Álgebra II
Examen III

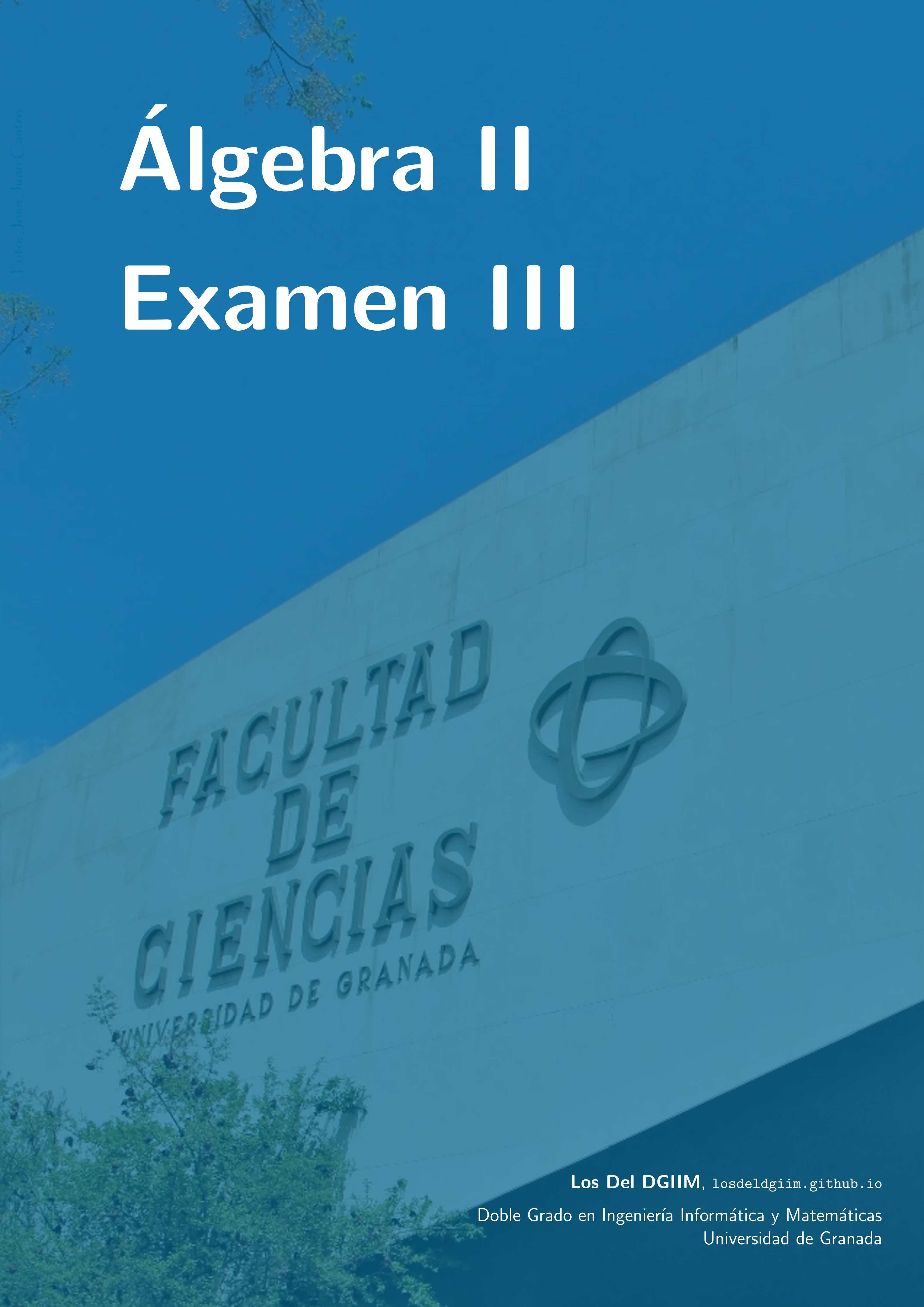

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra II
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Asignatura Álgebra II.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Aurora Inés del Río Cabeza.

Descripción Parcial II.

Fecha 21 de mayo del 2025.

Duración 2 horas.

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Responda **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las siguientes cuestiones, junto con una breve justificación de la respuesta.

