

Topología II

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Topología II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2025-2026

Índice general

0.1. Conexión	5
0.2. Conexión por arcos	6
1. El grupo fundamental	11
1.1. Homotopía por arcos	11
1.2. El grupo fundamental	16
1.3. Espacios recubridores	20
1.4. Levantamientos en espacios recubridores	25
1.5. Grupo fundamental de la circunferencia	29
1.6. Retracciones, tipos de homotopía y retracts de deformación	33
1.7. El grupo fundamental de las esferas. Aplicaciones.	41
1.8. El teorema de Seifert-van Kampen	48
1.8.1. Grupo cociente	49
1.8.2. Subgrupo normal generado por un conjunto	49
1.8.3. Producto libre de grupos	50
1.8.4. Grupos libres y presentaciones de grupos	51
1.8.5. Enunciado del teorema	53
2. Espacios Recubridores	63
2.1. Levantamiento de aplicaciones	63
2.2. Transformación de recubridores	71
2.3. Existencia de espacios recubridores	84
3. Superficies compactas	87
3.1. Superficies topológicas	87
3.2. Presentaciones poligonales de superficies	92
3.2.1. Transformaciones elementales	94
3.3. La clasificación de las superficies compactas	101
3.3.1. Determinación de $ \mathcal{P} $	101
3.4. Característica de Euler y orientabilidad	110

Introducción. Conexión por arcos

Antes de comenzar con el contenido propio de la asignatura repasaremos algunos resultados que se estudiaron en Topología I pero que serán necesarios para el desarrollo de Topología II.

0.1. Conexión

Notación. Notaremos por e.t al espacio topológico (X, \mathcal{T}) o diremos X es un e.t.

Definición 0.1. Se dice que un e.t X es **no conexo** si existen U y V abiertos disjuntos y no vacíos tales que $X = U \cup V$.

Proposición 0.1. *Dado un e.t. X equivalen las siguientes afirmaciones:*

- (i) X es conexo.
- (ii) Los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez son el vacío y el total.
- (iii) Los únicos subconjuntos de X con frontera vacía son el vacío y el total.

Teorema 0.2. *El ser conexo se conserva por aplicaciones continuas. En particular, ser conexo es una propiedad topológica (se conserva por homeomorfismos).*

Teorema 0.3. *La unión de una colección de subconjuntos conexos que tienen un punto común de un e.t. X es también conexa.*

Teorema 0.4. *Si A es un subconjunto del e.t. X y A es conexo, entonces dado B con $A \subset B \subset \overline{A}$ se tiene que B también es conexo. En particular, la adherencia de un conexo siempre es un conjunto conexo.*

Teorema 0.5. *Dados dos espacios topológicos X, Y se cumple que $X \times Y$ es conexo (con la topología producto) si y solo si X e Y son conexos.*

Teorema 0.6. *Los conjuntos conexos de \mathbb{R} con la topología usual son exactamente los intervalos (incluyendo los puntos).*

Definición 0.2. Dados un e.t. X y un punto x_0 se define la **componente conexa** de x_0 es X como el mayor conexo de X que contiene a x_0

Teorema 0.7. *Las componentes conexas de un e.t. X forman una partición de X en conjuntos conexos maximales y cerrados.*

0.2. Conexión por arcos

Definición 0.3. Un **arco** (o camino) en un espacio topológico X es una aplicación continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$. Si además $\alpha(0) = \alpha(1)$ diremos que α es un **lazo**.

Diremos que un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ une x con y si se verifica que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Si α es un lazo, diremos que está basado en x (o su punto base es x) si $\alpha(0) = x = \alpha(1)$.

Denotaremos por

$$\Omega(X; x, y) = \{\alpha : [0, 1] \rightarrow X \text{ continua} : \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\}$$

al **conjunto de arcos** que unen x con y . Denotaremos además por

$$\Omega(X; x) = \{\alpha : [0, 1] \rightarrow X \text{ continua} : \alpha(0) = x = \alpha(1)\}$$

al **conjunto de lazos** basados en x .

Ejemplo.

1. Dados un e.t. X y un punto $x_0 \in X$ siempre se tiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_0} : [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto x_0 \end{aligned}$$

es un lazo basado en x_0 al que llamaremos **arco constante**. De hecho, si X tiene la topología discreta, entonces los únicos arcos que hay en X son los arcos constantes.

Demostración. Si X tiene la topología discreta, entonces como α es continua $\alpha^{-1}(\{x_0\})$ será abierto y cerrado y por tanto $\alpha^{-1}(\{x_0\}) \in \{\emptyset, X\}$ por ser $[0, 1]$ conexo. \square

2. Sean $x, y, z \in X$, $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ un arco uniendo x con y y $\beta : [0, 1] \rightarrow X$ un arco uniendo y con z . Buscaremos ahora un arco formado a partir de estos dos de la siguiente forma:

$$\alpha * \beta : [0, 1] \rightarrow X \text{ dado por } (\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces $\alpha * \beta$ es continua ya que $(\alpha * \beta)|_{[0, 1/2]}$ y $(\alpha * \beta)|_{[1/2, 1]}$ lo son y para $t = 1/2$ se tiene que

$$\alpha\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)$$

con $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$ cerrados. Aplicando el lema de pegado¹ tenemos que $\alpha * \beta$ es continua.

¹visto en Topología I.

3. Si $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ es un arco uniendo x con y , entonces

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} : [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto \alpha(1 - t)\end{aligned}$$

es un arco que une y con x .

Definición 0.4. Decimos que un e.t. X es **arcoconexo** (o **conexo por arcos**) si para cualesquiera $x, y \in X$ existe un arco en X que une el punto x con el punto y .

Si X es un e.t. y $A \subset X$, diremos que A es arcoconexo si A es arcoconexo con la topología de inducida de X .

Teorema 0.8. *Todo espacio topológico arcoconexo es conexo.*

Demostración. Dado $x_0 \in X$ fijo y otro punto $x \in X$ cualquiera, sabemos que existe $\alpha_x : [0, 1] \rightarrow X$ un arco tal que $\alpha_x(0) = x_0$ y $\alpha_x(1) = x$. En particular, como el intervalo $[0, 1]$ es conexo y α_x es continua, entonces se tiene que $\alpha_x([0, 1])$ es conexo y podremos escribir

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} \alpha_x([0, 1]) \subseteq X \Rightarrow X = \bigcup_{x \in X} \alpha_x([0, 1])$$

y además $x_0 \in \bigcap_{x \in X} \alpha_x([0, 1])$ por lo que X es conexo (por el lema del peine). \square

Ejemplo. Veamos que la otra implicación no es cierta en general. Para ello consideramos los siguientes conjuntos:

$$X_0 = \{1\} \times [0, 1] \quad \text{y} \quad X_n = [0, 1] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$



Llamamos $X = \{(0, 0)\} \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n \right)$ y queremos ver que X es conexo pero no es arcoconexo.

Si tomamos la segunda parte de esta unión, es decir,

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n$$

tenemos que Y es conexo porque es unión de los X_n que son todos conexos y que intersecan con X_0 . Entonces, como $Y \subset X \subset \bar{Y}$ tenemos que X es conexo. Veamos sin embargo que X no es arcoconexo.

Para ello vamos a demostrar que si $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tal que α es continua con $\alpha(0) = (0, 0)$, entonces $\alpha(t) = (0, 0)$ para todo $t \in [0, 1]$.

Podemos escribir la curva como $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Como $\alpha(0) = (0, 0)$, si tomamos $((-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2)) \cap X$ un abierto que contiene al origen, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\alpha([0, \varepsilon)) \subseteq ((-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2)) \cap X$ por ser α continua. Como $y(t)$ es continua y se tiene que $y([0, \varepsilon)) \subseteq \{0\} \cup \left(\bigcup_{n > 2} \{\frac{1}{n}\} \right)$. Por el teorema del valor intermedio tenemos que $y([0, \varepsilon)) = \{0\}$ por lo que $\alpha([0, \varepsilon)) = \{(0, 0)\}$. De esta forma hemos probado que no hay ningún arco que conecte $(0, 0)$ con un punto distinto (el único arco es el constante).

Teorema 0.9. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es estrellado, entonces A es arcoconexo.

Demostración. Como A es estrellado existe un $x_0 \in A$ tal que para cualquier $x \in A$, el segmento que los une, $(1-t)x + tx_0 \in A$ para todo $t \in [0, 1]$ y entonces $\alpha(t) = (1-t)x + tx_0$ es una curva continua uniendo x con x_0 . Dados dos puntos cualesquiera $x, y \in A$ se tiene que $\alpha_x * \tilde{\alpha}_y$ es una curva continua que une x con y . \square

Corolario 0.9.1. Cualquier conjunto A de \mathbb{R}^n convexo es arcoconexo. En particular, las bolas abiertas y las bolas cerradas de \mathbb{R}^n son arcoconexas.

Corolario 0.9.2. En \mathbb{R} coinciden los conjuntos conexos y arcoconexos (son solo los intervalos).

Teorema 0.10. La imagen mediante una aplicación continua de un arcoconexo es un arcoconexo. En particular, ser arcoconexo es una propiedad topológica, es decir, se conserva por homeomorfismos.

Demostración. Sea f la aplicación continua y consideramos $x, y \in f(X)$ cualesquiera. Entonces existen $x_0, y_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x$ y $f(y_0) = y$. Por ser X arcoconexo tenemos que existe un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ con $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = y_0$. Entonces tenemos que $f \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow f(X)$ es continua y además

$$(f \circ \alpha)(0) = f(x_0) = x \quad \text{y} \quad (f \circ \alpha)(1) = f(y_0) = y$$

y tenemos por tanto que $(f \circ \alpha)$ es un arco que une x con y . Tenemos entonces que para cualesquiera dos puntos $x, y \in f(X)$ existe un arco que los une luego $f(X)$ es arcoconexo. \square

Teorema 0.11. Sean X un e.t y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de arcoconexos de X . Si $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es arcoconexo.

Observación. Hay resultados de conexión que no son ciertos para arcoconexión. Por ejemplo, si en un e.t. X se tiene que $A \subseteq X$ es arcoconexo podría ocurrir que si $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$, se diera que B no sea arcoconexo (como en el ejemplo anterior).

Ejemplo. Veamos que $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ es arcoconexo. Podemos hacerlo sabiendo que $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, con $N = (0, \dots, 0, 1)$ es homeomorfo a \mathbb{R}^n que es arcoconexo por lo que $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ es arcoconexo. Análogamente, $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ con $S = (0, \dots, 0, -1)$ es arcoconexo y podemos escribir

$$\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \cup (\mathbb{S}^n \setminus \{S\})$$

por lo que \mathbb{S}^n es unión de arcoconexos con puntos en común, luego es arcoconexo.

Teorema 0.12. Sean X, Y e.t., entonces $X \times Y$ es arcoconexo (con la topología producto) si y solo si X e Y son arcoconexos.

Teorema 0.13. Dado un e.t. X , se tiene que X es arcoconexo si y solo si X es conexo y todo punto $x \in X$ tiene un entorno suyo arcoconexo.

Demostración.

\Rightarrow) Hemos visto que si X es arcoconexo, entonces X es conexo. Además, X es entorno de cualquier punto suyo luego todo punto tiene un entorno arcoconexo.

\Leftarrow) Elegimos un $x \in X$ fijo y definimos $A = \{y \in X : \exists \alpha_y \text{ arco uniendo } x \text{ con } y\}$

Como $x \in A$ tenemos que $A \neq \emptyset$. Si probamos que A es abierto y cerrado, entonces como X es conexo tendremos que $A = X$, es decir podremos unir x con cualquier otro punto $y \in X$.

Veamos que A es abierto. Tomamos $z \in A$ y queremos demostrar que $\exists U$ entorno de z tal que $U \subseteq A$. Por hipótesis sabemos que existe un entorno U arcoconexo de z . Entonces dado $u \in U$ existe un arco α_u que une z con u . Por otro lado, como $z \in A$, entonces existe un arco β_z que une x con z . Tendremos entonces que $\beta_z * \alpha_u$ es un arco que une x con u y por definición tendremos $u \in A$, luego $U \subseteq A$.

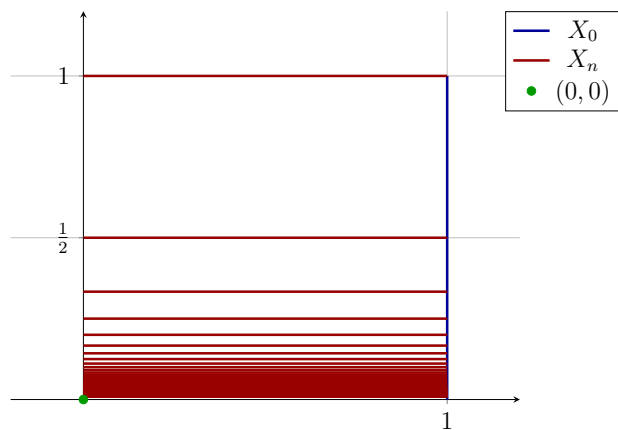
Nos queda ver que A es cerrado. Tomamos para ello $z \in \bar{A}$. Por hipótesis existe un entorno U de z arcoconexo. Por ser U entorno de z y $z \in \bar{A}$ necesariamente $U \cap A \neq \emptyset$ por lo que existe al menos un $u \in U \cap A$. Como $u \in A$ existe un arco α_u que une x con u y como $u \in U$ existe también un arco β_u que une u con z y tendríamos que $\alpha_u * \beta_u$ es un arco uniendo x con z llegando a que $z \in A$. Tendríamos $\bar{A} \subseteq A$ y como la otra inclusión se da siempre, tendremos que A coincide con su adherencia, por lo que es cerrado.

□

Definición 0.5. Dados un e.t. X y un punto $x_0 \in X$, llamamos **componente arcoconexa** de x_0 al mayor arcoconexo en X que contiene a x_0 .

Teorema 0.14. Las componentes arcoconexas de un e.t. X forman una partición de X en subconjuntos arcoconexos de X maximales.

Ejemplo. En el ejemplo que ya se trabajó se puede ver que el conjunto X que era



tiene dos componentes arcoconexas: $\{(0,0)\}$, $\bigcup_{u \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n$

1. El grupo fundamental

1.1. Homotopía por arcos

Definición 1.1. Sean X e Y dos espacios topológicos y $f, g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas. Decimos que f es **homotópica** a g si existe $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continua tal que

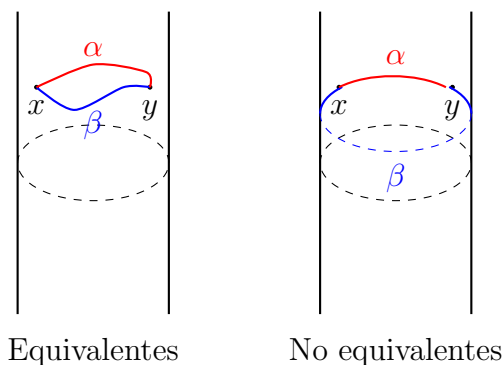
$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$



Definición 1.2. Dados X e.t., $x, y \in X$ y dos arcos $\alpha, \beta \in \Omega(X; x, y)$, decimos que α, β son **homotópicos por arcos** si existe $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ continua tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s) & \text{y} & & H(s, 1) &= \beta(s) & \forall s \in [0, 1] \\ H(0, t) &= x & \text{y} & & H(1, t) &= y & \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Lema 1.1. Ser homotópico por arcos da lugar a una relación de equivalencia en $\Omega(X; x, y)$.



Demostración.

- (i) Dado $\alpha \in \Omega(X; x, y)$ queremos ver que α es homotópica por arcos con α . Para ello podemos definir la homotopía por arcos

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (s, t) &\longmapsto \alpha(s) \end{aligned}$$

Como $\alpha \in \Omega(X; x, y)$ tenemos que $\alpha(s) \in X$ para todo $s \in [0, 1]$. Además se verifica que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s) = H(s, 1) \\ H(0, t) &= \alpha(0) = x \quad H(1, t) = \alpha(1) = y \end{aligned}$$

- (ii) Dados $\alpha, \beta \in \Omega(X; x, y)$ tales que existe $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ continua verificando

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s) & y & & H(s, 1) &= \beta(s) & \forall s \in [0, 1] \\ H(0, t) &= x & y & & H(1, t) &= y & \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Queremos ver que existe un $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ continua tal que

$$\begin{aligned} \tilde{H}(s, 0) &= \beta(s) & y & & \tilde{H}(s, 1) &= \alpha(s) & \forall s \in [0, 1] \\ \tilde{H}(0, t) &= x & y & & \tilde{H}(1, t) &= y & \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Tomando $\tilde{H}(s, t) := H(s, 1 - t)$ cumple claramente con lo que buscamos:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(s, 0) &= H(s, 1 - 0) = H(s, 1) = \beta(s) \\ \tilde{H}(s, 1) &= H(s, 1 - 1) = H(s, 0) = \alpha(s) \\ \tilde{H}(0, t) &= H(0, 1 - t) = x \\ \tilde{H}(1, t) &= H(1, 1 - t) = y \end{aligned}$$

$\forall s \in [0, 1], \forall t \in [0, 1]$.

- (iii) Dado $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X; x, y)$ y $H_1, H_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ continuas tales que

$$\begin{aligned} H_1(s, 0) &= \alpha(s) & H_2(s, 0) &= \beta(s) \\ H_1(s, 1) &= \beta(s) & H_2(s, 1) &= \gamma(s) \\ H_1(0, t) &= x & H_2(0, t) &= x \\ H_1(1, t) &= y & H_2(1, t) &= y \end{aligned}$$

Queremos ver que existe un $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s) & H(s, 1) &= \gamma(s) \\ H(0, t) &= x & H(1, t) &= y \end{aligned}$$

Para ello consideramos

$$H(s, t) = \begin{cases} H_1(s, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H_2(s, 2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Y con el lema de pegado es fácil ver que es continua y que satisface las condiciones que buscábamos ya que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= H_1(s, 0) = \alpha(s) \\ H(s, 1) &= H_2(s, 1) = \gamma(s) \\ H(0, t) &= \left\{ \begin{array}{l} H_1(0, 2t) = x \\ H_2(0, 2t - 1) = x \end{array} \right\} = x \\ H(1, t) &= \left\{ \begin{array}{l} H_1(1, 2t) = y \\ H_2(1, 2t - 1) = y \end{array} \right\} = y \end{aligned}$$

□

Observación. Este resultado es análogo para homotopías. Es decir, ser homotópico da lugar a una relación de equivalencia en $C(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y : f \text{ continua}\}$.

Ejemplo.

1. Sean X un e.t. y $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicaciones continuas entonces se tiene que f y g son homotópicas.

Demostración. Vamos a definir la aplicación

$$\begin{aligned} H : X \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\longmapsto (1 - t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

que es continua y además verifica

$$H(x, 0) = f(x) \qquad H(x, 1) = g(x)$$

por lo que tenemos lo que buscábamos.

□

En el caso particular de que $f = \alpha$ y $g = \beta$ fuesen arcos comenzando en un punto común y acabando en otro punto común, entonces la H anterior sería una homotopía por arcos.

2. Si $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ es un arco y $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una aplicación continua con $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$, entonces $\dot{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ es homotópica por arcos a $\alpha(s)$.

Demostración. Es claro que $\dot{\alpha}$ es continua y existe una homotopía por arcos entre α y $\dot{\alpha}$ que es la siguiente

$$H(s, t) = \alpha((1 - t)s + th(s))$$

que es claramente continua y que verifica que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s) & H(s, 1) &= \alpha(h(s)) = \dot{\alpha}(s) \\ H(0, t) &= \alpha(0) = \dot{\alpha}(1) & H(1, t) &= \alpha(1) = \dot{\alpha}(1) \end{aligned}$$

□

Intuitivamente podemos entender esto como que no importa a qué velocidad se recorra una curva para ser homotópico por arcos.

Notación. Por convenio, a la clase de equivalencia de un arco α en $\Omega(X; x, y)$ la denotaremos por $[\alpha]$.

Lema 1.2. *Dados dos arcos α_1, α_2 en $\Omega(X; x, y)$ y $\beta_1, \beta_2 \in \Omega(X; y, z)$. Se verifica que si $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ y $[\beta_1] = [\beta_2]$, entonces $[\alpha_1 * \beta_1] = [\alpha_2 * \beta_2]$.*

Demostración. Tenemos que

$$(\alpha_1 * \beta_1) = \begin{cases} \alpha_1(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \beta_1(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$(\alpha_2 * \beta_2) = \begin{cases} \alpha_2(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \beta_2(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Además, sabemos que existen H_1, H_2 continuas tal que

$$\begin{aligned} H_1(s, 0) &= \alpha_1(s) & H_2(s, 0) &= \beta_1(s) \\ H_1(s, 1) &= \alpha_2(s) & H_2(s, 1) &= \beta_2(s) \\ H_1(0, t) &= x & H_2(0, t) &= y \\ H_1(1, t) &= y & H_2(1, t) &= z \end{aligned}$$

Tomamos entonces $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ dada por

$$H(s, t) = \begin{cases} H_1(2s, t) & \text{si } s \in [0, 1/2], t \in [0, 1] \\ H_2(2s - 1, t) & \text{si } s \in [1/2, 1], t \in [0, 1] \end{cases}$$

es continua y tenemos que

$$H(s, 0) = \begin{cases} H_1(2s, 0) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ H_2(2s - 1, 0) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha_1(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \beta_1(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} = (\alpha_1 * \beta_1)(s)$$

Análogamente se tiene que $H(s, 1) = (\alpha_2 * \beta_2)(s)$ con $H(0, t) = x$ y $H(1, t) = z$. \square

Definición 1.3. A partir del lema anterior podemos definir

$$[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$$

con $\alpha \in \Omega(X; x, y)$, $\beta \in \Omega(X; y, z)$

Teorema 1.3. *Dado X e.t., $\alpha \in \Omega(X; x, y)$, $\beta \in \Omega(X; y, z)$ y $\gamma \in \Omega(X; z, w)$ se tiene que*

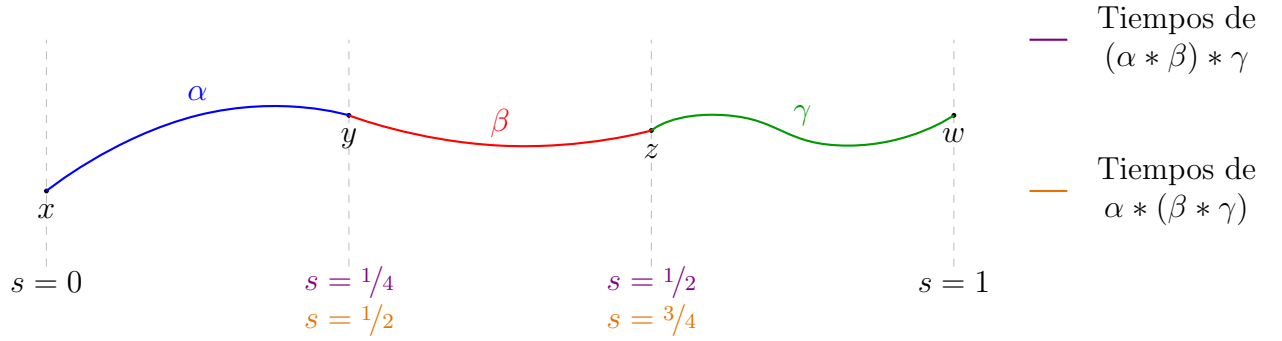
$$(i) \quad [\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$$

$$(ii) \quad [\alpha] * [\varepsilon_y] = [\alpha] \text{ y } [\varepsilon_x] * [\alpha] = [\alpha]$$

$$(iii) \quad [\alpha] * [\tilde{\alpha}] = [\varepsilon_x] \text{ y } [\tilde{\alpha}] * [\alpha] = [\varepsilon_y]$$

Demostración.

(i) Desarrollemos cada expresión



$$(\beta * \gamma)(s) = \begin{cases} \beta(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha * (\beta * \gamma)(s) &= \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ (\beta * \gamma)(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \beta(2(2s - 1)) & \text{si } s \in [1/2, 3/4] \\ \gamma(2(2s - 1) - 1) & \text{si } s \in [3/4, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \beta(4s - 2) & \text{si } s \in [1/2, 3/4] \\ \gamma(4s - 3) & \text{si } s \in [3/4, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

$$(\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \beta(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\alpha * \beta) * \gamma(s) &= \begin{cases} (\alpha * \beta)(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \alpha(2(2s)) & \text{si } s \in [0, 1/4] \\ \beta(2(2s) - 1) & \text{si } s \in [1/4, 1/2] \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(4s) & \text{si } s \in [0, 1/4] \\ \beta(4s - 1) & \text{si } s \in [1/4, 1/2] \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

Usando el ejemplo 2 anterior se tiene que $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$ (realmente se están recorriendo las mismas curvas pero a distinta velocidad).

(ii) Tendremos que ver que $\alpha * \varepsilon_y$ se relaciona por una homotopía con arcos con α . Recordemos que

$$(\alpha * \varepsilon_y) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \varepsilon_y(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ y & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

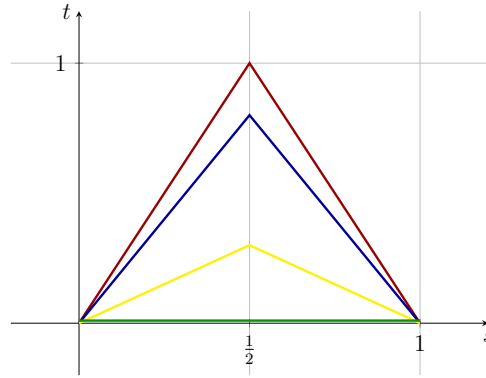
De nuevo del ejemplo 2 se tiene que son homotópicas

- (iii) Tendremos que ver en este caso que $\alpha * \tilde{\alpha}$ es homotópico por arcos a ε_x . Describamos ambas curvas.

$$(\alpha * \tilde{\alpha}) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \tilde{\alpha}(2s-1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \tilde{\alpha}(2-2s) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_x(s) = x \quad \forall s \in [0, 1]$$

Pensamos ahora una transformación H que haga que cada vez la curva se vaya quedando más cerca de x (cada vez vuelve antes de llegar a y). Intuitivamente podríamos pensar en la siguiente gráfica, en la que vamos reduciendo la distancia desde la función roja hasta la verde



$$h(s) = \begin{cases} 2s & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ 2-2s & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Y podemos construir $H(s, t) = \alpha((1-t)h(s))$ que claramente es continua y verifica

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(h(s)) = (\alpha * \tilde{\alpha}(s)) & \text{y} & & H(s, 1) &= \alpha(0) = x = \varepsilon_x(s) & \forall s \in [0, 1] \\ H(0, t) &= \alpha(0) = x & \text{y} & & H(1, t) &= \alpha(0) = x & \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

□

1.2. El grupo fundamental

Corolario 1.3.1. *Dados un e.t. X y un punto $x_0 \in X$ se tiene que el conjunto de lazos en X basados en x_0 bajo la relación de equivalencia de ser homotópicos por arcos y con operación $*$ forman un grupo algebraico.*

Demostración. Definimos el siguiente conjunto

$$G = \frac{\Omega(X; x_0)}{R}$$

donde R es la relación de equivalencia “ser homotópico por arcos”. Veamos ahora que G tiene estructura de grupo:

1. **Propiedad asociativa.** Tendremos que ver que se verifica para cualesquiera $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in G$.

$$[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$$

pero esto lo tenemos claramente del teorema anterior

2. **Existencia del elemento neutro.** Por el teorema anterior tenemos que para $x = y = x_0$ se tiene que $[\alpha] * [\varepsilon_{x_0}] = [\alpha] = [\varepsilon_{x_0}] * [\alpha]$ para cualquier $[\alpha] \in G$ luego tenemos la existencia probada.

3. **Existencia del elemento opuesto.** De nuevo usamos el teorema anterior y nos dice que para cualquier $[\alpha] \in G$ se tiene que

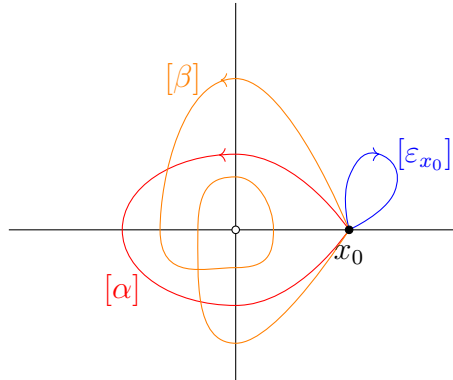
$$[\alpha] * [\tilde{\alpha}] = [\varepsilon_{x_0}] = [\tilde{\alpha}] * [\alpha]$$

y se tiene directamente.

Con esto hemos probado finalmente que G es un grupo. \square

Definición 1.4. Al grupo algebraico dado por el corolario anterior lo llamaremos el **grupo fundamental** de X en x_0 y lo denotaremos por $\pi_1(X, x_0)$.

Ejemplo. Consideramos $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ y un punto cualquiera x_0 .



En este espacio tenemos que $[\varepsilon_{x_0}] \neq [\alpha] \neq [\tilde{\alpha}] \neq [\beta]$. Intuitivamente podríamos intentar identificar este espacio con \mathbb{Z} de la siguiente forma:

- La clase $[\varepsilon_{x_0}]$ la podemos interpretar como el 0 de \mathbb{Z} .
- Identificaremos los números positivos como el número de vueltas que da cada curva al punto $(0, 0)$ en sentido positivo (el que elijamos como positivo). Por ejemplo $[\alpha]$ sería $1 \in \mathbb{Z}$, $[\beta]$ sería $2 \in \mathbb{Z}$ y podríamos seguir así con todos los números enteros.
- Para los números negativos tomaremos los opuestos de los anteriores, es decir, las curvas recorridas en sentido contrario. Por ejemplo $[\tilde{\alpha}]$ será el $-1 \in \mathbb{Z}$, $[\beta]$ será el -2 y así sucesivamente.

Más adelante probaremos que $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a \mathbb{Z} de una forma más rigurosa.

Ejemplo. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto estrellado desde un punto x_0 . Entonces $\pi_1(X; x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$, es decir, es trivial.

Demostración. Dado $\alpha(s)$ un lazo basado en x_0 dentro de X , entonces

$$H(s, t) = (1 - t)\alpha(s) + tx_0$$

es una aplicación continua dentro¹ de X tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s) & \text{y} & & H(s, 1) &= x_0 = \varepsilon_{x_0}(s) & \forall s \in [0, 1] \\ H(0, t) &= x_0 & \text{y} & & H(1, t) &= x_0 & \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

□

En particular, las bolas abiertas, las bolas cerradas y los convexos en general como \mathbb{R}^n tienen grupo fundamental trivial.

Teorema 1.4. Sean x, y dos puntos de un e.t. X . Si X es arcoconexo, entonces $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ son iguales salvo isomorfismo.

Demostración. Como X es arcoconexo podemos considerar α un arco uniendo x con y y la aplicación

$$\begin{aligned} F_\alpha : \pi_1(X, y) &\longrightarrow \pi_1(X, x) \\ [\gamma] &\longmapsto [\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}] \end{aligned}$$

que está bien definida por lo visto anteriormente sobre el operador $*$. Queremos ver ahora que F_α es un isomorfismo de grupos. Para ello comencemos por ver que F_α es un homomorfismo, es decir, que se verifica

$$F_\alpha([\gamma_1] * [\gamma_2]) = F_\alpha[\gamma_1] * F_\alpha([\gamma_2])$$

Desarrollamos el segundo término de la expresión:

$$\begin{aligned} F_\alpha[\gamma_1] * F_\alpha([\gamma_2]) &= ([\alpha] * [\gamma_1] * [\tilde{\alpha}]) * ([\alpha] * [\gamma_2] * [\tilde{\alpha}]) = [\alpha] * [\gamma_1] * [\gamma_2] * [\tilde{\alpha}] = \\ &= F_\alpha([\gamma_1] * [\gamma_2]) \end{aligned}$$

y tenemos la igualdad buscada. Veamos ahora que tiene inversa considerando $F_{\tilde{\alpha}}$ que por definición es $F_{\tilde{\alpha}}([\beta]) = [\tilde{\alpha}] * [\beta] * [\alpha]$ y que además verifica

$$\begin{aligned} (F_{\tilde{\alpha}} \circ F_\alpha)([\gamma]) &= F_{\tilde{\alpha}}([\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}]) = [\tilde{\alpha}] * ([\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}]) * [\alpha] = [\gamma] = Id_{\pi_1(X, y)}([\gamma]) \\ (F_\alpha \circ F_{\tilde{\alpha}})([\gamma]) &= F_\alpha([\tilde{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]) = [\alpha] * ([\tilde{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]) * [\tilde{\alpha}] = [\gamma] = Id_{\pi_1(X, x)}([\gamma]) \end{aligned}$$

por lo que es su inversa. Hemos encontrado por tanto un homomorfismo biyectivo, luego $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$ □

Definición 1.5. Decimos que un e.t. es **simplemente conexo** si es arcoconexo y su grupo fundamental es el trivial en un punto (y, por tanto, en cualquier punto).

Ejemplo. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es estrellado desde un punto x_0 , entonces A es simplemente conexo.

Lema 1.5. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos y $x \in X$. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} (f_x)_* : \pi_1(X, x) &\longrightarrow \pi_1(Y, f(x)) \\ [\alpha] &\longmapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

está bien definida y es un homomorfismo de grupos².

¹aquí es donde usamos que es estrellado

²Cuando no haya confusión posible escribiremos solamente f_* en lugar de $(f_x)_*$.

