Geometría II
Examen XIV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría II
Examen XIV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Daniel Arias Calero

Granada, 2025

Asignatura Geometría II.

Curso Académico 2024-2025.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Ros Mulero.

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

Fecha 9 de Julio de 2025.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Demuestra que las matrices A y B tienen el mismo polinomio característico, pero una de ellas diagonaliza y la otra no.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (4 puntos)**.** Sea g una métrica euclídea sobre $\mathbb{R}^3$ tal que el endomorfismo f dado por

$$f(x, y, z) = (y,\ y - z,\ -x + y)$$

es una isometría de $(\mathbb{R}^3, g)$. Se pide:

(a) Razonar que f^2 es la simetría respecto de un subespacio U.

(b) Calcular el subespacio ortogonal $U^\perp$.

(c) Razonar que f es un giro de ángulo $\pi/2$ y encontrar una base ortogonal de g.

(d) Dar una matriz, respecto de la base usual de $(\mathbb{R}^3)$, de una de las métricas de g.

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** Se considera la siguiente matriz con coeficientes reales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Sea g_a la métrica de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base usual es A. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base usual es también A.

(a) Calcular la signatura y clasificar la métrica g_a según los valores de a.

(b) Para $a = 1$ obtener una base conjugada (es decir, ortogonal) para la métrica g_1.

(c) ¿Para qué valores de a es g_a una métrica euclídea y f autoadjunto en $(\mathbb{R}^3, g_a)$?

(d) Para $a = 2$ calcular, si es posible, una base ortogonal de $(\mathbb{R}^3, g_2)$ formada por vectores propios de f.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Demuestra que las matrices A y B tienen el mismo polinomio característico, pero una de ellas diagonaliza y la otra no.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Cálculo del polinomio característico de A

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 1\right) = \\ &= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 8\right) = -(\lambda-2)^2(\lambda-4) \end{aligned}$$

2. Cálculo del polinomio característico de B

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 1\right) = \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = -(\lambda-2)^2(\lambda-4) \end{aligned}$$

Ambas matrices tienen el mismo polinomio característico, veamos la diagonalización.

1. Subespacio propio de A

   - $\lambda = 2$:

$$\begin{aligned} V_2^A &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (A - 2I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right) \end{aligned}$$

   Por tanto, $\dim V_2^A = 1 < 2$, luego A no es diagonalizable.

2. Subespacio propio de B

- $\lambda = 4$:

$$V_4^B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (B-4I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Por tanto, $\dim V_4^B = 1$, que coincide con la multiplicidad algebraica del valor propio 4.

- $\lambda = 2$:

$$V_2^B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (B-2I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

Por tanto:
$$V_2^B = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Por tanto, $\dim V_2^B = 2$, que coincide con la multiplicidad algebraica del valor propio 2.

Conclusión:
Ambas matrices tienen el mismo polinomio característico, pero B es diagonalizable y A no.

Ejercicio 2 (4 puntos)**.** Sea g una métrica euclídea sobre $\mathbb{R}^3$ tal que el endomorfismo f dado por
$$f(x, y, z) = (y,\ y - z,\ -x + y)$$
es una isometría de $(\mathbb{R}^3, g)$. Se pide:

(a) Razonar que f^2 es la simetría respecto de un subespacio U.

Para analizar la transformación compuesta $f \circ f$, calculamos la matriz asociada a dicha composición en la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Si llamamos
$$A = M(f, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces la matriz de $f \circ f$ se obtiene como:

$$B = M(f \circ f, \mathcal{B}_u) = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Procedemos ahora a calcular el polinomio característico de B:

$$p_{f\circ f}(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 1).$$
$$\Longrightarrow p_{f\circ f}(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2.$$

Así, los valores propios de $f \circ f$ son $\{1, -1\}$, siendo -1 con multiplicidad doble.

Comprobamos ahora si la dimensión del espacio propio asociado a -1 coincide con su multiplicidad algebraica. Para ello, estudiamos el núcleo de $B + I$:

$$B + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg}(B + I) = 1. \Longrightarrow \dim(\ker(B + I)) = 3 - 1 = 2.$$

Dado que la dimensión del subespacio propio coincide con la multiplicidad algebraica del valor propio -1, y que el valor propio 1 es simple, concluimos que $f \circ f$ es diagonalizable.

