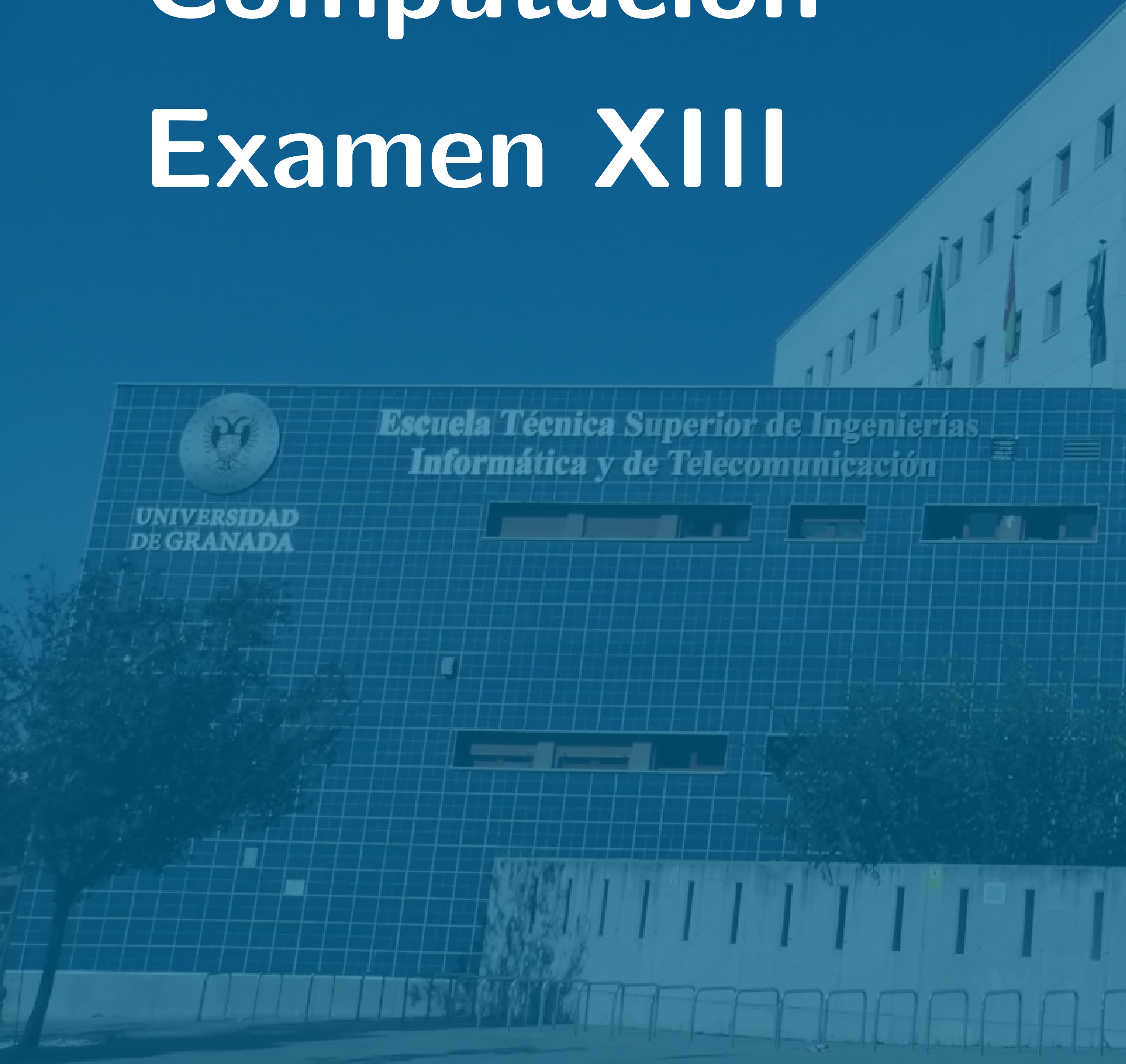
# Modelos de Computación Examen XIII




**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Modelos de Computación Examen XIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

**Asignatura** Modelos de Computación

**Curso Académico** 2019-20.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas o ADE.

**Grupo** Único.

**Descripción** Convocatoria Extraordinaria.

**Fecha** 30 de enero de 2020.

**Duración** 3 horas.

**Ejercicio 1** (2.5 puntos)**.** Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si $L$ es un lenguaje, entonces $L\emptyset = L$.
2. Si $L$ es un lenguaje y $\varepsilon \notin L$, entonces $L^+ = L^*$.
3. La aplicación $f : A^* \to A^*$, dada por $f(u) = uu^{-1}$ es un homomorfismo.
4. Si $r_1$ y $r_2$ son expresiones regulares, entonces $(r_1^* + r_2^*)^* = (r_1 + r_2)^*$.
5. Si $M$ es un autómata no determinista con transiciones nulas, entonces si Cl es el operador clausura aplicado a un conjunto de estados, tenemos que, para cualquier subconjunto de estados $P$, $\mathrm{Cl}(P) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(P))$.
6. El conjunto de palabras sobre $\{0, 1\}$ que interpretadas como un número en binario son múltiplos de 13 constituyen un lenguaje regular.
7. El conjunto de palabras sobre un alfabeto cualquiera cuya longitud es un número primo constituyen un lenguaje independiente del contexto.
8. Existe un algoritmo para comprobar si una gramática independiente del contexto es ambigua.
9. Existe un algoritmo para comprobar si el lenguaje generado por una gramática independiente del contexto es finito.
10. El complementario de un lenguaje independiente del contexto determinista es siempre determinista.