Demostración. Para ver que $(f_x)_*$ está bien definida tomamos α_1, α_2 lazos basados en x tales que $[\alpha_1] = [\alpha_2]$. Queremos comprobar que $[f \circ \alpha_1] = [f \circ \alpha_2]$. Para ello, sabemos que si $[\alpha_1] = [\alpha_2]$, entonces existe $H : [0, 1] \rightarrow X$ continua y tal que

$$H(s, 0) = \alpha_1(s) \quad , \quad H(s, 1) = \alpha_2(s) \quad , \quad H(0, t) = x = H(1, t)$$

Entonces podemos considerar la aplicación

$$f \circ H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$$

que es continua y verifica

$$\begin{aligned} (f \circ H)(s, 0) &= (f \circ \alpha_1)(s) \\ (f \circ H)(s, 1) &= (f \circ \alpha_2)(s) \\ (f \circ H)(0, t) &= f(x) = (f \circ H)(1, t) \end{aligned}$$

por lo que $[f \circ \alpha_1] = [f \circ \alpha_2]$. Veamos ahora que $(f_x)_*$ es un homomorfismo de grupos, es decir que se verifica

$$(f_x)_*([\alpha] * [\beta]) = (f_x)_*([\alpha]) * (f_x)_*([\beta])$$

Por definición sabemos que

$$\begin{aligned} (f_x)_*([\alpha] * [\beta]) &= (f_x)_*([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] = \left[\begin{cases} f(\alpha(2s)) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ f(\beta(2s-1)) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \right] = \\ &= [(f * \alpha) * (f * \beta)] = (f_x)_*([\alpha]) * (f_x)_*([\beta]) \end{aligned}$$

□

Definición 1.6. A la aplicación f_* dada por el lema la llamaremos **homomorfismo inducido** por f .

Propiedades. Algunas propiedades básicas de f_* son

1. Si tenemos dos aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$, entonces se tiene que

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

2. Se verifica que la aplicación dada por

$$\begin{aligned} Id_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [\alpha] &\longmapsto [\alpha] \end{aligned}$$

es la identidad en grupos fundamentales.

Corolario 1.5.1. Si $h : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces la aplicación dada por

$$(h_x)_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, h(x))$$

es un isomorfismo de grupos, es decir, el grupo fundamental se conserva³ por homeomorfismos.

³salvo isomorfismo

Definición 1.7. Si $(G_1, *_1)$ y $(G_2, *_2)$ son dos grupos algebraicos, consideramos sobre $G_1 \times G_2$ el producto $*$ dado por

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) := (a_1 *_1 a_2, b_1 *_2 b_2)$$

para $a_1, a_2 \in G_1, b_1, b_2 \in G_2$

Teorema 1.6. Sean X, Y dos e.t., $x \in X, y \in Y$. Entonces, con la topología producto en $X \times Y$ se tiene que

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$$

Demostración. Veamos que

$$\begin{aligned} \phi : \pi_1(X \times Y, (x, y)) &\longrightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y) \\ [\alpha] &\longmapsto ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) \end{aligned}$$

donde p_1 y p_2 son las proyecciones a X y a Y respectivamente está bien definida. Esto es fácil de ver ya que

$$([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) = ((p_1)_*([\alpha]), (p_2)_*([\alpha]))$$

y además es un homomorfismo. Consideramos además la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \psi : \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y) &\longrightarrow \pi_1(X \times Y, (x, y)) \\ ([\beta], [\gamma]) &\longmapsto [(\beta, \gamma)] \end{aligned}$$

y es fácil ver que está bien definida y es un homomorfismo tal que

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi &= Id_{\pi_1(X \times Y, (x, y))} \\ \phi \circ \psi &= Id_{\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)} \end{aligned}$$

□

1.3. Espacios recubridores

Definición 1.8. Sea $p : R \rightarrow B$ una aplicación continua y sobreyectiva entre dos espacios topológicos. Dado un punto $b \in B$ decimos que un abierto O que contiene a b está **regularmente recubierto** si se verifican las siguientes propiedades

1. $p^{-1}(O)$ es una unión disjunta de abiertos $A_i \subseteq R, i \in I$.
2. Para cada $i \in I, p|_{A_i} : A_i \rightarrow O$ es un homeomorfismo.

Ejemplo. En este caso, si consideramos la aplicación $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ descrita en la gráfica, que es claramente continua y sobreyectiva⁴. Podemos ver que O , que contiene al $(1, 0)$ está regularmente recubierto

⁴De hecho es un homeomorfismo local en cada intervalo con amplitud 1 que estudiamos en Topología I



Definición 1.9. Decimos que una aplicación $p : R \rightarrow B$ entre dos espacios topológicos es una **aplicación recubridora** si p es continua, sobreyectiva y todo punto $b \in B$ está contenido en un abierto O_b regularmente recubierto.

Observación. Todo homeomorfismo es una aplicación recubridora⁵.

Teorema 1.7. La aplicación

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \end{aligned}$$

es una aplicación recubridora

Demostración. Es claro que es sobreyectiva y continua por las propiedades del seno y el coseno en \mathbb{R} . Tendremos que ver que

$$O = \mathbb{S}^1 \cap ((0, \infty) \times \mathbb{R}) = \mathbb{S}^1 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$$

está regularmente recubierto. Para ello consideramos

$$\begin{aligned} p^{-1}(O) &= \{x \in \mathbb{R} : \cos(2\pi x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 2\pi x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Tomando $A_k = \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right)$ falta ver que cada abierto A_{k_0} cumple que $p : A_{k_0} \rightarrow O$ es un homeomorfismo.

Por las propiedades de $(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ es claro que p es inyectiva y sobreyectiva en A_{k_0} . Para ello podemos considerar

$$p' : \left[k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right] \rightarrow \overline{O}$$

⁵Podemos verlo fácilmente tomando $O_b = X$ el total.

que es continua y va desde un compacto en un conjunto T2, lo que nos dice que $p|_{\left[k-\frac{1}{4}, k+\frac{1}{4}\right]}$ es cerrada por lo que

$$p' : \left[k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right] \rightarrow \overline{O}$$

es un homeomorfismo y por tanto su restricción en el dominio

$$p' : \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right) \rightarrow \overline{O}$$

también lo es y por la definición de A_k tenemos lo que buscábamos.

Si repetimos este razonamiento de forma análoga para los siguientes conjuntos:

$$\mathbb{S}^1 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0\}$$

$$\mathbb{S}^1 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$$

$$\mathbb{S}^1 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\}$$

tendremos la demostración completa. □

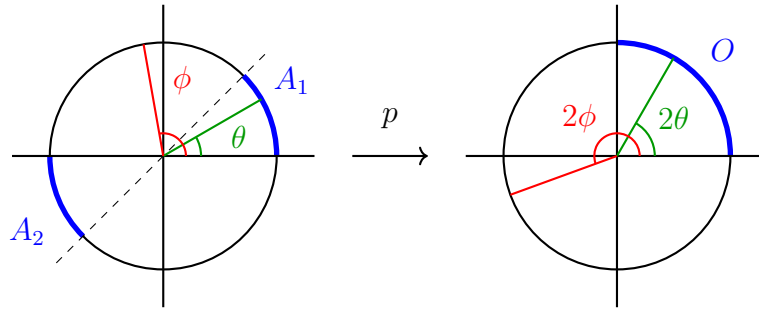
Ejemplo. La aplicación

$$\begin{aligned} p : \quad \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (x, y) &\longmapsto (x^2 - y^2, 2xy) \end{aligned}$$

que podemos entender como la aplicación que lleva

$$\begin{aligned} (x + iy) &\mapsto (x + iy)^2 \\ (\cos \theta, \sin \theta) &\mapsto (\cos 2\theta, \sin 2\theta) \end{aligned}$$

es recubridora. Intuitivamente la podemos ver como



Esta aplicación se podría generalizar como

$$\begin{aligned} p_n : \quad \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta)) &\longmapsto (\cos(n\theta), \sin(n\theta)) \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} p_n : \quad \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (x + iy) &\longmapsto (x + iy)^n \end{aligned}$$

con $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Propiedades.

1. Sean $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ dos aplicaciones tales que una de ellas es un homeomorfismo y la otra una aplicación recubridora. Entonces $g \circ f : X \rightarrow Z$ es una aplicación recubridora.
2. Sea $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora y B_0 un subconjunto de B , entonces

$$p|_{p^{-1}(B_0)} : p^{-1}(B_0) \rightarrow B_0$$

es una aplicación recubridora.

3. Si $p_1 : R_1 \rightarrow B_1$ y $p_2 : R_2 \rightarrow B_2$ son dos aplicaciones recubridoras, entonces

$$\begin{aligned} p_1 \times p_2 : R_1 \times R_2 &\longrightarrow B_1 \times B_2 \\ (x, y) &\longmapsto (p_1(x), p_2(x)) \end{aligned}$$

es una aplicación recubridora cuando consideramos la topología producto en $R_1 \times R_2$ y $B_1 \times B_2$.

Ejemplo.

1. \mathbb{R}^2 es un recubridor del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Para verlo podemos considerar la aplicación dada por

$$\begin{aligned} p_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \end{aligned}$$

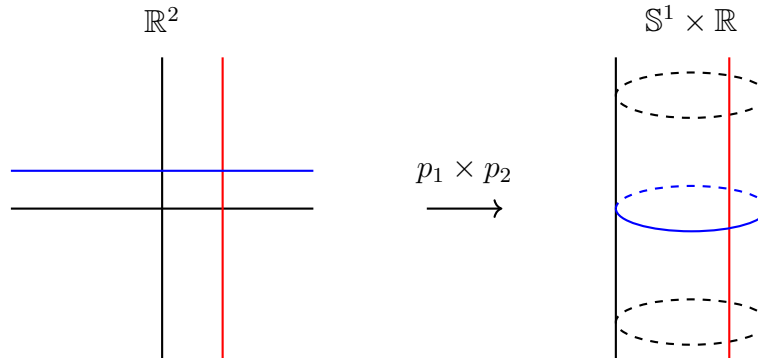
y la identidad dada por

$$\begin{aligned} p_2 = Id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Como p_1 es un recubrimiento y p_2 es un homeomorfismo tendremos que la aplicación

$$\begin{aligned} p_1 \times p_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y) \end{aligned}$$

es una aplicación recubridora. Intuitivamente podemos entenderlo de forma gráfica como



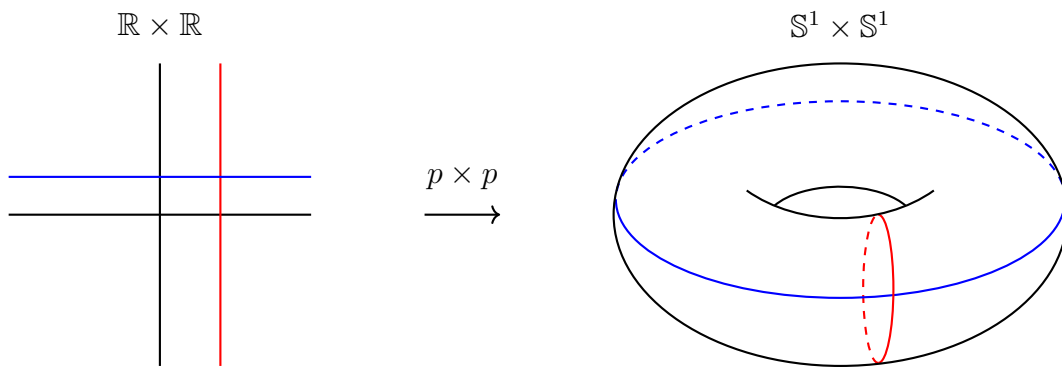
2. \mathbb{R}^2 es un recubridor del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ de \mathbb{R}^4 (o el toro de rotación de \mathbb{R}^3 porque ambos toros son homeomorfos). Para ello consideramos

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \end{aligned}$$

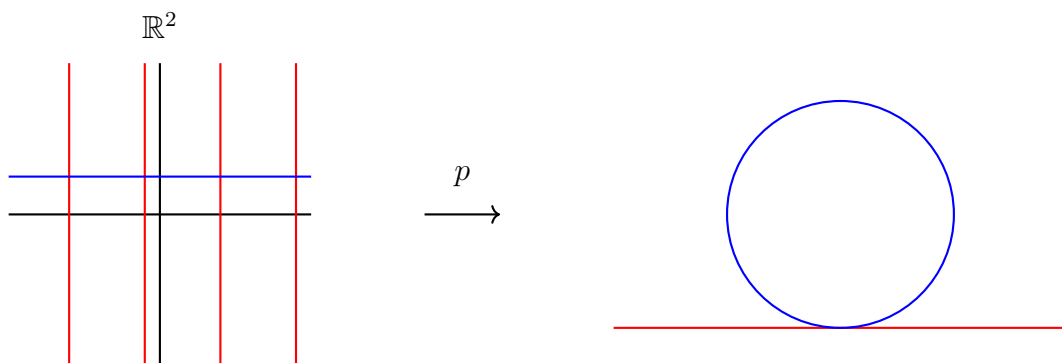
y su producto

$$\begin{aligned} p \times p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (x, y) &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) \end{aligned}$$

que sería la aplicación recubridora. Intuitivamente podemos entenderlo de forma gráfica como

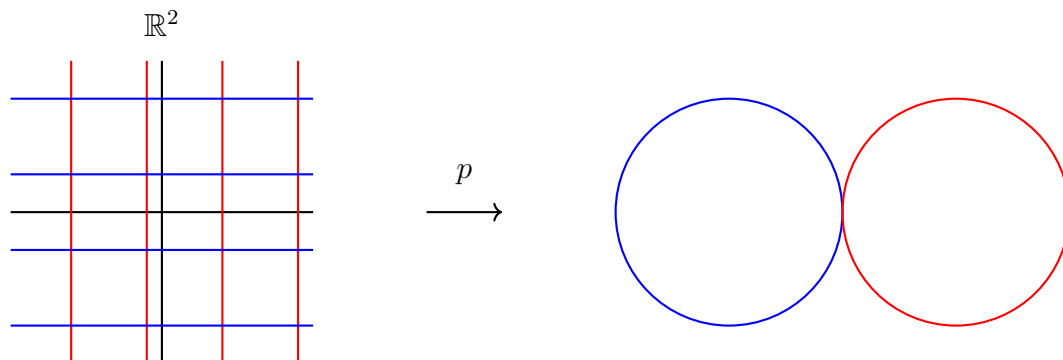


3. Intuitivamente podemos pensar en un recubrimiento de una circunferencia tangente a una recta como una colección de rectas paralelas y atravesadas por una común, como aparece en la figura. De esta forma (tal cual está en el dibujo) al “enrollar” el eje x de forma que hagamos coincidir todas las rectas rojas tendremos que la recta azul forma una circunferencia, que como originalmente solo tocaba en un punto a cada recta, resultará en la circunferencia tangente a la recta.



4. Por último podemos plantearnos cómo podría ser un recubrimiento de dos circunferencias tangentes. Para ello, tal como aparece en la figura podremos usar una **cuadrícula**. De forma análoga al ejemplo anterior podremos “enrollar” en primer lugar el eje x y obtendremos una única recta roja tangente a infinitas circunferencias azules (como en el ejemplo anterior pero con las circunferencias

azules periódicas). Ahora podremos “enrollar” la propia recta roja, haciendo coincidir todas las circunferencias azules de forma que obtendremos las dos circunferencias tangentes.



1.4. Levantamientos en espacios recubridores

Definición 1.10. Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora y $f : X \rightarrow B$ una aplicación continua. Decimos que $\hat{f} : X \rightarrow R$ es un **levantamiento** de f si se cumple que \hat{f} es continua y $p \circ \hat{f} = f$.

Ejemplo. Consideramos la aplicación recubridora

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \end{aligned}$$

y tomamos

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ s &\longmapsto (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) \end{aligned}$$

Si elegimos

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto s \end{aligned}$$

es claro que $p \circ \hat{\alpha} = \alpha$. Otros posibles levantamientos de α son

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto k + s \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Nos planteamos ahora cuál sería un levantamiento de $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(1 - s)$. Podemos ver que $\tilde{\alpha}_k(s) = k - s$ para $k \in \mathbb{Z}$ es en efecto un levantamiento de $\tilde{\alpha}(s)$.

Lema 1.8. Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $r_0 \in R$ y $b_0 \in B$ tales que $p(r_0) = b_0$. Entonces dado un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$ con $\alpha(0) = b_0$, existe un único arco $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow R$ tal que $\hat{\alpha}(0) = r_0$ y $\hat{\alpha}$ es un levantamiento de α .

Demostración. Como p es una aplicación recubridora, cada punto $b \in B$ tiene asociado un abierto O_b regularmente recubierto que contiene a b . Como $\alpha([0, 1])$ es compacto tenemos que existe un recubrimiento finito, es decir,

$$\alpha([0, 1]) \subseteq O_{b_1} \cup O_{b_2} \cup \cdots \cup O_{b_n}$$

Entonces $[0, 1] \subseteq \alpha^{-1}(O_{b_1}) \cup \alpha^{-1}(O_{b_2}) \cup \cdots \cup \alpha^{-1}(O_{b_n})$ por lo que tendremos el intervalo $[0, 1]$ recubierto por una familia finita de abiertos. Por el lema del número de Lebesgue⁶ sabemos que existe un $\delta > 0$ tal que para cada $x \in [0, 1]$ se tiene que $B(x, \delta) \cap [0, 1]$ está contenido en algún $p^{-1}(O_{b_j})$ para cierto $j \in \{1, \dots, k\}$. Esto nos asegura que podemos hacer una subdivisión del intervalo $[0, 1]$ tal que

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{r-1} < t_r = 1$$

tal que $\alpha([t_j, t_{j+1}])$ está contenido en algún O_{b_l} para $j \in \{0, \dots, r-1\}$, $l \in \{1, \dots, k\}$.

Definimos $\hat{\alpha}$ de manera recursiva:

$\alpha([t_0, t_1])$ está contenido en algún O_{b_l} . Como O_{b_l} está regularmente recubierto

$$p^{-1}(O_{b_l}) = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{unión disjunta de abiertos}$$

$$p|_{A_i} : A_i \rightarrow O_{b_l} \text{ es homeomorfismo}$$

Como $r_0 \in p^{-1}(b_0) = p^{-1}(\alpha(0)) \subseteq p^{-1}(O_{b_l}) = \bigcup_{i \in I} A_i$ se tiene que $r_0 \in A_{i_0}$ para algún A_{i_0} con $i_0 \in I$. Como además $p|_{A_{i_0}} : A_{i_0} \rightarrow O_{b_l}$ es un homeomorfismo, podemos definir

$$\hat{\alpha}(t) = (p|_{A_{i_0}})^{-1}(\alpha(t)), \quad t \in [0 = t_0, t_1]$$

Es claro que $\hat{\alpha}$ en $[0, t_1]$ es continua y $p \circ \hat{\alpha} = \alpha$.

Para definir $\hat{\alpha}$ en $[t_1, t_2]$ repetimos el mismo procedimiento. Sabemos que $\alpha([t_1, t_2])$ cae en un abierto O_{b_m} que está regularmente recubierto.

$$p^{-1}(O_{b_m}) = \bigcup_{i \in I'} A'_i \quad \text{con } A'_i \text{ abiertos disjuntos}$$

$$p|_{A'_i} : A'_i \rightarrow O_{b_m} \text{ homeomorfismo}$$

Además tenemos que $\alpha(t_1) \in O_{b_m}$. Como $p(\hat{\alpha}(t_1)) = \alpha(t_1) \in O_{b_m}$, entonces $\hat{\alpha}(t_1) \in p^{-1}(O_{b_m})$ y por tanto $\exists i'_0$ tal que $\hat{\alpha}(t_1) \in A'_{i'_0}$. Como $p|_{A'_{i'_0}} : A'_{i'_0} \rightarrow O_{b_m}$ es un homeomorfismo, podemos definir $\hat{\alpha}$ en $[t_1, t_2]$ como

$$\hat{\alpha}(t) = (p|_{A'_{i'_0}})^{-1}(\alpha(t))$$

que es claramente continua y $(p \circ \hat{\alpha})(t) = \alpha(t)$ para $t \in [t_1, t_2]$. Por el lema de pegado tenemos que $\hat{\alpha}$ es continua en $[t_0, t_2]$. Siguiendo este procedimiento con cada t_i , $i \in \{0, \dots, r-1\}$ tendremos el resultado que buscábamos probar.

⁶visto probablemente en alguna asignatura de Análisis.

Veamos ahora por qué $\hat{\alpha}$ es única con $\hat{\alpha}(0) = r_0$. Si existiese otro arco $\alpha^* : [0, 1] \rightarrow R$ tal que $p \circ \hat{\alpha} = p \circ \alpha^*$ con $\hat{\alpha}(0) = r_0 = \alpha^*(0)$, entonces

$$\alpha([0, t_0, t_1]) \subset O_{b_l}$$

por lo que

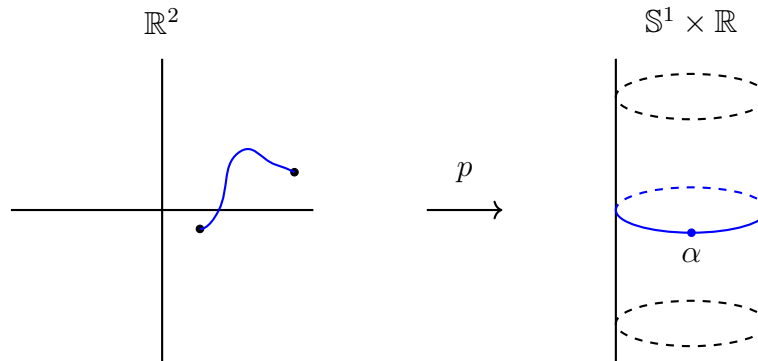
$$\begin{aligned}\alpha^*([0, t_1]) &\subseteq p^{-1}(O_{b_l}) = \bigcup_{i \in I} A_i \\ \hat{\alpha}([0, t_1]) &\subseteq p^{-1}(O_{b_l}) = \bigcup_{i \in I} A_i\end{aligned}$$

Por continuidad, $\alpha^*([0, t_1]) \subseteq A_{i_1}$ y $\hat{\alpha}([0, t_1]) \subseteq A_{i_0}$ pero $\alpha^*(0) = r_0 = \hat{\alpha}(0) \in A_{i_0}$ y como los A_i son disjuntos tenemos que $A_{i_1} = A_{i_0}$. Además, $p|_{A_{i_0}}$ es homeomorfismo de A_{i_0} en O_{b_l} por lo que

$$\alpha^*(t) = \hat{\alpha}(t), \quad t \in [0, 1]$$

De forma recursiva se verifica la unicidad en todos los intervalos $[t_j, t_{j+1}]$ con $j \in \{0, \dots, r-1\}$. \square

Observación. Es importante tener en cuenta que en general el levantamiento de un lazo no es un lazo, sino simplemente un arco.



Lema 1.9. Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora y $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$ una aplicación continua. Dados $b_0 = H(0, 0)$ y $r_0 \in p^{-1}(b_0)$, entonces existe un único levantamiento $\hat{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow R$ tal que $\hat{H}(0, 0) = r_0$. Si además H es una homotopía por arcos, entonces \hat{H} también lo será.

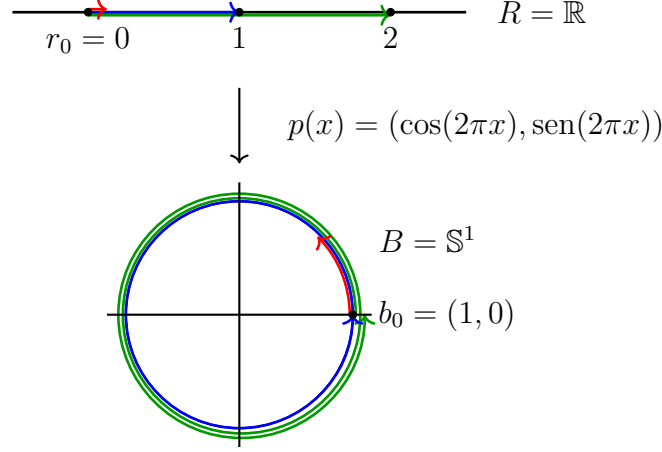
Corolario 1.9.1. Sea $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow B$ dos arcos con $[\alpha] = [\beta]$ y tomamos un $r_0 \in p^{-1}(\alpha(0))$ ($\alpha(0) = \beta(0)$). Si elegimos $\hat{\alpha}, \hat{\beta} : [0, 1] \rightarrow R$ como los únicos arcos con $\hat{\alpha}(0) = r_0 = \hat{\beta}(0)$, entonces $[\hat{\alpha}] = [\hat{\beta}]$.

Definición 1.11. Consideramos una aplicación recubridora $p : R \rightarrow B$, un punto $b_0 \in B$ y otro $r_0 \in R$ tal que $p(r_0) = b_0$. Entonces podemos definir la siguiente aplicación

$$\begin{aligned}\phi : \pi_1(B, b_0) &\longrightarrow p^{-1}(b_0) \\ [\alpha] &\longmapsto \hat{\alpha}(1)\end{aligned}$$

donde $\hat{\alpha}$ es el único levantamiento de α con $\hat{\alpha}(0) = r_0$. A la aplicación ϕ la llamaremos **correspondencia del levantamiento**.

Ejemplo. Consideramos el caso de “enrollar” \mathbb{R} sobre una circunferencia. La aplicación ϕ cuenta el número de vueltas que da cada arco, como se puede ver en el siguiente dibujo.



Teorema 1.10. Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in B$, $r_0 \in R$ con $p(r_0) = b_0$. Si R es arcoconexo, entonces la correspondencia del levantamiento

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$$

es sobreyectiva. Además, si R es simplemente conexo, entonces ϕ es biyectiva.

Demostración. Si R es arcoconexo tenemos que probar que dado $r_1 \in p^{-1}(b_0) \subseteq R$ existe un lazo $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$ de forma que $\phi([\alpha]) = r_1$, es decir, su único levantamiento $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow R$ cumple que $\hat{\alpha}(0) = r_0$ y $\hat{\alpha}(1) = r_1$.

Para ello tomo un arco cualquiera $\alpha^* : [0, 1] \rightarrow R$ tal que $\alpha^*(0) = r_0$ y $\alpha^*(1) = r_1$ que existe por ser R arcoconexo. Elijo ahora $\alpha = p \circ \alpha^*$ que es un arco en B tal que $\alpha(0) = p(\alpha^*(0)) = p(r_0) = b_0$ y $\alpha(1) = p(\alpha^*(1)) = p(r_1) = b_0$. Tenemos entonces que α es un lazo basado en b_0 y como $\alpha = p \circ \alpha^*$, entonces $\hat{\alpha} = \alpha^*$ es un levantamiento de α con $\hat{\alpha}(0) = \alpha^*(0) = r_0$ por lo que $\phi([\alpha]) = \hat{\alpha}(1) = \alpha^*(1) = r_1$.

Nos queda ver que si R es simplemente conexo, entonces ϕ es biyectiva. Como todo simplemente conexo es necesariamente arcoconexo sabemos de la primera parte del teorema que ϕ es sobreyectiva por lo que solo tenemos que probar la inyectividad. Eso es equivalente a considerar $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(B, b_0)$ y ver si se verifica la implicación

$$\phi([\alpha]) = \phi([\beta]) \stackrel{?}{\Rightarrow} [\alpha] = [\beta]$$

Sabiendo que $\hat{\alpha}(1) = \phi([\alpha])$ y $\hat{\beta}(1) = \phi([\beta])$. Como $\hat{\alpha}(1) = \hat{\beta}(1)$ consideramos $\hat{\alpha} * \tilde{\hat{\beta}}$ que es un lazo basado en r_0 . Como R es simplemente conexo tenemos que

$$[\hat{\alpha}] * [\tilde{\hat{\beta}}] = [\hat{\alpha} * \tilde{\hat{\beta}}] = [\varepsilon_{r_0}]$$

por lo que se tiene

$$[\hat{\alpha}] = [\varepsilon_{r_0}] * [\hat{\beta}] = [\hat{\beta}]$$

Como coinciden los elementos del grupo fundamental tendremos que son homotópicos por arcos por lo que existe una homotopía por arcos entre $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, es decir, una aplicación $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow R$ tal que

$$H(t, 0) = \hat{\alpha}(t) \quad \text{y} \quad H(t, 1) = \hat{\beta}(t)$$

Si consideramos ahora su composición con la aplicación recubridora, $p \circ H$, tendremos que es una homotopía entre α y β ya que tendríamos $p \circ H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$ que verifica

$$(p \circ H)(t, 0) = p(H(t, 0)) = p(\hat{\alpha}(t)) = \alpha(t)$$

$$(p \circ H)(t, 1) = p(H(t, 1)) = p(\hat{\beta}(t)) = \beta(t)$$

por lo que podemos concluir que $[\alpha] = [\beta]$. □

1.5. Grupo fundamental de la circunferencia

Definición 1.12. Dado un lazo $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ basado en $(1, 0)$, definimos el **grado** de α como el único número entero $\hat{\alpha}(1)$ dado por el levantamiento $\hat{\alpha}$ de α mediante la aplicación recubridora

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

con $\hat{\alpha}(0) = 0$. Notaremos al grado de α como $\deg(\alpha)$.

Observación. Como el grado es simplemente la correspondencia del levantamiento para p y $r_0 = 0$, entonces si $[\alpha] = [\beta]$ se tiene que $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$, es decir el grado está bien definido para clases de equivalencia.

Teorema 1.11. *El grupo fundamental de \mathbb{S}^1 en el $(1, 0)$ es isomorfo al grupo aditivo $(\mathbb{Z}, +)$. De hecho, la aplicación*

$$\begin{aligned} \deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [\alpha] &\longmapsto \deg(\alpha) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Como \mathbb{R} es simplemente conexo, el teorema anterior nos dice que la aplicación \deg es biyectiva. Tendremos que probar que \deg es un homomorfismo, es decir que se verifica

$$\deg([\alpha] * [\beta]) = \deg([\alpha]) + \deg([\beta])$$

Para verlo tomamos $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ levantamientos de α y β respectivamente con

$$\hat{\alpha}(0) = 0 = \hat{\beta}(0)$$

Recordemos que $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$. Vamos a considerar

$$\widehat{\alpha * \beta}(s) = \begin{cases} \hat{\alpha}(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \hat{\alpha}(1) + \hat{\beta}(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

y es claro que $\widehat{\alpha * \beta}$ es continua. Queremos ver que $p(\widehat{\alpha * \beta}) = \alpha * \beta$. Desarrollando tenemos

$$\begin{aligned} p(\widehat{\alpha * \beta})(s) &= \begin{cases} p(\hat{\alpha}(2s)) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ p(\hat{\alpha}(1) + \hat{\beta}(2s - 1)) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ p(\hat{\beta}(2s - 1)) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} = (\alpha * \beta) \end{aligned}$$

por lo que $\widehat{\alpha * \beta}$ es un levantamiento de $\alpha * \beta$ con $\widehat{\alpha * \beta}(0) = \hat{\alpha}(0)$ por lo que por definición tenemos que

$$\deg(\alpha * \beta) = \widehat{\alpha * \beta}(1) = \hat{\alpha}(1) + \hat{\beta}(1) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$$

□

Observación. Algunas consecuencias elementales son las siguientes

- El grupo fundamental de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ es \mathbb{Z} . De aquí se deduce que $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_0\}$ no es homeomorfo a \mathbb{R}^2 ya que $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_0\}$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ que tiene por grupo fundamental \mathbb{Z} y \mathbb{R}^2 tiene por grupo elemental el trivial.
- $\mathbb{R}^3 \setminus R$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{R}$ donde R es una recta en \mathbb{R}^3 .
- El grupo fundamental del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ o el toro de rotación de \mathbb{R}^3 es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Proposición 1.12. *No existe ninguna aplicación continua⁷ $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$*

Demostración. Tomamos $\alpha(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$, lazo basado en $(1, 0)$. Su clase de equivalencia en el disco sería

$$[\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}} = [\varepsilon_{(1,0)}]$$

ya que $\overline{\mathbb{D}}$ es simplemente conexo. Si existiese una f continua, entonces tendríamos que

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(\overline{\mathbb{D}}(1,0)) &\longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0)) \\ [\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}} &\longmapsto f_*([\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}}) \stackrel{def}{=} [f \circ \alpha]_{\mathbb{S}^1} = [\alpha]_{\mathbb{S}^1} \end{aligned}$$

es un homomorfismo. Pero $[\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}} = [\varepsilon_{(1,0)}]_{\overline{\mathbb{D}}}$ por lo que

$$f_*([\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}}) = f_*([\varepsilon_{(1,0)}]_{\overline{\mathbb{D}}}) = [\varepsilon_{(1,0)}]_{\mathbb{S}^1}$$

Sin embargo, teníamos que $f_*([\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}}) = [\alpha]_{\mathbb{S}^1}$ y llegamos a contradicción ya que $\deg(\alpha) = 1$ y $\deg(\varepsilon_{(1,0)}) = 0$. □

Teorema 1.13 (punto fijo de Brouwer). *Si $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ es continua, entonces existe $x_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

⁷ $\overline{\mathbb{D}}$ denota el disco cerrado de \mathbb{R}^2 centrado en el $(0,0)$ y con radio 1.

Demostración. Supongamos que f no tiene ningún punto fijo, es decir, $f(x) \neq x$ para todo $x \in \mathbb{D}$. Buscaremos ahora construir una aplicación a partir de esta hipótesis que deje a los puntos de la circunferencia \mathbb{S}^1 fijos para poder aplicar la proposición anterior.

