MN I

Examen IV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

MN I
Examen IV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Métodos Numéricos I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Matemáticas.

Grupo B.

Profesor Teresa Encarnación Pérez Fernández.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 13 de junio de 2022.

Primera Parte [4 puntos]

Ejercicio 1. Se pretende resolver el sistema $Ax = b$ donde A es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & a & -a \\ -4 & 3 & -4 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

y $b = (a, 3, 1)^T$, donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

1. Determine para que valores del parámetro a:

   a) Se puede resolver utilizando el método de Gauss sin intercambio de filas.

   Para ello, es necesario que $a_{kk}^{(k)} \neq 0 \ \forall k = 1, \dots, n$.

$$\begin{pmatrix} -3 & a & -a \\ -4 & 3 & -4 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3'=F_3+\frac{2}{3}F_1]{F_2'=F_2-\frac{4}{3}F_1} \begin{pmatrix} -3 & a & -a \\ 0 & 3-\frac{4a}{3} & -4+\frac{4a}{3} \\ 0 & 7+\frac{2a}{3} & -4-\frac{2a}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[m_{3,2}=-\frac{7+\frac{2a}{3}}{3-\frac{4a}{3}}=\frac{21+2a}{4a-9}]{F_3'=F_3+m_{3,2}F_2} \begin{pmatrix} -3 & a & -a \\ 0 & 3-\frac{4a}{3} & -4+\frac{4a}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10a-48}{4a-9} \end{pmatrix}$$

   $a_{11}^{(1)} = -3 \neq 0$
   $a_{22}^{(2)} = 3 - \frac{4a}{3} = 0 \iff 9 = 4a \iff a = \frac{9}{4}$
   $a_{33}^{(3)} = \frac{10a-48}{4a-9} = 0 \iff 10a = 48 \iff a = \frac{48}{10}$
   Por tanto, se puede resolver siempre que $a \neq \{\frac{9}{4}, \frac{48}{10}\}$.

   b) Se puede resolver usando una descomposición LU de A.

   En este caso, es necesario que todos sus menores principales sean no nulos.

$$|-3| = -3 \qquad \begin{vmatrix} -3 & a \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 4a = 0 \iff a = \frac{9}{4}$$

$$|A| = 36 - 8a + 28a + 6a - 84 - 16a = 10a - 48 = 0 \iff a = \frac{48}{10}$$

   Por tanto, se puede resolver siempre que $a \neq \{\frac{9}{4}, \frac{48}{10}\}$. Como vemos, es análogo al método de Gauss sin intercambio de filas.

   c) El método iterativo de Gauss-Seidel es convergente.

   En el caso de Gauss-Seidel, la matriz de descomposición es $Q = D + L$. Por tanto,

$$Ax = b \Longrightarrow (Q - (Q - A))x = b \Longrightarrow Qx = (Q - A)x + b \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x = Q^{-1}(Q - A)x + Q^{-1}b = (I - Q^{-1}A)x + Q^{-1}b$$

Por tanto, $B_{G-S} = I - Q^{-1}A = I - (D+L)^{-1}A$

$$(D+L)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{17}{18} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$B_{G-S} = I - Q^{-1}A = I - (D+L)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{3} & -\frac{a}{3} \\ 0 & \frac{4a}{9} & \frac{-4a+12}{9} \\ 0 & \frac{17a}{18} & \frac{-17a+42}{18} \end{pmatrix}$$

Para ver si es convergente, calculamos sus valores propios.

$$P_{B_{G-S}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{a}{3} & -\frac{a}{3} \\ 0 & \frac{4a}{9} - \lambda & \frac{-4a+12}{9} \\ 0 & \frac{17a}{18} & \frac{-17a+42}{18} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{18} \begin{vmatrix} 4a - 9\lambda & -4a + 12 \\ 17a & -17a + 42 - 18\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\lambda}{9 \cdot 18}[(4a - 9\lambda)(-17a + 42 - 18\lambda) - 17a(-4a + 12)] =$$

$$= -\frac{\lambda}{9 \cdot 18}(-68a^2 + 168a - 72a\lambda + 153a\lambda - 378\lambda + 162\lambda^2 + 68a^2 - 204a) =$$