**Ejercicio 2** (2.5 puntos)**.** Encontrar autómatas con pila deterministas que acepten los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}$.

1. Palabras en las que el número de ceros es mayor o igual al doble del número de unos.
2. $L = \{0^i 1^{i+j} 0^j \mid i, j \geqslant 1\}$.

**Ejercicio 3** (2.5 puntos)**.** Dar expresiones regulares para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}$.

1. Palabras que no contienen la subcadena 010.
2. Palabras de longitud impar en las que el símbolo central es un 0.
3. Palabras que no empiezan por 011.

**Ejercicio 4** (2.5 puntos)**.** Pasa a forma normal de Greibach la siguiente gramática:

$$\begin{aligned} S &\to S + T \mid T, \\ T &\to T * F \mid F, \\ F &\to (E) \mid a \mid b. \end{aligned}$$

Las variables son $S$, $T$, $F$ y los símbolos terminales $(, ), *, +, a, b$.

# Soluciones

**Ejercicio 1** (2.5 puntos)**.** Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si $L$ es un lenguaje, entonces $L\emptyset = L$.

   Tenemos que:
   $$L\emptyset = L \iff L = \emptyset$$

   Por tanto, por norma general, es falso.

2. Si $L$ es un lenguaje y $\varepsilon \notin L$, entonces $L^+ = L^*$.

   Falso, ya que:
   $$L^+ = \bigcup_{i\geqslant 1} L^i \neq \bigcup_{i\geqslant 0} L^i = L^*$$

3. La aplicación $f : A^* \to A^*$, dada por $f(u) = uu^{-1}$ es un homomorfismo.

   Falso. Por ejemplo, dado $A = \{0, 1\}$, tenemos que:
   $$\begin{aligned} f(0) &= 00 \\ f(1) &= 11 \\ f(01) &= 0110 \neq 0011 = f(0)f(1) \end{aligned}$$

4. Si $r_1$ y $r_2$ son expresiones regulares, entonces $(r_1^* + r_2^*)^* = (r_1 + r_2)^*$.

   Verdadero.

5. Si $M$ es un autómata no determinista con transiciones nulas, entonces si Cl es el operador clausura aplicado a un conjunto de estados, tenemos que, para cualquier subconjunto de estados $P$, $\mathrm{Cl}(P) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(P))$.

   Cierto.

6. El conjunto de palabras sobre $\{0, 1\}$ que interpretadas como un número en binario son múltiplos de 13 constituyen un lenguaje regular.

   Cierto, ya que podemos dar un autómata (que de hecho tendrá 13 estados).

7. El conjunto de palabras sobre un alfabeto cualquiera cuya longitud es un número primo constituyen un lenguaje independiente del contexto.

   Falso, hemos visto que:
   $$L = \{a^n \mid n \text{ es primo}\}$$

   no es independiente del contexto.

8. Existe un algoritmo para comprobar si una gramática independiente del contexto es ambigua.

   No, es un problema indecidible.

9. Existe un algoritmo para comprobar si el lenguaje generado por una gramática independiente del contexto es finito.

   Sí, es cierto y se ha visto en Teoría.

10. El complementario de un lenguaje independiente del contexto determinista es siempre determinista.

    Sí, es cierto. Para un lenguaje independiente del contexto en general no, pero si es determinista sí.

**Ejercicio 2** (2.5 puntos)**.** Encontrar autómatas con pila deterministas que acepten los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}$.

1. Palabras en las que el número de ceros es mayor o igual al doble del número de unos.

   Sea el autómata $M$ que acepta el lenguaje por el criterio de estados finales, donde:

$$M = (\{q_0, q, q', q_f\}, \{0, 1\}, \{Z_0, 0, 1, 1_i\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_0, q_f\})$$

   donde la función de transición $\delta$ está dada por:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= \{(q_f, 00Z_0)\} \\
\delta(q_0, 1, Z_0) &= \{(q, 1_iZ_0)\} \\
\\
\delta(q, 1, 1) &= \{(q, 11)\} \\
\delta(q, 0, 1) &= \{(q', \varepsilon)\} \\
\delta(q, 1, 1_i) &= \{(q, 11_i)\} \\
\delta(q, 0, 1_i) &= \{(q_f, 0)\} \\
\\
\delta(q', \varepsilon, 1_i) &= \{(q_f, \varepsilon)\} \\
\delta(q', \varepsilon, 1) &= \{(q, \varepsilon)\} \\
\\
\delta(q_f, 0, Z_0) &= \{(q_f, 00Z_0)\} \\
\delta(q_f, 1, Z_0) &= \{(q, 1_iZ_0)\} \\
\delta(q_f, 0, 0) &= \{(q_f, 000)\} \\
\delta(q_f, 1, 0) &= \{(q', \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

2. $L = \{0^i 1^{i+j} 0^j \mid i, j \geqslant 1\}$.