Para cada x consideramos la semirrecta abierta

$$f(x) + \lambda_x(x - f(x)) \quad \forall \lambda_x > 0$$

y la intersección de dicha semirrecta con la circunferencia unidad. Como $f(x), x \in \mathbb{D}$ y $f(x) \neq x$, lo recién definido es efectivamente una semirrecta y ha de cortar exactamente en un único punto a \mathbb{S}^1 .

$$\begin{aligned} 1 &= \langle f(x) + \lambda_x(x - f(x)), f(x) + \lambda_x(x - f(x)) \rangle = \\ &\langle f(x) \rangle + 2\lambda_x \langle f(x), x - f(x) \rangle + \lambda_x^2 \langle x - f(x), x - f(x) \rangle \end{aligned}$$

Por lo que podemos despejar λ_x y nos queda

$$\lambda_x = \frac{-2\langle f(x), x - f(x) \rangle + \sqrt{4\langle f(x), x - f(x) \rangle^2 - 4\langle f(x), f(x) - 1 \rangle \langle x - f(x), x - f(x) \rangle}}{2\langle x - f(x), x - f(x) \rangle}$$

Por lo que $g(x) = f(x) + \lambda_x(x - f(x))$ es continua y $|g(x)| = 1$. Por tanto tenemos que si $x \in \mathbb{S}^1$, entonces $g(x) = x$ lo que contradice la proposición anterior. \square

Observación. El teorema del punto fijo de Brouwer no solo es cierto para \mathbb{D} sino para cualquier espacio topológico X homeomorfo a \mathbb{D} . Es decir, si $f : X \rightarrow X$ es continua con X homeomorfo a \mathbb{D} , entonces existe al menos un punto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Demostración. Notemos por $h : \mathbb{D} \rightarrow X$ al homeomorfismo y estaremos en la siguiente situación

$$\mathbb{D} \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{h^{-1}} \mathbb{D}$$

Entonces tendríamos $h^{-1} \circ f \circ h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ continua y por el teorema de Brouwer existe $y_0 \in \mathbb{D}$ tal que $(h^{-1} \circ f \circ h)(y_0) = y_0$. \square

Corolario 1.13.1. Sea $V : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ una aplicación continua. Entonces existen puntos $x, y \in \mathbb{S}^1$ de forma que $V(x) = \lambda x$, $V(y) = -\mu y$ con $\lambda, \mu > 0$.

Demostración. Consideramos la aplicación $f(x) = \frac{V(x)}{|V(x)|}$ que es continua (ya que $V(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{D}$). Por el teorema de Brouwer tenemos que $\exists x_0 \in \mathbb{D}$ tal que $f(x_0) = x_0$ por lo que

$$x_0 = \frac{V(x_0)}{|V(x_0)|} \Rightarrow V(x_0) = |V(x_0)|x_0$$

Tomando $\lambda = |V(x_0)|$ tenemos lo que buscábamos. Si tomamos ahora $g(x) = -\frac{V(x)}{|V(x)|}$ tendríamos análogamente que existe un y_0 tal que $y_0 = g(y_0) = \frac{V(y_0)}{|V(y_0)|} \in \mathbb{S}^1$ y tendríamos

$$V(y_0) = -|V(y_0)|y_0$$

Tomando $\mu = |V(y_0)|$ se verifica la segunda parte del corolario. En general, podemos considerar cualquier ángulo θ y definir la aplicación como

$$h(x) = \frac{V(x)}{e^{i\theta}|V(x)|}$$

□

Teorema 1.14 (Teorema fundamental del álgebra). *Todo polinomio complejo de grado $n \geq 1$ tiene al menos una raíz compleja*

Demostración. Vamos a considerar $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$ con $n \geq 1$ y supongamos que $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, es decir, que no tiene raíces en \mathbb{C} . Consideramos la siguiente aplicación

$$H(s, t) = \begin{cases} \frac{p\left(\frac{t}{1-t}e^{2\pi is}\right) \cdot \left|p\left(\frac{t}{1-t}\right)\right|}{\left|p\left(\frac{t}{1-t}e^{2\pi is}\right)\right| \cdot p\left(\frac{t}{1-t}\right)} & \text{si } (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1[\\ e^{2\pi ins} & \text{si } (s, t) \in [0, 1] \times \{1\} \end{cases}$$

Esta aplicación lo que hace es considerar el plano complejo y su imagen mediante p . La aplicación p no pasa por el origen porque así lo hemos supuesto. Para $t = 0$ (tiempo inicial) tenemos que $H(s, 0) = (1, 0)_{\mathbb{R}^2} \equiv 1_{\mathbb{C}}$. Además para $s = 0$ tenemos $H(0, t) = (1, 0)_{\mathbb{R}^2} \equiv 1_{\mathbb{C}}$. Si la aplicación H fuera una homotopía, al principio (cuando t es bajo) no daría ninguna vuelta (en la imagen) y al final (cuando domina z^n) daría n vueltas por lo que no puede ser.

Comprobemos que H es continua. Para esto simplemente veamos que

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{p\left(\frac{t}{1-t}e^{2\pi is_0}\right) \cdot \left|p\left(\frac{t}{1-t}\right)\right|}{\left|p\left(\frac{t}{1-t}e^{2\pi is_0}\right)\right| \cdot p\left(\frac{t}{1-t}\right)} = e^{2\pi ins_0}$$

Esto es fácil de ver ya que tenemos

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{p\left(\frac{t}{1-t}e^{2\pi is_0}\right) \cdot \left|p\left(\frac{t}{1-t}\right)\right|}{\left|p\left(\frac{t}{1-t}e^{2\pi is_0}\right)\right| \cdot p\left(\frac{t}{1-t}\right)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\left(\left(\frac{t}{1-t}\right)^n e^{2\pi ins_0} + a_{n-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{n-1} e^{2\pi i(n-1)s_0} + \dots\right) \cdot \left|\left(\frac{t}{1-t}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{n-1} + \dots\right|}{\left|\left(\frac{t}{1-t}\right)^n e^{2\pi ins_0} + a_{n-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^n e^{2\pi i(n-1)s_0} + \dots\right| \cdot \left(\left(\frac{t}{1-t}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{n-1} + \dots\right)} = \\ &= \frac{e^{2\pi ins_0}}{|e^{2\pi ins_0}|} \cdot \frac{|1|}{1} = e^{2\pi ins_0} \end{aligned}$$

y tenemos claramente que $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ es continua. Además se tiene

$$\begin{aligned} H(0, t) &= 1 & \forall t \in [0, 1] \\ H(1, t) &= 1 & \forall t \in [0, 1] \\ H(s, 0) &= 1 & \forall s \in [0, 1] \\ H(s, 1) &= e^{2\pi ins} & \forall s \in [0, 1] \end{aligned}$$

por lo que H es una homotopía por arcos entre los lazos $\alpha_1(s) = 1$ y $\alpha_2(s) = e^{2\pi i s}$. Entonces tendremos que

$$[\alpha_1] = [\alpha_2] \quad \text{y} \quad 0 = \deg(\alpha_1) = \deg(\alpha_2) = n$$

y llegamos a contradicción ya que $n \geq 1$. Por tanto $\exists z \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = 0$. \square

1.6. Retracciones, tipos de homotopía y retractsos de deformación

Definición 1.13. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que una aplicación continua $r : X \rightarrow A$ es una **retracción** si se cumple que $r(a) = a \quad \forall a \in A$.

Se dice que A es un **retracto** de X si existe una retracción $r : X \rightarrow A$.

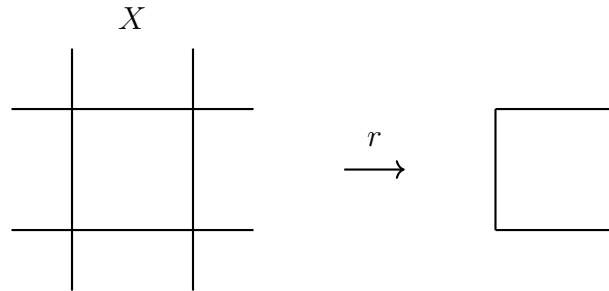
Ejemplo.

1. \mathbb{S}^1 es un retracto de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Podemos considerar

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

que es claramente continua y se verifica que $r(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$.

2. \mathbb{S} no es un retracto de $\overline{\mathbb{D}}$ por lo visto en la proposición 1.12.
3. La compresión de un cuadrado también es un retracto.



Lema 1.15. Sean X un e.t. y $A \subseteq X$ tal que A es un retracto de X . Entonces la aplicación inclusión $i : A \rightarrow X$ induce un homomorfismo inyectivo

$$i_* : \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$$

Demostración. Si A es retracto de X , entonces por definición tenemos que $\exists r : X \rightarrow A$ continua tal que $r(a) = a$ para cualquier $a \in A$.

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} A \quad , r \circ i = Id_A \\ a &\longmapsto a \longmapsto a \end{aligned}$$

$$\pi_1(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, a_0) \xrightarrow{r_*} \pi_1(A, a_0)$$

$$\quad \quad \quad \xrightarrow{r_* \circ i_*}$$

$$r_* \circ i_* = (Id_A)_* = Id_{\pi_1(A, a_0)}$$

Como $Id_{\pi_1(A, a_0)}$ es inyectiva, entonces se tiene que i_* es inyectiva. \square

Definición 1.14. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre dos espacios topológicos. Decimos que f es una **equivalencia homotópica** si existe $g : Y \rightarrow X$ continua tal que $g \circ f$ es homotópica a Id_X y $f \circ g$ es homotópica a Id_Y .

Decimos que X e Y son **homotópicamente equivalentes** si existe una equivalencia homotópica entre ambos.

A la aplicación g se le llama una **inversa homotópica** de f .

Observación.

1. La inversa homotópica no tiene por qué ser única
2. La composición de equivalencias homotópicas sigue siendo una equivalencia homotópica, de lo que se deduce que ser homotópicamente equivalente es una relación de equivalencia.
3. Una equivalencia homotópica no tiene por qué ser ni inyectiva ni sobreyectiva.
4. Todo homeomorfismo es una equivalencia homotópica.

Lema 1.16. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas, $x_0 \in X$. Si H es una homotopía entre f y g y consideramos el arco $\alpha(t) = H(x_0, t)$. Entonces se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(Y, f(x_0)) & \\ f_* \nearrow & \downarrow \varphi \equiv \text{isomorfismo} & \\ \pi_1(X, x_0) & & \pi_1(Y, g(x_0)) \\ g_* \searrow & & \end{array}$$

donde $\varphi([\gamma]) = [\tilde{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]$. En particular, f_* es inyectiva (respectivamente sobreyectiva) si y solo si g_* lo es.

Demostración. Tenemos que demostrar que si β es un lazo en X basado en x_0 , entonces:

$$(\varphi \circ f_*)([\beta]) = g_*([\beta]) = [g \circ \beta]$$

Pero tenemos además

$$(\varphi \circ f_*)([\beta]) = [\tilde{\alpha}] * [f \circ \beta] * [\alpha]$$

por lo que será equivalente a probar que

$$[\alpha] * [g \circ \beta] = [f \circ \beta] * [\alpha]$$

es decir, que existe una homotopía por arcos que lleva $\alpha * (g \circ \beta)$ en $(f \circ \beta) * \alpha$.

Por hipótesis tenemos $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continua tal que

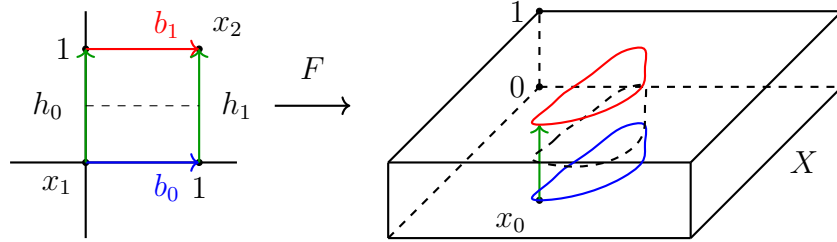
$$\begin{aligned} (x, 0) &\mapsto f(x) \\ (x, 1) &\mapsto g(x) \\ \alpha(t) &= H(x_0, t) \end{aligned}$$

Definimos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} F : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow X \times [0, 1] \\ (s, t) &\longmapsto (\beta(s), t) \end{aligned}$$

que es claramente continua y los siguientes lazos en $[0, 1] \times [0, 1]$

$$\begin{aligned} b_0(s) &= (s, 0) & , s \in [0, 1] \\ b_1(s) &= (s, 1) & , s \in [0, 1] \\ h_0(s) &= (0, s) & , s \in [0, 1] \\ h_1(s) &= (1, s) & , s \in [0, 1] \end{aligned}$$



Como $[0, 1] \times [0, 1]$ es simplemente conexo y $b_0 * h_1 * \tilde{b}_1 * \tilde{h}_0$ es un lazo basado en el $(0, 0)$, entonces se tiene que

$$[b_0 * h_1 * \tilde{b}_1 * \tilde{h}_0] = [\varepsilon_{(0,0)}] \Rightarrow [b_0 * h_1] = [h_0 * b_1]$$

Por tanto tenemos que $\exists G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ homotopía por arcos tal que $G(s, 0) = (b_0 * h_1)(s)$ y $G(s, 1) = (h_0 * b_1)(s)$ por lo que quedan los extremos fijos, es decir, $G(0, t) = (0, 0)$ y $G(1, t) = (1, 1)$. Consideramos entonces

$$H \circ F \circ G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y \quad \text{continua}$$

y tenemos que

$$\begin{aligned} (H \circ F \circ G)(0, t) &= H(F(0, 0)) = H(x_0, 0) = f(x_0) \\ (H \circ F \circ G)(1, t) &= H(F(1, 1)) = H(x_0, 1) = g(x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(H \circ F \circ G)(s, 0) &= H(F((b_0 * h_1)(s))) = (H \circ F) \left(\left\{ \begin{array}{ll} b_0(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ h_1(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{array} \right\} \right) = \\
&= (H \circ F) \left(\left\{ \begin{array}{ll} (2s, 0) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ (1, 2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{array} \right\} \right) = \\
&= H \left(\left\{ \begin{array}{ll} (\beta(2s), 0) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ (x_0, 2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{array} \right\} \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} f(\beta(2s)) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \alpha(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{array} \right\} = ((f \circ \beta) * \alpha)(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(H \circ F \circ G)(s, 1) &= H(F((h_0 * b_1)(s))) = (H \circ F) \left(\left\{ \begin{array}{ll} h_0(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ b_1(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{array} \right\} \right) = \\
&= (H \circ F) \left(\left\{ \begin{array}{ll} (0, 2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ (2s - 1, 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{array} \right\} \right) = \\
&= H \left(\left\{ \begin{array}{ll} (x_0, 2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ (\beta(2s - 1), 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{array} \right\} \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \alpha(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ g(\beta(2s - 1)) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{array} \right\} = (\alpha * (g \circ \beta))(s)
\end{aligned}$$

Por lo que llegamos a que

$$[\alpha] * [g \circ \beta] = [f \circ \beta] * [\alpha]$$

como queríamos probar. \square

Teorema 1.17. Sea $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia homotópica, entonces

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

es un isomorfismo.

Demostración. Como f es una equivalencia homotópica, existe $g : Y \rightarrow X$ que es una inversa homotópica suya. Sabemos que $g \circ f$ es homotópica a Id_X entonces:

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_0))) \\
& \searrow (Id_X)_* & \parallel \\
& \text{isom.} & \downarrow \varphi \equiv \text{isomorfismo} \\
& & \pi_1(X, x_0)
\end{array}$$

De aquí se deduce que f_* es inyectiva y que g_* es sobreyectiva

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_0))) & \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(g(f(x_0)))) \\
& \searrow (Id_Y)_* & \parallel \\
& \text{isom.} & \downarrow \tilde{\varphi} \equiv \text{isomorfismo} \\
& & \pi_1(X, x_0)
\end{array}$$

De este segundo diagrama concluimos que g_* es inyectiva y que f_* es sobreyectiva. En particular tenemos que f_* es biyectiva. Como es el homomorfismo inducido de f tendremos que f_* es un isomorfismo. \square

Definición 1.15. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es un **retracto de deformación** de X si existe una retracción $r : X \rightarrow A$ tal que $i \circ r$ sea homotópica a la identidad en X , donde $i : A \rightarrow X$ denota la inclusión.

Esto es equivalente a que exista una homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que

$$H(x, 0) = x \quad \forall x \in X$$

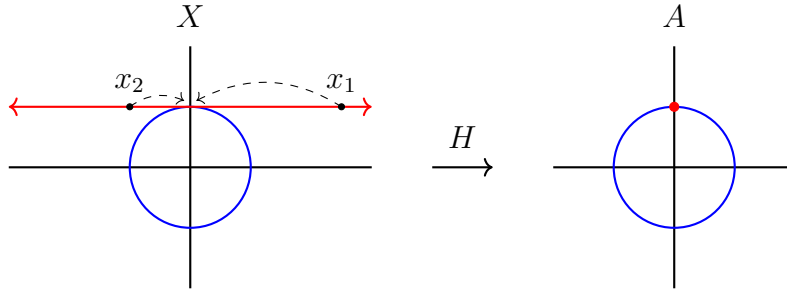
$$H(x, 1) \in A \quad \forall x \in X$$

$$H(a, 1) = a \quad \forall a \in A$$

donde la retracción será $r(x) = H(x, 1)$.

Ejemplo.

$$1. X = \mathbb{S}^1 \cup (\mathbb{R} \times \{1\}).$$



Veamos que \mathbb{S}^1 es retracto de deformación de X . Para ello buscamos la homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ y la definimos de la siguiente forma:

$$H(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{S}^1, t \in [0, 1] \\ (1-t)x + t(0, 1) & \text{si } x \in \mathbb{R} \times \{1\}, t \in [0, 1] \end{cases}$$

Con esta definición tenemos

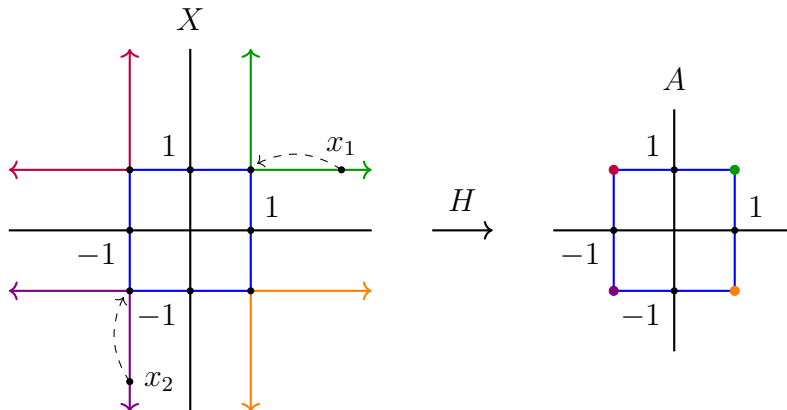
$$H(x, 0) = x \quad \forall x \in X$$

$$H(x, 1) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{S}^1 \\ (0, 1) & \text{si } x \in \mathbb{R} \times \{1\} \end{cases} \Rightarrow H(x, 1) \in \mathbb{S}^1 \quad \forall x \in X$$

$$H(a, 0) = a \quad \forall a \in \mathbb{S}^1$$

y tenemos la retracción definida como se ha hecho en la definición.

$$2. X = (\mathbb{R} \times \{-1, 1\}) \cup (\{-1, 1\} \times \mathbb{R}).$$



Veamos que $A = ([-1, 1] \times \{-1, 1\}) \cup (\{-1, 1\} \times [-1, 1])$ es un retracto de deformación de X . Para ello definimos la homotopía como

$$H(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ (1-t)x + t(1, 1) & \text{si } x = (x_1, x_2) \text{ con } x_1 \geq 1, x_2 \geq 1 \\ (1-t)x + t(-1, 1) & \text{si } x = (x_1, x_2) \text{ con } x_1 \leq -1, x_2 \geq 1 \\ (1-t)x + t(-1, -1) & \text{si } x = (x_1, x_2) \text{ con } x_1 \leq -1, x_2 \leq -1 \\ (1-t)x + t(1, -1) & \text{si } x = (x_1, x_2) \text{ con } x_1 \geq 1, x_2 \leq -1 \end{cases}$$

Corolario 1.17.1. *Sea A un retracto de deformación de X , entonces A y X son del mismo tipo de homotopía. En particular la aplicación inclusión $i : A \rightarrow X$ induce un isomorfismo entre sus grupos fundamentales.*

$$i_* : \pi_1(A, a_0) \xrightarrow{\text{isomorf.}} \pi_1(X, a_0) \quad , a_0 \in A$$

Demostración. Si A es un retracto de deformación de X , entonces existe una homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ cumpliendo

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= x \quad \forall x \in X \\ H(x, 1) &\in A \quad \forall x \in X \\ H(a, 1) &= a \quad \forall a \in A \end{aligned}$$

Si $r(x) = H(x, 1)$ se tiene que H es una homotopía entre Id_X y $i \circ r$ y por otro lado

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} A \\ a &\mapsto a \mapsto a \end{aligned}$$

con $r \circ i = Id_A$ por lo que $r \circ i$ es homotópica a Id_A . Por el teorema anterior tenemos que A y X son del mismo tipo de homotopía y que i_* es isomorfismo. \square

Ejemplo. Sabemos de ejemplos anteriores que $A = \mathbb{S}^1$ es retracto de deformación de $X = \mathbb{S}^1 \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$. Por el corolario recién estudiado tenemos que son del mismo tipo de homotopía y por tanto la inclusión induce un isomorfismo. Además el isomorfismo entre $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$ y $(\mathbb{Z}, +)$ ya se estudió previamente (con la aplicación que “cuenta vueltas”). Es decir, se tiene

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\cong_{\text{isom.}} \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong_{\text{isom.}} (\mathbb{Z}, +) \\ [\alpha]_X &\mapsto [\alpha]_{\mathbb{S}^1} \end{aligned}$$

Observación. Si A es retracto de X , entonces $i_* : \pi(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$ es inyectiva. Si A es retracto de deformación de X , entonces se tiene que $i_* : \pi(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$ es biyectiva.

Ejemplo.

1. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y $x_0 \in X$. Sabemos que $\{x_0\}$ es retracto de X , ya que

$$\begin{aligned} r : X &\longrightarrow \{x_0\} \\ x &\longmapsto x_0 \end{aligned}$$

es continua pero $\{x_0\}$ no es retracto de deformación de X ya que si lo fuese, entonces

$$i_* : \{0\} \cong \pi_1(\{x_0\}, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, x_0) \cong (\mathbb{Z}, +)$$

sería biyectiva y tendríamos $(\mathbb{Z}, +) \cong \{0\}$ lo cual es absurdo.

2. $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ es un retracto de deformación de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Si consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} H : (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2, x_3), t) &\longmapsto (x_1, x_2, (1-t)x_3) = (1-t)(x_1, x_2, x_3) + t(x_1, x_2, 0) \end{aligned}$$

Tenemos que verifica

$$\begin{aligned} H((x_1, x_2, x_3), 0) &= (x_1, x_2, x_3) \\ H((x_1, x_2, x_3), 1) &= (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{S}^1 \times \{0\} \\ H((x_1, x_2, 0), 1) &= a \end{aligned}$$

3. Consideramos la cinta de Möbius X dada por $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ bajo la relación de equivalencia

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \iff \begin{cases} (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \\ \vee \\ \{x_1, x_2\} = \{0, 1\} \wedge y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

Definimos la “circunferencia”

$$A = [0, 1] \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \text{ bajo la relación de equivalencia de } R$$

Consideramos la homotopía:

$$\begin{aligned} H : Y \times [0, 1] &\longrightarrow Y \\ ((x, y), t) &\longmapsto (1-t)(x, y) + t\left(x, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

que es continua. Veamos que H está bien definida, es decir, que para cualesquiera 2 elementos relacionados tienen la misma imagen (bajo R).

Supongamos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Y$ tal que $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$. Si $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ es claro que $H((x_1, y_1), t) = H((x_2, y_2), t)$. Supongamos entonces que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_1 = 0, x_2 = 1$ y

además sabemos que $y_1 + y_2 = 1$. Tendremos entonces

$$\begin{aligned} H((x_1, y_1), t) &= (1-t)(x_1, y_1) + t\left(x_1, \frac{1}{2}\right) = \\ &= (1-t)(0, y_1) + t\left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(0, (1-t)y_1 + \frac{1}{2}t\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H((x_2, y_2), t) &= (1-t)(x_2, y_2) + t\left(x_2, \frac{1}{2}\right) = \\ &= (1-t)(1, y_2) + t\left(1, \frac{1}{2}\right) = \left(1-t+t, (1-t)y_2 + \frac{1}{2}t\right) = \\ &= \left(1, (1-t)y_2 + \frac{1}{2}t\right) \end{aligned}$$

Veamos entonces que $(H((x_1, y_1), t))R(H((x_2, y_2), t))$. Fijamos $t \in [0, 1]$ y aplicamos la siguiente notación $H((x_1, y_1), t) = (x'_1, y'_1)$, $H((x_2, y_2), t) = (x'_2, y'_2)$. De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned} \{x'_1, x'_2\} &= \{0, 1\} \\ y'_1 + y'_2 &= (1-t)y_1 + \frac{1}{2}t + (1-t)y_2 + \frac{1}{2}t = \\ &= (1-t)(y_1 + y_2) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)t = 1-t+t = 1 \end{aligned}$$

Como t era arbitrario podemos concluir que la aplicación H está bien definida. De esta forma se tiene

$$\pi_1(X) \underset{\text{isom.}}{\cong} \pi_1(A) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong (\mathbb{Z}, +)$$

Definición 1.16. Se dice que un espacio topológico X es **contráctil** si existe un punto $x_0 \in X$ tal que $\{x_0\}$ sea retracto de deformación de X .

Corolario 1.17.2. *Todo espacio topológico contráctil es simplemente conexo.*

Demostración. Sea X el e.t y x_0 el punto de X para el cual existe $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ homotopía que verifica $\forall x \in X$

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= x \\ H(x, 1) &= x_0 \end{aligned}$$

Definimos para cada $x \in X$ la aplicación $\alpha_x(t) = H(x, t)$ es un arco que une x con x_0 para todo $x \in X$ es arcoconexo.

Como $\{x_0\}$ es retracto de deformación de X se tiene que

$$i_* : \pi_1(\{x_0\}, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

es isomorfismo por lo que $\pi_1(X, x_0)$ es trivial. □

1.7. El grupo fundamental de las esferas. Aplicaciones.

Parece intuitivo que el grupo fundamental de una esfera es el trivial ya que podríamos llevar cualquier lazo al trivial. Efectivamente la intuición no nos engaña pero tendremos que verlo de una forma más rigurosa para concluir la veracidad de esta afirmación.

Lema 1.18. Sean X un e.t. y U, V dos abiertos suyos tales que $X = U \cup V$. Si $U \cap V$ es arcoconexo, entonces dado un punto $x_0 \in U \cap V$ y α un lazo basado en x_0 , existen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ una cantidad finita de lazos basados en x_0 tales que

$$[\alpha] = [\alpha_1] * \dots * [\alpha_k]$$

donde la imagen de cada α_i cae completamente en U o bien en V .

Demostración. Podemos entender de forma gráfica la demostración de la siguiente forma, en la que se podrá descomponer la curva α en $\alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3$



Comenzamos con el lazo $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$. Consideramos $\alpha^{-1}(U)$ y $\alpha^{-1}(V)$ que son abiertos en $[0, 1]$. Por el lema del número de Lebesgue tenemos que existen

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1 \text{ partición del } [0, 1]$$

tal que $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ contenido en U o bien en V para $i \in \{0, \dots, m-1\}$. Si $\alpha(t_i) \notin U \cap V$ podemos quitar al t_i de la partición ya que $\alpha([t_{i-1}, t_i] \cup [t_i, t_{i+1}])$ estaría contenido en U o bien todo en V . Así suponemos todos los $\alpha(t_i) \in U \cap V$. Como $U \cap V$ es arcoconexo existe un arco β_i uniendo x_0 con $\alpha(t_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Tenemos por tanto

$$[\alpha] = [\alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_m]$$

donde α_i es una parametrización en $[0, 1]$ de $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} [\alpha] &= [\alpha_1] * [\tilde{\beta}_1] * [\beta_1] * [\alpha_2] * [\tilde{\beta}_2] * \dots * [\beta_{m-1}] * [\alpha_m] = \\ &= [\alpha_1 * \beta_1] * [\beta_1 * \alpha_2 * \tilde{\beta}_2] * \dots * [\beta_{m-1} * \alpha_m] \end{aligned}$$

Donde $[\alpha_1 * \tilde{\beta}_1]$, cada $[\beta_i * \alpha_{i+1} * \tilde{\beta}_{i+1}]$ y $[\beta_{m-1} * \alpha_m]$ son lazos basados en x_0 completamente contenidos en U o bien en V . \square

Teorema 1.19. Sean X un e.t y U, V abiertos de X . Supongamos que

1. $X = U \cup V$
2. $U \cap V$ es arcoconexo (no vacío)
3. U y V son simplemente conexos

Entonces X es simplemente conexo.

Demostración. Dado α lazo basado en $x_0 \in U \cup V$ se tiene por el lema anterior que

$$[\alpha] = [\alpha_1] * [\alpha_2] * \cdots * [\alpha_k]$$

donde cada α_i es un lazo completamente contenido en U o bien en V . Como U, V son simplemente conexos tenemos

$$[\alpha] = [\varepsilon_{x_0}] * [\varepsilon_{x_0}] * \cdots * [\varepsilon_{x_0}] = [\varepsilon_{x_0}]$$

□

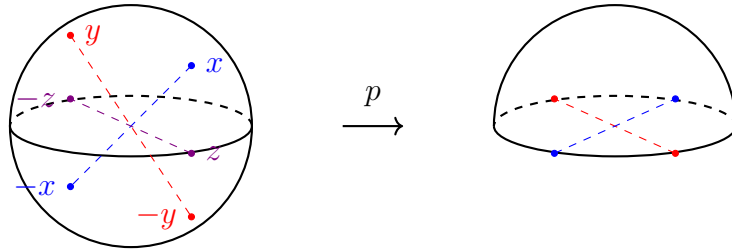
Corolario 1.19.1. Las esferas \mathbb{S}^n para $n \geq 2$ son simplemente conexas. En particular su grupo fundamental es el trivial.

Demostración. Definimos los siguientes conjuntos

$$U = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 1)\} \quad V = \mathbb{S}^n \setminus \{(1, \dots, 0)\}$$

U y V son homeomorfos a \mathbb{R}^n por lo que son simplemente conexos, $\mathbb{S}^n = U \cup V$ y además, como $U \cap V$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ que es arcoconexo (ya que $n \geq 2$), tenemos que $U \cap V$ es arcoconexo. □

Corolario 1.19.2. El grupo fundamental de \mathbb{RP}^n es isomorfo a \mathbb{Z}_2 para $n \geq 2$.



Demostración. Veamos que la aplicación

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{RP}^n \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

es recubridora. Es claro que p es continua y sobreyectiva. Por otro lado, dado cualquier punto $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tenemos que el abierto

$$U_{x_0} = \{x \in \mathbb{S}^n : \langle x, x_0 \rangle \neq 0\}$$

es saturado, es decir, que $p^{-1}(p(U_{x_0})) = U_{x_0}$ y además podemos escribir

$$U_{x_0} = \{x \in \mathbb{S}^n : \langle x, x_0 \rangle > 0\} \cup \{x \in \mathbb{S}^n : \langle x, x_0 \rangle < 0\} = U_{x_0}^+ \cup U_{x_0}^-$$

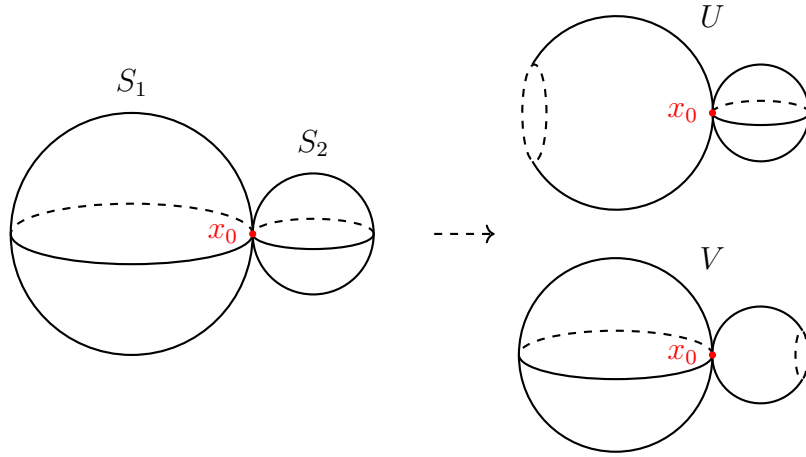
Es fácil probar que $p|_{U_{x_0}^+}$ y $p|_{U_{x_0}^-}$ son homeomorfismos. Entonces la correspondencia del levantamiento

$$\varphi : \pi_1(\mathbb{RP}^n, [a_0]) \rightarrow p^{-1}([a_0]) = \{a_0, -a_0\}$$

es biyectiva (ya que \mathbb{S}^1 es simplemente conexo). Entonces $\pi_1(\mathbb{RP}^n, [a_0])$ solo tiene dos elementos, luego $\pi_1(\mathbb{RP}^n, [a_0]) \cong \mathbb{Z}_2$. \square

Ejemplo.

