Geometría I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Miguel Angel De la Vega Rodríguez

Granada, 2023-2024

Índice general

1. Relaciones de Ejercicios

1.1. Sistemas de ecuaciones Lineales

Ejercicio 1.1.1. Decidir cuáles de los siguientes sistemas de ecuaciones son lineales. Para los que lo sean, escribir la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{z}=0 \\ y-z=3x \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2z=-3y \\ \sin(2)z=35-2x \\ y+x=\sqrt{3}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ y-z=35 \\ x+2y+3z=2007 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z=28 \\ z^2=35 \\ \sin(x)+\cos(y)=\tan(z) \end{cases}$$

Los sistemas segundo y tercero son de ecuaciones lineales. Las matrices de coeficientes y ampliada del segundo sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 35 \\ 1 & 2 & 3 & 2007 \end{array}\right)$$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del tercer sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & \sin(2) \\ 1 & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad (A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & \sin(2) & 35 \\ 1 & 1 & -\sqrt{3} & 0 \end{array}\right)$$

Ejercicio 1.1.2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales escalonados:

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ y+z+t=2 \\ z+t=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-z-t \\ y+z+t=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+10z=8 \end{cases}$$

Solución: Todos son compatibles e indeterminados. Las es del primero son:

$$x=-1, \quad y=-1, \quad z=3-\lambda, \quad t=\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Las es del segundo son:

$$x=-3, \quad y=3-\lambda-\mu, \quad z=\lambda, \quad t=\mu, \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Las es del tercero son:

$$x = 8 + \lambda - 10\mu, \quad y = \lambda, \quad z = \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 1.1.3. Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 10z = 18 \\ 2x + 3y + 12z = 23 \\ 2y + 5z = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3y + 4z - 2t = 5 \\ 2y + 5z + t = 2 \\ y - 3z = 4 \end{cases}$$

Solución: El primer sistema es compatible determinado con solución:

$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = 1$$

El segundo sistema es incompatible. El tercer sistema es compatible indeterminado con es:

$$x = 2 - \lambda, \quad y = 2 + 2\lambda, \quad z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

El ultimo sistema es compatible indeterminado con es:

$$x = \frac{157 + 15\lambda}{11}, \quad y = \frac{26 - 3\lambda}{11}, \quad z = \frac{-6 - \lambda}{11}, \quad t = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 1.1.4. Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -4y - z &= -7 \\ x + y + z &= 2 \\ x - 2y + z &= -2 \\ -x + 2y &= 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + z - 2s + t &= 2 \\ x + 2y + s &= 7 \\ 2x - y + z + 4s + t &= 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Solución: El primer sistema es incompatible. El segundo es compatible indeterminado con es:

$$x = \frac{5 - 7\lambda}{3}, \quad y = \frac{8 + 2\lambda}{3}, \quad z = \frac{-2 + 4\lambda - 3\mu}{3}, \quad s = \lambda, \quad t = \mu, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

Ejercicio 1.1.5. Discutir y resolver, cuando sea posible, los sistemas de ecuaciones lineales siguientes en función de los parámetros a y b:

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ -x - y + z &= 2 \\ x + az &= -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 3x + ay + az &= 5 \\ 4x + ay &= 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + t &= a \\ x - 2y + z &= 1 \\ -x + y + az - t &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} az &= b \\ y + z &= 0 \\ x + ay + z &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3y + z &= 1 \\ 2x - 3z &= a \\ x + y + 2z &= 0 \\ 2x + y - z &= 1 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{rl} ax+y+z &= 1 \\ x+y+z &= b \\ ax+by+z &= 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} ax+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 2 \end{array}\right.$$

Discutimos cada uno de los sistemas:

- **Primer sistema.** Si $a=-3$, es incompatible. Si $a \neq -3$, es compatible determinado con solución:

$$x=\frac{3a-3}{a+3}, \quad y=\frac{5-a}{a+3}, \quad z=\frac{-4}{a+3}.$$

- **Segundo sistema.** Si $a=0$ o $a=3$, es incompatible. Si $a \neq 0,3$, es compatible determinado con solución:

$$x=\frac{a-5}{a-3}, \quad y=\frac{a+5}{a(a-3)}, \quad z=\frac{a-5}{a(a-3)}.$$

- **Tercer sistema.** Siempre es compatible indeterminado. Si $a=-\frac{1}{2}$, las es son:

$$x=0, \quad y=\frac{\lambda-1}{2}, \quad z=\lambda, \quad t=-\frac{1}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

  Si $a \neq -\frac{1}{2}$, entonces las es son:

$$x=a-\lambda, \quad y=\frac{a(a-\lambda)}{2a+1}, \quad z=\frac{a+\lambda+1}{2a+1}, \quad t=\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- **Cuarto sistema.** Si $a=0$ y $b \neq 0$, es incompatible. Si $a=0$ y $b=0$, es compatible indeterminado con es:

$$x=-\lambda, \quad y=-\lambda, \quad z=\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

  Si $a \neq 0$, es compatible determinado con solución:

$$x=\frac{b(a-1)}{a}, \quad y=\frac{-b}{a}, \quad z=\frac{b}{a}.$$

- **Quinto sistema.** Si $a=-2$, es incompatible. Si $a=1$, es compatible indeterminado con es:

$$x=1-\lambda-\mu, \quad y=\lambda, \quad z=\mu, \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

  Si $a \neq -2,1$, es compatible determinado con solución (tras varias simplificaciones):

$$x=\frac{-a+1}{a+2}, \quad y=\frac{1}{a+2}, \quad z=\frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

- **Sexto sistema.** Si $a \neq \frac{29}{19}$, es incompatible. Si $a=\frac{29}{19}$, es compatible determinado con solución:

$$x=\frac{10}{19}, \quad y=\frac{-4}{19}, \quad z=\frac{-3}{19}.$$

- **Séptimo sistema.** Si $a = 1$ y $b \neq 1$, es incompatible. Si $a = 1$ y $b = 1$, es compatible indeterminado con es:

  $$x = 1 - \lambda - \mu, \quad y = \lambda, \quad z = \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

  Si $a \neq 1$ y $b \neq 1$, es compatible determinado con solución:

  $$x = \frac{b-1}{1-a}, \quad y = 0, \quad z = \frac{1-ab}{1-a}.$$

  Si $a \neq 1$ y $b = 1$, es compatible indeterminado con es:

  $$x = 0, \quad y = 1 - \lambda, \quad z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- **Octavo sistema.** Si $a = 1$, es incompatible. Si $a \neq 1$, es compatible indeterminado con es:

  $$x = \frac{1}{1-a}, \quad y = \frac{1-2a}{1-a} - \lambda, \quad z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 1.1.6. Las tres cifras de un número suman 21. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras se obtiene 198. Se sabe también que la cifra de las decenas coincide con la media aritmética entre las otras dos. Calcular dicho número. Se esta planteando el siguiente sistema, sean x, y, z las cifras del número, entonces:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 21 \\ 100x+10y+z-(100z+10y+x) & = & 198 \\ y & = & \frac{x+z}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 21 \\ x-z & = & 2 \\ y & = & \frac{x+z}{2} \end{array}\right\}$$

El número buscado es el 876.

Ejercicio 1.1.7. Dados tres puntos planos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) de forma que sus primeras coordenadas son dos a dos distintas, probar que existe una única parábola $y = ax^2 + bx + c$ (incluyendo el caso límite de rectas, esto es, $a = 0$) cuya gráfica contiene a dichos puntos. ¿Qué parábola se obtiene para los puntos $(2, 0)$, $(3, 0)$ y $(-1, 12)$?

Solución: Queremos probar que hay una única parábola de tipo $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ y (x_3, y_3). Esto se consigue resolviendo la ecuación de la parábola. La ecuación es un SEL con matriz ampliada:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & y_3 \end{array}\right)$$

Realizamos transformaciones elementales por filas hasta obtener un SEL escalonado. Co-mo mi $X_T A = X_T Y$ es parte de este caso particular de determinado, lo resuelvo el SEL por el método del sustitución hacia atrás, en sus componentes de la primera posición que se llega a la parábola $y = x^2 - 5x + 6$. Es inmediato comprobar que, efectivamente, esta parábola pasa por (2,0), (3,0) y $(-1, 12)$.

Ejercicio 1.1.8. Para la construcción de un almacén se necesita una unidad de hierro y ninguna de madera. Para la construcción de un piso se necesita una unidad de cada material y para la construcción de una torre se necesitan cuatro unidades de hierro y una de madera. Si poseemos en reserva 14 unidades de hierro y cuatro de madera, decidir cuántos almacenes, pisos y torres se pueden construir de manera que se utilicen todas las reservas.

Hay 4 posibilidades, a saber:

- 10 almacenes, 4 pisos y ninguna torre,
- 7 almacenes, 3 pisos y una torre,
- 4 almacenes, 2 pisos y 2 torres,
- 1 almacén, un piso y 3 torres.

Ejercicio 1.1.9. En un examen tipo test de 50 preguntas se dan 2 puntos por cada acierto y se quita medio punto por cada fallo. Para aprobar hay que obtener al menos 40 puntos y es obligatorio contestar a todas las preguntas. Si se quiere aprobar, ¿cuántas preguntas hay que contestar correctamente y cuántas se pueden fallar?

$$2(50-x)-0{,}5x = 40 \Rightarrow 100-2x-0{,}5x = 40 \Rightarrow 100-2{,}5x = 40 \Rightarrow 2{,}5x = 60 \Rightarrow x = 24$$

Por lo que hay que acertar 26 preguntas y se pueden fallar 24.

Ejercicio 1.1.10. En una ciudad los taxis cobran 1 euro por la bajada de bandera y 10 céntimos por cada 200 metros recorridos. En otra ciudad, la bajada de bandera es de 90 céntimos y por cada 200 metros que se recorran se cobran 12 céntimos. ¿Existe alguna distancia para la que coincidan los precios de las carreras en ambas ciudades?

Para que coincidan los precios de las carreras en ambas ciudades, se debe cumplir que el precio de la bajada de bandera y el de cada 200 metros recorridos sea el mismo. Por tanto, se debe cumplir que:

$$\left.\begin{array}{r} 1 + 0{,}1x = y \\ 0{,}9 + 0{,}12x = y \end{array}\right\}$$

Se usa la incógnita y para que se entienda mejor, notese que realmente estamos ante una simple ecuación con una incógnita x representando 200m, como para $x = 5$ tenemos una solución, para 1km, el precio sería 1.5 euros en ambos taxis.

Ejercicio 1.1.11. Existe un SEL con 2 ecuaciones y 3 incógnitas que sea compatible determinado? ¿Y si el SEL tiene 3 ecuaciones y 2 incógnitas?

- No, no existe un SEL con 2 ecuaciones y 3 incógnitas que sea compatible determinado ya que al tener más incógnitas que ecuaciones, el sistema es incompatible o compatible indeterminado.
- Si, existe un SEL con 3 ecuaciones y 2 incógnitas que sea compatible determinado ya que al tener más ecuaciones que incógnitas, se puede añadir una ecuación redundante y el sistema será compatible determinado.

1.2. Espacios Vectoriales

Ejercicio 1.2.1. En $\mathbb{R}^3$ se considera la suma de elementos coordenada a coordenada y el producto por escalares reales dado por:

$$\alpha \star (x, y, z) = (\alpha \cdot x, \alpha^2 \cdot y, \alpha^3 \cdot z),$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Determine si $\mathbb{R}^3$ con estas operaciones satisface las propiedades de un espacio vectorial real.

Para comprobar si $\mathbb{R}^3$ con estas operaciones satisface las propiedades de un espacio vectorial real, sean $u = (x, y, x), v = (x', y', z'), w = (x'', y'', z'')$ con $u, v, w \in \mathbb{R}^3, \quad a, b \in \mathbb{R}$

- Asociativa de $+$:

$$\begin{aligned}(u + v) + w &= (x + x', y + y', z + z') + (x'', y'', z'') \\ &= ((x + x') + x'', (y + y') + y'', (z + z') + z'') = u + (v + w)\end{aligned}$$

- Conmutativa de $+$:

$$u + v = (x + x', y + y', z + z') = (x' + x, y' + y, z' + z) = v + u$$

- Existencia elemento neutro:

$$\text{Sea } 0 = (0, 0, 0), \text{ entonces} u + 0 = (x + 0, y + 0, z + 0) = (x, y, z) = 0$$

- Existencia de opuestos:

$$\begin{aligned}\text{Sea } -u &= (-x, -y, -z), \text{ entonces } u + (-u) = (x + (-x), y + (-y), z + (-z)) \\ &= (0, 0, 0) = 0\end{aligned}$$

Por tanto $\mathbb{R}^3$ con estas operaciones es un grupo abeliano. Ahora veamos las propiedades acerca del producto por escalares:

- Distributividad (1):

$$\begin{aligned}a(u + v) &= a(x + x', y + y', z + z') \\ &= (a(x + x'), a^2(y + y'), a^3(z + z')) = (ax + ax', a^2y + a^2y', a^3z + a^3z') \\ &= (ax, a^2y, a^3z) + (ax', a^2y', a^3z') = au + av\end{aligned}$$

- Distributividad (2):

$$\begin{aligned}(a + b)u &= ((a + b)x, (a + b)^2y, (a + b)^3z) \\ &= (ax + bx, a^2y + b^2y + 2aby, a^3z + b^3z3a^2bz + 3ab^2z) \\ &\neq (ax + bx, a^2y + b^2y, a^3z + b^3z) = au + bu\end{aligned}$$

Por lo que $\mathbb{R}^3$ con estas operaciones no satisface las propiedades de un espacio vectorial real.

