

Ecuaciones Diferenciales II



Los Del DGIIM, losdeldgim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

Índice general

1. Movimiento de partículas en un fluido	5
1.1. Problema a resolver	8
1.2. Ecuación integral de Volterra	9

1. Movimiento de partículas en un fluido

Fijado un espacio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, supondremos siempre que será abierto¹ y conexo².

Notación. A cada punto de Ω lo notaremos normalmente por $p \in \Omega$, que tendrá coordenadas:

$$p = (x, y, z)$$

El fluido suele llevar en cada punto una dirección y una velocidad, por lo que en cada punto $p \in \Omega$ tendremos un vector v que determina la velocidad del fluido, la cual supondremos conocida siempre. Este vector no tiene por qué ser constante sino que puede depender del tiempo, por lo que generalmente v será una función $v = v(t, p)$, es decir, $v : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación que a cada momento t y posición p le asigna un vector $v(t, p)$.

Si tenemos una partícula en el fluido que se mueve esta determinará una trayectoria, que podemos modelar como una curva parametrizada $p(t)$.

Podremos medir la velocidad de la partícula de dos formas: observando la velocidad de la partícula de forma interna (como el cuentakilómetros de un coche) o suponiendo que es una partícula que se deja llevar por la corriente y que su velocidad es la del fluido. La velocidad es la derivada de p .

En el segundo caso:

$$\dot{p}(t) = V(t, p(t))$$

Estamos ante una ecuación diferencial. Observemos que es un sistema de primer orden en forma normal, puesto que las coordenadas de p son funciones del tiempo. Si escribimos $V = (u, v, w)$ tenemos:

$$\begin{cases} \dot{x} = u(t, x, y, z) \\ \dot{y} = v(t, x, y, z) \\ \dot{z} = w(t, x, y, z) \end{cases}$$

Un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas, que conocidas las velocidades del fluido determina la trayectoria de la partícula.

¹Queremos estudiar movimientos de partículas en un fluido y pasan cosas no deseadas en la frontera.

²Por comodidad.

Observación. Observemos que en la notación primera hemos escrito explícitamente que \dot{p} está en función de t . En la segunda notación estamos usando la notación habitual en las ecuaciones diferenciales, omitiendo la dependencia de t y pensándola de forma implícita. Podemos así reescribir la primera ecuación como:

$$\dot{p} = V(t, p)$$

Una vez denotamos $\dot{p}(t)$ estamos diciendo que es una solución concreta, por lo que será una variable dependiente de t . Sin embargo, cuando hablamos de $V(t, p)$ vemos p como una variable independiente.

Aparecerán sistemas autónomos, que representan fluidos estacionarios, donde la velocidad $V(t, p)$ no depende del tiempo.

Ejemplo. Comenzamos primero con dos ejemplos de fluidos estacionarios (el vector en cada posición no depende del tiempo):

- Consideramos $\Omega = \mathbb{R}^3$ y tomamos:

$$V(t, x, y, z) = (0, 1, 0)$$

Observamos que es un sistema autónomo (no depende del tiempo) y en el que la velocidad tampoco depende de la posición:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 1 \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Con lo que las soluciones son de la forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \\ y(t) &= t + c_2 \\ z(t) &= c_3 \end{aligned}$$

Es una familia que depende de 3 parámetros.

- Tomamos la ecuación de un vórtice lineal, $\Omega = \mathbb{R}^3$ y:

$$V(t, x, y, z) = (y, -x, 0)$$

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Es un sistema lineal homogéneo, que nos da las soluciones:

$$z(t) = c_3$$

Reducimos a una ecuación de segundo orden, derivando en la primera:

$$\ddot{x} + \dot{x} = 0$$

Por lo que:

$$x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$$

Y también tendremos:

$$y(t) = -c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)$$

Para ciertas condiciones iniciales $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Nuestro objetivo ahora es tratar de probar que el sistema:

$$\dot{p} = V(t, p)$$

con la condición inicial $p(t_0) = p_0$ tiene una solución. Luego trataremos de ver que en cada condición inicial tenemos una única solución. Demostraremos el Teorema de existencia y unicidad en cualquier número de dimensiones.

Notación. Notaremos a los puntos por $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ y al campo que define la ecuación diferencial por X , que será función de t y de x , que estará definido en un conjunto $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ y exigiremos que sea abierto y conexo. Así, tendremos

$$\begin{aligned} X : \quad D &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (t, x) &\longmapsto X(t, x) \end{aligned}$$

donde el campo X tiene d coordenadas:

$$X = (X_1, \dots, X_d)$$

donde tratamos de resolver la ecuación $\dot{x} = X(t, x)$, que en realidad es un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(t, x_1, \dots, x_d) \\ \vdots \\ \dot{x}_d = X_d(t, x_1, \dots, x_d) \end{cases}$$

Supondremos siempre que X es una función continua.

Tomaremos $(t_0, x_0) \in D$ y queremos resolver el problema de condiciones iniciales

$$\dot{x} = X(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

que consiste en resolver la ecuación diferencial superior mediante una solución que cumpla la condición enunciada.

