MN I

Examen I

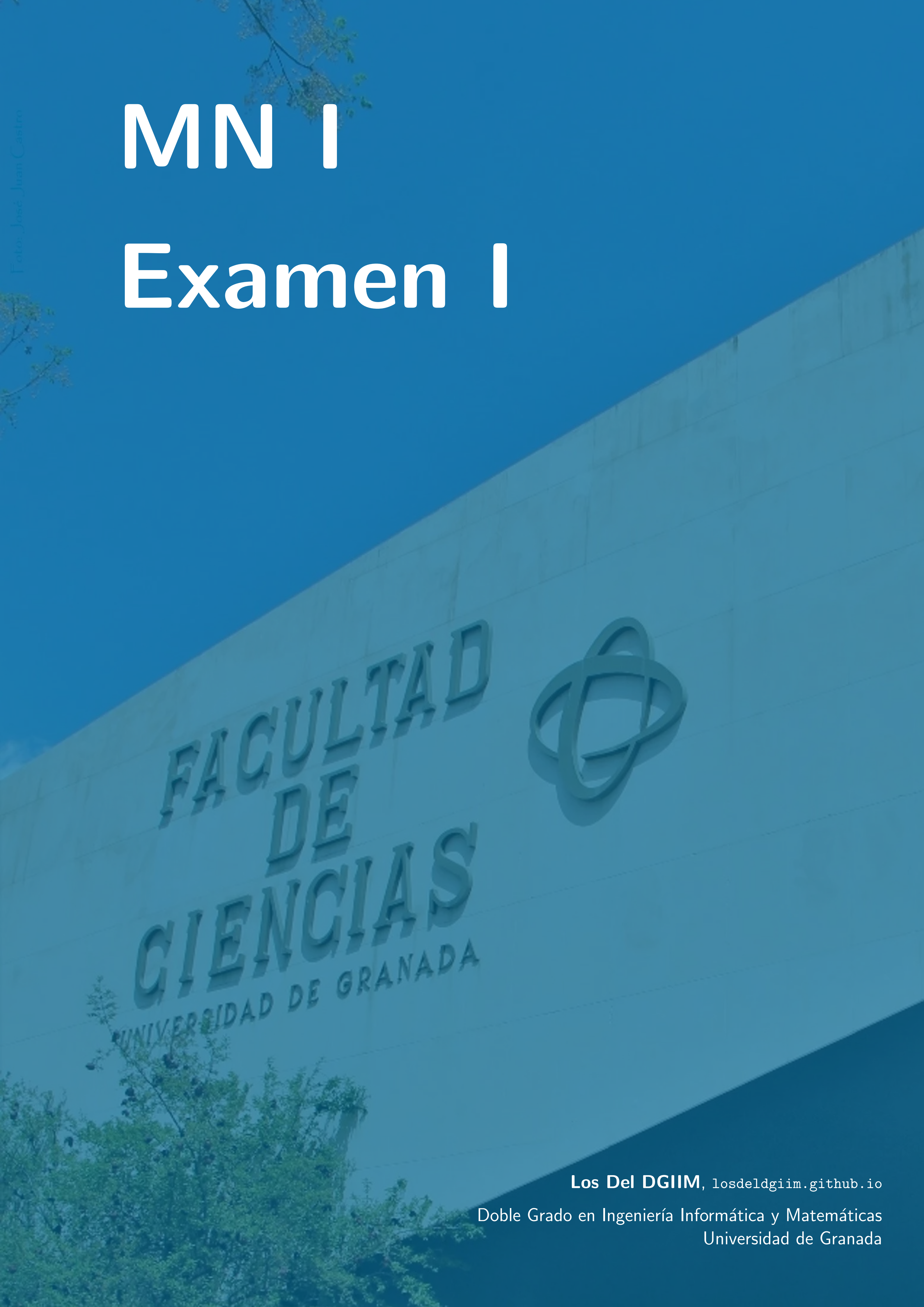

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

MN I
Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Métodos Numéricos I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Lidia Fernández Rodríguez.

Descripción Prueba 1. Temas 1 y 2.

Ejercicio 1 (1.5 puntos). Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 6x_1 & + & \alpha x_2 & + & 10x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

¿Qué debe cumplir el parámetro α para que se pueda resolver el sistema usando el método de Gauss sin intercambio de filas?

