

# Topología II

# Examen II

Foto: José Juan Castro

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



**Los Del DGIIM**, [losdeldgim.github.io](https://losdeldgim.github.io)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Topología II

# Examen II

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

Granada, 2025

**Asignatura** Topología II.

**Curso Académico** 2024/25.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Grupo Único.

**Descripción** Prueba del Tema 1.

**Fecha** 21 de noviembre de 2024.

**Ejercicio 1.** Elija uno de los siguientes ejercicios:

- a) Sea  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  una aplicación continua e inyectiva. Demuestra que  $f$  es sobreyectiva.
- b) Prueba que no existe una retracción  $r : \mathbb{S}^2 \rightarrow E$  donde  $E$  es el ecuador de la esfera, es decir

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z = 0\}$$

**Ejercicio 2.** Sean  $S_1$  y  $S_2$  las esferas de  $\mathbb{R}^3$  de radio 1 con centros respectivos en los puntos  $(2, 0, 0)$  y  $(-2, 0, 0)$ , calcula el grupo fundamental de

$$X = S_1 \cup S_2 \cup R$$

en el origen, donde  $R = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ . Determina lazos basados en el origen cuyas clases de equivalencia generen  $\pi_1(X, (0, 0, 0))$ .

**Solución.**

**Ejercicio 1.** Elija uno de los siguientes ejercicios:

- a) Sea  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  una aplicación continua e inyectiva. Demuestra que  $f$  es sobreyectiva.

Supuesto que  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación continua, inyectiva y no sobreyectiva, tenemos entonces que existe  $y \in \mathbb{S}^2$  de forma que  $f(x) \neq y \quad \forall x \in \mathbb{S}^2$ . Como  $\mathbb{S}^2 \setminus \{y\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , podemos considerar un homeomorfismo  $g : \mathbb{S}^2 \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . De esta forma, tenemos que  $(g \circ f) : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una aplicación continua e inyectiva (como composición de aplicaciones inyectivas), pero esto contradice el Teorema de Borsuk-Ulam: si  $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es continua entonces existe  $x_0 \in \mathbb{S}^2$  tal que  $h(x_0) = h(-x_0)$ .

- b) Prueba que no existe una retracción  $r : \mathbb{S}^2 \rightarrow E$  donde  $E$  es el ecuador de la esfera, es decir

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z = 0\}$$

Por reducción al absurdo, si existiera una retracción  $r : \mathbb{S}^2 \rightarrow E$ , tendríamos entonces que la inclusión  $i : E \hookrightarrow \mathbb{S}^2$  induce un homomorfismo inyectivo entre grupos fundamentales (no especificamos el punto en los grupos fundamentales, pensando en que como los dos conjuntos son arcoconexos estos serán isomórficos):

$$i_* : \pi_1(E) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^2)$$

Como  $\pi_1(\mathbb{S}^2) = \{1\}$ , ha de ser entonces  $\pi_1(E) = \{1\}$  para que  $i_*$  sea inyectiva. Sin embargo, tenemos que:

$$E = \mathbb{S}^1 \times \{0\} \cong \mathbb{S}^1$$

Por lo que:

$$\pi_1(E) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

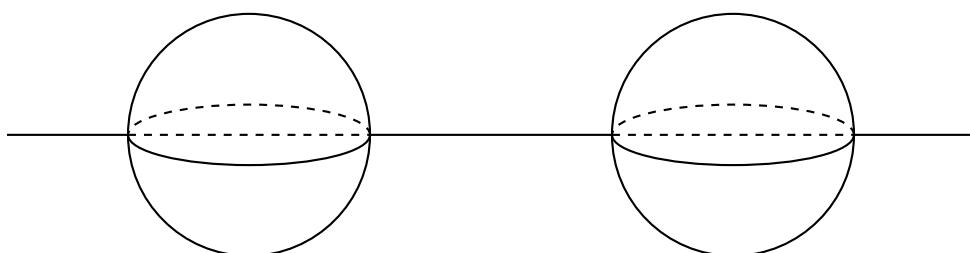
Hemos llegado a una contradicción.

**Ejercicio 2.** Sean  $S_1$  y  $S_2$  las esferas de  $\mathbb{R}^3$  de radio 1 con centros respectivos en los puntos  $(2, 0, 0)$  y  $(-2, 0, 0)$ , calcula el grupo fundamental de

$$X = S_1 \cup S_2 \cup R$$

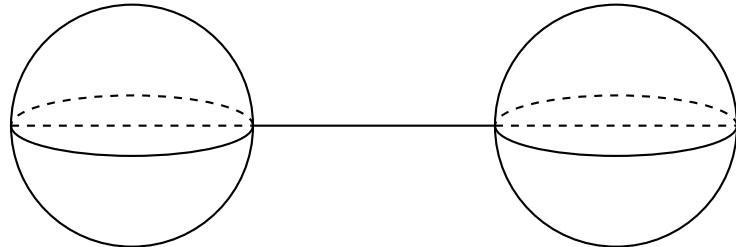
en el origen, donde  $R = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ . Determina lazos basados en el origen cuyas clases de equivalencia generen  $\pi_1(X, (0, 0, 0))$ .

