Foto: José Juan Castro

Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán
Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Índice general

1. Ecuaciones y sistemas **9**
1.1. Crecimiento proporcional . . . 11
1.2. Interpretación geométrica . . . 13
1.3. Funciones implícitas . . . 16
1.3.1. Derivación implícita . . . 21
1.4. Ecuación diferencial a partir de una familia de funciones . . . 22
1.5. Problemas geométricos . . . 24
1.5.1. Trayectorias ortogonales . . . 26
1.6. Sistemas de ecuaciones diferenciales . . . 28
1.6.1. Órbitas de un sistema autónomo en el plano . . . 30

2. Cambios de Variable **37**
2.1. Cálculo de primitivas . . . 44
2.2. Ecuaciones de variables separadas . . . 45
2.3. Ecuaciones homogéneas . . . 50
2.4. Ecuaciones reducibles a homogéneas . . . 60
2.5. Ecuaciones lineales . . . 62
2.5.1. Ecuaciones lineales homogeneas . . . 63
2.5.2. Ecuaciones lineales completas . . . 64
2.6. Ecuación de Riccati . . . 67
2.7. Relación con Teoría de Grupos . . . 72
2.7.1. Ecuaciones diferenciales invariantes por traslaciones horizontales 79
2.7.2. Ecuaciones diferenciales invariantes por homotecias . . . 80

3. Condición de exactitud y factores integrantes **81**
3.1. Condición de exactitud . . . 83
3.1.1. Integrales dependientes de un parámetro . . . 89
3.1.2. Interpretación de la demostración . . . 91
3.2. Ecuaciones exactas . . . 99
3.3. Factor integrante . . . 103
3.3.1. Métodos de búsqueda de un factor integrante . . . 105

4. Ecuación Lineal de Orden Superior **113**
4.1. Espacio vectorial de las funciones . . . 122
4.1.1. Independencia lineal de funciones . . . 123
4.1.2. Aplicaciones lineales . . . 128
4.2. Ecuación lineal homogénea de orden superior . . . 129
4.2.1. Fórmula de Jacobi-Liouville . . . 134

4.3. Ecución lineal completa de orden superior 139
4.4. Ecuación lineal con coeficientes constantes 141
4.4.1. Raíces complejas del polinomio característico 143

5. Sistemas Lineales 147
5.1. Sistemas lineales homogéneos 159
5.1.1. Sistemas de coeficientes constantes 161
5.1.2. Matriz solución y matriz fundamental 163
5.2. Exponencial de una matriz 167
5.2.1. Definición de exponencial de una matriz 167
5.2.2. Formas de cálculo de exponenciales de matrices 170
5.2.3. Casos de cálculo de la exponencial de una matriz 172

6. Relaciones de Problemas 181
6.1. Ecuaciones y sistemas 181
6.2. Cambios de Varible 194
6.3. Diferenciales Exactas 226
6.4. Ecuación Lineal de Orden Superior 237
6.5. Sistemas Lineales 249

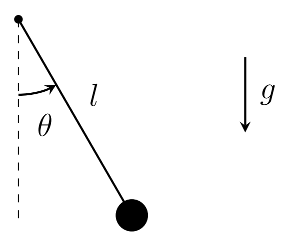
Introducción

La teoría de Ecuaciones Diferenciales es la teoría matemática relacionada con el movimiento. Esta trata de resolver ecuaciones cuyas soluciones son funciones. Podríamos pensar en llamar a este área “Ecuaciones Funcionales”, pero gracias a que en física $F = m \cdot a$, podemos encontrar de forma natural y útil ecuaciones funcionales donde la información que aparezca sobre la función a buscar está relacionada con las relaciones que guardan las derivadas de dicha función.

Ejemplo. Como ejemplo de ecuación diferencial que surge de forma natural podemos pensar en el movimiento de un péndulo:

Para describir un péndulo, nos es suficiente con tres variables independientes, que podemos ver en la siguiente ilustración:

- La longitud del hilo del péndulo, a la que llamamos l.
- La aceleración gravitatoria del planeta en el que nos encontremos, a la que llamamos g.
- Y el ángulo que guarda el péndulo sobre la vertical, al que llamamos θ.



Como nuestro objetivo es describir el movimiento que describe un péndulo, tenemos que introducir una variable más, el tiempo (t), y ver ahora la variable θ como una variable dependiente en función de t:

$$\theta = \theta(t)$$

La física nos dice que si $\theta(t)$ es una función que nos describe el movimiento de un péndulo en función del tiempo, entonces debe cumplir la siguiente ecuación[1]:

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta(t) = 0 \tag{1}$$

A partir de esta ecuación, nos preguntamos por las funciones θ que cumplan dicha ecuación, siendo esta la primera ecuación diferencial que trataremos de resolver.

[1]De dónde sale dicha ecuación no nos es relevante.

A simple vista, podemos decir acertadamente que dos soluciones para dicha ecuación son:

$$\theta(t) = 0 \qquad\qquad \theta(t) = \pi$$

Pensando que en ambas soluciones el péndulo se encuentra en un estado estático, en la primera este se encuentra quieto debajo y en la segunda, quieto arriba. De forma intuitiva podemos pensar que el primero es un equilibrio estable y el segundo un equilibrio inestable.

A partir de dichas soluciones, podemos adivinar que también serán soluciones de (1) cualquier función de la forma:

$$\theta(t) = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

De esta forma, hemos encontrado una **familia de soluciones**, es decir, tenemos una función que es solución de (1) para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Hemos encontrado infinitas soluciones para la ecuación (1). Podemos pensar que cada una de estas soluciones describe un péndulo distinto (esto es, cada una de las distintas formas de tirar el péndulo). En el mundo de las ecuaciones diferenciales es común encontrar muchas soluciones para una sola ecuación.

En el caso de la ecuación (1), se ha demostrado que a parte de la familia de soluciones que hemos dado, no pueden encontrarse más soluciones con fórmula (aunque pueden aproximarse).

El orden de una ecuación diferencial es la derivada de mayor grado que aparezca en la fórmula de la ecuación. En el caso de (1), esta era de orden 2. En esta asignatura nos centraremos en el estudio de las ecuaciones diferenciales de orden 1.

Una ecuación diferencial de primer orden genérica es de la forma:

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \tag{2}$$

Es decir, es una relación entre una variable independiente (t, que usualmente podremos entender como el tiempo), una variable dependiente o función (x, en función de t), cuya expresión estamos interesados en buscar; y su derivada.

La Φ que aparece en (2) será una función:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & D \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x, y) & \longmapsto & \Phi(t, x, y) \end{array}$$

Donde trataremos de ver x como variable independiente que tenemos que hacer dependiente de t: $x = x(t)$, siendo y su derivada.

Ejemplo. Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$(x(t))^2 + (x'(t))^2 = 1$$

La función Φ en cuestión es:

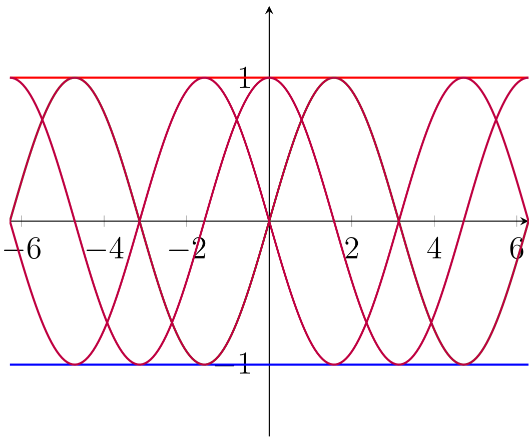
$$\begin{array}{rccc} \Phi: & D = \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 - 1 \end{array}$$

Soluciones de dicha ecuación son (a simple vista):

$$\begin{array}{ll} x(t) = \operatorname{sen} t & x(t) = \cos t \\ x(t) = 1 & x(t) = -1 \end{array}$$

Además, podemos deducir que una familia de soluciones que engloba a las dos primeras es:

$$x(t) = \operatorname{sen}(t + c), \quad c \in \mathbb{R}$$



Graficando las soluciones, podemos además construir una nueva solución con una función a trozos:

$$x(t) = \begin{cases} \cos t & t \geqslant 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases}$$

Derivable en $\mathbb{R}^*$ por el carácter local de la derivabilidad y en 0 por coincidir los dos límites laterales de las derivadas. Sin embargo, observamos que no es dos veces derivable.