1. Si $f : G \to G'$ es un homomorfismo de gupos y $N \subseteq G'$ es un subgrupo normal, entonces $f^*(N) \subseteq G$ es un subgrupo normal.
2. Todo grupo G actúa sobre sí mismo por conjugación, y en ese caso la acción es fiel.
3. Si H es un subgrupo normal en un grupo G, entonces $Z(H)$ es un subgrupo normal en $Z(G)$.
4. Si todos los subgrupos de un grupo G son normales entonces G es abeliano.
5. No hay puntos fijos bajo cualquier acción no trivial de Q_2 sobre un conjunto de 21 elementos.
6. El grupo producto directo $S_5 \times A_5$ tiene una única serie de composición de longitud 3.
7. Si H y K son subgrupos de G, con K normal y H resoluble, entonces el cociente HK/K es resoluble.
8. Sea G un grupo tal que $|G/Z(G)| = pq$, $p < q$, primos. Entonces $q \equiv 1 \mod p$.
9. El centralizador $C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4))$ es isomorfo a D_4.
10. Todos los $p-$subgrupos de Sylow de A_5 son cíclicos.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Considera el grupo $G = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, bab = a^3 \rangle$:

1. Calcula el orden de ab.
2. ¿Es el subgrupo $H = \langle ab \rangle$ normal?
3. Prueba que el subgrupo $K = \langle a^4 \rangle$ es normal.
4. ¿Se puede dar un morfismo $f : G/K \to S_4$ tal que $f(aK) = (1\ 2\ 3\ 4)$ y $f(bK) = (2\ 4)$?

Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** Demuestra que un grupo de orden 5175 tiene al menos dos subgrupos normales y que todo grupo de este orden es resoluble. ¿Tienen todos los grupos de este orden la misma longitud?

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Contestamos a cada pregunta, razonando la respuesta:

1. Si $f : G \to G'$ es un homomorfismo de gupos y $N \subseteq G'$ es un subgrupo normal, entonces $f^*(N) \subseteq G$ es un subgrupo normal.

   Verdadero. Si $x \in G$ y $y \in f^*(N)$, entonces $f(y) \in N$. Para ver que $f^*(N) \lhd G$ queremos ver que $xyx^{-1} \in f^*(N)$, es decir, que $f(xyx^{-1}) \in N$:

   $$f(xyx^{-1}) = f(x)f(y)f(x^{-1}) = f(x)f(y)(f(x))^{-1} \in N$$

   Que pertenece a N por ser $f(x), (f(x))^{-1} \in G'$ y $f(y) \in N$, siendo $N \lhd G'$. En definitiva, $xyx^{-1} \in f^*(N)$ para todo $x \in G$ y para todo $y \in f^*(N)$, por lo que $N \lhd G$.

2. Todo grupo G actúa sobre sí mismo por conjugación, y en ese caso la acción es fiel.

   Falso. Si consideramos la aplicación:

   $$\begin{array}{rccc} ac: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (g,h) & \longmapsto & ghg^{-1} \end{array}$$

   Veamos en primer lugar que es una acción:

   $$\begin{aligned} &{}^1x = 1x1 = x \qquad \forall x \in G \\ &{}^{gh}x = ghx(gh)^{-1} = ghxh^{-1}g^{-1} = {}^g hxh^{-1} = {}^g({}^hx) \qquad \forall g,h,x \in G \end{aligned}$$

   Si consideramos la representación por permutaciones:

   $$\begin{array}{rccc} \Phi: & G & \longrightarrow & Perm(G) \\ & g & \longmapsto & \Phi_g \end{array}$$

   donde cada $\Phi_g : G \to G$ viene dada por:

   $$\Phi_g(h) = ghg^{-1} \qquad \forall h \in G$$

   Veamos si $\ker(\Phi) = \{1\}$, en cuyo caso será una acción fiel:

   $$\begin{aligned} \ker(\Phi) = \{g \in G \mid \Phi_g = id\} &= \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \quad \forall h \in G\} \\ &= \{g \in G \mid gh = hg \quad \forall h \in G\} = Z(G) \end{aligned}$$

   Como hay grupos para los que $Z(G) \neq \{1\}$ (por ejemplo, cualquier grupo abeliano), en algunos casos la acción no será fiel.