   Sea el autómata $M$ que acepta el lenguaje por ambos criterios (tanto estados finales como pila vacía), donde:

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{0, 1\}, \{Z_0, X, Y\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\})$$

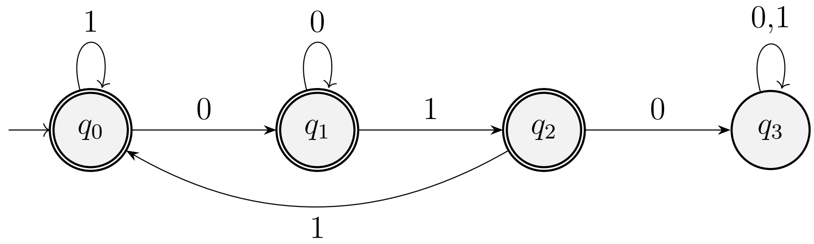



Figura 1: AFD que acepta el lenguaje de palabras que no contienen la subcadena 010.

donde la función de transición $\delta$ está dada por:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0) &= \{(q_0, XZ_0)\} \\
\delta(q_0, 0, X) &= \{(q_0, XX)\} \\
\delta(q_0, 1, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, 1, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, 1, Z_0) &= \{(q_1, Y)\} \\
\delta(q_1, 1, Y) &= \{(q_1, YY)\} \\
\delta(q_1, 0, Y) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, 0, Y) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_f, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

**Ejercicio 3** (2.5 puntos)**.** Dar expresiones regulares para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}$.

1. Palabras que no contienen la subcadena 010.

   El AFD que acepta este lenguaje está en la Figura 1.

   Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
q_0 &= 1q_0 + 0q_1 + \varepsilon \\
q_1 &= 0q_1 + 1q_2 + \varepsilon \\
q_2 &= 1q_0 + 0q_3 + \varepsilon \\
q_3 &= (0+1)q_3
\end{aligned}$$

   Por el Lema de Arden, tenemos que $q_3 \equiv (0+1)^*\emptyset = \emptyset$, luego:

$$\begin{aligned}
q_0 &= 1q_0 + 0q_1 + \varepsilon \\
q_1 &= 0q_1 + 1q_2 + \varepsilon \\
q_2 &= 1q_0 + \varepsilon
\end{aligned}$$

   Sustituyendo el valor de $q_2$ en $q_1$:

$$\begin{aligned}
q_1 &= 0q_1 + 1[1q_0 + \varepsilon] + \varepsilon \\
&= 0^*\left[11q_0 + 1 + \varepsilon\right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $q_1$ en $q_0$:

$$\begin{aligned} q_0 &= 1q_0 + 00^* \left[11q_0 + 1 + \varepsilon\right] + \varepsilon \\ &= (1 + 0^+11)q_0 + \left[0^+1 + 0^+ + \varepsilon\right] \\ &= (1 + 0^+11)^* \left[0^+1 + 0^+ + \varepsilon\right] \end{aligned}$$

Por tanto, la expresión regular es $(1 + 0^+11)^* \left[0^+1 + 0^+ + \varepsilon\right]$.

2. Palabras de longitud impar en las que el símbolo central es un 0.

   Demostraremos mediante el lema de bombeo que no es regular, por lo que no podremos encontrar dicha expresión regular. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos la palabra $z = 1^n01^n$, que cumple que $|z| = 2n+1 \geqslant n$. Además, $2n+1$ es impar y el símbolo central es un 0, luego $z \in L$. Para toda descomposición $z = uvw$ con $|uv| \leqslant n$ y $|v| \geqslant 1$, tenemos que:

   $$u = 1^k, \quad v = 1^l, \quad w = 1^{n-k-l}01^n \qquad 0 \leqslant k + l \leqslant n, \quad l \geqslant 1$$

   Bombeando con $i = 2$, tenemos que:

   $$uv^2w = 1^k1^{2l}1^{n-k-l}01^n = 1^{n+l}01^n \notin L$$

   ya que $n + l \neq n$, luego el 0 no es el símbolo central.

3. Palabras que no empiezan por 011.

   Veamos en primer momento todas las palabras $u \in \{0, 1\}^*$ tal que $|u| = 3$:

   $$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$$

   La expresión regular de las palabras que no empiezan por 011 es:

   $$(000+001+010+100+101+110+111)^+(0+1)^*+00+01+10+11+0+1+\varepsilon$$

**Ejercicio 4** (2.5 puntos)**.** Pasa a forma normal de Greibach la siguiente gramática:

$$\begin{aligned} &S \to S + T \mid T, \\ &T \to T * F \mid F, \\ &F \to (E) \mid a \mid b. \end{aligned}$$

Las variables son $S$, $T$, $F$ y los símbolos terminales $(, ), *, +, a, b$.

El símbolo $E$ no nos especifican qué es, por lo que puede ser una variable o que haya sido un error y se trate de una $S$. Lo resolveremos de ambas formas.