Las ecuaciones diferenciales de orden 1 sin restricción alguna son demasiado generales como para construir una teoría formal que centre su estudio en estas. Por tanto, estudiaremos aquellas que admitan escribirlas en **forma normal**, es decir, que si nos dan una ecuación en la forma (2), esta pueda escribirse como:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{3}$$

Para una cierta

$$\begin{array}{rrcl} f: & C \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & f(t, x) \end{array}$$

Ejemplo. Dadas las dos siguientes ecuaciones diferenciales, discutir cuál de ellas es más simple y resolver ambas.

- $x'(t) = 7x(t)$
- $x'(t) = 7t$

La segunda ecuación es más sencilla, ya que se trata de un cálculo de una primitiva para x': $x'(t) = h(t)$, a lo que ya estamos acostumbrados.

Para dicha ecuación, tenemos:

$$\Phi(t, x, y) = y - 7t$$
$$f(t, x) = 7t$$

con $D = \mathbb{R}^3$ y $C = \mathbb{R}^2$.

Las soluciones de dicha ecuación diferencial son, por tanto:

$$x(t) = \frac{7}{2}t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Para la primera ecuación, tenemos:

$$\Phi(t, x, y) = y - 7x$$
$$f(t, x) = 7x$$

con $D = \mathbb{R}^3$ y $C = \mathbb{R}^2$.

De forma simple vemos dos primeras soluciones:

$$x(t) = 0 \qquad x(t) = e^{7t}$$

Y podemos deducir además una familia de soluciones:

$$x(t) = c \cdot e^{7t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

De hecho, demostraremos más adelante que dicha ecuación no tiene más soluciones además de las de dicha familia.

Ejemplo. Dadas las dos siguientes ecuaciones diferenciales, discutir cuál de ellas es más simple e intentar resolverlas.

- $x'(t) = \operatorname{sen} t$
- $x'(t) = \operatorname{sen} x(t)$

En este caso, es la primera la que es más simple, ya que se vuelve a tratar de un cálculo de primitiva.

Tenemos:

$$\Phi(t, x, y) = y - \operatorname{sen} t$$
$$f(t, x) = \operatorname{sen} t$$

Siendo las soluciones de la ecuación diferencial:

$$x(t) = -\cos t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

En el caso de la segunda, tenemos:

$$\Phi(t, x, y) = y - \operatorname{sen} x$$
$$f(t, x) = \operatorname{sen} x$$

Ecuación que todavía no sabemos resolver.

1. Ecuaciones y sistemas

Definición 1.1 (Ecuación Diferencial y solución)**.** Una ecuación diferencial viene dada por una función

$$\begin{array}{rrcl} \Phi: & D\subseteq\ \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x,y) & \longmapsto & \Phi(t,x,y) \end{array}$$

continua donde D es un **abierto**[1] **conexo**[2] de $\mathbb{R}^3$.
Una **solución** de dicha ecuación diferencial será una función $x: I \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ **intervalo**[3] **abierto**[4] tal que:

(I) x es derivable en I[5].

(II) $(t, x(t), x'(t)) \in D \quad \forall t \in I$[6].

(III) $\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \quad \forall t \in I$.

Ejemplo. Dada la ecuación diferencial:

$$x'(t) = \frac{1}{x(t)}$$

y la expresión:

$$x(t) = \sqrt{2t - 38}$$

Probar que dicha expresión es solución de la ecuación diferencial.

La ecuación diferencial viene dada por

$$\begin{array}{rrcl} \Phi: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x,y) & \longmapsto & y - \dfrac{1}{x} \end{array}$$

- Cogiendo $I =]19, +\infty[$, tenemos (I).
- Por ser la raíz una función continua y creciente, tenemos que $x(I) =]0, +\infty[= \mathbb{R}^+$, de donde se cumple (II).

---

[1] Por convenio, ya que las ecuaciones diferenciales no se comportan bien en los bordes.

[2] Es lógico pensarlo, ya que estamos estudiando movimientos.

[3] Es lógico, pues usualmente t será el tiempo.

[4] Pudiendo trabajar con funciones continuas en un cerrado y derivables en el abierto, evitando así por ejemplo tangentes verticales

[5] Necesario para poder considerar $x'(t)$ en la propia ecuación.

[6] En vistas de (III).

- $$x'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t-38}} = \frac{1}{x(t)} \qquad \forall t \in I$$

Notación. La notación que hemos estado utilizando para las ecuaciones diferenciales no es la que usaremos a lo largo del curso:

Lo que hasta ahora hemos notado y entendido por:

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0$$

Como en el caso:

$$x'(t) = 3x(t)$$

Lo notaremos ahora por:

$$\Phi(t, x, x') = 0$$
$$x' = 3x$$

Que recordamos tiene por solución:

$$x(t) = c \cdot e^{3t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ejemplo. Para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$, resolver:

1. $x' = \lambda x$
$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad c \in \mathbb{R}$$
2. $x' = \lambda t$
$$x(t) = \frac{\lambda}{2}t^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Definición 1.2 (Ecuación Diferencial en forma normal)**.** Una ecuación diferencial en forma normal viene dada por una expresión

$$x' = f(t, x)$$

para cierta función

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & f(t, x) \end{array}$$

continua donde D es un conjunto **abierto** y **conexo** de $\mathbb{R}^2$.
Una solución de dicha ecuación diferencial será una función $x : I \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}^2$ un **intervalo abieto** tal que:

(I) x sea derivable en I.

(II) $(t, x(t)) \in D \ \forall t \in I$.

(III) $x'(t) = f(t, x(t)) \ \forall t \in I$.

Observación. Notemos que las ecuaciones diferenciales en forma normal son ecuaciones diferenciales, ya que dada una ecuación diferencial en forma normal mediante una función $f : C \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua con D un conjunto abierto y conexo y una solución suya x definida en un intervalo abierto I, entonces puedo definir la función

$$\begin{array}{rrcl} \Phi: & D = C \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x, y) & \longmapsto & y - f(t, x) \end{array}$$

con $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto (por ser producto de abiertos) y conexo (por ser producto de conexos), Φ una función continua por ser diferencia de funciones continuas y:

(I) x es derivable en I.

(II) Como $D = C \times \mathbb{R}$ y como $(t, x(t)) \in C$ $\forall t \in I$, entonces $(t, x(t), x'(t)) \in D$ $\forall t \in I$.

(III) Como $x'(t) = f(t, x(t))$ $\forall t \in I$, entonces tendremos que:

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = x'(t) - f(t, x(t)) = 0 \qquad \forall t \in I$$

1.1. Crecimiento proporcional

En el capítulo anterior nos preguntábamos si todas las soluciones de la ecuación $x' = \lambda x$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$ eran de la forma

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad c \in \mathbb{R}$$

Ahora daremos respuesta a dicha cuestión, comentando además utilidades de la misma ecuación.

Proposición 1.1. *Dada $x(t)$, solución de $x' = \lambda x$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$, definida en un intervalo abierto I, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad \forall t \in I$$

Antes de dar paso a la demostración, observemos que si suponemos cierta la tesis:

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \Longleftrightarrow e^{-\lambda t} x(t) = c \Longrightarrow \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t} x(t)) = 0$$

Demostración. Definimos la función

$$\begin{array}{rrcl} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & e^{-\lambda t} x(t) \end{array}$$

que es derivable por ser producto de funciones derivables, con:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t) = \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t} x(t)) &= -\lambda e^{-\lambda t} x(t) + e^{-\lambda t} x'(t) \\ &= -\lambda e^{-\lambda t} x(t) + \lambda e^{-\lambda t} x(t) = 0 \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

Por ser f continua y definida en un intervalo, llegamos a que es constante, luego $\exists c \in \mathbb{R} \mid f(t) = e^{-\lambda t} x(t) = c \quad \forall t \in I$, de donde deducimos que:

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \quad \forall t \in I$$

□

Nos centraremos ahora en la idea intuitiva de derivada como representación de la variación de una variable dependiente para dar lugar a los siguientes dos ejemplos que nos muestran cómo surge la ecuación diferencial $x' = \lambda x$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$ de forma natural.

