Análisis Funcional

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Funcional

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Índice general

Se recomienda encarecidamente acompañar la asignatura de la lectura del libro "Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equations", de Haim Brezis, que puede encontrarse en la bibliografía de la asignatura.

1. El Espacio Dual

El objetivo de este capítulo es definir el concepto de espacio dual de un espacio normado, así como sus principales propiedades, que nos dotan de muchos ejemplos de espacios de Banach. Para ello, será necesario primero repasar conceptos básicos vistos ya en asignaturas anteriores de Análisis Matemático.

1.1. Repaso

Definición 1.1 (Espacio métrico)**.** Un espacio métrico es una tupla (E, d) donde E es un conjunto no vacío y $d : E \times E \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

- **Desigualdad triangular.** $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \qquad \forall x, y, z \in E$
- **Simetría.** $d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall x, y \in E$
- **No degeneración.** $d(x, y) = 0 \iff x = y$

Definición 1.2 (Espacio normado)**.** Un espacio normado es una tupla $(E, \|\cdot\|)$ donde E es un espacio vectorial y $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

- **Desigualdad triangular.** $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in E$
- **Homogeneidad por homotecia.** $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$
- **No degeneración.** $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$

A partir de estas propiedades pueden deducirse muchas otras, entre las cuales destacamos:

Proposición 1.1. *Si* $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado, entonces:*

- $\|0\| = 0$.
- $\|x\| \geqslant 0 \qquad \forall x \in E$.

Demostración. Veamos cada propiedad:

- Para la primera: $\|0\| = \|0 \cdot 1\| = 0\|1\| = 0$.
- Para la segunda, basta observar que si $x \in E$, entonces:

$$0 = \|0\| = \|x + (-x)\| \leqslant 2\|x\| \Longrightarrow \|x\| \geqslant 0$$

□

Proposición 1.2. *Si* $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado y definimos la aplicación* $d : E \times E \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$d(x, y) = \|y - x\| \qquad \forall x, y \in E$$

Se verifica que (E, d) *es un espacio métrico.*

Definición 1.3 (Espacio métrico completo)**.** Sea (E, d) un espacio métrico, decimos que es completo (o que la distancia d es completa) si toda sucesión de Cauchy para la distancia d es también convergente a un elemento de E para la distancia d.

Hemos visto ya que cualquier espacio normado puede dotarse de estructura de espacio métrico, así como la definición de espacio métrico completo, ambos conceptos tratados ya en asignaturas previas.

Definición 1.4 (Espacio de Banach)**.** Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, decimos que es de Banach si el espacio métrico (E, d) obtenido de la forma usual a partir de la norma $\|\cdot\|$ es un espacio métrico completo.

Definición 1.5 (Espacio prehilbertiano)**.** Un espacio prehilbertiano es una tupla $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ donde H es un espacio vectorial y $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

- **Bilinealidad.** La aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es lineal en ambas variables.
- **Simetría.** $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \qquad \forall x, y \in E$
- **Definida positiva.** $\langle x, x\rangle > 0 \qquad \forall x \in H \setminus \{0\}$

Proposición 1.3. *Si* $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un espacio prehilbertiano y definimos la aplicación* $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad \forall x \in E$$

Se verifica que $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado.*

Definición 1.6 (Espacio de Hilbert)**.** Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio prehilbertiano, decimos que es de Hilbert si el espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ obtenido de la forma usual a partir del producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un espacio métrico de Banach.

1.1.1. Ejemplos

- Sea $N \in \mathbb{N}$, en $\mathbb{R}^N$ podemos definir para cada $p \geqslant 1$ la aplicación $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por:

  $$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

  Que hace que $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$ sea un espacio normado, que de hecho es de Banach (hágase).

- En el caso anterior, si tomamos $p = 2$ se verifica que además si definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

  Obtenemos que $(\mathbb{R}^N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio prehilbertiano (compruébese) cuyo espacio normado canónico coincide con $(\mathbb{R}^N, \| \cdot \|_2)$, por lo que es un espacio de Hilbert.

- Como otro ejemplo de espacio normado sobre $\mathbb{R}^N$, podemos definir $\| \cdot \|_\infty : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : i \in \{0, \ldots, N\}\}$$

  Se cumple igualmente que $(\mathbb{R}^N, \| \cdot \|_\infty)$ es un espacio normado que además es de Banach (compruébese).

- Como primer ejemplo de espacio normado que no se construye sobre los vectores de un espacio de la forma $\mathbb{R}^N$, si tomamos un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$, y definimos[1]:

$$\mathcal{C}_b(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y } f \text{ es acotada en } A\}$$

  Junto con la aplicación $\| \cdot \| : \mathcal{C}_b(A) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : x \in A\}$$

  Se verifica que $(\mathcal{C}_b(A), \| \cdot \|)$ es una espacio normado que de hecho es de Banach (compruébese).

- Sea ahora $K \subset \mathbb{R}^N$ un compacto, si definimos:

$$\mathcal{C}(K) = \{f : K \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$$

  resulta que podemos definir una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{C}(K) \times \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\langle f, g \rangle = \int_K f(x)g(x)\ dx$$

  que hace que $(\mathcal{C}(K), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sea un espacio prehilbertiano, que nos induce un espacio normado donde la norma es:

$$\|f\|_2 = \left(\int_K f(x)^2\ dx \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall f \in \mathcal{C}(K)$$

  Sin embargo, este espacio prehilbertiano **no es de Hilbert**:

  Por ejemplo, si tomamos $K = [0, 2] \subset \mathbb{R}$, si tomamos $f_n : K \to \mathbb{R}$ de forma que la gráfica de f_n sea algo parecido a la de la Figura 1.1

[1]El subíndice “b” de $\mathcal{C}_b(A)$ viene de la palabra inglesa “bounded”.

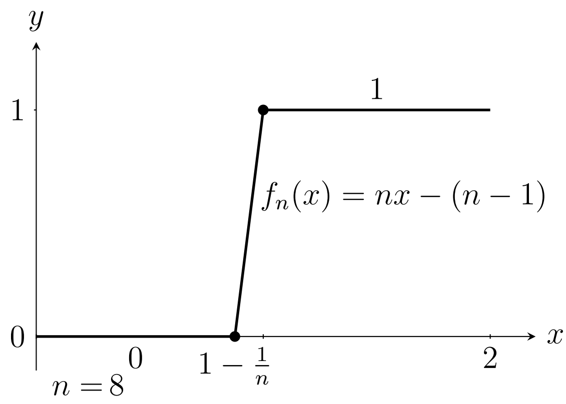


Figura 1.1: Gráfica de la función f_n.

Si definimos $f = \chi_{[1,2]}$ la función característica del intervalo $[1,2]$ (que no pertence a $\mathcal{C}(K)$), tenemos que:

$$\|f - f_n\|_2^2 = \int_0^2 (f(x) - f_n(x))^2 \, dx = \frac{1}{2n} \to 0$$

Por lo que f_n es una sucesión de Cauchy pero cuyo límite no está en el espacio que consideramos, por lo que no es convergente, luego $\mathcal{C}(K)$ no es un espacio completo.

1.2. Espacios de Lebesgue

Un ejemplo interesante de espacios de Banach son los espacios de Lebesgue, que ya se trabajaron un poco en la asignatura de Análisis Matemático II. En este documento volveremos a definir dicho espacio, puesto que la construcción es importante tenerla clara. En un primer lugar, hemos de repasar ciertas desigualdades para poder construir la estructura de espacio normado.

1.2.1. Desigualdades importantes

Para la primera desigualdad, es conveniente la siguiente motivación, que nos dará una breve justificación del origen de la desigualdad: sean $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ dos números reales no negativos, es bien conocido que:

$$0 \geqslant (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Longrightarrow ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

Definición 1.7. Sea $p \geqslant 1$ un número real, definimos su "exponente conjugado" por:

$$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{si } p \neq 1 \\ \infty & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

De esta forma (admitiendo el convenio de que $0 = 1/\infty$ de la recta real extendida), tenemos que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Usaremos en esta sección la notación p' para denotar al exponente conjugado de p.

Proposición 1.4 (Desigualdad de Young)**.** *Sean $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ y $p \in \mathbb{R}$ con $p > 1$, se verifica que:*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

Demostración. La concavidad[2] del logaritmo nos dice:

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}\right) \geqslant \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{p'}\log\left(b^{p'}\right) = \log(a) + \log(b) = \log(ab)$$

Y si ahora aplicamos la función exponencial y usamos que es creciente obtenemos:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

□

Recordemos que en Análisis Matemático I definíamos para cualquier conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ medible el conjunto de las funciones integrables sobre Ω:

$$\mathcal{L}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega f < \infty \right\}$$

Pues bien, dado $p \geqslant 1$, podemos definir ahora:

$$\mathcal{L}_p(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{L}(\Omega) : \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}$$

Teorema 1.5 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sea $p > 1$, si $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$ y $g \in \mathcal{L}_{p'}(\Omega)$, entonces $fg \in \mathcal{L}(\Omega)$ y además:*

$$\int_\Omega |fg| \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Demostración. Si notamos por comodidad:

$$\alpha = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \beta = \left(\int_\Omega |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Si $\alpha = 0$, entonces $f^p = 0$ casi por doquier, de donde $|fg| = 0$ casi por doquier, luego:

$$\int_\Omega |fg| = 0$$

Si $\beta = 0$ la situación es simétrica. Suponiendo ahora que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, la desigualdad de Young nos dice que:

$$\frac{|f(x)|}{\alpha}\frac{|g(x)|}{\beta} \leqslant \frac{|f(x)|^p}{p\alpha^p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'\beta^{p'}} \qquad \forall x \in \Omega$$

[2] Recordamos que si f era una función cóncava, entonces $f(tx + (1-t)y) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y)$, para cualquier $t \in [0, 1]$, x,y en el dominio de definición de f.

Si ahora aplicamos la integral de Lebesgue a ambos lados usando el crecimiento de dicho funcional, obtenemos que (usando la definición de α y β):

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int_\Omega |fg| \leqslant \frac{1}{p\alpha^p}\int_\Omega |f|^p + \frac{1}{p'\beta^{p'}}\int_\Omega |g|^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

de donde $fg \in \mathcal{L}(\Omega)$ y despejando de la desigualdad:

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int_\Omega |fg| \leqslant 1$$

Obtenemos la desigualdad buscada. □

La desigualdad de Hölder nos proporcionará la desigualdad de Cauchy-Schwartz de la norma del futuro espacio normado, y nos permitirá probar la desigualdad de Minkowski.

Teorema 1.6 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Para $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$ y $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega)$, se cumple que:*

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Demostración. Si notamos por comodidad:

$$\alpha = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \beta = \left(\int_\Omega |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, \qquad \gamma = \left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = 1$, entonces la desigualdad triangular nos dice que $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, donde aplicamos el crecimiento de la integral y ya tenemos el Teorema demostrado. Sabemos por el resultado anterior que $\gamma < \infty$, puesto que $\mathcal{L}_p(\Omega) \subset \mathcal{L}(\Omega)$, y la desigualdad buscada es obvia si $\gamma = 0$. Supuesto ahora que $p > 1$ y $\gamma > 0$, si tomamos:

$$h = |f+g|^{p-1}$$

tenemos entonces que:

$$h^{p'} = |f+g|^{(p-1)p'} = |f+g|^p$$

luego:

$$\int_\Omega h^{p'} = \gamma^p < \infty$$

Por lo que $h \in \mathcal{L}_p(\Omega)$. Tenemos:

$$|f+g|^p = |f+g|h \leqslant |f|h + |g|h$$

Y por la desigualdad de Hölder:

$$\gamma^p \leqslant \int_\Omega |f|h + \int_\Omega |g|h \leqslant (\alpha+\beta)\left(\int_\Omega h^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = (\alpha+\beta)\gamma^{\frac{p}{p'}}$$

Y si dividimos por $\gamma^{\frac{p}{p'}}$ tenemos la desigualdad buscada. □

1.2.2. Definición de los espacios de Lebesgue

Fijado $p \geqslant 1$, podemos tratar de dotar a $\mathcal{L}_p(\Omega)$ de una norma. Pensamos en un principio en la aplicación $\varphi_p : \mathcal{L}_p(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$$

Que:

- Verifica la desigualdad triangular gracias a la desigualdad de Minkowski.
- Verifica la homegeneidad por homotecias, ya que:

$$\varphi_p(\alpha f) = |\alpha|\varphi_p(f) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

- $\varphi_p(f) = 0 \iff f = 0$ casi por doquier.

Por lo que dicha función **no es una norma** en $\mathcal{L}_p(\Omega)$ al no verificar la no degeneración de la norma, puesto que la integral "es ciega" a la hora de diferenciar la función constantemente igual a 0 de otras funciones con integral cero.

Para solucionar el problema con el que nos acabamos de topar (el problema de no poder definir una norma de dicha forma), podemos constuir una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathcal{L}_p(\Omega)$ que identifique a las funciones que son iguales casi por doquier, pudiendo considerar el espacio cociente:

$$L_p(\Omega) = \frac{\mathcal{L}_p(\Omega)}{\sim}$$

Donde ya $(L_p(\Omega), \varphi_p)$ sí que es un espacio normado, donde denotaremos normalmente $\varphi_p = \|\cdot\|_p$.

Teorema 1.7 (Riesz-Fischer)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto medible y $p \geqslant 1$, se cumple que $(L_p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.*

1.2.3. Más ejemplos de espacios de Banach

- Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible, si definimos:

  $$\sup_\Omega |f| = \text{ínf}\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \text{ casi para todo } x \in \Omega\}$$

  El conjunto:

  $$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \sup_\Omega |f| < \infty\right\}$$

  junto con la norma:

  $$\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f|$$

  es un espacio de Banach, donde la desigualdad de Hölder se comple considerando que $p = \infty$ y $p' = 1$:

  Si $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ y $g \in \mathcal{L}(\Omega)$, entonces $fg \in \mathcal{L}(\Omega)$, con:

  $$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1$$

- Para $1 \leqslant p < \infty$ podemos considerar otro tipo de espacios:
$$l^p = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\}$$
que junto con la aplicación:
$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall x \in l^p$$
forman un espacio de Banach (compruébese).
En dichos espacios, se tiene que si $x \in l^p$ y $y \in l^{p'}$, entonces $xy \in l$, con:
$$\|xy\| \leqslant \|x\|_p \|y\|_{p'}$$
- En el caso anterior, si $p = 2$, podemos definir la aplicación:
$$\langle x, y \rangle_2 = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \qquad \forall x, y \in l^2$$
Con lo que $(l^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ es un espacio de Hilbert.
- Al igual que sucedía con las normas $p-$ésimas en $\mathbb{R}^N$, podemos considerar:
$$l^\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ acotada}\}$$
junto con la aplicación $\| \cdot \| : l^\infty \to \mathbb{R}$ dada por:
$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$$
y obtenemos un espacio de Banach.
- $C = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ es convergente}\}$ es un subespacio de l^∞.
- $C_0 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ converge a } 0\}$ es un subespacio de C.

