

Geometría I

Examen XII

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría I

Examen XII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Ana María Hurtado Cortegana y Antonio Ros Mulero.

Descripción Parcial 1. Temas 1 y 2.

Fecha 19 de noviembre de 2024.

Ejercicio 1 (5 puntos). Demostrar los siguientes enunciados.

- a) Sea V un espacio vectorial y $u, v, w \in V$ tres vectores tales que $u + v + w = 0$. Si u y v son linealmente independientes entonces v y w también lo son.
- b) Todo hiperplano vectorial de \mathbb{R}^4 contiene un vector no nulo de la forma

$$\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3b \\ 4b \end{pmatrix} \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

- c) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada de orden $n \geq 2$ y $\mathcal{U} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$ el subconjunto de las matrices que conmutan con A . Entonces

(c1) \mathcal{U} es un subespacio vectorial.

(c2) $\dim \mathcal{U} \geq 2$.

Ejercicio 2 (5 puntos). a) Para todo $a \in \mathbb{R}$, calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 2 & a & -a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Para todo a , calcular una base del subespacio $U \subset \mathbb{R}^3$ dado por las ecuaciones

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- c) Sea $W \subset \mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial generado por las columnas de A .

(c1) Calcular, para todo a , la dimensión de W .

(c2) Demostrar que, para todo a , W está contenido en el subespacio $V \subset \mathbb{R}^4$ definido por

$$V \equiv ax + 2y - z = 0$$

(c3) Para todo a , calcular unas ecuaciones implícitas de W .

Ejercicio 1. Pasamos a demostrar cada uno de los enunciados:

- a) De $u + v + w = 0$ tenemos que $w = -u - v$. Para ver que v y w son linealmente independientes, sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $av + bw = 0$. Entonces:

$$av + bw = av + b(-u - v) = av - bu - bv = (a - b)v - bu = 0$$

Pero como u y v son linealmente independientes, entonces:

$$\left. \begin{array}{l} a - b = 0 \\ -b = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array} \right.$$

Por lo que v y w son linealmente independientes.

- b) El conjunto de vectores que son de la forma $(a, 2a, 3b, 4b)$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 :

$$V = \mathcal{L}\{(1, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 4)\}$$

con $\dim V = 2$. Sea ahora $H \subset \mathbb{R}^4$ un hiperplano vectorial de \mathbb{R}^4 , entonces $\dim H = 4 - 1 = 3$. Como tenemos dos subespacios en \mathbb{R}^4 cuya suma de dimensiones es mayor que 4, sabemos gracias a la fórmula de dimensiones:

$$\dim V + \dim H = \dim(V \oplus H) + \dim(V \cap H)$$

que su intersección es de al menos una recta vectorial, con lo que todo hiperplano H de \mathbb{R}^4 contiene algún vector no nulo de la forma $(a, 2a, 3b, 4b)$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$.

- c) Demostramos los dos apartados:

- (c1) Sabemos que $0 \in \mathcal{U}$ y sean $B, C \in \mathcal{U}$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces:

$$(aB + C)X = (aBX + CX) = (aXB + XC) = X(aB + C)$$

con lo que $aB + C \in \mathcal{U}$, concluimos que \mathcal{U} es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (c2) Distingamos casos:

- Si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $A = \alpha I$, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ya que todas las matrices conmutan con αI para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Si no, entonces I y A son linealmente independientes y:

$$I \cdot A = A = A \cdot I \quad A \cdot A = A \cdot A$$

ambas conmutan con A , con lo que $I, A \in \mathcal{U}$. Como tenemos dos matrices linealmente independientes en \mathcal{U} , concluimos que $\dim \mathcal{U}$ ha de tener al menos dimensión 2.