Ejemplo. Si ingresamos un capital inicial $C(0) = 100$ en un banco que nos da el $2\,\%$ anual de interés, al cabo de un año tendremos en nuestra cuenta:

$$C(1) = C(0) + \frac{2}{100}C(0) = 100 + \frac{2}{100} \cdot 100 = 102$$

Sin embargo, si acudimos a otro banco que nos ofrece la misma tasa anual de interés pero que nos realiza pagos semestrales, al cabo de un año conseguiremos reunir:

$$\begin{aligned} C(1/2) &= C(0) + \frac{1}{2}\frac{2}{100}C(0) = 100 + \frac{1}{2}\frac{2}{100} \cdot 100 = 101 \\ C(1) &= C(1/2) + \frac{1}{2}\frac{2}{100}C(1/2) = 101 + \frac{1}{2}\frac{2}{100} \cdot 101 = 102{,}01 > 102 \end{aligned}$$

En general, si Δt es la fracción del año en la que se nos hacen los pagos ($\Delta t = 1$ significa que es pago anual), la fórmula es:

$$C(t + \Delta t) = C(t) + \frac{2}{100}\Delta t C(t)$$

de donde:

$$\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = \frac{2}{100}C(t)$$

Si ahora vamos a un banco que nos haga pagos continuos, dicha fracción de tiempo será mínima, por lo que podemos pensar que $\Delta t \to 0$ y hacer un paso al límite (no riguroso) para obtener que:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = C'(t) = \frac{2}{100}C(t)$$

De donde tenemos

$$C' = \frac{2}{100}C$$

o de forma general, si notamos por $I \in \mathbb{R}$ a la tasa de interés:

$$C' = IC$$

Cuyas soluciones ya sabemos que se tratan de cualquier función de la familia:

$$C(t) = c \cdot e^{It} \quad c \in \mathbb{R}$$

Por tanto, el crecimiento del dinero en un banco que nos ofrezca un interés continuo es exponencial. En este ejemplo, vemos cómo el crecimiento del dinero en una cuenta bancaria es exponencial a la propia cantidad de dinero de la que disponemos en la misma.

Ejemplo. La teoría física de la radioactividad nos dice que las sustancias radioactivas van perdiendo masa a una velocidad proporcional a la masa de la propia sustancia. Es decir, si representamos la masa de una sustancia radioactiva como variable dependiente del tiempo $m = m(t)$:

$$m'(t) = -\lambda m(t)$$

Para cierto parámetro $\lambda \in \mathbb{R}^+$ relativo a la sustancia radioaciva que consideremos.

Gracias al estudio anteriormente realizado de la ecuación diferencial $m' = -\lambda m$, sabemos ya que soluciones de esta son cualesquiera funciones de la forma:

$$m(t) = c \cdot e^{-\lambda t} \quad c \in \mathbb{R}^+$$

En este ejemplo, hemos vuelto a observar la interpretación de la derivada como cuantía de la variación de una determinada variable dependiente.

1.2. Interpretación geométrica

A continuación, trataremos de dar una interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales y de sus soluciones, basándonos en la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva que describe la función en dicho punto.

Como ya mencionamos anteriormente, para dar una ecuación diferencial de orden 1 en forma normal nos es suficiente con dar una función

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array}$$

continua de tal forma que la ecuación diferencial a resolver es

$$x' = f(t,x)$$

cuya solución será una función $x = x(t)$.

Interpretaremos la función f como un campo de direcciones, es decir, a cada punto del plano (t,x) le asignamos un número $f(t,x)$ e interpretaremos dicho número como la pendiente de la recta que pasa por dicho punto.

A partir de dicha función podemos ir construyendo un “campo de direcciones”, una regla que a cada punto del plano le asigna una recta que pasa por dicho punto.

Recordando la ecuación diferencial $x' = f(t,x)$ que nos da la igualdad $x'(t) = f(t,x(t))$, en el miembro derecho de esta última tenemos la pendiente asociada a la recta del campo de direcciones del punto $(t,x(t))$, mientras que a la izquierda tenemos la pendiente de la recta tangente a la curva $x = x(t)$ en el punto $(t,x(t))$.

De esta forma, podemos imaginarnos la ecuación diferencial como un campo de direcciones, mientras que las soluciones son curvas que “peinan” dicho campo.

A continución, ilustraremos gráficamente varios campos de direcciones dados por ecuaciones diferenciales y soluciones a dichas ecuaciones diferenciales, mediante varios ejemplos.

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial:

$$x' = 0$$

Cuyas soluciones son todas las funciones constantes:

$$x(t) = c \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

En este caso, la función que nos da el campo de direcciones es

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & 0 \end{array}$$

por lo que a cada punto (t, x) del plano le asociamos rectas de pendiente 0 que pasen por dicho punto, es decir, rectas horizontales.

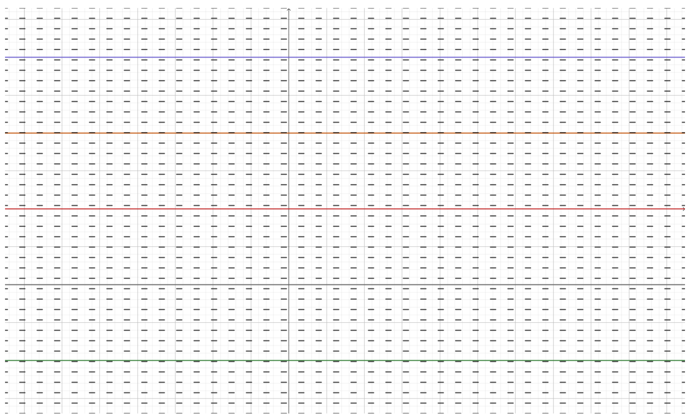


Figura 1.1: Campo de direcciones para $x' = 0$ y algunas soluciones de la misma.

Ejemplo. Consideremos ahora:

$$x' = 1$$

Cuyas soluciones son de la forma:

$$x(t) = t + c \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

En este caso, el campo de direcciones viene dado por

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & 1 \end{array}$$

por lo que a cada punto (t, x) le asociamos una recta a 45º de inclinación.

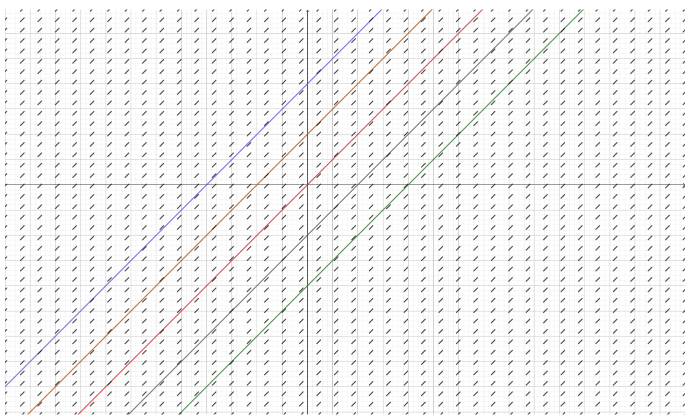


Figura 1.2: Campo de direcciones para $x' = 1$ y algunas soluciones de la misma.

Ejemplo. Consideramos:

$$x' = x$$

Cuyas soluciones sabemos que son:

$$x(t) = c \cdot e^t \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ahora, la función que nos da el campo de direcciones es

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & x \end{array}$$

Para pensar en el campo de direcciones, pensemos en ir dibujándolo por cada recta horizontal del plano:

- Para puntos (t,x) de la recta $x = 0$, tendremos $f(t,x) = 0$, luego para todos los puntos del eje de abscisas tenemos siempre rectas horizontales.
- Para los puntos de la recta $x = 1$, tendremos rectas a 45º de inclinación.
- Para $x = -1$, tendremos rectas a -45º de inclinación.
- De igual forma, para la recta $x = 2$, tendremos rectas más inclinadas que la de 45º.
- De forma análoga, para los puntos de la recta $x = -2$, tendremos rectas más inclinadas que la de -45º.

En definitiva, cuanto más nos alejamos del eje de abscisas, más pendientes se ponen las rectas del campo de direcciones.