**Si en realidad es una $S$:**

En primer lugar, y como no hay producciones nulas, eliminamos las producciones unitarias. Sea $H$ el conjunto de pares $(A, B)$ de forma que $A \overset{*}{\Rightarrow} B$.

$$H = \{(S, T), (T, F), (S, F)\}$$

Por tanto, eliminamos las producciones unitarias:

$$\begin{aligned} S &\to S+T \mid T*F \mid (S) \mid a \mid b, \\ T &\to T*F \mid (S) \mid a \mid b, \\ F &\to (S) \mid a \mid b. \end{aligned}$$

Pasamos ahora la gramática a la forma necesaria para poder aplicar el algoritmo de Greibach.

$$\begin{aligned} S &\to SC_+T \mid TC_*F \mid (SC_) \mid a \mid b, \\ T &\to TC_*F \mid (SC_) \mid a \mid b, \\ F &\to (SC_) \mid a \mid b, \\ C_+ &\to +, \\ C_* &\to *, \\ C_) &\to ), \end{aligned}$$

Cambiamos ahora la sumeración de las variables en las producciones. Esta numeración va a ser:

$$A_1 = S, \qquad A_2 = T, \qquad A_3 = F, \qquad A_4 = C_+, \qquad A_5 = C_*, \qquad A_6 = C_)$$

De esta forma, tenemos que la gramática es:

$$\begin{aligned} A_1 &\to A_1A_4A_2 \mid A_2A_5A_3 \mid (A_1A_6 \mid a \mid b, \\ A_2 &\to A_2A_5A_3 \mid (A_1A_6 \mid a \mid b, \\ A_3 &\to (A_1A_6 \mid a \mid b, \\ A_4 &\to +, \\ A_5 &\to *, \\ A_6 &\to ), \end{aligned}$$

Comenzamos con la primera parte del algoritmo. Aplicamos Elimina$_2(A_1)$:

$$\begin{aligned} A_1 &\to A_2A_5A_3 \mid (A_1A_6 \mid a \mid b \mid A_2A_5A_3B_{A_1} \mid (A_1A_6B_{A_1} \mid aB_{A_1} \mid bB_{A_1}, \\ B_{A_1} &\to A_1A_4A_2 \mid A_1A_4A_2B_{A_1} \\ A_2 &\to A_2A_5A_3 \mid (A_1A_6 \mid a \mid b, \\ A_3 &\to (A_1A_6 \mid a \mid b, \\ A_4 &\to +, \\ A_5 &\to *, \\ A_6 &\to ), \end{aligned}$$

Aplicamos ahora $\text{Elimina}_2(A_2)$:

$$\begin{aligned}
A_1 &\to A_2A_5A_3 \mid (A_1A_6 \mid a \mid b \mid A_2A_5A_3B_{A_1} \mid (A_1A_6B_{A_1} \mid aB_{A_1} \mid bB_{A_1},\\
B_{A_1} &\to A_1A_4A_2 \mid A_1A_4A_2B_{A_1}\\
A_2 &\to (A_1A_6 \mid a \mid b \mid (A_1A_6B_{A_2} \mid aB_{A_2} \mid bB_{A_2}\\
B_{A_2} &\to A_2A_5A_3 \mid A_2A_5A_3B_{A_2}\\
A_3 &\to (A_1A_6 \mid a \mid b,\\
A_4 &\to +,\\
A_5 &\to *,\\
A_6 &\to ),
\end{aligned}$$

Una vez en la segunda parte del algoritmo, comenzamos aplicando la función $\text{Elimina}_1(A_1 \to A_2A_5A_3)$:

$$\begin{aligned}
A_1 &\to (A_1A_6 \mid a \mid b \mid A_2A_5A_3B_{A_1} \mid (A_1A_6B_{A_1} \mid aB_{A_1} \mid bB_{A_1} \mid\\
&\qquad \mid (A_1A_6A_5A_3 \mid aA_5A_3 \mid bA_5A_3 \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3 \mid aB_{A_2}A_5A_3 \mid bB_{A_2}A_5A_3\\
B_{A_1} &\to A_1A_4A_2 \mid A_1A_4A_2B_{A_1}\\
A_2 &\to (A_1A_6 \mid a \mid b \mid (A_1A_6B_{A_2} \mid aB_{A_2} \mid bB_{A_2}\\
B_{A_2} &\to A_2A_5A_3 \mid A_2A_5A_3B_{A_2}\\
A_3 &\to (A_1A_6 \mid a \mid b,\\
A_4 &\to +,\\
A_5 &\to *,\\
A_6 &\to ),
\end{aligned}$$

Aplicamos ahora $\text{Elimina}_1(A_1 \to A_2A_5A_3B_{A_1})$:

$$\begin{aligned}
A_1 &\to (A_1A_6 \mid a \mid b \mid (A_1A_6B_{A_1} \mid aB_{A_1} \mid bB_{A_1} \mid\\
&\quad \mid (A_1A_6A_5A_3 \mid aA_5A_3 \mid bA_5A_3 \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3 \mid aB_{A_2}A_5A_3 \mid bB_{A_2}A_5A_3 \mid\\
&\quad \mid (A_1A_6A_5A_3B_{A_1} \mid aA_5A_3B_{A_1} \mid bA_5A_3B_{A_1} \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \mid\\
&\quad \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}\\
B_{A_1} &\to A_1A_4A_2 \mid A_1A_4A_2B_{A_1}\\
A_2 &\to (A_1A_6 \mid a \mid b \mid (A_1A_6B_{A_2} \mid aB_{A_2} \mid bB_{A_2}\\
B_{A_2} &\to A_2A_5A_3 \mid A_2A_5A_3B_{A_2}\\
A_3 &\to (A_1A_6 \mid a \mid b,\\
A_4 &\to +,\\
A_5 &\to *,\\
A_6 &\to ),
\end{aligned}$$

