Análisis Funcional
Examen XIV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Análisis Funcional
Examen XIV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2025-26.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor David Arcoya Álvarez.

Descripción Examen Ordinario.

Fecha 22 de Enero de 2026.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1. Para $\alpha \in]0,1]$, sea

$$X = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y } \sup_{x \neq y \in [0,1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$$

con

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y \in [0,1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}, \qquad \forall f \in X$$

Prueba que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Ejercicio 2. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal y acotada para la que existe $c > 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \geqslant c\|x\|_X, \qquad \forall x \in X$$

Prueba que T es compacto si y solo si $\dim X < \infty$.

Ejercicio 3. Sea X un espacio de Banach reflexivo y $f : [0,1] \to X$ una función continua. Prueba que existe $x \in X$ tal que

$$\int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \, ds = \langle \varphi, x \rangle, \qquad \forall \varphi \in X^*$$

Ejercicio 4. (**Teoría**) Sea H un espacio de Hilbert con producto escalar $(\cdot,\cdot)$ y norma asociada $\|\cdot\|$. Prueba que si $T : H \to H$ es lineal, compacto y simétrico tal que

$$\lambda_1 = \sup\{(Tx, x) : \|x\| = 1\} > 0,$$

entonces λ_1 es un valor propio de T y cualquier otro valor propio de T es menor que λ_1.

Solución.

Ejercicio 1. Para $\alpha \in]0,1]$, sea

$$X = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y } \sup_{x\neq y\in[0,1]} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$$

con

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \sup_{x\neq y\in[0,1]} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}, \qquad \forall f \in X$$

Prueba que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Comenzaremos primero probado que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, es decir, probando que $\|\cdot\|$ es una norma en X:

- Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in X$ vemos que:

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\| &= \|\lambda f\|_\infty + \sup_{x\neq y\in[0,1]} \frac{|\lambda f(x)-\lambda f(y)|}{|x-y|^\alpha} = |\lambda|\|f\|_\infty + \sup_{x\neq y\in[0,1]} |\lambda|\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
&= |\lambda| \left[\|f\|_\infty + \sup_{x\neq y\in[0,1]} \frac{|\lambda f(x)-\lambda f(y)|}{|x-y|^\alpha} \right] = |\lambda|\|f\|
\end{aligned}$$

- Sean $f, g \in X$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|f+g\| &= \|f+g\|_\infty + \sup_{x\neq y\in[0,1]} \frac{|(f+g)(x)-(f+g)(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
&= \|f+g\|_\infty + \sup_{x\neq y\in[0,1]} \frac{|f(x)-f(y)+g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \sup_{x\neq y\in[0,1]} \frac{|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \sup_{x\neq y\in[0,1]} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \sup_{x\neq y\in[0,1]} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} = \|f\| + \|g\|
\end{aligned}$$

- Finalmente, si tenemos que:

$$0 = \|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x\neq y\in[0,1]} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

como $\|f\|_\infty, \sup\limits_{x\neq y\in[0,1]} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \geqslant 0$ para toda $f \in X$ deducimos entonces que ambos sumandos son iguales a cero, por lo que en particular $\|f\|_\infty = 0$, de donde $f = 0$.

Ejercicio 2. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal y acotada para la que existe $c > 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \geqslant c\|x\|_X, \qquad \forall x \in X$$

Prueba que T es compacto si y solo si $\dim X < \infty$.

Por doble implicación (notaremos a ambas normas por $\|\cdot\|$):

$\Longleftarrow$) Si $\dim X = N \in \mathbb{N}$ es conocido entonces que existe una ismetría lineal sobreyectiva $\Phi : X \to \mathbb{R}^N$. Sea $A \subset X$ un conjunto acotado, hemos de probar que $\overline{T(A)}$ es un conjunto compacto para probar que T es un operador compacto. Como T es acotada vemos que $T(A)$ es un conjunto acotado, es decir, existe $M \geqslant 0$ tal que $\|x\| \leqslant M \quad \forall x \in A$. Además, si $x \in \overline{T(A)}$ tenemos entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A convergente a x, tendremos que:

$$\|x_n\| \leqslant M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo que también $\|x\| \leqslant M$, de donde $\overline{T(A)}$ también es un conjunto acotado. Observamos además que $\overline{T(A)}$ es un conjunto cerrado. De esta forma, $\Phi(\overline{T(A)}) \subset \mathbb{R}^N$ será también un conjunto cerrado (puesto que Φ es un homeomorfismo) y acotado (puesto que Φ es isometría), por lo que $\Phi(\overline{T(A)})$ es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^N$, de donde:

$$\overline{T(A)} = \Phi^{-1}\left(\Phi(\overline{T(A)})\right)$$

es un conjunto compacto, como imagen de un conjunto compacto por una aplicación continua.