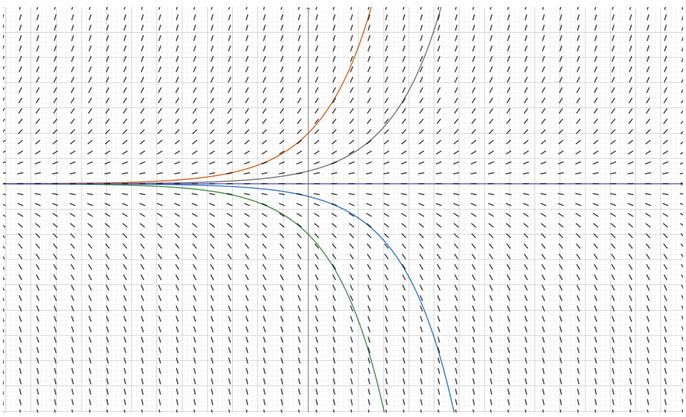


Figura 1.3: Campo de direcciones para $x' = x$ y algunas soluciones de la misma.

Ejemplo. Consideramos:

$$x' = t^2 + x^2$$

Cuyas soluciones se ha demostrado[7] que no tienen fórmula que pueda escribirse con funciones elementales clásicas.

[7] No se verá por exceder el conocimiento de la presente asignatura.

Pese a ello, sabemos que la función que nos da su campo de direcciones es:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & t^2+x^2 \end{array}$$

Para visualizar el campo de direcciones, pensaremos en circunferencias centradas en el origen con distinto radio $r \in \mathbb{R}_0^+$:

- Para $r = 0$, tenemos la circunferencia formada por el punto $(0,0)$, con $f(0,0) = 0$, luego tenemos que la recta asociada a dicho punto es una recta horizontal.
- Para $r = 1$, tenemos que $t^2 + x^2 = r^2 = 1$ para cada punto (t,x) de dicha circunferencia, luego tenemos una recta a 45º de inclinación en cada punto de dicha circunferencia.
- Para $r = 2$, tenemos que $t^2+x^2 = r^2 = 4$ para cada punto de la circunferencia, luego tendríamos una recta de mayor inclinación en dichos puntos.

Podemos ya imaginarnos cuál será el campo de direcciones, el cual podemos graficar gracias a los ordenadores:

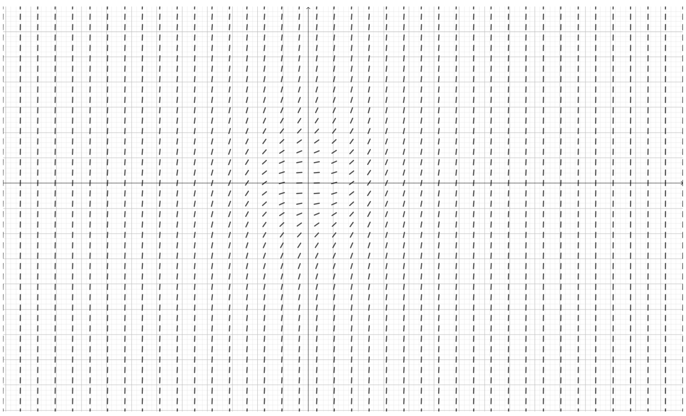


Figura 1.4: Campo de direcciones para $x' = t^2 + x^2$.

No conocemos soluciones para esta ecuación diferencial. Sin embargo, observando el campo de direcciones, observamos que las soluciones son funciones crecientes, con límite a $-\infty$ por la izquierda y a $+\infty$ por la derecha.

1.3. Funciones implícitas

Hasta ahora, hemos trabajado principalmente con funciones definidas en forma explícita $x = x(t)$. Sin embargo, en ecuaciones diferenciales es común trabajar con funciones definidas por una ecuación de la forma

$$F(t,x) = 0$$

por lo que tenemos que saber trabajar con ellas.

Cabe destacar que toda función explícita puede ponerse como implícita, pero no toda función implícita dada por una fórmula puede ponerse como función explícita. De esta forma, el estudio que realizaremos a continuación está enfocado a dichas funciones implícitas que no pueden ponerse de forma explícita.

Por lo tanto, si nos encontramos con una ecuación que nos da una función implícita de la cual podemos despejar x, podemos expresar la función de forma explícita y no será necesario aplicar lo aprendido en esta sección.

Ejemplo. La fórmula

$$x - t = 0$$

nos define una ecuación implícita $x = x(t)$, ya que dado un $t \in \mathbb{R}$, existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que se verifica la fórmula. Sin embargo, dicha función x podemos expresarla de forma explícita, sacando su fórmula despejando x de la fórmula anterior:

$$x(t) = t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Y podremos trabajar con ella como una función explícita, algo a lo que ya estamos acostumbrados.

Ejemplo. Veamos que la fórmula

$$x^7 + 3x + t^2 = 0 \tag{1.1}$$

nos define una función implícita $x(t)$, es decir, que dado un número $t \in \mathbb{R}$, existe un único valor $x \in \mathbb{R}$ que verifique la fórmula (1.1).

Dado $t \in \mathbb{R}$, hemos de probar la existencia y unicidad de $x \in \mathbb{R}$ tal que verifique la fórmula (1.1). Cuando lo tengamos probado, notaremos $x(t) = x$ para dicho t y tendremos probado que la fórmula (1.1) nos define una función implícita.

Demostración. Demostremos por un lado la existencia y por otro la unicidad:

Existencia.

Dado $t \in \mathbb{R}$, podemos definir el polinomio

$$p_t(x) = x^7 + 3x + t^2$$

Y por ser un polinomio de grado impar, conocemos[8] que al menos tiene una raíz $x \in \mathbb{R}$ tal que se verifica la fórmula (1.1).

Unicidad.

Derivamos ahora el polinomio p_t:

$$p_t'(x) = 7x^6 + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego es una función estrictamente creciente, por lo que a lo sumo tiene una raíz.

[8] Es contenido de Álgebra I, pero puede deducirse ya que tiene límite a $-\infty$ por la izquierda y a $+\infty$ por la derecha, y aplicamos el Teorema de Bolzano.

□

Acabamos de ver un ejemplo de fórmula que nos define una única función implícita $x = x(t)$. Nos preguntamos a continuación si cualquier fórmula nos provee de una función implícita. En caso de hacerlo, ¿obtenemos funciones derivables? Dicha pregunta nos servirá de paso para probar que la función implícita $x = x(t)$ del ejempmlo anterior es derivable.

1. Como primera observación sencilla, mostramos que hay ecuaciones que no nos definen ninguna función implícita, como:
$$x^2 + t^2 = -1$$
Esto se debe a que, dado $t \in \mathbb{R}$, no podemos encontrar ningún $x \in \mathbb{R}$ tal que se verifique la ecuación.

2. Además, hay ecuaciones que nos dan más de una función implícita, como el clásico ejemplo de la circunferencia:
$$x^2 + t^2 = 1$$
Dicha ecuación nos fabrica dos funciones implícitas que además podemos expresar de forma explícita:
$$x_1(t) = +\sqrt{1-t^2}, \quad t \in [-1, 1]$$
$$x_2(t) = -\sqrt{1-t^2}, \quad t \in [-1, 1]$$

3. Finalmente, observamos que hay funciones implícitas que no se pueden derivar. Por ejemplo, la fórmula:
$$x^3 - t^2 = 0$$
nos da una función implícita que podemos poner de forma explícita:
$$x(t) = t^{2/3}, \quad t \in \mathbb{R}$$
Pero dicha función no es derivable en 0.

En resumen, dada una fórmula que nos relacione dos variables:
$$F(t, x) = 0$$
no podemos asegurar que la función implícita que nos da (en caso de hacerlo) sea derivable, puede pasar cualquier cosa: a veces no define ecuación implícita, a veces define varias, puede definirnos sólo una que no sea derivable, o que sí lo sea, ... No contamos por tanto con una teoría general de ecuaciones implícitas.

Sin embargo, contamos con un resultado bastante útil que ya conocimos en Análisis Matemático I, el Teorema de la Función Implícita[9]. Se trata de un teorema local que da condiciones para que exista la función implícita y sea única, dentro de un entorno suficientemente pequeño.

