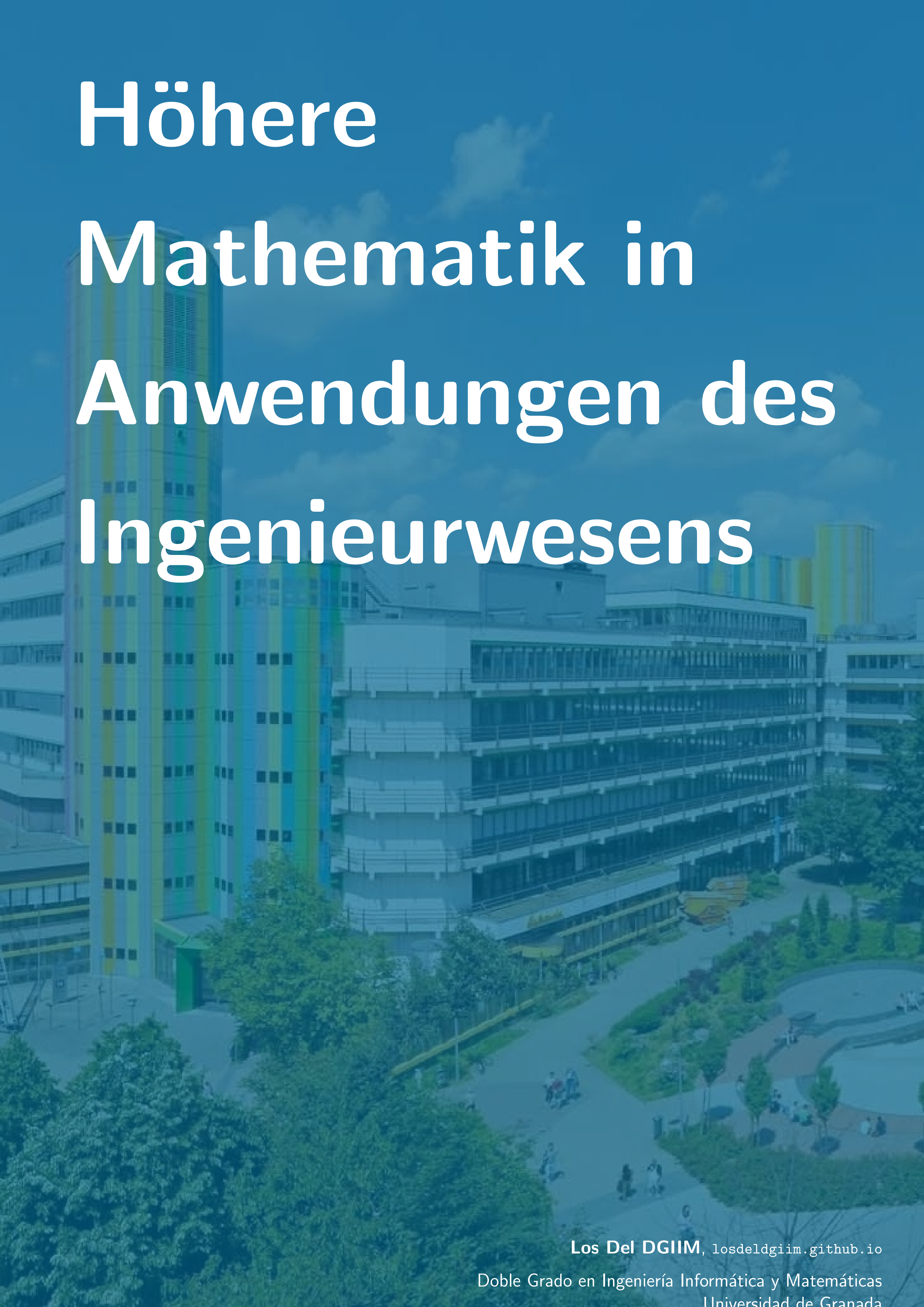

Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Übungs Blätter

1.3. Rechnen mit physikalischen Größen

Ejercicio 1.3.1 (Fährverbindung)**.** Eine Fähre bewegt sich mit der Eigengeschwindigkeit $v_0 = 4\,\mathrm{m/s}$ (relativ zum Fluss) vom Uferpunkt A aus auf kürzestem Weg zum gegenüberliegenden Flussufer (Punkt B; Abb. 1.1).

1. Unter welchem Winkel α muss die Fähre gegen die Strömung gesteuert werden, wenn die Geschwindigkeit der Strömung den Betrag $v_s = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$ hat?

   The Ferry wants to get to B in an straight line. Therefore, it must compensate the flow velocity by steering at an angle α against the flow. It is then needed that:

   $$v_s = v_0 \sin(\alpha) \implies \alpha = \arcsin\left(\frac{v_s}{v_0}\right) = \arcsin\left(\frac{1{,}5}{4}\right) \approx 0{,}3844\,\mathrm{rad} \approx 22{,}024\,^\circ$$

2. Wie groß ist dann die resultierende Geschwindigkeit v_r der Fähre?

   The resulting velocity v_r of the ferry is given by:

   $$v_r = v_0 \cos(\alpha) = 4\cos(0{,}3844) \approx 3{,}7081\,\mathrm{m/s}$$

Ejercicio 1.3.2 (Elektrische Punktladungen im Koordinatensystem)**.** Eine Punktladung $q_1 = 6{,}0\,\mu\mathrm{C}$ befindet sich in einem kartesischen Koordinatensystem bei $x_1 = 1{,}0\,\mathrm{m}$, $y_1 = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Eine zweite Ladung $q_2 = -2{,}5\,\mu\mathrm{C}$ befindet sich in dessen Ursprung. Ein Elektron, d.h. eine dritte Punktladung, ist in einem Punkt mit den Koordinaten (x_e, y_e). Berechnen Sie die Werte für x_e und y_e, bei denen sich das

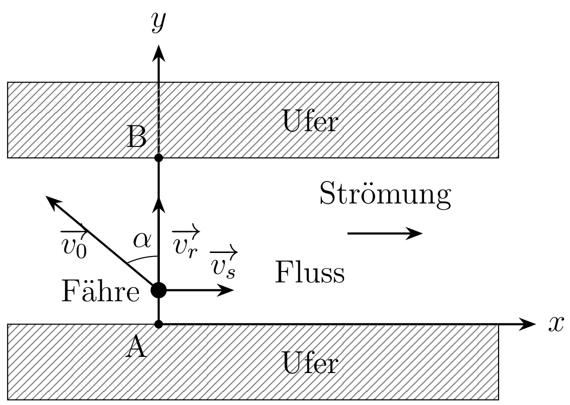

Figura 1.1: Fährverbindung über einen Fluss mit Strömung.