$\Longrightarrow$) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de $\overline{B}(0,1) \subset X$, tenemos entonces que existe una parcial suya $\{x_{\sigma(n)}\}$ de forma que $\{T(x_{\sigma(n)})\}$ es una sucesión convergente, por lo que en particular esta será de Cauchy. Fijado $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \in \mathbb{N}$ con $p, q \geqslant m$ se tiene que:

$$\|T(x_{\sigma(p)}) - T(x_{\sigma(q)})\| < \varepsilon$$

Si observamos que:

$$\|T(x_{\sigma(p)}) - T(x_{\sigma(q)})\| = \|T(x_{\sigma(p)} - x_{\sigma(q)})\| \geqslant c\|x_{\sigma(p)} - x_{\sigma(q)}\| = \|cx_{\sigma(p)} - cx_{\sigma(q)}\| \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

Observamos que obtenemos que la sucesión $\{cx_{\sigma(n)}\}$ es de Cauchy, y por ser X completo existe $x \in X$ con $\{cx_{\sigma(n)}\} \to x$. Si usamos ahora que $c > 0$ vemos que tenemos que $\{x_{\sigma(n)}\} \to \frac{x}{c}$, y que $\frac{x}{c} \in \overline{B}(0,1)$ por ser este un conjunto cerrado.

Hemos probado que toda sucesión de $\overline{B}(0,1)$ admite una parcial convergente a un punto del mismo conjunto, es decir, hemos probado que $\overline{B}(0,1)$ es secuencialmente compacto, condición equivalente a compacto en un espacio métrico. Finalmente, como:

$$\dim X < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{B}(0,1) \text{ es compacto}$$

concluimos que $\dim X < \infty$.

Ejercicio 3. Sea X un espacio de Banach reflexivo y $f : [0,1] \to X$ una función continua. Prueba que existe $x \in X$ tal que

$$\int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \, ds = \langle \varphi, x \rangle, \qquad \forall \varphi \in X^*$$

Definimos $\chi : X^* \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\langle \chi, \varphi \rangle = \int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \; ds \qquad \forall \varphi \in X^*$$

Observamos que es una aplicación lineal, ya que si $a \in \mathbb{R}$ y $\varphi, \psi \in X^*$ tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \langle \chi, a\varphi + \psi \rangle &= \int_0^1 \langle a\varphi + \psi, f(s) \rangle \; ds = \int_0^1 \left(a\langle \varphi, f(s) \rangle + \langle \psi, f(s) \rangle \right) \; ds \\ &= a \int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \; ds + \int_0^1 \langle \psi, f(s) \rangle \; ds = a\langle \chi, \varphi \rangle + \langle \chi, \psi \rangle \end{aligned}$$

Notando por $\|\cdot\|$ a la norma de X, para ver que χ es continua usaremos que $\|\cdot\| \circ f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una aplicación continua de un conjunto compacto en $\mathbb{R}$, por lo que existe:

$$|f| := \max\{\|f(s)\| : s \in [0,1]\}$$

así vemos para cada $\varphi \in X^*$ que:

$$\begin{aligned} |\langle \chi, \varphi \rangle| &= \left| \int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \; ds \right| \leqslant \int_0^1 |\langle \varphi, f(s) \rangle| \; ds \leqslant \int_0^1 \|\varphi\| \|f(s)\| \; ds \\ &= \|\varphi\| \int_0^1 \|f(s)\| \; ds \leqslant \|\varphi\| \int_0^1 |f| \; ds = \|\varphi\| |f| \int_0^1 1 \; ds = \|\varphi\| |f| \end{aligned}$$

por lo que deducimos que χ es continua, de donde $\chi \in X^{**}$. Como X es reflexivo tenemos que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} J: & X & \longrightarrow & X^{**} \\ & x & \longmapsto & Jx \end{array}$$

es sobreyectiva, por lo que para $\chi \in X^{**}$ existe $x \in X$ de forma que:

$$\chi = Jx$$

Por lo que en particular tenemos para cada $\varphi \in X^*$ que:

$$\langle \varphi, x \rangle = \langle Jx, \varphi \rangle = \langle \chi, \varphi \rangle = \int_0^1 \langle \varphi, f(s) \rangle \; ds$$

Ejercicio 4. (**Teoría**) Sea H un espacio de Hilbert con producto escalar $(\cdot,\cdot)$ y norma asociada $\|\cdot\|$. Prueba que si $T : H \to H$ es lineal, compacto y simétrico tal que

$$\lambda_1 = \sup\{(Tx, x) : \|x\| = 1\} > 0,$$

entonces λ_1 es un valor propio de T y cualquier otro valor propio de T es menor que λ_1.

Consulte los apuntes de teoría.