Ecuaciones Diferenciales I
Examen IX

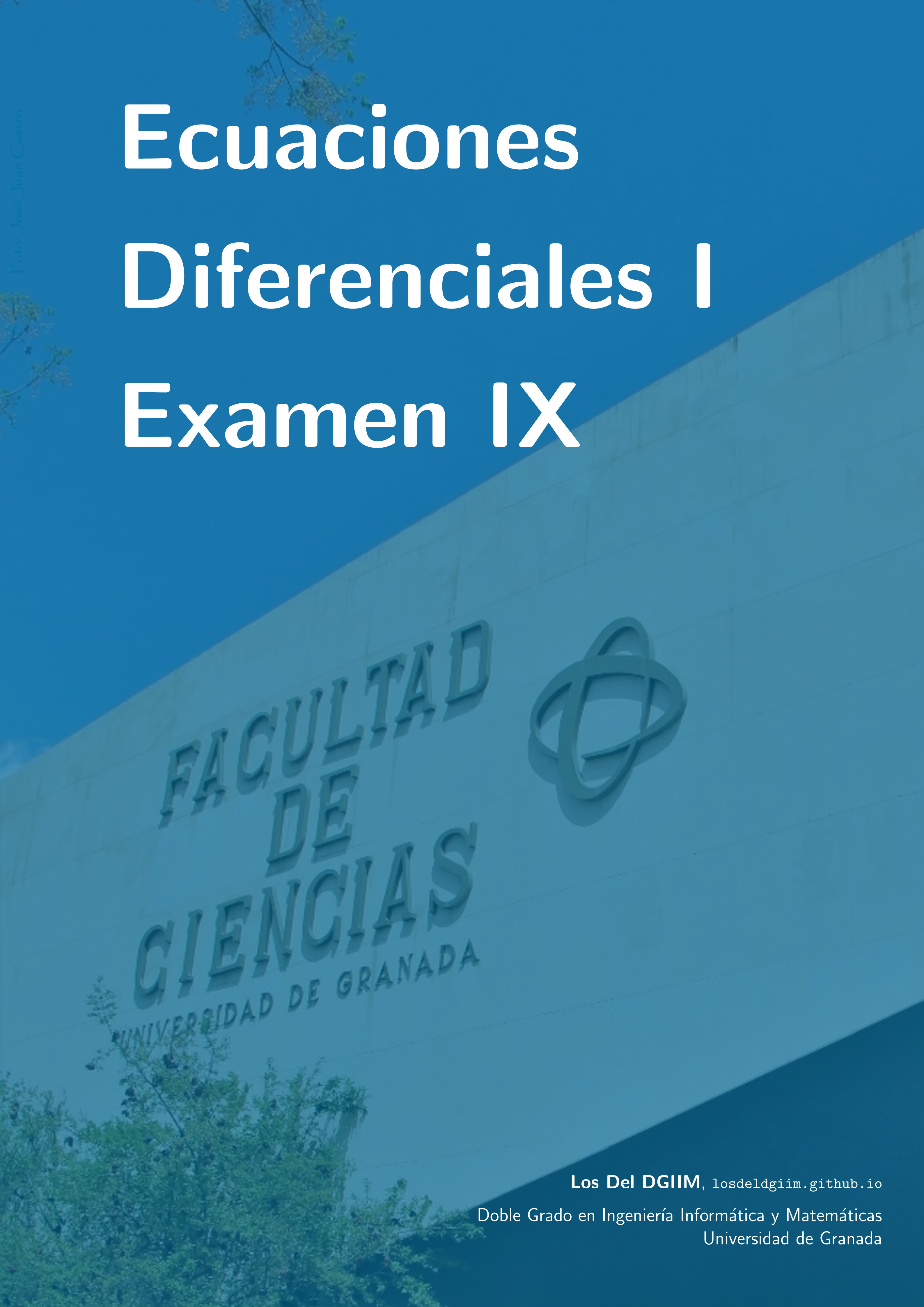

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen IX

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2020-21.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Primer parcial.