Aplicamos ahora Elimina$_1(B_{A_1} \to A_1A_4A_2)$:

$$
\begin{aligned}
A_1 \to\ & (A_1A_6 \mid a \mid b \mid (A_1A_6B_{A_1} \mid aB_{A_1} \mid bB_{A_1} \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3 \mid aA_5A_3 \mid bA_5A_3 \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3 \mid aB_{A_2}A_5A_3 \mid bB_{A_2}A_5A_3 \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3B_{A_1} \mid aA_5A_3B_{A_1} \mid bA_5A_3B_{A_1} \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \mid \\
& \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \\
B_{A_1} \to\ & A_1A_4A_2B_{A_1} \mid \\
& \mid (A_1A_6A_4A_2 \mid aA_4A_2 \mid bA_4A_2 \mid (A_1A_6B_{A_1}A_4A_2 \mid aB_{A_1}A_4A_2 \mid bB_{A_1}A_4A_2 \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3A_4A_2 \mid aA_5A_3A_4A_2 \mid bA_5A_3A_4A_2 \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid aB_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid \\
& \mid bB_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid aA_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid bA_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid \\
& \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \\
A_2 \to\ & (A_1A_6 \mid a \mid b \mid (A_1A_6B_{A_2} \mid aB_{A_2} \mid bB_{A_2} \\
B_{A_2} \to\ & A_2A_5A_3 \mid A_2A_5A_3B_{A_2} \\
A_3 \to\ & (A_1A_6 \mid a \mid b, \\
A_4 \to\ & +, \\
A_5 \to\ & *, \\
A_6 \to\ & ),
\end{aligned}
$$

Aplicamos ahora Elimina$_1(B_{A_1} \to A_1A_4A_2B_{A_1})$:

$$
\begin{aligned}
A_1 \to\ & (A_1A_6 \mid a \mid b \mid (A_1A_6B_{A_1} \mid aB_{A_1} \mid bB_{A_1} \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3 \mid aA_5A_3 \mid bA_5A_3 \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3 \mid aB_{A_2}A_5A_3 \mid bB_{A_2}A_5A_3 \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3B_{A_1} \mid aA_5A_3B_{A_1} \mid bA_5A_3B_{A_1} \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \mid \\
& \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \\
B_{A_1} \to\ & (A_1A_6A_4A_2 \mid aA_4A_2 \mid bA_4A_2 \mid (A_1A_6B_{A_1}A_4A_2 \mid aB_{A_1}A_4A_2 \mid bB_{A_1}A_4A_2 \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3A_4A_2 \mid aA_5A_3A_4A_2 \mid bA_5A_3A_4A_2 \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid aB_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid \\
& \mid bB_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid aA_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid bA_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid \\
& \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid \\
& \\
& \mid (A_1A_6A_4A_2B_{A_1} \mid aA_4A_2B_{A_1} \mid bA_4A_2B_{A_1} \mid (A_1A_6B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid aB_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid \\
& \mid bB_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid aA_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid bA_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid \\
& \mid aB_{A_2}A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid aA_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid bA_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid \\
& \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \\
A_2 \to\ & (A_1A_6 \mid a \mid b \mid (A_1A_6B_{A_2} \mid aB_{A_2} \mid bB_{A_2} \\
B_{A_2} \to\ & A_2A_5A_3 \mid A_2A_5A_3B_{A_2} \\
A_3 \to\ & (A_1A_6 \mid a \mid b, \\
A_4 \to\ & +, \\
A_5 \to\ & *, \\
A_6 \to\ & ),
\end{aligned}
$$

Aplicamos ahora Elimina$_1(B_{A_2} \to A_2A_5A_3)$:

$$
\begin{aligned}
A_1 \to{} & (A_1A_6 \mid a \mid b \mid (A_1A_6B_{A_1} \mid aB_{A_1} \mid bB_{A_1} \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3 \mid aA_5A_3 \mid bA_5A_3 \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3 \mid aB_{A_2}A_5A_3 \mid bB_{A_2}A_5A_3 \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3B_{A_1} \mid aA_5A_3B_{A_1} \mid bA_5A_3B_{A_1} \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \mid \\
& \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \\
B_{A_1} \to{} & (A_1A_6A_4A_2 \mid aA_4A_2 \mid bA_4A_2 \mid (A_1A_6B_{A_1}A_4A_2 \mid aB_{A_1}A_4A_2 \mid bB_{A_1}A_4A_2 \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3A_4A_2 \mid aA_5A_3A_4A_2 \mid bA_5A_3A_4A_2 \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid aB_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid \\
& \mid bB_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid aA_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid bA_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid \\
& \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid \\
& \\
& \mid (A_1A_6A_4A_2B_{A_1} \mid aA_4A_2B_{A_1} \mid bA_4A_2B_{A_1} \mid (A_1A_6B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid aB_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid \\
& \mid bB_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid aA_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid bA_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid \\
& \mid aB_{A_2}A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid aA_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid bA_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid \\
& \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \\
A_2 \to{} & (A_1A_6 \mid a \mid b \mid (A_1A_6B_{A_2} \mid aB_{A_2} \mid bB_{A_2} \\
B_{A_2} \to{} & A_2A_5A_3B_{A_2} \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3 \mid aA_5A_3 \mid bA_5A_3 \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3 \mid aB_{A_2}A_5A_3 \mid bB_{A_2}A_5A_3 \\
A_3 \to{} & (A_1A_6 \mid a \mid b, \\
A_4 \to{} & +, \\
A_5 \to{} & *, \\
A_6 \to{} & ),
\end{aligned}
$$