Ejercicio 1.2.2. Sea X un conjunto no vacío y V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Denotamos por $F(X,V)$ al conjunto de las aplicaciones $f : X \to V$. En $F(X,V)$ se define la suma y el producto por elementos de K siguientes:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x), && \forall x \in X, \forall g, f \in F(X,V),\\ (\alpha \cdot f)(x) &= \alpha \cdot f(x), && \forall x \in X, \forall \alpha \in K, \forall f \in F(X,V).\end{aligned}$$

Demostrar que, con estas operaciones, $F(X,V)$ es un espacio vectorial sobre K. Para comprobar si es un espacio vectorial, sean $f, g, h \in F(X,V), \quad x \in X, \quad a, b, \in \mathbb{K}$

- Asociativa para la +:

  $$(f+(g+h))(x) = f(x)+(g+h)(x) = f(x)+(f(x)+g(x))+h(x) = ((f+g)+h)(x)$$

- Conmutativa para la +:

  $$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$$

- Existencia de elemento neutro:

  $$\text{Sea } 0 = f_0 : \mathbb{X} \mapsto V \text{dada por} f_0(x) = 0_{v(k)}$$

  entonces

  $$(f+0)(x) = (f+f_0)(x) = f(x)+f_0(x) = f(x)+0_{v(k)} = f(x)$$

- Existencia de opuestos: Sea $f' : X \to V$ dada por $f'(x) = -f(x)$, entonces:

  $$(f+f')(x) = f(x)+f'(x) = f(x)-f(x) = 0_{v(k)} \Rightarrow f' = -f$$

Por tanto $F(X,V)$ con estas operaciones es un grupo abeliano, veamos las propiedades del producto por escalares:

- Distributividad (1):

  $$a(f+g)(x) = a(f+g)(x) = a(f(x)+g(x)) = a\cdot f(x)+a\cdot g(x) = (af+ag)(x)$$

- Distributividad (2):

  $$(a+b)f(x) = (a+b)f(x) = (a+b)\cdot f(x) = a\cdot f(x)+b\cdot f(x) = (af+bf)(x)$$

- Pseudoasociatividad:

  $$(\alpha\cdot\beta)\cdot f(x) = \alpha\cdot(\beta\cdot f(x))$$

- Propiedad modular:

  $$1\cdot f(x) = f(x)$$

Por tanto $F(X,V)$ con estas operaciones es un espacio vectorial sobre K.

Ejercicio 1.2.3. Sean V_1 y V_2 los espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K.

1. *Demostrar que el conjunto* $V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ *es un espacio vectorial sobre* K *cuando definimos la suma y el producto por elementos de* K *como:*

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$
$$\alpha \cdot (v_1, v_2) = (\alpha \cdot v_1, \alpha \cdot v_2).$$

Sean $(u_1, u_2), (v_1, v_2), (w_1, w_2) \in V_1 \times V_2, \quad \alpha, \beta \in K$

- Asociatividad para +:

$$\begin{aligned}(u_1, u_2) + ((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) &= (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\ = (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2) &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2) \\ &= ((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) + (w_1, w_2)\end{aligned}$$

- Conmutativa para +:

$$\begin{aligned}&(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2) \\ &= (v_1, v_2) + (u_1, u_2)\end{aligned}$$

- Existencia de elemento neutro:

$$0 = (0_{V_1}, 0_{V_2}) \text{ entonces } (u_1, u_2) + 0 = (u_1 + 0_{V_1}, u_2 + 0_{V_2}) = (u_1, u_2)$$

- Existencia de opuestos:

$$\begin{aligned}-(u_1, u_2) = (-u_1, -u_2) &\text{ entonces } (u_1, u_2) + -(u_1, u_2) \\ &= (u_1 + -u_1, u_2 + -u_2) = (0_{V_1}, 0_{V_2})\end{aligned}$$

Por tanto $V_1 \times V_2$ con estas operaciones es un grupo abeliano. Ahora veamos las propiedades del producto por escalares:

- Distributividad (1):

$$\begin{aligned}\alpha \cdot ((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) &= \alpha \cdot (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ &= (\alpha \cdot (u_1 + v_1), \alpha \cdot (u_2 + v_2)) \\ &= (\alpha \cdot u_1 + \alpha \cdot v_1, \alpha \cdot u_2 + \alpha \cdot v_2) \\ &= (\alpha \cdot u_1, \alpha \cdot u_2) + (\alpha \cdot v_1, \alpha \cdot v_2) \\ &= \alpha \cdot (u_1, u_2) + \alpha \cdot (v_1, v_2)\end{aligned}$$

- Distributividad (2):

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot (u_1, u_2) &= ((\alpha + \beta) \cdot u_1, (\alpha + \beta) \cdot u_2) \\ &= (\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_1, \alpha \cdot u_2 + \beta \cdot u_2) \\ &= (\alpha \cdot u_1, \alpha \cdot u_2) + (\beta \cdot u_1, \beta \cdot u_2) \\ &= \alpha \cdot (u_1, u_2) + \beta \cdot (u_1, u_2)\end{aligned}$$

- Pseudoasociatividad:

$$\begin{aligned}(\alpha\cdot\beta)\cdot(u_1,u_2) &= ((\alpha\cdot\beta)\cdot u_1,(\alpha\cdot\beta)\cdot u_2) = (\alpha\cdot(\beta\cdot u_1),\alpha\cdot(\beta\cdot u_2))\\ &= \alpha\cdot(\beta\cdot u_1,\beta\cdot u_2) = \alpha\cdot(\beta\cdot(u_1,u_2))\end{aligned}$$

- Propiedad modular:

$$1\cdot(u_1,u_2) = (1\cdot u_1, 1\cdot u_2) = (u_1,u_2)$$

Por tanto $V_1\times V_2$ con estas operaciones es un espacio vectorial sobre K.

2. *Supongamos que U_i es un subespacio vectorial de V_i para cada $i=1,2$. Demostrar que $U_1\times U_2$ es un subespacio vectorial de $V_1\times V_2$. ¿Es todo subespacio vectorial de $V_1\times V_2$ de la forma $U_1\times U_2$ donde cada U_i es un subespacio vectorial de V_i?* $U_1\times U_2$ es un subespacio vectorial de $V_1\times V_2$ si y solo si:

$$\begin{cases}(u_1,u_2)+(v_1,v_2)\in U_1\times U_2\\ \alpha\cdot(u_1,u_2)\in U_1\times U_2\end{cases}$$

Sean $(u_1,u_2),(v_1,v_2)\in U_1\times U_2,\quad \alpha\in K$

- $(u_1,u_2)+(v_1,v_2)=(u_1+v_1,u_2+v_2)\in U_1\times U_2$
- $\alpha\cdot(u_1,u_2)=(\alpha\cdot u_1,\alpha\cdot u_2)\in U_1\times U_2$

Por tanto $U_1\times U_2$ es un subespacio vectorial de $V_1\times V_2$.

Ejercicio 1.2.4. En cada uno de los siguientes casos estudiar si U es o no un subespacio vectorial de V:

a) $V=\mathbb{R}^2$, $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x=y^2\}$

No lo es, para verlo, sean $(4,2),(9,3)\in\mathbb{R}^2$ entonces:

$$(4,2),(9,3)\in U \text{ sin embargo } (4,2)+(9,3)=(13,5)\notin U$$

b) $V=\mathbb{R}^2$, $U=\{(1,0),(0,0)\}$

No lo es, para verlo, sea $(1,0)\in\mathbb{R}^2$ entonces:

$$(1,0)\in U \text{ sin embargo } (1,0)+(1,0)=(2,0)\notin U$$

De otra manera, podríamos haber dicho simplemente que todo espacio vectorial con mas de un vector debe tener infinitos vectores, sin embargo U solo tiene dos.

c) $V=M_2(\mathbb{R})$, $U=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & c\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}) \mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$

Si lo es, para verlo, sean $x,y\in\mathbb{R}$ y sean $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a' & b'\\ -b' & c'\end{pmatrix}\in U$ entonces:

$$x\begin{pmatrix}a & b\\ -b & c\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}a' & b'\\ -b' & c'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xa+ya' & xb+yb'\\ -xb-yb' & xc+yc'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xa+ya' & xb+yb'\\ -(xb+yb') & xc+yc'\end{pmatrix}\in U$$

d) $V = \mathbb{K}[x]$, $U_n = \{p(x) \in K[x] |$ grado(p(x)) = n $\}$

No lo es, para verlo sean $p(x), q(x) \in K[x]$ tales que $p(x) = 2x^n + 1$, $q(x) = -2x^n$ entonces:

$$p(x), q(x) \in U_n \text{ sin embargo } p(x) + q(x) = 1_K \notin U_n$$

e) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | 2x - y = 3\}$.

No lo es, para verlo, sean $(1, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ entonces:

$(1, -1, 1, 1), (2, 1, 1, 1) \in U$ sin embargo $(1, -1, 1, 1)+(2, 1, 1, 1) = (3, 0, 2, 2) \notin U$

f) $V = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{Q}^n$.

No lo es, para verlo, sean $a = \sqrt{2}$ y $v = 1_{\mathbb{R}^n}$ entonces:

$$a \cdot v = \sqrt{2} \cdot 1_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{2} \cdot (1, 1, 1, ..., 1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, ..., \sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}^n$$

g) $V = \mathbb{R}^5$, $U = \{(x, y, z, t, s) \in \mathbb{R}^5 | -y = 2x + z\}$.

Si lo es, para verlo, sean $u = (x, -2x-z, z, t, s), v = (x', -2x'-z', z', t', s') \in \mathbb{R}^5$ entonces:

$$\begin{aligned} u + v &= (x + x', -2x - 2x' - z - z', z + z', t + t', s + s') \\ &= (x + x', -2(x + x') - (z + z'), z + z', t + t', s + s') \end{aligned}$$

Que claramente pertenece a U.

$$\alpha \cdot u = (\alpha x, -2\alpha x - \alpha z, \alpha z, \alpha t, \alpha s) = (\alpha x, -2\alpha x - \alpha z, \alpha z, \alpha t, \alpha s) \in U$$

Por tanto U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$.

h) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2yz = 0\}$.

No lo es, para verlo, sean $u = (0, 1, 1) \in U$ y $v = (1, 0, 1) \in U$ entonces:

$$u + v = (0, 1, 1) + (1, 0, 1) = (1, 1, 2) \notin U$$

i) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z \geqslant 0\}$.

No lo es, para verlo sea $a = -1 \in \mathbb{R}$ y $u = (0, 0, 1) \in U$, entonces

$$a \cdot u = -1 \cdot (0, 0, 1) = (0, 0, -1) \notin U$$

j) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = z\}$.

Si lo es, para verlo, sean $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in U$ entonces:

$$u + v = (x + x', y + y', z + z') = (x + x', x + x', x + x') \in U$$

$$\alpha \cdot u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x, \alpha x, \alpha x) \in U$$

Por tanto U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

k) $V = \mathbb{R}^5$, $U = \{(0,0,1,-1,2),(3,2,\sqrt{5},-8,32)\}$

No lo es, para verlo, sean $a = 2, u = (0,0,1,-1,2) \in U$ entonces:

$$a \cdot u = 2 \cdot (0,0,1,-1,2) = (0,0,2,-2,4) \notin U$$

l) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

No lo es, para verlo, sean $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$ y $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$ entonces:

$$u + v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin U$$

m) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $U = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f''(x) + f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$

Si lo es, para verlo sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in U$ entonces:

$$af(x) + bg(x) = (af)(x) + (bg)(x) = (ab + fg)(x) \in U$$

$$\begin{aligned}(af+bg)''(x) + (af+bg)(x) &= (af)''(x) + (af)(x) + (bg)''(x) + (bg)(x) \\ &= a(f''(x) + f(x)) + b(g''(x) + g(x)) = 0\end{aligned}$$

n) $V = M_n(\mathbb{K})$, $U = \{A \in M_n(\mathbb{K}) | \ A$ es diagonal $\}$

Si lo es, para verlo, sean $x, y \in \mathbb{K}$ y $A, B \in U$ entonces:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \mid a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \mid b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{K}$$

Entonces

$$xA + yB = \begin{pmatrix} xa_1 + yb_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & xa_2 + yb_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & xa_n + yb_n \end{pmatrix} \in U$$

ñ) $V = M_n(\mathbb{K})$, $U = \{A \in M_n(\mathbb{K}) | \ A$ es triangular superior $\}$

Si lo es, para verlo, sean $a, b \in \mathbb{K}$ y $A, B \in U$ entonces:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$aA + bB = \begin{pmatrix} aa_{11} + bb_{11} & aa_{12} + bb_{12} & \cdots & aa_{1n} + bb_{1n} \\ 0 & aa_{22} + bb_{22} & \cdots & aa_{2n} + bb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & aa_{nn} + bb_{nn} \end{pmatrix} \in U$$

Ejercicio 1.2.5. En cada uno de los siguientes casos decidir si el vector v del espacio vectorial V pertenece o no al subespacio $L(S)$, en caso afirmativo, expresar v como combinación lineal de S:

a) $V = \mathbb{R}^3, v = (0, 2, -5), S = \{(1, -3, 2), (2, -4, -1), (1, -5, 7)\}$.

Sean $a, b, c \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}^3$ tales que $v = a(1, -3, 2) + b(2, -4, -1) + c(1, -5, 7)$ entonces:

$$\left.\begin{array}{rcl} a + 2b + c & = & 0 \\ -3a - 4b - 5c & = & 2 \\ 2a - b + 7c & = & -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{ SCI} \Rightarrow v \notin \mathcal{L}(S)$$

b) $V = \mathbb{R}^4, v = (9, -17, 10, -5), S = \{(2, -1, 0, 0), (-1, 3, -2, 1)\}$.

Sean $a, b \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^4$ tales que $v = a(2, -1, 0, 0) + b(-1, 3, -2, 1)$ entonces:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2a - b & = & 9 \\ -a + 3b & = & -17 \\ -2b & = & 10 \\ b & = & -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b = -5 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow 2(2, -1, 0, 0) - 5(-1, 3, -2, 1) = v \in \mathcal{L}(S)$$

c) $V = \mathbb{R}^4, v = (5, 7, a, 6), S = \{(1, 2, 3, 0), (1, 1, 1, 2)\}$.

Sean $c, d \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^4$ tales que $v = c(1, 2, 3, 0) + d(1, 1, 1, 2)$ entonces:

$$\left.\begin{array}{rcl} c + d & = & 5 \\ 2c + d & = & 7 \\ 3c + d & = & a \\ 2d & = & 6 \end{array}\right\} \Rightarrow d = 3 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow 2(1, 2, 3, 0) + 3(1, 1, 1, 2) = v \in \mathcal{L}(S)$$

Lo que ocurre si, y solo si $3c + d = a$, o lo que es lo mismo, $a = 9$.

d) $V = M_2(\mathbb{C}), v = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $v = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 2i \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 2i \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bi & a \\ ai & 2ai + b \end{pmatrix}$$

Que claramente no tiene solución, por lo que v no pertenece a $\mathcal{L}(S)$.

e) $V = \mathbb{R}[x], v = x^2 + x + 1, S = \{x, x^2 + 1, x^3\}$. Sea $a = -1, b = 1, c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $v = a(x) + b(x^2 + 1) + c(x^3)$ entonces:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + 1 \Rightarrow v \in \mathcal{L}(S)$$

Ejercicio 1.2.6. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Demostrar los siguientes hechos:

1. *Si S y S' son subconjuntos no vacíos de V con $S \subseteq S'$ entonces $L(S) \subseteq L(S')$.*

   Sea $v \in L(S)$, entonces $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, con $v_i \in S$. Por hipótesis, $v_i \in S'$, por lo que $v \in L(S')$. Por tanto, $L(S) \subseteq L(S')$.

