# Análisis Funcional
# Examen IV


Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Análisis Funcional
# Examen IV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Daniel Morán Sánchez

Granada, 2025

**Asignatura** Análisis Funcional.

**Curso Académico** 2024/25.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Descripción** Examen Ordinario.

**Ejercicio 1** (3 puntos)**.** Sea $X = C([0,1],\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$. Se define

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt, \qquad \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} \qquad \forall f \in X$$

y se escribe $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_\infty = (X, \|\cdot\|_\infty)$. Definimos el funcional lineal $\delta : X \to \mathbb{R}$ por

$$\delta(f) = f(0) \qquad \forall f \in X$$

a) [**0.75 puntos**] ¿Son equivalentes $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $X$? Justifica tu respuesta.

b) [**0.75 puntos**] ¿Es $X_1$ completo? Justifica tu respuesta.

c) [**0.75 puntos**] Demuestra que $\delta \in X_\infty^*$ y calcula su norma.

d) [**0.75 puntos**] ¿Es $\delta$ continuo respecto a $\|\cdot\|_1$? Justifica tu respuesta.

**Ejercicio 2** (3 puntos)**.** Sean $S : c_0 \to c_0$ y $T : l_1 \to l_1$ operadores lineales y supongamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} [Sx](k)y(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)[Ty](k) \qquad \forall x \in c_0, \quad \forall y \in l_1$$

Demuestra que $S$ y $T$ son continuos.

**Ejercicio 3** (4 puntos)**.** Sean $1 < p < \infty$ ($p' = p/p-1$), $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto medible y $T : L^{p'}(\Omega) \to L^p(\Omega)^*$ definida mediante

$$\langle Tu, f\rangle = \int_\Omega uf \qquad \forall u \in L^{p'}(\Omega), \quad \forall f \in L^p(\Omega)$$

a) [**1 punto**] Prueba que $\|Tu\|_{L^p(\Omega)^*} = \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}$ y que $T$ es inyectivo.

b) [**1 punto**] Usando que $L^p(\Omega)$ es reflexivo, prueba que $T(L^{p'}(\Omega)) = L^p(\Omega)^*$.

Si para $\Omega = ]0,1[$ consideramos la sucesión de funciones $\{g_n\}$ definidas mediante $g_n(x) = n^{1/p}e^{-nx}$ para todo $x \in ]0,1[$:

c) [**0.5 puntos**] prueba que $\{g_n\} \to 0$ a.e. y que $\{g_n\}$ es acotada en $L^p(\Omega)$.

d) [**0.5 puntos**] Demuestra que $\{g_n\} \not\to 0$ en $L^p(\Omega)$.

e) [**1 punto**] Usando que $C_c(0,1)$ es denso en $L^{p'}(\Omega)$, prueba que $\{g_n\} \to 0$ en la topología débil $\sigma(L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega))$.

**Ejercicio 1** (3 puntos)**.** Sea $X = C([0,1],\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$. Se define

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt, \qquad \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} \qquad \forall f \in X$$

y se escribe $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_\infty = (X, \|\cdot\|_\infty)$. Definimos el funcional lineal $\delta : X \to \mathbb{R}$ por

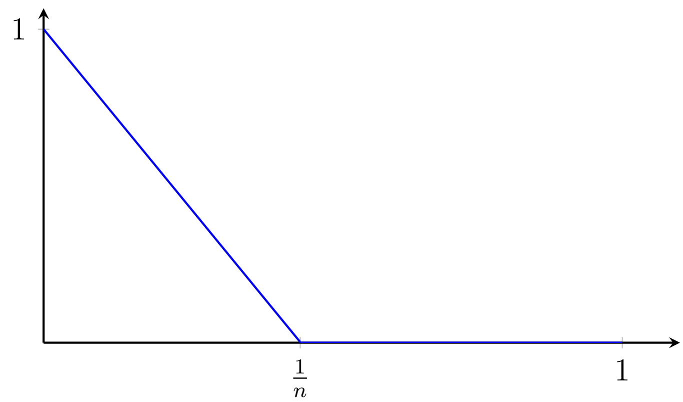
$$\delta(f) = f(0) \qquad \forall f \in X$$

a) **[0.75 puntos]** ¿Son equivalentes $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $X$? Justifica tu respuesta.

