Curvas y Superficies

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Curvas y Superficies

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

Índice general

1. Curvas en el plano y en el espacio

1.1. Definición. Curva regular. Longitud de arco

Definición 1.1. Una **curva** en el espacio es una aplicación diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.

Normalmente, si queremos señalar explícitamente las componentes de α, escribiremos:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

En realidad, a un geómetra solo le interesa la llamada "traza de la curva":

$$\operatorname{tr} \alpha = \operatorname{im} \alpha = \alpha(I)$$

Ejemplo. Sean $a \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$, definimos $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por:

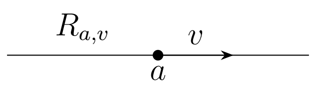
$$\alpha(t) = a + tv$$

En dicho caso:

$$\operatorname{tr} \alpha = \begin{cases} \{a\} & \text{si } v = 0 \\ R_{a,v} & \text{si } v \neq 0 \end{cases}$$

donde denotamos por $R_{a,v}$ a la única recta que pasar por a y con dirección v:

$$R_{a,v} = a + \langle v \rangle$$



Definición 1.2. Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ se llama "**plana**" si existe un plano $P \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{tr} \alpha \subset P$.

Como P y $P(z = 0)$ son equivalentes salvo un movimiento rígido[1] de $\mathbb{R}^3$, podemos considerar que la curva α está definida como $\alpha : I \to P(z = 0) \subset \mathbb{R}^3$, cuyas componentes son:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), 0) \equiv (x(t), y(t))$$

De esta forma, podemos abstraernos y pensar que una curva plana es una aplicación diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$.

[1] Es decir, una aplicación afín que conserve longitudes y ángulos.

En los libros es común llamar a estar curvas "parametrizadas" y "diferenciables". En nuestra definición imponemos que una curva ha de ser diferenciable, y el adjetivo parametrizada se debe a la dependencia de la variable independiente.

Ejemplo. Varios ejemplos de curvas:

1. Extrapolando el ejemplo anterior:

$$\alpha(t) = a + tv$$

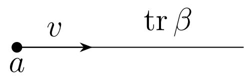
   para $a \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha'(t) = v$. Se trata de un Movimiento Rectilíneo Uniforme. Ahora, vemos que $\alpha''(t) = 0$, no hay aceleración ninguna.

2. Tomando $a \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, consideramos $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\beta(t) = a + t^2 v$$

   Observamos ahora que tenemos $\operatorname{tr}\beta \subset \operatorname{tr}\alpha$, y la traza de esta curva es la semirrecta de extremo a y dirección v:

$$\operatorname{tr}\beta = R_0^+(a, v)$$



   Desde el punto de vista físico, muy en el pasado (límite en $-\infty$) estábamos muy alejados del punto a. A medida que nos vamos acercando a tiempo 0 nos vamos acercando al punto a con una velocidad de módulo decreciente que se hace cero cuando alcanzamos el instante $t = 0$ y que luego aumenta posteriormente mientras el móvil se aleja del punto a en la dirección en la que vino.

   Vemos que tenemos una velocidad $\beta'(t) = 2tv$, así como una aceleración $\beta''(t) = 2v$, que es constante, por lo que estamos ante un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado.

   El punto a (que se alcanza en $t = 0$) es un punto extraño, es el único punto de $\operatorname{tr}\beta$ en su frontera. Además, podemos observar que en dicho punto tenemos $\beta'(0) = 0$.

Ejercicio 1.1.1. Estudiar $\gamma(t) = a + t^3 v$, con $a \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
Es claro que $\operatorname{tr}\gamma = R_{a,v} = \operatorname{tr}\alpha$. En este caso tenemos:

$$\gamma'(t) = 3t^2 v, \qquad \gamma''(t) = 6tv$$

Vemos que la velocidad es siempre positiva y en este caso la aceleración no es constante: es decreciente cuando $t < 0$ y es creciente cuando $t > 0$, simula la situación en la que un móvil se acerca al punto a frenando cada vez más fuerte y a medida que pasa el punto a comienza a acelerar cada vez más rápido.