2. *$L(S) = S$ si y sólo si S es un subespacio vectorial de V.*

   Si $L(S) = S$, entonces S es un subespacio vectorial de V por definición de subespacio vectorial. Si S es un subespacio vectorial de V, entonces $S \subseteq L(S)$ y $L(S) \subseteq S$, por lo que $L(S) = S$.

3. Si $U_i = L(S_i)$ para cada $i = 1, \ldots, m$, entonces $\sum_{i=1}^{m} U_i = L(\bigcup_{i=1}^{m} S_i)$.

Supongamos que $U_i = L(S_i)$, para cada $i = 1, \ldots, m$. ¿Es cierto que $\bigcap_{i=1}^{m} U_i = L(\bigcap_{i=1}^{m} S_i)$?

Sea $v \in \sum_{i=1}^{m} U_i$, entonces $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$, con $v_i \in S_i$. Por lo tanto, $v \in L(\bigcup_{i=1}^{m} S_i)$. Por otro lado, sea $v \in \mathcal{L}(\bigcap_{i=1}^{m} S_i)$, entonces $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$, con $v_i \in \bigcap_{i=1}^{m} S_i$. Por lo tanto, $v \in \sum_{i=1}^{m} U_i$. Por tanto, $\sum_{i=1}^{m} U_i = \mathcal{L}(\bigcup_{i=1}^{m} S_i)$.

Ejercicio 1.2.7. ¿Qué se puede decir sobre dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ cuya suma es $\{0\}$?¿ y cuya intersección es $\mathbb{R}^n$?

- Si la suma es $\{0\}$:

  $U_1 + U_2 = \{0\} \Rightarrow \forall u_1 \in U_1, \forall u_2 \in U_2 \Rightarrow u_1 + u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = -u_2 \Rightarrow U_1 = -U_2$

  Es decir, $U_1 = U_2 = \{0\}$

- Si la intersección es $\mathbb{R}^n$:

  Por ser subespacios vectoriales, $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces:

  $U_1 \cap U_2 = \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n \subseteq U_1 \cap U_2 \Rightarrow \mathbb{R}^n \subseteq U_1 \wedge \mathbb{R}^n \subseteq U_2 \Rightarrow U_1 = \mathbb{R}^n \wedge U_2 = \mathbb{R}^n$

Ejercicio 1.2.8. En cada uno de los siguientes casos demostrar que U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V. Estudiar también si se cumple $V = U_1 \oplus U_2$.

1. $V = \mathbb{R}^3, U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = z\}, U_2 = L\{(3, 0, 2)\}$.

   Sean $(x, y, x), (x', y', x') \in \mathbb{R}^3$, y sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

   $$a(x, y, x) + b(x', y', x') = (ax + bx', ay + by', ax + bx') \in U_1$$

   Que U_2 sea subespacio vectorial es trivial por definición de subespacio generado. Veamos ahora si $V = U_1 \oplus U_2$. Para ello, calculamos una base de U_1 y U_2 y vemos si el sistema de generadores generado por la suma de ambas bases es una base de V:

   - Para U_1:
   $$B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$
   - Para U_2:
   $$B' = \{(3, 0, 2)\}$$

   Veamos ahora si la suma de ambas bases es una base de V:

   $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{ L.I } \Rightarrow \dim(U_1 \oplus U_2) = 3 = \dim(V) \Rightarrow V = U_1 \oplus U_2$$

2. $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), U_1 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}, U_2 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.

   Sean $f, g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, y sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

   $$af(-x) + bg(-x) = af(x) + bg(x) \in U_1$$

   $$af(-x) + bg(-x) = af(x) - bg(x) \in U_2$$

   Veamos ahora si $V = U_1 \oplus U_2$. Para ello, comprobamos si $U_1 \cap U_2 = \{0\}$:

   $$U_1 \cap U_2 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f(-x) = f(x) \ \wedge \ f(-x) = -f(x)\} = \{0\}$$

   Veamos ahora si $U_1 \oplus U_2 = V$:

   $$\forall f \in V \Rightarrow f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \in U_1 + U_2$$

   Por tanto, $V = U_1 \oplus U_2$.

3. $V = \mathbb{R}[x], U_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | p(1) + p'(1) = 0\}, U_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | p(0) + p''(0) = 0\}$.

   Demostraremos, en primer lugar, que U_1 es un subespacio vectorial de $R_n[X]$. Para ello, sean $f, g \in U_1$ y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

   $$(af + bg)(1) + (af + bg)'(1) = a(f(1) + f'(1)) + b(g(1) + g'(1)) = 0$$

Por lo que $af + bg \in U_1$. Ahora, para U_2: Sea $f, g \in U_2$ y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

$$(af + bg)(0) + (af + bg)''(0) = a(f(0) + f''(0)) + b(g(0) + g''(0)) = 0$$

Por lo que $af+bg \in U_2$. Nos queda ver si $V = U_1 \oplus U_2$. Para ello, sea $p \in \mathbb{R}_n[x]$, entonces

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \\ p'(x) &= a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} \\ p''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} \end{aligned}$$

Buscamos ahora unas ecuaciones canónicas de U_1 y U_2: Trabajamos con U_1:

$$p(1) + p'(1) = 0 = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) + (a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n) = 0$$

Trabajamos con U_2:

$$p(0) + p''(0) = 0 = a_0 + 2a_2 + \ldots + n(n-1)a_n = 0$$

De donde tenemos que:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] | p(x) = a_0 + 2a_1 + \ldots + na_nx^{n-1} = 0\} \\ U_2 &= \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] | p(x) = a_0 + 2a_2 = 0\} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$U_1 \cap U_2 = \{(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \begin{cases} a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0 \\ a_0 + 2a_2 = 0 \end{cases} \}$$

Por lo que $\dim(U_1 \cap U_2) = n + 1 - 2 = n - 1$. Por tanto, para $n \neq 1$ no se cumple que $V = U_1 \oplus U_2$. Si $n = 1$, entonces:

$$U_1 + U_2 = \mathcal{L}\{(0, 1), (2, -1)\}$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces $V = U_1 \oplus U_2$.

4. $V = \mathbb{R}^3, U_1 = L\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}, U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$.

5. Por definición, U_1 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3$. Veamos ahora si lo es U_2. Sea $u, v \in U_2$ y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

$$au + bv = a(u_1, u_2, 0) + b(v_1, v_2, 0) = (au_1 + bv_1, au_2 + bv_2, 0) \in U_2$$

Veamos ahora si $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Para ello obtenemos ecuaciones cartesianas de U_1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z + x + y = 0$$

Entonces, $U_1 \cap U_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \right\} \neq \{0\}$. Por tanto, $V \neq U_1 \oplus U_2$.

¿De cuántas formas podemos escribir $v = u_1 + u_2$ con $v \in \mathbb{R}^3, u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$? Sea $v \in \mathbb{R}^3$, entonces:

$$u_1+u_2 = a(1,0,-1)+b(0,1,-1)+(x,y,0) = (a,b,-a)+(x,y,0) = (a+x, b+y, -a-b)$$

Por tanto:

$$\begin{cases} a+x = v_1 \\ b+y = v_2 \\ -a-b = v_3 \end{cases} \Rightarrow rg(A) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \text{ SCI}$$

Por lo que hay infinitas formas de escribir $v = u_1 + u_2$.

Ejercicio 1.2.9. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los siguientes subespacios vectoriales:

1. $U_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x-y=0, z-t=0\}$,
2. $U_2 = L\{(0,1,1,0)\}$,
3. $U_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x-y+z-t=0\}$.

Probar que $U_1 + U_2 = U_3$. ¿Se cumple que $U_3 = U_1 \oplus U_2$?

Para probarlo, comenzamos calculando una base de cada subespacio, para U_2 resulta trivial, para U_1, tenemos dos ecuaciones linealmente independientes, por tanto, una base de U_1 estará formada por $\dim(\mathbb{R}^4) = 4-2 = 2$ vectores, por tanto, una base de U_1 estará formada por:

$$B_1 = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1)\}$$

Análogamente, tenemos que una base de U_3 estará formada por $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 - 1 = 3$ vectores, por tanto, una base de U_3 estará formada por:

$$B_3 = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (0,1,1,0)\}$$

Donde los vectores han sido convenientemente elegidos para que se vea directamente que $U_1 \oplus U_2 = U_3$.

Ejercicio 1.2.10. Sea $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Analizar si la familia $S = \{f, g, h\}$ es linealmente independiente, donde $f(x) = x^2+1, g(x) = 2x$ y $h(x) = e^x$.

Para que S sea linealmente independiente, se debe verificar $af(x)+bg(x)+ch(x) = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$. Veamos si esto se cumple:

$$a(x^2+1) + b(2x) + ce^x = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} ax^2 & = & 0 \\ 2bx & = & 0 \\ a+ce^x & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=b=c=0 \Rightarrow S \text{ es L.I}$$

Ejercicio 1.2.11. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo infinito K. Tomemos $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $\{a_1, \dots, a_n\}$ una familia en K con $a_i \neq 0$ para cada $i = 1, \dots, n$. Demostrar que $\beta' = \{a_1v_1, \dots, a_nv_n\}$ es una base de V. Concluir que V tiene infinitas bases.

Como $\mathcal{B}$ es base de V, entonces $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Por tanto:

$$\{a_1v_1, \dots, a_nv_n\} \text{ base } \Leftrightarrow \{a_1v_1, \dots, a_nv_n\} \text{ sistema de generador}$$

Demostraremos por tanto que $\{a_1v_1, \dots, a_nv_n\}$ es un sistema de generadores de V. Como $B = \{v_1, \dots v_n\}$ es base de V, entonces $\forall w \in V(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned}
w &= \alpha_1v_1 + \dots + \alpha_nv_n \quad \alpha_i \in \mathbb{K} \quad \forall i = 1, \dots, n \\
&= \gamma_1a_1v_1 + \dots + \gamma_na_nv_n \quad \gamma_i = \alpha_ia_i \quad \forall i = 1, \dots, n \\
&= \frac{\alpha_1}{a_1}a_1v_1 + \dots + \frac{\alpha_n}{a_n}a_nv_n \\
&= \alpha_1v_1 + \dots + \alpha_nv_n = w
\end{aligned}$$

Por tanto $\{a_1v_1, \dots, a_nv_n\}$ es un sistema de generadores de V, por lo que es una base de V. Por tanto, V tiene infinitas bases.

Ejercicio 1.2.12. Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales finitamente generados sobre un cuerpo K. Demostrar que el espacio vectorial producto $V_1 \times V_2$ definido en el ejercicio 3 es finitamente generado. Construir una base de $V_1 \times V_2$ a partir de bases de V_1 y de V_2. Calcular $\dim(V_1 \times V_2)$. Sean $\beta_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $\beta_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$ bases de V_1 y V_2 respectivamente. Veamos que β es una base de $V_1 \times V_2$. Para ello, sea $(u, v) \in V_1 \times V_2$, entonces:

$$u \in v_1 \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_iu_i$$
$$v \in v_2 \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{m} \beta_jv_j$$

Por tanto, $(u, v) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_iu_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_jv_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(u_i, 0) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(0, v_j)$. De donde,

$$S = \{(u_1, 0), \dots, (u_n, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_m)\}$$

es un sistema de generador de $V_1 \times V_2$. Además son linealmente independientes, por lo que $S = \beta$ es una base de $V_1 \times V_2$. Por tanto, $\dim(V_1 \times V_2) = n + m$.

Ejercicio 1.2.13. Sea V un espacio vectorial complejo con $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$. Demostrar que V es un espacio vectorial real con $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$.
Sea $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\forall x \in V, x = (z_1, \dots, z_n)_\beta = \sum_{j=1}^{n}(a_j+b_ji)v_j$. Con $\{v_1, \dots, v_n, iv_1, \dots, iv_n\}$ es un sistema de generadores de $V(\mathbb{R})$.

Veamos si son linealmente independientes: Sea $d_i, e_i \in \mathbb{R}$, entonces $d_1v_1+\dots+d_nv_n+e_1iv_1+\dots+e_niv_n = 0 \Rightarrow d_1v_1+\dots+d_nv_n+e_1v_1+\dots+e_nv_n = 0 \Rightarrow$ Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente en $V(\mathbb{C})$, entonces $d_1 = \dots = d_n = e_1 = \dots = e_n = 0$. Por tanto, $\{v_1, \dots, v_n, iv_1, \dots, iv_n\}$ es una base de $V(\mathbb{R})$, por lo que $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$.

Ejercicio 1.2.14. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Supongamos que $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una familia de vectores de V. Demostrar que:

1. Si S es sistema de generadores de V y cumple la propiedad de que cuando se elimina cualquier vector de S la familia resultante es un sistema de generadores de V, entonces S es una base de V.

   Si S es un sistema de generadores, $V(K) = \mathcal{L}(S)$. Si al eliminar cualquier vector de V la familia resultante no es sistema de generadores de V, significa que ese vector era linealmente dependiente de los demás, por tanto, como los vectores de S son linealmente independientes, entonces S es una base de V.

2. Si S es linealmente independiente y cumple la propiedad de que cuando se añade a S cualquier vector de V la familia resultante es linealmente independiente, entonces S es una base de V.

   Si al añadir cualquier vector de V a S la familia resultante es linealmente dependiente, significa que v es combinación lineal de los vectores de S, por tanto, S es un sistema de generadores de V, y, como los vectores son linealmente independientes, S es una base de V.

Ejercicio 1.2.15. Describir todos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$.