1.1. Problema a resolver

Así, queremos resolver el problema:

$$\dot{x} = X(t, x) \quad (1.1)$$

con $X : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ continuo, donde $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ es un subconjunto abierto y conexo. La condición de que X sea continuo es equivalente a que cada una de sus coordenadas

$$X = (X_1, \dots, X_d)$$

sea una aplicación continua.

Definición 1.1. Una **solución** del problema (1.1) es una aplicación $x : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo³ de forma que $x(t) \in D$:

- i) $x(t)$ es derivable.
- ii) $(t, x(t)) \in D \quad \forall t \in I$.
- iii) $\dot{x}(t) = X(t, x(t)) \quad \forall t \in I$.

Observación. Observemos que la definición de solución del problema planteado anteriormente es equivalente si sustituimos la condición de que x sea derivable por la condición de que x sea de clase 1, puesto que la condición iii) nos da automáticamente la continuidad de la derivada de x .

Así, la condición i) se puede sustituir por la condición i') $x \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Ejemplo. Veamos un par de ejemplos para fijar las ideas:

1. Consideramos $\dot{x} = x^2$ y la aplicación $x(t) = \frac{1}{1-t}$. Vamos a analizar el marco del problema.

Tenemos en este caso $d = 1$ y $D = \mathbb{R}^2$, puesto que tenemos el campo vectorial $X(t, x) = x^2$, que es continuo en todo $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Tenemos una primera solución en $I_1 =]-\infty, 1[$, $x_1(t) = \frac{1}{1-t}$.

Y otra solución en $I_2 =]1, +\infty[$, $x_2(t) = \frac{1}{1-t}$.

Son dos soluciones distintas, con la misma fórmula.

2. Consideramos ahora $\dot{x} = \frac{x}{t}$ y la aplicación $x(t) = -7t$.

Tenemos $d = 1$ y el campo es $X(t, x) = \frac{x}{t}$, que tiene dos posibles dominios de definición:

$$D_1 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}, \quad D_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Tenemos en realidad dos ecuaciones diferenciales.

Para discutir una de sus soluciones, si consideramos:

$$I_1 = \mathbb{R}^-, \quad I_2 = \mathbb{R}^+$$

tenemos que $x|_{I_1}$ es solución de la ecuación diferencial considerando el dominio D_1 y análogamente para $x|_{I_2}$ con el dominio D_2 .

³No necesariamente abierto.

Para una ecuación $\dot{x} = X(t, x)$ definida en un dominio $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ abierto y conexo, acompañaremos usualmente la ecuación de una **condición inicial**, que es fijar un punto $(t_0, x_0) \in D$ y obligaremos a la solución $x(t)$ de la ecuación que verifique la condición:

$$x(t_0) = x_0$$

Ejemplo. En el primer ejemplo anterior tenemos para la condición inicial $x(0) = 1$ que la solución de $\dot{x} = x^2$ es $x :]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$x(t) = \frac{1}{1-t}$$

Teorema 1.1 (Cauchy-Peano, Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales.). *Todo problema de valores iniciales admite una solución definida en algún intervalo⁴ I con $t_0 \in I$.*

Observación. El ejepmlo anterior nos demuestra que el Teorema de Cauchy-Peano no puede generalizarse a otro que resuelva el problema de forma global, puesto que tenemos una solución para la ecuación que no puede extenderse a todo \mathbb{R} ; a pesar de ser el dominio de la ecuación todo \mathbb{R}^2 .

Lo que venga a continuación estará destinado a probar el Teorema anterior.

El primer paso será pasar el problema de valores iniciales a una ecuación integral, puesto que la ecuación diferencial y el problema de condiciones iniciales son muy intuitivos pero difíciles de manipular desde el punto de vista de las demostraciones.

1.2. Ecuación integral de Volterra

La ecuación integral de Volterra es:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(s, x(s)) \, ds \quad (1.2)$$

Es la ecuación que obtenemos al integrar $\dot{x} = X(t, x)$. Así, cada ecuación diferencial tiene una ecuación de Volterra y cada ecuación de Volterra tiene una ecuación diferencial.

Ejemplo. El problema de valores iniciales $\dot{x} = 3x$ con la condición inicial $x(2) = -5$ tiene ecuación integral de Volterra:

$$x(t) = -5 + \int_2^t 3x(s) \, ds \quad (1.3)$$

Definición 1.2. Una solución de (1.2) es una función $x : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ con I un intervalo que contiene a t_0 en su interior y:

- i) x es continua.
- ii) $(t, x(t)) \in D \quad \forall t \in I.$

⁴Por tanto, el Teorema nos da una solución local.

iii) Se cumple la condición (1.2) para todo $t \in I$.

Ejemplo. Una solución de la ecuación integral de Volterra (1.3) es

$$x(t) = -5e^{3(t-2)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

La estrategia será enunciar los Teoremas como ecuaciones diferenciales y realizar sus demostraciones con ecuaciones integrales.

Proposición 1.2. *Los problemas (1.1) y (1.2) son equivalentes⁵.*

Demostración.

□

⁵Es decir, tienen las mismas soluciones.