Topología II
Examen VIII

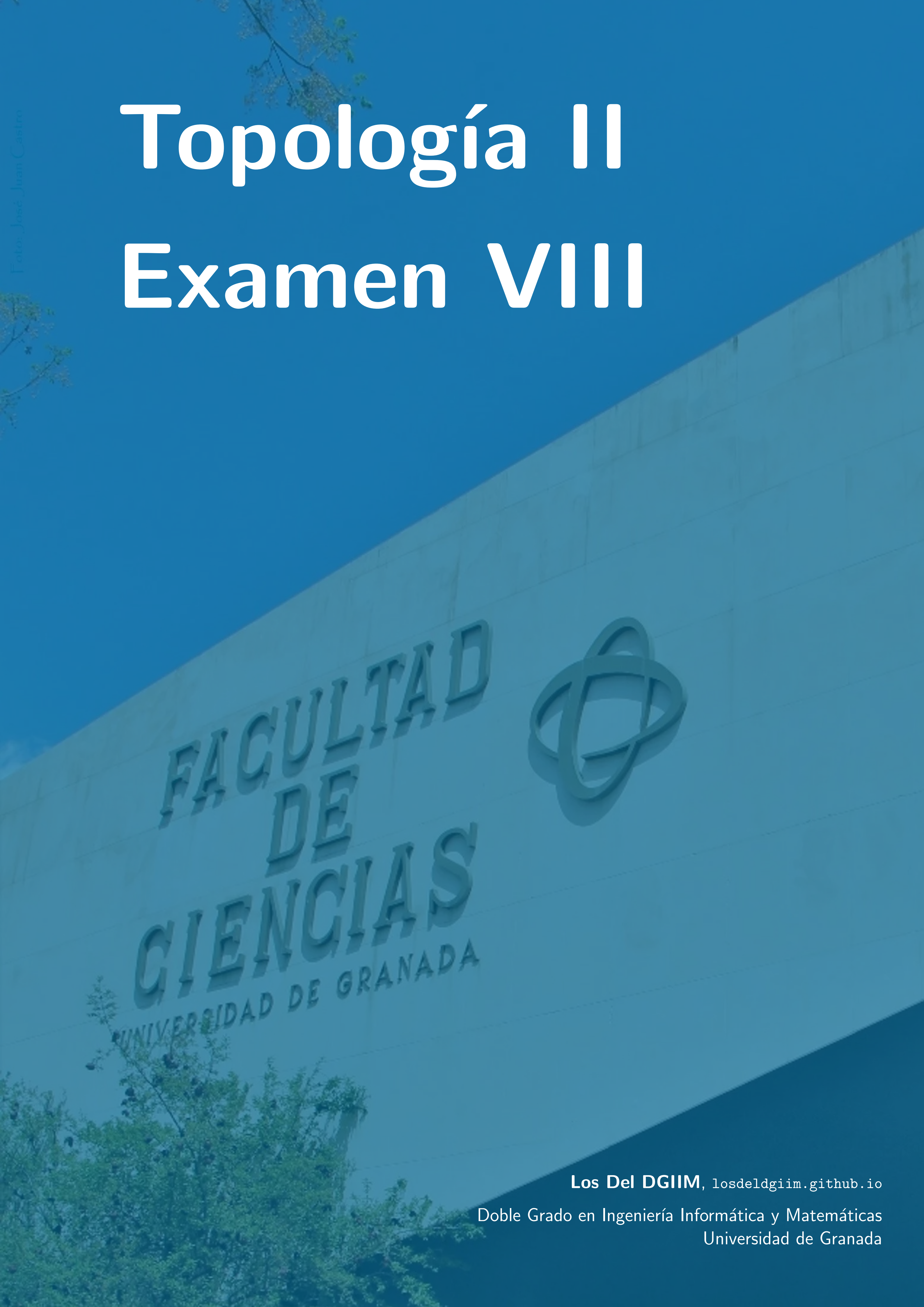


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología II
Examen VIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Asignatura Topología II.

Curso Académico 2020/21.

Grado Grado en Matemáticas.

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

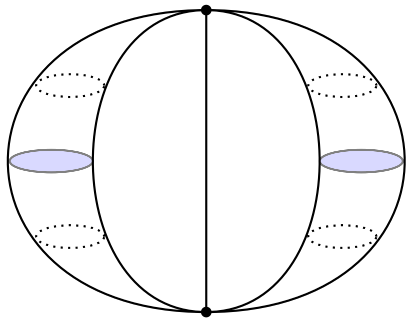
Duración 3 horas.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - \cos(x)^3 + \cos(x^3) & = & \pi \\ \frac{1}{y} + e^x + e^{y^4+1} - \cos(x^4-1) - \cos(\operatorname{sen}(x)) & = & -\pi \end{array}\right.$$

tiene al menos una solución en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Determina el grupo fundamental del subespacio topológico de $\mathbb{R}^3$ que se muestra en el siguiente dibujo.



Ejercicio 3 (1.5 puntos)**.** Sea X el subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$: $X = \mathbb{S}^1 \cup \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Determinar, salvo homeomorfismo, el recubridor universal de X.

Ejercicio 4 (1.5 puntos)**.** Sea $\pi : \tilde{X} \to X$ una aplicación recubridora entre espacios topológicos conexos y localmente arcoconexos. Sean $f_1, f_2 : Y \to \tilde{X}$ dos aplicaciones continuas, siendo Y un espacio conexo y localmente arcoconexo. Supogamos

a) $\pi \circ f_1 = \pi \circ f_2$.

b) existe $y_0 \in Y$ tal que $f_1(y_0) = f_2(y_0)$.

c) el conjunto $\{y \in Y : f_1(y) = f_2(y)\}$ es cerrado.

Demostrar que $f_1 = f_2$ globalmente.

Ejercicio 5 (1.5 puntos)**.** Consideremos la superficie topológica S con presentación poligonal

$$\mathcal{P} = \langle a, b, c, d, e, f, g, h, i, j : ae^{-1}g^{-1}ja^{-1}bg, ch^{-1}dfh, ecdifi^{-1}j^{-1}b^{-1} \rangle.$$

Demostrar que S es conexa y determinar a qué superficie modelo es homeomorfa.

Ejercicio 6. Demostrar usando transformaciones elementales que la suma conexa $\mathbb{T}\#\mathbb{T}\#\mathbb{RP}^2$ es homeomorfa a $\mathbb{T}\#\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2$, siendo $\mathbb{T}$ un toro y $\mathbb{RP}^2$ un plano proyectivo.