Topología II

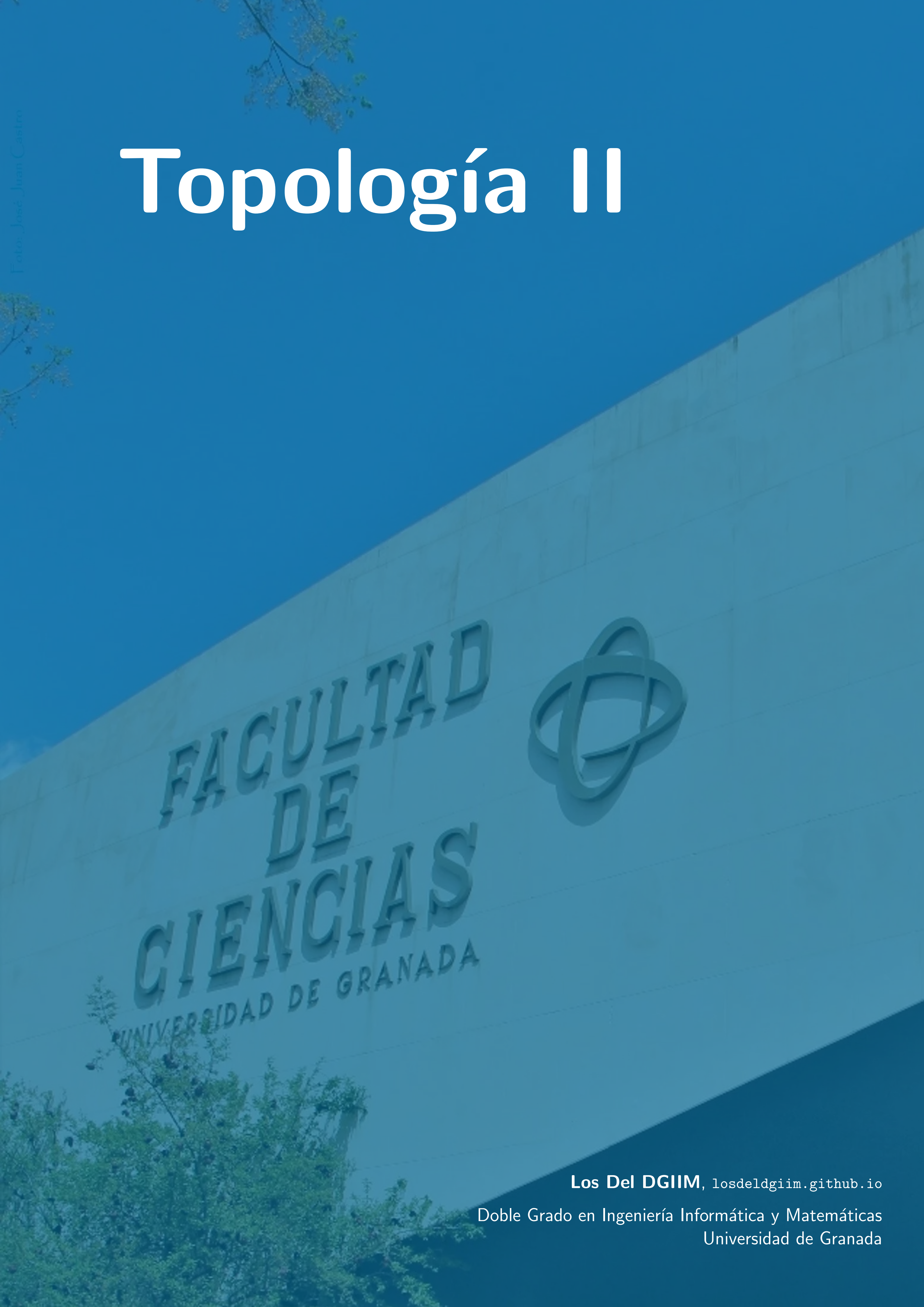


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2024-2025

Índice general

Introducción. Conexión por arcos

0.1. Conexión

Notación. Notaremos por e.t al espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ o diremos X es un e.t.

Definición 0.1. Se dice que un e.t X es no conexo si existen U y V abiertos disjuntos y no vacíos tales que $X = U \cup V$.

Proposición 0.1. *Dado un e.t. X equivalen las siguientes afirmaciones:*

(i) X es conexo.

(ii) Los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez son el vacío y el total.

(iii) Los únicos subconjuntos de X con frontera vacía son el vacío y el total.