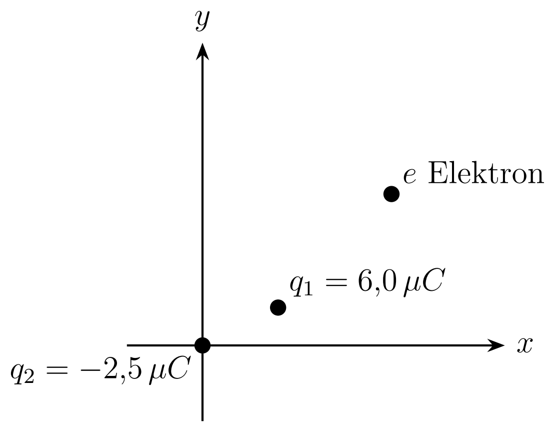

Figura 1.2: Punktladungen im Koordinatensystem.

Elektron im Gleichgewicht befindet, d.h. bei dem die Gesamtkraft auf das Elektron verschwindet.

Option 1 :

The forces acting on the electron due to the other two charges must cancel each other out for equilibrium. Let F_{ei} be the force on the electron due to charge q_i. The forces can be expressed as:

$$\overrightarrow{F}_{e1} + \overrightarrow{F}_{e2} = 0$$

where, using that $q_e = -e < 0$ (the charge of the electron):

$$\overrightarrow{F}_{e1} = -k_e \frac{|q_1 e|}{r_{e1}^2}\ \hat{r}_{e1}, \quad \overrightarrow{F}_{e2} = k_e \frac{|q_2 e|}{r_{e2}^2}\ \hat{r}_{e2}$$

Here, k_e is Coulomb's constant, e is the elementary charge, r_{ei} is the distance between the electron and charge q_i, and $\hat{r}_{ei}$ is the unit vector pointing from charge q_i to the electron. Using the values of r_{e1} and r_{e2} based on the coordinates of the charges and the electron, we have:

$$\overrightarrow{r}_{e1} = (x_e - 1, y_e - 0{,}5), \quad \overrightarrow{r}_{e2} = (x_e, y_e)$$

Therefore, the equilibrium condition becomes:

$$-k_e \frac{|q_1 e|}{((x_e-1)^2 + (y_e-0{,}5)^2)} \cdot \frac{(x_e-1, y_e-0{,}5)}{\sqrt{(x_e-1)^2+(y_e-0{,}5)^2}} + k_e \frac{|q_2 e|}{(x_e^2+y_e^2)} \cdot \frac{(x_e, y_e)}{\sqrt{x_e^2+y_e^2}} = 0$$

This vector equation can be separated into its x and y components, leading to a system of two equations with two unknowns (x_e and y_e). Solving this system will yield the coordinates of the electron in equilibrium.

$$\begin{aligned}
&-k_e \frac{|q_1 e|(x_e-1)}{((x_e-1)^2+(y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e| x_e}{(x_e^2+y_e^2)^{3/2}} = 0 \\
&-k_e \frac{|q_1 e|(y_e-0{,}5)}{((x_e-1)^2+(y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e| y_e}{(x_e^2+y_e^2)^{3/2}} = 0
\end{aligned}$$

In an easier way:

$$\frac{|q_1|(x_e-1)}{((x_e-1)^2+(y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} = \frac{|q_2|x_e}{(x_e^2+y_e^2)^{3/2}}$$
$$\frac{|q_1|(y_e-0{,}5)}{((x_e-1)^2+(y_e-0{,}5)^2)^{3/2}} = \frac{|q_2|y_e}{(x_e^2+y_e^2)^{3/2}}$$

As we can see, this system of equations is nonlinear and may require numerical methods or iterative approaches to solve for x_e and y_e. We should then approach the problem using another method.

Option 2 :

Given that $\overrightarrow{F}_{e1} = -\overrightarrow{F}_{e2}$, the forces must have the same magnitude but opposite directions. This implies that the electron must lie along the line connecting the two charges, with $x_e, y_e < 0$. Therefore:

$$y_e = \frac{y_1}{x_1}x_e = \frac{1}{2}x_e$$

On the other hand, equating the magnitudes of the forces:

$$|\overrightarrow{F}_{e1}| = |\overrightarrow{F}_{e2}| \Longrightarrow k_e\frac{|q_1e|}{r_{e1}^2} = k_e\frac{|q_2e|}{r_{e2}^2} \Longrightarrow \frac{|q_1|}{r_{e1}^2} = \frac{|q_2|}{r_{e2}^2} \Longrightarrow \frac{|q_1|}{(x_e-1)^2+(y_e-0{,}5)^2} = \frac{|q_2|}{x_e^2+y_e^2}$$

Therefore, using the relation for y_e in terms of x_e, we have the following equation to solve for x_e:

$$\frac{|q_1|}{(x_e-1)^2+\left(\frac{1}{2}x_e-0{,}5\right)^2} = \frac{|q_2|}{x_e^2+\left(\frac{1}{2}x_e\right)^2}$$
$$6\cdot\left(\frac{5}{4}x_e^2\right) = 2{,}5\cdot\left(\frac{5}{4}x_e^2-2{,}5x_e+1{,}25\right)$$
$$4{,}375x_e^2+6{,}25x_e-3{,}125=0$$
$$x_e = \frac{-6{,}25\pm\sqrt{(-6{,}25)^2-4\cdot 4{,}375\cdot(-3{,}125)}}{2\cdot 4{,}375} = \frac{-5\pm 2\sqrt{15}}{7}$$

Given that $x_e < 0$, we take:

$$x_e = -\frac{5+2\sqrt{15}}{7} \approx -1{,}8208\,\mathrm{m}$$
$$y_e = \frac{1}{2}x_e = -\frac{5+2\sqrt{15}}{14} \approx -0{,}9104\,\mathrm{m}$$