[9] Aunque en Análisis Matemático I se dio el teorema en su forma más general, en esta asignatura nos interesará el caso de $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1.2 (Función Implícita)**.** *Sea $G \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto y sea*

$$\begin{array}{rrcl} F: & G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & F(t,x) \end{array}$$

una función de clase $\mathcal{C}^1(G)$, es decir, que existan las parciales respecto a t y respecto a x y que ambas sean continuas.
Sea $(t_0, x_0) \in G$ de forma que $F(t_0, x_0) = 0$ y se cumpla que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$$

Entonces, existe una función

$$\begin{array}{rrcl} x: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & x(t) \end{array}$$

con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto de forma que $x \in \mathcal{C}^1(I)$ y se verifica:

1. *$t_0 \in I$.*
2. *$x(t_0) = x_0$.*
3. *$(t, x(t)) \in G \ \forall t \in I$.*
4. *$F(t, x(t)) = 0 \ \forall t \in I$.*

Veremos ahora varios usos prácticos del teorema:

Ejemplo. En el caso

$$x^2 + t^2 = 1$$

Tenemos la función

$$\begin{array}{rrcl} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & x^2 + t^2 - 1 \end{array}$$

que es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = 2t \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = 2x \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

Buscamos ahora un punto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ para aplicar el teorema:

- Ha de ser un punto de la circunferencia de radio 1, para que $F(t_0, x_0) = 0$.
- Además, ha de ser $x_0 \neq 0$, para que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) = 2x_0 \neq 0$$

De esta forma, podemos elegir cualquier punto $(t_0, x_0) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$ para aplicar el teorema. Por tanto, dado cualquier punto $t_0 \in]-1,1[$, el teorema nos dice que hay un intervalo abierto I de forma que $t_0 \in I \subseteq]-1,1[$ en el que la función (ya sea la anterior x_1 o x_2 de la última enumeración) es derivable.

Es cierto que sabíamos ya de antemano la existencia de dichas funciones, pero en caso de no saberlo el Teorema nos garantiza dicha existencia. Este es el primer uso del teorema.

Ejemplo. En el caso del ejemplo anterior, la fórmula

$$x^7 + 3x + t^2 = 0$$

ya sabemos que nos define una única función implícita, pero no sabemos si dicha función es derivable o no. Usaremos el Teorema de la Función Implícita para probar que la función $x = x(t)$ que nos da la fórmula es derivable.
Sea $G = \mathbb{R}^2$ y $F(t,x) = x^7 + 3x + t^2$ que es una función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = 2t \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = 7x^6 + 3 \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

Notemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = 7x^6 + 3 > 0$$

Por lo que podemos elegir cualquier punto en el que $F(t,x) = 0$ para aplicar el teorema, obteniendo que la función x es derivable.

Este es el segundo uso práctico del teorema, probar de forma fácil que una función implícita que ya conocemos es derivable.

Ejemplo. Anteriormente, vimos que la fórmula

$$x^3 - t^2 = 0$$

que define una función implícita:

$$x(t) = t^{2/3}, \quad t \in \mathbb{R}$$

no era derivable. Comprobamos qué hipótesis es la que falla del teorema:
Tenemos

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & x^3 - t^2 \end{array}$$

con parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = 2t \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = 3x^2 \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

luego $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. En el ejemplo anterior, fallaba la derivabilidad en $t_0 = 0$, luego comprobamos por qué la función no es derivable:
En primer lugar, para tener que $x_0^3 - t_0^2 = 0$ con $t_0 = 0$ ha de ser $x_0 = 0$. Sin embargo:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0$$

Luego no podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita.

1.3.1. Derivación implícita

Hasta ahora, tenemos una forma de probar la existencia de funciones implícitas así como su derivabilidad, pero no sabemos cómo derivarlas, lo cual trataremos de resolver a continuación.

Usualmente, tendremos una función

$$\begin{array}{rccc} F: & G \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & F(t,x) \end{array}$$

de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ que verifique las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, de forma que:

$$F(t,x(t)) = 0 \quad \forall t \in I \tag{1.2}$$

para cierta función $x = x(t)$ e $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo abierto. Nuestro objetivo será derivar la expresión anterior.

Proposición 1.3. *Dadas unas funciones F como la definida anteriormente, x y t funciones reales de variable real de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y una función como resultado de la composición de funciones:*

$$s \longmapsto (t(s),x(s)) \longmapsto F(t(s),x(s))$$

que es también una función real de variable real de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, tenemos que la derivada de esta última es:

$$\frac{d}{ds}[F(t(s),x(s))] = \frac{\partial F}{\partial t}(t(s),x(s)) \cdot t'(s) + \frac{\partial F}{\partial x}(t(s),x(s)) \cdot x'(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Usando esta proposición sobre la fórmula (1.2), llegamos a la ecuación diferencial:

$$\frac{dF}{dt}(t,x(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x(t)) \cdot x'(t) = 0$$

Que no se encuentra en forma normal. Sin embargo, es usual haber aplicado el Teorema de la Función Implícita antes de este resultado, luego, suponiendo que estamos bajo dichas hipótesis, tendremos que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x(t)) \neq 0$$

en un entorno de t, por lo que en dicho caso sí que podremos despejar la ecuación diferencial anterior, para expresarla en forma normal:

$$x'(t) = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x(t))}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x(t))}$$

1.4. Ecuación diferencial a partir de una familia de funciones

Al igual que sucede con los polinomios y sus raíces, es mucho más simple construir una ecuación diferencial a partir de una familia de soluciones a obtener la familia de funciones que resuelve una ecuación diferencial.

En esta sección, nos centraremos en cómo construir una ecuación diferencial de primer orden a partir de una familia uniparamétrica de funciones implícitas.

Para ello, nos darán una ecuación del tipo:

$$F(t, x, c) = 0$$

siendo c el parámetro, y definiéndonos una familia de funciones implícitas, de donde obtenemos la función implícita $x = x(t)$, y llegamos a:

$$F(t, x(t), c) = 0$$

y lo que haremos para obtener la ecuación diferencial es derivar:

$$\frac{dF}{dt}(t, x(t), c) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t), c) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), c) \cdot x'(t) = 0$$

Que no es una ecuación diferencial, sino una familia de ecuaciones diferenciales, ya que para cada $c \in \mathbb{R}$ tenemos una ecuación diferencial distinta.

El último paso, por tanto, es tratar de expresar c en función de x y de t, para sustituirlo y obtener finalmente la ecuación diferencial:

$$\left.\begin{array}{rcl} F(t, x(t), c) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}(t, x(t), c) + \dfrac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), c) \cdot x'(t) & = & 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Despejar } c} \Phi(t, x, x') = 0$$

No es necesario hacer este proceso de forma rigurosa, ya que lo único que nos pedirán es obtener una ecuación diferencial que tenga por soluciones la familia uniparamétrica de funciones dada. Por tanto, siempre y cuando consigamos este objetivo, podemos responder a la pregunta simplemente dando la ecuación diferencial y probando que, efectivamente, dicha familia es solución de la ecuación.

Ejemplo. Hallar la ecuación diferencial que tiene por soluciones la familia uniparamétrica de funciones:

$$x^2 + t^2 = c \qquad c \in \mathbb{R}^+ \tag{1.3}$$

En primer lugar, ya sabemos que dicha fórmula nos da una familia uniparamétrica de funciones:

$$x(t) = \pm\sqrt{c - t^2}, \quad t \in \left]-\sqrt{c}, \sqrt{c}\right[$$

Tratamos ahora de hallar la ecuación diferencial que nos solicitan, que lo haremos derivando en ambos miembros de la fórmula (1.3):

$$(x(t))^2 + t^2 = c$$

$$\frac{d}{dt}\left((x(t))^2 + t^2\right) = \frac{d}{dt}(c)$$

$$2xx' + 2t = 0$$

En este caso, no ha sido necesario despejar c para sustituirlo al final del cálculo anterior, ya que directamente ha desaparecido de la ecuación diferencial. De esta forma, la ecuación diferencial buscada es:

$$2xx' + 2t = 0$$

Que podemos expresar en forma normal como:

$$x' = \frac{-t}{x}$$

Observación. Notemos que acabamos de aprender a resolver la ecuación diferencial

$$x' = \frac{-t}{x}$$

Tiene por soluciones la familia uniparamétrica de funciones:

$$x(t) = \pm\sqrt{c-t^2} \quad c \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \left]-\sqrt{c}, \sqrt{c}\right[$$

Para el dominio de la función hemos elegido el intervalo abierto, ya que al ser una solución de una ecuación diferencial, tiene que estar definida en un abierto conexo, tal y como concretamos en la definición de una solución de una ecuación diferencial.

