

Cálculo II

Examen V

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Cálculo II

Examen V

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2020-21.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María Victoria Velasco Collado.

Descripción Primer Parcial. Derivación. Temas 1-4.

Fecha 3 de mayo de 2021.

Ejercicio 1. [1 punto]. Demostrar que $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$. Fijo $y = y_0$. Calculamos la imagen de:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = |\cos x - \cos y| - |x - y|$$

- **Opción 1:** Usando teoría de funciones lipschitzianas.

Sea $f(x) = \cos(x)$. Como $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y tenemos que f' está acotada, tenemos que f es lipschitziana, por lo que:

$$|\cos x - \cos y| \leq M|x - y|$$

El valor mínimo de M que se puede emplear es denominado constante de Lipschitz, y en este caso tenemos que es la cota de la derivada. Como $|f'(x)| \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que $M \geq 1$. Por tanto,

$$|\cos x - \cos y| \leq 1 \cdot |x - y| \leq M|x - y|$$

En conclusión, queda demostrado que

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

- **Opción 2:** Calculando las imágenes de las funciones.

Dividimos nuestro estudio en 4 casos, para así no trabajar con el valor absoluto.

- Suponemos $\cos x \geq \cos y \quad \wedge \quad x \geq y$:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \cos x - \cos y - x + y$$

$$f'(x) = -\sin x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, tenemos que f es decreciente. Como, en este caso, la función está definida en $[y, +\infty[$, y $f(y) = 0$, tenemos que:

$$f(x) \leq 0 \quad \forall x \geq y$$

- Suponemos $\cos x < \cos y \quad \wedge \quad x \geq y$:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = -\cos x + \cos y - x + y$$

$$f'(x) = \sin x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, tenemos que f es decreciente. Como, en este caso, la función está definida en $[y, +\infty[$, y $f(y) = 0$, tenemos que:

$$f(x) \leq 0 \quad \forall x \geq y$$

- Suponemos $\cos x < \cos y \quad \wedge \quad x < y$:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = -\cos x + \cos y + x - y$$

$$f'(x) = \sin x + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, tenemos que f es creciente. Como, en este caso, la función está definida en $] -\infty, y[$, y $\lim_{x \rightarrow y^-} f(x) = 0$, tenemos que:

$$f(x) \leq 0 \quad \forall x < y$$

- Suponemos $\cos x \geq \cos y \quad \wedge \quad x < y$:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \cos x - \cos y + x - y$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, tenemos que f es creciente. Como, en este caso, la función está definida en $] -\infty, y[$, y $\lim_{x \rightarrow y^-} f(x) = 0$, tenemos que:

$$f(x) \leq 0 \quad \forall x < y$$

Por tanto, independientemente del caso en el que estemos, tenemos que $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$f(x) = |\cos x - \cos y| - |x - y| \leq 0 \implies |\cos x - \cos y| \leq |x - y| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Como el razonamiento es válido $\forall y \in \mathbb{R}$ (simplemente tendríamos que cambiar el valor de y_0 fijado), tenemos que:

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2. [2 puntos]. Sea $a > 0$.

1. Determinar (en función del parámetro a) la imagen de la función $f_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_a(x) := x \ln a - a \ln x$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$.

Necesitamos calcular la imagen de la función. Para ello, en primer lugar, calculamos los extremos relativos sabiendo que la función es continua y derivable.

$$f'_a(x) = \ln a - \frac{a}{x} = 0 \iff x = \frac{a}{\ln a}$$

$$f''_a(x) = \frac{a}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto, tenemos que $x = \frac{a}{\ln a}$ es un mínimo relativo.

$$f_a\left(\frac{a}{\ln a}\right) = \frac{a}{\ln a} \cdot \ln a - a \ln \frac{a}{\ln a} = a - a \ln \frac{a}{\ln a} = a \left(1 - \ln \frac{a}{\ln a}\right)$$

Calculamos ahora el comportamiento de la función en $x = 0$ y en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln a - a \ln x = -a \ln(0) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln a - a \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{a^x}{x^a}\right)$$

Por tanto, para estudiar el comportamiento en $+\infty$, diferencio en función del valor de a :

- Para $a = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{x}\right) = \ln 0 = -\infty$$

- Para $a < 1$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{a^x}{x^a} \right) = \ln \frac{0}{\infty} = \ln 0 = -\infty$$

- Para $a > 1$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{a^x}{x^a} \right) = \ln \infty = \infty$$

Por tanto, para $a > 1$, tenemos que $Im(f_a) = [a(1 - \ln \frac{a}{\ln a}), +\infty[$.