Por tanto, $f \circ f$ es semejante a una matriz diagonal de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que representa una simetría respecto a una recta del subespacio U.

(b) Calcular el subespacio ortogonal $U^\perp$.

Como la transformación $f \circ f$ actúa como una simetría respecto a una recta, podemos descomponer el espacio en la suma directa $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$, donde U es el subespacio fijo por $f \circ f$, es decir:

$$U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

Equivalente a resolver el sistema $(B - I)\overrightarrow{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -2z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \mathcal{L}\left\{(1, 1, 0)\right\}.$$

Por tanto, el subespacio U es generado por el vector $(1,1,0)$.

Para hallar su ortogonal $U^\perp$, basta con calcular el subespacio propio asociado al valor propio -1. Este viene dado por:

$$U^\perp = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (B+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \right\},$$

$$B+I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x+y-z=0.$$

Una base del subespacio solución es $\mathcal{L}\left\{(1,0,1),(1,-1,0)\right\}$.

(c) Razonar que f es un giro de ángulo $\pi/2$ y encontrar una base ortogonal de g.

Calculamos la traza de la matriz $A = M(f,\mathcal{B}_u)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr}(A) = 1$$

En $\mathbb{R}^3$, si f es una isometría ortogonal con $\det(f)=1$ y tiene traza 1, entonces f es un giro de ángulo θ tal que la matriz asociada:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

La traza de esta matriz es:

$$\operatorname{tr}(G) = 1 + 2\cos\theta$$

$$\operatorname{tr}(f) = 1+2\cos\theta \quad \Rightarrow \quad 1 = 1+2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Vamos ahora a determinar el eje del giro, que corresponde al subespacio propio asociado a valor propio $\lambda = 1$. Calculamos:

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ -z=0 \\ -x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

El eje del giro es el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = 1$, generado por el vector:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Buscamos ahora una base ortogonal del plano perpendicular a este eje. Para ello, consideramos los vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ortogonales a $(1, 1, 0)$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x$$

De esta ecuación obtenemos dos vectores linealmente independientes del plano y por tanto, una base ortogonal asociada al giro es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) Dar una matriz, respecto de la base usual de $(\mathbb{R}^3)$, de una de las métricas de g.

Sea la matriz de f en la base usual:

$$A = M(f, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Queremos determinar una métrica simétrica definida positiva $G \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ tal que f sea una isometría respecto a g, es decir, que se cumpla:

$$A^t G A = G$$

Cálculo: Sea $G = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & h \end{pmatrix}$, y calculemos:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^t G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & e & h \\ a+b+c & b+d+e & c+e+h \\ -b & -d & -e \end{pmatrix}$$

Y finalmente:

$$A^t G A = \begin{pmatrix} c & e & h \\ a+b+c & b+d+e & c+e+h \\ -b & -d & -e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} h & -c-e-h & e \\ -c-e-h & a+2b+2c+d+2e+h & -b-d-e \\ e & -b-d-e & d \end{pmatrix}$$

Igualamos con G, y se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} h = a \\ -c - e - h = b \\ e = c \\ a + 2b + 2c + d + 2e + h = d \\ -b - d - e = e \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, una solución posible es:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Definida positiva por el criterio de Sylvester:

$$|2| > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow G \text{ es definida positiva.}$$

Por tanto, f es una isometría respecto a la métrica g de matriz G.

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** Se considera la siguiente matriz con coeficientes reales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Sea g_a la métrica de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base usual es A. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base usual es también A.

(a) Calcular la signatura y clasificar la métrica g_a según los valores de a.

Calculamos el determinante de la métrica g_a:

$$\det(g_a) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

Por tanto, g_a es no degenerada si $a \neq \pm 1$. Estudiamos la signatura en función de los valores de a:

- **Caso** $a > 1$ **(por ejemplo** $a = 2$**):**

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Menores principales:

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad \Delta_3 = \det(g) = a^2 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$$

Por el criterio de Sylvester, la métrica es definida positiva. Signatura: $(3,0)$

$$\begin{pmatrix} + & & \\ & + & \\ & & + \end{pmatrix}$$

- **Caso $-1 < a < 1$ (por ejemplo $a = 1/2$):**

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} = 1/2 > 0, \quad \Delta_3 = -3/4 < 0$$