Fecha 16 de noviembre de 2020.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1. Se considera la ecuación

$$x' = x^2 + x + \frac{5}{4}$$

1. Estudia el crecimiento de las soluciones y sus límites en $\pm\infty$.

   Estudiemos sus puntos críticos. Como sus soluciones son de clase C^1, tenemos que estos han de anular la primera derivada:

   $$x'(t) = 0 \Longleftrightarrow x^2 + x + {}^5\!/\!_4 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-5}}{2}$$

   Por tanto, tenemos que no tiene extremos relativos, por lo que es estrictamente monótona. Como $x^2 + x + {}^5\!/\!_4 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, deducimos que $x'(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y por tanto x es estrictamente creciente.

   Supongamos ahora que x converge a $L \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Como x es convergente, tenemos que x' converge a 0. Tenemos por tanto que:

   $$0 = \lim_{t\to+\infty} f'(x(t)) = \lim_{t\to+\infty} x^2(t) + x(t) + \frac{5}{4} = L^2 + L + \frac{5}{4}$$

   No obstante, esta ecuación no tiene soluciones reales, por lo que no puede converger a ningún valor. Por tanto, x es estrictamente creciente y no converge a ningún valor real, luego x diverge positivamente.

   Análogamente, se demuestra que x diverge negativamente en $-\infty$.

2. Demuestra, sin resolver explícitamente la ecuación, que las soluciones tienen un único punto de inflexión.

   Tenemos que $x' \in C^1$, luego calculamos x'':

   $$x'' = (2x+1)x' = (2x+1)\left(x^2 + x + \frac{5}{4}\right) = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

   Por tanto, x'' solo se puede anular en los puntos con ordenada $x = -{}^1\!/\!_2$. Como x es estrictamente creciente, en particular es inyectiva, luego $\exists! t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x(t_0) = -{}^1\!/\!_2$, y por tanto x tiene un único pcandidato a punto de inflexión. Comprobemos que lo es:

   - Si $t < t_0$, entonces $x(t) < x(t_0) = {}^{-1}\!/\!_2$, luego $x''(t) < 0$ y por tanto x es cóncava.
   - Si $t > t_0$, entonces $x(t) > x(t_0) = {}^{-1}\!/\!_2$, luego $x''(t) > 0$ y por tanto x es convexa.

3. Encuentra la solución particular para la condición inicial $x(0) = 0$.

   Tenemos que se trata de una ecuación de variables separadas cuya función dependiente de x no se anula, por lo que:

   $$\int \frac{dx}{x^2 + x + {}^5\!/\!_4} = \int dt$$

Resolvemos la primera integral, haciendo uso de que:

$$x^2 + x + {}^5\!/\!_4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + {}^5\!/\!_4} = \int \frac{dx}{1 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = \arctan{(2x+1)} + C'$$

Por tanto, la solución general es:

$$\arctan{(2x+1)} = t + C \Longrightarrow 2x + 1 = \tan(t + C) \Longrightarrow x = \frac{\tan(t+C) - 1}{2}$$

Usando la condición inicial de que $x(0) = 0$, tenemos que:

$$0 = \frac{\tan(C) - 1}{2} \Longleftrightarrow \tan(C) = 1 \Longleftrightarrow C = \frac{\pi}{4}$$

Por tanto, la solución particular es:

$$x(t) = \frac{\tan(t + {}^\pi\!/\!_4) - 1}{2}$$

El intervalo de definición es:

$$\widetilde{I} = \left]-\frac{3\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right[$$

Ejercicio 2. Encuentra la ecuación diferencial para la familia de funciones cuyas gráficas cumplen que la distancia al origen desde cada punto $(x, y(x))$ es igual a la segunda coordenada del punto de corte de la recta normal con el eje de ordenadas.