Para $a \leq 1$, tenemos que $Im(f_a) = \mathbb{R}$.

2. Determinar los valores de $a > 0$ que son tales que $x \ln a \geq a \ln x$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$.

Para ello, necesito que $Im(f_a) \subseteq \mathbb{R}_0^+$. Por tanto, descartamos los $a \leq 1$.

Para que $Im(f_a) \subseteq \mathbb{R}_0^+$, necesitamos que:

$$a \left(1 - \ln \frac{a}{\ln a} \right) \geq 0 \iff \ln \frac{a}{\ln a} \leq 1 \iff \frac{a}{\ln a} \leq e \iff e - \frac{a}{\ln a} \geq 0$$

Calculo por tanto la imagen de $g :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dado por $g(x) = e - \frac{x}{\ln x}$.

$$g'(x) = \frac{-\ln x + 1}{\ln^2 x} = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$$

- Para $x < e$: $g'(x) > 0 \implies g$ estrictamente creciente.
- Para $x > e$: $g'(x) < 0 \implies g$ estrictamente decreciente.

Por tanto, tenemos que $x = e$ es un máximo relativo. Sabemos que $g(e) = 0$. Vemos ahora el comportamiento en $x = 1^+$ y en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\frac{1}{\ln 1^+} = -\frac{1}{0^+} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = e - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = e - \infty = -\infty$$

Por tanto, tenemos que $Im(g) = \mathbb{R}_0^-$. Por tanto, el único valor de x que hace que $g(x) \geq 0$ es $x = e$.

Por tanto, el valor de $a > 0$ que hace que $x \ln a \geq a \ln x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ es $a = e$.

Ejercicio 3. [2.5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = 4 - x^2$.

1. Estudiar la concavidad de f . ¿Posee algún punto de inflexión? Justifíquese la respuesta.

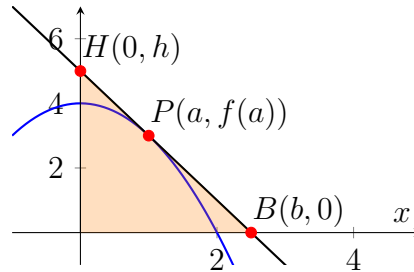
Sabemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Por tanto,

$$f'(x) = -2x \quad f''(x) = -2$$

Como f es continua y derivable en \mathbb{R} , tenemos que la concavidad la determina la segunda derivada. Como $f''(x) = -2 < 0 \quad \forall x$, tenemos que f es cóncava hacia abajo en todos los reales.

Además, al ser f dos veces derivable, una condición necesaria de punto de inflexión es que, en él, se anule la segunda derivada. Como $\nexists x \in \mathbb{R} \mid f''(x) = 0$, entonces podemos afirmar que no hay puntos de inflexión.

2. Determinar el punto $(a, f(a))$ de la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ cuya recta tangente corta en el primer cuadrante tanto al eje OX como al eje OY , determinando un triángulo de área mínima.



Por la interpretación geométrica de la derivada, tenemos que $f'(a) = -2a = m_t$. Por tanto, la ecuación de la recta que pasa por el punto P es:

$$f(x) = m_t x + n = -2ax + h$$

Como el punto P pertenece tanto a la recta como a la parábola,

$$f(a) = f(a) \implies -2a^2 + h = 4 - a^2 \implies h = 4 + a^2$$

Además, para $y = 0$, tenemos:

$$f(b) = 0 = -2ab + h \implies b = \frac{h}{2a} = \frac{4 + a^2}{2a}$$

por tanto, una vez establecidas las ecuaciones de ligadura, tenemos:

$$\begin{aligned} A :]0, 2[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longrightarrow A(a) = \frac{bh}{2} = \frac{\frac{4+a^2}{2a} \cdot (4+a^2)}{2} = \frac{(4+a^2)^2}{4a} \end{aligned}$$

Para calcular el área mínima, minimizamos $A(a)$. Para ello, calculamos el mínimo de la función.

$$\begin{aligned} A'(a) &= \frac{(4a)^2(4+a^2) - 4(4+a^2)^2}{(4a)^2} = 0 \iff (4+a^2)(16a^2 - 4(4+a^2)) = \\ &= (4+a^2)(12a^2 - 16) = 0 \iff a = \sqrt{\frac{16}{12}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Comprobemos ahora si el punto crítico es, efectivamente, un mínimo relativo.

