

# Ecuaciones Diferenciales II



**Los Del DGIIM**, [losdeldgim.github.io](https://losdeldgim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Ecuaciones Diferenciales II

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026



# Índice general

<b>1. Movimiento de partículas en un fluido</b>	<b>5</b>
1.1. Problema a resolver . . . . .	8
1.2. Ecuación integral de Volterra . . . . .	9
1.2.1. El Teorema global . . . . .	11
1.2.2. Demostración del Teorema global . . . . .	13



# 1. Movimiento de partículas en un fluido

Fijado un espacio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ , supondremos siempre que será abierto<sup>1</sup> y conexo<sup>2</sup>.

**Notación.** A cada punto de  $\Omega$  lo notaremos normalmente por  $p \in \Omega$ , que tendrá coordenadas:

$$p = (x, y, z)$$

El fluido suele llevar en cada punto una dirección y una velocidad, por lo que en cada punto  $p \in \Omega$  tendremos un vector  $v$  que determina la velocidad del fluido, la cual supondremos conocida siempre. Este vector no tiene por qué ser constante sino que puede depender del tiempo, por lo que generalmente  $v$  será una función  $v = v(t, p)$ , es decir,  $v : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una aplicación que a cada momento  $t$  y posición  $p$  le asigna un vector  $v(t, p)$ .

Si tenemos una partícula en el fluido que se mueve esta determinará una trayectoria, que podemos modelar como una curva parametrizada  $p(t)$ .

Podremos medir la velocidad de la partícula de dos formas: observando la velocidad de la partícula de forma interna (como el cuentakilómetros de un coche) o suponiendo que es una partícula que se deja llevar por la corriente y que su velocidad es la del fluido. La velocidad es la derivada de  $p$ .

En el segundo caso:

$$\dot{p}(t) = V(t, p(t))$$

Estamos ante una ecuación diferencial. Observemos que es un sistema de primer orden en forma normal, puesto que las coordenadas de  $p$  son funciones del tiempo. Si escribimos  $V = (u, v, w)$  tenemos:

$$\begin{cases} \dot{x} = u(t, x, y, z) \\ \dot{y} = v(t, x, y, z) \\ \dot{z} = w(t, x, y, z) \end{cases}$$

Un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas, que conocidas las velocidades del fluido determina la trayectoria de la partícula.

---

<sup>1</sup>Queremos estudiar movimientos de partículas en un fluido y pasan cosas no deseadas en la frontera.

<sup>2</sup>Por comodidad.

*Observación.* Observemos que en la notación primera hemos escrito explícitamente que  $\dot{p}$  está en función de  $t$ . En la segunda notación estamos usando la notación habitual en las ecuaciones diferenciales, omitiendo la dependencia de  $t$  y pensándola de forma implícita. Podemos así reescribir la primera ecuación como:

$$\dot{p} = V(t, p)$$

Una vez denotamos  $\dot{p}(t)$  estamos diciendo que es una solución concreta, por lo que será una variable dependiente de  $t$ . Sin embargo, cuando hablamos de  $V(t, p)$  vemos  $p$  como una variable independiente.

Aparecerán sistemas autónomos, que representan fluidos estacionarios, donde la velocidad  $V(t, p)$  no depende del tiempo.

**Ejemplo.** Comenzamos primero con dos ejemplos de fluidos estacionarios (el vector en cada posición no depende del tiempo):

- Consideramos  $\Omega = \mathbb{R}^3$  y tomamos:

$$V(t, x, y, z) = (0, 1, 0)$$

Observamos que es un sistema autónomo (no depende del tiempo) y en el que la velocidad tampoco depende de la posición:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 1 \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Con lo que las soluciones son de la forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \\ y(t) &= t + c_2 \\ z(t) &= c_3 \end{aligned}$$

Es una familia que depende de 3 parámetros.

