Inferencia Estadística Examen III

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Inferencia Estadística Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2026

Asignatura Inferencia Estadística.

Curso Académico 2021-22.

Grado Grado en Matemáticas y Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Descripción Examen Ordinario.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \frac{\sqrt{\theta - 1}}{2} x^{-3/2}, \qquad x > \theta - 1$$

a) Determinar para qué valores de n existe el UMVUE para θ, y encontrarlo en tales casos. Justificar la existencia en los casos que corresponda.

b) Calcular la función de verosimilitud y encontrar el estimador máximo verosímil de θ. ¿Es insesgado? (justificar la respuesta).

Ejercicio 2 (2.25 puntos)**.**

a) Sea X una variable aleatoria continua con distribución en una familia regular en el sentido de Fréchet-Cramér-Rao, cuyas funciones de densidad son de la forma:

$$f_\theta(x) = exp[Q(\theta)T(x) + D(\theta) + S(x)], \qquad x \in \mathcal{X}, \quad \theta \in \Theta$$

siendo $T(X)$ un estadístico regular, insesgado en θ^3, tal que $Var_\theta[T(X)] = \theta^2$. Calcular las funciones $Q(\theta)$ y $D(\theta)$, sabiendo que $Q(1) = 0$ y $D(0) = 1$.

b) Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable X con función masa de probabilidad:

$$P_p[X = x] = p^2(x-1)(1-p)^{x-2}, \quad x = 2, 3, \ldots; \quad 0 < p < 1$$
$$\left(E_p[X] = \frac{2}{p}, \quad Var_p[X] = \frac{2(1-p)}{p^2} \right)$$

   a) Sabiendo que la familia de distribucaiones es regular, calcular la función de información asociada a la muestra. Encontrar la clase de funciones paramétricas que admiten estimador eficiente y los estimadores correspondientes.

   b) Calcular la cota para la varianza de estimadores insesgados en p^2, regulares, y justificar si se alcanza o no dicha cota.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable X con distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, siendo ambos parámetros desconocidos.

a) Especificar la variable usada para hacer inferencia sobre σ^2. Deducir su distribución, detallando y justificando exhaustivamente cada paso.

b) Deducir, detallando el método usado, el intervalo de confianza de menor longitud esperada uniformemente para μ a nivel de confianza $1 - \alpha$.

Ejercicio 4 (1.75 puntos)**.** El retraso medio diario (en minutos) de los trabajadores de cierta empresa tiene una distribución $U(0, \theta)$. Para contrastar la hipótesis de que el máximo retraso medio diario es de 5 minutos frente a que es de 4 minutos, se midió dicha variable durante 10 días elegidos al azar, observando que el máximo retraso medio en esos 10 días fue de 3 minutos. Obtener los tests más potentes de tamaños 0,05 y 0,15 para el problema de contraste planteado. Decidir, a la vista de lo observado, si debe rechazarse la hipótesis nula en cada uno de los casos.