Geometría I

Examen XIV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría I
Examen XIV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Víctor Naranjo Cabrera

Granada, 2025

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado de Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Ana María Hurtado Cortegana y Antonio Ros Mulero.

Descripción Convocatoria ordinaria.

Fecha 17 de enero de 2025.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** En el espacio $\mathbb{R}^4$, con vectores (x, y, z, t), y para todo a real consideramos los subespacios vectoriales definidos, uno por sistema de generadores y otro por ecuaciones implícitas,

$$U = \mathcal{L}(\{(0,1,1,1),(1,0,-a,-1)\}), W = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} ax - y + t = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\}$$

(a) Calcula, para todo a, unas ecuaciones implícitas de U y una base de W.

(b) Estudia si para $a = 1$ se verifica o no la descomposición en suma directa $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Sea $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (b - c, a + d, a - d)$$

(a) Calcula el núcleo y la imagen de f.

(b) Halla las coordenadas respecto de la base dual de la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de $f^t(\varphi)$, donde φ es la forma lineal de $(\mathbb{R}^3)^*$ dada por $\varphi(x, y, z) = x + y + z$.

Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita.

(a) Prueba que si $f \in \text{End}(V)$ tal que $f \circ f = f \Rightarrow V = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

(b) Dado $v \in V \setminus \{0\}$ prueba que existe $f \in \text{End}(V)$ tal que $f \circ f = f$ y $\ker(f^t) = \text{an}(\{v\})$.

Ejercicio 4 (2.5 puntos)**.** Decide de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) Para toda matriz antisimétrica de orden impar con coeficientes en $\mathbb{R}$ existe una fila que es combinación lineal del resto.

(b) Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita mayor o igual que 2 y $v \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Entonces existen dos bases distintas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ tales que $v_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{B}'}$. ¿Es cierta la afirmación para cualesquiera par de bases de V?

(c) Sean V y V' espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita y $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Entonces, f es inyectiva $\Leftrightarrow$ f^t es sobreyectiva.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** En el espacio $\mathbb{R}^4$, con vectores (x, y, z, t), y para todo a real consideramos los subespacios vectoriales definidos, uno por sistema de generadores y otro por ecuaciones implícitas,

$$U = \mathcal{L}(\{(0,1,1,1),(1,0,-a,-1)\}), W = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} ax - y + t = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\}$$

(a) Calcula, para todo a, unas ecuaciones implícitas de U y una base de W.

Un vector $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ está en U si y sólo si es combinación lineal de $v_1 := (0, 1, 1, 1), v_2 := (1, 0, -a, -1)$, es decir, si y sólo si la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -a & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

tiene rango 2. Vemos que $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, así que vamos orlando el menor anterior con la tercera fila y las columnas tercera y cuarta, obteniendo las dos ecuaciones implícitas de U respecto de la base usual de $\mathbb{R}^4$:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ x & y & z \end{vmatrix} = -ax + y - z, \; 0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ x & y & t \end{vmatrix} = -x + y - t$$

Para calcular una base de W, solucionamos el sistema homogéneo dado por sus ecuaciones implícitas. La matriz de coeficientes de este sistema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, tomamos y, z como incógnitas principales y x, t como incógnitas secundarias (parámetros), es decir, escribimos el sistema como

$$\left. \begin{array}{rl} y & = ax + t \\ z & = -x \end{array} \right\}$$

Dando valores a los parámetros obtenemos: si $(x, t) = (1, 0)$, entonces $(y, z) = (a, -1)$; y si $(x, t) = (0, 1)$, entonces $(y, z) = (1, 0)$. Por tanto, los vectores

$$v_3 := (1, a, -1, 0), \; v_4 := (0, 1, 0, 1)$$

forman base de W.

