

# Análisis Funcional

# Examen XIII



**Los Del DGIIM**, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Análisis Funcional

# Examen XIII

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Granada, 2025

**Asignatura** Análisis Funcional.

**Curso Académico** 2024-25.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** David Arcoya Álvarez.

**Descripción** Examen Ordinario de Incidencias.

**Ejercicio 1** (3 puntos). Sean:

$$F = \{f \in C([-1, 1], \mathbb{R}) : f(1) = 0\}, \quad G = \{f \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}) : f(1) = 0\},$$

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0, 1]\}, \quad \forall f \in X$$

- a) ¿Es  $(F, \|\cdot\|_\infty)$  un espacio de Banach? Justifica tu respuesta.
- b) ¿Es  $(G, \|\cdot\|_\infty)$  un espacio de Banach? Justifica tu respuesta.

**Ejercicio 2** (3 puntos). Supongamos que  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_2$  son dos normas completas en el espacio vectorial  $E$ . Prueba que si se verifica la propiedad

$$\text{“toda sucesión } \{x_n\} \subset E \text{ verificando } \begin{cases} \{x_n\} \xrightarrow{(E, \|\cdot\|_1)} x \\ \{x_n\} \xrightarrow{(E, \|\cdot\|_2)} y \end{cases} \text{ comple } x = y”}$$

entonces  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_2$  son equivalentes.

**Ejercicio 3.** Sea  $E$  un espacio de Banach.

- a) [1.5 puntos] Si  $C$  es un subconjunto convexo de  $E$ , prueba que

$C$  es cerrado en la topología de la norma  $\iff C$  es cerrado en la topología débil  $\sigma(E, E^*)$ .

- b) [0.75 puntos] Sea una sucesión  $\{f_n\} \subset E^*$  verificando

$\{\langle f_n, x \rangle\}$  es convergente para todo  $x \in E$ .

Prueba que existe  $f \in E^*$  tal que

$$\{f_n\} \xrightarrow{*} f \text{ en } \sigma(E^*, E)$$

- c) [0.75 puntos] Supongamos que  $E$  es reflexivo y sea  $\{x_n\}$  una sucesión en  $E$  tal que

$\{\langle f, x_n \rangle\}$  es convergente para cada  $f \in E^*$ .

Prueba que existe  $x \in E$  tal que

$$\{x_n\} \rightharpoonup x \text{ en } \sigma(E, E^*)$$

- d) [1 punto] Da un ejemplo de una sucesión  $\{x_n\} \subset E = C_0$  tal que  $\{\langle f, x_n \rangle\}$  es convergente para cada  $f \in E^*$ , pero no sea convergente débilmente en  $\sigma(E, E^*)$ .