3. Si H es un subgrupo normal en un grupo G, entonces $Z(H)$ es un subgrupo normal en $Z(G)$.

   Falso. Veamos un ejemplo en el que ni siquiera es subgrupo:
   Sea $G = D_3 = \langle r, s \mid r^3 = s^2 = 1, sr = r^{-1}s \rangle$ y $H = \langle r \rangle$, tenemos que $H \lhd G$ y como H es abeliano, $Z(H) = H$. Veamos ahora que $r \notin Z(G)$, ya que:

   $$\begin{aligned} r(sr) &= rr^{-1}s = s \\ (sr)r &= sr^2 \end{aligned}$$

   Y como $s \neq sr^2$, $r \notin Z(G)$, por lo que $Z(H) \nsubseteq Z(G)$.

4. Si todos los subgrupos de un grupo G son normales entonces G es abeliano.

   Falso. Por ejemplo, todos los subgrupos de $Q_2 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ son normales:

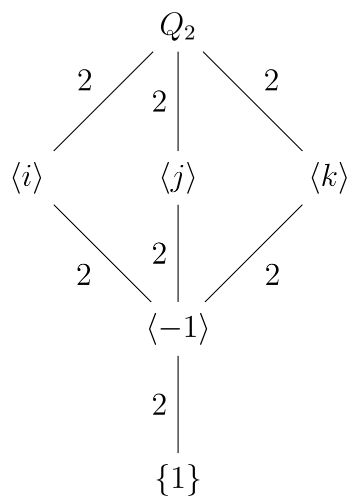

Figura 1: Diagrama de Hasse para los subgrupos del grupo de los cuaternios.

   Ya que $[G : \langle i \rangle] = [G : \langle j \rangle] = [G : \langle k \rangle] = 2$, $\{1\} \lhd Q_2$ y $\langle -1 \rangle \lhd G$ porque:

$$\begin{aligned} i(-1)i^3 &= -i^4 = -1 \\ i^3(-1)i &= -i^4 = -1 \\ j(-1)j^3 &= -j^4 = -1 \\ j^3(-1)j &= -j^4 = -1 \end{aligned}$$

   Y como $Q_2 = \langle i, j \rangle$, $\langle -1 \rangle \lhd Q_2$. Sin embargo, Q_2 no es abeliano, puesto que:

$$\begin{aligned} ij &= k \\ ji &= -k \end{aligned}$$

5. No hay puntos fijos bajo cualquier acción no trivial de Q_2 sobre un conjunto de 21 elementos.

   Falso. En el ejercicio 12 de la relación de $p-$grupos vimos que si G es un $p-$grupo que actúa sobre un conjunto finito X, entonces:

$$|X| \equiv |Fix(X)| \mod p$$

   Como Q_2 es un $2-$grupo (por ser $|Q_2| = 8 = 2^3$), si X es un Q_2-conjunto con $|X| = 21$, tenemos que:

$$21 = |X| \equiv |Fix(X)| \mod 2$$

   Por lo que $|Fix(X)|$ será impar y, en particular, $Fix(X) \neq \emptyset$, por lo que cualquier acción no trivial de Q_2 sobre cualquier conjunto de 21 elementos tendrá siempre al menos un punto fijo.

6. El grupo producto directo $S_5 \times A_5$ tiene una única serie de composición de longitud 3.

   Falso. Las dos siguientes series son dos series de composición distintas de $S_5 \times A_5$ de longitud 3:

$$S_5 \times A_5 \rhd A_5 \times A_5 \rhd \{1\} \times A_5 \rhd \{1\}$$
$$S_5 \times A_5 \rhd S_5 \times \{1\} \rhd A_5 \times \{1\} \rhd \{1\}$$

   Notemos que, aunque efectivamente esas dos series de composición deben ser isomorfas, son distintas.

7. Si H y K son subgrupos de G, con K normal y H resoluble, entonces el cociente HK/K es resoluble.

   Verdadero. Estamos en las condiciones de aplicar el Segundo Teorema de Isomorfía:

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[d, dash] \arrow[ddr, dash, "\rhd"] & \\
& HK \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash, "\rhd"'] & \\
H \arrow[dr, dash, "\rhd"'] & & K \arrow[dl, dash] \\
& H \cap K &
\end{tikzcd}$$

   Obteniendo que $HK/K \cong H/(H \cap K)$. Como H es resoluble, también lo será cualquier cociente suyo, por lo que $H/(H \cap K)$ será resoluble, y como esta propiedad se mantiene por isomorfismos, HK/K será resoluble.