- Tomamos la ecuación de un vórtice lineal,  $\Omega = \mathbb{R}^3$  y:

$$V(t, x, y, z) = (y, -x, 0)$$

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Es un sistema lineal homogéneo, que nos da las soluciones:

$$z(t) = c_3$$

Reducimos a una ecuación de segundo orden, derivando en la primera:

$$\ddot{x} + \dot{x} = 0$$

Por lo que:

$$x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$$

Y también tendremos:

$$y(t) = -c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)$$

Para ciertas condiciones iniciales  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

Nuestro objetivo ahora es tratar de probar que el sistema:

$$\dot{p} = V(t, p)$$

con la condición inicial  $p(t_0) = p_0$  tiene una solución. Luego trataremos de ver que en cada condición inicial tenemos una única solución. Demostraremos el Teorema de existencia y unicidad en cualquier número de dimensiones.

**Notación.** Notaremos a los puntos por  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  y al campo que define la ecuación diferencial por  $X$ , que será función de  $t$  y de  $x$ , que estará definido en un conjunto  $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  y exigiremos que sea abierto y conexo. Así, tendremos

$$\begin{aligned} X : \quad D &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (t, x) &\longmapsto X(t, x) \end{aligned}$$

donde el campo  $X$  tiene  $d$  coordenadas:

$$X = (X_1, \dots, X_d)$$

donde tratamos de resolver la ecuación  $\dot{x} = X(t, x)$ , que en realidad es un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(t, x_1, \dots, x_d) \\ \vdots \\ \dot{x}_d = X_d(t, x_1, \dots, x_d) \end{cases}$$

Supondremos siempre que  $X$  es una función continua.

Tomaremos  $(t_0, x_0) \in D$  y queremos resolver el problema de condiciones iniciales

$$\dot{x} = X(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

que consiste en resolver la ecuación diferencial superior mediante una solución que cumpla la condición enunciada.

## 1.1. Problema a resolver

Así, queremos resolver el problema:

$$\dot{x} = X(t, x) \quad (1.1)$$

con  $X : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  continuo, donde  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  es un subconjunto abierto y conexo. La condición de que  $X$  sea continuo es equivalente a que cada una de sus coordenadas

$$X = (X_1, \dots, X_d)$$

sea una aplicación continua.

**Definición 1.1.** Una **solución** del problema (1.1) es una aplicación  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  donde  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo<sup>3</sup> de forma que  $x(t) \in D$ :

- i)  $x(t)$  es derivable.
- ii)  $(t, x(t)) \in D \quad \forall t \in I$ .
- iii)  $\dot{x}(t) = X(t, x(t)) \quad \forall t \in I$ .

*Observación.* Observemos que la definición de solución del problema planteado anteriormente es equivalente si sustituimos la condición de que  $x$  sea derivable por la condición de que  $x$  sea de clase 1, puesto que la condición iii) nos da automáticamente la continuidad de la derivada de  $x$ .

Así, la condición i) se puede sustituir por la condición i')  $x \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$ .

**Ejemplo.** Veamos un par de ejemplos para fijar las ideas:

1. Consideramos  $\dot{x} = x^2$  y la aplicación  $x(t) = \frac{1}{1-t}$ . Vamos a analizar el marco del problema.

Tenemos en este caso  $d = 1$  y  $D = \mathbb{R}^2$ , puesto que tenemos el campo vectorial  $X(t, x) = x^2$ , que es continuo en todo  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Tenemos una primera solución en  $I_1 = ]-\infty, 1[$ ,  $x_1(t) = \frac{1}{1-t}$ .

Y otra solución en  $I_2 = ]1, +\infty[$ ,  $x_2(t) = \frac{1}{1-t}$ .

Son dos soluciones distintas, con la misma fórmula.

2. Consideramos ahora  $\dot{x} = \frac{x}{t}$  y la aplicación  $x(t) = -7t$ .

Tenemos  $d = 1$  y el campo es  $X(t, x) = \frac{x}{t}$ , que tiene dos posibles dominios de definición:

$$D_1 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}, \quad D_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Tenemos en realidad dos ecuaciones diferenciales.

Para discutir una de sus soluciones, si consideramos:

$$I_1 = \mathbb{R}^-, \quad I_2 = \mathbb{R}^+$$

tenemos que  $x|_{I_1}$  es solución de la ecuación diferencial considerando el dominio  $D_1$  y análogamente para  $x|_{I_2}$  con el dominio  $D_2$ .

<sup>3</sup>No necesariamente abierto.