Ejemplo. Siguiendo con más ejemplos:

3. Consideramos ahora $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\delta(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$$

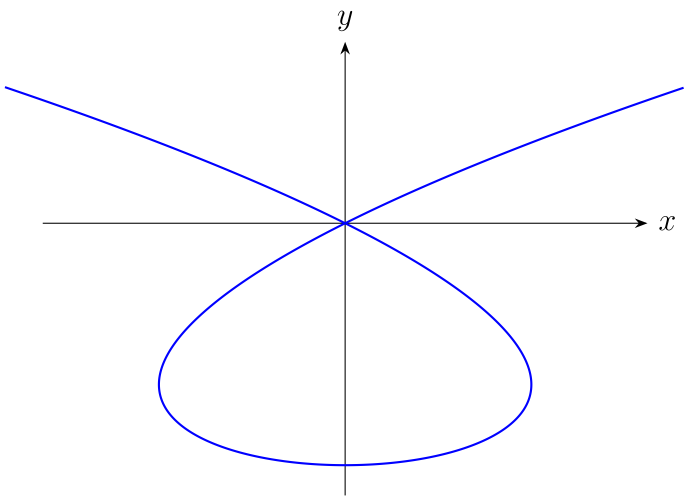
Para pensar la curva primero analizamos dónde esta corta el eje x:

$$t^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow t = \pm 2$$

En dichas abscisas, la curva toma la ordenada:

$$\delta(-2) = 0 = \delta(2)$$

Por lo que en ambos instantes de tiempo la curva pasa por el origen. Si estudiamos el corte con el eje y vemos que tiene 3 puntos de corte, dos de ellos ya los conocemos y el que falta es en el instante $t = 0$; donde alcanza una ordenada de -4. Teniendo en cuenta también los límites en $-\infty$ y en $+\infty$ podemos finalmente deducir que la curva será algo del estilo:



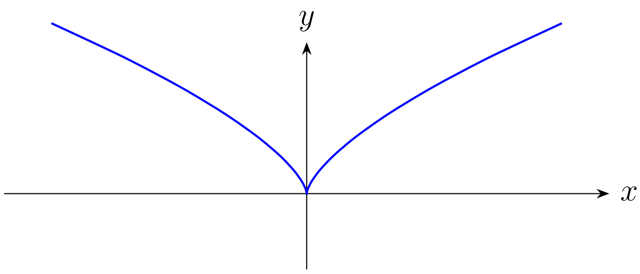
Vemos que esta curva tiene autointersecciones, por lo que las curvas no tienen por qué ser inyectivas.

4. Si consideramos $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varepsilon(t) = (t^3, t^2)$.

Su velocidad es $\varepsilon'(t) = (3t^2, 2t)$, que se anula en el origen. Observamos que en el dibujo de la traza vemos un pico.

Aunque ε sea diferenciable, $\operatorname{tr}\varepsilon$ tiene "picos". Observamos además que $\operatorname{im}\varepsilon$ es la gráfica de la aplicación[2] $y = x^{2/3}$. Esta función no es derivable en el origen, a pesar de que la curva sí lo sea.

[2]Lo hemos obtenido igualando $x = t^3$, $y = t^2$, despejando t de la primera e igualando en la segunda.



5. Sea $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\zeta(t) = a + r\left(\cos\left(\frac{t}{r}\right)e_1 + \operatorname{sen}\left(\frac{t}{r}\right)e_2\right)$ donde $a \in \mathbb{R}^3$, e_1, e_2 con $|e_1| = 1 = |e_2|$ con $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ y $r > 0$.

