Variable Compleja I
Examen V

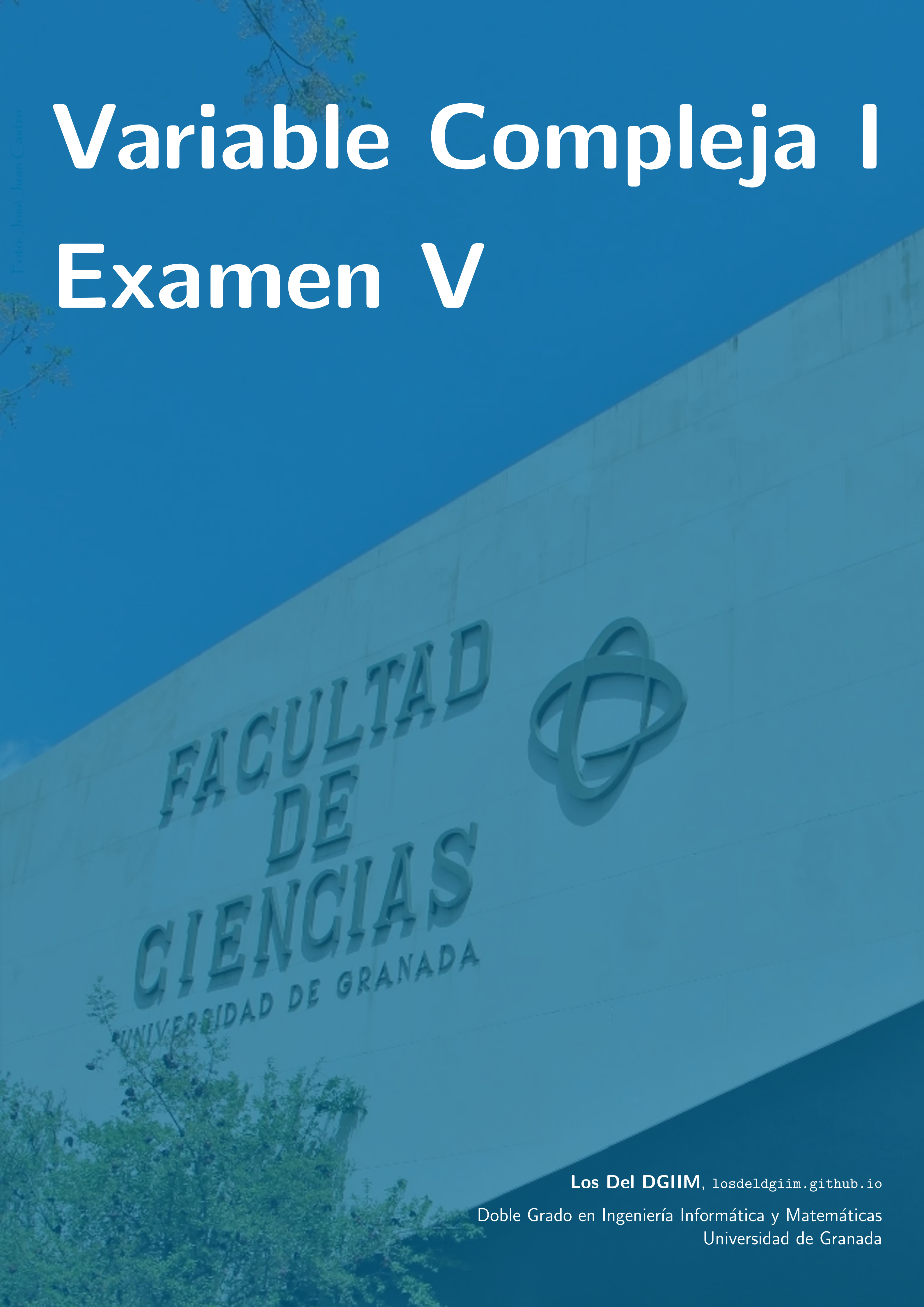

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2020-21.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia.

Fecha 10 de Mayo de 2021.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos convergente a $w \in \mathbb{C}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{a_n\})$ por $f_n(z) = \dfrac{1}{z - a_n}$. Dado el conjunto compacto $K = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{w\}$, probar que la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{n^2}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = \operatorname{sen}(\overline{z}) \qquad g(z) = z(z-1)f(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Ejercicio 3. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto verificando $\overline{D}(0,1) \subset \Omega$ y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

1. [**1.5 puntos**] Justificar que para cada $z_0 \in D(0,1)$ se tiene

$$|f(z_0)| \leqslant \max\{|f(z)| : z \in C(0,1)^*\}.$$

2. [**1.5 puntos**] Demostrar que

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{D}(0,1)\} = \max\{|f(z)| : z \in C(0,1)^*\}.$$

3. [**1.5 puntos**] Supongamos que existe $z_0 \in D(0,1)$ tal que $|f(z_0)| = \max\{|f(z)| : z \in \overline{D}(0,1)\}$. Dado $r \in \mathbb{R}^+$ con $\overline{D}(z_0,r) \subset D(0,1)$, probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de modo que $f_{\big|\overline{D}(z_0,r)} \equiv \lambda$.