1. Calculamos el grupo fundamental de dos esferas S_1, S_2 de \mathbb{R}^3 que se cortan en un único punto.



Sea $\{x_0\} = S_1 \cap S_2$ y tomamos $U = X \setminus \{y_1\}$ con $y_1 \in S_1 \setminus \{x_0\}$ y $V = X \setminus \{y_2\}$ con $y_2 \in S_2 \setminus \{x_0\}$. Es claro que $X = U \cup V$ y U, V son abiertos. $U \cap V$ es arcoconexo por ser unión de dos arcoconexos con intersección no vacía $(S_1 \setminus \{y_1\}) \cup (S_2 \setminus \{y_2\})$ ya que

$$S_1 \setminus \{y_1\} \text{ homeomorfo a } \mathbb{R}^2 \Rightarrow S_1 \setminus \{y_1\} \text{ es arcoconexo}$$

$$S_2 \setminus \{y_2\} \text{ homeomorfo a } \mathbb{R}^2 \Rightarrow S_2 \setminus \{y_2\} \text{ es arcoconexo}$$

y que tienen un punto común x_0 . Veamos ahora que U tiene a S_2 por retracto de deformación. Si esto es cierto, entonces

$$\pi_1(U) \stackrel{\text{isom.}}{\cong} \pi_1(S_2) \cong \{0\}$$

Sabemos que $S_1 \setminus \{y_1\}$ es homeomorfo a \mathbb{R}^2 y podemos suponer que la imagen mediante ese homeomorfismo de x_0 es el origen $(0, 0)$. Entonces la composición de este homeomorfismo y la homotopía

$$H(x, t) = (1 - t)x \quad x \in \mathbb{R}^2$$

nos da una homotopía $\hat{H} : (S_1 \setminus \{y_1\}) \times [0, 1] \rightarrow S_1 \setminus \{y_1\}$ tal que $\hat{H}(x_0, t) = x_0$. Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{H} : U \times [0, 1] &\longrightarrow U \\ (x, t) &\longmapsto \begin{cases} \hat{H}(x, t) & \text{si } x \in S_1 \setminus \{y_1\} \\ x & \text{si } x \in S_2 \end{cases} \end{aligned}$$

es una homotopía desde la identidad hasta la que deja fijos a todos los puntos de S_1 , luego S_2 es un retracto de deformación de U y llegamos a que $\pi_1(U) \cong \{0\}$.

Análogamente tenemos que S_1 es un retracto de deformación de V por lo que $\pi_1(V) \cong \{0\}$.

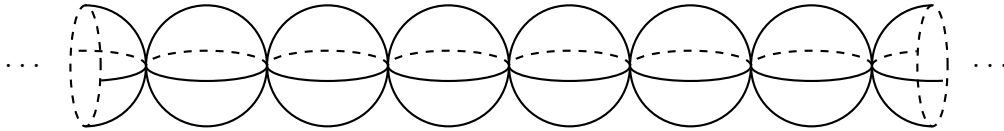
Tenemos entonces que $X = S_1 \cup S_2$ es unión de dos conjuntos U y V simplemente conexos y con intersección arcoconexa. Por el teorema anterior llegamos a que X es simplemente conexo, luego su grupo fundamental es el trivial

$$\pi_1(R_1 \cup R_2) = \{0\}$$

2. Si llamamos $S(x, r)$ a la esfera centrada en $x \in \mathbb{R}^3$ de radio $r > 0$ y consideramos

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} S\left((k, 0, 0), \frac{1}{2}\right)$$

veamos que su grupo fundamental es el trivial.

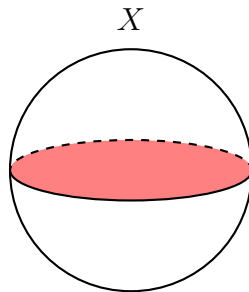


Para ello, con una simple inducción se puede demostrar que esto es cierto para una cantidad finita de esferas usando el ejemplo anterior. En este caso tenemos una cantidad infinita de esferas pero como un lazo es un compacto en \mathbb{R}^3 , tiene que caer en una unión finita de esferas (unidas dos a dos por un único punto) por lo que se podrá reducir al trivial.

3. Vamos a definir el siguiente conjunto

$$X = \mathbb{S}^2 \cup \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

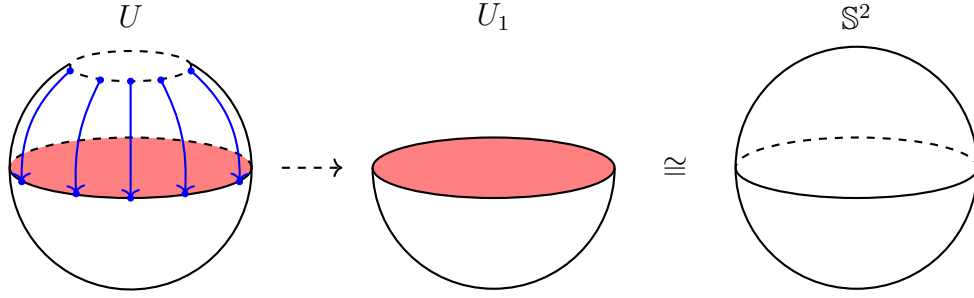
y veamos cual es su grupo fundamental.



Para ello tomamos $U = X \setminus \{(0, 0, 1)\}$ que es retracto de deformación de U_1 donde

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 : x_3 \leq 0\} \cup \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

y además U_1 es homeomorfo a \mathbb{S}^2 por lo que $\pi_1(U)$ es el trivial.



De forma análoga si consideramos $V = X \setminus \{(0, 0, -1)\}$ se tiene que $\pi_1(V)$ es trivial. Claramente se tiene que $U \cap V$ es arcoconexo⁸ y por el teorema anterior se tiene que X es simplemente conexo, luego su grupo fundamental es el trivial.

Lema 1.20. Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicación continua que conserva antípodas, es decir, $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Si consideramos el lazo

$$\alpha(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$$

entonces se tiene que el grado del lazo $f \circ \alpha$ es impar.

Demostración. La curva α la podemos ver como $\alpha = \alpha_1 * \alpha_2$ con

$$\begin{aligned}\alpha_1(s) &= \alpha\left(\frac{s}{2}\right) \quad s \in [0, 1] \\ \alpha_2(s) &= \alpha\left(\frac{s+1}{2}\right) \quad s \in [0, 1]\end{aligned}$$

Como $(f \circ \alpha_1)$ es un arco que comienza en $(1, 0)$ y acaba en $(-1, 0)$, entonces su levantamiento por p lo podemos elegir para que comience en 0 (ya que $p(0) = (1, 0)$) y un punto final $(\widetilde{f \circ \alpha_1})(1)$ que ha de cumplir que $p((\widetilde{f \circ \alpha_1})(1)) = (-1, 0)$. Es decir,

$$\begin{aligned}\cos(2\pi((\widetilde{f \circ \alpha_1})(1))) &= -1 \\ \sin(2\pi((\widetilde{f \circ \alpha_1})(1))) &= 0\end{aligned}$$

y tenemos que $(\widetilde{f \circ \alpha})(1) = k + \frac{1}{2}$ para un cierto $k \in \mathbb{Z}$. Veamos que $\widetilde{f \circ \alpha}$ es la siguiente curva

$$\widetilde{f \circ \alpha} = \widetilde{f \circ \alpha_1} * \gamma$$

donde $\gamma(s) = k + \frac{1}{2} + \widetilde{f \circ \alpha_1}$.

Tenemos que comprobar que $\widetilde{f \circ \alpha_1} * \gamma$ está bien definida, lo cual es claro porque

$$(\widetilde{f \circ \alpha_1})(1) = k + \frac{1}{2} = k + \frac{1}{2} + (\widetilde{f \circ \alpha_1})(0) = \gamma(0)$$

⁸en un examen habrá que demostrarlo de forma más rigurosa

y que $p(\widetilde{f \circ \alpha_1} * \gamma) = f \circ \alpha$. Tenemos que

$$p((\widetilde{f \circ \alpha_1}) * \gamma) = p(\widetilde{f \circ \alpha_1}) * p(\gamma) = (f \circ \alpha_1) * p(\gamma)$$

y si desarrollamos tenemos

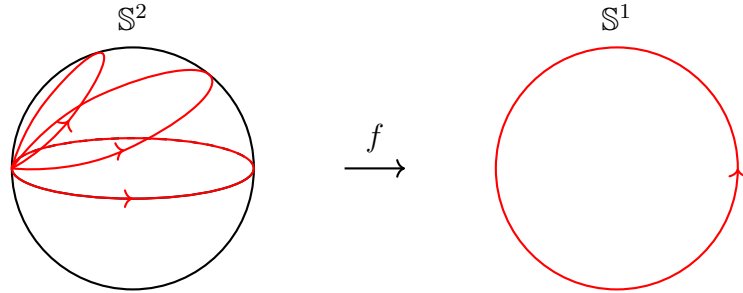
$$\begin{aligned} p(\gamma) &= p\left(k + \frac{1}{2} + (\widetilde{f \circ \alpha_1})(s)\right) = \\ &= \left(\cos\left(2\pi\left(k + \frac{1}{2} + (\widetilde{f \circ \alpha_1})(s)\right)\right), \sin\left(2\pi\left(k + \frac{1}{2} + (\widetilde{f \circ \alpha_1})(s)\right)\right)\right) = \\ &= (\cos(\pi + 2\pi(\widetilde{f \circ \alpha_1})(s)), \sin(\pi + 2\pi(\widetilde{f \circ \alpha_1})(s))) = \\ &= -(\cos(2\pi(\widetilde{f \circ \alpha_1})(s)), \sin(2\pi(\widetilde{f \circ \alpha_1})(s))) = \\ &= -p((\widetilde{f \circ \alpha_1})(s)) = -(f \circ \alpha_1)(s) \stackrel{hip.}{=} f(-\alpha_1(s)) = \\ &= f(\alpha_2(s)) \end{aligned}$$

y llegamos a que $p(\widetilde{f \circ \alpha_1} * \gamma) = (f \circ \alpha_1) * (f \circ \alpha_2) = f \circ \alpha$. Por tanto finalmente tenemos

$$\begin{aligned} \deg(f \circ \alpha) &= (\widetilde{f \circ \alpha})(1) = \gamma(1) = k + \frac{1}{2} + (\widetilde{f \circ \alpha_1})(1) = \\ &= \left(k + \frac{1}{2}\right) + \left(k + \frac{1}{2}\right) = 2k + 1 \text{ impar} \end{aligned}$$

□

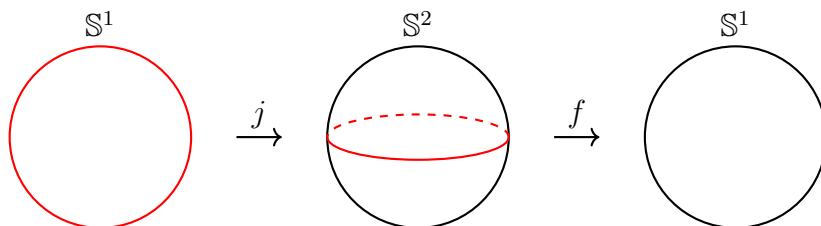
Lema 1.21. *No existe una aplicación continua $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ que conserve antípodos, es decir, tal que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$.*



Demostración. Supongamos que existiese $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ continua con $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in \mathbb{S}^2$. Entonces consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} j : \quad \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (y, x) \end{aligned}$$

que es continua.



Tenemos además que $f \circ j : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ conserva antípodas (salvo rotación de \mathbb{S}^1 podemos suponer que $(f \circ j)(1, 0) = (1, 0)$). Por el lema anterior tenemos que existe un lazo α tal que $\deg((f \circ j)(\alpha))$ es impar. En particular se tiene que

$$\begin{aligned} (f \circ j)_*([\alpha]) &\neq [\varepsilon_{(1,0)}] \\ (f \circ j)_*([\alpha]) &= (f_* \circ j_*)([\alpha]) = [\varepsilon_{(1,0)}] \end{aligned}$$

lo que contradice la existencia de f continua. \square

Teorema 1.22 (Teorema de Borsuk-Ulam). *Sea $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación continua. Entonces existe $x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$.*

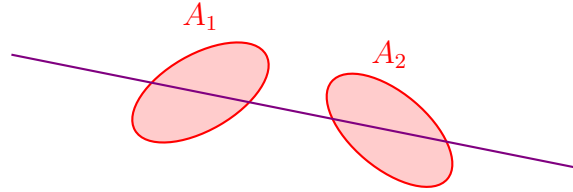
Demostración. Si no existiese $x \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x) = f(-x)$, entonces podríamos considerar

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|} \text{ continua de } \mathbb{S}^2 \text{ en } \mathbb{S}^1$$

y se tendría que $g(-x) = -g(x)$, lo que contradice el lema anterior. \square

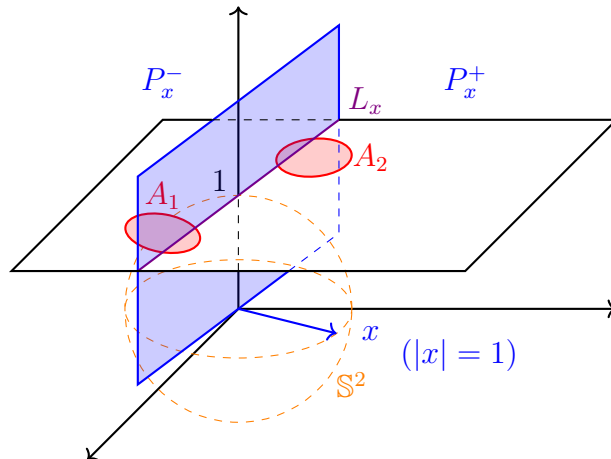
Observación. Del teorema de Borsuk-Ulam se deduce que no existen aplicaciones continuas e inyectivas de \mathbb{S}^2 en \mathbb{R}^2 . Se deduce que \mathbb{S}^2 no es homeomorfo a ningún subconjunto de \mathbb{R}^2 .

Teorema 1.23 (de las tortitas). *Sean A_1 y A_2 dos compactos de \mathbb{R}^2 , entonces existe una única recta que divide a ambos a la vez dejando la mitad del área de cada uno a cada lado de la recta.*



Demostración. Identificamos \mathbb{R}^2 dentro de \mathbb{R}^3 como $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$. Para cada $x \in \mathbb{S}^2$ consideramos

$$\begin{aligned} P_x^+ &= \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, x \rangle > 0\} \\ P_x^- &= \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, x \rangle < 0\} \\ L_x &= \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, x \rangle = 0\} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) \end{aligned}$$



Observamos que si $x \neq \pm(0, 0, 1)$, entonces L_x es una recta. En otro caso, si $x = \pm(0, 0, 1)$, entonces $L_x = \emptyset$. Observemos además que $P_x^+ = P_{-x}^-$. Además, si $\text{area}(A_1) = \text{area}(A_2) = 0$, entonces cualquier recta nos vale. Vamos a suponer entonces que $\text{area}(A_1) > 0$ y definimos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (\text{area}(A_1 \cap P_x^+), \text{area}(A_2 \cap P_x^+)) \end{aligned}$$

Como f es continua, entonces el teorema de Borsuk Ulam $\exists x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$, es decir, tal que

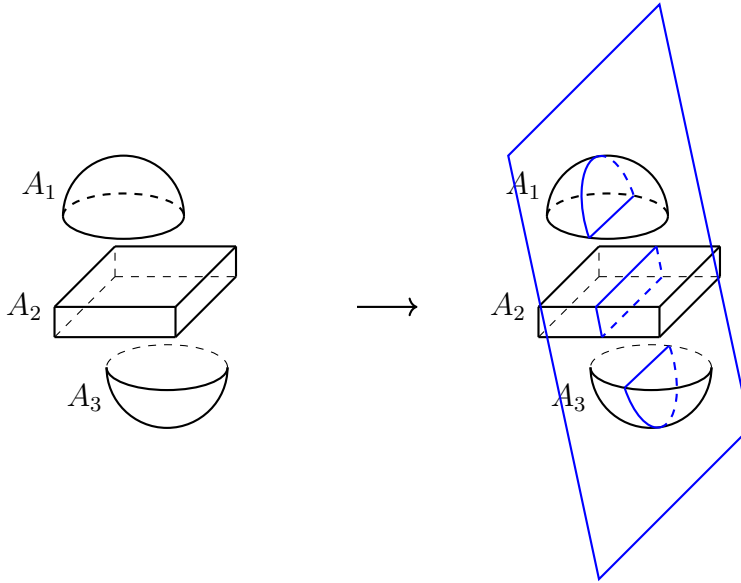
$$(\text{area}(A_1 \cap P_{x_0}^+), \text{area}(A_2 \cap P_{x_0}^+)) = (\text{area}(A_1 \cap P_{x_0}^-), \text{area}(A_2 \cap P_{x_0}^-))$$

por lo que llegamos a que

$$\begin{cases} \text{area}(A_1 \cap P_{x_0}^+) = \text{area}(A_1 \cap P_{x_0}^-) \\ \text{area}(A_2 \cap P_{x_0}^+) = \text{area}(A_2 \cap P_{x_0}^-) \end{cases}$$

(recordemos que $x_0 \neq (0, 0, 1)$). □

Teorema 1.24 (del bocadillo de jamón). *Sean A_1, A_2, A_3 tres compactos en \mathbb{R}^3 , entonces existe un plano que divide a la vez a cada uno de ellos en dos partes de igual volumen.*



Podemos interpretar este resultado geométicamente como que se tienen 3 volúmenes: A_1 (la tapa superior de pan), A_2 (el jamón) y A_3 (la tapa inferior de pan).

Entonces existe un corte (plano) que divide a todos los volúmenes por la mitad (se pueden dividir todas las partes del “bocadillo” exactamente por la mitad con un único corte).

1.8. El teorema de Seifert-van Kampen

En primer lugar fijaremos los preliminares algebraicos necesarios para estudiar el teorema relativo a esta sección. Utilizaremos la notación multiplicativa de grupos que facilitará su comprensión.

Notación. Dado un grupo (G, \cdot) denotaremos por e a su elemento neutro y para cada $g \in G$ usaremos la notación g^{-1} para denotar a su inverso.

Dado $n \in \mathbb{Z}$ denotaremos por g^n a

$$g^n = \begin{cases} g \cdot \overset{(n)}{\dots} \cdot g & \text{si } n \geq 1 \\ e & \text{si } n = 0 \\ g^{-1} \cdot \overset{(n)}{\dots} \cdot g^{-1} & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$$

Recordemos que $H \subseteq G$ es un subgrupo de G si $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$ para todo $h_1, h_2 \in H$.

Si H es un subgrupo de G lo denotaremos por $H < G$. Si además se tiene que $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$ para todo $g \in G, \forall h \in H$ se dice que H es un subgrupo normal. En este caso lo denotamos por $H \triangleleft G$.

1.8.1. Grupo cociente

Definición 1.17. Dado H un subgrupo de G definimos la relación de equivalencia R dada por

$$g_1 R g_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} g_1 \cdot g_2^{-1} \in H \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

Dado $g \in G$ denotamos por

$$[g] = H \cdot g = \{h \cdot g : h \in H\}$$

a la clase de equivalencia de g bajo la relación de equivalencia R .

Observación. Es importante observar que la definición

$$[g_1] \cdot [g_2] \stackrel{\text{def}}{=} [g_1 \cdot g_2]$$

no está bien hecha para $H < G$ cualquiera. De hecho solo estaría bien definida si y solo si $H \triangleleft G$. En este caso podemos considerar el conjunto cociente

$$G/H = \{[g] : g \in G\}$$

que con la operación anterior tiene la estructura de grupo.

Ejemplo. Para $G = \mathbb{Z}$ y $H = n\mathbb{Z}$ con $n \geq 2$ entero tendremos que $H \triangleleft G$ por ser H conmutativo. Además se tendrá que

$$G/H \cong \mathbb{Z}_n$$

1.8.2. Subgrupo normal generado por un conjunto

Observación. Dado un grupo G , la intersección cualquiera de subgrupos normales de G es un subgrupo normal en G .

Definición 1.18. Dado $C \subseteq G$ subconjunto cualquiera de G no vacío, existe el menor subgrupo normal que lo contiene (dado por la intersección de todos los subgrupos normales que contienen a C , que al menos es el total). Lo notaremos por $\langle C \rangle_N$ y diremos que es el **subgrupo normal de G generado por C** .

Observación. Se puede caracterizar el subgrupo normal de G generado por C de la siguiente forma:

$$g \in \langle C \rangle_N \iff g = (g_1 \cdot c_1^{n_1} \cdot g_1^{-1}) \cdot (g_2 \cdot c_2^{n_2} \cdot g_2^{-1}) \cdot \dots \cdot (g_k \cdot c_k^{n_k} \cdot g_k^{-1})$$

donde $g_i \in G, c_i \in C, n_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i \in 1, 2, \dots, k$

1.8.3. Producto libre de grupos

Definición 1.19. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos donde todos los elementos de la familia son disjuntos, es decir, $G_i \cap G_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Denotamos por e_i al elemento neutro de G_i .

Llamamos **letra** a un elemento $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$ de cualquiera de los grupos.

Llamamos **palabra** a una yuxtaposición de letras, $w = x_1 x_2 \dots x_m$ donde m es un entero no negativo. Si $m = 0$ se le suele llamar **palabra vacía** y la denotaremos por $w = 1$. Al número m lo llamaremos **longitud de la palabra**.

Llamaremos **sílaba** a cada palabra con 2 letras.

Diremos que 2 palabras $w_1 = x_1 x_2 \dots x_m$ y $w_2 = y_1 y_2 \dots y_k$ son iguales si $m = k$ y $x_i = y_i$ para todo $i \in 1, 2, \dots, m = k$.

Definición 1.20. En el conjunto de todas las palabras definimos la aplicación yuxtaposición que a cada dos palabras $w_1 = x_1 x_2 \dots x_m$ y $w_2 = y_1 y_2 \dots y_k$ le hace corresponder la nueva palabra

$$w_1 w_2 = x_1 x_2 \dots x_m y_1 y_2 \dots y_k$$

Esta operación tiene un elemento neutro ($w = 1$) y es asociativa.

Definición 1.21. Dada una palabra $w = x_1 x_2 \dots x_m$ diremos que es **reducida** si verifica las siguientes propiedades:

1. No existen dos letras consecutivas del mismo grupo.
2. No aparece ningún elemento neutro e_i .

Observación. Dada una palabra cualquiera $w = x_1 x_2 \dots x_m$ podemos reducirla con el siguiente procedimiento:

1. Cuando hay dos letras consecutivas del mismo grupo se multiplican usando la operación de ese grupo.
2. Se eliminan todos los elementos neutros e_i de la palabra.

Definición 1.22. En el conjunto de las palabras reducidas podemos definir la operación yuxtaposición + reducción. Esto dota al conjunto de las palabras reducidas de estructura de grupo. A este grupo se le suele denotar por $\ast_{i \in I} G_i$ y se llama **producto libre** de los G_i .

Ejemplo. Consideramos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} G_1 &= \mathbb{Z}_2 = \{e_1, a\} : e_1 \text{ es el neutro, } a \cdot a = e_1 \\ G_2 &= \mathbb{Z}_2 = \{e_2, b\} : e_2 \text{ es el neutro, } b \cdot b = e_2 \end{aligned}$$

y las siguientes palabras:

$$\begin{aligned} w_1 &= e_1 a a e_2 a b \\ w_2 &= b e_2 e_1 a b \end{aligned}$$

y tendríamos

$$\begin{aligned} w_1 &\sim a a e_2 a b \sim e_1 e_2 a b \sim a b \\ w_2 &\sim b a b \end{aligned}$$

Si pensamos en el conjunto de las palabras reducidas tenemos

$$G_1 * G_2 = \{1, a, b, ab, ba, aba, bab, \dots\}$$

donde

$$a^{-1} = a, \quad b^{-1} = b, \quad (ab)^{-1} = ba, \quad (aba)^{-1} = aba, \quad (bab)^{-1} = bab$$

Lema 1.25 (Propiedad universal del producto libre). *Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos disjuntos⁹. Consideramos una familia de homeomorfismos*

$$f_i : G_i \rightarrow G$$

sobre un grupo G fijo. Entonces existe un único homomorfismo

$$f : *_{i \in I} G_i \rightarrow G$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{f_i} & G \\ & \searrow h_i & \nearrow f \\ & *_{i \in I} G_i & \end{array}$$

donde $h_{i_0} : G_{i_0} \rightarrow *_{i \in I} G_i$ es el homomorfismo inclusión. En la práctica se tendrá que

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_{i_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{i_n}(x_n)$$

donde $x_k \in G_{i_k}$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$.

1.8.4. Grupos libres y presentaciones de grupos

Vamos a ver ahora productos libres donde cada G_i es isomorfo a \mathbb{Z} . Sea $S = \{a\}$ un conjunto con un único elemento. Definimos el conjunto

$$F(a) = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$$

donde definimos además la operación

$$a^k \cdot a^l := a^{k+l}$$

De esta forma, $(F(a), \cdot)$ es isomorfo a \mathbb{Z}

$$a^k \leftrightarrow k$$

⁹dos a dos

Definición 1.23. A $F(a)$ se le suele llamar el **grupo libre de rango 1** generado por a .

Definición 1.24. Dado un conjunto S cualquiera no vacío definimos $F(S)$ como

$$F(S) = \ast_{a \in S} F(a)$$

y se le suele llamar **grupo libre** generado por S .

Ejemplo. $F(a, b)$ tiene como elementos:

$$a^2, b^3, ab, ba \ (ab \neq ba), a^3b^7a^8, a^{-2}b^{-1}, 1, \dots$$

Algunos de los elementos que no están en el grupo libre son:

$$a^0, a^2a^3b^2b^7$$

Definición 1.25. Cuando el conjunto $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ es finito con n elementos se suele decir que $F(S)$ es el **grupo libre de rango n** sobre S y se suele denotar por $\mathbb{Z} \ast \dots \ast \mathbb{Z}$.

Observación. Esto se puede hacer ya que el nombre de los elementos no es importante, y por ejemplo se tendría que $F(a, b) \cong F(c, d)$.

Corolario 1.25.1 (Propiedad universal del grupo libre). *Dados S un conjunto no vacío, G un grupo y $\rho : S \rightarrow G$ una aplicación, existe un único homomorfismo*

$$f : F(S) \rightarrow G$$

tal que $f|_S = \rho$. En la práctica se tendrá que

$$f(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}) = \rho(a_1)^{n_1} \cdot \rho(a_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot \rho(a_k)^{n_k}$$

con $a_i \in S$ y $n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Observación. Podemos considerar $\rho = Id_G$ y aplicando el primer teorema de isomorfía sobre la f que da la propiedad universal tenemos que

$$G \cong \frac{F(G)}{\ker(f)}$$

De esta forma se deduce que todo grupo G puede verse como un grupo libre sobre un subgrupo normal suyo.

Definición 1.26. Sean S un conjunto no vacío y $F(S)$ el grupo libre sobre S . Dado un subconjunto no vacío $R \subseteq F(S)$. Entonces al grupo cociente

$$\frac{F(S)}{\langle R \rangle_N}$$

lo denotaremos de la forma $\langle S|R \rangle$ o bien $\langle S; R \rangle$. El resultado anterior nos dice que todo grupo G es de la forma $\langle S; R \rangle$ para ciertos S y R , donde S serán los generadores y R las relaciones. A $\langle S; R \rangle$ se le suele llamar **presentación**.

Ejemplo.

1. $\langle a; a^n \rangle$ es una presentación de \mathbb{Z}_n

$$\frac{F(a)}{\langle a^n \rangle_N} = \frac{\{a^k : k \in \mathbb{Z}\}}{\{a^{ln} : l \in \mathbb{Z}\}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_n$$

2. $\langle a; \emptyset \rangle$ es una presentación de \mathbb{Z} .
3. $\langle a, b; b \rangle$ es una presentación de \mathbb{Z} ya que

$$\frac{F(a, b)}{\langle b \rangle_N} \cong F(a) \cong \mathbb{Z}$$

Esto es más fácil de ver si entendemos que el cociente lleva al denominador al elemento neutro por lo que un elemento de este grupo será $[a^2a^3b^{-2}ab^4a^5] = [a^2a^3aa^5] = [a^9]$

4. $\langle a, b; a^n, b^m \rangle$

$$\frac{F(a, b)}{\langle \{a^n, b^m\} \rangle} \cong \mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$$

Veámoslo para un caso particular, por ejemplo $\langle a, b; a^2, b^3 \rangle$. Consideramos el elemento

$$[b^7a^5b^{-2}a^{-4}] = [(b^3b^3b)(a^2a^2a)b^{-2}((a^2)^{-1}(a^2)^{-1})] = [bab^{-2}]$$

5. $\langle a, b; aba^{-1}b^{-1} \rangle$

$$\frac{F(a, b)}{\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Veamos algunos casos particulares para entenderlo mejor

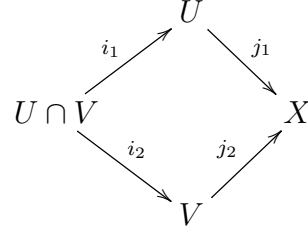
$$\begin{aligned} [aba^{-1}b^{-1}] &= [1] \\ [ab] &= [ba] \\ [a^3b^7a^2b^5] &= [a^5b^{12}] \end{aligned}$$

1.8.5. Enunciado del teorema

Teorema 1.26 (Seifert-van Kampen). Sean X un e.t. y U, V dos abiertos suyos cumpliendo:

1. $X = U \cup V$
2. U, V y $U \cap V$ son arcoconexos

Si denotamos por i_1, i_2, j_1, j_2 las inclusiones naturales dadas por el diagrama



y $x_0 \in U \cap V$, entonces el homomorfismo

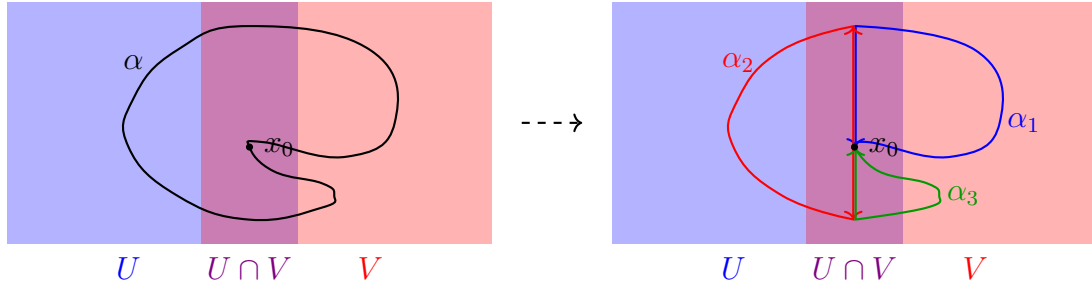
$$j : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

que extiende a j_{i_*} y j_{2*} es sobreyectivo. Además, el núcleo viene dado por el subgrupo normal generado por

$$R = \{i_{1*}(g)^{-1}i_{2*}(g) : g \in \pi_1(U \cap V, x_0)\}$$

Por tanto,

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \frac{\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)}{\langle R \rangle_N}$$



$$[\alpha]_X = [\alpha_1]_X * [\alpha_2]_X * [\alpha_3]_X$$

Si consideramos ahora $g = [\beta]_{U \cap V}$ tendríamos que

$$i_{1*}(g)^{-1} = [\beta]_U^{-1} \text{ y } i_{2*}(g) = [\beta]_V$$

Observación. Algunos casos especiales a considerar son los siguientes:

1. Si U y V son simplemente conexos, caso que ya estudiamos anteriormente y que resultó en que X es simplemente conexo.
2. Si $U \cap V$ es simplemente conexo, entonces

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \pi_1(U, x_0) * \pi_2(V, x_0)$$

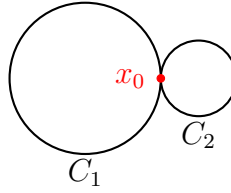
3. Si U es simplemente conexo, entonces

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \frac{\pi_1(V, x_0)}{\langle R \rangle_N}$$

donde $R = \{i_{2*}(g) : g \in \pi_1(U \cap V, x_0)\}$

Ejemplo.

1. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias de \mathbb{R}^2 que se tocan en un único punto x_0 . Queremos calcular el grupo fundamental de $C_1 \cup C_2$.



Tomamos $x_1 \in C_1 \setminus \{x_0\}$ y $x_2 \in C_2 \setminus \{x_0\}$. Consideramos entonces los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} U &= X \setminus \{x_1\} \\ V &= X \setminus \{x_2\} \end{aligned}$$

y tenemos que U es abierto y arcoconexo (ya que C_2 es arcoconexo, $C_1 \setminus \{x_1\}$ es arcoconexo y se intersecan en un punto x_0) y de forma análoga V también es abierto y arcoconexo. Es por esto que $U \cap V$ es arcoconexo (dos abiertos arcoconexos que se intersecan).

Tenemos que C_2 es retracto de deformación de U por lo que

$$\pi_1(U, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \pi_1(C_2, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \mathbb{Z}$$

De la misma forma

$$\pi_1(V, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \pi_1(C_1, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \mathbb{Z}$$

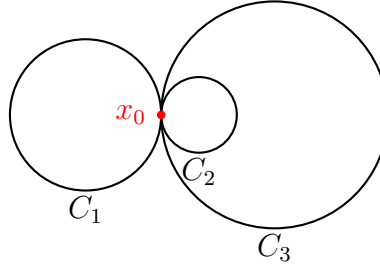
Además, $\{x_0\}$ es retracto de deformación de $U \cap V$ por lo que

$$\pi_1(U \cap V, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \{0\}$$

Por el teorema de Seifert-van Kampen tenemos que

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

2. Sean C_1, C_2, C_3 tres circunferencias que solo se tocan en un punto común $x_0 \in \mathbb{R}^2$.



Tomamos $x_1 \in C_1 \setminus \{x_0\}$, $x_2 \in C_2 \setminus \{x_0\}$ y consideramos

$$U = X \setminus \{x_1\}$$

$$V = X \setminus \{x_2\}$$

Tenemos con el mismo razonamiento del apartado anterior que U, V son abiertos arcoconexos y $U \cap V$ arcoconexo. Como U tiene a $C_2 \cup C_3$ como retracts de deformación suyo tendremos que¹⁰

$$\pi_1(U, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Sus generadores son $[\beta]_U$ y $[\gamma]_U$. Como V tiene a $C_1 \cup C_3$ como retracts de deformación suyo se tendrá que

$$\pi_1(V, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

con generadores $[\alpha]_V$ y $[\gamma]_V$. Tendremos también que

$$\pi_1(U \cap V, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \mathbb{Z}$$

ya que C_3 es retracts de deformación de $U \cap V$. Su generador es $[\gamma]_{U \cap V}$.

