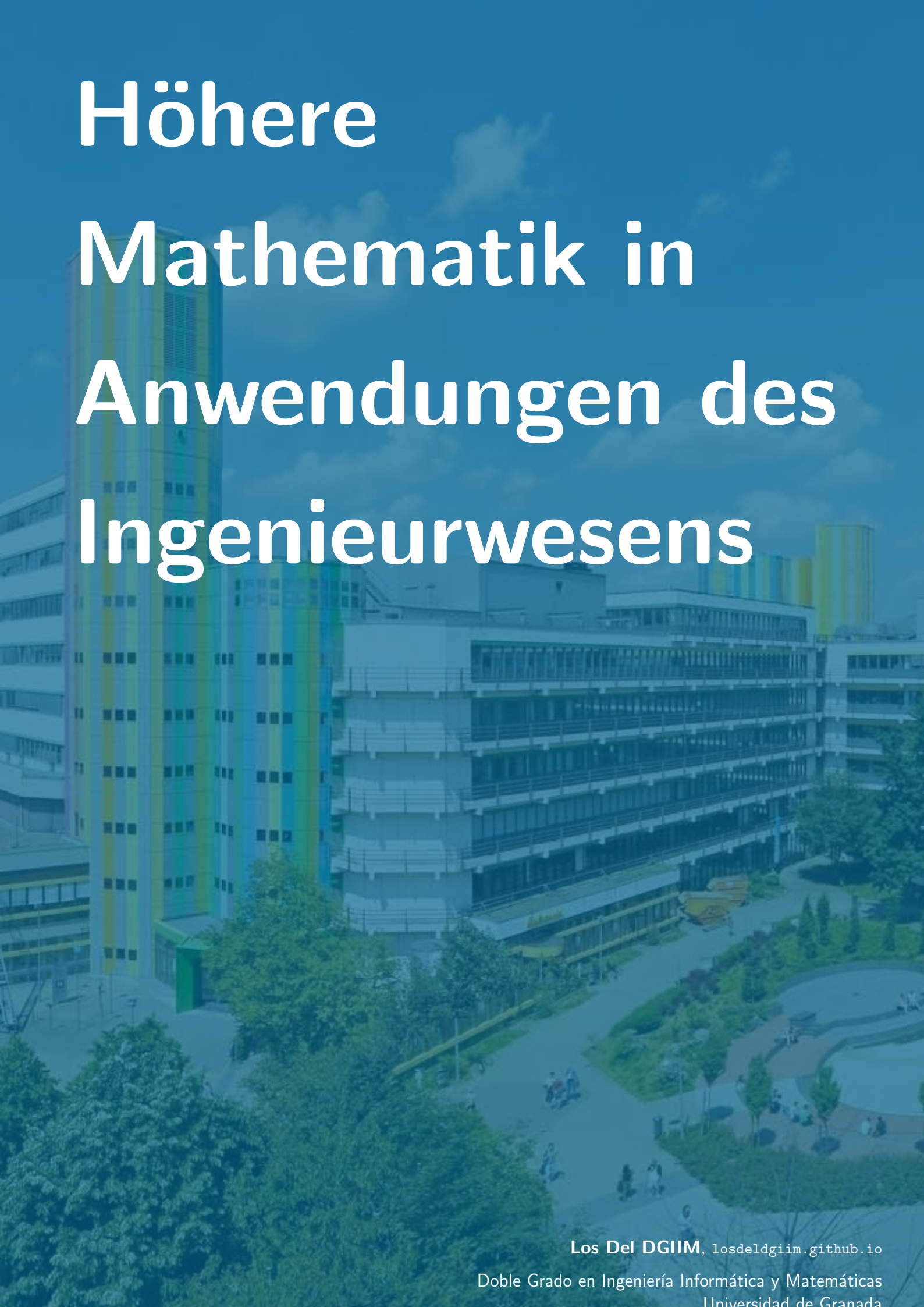


Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/) (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Höhere Mathematik in Anwendungen des Ingenieurwesens

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Índice general

1. Übungs Blätter	5
1.3. Rechnen mit physikalischen Größen	5
1.5. Komplexe Rechnung in physikalisch-technischen Zusammenhängen . .	9

1. Übungs Blätter

1.3. Rechnen mit physikalischen Größen

Ejercicio 1.3.1 (Fährverbindung). Eine Fähre bewegt sich mit der Eigengeschwindigkeit $v_0 = 4 \text{ m/s}$ (relativ zum Fluss) vom Uferpunkt A aus auf kürzestem Weg zum gegenüberliegenden Flussufer (Punkt B ; Abb. 1.1).