Ejercicio 1.3.3 (Die magnetische Kraft)**.** Ein punktförmiges Teilchen mit einer Ladung $q = -3{,}64\,\mathrm{nC}$ bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $\overrightarrow{v} = 2{,}75\cdot 10^6\,\mathrm{m/s}\,\overrightarrow{e_x}$, d.h. entlang der x-Achse. Berechnen Sie die Kraft, die folgende Felder auf das Teilchen ausüben:

1. $\overrightarrow{B} = 0{,}38\,\mathrm{T}\ \overrightarrow{e_y}$

$$\overrightarrow{F} = q \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ v_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \overrightarrow{e_z} =$$
$$= -3{,}64 \cdot 10^{-9} \cdot 2{,}75 \cdot 10^{6} \cdot 0{,}38\ \overrightarrow{e_z} = -3{,}8038 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}\ \overrightarrow{e_z}$$

2. $\overrightarrow{B} = T\,0{,}75\ \overrightarrow{e_x} + T\,0{,}75\ \overrightarrow{e_y}$

$$\overrightarrow{F} = q \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \overrightarrow{e_z} =$$
$$= -3{,}64 \cdot 10^{-9} \cdot 2{,}75 \cdot 10^{6} \cdot 0{,}75\ \overrightarrow{e_z} = -7{,}5075 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}\ \overrightarrow{e_z}$$

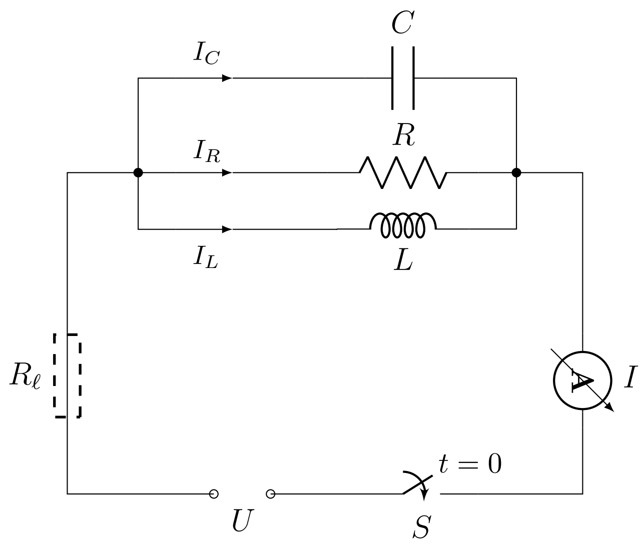

Figura 1.3: Skizze zur Aufgabe 1.5.2

1.5. Komplexe Rechnung in physikalisch-technischen Zusammenhängen

Ejercicio 1.5.1. Zeigen Sie durch Rechnung in komplexer Form: Drei gleichfrequente, sinusförmige Wechselströme i_1, i_2 und i_3 mit den Amplituden i_0, der Kreisfrequenz $\omega > 0$ und den Nullphasenwinkeln $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = {}^2\!/\!_3\pi$ und $\varphi_3 = {}^4\!/\!_3\pi$ löschen sich bei ungestörter Überlagerung gegenseitig aus, d.h. $i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

Let $\underline{i}_1(t)$, $\underline{i}_2(t)$ und $\underline{i}_3(t)$ be:

$$\begin{aligned}
\underline{i}_1(t) &= i_0 \cdot e^{\jmath(\omega t + 0)} = i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \\
\underline{i}_2(t) &= i_0 \cdot e^{\jmath(\omega t + 2/3\pi)} = i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \cdot e^{\jmath 2/3\pi} \\
\underline{i}_3(t) &= i_0 \cdot e^{\jmath(\omega t + 4/3\pi)} = i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \cdot e^{\jmath 4/3\pi}
\end{aligned}$$

Therefore:

$$\begin{aligned}
\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \underline{i}_3(t) = i_0 \cdot e^{\jmath\omega t}\left(e^{\jmath 0} + e^{\jmath 2/3\pi} + e^{\jmath 4/3\pi}\right) &= \\
= i_0 \cdot e^{\jmath\omega t}\left(1 + \left(-\frac{1}{2} + \jmath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \jmath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) &= \\
= i_0 \cdot e^{\jmath\omega t} \cdot 0 = 0 &
\end{aligned}$$

Therefore, we have shown that:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = \Im\left(\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \underline{i}_3(t)\right) = \Im(0) = 0$$

Ejercicio 1.5.2 (Resonanz im Parallelschwingkreis)**.** Der in Abbildung 1.3 skizzierte Parallelschwingkreis mit dem ohmschen Widerstand $R = 10\,\Omega$, der Induktivität $L = 0{,}2\,\mathrm{H}$ und der Kapazität $C = 10\,\mathrm{mF}$ wird durch eine Wechselstromquelle mit dem Effektivwert $I = 10\,\mathrm{A}$ und der variablen Kreisfrequenz ω zu elektromagnetischen Schwingungen angeregt.

1. Im Resonanzfall sind der Gesamtstrom I und die angelegte Spannung U in Phase, d.h. $\varphi_I - \varphi_U = 0$. Bei welcher Kreisfrequenz ω_0 tritt dieser Fall ein? Wie groß ist dann der komplexe Gesamtwiderstand Z?

   The complex resistance is:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\sqrt{2}Ue^{\jmath(\omega t+\varphi_U)}}{\sqrt{2}Ie^{\jmath(\omega t+\varphi_I)}} = \frac{U}{I}e^{\jmath(\varphi_U-\varphi_I)} \overset{(*)}{=} \frac{U}{I}e^{\jmath 0} = \frac{U}{I} \in \mathbb{R}$$

   where in $(*)$ we used the fact that in resonance $\varphi_U = \varphi_I$.