Aplicamos ahora Elimina$_1$($B_{A_2} \to A_2A_5A_3B_{A_2}$):

$$\begin{aligned}
A_1 \to\ & (A_1A_6 \mid a \mid b \mid (A_1A_6B_{A_1} \mid aB_{A_1} \mid bB_{A_1} \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3 \mid aA_5A_3 \mid bA_5A_3 \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3 \mid aB_{A_2}A_5A_3 \mid bB_{A_2}A_5A_3 \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3B_{A_1} \mid aA_5A_3B_{A_1} \mid bA_5A_3B_{A_1} \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \mid \\
& \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \\
B_{A_1} \to\ & (A_1A_6A_4A_2 \mid aA_4A_2 \mid bA_4A_2 \mid (A_1A_6B_{A_1}A_4A_2 \mid aB_{A_1}A_4A_2 \mid bB_{A_1}A_4A_2 \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3A_4A_2 \mid aA_5A_3A_4A_2 \mid bA_5A_3A_4A_2 \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid aB_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid \\
& \mid bB_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid aA_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid bA_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid \\
& \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid \\
& \\
& \mid (A_1A_6A_4A_2B_{A_1} \mid aA_4A_2B_{A_1} \mid bA_4A_2B_{A_1} \mid (A_1A_6B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid aB_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid \\
& \mid bB_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid aA_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid bA_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid \\
& \mid aB_{A_2}A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid aA_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid bA_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid \\
& \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \\
A_2 \to\ & (A_1A_6 \mid a \mid b \mid (A_1A_6B_{A_2} \mid aB_{A_2} \mid bB_{A_2} \\
B_{A_2} \to\ & (A_1A_6A_5A_3 \mid aA_5A_3 \mid bA_5A_3 \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3 \mid aB_{A_2}A_5A_3 \mid bB_{A_2}A_5A_3 \mid \\
& \\
& \mid (A_1A_6A_5A_3B_{A_2} \mid aA_5A_3B_{A_2} \mid bA_5A_3B_{A_2} \mid (A_1A_6B_{A_2}A_5A_3B_{A_2} \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_2} \mid \\
& \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_2} \\
A_3 \to\ & (A_1A_6 \mid a \mid b, \\
A_4 \to\ & +, \\
A_5 \to\ & *, \\
A_6 \to\ & ),
\end{aligned}$$

Llegados a este punto, la gramática está en Forma Normal de Greibach. Como vemos, esta opción es muy compleja, por lo que dudamos que se tratase de este caso.

### Suponiendo que $E$ es una variable

Buscamos eliminar en primer lugar las variables desde las que no se puede llegar a una palabra terminal. Sea $V_t$ las variables desde las que se puede llegar a una palabra terminal:

$$V_t = \{F, T, E\}$$

Por tanto, $V \setminus V_t = \{E\}$, por lo que eliminamos $E$ y todas las producciones en las que aparece:

$$
\begin{aligned}
S &\to S + T \mid T,\\
T &\to T * F \mid F,\\
F &\to a \mid b.
\end{aligned}
$$

Buscamos ahora eliminar los símbolos que no sean alcanzables desde el símbolo inicial $S$, y las producciones en las que aparecen. Sea $V_S$ las variables alcanzables ya detectadas como alcanzables, $J$ las variables alcanzables desde $S$ que no hemos explorado, y $T_S$ los símbolos terminales alcanzables desde $S$. Inicialmente, $V_S = \{S\}$, $J = \{S\}$ y $T_S = \emptyset$.

Extraemos $S$ de $J$, por lo que $J = \emptyset$. Tras procesar las producciones de $S$, obtenemos que $T_S = \{+\}$, $V_S = \{S, T\}$ y $J = \{T\}$.

Extraemos $T$ de $J$, por lo que $J = \emptyset$. Tras procesar las producciones de $T$, obtenemos que $T_S = \{+, *\}$, $V_S = \{S, T, F\}$ y $J = \{F\}$.

Extraemos $F$ de $J$, por lo que $J = \emptyset$. Tras procesar las producciones de $F$, obtenemos que $T_S = \{+, *, a, b\}$, $V_S = \{S, T, F\}$ y $J = \emptyset$.