Teorema 0.2. *El ser conexo se conserva por aplicaciones continuas. En particular, ser conexo es una propiedad topológica (se conserva por homeomorfismos).*

Teorema 0.3. *La unión de una colección de subconjuntos conexos que tienen un punto común de un e.t. X es también conexa.*

Teorema 0.4. *Si A es un subconjunto del e.t. X y A es conexo, entonces dado B con $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces se tiene que B también es conexo. En particular, la adherencia de un conexo siempre es un conjunto conexo.*

Teorema 0.5. *Dados dos espacios topológicos X, Y se cumple que $X \times Y$ es conexo (con la topología producto) si y solo si X e Y son conexos.*

Teorema 0.6. *Los conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ con la topología usual son exactamente los intervalos (incluyendo los puntos).*

Definición 0.2. Dados un e.t. X y un punto x_0 se define la componente conexa de x_0 es X como el mayor conexo de X que contiene a x_0

Teorema 0.7. *Las componentes conexas de un e.t. X forman una partición de X es conjuntos conexos maximales y cerrados.*

0.2. Conexión por arcos

Definición 0.3. Un **arco** (o camino) en un espacio topológico X es una aplicación continua $\alpha : [0,1] \to X$. Si además $\alpha(0) = \alpha(1)$ diremos que α es un lazo.

Diremos que un arco $\alpha : [0,1] \to X$ une x con y si se verifica que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Si α es un arco, diremos que está basado en x (o su punto base es x) si $\alpha(0) = x = \alpha(1)$.

Denotaremos por

$$\Omega(X; x, y) = \{\alpha : [0,1] \to X \text{ continua } : \alpha(0) = x, \quad \alpha(1) = y\}$$

al **conjunto de arcos** que unen x con y. Denotaremos además por

$$\Omega(X; x) = \{\alpha : [0,1] \to X \text{ continua } : \alpha(0) = x = \alpha(1)\}$$

al **conjunto de lazos** basados en x.

Ejemplo.

1. Dados un e.t. X y un punto $x_0 \in X$ siempre se tiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_0} : [0,1] &\to X \\ t &\mapsto x_0 \end{aligned}$$

es un lazo basado en x_0 al que llamaremos **arco constante**. De hecho, si X tiene la topología discreta, entonces los únicos arcos que hay en X son los arcos constantes.

Demostración. Si X tiene la topología discreta, entonces como α es continua $\alpha^{-1}(\{x_0\})$ será abierto y cerrado y por tanto $\alpha^{-1}(\{x_0\}) \in \{\emptyset, X\}$ por ser X conexo. □

2. Sean $x, y, z \in X$, $\alpha : [0,1] \to X$ un arco uniendo x con y y $\beta : [0,1] \to X$ un arco uniendo y con z. Buscaremos ahora un arco formado a partir de estos dos de la siguiente forma:

$$\alpha * \beta : [0,1] \to X : (\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Entonces $\alpha * \beta$ es continua ya que $(\alpha * \beta)_{|_{[0,1/2]}}$ y $(\alpha * \beta)_{|_{[1/2,1]}}$ lo son y para $t = 1/2$ se tiene que

$$\alpha\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)$$

con $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ cerrados. Aplicando el lema de pegado[1] tenemos que $\alpha * \beta$ es continua.

[1] visto en Topología I

3. Si $\alpha : [0,1] \to X$ es un arco uniendo x con y, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} : [0,1] &\to X \\ t &\mapsto \alpha(1-t) \end{aligned}$$

   es un arco que une y con x.

Definición 0.4. Decimos que un e.t. X es **arcoconexo** (o **conexo por arcos**) si para cualesquiera $x, y \in X$ existe un arco en X que une el punto x con el punto y.

Si X es un e.t. y $A \subset X$, diremos que A es arcoconexo si A es arcoconexo con la topología de inducida de X.

Teorema 0.8. *Todo espacio topológico arcoconexo es conexo.*

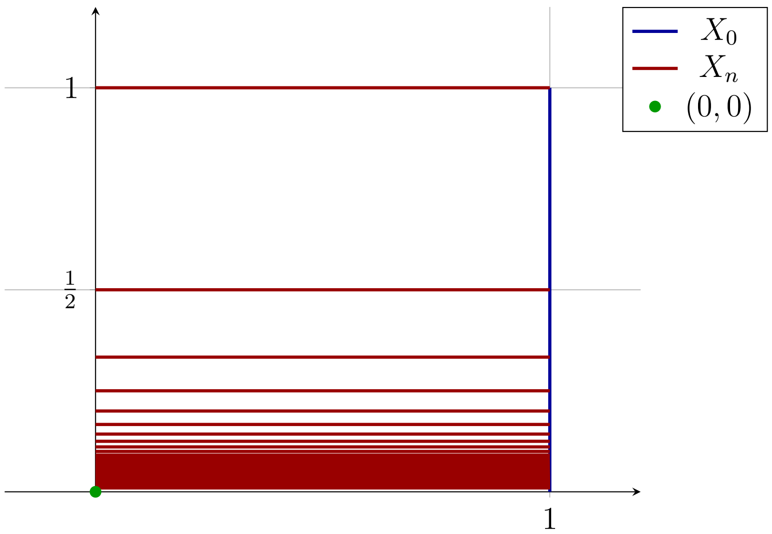
Demostración. Dado $x_0 \in X$ fijo y otro punto $x \in X$ cualquiera, sabemos que existe $\alpha : [0,1] \to X$ un arco tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x$. En particular, como el intervalo $[0,1]$ es conexo y α es continua, entonces se tiene que $\alpha([0,1])$ es conexo y podremos escribir