1.3. Espacio dual

Para introducir la nocíon de espacio dual, nos será necesario primero destacar unos resultados:

Proposición 1.8. *Si H es un espacio prehilbertiano, entonces:*

1. *Se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz:*
$$|\langle u, v \rangle| \leqslant \|u\| \|v\| \qquad \forall u, v \in H$$
2. *Se cumple la identidad del paralelogramo:*
$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\| + \left\| \frac{u-v}{2} \right\| = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2) \qquad \forall u, v \in H$$

Teorema 1.9 (de la Proyección)**.** *Sea H un espacio de Hilbert, sea $\emptyset \neq K \subset H$ un conjunto convexo y cerrado, entonces $\forall f \in H\ \exists_1 u \in K$ de forma que:*

$$\|f - u\| = d(f, K) = \text{ínf}\{d(f, v) : v \in K\}$$

Además, dicho elemento u está caracterizado por:

- $u \in K$.
- $\langle f - u, v - u\rangle \leqslant 0 \qquad \forall v \in K$.

Por tanto, a dicho único elemento u lo notaremos por $P_K f$.

Demostración. Como $0 \leqslant d(f, v)\quad \forall v \in K$, tenemos entonces que dicho ínfimo existe. Tenemos por tanto que existe $\{v_n\}$ una sucesión de elementos de K de forma que $\{d(f, v_n)\} \to d(f, K)$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y usando la identidad del paralelogramo con $f - v_n$ y $f - v_m$, tenemos:

$$\left\|\frac{f - v_n + f - v_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{f - v_n - (f - v_m)}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\right)$$
$$\left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{v_m - v_n}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\right)$$
$$\frac{\|v_m - v_n\|^2}{4} = \frac{1}{2}\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\right) - \left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2$$
$$\|v_m - v_n\|^2 = 2\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\right) - 4\left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2$$

Como K es convexo, tenemos que $\frac{v_n + v_m}{2} \in K$, por lo que:

$$\left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\| \geqslant d(f, K)$$

Por lo que:

$$0 \leqslant \|v_m - v_n\|^2 \leqslant 2(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - 4d(f, K)^2$$

Como $\{\|f - v_n\|^2\} \to d(f, K)^2$ y $\{\|f - v_m\|^2\} \to d(f, K)^2$, tenemos por el Lema del Sandwitch que $\{\|v_n - v_m\|^2\} \to 0$, por lo que $\{v_n\}$ es de Cauchy. Como H es completo, existe $u \in H$ de forma que $\{v_n\} \to u$, pero por ser K cerrado tendremos que $u \in K$.

Como $\{v_n\} \to u$, tenemos entonces que $\{d(f, v_n)\} \to d(f, v)$, pero $\{d(f, v_n)\}$ convergía también a $d(f, K)$. No queda más salida que $d(f, v) = d(f, K)$.

Una vez probada la existencia de u, veamos que:

$$u \in K \text{ con } \|f - u\| = d(f, K) \Longleftrightarrow u \in K \text{ y } \langle f - u, v - u\rangle \leqslant 0 \quad \forall v \in K$$

$\Longrightarrow$) Supongamos que $u \in K$ y sabemos que $\|f - u\| \leqslant \|f - v\|$ para todo $v \in K$. Tomamos ahora $w \in K$ y consideramos el segmento que une u con w. Entonces $\forall w \in K$ y $\forall t \in [0, 1]$, al ser K convexo tendremos que

$$(1 - t)u + tw \in K \quad \text{y} \quad \|f - u\|^2 \leqslant \|f - (1 - t)u - tw\|^2$$

Aplicando la bilinealidad podemos reescribir esta última expresión como

$$\begin{aligned}\|f-(1-t)u-tw\|^2 &= \langle f-(1-t)u-tw, f-(1-t)u-tw\rangle = \\ &= \|f-u\|^2+t^2\|w-u\|^2-2t(f-u,w-u)\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión que teníamos anteriormente nos queda que:

$$0 \leqslant t^2\|w-u\|^2 - 2t\langle f-u, w-u\rangle \quad \forall t\in(0,1]$$

Al dividir entre t nos queda

$$0 \leqslant t\|w-u\|^2 - 2\langle f-u, w-u\rangle \quad \forall t\in(0,1]$$

y tomando ahora el límite cuando t tiende a 0 por la derecha queda que

$$0 \leqslant -2\langle f-u, w-u\rangle \Rightarrow \langle f-u, w-u\rangle \leqslant 0 \qquad \forall w\in K$$

$\Longleftarrow)$

$$\|f-v\|^2 = \|f-u+u-v\|^2 = \|f-u\|^2+2\langle f-u,u-v\rangle+\|u-v\|^2 \qquad \forall v\in K$$

De donde:

$$0 \geqslant 2\langle f-u, v-u\rangle - \|u-v\|^2 = \|f-u\|^2 - \|f-v\|^2$$

Luego:

$$\|f-u\|^2 \leqslant \|f-v\|^2 \qquad \forall v\in K$$

Para probar finalmente la unicidad, supongamos que existen $u,w\in K$ de forma que:

$$\langle f-u, v-u\rangle, \langle f-w, v-w\rangle \leqslant 0 \qquad \forall v\in K$$

Entonces:

$$\langle f-u, w-u\rangle, \langle f-w, u-w\rangle = \langle u-f, w-u\rangle \leqslant 0$$

Por lo que:

$$\langle f-u, w-u\rangle + \langle w-f, w-u\rangle = \langle w-u, w-u\rangle \leqslant 0$$

de donde $\langle w-u, w-u\rangle = 0$, por lo que $\|w-u\|^2 = d(w,u)^2 = 0$, luego $w=u$. □

Proposición 1.10. *Dado $\emptyset \neq K\subset H$ un conjunto convexo y cerrado, tenemos que la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} P_K: & H & \longrightarrow & H \\ & f & \longmapsto & P_K f\end{array}$$

es lipschitziana. De hecho:

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leqslant \|f_1-f_2\| \qquad \forall f_1,f_2\in H$$

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in H$, $u_1 = P_K f_1$, $u_2 = P_K f_2$, estos verifican:

$$\langle f_1 - u_1, v - u_1 \rangle, \langle f_2 - u_2, v - u_2 \rangle \leqslant 0 \qquad \forall v \in K$$

Por lo que:

$$\langle f_1 - u_1, u_2 - u_1 \rangle \leqslant 0$$
$$\langle f_2 - u_2, u_1 - u_2 \rangle \leqslant 0 \Longrightarrow \langle f_2 - u_2, u_2 - u_1 \rangle \geqslant 0$$

De donde $\langle f_1 - u_2 - f_2 + u_2, u_2 - u_1 \rangle \leqslant 0$, por lo que:

$$\langle f_1 - f_2 + (u_2 - u_1), (u_2 - u_1) \rangle = \langle f_1 - f_2, u_2 - u_1 \rangle + \langle u_2 - u_1, u_2 - u_1 \rangle$$

Luego:

$$\|u_2 - u_1\|^2 = \langle u_2 - u_1, u_2 - u_1 \rangle \leqslant -\langle f_1 - f_2, u_2 - u_1 \rangle \overset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leqslant} \|f_1 - f_2\| \|u_2 - u_1\|$$

Por lo que:

$$\|u_2 - u_1\| \leqslant \|f_1 - f_2\|$$

Si $\|u_2 - u_1\| \neq 0$, cierto también si $\|u_2 - u_1\| = 0$. □

Pensemos ahora en un ejemplo de conjuntos convexos con propiedades interesantes, como lo son los espacios vectoriales:

Corolario 1.10.1 (Proyección Ortogonal)**.** *Sea $M \subset H$ un subespacio vectorial cerrado de H, un espacio de Hilbert, entonces:*

$$\forall f \in H \ \exists_1 u \in M \ \textit{tal que} \ \|f - u\| = d(f, M)$$

Además, la caracterización de u puede mejorarse por:

$$u \in M \qquad y \qquad \langle f - u, w \rangle = 0 \quad \forall w \in M$$

Demostración. Bajo las hipótesis de que M es un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert H, basta probar:

$$u \in M \wedge \langle f - u, v - u \rangle \leqslant 0 \quad \forall v \in M \Longleftrightarrow u \in M \wedge \langle f - u, w \rangle = 0 \quad \forall w \in M$$

$\Longleftarrow$) Si $v \in M$, tenemos por ser M un espacio vectorial que $v - u \in M$, de donde $\langle f - u, v - u \rangle = 0$, por lo que en particular es menor o igual que 0.

$\Longrightarrow$) Si tomamos $v \in M$ y $t \in \mathbb{R}^*$, como M es un espacio vectorial tendremos que $v/t \in M$, por lo que:

$$\left\langle f - u, \frac{v}{t} - u \right\rangle \leqslant 0 \qquad \forall v \in M, \forall t \in \mathbb{R}^*$$

- Si $t > 0$, entonces $\langle f - u, v - tu \rangle \leqslant 0 \ \forall v \in M$, de donde tomando límite cuando $t \to 0$, tenemos que $\langle f - u, v \rangle \leqslant 0 \ \forall v \in M$.
- Si $t < 0$, entonces $\langle f - u, v - tu \rangle \geqslant 0 \ \forall v \in M$, de donde tomando límite cuando $t \to 0$, tenemos que $\langle f - u, v \rangle \geqslant 0 \ \forall v \in M$.

En consecuencia, tenemos que $\langle f-u, v\rangle = 0 \ \forall v \in M$.

□

Proposición 1.11. *Sea $M \subset H$ un esubespacio vectorial cerrado de H, un espacio de Hilbert, la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} P_M: & H & \longrightarrow & H \\ & f & \longmapsto & P_M f \end{array}$$

es lineal.

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in H$, $u_1 = P_M f_1$, $u_2 = P_M f_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\langle \lambda f_1 + f_2 - (\lambda u_1 + u_2), w\rangle &= \langle \lambda f_1 - \lambda u_1 + f_2 - u_2, w\rangle \\ &= \lambda\langle f_1 - u_1, w\rangle + \langle f_2 - u_2, w\rangle = 0 \qquad \forall w \in M\end{aligned}$$

Por lo que por el Corolario anterior, tenemos que:

$$P_M(\lambda f_1 + f_2) = \lambda u_1 + u_2 = \lambda P_M(f_1) + P_M(f_2)$$

de donde P_M es lineal. □

Definición 1.8. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, definimos el espacio dual topológico de E por:

$$E^* = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ es lineal y continua}\}$$

Nos será necesaria la siguiente Proposición para comprender mejor las propiedades de las aplicaciones lineales. Más concretamente, la relación existente entre la acotación y la continuidad de una aplicación lineal.

Proposición 1.12. *Sea $T : E \to F$ una aplicación lineal entre dos espacios normados E y F, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\exists M \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\|T(x)\| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E$.

(2) T es lipschitziana.

(3) T es continua.

(4) T es continua en 0.

(5) T es acotada (es decir, si $A \subset E$ es acotado, entonces $T(A)$ es acotado).

(6) $T(\overline{B}(0,1))$ es acotado.

(7) $T(B(0,1))$ es acotado.

Demostración. Veamos la equivalencia entre todas ellas:

(1) $\Longleftrightarrow$ (2) Por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Sean $x, y \in E$, entonces $x - y \in E$, de donde:

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| \leqslant M\|x-y\|$$

Por lo que T es lipschitziana con constante de Lipschitz menor o igual que M.

$\Longleftarrow$) Sea $x \in E$, si M es mayor o igual que la constante de Lipschitz de T, entonces:

$$\|T(x)\| = \|T(2x - x)\| = \|T(2x) - T(x)\| \leqslant M\|2x - x\| = M\|x\|$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) Es conocida de Cálculo II.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Si T es continua, en particular lo es en 0.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Supuesto que T es continua en 0, es decir, que:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|T(x)\| < \varepsilon \ \forall x \in B(0, \delta)$$

Tomando $\varepsilon = 1$, la continuidad nos da un δ cumpliendo la afirmación anterior. Sea $x \in E$ arbitrario, tenemos:

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\frac{\delta}{2}\frac{2\|x\|}{\delta}\right)\right\| = \frac{2\|x\|}{\delta}\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\frac{\delta}{2}\right)\right\| < \frac{2}{\delta}\|x\|$$

Ya que $\dfrac{x\delta}{2\|x\|} \in B(0, \delta)$, por lo que tomando $M = \frac{2}{\delta}$ tenemos la implicación.

(5) $\Longrightarrow$ (6) Como $\overline{B}(0, 1)$ es acotado, $T(\overline{B}(0, 1))$ será acotado por ser T acotada.

(6) $\Longrightarrow$ (7) Como $B(0, 1) \subset \overline{B}(0, 1)$, entonces $T(B(0, 1)) \subset T(\overline{B}(0, 1))$.

(7) $\Longrightarrow$ (4) Si $\exists R \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\|T(x)\| \leqslant R$ para todo $x \in B(0, 1)$, dado $\varepsilon > 0$, si tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2R}$, si $x \in B(0, \delta)$, entonces:

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\frac{x}{2\|x\|}2\|x\|\right)\right\| = 2\|x\| \left\| T\left(\frac{x}{2\|x\|}\right)\right\| \leqslant 2\|x\|R < 2\delta R = \varepsilon$$

(1) $\Longrightarrow$ (5) Sea $A \subset E$ acotado, entonces $\exists r \in \mathbb{R}^+$ de forma que $A \subset B(0, r)$, por lo que:

$$\|T(x)\| \leqslant M\|x\| \leqslant Mr \qquad \forall x \in A$$

De donde $T(A) \subset B(0, Mr)$, por lo que es un conjunto acotado.

□

Proposición 1.13. *Sea E un espacio normado, observemos que E^* es un espacio vectorial, sobre el que definimos la aplicación $\|\cdot\| : E^* \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \qquad \forall f \in E^*$$

Se verifica que:

1. *$(E^*, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.*

2. *$(E^*, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.*

3. *Sea $f \in E^*$, entonces:*

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

4. *Sea $f \in E^*$, entonces:*

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \|f\| = \inf\{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E\}$$

Demostración. Veamos cada una de las propiedades:

1. Para la primera, hemos de probar:

   - **No degeneración.** Sea $f \in E^*$ de forma que $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \|f\| = 0$, entonces:

     $$0 \leqslant \|f(x)\| \leqslant 0 \quad \forall x \in \overline{B}(0,1) \Longrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

     de donde:

     $$f(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\|x\|\right) = \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0 \qquad \forall x \in E$$

     Por lo que $f = 0$.

