Ecuaciones Diferenciales I

Examen XVII

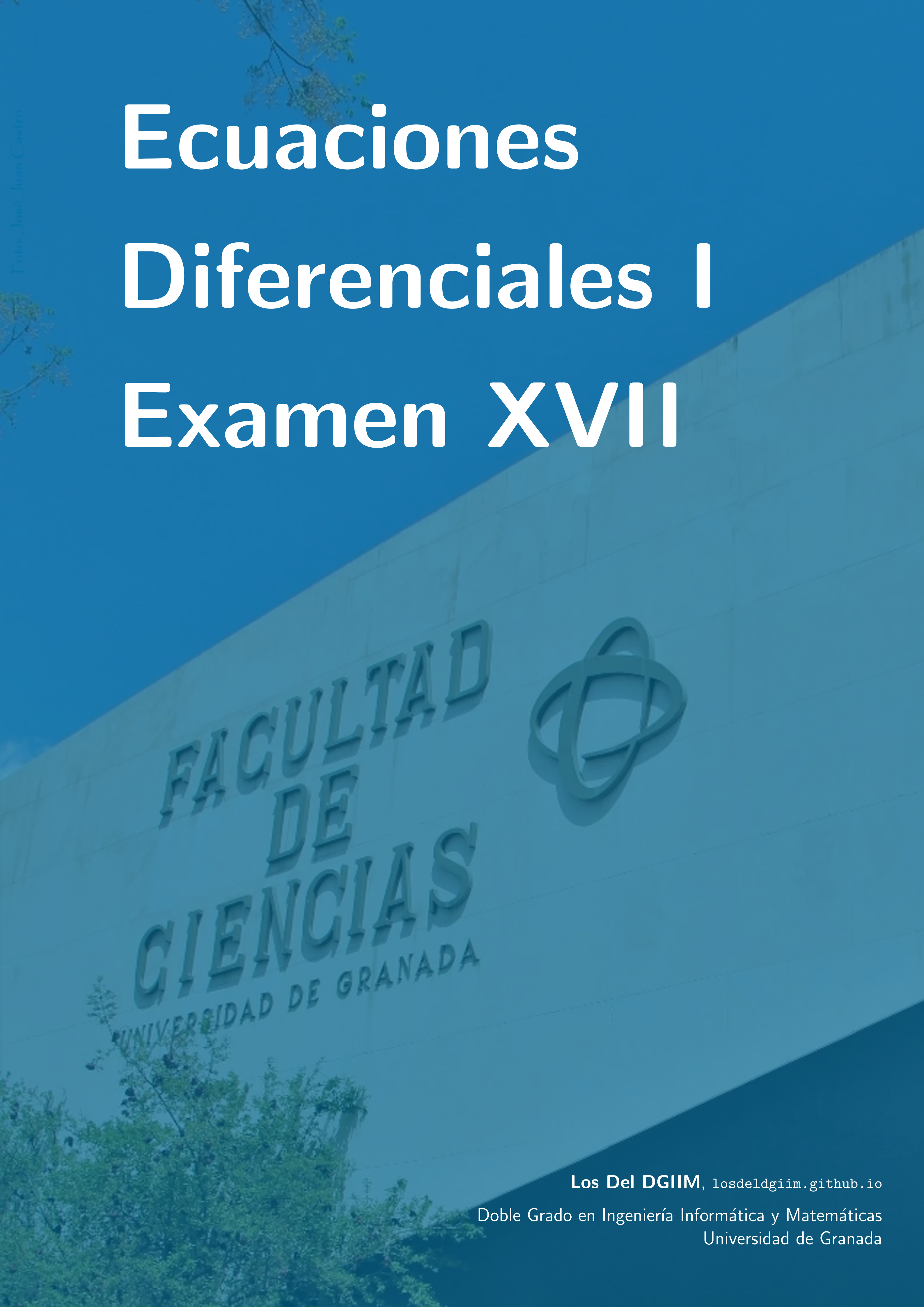

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen XVII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2015-16.