(b) Estudia si para $a = 1$ se verifica o no la descomposición en suma directa $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Para $a = 1$, los vectores que hemos calculado en el apartado anterior son

$$v_1 := (0, 1, 1, 1), \; v_2 := (1, 0, -1, -1), \; v_3 := (1, 1, -1, 0), \; v_4 := (0, 1, 0, 1).$$

Como

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

concluimos que v_1, v_2, v_3, v_4 son linealmente dependientes. Así que no pueden formar base, lo que impide que $\mathbb{R}^4$ sea suma directa de U y W. Como U y W tienen dimensión 2, tenemos $U \cap W \neq \{0\}$ y $U + W \neq \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Sea $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (b-c, a+d, a-d)$$

(a) Calcula el núcleo y la imagen de f.

Calculamos primero $ker(f)$:

$$ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : (b-c, a+d, a-d) = (0,0,0) \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : b = c, a = d = 0 \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right).$$

Podemos calcular $\operatorname{Im}(f)$ de dos maneras:

Fórmula de la nulidad y el rango. Como $\dim_{\mathbb{K}} \ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} V$, $\dim_{\mathbb{K}} \ker(f) = 1 \Rightarrow 4 = 1 + \dim \operatorname{Im}(f)$, luego $\dim \operatorname{Im}(f) = 3$ y por tanto, f es sobreyectiva. Así que la imagen de f es $\mathbb{R}^3$.

Formando una base de Im(f) Llamamos E_{ij} a las matrices de la base usual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Así, $f(E_{11}) = (0,1,1), f(E_{12}) = (1,0,0), f(E_{21}) = (-1,0,0)$, $f(E_{22}) = (0,1,-1)$, luego

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \mathcal{L}(\{f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22})\}) \\ &= \mathcal{L}(\{(0,1,1),(1,0,0),(-1,0,0),(0,1,-1)\}) \\ &= \mathcal{L}(\{(0,1,1),(1,0,0),(-1,0,0),(0,1,-1)\}) = \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado que los vectores $(0,1,1), (1,0,0)$, $(0,1,-1)$ son linealmente independientes, porque

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

(b) Halla las coordenadas respecto de la base dual de la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de $f^t(\varphi)$, donde φ es la forma lineal de $(\mathbb{R}^3)^*$ dada por $\varphi(x,y,z) = x+y+z$.

Llamemos $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ a la base ordenada usual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B}^* = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{21}, \varphi_{22})$ a su base ordenada dual. Entonces, las coordenadas que nos piden son

$$\begin{aligned} (f^t(\varphi))_{\mathcal{B}^*} &= ([f^t(\varphi)](E_{11}), [f^t(\varphi)](E_{12}), [f^t(\varphi)](E_{21}), [f^t(\varphi)](E_{22})) \\ &= ((\varphi \circ f)(E_{11}), (\varphi \circ f)(E_{12}), (\varphi \circ f)(E_{21}), (\varphi \circ f)(E_{22})) \\ &= (\varphi(0,1,1), \varphi(1,0,0), \varphi(-1,0,0), \varphi(0,1,-1)) = (2,1,-1,0). \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita.

(a) Prueba que si $f \in \mathrm{End}(V)$ tal que $f \circ f = f \Rightarrow V = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Veamos que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$: sea $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Como $x \in \mathrm{Im}(f)$ existe $z \in V$ tal que $x = f(z)$. Como $x \in \ker(f)$, tenemos

$$0 = f(x) = f(f(z)) = (f \circ f)(z) = f(z) = x.$$

Por tanto, $x = 0$, y así, $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Por la fórmula de la nulidad y el rango, concluimos que $V = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

(b) Dado $v \in V \setminus \{0\}$ prueba que existe $f \in \mathrm{End}(V)$ tal que $f \circ f = f$ y $\ker(f^t) = \mathrm{an}(\{v\})$.