Para una ecuación  $\dot{x} = X(t, x)$  definida en un dominio  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  abierto y conexo, acompañaremos usualmente la ecuación de una **condición inicial**, que es fijar un punto  $(t_0, x_0) \in D$  y obligaremos a la solución  $x(t)$  de la ecuación que verifique la condición:

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.2)$$

Cuando nos refiramos próximamente al problema (1.1) nos estaremos refiriendo usualmente a un problema de valores iniciales dado por la fórmula destacada y por la condición (1.2).

**Ejemplo.** En el primer ejemplo anterior tenemos para la condición inicial  $x(0) = 1$  que la solución de  $\dot{x} = x^2$  es  $x : ]-\infty, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$x(t) = \frac{1}{1-t}$$

**Teorema 1.1** (Cauchy-Peano, Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales.). *Todo problema de valores iniciales admite una solución definida en algún intervalo<sup>4</sup>  $I$  con  $t_0 \in I$ .*

*Observación.* El ejemplo anterior nos demuestra que el Teorema de Cauchy-Peano no puede generalizarse a otro que resuelva el problema de forma global, puesto que tenemos una solución para la ecuación que no puede extenderse a todo  $\mathbb{R}$ ; a pesar de ser el dominio de la ecuación todo  $\mathbb{R}^2$ .

Lo que venga a continuación estará destinado a probar el Teorema anterior.

El primer paso será pasar el problema de valores iniciales a una ecuación integral, puesto que la ecuación diferencial y el problema de condiciones iniciales son muy intuitivos pero difíciles de manipular desde el punto de vista de las demostraciones.

## 1.2. Ecuación integral de Volterra

La ecuación integral de Volterra es:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(s, x(s)) \, ds \quad (1.3)$$

Es la ecuación que obtenemos al integrar  $\dot{x} = X(t, x)$ . Así, a cada ecuación diferencial podemos asociarle una ecuación de Volterra y a cada ecuación de Volterra podemos asociarle una ecuación diferencial.

**Ejemplo.** El problema de valores iniciales  $\dot{x} = 3x$  con la condición inicial  $x(2) = -5$  tiene ecuación integral de Volterra:

$$x(t) = -5 + \int_2^t 3x(s) \, ds \quad (1.4)$$

**Definición 1.2.** Una solución de (1.3) es una función  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  con  $I$  un intervalo que contiene a  $t_0$  en su interior y:

---

<sup>4</sup>Por tanto, el Teorema nos da una solución local.

- i)  $x$  es continua.
- ii)  $(t, x(t)) \in D \quad \forall t \in I$ .
- iii) Se cumple la condición (1.3) para todo  $t \in I$ .

**Ejemplo.** Una solución de la ecuación integral de Volterra (1.4) es:

$$x(t) = -5e^{3(t-2)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

La estrategia será enunciar los Teoremas como ecuaciones diferenciales y realizar sus demostraciones con ecuaciones integrales.

**Proposición 1.2.** *Los problemas (1.1) y (1.3) son equivalentes<sup>5</sup>.*

*Demostración.* Supondremos que tenemos una solución de una ecuación y tendremos que probar entonces que tenemos una solución de la otra ecuación. Basta aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo en un caso y la Regla de Barrow en el otro.

- Supuesto que  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  es solución de la ecuación (1.1), tenemos entonces que  $x$  es una aplicación derivable que verifica<sup>6</sup>:

$$\dot{x}(t) = X(t, x(t)) \quad \forall t \in I$$

Por lo que  $\dot{x}$  es una primitiva de la aplicación  $t \mapsto X(t, x(t))$  definida en  $I$ , que sabemos que es continua. La Regla de Barrow nos dice entonces que fijado  $t_0 \in I$  se tiene:

$$\int_{t_0}^t X(s, x(s)) \, ds = x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0 \quad \forall t \in I$$

Y despejando obtenemos (1.3).

- Supuesto que  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  es solución de la ecuación (1.3), tenemos en este caso que  $x$  es una aplicación continua que verifica:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(s, x(s)) \, ds \quad \forall t \in I$$

Como  $x$  es continua, la aplicación  $s \mapsto X(s, x(s))$  y de dominio  $I$  será también continua. Bajo estas hipótesis, el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la aplicación

$$t \longmapsto \int_{t_0}^t X(s, x(s)) \, ds$$

de dominio  $I$  es derivable, por lo que también lo será la aplicación  $x$ , y su derivada es:

$$\dot{x}(t) = X(t, x(t)) \quad \forall t \in I$$

Hemos obtenido que  $x$  es solución de (1.1), y es claro que  $x(t_0) = x_0$ .