En este punto podríamos pensar que

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \frac{(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})}{\mathbb{Z}}$$

y que podríamos “cancelar” un \mathbb{Z} resultando en que

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

y aunque en este caso de pura casualidad se verifica, esto es **ABSOLUTAMENTE INCORRECTO** en general.

¹⁰del apartado anterior

El razonamiento correcto sería el siguiente. Sabemos que

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \frac{\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)}{\langle R \rangle_N}$$

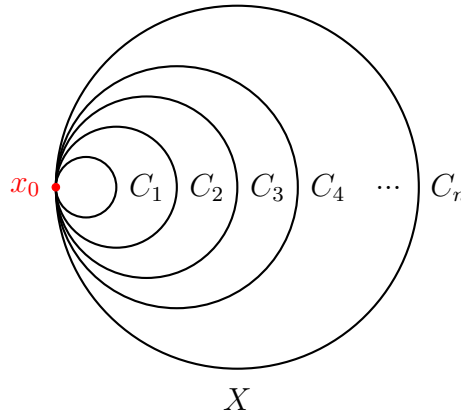
donde $R = \{i_{1*}(g)^{-1}i_{2*}(g) : g \in \pi_1(U \cap V, x_0)\}$. Tenemos entonces que

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \langle [\beta]_U, [\gamma]_U, [\alpha]_V, [\gamma]_V; i_{1*}([\gamma]_{U \cap V})^{-1}i_{2*}([\gamma]_{U \cap V}) \rangle$$

donde $i_{1*}([\gamma]_{U \cap V})^{-1}i_{2*}([\gamma]_{U \cap V}) = [\gamma]_U^{-1}[\gamma]_V$ será el elemento neutro, luego $[\gamma]_U = [\gamma]_V$ y tendremos solo 3 generadores. Por tanto podemos concluir (con algo de intuición) que

$$\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

3. Consideramos n circunferencias C_1, \dots, C_n en \mathbb{R}^n tal que se tocan entre sí en un único punto x_0 .

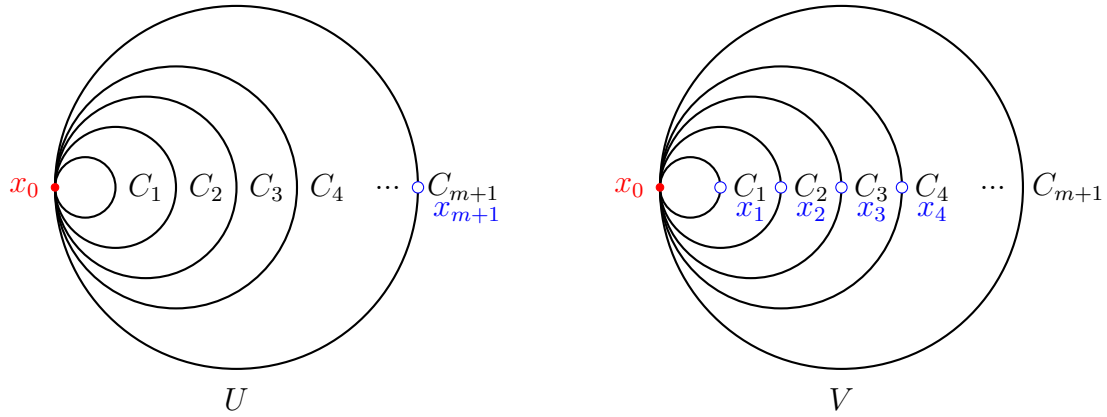


Vamos a demostrar que $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ con $X = \bigcup_{k=1}^n C_k$ donde el conjunto de generadores son los lazos basados en x_0 y que dan una vuelta alrededor de cada circunferencia.

Lo vemos por inducción. El caso base, $n = 2$ se ha estudiado en los apartados anteriores. Suponemos que el resultado es cierto para $n = m$ y lo probamos para $n = m + 1$. Para ello, consideramos los siguientes conjuntos

$$U = X \setminus \{x_{m+1}\} \text{ con } x_{m+1} \in C_{m+1} \setminus \{x_0\}$$

$$V = X \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \text{ con } x_i \in C_i \setminus \{x_0\} \quad \forall i \in 1, \dots, m$$



Es claro que $X = U \cup V$ y además, U , V y $U \cap V$ son arcoconexos. Es fácil ver que U tiene por retracto de deformación a $\bigcup_{k=1}^m C_k$, es decir, podemos retraer la circunferencia C_{m+1} a x_0 y dejar el resto igual. Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\pi_1(U, x_0) \cong \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$$

Además, V tiene por retracto de deformación a C_{m+1} (se puede ver pensando en retraer todas las C_i con $i = 1, \dots, m$ a x_0), por lo que

$$\pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z}$$

Si consideramos $U \cap V$ tenemos que todas las circunferencias se pueden retraer ahora al punto x_0 por lo que este será retracto de deformación y tenemos que

$$\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \{0\}$$

Por el teorema de Seifert-van Kampen tenemos que

$$\pi_1(X, x_0) \cong (\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}) * \mathbb{Z} = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$$

4. Consideramos en \mathbb{R}^2 el siguiente conjunto para $n \in \mathbb{N}$

$$X_n = (\{-1, 1\} \times [0, n]) \cup \left(\bigcup_{k=0}^n ([-1, 1] \times \{k\}) \right)$$

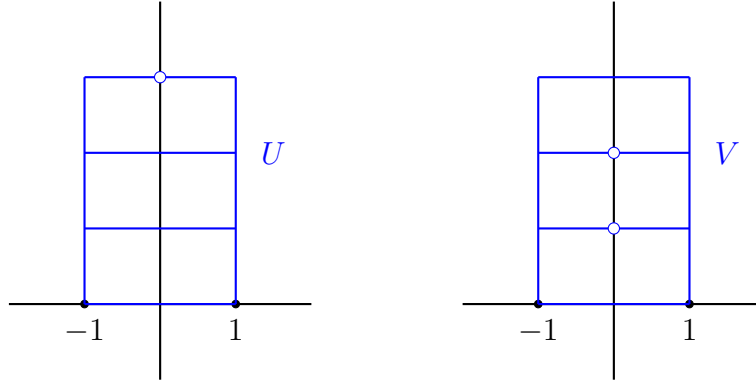


Veámos cuál es su grupo fundamental aplicando de nuevo una inducción sobre n . Para $n = 1$, X es homeomorfo a \mathbb{S}^1 , luego $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$.

Suponemos que para $n = m$ ocurre que $\pi_1(X_{m+1}) \cong \mathbb{Z} * \overset{(m)}{\dots} * \mathbb{Z}$ y demostramos ahora que $\pi_1(X_{m+1}) \cong \mathbb{Z} * \overset{(m)}{\dots} * \mathbb{Z}$. Considremos los siguientes conjuntos

$$U = X_{m+1} \setminus \{(0, m+1)\}$$

$$V = X_{m+1} \setminus \{(0, 1), \dots, (0, m)\}$$



Es claro que U, V son abiertos arcoconexos y $U \cap V$ es arcoconexo y $X_{m+1} = U \cup V$. Tenemos que U tiene por retracto de deformación a X_m (podemos pensar en llevar el rectángulo superior, que está abierto, a las esquinas del penúltimo rectángulo superior) por lo que

$$\pi_1(U) \cong \mathbb{Z} * \overset{(m)}{\dots} * \mathbb{Z}$$

V tiene por retracto de deformación al rectángulo exterior (ya que todas las barras horizontales excepto la primera y la última están abiertas por lo que se pueden retraer llevándolas a los laterales de forma que quede solo el rectángulo exterior). Dicho rectángulo será

$$(\{-1, 1\} \times [0, m+1]) \cup ([-1, 1] \times \{0, m+1\})$$

que es una circunferencia topológica por lo que

$$\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$$

Si pensamos ahora en la intersección $U \cap V$ podemos ver con un razonamiento similar a los usados para U y V que se puede retraer $U \cap V$ al origen $(0, 0)$, luego

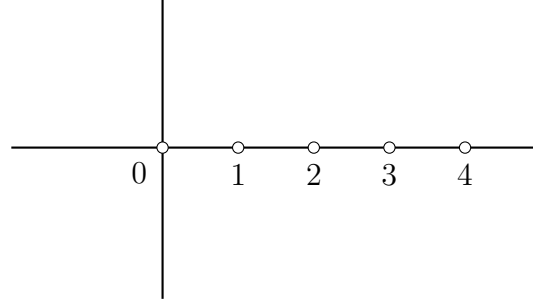
$$\pi_1(U \cap V) \cong \{0\}$$

Por el teorema de Seifert-van Kampen tenemos que

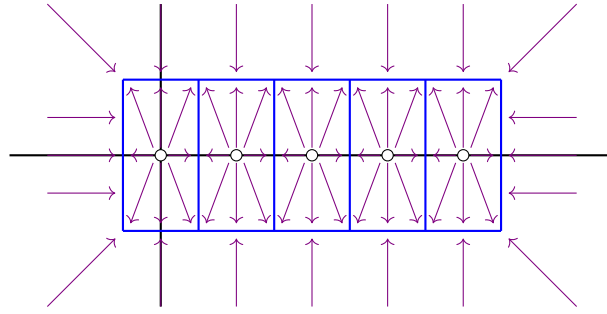
$$\pi_1(X_{m+1}) \cong (\mathbb{Z} * \overset{(m)}{\dots} * \mathbb{Z}) * \mathbb{Z} = \mathbb{Z} * \overset{(m+1)}{\dots} * \mathbb{Z}$$

5. Vamos a considerar el siguiente conjunto

$$Y_n = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0), \dots, (n, 0)\}$$



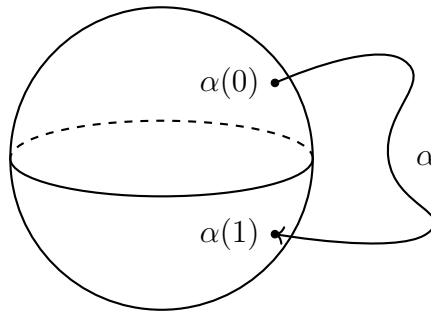
Podemos pensar en un retractor de deformación suyo y fácilmente llegamos a que X_{n+1} del apartado anterior (rotado y colocado adecuadamente) es retractor de deformación viéndolo de la siguiente forma:



Por tanto tenemos que

$$\pi_1(Y_n) \cong \mathbb{Z} * \overset{(n+1)}{\dots} * \mathbb{Z}$$

6. Sea $X = \mathbb{S}^2 \cup \text{Im}(\alpha([0, 1])) \subseteq \mathbb{R}^3$ donde $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un arco inyectivo con $\|\alpha(0)\| = 1 = \|\alpha(1)\|$ y $\|\alpha(t)\| \neq 1$ para $t \in (0, 1)$.



Seleccionamos los siguientes conjuntos

$$U = X \setminus \{\alpha(1/2)\}$$

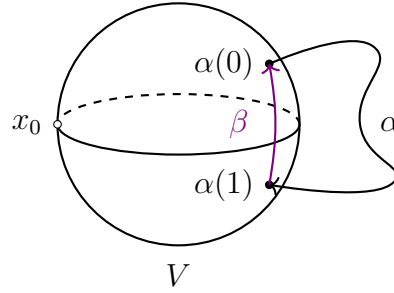
$$V = X \setminus \{x_0\} \text{ con } x_0 \in \mathbb{S}^2 \setminus \{\alpha(0), \alpha(1)\}$$



Es claro que U y V son abiertos con $X = U \cup V$. También lo es que U, V y $U \cap V$ son arcoconexos. Además, se puede ver que \mathbb{S}^2 es retracto de deformación de U (llevando la mitad de α a $\alpha(0)$ y la otra mitad a $\alpha(1)$) por lo que

$$\pi_1(U) \cong \pi_1(\mathbb{S}) \cong \{0\}$$

Consideramos ahora un arco β en \mathbb{S}^2 tal que $\beta(0) = \alpha(1)$ y $\beta(1) = \alpha(0)$



Para V se puede ver que $Im(\alpha * \beta) = Im(\alpha) \cup Im(\beta)$ es retracto de deformación (llevando la esfera a la imagen de β , abriéndola por x_0) y como $Im(\alpha * \beta)$ es una circunferencia topológica tenemos que

$$\pi_1(V) \cong \pi_1(Im(\alpha * \beta)) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

En el caso de la intersección podemos unir ambas ideas y podemos retraer $U \cap V$ a $Im(\beta)$ que es un segmento topológico por lo que

$$\pi_1(U \cap V) \cong \{0\}$$

Por el teorema de Seifert-van Kampen tenemos que

$$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$$

2. Espacios Recubridores

Observación. A lo largo de este tema supondremos que todos los espacios topológicos son conexos y localmente arcoconexos. En particular estos espacios son siempre arcoconexos.

2.1. Levantamiento de aplicaciones

Observación. Vamos a tener en cuenta que si X es un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo, entonces todo abierto suyo cumple que cada componente arcoconexa es abierta.

Demostración. Si O es abierto y A es una componente arcoconexa de O , entonces dado $a \in A$, como X es localmente arcoconexo tendremos que existe un U entorno arcoconexo de a tal que $U \subseteq O$. Como A es el mayor arcoconexo en O que contiene al punto a tendremos que $U \subseteq A$, luego A es abierto. \square

Esto lo vamos a usar para el caso en el que tenemos dada una aplicación recubridora $p : R \rightarrow B$ y un punto $b_0 \in B$. Entonces tendremos que existe un abierto regularmente recubierto O que contiene a b_0 . Restringiéndonos a la componente arcoconexa de O que contiene a b_0 podremos suponer que el entorno regularmente recubierto es abierto y arcoconexo.

Lema 2.1 (Unicidad del levantamiento). *Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $f_1, f_2 : X \rightarrow R$ continuas tales que*

$$p \circ f_1 = p \circ f_2$$

Si existe un $x_0 \in X$ tal que $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, entonces $f_1 = f_2$.

Demostración. Para la demostración solo se necesita que X sea conexo y no necesariamente localmente arcoconexo.

Partimos de la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow^{f_1, f_2} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f=p \circ f_1 = p \circ f_2} & B \end{array}$$

Consideramos el siguiente conjunto

$$Y = \{x \in X : f_1(x) = f_2(x)\}$$

Como X es conexo y tenemos que $Y \neq \emptyset$, ya que por hipótesis $x_0 \in Y$, si probamos que Y es abierto y cerrado tendremos que $Y = X$, es decir, $f_1 = f_2$.

Veamos que Y es abierto. Para ello tomamos $y \in Y$, es decir, un punto y tal que $f_1(y) = f_2(y)$. Elegimos el punto $b = p(f_1(y)) = p(f_2(y))$. Sea O abierto regularmente recubierto y arcoconexo que contiene a b , entonces

$$p^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

donde los A_i son abiertos disjuntos de R y tal que

$$p|_{A_i} : A_i \rightarrow O$$

es un homeomorfismo. Tomamos el abierto A_{i_0} donde se encuentra $f_1(y) = f_2(y)$. Elegimos $V = f_1^{-1}(A_{i_0}) \cap f_2^{-1}(A_{i_0})$. Veamos que $\forall x \in V$ se tiene que $f_1(x) = f_2(x)$. Como $x \in V$ tendremos que $f_1(x), f_2(x) \in A_{i_0}$ por lo que

$$p(f_1(x)) = p(f_2(x)) \xrightarrow{(*)} f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow V \subseteq Y$$

donde en $(*)$ hemos usado que $p|_{A_i}$ es inyectiva. Tenemos finalmente que Y es abierto.

Veamos ahora que Y es cerrado. Para ello demostramos que $X \setminus Y$ es abierto. Tomamos $y \in X \setminus Y$ y vemos que existe un V abierto que contiene al punto y y tal que $V \subseteq X \setminus Y$. Sea $b = p(f_1(y)) = p(f_2(y))$ y de nuevo tomamos O regularmente recubierto que contiene a b . Tendremos

$$p^{-1}(O) = \bigcap_{i \in I} A_i$$

donde los A_i son abiertos disjuntos y tal que

$$p|_{A_i} : A_i \rightarrow O$$

es un homeomorfismo. Tendremos $f_1(y) \in A_{i_1}$ y $f_2(y) \in A_{i_2}$ y además se verificará que $A_{i_1} \neq A_{i_2}$ ya que si se diera la igualdad tendríamos que la aplicación

$$p|_{A_{i_1}} : A_{i_1} \rightarrow O$$

no sería inyectiva. Elegimos ahora $V = f_1^{-1}(A_{i_1}) \cap f_2^{-1}(A_{i_2})$, donde se tiene que $y \in V$. Además se tiene que

$$\begin{aligned} f_1(V) &\subseteq A_{i_1} \\ f_2(V) &\subseteq A_{i_2} \end{aligned}$$

por lo que para cada $x \in V$ se tendrá que $f_1(x) \neq f_2(x)$ ya que $f_1(x) \in A_{i_1}$ y $f_2(x) \in A_{i_2}$. Esto nos dice que $V \subseteq X \setminus Y$, luego Y es cerrado. \square

Teorema 2.2 (Teorema de monodromía). *Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in B$ y $r_0 \in p^{-1}(b_0)$. El homomorfismo inducido $p_* : \pi_1(R, r_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ es inyectivo. En particular, $\pi_1(R, r_0)$ es isomorfo a $p_*(\pi_1(R, r_0)) < \pi_1(B, b_0)$.*

Demostración. Sabemos que p_* es inyectiva si y solo si $\ker(p_*)$ es trivial. Tomamos α lazo basado en r_0 tal que

$$p_*([\alpha]) = [\varepsilon_{b_0}]$$

Como además $[p \circ \alpha] = p_*([\alpha])$ tenemos que existe una homotopía por lazos de ε_{b_0} en $p \circ \alpha$. Como toda homotopía por arcos se puede levantar tenemos que existe una homotopía por arcos en R de $\hat{\varepsilon}_{b_0}$ y $\widehat{p \circ \alpha}$ (empezando en r_0). Tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\varepsilon}_{b_0} = \varepsilon_{r_0} \\ \widehat{p \circ \alpha} = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow [\alpha] = [\varepsilon_{r_0}]$$

□

Observación. Recordemos que dados dos subgrupos H_1, H_2 de un grupo G se dice que H_1 y H_2 son conjugados si existe un $g \in G$ tal que

$$H_2 = g^{-1}H_1g$$

Corolario 2.2.1. Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in B$ y $r_1, r_2 \in p^{-1}(b_0)$. Elegimos un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow R$ tal que

$$\alpha(0) = r_1$$

$$\alpha(1) = r_2$$

entonces

$$p_*(\pi_1(R, r_2)) = [p \circ \alpha]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [p \circ \alpha]$$

En particular, $p_*(\pi_1(R, r_1))$ y $p_*(\pi_1(R, r_2))$ son conjugados en $\pi_1(B, b_0)$.

Demostración. Sabemos que $p \circ \alpha$ es un lazo basado en b_0 por lo que $[p \circ \alpha] \in \pi_1(B, b_0)$. Además,

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(R, r_2) & \xrightarrow{\text{isom.}} & \pi_1(R, r_1) \\ [\beta] & \longmapsto & [\alpha * \beta * \tilde{\alpha}] \end{array}$$

Tenemos por tanto que

$$\begin{aligned} \pi_1(R, r_1) &= [\alpha] * \pi_1(R, r_2) * [\tilde{\alpha}] \\ p_*(\pi_1(R, r_1)) &= [p \circ \alpha] * p_*(\pi_1(R, r_2)) * [p \circ \tilde{\alpha}] \end{aligned}$$

Como tenemos que

$$[p \circ \tilde{\alpha}] = [\widehat{p \circ \alpha}] = [p \circ \alpha]^{-1}$$

llegamos a que son conjugados. □

Corolario 2.2.2. Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in B$ y $r_1 \in p^{-1}(b_0)$. Sea H un subgrupo conjugado de $p_*(\pi_1(R, r_1))$ en $\pi_1(B, b_0)$. Entonces existe un punto $r_2 \in R$ tal que

$$H = p_*(\pi_1(R, r_2))$$

Demostración. Por hipótesis sabemos que $p(r_1) = b_0$ y que $p_*(\pi_1(R, r_1))$ es conju-
gado con H en $\pi_1(B, b_0)$, es decir,

$$H = g^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * g$$

con $g \in \pi_1(B, b_0)$, esto es, $g = [\gamma]$. Consideramos $\hat{\gamma}$ el levantamiento de γ a R con

$$\hat{\gamma}(0) = r_1$$

y llamamos $r_2 = \hat{\gamma}(1)$ al final del arco.

$$p(r_2) = (p \circ \hat{\gamma})(1) = \gamma(1) = b_0$$

Usando el corolario anterior tenemos que

$$\begin{aligned} p_*(\pi_1(R, r_2)) &= [p \circ \hat{\gamma}]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [p \circ \hat{\gamma}] = \\ &= [\gamma]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [\gamma] = \\ &= H \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3. Consideramos una aplicación recubridora $p : R \rightarrow B$, una aplicación
continua $f : X \rightarrow B$, $x_0 \in X$, $b_0 = f(x_0)$ y $r_0 \in p^{-1}(b_0)$.

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Entonces son equivalentes:

1. Existe un levantamiento $\hat{f} : X \rightarrow R$ de f con $\hat{f}(x_0) = r_0$.
2. $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$

Además, si se cumple cualquiera de estas condiciones, el levantamiento \hat{f} de f con
 $\hat{f}(x_0) = r_0$ es único.

Demostración.

(1) \Rightarrow (2) Estamos en la situación del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(R, r_0) \\ & \nearrow \hat{f}_* & \downarrow p_* \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

y podemos ver que

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) = p_*(\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0))) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$$

ya que $\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \pi_1(R, r_0)$ por lo que tenemos esta implicación simple-
mente desarrollando la composición.

(2) \Rightarrow (1) Empezamos definiendo \hat{f} :

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Dado $x \in X$ elegimos α_x un arco en X que una x_0 con x . Entonces $\widehat{f \circ \alpha_x}$ es un arco en B que une $b_0 = f(x_0)$ con $f(x)$. Consideramos ahora $\widehat{f \circ \alpha_x}$ el único arco en R tal que $\widehat{f \circ \alpha_x}(0) = r_0$ y definimos

$$\hat{f}(x) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$

Veamos que \hat{f} está bien definida, es decir, que no depende del arco α_x elegido. Tomamos otro arco β_x en X tal que $\beta_x(0) = x_0$ y $\beta_x(1) = x$ y queremos ver que

$$\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \widehat{f \circ \beta_x}(1)$$

Tomamos $\gamma = \alpha_x * \beta_x$ que es un lazo en X con base en x_0 . Tenemos entonces que

$$f \circ \gamma = (f \circ \alpha_x) * (f \circ \beta_x)$$

es un lazo con base en b_0 . Usamos ahora la hipótesis y tenemos que

$$[f \circ \gamma] = f_*([\gamma]) \in p_*(\pi_1(R, r_0))$$

Es decir, existe un arco δ con base en r_0 tal que $[f \circ \gamma] = [p \circ \delta]$. Sea $\widehat{f \circ \gamma}$ el único levantamiento de $f \circ \gamma$ que comienza en r_0 . Tenemos que $\widehat{f \circ \gamma}$ es homotópico por arcos con $p \circ \delta$. Como p_* es inyectiva tenemos que $\widehat{f \circ \gamma}$ es homotópico con δ , por lo que ambos acaban en el mismo punto, es decir, tenemos que

$$\widehat{f \circ \gamma}(1) = \delta(1) = r_0$$

Además tenemos que

$$\widehat{f \circ \gamma} = (f \circ \alpha_x) * \widetilde{f \circ \beta_x} = \widehat{f \circ \alpha_x} * \omega$$

donde $\widehat{f \circ \alpha_x}$ es el levantamiento de $f \circ \alpha_x$ empezando en r_0 y ω es el levantamiento de $\widetilde{f \circ \beta_x}$ comenzando en $\widehat{f \circ \alpha_x}(1)$. Podemos ver que

$$\left. \begin{array}{l} p \circ \omega = \widetilde{f \circ \beta_x} = f \circ \widetilde{\beta_x} \\ \omega(1) = r_0 \\ \omega(0) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p \circ \widetilde{\omega} = f \circ \beta_x \\ \widetilde{\omega}(0) = \omega(1) = r_0 \\ \widetilde{\omega}(1) = \omega(0) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \end{array}$$

Por tanto

$$\widehat{f \circ \beta_x}(1) = \widetilde{\omega}(1) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$

lo que demuestra que la definición de $\hat{f}(x)$ está bien hecha.

Veamos ahora que $p \circ \hat{f} = f$. Para ello, dado $x \in X$ tenemos que ver que $(p \circ \hat{f})(x) = f(x)$. Veamos quién es $\hat{f}(x)$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \\ p(\hat{f}(x)) &= (p \circ \widehat{f \circ \alpha_x})(1) = (f \circ \alpha_x)(1) = f(\alpha_x(1)) = f(x)\end{aligned}$$

También es claro que $\hat{f}(x_0) = r_0$ ya que para x_0 podemos elegir ε_{x_0} verificándose que $f \circ \varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{b_0}$ luego

$$\widehat{f \circ \varepsilon_{x_0}} = \hat{\varepsilon}_{b_0} = \varepsilon_{r_0} \Rightarrow \hat{f}(x_0) = \widehat{f \circ \varepsilon_{x_0}}(1) = \varepsilon_{r_0}(1) = r_0$$

Vamos a demostrar ahora que \hat{f} es continua.

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B\end{array}$$

Comenzamos tomando un punto $x \in X$ y vemos que \hat{f} es continua en x . Sea U un entorno de $\hat{f}(x)$. Tomamos O abierto arcoconexo de $f(x)$ que esté regularmente recubierto, es decir

$$\begin{aligned}p^{-1}(O) &= \bigcup_{i \in I} A_i \text{ con } A_i \text{ disjuntos} \\ p|_{A_i} : A_i &\rightarrow O \text{ homeomorfismo}\end{aligned}$$

Como $\hat{f}(x) \in p^{-1}(f(x)) \subseteq p^{-1}(O)$ tenemos que existe un único $i_0 \in I$ tal que $\hat{f}(x) \in A_{i_0}$. Podemos suponer que $A_{i_0} \subseteq U$ (si no fuese así consideraríamos $U \cap A_{i_0}$). Como f es continua, existe un abierto V que contiene a x tal que $f(V) \subseteq O$. Podemos suponer que V es arcoconexo (si no lo fuese podríamos coger la componente arcoconexa de V que contenga a x).

Si probamos que $\hat{f}(V) \subseteq A_{i_0} \subseteq U$ tendríamos que \hat{f} es continua en x . Para verlo consideramos un punto $y \in V$ y tomamos un arco γ dentro de V que una x con y . Tenemos entonces que $\alpha_x * \gamma$ es un arco que une x_0 con y . Para ver quién es su imagen sabemos que

$$\hat{f}(y) = f \circ \widehat{(\alpha_x * \gamma)}(1) = (f \circ \alpha_x) * \widehat{(f \circ \gamma)}(1)$$

donde $(f \circ \alpha_x) * \widehat{(f \circ \gamma)}$ es la única curva que se proyecta por p en $(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)$ y comienza en r_0 . Es decir, $(f \circ \alpha_x) * \widehat{(f \circ \gamma)}$ se puede ver como

$$\widehat{f \circ \alpha_x} * \widehat{f \circ \gamma}$$

donde $\widehat{f \circ \gamma}$ es el levantamiento de $f \circ \gamma$ pero comenzando en el punto $\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \hat{f}(x)$.

$$Im(\gamma) \subseteq V \Rightarrow Im(f \circ \gamma) \subseteq O \Rightarrow \widehat{f \circ \gamma} \subseteq A_{i_0}$$

ya que $p|_{A_{i_0}}$ es un homeomorfismo por lo que llegamos finalmente a

$$\hat{f}(y) = (f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)(1) = \widehat{f \circ \gamma}(1) \in A_{i_0}$$

□

Observación. Una consecuencia inmediata es que si X es simplemente conexo, toda $f : X \rightarrow B$ continua se puede levantar.

Ejemplo. Consideramos la aplicación recubridora

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto (x^2 - y^2, 2xy, z) \end{aligned}$$

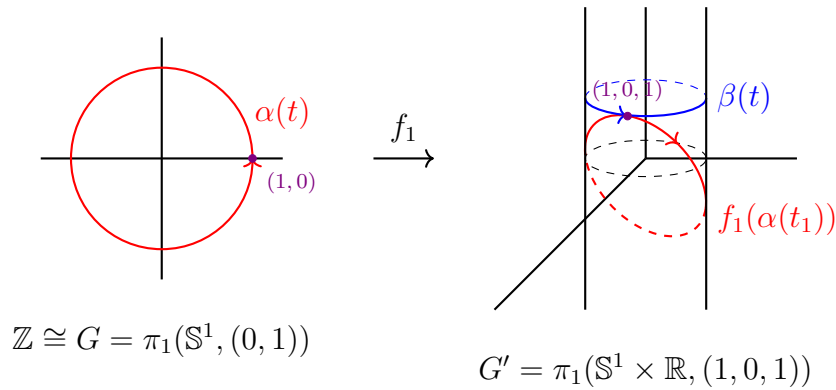
y las aplicaciones $f_1, f_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (x, y, x) \\ f_2(x, y) &= (-2xy, x^2 - y^2, x^2) \end{aligned}$$

Nos preguntamos si existen levantamientos de f_1 y f_2 , es decir si existen los \hat{f}_1, \hat{f}_2 que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ & \nearrow \hat{f}_1, \hat{f}_2 & \downarrow p \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f_1, f_2} & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \end{array}$$

Con la siguiente gráfica



podemos ver que $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ está generado por $[\alpha]$ donde

$$\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

y $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1))$ está generado por $[\beta]$ donde

$$\beta(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 1)$$

Además es fácil ver en la misma gráfica que

$$\begin{aligned} f_{1*}([\alpha]) &= [f_1 \circ \alpha] = [\beta] \\ f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) &= \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Ahora calculamos

$$p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)) = \{[\beta]^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

y además

$$\begin{aligned} (p \circ \beta)(t) &= (\cos^2(2\pi t) - \sin^2(2\pi t), 2 \cos(2\pi t) \sin(2\pi t), 1) = \\ &= (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t), 1) = (\beta * \beta)(t) \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} p_*([\beta]) &= [p \circ \beta] = [\beta]^2 \\ p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1))) &= \{[\beta]^{2n} : n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Sabemos por el teorema visto que existe un $\hat{f}_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ levantamiento de f_1 con $\hat{f}_1(1, 0) = (1, 0, 1)$ si y solo si se tiene que

$$f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

Como tenemos que

$$\begin{aligned} f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) &= \{[\beta]^k : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \\ p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1))) &= \{[\beta]^{2m} : m \in \mathbb{Z}\} \cong 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

no se dará la inclusión

$$f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) \not\subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

y tenemos que no existe $\hat{f}_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ levantamiento de f_1 con $\hat{f}_1(1, 0) = (1, 0, 1)$.

Si tomamos otro punto r_1 cualquiera tal que $p(r_1) = (1, 0, 1)$ (r_1 solo podría ser el $(-1, 0, 1)$) entonces sabemos por un corolario anterior que

$$p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, r_1)) \text{ es conjugado de } p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

Como el grupo total es abeliano, entonces estos dos grupos son idénticos.

Veamos qué ocurre con f_2 . En este caso tenemos que

$$f_2(1, 0) = (0, 1, 1)$$

Además, $[\alpha]$ genera $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ y $[\gamma]$ genera $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (0, 1, 1))$ donde

$$\gamma(t) = \left(\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right), 1 \right)$$

Queremos calcular $f_2 \circ \alpha$:

$$\begin{aligned} (f_2 \circ \alpha)(t) &= (-2 \cos(2\pi t) \sin(2\pi t), \cos^2(2\pi t) - \sin^2(2\pi t), \cos^2(2\pi t)) = \\ &= (-\sin(4\pi t), -\cos(4\pi t), \cos^2(2\pi t)) = \\ &= (\sin(-4\pi t), \cos(-4\pi t), \cos^2(2\pi t)) = \\ &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi t\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi t\right), \cos^2(2\pi t) \right) \end{aligned}$$

y podemos concluir que

$$f_{2*}([\alpha]) = [f_2 \circ \alpha] = [\gamma * \gamma] = [\gamma]^2$$

por lo que

$$\begin{aligned} f_{2*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) &= \{[\gamma]^{2n} : n \in \mathbb{Z}\} = \\ &= p_* \left(\pi_1 \left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right) \right) \right) \end{aligned}$$

y tenemos finalmente que existe el levantamiento \hat{f}_2 con $\hat{f}_2(1, 0) = (0, 1, 1)$

2.2. Transformación de recubridores

Vamos a tratar en lo que queda de tema de clasificar los espacios recubridores de un espacio topológico B dado. Comenzamos estableciendo para ello una nomenclatura clásica.

Notación. Diremos que (R, p) es un recubridor de B si $p : R \rightarrow B$ es una aplicación recubridora.

Definición 2.1. Sean (R_1, p_1) , (R_2, p_2) dos espacios recubridores de un mismo e.t. base B ,

$$\begin{array}{ccc} R_1 & & R_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

1. Un **homomorfismo de recubridores** ϕ de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) es una aplicación continua $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ tal que $p_2 \circ \phi = p_1$. Dicha aplicación hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{\hat{f}=\phi} & R_2 \\ & \searrow f=p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

O equivalentemente ϕ es un levantamiento de la aplicación continua p_1 usando la aplicación recubridora p_2 .