   We can calculate the complex resistance as:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\underline{Z}} &= \frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_C} \\ &= \frac{1}{R} + \frac{1}{\jmath\omega L} + \jmath\omega C \\ \Longrightarrow \underline{Z} &= \frac{1}{\frac{1}{R} - \jmath\frac{1}{\omega L} + \jmath\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \jmath\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)}\end{aligned}$$

   Given that $\underline{Z} \in \mathbb{R}$, we have that the imaginary part must be zero:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\omega_0 L} + \omega_0 C = 0 &\Longrightarrow \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \Longrightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{0{,}2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}} = \sqrt{500} \approx 22{,}36\,{}^{\mathrm{rad}}\!/\!{}_{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

   Therefore, we have that:

$$\underline{Z} = Z = R = 10\,\Omega$$

2. Wie ändert sich die Situation, wenn die Zuleitungen nicht mehr als ideal angenommen werden und einen ohmschen Widerstand R_ℓ beitragen? Welche Werte haben ω_0 und Z dann?

   In this case, we have:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \jmath\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)} + R_\ell$$

   Therefore, ω_0 does not change, but:

$$\underline{Z} = Z = R + R_\ell = 10 + R_\ell$$

Ejercicio 1.5.3 (Wechselstrommessbrücke)**.** Mit der in Abbildung 1.4 dargestellten Brückenschaltung lässt sich ein unbekannter komplexer Widerstand $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_X$ wie folgt bestimmen: Bei vorgegebenen (komplexen) Widerständen $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_3$ wird der stetig veränderbare komplexe Widerstand $\underline{Z}_4$ so eingestellt, dass der Brückenzweig A–B stromlos wird. Das in die Brücke geschaltete Wechselstromamperemeter mit dem (bekannten) Innenwiderstand $\underline{Z}_5$ dient dabei lediglich als Nullindikator.

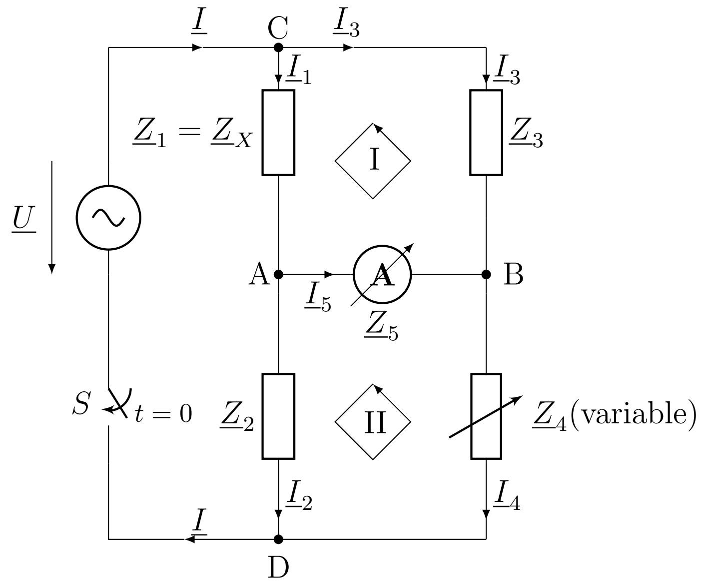

Figura 1.4: Skizze zur Aufgabe 1.5.3.

1. Wie lautet die sogenannte Abgleichbedingung, d.h. die Bedingung für die Stromlosigkeit des Brückenzweiges A-B?

   Let's denote $U_{ij} := \underline{U}_i - \underline{U}_j$ the voltage between nodes i and j. According to Kirchhoff's laws, we have that:

   $$\underline{U}_{CA} + \underline{U}_{AB} - \underline{U}_{CB} = 0$$
   $$\underline{U}_{AD} - \underline{U}_{BD} - \underline{U}_{AB} = 0$$

   In order that the branch A-B is currentless, we need:

   $$0 = \underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_5} \iff \underline{U}_{AB} = 0$$

   Therefore, we have:

   $$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{CB} \qquad \underline{U}_{AD} = \underline{U}_{BD} \tag{1.1}$$

   Using now Kirchhoff's Intensity Law on nodes A and B, taking into account that $\underline{I}_5 = 0$, we have:

   $$\underline{I}_1 = \underline{I}_2$$
   $$\underline{I}_3 = \underline{I}_4$$

   Using Ohm's Law, we have:

   $$\frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_{AD}}{\underline{Z}_2} \qquad \frac{\underline{U}_{CB}}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_{BD}}{\underline{Z}_4} \tag{1.2}$$

   Unifying Equations (1.1) and (1.2), we obtain:

   $$\frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_{AD}}{\underline{Z}_2} \Longrightarrow \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{U}_{AD}} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$$
   $$\frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_{AD}}{\underline{Z}_4} \Longrightarrow \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{U}_{AD}} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}$$

We should denote that we can divide by $\underline{U}_{AD}$ because if $\underline{U}_{AD} = 0$, then $\underline{U}_{BD} = \underline{U}_{AD} = 0$ and therefore $\underline{I}_2 = \underline{I}_4 = 0$, which according to the Kirchhoff's Intensity Law implies that $\underline{I} = 0$, which would mean that $\underline{U} = 0$, which is not the case.

Therefore, we have the balance condition:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \Longrightarrow \underline{Z}_1\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\underline{Z}_3$$

2. In einem konkreten Fall haben die festen Widerstände $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_3$ folgende Werte:

$$\underline{Z}_2 = 10\Omega - \jmath \cdot 2\Omega,$$
$$\underline{Z}_3 = 8\Omega - \jmath \cdot 6\Omega.$$

Die Brücke A–B wird dabei genau dann stromlos, wenn der variable Widerstand $\underline{Z}_4$ auf den Wert

$$\underline{Z}_4 = 5\Omega - \jmath \cdot 2\Omega$$

eingestellt wird. Welchen Wert besitzt dann der (zunächst noch unbekannte) Widerstand $\underline{Z}_X$?