4. [**1 punto extra**] Probar que, de hecho, $f_{\big|D(0,1)} \equiv \lambda$.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos convergente a $w \in \mathbb{C}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a_n\})$ por $f_n(z) = \dfrac{1}{z-a_n}$. Dado el conjunto compacto $K = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{w\}$, probar que la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{n^2}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω.

Sea $T \subset \Omega$ compacto. Para cada $z \in T$ por ser K compacto y la distancia una función continua, tenemos que se alcanza el siguiente mínimo:

$$d(z, K) = \text{mín}\{d(z, u) \mid u \in K\}$$

Por ser dicha distancia continua y T compacto, existe $R \in \mathbb{R}_0^+$ tal que

$$R = \text{mín}\{d(z, K) \mid z \in T\}$$

Además, como $T \subset \mathbb{C} \setminus K$, se tiene que $R \in \mathbb{R}^+$. Por tanto, se tiene que:

$$R \leqslant |z - a_n| \quad \forall z \in T, n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, se tiene que:

$$\left|\frac{f_n(z)}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2 \cdot |z - a_n|} \leqslant \frac{1}{n^2 \cdot R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad \forall z \in T, n \in \mathbb{N}$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, al multiplicarla por la constante $1/R$, también converge. Por tanto, por el Test de Weierstrass, la serie del enunciado converge absoluta y uniformemente en T.

Para la convergencia absoluta, consideramos $z \in \Omega$ fijo. Como $\{z\}$ es compacto, por el Test de Weierstrass tenemos que converge absolutamente en $\{z\}$. Como z es arbitrario, tenemos que la serie converge absolutamente en todo punto de Ω.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = \text{sen}\,(\overline{z}) \qquad g(z) = z(z-1)f(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Estudiamos en primer lugar la función f. Para ello, con vistas a aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, definimos $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como:

$$u(x, y) = \text{Re}(f(x+iy)) = \text{Re}(\text{sen}(x - iy)) = \text{sen}(x)\cosh(-y)$$
$$v(x, y) = \text{Im}(f(x+iy)) = \text{Im}(\text{sen}(x - iy)) = \cos(x)\,\text{senh}(-y).$$

Calculamos ahora las derivadas parciales de u y v:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \cos(x)\cosh(-y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\,\text{sen}(x)\,\text{senh}(-y)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\,\text{sen}(x)\,\text{senh}(-y)$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -\cos(x)\cosh(-y)$$

La primera ecuación de Cauchy-Riemann nos dice que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\
\cos(x)\cosh(-y) &= -\cos(x)\cosh(-y) \\
\cos(x) &= 0 \\
x &\in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

La segunda ecuación de Cauchy-Riemann nos dice que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\
-\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(-y) &= \operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(-y) \\
x \in \pi\mathbb{Z} &\vee y = 0
\end{aligned}$$

Definimos por tanto el conjunto en el que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann como:

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0 \wedge \operatorname{Re}(z) \in {}^{\pi}/_{2} + \pi\mathbb{Z}\}$$

Tenemos por tanto que $f \in \mathcal{H}(U)$, y no es derivable en ningún otro punto de $\mathbb{C}$.

Estudiamos ahora la función g. Fijado $z \in \mathbb{C}$, veamos si es derivable en z.

- Si $z \in U$, entonces g es derivable en z por serlo f y $z(z-1)$, que son funciones holomorfas en $\mathbb{C}$.
- Si $z \notin U$, distinguimos de nuevo:
  - Si $z \neq 0, 1$, tenemos que:

    $$f(z) = \frac{g(z)}{z(z-1)} \qquad \forall z \notin U$$

    Si g fuese derivable en z, entonces f también lo sería, pero sabemos que no lo es puesto que $z \notin U$. Por tanto, g no es derivable en z.
  - Si $z = 0$, entonces:

    $$g'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{g(z) - g(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{g(z)}{z} = \lim_{z\to 0}(z-1)f(z) = -f(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0$$

  - Si $z = 1$, entonces:

    $$g'(1) = \lim_{z\to 1} \frac{g(z) - g(1)}{z - 1} = \lim_{z\to 1} \frac{g(z)}{z-1} = \lim_{z\to 1} zf(z) = f(1) = \operatorname{sen}(1)$$

Por tanto, g es derivable en $U \cup \{0, 1\}$, mientras que no es derivable en ningún otro punto de $\mathbb{C}$.

Ejercicio 3. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto verificando $\overline{D}(0,1) \subset \Omega$ y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

1. **[1.5 puntos]** Justificar que para cada $z_0 \in D(0,1)$ se tiene
$$|f(z_0)| \leqslant \text{máx}\{|f(z)| : z \in C(0,1)^*\}.$$

2. **[1.5 puntos]** Demostrar que
$$\text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{D}(0,1)\} = \text{máx}\{|f(z)| : z \in C(0,1)^*\}.$$

3. **[1.5 puntos]** Supongamos que existe $z_0 \in D(0,1)$ tal que $|f(z_0)| = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{D}(0,1)\}$. Dado $r \in \mathbb{R}^+$ con $\overline{D}(z_0,r) \subset D(0,1)$, probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de modo que $f_{\big|\overline{D}(z_0,r)} \equiv \lambda$.

4. **[1 punto extra]** Probar que, de hecho, $f_{\big|D(0,1)} \equiv \lambda$.