1. Unter welchem Winkel α muss die Fähre gegen die Strömung gesteuert werden, wenn die Geschwindigkeit der Strömung den Betrag $v_s = 1,5 \text{ m/s}$ hat?

The Ferry wants to get to B in an straight line. Therefore, it must compensate the flow velocity by steering at an angle α against the flow. It is then needed that:

$$v_s = v_0 \sin(\alpha) \implies \alpha = \arcsin\left(\frac{v_s}{v_0}\right) = \arcsin\left(\frac{1,5}{4}\right) \approx 0,3844 \text{ rad} \approx 22,024^\circ$$

2. Wie groß ist dann die resultierende Geschwindigkeit v_r der Fähre?

The resulting velocity v_r of the ferry is given by:

$$v_r = v_0 \cos(\alpha) = 4 \cos(0,3844) \approx 3,7081 \text{ m/s}$$

Ejercicio 1.3.2 (Elektrische Punktladungen im Koordinatensystem). Eine Punktladung $q_1 = 6,0 \mu\text{C}$ befindet sich in einem kartesischen Koordinatensystem bei $x_1 = 1,0 \text{ m}$, $y_1 = 0,5 \text{ m}$. Eine zweite Ladung $q_2 = -2,5 \mu\text{C}$ befindet sich in dessen Ursprung. Ein Elektron, d.h. eine dritte Punktladung, ist in einem Punkt mit den Koordinaten (x_e, y_e) . Berechnen Sie die Werte für x_e und y_e , bei denen sich das

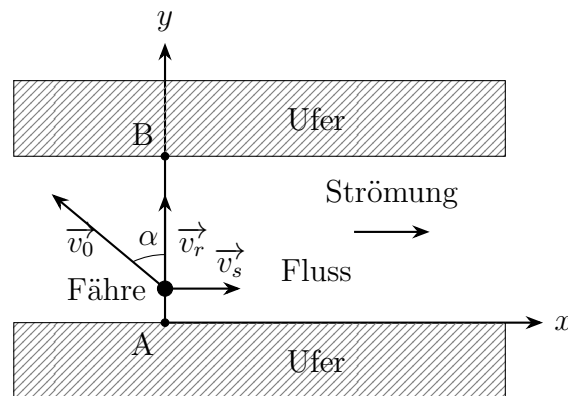


Figura 1.1: Fährverbindung über einen Fluss mit Strömung.

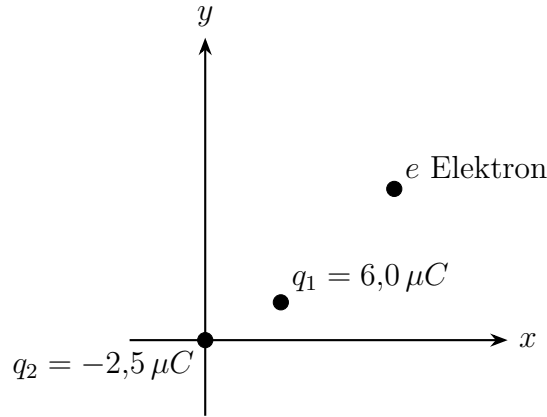


Figura 1.2: Punktladungen im Koordinatensystem.

Elektron im Gleichgewicht befindet, d.h. bei dem die Gesamtkraft auf das Elektron verschwindet.

Option 1 :

The forces acting on the electron due to the other two charges must cancel each other out for equilibrium. Let F_{ei} be the force on the electron due to charge q_i . The forces can be expressed as:

$$\vec{F}_{e1} + \vec{F}_{e2} = 0$$

where, using that $q_e = -e < 0$ (the charge of the electron):

$$\vec{F}_{e1} = -k_e \frac{|q_1 e|}{r_{e1}^2} \hat{r}_{e1}, \quad \vec{F}_{e2} = k_e \frac{|q_2 e|}{r_{e2}^2} \hat{r}_{e2}$$