   - **Homogeneidad por homotecias.** Sea $f \in E^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}A$:

     $$\|\lambda f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\lambda f(x)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\lambda||f(x)| = |\lambda| \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = |\lambda|\|f\|$$

   - **Desigualdad triangular.** Sean $f, g \in E^*$:

     $$\begin{aligned}\|f+g\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)+g(x)| &\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} (|f(x)|+|g(x)|) \\ &\leqslant \sup_{\|x\|\leqq 1} |f(x)| + \sup_{\|x\|\leqslant 1} |g(x)| = \|f\| + \|g\|\end{aligned}$$

2. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de E^*, sean $\varepsilon, r > 0$, la condición de Cauchy para ε/r nos da $m \in \mathbb{N}$ de forma que si $p, q \geqslant m$, entonces:

   $$\sup_{\|x\|\leqslant 1} |f_p(x) - f_q(x)| = \|f_p - f_q\| < \frac{\varepsilon}{r}$$

   de donde:

   $$|f_p(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{r} \qquad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

   pero entonces:

   $$|f_p(rx) - f_q(rx)| = r|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

   lo que equivale a que:

   $$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in \overline{B}(0,r)$$

Por tanto, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy para todo $x \in \overline{B}(0,r)$, pero como r era arbitrario, dicha condición se cumple para todo $r \in \mathbb{R}^+$, tenemos que $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy para todo $x \in E$. Como $\mathbb{R}$ es completo, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es convergente para todo $x \in E$, lo que nos permite definir $f : E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \text{lím}\{f_n(x)\} \qquad \forall x \in E$$

Se verifica que f es lineal, ya que:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= \text{lím}\{f_n(\lambda x + y)\} = \text{lím}\{\lambda f_n(x) + f_n(y)\} \\ &= \lambda\, \text{lím}\{f_n(x)\} + \text{lím}\{f_n(y)\} = \lambda f(x) + f(y) \\ &\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E \end{aligned}$$

Ahora, como $\{f_n\}$ era de Cauchy, tenemos que fijado $r \in \mathbb{R}^+$ y dado $\varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ de forma que para $p, q \geqslant m$ se tiene:

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in \overline{B}(0,r)$$

Fijado ahora dicho p, tenemos:

$$|f_p(x) - f(x)| = \lim_{q\to\infty} |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por lo que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $B(0,r)$, para todo $r \in \mathbb{R}^+$. En particular, $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en cada conjunto acotado de E. Como $\{f_n\}$ es continua $\forall n \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in E$ tenemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $B(x,1)$, entonces tenemos que f es continua en x, de donde f es continua en E. En consecuencia, $f \in E^*$.

Por último, para ver que $\{f_n\}$ converge a f, dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geqslant m$, entonces:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

de donde:

$$\|f_n - f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por lo que $\{f_n\} \to f$.

3. La desigualdad $\geqslant$ es obvia. Para la otra, sea $x \in B(0,1)$:

$$|f(x)| = \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \|x\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} |f(x)|\|x\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

4. Buscamos probar que:

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \text{ínf}\{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E\}$$

$\geqslant$) Para ver que el supremo es mayor o igual que el ínfimo, veamos que el supremo pertence al conjunto de la derecha:

$$|f(x)| = \|x\| \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \leqslant \|x\| \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)|$$

Por tanto, $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| \in \{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E\}$.

$\leqslant$) Para ver el el ínfimo es mayor o igual que el supremo, veamos que el ínfimo es un mayorante del conjunto de la izquierda, si tomamos:

$$M_0 = \text{ínf}\{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E\}$$

entonces:

$$|f(x)| \leqslant M\|x\| \leqslant M \qquad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

Por lo que M_0 es un mayorante de $\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1\}$, por lo que es mayor o igual que su supremo.

□

1.3.1. Espacio dual de un espacio de Hilbert

Proposición 1.14. *Se verifica que si $v \in H$, entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_v : & H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \langle u, v\rangle \end{array}$$

verifica que $\varphi_v \in H^*$ y en cuyo caso, $\|\varphi_v\| = \|v\|$.

Más aún, podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & H & \longrightarrow & H^* \\ & v & \longmapsto & \varphi_v \end{array}$$

que es una aplicación lineal e inyectiva.

Demostración. Como el producto escalar es bilineal es evidente que φ_v es lineal. Vemos que:

$$|\varphi_v(u) - \varphi_v(w)| = |\langle u, v\rangle - \langle w, v\rangle| = |\langle u - w, v\rangle| \leqslant \|u - w\|\|v\| \qquad \forall u, w \in E$$

Por lo que φ_v es lipschitziana, y por la última Proposición tenemos que $\|\varphi_v\| \leqslant \|v\|$. Si $v = 0$ tenemos la igualdad de forma obvia y si $v \neq 0$, entonces:

$$\|v\| = \frac{\|v\|}{\|v\|^2} = \frac{\langle v, v\rangle}{\|v\|} = \left\langle \frac{v}{\|v\|}, v \right\rangle = \varphi_v\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$$

luego:

$$\|v\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \|\varphi_v\|$$

Para ver que Φ es lineal, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u, v \in H$:

$$\Phi(\lambda u + v) = \varphi_{\lambda u + v} \stackrel{?}{=} \lambda\varphi_u + \varphi_v = \lambda\Phi(u) + \Phi(v)$$

donde la igualdad puede demostrarse por:

$$\varphi_{\lambda u+v}(w) = \langle w, \lambda u + v\rangle = \langle w, \lambda u\rangle + \langle w, v\rangle = \lambda\langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle = \lambda\varphi_u(w) + \varphi_v(w)$$

Como $\|\varphi_v\| = \|v\|$, obtenemos de forma inmediata la continuidad de Φ, por ser una isometría.

Para ver que Φ es inyectiva, supongamos que $u, v \in H$ con $\Phi(u) = \Phi(v)$, de donde:

$$\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle \qquad \forall w \in H$$

Luego:

$$\langle u, w\rangle - \langle v, w\rangle = \langle u - v, w\rangle = 0 \qquad \forall w \in H$$

En particular, tomando $w = u - v$, tenemos que:

$$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v\rangle = 0$$

Por lo que $u = v$, de donde Φ es inyectiva. □

Teorema 1.15 (de Riesz-Fréchet, Representación del dual de un Hilbert)**.**
Sea H un espacio de Hilbert, $\forall \varphi \in H^*$ $\exists_1 v \in H$ de forma que:

$$\varphi(u) = \langle u, v\rangle \qquad \forall u \in H$$

y además:

$$\|\varphi\| = \|v\|$$

Demostración. Si conseguimos probar la primera parte del Teorema, la segunda la tendremos ya probada gracias a la Proposición anterior. Sea por tanto $f \in H^*$, si $f = 0$ tomando $v = 0$ se tiene la tesis. Suponemos por tanto que $f \neq 0$, por lo que $M = f^{-1}(\{0\}) \subsetneq H$ es un espacio vectorial de H distinto del trivial. Como f es continua, tenemos además que M es un conjunto cerrado.

Como $M \subsetneq H$, podemos tomar $z_o \in H \setminus M$. Por el Teorema de la Proyección Ortogonal, tomamos $z_1 = P_M z_0 \in M$, que verifica:

$$\langle z_0 - z_1, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in M$$

Como $z_0 \in H \setminus M$ y $z_1 \in M$, tenemos que $z_0 \neq z_1$, lo que nos permite definir:

$$z = \frac{z_0 - z_1}{\|z_0 - z_1\|}$$

Con esta definición, es claro que $\|z\| = 1$, así como que:

$$\langle z, v\rangle = \frac{1}{\|z_0 - z_1\|}\langle z_0 - z_1, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in M$$

Como $z_0 \notin M$ la situación $z \in M$ es imposible, por lo que $z \notin M$, luego $f(z) \neq 0$. Veamos ahora que:

$$x - \frac{f(x)}{f(z)} z \in M \qquad \forall x \in H$$

ya que:

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)}f(z) = 0$$

Por lo que tenemos que:

$$\left\langle z, x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right\rangle = 0$$

Pero tenemos:

$$0 = \left\langle z, x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right\rangle = \langle z, x\rangle - \frac{f(x)}{f(z)}\langle z, z\rangle = \langle z, x\rangle - \frac{f(x)}{f(z)}\|z\|^2$$

Por lo que podemos despejar $f(x)$, obteniendo:

$$f(x) = f(z)\langle z, x\rangle = \langle x, zf(z)\rangle \qquad \forall x \in H$$

En consecuencia, tomando $v = zf(z)$ tenemos la existencia probada.

Para la unicidad, supongamos que $\exists v, w \in H$ de forma que:

$$\langle x, v\rangle = f(x) = \langle x, w\rangle \qquad \forall x \in H$$

En consecuencia:

$$\langle x, v - w\rangle = 0 \qquad \forall x \in H$$

Luego si tomamos $x = v - w$:

$$\|v - w\|^2 = \langle v - w, v - w\rangle = 0$$

Por lo que $v = w$. $\square$

A partir del Teorema anterior tenemos que $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$, l^2 y $L^2(\Omega)$ son todos isomorfos a sus duales.

Ejercicio 1.3.1. Calcular el dual de $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$, para $p > 1$, $p \neq 2$.

Ejercicio 1.3.2. Encontrar una relación entre los duales de $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_1)$ y $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$.

Ejercicio 1.3.3. Calcular el dual de l^p, para $p > 1$, $p \neq 2$.

1.4. Teorema de Hahn Banach

El siguiente Teorema tiene la utildad de probar que $E^* \neq \{0\}$ para E un espacio normado. Si tenemos un espacio normado E de dimensión finita, es fácil pensar una aplicación lineal y continua $f : E \to \mathbb{R}$, pero en dimensión infinita el problema se complica. Uno de los muchos usos del Teorema de Hahn Banach, que estudiaremos a continuación, es el de justificar que $E^* \neq \{0\}$; sin embargo, el Teorema tiene muchas más utilidades. Con el fin de explorar más utilidades del Teorema de Hahn Banach, formularemos la pregunta de $E^* \neq \{0\}$ de la siguiente forma:

Problema
Sea E un espacio de Banach, $G \subset E$ un subespacio suyo y $g : G \to \mathbb{R}$ lineal y

continua, ¿podemos garantizar entonces que existe $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $f\big|_G = g$?

Como ya vimos en la Proposición 1.12, que g sea continua significa que $\exists k \in \mathbb{R}^+$ de forma que $|g(x)| \leqslant k\|x\|$ $\forall x \in G$. Para resolver el problema, necesitamos encontrar una aplicación $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y $k' \in \mathbb{R}^+$ de forma que:

$$|f(x)| \leqslant k'\|x\| \qquad \forall x \in E$$

Ejercicio 1.4.1. Sea $p : (E, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$p(x) = k\|x\| \qquad \forall x \in E$$

Demostrar que la función p verifica:

- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E.$
- $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E.$

Demostración. Sean $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$:

$$p(x + y) = k\|x + y\| \leqslant k(\|x\| + \|y\|) = k\|x\| + k\|y\| = p(x) + p(y)$$
$$p(\lambda x) = k\|\lambda x\| = \lambda k\|x\| = \lambda p(x)$$

□

Aunque no lo demostraremos, el Teorema de Hahn Banach resulta ser equivalente al axioma de elección. Para realizar la demostración del Teorema de Hahn Banach es necesario usar el Lema de Zorn, por lo que conviene realizar un breve repaso del mismo.

Lema de Zorn

Definición 1.9. Sea $\emptyset \neq P$ un conjunto con una relación $\leqslant$ de orden, es decir, una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, decimos que:

- Un subconjunto $Q \subset P$ es <u>totalmente ordenado</u> si:

$$\forall a, b \in Q \Longrightarrow a \leqslant b \ \vee \ b \leqslant a$$

- Si $Q \subset P$ y $x \in P$, decimos que x es una <u>cota superior</u> de Q si y solo si:

$$a \leqslant x \qquad \forall a \in Q$$

- Si $m \in P$, decimos que m es un <u>elemento maximal</u> de P si y solo si:

$$\{x \in P : m \leqslant x\} = \{m\}$$

- Diremos que P es <u>inductivo</u> si todo subconjunto $Q \subset P$ que sea totalmente ordenado posee una cota superior.

Lema 1.16 (de Zorn)**.** *Si P es un conjunto no vacío con una relación de orden $\leqslant$ y P es inductivo, entonces P tiene un elemento maximal.*

Teorema 1.17 (de Hahn-Banach, versión analítica)**.** *Sea E un espacio vectorial, sea $p : E \to \mathbb{R}$ una aplicación verificando:*

- $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E.$
- $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in E.$

Sea $G \subset E$ un subespacio vectorial y $g : G \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que

$$g(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in G$$

Entonces, $\exists f : E \to \mathbb{R}$ lineal de forma que:

1. $f(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in E.$
2. $f\big|_G = g.$

Demostración. Nos definimos el conjunto P de todas aquellas aplicaciones lineales h que tienen por dominios subespacios vectoriales de E que contienen a G de forma que $h\big|_G = g$ y que cumplen la desigualdad $h(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in D(h)$ (donde $D(h)$ denota el dominio de h); es decir:

$$P = \left\{ h : D(h) \to \mathbb{R} : \begin{array}{l} G \subset D(h) \text{ subespacio vectorial de } E \\ h \text{ lineal y } h(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in D(h) \\ h(x) = g(x) \quad \forall x \in G \end{array} \right\}$$

Tendremos entonces en P todas aquellas alicaciones lineales que son extensiones de g y que cumplen la condición de ser menores o iguales que p. Buscamos aplicar el Lema de Zorn sobre P, obteniendo un elemento maximal que luego probaremos que ha de tener como dominio E.

Hemos pues de definir una relación de orden en P que nos permita conseguir lo que queremos. Para ello, definiremos la relación $\leqslant$ de la siguiente forma:

$$h_1 \leqslant h_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D(h_1) \subset D(h_2) \\ h_2\big|_{D(h_1)} = h_1 \end{array} \right. \qquad \forall h_1, h_2 \in P$$

es decir, $h_1 \leqslant h_2$ si h_2 es una extensión de h_1. Podemos comprobar que esta efectivamente es una relación de orden en P:

- **Reflexiva.** Si $h \in P$, trivialmente tenemos que $D(h) \subset D(h)$ y $h\big|_D(h) = h$, lo que nos dice que $h \leqslant h$.
- **Antisimétrica.** Sean $h_1, h_2 \in P$ de forma que $h_1 \leqslant h_2$ y $h_2 \leqslant h_1$, entonces:

  $$D(h_1) \subset D(h_2) \;\wedge\; D(h_2) \subset D(h_1) \Longrightarrow D(h_1) = D(h_2)$$

  Y de esta condición junto con $h_2 = h_2\big|_{D(h_2)} = h_2\big|_{D(h_1)} = h_1$ concluimos que $h_2 = h_1$.

- **Transitiva.** Si $h_1, h_2, h_3 \in P$ con $h_1 \leqslant h_2$ y $h_2 \leqslant h_3$, tenemos entonces que $D(h_1) \subset D(h_2)$ y que $D(h_2) \subset D(h_3)$. La transitividad de $\subset$ nos dice que $D(h_1) \subset D(h_3)$. Ahora, si tenemos que $h_3\big|_{D(h_2)} = h_2$ y que $h_2\big|_{D(h_1)} = h_1$, obtenemos que:
$$h_3\big|_{D(h_1)} = h_2\big|_{D(h_1)} = h_1$$
De donde $h_1 \leqslant h_3$.