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} \alpha_x([0,1]) \in X \Rightarrow X = \bigcup_{x \in X} \alpha_x\{[0,1]\}$$

y además $x_0 \in \bigcap_{x \in X} \alpha_x\{[0,1]\}$ por lo que X es conexo (por el lema del peine). □

Ejemplo. Veamos que la otra implicación no es cierta en general. Para ello consideramos los siguientes conjuntos:

$$X_0 = \{1\} \times [0,1] \qquad \text{y} \qquad X_n = [0,1] \times \left\{\frac{1}{n}\right\}, \; n \in \mathbb{N}$$



Llamamos $X = \{(0,0)\} \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n \right)$ y queremos ver que X es conexo pero no es arcoconexo.

Si tomamos la segunda parte de esta unión, es decir,

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} X_n$$

tenemos que Y es es conexo porque es unión de los X_n que son todos conexos y que intersecan con X_0. Entonces, como $Y \subset X \subset \overline{Y}$ tenemos que X es conexo. Veamos sin embargo que X no es arcoconexo.

Para ello vamos a demostrar que si $\alpha : [0,1] \to X : \alpha$ es continua con $\alpha(0) = (0,0)$, entonces $\alpha(t) = (0,0)$ para todo $t \in [0,1]$.

Podemos escribir la curva como $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Como $\alpha(0) = (0,0)$, si tomamos $((-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2)) \cap X$ un abierto que contiene al origen, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\alpha([0,\varepsilon)) \subseteq ((-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2)) \cap X$ por ser α continua. Como $y(t)$ es continua y se tiene que $y([0,\varepsilon)) \subseteq \{0\} \cup \left(\bigcup_{n>2} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right)$. Por el teorema del valor intermedio tenemos que $y([0,\varepsilon)) = \{0\}$ por lo que $\alpha([0,\varepsilon)) = \{(0,0)\}$. De esta forma hemos probado que no hay ningún arco que conecte $(0,0)$ con un punto distinto (el único arco es el constante).

Teorema 0.9. *Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es estrellado, entonces A es arcoconexo.*

Demostración. Como A es estrellado existe un $x_0 \in A$ tal que para cualquier $x \in A$, el segmento que los une, $(1-t)x + tx_0 \in A$ para todo $t \in [0,1]$ y entonces $\alpha(t) = (1-t)x + tx_0$ es una curva continua uniendo x con x_0. Dados dos puntos cualesquiera $x, y \in A$ se tiene que $\alpha_x * \tilde{\alpha}_y$ es una curva continua que une x con y. □

Corolario 0.9.1. *Cualquier conjunto A de $\mathbb{R}^n$ convexo es arcoconexo. Por ejemplo, las bolas abiertas o las bolas cerradas de $\mathbb{R}^n$.*

Corolario 0.9.2. *En $\mathbb{R}$ coinciden los conjuntos conexos y arcoconexos (son solo los intervalos).*

Teorema 0.10. *La imagen mediante una aplicación continua de un arcoconexo es un arcoconexo. En particular, ser arcoconexo es una propiedad topológica, es decir, se conserva por homeomorfismos.*

Demostración. Dados $x, y \in f(X)$, entonces existen $x_0, y_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x$ y $f(y_0) = y$. Por ser X arcoconexo, entonces existe un arco $\alpha : [0,1] \to X$ con $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = y_0$. Entonces tenemos que $f \circ \alpha : [0,1] \to f(X)$ es continua y $(f \circ \alpha)(0) = f(x_0) = x$ y $(f \circ \alpha)(1) = f(y_0) = y$ y tenemos demostrado el resultado que buscábamos. □

Teorema 0.11. *Sean X un e.t y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de arcoconexos de X. Si $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, entones $\bigcup_{i\in I} A_i$ es arcoconexo.*

Observación. Hay resultados de conexión que no son ciertos para arcoconexión. Por ejemplo, si en un e.t. X se tiene que $A \subseteq X$ es arcoconexo podría ocurrir que si $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, se diera que B no sea arcoconexo (como en el ejemplo anterior).

Ejemplo. Veamos que $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ es arcoconexo. Podemos hacerlo sabiendo que $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, con $N = (0, \dots, 0, 1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ que es arcoconexo por lo que $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ es arcoconexo. Análogamente, $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ con $S = (0, \dots, 0, -1)$ es arcoconexo y podemos escribir

$$\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \cup (\mathbb{S}^n \setminus \{S\})$$

por lo que $\mathbb{S}^n$ es unión de arcoconexos con puntos en común, luego es arcoconexo.

