Geometría III
Examen VII

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría III
Examen VII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos
Irina Kuzyshyn Basarab

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría III.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Martínez López.

Descripción Convocatoria Ordinaria[1].

Fecha 22 de enero de 2023.

Duración 3 horas.

[1] El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Razona:

1. (1,5 puntos) Sean $p_1 \neq p_2$ dos puntos distintos de un plano afin euclideo $\mathcal{A}$. Prueba que
$$\{p \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{pp_1}, \overrightarrow{pp_2} \rangle = 0\}$$
es una circunferencia. Calcula el centro y el radio de la misma.

   Sea $v_1 = \dfrac{\overrightarrow{m_{p_1p_2}p_2}}{\|\overrightarrow{m_{p_1p_2}p_2}\|}$ vector normalizado y v_2 el único vector tal que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es una base ortonormal positivamente orientada.

   Sea el sistema de referencia euclídeo $R = \{m_{p_1p_2}, \mathcal{B}\}$. Sea $r := \dfrac{\|\overrightarrow{p_1p_2}\|}{2}$

   Tenemos que $p_{1_R} = (-r, 0), p_{2_R} = (r, 0)$. Sea $p_R = (x, y)$. Tenemos que:
$$0 = \langle \overrightarrow{pp_1}, \overrightarrow{pp_2} \rangle = \langle (-r - x, -y), (r - x, -y) \rangle$$
$$-(r + x)(r - x) + y^2 = -(r^2 - x^2) + y^2 = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$
$$\Longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

   Por tanto, se trata de una circunferencia de centro $m_{p_1p_2}$ y radio r.

2. (1,5 puntos) Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos planos afines distintos y $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ las simetrias especulares respecto a S_1 y S_2 respectivamente. Clasificar $f = f_1 \circ f_2$.
Como nos dicen que los planos son distintos, distinguimos varios casos, que estén paralelos y que se corten, concretamente en una recta y en este último caso distinguiremos el caso de que sean ortogonales.

   a) Empecemos por el caso de que sean paralelos. En este caso tendremos una traslación. Veámoslo:
   Sea $p \in S_2$ y una base ortonormal $\mathcal{B}$ tal que los dos primeros vectores generen los planos. Sea entonces $\mathcal{R} = \{p, \mathcal{B}\}$ nuestro sistema de referencia. Tenemos entonces que las matrices asociadas a las dos reflexiones son las siguientes:
$$M(f_2, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   Sea $x = d(S_1, S_2)$ la distancia entre los dos planos:
$$M(f_1, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2x & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Donde $(0, 0, 2x)$ es la imagen por la segunda reflexión del origen de nuestro sistema de referencia. Ahora bien, sabemos que la composición de aplicaciones afines viene dada por el producto de las matrices asociadas:

$$f_1 \circ f_2 = M(f_1, \mathcal{R}) \cdot M(f_2, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2x & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces una traslación de vector ortogonal a los planos y de módulo el doble de la distancia entre los planos.

b) Veamos ahora el caso de que los planos sean ortogonales. En este caso tenemos una reflexión axial. Veámoslo:
Sea $r = S_1 \cap S_2$, la recta de intersección entre los dos planos. Tomo como sistema de referencia $\mathcal{R} = \{p, \mathcal{B}\}$ tal que $p \in r$ y $\mathcal{B}$ es una base ortonormal cuyo primer vector esta en la recta r y los otros dos en los planos S_1 y S_2 respectivamente. Las matrices asociadas a las dos reflexiones que tratamos en el sistema de referencia que acabamos de definir son las siguientes:

$$\mathcal{M}(f_1, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}(f_2, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igual que antes, para sacar la matriz de la composición multiplicamos las matrices de las aplicaciones:

$$f_1 \circ f_2 = \mathcal{M}(f_1, \mathcal{R}) \cdot \mathcal{M}(f_2, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vemos así que es una reflexión axial que deja fija a la recta r.

c) Por último veamos el caso de que los planos se corten pero no sean ortogonales. En este caso tendremos un giro. Veámoslo:
Sea $r = S_1 \cap S_2$, la recta de intersección entre los dos planos. Tenemos que la recta es invariante, pues los planos son invariantes para cada simetría. Sea θ el ángulo entre los dos planos (viéndolo desde el primer plano al segundo que reflejamos). Tenemos pues que nuestra f es un giro de ángulo 2θ respecto a la recta r.
Podemos también verlo de la seguiente manera: si cortamos nuestros planos por uno perpendicular a ambos tenemos dos rectas que se cortan en un punto $p \in r$ y nuestra f en ese plano sabemos que efectivamente es un giro de ángulo 2θ respecto del punto de corte.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Se considera la aplicación $f : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, siendo $P_2(\mathbb{R})$ el espacio de polinomios de orden 2 con coeficientes reales,

$$f(p(x)) = (p(0) + 1, p(1), p'(1) - 1).$$

1. (1 punto) Demuestra que f es afín y encuentra la expresión matricial de f respecto de los sistemas de referencia canónicos $\mathcal{R}'_0$ de $P_2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$. (En $\mathcal{R}'_0$, el polinomio 0 representa el origen del sistema de referencia y $\mathcal{B}'_0 = \{1, x, x^2\}$ la base asociada.)
   Sea $p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2(\mathbb{R})$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Luego tenemos:

$$f(p(x)) = (a + 1, a + b + c, 2c + b - 1)$$

   Pera ver que es afín tenemos que ver que la asociada es lineal. Para ello sean:

$$p(x) = a + bx + cx^2,\ q(x) = a' + b'x + c'x^2$$

$$s(x) = d + ex + fx^2,\ t(x) = d' + e'x + f'x^2$$

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)} = f(q) - f(p) = (a' - a, a' - a + b' - b + c' - c, 2c' - 2c + b' - b)$$