Tratemos ahora de probar que P es inductivo. Para ello, sea $Q \subset P$ un subconjunto totalmente ordenado, para buscar una cota superior consideraremos:

$$V_0 = \bigcup_{h\in Q} D(h)$$

Vemos que V_0 es un subespacio vectorial de E, ya que si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in V_0$, tenemos entonces que $\exists h, h' \in Q$ de forma que $u \in D(h), v \in D(h')$. Como Q es totalmente ordenado, tendremos entonces que $h \leqslant h'$ o que $h' \leqslant h$. Supondremos sin pérdida de generalidad que $h \leqslant h'$, lo que nos dice que $D(h) \subset D(h')$, por lo que $u \in D(h')$ y como $D(h')$ es un subespacio vectorial de E, tenemos entonces que:

$$\alpha u + v \in D(h') \subset V_0$$

Una vez salvada esta cuestión, definimos $h_0 : V_0 \to \mathbb{R}$ por:

$$h_0(x) = h(x) \qquad \text{si } x \in D(h)$$

que está bien definida, ya que si $x \in D(h_1) \cap D(h_2)$, sucederá bien $h_1 \leqslant h_2$ bien $h_2 \leqslant h_1$, luego suponiendo que $h_1 \leqslant h_2$, tendremos que $h_2\big|_{D(h_1)} = h_1$, luego se cumplirá $h_1(x) = h_2(x)$. Además h_0 es lineal, ya que si $x, y \in V_0$, por ser V_0 espacio vectorial tendremos que $x + y \in V_0$, de donde $\exists h, h', h'' \in Q$ de forma que $x \in D(h)$, $y \in D(h')$, $x + y \in D(h'')$, con lo que:

$$h_0(x + y) = h''(x + y) = h''(x) + h''(y) = h(x) + h'(y) = h_0(x) + h_0(y)$$

Y finalmente es claro que $h_0(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in V_0$, puesto que si $x \in V_0$, entonces $\exists h \in Q$ de forma que $x \in D(h)$, con lo que:

$$h_0(x) = h(x) \leqslant p(x)$$

En definitiva, tenemos que h_0 es una aplicación lineal extensión de g que cumple $h(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in V_0$ y con V_0 un subespacio vectorial de E que contiene a G, con lo que $h_0 \in P$ y además tenemos que $h \leqslant h_0$ $\forall h \in Q$, por lo que h_0 es una cota superior de Q, de donde tenemos que P es inductivo. Por el Lema de Zorn, existe $f \in P$ elemento maximal de P.

Para concluir la demostración del Teorema, nos falta probar que si f es un elemento maximal de P entonces $D(f) = E$. Para ello, supongamos por reducción al absurdo que fuese $D(f) \subsetneq E$, luego existe $x_0 \in E \setminus D(f)$. Si consideramos[3]:

$$D(f) \oplus \mathbb{R}x_0$$

[3]Aquí hemos usado $\mathbb{R}x_0 := \{x_0 r : r \in \mathbb{R}\}$, que es un subespacio vectorial de E de dimensión 1.

Tenemos que si $v \in D(f) \oplus \mathbb{R}x_0$, entonces v se escribe como $v = x + tx_0$, con $x \in D(f)$ y $t \in \mathbb{R}$, lo que nos permite definir $\hat{f} : D(f) \oplus \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\hat{f}(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$$

Siendo α un número real que por ahora no concretaremos (puesto que necesitamos buscar luego una condición sobre α para garantizar que $\hat{f} \in P$). Veamos que $\hat{f} \in P$:

- Es automático que $\hat{f}\big|_{D(f)} = f$.
- $D(f) \oplus \mathbb{R}x_0$ es un subespacio vectorial de E que contiene a G.
- Es fácil ver que $\hat{f}$ es lineal, ya que si $x, y \in D(f)$ y $t, t' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x + tx_0 + y + t'x_0) &= \hat{f}((x + y) + (t + t')x_0) = f(x + y) + (t + t')\alpha \\ &= f(x) + f(y) + t\alpha + t'\alpha = \hat{f}(x + tx_0) + \hat{f}(y + t'x_0)\end{aligned}$$

- Tenemos que ver finalmente que

$$\hat{f}(x + tx_0) \leqslant p(x + tx_0) \qquad \forall x \in D(f), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

  que sucede si y solo si:

$$t\hat{f}(z + x_0) = \hat{f}(tz + tx_0) \leqslant p(tz + tx_0) = p(t(z + x_0)) \qquad \forall z \in D(f), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

  - En el caso $t = 0$ la desigualdad es obvia.
  - Si $t > 0$, tenemos que:

$$t(f(z) + \alpha) = t\hat{f}(z + x_0) \leqslant p(t(z + x_0)) = tp(z + x_0) \qquad \forall z \in D(f)$$

    que es equivalente a

$$\alpha \leqslant -f(z) + p(z + z_0) \qquad \forall z \in D(f)$$

  - Si $t < 0$, tenemos:

$$-t(-f(z)-\alpha) = -t\hat{f}(-z-x_0) = t\hat{f}(z+x_0) \leqslant p(t(z+x_0)) = -tp(-z-x_0) \quad \forall z \in D(f)$$

    que es equivalente a

$$-f(z) - p(-z - x_0) \leqslant \alpha \qquad \forall z \in D(f)$$

  En definitiva, ver (1.1) es equivalente a ver que:

$$\sup\{f(-z) - p(-z - x_0) : z \in D(f)\} \leqslant \alpha \leqslant \inf\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

  que a su vez equivale a:

$$\sup\{f(w) - p(w - x_0) : w \in D(f)\} \leqslant \alpha \leqslant \inf\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

Por tanto, si probamos que el supremo de la izquierda es menor o igual que el ínfimo de la derecha, elegiendo α cualquier valor real comprendido entre ambos (o incluso igual al supremo o al ínfimo) habremos construido una aplicación $\hat{f}$ que cumple con los tres puntos anteriores y con la condición (1.1), que es la condición que veníamos buscando.

Para demostrar la desigualdad entre supremo e ínfimo, basta observar que para $z, w \in D(f)$ se verifica:

$$f(z)+f(w) = f(z+w) \leqslant p(z+w) = p(z+x_0-x_0+w) \leqslant p(z+x_0)+p(w-x_0)$$

y despejando llegamos a que:

$$f(w) - p(w - x_0) \leqslant -f(z) + p(z + x_0) \qquad \forall z, w \in D(f)$$

Lo que demuestra que:

$$\sup\{f(-z) - p(-z - x_0) : z \in D(f)\} \leqslant \text{ínf}\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

Como hemos comentado anteriormente, tomando por ejemplo:

$$\alpha = \sup\{f(-z) - p(-z - x_0) : z \in D(f)\} \in \mathbb{R}$$

en la definición de $\hat{f}$ nos garantiza la condición (1.1), que junto con las otras condiciones nos dice que $\hat{f} \in P$. Además, por la definición de $\hat{f}$ es claro que $f \leqslant \hat{f}$, donde f era un elemento maximal de P. Hemos llegado a una contradicción, que venía de suponer que $D(f) \subsetneq E$, por lo que $D(f)$ ha de ser igual a E, luego hemos encontrado la aplicación que el Teorema enunciaba, lo que concluye la demostración.

□

Volviendo al caso que nos interesaba, tenemos ya respuesta al Teorema anteriormente planteado:

Corolario 1.17.1. *Sea E un espacio vectorial, $G \subset E$ un subespacio vectorial suyo y $g : G \to \mathbb{R}$ lineal y continua, existe entonces $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua de forma que $f\big|_G = g$. Además:*

$$\|f\| = \|g\|$$

Demostración. Como g es una aplicación lineal y continua, si recordamos que:

$$\|g\| = \text{ínf}\{M > 0 : |g(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in G\}$$

Si definimos $p : E \to E$ dada por $p(x) = \|g\|\|x\|$ para $x \in E$, vimos en el Ejercicio 1.4.1 que p verificaba:

- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E$
- $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E$

y la condición que hemos expresado arriba nos dice que $g(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in G$. Aplicando el Teorema de Hahn Banach, tenemos que existe una aplicación $f : E \to \mathbb{R}$ lineal que verifica:

- $f\big|_G = g$
- $f(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in E$

falta ver que f es continua para acabar la demostración. Para ello, observemos que la condición $f(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in E$ implica:

$$-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x) = \|g\|\|-x\| = \|g\|\|x\| = p(x) \qquad \forall x \in E$$

Por lo que tenemos que $|f(x)| \leqslant \|g\|\|x\| \quad \forall x \in E$, y vimos en la Proposición 1.12 que esta condición para una aplicación lineal era equivalente a que la aplicación sea continua. Además, la desigualdad superior implica que $\|f\| \leqslant \|g\|$. Si notamos ahora que:

$$|g(x)| = |f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \qquad \forall x \in G$$

Deducimos entonces que $\|g\| \leqslant \|f\|$, por lo que $\|f\| = \|g\|$. □

Corolario 1.17.2. *Sea E un espacio vectorial, $\forall x_0 \in E$ $\exists f_0 \in E^*$ de forma que:*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad y \quad f_0(x_0) = \|x_0\|^2$$

Demostración. Si $x_0 = 0$, tomando $f_0 = 0$ se tiene. Suponemos por tanto que $x_0 \neq 0$. Sea $G = \mathbb{R}x_0$, defino $g : G \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(tx_0) = t\|x_0\|^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

es fácil ver que g es lineal. Definimos $p : E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$p(y) = \|y\|\|x_0\| \qquad \forall y \in E$$

Veamos que cumple las propiedades de la p del Teorema:

- Si $\lambda > 0$, entonces:

$$p(\lambda y) = \|\lambda y\|\|x_0\| = \lambda\|y\|\|x_0\| = \lambda p(y) \qquad \forall y \in E$$

- Ahora:

$$p(y_1 + y_2) = \|y_1 + y_2\|\|x_0\| \leqslant \|y_1\|\|x_0\| + \|y_2\|\|x_0\| = p(y_1) + p(y_2) \qquad \forall y_1, y_2 \in E$$

Vemos ahora que p domina a g:

- Si $t \geqslant 0$, entonces $g(tx_0) = t\|x_0\|^2 = p(tx_0)$.
- Si $t < 0$, entonces $g(tx_0) = t\|x_0\|^2 < 0 \leqslant p(tx_0)$.

Es decir, $g(tx_0) \leqslant p(tx_0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Aplicando el Teorema de Hahn Banach vemos que $\exists f : E \to \mathbb{R}$ de forma que $f\big|_G = g$ y $f(y) \leqslant p(y) \quad \forall y \in E$.

Vemos fácilmente que f es continua, por estar dominada por la función p, luego $f \in E^*$.

- $f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|^2$.
- Como $f(y) \leqslant \|x_0\|\|y\| \quad \forall y \in E$, cambiando y por $-y$ conseguimos:

$$|f(y)| \leqslant \|x_0\|\|y\|$$

De donde $\|f\| \leqslant \|x_0\|$. Si ahora vemos:

$$f(x_0) = \|x_0\|^2 = \|x_0\|\|x_0\|$$

deducimos que $\|f\| = \|x_0\|$.

□

Corolario 1.17.3. *Para todo $x \in E$ se tiene que:*

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in E^*, \|f\| \leqslant 1\} = \text{máx}\{|f(x)| : f \in E^*, \|f\| \leqslant 1\}$$

Demostración. Si $x = 0$, cualquier aplicación lineal cumple $f(0) = 0$, luego es obvio el resultado. Supuesto que $x_0 \in E \setminus \{0\}$, dada $f \in E^*$ con $\|f\| \leqslant 1$, tenemos entonces que:

$$|f(x_0)| \leqslant \|f\|\|x_0\| \leqslant \|x_0\| \Longrightarrow \|x_0\| \geqslant \sup\{|f(x_0)| : f \in E^*, \|f\| \leqslant 1\}$$

Por el Corolario anterior, para x sabemos que $\exists f_0 \in E^*$ de forma que:

$$\|f_0\| = \|x_0\|, \qquad f_0(x_0) = \|x_0\|^2$$

Si tomamos $f = {}^{f_0}/_{\|x_0\|}$, tenemos entonces que:

$$\|f\| = \left\| \frac{f_0}{\|x_0\|} \right\| = \frac{\|f_0\|}{\|x_0\|} = 1$$

Y además:

$$f(x_0) = \frac{f(x_0)}{\|x_0\|} = \frac{\|x_0\|^2}{\|x_0\|} = \|x_0\|$$

Por lo que el supremo se alcanza, luego es un máximo. □

1.4.1. Versiones geométricas del Teorema

Aunque no lo demsotraremos, las sucesivas versiones geométricas del teorema de Hahn Banach son equivalentes a la ya vista. Para realizar la formulación del Teorema será necesario tener claros ciertos conceptos:

Definición 1.10 (Hiperplano afín)**.** Sea E un espacio vectorial, un hiperplano afín de E es un subconjunto $H \subset E$ de la forma:

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$$

donde $f : E \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal no nula y $\alpha \in \mathbb{R}$. En dicho caso, escribiremos $H = [f = \alpha]$.

Observación. Cuando trabajábamos en asignaturas anteriores en espacios vectoriales de dimensión finita (digamos n), para nosotros un hiperplano era un subespacio vectorial de dimensión $n-1$. Ahora, si nos encontramos en un espacio vectorial E genérico (no necesariamente de dimensión finita), el primer Teorema de Isomorfía de aplicaciones lineales aplicado a f nos da el isomorfismo lineal

$$E/\ker f \cong \mathrm{Im} f$$

Como f era lineal, ha de ser obligatoriamente dim $\mathrm{Im} f = 1$. Observemos que en el caso $H = [f = 0] = \ker f$, tenemos que $\dim(E/H) = 1$, de donde si E es de dimensión finita, tenemos $\dim H = \dim E - 1$. Si consideramos ahora $H = [f = \alpha]$ con $\alpha \neq 0$, tenemos que:

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\} = \{x + v : x \in E, v \in \ker f, f(x) = \alpha\}$$

Por lo que podemos ver H como un trasladado de $\ker f$, como un hiperplano afín.

Observación. Notemos además que si $f : E \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal y continua, entonces el hiperplano $H = [f = \alpha]$ para cierto $\alpha \in \mathbb{R}$ es un hiperplano cerrado.

La condición que nos va a interesar es buscar bajo qué condiciones cuando nos dan dos subconjuntos de un espacio normado vamos a poder separarlos mediante un hiperplano afín. Para ello, es necesario formalizar la idea de "separar dos subconjuntos de un espacio".

Definición 1.11. Sea E un espacio vectorial, $A, B \subset E$, diremos que el hiperplano $H = [f = \alpha]$ separa A y B si:

$$f(x) \leqslant \alpha \leqslant f(y) \qquad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

Además, diremos que la separación es estricta (o que H separa estrictamente A y B) si $\exists \varepsilon > 0$ de forma que:

$$f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leqslant f(y) \qquad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

Teorema 1.18 (Hahn Banach, primera versión geométrica)**.** *Sea E un espacio normado, $\emptyset \neq A, B \subset E$ con $A \cap B = \emptyset$, ambos convexos y A abierto, entonces existe un hiperplano cerrado*[4] *$H = [f = \alpha]$ que separa A y B.*

Demostración. El Teorema se demuestra en dos pasos:

Paso 1. Supongamos en una versión más débil que B se reduce a un punto, es decir, existe $x_0 \in E$ de forma que $B = \{x_0\}$ y que $A \subset E$ es un conjunto abierto y convexo de forma que $x_0 \notin A$.