Teorema 0.12. *Sean X, Y e.t., entonces $X \times Y$ es arcoconexo (con la topología producto) si y solo si X e Y son arcoconexos.*

Teorema 0.13. *Dado un e.t. X, se tiene que X es arcoconexo si y solo si X es conexo y todo punto $x \in X$ tiene un entorno suyo arcoconexo.*

Demostración.

- $\Rightarrow$) Hemos visto que si X es arcoconexo, entonces X es conexo. Además, X es entorno de cualquier punto suyo luego todo punto tiene un entorno conexo.

- $\Leftarrow$) Elegimos un $x \in X$ fijo y definimos $A = \{y \in X : \exists \alpha_y$ arco uniendo x con y $\}$

  Como $x \in A$ tenemos que $A \neq \emptyset$. Si probamos que A es abierto y cerrado, entonces como X es conexo tendremos que $A = X$, es decir podremos unir x con cualquier otro punto $y \in X$.

  Veamos que A es abierto. Tomamos $z \in A$ y queremos demostrar que $\exists U$ entorno de z tal que $U \subseteq A$. Por hipótesis sabemos que existe un entorno U arcoconexo de z. Entonces dado $u \in U$ existe un arco α_u que une z con u. Por otro lado, como $z \in A$, entonces existe un arco β_z que une x con z. Tendremos entonces que $\beta_z * \alpha_u$ es un arco que une x con u y por defínción tendremos $u \in A$, luego $U \subseteq A$.

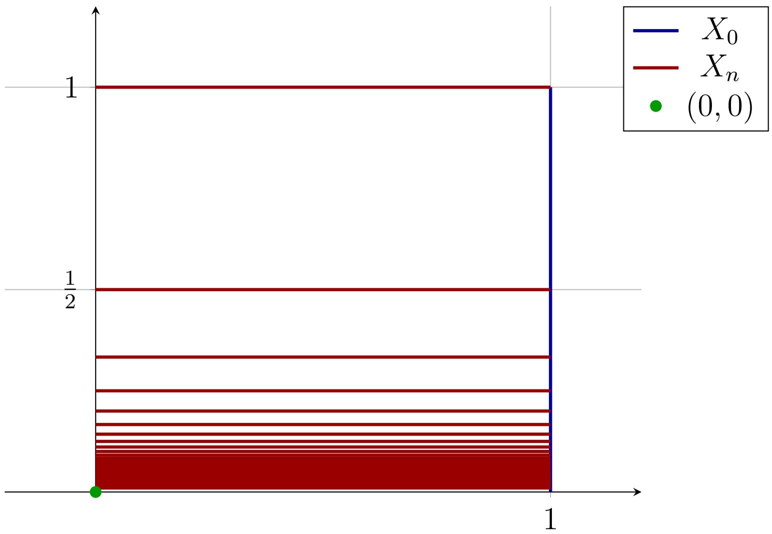
  Nos queda ver que A es cerrado. Tomamos para ello $z \in \overline{A}$. Por hipótesis existe un entorno U de z arcoconexo. Por ser U entorno de z y $z \in \overline{A}$ necesariamente $U \cap A \neq \emptyset$ por lo que existe al menos un $u \in U \cap A$. Como $u \in A$ existe un arco α_u que une x con u y como $u \in U$ existe también un arco β_u que une u con z y tendríamos que $\alpha_u * \beta_u$ es un arco uniendo x con z llegando a que $z \in A$. Tendríamos $\overline{A} \subseteq A$ y como la otra inclusión se da siempre, tendremos que A coincide con su adherencia, por lo que es cerrado.

$\square$

Definición 0.5. Dados un e.t. X y un punto $x_0 \in X$, llamamos **componente arcoconexa** de x_0 al mayor arcoconexo en X que contiene a x_0.

Teorema 0.14. *Las componentes arcoconexas de un e.t. X forman una partición de X en subconjuntos arcoconexos de X maximales.*

Ejemplo. En el ejemplo que ya se trabajó se puede ver que el conjunto X que era



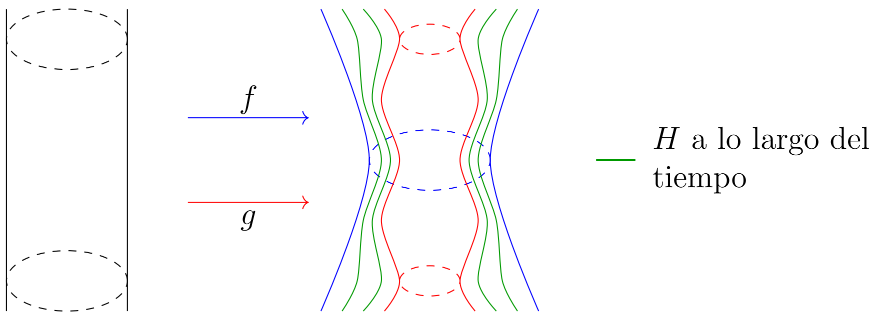
tiene dos componentes arcoconexas: $\{(0,0)\}$, $\bigcup_{u\in\mathbb{N}\cup\{0\}} X_n$