Using the balance condition obtained in the previous part, we obtain:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_X = \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \\ &= \frac{(10-2\jmath)(8-6\jmath)}{5-2\jmath} = \\ &= \frac{492}{29}\Omega - \jmath \cdot \frac{244}{29}\Omega \approx 16{,}97\Omega - \jmath \cdot 8{,}41\Omega\end{aligned}$$

Ejercicio 1.5.4 (Wechselstromparadoxon)**.** Der in Bild 1.5 dargestellte Wechselstromkreis enthält die ohmschen Widerstände R und R_x und einen zu R_x parallel geschalteten Kondensator mit der Kapazität C. Beim Anlegen einer Wechselspannung $\underline{U}$ mit der Kreisfrequenz ω fließt der Gesamtstrom $\underline{I}$, dessen Effektivwert I durch das zugeschaltete Wechselstrommessgerät A gemessen wird. Der Innenwiderstand R_i des Geräts sei im Widertstand R bereits enthalten. Zeigen Sie: Der ohmsche Widerstand R_x lässt sich so wählen, dass die Stromanzeige unabhängig ist von der Stellung des Schalters S (geschlossen oder offen; sog Wechselstromparadoxon).

We have two options:

- Switch open: In this case, everything is connected in serial and $\underline{I}_1 = 0$. Therefore:

$$\underline{Z}_{\text{open}} = R + \frac{1}{\jmath\omega C} = R - \frac{1}{\omega C} \cdot \jmath$$

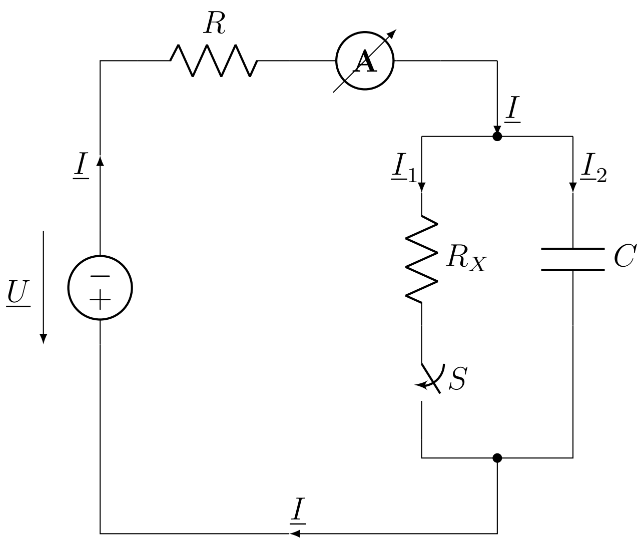

Figura 1.5: Skizze zur Aufgabe 1.5.4.

- Switch closed:

$$\underline{Z}_{\text{closed}} = R + \frac{1}{\frac{1}{R_X} + \jmath\omega C} = \left(R + \frac{\frac{1}{R_X}}{\frac{1}{R_X^2} + \omega^2 C^2}\right) - \frac{\omega C}{\frac{1}{R_X^2} + \omega^2 C^2} \cdot \jmath =$$
$$= \left(R + \frac{R_X}{1 + (R_X \omega C)^2}\right) - \frac{R_X^2 \omega C}{1 + (R_X \omega C)^2} \cdot \jmath =$$
$$= \frac{R(1 + (R_X \omega C)^2) + R_X}{1 + (R_X \omega C)^2} - \frac{R_X^2 \omega C}{1 + (R_X \omega C)^2} \cdot \jmath$$

In order that the current does not depend on the position of the switch, it is needed:

$$\widehat{I}_{\text{closed}} = \widehat{I}_{\text{open}} \Longrightarrow |\underline{I}_{\text{closed}}| = |\underline{I}_{\text{open}}| \Longrightarrow \left|\frac{\underline{U}_{\text{closed}}}{\underline{Z}_{\text{closed}}}\right| = \left|\frac{\underline{U}_{\text{open}}}{\underline{Z}_{\text{open}}}\right|$$

Given that $\underline{U}_{\text{open}} = \underline{U}_{\text{closed}}$, we only need that:

$$|\underline{Z}_{\text{closed}}| = |\underline{Z}_{\text{open}}| \Longrightarrow |\underline{Z}_{\text{closed}}|^2 = |\underline{Z}_{\text{open}}|^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} = \frac{(R(1 + (R_X \omega C)^2) + R_X)^2 + (R_X^2 \omega C)^2}{(1 + (R_X \omega C)^2)^2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (R(1 + (R_X \omega C)^2))^2 + \frac{(1 + (R_X \omega C)^2)^2}{\omega^2 C^2} = (R(1 + (R_X \omega C)^2))^2 + R_X^2 + 2R_X\ R(1 + (R_X \omega C)^2) + ($$
$$\Longrightarrow \frac{(1 + (R_X \omega C)^2)^2}{\omega^2 C^2} = R_X^2 + 2R_X\ R(1 + (R_X \omega C)^2) + (R_X^2 \omega C)^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 1 + 2(R_X \omega C)^2 = (R_X \omega C)^2 + 2\omega^2 C^2 R_X\ R(1 + (R_X \omega C)^2) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 1 + (R_X \omega C)^2 = 2\omega^2 C^2 R_X\ R(1 + (R_X \omega C)^2) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (2\omega^2 C^2 R_X\ R - 1)(1 + (R_X \omega C)^2) = 0$$

Therefore, the only possible solution is:

$$R_X = \frac{1}{2R(\omega C)^2}$$

Using that value of R_X, we will measure the same current value with the switch opened and closed.

1.8. Ableitungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Ejercicio 1.8.1 (Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung)**.** Bilden Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2 \cdot e^{-xy} \end{array}$$

The partial derivatives of first order are:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xe^{-xy} - x^2ye^{-xy} = e^{-xy}(2x - x^2y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -x^3e^{-xy} \end{aligned}$$

The partial derivatives of second order are:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-xy}(2x - x^2y)\right) = -ye^{-xy}(2x - x^2y) + e^{-xy}(2 - 2xy) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-x^3e^{-xy}\right) = x^4e^{-xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-x^3e^{-xy}\right) = -3x^2e^{-xy} + x^3ye^{-xy} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.8.2 (Eine Differenzialgleichung)**.** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & e^{-\pi^2a^2t} \cdot \sin(\pi x) \end{array}$$

eine Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (a \in \mathbb{R} \text{ const.})$$

Let's compute the partial derivatives:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) &= -\pi^2a^2e^{-\pi^2a^2t}\sin(\pi x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) &= -\pi^2e^{-\pi^2a^2t}\sin(\pi x) \end{aligned}$$

Therefore, it is clear that it is a solution of the given equation.