Elegimos $z_0 \in A$ y definimos $C = A - z_0$, que:

- Contiene al 0, ya que como $z_0 \in A$, entonces $0 = z_0 - z_0 \in C$.

[4]Luego habrá una aplicación lineal y contina $f : E \to \mathbb{R}$, por lo que $E^* \neq \{0\}$.

- Es abierto, ya que si consideramos la traslación según el vector z_0:

$$\begin{array}{rccc} t_{z_0}: & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x + z_0 \end{array}$$

tenemos que t_{z_0} es una aplicación continua, con inversa $t_{z_0}^{-1} = t_{-z_0}$. Como $C = t_{-z_0}(A) = t_{z_0}^{-1}(A)$ y tenemos que A era abierto y t_{z_0} una aplicación continua, concluimos que C es abierto.

- Es convexo, ya que si $x, y \in C = A - z_0$ tenemos entonces que existen $u, v \in A$ de forma que:

$$x = u - z_0, \qquad y = v - z_0$$

Si tomamos $t \in [0, 1]$, entonces:

$$tx + (1-t)y = t(u - z_0) + (1-t)(v - z_0) = \underbrace{tu + (1-t)v}_{\in A} - z_0 \in C$$

El punto $y_0 = x_0 - z_0 \notin C$, de donde $y_0 \neq 0$. Por lo que $\mathbb{R}y_0$ es un subespacio vectorial de E de dimensión 1. Definimos $G = \mathbb{R}y_0$ y tomamos

$$\begin{array}{rccc} g: & G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ty_0 & \longmapsto & t \end{array}$$

que es una aplicación lineal (compruébese) y verificando $g(y_0) = 1$. La función g nos permitirá "separar el corte de C con G y el punto y_0". En este punto conviene estudiar el funcional de Minkoski del conjunto C, que se define en la Definición 1.12 y cuyas propiedades se aclaran en la Proposición 1.19. Sea p el funcional de Minkoski de C, veamos que p domina a g:

- Si $t \geqslant 0$, como $y_0 \notin C$ entonces[5] $p(y_0) \geqslant 1$, de donde:

$$g(ty_0) = t \leqslant tp(y_0) \overset{(1)}{=} p(ty_0)$$

- Si $t < 0$, tenemos que:

$$g(ty_0) = t < 0 \leqslant p(ty_0)$$

En cualquier caso, $g(ty_0) \leqslant p(ty_0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Nos encontramos en las hipótesis del Teorema de Hahn-Banach, por lo que podemos encontrar $f : E \to \mathbb{R}$ lineal de forma que:

$$f\big|_G = g \qquad \text{y} \qquad f(y) \leqslant p(y) \quad \forall y \in E$$

La propiedad 2 del funcional nos dice que $\exists M > 0$ de forma que:

$$f(y) \leqslant p(y) \leqslant M\|y\| \qquad \forall y \in E$$

Si aplicamos esta propiedad para $-y$:

$$-f(y) = f(-y) \leqslant M\|-y\| = M\|y\|$$

[5]Usando la propiedad 3 del funcional.

De donde:

$$|f(y)| \leqslant M\|y\| \qquad \forall y \in E$$

Como f es lineal, la Proposición 1.12 nos dice que f es continua.

Si ahora usamos la propiedad 3 del funcional de Minkoski, observamos que:

$$f(x) \leqslant p(x) < 1 = f(y_0) \qquad \forall x \in C$$

por lo que el hiperplano cerrado $H' = [f = 1]$ separa C y $B' = \{y_0\}$.

Si volvemos al problema de separar A y $B = \{x_0\}$, observamos que:

$$f(x) = f(y + z_0) = f(y) + f(z_0) \leqslant 1 + f(z_0) = f(y_0 + z_0) = f(x_0) \qquad \forall x \in A$$

Por lo que el hiperplano cerrado $H = [f = f(x_0)]$ separa A y $B = \{x_0\}$, como queríamos probar en este primer paso.

Paso 2. Volviendo al caso que nos plantea el Teorema siendo B un conjunto convexo y disjunto de A, tomamos:

$$A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$$

Observemos que:

- $0 \notin A - B$, ya que $A \cap B = \emptyset$.
- $A - B$ es abierto, ya que podemos escribir:

  $$A - B = \bigcup_{b \in B} (A - b)$$

  y en la demostración del paso anterior ya probamos que la traslación de unconjunto abierto sigue siendo abierto.
- $A - B$ es convexo, ya que si $\alpha, \beta \in A - B$, existen $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ de forma que:

  $$\alpha = a - b, \qquad \beta = a' - b'$$

  Por lo que:

  $$t\alpha + (1-t)\beta = t(a-b) + (1-t)(a'-b') = \underbrace{ta + (1-t)b}_{\in A} - [\underbrace{tb + (1-t)b'}_{\in B}] \in C$$

  donde hemos usado que tanto A como B son convexos.

Estamos en las condiciones del paso anterior, por lo que existen $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua y $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que el hiperplano cerrado $H = [f = \alpha]$ separa $A - B$ del conjunto $\{0\}$, es decir:

$$f(a) - f(b) = f(a - b) \leqslant \alpha \leqslant f(0) = 0 \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

de donde:

$$f(a) \leqslant \alpha - f(b) \leqslant f(b) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Por lo que el hiperplano cerrado $H' = [f = \alpha - f(b)]$ separa los conjuntos A y B.

□

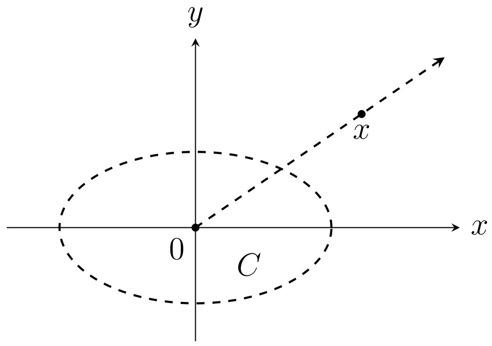
Funcional de Minkowski de un conjunto

En este subapartado definiremos el funcional de Minkowski de un conjunto, una cierta aplicación con propiedades interesantes que nos permite realizar la demostración de la primera versión geométrica del Teorema de Hahn Banach y que además tiene cierto interés fuera de esta demostración, como luego se pondrá de manifiesto en los ejercicios a realizar.

Definición 1.12 (Funcional de Minkowski)**.** Sea E un espacio normado y $C \subset E$ un conjunto convexo, abierto y con $0 \in C$, definimos el funcional de Minkowski de C como la aplicación $p : E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$p(x) = \text{ínf} \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C \right\} \qquad \forall x \in E$$

Observación. Bajo las hipótesis de la definición del funcional de Minkowski, observamos que lo que estamos haciendo es, fijado un punto $x \in E \setminus \{0\}$, tomar la recta de origen 0 que pasa por x, y si multiplicamos x por un escalar positivo, nos movemos por dicha recta. En particular, si multiplicamos x por el inverso de un escalar positivo, si aumentamos dicho escalar, nos estaremos acercando a 0, y si decrementamos dicho escalar, nos alejaremos de 0. Notemos que lo que estamos haciendo por la definición del funcional de Minkowski es tomar aquel valor más "pequeño" para el cual si multiplicamos x por el inverso de un escalar que se queda por encima suya no nos saldremos del conjunto C.



Observemos que $p(0) = 0$. Además, el funcional de Minkowski tiene ciertas propiedades resaltables.

Proposición 1.19. *Sea E un espacio normado y $C \subset E$ un conjunto convexo, abierto y con $0 \in C$, el funcional de Minkowski verifica:*

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$
2. $\exists M > 0$ *tal que* $0 \leqslant p(x) \leqslant M\|x\| \qquad \forall x \in E$
3. $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$
4. $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E$

Demostración. Demostramos cada una de las propiedades:

1. Para la primera, basta usar que $\lambda > 0$ y observar:
$$p(\lambda x) = \text{ínf}\left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha/\lambda} = \frac{\lambda x}{\alpha} \in C\right\} = \text{ínf}\left\{\lambda\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C\right\}$$
$$= \lambda\,\text{ínf}\left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} = \lambda p(x) \qquad \forall x \in E$$

2. Dado $x \in E$, como $0 \in C$ es abierto $\exists r > 0$ de forma que $B(0, r) \subset C$. Si tomamos:
$$\alpha > \frac{\|x\|}{r} \Longrightarrow \left\|\frac{x}{\alpha}\right\| < r \Longrightarrow \frac{x}{\alpha} \in B(0, r) \subset C$$
Por tanto:
$$\left]\frac{\|x\|}{r}, +\infty\right[\subset \left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C\right\}$$
de donde el ínfimo de la derecha será menor o igual que el ínfimo de la izquierda:
$$p(x) \leqslant \frac{\|x\|}{r}$$
Tomamos $M = \frac{1}{r}$.

3. Queremos ver que $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$:

   $\supset$) Sea $x \in E$ con $p(x) < 1$, el ínfimo nos garantiza la existencia de $\alpha_0 \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\alpha_0 < 1$ y $\frac{x}{\alpha_0} \in C$. Como C es convexo y $0 \in C$, tenemos entonces que:
$$x = \alpha_0 \frac{x}{\alpha_0} + (1 - \alpha_0) \cdot 0 \in C$$

   $\subset$) Sea $x \in C$, por ser C abierto $\exists r > 0$ de forma que $B(x, r) \subset C$. Ahora, si tomamos $\varepsilon > 0$ de forma que:
$$\frac{\|x\|}{r} < \frac{1}{\varepsilon}$$
   tendremos entonces que:
$$\|(1 + \varepsilon)x - x\| = \|\varepsilon x\| = \varepsilon\|x\| < r \Longrightarrow (1 + \varepsilon)x \in B(x, r)$$
   En dicho caso, tendremos que:
$$p(x) \leqslant \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1$$

4. Dados $x, y \in E$, sabemos que el conjunto:
$$\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\}$$
es un intervalo no acotado superiormente y acotado inferiormente por $p(x)$, pero no sabemos si el intervalo contiene a $p(x)$ (en cuyo caso se trataría de un mínimo) o si no. Sin embargo, lo que sí sabemos es que:
$$\frac{x}{p(x) + \varepsilon}, \frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in C \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Si usamos el apartado 3, tenemos que:

$$p\left(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}\right) < 1$$

Como C es convexo, si tomamos:

$$t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \leqslant 1$$

tenemos entonces que:

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} = t\frac{x}{p(x)+\varepsilon} + (1-t)\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C \qquad \forall x,y \in E$$

Usando de nuevo la propiedad 3:

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)+2\varepsilon \qquad \forall x,y \in E, \quad \forall \varepsilon > 0$$

De donde deducimos la propiedad buscada. □

Observación. Notemos que si $C = B(0,1)$, tenemos entonces que:

$$p(x) = \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} = \|x\| \qquad \forall x \in E$$

Ejercicio 1.4.2. Sea E un espacio vectorial y C un conjunto abierto, convexo y que contiene al 0, parece qer que p tiene propiedades deseables para ser una norma en E de forma que:

$$B_p(0,1) = C$$

es decir, el funcional de Minkoski de alguna forma resuelve el problema de dado un conjunto que quiero que sea la bola unidad, ¿qué norma considero?.

Se pide razonar las propiedades que ha de cumplir un conjunto $C \subset E$ abierto, convexo y que contiene al 0 para garantizar que el funcional de Minkowski de C sea una norma.

Teorema 1.20 (Hahn Banach, segunda versión geométrica)**.** *Sea E un espacio normado, $\emptyset \neq A, B \subset E$ con $A \cap B = \emptyset$ ambos convexos, A cerrado y B compacto, entonces existe un hiperplano que separa estrictamente A y B. Es decir, existen $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ de forma que:*

$$f(a) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon \leqslant f(b) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Demostración. Sea $C = A - B$, tenemos que:

- $0 \notin C$, ya que $A \cap B = \emptyset$.
- C es convexo, ya que A y B son convexos (se hizo en la prueba del Teorema anterior).

- C es cerrado, ya que A es cerrado y B es compacto: sea $\{x_n\} \to x \in E$ con $x_n \in C \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces existen $\{a_n\}$ sucesión de puntos de A y $\{b_n\}$ sucesión de puntos de B con:

$$x_n = a_n - b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como B es compacto, existe una parcial $\{b_{\sigma(n)}\}$ convergente a $b \in B$. Si vemos que:

$$x_{\sigma(n)} = a_{\sigma(n)} - b_{\sigma(n)} \Longrightarrow a_{\sigma(n)} = x_{\sigma(n)} + b_{\sigma(n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tenemos entonces que $\{a_{\sigma(n)}\} \to x+b$ y como A es cerrado, ha de ser $x+b \in A$. En definitiva:

$$x = x + b - b$$

Con $x + b \in A$ y $b \in B$, por lo que $x \in C$, lo que demuestra que C es cerrado.

Como C es cerrado y $0 \notin C$, tenemos entonces que $E \setminus C$ es abierto y $0 \in E \setminus C$, de donde $\exists r > 0$ con que $B(0, r) \cap C = \emptyset$. Si usamos la primera versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach para los conjuntos $B(0, r)$ y C, obtenemos un hiperplano cerrado $H = [f = \alpha]$ de forma que:

$$f(x) \leqslant \alpha \leqslant f(y) \qquad \forall x \in C, \quad \forall y \in B(0, r)$$

es decir:

$$f(a - b) \leqslant \alpha \leqslant f(-rz) = -rf(z) \leqslant -r\|f\| \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad \forall z \in B(0, 1)$$

Si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2}r\|f\|$, tenemos entonces que:

$$f(a) + \varepsilon \leqslant f(b) - \varepsilon \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Tomando $\beta = \text{mín}\{f(b) : b \in B\} + \varepsilon$, tenemos entonces que:

$$f(a) \leqslant \beta - \varepsilon < \beta + \varepsilon \leqslant f(b) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Es decir, el hiperplano cerrado $H = [f = \beta]$ separa estrictamente A y B. □

Parece ser a priorio un Teorema más potente que la primera versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach, pero en dimensión infinita apenas hay conjuntos compactos.

Corolario 1.20.1. *Sea E un espacio vectorial, $F \subset E$ un subespacio vectorial de forma que $\overline{F} \neq E$, entonces existe $f \in E^*$, $f \neq 0$ de forma que:*

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in F$$

Demostración. Como $\overline{F} \neq E$, tomamos $x_0 \in E \setminus \overline{F}$ y tenemos que $\{x_0\}$ es compacto, así como que $\{x_0\} \cap \overline{F} = \emptyset$, con $\overline{F}$ cerrado. Además, como F es un subespacio vectorial, tenemos que $\overline{F}$ es un subespacio vectorial, luego convexo. Si aplicamos la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach, obtenemos $H = [f = \alpha]$ hiperplano cerrado que separa estrictamente $\overline{F}$ y $\{x_0\}$. Es decir, $\exists \varepsilon > 0$ de forma que:

$$f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leqslant f(x_0) \qquad \forall x \in \overline{F}$$

Tenemos que $f \in E^*$ así como que $f \neq 0$ (ya que tenemos una separación estricta de $f(x_0)$). Finalmente:

$$f(x) < \alpha < f(x_0) \qquad \forall x \in \overline{F}$$

Fijaremos $\lambda \in \mathbb{R}^*$, tenemos que:

$$\lambda f(x) = f(\lambda x) < \alpha \qquad \forall x \in \overline{F}$$

- Si $\lambda > 0$, tenemos entonces que:

  $$f(x) < \frac{\alpha}{\lambda} \qquad \forall \lambda > 0$$

  luego $f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in F$.