Ejemplo. Buscar una ecuación diferencial que tenga como soluciones la familia uniparamétrica de funciones:

$$\frac{1}{c}e^{cx} - x^2 - \operatorname{sen} t = c \tag{1.4}$$

Tendríamos que $F(t,x,c) = \frac{1}{c}e^{cx} - x^2 - \operatorname{sen} t - c$ y ahora derivaremos de forma implícita, pensando que la fórmula nos da una función $x = x(t)$:

$$\frac{dF}{dt}(t,x,c) = e^{cx}x' - 2x'x - \cos t = 0 \tag{1.5}$$

Ahora, nos disponemos a eliminar el parámetro c. Despejando en la fórmula (1.5) llegamos a que:

$$\begin{aligned}
e^{cx} &= \frac{2xx' + \cos t}{x'} \\
cx &= \ln\left(\frac{2xx' + \cos t}{x'}\right) \\
\frac{1}{c} &= \frac{x}{\ln\left(\frac{2xx' + \cos t}{x'}\right)}
\end{aligned}$$

Y ahora sustituyendo c y $\frac{1}{c}$ en (1.4), tenemos que la ecuación diferencial buscada es:

$$\frac{x}{\ln\left(\frac{2xx' + \cos t}{x'}\right)} \frac{2xx' + \cos t}{x'} - x^2 - \operatorname{sen} t - \frac{1}{x}\ln\left(\frac{2xx' + \cos t}{x'}\right) = 0$$

1.5. Problemas geométricos

Una aplicación de las ecuaciones diferenciales es hallar curvas exigiendo condiciones sobre sus tangentes o normales. Por ejemplo, podemos tratar de hallar la curva cuyas normales sean todas coincidentes en un mismo punto.

Notación. En esta sección haremos un cambio de notación, ya que las soluciones de las ecuaciones diferenciales ya no serán movimientos donde tratamos de expresar la posición x de un móvil en función del tiempo t, $x = x(t)$; sino que las soluciones serán curvas geométricas, por lo que trataremos de, dada una abscisa x, hallar la coordenada en las ordenadas y que nos diga un punto de la curva, $y = y(x)$.

De esta forma, sustituiremos la notación que venimos usando de las ecuaciones diferenciales $F(t, x) = 0$ por la notación $F(x, y) = 0$.

Aunque toda curva en el plano puede expresarse con una ecuación implícita (esto no sucede con explícitas), supondremos siempre que las curvas las podremos poner en explícitas, con la finalidad de que nos aparezcan siempre ecuaciones de primer orden (usando ecuaciones paramétricas, por ejemplo, obtenemos sistemas de ecuaciones).

De esta forma, trabajaremos con curvas $y = y(x)$ con $x \in I$ intervalo abierto, siendo $y \in \mathcal{C}^1(I)$[10].

Rectas tangentes a una curva

Sabemos ya que, dada una curva $y = y(x)$, podemos encontrar en cada punto $(x, y(x))$ una recta tangete a dicha curva. A medida que movemos el punto por la curva, vamos obteniendo todo el haz de rectas que son tangentes a dicha curva.

Dado un punto $(x, y(x))$ de una curva $y = y(x)$, la ecuación de la recta tangente a la curva en dicho punto viene dada por:

$$v - y(x) = y'(x)(u - x)$$

siendo u y v las nuevas variables que hemos usado para expresar la ecuación[11].

Dado $x \in \mathbb{R}$, el punto $(x, y(x))$ nos da una recta tangente a la curva por dicho punto. Si movemos la variable u, nos estaremos moviendo a lo largo de la recta tangete. Si ahora también movemos x, nos estaremos moviendo por todo el haz de rectas.

Rectas normales a una curva

Dada una curva $y = y(x)$, podemos encontrar también en cada punto $(x, y(x))$ una recta normal a dicha curva (esto es, que sea perpendicular a la recta tangente en dicho punto) que pase por el mismo punto.

[10]Con vistas para derivar y aplicar el Teorema de la Función Implícita.

[11]Notemos que no podemos usar x e y como variables por ser ya un punto que hemos fijado de la curva por el que queremos hacer pasar la recta tangente.

Para hallar la ecuación de dicha recta, pensamos en que debe pasar por el punto $(x, y(x))$ y en que debe ser perpendicular a la recta tangente. De esta forma, si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas tangente y normal respectivamente, tenemos que:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Longrightarrow m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

Como la pendiente en la recta tangente es $m_1 = y'(x)$, tenemos ya la ecuación de la recta normal a una curva en el punto $(x, y(x))$, siempre y cuando $y'(x) \neq 0$:

$$v - y(x) = -\frac{1}{y'(x)}(u - x) \tag{1.6}$$

siendo u y v las nuevas variables que hemos usado para expresar la ecuación.

Sin embargo, podemos expresar dicha ecuación como:

$$y'(x)(v - y(x)) = x - u$$

Y ya podremos considerarla también cuando $y'(x) = 0$.

Ejemplo. Buscamos la curva para la que todas las rectas normales pasan por el origen[12].

Para ello, buscamos expresar y como función de x para obtener la curva deseada: $y = y(x)$. Cuando vamos considerando todas las rectas normales, lo que hacemos es mover la ecuación de la recta normal por los puntos $(x, y(x))$ que cumplen la curva.

Debemos imponer que todas las rectas normales de ecuación (1.6) pasen por el origen, es decir, que la ecuación de las rectas normales se cumpla para el punto $(0, 0)$ siempre. Esto sucede cuando $u = v = 0$, para cada punto $(x, y(x))$ de la curva.

Luego se cumple que:

$$-y'(x)y(x) = x$$

Ecuación diferencial que no está en forma normal:

$$y'y + x = 0$$

Pasaremos a resolverla con un truco que aprenderemos en el Capítulo 3:

Para ello, buscamos expresar la ecuación diferencial como la derivada de una expresión igualdada a 0, luego esta nueva expresión será constante, y obtendremos una ecuación que nos defina una función implícita:

$$\begin{gathered}
y'(x)y(x) + x = 0 \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(y(x))^2 + \frac{1}{2}x^2\right) = 0 \\
\frac{1}{2}(y(x))^2 + \frac{1}{2}x^2 = c \quad c \in \mathbb{R}^+ \\
(y(x))^2 + x^2 = k
\end{gathered}$$

[12]Notemos que si tenemos otro punto, podemos trasladar todo el problema al origen, trasladando de nuevo la solución a dicho punto.

Dicha curva es una circunferencia centrada en el origen de radio k^2. Estamos buscando la solución en explícitas, luego despejamos y obtenemos:

$$y(x) = \pm\sqrt{k - x^2} \qquad x \in \left]-\sqrt{k}, \sqrt{k}\right[$$

(Hemos puesto el intervalo abierto por ser solución de una ecuación diferencial, luego debe estar definida en un abierto).

1.5.1. Trayectorias ortogonales

Dada una familia $\mathcal{F}$ de curvas uniparamétricas en la plano mediante una ecuación de la forma:

$$F(x, y, c) = 0 \qquad c \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

de forma que por cada punto del plano pase una curva de este tipo, buscamos otra familia $\mathcal{G}$ de curvas uniparamétricas de forma que corten ortogonalmente a las curvas de la familia $\mathcal{F}$. Llamaremos a las curvas de $\mathcal{G}$ trayectorias ortogonales a las curvas de $\mathcal{F}$.

El procedimiento a seguir será obtener la ecuación diferencial que nos define a la familia $\mathcal{F}$, de la cual obtendremos la ecuación diferencial que define a la familia $\mathcal{G}$, obligando a que el producto de las derivadas de las curvas sea -1. Finalmente, resolveremos esta segunda ecuación diferencial, para obtener la ecuación que nos defina la familia de curvas uniparamétricas del plano.