8. Sea G un grupo tal que $|G/Z(G)| = pq$, $p < q$, primos. Entonces $q \equiv 1 \mod p$.

   Verdadero. Por el Primer Teorema de Sylow, sabemos de la existencia de, al menos, un $p-$subgrupo de Sylow de $G/Z(G)$ de orden p y de un $q-$subgrupo de Sylow de $G/Z(G)$ de orden q. Por el Segundo Teorema de Sylow, si denotamos por n_t al número de $t-$subgrupos de Sylow de $G/Z(G)$:

$$\left.\begin{array}{l} n_q \mid p \Longrightarrow n_p \leqslant p < q \\ n_q \equiv 1 \mod q \end{array}\right\} \Longrightarrow n_q = 1$$

   Solo hay un único $q-$subgrupo de Sylow de $G/Z(G)$: P_q, que será normal en $G/Z(G)$. Si calculamos el número de $p-$subgrupos de Sylow:

$$\left.\begin{array}{l} n_p \mid q \\ n_p \equiv 1 \mod p \end{array}\right\} \Longrightarrow n_p \in \{1, q\}$$

   Si suponemos que $n_p = 1$, entonces también habrá un único $p-$subgrupo de Sylow de $G/Z(G)$: P_p, que también será normal en $G/Z(G)$. Bajo estas condiciones, un resultado visto en teoría nos dice que $G/Z(G)$ es producto directo interno de sus únicos subgrupos de Sylow:

$$G/Z(G) \cong P_p \times P_q$$

Sin embargo, como $|P_p| = p$, será $P_p \cong \mathbb{Z}_p$ y análogamente obtenemos que $P_q \cong \mathbb{Z}_q$, de donde:

$$G/Z(G) \cong P_p \times P_q \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$$

Que será un grupo cíclico, por ser $\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Z}_q$ cíclicos con $\text{mcd}(p, q) = 1$, por lo que (por el ejercicio 4 de la relación de grupos directos) G será abeliano, de donde $Z(G) = G$ y $p = q = 1$, contradicción, ya que p y q eran primos con $p < q$. La contradicción viene de suponer que $n_p = 1$, por lo que será $n_p = q$ y recordamos que:

$$q = n_p \equiv 1 \mod p$$

9. El centralizador $C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4))$ es isomorfo a D_4.

   Verdadero. Si esribimos la definición del centralizador:

   $$C_{S_4}((1\,3)(2\,4)) = \{\sigma \in S_4 \mid (\sigma(1)\,\sigma(3))(\sigma(2)\,\sigma(4)) = \sigma(1\,3)(2\,4)\sigma^{-1} = (1\,3)(2\,4)\}$$

   Las únicas posibilidades para σ son:

   $$C_{S_4}((1\,3)(2\,4)) = \{1, (1\,3)(2\,4), (1\,2)(3\,4), (1\,4)(2\,3), (1\,3), (2\,4), (1\,2\,3\,4), (1\,4\,3\,2)\}$$

   Y sabemos que no hay más (porque $|S_4| = 24 = 2^3 \cdot 3$, tenemos ya 8 y si añadimos un elemento más ya tenemos que ir a $C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4)) = S_4$, que sabemos que es falso). Si pensamos en:

   $$D_4 = \langle r, s \mid r^4 = s^2 = 1, rs = sr^3 \rangle$$

   Podemos pensar en los elementos $(1\ 2\ 3\ 4)$ (como r) y en $(1\ 3)$ (como s), que cumplen todas las relaciones de los generadores de D_4:

   $$\begin{aligned}
   &(1\ 2\ 3\ 4)^4 = 1 \\
   &(1\ 3)^2 = 1 \\
   &(1\ 3)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 3) = (3\ 2\ 1\ 4) = (1\ 2\ 3\ 4)^3
   \end{aligned}$$

   Por el Teorema de Dyck, existe un homomorfismo $f : D_4 \to C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4))$. Además, f será un isomorfismo por ser $C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4)) = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3) \rangle$ y $|D_4| = |C_{S_4}((1\ 3)(2\ 4))| = 8$.