- Si $\lambda < 0$, tenemos que:

  $$f(x) > \frac{\alpha}{\lambda} \qquad \forall \lambda < 0$$

  de la misma forma, $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in F$.

$\square$

Observación. Notemos que el enunciado de este teorema es equivalente a:

Sea E un espacio vectorial, $G \subset E$ un subespacio vectorial cerrado de E con $G \neq E$, entonces existe $f \in E^*$, $f \neq 0$ de forma que:

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in F$$

Aunque esta forma de enunciarlo parezca más sencilla, preferimos enunciarlo de la primera forma, ya que lo que nos va a interesar del enunciado es su contrarrecíproco:

Sea E un espacio vectorial y $F \subset E$ un subespacio vctorial, si $\forall f \in E^*$, $f \neq 0$, $\exists x \in F$ con $f(x) \neq 0$, entonces F es denso en E.

Enunciado de otra forma más sencilla:

Si $f \in E^* \setminus \{0\}$, si la condición $f\big|_F = 0$ implica $f = 0$, entonces F es denso en E.

Acabamos de encontrar una condición suficiente que nos permite probar que ciertos subespacios vectoriales de un espacio vectorial son densos, mediante una idea muy ingeniosa.

1.5. Ejercicios

Ejercicio 1.5.1. Sea E un espacio normado, definimos $\forall x \in E$:

$$F(x) = \left\{ f \in E^* : \|f\| = \|x\| \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|^2 \right\}$$

Se pide:

a) Probar que

$$F(x) = \{f \in E^* : \|f\| \leqslant \|x\| \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|^2\}$$

y deducir que $F(x)$ es no vacío, cerrado y convexo.

$\subset$) Es evidente.

$\supset$) Si $x = 0$ la igualdad es evidente. Supuesto que $x \neq 0$, denotamos por $\tilde{F}(x)$ al conjunto de la derecha y tenemos que si $f \in \tilde{F}(x)$, entonces:

$$\|x\|^2 = |f(x)| = f(x) \leqslant \|f\|\|x\| \Longrightarrow \|f\| \geqslant \|x\|$$

Por lo que $\|f\| = \|x\|$, de donde $\tilde{F}(x) = F(x)$.

- Por el Corolario 1.17.2 sabemos que $F(x) \neq \emptyset$.
- Sea $\{f_n\} \to f \in E^*$ con $f_n \in F(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \|x\|^2 = \|x\|^2$$
$$\|f\| = \left\|\lim_{n\to\infty} f_n\right\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x\| = \|x\|$$

  Por lo que $f \in F(x)$, de donde $F(x)$ es cerrado.
- Sean $f, g \in F(x)$, si tomamos $t \in [0, 1]$, definimos:

$$h = tf + (1-t)g$$

  h es lineal y continua, y además:

$$h(x) = tf(x) + (1-t)g(x) = t\|x\|^2 + (1-t)\|x\|^2 = \|x\|^2$$
$$\|h\| = \|tf + (1-t)g\| \leqslant t\|f\| + (1-t)\|g\| = t\|x\| + (1-t)\|x\| = \|x\|$$

  Por lo que $h \in \{f \in E^* : \|f\| \leqslant \|x\| \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|^2\} = F(x)$, lo que demuestra que $F(x)$ es convexo.

b) Probar que si E^* es estrictamente convexo, entonces $F(x)$ se reduce a un punto.

Que E^* sea estrictamente convexo significa que si tomamos $f, g \in E^*$ con $f \neq g$ y $\|f\| = 1 = \|g\|$, entonces:

$$\|tf + (1-t)g\| < 1 \qquad \forall t \in]0, 1[$$

Si $x = 0$ entonces $F(x)$ es unitario. Si $x \neq 0$, supongamos que existen dos funciones $g_1, g_2 \in F(x)$ con $g_1 \neq g_2$. En cuyo caso, podemos tomar:

$$f_1 = \frac{g_1}{\|x\|}, \qquad f_2 = \frac{g_2}{\|x\|}$$

que verifican $f_1 \neq f_2$ y $\|f_1\| = 1 = \|f_2\|$. Por la convexidad estricta de E^* tenemos que:

$$\|tf_1 + (1-t)f_2\| < 1 \qquad \forall t \in]0, 1[$$

Sin embargo, fijado $t \in]0, 1[$, vemos que:

$$\|x\| = t\|x\| + (1-t)\|x\| = (tf_1 + (1-t)f_2)(x) \leqslant \|tf_1 + (1-t)f_2\|\|x\|$$

de donde deducimos que $\|tf_1 + (1-t)f_2\| \geqslant 1$, contradicción, que viene de suponer que $F(x)$ contiene dos elementos distintos.

c) Probar que:

$$F(x) = \left\{ f \in E^* : \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \geqslant f(y-x) \quad \forall y \in E \right\}$$

$\subset$) Si $f \in F(x)$, entonces:

$$f(y) \leqslant \|f\|\|y\| \leqslant \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 \qquad \forall y \in E$$

De donde si restamos $f(x) = \|x\|^2$ a ambos lados:

$$f(y-x) = f(y) - f(x) \leqslant \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \|x\|^2 = \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \quad \forall y \in E$$

$\supset$) Supongamos que tenemos $f \in E^*$, $x \in E$ fijo de forma que se cumple:

$$f(y-x) \leqslant \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \qquad \forall y \in E$$

Para probar primero que $f(x) = \|x\|^2$, tomaremos $y = \lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{R}^+$:

$$(\lambda - 1)f(x) = f(\lambda x - x) \leqslant \frac{1}{2}\|\lambda x\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2\left(\lambda^2 - 1\right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Distinguimos casos (notemos que si $\lambda = 1$ la desigualdad sigue siendo cierta):

- Si $\lambda > 1$, entonces:

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2}\|x\|^2\left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1}\right) \qquad \forall \lambda > 1$$

- Si $\lambda < 1$, entonces:

$$f(x) \geqslant \frac{1}{2}\|x\|^2\left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1}\right) \qquad \forall \lambda \in \left]0, 1\right[$$

Como tenemos que:

$$\lim_{\lambda \to 1} \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1} = \lim_{\lambda \to 1} \frac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{\lambda - 1} = \lim_{\lambda \to 1}(\lambda + 1) = 2$$

Del primer punto deducimos que $f(x) \leqslant \|x\|^2$, y del segundo punto que $f(x) \geqslant \|x\|^2$. Por tanto, tenemos que $f(x) = \|x\|^2$.
Para ver que $\|f\| \leqslant \|x\|$, tomamos $y \in E$ con $\|y\| = \delta > 0$, con lo que:

$$f(y) - f(x) = f(y-x) \leqslant \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2$$

de donde:

$$f(y) \leqslant \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2$$

Si ahora observamos que:

$$\delta\|f\| = \delta \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(\delta x)| = \sup_{\|x\|=\delta} |f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2$$

Si tomamos $\delta = \|x\|$, tenemos que:

$$\|x\|\|f\| \leqslant \|x\|^2 \Longrightarrow \|f\| \leqslant \|x\|$$

d) Deducir que:

$$(f-g)(x-y) \geqslant 0 \qquad \forall x,y \in E, \quad \forall f \in F(x), \quad \forall g \in F(y)$$

de hecho:

$$(f-g)(x-y) \geqslant (\|x\| - \|y\|)^2 \qquad \forall x,y \in E, \quad \forall f \in F(x), \quad \forall g \in F(y)$$

Para probar la primera desigualdad, sean $x, y \in E$, si tomamos $f \in F(x)$, $g \in F(y)$, entonces por el apartado anterior tenemos que:

$$f(z-x) \leqslant \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \qquad \forall z \in E$$
$$g(z-y) \leqslant \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 \qquad \forall z \in E$$

Tomando en la primera desigualdad $z = y$, $z = x$ en la segunda y sumando ambas obtenemos:

$$f(y-x) + g(x-y) \leqslant 0$$

De donde:

$$(f-g)(x-y) = f(x-y) - g(x-y) = -(f(y-x) + g(x-y)) \geqslant 0$$

Para probar que bajo las mismas hipótesis tenemos $(f-g)(x-y) \geqslant (\|x\| - \|y\|)^2$:

$$(f-g)(x-y) = f(x) - f(y) - g(x) + g(y) = \|x\|^2 - f(y) - g(x) + \|y\|^2$$

Ahora, observamos que:

$$f(y) + g(x) \leqslant \|f\|\|y\| + \|g\|\|x\| = 2\|x\|\|y\| \Longrightarrow -2\|x\|\|y\| \leqslant -f(y) - g(x)$$

de donde:

$$(f-g)(x-y) = \|x\|^2 - f(y) - g(x) + \|y\|^2 \geqslant \|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

e) Sea E^* un espacio estrictamente convexo con $x, y \in E$ de forma que:

$$(f-g)(x-y) = 0 \qquad \forall x,y \in E, \quad \forall f \in F(x), \quad \forall g \in F(y)$$

Probar que $F(x) = F(y)$.

Sean $x, y \in E$, $f \in F(x)$, $g \in F(y)$, si aplicamos la desigualdad del apartado anterior junto con la propiedad que nos dan ahora:

$$0 = (f-g)(x-y) \geqslant (\|x\| - \|y\|)^2 \geqslant 0 \Longrightarrow \|x\| = \|y\|$$

Del apartado c) obtenemos que (usando además que $\|x\| = \|y\|$):

$$f(y) - \|x\|^2 = f(y-x) \leqslant \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 = 0 \Longrightarrow f(y) \leqslant \|x\|^2$$
$$g(x) - \|y\|^2 = g(x-y) \leqslant \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 = 0 \Longrightarrow g(x) \leqslant \|y\|^2 = \|x\|^2$$

Además, tenemos que:

$$0 = (f-g)(x-y) = f(x) - f(y) - g(x) + g(y) = \|x\|^2 - f(y) - g(x) + \|y\|^2$$

luego:

$$f(y) + g(x) = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2\|x\|^2$$

Sin embargo, como $f(y), g(x) \leqslant \|x\|^2$, concluimos que ha de ser:

$$g(x) = \|x\|^2 = \|y\|^2 = f(y)$$

Finalmente, como E^* es un espacio estrictamente convexo, tenemos por el apartado *b*) que tanto $F(x)$ como $F(y)$ se reducen a un punto:

$$\{f\} = F(x) = \{f \in E^* : \|f\| = \|x\| \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|^2\}$$

Sin embargo, tenemos que $\|g\| = \|x\|$ y que $g(x) = \|x\|^2$, lo que nos dice que $g \in F(x) = \{f\}$, por lo que $f = g$ y tenemos $F(x) = F(y)$.

Ejercicio 1.5.2. Sea E un espacio vectorial de dimensión n y sea $\{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ una base de E, dado $x \in E$ escribimos $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{R}$. Dado $f \in E^*$, definimos $f_i = f(e_i)$.

a) Considerar en E la norma:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

a) Calcular explícitamente, en términos de f_i, la norma $\|f\|$ para $f \in E^*$.

Hemos visto que $\|f\| = \sup_{\|x\|_1=1} |f(x)|$, por lo que si tomamos $x \in E$ con $\|x\|_1 = 1$, tenemos entonces que $\sum_{i=1}^n |x_i| = 1$, de donde:

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left| f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^n x_i f_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i||f_i| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i| \\ &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i| \sum_{i=1}^n |x_i| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i|\end{aligned}$$

Luego $\|f\| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i|$. Sin embargo, si tenemos que $p \in \{1, \ldots, n\}$ es el índice en el cual se maximiza $|f_i|$, es decir, $|f_p| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i|$, si tomamos:

$$x = e_j$$

Tenemos que $\|x\|_1 = 1$, así como que:

$$|f(x)| = |f(e_j)| = |f_j| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i|$$

Por lo que el supremo se alcanza, luego:

$$\|f\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i|$$

b) Determinar explícitamente el conjunto $F(x)$, para todo $x \in E$.

Veamos que:

$$f \in F(x) = \{f \in E^* : \|f\| = \|x\|_1 \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|_1^2\}$$
$$\text{si y solo si}$$
$$f_i = \begin{cases} sgn(x_i)\|x\|_1 & \text{si } x_i \neq 0 \\ \text{cualquier valor en } [-\|x\|_1, \|x\|_1] & \text{si } x_i = 0 \end{cases} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$\Longleftarrow$) Notemos que:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \sum_{i=1}^{n} x_i sgn(x_i)\|x\|_1 = \|x\|_1 \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1\|x\|_1 = \|x\|_1^2$$

y que:

$$\|f\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i| = \max\left\{\max_{x_i \neq 0} |sgn(x_i)\|x\|_1|,\ \max_{x_i = 0}\{f_i\}\right\} \overset{(*)}{=} \max_{x_i \neq 0} |\|x\|_1| = \|x\|_1$$

donde en $(*)$ hemos usado que si $x_i = 0$, entonces el valor de f_i está en el intervalo $[-\|x\|_1, \|x\|_1]$.