□

---

<sup>5</sup>Es decir, tienen las mismas soluciones.

<sup>6</sup>Observemos que la condición ii) en el primer caso es equivalente a la condición ii) del segundo caso.

### 1.2.1. El Teorema global

La estrategia a seguir será probar un Teorema global con hipótesis extra para luego retringir el problema y obtener la demostración del Teorema local.

**Teorema 1.3** (global de existencia). *Sea  $D = ]a, b[ \times \mathbb{R}^d$  para ciertos  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $X : ]a, b[ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  continuo de forma que*

$$\exists M > 0 : \|X(t, x)\| \leq M \quad \forall (t, x) \in D$$

*Entonces (1.1) tiene una solución definida en todo el intervalo  $]a, b[$ .*

**Ejemplo.** Familiaricémonos con este problema.

1. Consideramos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{1 + x_2^2 + x_1^2} + t \operatorname{sen}(x_1), & x_1(0) = 3 \\ \dot{x}_2 = e^{-x_1^2} + \sqrt{1 - t^2}, & x_2(0) = 7 \end{cases}$$

Aquí tenemos  $d = 2$ ,  $]a, b[ = ]-1, 1[$ , con  $X : ]-1, 1[ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  continuo.

Veamos que  $X$  está acotado, como todas las normas son equivalentes, tomaremos la norma del máximo:  $\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ :

$$\|X(t, x)\| \leq \max\{2, 2\} = 2 \quad \forall (t, x) \in ]-1, 1[ \times \mathbb{R}^2$$

Tenemos además que  $t_0 = 0 \in ]a, b[$  así como que  $x_0 = (3, 7) \in \mathbb{R}^2$ .

2. Veamos ahora que la hipótesis de que  $X$  es acotado es esencial, puesto que el problema de valores iniciales  $\dot{x} = x^2$ ,  $x(0) = 1$  con solución

$$x(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in ]-3, 1[$$

donde tenemos<sup>7</sup>  $D = ]-3, 3[ \times \mathbb{R}$ . Próximamente veremos que esta solución es la única para la condición inicial enunciada, lo que nos garantizará que esta solución no puede extenderse a otra que esté definida en  $] -3, 3 [$ .

Vamos a ver a continuación que el Teorema 1.1 puede deducirse a partir del Teorema 1.3, por lo que nuestro futuro trabajo será probar este segundo. Para probar esta relación usaremos el Lema del Pegado, que ya conocíamos de Topología I.

**Lema 1.4.** *Sean  $X, Y$  espacios métricos y  $F_1, F_2 \subset X$  dos cerrados de forma que  $F_1 \cup F_2 = X$ . Sean  $f_i : F_i \rightarrow Y$  continuas para  $i \in \{1, 2\}$  verificando que  $f_1 = f_2$  en  $F_1 \cap F_2$ . Entonces la función  $f : X \rightarrow Y$  dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in F_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in F_2 \end{cases}$$

*está bien definida y es continua.*

---

<sup>7</sup>Podríamos haber tomado  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , pero queremos verificar las hipótesis del Teorema.

**Proposición 1.5.** *Del Teorema 1.3 puede deducirse el Teorema 1.1.*

*Demostración.* Como  $D$  es abierto y  $(t_0, x_0) \in D$ , podemos tomar  $a, b > 0$  de forma que:

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\} \subset D$$

Tomaremos además  $0 < b^* < b$  y consideraremos:

$$R^* = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b^*\} \subset D$$

Definimos  $\psi : ]t_0 - a, t_0 + a[ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  continua de forma que:

$$\begin{aligned}\psi &= 1 && \text{en } \|x - x_0\| < b^* \\ \psi &= 0 && \text{en } \|x - x_0\| > b \\ 0 &\leq \psi \leq 1 && \text{siempre}\end{aligned}$$

Y definimos el campo modificado  $X^* : ]t_0 - a, t_0 + a[ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  dado por:

$$X^*(t, x) = \begin{cases} \psi(t, x) \cdot X(t, x) & \text{si } \|x - x_0\| \leq b \\ 0 & \text{si } \|x - x_0\| > b \end{cases}$$

Vemos que  $X(t, x) = X^*(t, x)$  para todo  $(t, x) \in R^*$ .