- $\mathbb{R}^2$: $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, por tanto, los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ serán de dimensión 0, 1 y 2. Es decir:

$$\begin{aligned} U \subseteq \mathbb{R}^2 / \dim U = 0 &\Rightarrow U = \{0\} \\ V \subseteq \mathbb{R}^2 / \dim V = 1 &\Rightarrow V = \mathcal{L}\{v\} \text{ con } v \neq 0 \\ W \subseteq \mathbb{R}^2 / \dim W = 2 &\Rightarrow W = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

- $\mathbb{R}^3$: $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, por tanto, los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ serán de dimensión 0, 1, 2 y 3.

$$\begin{aligned} U \subseteq \mathbb{R}^3 / \dim U = 0 &\Rightarrow U = \{0\} \\ V \subseteq \mathbb{R}^3 / \dim V = 1 &\Rightarrow V = \mathcal{L}\{v\} \text{ con } v \neq 0 \\ W \subseteq \mathbb{R}^3 / \dim W = 2 &\Rightarrow W = \mathcal{L}\{v_1, v_2\} \text{ con } v_1, v_2 \text{ L.I} \\ Z \subseteq \mathbb{R}^3 / \dim Z = 3 &\Rightarrow Z = \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.16. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales dados por:

$$\begin{aligned} U_1 &= L\{(1, 1-\alpha^2, 2), (1+\alpha, 1-\alpha, -2)\}, \\ U_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}. \end{aligned}$$

Calcular todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que $U_1 = U_2$. En primer lugar, calculamos la dimensión de U_1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+\alpha \\ 1-\alpha^2 & 1-\alpha \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1+\alpha \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2 - 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$$

Por tanto distinguimos dos casos:

- Si $\alpha = -2$, entonces:
$$U_1 = L\{(1,-3,2),(-1,3,-2)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} = U_2$$
$$\dim U_1 = 1 \Rightarrow B_{U_1} = \{(1,-3,2)\} \Rightarrow U_1 \neq U_2$$

- Si $\alpha \neq -2$, entonces:
$$\dim U_1 = 2 \Rightarrow B_{U_1} = \{(1, 1-\alpha^2, 2), (1+\alpha, 1-\alpha, -2)\}$$
Para que $U_1 = U_2$, necesitamos que $B_{U_1} \subseteq U_2$, es decir, que los vectores de B_{U_1} sean solución de la ecuacion que define U_2, es decir:
$$\left.\begin{array}{rcl} 1+1-\alpha^2+2 &=& 0 \\ 1+\alpha+1-\alpha-2 &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} \alpha &=& \pm 2 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right\} \text{ Como } \alpha \neq -2 \Rightarrow \alpha = 2$$

Por tanto para $\alpha = 2$ se cumple que $U_1 = U_2$.

Ejercicio 1.2.17. Calcular una base y la dimensión de los subespacios vectoriales que aparecen en los apartados c, g y n del ejercicio 4.

c) $V = M_2(\mathbb{R}), \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} : a,b,c, \in \mathbb{R} \right\}$
$$\forall u \in U, u = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Además
$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a=b=c=0 \Rightarrow \text{ L.I}$$
Por tanto una base de U es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\dim(U) = 3$.

g) $V = \mathbb{R}^5, \quad U = \{(x,y,z,t,s) \in \mathbb{R}^5 / -y = 2x+z\}$
$$\forall u \in U, u = \begin{pmatrix} x \\ -2x-z \\ z \\ t \\ s \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Es un sistema de generadores de U, ademas es linealmente independiente, (det $= -2 \neq 0$) por tanto, $\beta = \{(1,-2,0,0,0),(0,-1,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$ es una base de U y $\dim(U) = 4$.

n) $V = M_n(\mathbb{K})$, $U = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ es diagonal}\}$
$$\forall u \in U, u = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{nn} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Es un sistema de generadores de U, ademas es claramente linearmente independiente, por tanto, $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de U y $\dim(U) = n$.

Ejercicio 1.2.18. Para cada uno de los subespacios vectoriales U del espacio vectorial V que aparecen a continuación calcular una base, la dimensión y un subespacio complementario:

a) $U = L\{(1,-2,1,0),(2,3,-2,1),(4,-1,0,1)\}, \quad V = \mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo que $rg(A) = 2$, notemos que $(4,-1,0,1)$ es combinación lineal. Por tanto, una base de U es $\{(1,-2,1,0),(2,3,-2,1)\}$ y $\dim(U) = 2$. Para obtener un complementario $W/V = \mathbb{R}^4 = U \oplus W$, necesitamos que W sea de dimensión 2 y que $U \cap W = \{0\}$. Para ello, sea $\mathcal{B}' = \{(1,-2,1,0),(2,3,-2,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ L.I}$$

Por tanto, una base de W es $\{(0,0,0,1),(0,1,0,0)\}$.

b) $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z = 0, x + y + z + t = 0\}, \quad V = \mathbb{R}^4$.

En primer lugar, notemos que $U = \mathcal{L}\{(1,1,1,-3),(1,0,-1,0)\}$ y que $rg(A) = 2$, por tanto, $\dim(U) = 2$. Una base suya será $\mathcal{B} = \{(1,1,1,-3),(1,0,-1,0)\}$. Para obtener un complementario $W/V = \mathbb{R}^4 = U \oplus W$, necesitamos que W sea de dimensión 2 y que $U \cap W = \{0\}$.

Para ello, sea $\mathcal{B}' = \{(1,1,1,-3),(1,0,-1,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ L.I}$$

Por tanto, sea $W = \mathcal{L}\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\} = \{(x,y,0,0) \in \mathbb{R}^4\}$. Es fácil ver qeu $U \cap W = \{0\}$, por lo que $V = U \oplus W$. Por lo que $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

c) $U = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p'(1) = 0\}, \quad V = \mathbb{R}_3[x]\}$ ($p'(1)$ es la derivada de $p(x)$ en $x = 1$).

En primer lugar, notemos que

$$\begin{aligned} U &= \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid p'(1) = 0\} \\ &= \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0\} \\ &= \mathcal{L}\{(0,1,1,-1),(1,0,0,0),(0,3,0,-1)\} \\ &= \mathcal{L}\{x + x^2 - x^3, 1, 3x - x^3\} \end{aligned}$$

ya que $rg(A) = 3$, por tanto, $\dim(U) = 3$. Una base suya será $\mathcal{B} = \{x + x^2 - x^3, 1, 3x - x^3\}$. Busquemos un complementario $W/V = \mathbb{R}_3[x] = U \oplus W$, necesitamos que W sea de dimensión 1 y que $U \cap W = \{0\}$. Para ello, sea $\mathbb{R}_3[x] = \mathcal{L}\{(0,1,1,-1),(1,0,0,0),(0,3,0,-1),(0,0,1,0)\}$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ L.I}$$

Por tanto, $W = \mathcal{L}\{x^2\}$. Es fácil ver que $U \cap W = \{0\}$, por lo que $V = U \oplus W$. Por lo que $U \oplus W = \mathbb{R}_3[x]$.

d) $U = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid \int_0^1 p(x)\,dx = 0\}, \quad V = \mathbb{R}_2[x]$.

En primer lugar, notemos que

$$\begin{aligned} U &= \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid \int_0^1 p(x)\,dx = 0\} \\ &= \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid \left.\frac{a_0x}{1} + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3}\right|_0^1 = 0\} \\ &= \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} = 0\} \\ &= \mathcal{L}\{(1,2,-6),(1,-2,0)\} \\ &= \mathcal{L}\{1 + 2x - 6x^2, 1 - 2x\} \end{aligned}$$

ya que $rg(A) = 2$, por tanto, $\dim(U) = 2$. Una base suya será $\mathcal{B} = \{1 + 2x - 6x^2, 1 - 2x\}$. Busquemos un complementario $W/V = \mathbb{R}_2[x] = U \oplus W$, necesitamos que W sea de dimensión 1 y que $U \cap W = \{0\}$. Para ello, sea $\mathbb{R}_2[x] = \mathcal{L}\{(1,2,-6),(1,-2,0),(0,1,0)\}. = \mathcal{L}\{1+2x-6x^2, 1-2x, x\}$. Es fácil ver que $U \cap W = \{0\}$, por lo que $V = U \oplus W$. Por lo que $U \oplus W = \mathbb{R}_2[x]$.

Ejercicio 1.2.19. Sea K un cuerpo en el que $2 \neq 0$. Calcular una base y la dimensión de los subespacios de matrices $S_n(K)$ y $A_n(K)$ (estudiar primero los casos particulares $n = 2$ y $n = 3$).

$$\forall u \in S_2(\mathbb{K}), u = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es un sistema de generadores de $S_2(\mathbb{K})$, ademas es claramente linearmente independiente, por tanto, $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $S_2(\mathbb{K})$ y $\dim(S_2(\mathbb{K})) = 3$. Para $A_2(\mathbb{K})$:

$$\forall u \in A_2(\mathbb{K}), u = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es un sistema de generadores de $A_2(\mathbb{K})$, ademas es claramente linearmente independiente, por tanto, $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $A_2(\mathbb{K})$ y $\dim(A_2(\mathbb{K})) = 1$.

Para $S_3(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \forall u \in S_3(\mathbb{K}), u = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{33} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es un sistema de generadores de $S_3(\mathbb{K})$, ademas es claramente linearmente independiente, por tanto,
$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
es una base de $S_3(\mathbb{K})$ y $\dim(S_3(\mathbb{K})) = 6$. Para $A_3(\mathbb{K})$:

$$\forall u \in A_3(\mathbb{K}),$$
$$u = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es un sistema de generadores de $A_3(\mathbb{K})$, ademas es claramente linearmente independiente, por tanto, $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $A_3(\mathbb{K})$ y $\dim(A_3(\mathbb{K})) = 3$.

- Para $S_n(K)$ sabemos que cada matriz se puede expresar de la siguiente manera:

$$S_n(K) = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + ... + a_{nn}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
$$+ a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + ... + a_{n-1,n}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} + (...)$$

Sean ahora $A_i j$, las matrices que acompañan a los escalares, entonces:

$$B = \{\{A_{11}, ..., A_{nn}\}, \{A_{12}, ..., A_{n-1,n}\}, \{A_{13}, ..., A_{n-2,n}\}, ..., \{A_{1,n}\}\}$$

Cuya cantidad de vectores es claramente $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ Que es la dimension de $S_n(K)$

- Para $A_n(K)$, el procedimiento es análogo pero habrá que tener en cuenta que $a_{ii} = 0 \quad \forall i \in n$ por lo que la dimension en este caso es $1+2+...+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$

Ejercicio 1.2.20. Sea K un cuerpo. Demostrar que si S es una familia de $K[x]$ que no contiene dos polinomios con el mismo grado, entonces S es linealmente independiente. Deducir que si $\beta = \{p_0(x), \dots, p_n(x)\}$ es una familia de $K[x]$ de forma que grado$(p_i(x)) = i$, para cada $i = 0, \dots, n$, entonces β es una base de $K_n[x]$.

Ejercicio 1.2.21. Encontrar bases β y β' del espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ en las que el polinomio $p(x) = x + 1$ cumpla que $p(x)_\beta = (1, 0, 0)^T$ y $p(x)_{\beta'} = (1, 1, 0)^T$.

Ejercicio 1.2.22. En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_2[x]$ se consideran las bases $\beta = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ y $\beta' = \{1, x, x^2\}$. ¿Qué relación existe entre las coordenadas de un polinomio $p(x)$ en $\mathbb{R}_2[x]$ con respecto a β y β'? Encontrar $p(x)$ en $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $p(x)_\beta = (1, -2, 4)^T$.

Ejercicio 1.2.23. En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{C})$ se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & 2i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

¿Para qué números $\alpha \in \mathbb{C}$ el subespacio $U = L(A, B, C)$ de $M_2(\mathbb{C})$ tiene dimensión 2? Para tales valores calcular una base de U y las coordenadas de la matriz

$$v = \begin{pmatrix} 2i - 1 & -i \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.2.24. Se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ dados por:

$$U_1 = \mathcal{L}\{(3, 6, 1, 0), (1, 0, -1, 2), (2, 3, 0, 1)\},$$
$$U_2 = \mathcal{L}\{(2, 0, -1, 3), (3, 3, -2, 4)\},$$
$$U_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0\},$$
$$U_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + t = 0,\ 3x + y + 6z = 0\}.$$

a) Calcular una base y la dimensión de U_i, para $i = 1, 2, 3, 4$.

b) Calcular una base y la dimensión de $U_1 \cap U_2$, $U_2 \cap U_4$ y $U_3 \cap U_4$.

c) Calcular una base y la dimensión de $U_1 + U_2$, $U_2 + U_4$ y $U_3 + U_4$.

a) Trabajamos en primer lugar, con U_1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $rg(A) = 2$, con $(2, 3, 0, 1)$ dependiente de $(3, 6, 1, 0)$ y $(1, 0, -1, 2)$, por lo que una base de U_1 es $\{(3, 6, 1, 0), (1, 0, -1, 2)\}$ y $\dim(U_1) = 2$.

Trabajamos ahora con U_2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \\ -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Son linealmente independientes, por lo que una base de U_2 es $\{(2, 0, -1, 3), (3, 3, -2, 4)\}$ y $\dim(U_2) = 2$.

Trabajamos ahora con U_3, como $\dim(U_3) = 3$, entonces una base de U_3 es $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. Como son linealmente independientes y la dimensión es 3, forman una base.

Trabajamos ahora con U_4, como $\dim(U_4) = 2$, entonces obtenemos unas ecuaciones paramétricas de U_4:

$$\begin{cases} x = 2y - t \\ z = -3y + 2t \end{cases}$$

Por tanto, una base de U_4 es $\{(1, 3, -1, 5), (0, 6, -1, 12)\}$ y $\dim(U_4) = 2$.

b) Calculamos ahora una base de $U_1 \cap U_2$: Sea $(x, y, z, t) \in U_1$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 6 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x - 3z + 2y = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 6 & 0 & y \\ 0 & 2 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - t - y = 0$$

Por tanto, $U_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} -3x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y - t = 0 \end{cases} \}$ Obtenemos ahora unas ecuaciones implícitas de U_2. Sea $(x, y, z, t) \in U_2$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 0 & 3 & y \\ -1 & -2 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + y + 6z = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 0 & 3 & y \\ 3 & 4 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -9x + y + 6t = 0$$

Por tanto, $U_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} 3x+y+6z=0 \\ -9x+y+6t=0 \end{cases} \}$ Por tanto, $U_1 \cap U_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} -3x+2y-3z=0 \\ 2x-y-t=0 \\ 3x+y+6z=0 \\ -9x+y+6t=0 \end{cases} \}$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \\ -9 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Las tres primeras filas son linealmente independientes, por tanto, $U_1 \cap U_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} -3x+2y-3z=0 \\ 2x-y-t=0 \\ 3x+y+6z=0 \end{cases} \}$ Y $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$. Para obtener una base, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} -3x+2y-3z=0 \\ 2x-y-t=0 \\ 3x+y+6z=0 \end{cases} \Rightarrow x = x, y = 3x/5, z = -3x/5, t = 7x/5$$

Por tanto, una base de $U_1 \cap U_2$ es $\{(5,3,-3,7)\}$.