$\Longrightarrow$) Sea $f \in E^*$ con $\|f\| = \|x\|_1$ y $f(x) = \|x\|_1^2$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = f(x) = \|x\|_1^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\|x\|_1$$

Ahora, como $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i| = \|f\| = \|x\|_1$, tenemos que:

$$|f_i| \leqslant \|x\|_1 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Por lo que tenemos:

$$x_i f_i \leqslant |x_i||f_i| \leqslant |x_i|\|x\|_1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\|x\|_1$$

Luego ha de ser:

$$x_i f_i = |x_i|\|x\|_1 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

De donde (si $x_i \neq 0$):

$$f_i = \frac{|x_i|\|x\|_1}{x_i} = sgn(x_i)\|x\|_1$$

y para el resto de valores podemos tomar cualquier valor que no se salga del intervalo $[-\|x\|_1, \|x\|_1]$, para no alterar el valor de $\|f\|$.

b) Las mismas preguntas pero para la norma:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

Sea $x \in E$ con $\|x\|_\infty = 1$, tenemos entonces que $\max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| = 1$, de donde:

$$|f(x)| = \left| f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^n x_i f_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i||f_i| \leqslant \sum_{i=1}^n |f_i|$$

por lo que $\|f\| \leqslant \sum_{i=1}^n |f_i|$, pero si tomamos:

$$x = (sgn(f_1), sgn(f_2), \ldots, sgn(f_n))$$

tenemos entonces que $\|x\|_\infty = 1$, con:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i = \sum_{i=1}^n sgn(f_i) f_i = \sum_{i=1}^n |f_i|$$

Tenemos que el supremo se alcanza, por lo que:

$$\|f\| = \sum_{i=1}^n |f_i|$$

Si pensamos ahora en el conjunto $F(x)$, si definimos:

$$I = \{i \in \{1, \ldots, n\} : |x_i| = \|x\|_\infty\}$$

veamos que:

$$f \in F(x) = \{f \in E^* : \|f\| = \|x\|_\infty \quad \text{y} \quad f(x) = \|x\|_\infty^2\}$$
$$\text{si y solo si}$$
$$\left\{\begin{array}{lll} f_i = 0 & \forall i \notin I & \\ x_i f_i \geqslant 0 & \forall i \in I & \text{y} \quad \sum_{i\in I} |f_i| = \|x\|_\infty \end{array}\right.$$

$\Longleftarrow$) Si las f_i cumplen lo enunciado, entonces:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i = \sum_{i\in I} x_i f_i = \sum_{i\in I} |x_i||f_i| = \|x\|_\infty \sum_{i\in I} |f_i| = \|x\|_\infty \|x\|_\infty = \|x\|_\infty^2$$

y también:

$$\|f\| = \sum_{i=1}^n |f_i| = \sum_{i\in I} |f_i| = \|x\|_\infty$$

$\Longrightarrow$) Sea $f \in E^*$ con $\|f\| = \|x\|_\infty$ y $f(x) = \|x\|_\infty^2$, entonces:

- Si $f_i = 0 \quad \forall i \notin I$, entonces:

$$\|x\|_\infty = \|f\| = \sum_{i=1}^n |f_i| = \sum_{i\in I} |f_i|$$

Además:

$$\sum_{i\in I} x_i f_i = \sum_{i=1}^n x_i f_i = f(x) = \|x\|_\infty^2 = \sum_{i=1}^n |f_i| \|x\|_\infty = \sum_{i\in I} |f_i| \|x\|_\infty$$

y tenemos las desigualdades:

$$x_i \leqslant |x_i| \leqslant \|x\|, \qquad f_i \leqslant |f_i| \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

lo que nos permite igualar término a término en la suma anterior, obteniendo:

$$x_i f_i = |f_i| \|x\|_\infty = |f_i| \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|x_i|\} \Longrightarrow x_i f_i \geqslant 0 \quad \forall i \in I$$

y se tienen las dos condiciones buscadas.

- Si suponemos ahora que existe $f_j \neq 0$ para $j \notin I$, tendremos entonces que $|x_j| < \|x\|$. Si observamos que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = f(x) = \|x\|_\infty^2 = \sum_{i=1}^{n} |f_i| \|x\|$$

y las desigualdades:

$$x_i \leqslant |x_i| \leqslant \|x\|, \qquad f_i \leqslant |f_i| \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

deducimos entonces que:

$$x_i f_i = |f_i| \|x\| \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Sin embargo, tendríamos entonces que (para $i = j$ tenemos $f_j \neq 0$):

$$x_j = \frac{|f_j| \|x\|}{f_j} = sgn(f_j) \|x\|$$

de donde deducimos que $|x_j| = \|x\|$, contradicción, por lo que este caso es imposible.

c) Las mismas preguntas pero para la norma:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y más generalmente para la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \in]1, +\infty[$$

Sea $x \in E$ con $\|x\|_p = 1$, tenemos entonces que $(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = 1$, de donde:

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i||f_i| \overset{(*)}{\leqslant} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

donde en $(*)$ he usado la desigualdad de Hölder. Deducimos por tanto que:

$$\|f\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

Ejercicio 1.5.3. Sea $E = \{u \in C([0,1], \mathbb{R}) : u(0) = 0\}$ con la norma:

$$\|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$$

considera el funcional lineal $f : E \to \mathbb{R}$ dado por:

$$f(u) = \int_0^1 u(t)\ dt$$

a) Demuestra que $f \in E^*$ y calcula $\|f\|$.

Hemos de probar que f es lineal y continua:

- Por la forma de definir f es claro que es lineal:

$$f(\lambda u+v) = \int_0^1 \lambda u(t)+v(t)\ dt = \lambda\int_0^1 u(t)\ dt + \int_0^1 v(t)\ dt = \lambda f(u)+f(v)$$
$$\forall u, v \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- f es continua, ya que:

$$\begin{aligned}|f(u) - f(v)| &= \left|\int_0^1 u(t)\ dt - \int_0^1 v(t)\ dt\right| = \left|\int_0^1 u(t) - v(t)\ dt\right| \\ &\leqslant \left|\int_0^1 \|u - v\|\ dt\right| = \|u - v\| \qquad \forall u, v \in E\end{aligned}$$

En consecuencia, $f \in E^*$. En este último punto hemos probado además que $\|f\| \leqslant 1$. Para probar la otra desigualdad, si para cada $\alpha > 0$ definimos $u_\alpha \in E$ dada por:

$$u_\alpha(t) = t^\alpha \qquad \forall t \in [0,1]$$

tenemos entonces que:

$$f(u_\alpha) = \int_0^1 t^\alpha\ dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{1+\alpha} \qquad \forall \alpha > 0$$

de donde:

$$|f(u_\alpha)| \leqslant \|f\| \leqslant 1$$

con $\lim_{\alpha\to 0} |f(u_\alpha)| = 1$, por lo que $\|f\| = 1$.

b) ¿Puede encontrarse $u \in E$ con $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|$?

No, ya que la única función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua con integral 1 en $[0,1]$ y con máximo 1 es la constantemente igual a 1, que no pertence a E (por no valer 0 en 0):

Supongamos que tenemos una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua con integral 1 en $[0,1]$ y con máximo 1 distinta de la constantemente igual a 1. En dicho caso, ha de existir $x_0 \in [0,1]$ de forma que $f(x_0) < 1$. Por continuidad de f podemos encontrar $\varepsilon, \delta > 0$ de forma que:

$$f(x) \leqslant 1 - \varepsilon \qquad \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap [0,1]$$

En cuyo caso, llamando $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [0,1]$:

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \int_{[0,1]\setminus I} f(x)\ dx + \int_I f(x)\ dx \leqslant \int_{[0,1]\setminus I} 1\ dx + \int_I (1-\varepsilon)\ dx$$
$$= (1 - l(I)) + l(I)(1-\varepsilon) = 1 - \varepsilon < 1$$

Por lo que f no tiene integral 1 en $[0,1]$, contradicción, que viene de suponer que f no es constantemente igual a 1.

Tras este resultado, como la pertenencia al conjunto E obliga a que la función u no sea constantemente igual a 1, tenemos pues que no puede existir una tal función.

Ejercicio 1.5.4. Considera el espacio $E = C_0$ de sucesiones de números reales que convergen a cero con la norma

$$\|x\| = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \qquad \forall x \in E$$

Para cada elemento $u \in E$ definimos:

$$f(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} u(n)$$

a) Comprueba que $f \in E^*$ y calcula $\|f\|$.

- Para ver que f es lineal:

$$f(\lambda u + v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda u(n) + v(n)}{2^n} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u(n) + \sum_{n=1}^{\infty} v(n) = \lambda f(u) + f(v)$$
$$\forall u, v \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- Para ver que f es continuo:

$$|f(u) - f(v)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{2^n} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n) - v(n)}{2^n} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u-v\|}{2^n} \right|$$
$$= \|u - v\| \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right| = \|u - v\|$$

Por lo que $f \in E^*$. En este último punto hemos visto también que $\|f\| \leqslant 1$.

b) ¿Puede encontrarse $u \in E$ con $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|$?

Ejercicio 1.5.5. Sea E un espacio normado de dimensión infinita:

a) Demuestra (usando el Lema de Zorn) que existe una base algebraica $\{e_i\}_{i\in I}$ en E de forma que $\|e_i\| = 1 \quad \forall i \in I$.

Recordamos que una base algebraica (o de Hamel) es un subconjunto $\{e_i\}_{i\in I}$ de E de forma que todo $x \in E$ puede ser escrito de forma única como:

$$x = \sum_{i \in J} x_i e_i, \quad \text{con } J \subset I, J \text{ finito}$$

Consideramos:

$$P = \{C \subset E : \text{los elementos de } C \text{ son linealmente independientes}\}$$

Y buscamos aplicar el Lema de Zorn a P. Para ello, definimos:

$$C \leqslant D \Longleftrightarrow C \subset D \qquad \forall C, D \in P$$

Ahora, hemos de probar primero que P es inductivo. Para ello, sea $Q \subset P$ un subconjunto totalmente ordenado, tratemos de probar que $\cup Q$ es una cota superior de Q. Es claro que $C \subset \cup Q$ para todo $C \in Q$, por lo que basta probar que $\cup Q \in P$. Si tomamos $x, y \in \cup Q$, tendremos entonces que existen $C, D \in Q$ de forma que $x \in C$ y $y \in D$. Como Q es totalmente ordenado, tendremos bien $C \subset D$ bien $D \subset C$. Aprovechando la simetría de la situación, supondremos que $C \subset D$, con lo que también tenemos $x \in D \in Q \subset P$, de donde x e y son linealmente independientes, como queríamos probar, lo que nos dice que $\cup Q \in P$.

Aplicando el Lema de Zorn, tenemos que P tiene un elemento maximal, es decir, existe $\mathcal{B} \in P$ de forma que si $C \subset E$ es un conjunto tal que todos sus elementos son linealmente independientes entonces $C \subset \mathcal{B}$. Probaremos ahora que $\mathcal{B}$ es una base de E. Para ello, sea $x \in E$, si x es linealmente independiente de los elementos de $\mathcal{B}$, entonces consideramos $B = \mathcal{B} \cup \{x\}$, que es un elemento de P mayor que el elemento maximal de P, contradicción, por lo que x ha de ser linealmente dependiente de los elementos de $\mathcal{B}$, es decir, existe una cantidad finita de ellos determinada por $J \subset I$ finito y unos escalares a_i de forma que:

$$x + \sum_{j \in J} a_j x_j = 0, \qquad x_j \in \mathcal{B}, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad \forall j \in J$$

Dicho de otra forma, si tomamos $x_j = -a_j \quad \forall j \in J$:

$$x = \sum_{j \in J} a_j x_j$$

Como la normalización de los vectores no modifica su independiencia lineal, podemos normalizar todos los elementos del conjunto $\mathcal{B}$ y este seguirá cumpliendo lo enunciado.

b) Construye un funcional lineal $f : E \to \mathbb{R}$ que no sea continuo.

c) Suponiendo que además E es un espacio de Banach, prueba que I no es numerable (**Pista:** usar "el Teorema de categoría de Baire").

Ejercicio 1.5.6. Sea E un espacio normado y $H \subset E$ un hiperplano. Sea $V \subset E$ un subespacio afín que contiene a H.

a) Probar que $V = H$ o $V = E$.

b) Deducir que H es cerrado o denso en E.

Ejercicio 1.5.7. Sea E un espacio normado y $C \subset E$ un subconjunto convexo.

a) Prueba que $\overline{C}$ y $IntC$ son convexos.

- Para $\overline{C}$, sean $x, y \in \overline{C}$, entonces existen sucesiones de puntos de C $\{x_n\}, \{y_n\}$ con $\{x_n\} \to x$ y $\{y_n\} \to y$, de donde si tomamos $t \in [0, 1]$, tenemos que:
$$\{(1-t)x_n + ty_n\} \to (1-t)x + ty$$
Por lo que $(1-t)x + ty \in \overline{C}$ para todo $t \in [0, 1]$.
- Para $IntC$, sean $x, y \in IntC$, entonces existe $r > 0$ de forma que $B(x, r), B(y, r) \subset C$. En dicho caso, como C es convexo, tenemos que:
$$tB(x, r) + (1-t)B(y, r) \subset C \qquad \forall t \in [0, 1]$$
Pero como:
$$tB(x, r) + (1-t)B(y, r) = B(tx + (1-t)y, r)$$
tenemos entonces que $tx + (1-t)y \in B(tx+(1-t)y, r) \subset C \quad \forall t \in [0, 1]$, con lo que $IntC$ es convexo. La igualdad entre conjuntos que hemos usado se debe a que:

  $\subset$) Sea $\alpha = tu + (1-t)v \in tB(x, r) + (1-t)B(y, r)$, tenemos entonces que $d(u, x), d(v, y) < r$. Notemos que:
  $$\begin{aligned}\|tu + (1-t)v - tx + (1-t)y\| &= \|t(u-x) + (1-t)(v-y)\| \\ &\leqslant td(u, x) + (1-t)d(v, y) \leqslant tr + (1-t)r = r\end{aligned}$$
  Por lo que $\alpha \in B(tx + (1-t)y, r)$.

  $\supset$)

b) Dado $x \in C$ y $y \in IntC$, prueba que $tx + (1-t)y \in IntC \quad \forall t \in]0, 1[$.

- Si $x \in IntC$, como vimos en el apartado anterior que $IntC$ era convexo, tenemos el resultado.
- Si $x \in C \setminus IntC \subset \overline{C}$,

c) Deduce que $\overline{C} = \overline{IntC}$ siempre que $IntC \neq \emptyset$.

Ejercicio 1.5.8. Sea E un espacio normado con norma $\|\cdot\|$. Sea $C \subset E$ un abierto convexo de forma que $0 \in C$. Si p denota el funcional de Minkowski de C:

a) Suponiendo que C es simétrico (es decir, que $-C = C$) y que es acotado, prueba que p es una norma equivalente a $\|\cdot\|$.

b) Sea $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ con la norma:
$$\|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$$
sea:
$$C = \{u \in E : \int_0^1 |u(t)|^2 \, dt < 1\}$$
Comprueba que C es convexo, simétrico y que $0 \in C$. ¿Está C acotado en E? Calcula el funcional de Minkowski p de C y prueba que p es una norma en E. ¿Es p equivalente a $\|\cdot\|$?

Ejercicio 1.5.9. Sea E un espacio normado de dimensión finita, sea $C \subset E$ un conjunto no vacío convexo con $0 \notin C$. Siempre hay un hiperplano que separa C y $\{0\}$ (Notemos que todo hiperplano es cerrado (¿por qué?). El mayor punto de este ejercicio es que no hace falta exigir nada más sobre C).

a) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de C que es densa en C (¿por qué existe?). Para cada n definimos:

$$C_n = conv\{x_1, \dots, x_n\} = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i : t_i \geqslant 0 \quad \forall i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}$$

Comprueba que C_n es compacto y que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ es denso en C.

b) Prueba que existe un $f_n \in E^*$ de forma que:

$$\|f_n\| = 1 \quad \text{y} \quad f_n(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in C_n$$

c) Deduce que existe $f \in E^*$ de forma que:

$$\|f\| = 1 \quad \text{y} \quad f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in C$$

d) Sean $A, B \subset E$ conjuntos no vacíos disjuntos y convexos. Prueba que existe algún hiperplano H que separa A y B.

Ejercicio 1.5.10. Sea E un espacio normado y sea I cualquier conjunto de índices, fijado un subconjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ en E y otro $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ en $\mathbb{R}$. Demuestra que las siguientes propiedades son equivalentes:

1. Existe $f \in E^*$ de forma que $f(x_i) = \alpha_i \quad \forall i \in I$.

2. Existe una constante $M \geqslant 0$ de forma que para cada conjunto finito $J \subset I$ y para cada elección de números reales $\{b_i\}_{i\in J}$ tenemos:

$$\left| \sum_{i\in J} \beta_i \alpha_i \right| \leqslant M \left\| \sum_{i\in J} \beta_i x_i \right\|$$

Notemos que en la prueba $2 \Longrightarrow 1$ uno puede encontrar alguna $f \in E^*$ con $\|f\| \leqslant M$. (**Pista:** intenta primero definir f en el espacio lineal generado por $\{x_i\}_{i\in I}$).