$$= -\frac{\lambda}{9 \cdot 18}[162\lambda^2 + (81a - 378)\lambda - 36a] = -\frac{\lambda}{18}[18\lambda^2 + (9a - 42)\lambda - 4a]$$

$$\lambda_2 = \frac{-9a + 42 \pm \sqrt{(9a-42)^2 + 16 \cdot 18a}}{2 \cdot 18} =$$

$$= \frac{-9a + 42 \pm \sqrt{81a^2 + 1764 - 756a + 16 \cdot 18a}}{2 \cdot 18} =$$

$$= \frac{-9a + 42 \pm \sqrt{81a^2 - 468 + 1764}}{2 \cdot 18} = \frac{-3a + 14 \pm \sqrt{9a^2 - 52a + 196}}{2 \cdot 6}$$

2. Para $a = 1$ escriba las ecuaciones explícitas del método de Jacobi y Gauss-Seidel y realice tres iteraciones de ambos métodos.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & -\frac{1}{3}(1 - x_2 + x_3) \\ x_2 & = & \frac{1}{3}(3 + 4x_1 + 4x_3) \\ x_3 & = & -\frac{1}{4}(1 - 2x_1 - 7x_2) \end{array}\right\}$$

Ecuaciones de Jacobi:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & -\frac{1}{3}(1 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} & = & \frac{1}{3}(3 + 4x_1^{(k)} + 4x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} & = & -\frac{1}{4}(1 - 2x_1^{(k)} - 7x_2^{(k)}) \end{array}\right\}$$

Tres iteraciones del método de Jacobi:

k	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{3}$
3	$-\frac{19}{27}$	$+\frac{26}{9}$	$+\frac{13}{72}$

Ecuaciones de Gauss-Seidel:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & -\frac{1}{3}(1 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} & = & \frac{1}{3}(3 + 4x_1^{(k+1)} + 4x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} & = & -\frac{1}{4}(1 - 2x_1^{(k+1)} - 7x_2^{(k+1)}) \end{array}\right\}$$

Tres iteraciones del método de Gauss-Seidel:

k	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$
2	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{35}{27}$	$+\frac{50}{27}$
3	$-\frac{14}{27}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{235}{54}$

3. Para $a = 0$ resuelva el sistema utilizando el método de Gauss con pivote total.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3'=F_3+\frac{2}{3}F_1]{F_2'=F_2-\frac{4}{3}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[m_{3,2}=-\frac{7}{3}]{F_3'=F_3+m_{3,2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} & -6 \end{array}\right)$$

Por tanto,

$$x_3 = -\frac{18}{16} = -\frac{9}{8} \qquad x_2 = \frac{3 + 4x_3}{3} = \frac{5}{2} \qquad x_1 = 0$$

Ejercicio 2. Dada la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, para $n \geqslant 1$, se considera la expresión

$$||A||_S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \tag{1}$$

1. Demuestre que (1) define una norma matricial.

   - $||A||_S \geqslant 0$, ya que cada sumando es $\geqslant 0$ debido al valor absoluto. Además,

   $$||A||_S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 0 \iff |a_{ij}| = 0 \ \forall i,j \iff A = 0$$

   - $||cA||_S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |ca_{ij}| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c||a_{ij}| = |c| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = |c| \cdot ||A||_S$

   - $||A + B||_S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij} + b_{ij}| \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + |b_{ij}| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| = ||A||_S + ||B||_S$

- Veamos que $||AB||_S \leqslant ||A||_S||B||_S$

$$||AB||_S = \sum_{i,j=1}^{n} |(ab)_{ij}| = \sum_{i,j=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n} |a_{ik}b_{kj}| = \sum_{i,j,k=1}^{n} |a_{ik}|\cdot|b_{kj}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j,k,s=1}^{n} |a_{ik}|\cdot|b_{sj}| = \sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}| \sum_{s,j=1}^{n} |b_{sj}| \overset{Asociativa}{=} \left(\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|\right)\left(\sum_{s,j=1}^{n} |b_{sj}|\right) =$$

$$= ||A||_S||B||_S$$

2. Calcule $||I_n||_S$ donde I_n es la matriz identidad de orden n.

$$||I_n||_S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |(I_n)_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

3. ¿Es una $||\cdot||_S$ una norma inducida? Justique la respuesta.