Here, k_e is Coulomb's constant, e is the elementary charge, r_{ei} is the distance between the electron and charge q_i , and \hat{r}_{ei} is the unit vector pointing from charge q_i to the electron. Using the values of r_{e1} and r_{e2} based on the coordinates of the charges and the electron, we have:

$$\vec{r}_{e1} = (x_e - 1, y_e - 0,5), \quad \vec{r}_{e2} = (x_e, y_e)$$

Therefore, the equilibrium condition becomes:

$$-k_e \frac{|q_1 e|}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)} \cdot \frac{(x_e - 1, y_e - 0,5)}{\sqrt{(x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2}} + k_e \frac{|q_2 e|}{(x_e^2 + y_e^2)} \cdot \frac{(x_e, y_e)}{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}} = 0$$

This vector equation can be separated into its x and y components, leading to a system of two equations with two unknowns (x_e and y_e). Solving this system will yield the coordinates of the electron in equilibrium.

$$\begin{aligned} -k_e \frac{|q_1 e|(x_e - 1)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e|x_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} &= 0 \\ -k_e \frac{|q_1 e|(y_e - 0,5)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)^{3/2}} + k_e \frac{|q_2 e|y_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}} &= 0 \end{aligned}$$

In an easier way:

$$\frac{|q_1|(x_e - 1)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)^{3/2}} = \frac{|q_2|x_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}}$$

$$\frac{|q_1|(y_e - 0,5)}{((x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2)^{3/2}} = \frac{|q_2|y_e}{(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}}$$

As we can see, this system of equations is nonlinear and may require numerical methods or iterative approaches to solve for x_e and y_e . We should then approach the problem using another method.

Option 2 :

Given that $\vec{F}_{e1} = -\vec{F}_{e2}$, the forces must have the same magnitude but opposite directions. This implies that the electron must lie along the line connecting the two charges, with $x_e, y_e < 0$. Therefore:

$$y_e = \frac{y_1}{x_1}x_e = \frac{1}{2}x_e$$

On the other hand, equating the magnitudes of the forces:

$$|\vec{F}_{e1}| = |\vec{F}_{e2}| \implies k_e \frac{|q_1 e|}{r_{e1}^2} = k_e \frac{|q_2 e|}{r_{e2}^2} \implies \frac{|q_1|}{r_{e1}^2} = \frac{|q_2|}{r_{e2}^2} \implies \frac{|q_1|}{(x_e - 1)^2 + (y_e - 0,5)^2} = \frac{|q_2|}{x_e^2 + y_e^2}$$

Therefore, using the relation for y_e in terms of x_e , we have the following equation to solve for x_e :

$$\frac{|q_1|}{(x_e - 1)^2 + \left(\frac{1}{2}x_e - 0,5\right)^2} = \frac{|q_2|}{x_e^2 + \left(\frac{1}{2}x_e\right)^2}$$

$$6 \cdot \left(\frac{5}{4}x_e^2\right) = 2,5 \cdot \left(\frac{5}{4}x_e^2 - 2,5x_e + 1,25\right)$$

$$4,375x_e^2 + 6,25x_e - 3,125 = 0$$

$$x_e = \frac{-6,25 \pm \sqrt{(-6,25)^2 - 4 \cdot 4,375 \cdot (-3,125)}}{2 \cdot 4,375} = \frac{-5 \pm 2\sqrt{15}}{7}$$

Given that $x_e < 0$, we take:

$$x_e = -\frac{5 + 2\sqrt{15}}{7} \approx -1,8208 \text{ m}$$

$$y_e = \frac{1}{2}x_e = -\frac{5 + 2\sqrt{15}}{14} \approx -0,9104 \text{ m}$$

Ejercicio 1.3.3 (Die magnetische Kraft). Ein punktförmiges Teilchen mit einer Ladung $q = -3,64 \text{ nC}$ bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{v} = 2,75 \cdot 10^6 \text{ m/s } \vec{e}_x$, d.h. entlang der x-Achse. Berechnen Sie die Kraft, die folgende Felder auf das Teilchen ausüben:

1. $\vec{B} = 0,38 \text{ T } \vec{e}_y$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \vec{e}_z = \\ &= -3,64 \cdot 10^{-9} \cdot 2,75 \cdot 10^6 \cdot 0,38 \vec{e}_z = -3,8038 \cdot 10^{-3} \text{ N } \vec{e}_z\end{aligned}$$