1. El grupo fundamental

1.1. Homotopía por arcos

Definición 1.1. Sean X e Y dos espacios topologicos y $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas. Decimos que f es **homotópica** a g si existe $H : X \times [0,1] \to Y$ continua tal que

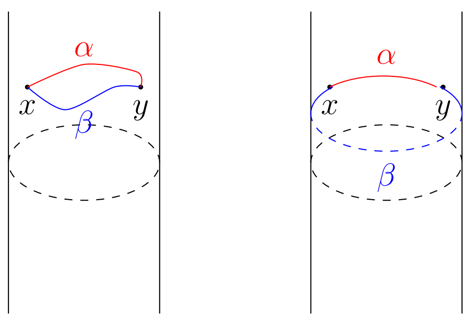
$$H(x,0) = f(x) \quad \text{y} \quad H(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X$$



Definición 1.2. Dados X e.t., $x, y \in X$ y dos arcos $\alpha, \beta \in \Omega(X; x, y)$, decimos que α, β son **homotópicos por arcos** si existe $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ continua tal que

$$\begin{aligned} H(s,0) &= \alpha(s) \quad \text{y} \quad H(s,1) = \beta(x) & \forall s \in [0,1] \\ H(0,t) &= x \quad \text{y} \quad H(1,t) = y & \forall t \in [0,1] \end{aligned}$$

Lema 1.1. *Ser homotópico por arcos da lugar a una relación de equivalencia en* $\Omega(X; x, y)$.



Equivalentes   No equivalentes

Demostración.

(i) Dado $\alpha \in \Omega(X; x, y)$ queremos ver que α es homotópica por arcos con α. Para ello tenemos

$$\begin{array}{rl} H(s,t) = \alpha(s) & H(s,0) = \alpha(s) = H(s,1) \\ H(0,t) = \alpha(0) = x & H(1,t) = \alpha(1) = y \end{array}$$

(ii) Dados $\alpha, \beta \in \Omega(X; x, y)$ tales que existe $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ continua tal que

$$\begin{array}{rcll} H(s,0) = \alpha(s) & \text{y} & H(s,1) = \beta(x) & \forall s \in [0,1] \\ H(0,t) = x & \text{y} & H(1,t) = y & \forall t \in [0,1] \end{array}$$

Queremos ver que existe un $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to X$ continua tal que

$$\begin{array}{rcll} \tilde{H}(s,0) = \beta(s) & \text{y} & \tilde{H}(s,1) = \alpha(x) & \forall s \in [0,1] \\ \tilde{H}(0,t) = x & \text{y} & \tilde{H}(1,t) = y & \forall t \in [0,1] \end{array}$$

Tomando $\tilde{H}(s,t) := H(s, 1-t)$ cumple claramente con lo que buscamos.

(iii) Dado $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X; x, y)$ y $H_1, H_2 : [0,1] \times [0,1] \to X$ continuas tales que

$$\begin{array}{cc} H_1(s,0) = \alpha(s) & H_2(s,0) = \beta(s) \\ H_1(s,1) = \beta(s) & H_2(s,1) = \gamma(s) \\ H_1(0,t) = x & H_2(0,t) = x \\ H_1(1,t) = x & H_2(1,t) = y \end{array}$$

Queremos ver que existe un $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que

$$\begin{array}{rl} H(s,t) = \alpha(s) & H(s,0) = \alpha(s) = H(s,1) \\ H(0,t) = \alpha(0) = x & H(1,t) = \alpha(1) = y \end{array}$$

Para ello consideramos

$$H(s,t) = \begin{cases} H_1(s, 2t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ H_2(s, 2t-1) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Y con el lema de pegado es fácil ver que es continua y que satisface las condiciones que buscábamos.

□

Ejemplo.

1. Sean X un e.t. y $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ aplicaciones continuas, entonces vamos a ver que f y g son homotópicas.

   Demostración. Vamos a definir la aplicación

   $$\begin{aligned} H : X \times [0,1] &\to \mathbb{R}^n \\ (x,t) &\mapsto (1-t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

   que es continua y además verifica

   $$H(x,0) = f(x) \qquad H(x,1) = g(x)$$

   por lo que tenemos lo que buscábamos. □

En el caso particular de que $f = \alpha$ y $g = \beta$ fuesen arcos comenzando en un punto común y acabando en otro punto común, entonces la H anterior sería una homotopía por arcos.

2. Si $\alpha : [0,1] \to X$ es un arco y $h : [0,1] \to [0,1]$ es una aplicación continua con $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$, entonces $\dot{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ es homotópica por arcos a $\alpha(s)$.