10. Todos los $p-$subgrupos de Sylow de A_5 son cíclicos.

    Falso. Como $|A_5| = {}^{5!}/_{2} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, cualquier subgrupo de orden 4 de A_5 será un $2-$subgrupo de Sylow suyo. En particular, lo será:

    $$V = \{1, (1\ 3)(2\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

    Y V no es cíclico, ya que todos sus elementos (salvo el 1) tienen orden 2.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Considera el grupo $G = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, bab = a^3\rangle$. Podemos verlo también como:

$$G = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, ba = a^3 b\rangle = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, ab = ba^3\rangle$$

1. Calcula el orden de ab.

   Como $ab \neq 1$, buscamos el menor natural $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ de forma que $(ab)^n = 1$:

   $$\begin{aligned}(ab)^2 &= abab = aa^3bb = a^4 \neq 1\\ (ab)^3 &= (ab)^2ab = a^4ab = a^5b \neq 1\\ (ab)^4 &= (ab)^2(ab)^2 = a^4a^4 = a^8 = 1\end{aligned}$$

   Por lo que será $O(ab) = 4$.

2. ¿Es el subgrupo $H = \langle ab\rangle$ normal?

   Como $O(ab) = 4$ y usando el apartado anterior, $H = \langle ab\rangle = \{1, ab, a^4, a^5b\}$. Sin embargo, como:

   $$babb = ba = a^3b \notin H$$

   H no podrá ser normal en G.

3. Prueba que el subgrupo $K = \langle a^4\rangle$ es normal.

   Como $a^8 = 1$, tenemos que $K = \langle a^4\rangle = \{1, a^4\}$. Basta probar que $xnx^{-1} \in K$ para todo $n \in K$ (para $n = 1$ es trivial) y $x \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, ya que $G = \langle a, b\rangle$:

   $$\begin{aligned}aa^4a^{-1} &= aa^4a^7 = a^{12} = a^4 \in K\\ a^{-1}a^4a &= a^7a^4a = a^{12} = a^4 \in K\\ ba^4b &= ba^3ab = abab = a^4 \in K\end{aligned}$$

   Por lo que $H \lhd G$.

4. ¿Se puede dar un morfismo $f : G/K \to S_4$ tal que $f(aK) = (1\ 2\ 3\ 4)$ y $f(bK) = (2\ 4)$?

   Sí, como $(1\ 2\ 3\ 4)$ y $(2\ 4)$ cumplen las relaciones que aparecen en la presentación de G (pensando en $(1\ 2\ 3\ 4)$ como a y en $(2\ 4)$ como b):

   $$\begin{aligned}&(1\ 2\ 3\ 4)^8 = \left((1\ 2\ 3\ 4)^4\right)^2 = 1^2 = 1\\ &(2\ 4)^2 = 1\\ &(2\ 4)(1\ 2\ 3\ 4)(2\ 4)^{-1} = (1\ 4\ 3\ 2) = (1\ 2\ 3\ 4)^3\end{aligned}$$

   Por el Teorema de Dyck, existe un homomorfismo $g : G \to S_4$ de forma que:

   $$\begin{aligned}g(a) &= (1\ 2\ 3\ 4)\\ g(b) &= (2\ 4)\end{aligned}$$

En vistas de aplicar la Propiedad Universal del grupo cociente, necesitamos que $K \lhd G$ y que $K = \{1, a^4\} \subset \ker(g)$. Comprobemos esto segundo:

$$g(1) = 1 \qquad g(a^4) = g(a)^4 = (1\ 2\ 3\ 4)^4 = 1$$

Por lo que $K \subset \ker(g)$. Por tanto, por la Propiedad Universal del grupo cociente:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "g"'] & G/K \arrow[d, dotted, "f"] \\ & S_4 \end{tikzcd}$$

tenemos que existe un homomorfismo $f : G/K \to S_4$ que viene dado por:

$$f(xK) = g(x) \qquad \forall xK \in G/K$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} f(aK) &= g(a) = (1\ 2\ 3\ 4) \\ f(bK) &= g(b) = (2\ 4) \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** Demuestra que un grupo de orden 5175 tiene al menos dos subgrupos normales y que todo grupo de este orden es resoluble. ¿Tienen todos los grupos de este orden la misma longitud?