Buscamos aplicar ahora el Teorema 1.3 a  $\dot{x} = X^*(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Falta comprobar la continuidad de  $X^*$  y su acotación.

- Para la continuidad de  $X^*$ , si consideramos en el espacio  $]t_0 - a, t_0 + a[ \times \mathbb{R}^d$ :

$$\begin{aligned}F_1 &= \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : |t - t_0| < a, \|x - x_0\| \leq b\} \\ F_2 &= \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : |t - t_0| < a, \|x - x_0\| \geq b\}\end{aligned}$$

Vemos que definiendo  $f_1 = \psi \cdot X$ ,  $f_2 = 0$  se tiene que<sup>8</sup>  $f_1 = f_2$  en  $F_1 \cap F_2$ . Aplicando el Lema 1.4 obtenemos que la función  $X^*$  es continua.

- $X$  es continuo y  $R \subset D$  es compacto, por lo que:

$$\exists M > 0 : \|X(t, x)\| \leq M \quad \forall (t, x) \in R$$

Como  $\psi \leq 1$  obtenemos que  $X^*$  es también acotada a partir de su definición.

Aplicando ahora el Teorema 1.3 obtenemos que existe  $x : ]t_0 - a, t_0 + a[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  que es solución del problema:

$$\dot{x}(t) = X^*(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

Vemos que  $x(t)$  no puede (quizás) ser solución del problema planteado con el campo  $X$  en el dominio  $D$ , pero sí que nos podemos restringir a un entorno. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= X(t, x) = X^*(t, x) && \text{si } \|x - x_0\| < b^* \\ x(t_0) &= x_0, && x(t) \text{ continua}\end{aligned}$$

Y además:

$$\exists \delta > 0 : \|x(t) - x_0\| < b^* \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

Con lo que  $x|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]}$  sí que es solución de  $\dot{x} = X(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ .  $\square$

<sup>8</sup>Por la continuidad de  $\psi$  tenemos que  $\psi(x) = 0$  cuando  $\|x - x_0\| = b$ .

### 1.2.2. Demostración del Teorema global

Nuestro interés será ahora probar el Teorema 1.3. Recordando las hipótesis, tenemos una función  $X : ]a, b[ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  continuo y acotado:

$$\exists M : \|X(t, x)\| \leq M \quad \forall (t, x) \in ]a, b[ \times \mathbb{R}^d$$

La demostración se dividirá en 3 etapas:

**1 - Construcción de soluciones aproximadas.** Fijado  $\varepsilon > 0$ , definiremos  $x_\varepsilon : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua de forma que se verifica<sup>9</sup>:

$$\left\| x_\varepsilon - x_0 - \int_{t_0}^t X(s, x(s)) \, ds \right\| \leq M\varepsilon \quad \forall t \in ]a, b[$$

Estas funciones  $x_\varepsilon$  serán soluciones aproximadas a la ecuación de Volterra que estamos buscando, y seguiremos el método de Tonelli para construirlas.

**2 - Argumento de compacidad (Ascoli-Arzelá).** En esta etapa queremos pasar al límite de una sucesión de aproximaciones  $x_{\varepsilon_n}$ , que queremos que tengan límite, para lo que nos serán de especial relevancia los conjuntos compactos en un espacio de funciones. La convergencia que nos interesará será la convergencia uniforme.

**3 - Paso al límite.** Teniendo  $n$  a infinito obtendremos la solución como límite de la sucesión construida.

**Ejemplo.** Consideramos  $x' = \operatorname{sen} x$ ,  $x(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $[0, 2]$  y  $\varepsilon = 1$ . La solución aproximada sería:

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } t \in [0, 1] \\ \frac{\pi}{2} + \int_0^{t-1} \operatorname{sen} x_1(s) \, ds = \frac{\pi}{2} + \int_0^{t-1} ds = \frac{\pi}{2} + t - 1 & \text{si } t \in [1, 2] \end{cases}$$

---

<sup>9</sup>La constante  $M\varepsilon$  es por comodidad, se podría haber sustituido por  $\varepsilon$ .