Como $J = \emptyset$, hemos terminado. Como $V \setminus \{V_S\} = \emptyset$, no hemos eliminado ninguna variable, pero eliminamos los símbolos $A \setminus T_S = \{(,\ )\}$. No obstante, como no hay producciones en las que aparezcan, no eliminamos ninguna producción. La gramática tras haber aplicado el algoritmo de eliminación de variables y símbolos inútiles es:

$$
\begin{aligned}
S &\to S + T \mid T,\\
T &\to T * F \mid F,\\
F &\to a \mid b.
\end{aligned}
$$

Ahora, y como no hay producciones nulas, eliminamos las producciones unitarias. Sea $H$ el conjunto de pares $(A, B)$ de forma que $A \overset{*}{\Rightarrow} B$.

$$H = \{(S, T), (T, F), (S, F)\}$$

Por tanto, eliminamos las producciones unitarias:

$$
\begin{aligned}
S &\to S + T \mid T * F \mid a \mid b,\\
T &\to T * F \mid a \mid b,\\
F &\to a \mid b.
\end{aligned}
$$

Pasamos ahora la gramática a la forma necesaria para poder aplicar el algoritmo de Greibach.

$$
\begin{aligned}
S &\to SC_+T \mid TC_*F \mid a \mid b,\\
T &\to TC_*F \mid a \mid b,\\
F &\to a \mid b,\\
C_+ &\to +,\\
C_* &\to *
\end{aligned}
$$

Cambiamos ahora la sumeración de las variables en las producciones. Esta numeración va a ser:

$$A_1 = S, \qquad A_2 = T, \qquad A_3 = F, \qquad A_4 = C_+, \qquad A_5 = C_*$$

De esta forma, tenemos que la gramática es:

$$\begin{aligned}
A_1 &\to A_1A_4A_2 \mid A_2A_5A_3 \mid a \mid b,\\
A_2 &\to A_2A_5A_3 \mid a \mid b,\\
A_3 &\to a \mid b,\\
A_4 &\to +,\\
A_5 &\to *
\end{aligned}$$

Comenzamos con la primera parte del algoritmo. Aplicamos Elimina$_2(A_1)$:

$$\begin{aligned}
A_1 &\to A_2A_5A_3 \mid a \mid b \mid A_2A_5A_3B_{A_1} \mid aB_{A_1} \mid bB_{A_1},\\
B_{A_1} &\to A_1A_4A_2 \mid A_1A_4A_2B_{A_1}\\
A_2 &\to A_2A_5A_3 \mid a \mid b,\\
A_3 &\to a \mid b,\\
A_4 &\to +,\\
A_5 &\to *
\end{aligned}$$

Aplicamos ahora Elimina$_2(A_2)$:

$$\begin{aligned}
A_1 &\to A_2A_5A_3 \mid a \mid b \mid A_2A_5A_3B_{A_1} \mid aB_{A_1} \mid bB_{A_1},\\
B_{A_1} &\to A_1A_4A_2 \mid A_1A_4A_2B_{A_1}\\
A_2 &\to a \mid b \mid aB_{A_2} \mid bB_{A_2}\\
B_{A_2} &\to A_2A_5A_3 \mid A_2A_5A_3B_{A_2}\\
A_3 &\to a \mid b,\\
A_4 &\to +,\\
A_5 &\to *
\end{aligned}$$

Una vez en la segunda parte del algoritmo, comenzamos aplicando la función Elimina$_1(A_1 \to A_2A_5A_3)$:

$$\begin{aligned}
A_1 &\to a \mid b \mid A_2A_5A_3B_{A_1} \mid aB_{A_1} \mid bB_{A_1} \mid aA_5A_3 \mid bA_5A_3 \mid aB_{A_2}A_5A_3 \mid bB_{A_2}A_5A_3\\
B_{A_1} &\to A_1A_4A_2 \mid A_1A_4A_2B_{A_1}\\
A_2 &\to a \mid b \mid aB_{A_2} \mid bB_{A_2}\\
B_{A_2} &\to A_2A_5A_3 \mid A_2A_5A_3B_{A_2}\\
A_3 &\to a \mid b,\\
A_4 &\to +,\\
A_5 &\to *
\end{aligned}$$

Aplicamos ahora Elimina$_1(A_1 \to A_2A_5A_3B_{A_1})$:

$$\begin{aligned}
A_1 &\to a \mid b \mid aB_{A_1} \mid bB_{A_1} \mid aA_5A_3 \mid bA_5A_3 \mid aB_{A_2}A_5A_3 \mid bB_{A_2}A_5A_3 \mid \\
&\qquad \mid aA_5A_3B_{A_1} \mid bA_5A_3B_{A_1} \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \\
B_{A_1} &\to A_1A_4A_2 \mid A_1A_4A_2B_{A_1} \\
A_2 &\to a \mid b \mid aB_{A_2} \mid bB_{A_2} \\
B_{A_2} &\to A_2A_5A_3 \mid A_2A_5A_3B_{A_2} \\
A_3 &\to a \mid b, \\
A_4 &\to +, \\
A_5 &\to *
\end{aligned}$$

Aplicamos ahora Elimina$_1(B_{A_1} \to A_1A_4A_2)$:

$$\begin{aligned}
A_1 &\to a \mid b \mid aB_{A_1} \mid bB_{A_1} \mid aA_5A_3 \mid bA_5A_3 \mid aB_{A_2}A_5A_3 \mid bB_{A_2}A_5A_3 \mid \\
&\quad \mid aA_5A_3B_{A_1} \mid bA_5A_3B_{A_1} \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \\
B_{A_1} &\to A_1A_4A_2B_{A_1} \mid \\
&\quad \mid aA_4A_2 \mid bA_4A_2 \mid aB_{A_1}A_4A_2 \mid bB_{A_1}A_4A_2 \mid \\
&\quad \mid aA_5A_3A_4A_2 \mid bA_5A_3A_4A_2 \mid aB_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid bB_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid \\
&\quad \mid aA_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid bA_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \\
A_2 &\to a \mid b \mid aB_{A_2} \mid bB_{A_2} \\
B_{A_2} &\to A_2A_5A_3 \mid A_2A_5A_3B_{A_2} \\
A_3 &\to a \mid b, \\
A_4 &\to +, \\
A_5 &\to *
\end{aligned}$$