2. Un **isomorfismo de recubridores** ϕ de (R_1, p_1) es (R_2, p_2) es un homeomorfismo $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ tal que $p_2 \circ \phi = p_1$.
3. Un isomorfismo ϕ de (R_1, p_1) es sí mismo se le llama **automorfismo de recubridores**. Al conjunto de todos los automorfismos lo notaremos por $\mathcal{A}(R_1, p_1)$.

Observación.

1. Si (R, p) es un recubridor de un espacio base B y $\phi : \hat{R} \rightarrow R$ es un homeomorfismo, entonces $(\hat{R}, p \circ \phi)$ es un recubridor de B . Se puede ver fácilmente con el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \hat{R} & \xrightarrow{\phi} & R \\ & \searrow p \circ \phi & \downarrow p \\ & & B \end{array}$$

recordando que la composición de una aplicación recubridora con un homeomorfismo es también una aplicación recubridora (visto en las propiedades de las aplicaciones recubridoras). Además, ϕ de $(\hat{R}, p \circ \phi)$ en (R, p) es un isomorfismo de recubridores. De hecho, de la definición se deduce que todo isomorfismo de recubridores es de la forma anterior.

2. Si ϕ_1 de (R_1, p_1) es (R_2, p_2) es un homomorfismo de recubridores y ϕ_2 es otro desde (R_2, p_2) en (R_3, p_3) , entonces $\phi_2 \circ \phi_1$ es un homomorfismo de recubridores de (R_1, p_1) en (R_3, p_3) . Tendríamos la situación del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} R_1 & \xrightarrow{\phi_1} & R_2 & \xrightarrow{\phi_2} & R_3 \\ & \searrow p_1 & \downarrow p_2 & \swarrow p_3 & \\ & & B & & \end{array}$$

3. Si ϕ es un isomorfismo de recubridores desde (R_1, p_1) en (R_2, p_2) , entonces ϕ^{-1} es un isomorfismo de recubridores desde (R_2, p_2) en (R_1, p_1) .

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\phi^{-1}} & \\ R_1 & \xleftarrow{\phi} & R_2 \\ & \searrow p_2 & \swarrow p_2 \\ & & B \end{array}$$

4. $\mathcal{A}(R, p)$ es un grupo con la composición.

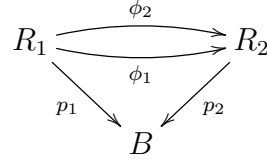
Corolario 2.3.1. Sean ϕ_1, ϕ_2 dos homomorfismos de recubridores desde (R_1, p_1) en (R_2, p_2) . Entonces se tiene que

$$\phi_1 = \phi_2 \iff \exists r_1 \in R_1 : \phi_1(r_1) = \phi_2(r_1)$$

En particular, si ϕ es un homomorfismo de un recubridor (R, p) en sí mismo, entonces

$$\phi = Id_R \iff \exists r \in R : \phi(r) = r$$

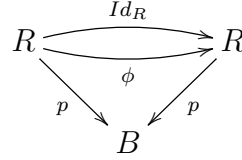
Demostración. Estamos en la siguiente situación



Veamos la doble implicación de la primera mitad del corolario

- \Rightarrow) Es trivial que si $\phi_1 = \phi_2$ entonces $\forall r \in R_1$ se tiene que $\phi_1(r) = \phi_2(r)$.
- \Leftarrow) Supongamos que $\exists r_1 \in R_1$ tal que $\phi_1(r_1) = \phi_2(r_1)$. Entonces, como ϕ_1 y ϕ_2 son levantamientos de p_1 , por el teorema de unicidad del levantamiento tenemos que $\phi_1 = \phi_2$.

Para probar la segunda parte del corolario aplicaremos lo ya probado tomando $\phi_1 = \phi$ un homomorfismo de un recubridor (R, p) en sí mismo y $\phi_2 = Id_R$.



Entonces tendríamos que

$$\phi = Id_R \iff \exists r \in R : \phi(r) = Id_R(r) = r$$

□

Corolario 2.3.2. Sean (R_1, p_1) , (R_2, p_2) dos recubridores de B , $b_0 \in B$ y $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$, $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$. Entonces:

1. Existe un homomorfismo de recubridores ϕ de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) con $\phi(r_1) = r_2$ si y solo si

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

2. Existe un isomorfismo de recubridores ϕ de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) con $\phi(r_1) = r_2$ si y solo si

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

Demostración. Veamos cada punto por separado.

1. Estamos en la siguiente situación (donde se ha puesto la equivalencia con la notación que usamos para el teorema de existencia del levantamiento)



Entonces por el teorema de existencia del levantamiento tenemos que existe ϕ levantamiento de p_1 con $\phi(r_1) = r_2$ si y solo si

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

2. Veamos la doble implicación.

\Rightarrow) Queremos ver que se verifica la igualdad entre las imágenes de los homomorfismos inducidos de los grupos fundamentales. Veámoslo por doble inclusión. En primer lugar denotamos por ϕ al isomorfismo y a su inversa la llamaremos φ . Esta aplicación verifica que

$$\varphi \circ \phi = Id_{R_1} \quad \phi \circ \varphi = Id_{R_2}$$

y además es también un isomorfismo (por lo que en particular es un homomorfismo). Estaríamos en la situación del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} R_1 & \xrightarrow{\phi} & R_2 & \xrightarrow{\varphi} & R_1 \\ & \searrow p_1 & \downarrow p_2 & \swarrow p^1 & \\ & & B & & \end{array}$$

donde ϕ y φ son homomorfismos. Por hipótesis tenemos que $\exists r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$, $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$ tales que $\phi(r_1) = r_2$. Si componemos esta igualdad por la izquierda con φ tenemos

$$(\varphi \circ \phi)(r_1) = \varphi(r_2) \Rightarrow Id_R(r_1) = \phi(r_2) \Rightarrow r_1 = \varphi(r_2)$$

Por tanto aplicando el primer punto del corolario a ϕ (es un homomorfismo con $\phi(r_1) = r_2$) tenemos que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

y aplicando lo mismo de nuevo a φ (es un homomorfismo con $\varphi(r_2) = r_1$) tenemos que

$$p_{2*}(\pi_2(R_2, r_2)) \subseteq p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1))$$

por lo que llegamos finalmente a que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

\Leftarrow) Supongamos que $p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$. Buscamos aplicar ahora el punto anterior a este caso. De la siguiente inclusión

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

tenemos que existe un homomorfismo de recubridores ϕ de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) con $\phi(r_1) = r_2$. Análogamente, de la siguiente inclusión

$$p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2)) \subseteq p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1))$$

tenemos que existe un homomorfismo de recubridores φ de (R_2, p_2) en (R_1, p_1) con $\varphi(r_2) = r_1$. Podemos considerar entonces su composición $\varphi \circ \phi$, que es claramente un homomorfismo de (R_1, p_1) en sí mismo con $\varphi(\phi(r_1)) = r_1$. Por el corolario 2.3.1 tenemos que

$$\varphi \circ \phi = Id_{R_1}$$

Análogamente podemos llegar a que

$$\phi \circ \varphi = Id_{R_2}$$

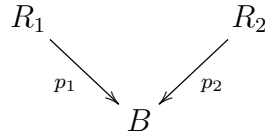
Tenemos entonces que ϕ es una aplicación continua, φ es su inversa y además es también continua, luego ϕ es un homeomorfismo. Este será el que nos dé el isomorfismo de recubridores de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) .

□

Teorema 2.4. Sean (R_1, p_1) , (R_2, p_2) dos recubridores de un e.t. B . Entonces existe un isomorfismo entre ambos recubridores si y solo si dado $b_0 \in B$ existen $r_1 \in R_1$ y $r_2 \in R_2$ con $p_1(r_1) = b_0 = p_2(r_2)$ tales que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

Demostración. Estamos en la siguiente situación



Veamos la doble implicación

\Rightarrow) Supongamos primero que existe ϕ isomorfismo de recubridores de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) . Tomamos $b_0 \in B$ y elegimos $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$ cualquiera (que existe porque p_1 es sobreyectiva). Elegimos $r_2 = \phi(r_1)$ y entonces como $p_2 \circ \phi = p_1$ tenemos que

$$\begin{aligned} p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) &= (p_2 \circ \phi)_*(\pi_1(R_1, r_1)) = \\ &= p_{2*}(\phi_*(\pi_1(R_1, r_1))) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2)) \end{aligned}$$

ya que como ϕ es un homomorfismo tenemos que $\phi_*(\pi_1(R_1, r_1)) = \pi_1(R_2, \phi(r_1))$.

\Leftarrow) Está probada aplicando el corolario anterior.

□

Observación. Algunas consecuencias que podemos extraer de lo anterior son las siguientes:

Sean B un e.t. y $b_0 \in B$. Si consideramos H un subgrupo de $\pi_1(B, b_0)$ entonces

1. Existe como mucho un recubridor (R, p) (salvo isomorfismo) cumpliendo que $\exists r \in R$ tal que $p_*(\pi_1(R, r)) = H$.

$$\begin{array}{ccc} R & & \pi_1(R, r) \\ p \downarrow & & p_* \downarrow \\ B & & H \leq \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

2. Además si H y H' son subgrupos conjugados en $\pi_1(B, b_0)$, como mucho existe un recubridor correspondiente a ambos, es decir, si (R, p) es un recubridor con $r_0 \in R$ tal que $p_*(\pi_1(R, r_0)) = H$, entonces también existe un $r'_0 \in R$ tal que $p_*(\pi_1(R, r'_0)) = H'$.

$$\begin{array}{ccccc}
 R & & \pi_1(R, r) & & \pi_1(R, r') \\
 p \downarrow & & p_* \downarrow & & p_* \downarrow \\
 B & & H \leq \pi_1(B, b_0) & & H' \leq \pi_1(B, b_0)
 \end{array}$$

Ejemplo.

1. Consideramos $B = \mathbb{R}$ y buscamos los recubridores de \mathbb{R} . Tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{[\varepsilon_0]\}$$

Por lo que solo hay un subgrupo $H = \{[\varepsilon_0]\}$, luego \mathbb{R} solo tiene un recubridor

$$(\mathbb{R}, p = Id_{\mathbb{R}})$$

2. En general, si B es simplemente conexo, entonces su único recubridor es él mismo (salvo isomorfismo de recubridores).
3. Consideramos ahora \mathbb{RP}^n el espacio proyectivo con $n \geq 2$. Tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \cong \mathbb{Z}_2, \text{ con } x_0 \in \mathbb{RP}^n \text{ cualquiera}$$

Por tanto tendríamos que los únicos posibles subgrupos de $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0)$ son

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \{[\varepsilon_{x_0}]\} \rightarrow \text{Recubridor asociado } (\mathbb{S}^n, p) \text{ con } p(x) = [x] \\
 H_2 &\cong \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Recubridor asociado } (\mathbb{RP}^n, Id_{\mathbb{RP}^n})
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 R & r_0 & \{0\} & \mathbb{RP}^n & x_0 & \pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \\
 p \downarrow & \downarrow & \downarrow & Id \downarrow & Id \downarrow & \downarrow Id_* \\
 \mathbb{RP}^n & x_0 & \{0\} & \mathbb{RP}^n & x_0 & \pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0)
 \end{array}$$

por lo que los únicos recubridores de \mathbb{RP}^2 son (\mathbb{S}^n, p) con $p(x) = [x]$ y $(\mathbb{RP}^n, Id_{\mathbb{RP}^n})$.

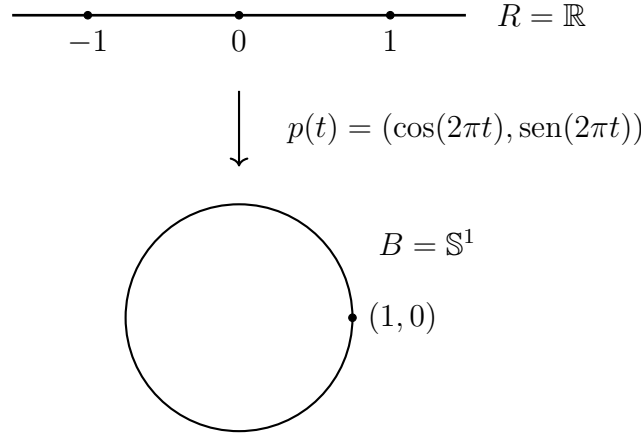
4. Consideramos $B = \mathbb{S}^1$. Recordemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) = \{[\alpha]^n : \alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

Los únicos subgrupos de \mathbb{Z} son

$$\begin{aligned}
 H_k &\cong k\mathbb{Z} \text{ donde } H_k = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+ \\
 H_0 &\cong \{0\}
 \end{aligned}$$

Recordamos el recubrimiento de \mathbb{S}^1 que estudiamos en el tema anterior:



Para este recubridor (\mathbb{R}, p) donde $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, su subgrupo asociado en $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ es H_0 . Para ver que efectivamente es H_0 podemos considerar el generador de $\pi_1(\mathbb{R}, 0)$ que, por ser \mathbb{R} simplemente conexo será un lazo trivial $[\varepsilon_0]$. Si estudiamos la imagen de este generador tendremos

$$(p \circ \varepsilon_0)(t) = p(\varepsilon_0(t)) = p(0) = (1, 0)$$

por lo que $p_*(\pi_1(\mathbb{R}, 0)) = \{[\varepsilon_{(1,0)}]\} \cong \{0\} \cong H_0$.

También podemos considerar el recubridor $(\mathbb{S}^1, p_1 = Id_{\mathbb{S}^1})$ cuyo subgrupo asociado es $H_1 = \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$.

Ahora nos planteamos de nuevo que \mathbb{S}^1 es recubridor de sí mismo pero que hay más formas de recubrirse, es decir, podemos encontrar funciones recubridoras p_k con $k \in \mathbb{Z}^+$ de forma que todas recubran a la circunferencia pero “enrollandola más”, es decir, llevando cada vuelta de $R = \mathbb{S}^1$ en k vueltas de $B = \mathbb{S}^1$. Definimos así la aplicación p_k para $k \geq 2$ (el caso $k = 1$ es la identidad que ya se ha estudiado) dada por

$$p_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta)) & \longmapsto & (\cos(k\theta), \sin(k\theta)) \end{array}$$

Además tendríamos que

$$p_{k*} : \begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) \\ [\alpha] & \longmapsto & [\alpha]^k \end{array}$$

Llegando a que

$$p_{k*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) = H_k = \{[\alpha]^{kn} : n \in \mathbb{Z}\}$$

Por tanto, los únicos recubridores de \mathbb{S}^1 son

$$\begin{array}{l} (\mathbb{R}, p) \text{ con } p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \\ (\mathbb{S}^1, p_k) \text{ con } p_k(\cos(\theta), \sin(\theta)) = (\cos(k\theta), \sin(k\theta)) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

5. Vamos a estudiar ahora los recubridores del cilindro de \mathbb{R}^3 , $B = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0)) = \{[\alpha]^n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

por lo que tenemos de nuevo que los únicos subgrupos de \mathbb{Z} son

$$H_k \cong k\mathbb{Z} \text{ donde } H_k = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+ \\ H_0 \cong \{0\}$$

y además sabemos que (\mathbb{R}^2, p_0) es recubridor del cilindro con

$$p_0 : \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y)$$

asociado a $H_0 = \{[\varepsilon_{(1,0,0)}]\}$.

Buscamos ahora los recubridores cuyo subgrupo asociado es H_k . Con la misma idea que en el ejemplo anterior definimos la función p_k para $k \in \mathbb{Z}^+$ dada por

$$p_k : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) \longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta), y)$$

Al igual que en el ejemplo anterior tenemos que

$$p_{k*}([\alpha]) = [\alpha]^k \\ p_{k*}(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0))) = \{[\alpha]^{kn} : n \in \mathbb{Z}\} = H_k$$

Por tanto los únicos recubridores del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ son

$$(\mathbb{R}^2, p_0) \text{ con } p_0(x, y) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y) \\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p_k) \text{ con } p_k(\cos(\theta), \sin(\theta), y) = (\cos(k\theta), \sin(k\theta), y) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+$$

6. Veamos el caso del toro, $B = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1, 0, 1, 0)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

con generadores $[\alpha]$ y $[\beta]$.

Consideramos el recubridor $(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0)$ con

$$p_0 \times p_0 : \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (x, y) \longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y))$$

Como $\pi_1(\mathbb{R}^2, (0, 0)) = [\varepsilon_{(0,0)}]$ tenemos que

$$(p_0 \times p_0)_*(\pi_1(\mathbb{R}^2, (0, 0))) = \{[\varepsilon_{(1,0,1,0)}]\}$$

por lo que $(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0)$ es el recubridor asociado al subgrupo trivial de $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1, 0, 1, 0))$.

Consideramos ahora el cilindro como recubridor y definimos la aplicación recubridora

$$\begin{aligned} p_k \times p_0 : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) \end{aligned}$$

que para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ “enrolla” el cilindro k veces. En este caso tendríamos que

$$(p_k \times p_0)(1, 0, 0) = (1, 0, 1, 0)$$

y además tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0)) = \{[\gamma]^n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ donde } \gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$$

Tenemos además que $(p_k \times p_0)(\gamma(t)) = (\cos(2k\pi t), \sin(2k\pi t), 1, 0)$ de donde se deduce que

$$(p_k \times p_0)_*([\gamma]) = [(p_k \times p_0)(\gamma)] = [\alpha]^k$$

Una vez hemos calculado la imagen del generador podemos concluir que

$$(p_k \times p_0)_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0))) = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \cong k\mathbb{Z} \times \{0\} \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Análogamente si consideramos

$$\begin{aligned} p_0 \times p_k : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (x, \cos(\theta), \sin(\theta)) &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(k\theta), \sin(k\theta)) \end{aligned}$$

tendríamos el siguiente recubridor

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, p_0 \times p_k) \text{ asociado a } \{0\} \times k\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Consideramos ahora el toro como recubridor de sí mismo y definimos

$$\begin{aligned} p_k \times p_l : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi)) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta), \cos(l\varphi), \sin(l\varphi)) \end{aligned}$$

Si estudiamos la imagen de los generadores tenemos

$$\begin{aligned} (p_k \times p_l)_*([\alpha]) &= [\alpha]^k \\ (p_k \times p_l)_*([\beta]) &= [\beta]^l \end{aligned}$$

y llegamos a que $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p_k \times p_l)$ es recubridor y está asociado al subgrupo $k\mathbb{Z} \times l\mathbb{Z}$. El grupo imagen sería

$$\{[\alpha]^{kn_1} * [\beta]^{ln_2} : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

En este punto nos damos cuenta de que aún no hemos estudiado todos los subgrupos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Si consideramos 2 puntos de \mathbb{Z} podemos generar un subgrupo a partir de ellos, por ejemplo, para $(1, 3), (2, 4) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ podemos construir $\{a(1, 3) + b(2, 4) : a, b \in \mathbb{Z}\}$ y es un subgrupo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Esto también

ocurre con un solo generador. Es decir, tenemos que los subgrupos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que nos queda por considerar son de la forma

$$\begin{aligned} &\{n(a, b) : n \in \mathbb{Z}\} \text{ para cada } (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ &\{n_1(a, b) + n_2(c, d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \text{ para cada } (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Pensamos ahora entonces en la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} p' : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\theta + y), \sin(\theta + y)) \end{aligned}$$

y nos planteamos quién sería $p'_*([\gamma])$. Aplicamos p' en un generador y tenemos

$$p'(\gamma(t)) = p(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Intuitivamente podemos llegar a ver que $p'_*([\gamma]) = [\alpha] * [\beta]$. Esto se ha hecho considerando de fondo el generador $(1, 1)$. Buscamos generalizar esta nueva aplicación recubridora para cualquier generador $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se puede construir una aplicación $p'_{(a,b)}$ para cada $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p'_{(a,b)} : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(a\theta), \sin(a\theta), \cos(b\theta + y), \sin(b\theta + y)) \end{aligned}$$

Aplicando $p'_{(a,b)}$ en el generador tenemos

$$p'_{(a,b)}(\gamma(t)) = p'(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) = (\cos(2a\pi t), \sin(2a\pi t), \cos(2b\pi t), \sin(2b\pi t))$$

y con mucha intuición se puede llegar a que

$$(p'_{(a,b)})_*([\gamma]) = [\alpha]^a * [\beta]^b$$

Por tanto tenemos que $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)})$ es recubridor del toro con subgrupo asociado $\{n(a, b) : n \in \mathbb{Z}\}$ para cada generador que tomemos $(a, b) \in \mathbb{Z}$.

De hecho, si tomamos un par de generadores $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ podemos definir la aplicación $p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dada por

$$\begin{aligned} &(p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \\ &= (\cos(a\theta + c\varphi), \sin(a\theta + c\varphi), \cos(b\theta + d\varphi), \sin(b\theta + d\varphi)) \end{aligned}$$

De esta forma, aplicando $p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)}$ en los generadores tenemos

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\alpha(t)) &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 1, 0) = \\ &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \cos(0), \sin(0)) = \\ &= (\cos(2a\pi t), \sin(2a\pi t), \cos(2b\pi t), \sin(2b\pi t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\beta(t)) &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(1, 0, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = \\ &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(0), \sin(0), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = \\ &= (\cos(2c\pi t), \sin(2c\pi t), \cos(2d\pi t), \sin(2d\pi t)) \end{aligned}$$

Por lo que de nuevo usando mucho la intuición (habría que demostrarlo formalmente) llegamos a que

$$\begin{aligned}(p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})_*([\alpha]) &= [\alpha]^a * [\beta]^b \\ (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})_*([\beta]) &= [\alpha]^c * [\beta]^d\end{aligned}$$

y tenemos que $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})$ es recubridor del toro asociado al subgrupo $\{n_1(a, b) + n_2(c, d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ para cada par de generadores $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Resumiendo, tenemos que todos los recubridores del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ son

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0) &\text{ asociado a } \{0\} \\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p_k \times p_0) &\text{ asociado a } k\mathbb{Z} \times \{0\} \text{ para cada } k \in \mathbb{Z} \\ (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, p_0 \times p_k) &\text{ asociado a } \{0\} \times k\mathbb{Z} \text{ para cada } k \in \mathbb{Z} \\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p_k \times p_l) &\text{ asociado a } k\mathbb{Z} \times l\mathbb{Z} \text{ para cada } k, l \in \mathbb{Z} \\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)}) &\text{ asociado a } \{n(a, b) : n \in \mathbb{Z}\} \text{ para cada } (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)}) &\text{ asociado a } \{n_1(a, b) + n_2(c, d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \\ &\text{ para cada } (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no tiene más subgrupos estos serán todos los recubridores del toro.

Hasta ahora lo que hemos visto es que para estudiar el número de recubridores de un espacio B podemos elegir un punto $b_0 \in B$ y pasar a estudiar $\pi_1(B, b_0)$ y estudiando sus subgrupos $H < \pi_1(B, b_0)$ podíamos afirmar que como mucho había un recubridor por cada uno de ellos (o sus conjugados). Por tanto cuanto más “grande” sea el grupo fundamental, más recubridores podremos encontrar a priori.

Proposición 2.5. *Sea ϕ un homomorfismo de recubridores desde (R_1, p_1) en (R_2, p_2) . Entonces $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ es una aplicación recubridora.*

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{\phi} & R_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

Demostración. Sabemos que ϕ es continua porque es homomorfismo. Veamos que ϕ es sobreyectiva (no es elemental). Consideramos un elemento cualquiera $r_2 \in R_2$ y queremos ver si existe un $r_1 \in R_1$ tal que $\phi(r_1) = r_2$.

Tomamos $r_0 \in R_1$ cualquiera y elegimos un arco α en R_2 que una $\phi(r_0)$ con r_2 , es decir

$$\alpha \in \Omega(R_2; \phi(r_0), r_2)$$

Si proyectamos tendremos que $p_2 \circ \alpha$ es un arco en el espacio topológico base B que une $p_2(\phi(r_2))$ con $p_2(r_2)$, es decir

$$(p_2 \circ \alpha) \in \Omega(B; p_2(\phi(r_0)), p_2(r_2))$$

Sabiendo que el diagrama de la proposición es conmutativo tenemos que $p_2(\phi(r_0)) = p_1(r_0)$. Como p_1 es aplicación recubridora, entonces tenemos que existe un único levantamiento $\widehat{p_2 \circ \alpha}$ que comienza en r_0 . Entonces tenemos que $\phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}$ es un arco en R_2 que comienza en $\phi(r_0)$. Es decir, α y $\phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}$ son dos arcos que empiezan en $\phi(r_0)$ y además

$$p_2 \circ (\phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}) = p_1 \circ (\widehat{p_2 \circ \alpha}) \stackrel{def}{=} p_2 \circ \alpha$$

Por unicidad del levantamiento de p_2 tenemos que $\alpha = \phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}$ por lo que tenemos que

$$r_2 = \alpha(1) = \phi(\widehat{p_2 \circ \alpha}(1))$$

Nos queda demostrar que todo punto de R_2 está regularmente recubierto.

Sea $r_2 \in R_2$ fijado. Sabemos que $p_2(r_2) \in B$ y podemos elegir U abierto arcocoxo en B que contiene a $p_2(r_2)$ y que está regularmente recubierto por p_1 y por p_2 . Por la definición de regularmente recubierto tenemos que

$$\begin{cases} p_1^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} A_i, & A_i \text{ abiertos disjuntos} \\ p_1|_{A_i} : A_i \rightarrow U \text{ homeomorfismo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} B_j, & B_j \text{ abiertos disjuntos} \\ p_2|_{B_j} : B_j \rightarrow U \text{ homeomorfismo} \end{cases}$$

Observamos que

$$\phi^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \phi^{-1}(p_2^{-1}(U)) = (p_2 \circ \phi)^{-1}(U) = p_1^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Alijamos un A_{i_0} y veamos que $\phi(A_{i_0})$ está completamente contenida en algún B_{j_0} . Para ello, sabemos que $\phi(A_{i_0})$ es conexo y además

$$\phi(A_{i_0}) \subseteq \bigcup_{j \in J} B_j$$

Tenemos entonces que

$$\phi(A_{i_0}) = \phi(A_{i_0}) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} (\phi(A_{i_0}) \cap B_j)$$

Como puedo escribir $\phi(A_{i_0})$ como unión de abiertos y $\phi(A_{i_0})$ es conexo tenemos que $\exists j_0 \in J$ tal que

$$\phi(A_{i_0}) \cap B_j = \emptyset \quad \forall j \in J \setminus \{j_0\}$$

y podemos escribir

$$\phi(A_{i_0}) \subseteq B_{j_0}$$

Así, si tomamos B_{j_0} como el abierto que contiene a r_2 , entonces

$$\phi^{-1}(B_{j_0}) = \bigcup_{i \in I'} A_i$$

con $I' \subseteq I$. Además,

$$\begin{array}{ccccc} \phi|_{A_i} : & A_i & \xrightarrow{\quad} & B_{j_0} & \text{homeomorfismo} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & \text{homeom.} \equiv p_1|_{A_i} & & p_2|_{B_{j_0}} \equiv \text{homeom.} & \\ & & U & & \end{array}$$

por ser composición de dos homeomorfismos □

Corolario 2.5.1. Sean (R_1, p_1) , (R_2, p_2) dos recubridores de un espacio topológico B , $b_0 \in B$, $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$ y $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$. Si se verifica que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

entonces existe una aplicación recubridora de R_1 en R_2 que lleva el punto r_1 en el punto r_2 .

Definición 2.2. Decimos que (R, p) es un **recubridor universal** de un espacio topológico B si (R, p) es un recubridor con R simplemente conexo.

Observación. Dos recubridores universales tienen que ser necesariamente isomorfos. Es decir, son salvo un homeomorfismo, el mismo. Esto se debe a que por ser R simplemente conexo ambos tienen grupo fundamental trivial por lo que si hubiera dos tendrían que estar asociados al mismo subgrupo H y sabemos que como mucho hay uno salvo isomorfismo. Por eso se suele decir **el** recubridor universal y no **un** recubridor universal.

Observación. El adjetivo “universal” se debe a que si (R_2, p_2) también recubre al espacio topológico base B , entonces el recubridor universal también recubre a R_2 .

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & R_2 \\ & \searrow p \quad \swarrow p_2 & \\ & B & \end{array}$$

Ejemplo.

1. \mathbb{R} es el recubridor universal de \mathbb{S}^1 .
2. \mathbb{S}^n es el recubridor universal de \mathbb{RP}^n para $n \geq 2$
3. \mathbb{R}^2 es el recubridor universal del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.
4. \mathbb{R}^2 también es el recubridor universal del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

2.3. Existencia de espacios recubridores

Definición 2.3. Sea B un espacio topológico entonces

1. Decimos que B es **localmente simplemente conexo** si todo punto $b \in B$ admite una base de entornos formada por simplemente conexos. O equivalentemente, si para cada abierto O en B y punto $b \in O$ existe un entorno U de b simplemente conexo con $U \subseteq O$.
2. Decimos que B es **semilocalmente simplemente conexo** si todo punto $b \in B$ tiene un entorno U tal que

$$(i_U)_* : \pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$$

es trivial, donde $i_U : U \rightarrow B$ es la inclusión.

Observación.

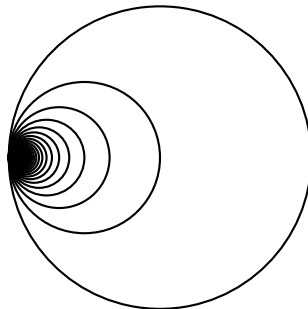
1. Si B es localmente simplemente conexo, entonces también es semilocalmente simplemente conexo.
2. Si B es simplemente conexo entonces es semilocalmente simplemente conexo
3. Si U es un entorno de $b \in B$ tal que $(i_U)_* : \pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ es trivial, entonces también es cierto que si V es entorno de b con $V \subseteq U$ se tiene que $(i_V)_* : \pi_1(V, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ es trivial.

Ejemplo.

1. Si B es un abierto de \mathbb{R}^n entonces B es localmente simplemente conexo.
2. \mathbb{S}^1 es localmente simplemente conexo ya que para cada punto $x \in \mathbb{S}^1$ existe una base de entornos formada por simplemente conexos.
3. Consideramos S_n la circunferencia de \mathbb{R}^2 centrada en $(\frac{1}{n}, 0)$ y de radio $\frac{1}{n}$ y nos planteamos estudiar el siguiente espacio:

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

Gráficamente será algo como



Veamos que el espacio topológico B no es semilocalmente simplemente conexo. Para ello consideramos el punto $b = (0, 0)$. Sabemos que una base de entornos de b en \mathbb{R}^2 es

$$\beta_b = \{B(b, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$$

Al considerar la topología inducida sobre B tendremos que una base de entornos será

$$\beta_b = \{B(b, \varepsilon) : \varepsilon > 0\} \cap B$$

Si fijamos un $\varepsilon > 0$ podremos tomar un $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > \frac{2}{\varepsilon}$. Entonces tendremos que

$$S_m \subseteq B(b, \varepsilon)$$

Esto se debe a que $x \in B(b, \varepsilon) \iff d(x, b) < \varepsilon$. Tenemos que si $y \in S_m$ entonces

$$d(y, b) \leq d(y, (1/m, 0)) + d((1/m, 0), b) = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m} < \frac{2}{2/\varepsilon} = \varepsilon$$

por lo que $y \in B(b, \varepsilon)$. De esta forma tendremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe al menos una circunferencia¹ S_m tal que

$$S_m \subseteq B(b, \varepsilon)$$

Como $S_m \in B$, en particular tendremos que

$$S_m \subseteq B(b, \varepsilon) \cap B$$

Por tanto, para cada entorno U de b tendremos que hay una circunferencia S_m contenida en U por lo que

$$\pi_1(U, b) \not\cong \{0\}$$

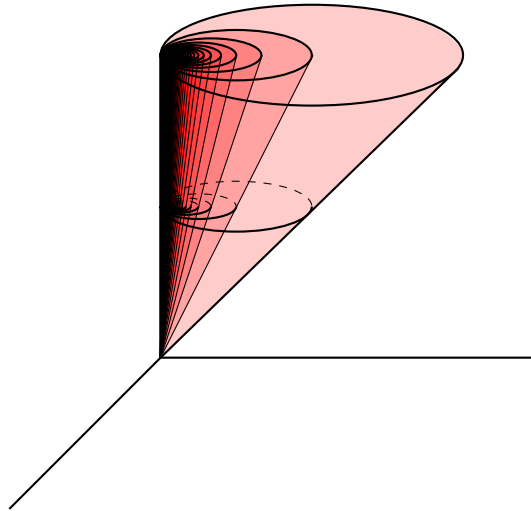
De esta forma, si consideramos la inclusión $i_U : U \rightarrow B$ tendremos que no será trivial (ya que no se puede “cerrar” S_m en B).

4. Tomamos el conjunto de \mathbb{R}^3

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} z = \lambda, \lambda \geq 0 \\ (x, y) = \lambda(a, b), \text{ con } (a, b) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \end{array} \right\}$$

Donde S_n es una de las circunferencias del ejemplo anterior. Esto si se analiza gráficamente es fácil ver que son un montón de conos unidos con el origen y tangentes a la recta $R = \mathcal{L}\{(0, 0, 1)\}$ y que intersecan con el plano de altura 1 formando circunferencias tangentes al $(0, 0, 1)$ de la forma S_n .

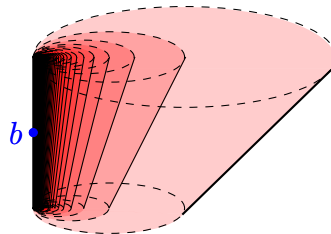
¹de hecho infinitas ya que para todo $m' \in \mathbb{N}$ con $m' > m$ también se verificará



Tenemos que B es simplemente conexo por ser contráctil pero no es localmente simplemente conexo. Esto se debe a que si tomamos el punto $b = (0, 1, 5)$ podemos tomar un abierto de la siguiente forma:

$$O = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} z = \lambda, \lambda \in]1, 2[\\ (x, y) = \lambda(a, b), \text{ con } (a, b) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \end{array} \right\}$$

Que gráficamente será



Y de forma análoga al ejemplo anterior, al no poder tomar ningún entorno de b simplemente conexo ya que este contendrá un trozo de cono cortado, que será un cilindro topológico y por tanto no será simplemente conexo.