Ejercicio 1.8.3 (Totales Differenzial einer gebrochen rationalen Funktion)**.** Bestimmen Sie das totale Differenzial der Funktion

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x^2+y^2}{y-x} \end{array}$$

To find the total differential of the function, we first compute the partial derivatives:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x(y-x) + (x^2+y^2)}{(y-x)^2} = \frac{-x^2+2xy+y^2}{(y-x)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2y(y-x) - (x^2+y^2)}{(y-x)^2} = \frac{y^2-2xy-x^2}{(y-x)^2} \end{aligned}$$

1.9. Kurvenintegrale

Ejercicio 1.9.1 (Kurvenintegral erster Art)**.** Berechnen Sie das Kurvenintegral erster Art $\displaystyle\int_{\varphi_1} f\,dt$ für die skalarwertige Funktion

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{array}$$

über die parametrisierte Kurve

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_1: & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (t\cos(t), t\sin(t), t) \end{array}$$

First of all, we compute the derivative of the parameterization:

$$\varphi_1'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - t\sin(t) \\ \sin(t) + t\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

We then realize that ϕ is differentiable, and given that the third component is constant and non-zero, we can conclude that the parameterization is regular. Therefore, in order to compute the norm of the derivative, we have:

$$\begin{aligned} \|\varphi_1'(t)\| &= \sqrt{(\cos(t) - t\sin(t))^2 + (\sin(t) + t\cos(t))^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\cos^2(t) - \cancel{2t\sin(t)\cos(t)} + t^2\sin^2(t) + \sin^2(t) + \cancel{2t\sin(t)\cos(t)} + t^2\cos^2(t) + 1} \\ &= \sqrt{1 + t^2 + 1} = \sqrt{t^2+2} \end{aligned}$$

Therefore, we can now compute the curve integral:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1} f\,dt &= \int_0^{2\pi} f(\varphi_1(t))\|\varphi_1'(t)\|\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2+t^2}\cdot\sqrt{t^2+2}\,dt \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\sqrt{t^2+2}\,dt \end{aligned}$$

We use the substitution given by:

$$\begin{array}{rrcl} \Phi: & [2, 4\pi^2+2] & \longrightarrow & [0,2\pi] \\ & u & \longmapsto & \sqrt{u-2} \end{array}$$

Thus, using $t = \Phi(u)$, we have:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1} f\,dt &= \sqrt{2}\int_{\Phi^{-1}(0)}^{\Phi^{-1}(2\pi)} \Phi(u)\sqrt{\Phi(u)^2+2}\cdot\Phi'(u)\,du \\ &= \sqrt{2}\int_2^{4\pi^2+2} \sqrt{u-2}\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u-2}}\,du = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_2^{4\pi^2+2}\sqrt{u}\,du = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_2^{4\pi^2+2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[u^{3/2}\right]_2^{4\pi^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left((4\pi^2+2)^{3/2} - 2^{3/2}\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.9.2 (Kurvenintegral zweiter Art)**.** Berechnen Sie das Kurvenintegral zweiter Art $\displaystyle\int_{\varphi_2} \overrightarrow{f}\, d\overrightarrow{s}$ für das Vektorfeld

$$\begin{array}{rrcl} \overrightarrow{f}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x-z, y^2, 1) \end{array}$$

über die parametrisierte Kurve

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_2: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \left(t^2, t, e^t\right) \end{array}$$

We first compute the derivative of the parameterization:

$$\varphi_2'(t) = (2t, 1, e^t)$$

We then realize that ϕ is differentiable, and given that the third component is non-zero, we can conclude that the parameterization is regular. Then, the dot product $\overrightarrow{f}(\varphi_2(t)) \cdot \varphi_2'(t)$ is given by:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}(\varphi_2(t)) \cdot \varphi_2'(t) &= (t^2 - e^t, t^2, 1) \cdot (2t, 1, e^t) \\ &= 2t^3 - 2te^t + t^2 + e^t \end{aligned}$$

Therefore, we can now compute the curve integral:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_2} \overrightarrow{f}\, d\overrightarrow{s} &= \int_0^1 \overrightarrow{f}(\varphi_2(t)) \cdot \varphi_2'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 2t^3 - 2te^t + t^2 + e^t\, dt \end{aligned}$$

Let's firstly compute the integral of te^t using integration by parts:

$$\begin{bmatrix} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v(t) = e^t & v'(t) = e^t \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 te^t\, dt = \left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t\, dt$$

Now, we can compute the entire integral:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_2} \overrightarrow{f}\, d\overrightarrow{s} &= \left[2 \cdot \frac{t^4}{4} - 2\left(te^t - e^t\right) + \frac{t^3}{3} + e^t\right]_0^1 = \left[\frac{t^4}{2} - 2te^t + 3e^t + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} - 2e + 3e + \frac{1}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + e \end{aligned}$$

Ejercicio 1.9.3 (Länge einer Kurve)**.** Berechnen Sie die Länge der Kurve C mit der Parameterdarstellung

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} x: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & t^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} y: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 1-t^2 \end{array}$$

Observación. Man denke an die Voraussetzung zur Längenberechnung mittels Kurvenintegralen, dass die Parameterdarstellung regulär sein muss, d.h. $\varphi'(t) \neq \overrightarrow{0}$. Ist dies nicht für alle Punkte der Kurve der Fall, berechnet man die Länge abschnittsweise.