Grupo B.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial C.

Fecha 8 de Junio de 2016.

Ejercicio 1. Calcula e^{tA} si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hay dos opciones:

A partir de la definición: Tenemos que:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

Calculemos la potencia $n-$ésima de A. Para $n = 2$, tenemos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2$$

Por tanto, tenemos que:

$$A^{2n} = Id_2, \quad A^{2n+1} = A \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto:

$$e^{tA} = Id_2 + tA + \frac{t^2}{2!} Id_2 + \frac{t^3}{3!} A + \frac{t^4}{4!} Id_2 + \cdots = \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^{2n}}{(2n)!} & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^{2n}}{(2n)!} \end{pmatrix}$$

Resolver dichas series es complejo, por lo que vamos a intentar resolverlo de otra forma.

Usando las Ecuaciones Diferenciales: Buscamos oftener una matriz fundamental Φ del sistema dado por $x' = A(t)x$. Calculamos los valores propios de A:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Por tanto, obtenemos la siguiente matriz fundamental:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz fundamental del sistema en $t_0 = 0$ es:

$$\begin{aligned} \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \Phi(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$e^{tA} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Encuentra una matriz fundamental del sistema

$$x_1' = 3x_1 + x_2, \quad x_2' = 3x_2 + x_3, \quad x_3' = 3x_3.$$

Definimos $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dados por:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Al no haber definido una condición inicial, la solución no será única. Al ser similar a un sistema triangular, procedemos de forma similar obteniendo soluciones de forma escalonada:

$$x_3' = 3x_3 \Longrightarrow x_3(t) = c_3 e^{3t} \qquad c_3 \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} x_2' = 3x_2 + c_3 e^{3t} \Longrightarrow x_2(t) = e^{3t}\left(c_2 + \int e^{-3t} c_3 e^{3t} dt\right) &= \\ = c_2 e^{3t} + c_3 t e^{3t} & \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1' = 3x_1 + c_2 e^{3t} + c_3 t e^{3t} \Longrightarrow x_1(t) = e^{3t}\left(c_1 + \int e^{-3t}\left(c_2 e^{3t} + c_3 t e^{3t}\right) dt\right) &= \\ = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + c_3 \cdot \frac{t^2}{2} \cdot e^{3t} & \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que la solución general del sistema es:

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + \frac{c_3 t^2}{2} e^{3t} \\ c_2 e^{3t} + c_3 t e^{3t} \\ c_3 e^{3t} \end{pmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Por tanto, una matriz solución del sistema es:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & t e^{3t} & t^2/2 e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & t e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

Además, es matriz fundamental del sistema, ya que:

$$\det \Phi(t) = e^{9t} \neq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 3. Se considera el problema de valores iniciales

$$x' = 3x + \operatorname{sen} t, \quad x(0) = 0$$

y se define la correspondiente sucesión de iterantes de Picard $\{x_n(t)\}_{n \geqslant 0}$. Calcula $x_2(t)$.

Sea $x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sucesión de iterantes de Picard definida por:

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= 0 \\
x_{n+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} [a(s)x_n(s) + b(s)]ds \\
&= \int_0^t [3x_n(s) + \operatorname{sen} s]ds \qquad n \geqslant 0
\end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \int_0^t [3x_0(s) + \operatorname{sen} s]ds = \int_0^t \operatorname{sen} s ds = [-\cos s]_0^t = 1 - \cos t \\
x_2(t) &= \int_0^t [3x_1(s) + \operatorname{sen} s]ds = \int_0^t [3(1-\cos s) + \operatorname{sen} s]ds = \int_0^t [3 - 3\cos s + \operatorname{sen} s]ds = \\
&= [3s - 3\operatorname{sen} s - \cos s]_0^t = 3t - 3\operatorname{sen} t - \cos t + 1
\end{aligned}$$