   Observamos que tenemos siempre:

   $$\zeta(t) \in P = a + \langle\{e_1, e_2\}\rangle \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

   Por lo que:

   $$\operatorname{im}\zeta = \operatorname{tr}\zeta \subset P$$

   Es decir, ζ es una curva plana. Además, vemos que:

   $$|\zeta(t) - a|^2 = r^2 \quad \Longrightarrow \quad |\zeta(t) - a| = r \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

   Como $\operatorname{tr}\zeta$ no se puede salir del plano y equidista una cantidad r de a, tenemos que $\operatorname{tr}\zeta \subset C(a, r) \subset P$.

   A esta curva la llamaremos **la**[3] circunferencia de centro a y radio $r > 0$ en P.

   Observamos que:

   $$\zeta'(t) = -\operatorname{sen}\left(\frac{t}{r}\right)e_1 + \cos\left(\frac{t}{r}\right)e_2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

   No es constante, por lo que no es un MRU. Además vemos que $\zeta''(t)$ no es constante, por lo que tampoco es un MRUA. Sin embargo, apreciamos que $|\zeta''(t)|$ sí que es constante, así como que $|\zeta'(t)| = 1$.

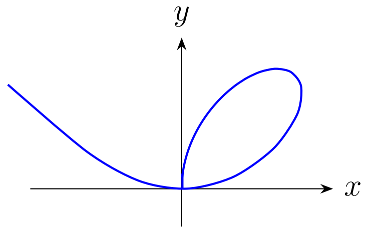
   Se trata de la traza de un Movimiento Circular Uniforme.

6. Sea $\eta : I \to \mathbb{R}^2$ con $I =]-1, +\infty[$ dada por:

   $$\eta(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$$

   Si pensamos en su representación, tras un poco de análisis (límite en más y menos infinito, puntos de corte con los ejes, observar que si $t > 0$ siempre se encuentra en el primer cuadrante, ...) podemos llegar a deducir que su forma ha de ser similar a algo como:

[3] A esta la parametrizaremos siempre de la misma forma, aunque distintas parametrizaciones den la misma traza.



Vemos que $\eta(0) = (0,0)$ y que $\lim_{t\to+\infty} \eta(t) = (0,0)$, pero a pesar de ello la curva no se autointerseca, ya que podemos probar que es inyectiva:

Sean $u, t \in \mathbb{R}$ con $u, t > -1$ tales que $\eta(t) = \eta(u)$ tenemos entonces que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3t}{1+t^3} = \dfrac{3u}{1+u^3} \\[2ex] \dfrac{3t^2}{1+t^3} = \dfrac{3u^2}{1+u^3} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{3u^2}{1+u^3} = t \cdot \frac{3t}{1+t^3} = \frac{3ut}{1+u^3}$$

Si $u \neq 0$ podemos dividir entre u y concluir que $u = t$ y si $u = 0$ ha de ser $t = 0 = u$ para obtener $\eta(t) = \eta(u)$. Hemos probado que η es inyectiva.

Vemos otro hecho que hemos de tener en cuenta, y es que en este ejemplo I no es homeomorfo a $\operatorname{tr}\eta$, puesto que si hubiera un homeomorfismo, podemos tomar cualquier entorno de $\eta(0)$ este ha de contener una bola abierta de centro $\eta(0)$ y radio $r > 0$ lo suficientemente pequeña para que su intersección con $\operatorname{tr}\eta$ menos $\eta(0)$ tenga 3 componentes conexas y la correspondiente imagen de este conjunto mediante el homeomorfismo tendría 2, lo que llevaría a una contradicción.

Si a esta curva le añadimos otra para que sea simétrica respecto al eje $y = x$ obtenemos el *folium de Descartes*.

Definición 1.3. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva, definimos la **recta tangente** a la curva α en el instante $t \in I$ como la recta afín $\alpha(t) + \langle \alpha'(t) \rangle$, que denotaremos por $R_{\alpha(t),\alpha'(t)} \equiv R_t$.

Observemos que si $\alpha'(t) = 0$ para cierto $t \in I$ $\alpha(t) + \langle 0 \rangle$ no es una recta, es decir, en los puntos donde $\alpha'(t) = 0$ no hay[4] recta tangente.