Given that $x(t)$ is inyective, we realize that φ is also inyective. Let's compute the derivative of the parameterization:

$$\varphi'(t) = (3t^2, -2t)$$

We realize that φ is differentiable, and that $\varphi'(t) = \overrightarrow{0}$ only at $t = 0$. Therefore, we will compute the length of the curve in two parts: in $[-1, 0]$ and in $[0, 1]$. Thus, we compute the norm of the derivative:

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(3t^2)^2 + (-2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2} = \sqrt{t^2(9t^2 + 4)} = |t|\sqrt{9t^2 + 4}$$

Therefore, we can now compute the length of the curve:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{0} \|\varphi'(t)\|\, dt + \int_{0}^{1} \|\varphi'(t)\|\, dt \\ &= \int_{-1}^{0} -t\sqrt{9t^2 + 4}\, dt + \int_{0}^{1} t\sqrt{9t^2 + 4}\, dt \end{aligned}$$

We use the substitution given by:

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & u = 9t^2 + 4 \end{array}$$

In both intervals, Φ es biyective. Thus, using $t = \Phi^{-1}(u)$, we have:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\Phi(-1)}^{\Phi(0)} -\Phi^{-1}(u)\sqrt{u} \cdot (\Phi^{-1})'(u)\, du + \int_{\Phi(0)}^{\Phi(1)} \Phi^{-1}(u)\sqrt{u} \cdot (\Phi^{-1})'(u)\, du \\ &= \int_{13}^{4} -\Phi^{-1}(u)\sqrt{u} \cdot \frac{1}{2\Phi^{-1}(u)} \cdot \frac{1}{9}\, du + \int_{4}^{13} \Phi^{-1}(u)\sqrt{u} \cdot \frac{1}{2\Phi^{-1}(u)} \cdot \frac{1}{9}\, du = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{18} \int_{4}^{13} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3} u^{3/2}\right]_4^{13} = \frac{2}{27}\left(13^{3/2} - 4^{3/2}\right) = \frac{26\sqrt{13} - 16}{27} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.9.4 (Flächeninhalt einer Ellipse)**.** Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt F einer Ellipse E, die durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschrieben wird, $F = \pi ab$ ist.

Observación. Verwenden Sie die Parameterdarstellung

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (a\cos t, b\sin t) \end{array}$$

We first compute the derivative of the parameterization:

$$\varphi'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$$

We then realize that ϕ is differentiable, and given that $a, b > 0$ and that both $\sin t$ and $\cos t$ cannot be zero at the same time, we can conclude that the parameterization is regular. Given that the curve goes around the ellipse counter-clockwise, we can use the following formula to compute the area:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \int_\varphi (-y, x) \cdot d\overrightarrow{x} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-b \sin t, a \cos t) \cdot (-a \sin t, b \cos t)\, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \sin^2 t + ab \cos^2 t\, dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} 1\, dt = \frac{ab}{2} \cdot 2\pi = \pi ab \end{aligned}$$

1.10. Potenzialfelder und Mehrfachintegrale

Ejercicio 1.10.1 (Kurvenintegral einer Funktion mit Potenzial)**.** Im $\mathbb{R}^2$ ist eine Kurve gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & [0, \pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\sin t, t) \end{array}$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\varphi \overrightarrow{f} \cdot d\overrightarrow{s}$ für:

$$\begin{array}{rccl} \overrightarrow{f}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2xy + 2\cos(y) \\ x^2 - 2x\sin(y) + 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observación. Prüfen Sie, ob $\overrightarrow{f}$ ein Potenzial hat und nutzen Sie es ggf. aus.

Let's first check that φ is a regular parametrization:

$$\varphi'(t) = (\cos t, 1)$$

Given that $1 \neq 0$ for all $t \in [0, \pi/2]$, we conclude that φ is regular. Let's now try to calculate the integral directly. In order to do so, we need to compute $\overrightarrow{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}(\varphi(t)) &= \overrightarrow{f}(\sin t, t) = \begin{pmatrix} 2\sin t \cdot t + 2\cos t \\ \sin^2 t - 2\sin^2 t + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t\sin t + 2\cos t \\ 1 - \sin^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t\sin t + 2\cos t \\ \cos^2 t \end{pmatrix} \\ \varphi'(t) &= (\cos t, 1) \\ \overrightarrow{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) &= 2t\sin t\cos t + 2\cos^2 t + \cos^2 t = 2t\sin t\cos t + 3\cos^2 t \end{aligned}$$

Therefore, the integral is:

$$\int_\varphi \overrightarrow{f} \cdot d\overrightarrow{s} = \int_0^{\pi/2} \left(2t\sin t\cos t + 3\cos^2 t\right) dt$$

Given that integrating this expression is quite cumbersome, let's check if $\overrightarrow{f}$ has a potential function. Given that $\mathbb{R}^2$ is star-shaped, we check:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 2x - 2\sin(y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 2x - 2\sin(y) \end{aligned}$$

Since the mixed partial derivatives are equal, $\overrightarrow{f}$ has a potential function. Let's find it:

Option 1 Having fixed $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, let's consider the following path from $(0,0)$ to (x,y):

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (tx, ty) \end{array}$$

Let's also write the potential function as $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Then:

$$\int_\Phi \overrightarrow{f} \cdot d\overrightarrow{s} = u(\Phi(1)) - u(\Phi(0)) = u(x,y) \Longrightarrow u(x,y) = \int_0^1 \overrightarrow{f}(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t)dt + u(0,0)$$

Given that the potential is defined up to a constant, we can set $u(0,0) = 0$.
Now, let's compute $\overrightarrow{f}(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t)$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f}(\Phi(t)) &= \overrightarrow{f}(tx,ty) = \begin{pmatrix} 2(tx)(ty) + 2\cos(ty) \\ (tx)^2 - 2(tx)\sin(ty) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^2xy + 2\cos(ty) \\ t^2x^2 - 2tx\sin(ty) + 1 \end{pmatrix} \\
\Phi'(t) &= (x,y) \\
\overrightarrow{f}(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t) &= 2t^2x^2y + 2x\cos(ty) + t^2x^2y - 2txy\sin(ty) + y \\
&= 3t^2x^2y + 2x\cos(ty) - 2txy\sin(ty) + y
\end{aligned}$$

Therefore, the potential function is:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_0^1 \left(3t^2x^2y + 2x\cos(ty) - 2txy\sin(ty) + y\right) dt = \\
&= \left[x^2yt^3 + \frac{2x}{y}\sin(ty) + yt\right]_0^1 - 2xy\int_0^1 t\sin(ty)dt = \\
&= x^2y + \frac{2x}{y}\sin(y) + y - 2xy\int_0^1 t\sin(ty)dt
\end{aligned}$$

To compute the remaining integral, we use integration by parts:

$$\begin{bmatrix} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{1}{y}\cos(ty) & v'(t) = \sin(ty) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t\sin(ty)dt &= \left[-\frac{t}{y}\cos(ty)\right]_0^1 + \frac{1}{y}\int_0^1 \cos(ty)dt = \\
&= \left[-\frac{t}{y}\cos(ty) + \frac{1}{y^2}\sin(ty)\right]_0^1 = -\frac{1}{y}\cos(y) + \frac{1}{y^2}\sin(y)
\end{aligned}$$