Por tanto, con vistas a obtener la ecuación diferencial que define a la familia $\mathcal{F}$, derivaremos la ecuación (1.7):

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, c) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, c)y' = 0 \tag{1.8}$$

Ahora, juntaremos las expresiones (1.7) y (1.8) para eliminar el parámetro c, obteniendo la ecuación diferenecial de la familia $\mathcal{F}$, de la forma que aprendimos en la Sección 1.4 y la pondremos en forma normal:

$$y' = f(x, y)$$

Suponiendo que podemos dividir, la ecuación de la familia de trayectorias ortogonales $\mathcal{G}$ será:

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

Ahora, bastará resolver la ecuación diferenecial obtenida para obtener una ecuación implícita que nos define la familia uniparamétrica de funciones:

$$G(x, y, k) = 0 \qquad k \in \mathbb{R}$$

Ejemplo. Demostrar que las trayectorias ortogonales a la familia:

$$x^2 + y^2 = c \qquad c \in \mathbb{R}^+$$

son las rectas que pasan por el origen.

Para ello, derivaremos dicha expresión entendiendo que y está en función de x:

$$2x + 2yy' = 0$$

Suponiendo que $y \neq 0$, llegamos a la ecuación diferencial en forma normal de la familia dada:

$$y' = \frac{-x}{y}$$

Suponiendo ahora que $x \neq 0$, llegamos a la ecuación diferencial en forma normal de la familia de trayectorias ortogonales:

$$y' = \frac{y}{x}$$

A poco que se piense[13], llegamos a que tiene por soluciones la familia

$$y(x) = k \cdot x \qquad k \in \mathbb{R}$$

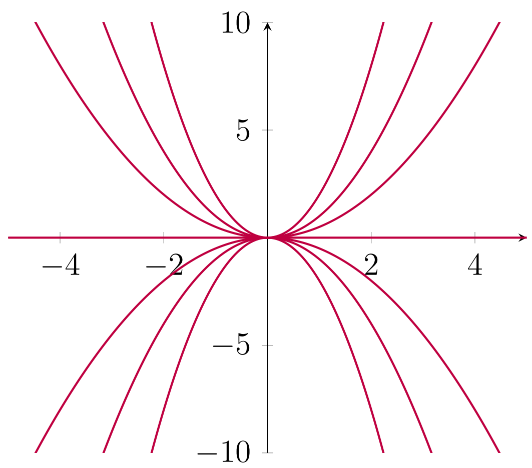
Estas son las rectas que pasan por el origen.

Ejemplo. Consideramos la siguiente ecuación que nos describe una familia uniparamétrica $\mathcal{F}$:

$$y = cx^2 \qquad c \in \mathbb{R}$$

Buscamos la familia de trayectorias ortogonales.

La familia $\mathcal{F}$ es la familia de parábolas con vértices en el origen:



Con vistas a obtener la ecuación diferencial que nos describa a la familia, derivamos:

$$y = cx^2$$
$$y' = 2cx$$

[13]En futuros temas aprenderemos a resolver más tipos de ecuaciones diferenciales.

Despejando, obtenemos el valor de c:

$$c = \frac{y}{x^2}$$

Ssustituimos este valor en la segunda expresión, obteniendo la ecuación diferencial en forma normal:

$$y' = \frac{2y}{x}$$

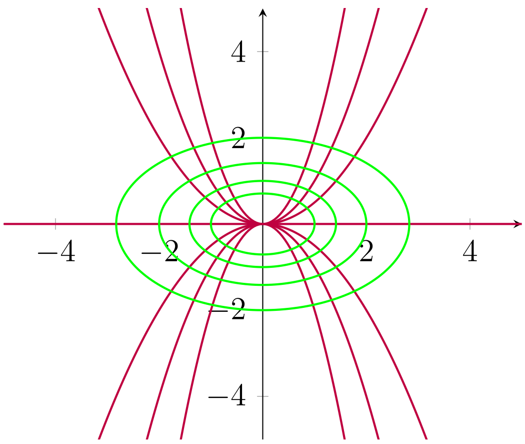
Ahora, escribimos la ecución diferencial para la familia de trayectorias ortogonales:

$$y' = \frac{-x}{2y}$$

Resolvemos esta ecuación diferencial a resolver, mediante el mismo truco que antes:

$$\begin{aligned} 2yy' + x &= 0 \\ \frac{d}{dx}\left(y^2 + \frac{x^2}{2}\right) &= 0 \\ y^2 + \frac{x^2}{2} &= k \qquad k \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Estas son las elipses de eje mayor $\sqrt{2}$ (en el de abscisas) y eje menor 1 (cuando $k = 1$):



1.6. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Nos centramos ahora en el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales. Un sistema de $d \in \mathbb{N}$ ecuaciones será de la forma:

$$x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_d) \qquad i = 1, \ldots, d$$

Y nuestras incógnitas serán:

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ x_d = x_d(t)$$

Las familias de funciones que obtendremos ahora dependerán de d parámetros.

Ejemplo. Un ejemplo de sistema de ecuaciones diferenciales de dos ecuaciones y dos incógnitas es:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & -x_1 \end{array}\right.$$

Una solución que podemos ver fácil es:

$$\begin{gathered} x_1(t) = \operatorname{sen} t \\ x_2(t) = \cos t \end{gathered}$$

Otra es:

$$x_1(t) = x_2(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}$$

Finalmente, llegamos a la familia de soluciones:

$$\begin{gathered} x_1(t) = k \operatorname{sen} t \\ x_2(t) = k \cos t \\ k \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

Que no son todas las soluciones, ya que sólo tenemos una familia uniparamétrica. Para hallar otro parámetro, podemos cambiar la fase de las funciones trigonométricas:

$$\begin{gathered} x_1(t) = b \operatorname{sen}(t + a) \\ x_2(t) = b \cos(t + a) \\ a, b \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

En el último Capítulo, aprenderemos a demostrar que esta familia nos da todas las soluciones. Dicha familia se puede escribir también como:

$$\begin{gathered} y_1(t) = c_1 \operatorname{sen} t - c_2 \cos t \\ y_2(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

Ejercicio. Demostrar que ambas familias de funciones son las mismas:

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1(t) & = b \operatorname{sen}(t + a) \\ x_2(t) & = b \cos(t + a) \end{array}\right. \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} y_1(t) & = c_1 \operatorname{sen} t - c_2 \cos t \\ y_2(t) & = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \end{array}\right. \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Curvas en paramétricas

Volveremos a la notación x e y para las variables, y nos centraremos en las ecuaciones paramétricas. Esto es, dar x e y en función de una variable independiente t, por lo que ahora tendremos dos funciones: Estas son:

$$\begin{array}{rccc} x, y: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & x(t), y(t) \end{array}$$

La diferencia entre implícitas y paramétricas es que ahora pensamos en una curva como un movimiento, no como un lugar geométrico que cumple una cierta propiedad:

$$F(x, y) = 0$$

Dado un instante de tiempo t, el móvil que realiza el movimiento se encontrará en el punto $(x(t), y(t))$. Podemos encontrar muchas parametrizaciones para una misma curva (ya que puede recorrerse de distintas formas).

Ejemplo. Podemos dibujar $\frac{3}{4}$ de una circunferencia mediante la curva en paramétricas:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \operatorname{sen} t \\ t \in I &= \left]0, \frac{3\pi}{2}\right[\end{aligned}$$

1.6.1. Órbitas de un sistema autónomo en el plano

Definición 1.3 (Órbita)**.** Dada una curva en paramétricas mediante dos funciones

$$\begin{array}{rccc} x, y: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & x(t), y(t) \end{array}$$

El lugar geométrico de todos los puntos del plano por el que pasa dicho movimiento es:

$$\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$$

al que llamaremos órbita.

Dado un sistema autónomo en el plano, es decir, un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (para así obtener una curva plana) de forma que la variable independiente t no aparezca en las ecuaciones del sistema (aunque x e y sean dependientes de t). Dicho sistema será de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{array} \right.$$

Para ciertas funciones

$$\begin{array}{rccc} f, g: & D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & f(x, y), g(x, y) \end{array}$$

Con D un conjunto abierto y conexo, f y g funciones continuas.

Tratamos de buscar soluciones

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

Buscar las soluciones de cualquier sistema de esta forma es demasiado difícil. Nos centraremos por ahora simplemente en calcular las órbias del sistema. Esto es, sabremos calcular el lugar geométrico de los puntos del plano por el que pasan las soluciones, pero no sabremos calcular cómo son los movimientos que describen las soluciones.