   Si ahora llamamos $u = a' - a, v = b' - b, w = c' - c$ tenemos que:

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq}) = (u, u + v + w, 2w + v)$$

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{st}) = \overrightarrow{f(s)f(t)} = f(t) - f(s) = (d' - d, d' - d + e' - e + f' - f, 2f' - 2f + e' - e)$$

   Si ahora llamamos $u' = d' - d, v' = e' - e, w' = f' - f$ tenemos que:

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{st}) = (u', u' + v' + w', 2w' + v')$$

   Tenemos que ver que la $\overrightarrow{f}$ es lineal.

$$\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{st} = (u + u') + (v + v')x + (w + w')x^2$$

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{st}) = (u + u', u + u' + v + v' + w + w', 2(w + w') + v + v') =$$
$$(u, u + v + w, 2w + v) + (u', u' + v' + w', 2w' + v') = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{st})$$
$$\overrightarrow{f}(\lambda\overrightarrow{pq}) = (\lambda u, \lambda u + \lambda v + \lambda w, \lambda 2w + \lambda v) =$$
$$\lambda(u, u + v + w, 2w + v) = \lambda\overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq})$$

   Tenemos así demostrado que la asociada es lineal y que por tanto f es afín. Calculamos ahora la expresión matricial de f.

$$f(0) = (1, 0, -1)$$

$$\overrightarrow{f}(1) = (1, 1, 0)$$
$$\overrightarrow{f}(x) = (0, 1, 1)$$
$$\overrightarrow{f}(x^2) = (0, 1, 2)$$
$$\mathcal{M}(f, \mathcal{R}'_0, \mathcal{R}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. (1 punto) Comprueba que $S = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) : p(0) + p(1) = 2\}$ es un subespacio de $P_2(\mathbb{R})$ y determina sus ecuaciones implícitas en $\mathcal{R}'_0$.
Sea $p(x) = a + bx + cx^2 \in S$; $p(0) = a$, $p(1) = a + b + c$. Luego tenemos que se cumple lo siguiente:

$$2a + b + c = 2 \text{ lo cual es la ecuación implícita.}$$

Veamos ahora que es subespacio afín. Tenemos que escribir S de la siguiente forma:

$$S = q + U \text{ con U subespacio vectorial.}$$

Claramente $q(x) = 1 \in S$ y sea U tal que se cumple la ecuación implícita homogénea $2a + b + c = 0$. Veamos la igualdad por doble inclusión.

$\subseteq$) Sea $p(x) = a + bx + cx^2 \in S \implies 2a + b + c = 2$

$$\overrightarrow{1p} = p - 1 = (a-1) + bx + cx^2 \text{ ¿} \in U?$$
$$2(a-1) + b + c = -2 + 2a + b + c = -2 + 2 = 0 \implies \overrightarrow{1p} \in U$$

$\supseteq$) Sea $v = a + bx + cx^2 \in U \implies 2a + b + c = 0$

$$p = 1 + v = 1 + a + bx + cx^2 \text{ ¿} \in S?$$
$$2(a+1) + b + c = 2a + 2 + b + c = 0 + 2 = 2 \implies p \in S$$

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Clasifica euclídeamente la siguiente cónica encontrando el sistema de referencia euclídeo en el que adopta su ecuación reducida. Calcula sus elementos euclídeos (ejes, centro, focos, asíntotas):

$$-7 - 4x + 2x^2 + 4y + 8xy + 2y^2 = 0.$$

Tenemos que la matriz que representa la cónica es la siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico de A:

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 16 = 4 + \lambda^2 - 4\lambda - 16 =$$
$$\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0 \iff \lambda = 6 \text{ ó } \lambda = -2$$

Tenemos un valor propio positivo y otro negativo, tenemos por tanto una hipérbola. Faltaría ahora calcular los elementos euclídeos: los ejes, el centro, los focos y asíntotas.

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Estudia si existe una proyectividad $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ del plano proyectivo real en el plano proyectivo real, verificando

$$\begin{aligned} f(0:1:0) &= (1:1:1), \\ f(0:0:1) &= (1:0:0), \\ f(1:0:-1) &= (0:1:0), \\ f(2:-2:1) &= (0:0:1). \end{aligned}$$

En caso afirmativo calcula su expresión en coordenadas homogéneas usuales y decide si es o no biyectiva (homografía).