No pueden ser equivalentes: si fueran equivalentes tendríamos que las topologías que da cada norma serían iguales, pero sin embargo tenemos que $\delta$ es continua para $\|\cdot\|_\infty$ y no es continua para $\|\cdot\|_1$, por lo que sus topologías no pueden contener los mismos abiertos (recordamos que $\delta$ es continua si y solo si la preimagen de todo abierto de $\mathbb{R}$ es un abierto en la topología que consideramos en $X$), por lo que las dos normas no pueden ser equivalentes.

b) **[0.75 puntos]** ¿Es $X_1$ completo? Justifica tu respuesta.

No es completo, si consideramos la sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $X$ donde cada $f_n$ es la función que en el intervalo $[0, 1/n]$ une el punto $(0,1)$ con el $(1/n, 0)$ y en el intervalo $[1/n, 1]$ es constantemente igual a 0, tendremos que la gráfica de cada función es:




c) **[0.75 puntos]** Demuestra que $\delta \in X_\infty^*$ y calcula su norma. Veamos que $\delta \in X_\infty^*$:

- $\delta$ es lineal, pues si $f, g \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que:

$$\delta(\lambda f + g) = (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda\delta(f) + \delta(g)$$

- $\delta$ es continuo, pues si $f \in X$ tenemos:

$$|\delta(f)| = |f(0)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$$

Por lo que $\delta \in X_\infty^*$. De hecho, en el último apartado hemos probado además que $\|\delta\| \leqslant 1$. Veamos que $\|\delta\| = 1$, puesto que si consideramos cualquier función $f \in X$ de forma que $\max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)| = |f(0)|$ tenemos entonces que:

$$|\delta(f)| = |f(0)| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$$

d) **[0.75 puntos]** ¿Es $\delta$ continuo respecto a $\|\cdot\|_1$? Justifica tu respuesta.

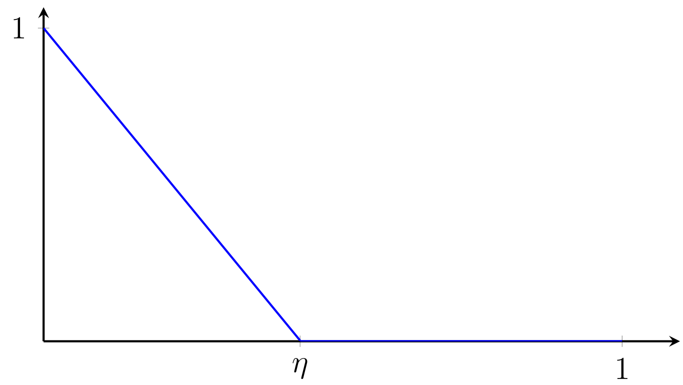
Si $\delta$ fuera continuo respecto a $\|\cdot\|_1$, en particular será continua en la función constantemente igual a 0, por lo que:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 : \|f\|_1 < \eta \Longrightarrow |\delta(f)| < \varepsilon$$

Es decir, si $\delta$ fuera continua podríamos acotar el valor de cualquier función $f \in X$ en 0 sabiendo acotar el valor de su integral. No parece que esto sea posible, por lo que tratamos de probar que $\delta$ no es continua. Para ello, buscamos probar que:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \eta > 0\ \exists f \in X \quad \text{con} \quad \|f\|_1 < \eta \quad \text{y} \quad |\delta(f)| > \varepsilon$$

Si consideramos $\varepsilon = 1/2$ y nos dan $\eta > 0$, si consideramos la función cuya gráfica es:




Es decir, que en el intervalo $[0, \eta]$ es la recta que une el punto $(0, 1)$ con el $(\eta, 0)$ y en el intervalo $[\eta, 1]$ vale 0, tenemos que $f \in X$, así como que:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\ dt = \int_0^1 f(t)\ dt = \int_0^\eta f(t)\ dt + \int_\eta^1 f(t)\ dt = \frac{\eta}{2} < \eta$$

(ya que el área del triángulo es base por altura entre 2) y tenemos que:

$$|\delta(f)| = |f(0)| = 1 > \frac{1}{2}$$

Acabamos de probar que $\delta$ no es continua para $\|\cdot\|_1$.