Calculamos ahora una base de $U_2 \cap U_4$:

$$U_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} 3x+y+6z=0 \\ -9x+y+6t=0 \end{cases} \}$$

$$U_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x-2y+t=0 \\ 3x+y+6z=0 \end{cases} \}$$

Por tanto, $U_2 \cap U_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} 3x+y+6z=0 \\ -9x+y+6t=0 \\ x-2y+t=0 \end{cases} \}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 0 \\ -9 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -9 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$$

Por tanto, $\dim_{\mathbb{R}}(U_2 \cap U_4) = 1$. Para obtener una base, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} 3x+y+6z=0 \\ -9x+y+6t=0 \\ x-2y+t=0 \end{cases} \Rightarrow x = 13/17t, y = 15/17t, z = -9/17t, t = t$$

Por tanto, una base de $U_2 \cap U_4$ es $\{(13, 15, -9, 17)\}$.

Calculamos ahora una base de $U_3 \cap U_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - 2y + t = 0 \\ 3x + y + 6z = 0 \end{cases} \}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} = A \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$$

Por tanto, $\dim_{\mathbb{R}}(U_3 \cap U_4) = 1$. Para obtener una base, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x \\ y = -9x \\ z = x \\ t = -19x \end{cases}$$

Por tanto, una base de $U_3 \cap U_4$ es $\{(1, -9, 1, -19)\}$.

c) Calculamos ahora una base de $U_1 + U_2$: Como $\dim(U_1) = 2$ y $\dim(U_2) = 2$, entonces $\dim(U_1 + U_2) = 3$. Para obtener una base:

$$U_1 + U_2 = \mathcal{L}\{(3, 6, 1, 0), (1, 0, -1, 2), (2, 0, -1, 3), (3, 3, -2, 4)\}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Por tanto el 4º vector es combinación lineal de los 3 primeros, por lo que una base de $U_1 + U_2$ es $\{(3, 6, 1, 0), (1, 0, -1, 2), (2, 0, -1, 3)\}$.

Calculamos ahora una base de $U_2 + U_4$: Como $\dim(U_2) = 2$ y $\dim(U_4) = 2$, entonces $\dim(U_2 + U_4) = 3$. Para obtener una base:

$$U_2 + U_4 = \mathcal{L}\{(2, 0, -1, 3), (3, 3, -2, 4), (1, 3, -1, 5), (0, 6, -1, 12)\}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto el 4º vector es combinación lineal de los 3 primeros, por lo que una base de $U_2 + U_4$ es $\{(2, 0, -1, 3), (3, 3, -2, 4), (1, 3, -1, 5)\}$.

Calculamos ahora una base de $U_3 + U_4$: Como $\dim(U_3) = 3$ y $\dim(U_4) = 4$, entonces $\dim(U_3 + U_4) = 4$. Para obtener una base:

$$U_3 + U_4 = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 3, -1, 5), (0, 6, -1, 12)\}$$

Veamos cuales son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto el 5º vector es combinación lineal de los 4 primeros, por lo que una base de $U_3 + U_4$ es $\{(1,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1),(1,3,-1,5)\}$.

Ejercicio 1.2.25. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz en $M_n(\mathbb{R})$. Se define la traza de A como:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $U_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \operatorname{tr}(A) = 0\}$. Se pide lo siguiente:

1. *Demostrar que U_n es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$.* Sea $x, y \in \mathbb{R}$, $A, B \in U_n$, entonces:

$$xA + yB = x \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & 0 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & xa_{12} + yb_{12} & \cdots & xa_{1n} + yb_{1n} \\ xa_{21} + yb_{21} & 0 & \cdots & xa_{2n} + yb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ xa_{n1} + yb_{n1} & xa_{n2} + yb_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in U_n$$

2. *Calcular una base y la dimensión de U_n cuando $n = 2, 3$.* Sea $A \in U_2$, entonces:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr}(A) = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

Por tanto, una base de U_2 es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $\dim(U_2) = 3$.

Sea ahora $B \in U_3$, entonces:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{32} & -a_{11} - a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr}(B) = 0 \Rightarrow a_{11} + a_{22} - a_{11} - a_{22} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Por tanto, una base de U_3 es

$$\mathcal{U} = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \} \text{ y } \dim(U_3) = 8.$$

3. *Calcular $U_2 \cap S_2(\mathbb{R})$ y $U_2 + S_2(\mathbb{R})$. ¿Es cierto que $M_2(\mathbb{R}) = U_2 \oplus S_2(\mathbb{R})$?*

Ejercicio 1.2.26. Decidir de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) *Existe en $\mathbb{R}$ una estructura de espacio vectorial complejo.*

Falso: Para que sea $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ un espacio vectorial, tiene que estar definido el producto de vectores por escalares, es decir, tiene que estar definido el producto de vectores por escalares. Es decir, tiene que estar definido $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, y no lo está. Por ejemplo, $i \cdot 7 \notin \mathbb{R}$.

b) *Si U es un subespacio vectorial de V entonces el conjunto $V - U$ es un subespacio vectorial de V.*

Falso: Como $0 \in U$, $0 \notin V - U$. Por tanto, no es un subespacio vectorial.

c) *Si K es un cuerpo entonces los únicos subespacios vectoriales de K son los impropios.*

Verdadero: Una base $\mathcal{B}$ de $K(K) = \{1\}$, Es decir, $K(K) = \mathcal{L}\{1\}$. Por tanto, $\dim_K(K) = 1$. Los subespacios vectoriales de $K(K)$ tienen:

$$\begin{cases} \dim = 1 \to K(K) \\ \dim = 0 \to \{0\} \end{cases} \Rightarrow \text{Los únicos subespacios vectoriales de } K(K) \text{ son los impropios.}$$

d) *En un espacio vectorial V, si dos planos vectoriales no son iguales entonces su intersección es una recta o el vector nulo.*

Verdadero: Como $U \cap V$ es un subespacio vectorial de V, entonces:

$$\begin{cases} \dim(U \cap W) \leqslant \dim(U) \\ \dim(U \cap W) \leqslant \dim(W) \end{cases} \Rightarrow \dim(U \cap W) \leqslant min\{\dim(U), \dim(W)\}$$

Por tanto, $\dim(U \cap W) \leqslant 2$. Además, como $U \neq W$, $U \neq U \cap W \neq W$. Por tanto, $\dim(U \cap W) < 2$. Pero $\dim(U \cap W) \begin{cases} = 0 \Rightarrow U \cap W = \{0\} \\ = 1 \Rightarrow U \cap W \text{ es una recta} \end{cases}$

e) *En un espacio vectorial V, la suma de dos rectas vectoriales es un plano vectorial.*

Falso: Como U, W son subespacios vectoriales de $U+W$, entonces: $\dim(U) \leqslant \dim(U+W)$ y $\dim(W) \leqslant \dim(U+W)$. Por tanto, $\dim(U+W) \geqslant max\{\dim(U), \dim(W)\}$. Por tanto, $\dim(U + W) \geqslant 1$. Si ambas rectas son iguales, su suma es la recta, luego es falso. Si son distintas, su suma es el plano. Por tanto solo es cierto si las rectas son distintas.

f) *Si V es un espacio vectorial y U es un subespacio vectorial suyo entonces $U + U = U$.*

Sea $U = \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}\{v_1, \cdots, v_n\}$, entonces

$$U + U = \mathcal{L}(v_1, \cdots, v_n, v_1, \cdots, v_n) = \mathcal{L}(v_1, \cdots, v_n) = U$$

Por tanto, es **Verdadero**.

g) *El espacio vectorial real $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es finitamente generado.*

Falso: Sabemos que $\mathbb{R}[x]$ es infinitamente generado. Como $\{\mathcal{F} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : F(x) = p(x),\ p \in \mathbb{R}[x]\}$ es un subespacio vectorial de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, entonces su dimensión es menor que la de $\mathcal{F} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Pero este no es finitamente generado, luego $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tampoco lo es.

h) *$\mathbb{R}$ no es finitamente generado como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.*

i) *Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $S = \{v_1, \cdots, v_m\}$ es un sistema de generadores de V, entonces todo vector $v \in V$ se expresa de forma única como combinación lineal de S.*

j) *En un espacio vectorial V los vectores $\{u, v, w\}$ son linealmente independientes si y sólo si los vectores $\{u + v, u + w, v + w\}$ también lo son.*

k) *En $\mathbb{R}^3$ el subconjunto $U = \{(x, y, z) : x - 2y = 0\}$ es un plano vectorial. Además, la familia $B = \{(0, 0, 2), (1, 1, 0)\}$ es una base de U.*

l) *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con $V = U_1 \oplus U_2$. Si B_1 y B_2 son bases de U_1 y U_2, entonces $B = B_1 \cup B_2$ es una base de V.*

m) *Existe un subespacio U de $\mathbb{R}^{12}$ con $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 14$.*

n) *Si U es un subespacio de K^n con $\dim_K(U) = 5$, entonces los vectores de U tienen por lo menos cinco coordenadas.*

ñ) *Si V es un espacio vectorial sobre K con $\dim_K(V) = 7$, entonces cada sistema de generadores de V tiene por lo menos siete vectores.*

o) *Existe un subespacio $U = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ de K^4 tal que $\dim_K(U) = 3$.*

p) *Existe un subespacio U de $\mathbb{R}^n$ que es solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con cuatro incógnitas y tal que $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 5$.*

q) *Si U_1 y U_2 son dos hiperplanos de V, entonces $U_1 = U_2$ o bien $U_1 + U_2 = V$.*

r) *Sea V un espacio vectorial con $\dim_K(V) = n \geqslant 2$. Dado $v \in V$ con $v \neq 0$, y escalares $\{a_1, \cdots, a_n\}$ de K no todos nulos, existe al menos una base B de V tal que las coordenadas de v en B coinciden con los escalares dados.*

Ejercicio 1.2.27. Dado $k \in \mathbb{R}$, consideramos en $\mathbb{R}^4$ el subespacio:

$$U_k = \mathcal{L}\left\{(0, -1, k, 3), (0, k, -2 - k, 3), (k - 2, -1, -2, 3)\right\}.$$

1. Calcular $\dim_{\mathbb{R}}(U_k)$ en función de k. Determinar una base y unas ecuaciones cartesianas de U_k para cada $k \in \mathbb{R}$.

   Es necesario saber el número de vectores linealmente independientes del sistema generador.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k-2 \\ -1 & k & -1 \\ k & -2-k & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = A \qquad \begin{vmatrix} -1 & k \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k = -1$$

2. Para k con $\dim_{\mathbb{R}}(U_k) = 2$, encontrar un subespacio W de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = U_k \oplus W$. Determinar unas ecuaciones cartesianas para W.

1.3. Aplicaciones Lineales

Ejercicio 1.3.1. Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales o no:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x - y, x + 3y, 2y)$.

   Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sean $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ entonces:

$$\begin{aligned} f(ax + bx', ay + by') &= (ax + bx' - ay - by', ax + 3ay + bx' + 3by', 2ay + 2by') \\ &= (a(x - y) + b(x' - y'), a(x + 3y) + b(x' + 3y'), a(2y) + b(2y')) \\ &= a(x - y, x + 3y, 2y) + b(x' - y', x' + 3y', 2y') = af(x, y) + bf(x', y') \end{aligned}$$

   Por tanto, la aplicación es lineal.

$$Ker(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = (0, 0, 0)\} = \left\{ \begin{array}{rcl} x - y &=& 0 \\ x + 3y &=& 0 \\ 2y &=& 0 \end{array} \right\}$$
$$\Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow Ker(f) = \{(0, 0)\}$$
$$Im(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \exists (x', y') \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f(x', y') = (x, y, z)\}$$

   Para calcular la imagen, como (e_1, e_2) es una base de $\mathbb{R}^2$, basta con calcular $f(e_1)$ y $f(e_2)$:

$$f(e_1) = (1, 1, 0)$$
$$f(e_2) = (-1, 3, 2)$$

   Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, los vectores $f(e_1)$ y $f(e_2)$ son L.I. Por tanto, $Im(f) = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (1, 3, 2)\}$. Veamos ahora si se cumple la fórmula de las dimensiones:

$$\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = 0 + 2 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2) \Longrightarrow$$

   Se cumple la fórmula de las dimensiones

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x - 3y, z^2 - x + 2, 3y - z - x)$.

   Como $f(0, 0, 0) = (0, 2, 0) \neq (0, 0, 0)$, la aplicación no es lineal.

3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2[u], f(x, y, z) = (2x + y)u^2 + (y - z)u + 2y$.

4. $f : \mathbb{R}^3 \to M_2[\mathbb{R}], f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y - z & x + 2z \\ y - 3z & 2x + y + z \end{pmatrix}$.

Para las aplicaciones que sean lineales, calcular su núcleo e imagen, y comprobar la fórmula de las dimensiones.

Ejercicio 1.3.2. Calcular una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuyo núcleo esté generado por $\{(1, 0, -1), (2, 0, 1)\}$ y cuya imagen esté generada por $(1, -2)$. Sabemos que $Ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = (0, 0)\}$. Por tanto:

Para que $Ker(f) = \mathcal{L}\{(1,0,-1),(2,0,1)\}$, debe cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-z & = & 0 \\ 2x+z & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = z = 0$$

Además $Im(f) = \mathcal{L}\{(1,-2)\}$. Por lo que $f(x,y,z) = a(1,-2)$ es decir, $f(x,y,z) = (a,-2a)$. Como hemos visto antes, $x = z = 0$, por lo que:

$$y = a \Rightarrow f(x,y,z) = (y,-2y)$$

Ejercicio 1.3.3. Encontrar un automorfismo f de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ (esto es, f es un isomorfismo de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ en sí mismo) de manera que $f(U) = U'$ donde

$$U = \{(a,b,0) \in \mathbb{R}^3 : a,b \in \mathbb{R}\}, \quad U' = \{(c,c+d,d) \in \mathbb{R}^3 : c,d \in \mathbb{R}\}.$$

Por ser f un automorfismo, f es biyectiva. Por tanto, f es un isomorfismo y una base de $\mathbb{R}^3$ se aplica sobre otra base de $\mathbb{R}^3$. Sea pues $B_u = \{e_1,e_2,e_3\}$ una base de U, entonces $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ es una base de U'.

$e_1 \in U \Rightarrow f(e_1) = (1,1,0)$
$e_2 \in U \Rightarrow f(e_2) = (0,1,1)$
$e_3 \in U \Rightarrow$ No hay restricción respecto de $f(e_3) \Rightarrow$ Buscamos $f(e_3)$ L.I

Sea $f(e_3) = (0,1,0)$, entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{ Los vectores son L.I } \Rightarrow \text{ Forman una base de } U'$$

Por tanto, f es un automorfismo de las carácterísticas pedidas definido de la siguiente manera:

$$f(x,y,z) = (x, x+y+z, y)$$

Ejercicio 1.3.4. Sea $f : V \to V'$ una aplicación entre dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Demostrar que f es lineal si y sólo si el grafo de f, es decir, el conjunto:

$$G(f) = \{(v,v') \in V \times V' \mid v' = f(v)\}$$

es un subespacio vectorial de $V \times V'$. Calcular también la dimensión de este subespacio cuando V y V' son espacios finitamente generados.

