Ecuaciones Diferenciales I Examen XXV

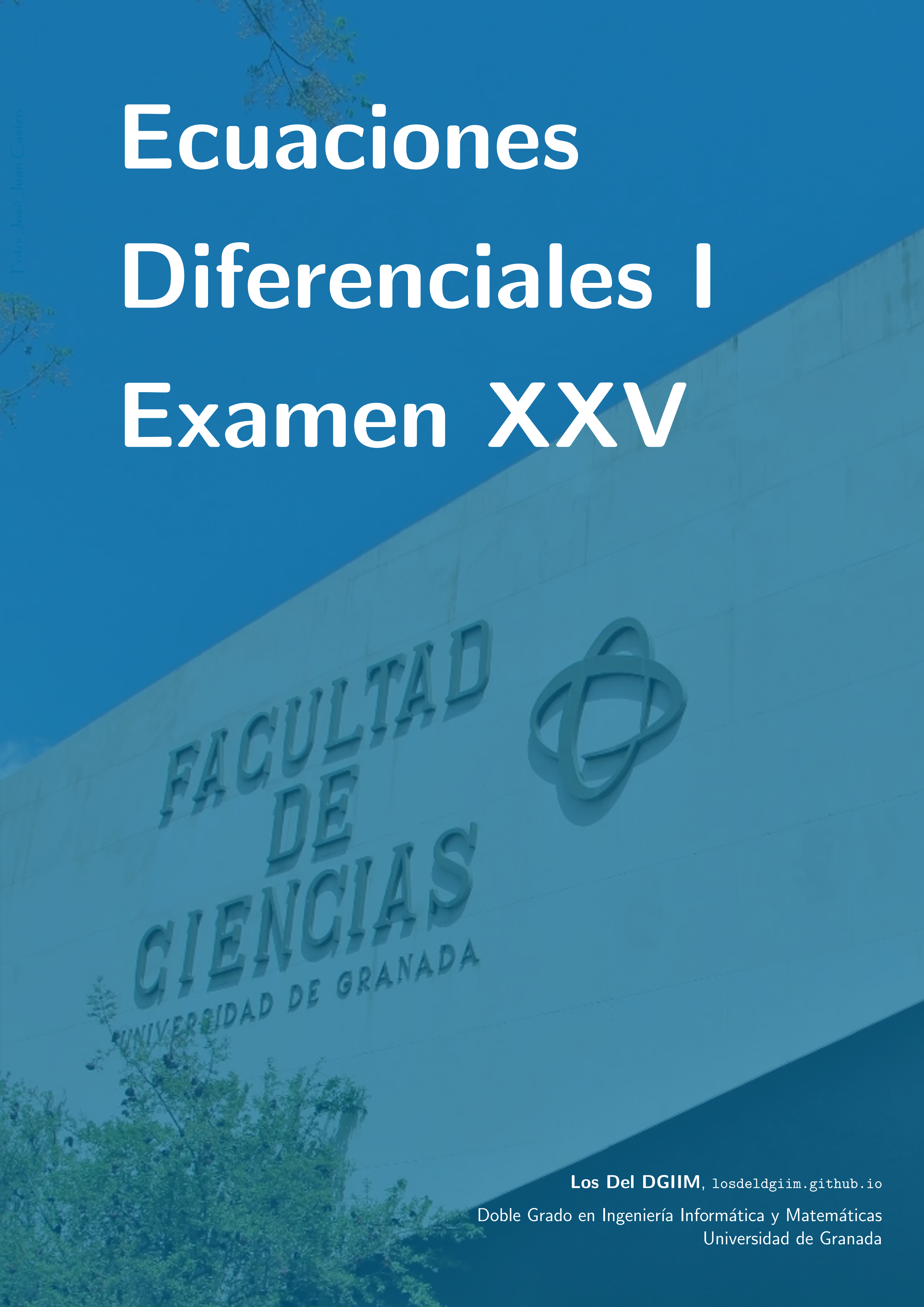

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen XXV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial 2.