Teorema 2.6. Sea B un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo y fijamos un punto $b_0 \in B$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

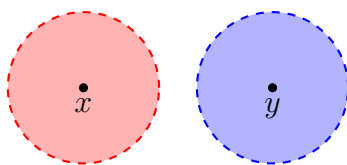
1. Para cada clase de conjugación de un subgrupo $H \leq \pi_1(B, b_0)$ existe un único recubridor (R, p) (salvo isomorfismo), y un punto $r_0 \in R$ tal que $p(r_0) = b_0$ y $H = p_*(\pi_1(R, r_0))$.
2. B tiene un recubridor universal.
3. B es semilocalmente simplemente conexo.

3. Superficies compactas

3.1. Superficies topológicas

En primer lugar recordaremos algunos conceptos de Topología I para poder definir los nuevos conceptos de esta sección.

Definición 3.1. Diremos que un espacio topológico X es T2 (o de **Haussdorff**, o que satisface el **segundo axioma de separación**) si $\forall x, y \in X$ existe un abierto U que contenga a x y un abierto V que contenga a y tal que $U \cap V = \emptyset$.



Definición 3.2. Decimos que un espacio topológico X es 2AN (o que cumple el **segundo axioma de numerabilidad**) si existe una base de la topología numerable.

Una vez recordados estos conceptos pasamos a las nuevas definiciones de esta sección:

Definición 3.3. Decimos que un espacio topológico X es **localmente euclídeo** si para cada $x \in X$ existe un entorno abierto suyo que es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n .

Definición 3.4. Decimos que S es una **superficie** si S es un espacio topológico tal que $\forall x \in S$ existe un abierto que contiene a x y que es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 . Además, pediremos que S sea T2 (o Hausdorff) y 2AN (segundo axioma de numerabilidad).

Ejemplo.

1. \mathbb{R}^2 y \mathbb{S}^2 son superficies.

Demostración. En el caso de \mathbb{R}^2 es trivial ya que para cualquier punto $x \in \mathbb{R}^2$ podemos considerar el total, \mathbb{R}^2 que es abierto, contiene a x y es homeomorfo a sí mismo.

En el caso de \mathbb{S}^2 podemos considerar para cada $x \in \mathbb{S}^2$ el conjunto $A = \mathbb{S}^2 \setminus \{-x\}$, es decir, la esfera quitándole la antípoda. Sabemos que A es abierto (ya que su complementario es $\{-x\}$ que es cerrado) y que contiene a x (ya que $0 \notin \mathbb{S}^2$). Además sabemos que A es homeomorfo a \mathbb{R}^2 que es un abierto de \mathbb{R}^2 (el total). \square

2. Cualquier abierto de una superficie es también una superficie. En particular, las bolas abiertas de \mathbb{R}^2 son también superficies.

Demostración. Consideramos A el abierto de la superficie S y un punto cualquiera $x \in A$. Por ser S una superficie existe un abierto U que contiene a x y que es homeomorfo (por h) a un abierto de \mathbb{R}^2 . Consideramos entonces $A \cap U$ que es abierto por ser intersección de dos abiertos y que además contiene a x . Podemos considerar la restricción en el dominio del homeomorfismo h a $A \cap U$ que seguirá siendo un homeomorfismo a un abierto de \mathbb{R}^2 . Como esto se verifica para todo $x \in A$ tendremos que A es una superficie. \square

3. Sea $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq r\} = \overline{B}(0, r)$. Entonces X no es una superficie porque para los puntos x con $\|x\| = r$ no existe un entorno abierto que lo contenga y que sea homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 .

Demostración. Tomamos un punto $x \in X$ con $\|x\| = r$. Si existiese U entorno abierto suyo homeomorfo a un abierto A de \mathbb{R}^2 entonces $\exists V$ entorno abierto de x contenido en U que es de la forma $V = B(x, r_0) \cap X$. Entonces V es homeomorfo a un abierto A' de \mathbb{R}^2 (ya que sería una restricción en el dominio del homeomorfismo entre $h : U \rightarrow A$). De esta forma tendríamos que como $V \setminus \{x\}$ es convexo debe ser simplemente conexo. Sin embargo, su imagen por homeomorfismo h será $A' \setminus \{h(x)\}$ y como $h(x)$ está en el abierto A' existe un radio $r'_0 > 0$ tal que $\overline{B}(h(x), r'_0) \subseteq A'$. Pero el lazo dado por la frontera de dicha bola, $Fr(\overline{B}(h(x), r'_0))$ no es homotópicamente constante en $\mathbb{R}^2 \setminus \{h(x)\}$. Por tanto este lazo no es homotópicamente constante en $A' \setminus \{h(x)\}$ por lo que $A' \setminus \{h(x)\}$ no es simplemente conexo. Esto prueba que $\overline{B}(0, r)$ no es una superficie. \square

4. $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ son ejemplos de superficies. Esto se debe a que su recubridor universal es \mathbb{R}^2 luego sus aplicaciones recubridoras nos dan homeomorfismos locales desde abiertos de \mathbb{R}^2 en abiertos regularmente recubiertos de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Observación. Si X es un espacio topológico localmente euclídeo entonces cumple las propiedades locales de \mathbb{R}^n . Por ejemplo, tiene una base de entornos numerable (es 1AN) y es localmente simplemente conexo. En particular, X ha de tener recubridor universal.

Definición 3.5. Sea S una superficie¹ y D un abierto dentro de S . Decimos que D es un **disco regular** en S si existe un abierto D' tal que $D \subsetneq D'$ y un homeomorfismo $h : D' \rightarrow \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\} = B((0, 0), 1)$ tal que $h(D) = \mathbb{D}_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < r\} = B((0, 0), r)$ con $0 < r < 1$.

Ejemplo.

¹siempre se entiende que es una superficie topológica

1. Consideramos en \mathbb{S}^2 :

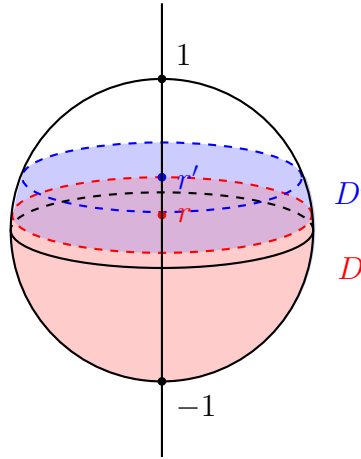
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z < r\} \text{ con } -1 < r < 1$$

En efecto es un disco regular.

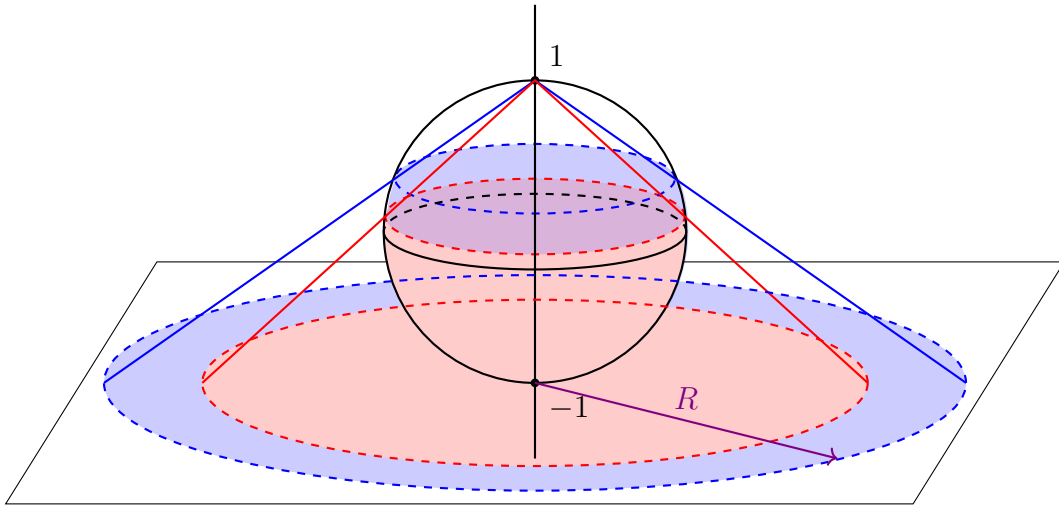
Demostración. Como $-1 < r < 1$ tenemos que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $r + \varepsilon < 1$. Podemos fijar dicho ε y consideramos el siguiente conjunto

$$D' = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z < r + \varepsilon = r'\} \text{ con } -1 < r' < 1$$

En efecto tendremos que para cualquier punto $(x, y, z) \in D$ se tiene que $z < r < r'$ luego $(x, y, z) \in D'$. Además podemos considerar un punto $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ tal que $z = r$ y tendremos que dicho punto está en $D' \setminus D$. Podemos concluir que $D \subsetneq D'$.



Buscamos ahora un homeomorfismo $h : D' \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $h(D) = \mathbb{D}_s$ con $0 < s < 1$. Pensamos en la proyección estereográfica desde el polo norte, $h : D' \rightarrow \mathbb{R}^2$. Gráficamente lo podemos ver de la siguiente forma:



□

y llegamos a que existe un radio $R > 0$ tal que podemos definir una nueva aplicación

$$\begin{aligned} h' : D' &\longrightarrow \mathbb{D} \\ (x, y, z) &\longmapsto \frac{1}{R}h(x, y, z) \end{aligned}$$

que será un homeomorfismo (por serlo h). Además, es fácil ver que $h'(D) = \mathbb{D}_s$ con $0 < s < 1$.

2. Consideramos la esfera sin el polo norte $D = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ en \mathbb{S}^2 . En este caso tendremos que no es un disco regular ya que el único abierto D' que contiene estrictamente a D es el total $D' = \mathbb{S}^2$ que sabemos que no es homeomorfo a ningún subconjunto de \mathbb{R}^2 .
3. $\mathbb{D}_r = B((0, 0), r) \subseteq \mathbb{R}^2$ es un disco regular en \mathbb{R}^2 para todo $r \in \mathbb{R}^+$. Sin embargo, \mathbb{D}_r no es regular en $S = \mathbb{D}_r$.
4. En \mathbb{R}^2 consideramos el siguiente conjunto

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$$

Entonces D no puede ser un disco regular.

Demostración. Si existiese un D' que contiene a D y contenido en \mathbb{R}^2 con $h : D' \rightarrow \mathbb{D}$ homeomorfismo tal que $h(D) = \mathbb{D}_r$ podemos tomar su restricción $h|_{D' \setminus D} : D' \setminus D \rightarrow \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_r$ que seguirá siendo un homeomorfismo. Tenemos además que $D \subsetneq D' \subseteq \mathbb{R}^2$ luego $D' \setminus D \subseteq \{(x, 0) : x \geq 0\}$. Entonces tendremos que $(D' \setminus D) \setminus \{(x, 0)\}$ no es convexo pero $h((D' \setminus D) \setminus \{(x, 0)\}) = (\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_r) \setminus \{h(x, 0)\}$ es conexo por lo que no pueden ser homeomorfos y llegamos a contradicción. \square

Lema 3.1. *Sea p_0 un punto de una superficie S . Dado un entorno U de p_0 existe D disco regular que contiene a p_0 y está contenido en U . En particular, los discos regulares forman una base de la topología.*

Demostración. Como S es una superficie, entonces para p_0 existe un abierto V que contiene a p_0 y un homeomorfismo

$$\varphi : V \rightarrow \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^2$$

sobre $\varphi(V)$ que ha de ser abierto de \mathbb{R}^2 . Ya que $\varphi(U \cap V)$ es un entorno de $\varphi(p_0)$ en \mathbb{R}^2 tenemos que existe un $R_0 > 0$ tal que

$$B(\varphi(p_0), R_0) \subseteq \varphi(U \cap V)$$

Tomamos

$$\begin{aligned} D &= \varphi^{-1} \left(B \left(\varphi(p_0), \frac{R_0}{2} \right) \right) \\ D' &= \varphi^{-1}(B(\varphi(p_0), R_0)) \end{aligned}$$

Componiendo φ con una transformación afín podemos llevar las bolas $B(\varphi(p_0), \frac{R_0}{2})$ y $B(\varphi(p_0), R_0)$ a $\mathbb{D}_{1/2}$ y \mathbb{D} respectivamente. \square

Definición 3.6. Sean S_1 y S_2 dos superficies conexas y disjuntas. Tomamos $D_1 \subseteq S_1$ y $D_2 \subseteq S_2$ discos regulares y consideramos un homeomorfismo $h : Fr(D_1) \rightarrow Fr(D_2)$. Sobre el espacio topológico $X = (S_1 \setminus D_1) \cup (S_2 \setminus D_2)$ consideramos la relación de equivalencia R dada por

$$x_1 R x_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \vee \\ \{x_1, x_2\} = \{z, h(z)\} \text{ con } z \in Fr(D_1) \end{cases}$$

Denotamos por $S_1 \# S_2$ al espacio topológico cociente de X bajo la relación de equivalencia R y lo llamaremos **suma conexa** de S_1 con S_2 .

Teorema 3.2. *El espacio topológico $S_1 \# S_2$ es una superficie conexa que, salvo homeomorfismo, no depende de los discos D_1 y D_2 regulares ni del homeomorfismo h entre sus fronteras.*

Observación.

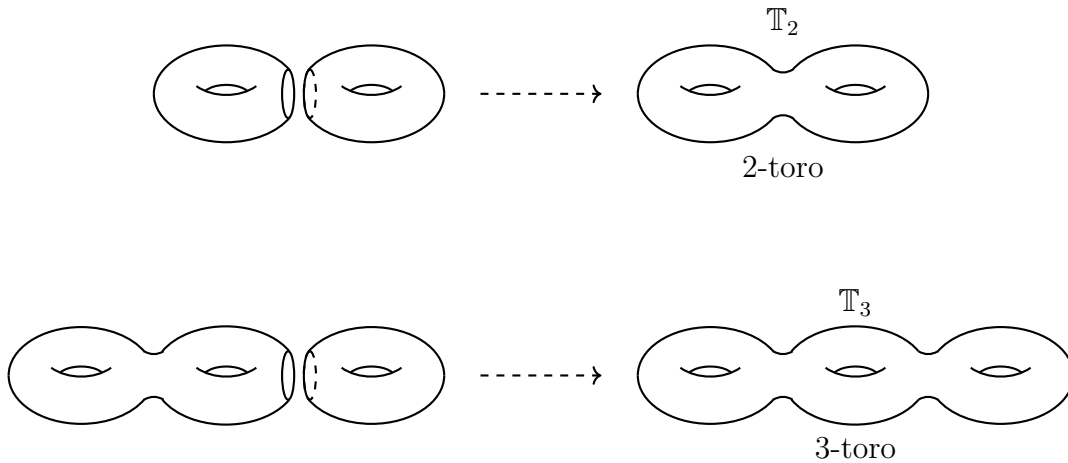
1. $S_1 \# S_2 = S_2 \# S_1$.
2. Si S_1 es una superficie cualquiera y S_2 es la esfera \mathbb{S}^2 , entonces

$$S_1 \# S_2 = S_1 \# \mathbb{S}^2 \cong S_1$$

3. Si tenemos n toros ($n \geq 2$) podemos definir

$$\mathbb{T}_n \equiv \text{suma conexa de los } n \text{ toros}$$

que recibe el nombre de **n -toro** o **esfera con n asas**.



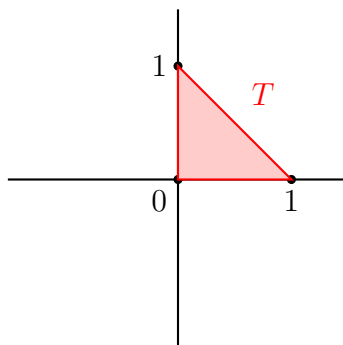
4. La suma conexa de n planos proyectivos la llamaremos² **n plano proyectivo**, \mathbb{RP}_n^2 .

²no confundir con \mathbb{RP}^n

3.2. Presentaciones poligonales de superficies

Definición 3.7. Consideramos el triángulo

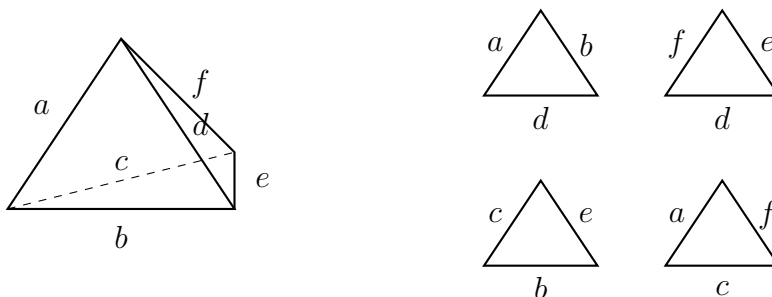
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$



Decimos que un espacio topológico X es un **triángulo** (topológico) si existe un homeomorfismo $h : T \rightarrow X$. En tal caso, llamaremos **vértices** de X a la imagen mediante h de los vértices de T y **aristas** de X a la imagen mediante h de las aristas de T .

Teorema 3.3 (Teorema de Radó). *Toda superficie compacta puede ser triangulada, es decir, la superficie puede verse como una unión finita triángulos (topológicos) de forma que dos triángulos distintos o bien son disjuntos o bien solo se intersecan en un vértice o solo en una arista.*

Observación. La idea de este teorema será que toda superficie compacta puede ser reconstruida pegando un número finito de triángulos a través de sus aristas.



Definición 3.8. Llamaremos presentación poligonal de una superficie compacta a una expresión de la forma

$$\mathcal{P} = \{a_1, \dots, a_n; w_1, \dots, w_m\} \text{ con } n, m \in \mathbb{N}$$

donde los a_i son símbolos y los w_j son expresiones del tipo

$$w_i = a_{i1}^{\varepsilon_{i1}} \dots a_{ik}^{\varepsilon_{ik}}$$

donde $k \geq 3$ (es decir, hay al menos 3 símbolos en la expresión w_i) y cada $\varepsilon_{il} \in \{1, -1\}$ para cada $l \in \{1, \dots, k\}$. Y además, el número de veces que aparece cada símbolo en el total de los w_i es 2.

Ejemplo.

1. $\mathcal{P} = \{a, b; aba^{-1}b^{-1}\}$.
2. $\mathcal{P} = \{a, b, c; aab, bcc^{-1}\}$.
3. $\mathcal{P} = \{a, b, c, d; aab, bcd, cdd^{-1}\}$ no es una presentación ya que la d aparece 3 veces.

Definición 3.9. A cada presentación poligonal \mathcal{P} le asociaremos un espacio topológico que denotaremos por $|\mathcal{P}|$ y que llamaremos la **realización geométrica de la presentación poligonal**. Su construcción es la siguiente

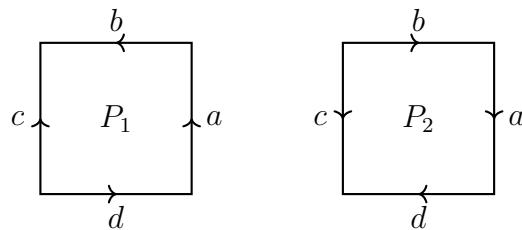
1. Para cada w_i consideramos un polígono P_i (regular) con número de lados igual al número de símbolos de w_i . Los P_i serán disjuntos entre sí.
2. Para cada P_i asociado a un w_i elegimos un lado cualquiera y en sentido contrario de las agujas del reloj, nombramos cada lado de P_i con el nombre del símbolo. Además a cada lado le daremos la orientación contraria a las agujas del reloj si el exponente es 1 y la orientación contraria si el exponente es -1 .
3. En el espacio topológico dado por la unión de todos los polígonos P_i consideramos la relación la equivalencia que identifica los lados con igual nombre mediante el único homeomorfismo (aplicación que lleva un lado en otro sin cambiar el sentido de las flechas).
4. Llamamos $|\mathcal{P}|$ al espacio cociente dado por la unión de los polígonos bajo la relación de equivalencia anterior.

Ejemplo. $\mathcal{P} = \{a, b, c, d; abc^{-1}d, a^{-1}b^{-1}cd^{-1}\}$

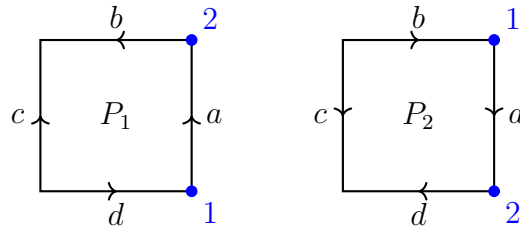
1.



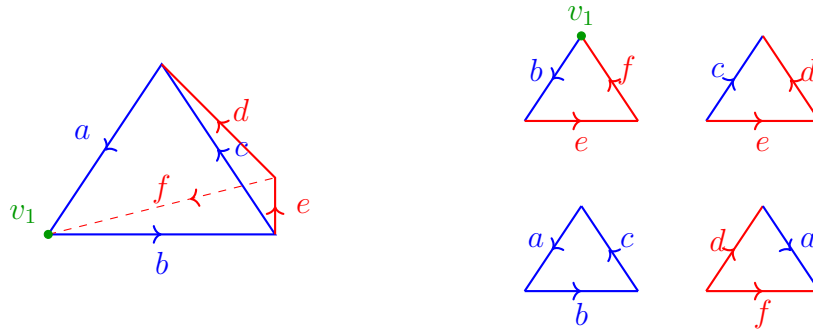
2.



3.



Ejemplo.



Tendríamos entonces $\mathcal{P} = \{a, b, c, d; abc, c^{-1}ed, a^{-1}d^{-1}f, bef\}$.

Proposición 3.4. *El espacio topológico $|\mathcal{P}|$ asociado a una presentación poligonal \mathcal{P} es una superficie compacta (posiblemente no conexa).*

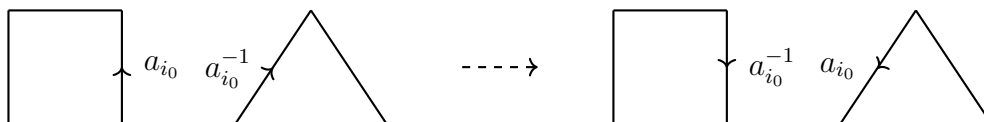
Observación. Toda superficie compacta debe tener una presentación poligonal y recíprocamente, toda presentación poligonal nos da una superficie compacta. Como una misma superficie puede tener muchas (de hecho infinitas) presentaciones poligonales, nuestro objetivo será dada una presentación poligonal \mathcal{P} llegar a otra presentación poligonal \mathcal{P}' reconocible que represente a la misma superficie

3.2.1. Transformaciones elementales

Dada una presentación poligonal \mathcal{P} vamos a ver una serie de transformaciones que, aunque cambian la presentación, no cambia la superficie asociada $|\mathcal{P}|$ (salvo homeomorfismo).

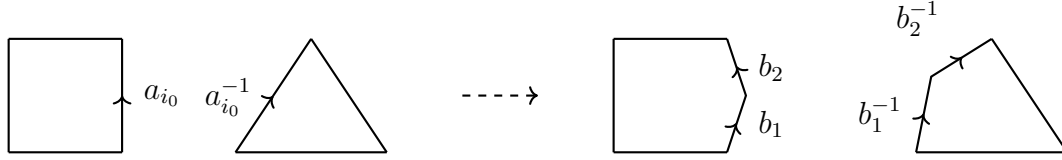
Renombrar

Dado un símbolo a_{i_0} en \mathcal{P} podemos cambiar su nombre por otro distinto b_{i_0} que no esté siendo usado. También podemos cambiar el exponente de un símbolo las dos veces que aparezca este, es decir, cambiaríamos a_i por a_i^{-1} (en ambos lados a la vez).



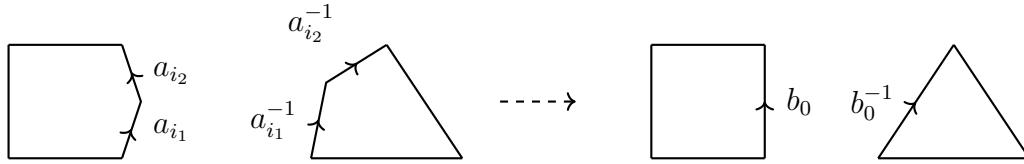
Subdividir

Podemos cambiar un símbolo a_{i_0} en \mathcal{P} por dos símbolos $b_1 b_2$ y $a_{i_0}^{-1}$ por $b_2^{-1} b_1^{-1}$, donde los símbolos b_1 y b_2 no están siendo usados.



Consolidar

Es el proceso contrario a subdividir. Si en las expresiones aparecen $a_{i_1} a_{i_2}$ y/o $a_{i_2}^{-1} a_{i_1}^{-1}$ dos veces (una de cada o dos de la misma), entonces podemos cambiar $a_{i_1} a_{i_2}$ por b_0 y $a_{i_2}^{-1} a_{i_1}^{-1}$ por b_0^{-1} (donde b_0 es un símbolo nuevo). Esto siempre se podrá hacer de forma que ninguna expresión se quede con menos de 3 símbolos.



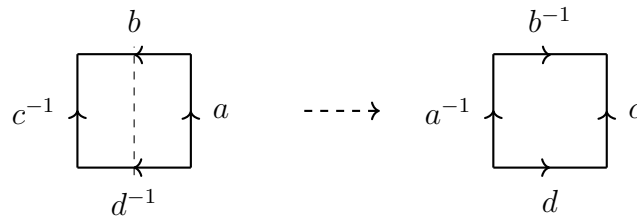
Reflejar

Dada una expresión

$$w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

la podemos cambiar por

$$w'_i = a_{i_l}^{-\varepsilon_l} \dots a_{i_2}^{-\varepsilon_2} a_{i_1}^{-\varepsilon_1}$$



Rotar

Dada una expresión

$$w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \dots a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

la podemos cambiar por

$$w'_i = a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \dots a_{i_l}^{\varepsilon_l} a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$$



Cortar

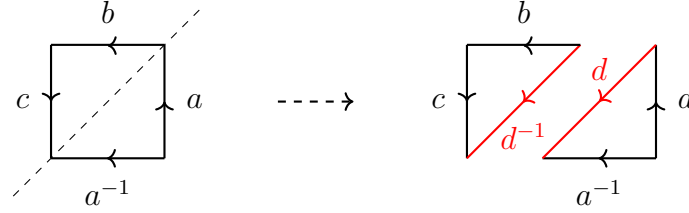
Dada una expresión

$$w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \dots a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

podemos sustituirla por las dos expresiones

$$w'_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} b, \quad w''_i = b^{-1} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \dots a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

Esto se podrá hacer siempre que w'_i y w''_i se queden con al menos de 3 símbolos.



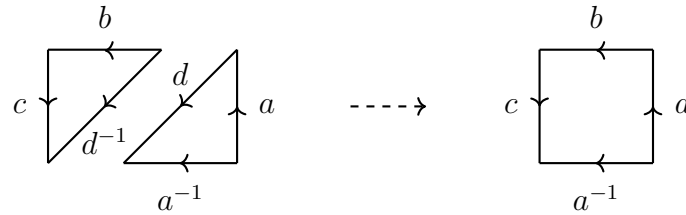
Pegar

Es la operación opuesta a cortar. Dadas dos expresiones de la forma

$$w'_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{i_0}, \quad w''_i = a_{i_0}^{-1} a_{j_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{j_l}^{\varepsilon_l}$$

las podemos sustituir por una única

$$w = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{j_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{j_l}^{\varepsilon_l}$$



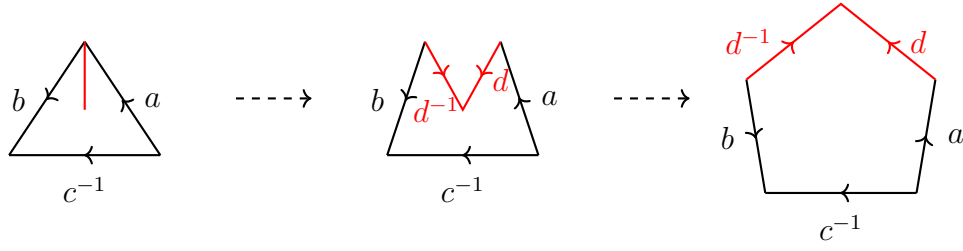
Desdoblar

Dada una expresión

$$w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \dots a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

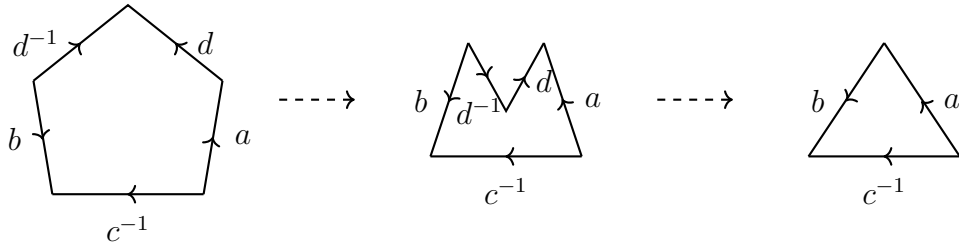
le podemos añadir un símbolo nuevo b cambiando la expresión anterior por

$$w'_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} b b^{-1} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \dots a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$



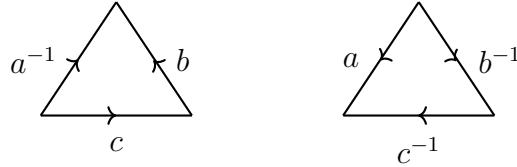
Doblar

Es el proceso contrario a desdoblar. Si una expresión w tiene de forma consecutiva un símbolo y el mismo con exponente cambiado podemos quitar dicho símbolo de la expresión. Esto se podrá hacer siempre que al quitarle estos símbolos queden al menos 3.

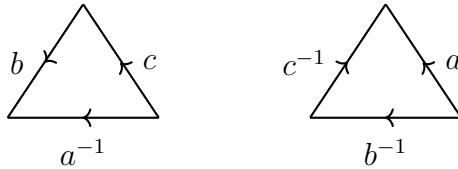


Ejemplo.

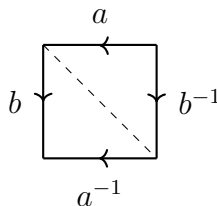
- Consideramos la presentación $\mathcal{P} = \{a, b, c ; a^{-1}cb, ac^{-1}b^{-1}\}$. Veamos qué superficie $|\mathcal{P}|$ tiene asociada. De la presentación podemos obtener los triángulos $w_1 = a^{-1}cb$ y $w_2 = ac^{-1}b^{-1}$.



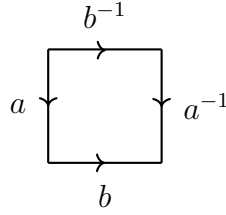
Podemos ahora rotar w_1 y w_2 obteniendo $w'_1 = ba^{-1}c$ y $w'_2 = c^{-1}b^{-1}a$.



Estamos ahora en condiciones de pegar ambos triángulos a través de c obteniendo $w_0 = ba^{-1}b^{-1}a$.



Con una última rotación obtenemos $w'_0 = aba^{-1}b^{-1}$ que es fácil ver que se corresponde a un toro.

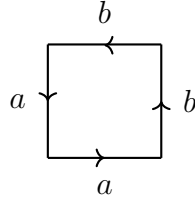


Podemos resumir todo el proceso como

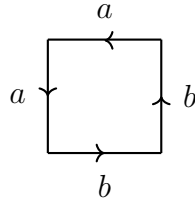
$$a^{-1}cb, ac^{-1}b^{-1} \sim ba^{-1}c, c^{-1}b^{-1}a \sim ba^{-1}b^{-1}a \sim aba^{-1}b^{-1}$$

Obtenemos entonces $|\mathcal{P}| \equiv \mathbb{T}$.

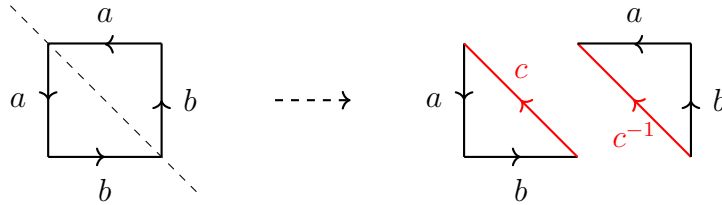
2. $\mathcal{P} = \{a, b; aabb\}$. Partimos por tanto de $w_0 = aabb$.



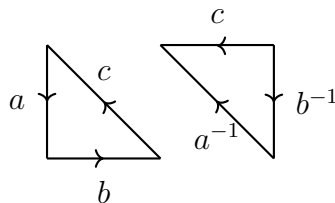
Le aplicamos una rotación para obtener $w'_0 = abba$.



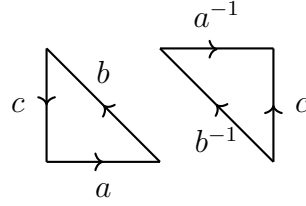
Podemos ahora cortar obteniendo $w_1 = abc$ y $w_2 = c^{-1}ba$.