Los puntos $\alpha(t)$ de $\operatorname{tr}\alpha$ tales que $\alpha'(t) \neq 0$ se llaman **regulares**. En otro caso, los llamaremos **singulares**. La curva α se dice **regular** si $\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

Ejercicio 1.1.2. Determinar las curvas regulares que han aparecido en los ejemplos anteriores.

- $\alpha(t) = a + tv$, teníamos $\alpha'(t) = v$, por lo que α es regular si y solo si $v \neq 0$.
- $\beta(t) = a + t^2 v$, tenemos $\beta'(t) = 2tv$, por lo que la curva no es regular, ya que el punto $\beta(0)$ es singular.

[4] No diremos que la recta tangente es un punto.

- $\gamma(t) = a + t^3 v$, tenemos $\gamma'(t) = 3t^2 v$, por lo que la curva no es regular, puesto que $\gamma(0)$ es un punto singular.
- $\delta(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, tenemos $\delta'(t) = (3t^2 - 4, 2t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (la segunda componente solo se anula si $t = 0$ y a la primera no le sucede esto), por lo que es una curva regular.
- $\varepsilon(t) = (t^3, t^2)$, $\varepsilon'(t) = (3t^2, 2t)$ no es regular, el punto $\varepsilon(0)$ es singular.
- $\zeta(t) = a + r(\cos(t/r)e_1 + \operatorname{sen}(t/r)e_2)$, teníamos que $|\zeta'(t)| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo que se trata de una curva regular.
- $\eta :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}^2$, dada por:

  $$\eta(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$$

  Tenemos que:

  $$\eta'(t) = \left(\frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}, \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \right)$$

  Veamos si se anula la derivada en algún punto:

  $$\left\{ \begin{array}{rcc} 3 - 6t^3 = 0 & \Longleftrightarrow & t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \\ 6t - 3t^3 = 0 & \Longleftrightarrow & t = 0 \text{ ó } t = \pm\sqrt{2} \end{array} \right.$$

  Como ambos sucesos son incompatibles tenemos que $\eta'(t) \neq 0 \quad \forall t \in]-1, +\infty[$.

Ejemplo. Más ejemplos de curvas:

1. La gráfica de una función real de variable real derivable es la traza de una curva (parametrizada diferenciable).

   Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, tenemos:

   $$\operatorname{Gr} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y = f(x)\}$$

   Definimos $\alpha_f : I \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha_f(t) = (t, f(t))$.

   Sin embargo, no toda curva es la gráfica de una función real de variable real, como por ejemplo la circunferencia.

2. Como primer ejemplo de una curva no plana, $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por:

   $$\theta(t) = \left(a\cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

   para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 = 0$.

   - Si $a = 0$ (y por tanto $b \neq 0$) obtenemos el eje z como $\operatorname{tr}\theta$, es una curva plana.
   - Si $b = 0$ (y por tanto $a \neq 0$) obtenemos una curva plana en el plano $z = 0$, cuya traza es $C((0, 0, 0), |a|)$.

- Si $ab \neq 0$, para $t \in \mathbb{R}$ obtenemos:

  $$x(t)^2 + y(t)^2 = a^2$$

  De donde:

  $$\theta(t) \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2\} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

  Así, $\operatorname{tr} \theta$ está contenido en un cilindro circular recto de eje el eje z y radio $|a|$.
  Si proyectamos la curva sobre el plano $z = 0$ obtenemos puntos de la circunferencia, y cuando observamos la coordenada z a medida que incrementa t subimos o bajamos por el cilindro (dependiendo del signo de b).
  Esta traza recibe el nombre hélice circular recta de eje el eje z y radio $|a|$.
  - Si $ab > 0$ (ambos tienen el mismo signo), se dice que la hélice es levógira.
  - En otro caso ($ab < 0$) se dice que la hélice es dextrógira.

Ejercicio: Probar que la curva no es plana.