   Demostración. Es claro que $\dot{\alpha}$ es continua y existe una homotopía por arcos entre α y $\dot{\alpha}$ que es la siguiente
   $$H(s,t) = \alpha((1-t)s + th(s))$$
   que es claramente continua y que verifica que
   $$\begin{array}{rl} H(s,0) = \alpha(s) & \quad H(s,1) = \alpha(h(s)) = \dot{\alpha}(s) \\ H(0,t) = \alpha(0) = \dot{\alpha}(1) & \quad H(1,t) = \alpha(1) = \dot{\alpha}(1) \end{array}$$
   □

   Intuitivamente podemos entender esto como que no importa a qué velocidad se recorra una curva para ser homotópico por arcos.

Notación. Como convenio a la clase de equivalencia de un arco α en $\Omega(X; x, y)$ lo denotaremos por $[\alpha]$.

Lema 1.2. *Dados dos arcos α_1, α_2 en $\Omega(X; x, y)$ y $\beta_1, \beta_2 \in \Omega(X; y, z)$. Se verifica que si $[\alpha_1] = [\alpha_2]$, entonces $[\alpha_1 * \beta_1] = [\alpha_2 * \beta_2]$.*

Demostración. Tenemos que
$$(\alpha_1 * \beta_1) = \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_1(2s) & \text{si} & 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \beta_1(2s-1) & \text{si} & 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{array} \right.$$

$$(\alpha_2 * \beta_2) = \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_2(2s) & \text{si} & 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \beta_2(2s-1) & \text{si} & 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{array} \right.$$
Además, sabemos que existen H_1, H_2 continuas tal que
$$\begin{array}{cc} H_1(s,0) = \alpha_1(s) & \quad H_2(s,0) = \beta_1(s) \\ H_1(s,1) = \beta_1(s) & \quad H_2(s,1) = \beta_2(s) \\ H_1(0,t) = x & \quad H_2(0,t) = y \\ H_1(1,t) = y & \quad H_2(1,t) = z \end{array}$$
Tomamos entonces $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ dada por
$$H(s,t) = \left\{ \begin{array}{lll} H_1(2s,t) & \text{si} & s \in [0, 1/2],\ t \in [0,1] \\ H_2(2s-1,t) & \text{si} & s \in [1/2, 1],\ t \in [0,1] \end{array} \right.$$
es continua y tenemos que
$$H(s,0) = \left\{ \begin{array}{lll} H_1(2s,0) & \text{si} & s \in [0, 1/2] \\ H_2(2s-1,0) & \text{si} & s \in [1/2, 1] \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_1(2s) & \text{si} & s \in [0, 1/2] \\ \beta_1(2s-1) & \text{si} & s \in [1/2, 1] \end{array} \right. = (\alpha_1 * \beta_1)(s)$$
Análogamente se tiene que $H(s,1) = (\alpha_2 * \beta_2)(s)$ con $H(0,t) = x$ y $H(1,t) = z$.
□

A partir del lema anterior podemos definir

$$[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$$

con $\alpha \in \Omega(X; x, y)$, $\beta \in \Omega(X; y, z)$

Teorema 1.3. *Dado* X *e.t.,* $\alpha \in \Omega(X; x, y)$, $\beta \in \Omega(X; y, z)$ *y* $\gamma \in \Omega(X; z, w)$ *se tiene que*

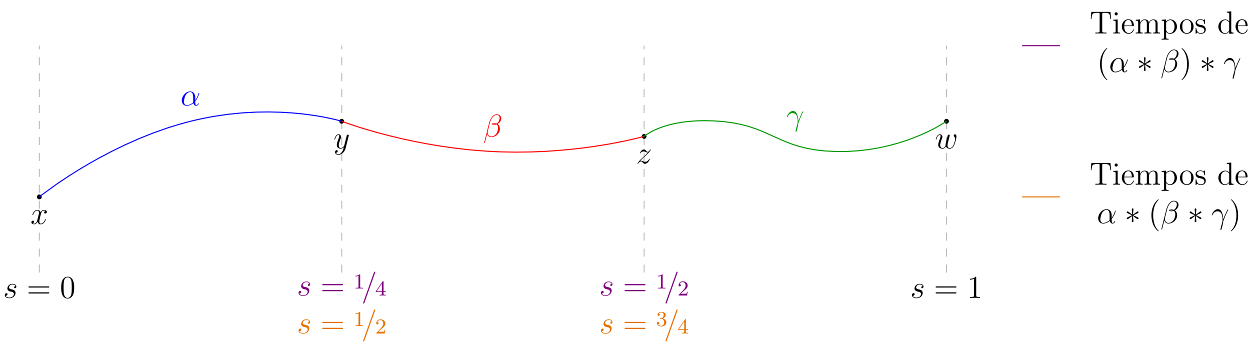
(i) $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$

(ii) $[\alpha] * [\varepsilon_y] = [\alpha]$ *y* $[\varepsilon_x] * [\alpha] = [\alpha]$

(iii) $[\alpha] * [\tilde{\alpha}] = [\varepsilon_x]$ *y* $[\tilde{\alpha}] * [\alpha] = [\varepsilon_y]$

Demostración.