Supongamos que lo fuese. Por tanto, $\exists||\cdot||$ norma vectorial tal que:

$$||A||_S = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

Por tanto, suponiendo que $||\cdot||_S$ es una norma inducida:

$$||I_n||_S = \max_{x\neq 0} \frac{||I_n x||}{||x||} = \max_{x\neq 0} \frac{||x||}{||x||} = \max_{x\neq 0} 1 = 1$$

Por tanto, como hemos llegado a un absurdo, ya que $n \neq 1$, entonces la suposición es falsa. No es una norma inducida.

Observación. Se ha demostrado que, para toda norma inducida $||\cdot||_M$, la norma de la identidad es $||I_n||_M = 1$.

4. Estime el número de condición asociado a la norma (1) de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(B) = ||B||_S||B^{-1}||_S$$

En primer, lugar, calculo B^{-1}:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculo cada norma:

$$||B||_S = 5+2+2+1 = 10 \qquad ||B^{-1}||_S = 1+2+2+5 = 10$$

Por tanto,

$$\kappa(B) = ||B||_S||B^{-1}||_S = 10^2$$

Por tanto, podemos esperar la pérdida de 2 dígitos significativos en el cálculo de la solución de un sistema con B como matriz de coeficientes.

Segunda Parte [4 puntos]

Ejercicio 3. Se consideran los datos $f(-1) = f(1) = 0{,}345, \quad f(0) = f(2) = 1{,}67$.

1. Estime el valor de $f(0,5)$ utilizando el algoritmo de Newton-Horner en aritmética finita de tres dígitos por redondeo.

   Calculo en primer lugar la tabla de diferencias divididas:

$$
\begin{array}{c|cccc}
x_i & f[x_i] & & & \\
 & & & & \\
-1 & \mathbf{0{,}345} & & & \\
 & & \mathbf{1{,}33} & & \\
0 & 1{,}67 & & \mathbf{-1{,}33} & \\
 & & -1{,}33 & & \mathbf{0{,}887} \\
1 & 0{,}345 & & 1{,}33 & \\
 & & 1{,}33 & & \\
2 & 1{,}67 & & &
\end{array}
$$

   Por tanto, el polinomio de interpolación es

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= 0{,}345 + 1{,}33(x+1) - 1{,}33x(x+1) + 0{,}887x(x+1)(x-1) \\
&= 0{,}345 + (x+1)[1{,}33 + x[-1{,}33 + 0{,}887(x-1)]]
\end{aligned}
$$

   Para reducir el error por redondeo, evaluamos usando el algoritmo de Newton-Horner:

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= 0{,}345 + 1{,}5[1{,}33 + 0{,}5[-1{,}33 - 0{,}5 \cdot 0{,}887]] \\
&= 0{,}345 + 1{,}5[1{,}33 + 0{,}5[-1{,}33 - 0{,}444]] \\
&= 0{,}345 + 1{,}5[1{,}33 - 0{,}885] = 0{,}345 + 1{,}5[0{,}445] \\
&= 0{,}345 + 0{,}668 = 1{,}01
\end{aligned}
$$

2. Estime el error cometido en el apartado anterior, sabiendo que $|f^{(k)}| < 0{,}3$, para todo x, y para cualquier orden de derivación k.