2. $\vec{B} = T 0,75 \vec{e}_x + T 0,75 \vec{e}_y$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = q \cdot v_x \cdot B_y \cdot \vec{e}_z = \\ &= -3,64 \cdot 10^{-9} \cdot 2,75 \cdot 10^6 \cdot 0,75 \vec{e}_z = -7,5075 \cdot 10^{-3} \text{ N } \vec{e}_z\end{aligned}$$

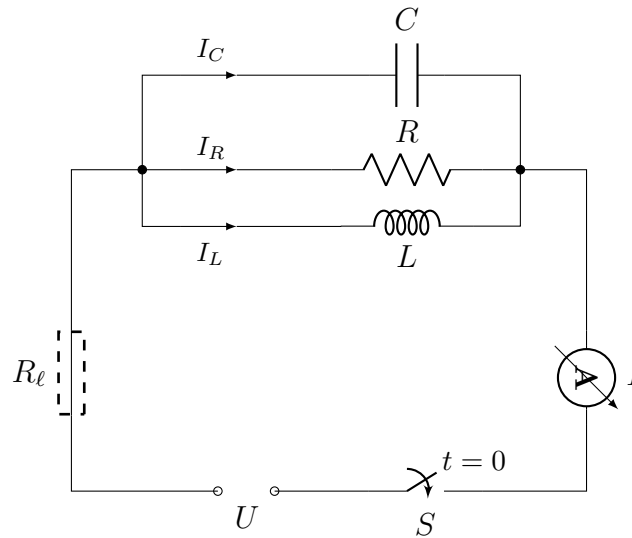


Figura 1.3: Skizze zur Aufgabe 1.5.2

1.5. Komplexe Rechnung in physikalisch-technischen Zusammenhängen

Ejercicio 1.5.1. Zeigen Sie durch Rechnung in komplexer Form: Drei gleichfrequente, sinusförmige Wechselströme i_1 , i_2 und i_3 mit den Amplituden i_0 , der Kreisfrequenz $\omega > 0$ und den Nullphasenwinkeln $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2/3\pi$ und $\varphi_3 = 4/3\pi$ löschen sich bei ungestörter Überlagerung gegenseitig aus, d.h. $i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

Let $\underline{i}_1(t)$, $\underline{i}_2(t)$ und $\underline{i}_3(t)$ be:

$$\begin{aligned}\underline{i}_1(t) &= i_0 \cdot e^{j(\omega t + 0)} = i_0 \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{i}_2(t) &= i_0 \cdot e^{j(\omega t + 2/3\pi)} = i_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j2/3\pi} \\ \underline{i}_3(t) &= i_0 \cdot e^{j(\omega t + 4/3\pi)} = i_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j4/3\pi}\end{aligned}$$

Therefore:

$$\begin{aligned}\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \underline{i}_3(t) &= i_0 \cdot e^{j\omega t} (e^{j0} + e^{j2/3\pi} + e^{j4/3\pi}) = \\ &= i_0 \cdot e^{j\omega t} \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \\ &= i_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Therefore, we have shown that:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = \Im(\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \underline{i}_3(t)) = \Im(0) = 0$$

Ejercicio 1.5.2 (Resonanz im Parallelschwingkreis). Der in Abbildung 1.3 skizzierte Parallelschwingkreis mit dem ohmschen Widerstand $R = 10 \Omega$, der Induktivität $L = 0,2 \text{ H}$ und der Kapazität $C = 10 \text{ mF}$ wird durch eine Wechselstromquelle mit dem Effektivwert $I = 10 \text{ A}$ und der variablen Kreisfrequenz ω zu elektromagnetischen Schwingungen angeregt.

1. Im Resonanzfall sind der Gesamtstrom I und die angelegte Spannung U in Phase, d.h. $\varphi_I - \varphi_U = 0$. Bei welcher Kreisfrequenz ω_0 tritt dieser Fall ein? Wie groß ist dann der komplexe Gesamtwiderstand Z ?

The complex resistance is:

$$\underline{Z} = \frac{u(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\sqrt{2}U e^{j(\omega t + \varphi_U)}}{\sqrt{2}I e^{j(\omega t + \varphi_I)}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_U - \varphi_I)} \stackrel{(*)}{=} \frac{U}{I} e^{j0} = \frac{U}{I} \in \mathbb{R}$$

where in $(*)$ we used the fact that in resonance $\varphi_U = \varphi_I$.