Como este método es equivalente a la descomposición LU, basta con que todos sus menores principales sean no nulos.

$$|2| = 2 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha - 6 \neq 0 \Longrightarrow \alpha \neq 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & \alpha & 10 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 16\alpha + 40 + 108 - 12\alpha - 120 - 48 = 4\alpha - 20 \neq 0 \Longrightarrow \alpha \neq 5$$

Por tanto, se puede resolver siempre que $\alpha \neq \{3,5\}$.
Alternativamente, se puede siempre que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. Veamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & \alpha & 10 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3'=F_3-2F1]{F_2'=F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \alpha-3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[F_3'=F_3+m_{3,2}F_2]{m_{3,2}=\frac{-4}{\alpha-3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \alpha-3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2-\frac{4}{\alpha-3} & 3-\frac{8}{\alpha-3} \end{array}\right)$$

$a_{11}^{(1)} = 2 \neq 0$
$a_{22}^{(2)} = \alpha - 3 \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha \neq 3$
$a_{33}^{(3)} = 2 - \frac{4}{\alpha-3} \neq 0 \Longleftrightarrow 2\alpha - 6 \neq 4 \Longleftrightarrow \alpha \neq 5$

Podemos ver que, efectivamente, se cumple que se puede resolver si $\alpha \neq \{3,5\}$

Ejercicio 2 (2 puntos). Resuelve el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 0{,}0300x_1 & + & 58{,}9x_2 & = & 59{,}2 \\ 5{,}31x_1 & - & 6{,}10x_2 & = & 47{,}0 \end{array}\right.$$

utilizando el método de Gauss con pivote parcial y aritmética de tres dígitos. Realiza los cálculos uno a uno indicando claramente el redondeo a tres dígitos en cada paso.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}03 & 58{,}9 & 59{,}2 \\ 5{,}31 & -6{,}10 & 47{,}0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \Longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 5{,}31 & -6{,}10 & 47{,}0 \\ 0{,}03 & 58{,}9 & 59{,}2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[m_{2,1}=-\frac{0{,}03}{5{,}31}\approx -0{,}00565]{F_2'=F_2+m_{2,1}F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 5{,}31 & -6{,}10 & 47{,}0 \\ 0 & 58{,}9 & 58{,}9 \end{array}\right)$$

$$x_2 \approx \frac{58{,}9}{58{,}9} = 1 \qquad x_1 \approx \frac{47 + 6{,}1x_2}{5{,}31} \approx \frac{47+6{,}1}{5{,}31} \approx \frac{53{,}1}{5{,}31} = 10$$

Ejercicio 3 (1.5 puntos). Pon un ejemplo de matriz simétrica que admita factorización de Cholesky y otra que no la admita. Justifica tu respuesta.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Una condición necesaria y suficiente para que una matriz admita factorización de Cholesky es que sea simétrica y definida positiva. Como A y B son simétricas, una de ellas debe ser definida positiva y la otra no.

Es fácil ver que A es definida positiva, ya que:

$$|2| = 2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad |A| = 10 - 6 = 4$$

Por tanto, A sí admite factorización de Cholesky. Sin embargo, B no es definida positiva ya que su menor principal de orden 1 es negativo, por lo que B no admite factorización de Cholesky.

Ejercicio 4 (1.5 puntos). Se considera una norma vectorial $||\cdot||$ en $\mathbb{R}^n$ y la correspondiente norma matricial inducida $||\cdot||$. Dada una matriz cuadrada regular S de orden n, se define la norma vectorial $||\cdot||_S$ por:

$$||x||_S = ||Sx||$$

1. Prueba que así definida es una norma en $\mathbb{R}^n$

   - $||x||_S = ||Sx|| \geqslant 0$ por ser $||\cdot||$ una norma vectorial. Además, se comprueba que $||x||_S = 0 \iff x = 0$

     $$||x||_S = 0 \iff ||Sx|| = 0 \iff Sx = 0 \iff x = S^{-1}\cdot 0 = 0$$

   - $||cx||_S = ||S(cx)|| = ||c(Sx)|| = |c|\cdot||Sx|| = |c|\cdot||x||_S$
   - $||x+y||_S = ||S(x+y)|| = ||Sx+Sy|| \leqslant ||Sx|| + ||Sy|| = ||x||_S + ||y||_S$

2. Prueba que la norma matricial inducida es

   $$||A||_S = ||SAS^{-1}||$$

   Demostración.

   $$||A||_S = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||_S}{||x||_S} = \max_{x\neq 0}\frac{||SAx||}{||Sx||} = \max_{x\neq 0}\frac{||SAS^{-1}Sx||}{||Sx||} = \overset{(*)}{=} \max_{Sx\neq 0}\frac{||SAS^{-1}Sx||}{||Sx||} = ||SAS^{-1}||$$

   Donde en $(*)$ he usado que, por ser S regular,

   $$\{x\in\mathbb{R}^n \mid x\neq 0\} = \{x\in\mathbb{R}^n \mid Sx\neq 0\}$$

   Como ambos conjuntos son los mismos, el máximo se alcanzará en el mismo valor. □

3. Si denotamos por $\kappa(A)$ y $\kappa_S(A)$ el número de condición de la matriz A respecto de las normas $||\cdot||$ y $||\cdot||_S$ respectivamente, prueba que:

$$\kappa_S(A) \leqslant \kappa(S)^2\kappa(A)$$

Demostración.