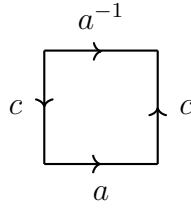
Aplicamos ahora una simetría a w_2 obteniendo $w'_2 = a^{-1}b^{-1}c$



Rotamos ambos polígonos para obtener $w'_1 = cab$ y $w''_2 = b^{-1}ca^{-1}$



Finalmente podemos pegar ambos triángulos por b obteniendo $w''_0 = caca^{-1}$

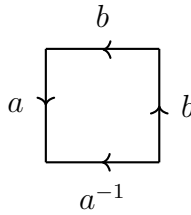


Podemos resumir todo el proceso como

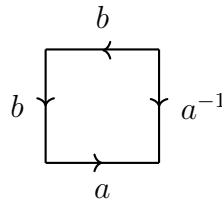
$$aabb \sim abba \sim abc, \quad c^{-1}ba \sim abc, \quad a^{-1}b^{-1}c \sim cab, \quad b^{-1}ca^{-1} \sim caca^{-1}$$

La expresión final es $caca^{-1}$ que intuitivamente corresponde a la botella de Klein. Para ver esto tenemos que pensar en identificar inicialmente el lado a con a^{-1} lo que crearía un cilindro. Si ahora identificáramos los extremos de forma directa tendríamos un toro (que es el ejemplo anterior) pero tenemos que se unen de manera inversa. Esto haría que tuviese que “atravesarse a sí mismo” y al unirse con el otro extremo llegaríamos a la botella de Klein.

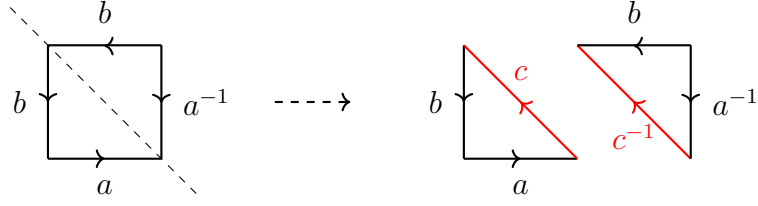
3. $\mathcal{P} = \{a, b ; aa^{-1}bb\}$. Partimos de $w_0 = aa^{-1}bb$.



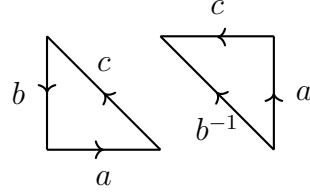
Podemos ahora aplicar una rotación obteniendo $w'_0 = baa^{-1}b$.



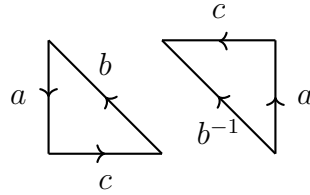
Cortamos obteniendo $w_1 = bac$ y $w_2 = c^{-1}a^{-1}b$.



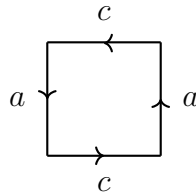
Aplicamos una simetría a w_2 obteniendo $w'_2 = b^{-1}ac$



Rotamos ahora w_1 triángulos obteniendo $w'_1 = acb$



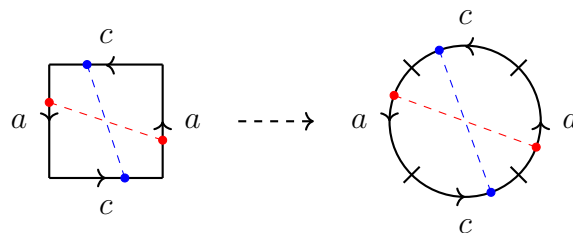
Unimos finalmente a través de b obteniendo $w''_0 = acac$.



Podemos resumir el proceso como

$$aa^{-1}bb \sim baa^{-1}b \sim bac, \quad c^{-1}a^{-1}b \sim bac, \quad b^{-1}ac \sim acb, \quad b^{-1}ac \sim acac$$

Tenemos que $|\mathcal{P}|$ es el plano proyectivo \mathbb{RP}^2 . Para verlo podemos ver la última figura como una circunferencia donde se identifica cada punto del borde con su antípoda.



3.3. La clasificación de las superficies compactas

Proposición 3.5. Sean S_1 y S_2 dos superficies compactas dadas respectivamente como $|\mathcal{P}_1|$ y $|\mathcal{P}_2|$ para las presentaciones

$$\mathcal{P}_1 = \{a_1, \dots, a_n; w_1\} \quad y \quad \mathcal{P}_2 = \{b_1, \dots, b_k; w_2\}$$

donde cada presentación tiene una única expresión³. Entonces $S_1 \# S_2$ tiene como presentación

$$\mathcal{P} = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k; w_1 w_2\}$$

Corolario 3.5.1. Una presentación de

1. la esfera es $aa^{-1}bb^{-1}$.
2. el plano proyectivo es $aa^{-1}bb$.
3. el n -toro o esfera de n asas \mathbb{T}_n es $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$.
4. el n -plano proyectivo \mathbb{RP}_n^2 es $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$

Demostración. Los casos 1., 2. y 3. son claros (en el caso 3. se puede ver fácilmente usando la proposición anterior). Estudiemos el caso que nos queda. Sabemos que

$$\mathbb{RP}_n^2 = \mathbb{RP}^2 \#^{(n)} \mathbb{RP}^2$$

Usamos que \mathbb{RP}^2 tiene por presentación $bcbc$. Por la proposición anterior tenemos que una presentación de \mathbb{RP}_n^2 es

$$b_1 c_1 b_1 c_1 b_2 c_2 b_2 c_2 \dots b_n c_n b_n c_n$$

Podemos consolidar y llamar $a_i = b_i c_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y tendríamos

$$b_1 c_1 b_1 c_1 b_2 c_2 b_2 c_2 \dots b_n c_n b_n c_n \sim a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$$

□

Observación. Del ejemplo anterior y del corolario se deduce que

$$\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 = \mathbb{RP}_2^2 \equiv \text{Botella de Klein}$$

3.3.1. Determinación de $|\mathcal{P}|$

Nuestro objetivo ahora es llegar a que si tenemos una superficie compacta y conexa S , entonces tenemos que

$$S \stackrel{\text{homeo.}}{\cong} \begin{cases} \mathbb{S}^2 & : aa^{-1}bb^{-1} \\ \mathbb{RP}^2 & : aa^{-1}bb \\ \mathbb{T}_n & : a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \\ \mathbb{RP}_n^2 & : a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n \end{cases}$$

Vamos a partir de una presentación poligonal \mathcal{P} y vamos a ver un algoritmo que nos dirá que la superficie compacta $|\mathcal{P}|$ en caso de ser conexa será homeomorfa a alguna de las anteriores.

³esto implica que ambas son conexas

Algoritmo de determinación de $|\mathcal{P}|$

1. El primer paso del algoritmo es diferenciar las componentes conexas de la siguiente forma. Tomamos la primera expresión w_1 y a esta le pegamos cualquier otra expresión w_i que tenga un símbolo común. Entonces me queda una nueva expresión w'_1 a la que le volvemos a aplicar el paso 1 hasta obtener una expresión donde todos sus símbolos tienen a su pareja en esa expresión. Esta expresión dará (en el cociente) una componente conexa de $|\mathcal{P}|$. Solamente nos fijaremos entonces en estudiar presentaciones poligonales con una única expresión (ya que queremos que sea conexa).
2. Ahora de nuestra única expresión le eliminamos los símbolos que aparezcan adyacentes con ellos mismos y con distinto exponente (doblabamos siempre que podamos). Esto lo podremos hacer siempre que al eliminar aa^{-1} nos queden al menos 4 símbolos⁴. Si no pudiéramos quitar aa^{-1} de w es porque tenemos o $w = aa^{-1}bb$ o bien $w = aa^{-1}bb^{-1}$. En el primer caso tendremos $|\mathcal{P}| \cong \mathbb{RP}^2$ y en el segundo tendremos $|\mathcal{P}| \cong \mathbb{S}^2$.
3. Si nuestra expresión es de la forma $w = y_1ay_2a$ donde el símbolo a aparece dos veces con el mismo exponente (y los y_1, y_2 son conjuntos de expresiones cualesquiera contenidas en w), entonces podré cambiar w por $w' = y_1y_2^{-1}aa$ donde si $y_2 = b_1^{\varepsilon_1} \dots b_k^{\varepsilon_k}$ entonces $y_2^{-1} = b_k^{-\varepsilon_k} \dots b_1^{-\varepsilon_1}$.

Demostración. Veamos brevemente una demostración de por qué se puede hacer este cambio. Si tenemos nuestra expresión $w = y_1ay_2a$ podemos realizar un corte obteniendo $w_1 = y_1ac$ y $w_2 = c^{-1}y_2a$. Buscamos ahora pegar a través de a para lo que reflejamos w_2 obteniendo $w'_2 = a^{-1}y_2^{-1}c$ y rotamos w_1 obteniendo $w'_1 = cy_1a$. Estamos ya en condiciones de poder pegar w'_1 y w'_2 a través de a de donde obtenemos una nueva expresión $w'_0 = cy_1y_2^{-1}c$. Podemos renombrar $c = a$ y obtenemos $w''_0 = ay_1y_2^{-1}a$. Con una última rotación llegamos a $w'''_0 = y_1y_2^{-1}aa$ que es lo que queríamos obtener. \square

En una cantidad finita de pasos la expresión inicial pasa a ser de la forma

$$w = ya_1a_1a_2a_2 \dots a_ka_ka_k$$

donde en y solo aparecen parejas de símbolos con distinto exponente (cada pareja). Además, usando el paso 2., es decir, eliminando las expresiones adyacentes en y , podemos suponer además que cada símbolo en y con su pareja no son adyacentes.

Podemos entonces hacer algunas transformaciones elementales para cambiar a una expresión $w' = y'a_1a_1 \dots a_ka_ka_k$ de forma que todos los vértices del polígono asociado a w' son el mismo punto en el cociente (en $|\mathcal{P}|$).

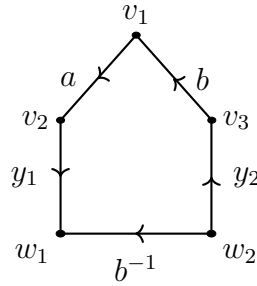
Demostración. Supongamos que existen vértices en el polígono asociado a w que no son el mismo punto en el cociente y elegimos v_0 un vértice cualquiera

⁴ya que en este caso tienen que estar emparejados

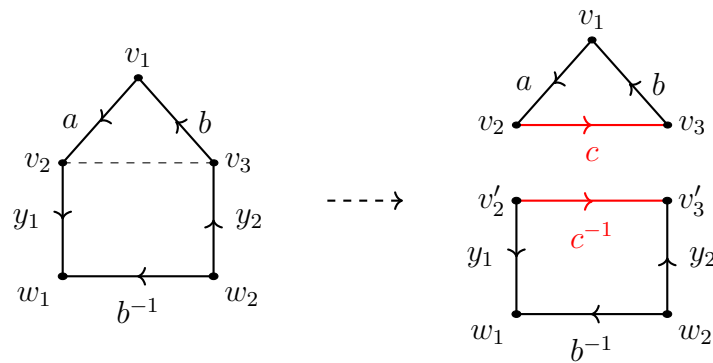
y tenemos que en el conjunto $[v_0]$ hay al menos 2 vértices del polígono (ya que en otro caso tendríamos que está entre un lado a y otro a^{-1} y podríamos doblar).

Veamos que se pueden hacer transformaciones elementales para quitarle un vértice a $[v_0]$. De esta forma, en una cantidad finita de pasos $[v_0]$ solo tendrá un representante y así estaremos en la situación mencionada previamente y podremos doblar.

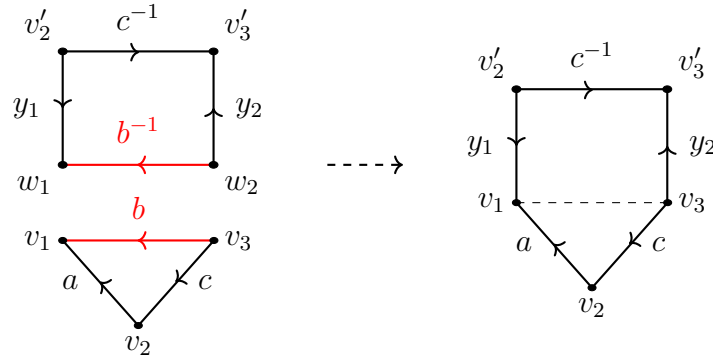
Para ello tomamos un lado a cuyo vértice inicial v_1 esté en $[v_0]$ y el final v_2 no lo esté ($v_1 \in [v_0]$, $v_2 \notin [v_0]$). Tenemos entonces una situación como la siguiente



Donde tendremos que $w_1 \in [v_0]$ por ser el final de b^{-1} y v_1 el final de b . Tendremos además que $v_3 \in [v_0]$ si y solo si $w_2 \in [v_0]$ por ser el principio de b y el de b^{-1} respectivamente. Por tanto $[v_0]$ tendrá o 2 o 4 elementos. Podemos ahora hacer un corte de la siguiente forma:



Podemos ahora colocar convenientemente las piezas (rotando el triángulo que nos queda superiormente y colocándolo debajo del cuadrado) para poder pegar a través de b de la siguiente forma:



En este polígono final tendremos que $v_1 \in [v_0]$ y $v_2 \notin [v_0]$. Además tendremos que $v'_2 \in [v_2]$ por lo que $v'_2 \notin [v_0]$ y $v'_3 \in [v_3]$. Tenemos ahora que estudiar los dos casos mencionados anteriormente:

- Si $v_3 \notin [v_0]$ tendríamos al principio que $[v_0]$ tenía 2 elementos y ahora tiene 1.
- Si $v_3 \in [v_0]$ tendríamos al principio que $[v_0]$ tenía 4 elementos y ahora tiene 3.

Por tanto, en este proceso para el nuevo polígono hay un vértice menos en $[v_0]$. Aplicando este proceso un número finito de veces podremos llegar a la siguiente situación:

$$w = ya_1a_1\dots a_ka_k$$

donde solo hay un vértice en el cociente $[v_0]$.

- Si $y = \emptyset$, entonces tendríamos $|\mathcal{P}| \stackrel{\text{homeo.}}{\cong} \mathbb{RP}_k^2$.
- Si $y \neq \emptyset$, entonces en y aparecen aristas con un exponente y su opuesto y, además de forma no adyacente. Debe ocurrir entonces que

$$y = \dots b \dots c \dots b^{-1} \dots c^{-1} \dots$$

□

4. Si tenemos una expresión del tipo

$$w = y_1by_2cy_3b^{-1}y_4c^{-1}y_5a_1a_1\dots a_ka_k$$

entonces, cortando y pegando podemos pasar a una expresión del tipo

$$w' = ybcb^{-1}c^{-1}a_1a_1\dots a_ka_k$$

En un proceso finito nos quedará:

$$w'' = b_1c_1b_1^{-1}c_1^{-1}\dots b_lc_l^{-1}c_l^{-1}a_1a_1\dots a_ka_k$$

5. Las expresiones del tipo $y b c b^{-1} c^{-1} a a$ las podemos cambiar por transformaciones elementales por

$$y' a a b b c c$$

Como conclusión final, la expresión inicial se puede alterar haciendo transformaciones elementales del tipo

1. $a a^{-1} b^{-1} \equiv \mathbb{S}^2$.
2. $a a^{-1} b b \equiv \mathbb{RP}^2$.
3. $a_1 a_1 \dots a_k a_k \equiv \mathbb{RP}_k^2$ para $k \geq 2$.
4. $b_1 c_1 b_1^{-1} c_1^{-1} \dots b_l c_l b_l^{-1} c_l^{-1} \equiv \mathbb{T}_l$.

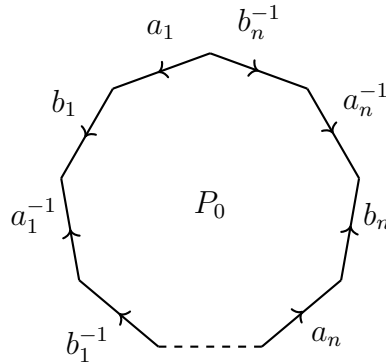
Corolario 3.5.2. Si S es una superficie compacta (y conexa) entonces S es homeomorfa a \mathbb{S}^2 , al n -toro o al k -plano proyectivo (para $k \geq 1$).

Veamos ahora que todas esas superficies son distintas calculando su grupo fundamental. Ya conocemos los siguientes:

$$\begin{array}{lll} \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^2) \equiv \text{trivial} \\ \mathbb{RP}^2 & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{RP}^2) \equiv \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

El grupo fundamental del n -toro

Calculemos el grupo fundamental del n -toro.



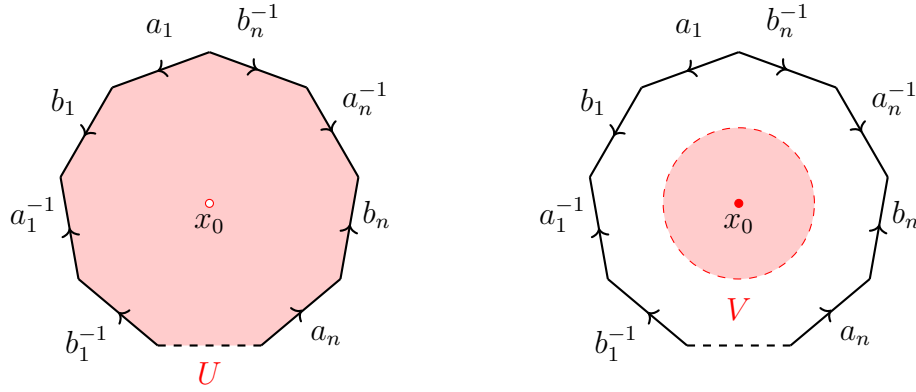
Este será P_0 bajo la relación de equivalencia R que identifica a los lados con igual nombre, es decir

$$\mathbb{T}_n = \frac{P_0}{R}$$

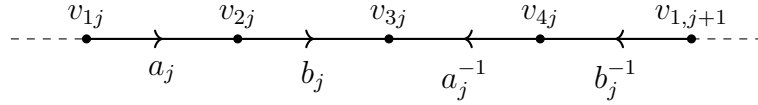
Buscamos aplicar Seifert-van Kampen y tomamos

$$U = \mathbb{T}_n \setminus \{x_0\}$$

$V \equiv$ disco abierto centrado en x_0 que no toque las aristas



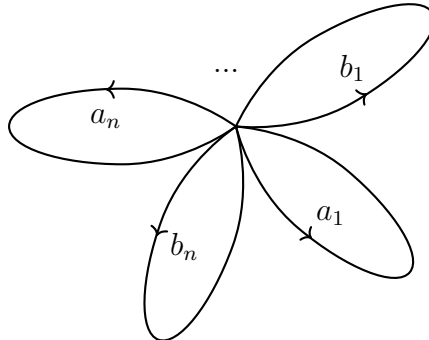
Es claro que $\pi_1(V)$ es trivial por ser un disco. Para calcular el grupo fundamental de U comenzamos considerando un retracts de deformación suyo. Es fácil ver que el borde (en el cociente) es retracto de deformación de U . Además, todos los vértices del borde tendrán la misma clase de equivalencia bajo R . Para ver esto último vamos a numerar los vértices como v_{ij} con $i \in \{1, \dots, 4\}$ y $j \in \{1, \dots, n\}$ de forma que v_{1j} sea el principio de a_j , v_{2j} el principio de b_j , v_{3j} será el principio de a_j^{-1} y v_{4j} será el principio de b_j^{-1} para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Es decir,



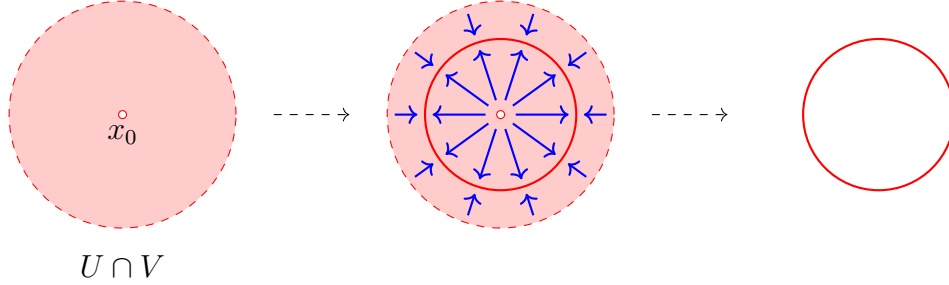
Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} [v_{1j}] &= [v_{4j}] \text{ por ser principio de } a_j \text{ y } a_j^{-1} \text{ respectivamente} \\ [v_{4j}] &= [v_{3j}] \text{ por ser final de } b_j^{-1} \text{ y } b_j \text{ respectivamente} \\ [v_{3j}] &= [v_{2j}] \text{ por ser final de } a_j^{-1} \text{ y } a_j \text{ respectivamente} \\ [v_{2j}] &= [v_{1,j+1}] \text{ por ser principio de } b_j \text{ y } b_j^{-1} \text{ respectivamente} \end{aligned}$$

Como la j es arbitraria se verificará para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ (entendiendo que $n+1$ vuelve a ser el 1) y por tanto todos los vértices son de la misma clase de equivalencia. Nos quedará algo como



por lo que $\pi_1(U) \cong F(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)$. Además el grupo de la intersección es claro que es $\pi_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$ generado por $[\alpha]$ ya que tiene a una circunferencia centrada en x_0 y de radio menor que el radio de V por retracts de deformación.



Aplicando Seifert-van Kampen tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{T}_n) = \frac{F(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)}{\langle i_{U*}([\alpha]) \rangle_N} = \frac{F(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)}{\langle ab_1a_1^{-1}b^{-1} \dots a_na_na_n^{-1}b_n^{-1} \rangle_N}$$

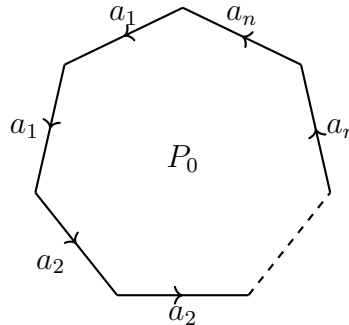
Este grupo no será conmutativo en general pero sí lo será para el 1-toro, en cuyo caso tendremos que

$$\pi_1(\mathbb{T}_1) = \frac{F(a_1, b_1)}{\langle a_1b_1a_1^{-1}b^{-1} \rangle_N}$$

y en el cociente se verificará que $[a_1][b_1][a_1]^{-1}[b_1]^{-1} = 1$ por lo que se tendrá que $[a_1][b_1] = [b_1][a_1]$.

El grupo fundamental de \mathbb{RP}_n^2

Pasamos ahora a calcular el grupo fundamental de \mathbb{RP}_n^2 de forma análoga a como lo hicimos para el n -toro.



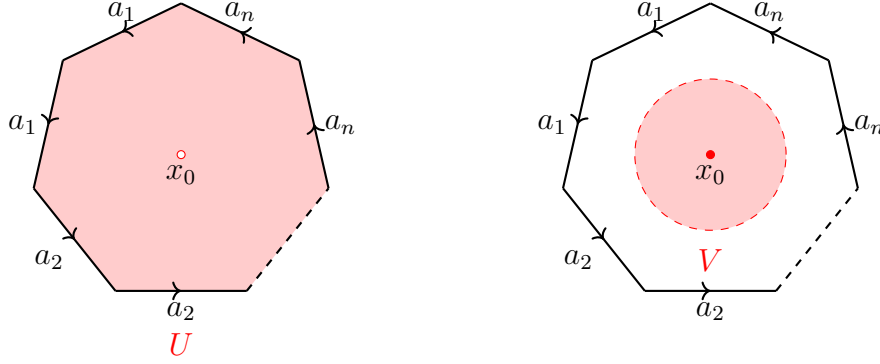
\mathbb{RP}_n^2 será P_0 bajo la relación de equivalencia R que identifica a los lados con igual nombre, es decir

$$\mathbb{RP}_n^2 = \frac{P_0}{R}$$

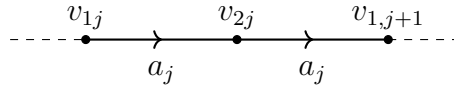
Buscamos aplicar Seifert-van Kampen y tomamos

$$U = \mathbb{RP}_n^2 \setminus \{x_0\}$$

$V \equiv$ disco abierto centrado en x_0 que no toque las aristas



Es claro que $\pi_1(V)$ es trivial por ser un disco. Para calcular el grupo fundamental de U comenzamos considerando un retracts de deformación suyo. Es fácil ver que el borde (en el cociente) es retracto de deformación de U . Además, todos los vértices del borde tendrán la misma clase de equivalencia bajo R . Para ver esto último vamos a numerar los vértices como v_{ij} con $i \in \{1, 2\}$ y $j \in \{1, \dots, n\}$ de forma que v_{1j} sea el principio de la primera vez que aparece a_j y v_{2j} el principio de la segunda vez que aparece la arista a_j para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Es decir,

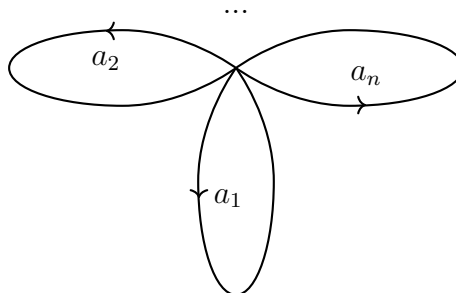


Entonces tenemos que

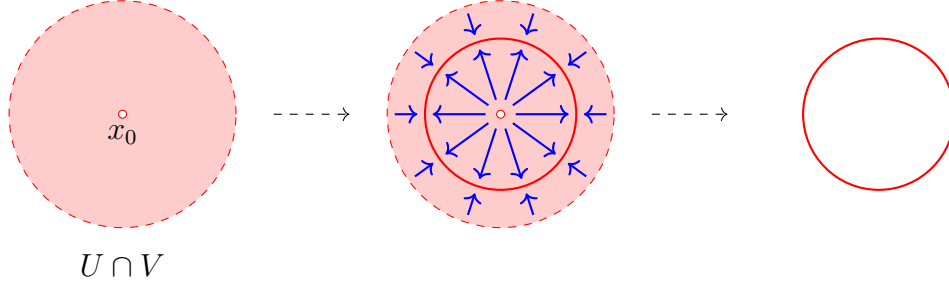
$[v_{1j}] = [v_{2j}]$ por ser principio de la 1ª a_j y el principio de la 2ª a_j respectivamente

$[v_{2j}] = [v_{1,j+1}]$ por ser el final de la 1ª a_j y el final de la 2ª a_j respectivamente

Como la j es arbitraria se verificará para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ (entendiendo que $n + 1$ vuelve a ser el 1) y por tanto todos los vértices son de la misma clase de equivalencia. Nos quedará algo como



por lo que $\pi_1(U) \cong F(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)$. Además el grupo de la intersección es claro que es $\pi_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$ generado por $[\alpha]$ ya que tiene a una circunferencia centrada en x_0 y de radio menor que el radio de V por retracts de deformación.



Aplicando Seifert-van Kampen tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{RP}_n^2) = \frac{F(a_1, \dots, a_n)}{\langle i_{U*}([\alpha]) \rangle_N} = \frac{F(a_1, \dots, a_n)}{\langle a_1 a_1 \dots a_n a_n \rangle_N}$$

Definición 3.10. Recordemos que dado un grupo G se define el **conmutador** de G por

$$[G : G] = \langle \{ghg^{-1}h^{-1} : g, h \in G\} \rangle_N$$

El **grupo abelianizado** de G es

$$\frac{G}{[G : G]}$$

Definición 3.11. En el caso de un espacio topológico X , el abelianizado de $\pi_1(X)$ (suponiendo que es arcoconexo) se suele llamar **primer grupo de homología** de X y se denota por $H_1(X)$ (o bien $H_1(X, \mathbb{Z})$).

Observación. Dos grupos G_1 y G_2 podrían tener el mismo grupo abelianizado aunque no sean isomorfos.

Corolario 3.5.3. *El primer grupo de homología de las superficies compactas es*

$$\begin{aligned} H_1(\mathbb{S}^2) &= \{0\} \\ H_1(\mathbb{RP}^2) &= \mathbb{Z}_2 \\ H_1(\mathbb{T}_n) &= \mathbb{Z} \times \overset{(2n)}{\dots} \times \mathbb{Z} \\ H_1(\mathbb{RP}_n^2) &= \mathbb{Z} \times \overset{(n-1)}{\dots} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

Corolario 3.5.4. *Si S es una superficie conexa y compacta, entonces S es homeomorfa a una y solo una de las siguientes superficies*

$$\mathbb{S}^2, \mathbb{T}_n \text{ o } \mathbb{RP}_n^2, \text{ con } n \geq 1$$

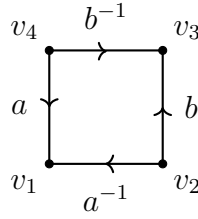
3.4. Característica de Euler y orientabilidad

Definición 3.12. Dada una presentación poligonal \mathcal{P} denotamos por V , A y C al número de vértices, de aristas y caras (o número de polígonos de \mathcal{P}) respectivamente donde el número de vértices y aristas está visto en el espacio cociente $|\mathcal{P}|$. Definimos entonces la **característica de Euler** de \mathcal{P} como

$$\chi(\mathcal{P}) = V - A + C$$

Ejemplo.

1. Consideramos la presentación poligonal de \mathbb{S}^2 , $\mathcal{P} = \{a, b; aa^{-1}bb^{-1}\}$:



Tenemos entonces que

$$C = 1$$

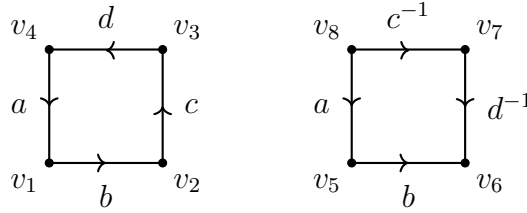
$$A = 2$$

$$V = 3$$

Para contar el número de vértices hemos tenido en cuenta que $[v_2] = [v_4]$ por ser el principio de a^{-1} y a respectivamente. Por tanto tenemos que

$$\chi(\mathcal{P}) = 1 - 2 + 3 = 2$$

2. Consideramos ahora la presentación $\mathcal{P} = \{a, b, c, d; abcd, abd^{-1}c^{-1}\}$



Tendremos ahora

$$C = 2$$

$$A = 4$$

$$V = 3$$

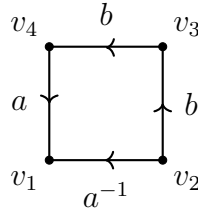
Donde para contar el número de vértices hemos tenido en cuenta que

$$[v_4] = [v_5] = [v_2] = [v_8]$$

Por tanto

$$\chi(\mathcal{P}) = 2 - 4 + 3 = 1$$

3. Consideramos ahora la presentación poligonal de \mathbb{RP}^2 , $\mathcal{P} = \{a, b; aa^{-1}bb\}$



Y tendremos que

$$C = 1$$

$$A = 2$$

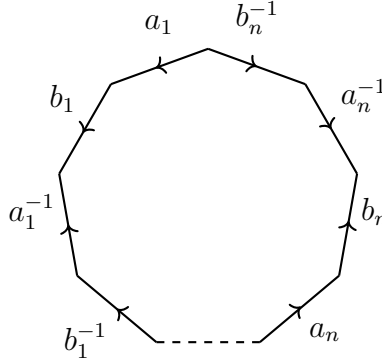
$$V = 2$$

Donde hemos tenido en cuenta que $[v_2] = [v_4] = [v_3]$. Por tanto

$$\chi(\mathcal{P}) = 1 - 2 + 2 = 1$$

4. Pensamos ahora en la presentación del n -toro,

$$\mathcal{P} = \{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n; a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}\}$$



Donde ya demostramos anteriormente que solo hay un vértice por lo que tendremos

$$C = 1$$

$$A = 2n$$

$$V = 1$$

En cuyo caso tendremos que

$$\chi(\mathcal{P}) = 1 - 2n + 1 = 2 - 2n = 2(1 - n)$$

A diagram of a polygon with vertices labeled a_1, a_2, \dots, a_n . The edges are labeled a_1, a_2, \dots, a_n . The edge a_1 is solid, while the edge a_n is dashed.

$$\begin{aligned} C &= 1 \\ A &= n \\ V &= 1 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\chi(\mathbb{S}^2) &= 2 \\ \chi(\mathbb{RP}^2) &= 1 \\ \chi(\mathbb{T}_n) &= 2 - 2n \ (\leq 0), \ n \geq 1 \\ \chi(\mathbb{RP}_n^2) &= 2 - n \ (\leq 0), \ n \geq 2\end{aligned}$$

Decimos que una superficie compacta es **no orientable** si tiene una presentación poligonal no orientada.

Proposición 3.7. *Sea S una superficie compacta y conexa, entonces son equivalentes:*

1. S es orientable.
2. S tiene una presentación poligonal con una sola expresión que es orientada.
3. Cualquier presentación poligonal de S de una única expresión es orientada.

Observación. Nos planteamos ahora estudiar cuáles son las superficies compactas orientables y con las presentaciones que conocemos tenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
 aa^{-1}bb^{-1} \text{ es una presentación de } \mathbb{S}^2 &\Rightarrow \mathbb{S}^2 \text{ es orientable} \\
 aabb \text{ es una presentación de } \mathbb{RP}^2 &\Rightarrow \mathbb{RP}^2 \text{ es no orientable} \\
 a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1} \text{ es una presentación de } \mathbb{T}_n &\Rightarrow \mathbb{T}_n \text{ es orientable } (n \geq 1) \\
 a_1a_1\dots a_na_n \text{ es una presentación de } \mathbb{RP}_n^2 &\Rightarrow \mathbb{RP}_n^2 \text{ es no orientable } (n \geq 2)
 \end{aligned}$$

Por tanto tenemos ya una manera de distinguir entre las superficies con característica de Euler 0 o negativa par estudiando la orientabilidad de la superficie.

Corolario 3.7.1. *La característica de Euler y la orientabilidad de una superficie compacta S la determinan.*