**Ejercicio 2** (3 puntos)**.** Sean $S : c_0 \to c_0$ y $T : l_1 \to l_1$ operadores lineales y supongamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty}[Sx](k)y(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)[Ty](k) \qquad \forall x \in c_0, \quad \forall y \in l_1$$

Demuestra que $S$ y $T$ son continuos.

Es el mismo que el ejercicio 3 del Examen 3

**Ejercicio 3** (4 puntos)**.** Sean $1 < p < \infty$ ($p' = p/p-1$), $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto medible y $T : L^{p'}(\Omega) \to L^p(\Omega)^*$ definido por

$$\langle Tu, f\rangle := \int_\Omega uf, \qquad \forall u \in L^{p'}(\Omega),\ \forall f \in L^p(\Omega).$$

a) **Prueba que $\|Tu\|_{L^p(\Omega)^*} = \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}$ y que $T$ es inyectivo.**

Sea $u \in L^{p'}(\Omega)$. Por definición de la norma en el dual,

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} = \sup_{\|f\|_{L^p(\Omega)}\leq 1} \left|\int_\Omega uf\right|.$$

Por la desigualdad de Hölder,

$$\left|\int_\Omega uf\right| \leq \|u\|_{L^{p'}(\Omega)} \|f\|_{L^p(\Omega)},$$

y por tanto

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} \leq \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Veamos ahora la desigualdad contraria. Si $u = 0$ es trivial. Supongamos $u \neq 0$ y definimos

$$f_0 := u\,|u|^{p'-2} = \operatorname{sgn}(u)\,|u|^{p'-1}.$$

Primero probamos que $f_0 \in L^p(\Omega)$. En efecto,

$$|f_0|^p = |u|^{p(p'-1)}.$$

Como $p' = \frac{p}{p-1}$, se tiene $p' - 1 = \frac{1}{p-1}$ y por tanto

$$p(p'-1) = \frac{p}{p-1} = p'.$$

Luego

$$\int_\Omega |f_0|^p = \int_\Omega |u|^{p'} < \infty,$$

y así $f_0 \in L^p(\Omega)$. Además,

$$\|f_0\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u|^{p'} = \|u\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} \quad\Longrightarrow\quad \|f_0\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|^{\frac{p'}{p}}_{L^{p'}(\Omega)} = \|u\|^{p'-1}_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Ahora evaluamos el funcional en $f_0$:

$$\int_\Omega uf_0 = \int_\Omega u\,u\,|u|^{p'-2} = \int_\Omega |u|^{p'} = \|u\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Consideramos entonces $f := \dfrac{f_0}{\|f_0\|_{L^p(\Omega)}}$, que satisface $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Se tiene:

$$\begin{aligned}\|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} &= \sup_{\|g\|_{L^p(\Omega)}\leq 1} |\langle Tu, g\rangle| = \sup_{\|g\|_{L^p(\Omega)}\leq 1} \left|\int_\Omega ug\right| \\ &\geq \left|\int_\Omega u\,f\right| = \frac{\int_\Omega |u|^{p'}}{\|f_0\|_{L^p(\Omega)}} = \frac{\|u\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}}{\|u\|^{p'-1}_{L^{p'}(\Omega)}} = \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Junto con la desigualdad anterior concluimos

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Finalmente, $T$ es una isometría lineal, y sabemos que toda isometría lineal es inyectiva: si $Tu = 0$ porque

$$0 = \|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|u\|_{L^{p'}(\Omega)} \quad \Longrightarrow \quad u = 0 \text{ a.e.}$$

b) **Usando que $L^p(\Omega)$ es reflexivo, prueba que $T(L^{p'}(\Omega)) = L^p(\Omega)^*$.**

Por el apartado anterior, $T$ es una isometría lineal. Como $L^{p'}(\Omega)$ es Banach, se sigue que $T(L^{p'}(\Omega))$ es Banach y por tanto un subespacio cerrado de $L^p(\Omega)^*$. Para ver que es todo el dual, basta probar que $T(L^{p'}(\Omega))$ es denso en $L^p(\Omega)^*$.