Ejercicio 1.3.5. Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Consideremos el espacio vectorial producto $V_1 \times V_2$ definido en el ejercicio 3 de la relación de problemas anterior.

1. Demostrar que la *proyección i-ésima* $\pi_i : V_1 \times V_2 \to V_i$ dada por $\pi_i(v_1,v_2) = v_i$ es un epimorfismo para cada $i = 1,2$.

Ejercicio 1.3.6. Sea V un espacio vectorial sobre K y $f : V \to V$ un endomorfismo de forma que $f \circ f = f$. Demostrar que $V = \text{Nuc}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Para ello, deberemos demostrar que $V = \text{Nuc}(f) + \text{Im}(f)$ y que $\text{Nuc}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

- $\mathrm{Nuc}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$:

  Sea $v \in \mathrm{Nuc}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, entonces:

  $$\left.\begin{array}{l} v \in \mathrm{Nuc}(f) \Rightarrow f(v) = 0 \\ v \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists v' \in V \text{ tal que } f(v') = v \end{array}\right| \Rightarrow 0 = f(v) = f(f(v')) = f(v') = v = 0$$

- $V = \mathrm{Nuc}(f) + \mathrm{Im}(f)$:

  Se demuestra mediante doble inclusión:

  - $\mathrm{Nuc}(f) + \mathrm{Im}(f) \subseteq V$:

    $\forall x \in \mathrm{Nuc}(f) + \mathrm{Im}(f), x = au + bv, u \in \mathrm{Nuc}(f) \subseteq V, v \in \mathrm{Im}(f) \subseteq V, a, b \in K$. Por ser V espacio vectorial, $au + bv \in V$. Por tanto, $\mathrm{Nuc}(f) + \mathrm{Im}(f) \subseteq V$.

  - $V \subseteq \mathrm{Nuc}(f) + \mathrm{Im}(f)$:

    Veamos primero que $x - f(x) \in \mathrm{Nuc}(f)$:

    $$f(x - f(x)) = f(x) - f(f(x)) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow x - f(x) \in \mathrm{Nuc}(f)$$

    Ahora, $\forall x \in V, x = (x - f(x)) + f(x) \in \mathrm{Nuc}(f) + \mathrm{Im}(f)$. Por tanto, $V \subseteq \mathrm{Nuc}(f) + \mathrm{Im}(f)$.

Ejercicio 1.3.7. Sea V un espacio vectorial sobre $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $f : V \to V$ un endomorfismo de forma que $f \circ f = \mathrm{Id}_V$. Demostrar que f es un automorfismo y que $V = U \oplus W$ donde:

$$U = \{v \in V : f(v) = v\}, \quad W = \{v \in V : f(v) = -v\}$$

Para demostrar que f es un automorfismo, debemos demostrar que f es biyectiva. Como f es un endomorfismo, f es lineal y además basta con demostrar la inyectividad de f para demostrar que f es biyectiva, o lo que es lo mismo, que $Ker(f) = \{0\}$.

Sea por tanto $v \in Ker(f)$, entonces:

$$f(v) = 0 \Rightarrow f(f(v)) = f(0) = 0, \text{ pero } f(f(v)) = v \Rightarrow v = 0 \Rightarrow Ker(f) = \{0\}$$

Por tanto, f es biyectiva y por tanto es un automorfismo. Veamos ahora que $V = U \oplus W$:

- En primer lugar, vemos que $U \cap W = \{0\}$ ya que si $v \in U \cap W$ entonces $v = -v \Rightarrow v = 0$. Veamos ahora que $V = U + W$:

  $$\forall v \in V, v = ux + wy, u \in U, w \in W, x, y \in K \Rightarrow U + W \subseteq V$$

  $$\forall v \in V, v = \frac{v + f(x)}{2} + \frac{v - f(x)}{2}$$

Veamos que $\frac{v+f(v)}{2} \in U$ y que $\frac{v-f(v)}{2} \in W$:

$$f\left(\frac{v+f(v)}{2}\right) = \frac{f(v)+f(f(v))}{2} = \frac{v+f(v)}{2} \Rightarrow \frac{v+f(v)}{2} \in U$$
$$f\left(\frac{v-f(v)}{2}\right) = \frac{f(v)-f(f(v))}{2} = \frac{-v+f(v)}{2} \Rightarrow \frac{v-f(v)}{2} \in W$$

Por tanto $V \subseteq U+W \Rightarrow V = U+W$. Por tanto, $V = U \oplus W$.

Ejercicio 1.3.8. En el espacio $M_2(\mathbb{C})$ de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes complejos se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & i \end{pmatrix}$$

Definimos la aplicación $R : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ dada por $R(X) = X \cdot A$. Demostrar que R es un automorfismo y calcular su expresión matricial con respecto a una base B de $M_2(\mathbb{C})$. ¿Cuál es la matriz $M(R^{-1})_B$?

Ejercicio 1.3.9. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x,y,z,t) = (x+z-t, y+t, x+y+z)$$

Se pide lo siguiente:

1. *Calcular bases del núcleo y de la imagen de f. ¿Es f un monomorfismo o un epimorfismo?*

   - $\text{Ker}(f)$: $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | f(x,y,z,t) = (0,0,0)\}$. Por tanto:

     $$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{array}{rcl} x+z-t & = & 0 \\ y+t & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ y+t & = & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \dim \text{Ker}(f) =$$
     2

     $$\text{Ker}(f) = \mathcal{L}\{(-1,0,1,0),(1,-1,0,1)\} \quad \wedge \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{ L.I.}$$

     Por tanto, una base de $\text{Ker}(f)$ es $B_{\text{Ker}(f)} = \{(-1,0,1,0),(1,-1,0,1)\}$.

   - $\text{Im}(f)$: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \exists (x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4$ tal que $f(x',y',z',t') = (x,y,z)\}$. Por tanto, tomamos $B_{\mathbb{R}^4} = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ y calculamos $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$:

     $$\begin{aligned} f(e_1) &= (1,0,1) \\ f(e_2) &= (0,1,1) \\ f(e_3) &= (1,0,1) \\ f(e_4) &= (-1,1,0) \end{aligned}$$

     Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, los vectores $f(e_1)$ y $f(e_2)$ son L.I. Como:

     $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\dim \text{Im}(f) = 2$. Por tanto, una base de $\text{Im}(f)$ es $B_{\text{Im}(f)} = \{(1,0,1),(0,1,1)\}$. Sabemos entonces que $\dim \text{Im}(f) = 2 \neq 4 = \dim \mathbb{R}^4 \wedge \dim \text{Ker}(f) = 2 \neq 0 \Rightarrow$ No es monomorfismo ni epimorfismo.

2. *Sean $U = L((1,2,1,2),(0,-1,2,3))$ y $U' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x-y = 0\}$. Calcular $f(U)$ y $f^{-1}(U')$.*

$$\left.\begin{array}{r} f(1,2,1,2) = (0,4,4) \\ f(0,-1,2,3) = (-1,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow f(U) = \mathcal{L}\{(0,4,4),(-1,2,1)\}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(U') &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | f(x,y,z,t) \in U'\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | (x+z-t, y+t, x+y+z) \in U'\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | (x+z-t) - (y+t) = 0\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x-y+z-2t = 0\} \end{aligned}$$

Por tanto $f^{-1}(U') = \mathcal{L}\{(1,1,0,0),(1,0,1,1),(0,1,1,0)\}$

3. *Encontrar bases B de $\mathbb{R}^4$ y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que $M(f : B' \leftarrow B)$ solo tenga unos y ceros.*

Como $Rg(M(f_{B' \leftarrow B})) = 2$, tomamos la matriz más sencilla con $Rg = 2$:

$$M(f_{B \leftarrow B'}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y $B' = \{e_1, e_2, e_3\}$, entonces:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1,0,0) = e_1 \\ f(e_2) &= (0,1,0) = e_2 \\ f(e_3) &= (0,0,0) = 0 \\ f(e_4) &= (0,0,0) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, si $B' = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$:

$$\begin{aligned} &v_1 = (1,0,0,0) = e_1 \\ &v_2 = (0,1,0,0) = e_2 \\ &v_3 \in \text{Nuc}(f) \Rightarrow f(v_3) = 0 \Rightarrow v_3 = (-1,0,1,0) \\ &v_4 \in \text{Nuc}(f) \Rightarrow f(v_4) = 0 \Rightarrow v_4 = (1,-1,0,1) \end{aligned}$$

Por tanto, $B = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,-1,0,1)\}$ y $B' = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$.

Ejercicio 1.3.10. Sean V y V' dos espacios vectoriales reales con bases $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ y $B' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ respectivamente. Si $f : V \to V'$ es la aplicación lineal definida por:

$$f(v_1) = v'_1 + v'_2 - 4v'_3, \quad f(v_2) = 2v'_1 + v'_2 - 2v'_3, \quad f(v_3) = 3v'_1 + v'_2, \quad f(v_4) = v'_1 + 2v'_3$$

calcular la matriz $M(f_{B\leftarrow B'})$. Calcular bases de $\mathrm{Nuc}(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

$$M = (f : B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para calcular bases de $Nuc(f)$ e $Im(f)$, comenzamos viendo que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $\dim Im(f) = 2$ y por la fórmula de las dimensiones, $\dim Nuc(f) = 2$. Para calcular una base de $Im(f)$ vemos que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}\{(1,1,-4),(2,1,-2)\} \Rightarrow B_{Im(f)} = \{(1,1,-4),(2,1,-2)\}$$

Para calcular una base de $Nuc(f)$, resolvemos el sistema homogéneo asociado a la matriz M:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y+3z+w & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \\ -4x-2y+2w & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \mathrm{Nuc}(f) = \mathcal{L}\{(-1,1,0,-1),(-1,0,1,-2)\}$$

Por tanto, $B_{Nuc(f)} = \{(-1,1,0,-1),(-1,0,1,-2)\}$.

Ejercicio 1.3.11. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que verifica las propiedades:

$$f(1,0,1) = (-1,2,0), \quad f(1,-1,0) = (1,2,1), \quad \mathrm{Nuc}(f) = L((0,3,7))$$

Obtener la expresión matricial de f con respecto a la base usual de $\mathbb{R}^3$. Calcular la matriz de f con respecto a la base de $\mathbb{R}^3$ dada por $B = ((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$.
Sea $B_u = \{e_1,e_2,e_3\}$ la base usual de $\mathbb{R}^3$. Entonces:

$$\begin{array}{r} f(1,0,1) = f(e_1+e_3) = f(e_1) = (-1,2,0) + f(e_3) \\ f(1,-1,0) = f(e_1-e_2) = f(e_1) - f(e_2) = (1,2,1) \\ f(0,3,7) = 3f(e_2) + 7f(e_3) = 3(2,1,1) + 7f(e_3) = (6,3,3) + 7f(e_3) = (0,0,0) \end{array}$$

Podemos ir despejando y obtenemos:

$$f(e_2) + f(e_3) = (-2,0,-1) \Rightarrow f(e_2) = (-2,0,-1) - f(e_3)$$
$$f(e_3) = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{4}\right)$$

De donde obtenemos:

$$f(e_1) = \left(\frac{-5}{2}, 2, \frac{3}{4}\right)$$
$$f(e_2) = \left(\frac{-7}{2}, 0, \frac{-7}{4}\right)$$

Por tanto:

$$M(f_{B_u \leftarrow B_u}) = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{-7}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Ahora, sea $B = ((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$ una base de $\mathbb{R}^3$. Entonces:

$$M(f; B \leftarrow B) = M(I; B \leftarrow B_u) \cdot M(f; B_u \leftarrow B_u) \cdot M(I; B_u \leftarrow B)$$

Deberemos calcular $M(I; B \leftarrow B_u)$ y $M(I; B_u \leftarrow B)$. Para ello:

$$M(I; B_u \leftarrow B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad M(I; B \leftarrow B_u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$M(f; B \leftarrow B_u) = \begin{pmatrix} \frac{-15}{8} & \frac{21}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{-5}{8} & \frac{23}{8} & \frac{-37}{8} \\ \frac{-3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{-11}{4} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.3.12. Determinar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ con núcleo $\text{Nuc}(f) = L((1,1,0))$ e imagen dada por $\text{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - 3y = 0\}$. ¿Es f único en estas condiciones? Analizar si es posible encontrar bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ de forma que:

$$M(f_{B \leftarrow B'}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Es posible de modo que esta última matriz sea $M(f_B)$? Para resolverlo, en primer lugar, deberemos encontrar una base de $Im(f)$ y una base de $Nuc(f)$:

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - 3y = 0\} \Rightarrow B_{Im(f)} = \{(3,2,0),(0,0,1)\} \\ \text{Nuc}(f) &= L((1,1,0)) \Rightarrow B_{Nuc(f)} = \{(1,1,0)\} \end{aligned}$$

De donde claramente se obtiene:

$$\begin{aligned} &f(1,1,0) = (0,0,0) \Rightarrow f(e_1 + e_2) = 0 \Rightarrow f(e_1) = -f(e_2) \\ &f(1,0,0) = (3,2,0) \\ &f(0,1,0) = (-3,-2,0) \\ &f(0,0,1) = (0,0,1) \end{aligned}$$

De donde obtenemos:

$$M(f; B_u \leftarrow B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x,y,z) = (3x - 3y, 2x - 2y, z)$$

f no es único en estas condiciones ya que podríamos haber tomado $(0,0,2)$ como vector de $\text{Im}(f)$ y habríamos obtenido un endomorfismo distinto. Veamos ahora las bases B y B', sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (1,0,0) \\ f(v_2) &= (0,1,0) \\ f(v_3) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Por tanto, si $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$:

$$\begin{aligned}
v_1 &= (1,0,0)\\
v_2 &= (0,1,0)\\
v_3 &\in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(v_3) = 0 \Rightarrow v_3 = (1,1,0)
\end{aligned}$$

Se tiene que $B' = \{(3,2,0),(0,0,1)(0,1,0)\}$.