Ejercicio 3. Resuelve la ecuación diferencial:

$$\frac{x^2 + y^2}{x + 1} + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

usando un factor integrante que dependa de una sola de las variables.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R} \setminus \{-1\} \times \mathbb{R}$ un abierto conexo, y definimos:

$$\begin{array}{rccc} P: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x^2+y^2}{x+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} Q: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & 2y \end{array}$$

Buscamos una función $\mu : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mu \in C^1(\Omega)$, tal que:

- $\mu(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in \Omega$.
- Tras multiplicar la ecuación por μ, la ecuación sumple la condición de exactitud:
$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

Las derivadas parciales que intervienen son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} &= \frac{\partial(\mu)}{\partial y}P + \mu\frac{\partial P}{\partial y} \\
\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} &= \frac{\partial(\mu)}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}
\end{aligned}$$

Por tanto, la condición de exactitud se traduce en:

$$\frac{\partial(\mu)}{\partial y}P - \frac{\partial(\mu)}{\partial x}Q = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Las derivadas parciales que intervienen son:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial(P)}{\partial y}(x, y) &= \frac{2y}{x+1} \\
\frac{\partial(Q)}{\partial x}(x, y) &= 0
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{2y}{x+1}$$

Veamos que $\exists m : \pi_1(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que $\mu(x, y) = m(x)$ para todo $(x, y) \in \Omega$. En este caso, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mu)}{\partial y}(x, y) &= 0 \\
\frac{\partial(\mu)}{\partial x}(x, y) &= m'(x)
\end{aligned}$$

Por tanto, la condición de exactitud se traduce en:

$$\begin{aligned}
-2ym'(x) &= m(x)\left(-\frac{2y}{x+1}\right) \\
-m'(x) &= -\frac{m(x)}{x+1}
\end{aligned}$$

Por tanto, m es solución de la ecuación diferencial:

$$m' = \frac{m}{x+1} \qquad \text{con dominio } \pi_1(\Omega) \times \mathbb{R}^+$$

donde hemos supuesto $m(x) > 0$ para todo $x \in \pi_1(\Omega)$ (en caso contrario, llegaríamos a otro factor integrante, igualmente válido). Resolviendo la ecuación diferencial, obtenemos: Resolviendo dicha ecuación en variables separadas, obtenemos:

$$m(x) = \exp\left(\ln|x+1|\right) = |x+1|$$

Por tanto, el factor integrante es:

$$\mu(x, y) = |x+1| \qquad \forall (x, y) \in \Omega$$

Como se pide la resolución de la ecuación, buscamos un potencial $U : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla U = \mu(P, Q)$. Consideraremos (el otro caso es análogo) $\Omega =]-1, +\infty[\times \mathbb{R}$. Considerando la primera componente de ∇U, tenemos:

$$U(x,y) = \int \mu(x,y)P(x,y)dx = \int x^2 + y^2 dx = \frac{x^3}{3} + y^2x + \varphi(y)$$

donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función arbitraria de clase C^1 que representa la constante de integración. Derivando respecto de y, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= 2yx + \varphi'(y)\\ &= \mu(x,y)Q(x,y) = (x+1)2y = 2yx + 2y\end{aligned}$$

Por tanto, $\varphi'(y) = 2y$, luego $\varphi(y) = y^2$ (eligiendo constante de integración nula). Por tanto, el potencial es:

$$U(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^2x + y^2 = \frac{x^3}{3} + y^2(x+1)$$

Por tanto, tenemos que, para cada $C \in \mathbb{R}$ (que vendrá fijado por la condición inicial, $C = U(x_0, y_0)$), la solución es:

$$U(x,y) = C \Longrightarrow \frac{x^3}{3} + y^2(x+1) = C \Longrightarrow y(x) = \pm\sqrt{\frac{C - {x^3}/{3}}{x+1}} \qquad \forall x \in \left]-1, \sqrt[3]{3C}\right[$$

Ejercicio 4. Encuentra una solución general de la ecuación

$$x^3y \cdot \frac{dy}{dx} + x^2y^2 = y^4$$

usando un cambio de potencial $u = y^\alpha$. Indica, sin desarrollar, algún método de resolución alternativo.