



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Cálculo I Examen I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Jesús Muñoz Velasco Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Cálculo I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Jose Luis Gámez Ruiz.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 20 de enero de 2022.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1 (3 puntos). Teorema (de los ceros) de Bolzano. Enunciado y demostración.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b \ y \ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua verificando que

$$f(a)f(b) < 0$$
 ($f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo)

Entonces, $\exists c \in]a, b[$ tal que f(c) = 0

Demostración. Supongamos que f(a) < 0 < f(b). Definimos el conjunto C como sigue:

$$C = \{ x \in [a, b] : f(x) < 0 \}$$

Es fácil ver que C es un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Sea $c = \sup C$. Es claro que $c \in [a, b]$. Entonces, existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de C convergente a c y por continuidad de f en c entonces $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(c)$. Dado que

$$f(x_n) < 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces $f(c) \leq 0$. En particular, deducimos que $c \neq b$ y $c \leq b$, por lo que $c \in [a, b[$.

Sea
$$\{z_n\} = \{c + \frac{b-c}{n}\}$$
. Es claro que

$$z_n \in [a, b] \text{ y } z_n \notin C, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

y por tanto ha de ser

$$f(z_n) \geqslant 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Evidentemente, $\{z_n\} \longrightarrow c$ y usando que f es continua en c y lo anterior deducimos que

$$\{f(z_n)\} \longrightarrow f(c) \geqslant 0$$

y por tanto ha de ser f(c) = 0.

Si fuera f(b) < 0 < f(a), podemos razonar igual que antes o aplicar lo que acabamos de obtener a la función -f(f) es continua si y sólo si lo es -f).

Ejercicio 2 (2 puntos). Un tren hace el recorrido Madrid-Zaragoza un día entre las 10 y las 12. Al día siguiente, dicho tren hace el mismo recorrido en dirección contraria y con el mismo horario. Prueba que existe una determinada hora del segundo día a la que el tren se encuentra exactamente a la misma distancia de Madrid que el primer día a esa misma hora.

Sea $f:[10,12] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función que el <u>primer día</u> mide la "distancia a Madrid" en cada instante:

$$f(x) =$$
 "distancia a Madrid" a la hora x , $\forall x \in [10, 12]$

- f continua en [10, 12]
- f(10) = 0
- f(12) = D (distancia Madrid-Zaragoza, positiva)

Del mismo modo, $g:[10,12] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función "distancia a Madrid" en cada instante del segundo día

- g continua en [10, 12]
- g(10) = D > 0
- g(12) = 0

Consideramos la función $h:[10,12] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x)=f(x)-g(x) \ \forall x \in [10,12]$. Tenemos que h continua en [10,12]. Además:

- h(10) = f(10) g(10) = -D.
- h(12) = f(12) g(12) = D.

Por tanto, $h(10) \cdot h(12) = -D^2 < 0$. Por el Teorema (de los ceros) de Bolzano:

$$\exists x \in]10, 12[: h(c) = 0 \text{ esto es:}]$$

$$0 = h(c) = f(c) - q(c) \Longrightarrow f(c) = q(c)$$

La hora buscada es $c \in]10, 12[$.

Ejercicio 3 (3 puntos). Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones y calcula su límite (si existe):

1.
$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Defino $x_n = \frac{a_n}{b_n}$ donde $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ y $b_n = \sqrt{n} \nearrow \nearrow +\infty$ (puedo aplicar Stolz)

$$\begin{pmatrix} \text{Criterio de Stolz: } (b_n \nearrow \nearrow + \infty) \\ \text{Si } \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \longrightarrow L \Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow L \end{pmatrix}$$

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}} \longrightarrow 2$$
Luego $x_n = \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 2$