Therefore, the potential function is:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= x^2y + \frac{2x}{y}\sin(y) + y - 2xy\left(-\frac{1}{y}\cos(y) + \frac{1}{y^2}\sin(y)\right) = \\
&= x^2y + \cancel{\frac{2x}{y}\sin(y)} + y + 2x\cos(y) - \cancel{\frac{2x}{y}\sin(y)} = \\
&= x^2y + y + 2x\cos(y)
\end{aligned}$$

Option 2 We look for a function $u(x,y)$ such that:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 2xy + 2\cos(y) \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= x^2 - 2x\sin(y) + 1
\end{aligned}$$

Integrating the first equation with respect to x:

$$u(x,y) = \int 2xy + 2\cos(y)\,dx = x^2y + 2x\cos(y) + h(y)$$

where $h(y)$ is an arbitrary function of y. Now, we differentiate $u(x,y)$ with respect to y and equate it to the second equation:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 2x\sin(y) + h'(y) = x^2 - 2x\sin(y) + 1 \Longrightarrow h'(y) = 1 \Longrightarrow h(y) = y + C$$

Given that the potential is defined up to a constant, we can set $C = 0$. Therefore, the potential function is:

$$u(x,y) = x^2y + 2x\cos(y) + y$$

Finally, we can compute the integral using the potential function:

$$\int_\varphi \overrightarrow{f} \cdot d\overrightarrow{s} = u(\varphi(\pi/2)) - u(\varphi(0)) = u(1, \pi/2) - u(0,0) = \frac{\pi}{2} + 2\cos(\pi/2) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$

Ejercicio 1.10.2 (Doppelintegral mit e-Funktion)**.** Berechnen Sie

$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{x/y}\,dx\,dy$$

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{x/y}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[ye^{x/y}\right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 y\left(e^y - 1\right) dy = \int_0^1 ye^y dy - \int_0^1 ydy$$

To compute the remaining integral, we use integration by parts:

$$\begin{bmatrix} u(y) = y & u'(y) = 1 \\ v(y) = e^y & v'(y) = e^y \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 ye^y dy = [ye^y]_0^1 - \int_0^1 e^y dy = [ye^y - e^y]_0^1 = (e - e) - (0 - 1) = 1$$

Therefore, the value of the integral is:

$$I = 1 - \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 1.10.3 (Flächenberechnung mit Doppelintegral)**.** Ein Flächenstück wird durch die Kurven $x = 0$, $y = 2x$ $y = 1/a x^2 + a$, $a > 0$ berandet. Berechnen Sie den Flächeninhalt A mit Hilfe eines Doppelintegrals.

In Figure 1.6, we can see the area to be calculated. Let's first find the points of intersection between the curves $y = 2x$ and $y = 1/a x^2 + a$:

$$2x = \frac{1}{a}x^2 + a \Longrightarrow x^2 - 2ax + a^2 = 0 \Longrightarrow (x-a)^2 = 0 \Longrightarrow x = a$$

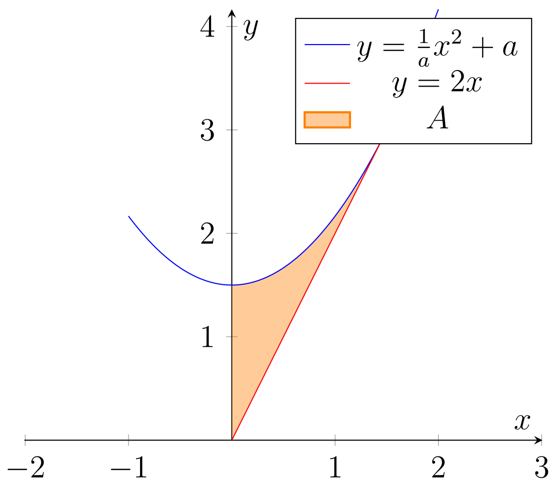

Figura 1.6: Area to be calculated in Exercise 1.10.3.

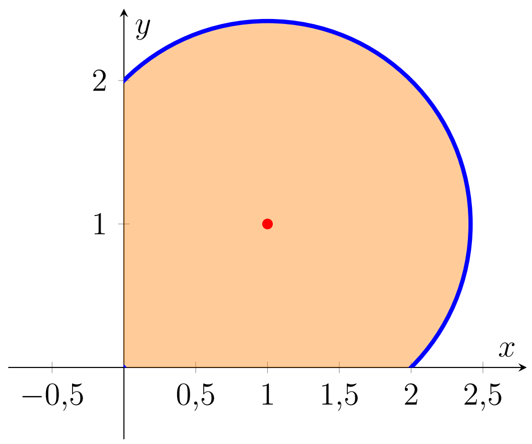

Figura 1.7: Area to be calculated in Exercise 1.10.4.

Therefore, the curves intersect at the point $(a, 2a)$. Given that the area is bounded by $x = 0$ and $x = a$, we can set up the double integral to calculate the area:

$$A = \int_0^a \int_{2x}^{1/a x^2 + a} dy\, dx = \int_0^a \left(\frac{1}{a}x^2 + a - 2x\right) dx = \left[\frac{1}{3a}x^3 + ax - x^2\right]_0^a =$$
$$= \frac{1}{3a}a^3 + a^2 - a^2 - 0 = \frac{a^2}{3}$$

Ejercicio 1.10.4 (Flächeninhalt mit Polarkoordinaten)**.** Die Randkurve eines Gebiets in der Ebene wird durch die Gleichung

$$r = 2(\cos(\varphi) + \sin(\varphi))$$

in Polarkoordinaten beschrieben. Berechnen Sie den Flächeninhalt A dieses Gebiets.

In Figure 1.7, we can see the area to be calculated. To find the area, we use the formula for the area in polar coordinates:

Ejercicio 1.10.5 (Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten)**.** Berechnen Sie das folgende in Zylinderkoordinaten gegebene Integral:

$$I = \int_\pi^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{r^2} rz \cdot \sin(\varphi)\, dz\, dr\, d\varphi.$$