Aplicamos ahora Elimina$_1(B_{A_1} \to A_1A_4A_2B_{A_1})$:

$$\begin{aligned}
A_1 &\to a \mid b \mid aB_{A_1} \mid bB_{A_1} \mid aA_5A_3 \mid bA_5A_3 \mid aB_{A_2}A_5A_3 \mid bB_{A_2}A_5A_3 \mid \\
&\quad \mid aA_5A_3B_{A_1} \mid bA_5A_3B_{A_1} \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \\
B_{A_1} &\to aA_4A_2 \mid bA_4A_2 \mid aB_{A_1}A_4A_2 \mid bB_{A_1}A_4A_2 \mid \\
&\quad \mid aA_5A_3A_4A_2 \mid bA_5A_3A_4A_2 \mid aB_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid bB_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid \\
&\quad \mid aA_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid bA_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid \\
&\quad \\
&\quad \mid aA_4A_2B_{A_1} \mid bA_4A_2B_{A_1} \mid aB_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid bB_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid \\
&\quad \mid aA_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid bA_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid aB_{A_2}A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid \\
&\quad \mid aA_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid bA_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid \\
&\qquad \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \\
A_2 &\to a \mid b \mid aB_{A_2} \mid bB_{A_2} \\
B_{A_2} &\to A_2A_5A_3 \mid A_2A_5A_3B_{A_2} \\
A_3 &\to a \mid b, \\
A_4 &\to +, \\
A_5 &\to *
\end{aligned}$$

Aplicamos ahora Elimina$_1(B_{A_2} \to A_2A_5A_3)$:

$$\begin{aligned}
A_1 &\to a \mid b \mid aB_{A_1} \mid bB_{A_1} \mid aA_5A_3 \mid bA_5A_3 \mid aB_{A_2}A_5A_3 \mid bB_{A_2}A_5A_3 \mid \\
&\mid aA_5A_3B_{A_1} \mid bA_5A_3B_{A_1} \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \\
B_{A_1} &\to aA_4A_2 \mid bA_4A_2 \mid aB_{A_1}A_4A_2 \mid bB_{A_1}A_4A_2 \mid \\
&\mid aA_5A_3A_4A_2 \mid bA_5A_3A_4A_2 \mid aB_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid bB_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid \\
&\mid aA_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid bA_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid \\
\\
&\mid aA_4A_2B_{A_1} \mid bA_4A_2B_{A_1} \mid aB_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid bB_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid \\
&\mid aA_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid bA_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid aB_{A_2}A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid \\
&\mid aA_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid bA_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid \\
&\quad \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \\
A_2 &\to a \mid b \mid aB_{A_2} \mid bB_{A_2} \\
B_{A_2} &\to A_2A_5A_3B_{A_2} \mid \\
&\mid aA_5A_3 \mid bA_5A_3 \mid aB_{A_2}A_5A_3 \mid bB_{A_2}A_5A_3 \\
A_3 &\to a \mid b, \\
A_4 &\to +, \\
A_5 &\to *
\end{aligned}$$

Aplicamos ahora Elimina$_1(B_{A_2} \to A_2A_5A_3B_{A_2})$:

$$\begin{aligned}
A_1 &\to a \mid b \mid aB_{A_1} \mid bB_{A_1} \mid aA_5A_3 \mid bA_5A_3 \mid aB_{A_2}A_5A_3 \mid bB_{A_2}A_5A_3 \mid \\
&\mid aA_5A_3B_{A_1} \mid bA_5A_3B_{A_1} \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1} \\
B_{A_1} &\to aA_4A_2 \mid bA_4A_2 \mid aB_{A_1}A_4A_2 \mid bB_{A_1}A_4A_2 \mid \\
&\mid aA_5A_3A_4A_2 \mid bA_5A_3A_4A_2 \mid aB_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid bB_{A_2}A_5A_3A_4A_2 \mid \\
&\mid aA_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid bA_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2 \mid \\
\\
&\mid aA_4A_2B_{A_1} \mid bA_4A_2B_{A_1} \mid aB_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid bB_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid \\
&\mid aA_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid bA_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid aB_{A_2}A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3A_4A_2B_{A_1} \mid \\
&\mid aA_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid bA_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid \\
&\quad \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_1}A_4A_2B_{A_1} \\
A_2 &\to a \mid b \mid aB_{A_2} \mid bB_{A_2} \\
B_{A_2} &\to aA_5A_3 \mid bA_5A_3 \mid aB_{A_2}A_5A_3 \mid bB_{A_2}A_5A_3 \mid \\
&\mid aA_5A_3B_{A_2} \mid bA_5A_3B_{A_2} \mid aB_{A_2}A_5A_3B_{A_2} \mid bB_{A_2}A_5A_3B_{A_2} \\
A_3 &\to a \mid b, \\
A_4 &\to +, \\
A_5 &\to *
\end{aligned}$$