(i) Desarrollemos cada expresión



$$(\beta * \gamma)(s) = \begin{cases} \beta(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ \gamma(2s-1) & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$\alpha * (\beta * \gamma)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ (\beta * \gamma)(2s-1) & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ \beta(2(2s-1)) & \text{si} \quad s \in [1/2, 3/4] \\ \gamma(2(2s-1)-1) & \text{si} \quad s \in [3/4, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ \beta(4s-2) & \text{si} \quad s \in [1/2, 3/4] \\ \gamma(4s-3) & \text{si} \quad s \in [3/4, 1] \end{cases}$$

$$(\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ \beta(2s-1) & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$(\alpha * \beta) * \gamma(s) = \begin{cases} (\alpha * \beta)(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ \gamma(2s-1) & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \alpha(2(2s)) & \text{si} \quad s \in [0, 1/4] \\ \beta(2(2s)-1) & \text{si} \quad s \in [1/4, 1/2] \\ \gamma(2s-1) & \text{si} \quad s \in [3/4, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(4s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/4] \\ \beta(4s-1) & \text{si} \quad s \in [1/4, 1/2] \\ \gamma(2s-1) & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Usando el ejemplo 2 anterior se tiene que $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$ (realmente se están recorriendo las mismas curvas pero a distinta velocidad).

(ii) Tendremos que ver que $\alpha * \varepsilon_y$ se relaciona por una homotopía con arcos con α. Recordemos que

$$(\alpha * \varepsilon_y) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \varepsilon_y(2s-1) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ y & \text{si} \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

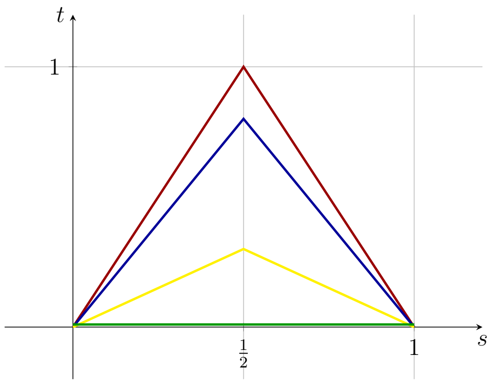
De nuevo del ejemplo 2 se tiene que son homotópicas

(iii) Tendremos que ver en este caso que $\alpha * \tilde{\alpha}$ es homotópico por arcos a ε_x. Describamos ambas curvas.

$$(\alpha * \tilde{\alpha}) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \tilde{\alpha}(2s-1) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \tilde{\alpha}(2-2s) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_x(s) = x \quad \forall s \in [0,1]$$

Pensamos ahora una transformación H que haga que cada vez la curva se vaya quedando más cerca de x (cada vez vuelve antes de llegar a y). Intuitivamente podríamos pensar en la siguiente gráfica, en la que vamos reduciendo la distancia desde la función roja hasta la verde



$$h(s) = \begin{cases} 2s & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ 2-2s & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Y podemos construir $H(s,t) = \alpha((1-t)h(s))$ que claramente es continua y verifica

$$\begin{aligned} H(s,0) = \alpha(h(s)) = (\alpha * \tilde{\alpha}(s)) \quad &\text{y} \quad H(s,1) = \alpha(0) = x = \varepsilon_x(s) \quad && \forall s \in [0,1] \\ H(0,t) = \alpha(0) = x \quad &\text{y} \quad H(1,t) = \alpha(0) = x && \forall t \in [0,1] \end{aligned}$$

□

1.2. El grupo fundamental

Corolario 1.3.1. *Dados un e.t. X y un punto $x_0 \in X$ se tiene que el conjunto de lazos en X basados en x_0 bajo la relación de equivalencia de ser homotópicos por arcos y con operación $*$ forman un grupo algebraico.*

Demostración. Definimos el siguiente conjunto

$$G = \frac{\Omega(X; x_0)}{R}$$

donde R es la relación de equivalencia "ser homotópico por arcos". Veamos ahora que G tiene estructura de grupo:

1. **Propiedad asociativa.** Tendremos que ver que se verifica para cualesquiera $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in G$.

   $$[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$$

   pero esto lo tenemos claramente del teorema anterior

2. **Existencia del elemento neutro.** Por el teorema anterior tenemos que para $x = y = x_0$ se tiene que $[\alpha] * [\varepsilon_{x_0}] = [\alpha] = [\varepsilon_{x_0}] * [\alpha]$ para cualquier $[\alpha] \in G$ luego tenemos la existencia probada.

3. **Existencia del elemento opuesto.** De nuevo usamos el teorema anterior y nos dice que para cualquier $[\alpha] \in G$ se tiene que

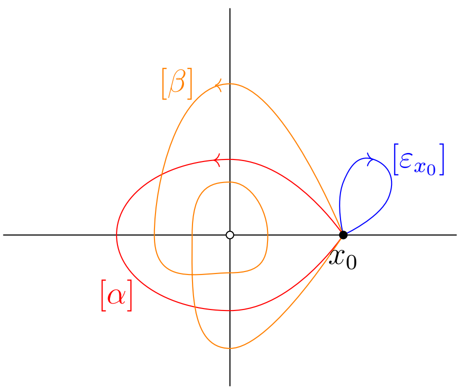
   $$[\alpha] * [\tilde{\alpha}] = [\varepsilon_{x_0}] = [\tilde{\alpha}] * [\alpha]$$

   y se tiene directamente.