Sabemos que

$$\ker(f^t) = \mathrm{an}(\{v\}) = \mathrm{an}(\mathrm{Im}(f)) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{an}(\mathrm{an}(\{v\})) = \mathcal{L}(\{v\}).$$

Entonces, sea $n = \dim_{\mathbb{K}} V$, tomemos $x_1, \ldots, x_{n-1}$ de un subespacio suplementario de $\mathcal{L}(\{v\})$ en V, tal que $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, v)$ es base ordenada de V. Sea f el único endomorfismo dado por el teorema fundamental de las aplicaciones lineales a partir de

$$f(x_i) = 0, \forall i = 1, \ldots, n-1, f(v) = v.$$

Entonces

$$\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}(\{f(x_1), \ldots, f(x_{n-1}), f(v)\}) = \mathcal{L}(\{0, \ldots, 0, v\}) = \mathcal{L}(\{v\})$$

y por tanto $\ker(f^t) = \mathrm{an}(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{an}(\mathcal{L}(\{v\})) = \mathrm{an}(\{v\})$, mientras que $f \circ f = f$ ya que $f \circ f$ y f coinciden sobre los vectores de la base $\mathcal{B}$

Ejercicio 4. Decide de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) Para toda matriz antisimétrica de orden impar con coeficientes en $\mathbb{R}$ existe una fila que es combinación lineal del resto.

Verdadero: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisimétrica, es decir $A^t = -A$. Tomando determinantes

$$det(A) = det(A^t) = det(-A) = (-1)^n det(A).$$

Como estamos suponiendo n impar, tenemos $det(A) = -det(A)$, luego $det(A) = 0$. Esto equivale a que el rango de A por filas es menor que n, es decir, al menos una fila de A es combinación lineal del resto.

(b) Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo K de dimensión finita mayor o igual que 2 y $v \in V \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Entonces existen dos bases distintas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ tales que $v_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{B}'}$. ¿Es cierta la afirmación para cualesquiera par de bases de V?

La primera afirmación es verdadera: Como $v \neq 0$, el conjunto $\{v\}$ es linealmente independiente. Por el Teorema de Ampliación de la Base, existe una base ordenada de V del tipo $\mathcal{B} = (v, v_2, \ldots, v_n)$ para vectores $v_2, \ldots, v_n \in V$. Tomemos $\mathcal{B}' = (v, v_2, ..., v_{n-1}, 2v_n)$., también base ordenada de V. Vemos entonces que $v_{\mathcal{B}} = (1, 0, ..., 0) = v_{\mathcal{B}'}$. La segunda afirmación es falsa: Consideremos las bases ordenadas $\mathcal{B} = (v, v_2, ..., v_n), \mathcal{B}'' = (v_2, v, v_3, ..., v_n)$ Entonces

$$v_{\mathcal{B}} = (1, 0, \ldots, 0) \neq (0, 1, 0, \ldots, 0) = v_{\mathcal{B}''}.$$

Y no es cierta para cualesquiera par de bases de V.

(c) Sean V y V' espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita y $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Entonces, f es inyectiva $\Leftrightarrow$ f^t es sobreyectiva.

La afirmación es verdadera:

$\underline{\Rightarrow)}$ f es inyectiva si y sólo si $n(f) = 0$. Por la fórmula de la nulidad y el rango aplicada a f, esto equivale a que $\dim_{\mathbb{K}} V = r(f)$. Por el Teorema del Rango, $r(f) = r(f^t)$, luego $dim_{\mathbb{K}} V = r(f^t)$ Como $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} V^*$, lo anterior equivale a que $\dim_{\mathbb{K}} V^* = r(f^t)$, luego f^t es sobreyectiva.

$\underline{\Leftarrow)}$ $f^t : (V')^* \to V^*$ es sobreyectiva si y solo si $\mathrm{Im}(f^t) = V^* = \mathrm{an}(\ker(f))$ Tomando anuladores, esto equivale a que $\ker(f) = \mathrm{an}(V^*) = \{0\}$, es decir, a que f es inyectiva.