Fecha 17 de Diciembre de 2024.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1. Encuentra la solución del problema

$$(4y^3 + 2ye^x)x' + e^x y^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

¿Está definida en toda la recta real?

Ejercicio 2. Dada la ecuación

$$x'' - x = t$$

se llama S a su conjunto de soluciones y se define la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Es Φ biyectiva?

Ejercicio 3. Encuentra la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 3x_2, \\ x_2' = 3x_1 + x_2, \end{cases} \qquad x_1(0) = x_2(0) = 1.$$

Ejercicio 4. Demuestra que la ecuación integral

$$x(t) = \cos t + t \int_0^t e^s x(s) ds$$

tiene a lo sumo una solución continua $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ejercicio 5. Se emplea la notación $\mathcal{P}$ para designar a la familia de funciones polinómicas

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \end{array}$$

donde $n \geqslant 0$, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Demuestra:

1. $f \notin \mathcal{P}$ si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \cos t$.
2. Dada $p \in \mathcal{P}$, la ecuación
$$x'' + x = p(t)$$
tiene a lo sumo una solución polinómica.

Ejercicio 1. Encuentra la solución del problema

$$(4y^3 + 2ye^x)x' + e^x y^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

¿Está definida en toda la recta real?

Definimos las funciones $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$P(x,y) = e^x y^2 \qquad Q(x,y) = 4y^3 + 2ye^x \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Que son de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ y además verifican la condición de exactitud:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2ye^x = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Con lo que nos encontramos ante una ecuación exacta, definida en $\mathbb{R}^2$, que sabemos que es estrellado por ser convexo, luego podemos encontrar un potencial para el campo de fuerzas $F = (P, Q)$. Una posible función potencial para (P, Q) es la función $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$U(x,y) = e^x y^2 + y^4 - 2 \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Ya que es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$, con:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) &= e^x y^2 = P(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= 2ye^x + 4y^3 = Q(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

De esta forma, buscamos una función y que cumpla:

$$U(x, y(x)) = e^x (y(x))^2 + (y(x))^4 - 2 = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

La cual podemos obtener mediante la fórmula de las raíces de los polinomios de segundo grado, obteniendo:

$$y(x) = \sqrt{\frac{-e^x + \sqrt{e^{2x} + 8}}{2}}$$

Que puede definirse en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Dada la ecuación

$$x'' - x = t \tag{1}$$

se llama S a su conjunto de soluciones y se define la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Es Φ biyectiva?

Sí que es biyectiva, para demostrarlo comprobamos que es inyectiva y sobreyectiva:

Inyectividad. Sean $x, y \in S$ tales que $\Phi(x) = \Phi(y)$, entonces x y y son ambas soluciones de (1) con las mismas condiciones iniciales, luego por la unicidad que nos da el Teorema de existencia y unicidad de la Lección 4, tenemos que $x = y$, con lo que Φ es inyectiva.

Sobreyectividad. Sea $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, por la parte de existencia garantizada por el mismo teorema, podemos encontrar $x \in S$ de forma que

$$x(0) = \alpha \qquad x'(0) = \beta$$

Con lo que $\Phi(x) = (\alpha, \beta)$, y tenemos que Φ es sobreyectiva.