Con esto hemos probado finalmente que G es un grupo. □

Definición 1.3. Al grupo algebraico dado por el corolario anterior lo llamaremos el **grupo fundamental** de X en x_0 y lo denotaremos por $\pi_1(X, x_0)$.

Ejemplo. Consideramos $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ y un punto cualquiera x_0.



En este espacio tenemos que $[\varepsilon_{x_0}] \neq [\alpha] \neq [\tilde{\alpha}] \neq [\beta]$. Intuitivamente podríamos intentar identificar este espacio con $\mathbb{Z}$ de la siguiente forma:

- La clase $[\varepsilon_{x_0}]$ la podemos interpretar como el 0 de $\mathbb{Z}$.
- Identificaremos los números positivos como el número de vueltas que da cada curva al punto $(0,0)$ en sentido positivo (el que elijamos como positivo). Por ejemplo $[\alpha]$ sería $1 \in \mathbb{Z}$, $[\beta]$ sería $2 \in \mathbb{Z}$ y podríamos seguir así con todos los números enteros.
- Para los números negativos tomaremos los opuestos de los anteriores, es decir, las curvas recorridas en sentido contrario. Por ejemplo $[\tilde{\alpha}]$ será el $-1 \in \mathbb{Z}$, $[\tilde{\beta}]$ será el -2 y así sucesivamente.

Más adelante probaremos que $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ de una forma más rigurosa.

Ejemplo. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto estrellado desde un punto x_0. Entonces $\pi_1(X; x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$, es decir, es trivial.

Demostración. Dado $\alpha(s)$ un lazo basado en x_0 dentro de X, entonces

$$H(s,t) = (1-t)\alpha(s) + tx_0$$

es una aplicación continua dentro[1] de X tal que

$$\begin{array}{rcll} H(s,0) = \alpha(s) = & \text{y} & H(s,1) = x_0 = \varepsilon_{x_0}(s) & \forall s \in [0,1] \\ H(0,t) = x_0 & \text{y} & H(1,t) = x_0 & \forall t \in [0,1] \end{array}$$

□

En particular, las bolas abiertas, las bolas cerradas, los convexos en general como $\mathbb{R}^n$ tienen grupo fundamental trivial.

Teorema 1.4. *Sean x, y dos puntos de un e.t. X. Si X es arcoconexo, entonces $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ son iguales salvo isomorfismo.*

Demostración. Como X es arcoconexo podemos considerar α un arco uniendo x con y y la aplicación

$$\begin{aligned} F_\alpha : \pi_1(X, y) &\to \pi_1(X, x) \\ [\gamma] &\mapsto [\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}] \end{aligned}$$

que está bien definida por lo visto anteriormente sobre el operador $*$. Queremos ver ahora que F_α es un isomorfismo de grupos. Para ello comencemos por ver que F_α es un homomorfismo, es decir, que se verifica

$$F_\alpha([\gamma_1] * [\gamma_2]) = F_\alpha[\gamma_1] * F_\alpha([\gamma_2])$$

Desarrollamos el segundo término de la expresión:

$$\begin{aligned} F_\alpha[\gamma_1] * F_\alpha([\gamma_2]) &= ([\alpha] * [\gamma_1] * [\tilde{\alpha}]) * ([\alpha] * [\gamma_2] * [\tilde{\alpha}]) = [\alpha] * [\gamma_1] * [\gamma_2] * [\tilde{\alpha}] = \\ &= F_\alpha([\gamma_1] * [\gamma_2]) \end{aligned}$$

[1] aquí es donde usamos que es estrellado

y tenemos la igualdad buscada. Veamos ahora que tiene inversa considerando $F_{\tilde{\alpha}}$ que por definición es $F_{\tilde{\alpha}}([\beta]) = [\tilde{\alpha}] * [\beta] * [\alpha]$ y que además verifica

$$(F_{\tilde{\alpha}} \circ F_{\tilde{\alpha}})([\gamma]) = F_{\tilde{\alpha}}([\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}]) = [\tilde{\alpha}] * ([\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}]) * [\alpha] = [\gamma] = Id_{\pi_1(X,y)}([\gamma])$$
$$(F_{\alpha} \circ F_{\tilde{\alpha}})([\gamma]) = F_{\alpha}([\tilde{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]) = [\alpha] * ([\tilde{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]) * [\tilde{\alpha}] = [\gamma] = Id_{\pi_1(X,x)}([\gamma])$$

por lo que es su inversa. Hemos encontrado por tanto un homomorfismo biyectivo, luego $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$ □