Como el determinante es negativo, la signatura es $(2,1)$: métrica indefinida.

$$\begin{pmatrix} + & & \\ & + & \\ & & - \end{pmatrix}$$

- **Caso $a < -1$ (por ejemplo $a = -2$):**

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(g) = a^2 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$$

Pero el segundo menor:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

Por tanto, la signatura es también $(2,1)$: métrica indefinida.

$$\begin{pmatrix} + & & \\ & + & \\ & & - \end{pmatrix}$$

- **Caso $a = 1$:** La métrica es:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el determinante es cero, la métrica es **degenerada**.
Buscamos ahora un vector $\overrightarrow{e}_1 \in \mathbb{R}^3$ tal que $g(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_1) \neq 0 \ \ \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$.
Por simplicidad, probamos con $\overrightarrow{e}_1 = (1,0,0)$.

Buscamos ahora su perpendicular tal que $g(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2) = 0 \quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ y que $g(\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_2) \neq 0$.

$$g_1(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 = 0$$

Entonces, cualquier vector ortogonal a $\overrightarrow{e}_1 = (1, 0, 0)$ en la métrica g_1 debe cumplir $x_1 = 0$, por lo que:

$$\overrightarrow{e}_2 \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Elijamos $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y que $g_1(\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_2) = 1$
Por lo que obtenemos la matriz de Sylvester:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

- **Caso $a = -1$:**

$$G_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La métrica también es **degenerada**.
Probamos $\overrightarrow{e}_1 = (1, 0, 0)$, tal que

$$g_{-1}(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_1) \neq 0$$

Buscamos ahora su perpendicular tal que $g_{-1}(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2) = 0 \quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$ y que $g_{-1}(\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_2) \neq 0$.

$$g_{-1}(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 = 0$$

Entonces obtenemos:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Elijamos $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y que $g_{-1}(\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_2) = -1$ Por lo que obtenemos la matriz de Sylvester:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Para $a = 1$ obtener una base conjugada (es decir, ortogonal) para la métrica g_1.

Ya en el apartado anterior obtuvimos una base ortogonal para el plano no degenerado de g_1, formada por los vectores:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como la métrica es degenerada, el tercer vector ortogonal debe tomarse en el núcleo de g_1. Calculamos el núcleo resolviendo $G\vec{x} = 0$, con:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \quad \ker(g_1) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por tanto, una base conjugada ortogonal para g_1 es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) ¿Para qué valores de a es g_a una métrica euclídea y f autoadjunto en $(\mathbb{R}^3, g_a)$?

En el apartado (a) calculamos que la métrica g_a es definida positiva (y por tanto, euclídea) si y solo si $a > 1$. Así que, en lo que respecta a la euclideidad, esto solo ocurre para valores de $a > 1$.

Ahora, veamos cuándo f es autoadjunto respecto de g_a. Para ello, recordamos que se cumple:

$$M(f, \mathcal{B})^t \cdot G = G \cdot M(f, \mathcal{B})$$

Donde la matriz resultante debe ser **simétrica** y que la matriz G de la métrica g_a en la base usual es:

$$G = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = \quad M(f, \mathcal{B})$$

Entonces:

$$A^t G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+1 & 2a \\ 0 & 2a & a^2+1 \end{pmatrix}$$

y por otro lado:

$$GA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+1 & 2a \\ 0 & 2a & a^2+1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, se cumple que $A^tG = GA$ y que es simétrica para todo valor de a, lo que implica que f es autoadjunto respecto de g_a para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

Conclusión: f es autoadjunto para todo $a \in \mathbb{R}$, pero g_a es euclídea solo si $a > 1$.

(d) Para $a = 2$ calcular, si es posible, una base ortogonal de $(\mathbb{R}^3, g_2)$ formada por vectores propios de f.

Calculamos el polinomio característico de f y sus subespacios propios.

$$p_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3\right) = -(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

Para $\lambda = 1$, resolvemos $(A - I)\overrightarrow{x} = 0$:

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow V_1 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Para $\lambda = 3$, resolvemos $(A - 3I)\overrightarrow{x} = 0$:

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ -y + z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow V_3 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Estos vectores forman una base ortogonal ya que $V_1 \perp V_3$, y los dos vectores que generan V_1 son perpendiculares entre sí:

$$g_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

Por tanto, la base pedida es:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$