Tenemos el conjunto:



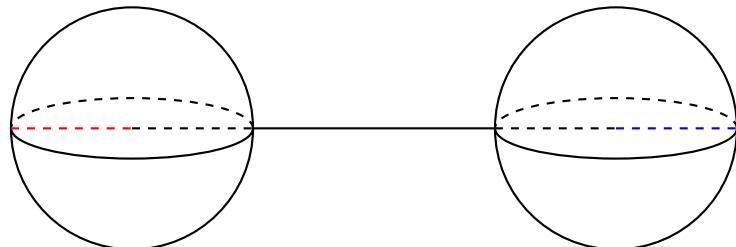
Que tiene como retracto de deformación el conjunto:

$$Y = S_1 \cup S_2 \cup [(-3, 0, 0), (3, 0, 0)]$$



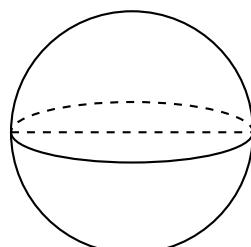
Podemos considerar los conjuntos:

$$U = Y \setminus [(-3, 0, 0), (-2, 0, 0)], \quad V = Y \setminus [(2, 0, 0), (3, 0, 0)]$$



Y tenemos que:

- Claramente  $Y = U \cup V$  con  $U$  y  $V$  abiertos.
- $U$ ,  $V$  y  $U \cap V$  son arcoconexos como unión de ciertos conjuntos arcoconexos con intersección no vacía.
- $U \cap V$  tiene como retracto de deformación el conjunto  $[(-1, 0, 0), (1, 0, 0)]$ , que claramente es simplemente conexo.
- $U$  tiene como retracto de deformación el conjunto  $Z = S_2 \cup [(1, 0, 0), (3, 0, 0)]$ :



Si en este tomamos:

$$W = Z \setminus \{(2, 0, 0)\}, \quad K = Z \setminus \{(2, 0, 1)\}$$

Tenemos:

- $W$  y  $K$  son abiertos con  $Z = W \cup K$ .
- $W$ ,  $K$  y  $W \cap K$  son arcoconexos como unión de conjuntos arcoconexos con intersección no vacía.
- $W$  tiene a  $S_2$  como retracto de deformación, por lo que  $W$  es simplemente conexo.
- $W \cap K$  tiene a  $S_2 \setminus \{(2, 0, 1)\}$  como retracto de deformación, que es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , por lo que  $W \cap K$  es simplemente conexo.
- $K$  tiene al conjunto:

$$[(1, 0, 0), (3, 0, 0)] \cup \{(x, 0, z) \in S_2 : z \leq 0\}$$

como retracto de deformación, homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ , por lo que  $\pi_1(K) \cong \mathbb{Z}$ .

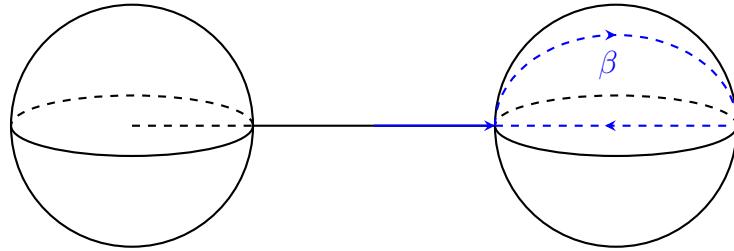
Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen obtenemos que  $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$ .

- $U$  y  $V$  son claramente homeomorfos (basta considerar una rotación), por lo que también será  $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$ .

Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen concluimos que:

$$\pi_1(X) = \pi_1(Y) = \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

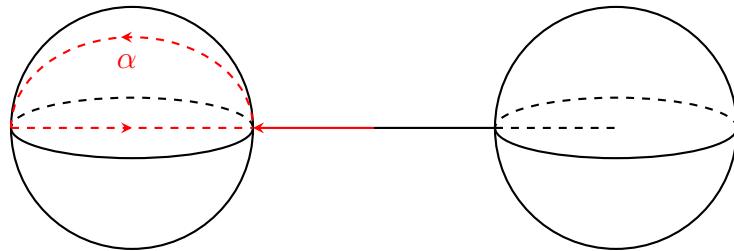
Ahora, vimos que  $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$ , por lo que dicho grupo ha de tener un generador, tal y como lo es la clase del lazo  $\beta \in \Omega(U, (0, 0, 0))$ :



Ya que como podemos ver,  $\beta$  no puede ser homotópico a  $[\varepsilon_{(0,0,0)}]$  y vemos que de  $Im\beta$  no podemos extraer otro lazo “que dé menos vueltas que  $\beta$ ”, por lo que la clase de  $\beta$  debe corresponderse mediante el isomorfismo  $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$  bien con 1 o con  $-1$ , ambos generadores de  $\mathbb{Z}$ , luego:

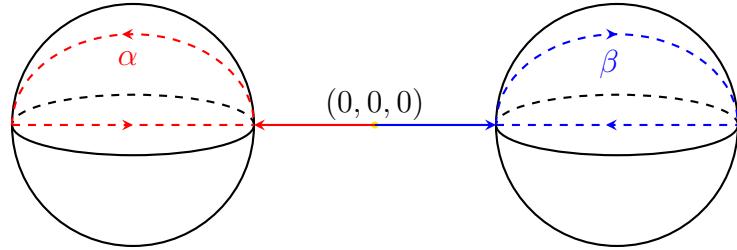
$$\pi_1(U, (0, 0, 0)) = \langle [\beta] \mid_U \rangle$$

El caso de  $V$  es análogo, sin más que considerar el siguiente lazo  $\alpha \in \Omega(V, (0, 0, 0))$ :



Obteniendo así:

$$\pi_1(V, (0, 0, 0)) = \langle [\alpha] \big|_V \rangle$$



Por el Teorema de Seifert-van Kampen, tendremos entonces que:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, (0, 0, 0)) &\cong \pi_1(Y, (0, 0, 0)) \cong \pi_1(U, (0, 0, 0)) * \pi_1(V, (0, 0, 0)) \\ &= \langle [\beta] \big|_U \rangle * \langle [\alpha] \big|_V \rangle = \langle [\beta] \big|_U, [\alpha] \big|_V \rangle \end{aligned}$$