

Cálculo I

Examen IX

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Cálculo I

Examen IX

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2024

Asignatura Cálculo I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Luis Gámez Ruiz.

Descripción Examen de evaluación continua.

Fecha 12 de noviembre de 2024.

Ejercicio 1.

- a) [0.5 puntos] Definición de *Sucesión convergente*.
- b) [0.5 puntos] Definición de *Sucesión de Cauchy*.
- c) [2 puntos] **Enuncia (0.5p) y demuestra (1.5p)** el *Teorema de complitud de \mathbb{R}* . En la demostración, supondremos conocido el *Teorema de Bolzano-Weierstrass*, así como que toda sucesión de Cauchy es acotada.

Ejercicio 2.

- a) [1 punto] Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, demuestra que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (es conocida como la *desigualdad de las medias*). Analiza en tu demostración (y especifica) cuándo puede darse la igualdad.
- b) [4 puntos] Consideremos la sucesión $\{x_n\}$, definida mediante:

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{5}{x_n}}{2}$$

(observa que la fórmula recurrente es una media aritmética).

Se pide:

- Probar que $\sqrt{5} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
- Probar que $\{x_n\}$ es decreciente.
- ¿Es $\{x_n\}$ convergente? Justifica tu respuesta y, en caso afirmativo, calcula el límite.
- Calcula también $\lim \left\{ \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n^2 - 5} \right\}$.

Ejercicio 3. [2 puntos] Estudia la convergencia de la siguiente sucesión calculando, en su caso, el límite:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\}$$