We can calculate the complex resistance as:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}} &= \frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_C} \\ &= \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \\ \Rightarrow \underline{Z} &= \frac{1}{\frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} + j\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)} \end{aligned}$$

Given that $\underline{Z} \in \mathbb{R}$, we have that the imaginary part must be zero:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\omega_0 L} + \omega_0 C &= 0 \Rightarrow \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{0,2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}} = \sqrt{500} \approx 22,36 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Therefore, we have that:

$$\underline{Z} = Z = R = 10 \Omega$$

2. Wie ändert sich die Situation, wenn die Zuleitungen nicht mehr als ideal angenommen werden und einen ohmschen Widerstand R_ℓ beitragen? Welche Werte haben ω_0 und Z dann?

In this case, we have:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)} + R_\ell$$

Therefore, ω_0 does not change, but:

$$\underline{Z} = Z = R + R_\ell = 10 + R_\ell$$

Ejercicio 1.5.3 (Wechselstrommessbrücke). Mit der in Abbildung 1.4 dargestellten Brückenschaltung lässt sich ein unbekannter komplexer Widerstand $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_X$ wie folgt bestimmen: Bei vorgegebenen (komplexen) Widerständen \underline{Z}_2 und \underline{Z}_3 wird der stetig veränderbare komplexe Widerstand \underline{Z}_4 so eingestellt, dass der Brückenzweig A–B stromlos wird. Das in die Brücke geschaltete Wechselstromamperemeter mit dem (bekannten) Innenwiderstand \underline{Z}_5 dient dabei lediglich als Nullindikator.

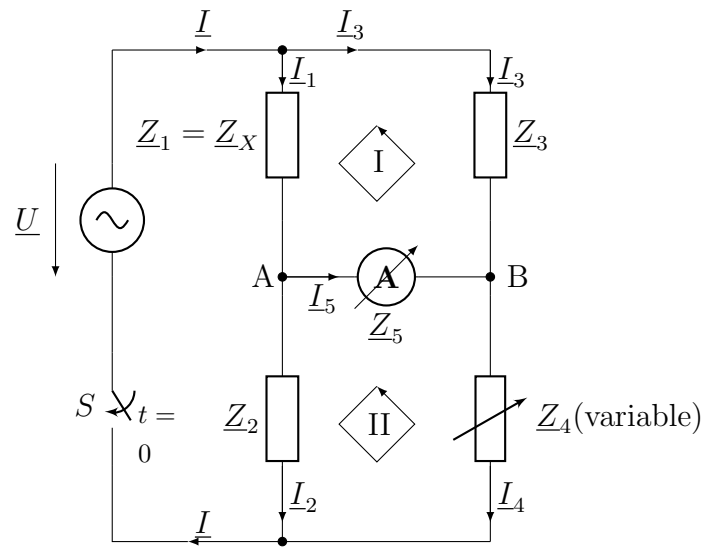


Figura 1.4: Skizze zur Aufgabe 1.5.3.

1. Wie lautet die sogenannte Abgleichbedingung, d.h. die Bedingung für die Stromlosigkeit des Brückenweiges A-B?
2. In einem konkreten Fall haben die festen Widerstände \underline{Z}_2 und \underline{Z}_3 folgende Werte:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_2 &= 10\Omega - j \cdot 2\Omega, \\ \underline{Z}_3 &= 8\Omega - j \cdot 6\Omega.\end{aligned}$$

Die Brücke A-B wird dabei genau dann stromlos, wenn der variable Widerstand \underline{Z}_4 auf den Wert

$$\underline{Z}_4 = 5\Omega - j \cdot 2\Omega$$

eingestellt wird. Welchen Wert besitzt dann der (zunächst noch unbekannte) Widerstand \underline{Z}_X ?

Ejercicio 1.5.4 (Wechselstromparadoxon). Der in Bild 1.5 dargestellte Wechselstromkreis enthält die ohmschen Widerstände R und R_x und einen zu R_x parallel geschalteten Kondensator mit der Kapazität C . Beim Anlegen einer Wechselspannung \underline{U} mit der Kreisfrequenz ω fließt der Gesamtstrom \underline{I} , dessen Effektivwert I durch das zugeschaltete Wechselstrommessgerät A gemessen wird. Der Innenwiderstand R_i des Geräts sei im Widerstand R bereits enthalten. Zeigen Sie: Der ohmsche Widerstand R_x lässt sich so wählen, dass die Stromanzeige unabhängig ist von der Stellung des Schalters S (geschlossen oder offen; sog Wechselstromparadoxon).