Ejercicio 1.3.13 (13)**.** Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2[x]$ tiene por matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

respecto de las bases $B = ((1,0,1),(1,1,1),(2,1,0))$ y $B' = (1, 1+2x, -x^2)$ respectivamente. Calcular la matriz que representa a f respecto de la base usual de $\mathbb{R}^3$ y la base $B_3' = (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}^2[x]$. Calcular también bases del núcleo y de la imagen de f. Para resolver este ejercicio, deberemos calcular $M(I; B \leftarrow B_u), M(I; B_3' \leftarrow B')$ y $M(f; B' \leftarrow B_u)$:

$$M(I; B \leftarrow B_u) = M(I; B_u \leftarrow B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5\\ -0,5 & 1 & 0,5\\ 0,5 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$$

$$M(I; B_3' \leftarrow B') = M(I; B' \leftarrow B_3')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Ejercicio 1.3.14. Calcular:

1. Una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3, B_u \leftarrow B})$ sea la matriz dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   Tenemos que:

$$\begin{aligned}
M = (f : B_u \leftarrow B) &= (I : B_u \leftarrow B_u) \cdot (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} : B_u \leftarrow B_u) \cdot (I : B_u \leftarrow B)\\
&= M(I : B_u \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Por tanto tomamos $B = \{(0,0,1),(0,1,3),(-1,1,2)\}$.

2. Una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3, B \leftarrow B_u})$ sea la matriz A anterior.

   Sin mas que tomar la inversa de la matriz anterior, tenemos que
   $B = \{(-1,1,-1),(-3,1,0),(1,0,0)\}$.

Ejercicio 1.3.15. Sean $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$ dos aplicaciones lineales. Supongamos que B es una base de V, $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ es una base de V', B''es una base de V'' y que:

$$M(f; B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad M(g; B'' \leftarrow \overline{B'}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

donde $\overline{B}' = (2v_2' - v_3', v_2' - v_3', 3v_1' + v_2' - v_3')$. Calcular $M(g \circ f; B'' \leftarrow B)$.

En primer lugar observamos:

$$M(g \circ f; B'' \leftarrow B) = M(g; B'' \leftarrow \overline{B}') \cdot M(I; \overline{B}' \leftarrow B') \cdot M(f; B' \leftarrow B)$$

Por lo que solo necesitamos calcular $M(I; \overline{B}' \leftarrow B')$, para ello, puede ser mas sencillo calcular $M(I; B' \leftarrow \overline{B}')$ y calcular su inversa ya que los vectores de $\overline{B}'$ se expresan fácilmente en función de los vectores de B':

$$M(I; B' \leftarrow \overline{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M(I; \overline{B}' \leftarrow B') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{-1}{3} & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenida la matriz $M(I; \overline{B}' \leftarrow B')$, podemos calcular $M(g \circ f; B'' \leftarrow B)$:

$$M(g \circ f; B'' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{-1}{3} & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.3.16. Se consideran dos aplicaciones lineales entre espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $f : V \mapsto V'$ y $g : V' \mapsto V''$. Demostrar que:

$$g \circ f \text{ es la aplicación nula } \Leftrightarrow \ \mathrm{Im}(f) \subseteq \ \mathrm{Nuc}(g)$$

- $\Rightarrow$: Supongamos que $g \circ f$ es la aplicación nula, entonces:

$$\forall v \in V, g(f(v)) = 0 \Rightarrow f(v) \in \mathrm{Nuc}(g) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Nuc}(g)$$

- $\Leftarrow$: Supongamos que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Nuc}(g)$, entonces:

$$\forall v \in V, f(v) \in \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Nuc}(g) \Rightarrow g(f(v)) = 0 \Rightarrow g \circ f \text{ es la aplicación nula}$$

Ejercicio 1.3.17. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un espacio vectorial tal que $f \circ f = 0$. Demuéstrese:

- Si $v_1, ..., v_r \in V$ verifican que $(f(v_1), ..., f(v_r))$ es linealmente independiente, entonces $(v_1, ..., v_r, f(v_1), ..., f(v_r))$ es linealmente independiente.
- Si $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$, existe una base B de V tal que, escribiendo la matriz por cajas:

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde I_r es la matriz identidad de orden $r \leqslant n/2$.

Ejercicio 1.3.18. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo del que se sabe que:

$$f(1,1,0,0) = (0,1,0,-1) \text{ y } f(1,0,1,0) = (1,1,1,0)$$

Calcular la matriz de f respecto de la base usual en cada uno de los siguientes casos:

a) $\mathrm{Nuc}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

b) $f \circ f = f$.

c) $f \circ f = Id_{\mathbb{R}^4}$.

¿Cuál es, en cada caso, la imagen del vector $(1,3,7,1)$?

Ejercicio 1.3.19. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores de a para los que A y A' son equivalentes.

b) Para dichos valores de a encontrar matrices $P \in GL(4,\mathbb{R})$ y $Q \in GL(3,\mathbb{R})$ tales que $A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

c) Para los valores de a calculados en el primer apartado se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz con respecto a las bases usuales es A. Calcular una base B de $\mathbb{R}^4$ y una base B' de $\mathbb{R}^3$ de forma que $M(f, B' \leftarrow B) = A'$.

Ejercicio 1.3.20. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Existe un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(1,0,0) = (2,0,1)$, $f(0,1,0) = (0,0,0)$ y $f(1,1,0) = (2,-1,7)$.

b) Existe una aplicación lineal $f : C \to C$ distinta de la aplicación lineal cero y con núcleo distinto de $\{0\}$.

c) Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ cumplen que $A \cdot B = I_n$ y $B \cdot A = I_m$, entonces $m = n$.

d) Si $n \in \mathbb{N}$ y $m \leqslant n$ entonces existe un epimorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

e) Si existe un isomorfismo $f : C^n \to M_2(\mathbb{C})$, existe un monomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

f) Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mathbb{R}^{m\times n}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{m\cdot n}$.

g) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene menos ecuaciones que incógnitas entonces el sistema no puede ser compatible determinado.

h) Existe un automorfismo f de $\mathbb{R}^2$ de forma que:

$$f(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^3 = 0\}.$$

i) Para cada $r \in \mathbb{R}$ la aplicación $f : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^2[x]$ dada por:

$$f(ax^2 + bx + c) = rax^2 + bx + c$$

es un automorfismo.

j) Para cada $r \in \mathbb{R}$ la aplicación $f_r : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^2[x]$ dada por:

$$f_r(ax^2 + bx + c) = rax^2 + bx + c$$

es un automorfismo.

Ejercicio 1.3.21. (La traza de un endomorfismo) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Se define la traza de A como el escalar de K dado por:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Se pide lo siguiente:

a) Demostrar que la aplicación $\mathrm{tr} : M_n(K) \to K$ que asocia a cada matriz cuadrada su traza es lineal.
Sea $A, B \in M_n(K)$

$$tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = tr(A) + tr(B)$$

Sea $K \in K$

$$tr(KA) = \sum_{i=1}^{n}(k \cdot a_{ii}) = k \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = k \cdot tr(A)$$

Por tanto, $tr : M_n(K) \to K$ es lineal.

b) Probar que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ para cualesquiera $A, B \in M_n(K)$. Deducir que dos matrices semejantes tienen la misma traza.
Sea $AB = C; BA = C'$
Los elementos de la diagonal principal de C se calculan:

$$C_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \qquad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

$$C'ii = \sum j = 1^n b_{ij} a_{ji} \qquad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Por tanto,

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} C_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$$

$$tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} C'ii = \sum i = 1^n \sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}$$

Por tanto, como itera sobre i, j y, por la propiedad conmutativa en K, $tr(AB) = tr(BA)$

$A, C \in M_n(K)$ son semejantes $\Leftrightarrow \exists P \in M_n(K)/C = P^{-1}AP$
Por tanto, supuestos A y C semejantes,

$$C = P^{-1}AP$$

$$A = P \cdot C \cdot P^{-1}$$

$$tr(A) = tr(P \cdot [C \cdot P^{-1}]) = tr([C \cdot P^{-1}]P) = tr(C \cdot P^{-1}P) = tr(C)$$

c) Utilizar el apartado anterior para definir la traza de un endomorfismo de un espacio vectorial V sobre K.

$tr(f) = tr(M(f, B))$, con B base de V. Veamos que no depende de la base escogida. Sea B' base de V $M(f, B')$ es semejante a $M(f, B)$, ya que son matrices asociadas al mismo endomorfismo f respecto de distintas bases.
Por tanto, $tr(M(f, B')) = tr(M(f, B)) = tr(f)$ Por tanto, no depende de la base escogida.

$$tr(f) = tr(M(f, B))$$

d) Encontrar dos matrices con el mismo rango y la misma traza que no sean semejantes.

$$Sea \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, |A| = -2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, |B| = -6$$

Vemos que $Rg(A) = Rg(B) = 3$ y $tr(A) = tr(B) = 0$ Supongamos que A semejante a $B \Rightarrow \exists P \in M_n(K)/B = P^{-1}AP$ Por tanto, $|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |P^{-1}||P||A| = |A|$ Es decir, $|A| = |B|$, por tanto, A no es semejante a B A y B tienen el mismo rango y la misma traza, pero no son semejantes.

1.4. Espacio dual

Ejercicio 1.4.1. Sea V un espacio vectorial sobre K finitamente generado. Demostrar que si $v \in V$ y $v \neq 0$ entonces existe $\varphi \in V^*$ tal que $\varphi(v) \neq 0$. ¿ Es φ única es estas condiciones?

Sea $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V y $v \in V$, entonces, si $v \neq 0$ se puede ampliar una base $B = \{v = v_1, ..., v_n\}$ y tomando $\varphi^1 \in V^*$ se tiene que $\varphi^1(v) = 1 \neq 0$. Por tanto, φ^1 existe.

Además se tiene que φ^1 no es única ya que tomando por ejemplo, otra forma lineal tal que $\psi(v) = k \neq 0$ y ψ diferente de φ^1 en otros vectores de la base B, se tiene que ψ también cumple las condiciones y es diferente de φ^1.

Ejercicio 1.4.2. Calcular la base dual de la base B del espacio V en estos casos:

a) $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}, \quad V = R^3$ Para calcular la base dual B^*, de la base B de V, necesitamos encontrar las formas lineales $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ tales que $\varphi^i(v_j) = \delta_{ij}$, es decir, que $\varphi^i(v_j) = 1$ si $i = j$ y $\varphi^i(v_j) = 0$ si $i \neq j$.

Dada la base $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, se tiene que:

$$\begin{array}{lll} \varphi^1(1,0,0) = 1, & \varphi^1(1,1,0) = 0, & \varphi^1(1,1,1) = 0 \\ \varphi^2(1,0,0) = 0, & \varphi^2(1,1,0) = 1, & \varphi^2(1,1,1) = 0 \\ \varphi^3(1,0,0) = 0, & \varphi^3(1,1,0) = 0, & \varphi^3(1,1,1) = 1 \end{array}$$

Tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \varphi^1(1,0,0) &= a_1 * 1 + a_2 * 0 + a_3 * 0 = 1 \\ \varphi^1(1,1,0) &= a_1 * 1 + a_2 * 1 + a_3 * 0 = 0 \\ \varphi^1(1,1,1) &= a_1 * 1 + a_2 * 1 + a_3 * 1 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este mismo sistema para φ^2 y φ^3, se obtiene que la base dual B^* de la base B está formada por:

$$\begin{aligned} \varphi^1(x,y,z) &= x - y \\ \varphi^2(x,y,z) &= y - z \\ \varphi^3(x,y,z) &= z \end{aligned}$$

Si nos fijamos bien, podemos ver que lo que hemos estado haciendo realmente es imponer lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que en adelante, simplemente haremos la inversa de la matriz con las coordenadas de la base B expresadas por columnas.

b) $B = \{(i,0),(0,i)\}, \quad V = \mathbb{C}^2$

Sea $B_u = \{(1,0),(0,1)\}$ la base usual de $\mathbb{C}^2$, y sea $B_u^* = \{\varphi^1, \varphi^2\}$ la base dual de B_u, entonces:

Sea $B^* = \{\psi^1, \psi^2\}$ la base dual de B, entonces:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \psi^1 = -i\varphi^1 \Rightarrow \psi^1(x,y) = -ix \\ \psi^2 = -i\varphi^2 \Rightarrow \psi^2(x,y) = -ix \end{aligned}$$

c) $B = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3\}, \quad V = \mathbb{R}_3[x]$

Sea $B_u = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base usual de $\mathbb{R}_3[x]$, y sea $B_u^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4\}$ la base dual de B_u, entonces:

Sea $B^* = \{\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4\}$ la base dual de B, entonces:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} &\psi^1 = \varphi^1 - \varphi^2 - \varphi^3 - \varphi^4 \Rightarrow \psi^1(x) = 1 - x - x^2 - x^3 \\ &\psi^2 = \varphi^2 \Rightarrow \psi^2(x) = x \\ &\psi^3 = \varphi^3 \Rightarrow \psi^3(x) = x^2 \\ &\psi^4 = \varphi^4 \Rightarrow \psi^4(x) = x^3 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.4.3. En el espacio $R_2[x]$ de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual a 2 se considera la aplicación $\varphi : R_2[x] \mapsto \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)\, dx$$

Se pide lo siguiente:

a) Demostrar que $\varphi \in (R_2[x])^*$. Calcular las coordenadas de φ en la base dual de $\{1, x, x^2\}$.

Comenzamos por demostrar la linealidad de φ:

- Aditiva: Sean $p(x), q(x) \in R_2[x]$:

$$\begin{aligned}\varphi(p(x) + q(x)) &= \int_{-1}^{1} (p(x) + q(x))\, dx = \int_{-1}^{1} p(x)\, dx + \int_{-1}^{1} q(x)\, dx\\ &= \varphi(p(x)) + \varphi(q(x))\end{aligned}$$

- Homogénea: Sean $p(x) \in R_2[x]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(\lambda p(x)) = \int_{-1}^{1} (\lambda p(x))\, dx = \lambda \int_{-1}^{1} p(x)\, dx = \lambda\varphi(p(x))$$

Como φ es lineal, y $\varphi : R_2[x] \mapsto \mathbb{R}$, entonces $\varphi \in (R_2[x])^*$.

Vamos a calcular ahora las coordenadas de φ en la base dual de $\{1, x, x^2\}$, para ello, sea $B = \{1, x, x^2\}$ la base de $R_2[x]$, y sea $B^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\}$ la base dual de B, entonces, calculamos $\varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2)$:

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2\\ \varphi(x) &= \int_{-1}^{1} x\, dx = 0\\ \varphi(x^2) &= \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Y obtenemos que las coordenadas de φ en la base dual de $\{1, x, x^2\}$ son: $\left(2, 0, \frac{2}{3}\right)_{B^*}$.

b) Construr una base $\overline{B}$ de $(R_2[x])^*$ a partir de φ.

$$\text{Rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & 1\end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \overline{B} = \left\{\left(2, 0, \frac{2}{3}\right), (0,1,0), (0,0,1)\right\}$$

c) Obtener una base B de $R_2[x]$ tal que $B^* = \overline{B}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{3}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto, $B = \left\{\frac{1}{2}, x, \frac{-1}{3} + x^2\right\}$.