Sea G un grupo con $|G| = 5175 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 23$, por el Primer Teorema de Sylow sabemos de la existencia de $3-$subgrupos de Sylow, $5-$subgrupos de Sylow y $23-$subgrupos de Sylow de G. Si denotamos por n_t a la cantidad de $t-$subgrupos de Sylow de G, aplicando el Segundo Teorema de Sylow, obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} n_{23} \mid 3^2 \cdot 5^2 = 225 \\ n_{23} \equiv 1 \mod 23 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_{23} = 1$$

Por lo que solo habrá un único $23-$subgrupo de Sylow de G, P_{23}, que será normal en G por ser el único $23-$subgrupo de Sylow. Además:

$$\left.\begin{array}{r} n_5 \mid 3^2 \cdot 23 = 207 \\ n_5 \equiv 1 \mod 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_5 = 1$$

Por lo que también habrá un único $5-$subgrupo de Sylow de G, P_5, que también será normal en G.

Como $|P_5| = 5^2 = 25$, P_5 será resoluble. Además, como:

$$|G/P_5| = |G|/|P_5| = 3^2 \cdot 23$$

Tendremos que G/P_5 también será resoluble, de donde G será resoluble.

Veamos ahora si todos los grupos de este orden tienen la misma longitud.

Opción 1 Por ser G finito, G admite una serie de composición:

$$G \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_r \rhd \{1\}$$

Por ser G finito, consideramos el cardinal del producto de sus factores de composición:

$$\left|\frac{G}{G_1}\right| \cdot \left|\frac{G_1}{G_2}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{G_{r-1}}{G_r}\right| = |G| = 5175$$

Por tanto, el producto de los órdenes de los factores de composición será 5175. Además, por ser G resoluble, sus factores de composición serán grupos cíclicos de orden primo. Uniendo ambas ideas, y puesto que $5175 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 23$, tenemos que:

$$\mathrm{fact}(G) = \{\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_{23}\}$$

Opción 2 Consideramos la siguiente serie normal:

$$G \rhd P_{23} \lhd \{1\}$$

Por tanto, y usando un ejercicio de la Relación, tenemos que:

$$l(G) = l(P_{23}) + l\left(G/P_{23}\right) \overset{(*)}{=} 1 + l\left(\frac{G}{P_{23}}\right)$$

donde en $(*)$ hemos empleado que P_{23} es de orden primo, luego es simple, y por tanto $l(P_{23}) = 1$.

Consideramos ahora G/P_{23}, que tendrá orden:

$$|G/P_{23}| = \frac{|G|}{|P_{23}|} = \frac{5175}{23} = 225 = 3^2 \cdot 5^2$$

Por el segundo Teorema de Sylow:

$$n_5 \mid 9 \quad \text{y} \quad n_5 \equiv 1 \mod 5$$

Por lo que $n_5 = 1$, por lo que sea P_5 el único $5-$subgrupo de Sylow de G/P_{23}, que será normal en G/P_{23}. Consideramos la siguiente serie normal:

$$G/P_{23} \rhd P_5 \lhd \{1\}$$

Por lo que:

$$l\left(\frac{G}{P_{23}}\right) = l(P_5) + l\left(\frac{G/P_{23}}{P_5}\right) \overset{(*)}{=} 2 + l\left(\frac{G/P_{23}}{P_5}\right)$$

donde, en $(*)$, hemos empleado que $|P_5| = 25 = 5^2$, luego sabemos por un ejercicio de la relación que $l(P_5) = 2$.

Consideramos ahora el último cociente, cuyo orden es:

$$\left|\frac{G/P_{23}}{P_5}\right| = \frac{|G/P_{23}|}{|P_5|} = \frac{3^2 \cdot 5^2}{5^2} = 9 = 3^2$$

Por el mismo ejercicio de la relación, sabemos que $l\left(\frac{G/P_{23}}{P_5}\right) = 2$.

En conclusión, tenemos que:

$$l(G) = 1 + 2 + 2 = 5$$

Por tanto, toda serie de composición de G tendrá siempre la misma longitud, 5.