2.
$$x_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \sqrt[n]{a_n} \text{ donde } a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Criterio del cociente para sucesiones: } (a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}) \\ \text{Si} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow L \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow L \end{array}\right)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = z_n^{y_n}$$

$$\operatorname{donde} y_n = n, \quad z_n = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$$

$$\left(\begin{array}{c} \operatorname{Criterio} \text{ "exponencial": } (z_n \longrightarrow 1) \\ z_n^{y_n} \longrightarrow e^L \Longleftrightarrow y_n(z_n - 1) \longrightarrow L \end{array}\right)$$

$$y_n(z_n - 1) = n\left(\frac{n}{n+1} - 1\right) = \frac{-n}{n+1} \longrightarrow -1 \Longrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow e^{-1}$$

$$\operatorname{Asi}, \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow e^{-1} \Longrightarrow x_n = \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow e^{-1}$$

- 3. (Dada por recurrencia) $x_1 = 11, x_{n+1} = 2[\sqrt{5 + x_n} 1], \forall n \in \mathbb{N}$ Probaremos que x_n es decreciente y minorada por 4. (Por inducción, $4 < x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$)
 - $\underline{n=1}$ $i4 < x_2 < x_1? \iff 4 < 6 < 11$ Sí
 - Supuesto que para un $n \in \mathbb{N}$, $4 < x_{n+1} < x_n$ (hip. de ind.) $\underset{(1)}{:} \Rightarrow 4 < x_{n+2} < x_{n+1}$?

(2)
$$x_{n+2} = 2[\sqrt{5 + x_{n+1}} - 1] < 2[\sqrt{5 + x_n} - 1] = x_{n+1}$$

(1) $x_{n+2} = 2[\sqrt{5 + x_{n+1}} - 1] > 2[\sqrt{5 + 4} - 1] = 4$

Luego x_n es decreciente y minorada (por 4) \Longrightarrow converge. Sea $L = \lim\{x_n\} \Longrightarrow \{x_{n+1}\} \longrightarrow L$ (parcial)

$$\begin{array}{c} x_{n+1} \longrightarrow L \\ 2[\sqrt{5+x_n}-1] \longrightarrow 2[\sqrt{5+L}-1] \end{array} \right\} \stackrel{\text{(unicidad del lim)}}{=\!=\!=\!=\!=} L = 2[\sqrt{5+L}-1] \\ \iff L^2 = 16 \iff \left\{ \begin{array}{c} L=4 \\ \text{ Local (4 es minorante)} \end{array} \right.$$

Ejercicio 4 (3 puntos). Estudia la convergencia de las series:

1.
$$\sum_{n \ge 1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2$$

Defino $\sum_{n \ge 1} a_n = \sum_{n \ge 1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2$, donde $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)^2$

Aplicaremos comparación (límite) con la serie $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}=\sum_{n\geqslant 1}b_n$, con $b_n=\frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)^2 \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}^+$$

Luego $\sum_{n\geqslant 1}a_n$ converge \iff $\sum_{n\geqslant 1}b_n$, pero $\sum_{n\geqslant 1}b_n$ no converge (Serie de Riemann, $\alpha=1$).

Por tanto $\sum_{n\geq 1} a_n$ no converge.

$$2. \sum_{n \geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$$

Defino
$$\sum_{n\geqslant 1} a_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$$
, con $a_n = \frac{n!}{n^n} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Aplicamos el criterio de la raíz y obtenemos, según se ha visto en el ejercicio anterior (Ejercicio 3.2), que $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow e^{-1}$.

Por tanto,
$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \Longrightarrow \sum_{n \geqslant 1} a_n$$
 converge.

3.
$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos^3(n^2 + 7n - 10)}{n^2}$$

Defino
$$\sum_{n\geqslant 1} a_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos^3(n^2+7n-10)}{n^2}$$
, donde $a_n = \frac{\cos^3(n^2+7n-10)}{n^2}$. (Términos sin restricción de signo)

¿Hay convergencia absoluta? $\left(\sum_{n \geq 1} |a_n| \text{ converge?} \right)$

Por el criterio de comparación:

$$|a_n| = \left| \frac{\cos^3(n^2 + 7n - 10)}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2} = b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n\geqslant 1} b_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \underset{\text{(Riemann, } \alpha=2)}{\text{converge}} \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 1} |a_n| \text{ converge}$$

Así tenemos convergencia absoluta

$$\sum_{n\geqslant 1} |a_n| \text{ converge} \stackrel{\text{(crit. conv. abs.)}}{\Longrightarrow} \sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge}$$