Ejercicio 4. Se emplea la norma Euclídea en $\mathbb{R}^2$ y la norma matricial asociada en $\mathbb{R}^2$. Calcula $\|R\|$ para la matriz $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Para $x \in \mathbb{R}^2$, notaremos $x = (x_1, x_2)$. La norma matricial asociada a la norma Euclídea en $\mathbb{R}^2$ es:

$$\begin{aligned}
\|R\| &= \max_{\|x\|=1} \|Rx\| = \max_{\|x\|=1} \left\| \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \\
&= \max_{\|x\|=1} \left\| \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_2\operatorname{sen}\theta \\ x_1\operatorname{sen}\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix} \right\| = \\
&= \max_{\|x\|=1} \sqrt{(x_1\cos\theta - x_2\operatorname{sen}\theta)^2 + (x_1\operatorname{sen}\theta + x_2\cos\theta)^2} = \\
&= \max_{\|x\|=1} \sqrt{x_1^2\cos^2\theta - \cancel{2x_1x_2\cos\theta\operatorname{sen}\theta} + x_2^2\operatorname{sen}^2\theta + x_1^2\operatorname{sen}^2\theta + \cancel{2x_1x_2\cos\theta\operatorname{sen}\theta} + x_2^2\cos^2\theta} = \\
&= \max_{\|x\|=1} \sqrt{x_1^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + x_2^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)} = \\
&= \max_{\|x\|=1} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \\
&= \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $\|R\| = 1$. Interpretando R como la matriz asociada a una aplicación lineal, tenemos que se trata de la matriz de rotación de ángulo θ. Por tanto, notando también como R a la aplicación lineal asociada, tenemos que:

$$R(\mathbb{S}_1) = \mathbb{S}_1 \Longrightarrow \|R\| = \max_{\|x\|=1} \|Rx\| = \max_{x\in\mathbb{S}_1} \|Rx\| = \max_{x\in\mathbb{S}_1} \|x\| = 1$$

En cualquier caso, vemos que $\|R\| = 1$.

Ejercicio 5. Se considera una sucesión de funciones continuas $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ que cumplen $f_0(t) = 1 + t$, $f_1(t) = 4 + t$,

$$|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leqslant 7 \int_0^t |f_n(s) - f_{n-1}(s)|\, ds \qquad \text{si } n \geqslant 1, t \in [0,1].$$

Prueba que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$.

Usaremos para ello el Test de Weierstrass. Para ello, veamos los primeros términos. Para todo $t \in [0,1]$, tenemos:

$$\begin{aligned}
|f_1(t) - f_0(t)| &= |4 + t - (1+t)| = 3 \\
|f_2(t) - f_1(t)| &\leqslant 7\int_0^t |f_1(s) - f_0(s)|ds = 7\int_0^t 3ds = 7\cdot 3\cdot t \\
|f_3(t) - f_2(t)| &\leqslant 7\int_0^t |f_2(s) - f_1(s)|ds \leqslant 7\int_0^t 7\cdot 3\cdot sds = 7^2\cdot 3\cdot \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

Probemos por tanto por inducción que:

$$|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leqslant 7^n \cdot 3 \cdot \frac{t^n}{n!}$$

- Para $n = 1$, se tiene.
- Supongamos que se cumple para n, veamos que se cumple para $n+1$:

$$\begin{aligned}
|f_{n+2}(t) - f_{n+1}(t)| \leqslant 7\int_0^t |f_{n+1}(s) - f_n(s)|ds \leqslant 7\int_0^t 7^n\cdot 3\cdot \frac{s^n}{n!}ds = \\
= 7^{n+1}\cdot 3\cdot \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Por tanto, acotando t por 1, tenemos que:

$$|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leqslant 7^n \cdot 3 \cdot \frac{t^n}{n!} \leqslant 3\cdot \frac{7^n}{n!}$$

Definimos por tanto la sucesión de números reales:

$$M_n = 3\cdot \frac{7^n}{n!}$$

De esta forma, por lo visto anteriormente tenemos que:

$$|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leqslant M_n \qquad \forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudiemos ahora la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{n!} = 3e^7 < \infty$$

Por tanto, por el Test de Weierstrass, tenemos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$.