   El error cometido viene dado por:

$$
|e(x)| = \frac{|f^{4)}(\xi)|}{(4!)}|x(x+1)(x-1)(x-2)|
$$

   Por tanto, evaluando en $x = 0{,}5$, tenemos:

$$
|e(x)| = \frac{|f^{4)}(\xi)|}{24} \cdot \frac{9}{16}
$$

   Como sabemos que $|f^{(k)}| < 0{,}3$, para todo x, y para cualquier orden de derivación k, tenemos, por tanto, que:

$$
|e(x)| < \frac{0{,}3 \cdot 9}{24 \cdot 16} = \frac{9}{1280} = 7{,}031 \cdot 10^{-3}
$$

Ejercicio 4. Se considera la tabla de datos

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	$-6{,}5$	$-1{,}5$	$-0{,}5$	$3{,}5$	$9{,}5$

1. Calcule la aproximación por mínimos cuadrados de la función $f(x)$ en el espacio vectorial $\mathcal{U} = \mathcal{L}\{x, x^2\}$

   Sea la mejor aproximación $u(x) = ax + bx^2 \in \mathcal{U}$, y consideramos el producto escalar discreto siguiente:

   $$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)g(x_i)$$

   Calculamos los siguientes productos escalares:

   $$\langle x, x\rangle = 10 \qquad \langle x^2, x^2\rangle = 34 \qquad \langle x, x^2\rangle = 0$$
   $$\langle f, x\rangle = 37 \qquad\qquad \langle f, x^2\rangle = 14$$

   Por trabajar con una base ortogonal, tenemos que:

   $$a_i = \frac{\langle e_i, f\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle}$$

   Por tanto,
   $$a_1 = \frac{37}{10} \qquad\qquad a_2 = \frac{14}{34} = \frac{7}{17}$$

   Por tanto, la mejor aproximación de f en $\mathcal{U}$ es:

   $$u(x) = \frac{37}{10}x + \frac{7}{17}x^2$$

2. Calcule las diferencias divididas de orden 1 (con dos argumentos) para los datos de la tabla y llámelas P_1, P_2, P_3 y P_4.

   $$P_1 = f[-2, -1] = \frac{-1{,}5 + 6{,}5}{-1 + 2} = 5 \qquad P_2 = f[-1, 0] = 1$$
   $$P_3 = f[0, 1] = 4 \qquad P_4 = f[1, 2] = 6$$

3. Calcule el spline cúbico de clase 1 en los nodos -2, 0 y 2, $s(x) \in S_3^1(-2, 0, 2)$, tomando como derivadas en los nodos:

   $$d_0 = P_1, \qquad d_1 = \frac{P_2 + P_3}{2}, \qquad d_2 = P_4.$$

Interpolamos mediante Hermite en cada intervalo:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & & \mathbf{[-2,0]} & & \\
x_i & f(x_i) & & & \\
-2 & \mathbf{-6{,}5} & & & \\
 & & \mathbf{d_0 = 5} & & \\
-2 & -6{,}5 & & \mathbf{-1} & \\
 & & 3 & & \mathbf{\frac{3}{8}} \\
0 & -0{,}5 & & -\frac{1}{4} & \\
 & & d_1 = \frac{5}{2} & & \\
0 & -0{,}5 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & & \mathbf{[0,2]} & & \\
x_i & f(x_i) & & & \\
0 & \mathbf{-0{,}5} & & & \\
 & & \mathbf{d_1 = \frac{5}{2}} & & \\
0 & -0{,}5 & & \mathbf{\frac{5}{4}} & \\
 & & 5 & & \mathbf{-\frac{3}{8}} \\
2 & 9{,}5 & & \frac{1}{2} & \\
 & & d_2 = 6 & & \\
2 & 9{,}5 & & &
\end{array}
$$

Por tanto, el spline queda:

$$
s(x) = \begin{cases} -6{,}5 + 5(x+2) - (x+2)^2 + \frac{3}{8}x(x+2)^2 & \text{si} \quad x \in [-2,0] \\ -0{,}5 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{8}x^2(x-2) & \text{si} \quad x \in [0,2] \end{cases}
$$

4. Compare los valores que proporcionan el spline y la aproximación por mínimos cuadrados en los nodos -1 y 1. ¿Qué modelo elegiría?

   En $x = -1$, tenemos:

$$
s(-1) = -2{,}875 \qquad\qquad u(-1) \approx -3{,}288
$$

   En $x = 1$, tenemos:

$$
s(1) = 3{,}625 \qquad\qquad u(1) \approx 4{,}112
$$

   Por tanto, en ambos casos tenemos que el spline se aproxima más a los valores correctos de f.