- Para $0 < a < \frac{2\sqrt{3}}{3}$: $A'(a) < 0 \implies A'$ decreciente.
- Para $\frac{2\sqrt{3}}{3} < a < 2$: $A'(a) > 0 \implies A'$ creciente.

Por tanto, confirmamos que es un mínimo relativo. También es absoluto en ese intervalo, ya que es una función continua en un intervalo.

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 4 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3}$$

Por tanto, el punto que minimiza el área es:

$$(a, f(a)) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

Ejercicio 4. [3 puntos]

1. Calcular el polinomio de Taylor de orden 10 centrado en el origen de las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$.

Las derivadas sucesivas del seno son:

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad f^{(4k+1)}(0) = 1 \quad f^{(4k+3)}(0) = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Por tanto,

$$P_{10,0}^f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

Respecto al coseno, tenemos:

$$f^{(4k)}(0) = 1 \quad f^{(2k+1)}(0) = 0 \quad f^{(4k+2)}(0) = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Por tanto,

$$P_{10,0}^g(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$

2. Determinar $P_{3,0}^{\sin x}\left(\frac{\pi}{18}\right)$ y $P_{3,0}^{\cos x}\left(\frac{\pi}{18}\right)$ y dar la estimación del error cometido al aproximar $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)$ por dichos valores, respectivamente (esto es una aproximación del seno y del coseno del ángulo de 10°).

En primer lugar, trabajo con el seno.

$$P_{3,0}^{\sin x}\left(\frac{\pi}{18}\right) = \frac{\pi}{18} - \frac{\pi^3}{18^3 \cdot 3!} \approx 0,1736$$

Usando el Resto de Lagrange, el error cometido es, para algún $c \in [0, \frac{\pi}{18}]$:

$$P_{3,0}^{\sin x}\left(\frac{\pi}{18}\right) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \left(\frac{\pi}{18}\right)^4 = \frac{\sin c}{4!} \left(\frac{\pi}{18}\right)^4 \leq \frac{\pi^4}{4! \cdot 18^4} = 3,8663 \cdot 10^{-5}$$

Respecto al coseno, la aproximación es:

$$P_{3,0}^{\cos x}\left(\frac{\pi}{18}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{18^2 \cdot 2} \approx 0,984769$$

Usando el Resto de Lagrange, el error cometido es, para algún $c \in [0, \frac{\pi}{18}]$:

$$R_{3,0}^{\cos x} \left(\frac{\pi}{18} \right) = \frac{g^{(4)}(c)}{4!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^4 = \frac{\cos c}{4!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^4 \leq \frac{\pi^4}{4! \cdot 18^4} = 3,8663 \cdot 10^{-5}$$

No obstante, aunque la acotación del error a la que hemos llegado es la misma, como para $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ se tiene que $\sin x < \cos x$, entonces podemos afirmar que la aproximación del seno es mejor.

3. Haciendo uso del polinomio de Taylor, calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - \sin x)(\cos x - 1)}{x^3}$.

Sea $h(x) = (2x - \sin x)(\cos x - 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - \cancel{P_{3,0}^h(x)} \rightarrow 0}{x^3} + \frac{P_{3,0}^h(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_{3,0}^h(x)}{x^3} \stackrel{Ec. 1}{=} -\frac{1}{2}$$

Calculamos ahora el polinomio de Taylor necesario:

$$P_{3,0}^h(x) = \left[\left(2x - x + \frac{x^3}{3!} \right) \left(1 - \frac{x^2}{2!} - 1 \right) \right]_{n=3} = \left[\left(x + \frac{x^3}{6} \right) \left(-\frac{x^2}{2} \right) \right]_{n=3} = -\frac{x^3}{2} \quad (1)$$

Ejercicio 5. [1.5 puntos] Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right).$$

Calculo el límite por partes. Resuelvo en primer la primera parte

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \stackrel{Ec. 3}{=} e^1 = e \quad (2)$$

donde he tenido que resolver previamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1 \quad (3)$$

Resuelvo ahora la segunda parte:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \stackrel{L'Hôpital}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x) - \frac{1+x}{1+x}}{2x(1+x) + x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x + 3x^2} \stackrel{L'Hôpital}{=} -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{2 + 6x} = -\frac{1}{2} \quad (4) \end{aligned}$$

Por tanto, uniendo ambas partes, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right) \stackrel{Ec. 2,4}{=} e \cdot -\frac{1}{2}$$