Usamos el último corolario del teorema de Hahn–Banach: un subespacio $M$ de un espacio normado $E$ es denso si y solo si el único funcional continuo de $E^*$ que se anula en $M$ es el funcional nulo.

Sea $\Phi \in L^p(\Omega)^{**}$ tal que

$$\langle \Phi, Tu \rangle = 0 \qquad \forall u \in L^{p'}(\Omega).$$

Como $L^p(\Omega)$ es reflexivo, existe $f \in L^p(\Omega)$ tal que $\Phi = J(f)$, donde $J$ es la inmersión canónica. Entonces

$$0 = \langle J(f), Tu \rangle = \langle Tu, f \rangle = \int_\Omega uf \qquad \forall u \in L^{p'}(\Omega).$$

Esto implica que $f = 0$ *a.e.* , luego $\Phi = 0$. Por el teorema de Hahn–Banach, $T(L^{p'}(\Omega))$ es denso pero además sabíamos que era cerrado, por lo que

$$T(L^{p'}(\Omega)) = L^p(\Omega)^*.$$

Ahora supongamos $\Omega = (0, 1)$ y definamos

$$g_n(x) = n^{1/p} e^{-nx}, \qquad x \in (0, 1).$$

c) **Prueba que $g_n \to 0$ a.e. y que $\{g_n\}$ es acotada en $L^p(\Omega)$.**

Para todo $x \in (0, 1)$,

$$g_n(x) = n^{1/p} e^{-nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ya que la exponencial domina a cualquier potencia. Luego $g_n \to 0$ a.e.

Además,

$$\|g_n\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_0^1 ne^{-npx}\, dx = \frac{1}{p}\left(1 - e^{-np}\right) \leq \frac{1}{p}.$$

Por tanto, $\{g_n\}$ es acotada en $L^p(\Omega)$.

d) **Demuestra que $g_n \not\to 0$ en $L^p(\Omega)$.**

Se tiene

$$\|g_n\|_{L^p(\Omega)} = \left(\frac{1}{p}(1 - e^{-np})\right)^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{p^{1/p}} \neq 0.$$

Luego $\|g_n\|_{L^p(\Omega)}$ no converge a 0, por tanto .

e) **Usando que $C_c(0,1)$ es denso en $L^{p'}(\Omega)$, prueba que $g_n \to 0$ en la topología débil $\sigma(L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega))$.**

Recordemos que $g_n \rightharpoonup 0$ en $\sigma(L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega))$ significa que

$$\int_0^1 g_n(x)\, u(x)\, dx \longrightarrow 0 \qquad \forall\, u \in L^{p'}(0,1),$$

es decir, que toda forma lineal continua sobre $L^p$ (identificada con un $u \in L^{p'}$) aplicada a $g_n$ converge a 0.

Sea $u \in L^{p'}(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$. Como $C_c(0,1)$ es denso en $L^{p'}(\Omega)$, existe $\varphi \in C_c(0,1)$ tal que

$$\|u - \varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} < \varepsilon.$$

Entonces,

$$\left|\int_0^1 g_n u\right| \leq \left|\int_0^1 g_n(u-\varphi)\right| + \left|\int_0^1 g_n\varphi\right|.$$

Para el primer término, por Hölder,

$$\left|\int_0^1 g_n(u-\varphi)\right| \leq \|g_n\|_{L^p(\Omega)}\|u-\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \frac{1}{p^{1/p}}\varepsilon \qquad \forall\varepsilon > 0, \forall u \in L^{p'}(\Omega)$$

Para el segundo término, como $\varphi$ es continua con soporte compacto y $g_n \to 0$ a.e., por convergencia dominada,

$$\int_0^1 g_n\varphi \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n u = 0 \qquad \forall u \in L^{p'}(\Omega),$$

es decir,

$$g_n \rightharpoonup 0 \quad \text{en } \sigma(L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega)).$$