Ejercicio 1.4.4. Sea V un espacio vectorial sobre K finitamente generado. Dados dos subespacios vectoriales U y W de V, demostrar que:

$$\mathrm{an}(U+W) = \mathrm{an}(U) \cap \mathrm{an}(W), \quad \mathrm{an}(U \cap W) = \mathrm{an}(U) + \mathrm{an}(W)$$

Deducir que si $V = U \oplus W$ entonces $V^* = \mathrm{an}(U) \oplus \mathrm{an}(W)$. Para demostrar que $\mathrm{an}(U+W) = \mathrm{an}(U) \cap \mathrm{an}(W)$, vamos a demostrar que $\mathrm{an}(U+W) \subseteq \mathrm{an}(U) \cap \mathrm{an}(W)$ y que $\mathrm{an}(U) \cap \mathrm{an}(W) \subseteq \mathrm{an}(U+W)$.

- $\mathrm{an}(U+W) \subseteq \mathrm{an}(U) \cap \mathrm{an}(W)$: Sea $\varphi \in \mathrm{an}(U+W), u \in U, w \in W$, entonces:

$$\begin{aligned}\varphi(u+w) = \varphi(u) + \varphi(w) = 0 \Rightarrow \varphi(u) \\ = -\varphi(w) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \varphi(u) = 0 \Rightarrow \varphi \in \mathrm{an}(U) \\ \varphi(w) = 0 \Rightarrow \varphi \in \mathrm{an}(W) \end{array} \right\} \varphi \in \mathrm{an}(U) \cap \mathrm{an}(W)\end{aligned}$$

- $\mathrm{an}(U) \cap \mathrm{an}(W) \subseteq \mathrm{an}(U+W)$: Sea $\varphi \in \mathrm{an}(U) \cap \mathrm{an}(W)$, entonces:

$$\left. \begin{array}{r} \varphi(u) \in \mathrm{an}(U) \Rightarrow \varphi(u) = 0 \\ \varphi(w) \in \mathrm{an}(W) \Rightarrow \varphi(w) = 0 \end{array} \right\} \forall x \in U+W, \exists u \in U, w \in W : x = u + w$$

  Ahora aplicando la linealidad de φ:

$$\varphi(x) = \varphi(u+w) = \varphi(u) + \varphi(w) = 0 \Rightarrow \varphi \in \mathrm{an}(U+W)$$

Ejercicio 1.4.5. Sea V un espacio vectorial sobre K finitamente generado. Sabemos que si $\varphi \in V^*$ y $\varphi \neq \varphi_0$, entonces $\mathrm{Nuc}(\varphi)$ es un hiperplano de V. Demostrar que, dado un hiperplano H de V, existe $\varphi \in V^*$ con $\mathrm{Nuc}(\varphi) = H$. ¿Qué relación hay entre dos formas lineales φ y ψ sobre V tales que $\mathrm{Nuc}(\varphi) = \mathrm{Nuc}(\psi) = H$?

Ejercicio 1.4.6. En cada uno de los siguientes casos, obtener unas ecuaciones implícitas para el subespacio U del espacio vectorial V: Estos ejercicios se pueden resolver mediante dos metodos, a continuación se muestra un metodo que se aplica en el apartado a), en el resto de ejercicios se aplica el metodo que considero más conveniente.

Mediante la propiedad: $U = \mathrm{an}(\mathrm{an}(U))$. Esta propiedad se demuestra fácilmente de la siguiente manera:

Sea $n = \dim(V)$ y sea U un subespacio de V con $\dim_K(U) = m$, entonces, como se tiene $\dim_K(\mathrm{an}(U)) = n - m$:

$$\dim_K(\mathrm{an}(\mathrm{an}(U))) = n - \dim_K(\mathrm{an}(U)) = n - (n-m) = m = \dim_K(U)$$

Que coincide con la dimensión del isomorfismo dado por el Teorema de Reflexividad. Por tanto con comprobar la inclusión $\Phi_u \subseteq \mathrm{an}(\mathrm{an}(U))$ es suficiente, esta inclusión es trivial ya que $\forall u \in U, \phi \in \mathrm{an}(U)$. Se tiene $\Phi_u(\phi) = \phi(u) = 0$, esto es $\Phi_u \in \mathrm{an}(\mathrm{an}(U))$.

a) $U = \mathcal{L}\{(1,-1,1), (2,1,0), (5,-2,3)\}, \quad V = \mathbb{R}^3$

Sean $B_u = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base usual de $\mathbb{R}^3$ y $B_u^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\}$ la base dual de B_u, en primer lugar:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \wedge \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow U = \mathcal{L}\{(1,-1,1),(2,1,0)\}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{an}(U) = \mathrm{an}(\mathcal{L}\left\{(1,-1,1),(2,1,0)\right\}) &= \left\{\varphi \in V^* : \begin{array}{l} \varphi(1,-1,1) = 0 \\ \varphi(2,1,0) = 0 \end{array}\right\} \\ &= \left\{\varphi \in V^* : \begin{array}{l} \varphi^1 - \varphi^2 + \varphi^3 = 0 \\ 2\varphi^1 + \varphi^2 = 0 \end{array}\right\} \\ &= \mathcal{L}\left\{\varphi^1 - 2\varphi^2 - 3\varphi^3\right\} \end{aligned}$$

Como hemos visto antes, $U = \mathrm{an}(\mathrm{an}(U))$, por tanto:

$$\begin{aligned} U = \mathrm{an}(\mathrm{an}(U)) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \forall \varphi \in \mathrm{an}(U), \varphi(x,y,z) = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi^1(x,y,z) - 2\varphi^2(x,y,z) - 3\varphi^3(x,y,z) = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - 3z = 0\right\} \end{aligned}$$

b) $U = \mathcal{L}\{(-1,1,1,1),(1,-1,1,1)\}, \quad V = \mathbb{R}^4$

En primer lugar, veamos como podemos ampliar la base de U a una base de $\mathbb{R}^4$, para ello, sean dos vectores $(1,0,0,0),(0,0,1,0)$ de $\mathbb{R}^4$, veamos que $(-1,1,1,1),(1,-1,1,1),(1,0,0,0),(0,0,1,0)$ son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{ Son L.I } \Rightarrow \text{ forman una base de } \mathbb{R}^4$$

Por tanto, tenemos que $B = \{(1,0,0,0),(0,0,1,0),(-1,1,1,1),(1,-1,1,1)\}$ por tanto, sea ahora $B^* = \{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4\}$ la base dual de B, entonces, deducimos que $\{\varphi^3, \varphi^4\}$ es una base de $\mathrm{an}(U)$, por tanto:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene que:

$$\varphi^3(x,y,z,t) = x + y \quad \varphi^4(x,y,z,t) = z - t$$

Ahora obtenemos que

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z,t) \in R^4 / \varphi(x,y,z,t) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathrm{an}(U)\} \\ &= \left\{(x,y,z,t) \in R^4 | \begin{array}{c} x + y = 0 \\ z - t = 0 \end{array}\right\} \end{aligned}$$

c) $U = \mathcal{L}\{(1,-1,0),(0,1,-1)\} \cap \mathcal{L}\{(0,1,0)\}$

En primer lugar, hacemos uso de la propiedad $\mathrm{an}(U+W) = \mathrm{an}(U) \cap \mathrm{an}(W)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{an}(U) &= \mathrm{an}(\mathcal{L}\{(1,-1,0),(0,1,-1)\} \cap \mathrm{an}(\mathcal{L}\{(0,1,0)\}) \\
&= \mathrm{an}(\mathcal{L}\{(1,-1,0),(0,1,-1)\}) + \mathrm{an}(\mathcal{L}\{(0,1,0)\}) \\
&= \mathrm{an}(\{(1,-1,0),(0,1,-1)\}) + \mathrm{an}(\{(0,1,0)\})
\end{aligned}$$

Por un lado, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{an}(\mathcal{L}\{(1,-1,0),(0,1,-1)\}) &= \left\{\varphi \in V^* : \begin{array}{c} \varphi(1,-1,0)=0 \\ \varphi(0,1,-1)=0 \end{array}\right\} \\
&= \left\{\varphi \in V^* : \begin{array}{c} \varphi^1-\varphi^2=0 \\ \varphi^2+\varphi^3=0 \end{array}\right\} = \mathcal{L}\left\{(1,1,1)\right\}
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{an}(\mathcal{L}\{(0,1,0)\}) &= \left\{\varphi \in V^* : \ \varphi(0,1,0)=0 \ \right\} \\
&= \left\{\varphi \in V^* : \varphi^2 = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{(1,0,0),(0,0,1)\right\}
\end{aligned}$$

De donde se obtiene que:

$$\mathrm{an}(U) = \mathcal{L}\left\{(1,1,1),(1,0,0),(0,0,1)\right\} = V^* \Rightarrow U = \{0\}$$

Ejercicio 1.4.7. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(1,1,0) = (1,-1), \quad f(1,0,1) = (3,0), \quad f(0,1,1) = (2,-1)$$

Calcular la matriz de f^t con respecto a las bases duales de las bases usuales de R^2 y de R^3, respectivamente. Calcular bases de $\mathrm{Nuc}(f^t)$ y de $\mathrm{Im}(f^t)$. En primer lugar, partimos de que tenemos la siguiente propiedad:

$$M(f^t; B^* \leftarrow B'^*) = M(f; B' \leftarrow B)^t$$

En este caso, nos piden que calculemos $M(f^t; B_u^{3*} \leftarrow B_u^{2*})$, por tanto, calcularemos en primer lugar la matriz $M(f; B_u^2 \leftarrow B_u^3)$, para ello, calculamos $f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)$:

$$\begin{aligned}
f(1,1,0) &= f(e_1) + f(e_2) = (1,-1) \\
f(1,0,1) &= f(e_1) + f(e_3) = (3,0) \\
f(0,1,1) &= f(e_2) + f(e_3) = (-2,1)
\end{aligned}$$

De donde se obtiene que:

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= (3,-1) \\
f(e_2) &= (-2,0) \\
f(e_3) &= (0,1)
\end{aligned}$$

Por tanto, la matriz $M(f; B_u^2 \leftarrow B_u^3)$ es:

$$M\left(f; B_u^2 \leftarrow B_u^3\right) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M\left(f^t; B_u^{3*} \leftarrow B_u^{2*}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular una base de $\text{Ker}(f^t)$ hacemos uso de que $\text{an}(\text{Im}(f)) = \text{Ker}(f^t)$, en primer lugar, $\text{Im}(f)$ tiene dimensión 2, por tanto, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, por tanto, $\text{Ker}(f^t) = \{0\}$, y una base de $\text{Ker}(f^t)$ es $\{0\}$.

Para calcular una base de $\text{Im}(f^t)$, hacemos uso de que $\text{an}(\text{Ker}(f)) = \text{Im}(f^t)$, en primer lugar:

$$\begin{aligned}\text{Ker}(f) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} 3x - 2y = 0 \\ -x + z = 0 \end{array}\right\}\end{aligned}$$

De donde se obtiene que $\text{Ker}(f) = \mathcal{L}\{(2,3,2)\}$, por tanto, $\text{an}(\text{Ker}(f))$ es:

$$\text{an}(\text{Ker}(f)) = \left\{\varphi \in \mathbb{R}^3 : \varphi(2,3,2) = 0\right\} = \left\{\varphi \in \mathbb{R}^3 : 2\varphi^1 + 3\varphi^2 + 2\varphi^3 = 0\right\}$$

De donde se obtiene que $\text{an}(\text{Ker}(f)) = \mathcal{L}\{(3,-2,0),(0,2,-3)\}$, por tanto, una base de $\text{Im}(f^t)$ es precisamente $B = \{(3,-2,0),(0,2,-3)\}$.

Ejercicio 1.4.8. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) *Toda forma lineal $\varphi \neq \varphi_0$ sobre un espacio vectorial V es un epimorfismo.*

Sea φ una forma lineal, para que sea epimorfismo, $Im(\varphi) = \mathbb{K}$, como $\dim(Im(\varphi)) \leqslant 1$, e $Im(\varphi) \neq \{0\}$, entonces $\dim(Im(\varphi)) = 1$, como además $\text{Im}(\varphi) \subseteq \mathbb{K} \Rightarrow Im(\varphi) = \mathbb{K}$. Por tanto, φ es un epimorfismo. y la afirmación es verdadera.

b) *Existe un subespacio de $\mathbb{R}^{12}$ que está definido por 7 ecuaciones implícitas independientes y esta generado por 4 vectores.*

Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^{12}$ definido por 7 ecuaciones implícitas independientes, entonces, $\dim(\text{an}(U)) = 7$, pero como tenemos que $\dim(\text{an}(U)) = n - m$ donde $n = \dim(\mathbb{R}^{12}) = 12$ y $m = 7$, entonces, obtenemos $\dim(\text{an}(U)) = 5$, lo cual es una contradicción por ser $5 \neq 7$, por tanto, la afirmación es falsa.

c) *Para cada $v \in \mathbb{R}^3$ con $v \neq 0$, existe un epimorfismo $f : an(\{v\}) \mapsto \mathbb{R}^3$.*

Observamos, en primer lugar que:

$$\dim(\text{an}(\{v\})) = \dim(\text{an}(\mathcal{L}\{x\})), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, x \neq 0$$

A partir de aquí, vemos que $\dim(\text{an}(\mathcal{L}\{x\})) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathcal{L}\{x\}) = 3 - 1 = 2$ Como $\forall f : V \mapsto V'$ se verifica $\dim \text{Im}(f) \leqslant \dim V$, tenemos que $\dim(\text{Im}(f)) \leqslant 2$, por tanto, no existe ningún epimorfismo $f : \text{an}(\{v\}) \mapsto \mathbb{R}^3$, es decir, la afirmación es falsa.

d) *Una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre K finitamente generados es un isomorfismo si y solo si también lo es su aplicación traspuesta.*

En primer lugar, comprobamos que A regular $\Leftrightarrow$ A^t regular, para ello, sea A una matriz regular, entonces:

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow |A^t| = |A| \neq 0 \Rightarrow A^t \text{ regular}$$

A partir de esto:

$$f \text{ isomorfismo} \Leftrightarrow M(f; B' \leftarrow B) \text{ regular} \Leftrightarrow M(f^t; B^* \leftarrow B'^*) \text{ regular} \Leftrightarrow f^t \text{ isomorfismo}$$