We have two options:

- Switch open: In this case, everything is connected in serial and $\underline{I}_1 = 0$. Therefore:

$$\underline{Z}_{\text{open}} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{1}{\omega C} \cdot j$$

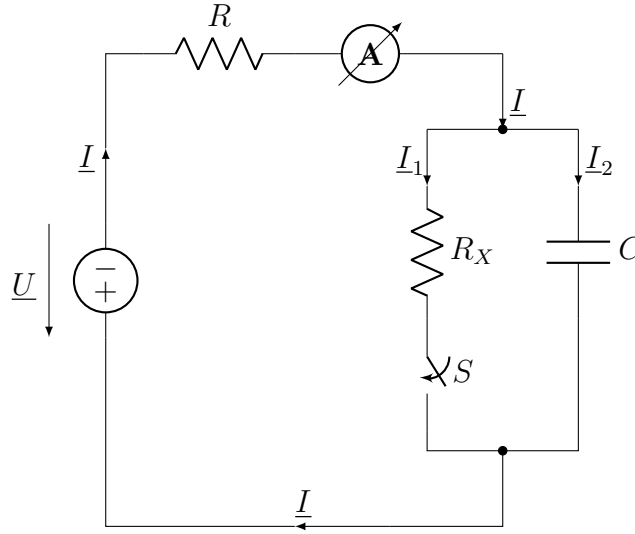


Figura 1.5: Skizze zur Aufgabe 1.5.4.

- Switch closed:

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_{\text{closed}} &= R + \frac{1}{\frac{1}{R_X} + j\omega C} = \left(R + \frac{\frac{1}{R_X}}{\frac{1}{R_X^2} + \omega^2 C^2} \right) - \frac{\omega C}{\frac{1}{R_X^2} + \omega^2 C^2} \cdot j = \\
 &= \left(R + \frac{R_X}{1 + (R_X \omega C)^2} \right) - \frac{R_X^2 \omega C}{1 + (R_X \omega C)^2} \cdot j = \\
 &= \frac{R(1 + (R_X \omega C)^2) + R_X}{1 + (R_X \omega C)^2} - \frac{R_X^2 \omega C}{1 + (R_X \omega C)^2} \cdot j
 \end{aligned}$$

In order that the current does not depend on the position of the switch, it is needed:

$$\hat{I}_{\text{closed}} = \hat{I}_{\text{open}} \implies |I_{\text{closed}}| = |I_{\text{open}}| \implies \left| \frac{U_{\text{closed}}}{Z_{\text{closed}}} \right| = \left| \frac{U_{\text{open}}}{Z_{\text{open}}} \right|$$

Given that $U_{\text{open}} = U_{\text{closed}}$, we only need that:

$$\begin{aligned}
 |Z_{\text{closed}}| &= |Z_{\text{open}}| \implies |Z_{\text{closed}}|^2 = |Z_{\text{open}}|^2 \implies \\
 \implies R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} &= \frac{(R(1 + (R_X \omega C)^2) + R_X)^2 + (R_X^2 \omega C)^2}{(1 + (R_X \omega C)^2)^2} \implies \\
 \implies (R(1 + (R_X \omega C)^2))^2 + \frac{(1 + (R_X \omega C)^2)^2}{\omega^2 C^2} &= (R(1 + (R_X \omega C)^2))^2 + R_X^2 + 2R_X R(1 + (R_X \omega C)^2) + \\
 \implies \frac{(1 + (R_X \omega C)^2)^2}{\omega^2 C^2} &= R_X^2 + 2R_X R(1 + (R_X \omega C)^2) + (R_X^2 \omega C)^2 \implies \\
 \implies 1 + 2(R_X \omega C)^2 &= (R_X \omega C)^2 + 2\omega^2 C^2 R_X R(1 + (R_X \omega C)^2) \implies \\
 \implies 1 + (R_X \omega C)^2 &= 2\omega^2 C^2 R_X R(1 + (R_X \omega C)^2) \implies \\
 \implies (2\omega^2 C^2 R_X R - 1)(1 + (R_X \omega C)^2) &= 0
 \end{aligned}$$

Therefore, the only possible solution is:

$$R_X = \frac{1}{2R(\omega C)^2}$$

Using that value of R_X , we will measure the same current value with the switch opened and closed.