Ejercicio 3. Encuentra la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 3x_2, \\ x_2' = 3x_1 + x_2, \end{cases} \qquad x_1(0) = x_2(0) = 1.$$

Se trata de un sistema de ecuaciones lineales, que puede reescribirse de forma matricial con:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Considerando la ecuación

$$x' = Ax$$

Para resolverla, primero calculamos los valores propios de la matriz A, para lo cual calculamos su polinomio característico:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$$

Obteniendo valores propios $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -2$, de forma que podemos coger como vectores propios $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (1, -1)$, respectivamente. De esta forma, cualquier solución del sistema será de la forma:

$$x(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Buscamos ahora la solución solicitada, la que cumple que $x(0) = (1, 1)$:

$$x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Con lo que la solución solicitada es:

$$x(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Demuestra que la ecuación integral

$$x(t) = \cos t + t \int_0^t e^s x(s) ds \tag{2}$$

tiene a lo sumo una solución continua $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Supongamos que $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son dos soluciones continuas distintas de (2). Definimos $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$z(t) = x(t) - y(t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

y tenemos que:

$$\begin{aligned} z(t) = x(t) - y(t) &= \cancel{\cos t} + t \int_0^t e^s x(s)\, ds - \cancel{\cos t} - t \int_0^t e^s y(s)\, ds \\ &= t \int_0^t e^s (x(s) - y(s))\, ds \qquad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sea $b \in \mathbb{R}$, consideramos el conjunto $I_b =]-b, b[$ y tenemos que:

$$\begin{aligned} z(t) = x(t) - y(t) = t \int_0^t e^s (x(s) - y(s))\, ds &\leqslant b \int_0^t e^b (x(s) - y(s))\, ds \\ = be^b \int_0^t (x(s) - y(s))\, ds &\leqslant be^b \left| \int_0^t (x(s) - y(s))\, ds \right| \qquad \forall t \in I_b \end{aligned}$$

De esta forma, aplicando el Lema visto en la Lección 4 de teoría, llegamos a que $z(t) = 0\ \forall t \in I_b$. Finalmente, como:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

Llegamos a que $z(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$, con lo que $x(t) = y(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5. Se emplea la notación $\mathcal{P}$ para designar a la familia de funciones polinómicas

$$\begin{aligned} p : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \end{aligned}$$

donde $n \geqslant 0$, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Demuestra:

1. $f \notin \mathcal{P}$ si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \cos t$.

   Veamos una condición necesaria para que una función esté en la familia $\mathcal{P}$:

   Sea $p \in \mathcal{P}$ un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$, entonces $p \in C^\infty(\mathbb{R})$, con:

   $$p^{(n)}(t) = a_n \cdot n! \qquad p^{(n+1)}(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

   Por lo que $p^{(k)}(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$, para todo $k \geqslant n + 1$.

   Tenemos ahora que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, con:

   $$f'(t) = -\operatorname{sen} t \quad f''(t) = -\cos t \quad f'''(t) = \operatorname{sen} t \quad f^{(iv)}(t) = \cos t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

   Por lo que $\nexists n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(k)}(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$, con $k \geqslant n$, luego $f \notin \mathcal{P}$.

2. Dada $p \in \mathcal{P}$, la ecuación
$$x'' + x = p(t) \tag{3}$$
tiene a lo sumo una solución polinómica.

Sabemos que un sistema fundamental de la ecuación homogénea asociada viene dado por las funciones $\{f, g\}$, con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:
$$g(t) = \operatorname{sen} t \qquad t \in \mathbb{R}$$
De esta forma, si tenemos una solución particular $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (3), entonces todas sus soluciones serán de la forma $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
$$x(t) = q(t) + c_1 f(t) + c_2 g(t) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Si $c_1 \neq 0$ o $c_2 \neq 0$, supuesto que $x \in C^\infty(\mathbb{R})$ (ya que si no, tenemos directamente que $x \notin \mathcal{P}$), entonces si en la expresión de x aparece f o g, en la derivada cuarta de x aparecerá f o g respectivamente, con lo que no existirá un n a partir del cual la derivada de x se anule, con lo que $x \notin \mathcal{P}$.
- La única posibilidad de que $x \in \mathcal{P}$ es que $c_1 = 0 = c_2$, con lo que $x = q$. En esta situación, q podrá ser o no un polinomio, pero por el punto superior estamos seguros de que no habrá más de una solución polinómica.