$$\kappa_S(A) = ||A||_S||A^{-1}||_S = ||SAS^{-1}|| \cdot ||SA^{-1}S^{-1}|| \leqslant$$
$$\leqslant ||S||^2||S^{-1}||^2||A||||A^{-1}|| = \kappa(S)^2\kappa(A)$$

□

Ejercicio 5. [3 puntos] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 32 \end{pmatrix}$$

se pretende resolver el sistema $Ax = b$.

1. ¿Se puede garantizar la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel? Justifica la respuesta.

   Sí, ya que la matriz A es E.D.D., ya que $2 > 1/2$ y $2 > 1/2$.

   Alternativamente, y solo para el caso del método de Jacobi, se demuestra de manera general.

   La matriz de descomposición del método de Jacobi es:

$$Q = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I$$

   Por tanto, el sistema de punto fijo de Jacobi $x = B_J x + c$ tiene como B_J a la matriz:

$$B_J = I - Q^{-1}A = I + \frac{1}{2}A = I + \begin{pmatrix} -1 & 1/4 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, como $||B_J||_1 < 1 \Longrightarrow$ este método iterativo converge.

2. Escribe las ecuaciones de los métodos y realiza dos iteraciones del método de Gauss-Seidel partiendo de $x^{(0)} = (0, 0)$.

   Las ecuaciones del método de Jacobi son:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x_2^{(k)} + 8\right) = \frac{1}{4}x_2^{(k)} - 4 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x_1^{(k)} + 32\right) = -\frac{1}{4}x_1^{(k)} - 16 \end{cases}$$

Las ecuaciones del método de Gauss-Seidel son:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_2^{(k)} - 4 \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - 16 \end{cases}$$

Realizamos ahora dos iteraciones del método de Gauss-Seidel:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0	0
1	-4	-15
2	$-\frac{31}{4}$	$-\frac{225}{16}$

3. Se propone el método iterativo

$$x^{k+1} = (I - \omega A)x^{(k)} + \omega b$$

Prueba que para $\omega = -\frac{1}{2}$ el método converge a la solución del sistema para cualquier valor inicial $x^{(0)}$. ¿Que debe cumplir ω para que el método sea convergente? Indica algún otro valor para el que así sea.

$$I - \omega A = \begin{pmatrix} 1+2\omega & -\frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega}{2} & 1+2\omega \end{pmatrix}$$

$$P_{I-\omega A}(\lambda) = \lambda^2 - (2+4\omega)\lambda + (1+2\omega)^2 + \frac{\omega^2}{4}$$

Los valores propios de dicha matriz son:

$$\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda^2 - (2+4\omega)\lambda + (1+2\omega)^2 + \frac{\omega^2}{4} = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2+4\omega \pm \sqrt{(2+4\omega)^2 - 4(1+2\omega)^2 - \omega^2}}{2} \\ &= \frac{2+4\omega \pm \sqrt{\cancel{2^2(1+2\omega)^2} \cancel{-4(1+2\omega)^2} - \omega^2}}{2} \\ &= 1+2\omega \pm \frac{|\omega|}{2}i = 1+2\omega \pm \frac{\omega}{2}i \end{aligned}$$

Por tanto, los valores propios son: $\left\{1+2\omega \pm \frac{\omega}{2}i\right\}$. Para que el método iterativo converga, necesitamos que

$$\text{máx}\left\{\left|1+2\omega+\frac{\omega}{2}i\right|, \left|1+2\omega-\frac{\omega}{2}i\right|\right\} < 1$$

Como $\left|1+2\omega-\frac{\omega}{2}i\right| = \left|1+2\omega+\frac{\omega}{2}i\right|$, la inecuación a resolver es:

$$\left|1+2\omega-\frac{\omega}{2}i\right| < 1 \iff \sqrt{(1+2\omega)^2 + \frac{\omega^2}{4}} < 1 \iff 1+4\omega+4\omega^2+\frac{\omega^2}{4} < 1 \iff$$
$$\iff \omega\left(4+4\omega+\frac{\omega}{4}\right) < 0$$

Esta última desigualdad se cumple solo si uno de los dos términos es negativos.

$$\omega < 0 \qquad\qquad 4 + 4\omega + \frac{\omega}{4} = 4 + \frac{17}{4}\omega < 0 \Longleftrightarrow \omega < \frac{-16}{17}$$

Por tanto, el método iterativo converge si:

$$\omega \in \left]-\frac{16}{17}, 0\right[$$