**.** Sea la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y,z) = \left(-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}z + 3, y + 4, \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z - 1\right)$$

1. Demostrar que es una isometría.

   Obtenemos su matriz respecto de la base canónica:

$$M(f, \mathcal{B}_u) = \frac{1}{5}\left(\begin{array}{c|ccc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 15 & -4 & 0 & 3 \\ 20 & 0 & 5 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

   Comprobemos que es una isometría. Como $\mathcal{B}_u$ es una base ortonormal, bastará con probar que las matrices son ortogonales:

$$\frac{1}{5^2}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = Id_3$$

   Por tanto, $M(f, \mathcal{B}_u)$ es una matriz ortogonal, y por tanto, f es una isometría.

2. Clasifícala.

   Tenemos que:

$$\left|M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right)\right| = \frac{1}{5^3} \cdot 5 \cdot (-16 - 9) = -1$$

   Por tanto, como $\left|M\left(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}_u\right)\right| = -1$, tenemos que se trata de una isometría inversa.

3. Calcular el conjunto de puntos fijos.

   Tenemos que los puntos fijos cumplen el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, dicho sistema no tiene solución, por lo que:

$$\mathcal{P}_f = \emptyset$$

   Por tanto, como es un movimiento inverso en el espacio sin puntos fijos, tenemos que se trata de reflexión especular con deslizamiento.

4. Calcular las ecuaciones que representan a f respecto de los sistemas de referencia $\mathcal{R}$ (en el dominio) y $\mathcal{R}'$ (en el codominio); siendo:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &:= \{(1,-1,0),(0,0,1),(1,0,-1),(2,-2,1)\}\\ \mathcal{R}' &:= \{(0,0,1),(1,-1,0),(0,0,0),(-2,0,1)\}\end{aligned}$$

Tenemos que $\mathcal{R} = \{(1,-1,0),\{v_1,v_2,v_3\}\}$, y tenemos que:

$$\begin{aligned}f(1,-1,0) &= \frac{1}{5}(11,15,-2)\\ \vec{f}(v_1) &= \overrightarrow{f(1,-1,0)f(0,0,1)} = \frac{1}{5}\overrightarrow{(11,15,-2)\ (18,20,-1)} = \frac{1}{5}(7,5,1)\\ \vec{f}(v_2) &= \overrightarrow{f(1,-1,0)f(1,0,-1)} = \frac{1}{5}\overrightarrow{(11,15,-2)\ (8,20,-6)} = \frac{1}{5}(-3,5,-4)\\ \vec{f}(v_3) &= \overrightarrow{f(1,-1,0)f(2,-2,1)} = \frac{1}{5}\overrightarrow{(11,15,-2)\ (10,10,5)} = \frac{1}{5}(-1,-5,7)\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$M(f,\mathcal{R},\mathcal{R}_0) = \frac{1}{5}\left(\begin{array}{c|ccc} 5 & 0 & 0 & 0\\ \hline 11 & 7 & -3 & -1\\ 15 & 5 & 5 & -5\\ -2 & 1 & -4 & 7\end{array}\right)$$

Haciendo uso de las matrices de cambio de base, tenemos que:

$$\begin{aligned}M(f,\mathcal{R}_0) &= M(Id_4,\mathcal{R}_0,\mathcal{R}')\cdot M(f,\mathcal{R},\mathcal{R}_0) =\\ &= M(Id_4,\mathcal{R}',\mathcal{R}_0)^{-1}\cdot M(f,\mathcal{R},\mathcal{R}_0) =\\ &= \frac{1}{5}\cdot\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 0\end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c|ccc} 5 & 0 & 0 & 0\\ \hline 11 & 7 & -3 & -1\\ 15 & 5 & 5 & -5\\ -2 & 1 & -4 & 7\end{array}\right) =\\ &= \frac{1}{5}\left(\begin{array}{c|ccc} 5 & 0 & 0 & 0\\ \hline -20 & 0 & -5 & 0\\ 30 & -3 & 5 & -4\\ -35/2 & 2 & -5/2 & -3/2\end{array}\right)\end{aligned}$$

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** En $\mathbb{R}^2$, para todo $a,b\in\mathbb{R}^*$, demostrar que toda hipérbola $H = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x/a)^2 - (y/b)^2 = 1\right\}\subset\mathbb{R}^2$ admite dos rectas $R_1,R_2\subset\mathbb{R}^2$, con $(R_1\cup R_2)\cap H=\emptyset$, verificando que $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, $\exists p\in H$ tal que:

$$\operatorname{dist}(p,R_1\cup R_2)\leqslant\varepsilon$$

Sean dichas rectas el par de rectas $(x/a)^2-(y/b)^2=0$. Es decir, sea:

$$R_1\equiv\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\equiv y=\frac{b}{a}x\qquad R_2\equiv\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0\equiv y=-\frac{b}{a}x$$

Veamos en primer lugar que la intersección de H con R_1 es vacía:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{b^2}{a^2}x^2\right)}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Longrightarrow 0 = 1$$

Por tanto, $H \cap R_1 = \emptyset$. Análogamente, se ve que $H \cap R_2 = \emptyset$, por lo que la intersección de ambas es vacía, es decir, $(R_1 \cup R_2) \cap H = \emptyset$. Veamos ahora la última parte. Por simetría, consideraremos tan solo los puntos del primer cuadrante, es decir, la recta R_1 y el primer cuadrante de H. Un punto cualquiera de la asíntota en dicho cuadrante cumple que:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \Longrightarrow y = |b|\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

Calculamos ahora la distancia entre un punto de la recta y un punto de la hipérbola que tengan la misma coordenada x:

$$d(p, p_{R_1}) = \left|\frac{b}{a}x - |b|\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right|$$

Tomando límite cuando $x \to \infty$, tenemos que:

$$\lim_{x\to\infty} d(p, p_{R_1}) = \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a}x - |b|\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a}x - |b|\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \cdot \frac{\frac{b}{a}x + |b|\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}{\frac{b}{a}x + |b|\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2 \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)}{\frac{b}{a}x + |b|\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{b^2}{\frac{b}{a}x + |b|\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} = 0$$

Por tanto, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que si $x > M$, entonces si $p = \left(x, \frac{b}{a}x\right) \in R_1$, $p_{R_1} = \left(x, |b|\sqrt{\frac{x^2}{a^1} - 1}\right) \in H$, entonces $d(p, p_{R_1}) < \varepsilon$. Como $d(p, R_1) = \inf\{d(p,q) \mid q \in R_1\}$, tenemos que $d(p, R_1) \leqslant d(p, p_{R_1}) < \varepsilon$.