2. Principio de acotación uniforme y Tª de la gráfica cerrada

Definición 2.1. Sean E, F espacios normados, definimos:

$$L(E,F) = \{f : E \to F : f \text{ lineal y continua}\}$$

y notaremos normalmente $L(E) := L(E,E)$.

Proposición 2.1. *Al igual que como sucedía con aplicaciones lineales y continuas de un espacio normado E en $\mathbb{R}$, si E, F son espacios normados y $T \in L(E,F)$ tenemos*[1]*:*

1. *T es continua $\iff$ T es continua en 0 $\iff$ $\sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| < \infty$*
2. *Si definimos:*
$$\|T\| := \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| \qquad \forall T \in L(E,F)$$
Tenemos que $\|\cdot\|$ es una norma en $L(E,F)$.
3. *Se verifica que:*
$$\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\|, \quad \forall x \in E\}$$

2.1. Principio de acotación uniforme

Con vistas a demostrar el Principio de acotación uniforme, demostramos el siguiente Lema:

Lema 2.2. *Sean E, F espacios normados y $T \in L(E,F)$, entonces:*

$$\sup_{\|x-x_0\|\leqslant r} \|Tx\| \geqslant r\|T\| \qquad \forall x_0 \in E, \quad \forall r > 0$$

Demostración. Fijado $r \in \mathbb{R}^+$, sean $x_0, y \in E$ con $\|y\| \leqslant r$:

$$\begin{aligned}
\|Ty\| &= \left\| T\left(\frac{1}{2}\left[x_0 + y - (x_0 - y)\right]\right)\right\| = \frac{1}{2}\|T(x_0 + y - (x_0 - y))\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\|T(x_0+y)\| + \|T(x_0-y)\|\right) \leqslant \max\{\|T(x_0+y)\|, \|T(x_0-y\|)\} \\
&\leqslant \sup_{\|y\|\leqslant r} \max\{\|T(x_0+y)\|, \|T(x_0-y)\|\} \leqslant \sup_{\|z-x_0\|\leqslant r} \|Tz\|
\end{aligned}$$

[1]Resultados análogos que se realizan con las mismas pruebas.

Si ahora observamos que:

$$\sup_{\|y\|\leqslant r} \|Ty\| = r \sup_{\|z\|\leqslant 1} \|Tz\| = r\|T\|$$

Acabamos de probar que $\displaystyle\sup_{\|x-x_0\|\leqslant r} \|Tx\| \geqslant r\|T\|$. □

Teorema 2.3 (Principio de acotación uniforme)**.** *Sea E un espacio de Banach, F un espacio normado y $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L(E,F)$, entonces:*

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < +\infty \quad \forall x \in E \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < +\infty$$

Demostración. Demostraremos el contrarrecíproco:

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| = \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| = \infty$$

Supongamos pues que $\displaystyle\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| = \infty$, por lo que existe una sucesión de elementos de $\mathcal{F}$, llamémosla $\{T_n\}$, de forma que:

$$\|T_n\| \geqslant 4^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definimos por inducción una sucesión de puntos de E:

- $x_0 = 0 \in E$.
- Tomando $r = 1/3$, el Lema 2.2 nos dice:

  $$\sup_{\|x-x_0\|<\frac{1}{3}} \|T_1x\| \geqslant \frac{1}{3}\|T_1\| > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\|T_1\|$$

  Como $2/3 \cdot 1/3 \cdot \|T_1\|$ es estrictamente menor que el supremo de la izquierda, tenemos que no puede ser una cota superior de $\|T_1x\|$ para $x \in B(x_0, 1/3)$, con lo que $\exists x_1 \in B(x_0, 1/3)$ de forma que:

  $$\|T_1x_1\| > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\|T_1\|$$

- Supuesto que hemos construido hasta x_{n-1}, veamos cómo construir x_n:

  Tomando $r = 1/3^n$, el Lema 2.2 nos dice que:

  $$\sup_{\|x-x_{n-1}\|<\frac{1}{3^n}} \|T_nx\| \geqslant \frac{1}{3^n}\|T_n\| > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\|$$

  Y por el mismo razonamiento de antes podemos encontrar $x_n \in B(x_{n-1}, 1/3^n)$ de forma que:

  $$\|T_nx_n\| > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\|$$

Veamos ahora que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Para ello, buscamos acotar $\|x_m - x_n\|$ para n, m índices bastante avanzados. Supondremos sin pérdida de generalidad que $n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n$, donde tendremos:

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &= \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n\| \\
&\leqslant \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\leqslant \frac{1}{3^m} + \frac{1}{3^{m-1}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n}\left[\frac{1}{3^{m-n}} + \ldots + \frac{1}{3}\right] \\
&\leqslant \frac{1}{3^n}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{3^j} = \frac{1}{3^n}\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

En definitiva, tenemos que:

$$\|x_m - x_n\| = \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}$$

Por lo que $\{x_n\}$ es de Cauchy en E, que era de Banach, por lo que $\{x_n\}$ converge a cierto $x \in E$. Observemos que:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n} \geqslant \lim_{m\to\infty}\|x_m - x_n\| \overset{(*)}{=} \left\|\lim_{m\to\infty}(x_m - x_n)\right\| = \|x - x_n\|$$

donde en $(*)$ hemos usado la continuidad de $\|\cdot\|$. Calculamos ahora:

$$\begin{aligned}
\|T_n x\| = \|T_n(x - x_n + x_n)\| &\geqslant \|T_n x_n\| - \|T_n(x - x_n)\| \geqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\| - \|T_n\|\|x - x_n\| \\
&\geqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\| - \|T_n\|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3^n}\|T_n\| = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\| \geqslant \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\sup_{T\in\mathcal{F}}\|Tx\| \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n x\| = \infty$$

Como queríamos probar. □

Introducimos ahora una serie de Corolarios que nos da el Principio de acotación uniforme:

Corolario 2.3.1. *Sean E, F dos espacios de Banach, sea $\{T_n\}$ una sucesión de elementos de $L(E, F)$ de forma que $\{T_n(x)\} \to T(x)$ para todo $x \in E$. Entonces:*

(a) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\| < \infty$.

(b) $T \in L(E, F)$.

(c) $\|T\| \leqslant \liminf_{n\to\infty}\|T_n\|$.

Demostración. Demostramos cada apartado:

(a) Dado $x \in E$, como $\{T_n(x)\} \to T(x)$, tenemos que $\exists m \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$T_n(x) \in B(T(x), 1) \qquad \forall m \geqslant n$$

Por lo que $\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado, puesto que podemos verlo como la unión de un conjunto acotado y uno finito:

$$\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\} = \{T_n(x) : n \geqslant m\} \cup \{T_n(x) : n < m\}$$

En definitiva, tenemos que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty$ para todo $x \in E$, de donde aplicando el Principio de acotación uniforme tenemos que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.

(b) Veamos que $T : E \to F$ es lineal y continua:

- Es fácil ver que T es lineal:

$$\begin{aligned} T(\lambda x + y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda T_n(x) + T_n(y)) \\ &= \lambda \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) = \lambda T(x) + T(y) \qquad \forall x, y \in E \end{aligned}$$

- Para ver que T es continua podemos usar el apartado (a):

$$\|T_n(x)\| \leqslant \|T_n\|\|x\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|\|x\| \qquad \forall x \in E$$

Y como $\{\|T_n(x)\|\} \to \|T(x)\|$, tenemos que:

$$\|T(x)\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|\|x\| \qquad \forall x \in E$$

lo que nos dice que T es continua.

(c) Para ver que $\|T\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$, notemos que:

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \left\|\lim_{n\to\infty} T_n(x)\right\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| = \liminf \|T_n(x)\| \leqslant \liminf(\|T_n\|\|x\|) \\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geqslant k}(\|T_n\|\|x\|) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geqslant k} \|T_n\| \cdot \|x\| = \liminf \|T_n\| \cdot \|x\| \qquad \forall x \in E \end{aligned}$$

De donde $\|T\| \leqslant \liminf \|T_n\|$.

□

Corolario 2.3.2. *Sea G un espacio de Banach y $B \subset G$, si para toda $f \in G^*$ el conjunto $f(B)$ está acotado (en $\mathbb{R}$), entonces B está acotado.*

Demostración. Comenzamos la demostración pensando a lo que queremos llegar, pues así nos será más fácil comenzar la demostración. Queremos probar que B está acotado, es decir, que existe $M > 0$ de forma que:

$$\|b\| \leqslant M \qquad \forall b \in B$$

Si recordamos que el Corolario 1.17.3 nos dice que:

$$\|b\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |f(b)|$$

observemos que lo queremos es buscar una cota superior de $|f(b)|$, donde b está fija y f se mueve. Para ello, podemos pensar en definir ciertos funcionales $T_b(f)$ de forma que tras aplicar el Principio de Acotación Uniforme obtengamos para $\|f\| \leqslant 1$:

$$|f(b)| = |T_b(f)| \leqslant \|T_b\|\|f\| \leqslant \|T_b\| \leqslant \sup_{b\in B} \|T_b\| < \infty$$

Con lo que nuestra constante M la tomaremos como $\sup\limits_{b\in B} \|T_b\|$. Comenzando ahora con la demostración, fijado $b \in B$, definimos la aplicación $T_b : G^* \to \mathbb{R}$ dada por:

$$T_b(f) = f(b) \qquad \forall f \in G^*$$

Con lo que $T_b \in L(G^*, \mathbb{R})$:

- Es claro que T_b es lineal.
- T_b es continua, ya que $|T_b(f)| = |f(b)| \leqslant \|b\|\|f\| \quad \forall f \in G^*$.

Como $f(B)$ es acotado para toda $f \in G^*$, tenemos entonces que:

$$\sup_{b\in B} |T_b(f)| = \sup_{b\in B} |f(b)| < \infty \qquad \forall f \in G^*$$

Con lo que aplicando el Principio de acotación uniforme tenemos:

$$\sup_{b\in B} \|T_b\| < \infty$$

Ahora, si tomamos $f \in G^*$ con $\|f\| \leqslant 1$, buscamos usar que $\|x\| = \sup\limits_{\|f\|\leqslant 1} |f(x)|$:

$$|f(b)| = |T_b(f)| \leqslant \sup_{b\in B} \|T_b\|\|f\| \leqslant \sup_{b\in B} \|T_b\|$$

Por lo que $\|b\| \leqslant \sup\limits_{b\in B} \|T_b\| < \infty \quad \forall b \in B$, lo que nos dice que B está acotado. □

Este último corolario nos dice que si $B \subset G^*$ es un conjunto cualquiera, una forma de estudiar si B es un conjunto acotado, una posibilidad es tratar de calcular su imagen bajo cualquier función $f \in G^*$, que es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Recordemos que en $\mathbb{R}^n$ un conjunto era acotado si y solo si cada una de sus proyecciones es un conjunto acotado. Este Corolario hace ese papel en espacios de dimensión infinita, que junto con el siguiente son muy utilizados.

Corolario 2.3.3. *Sea G un espacio de Banach y sea $B^* \subset G^*$, si el conjunto:*

$$B^*(x) = \{f(x) : f \in B^*\}$$

está acotado para todo $x \in G$, entonces B^* está acotado.

Demostración. Al igual que antes empezamos por el final, pues así nos será más fácil comenzar la demostración. Queremos concluir que B^* está acotado, es decir, que:

$$\|f\| \leqslant M \qquad \forall f \in B^*$$

para cierta constante $M > 0$. Para ello, si recordamos la definición de $\|f\|$, vemos que:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)|$$

donde f está fija y movemos la x, con lo que trataremos de definir funcionales $T_f(x)$ de forma que para $\|x\| \leqslant 1$:

$$|f(x)| = |T_f(x)| \leqslant \|T_f\|\|x\| \leqslant \|T_f\| \leqslant \sup_{f\in B^*} \|T_f\|$$

Comenzando ahora con la demostración, para cada $f \in B^*$ definimos la aplicación $T_f : G \to \mathbb{R}$ dada por:

$$T_f(x) = f(x) \qquad \forall x \in G$$

con lo que $T_f \in G^*$ para todo $f \in B^*$:

- Es fácil ver que T_f es lineal para cualquier $f \in B^*$.
- No es difícil ver que T_f es continua para $f \in B^*$, ya que:

$$|T_f(x)| = |f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \qquad \forall x \in G$$

Como el conjunto $B^*(x)$ está acotado para todo $x \in G$, tenemos que:

$$\sup_{f\in B^*} \|T_f(x)\| = \sup_{f\in B^*} |f(x)| < \infty$$

nos encontramos en las hipótesis del Principio de acotación uniforme, que nos dice que entonces:

$$\sup_{f\in B^*} \|T_f\| < \infty$$

en cuyo caso, si $\|x\| \leqslant 1$, entonces:

$$|f(x)| = |T_f(x)| \leqslant \|T_f\|\|x\| \leqslant \|T_f\| \leqslant \sup_{f\in B^*} \|T_f\| \qquad \forall f \in B^*$$

con lo que:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| \leqslant \sup_{f\in B^*} \|T_f\| \qquad \forall f \in B^*$$

de donde deducimos que B^* está acotado. □

2.2. Otra demostración del Principio de acotación uniforme

Repetiremos ahora la demostración del Principio de acotación uniforme de otra forma, usando el Lema de Baire, un resultado clásico que nos da de forma no muy complicada la demostración del Principio.

Lema 2.4 (de Baire)**.** *Sea X un espacio métrico completo, sea $\{X_n\}$ una sucesión de subconjuntos de X todos ellos cerrados y con interior vacío, entonces:*

$$Int\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \emptyset$$

Demostración. Tomaremos $O_n = X \setminus X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, con lo que O_n es abierto y denso para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que:

$$\overline{O_n} = \overline{X \setminus X_n} = X \setminus Int X_n = X \setminus \emptyset = X$$

□

Cabe destacar que una de las formas en las que más se utiliza el Lema de Baire es mediante su contrarrecíproco:

Sea X un espacio métrico completo, sea $\{X_n\}$ una sucesión de subconjuntos de X todos ellos cerrados, entonces:

$$Int\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : Int(X_{n_0}) \neq \emptyset$$

Ejercicio 2.2.1. Sean X, Y dos espacios de Banach, $T \in L(X,Y)$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, para cada $y \in Y$:

$$\|y\|_n := \text{ínf}\{\|u\| + n\|v\| : u \in X, v \in Y, y = T(u) + v\}$$

Probar que $\|\cdot\|_n$ es una norma en Y, para todo $n \in \mathbb{N}$, que verifica:

$$\|y\|_n \leqslant n\|y\| \qquad \forall y \in Y$$

Además, si $y = T(x)$, con $x \in X$, entonces:

$$\|y\| \leqslant \|x\|$$