De forma **NO RIGUROSA**, en física se da un sistema de la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{array}\right.$$

Y se saca la órbita poniendo y en función de x dividiendo:

$$\frac{\frac{dy}{\cancel{dt}}}{\frac{dx}{\cancel{dt}}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

En lo sucesivo, trataremos de dar un fundamento teórico a esta cuenta, con el fin de aprender por qué podemos realizarla y dar condiciones para cuándo poder hacerlo.

Ejemplo. Vamos a ver un ejemplo en el que la cuenta anterior funciona. Tomamos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y \\ y' & = & -x \end{array}\right.$$

Del que podemos coger como una solución las funciones:

$$x(t) = 2\operatorname{sen} t$$
$$y(t) = -2\cos t$$
$$t \in]0, \pi[$$

Suponiendo que podemos dividir:

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

En la notación usual, esta es la ecuación:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Sus soluciones veremos que son:

$$y^2 + x^2 = c$$

La ecuación en implícitas de la órbita para dicha solución concreta es:

$$y^2 + x^2 = 4$$

Por tanto, el cálculo parace que funciona.

Función inversa

Hagamos un breve repaso de lo que sabemos sobre funciones inversas.

- Podemos pensar en la noción conjuntista de función inversa: dada una función $f : I \to J$, si esta función es biyectiva, podemos encontrar una función $f^{-1} : J \to I$ tal que:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= id_I \\ f \circ f^{-1} &= id_J \end{aligned}$$

- O también podemos pensar en la noción clásica de función inversa: si tenemos una variable x dependiente de t: $x = f(t)$, bajo unas ciertas condiciones podemos encontrar una función g de forma que hagamos t depender de x: $t = g(x)$.

Para este apartado, dada una función:

$$\begin{array}{rccc} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, siempre que esta sea inyectiva, obtendremos una nueva función restringiendo el codominio de f a $f(I)$, una función biyectiva que sí tendrá inversa, a la que notaremos por f^{-1}.

Proposición 1.4. *Toda función continua e inyectiva es estrictamente monótona*[14].

A partir del resultado, al buscar funciones que puedan tener inversa, buscaremos funciones estrictamente monótonas.

Teorema 1.5 (Función inversa). *Sea una función*

$$\begin{array}{rccc} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

derivable en un intervalo abierto I con $J = f(I)$ y

$$f'(t) > 0 \qquad \forall t \in I$$

Entonces, dicha función tiene inversa, $g : J \to I$ y además es derivable en J, con:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Ejemplo. Dada la función:

$$f : I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \qquad f(x) = \operatorname{sen} x \quad \forall x \in I$$

Sabemos que es una función derivable en I, con $J = f(I) =]-1, 1[$ y con $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$, por lo que podemos aplicar el teorema, luego existirá una función

$$g : J \to R$$

[14]El lector debe estar familizarizado con esta Proposición y el siguiente Teorema, al ser contenido de Cálculo II.

Que será su función inversa y sabemos que dicha función es la función arcoseno, la cual es derivable (por el teorema), con:

$$g'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}$$

Tratamos ahora de simplificar dicha expresión:
Si $\theta = \operatorname{arc\,sen} x$, entonces $\theta \in I$ y:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Longrightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$$

Luego:

$$\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Por ser $\theta \in I$, sabemos que $\cos\theta > 0$, por lo que nos quedamos con el signo positivo de la raíz. Finalmente, llegamos a que:

$$g'(x) = \operatorname{arc\,sen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Notemos que $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1 - x^2}$ siempre y cuando $x \in J$.

Tenemos ya todas las herramientas necesarias para formalizar el cálculo de la ecuación diferencial de la órbita de un sistema autónomo plano.

Teorema 1.6. *Dado un sistema de la forma:*

$$\left\{\begin{array}{l} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{array}\right.$$

Para ciertas funciones

$$\begin{array}{rccc} f, g: & D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & f(x, y), g(x, y) \end{array}$$

Con D un conjunto abierto y conexo, f y g funciones continuas, de forma que el sistema tiene una solución:

$$x = \varphi(t) \qquad y = \psi(t) \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

con I un intervalo abierto.

Si se verifica que:

$$f(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

Entonces, la órbita $\{(\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in I\}$ puede escribirse como una curva en explícitas $y = y(x)$ de forma que venga dada por la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

Demostración. Por ser $f(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0$ y ser f continua, esta será siempre positiva o siempre negativa. Supongamos que es siempre positiva, y la demostración será análoga si esta es siempre negativa.

Por tanto, tenemos que

$$x' = \varphi'(t) = f(\varphi(t), \psi(t)) > 0 \quad \forall t \in I$$

Por lo que φ cumple las hipótesis del Teorema 1.5. De esta forma, sea $J = \varphi(I)$, existirá una función $T : J \longrightarrow I$ derivable en J y función inversa de φ con:

$$T'(x) = \frac{1}{\varphi'(T(x))} \qquad \forall x \in J$$

Como teníamos $x = \varphi(t)$, ahora tenemos $t = T(x)$.

Definimos una función

$$\begin{array}{rccc} y: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \psi(T(x)) \end{array}$$

que es derivable por la regla de la cadena, con:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \psi'(T(x)) \cdot T'(x) \\ &= g(\varphi(T(x)), \psi(T(x))) \cdot T'(x) \\ &= g(x, y(x)) \cdot T'(x) \end{aligned}$$

Y como:

$$T'(x) = \frac{1}{\varphi'(T(x))} = \frac{1}{f(\varphi(T(x)), \psi(T(x)))} = \frac{1}{f(x, y(x))}$$

Juntando estas últimas dos expresiones, llegamos a que:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = \frac{g(x, y(x))}{f(x, y(x))}$$

de donde obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

□

Ejemplo. Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y \\ y' & = & -x \end{array} \right.$$

Con funciones

$$\begin{array}{rccc} f, g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & y, -x \end{array}$$

Con una solución $x = \varphi(t)$ y $y = \psi(t)$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 2 \operatorname{sen} t \\ \psi(t) &= 2 \cos t \end{aligned}$$

Funciones definidas en un intervalo abierto I. Se pide hallar la órbita de dicha solución.
Necesitamos ver que

$$f(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

es decir:

$$2\cos t \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

Para ello, cogemos el intervalo $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, aunque se podría hacer con otros intervalos, pero complican el proceso.

Tenemos:

$$x = 2\operatorname{sen} t \qquad J = \left]-2, 2\right[$$

y buscamos poner t en función de x:

$$t = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Tenemos la función $T : J \to I$ con $T(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

Definimos ahora una función $y : J \to \mathbb{R}$ dada por:

$$y(x) = \psi(T(x)) = 2\cos\left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Si llamamos $\theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, entonces $\theta \in I$ y sabemos que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{2}$$

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \Longrightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

Y por el intervalo en el que estamos, el coseno es positivo, luego cogemos la raíz positiva. Finalmente, llegamos a que:

$$y(x) = 2\cos\left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{4 - x^2}$$

Ejercicio 1.6.1. Repetir el ejemplo cogiendo otro intervalo I.

2. Cambios de Variable

Dada una ecuación diferencial de primer orden en forma normal

$$\frac{dx}{dt} = x' = f(t, x)$$

mediante una función

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & f(t, x) \end{array}$$

continua definida en $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y conexo, nuestro objetivo será, dado un cambio de variable por dos ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \varphi_1(t, x) \\ y = \varphi_2(t, x) \end{array} \right.$$

con

$$\begin{array}{rccl} \varphi_1, \varphi_2: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & \varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x) \end{array}$$

cambiar tanto la expresión de la ecuación diferencial como el dominio para facilitar la resolución del mismo, mediante una aplicación

$$\begin{array}{rccl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & D & \longrightarrow & D_1 \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) \end{array}$$

con $D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y conexo, que nos lleve a una ecuación diferencial

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y)$$

para cierta función

$$\begin{array}{rccl} \hat{f}: & D_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (s, y) & \longmapsto & \hat{f}(s, y) \end{array}$$

Y será de nuestro interés buscar la expresión de dicha $\hat{f}$.

Nos preguntamos también por las condiciones que tenemos que exigirle a dicha φ para que el cambio de variable sea bueno:

1. Que φ sea biyectiva, o equivalentemente, que tenga inversa $\psi = \varphi^{-1}$, para poder deshacer el cambio de variable.

2. Que podamos hacer cálculo diferecial en ambos lados y que podamos transportarlo, es decir, que tanto φ como ψ sean de clase C^1.
3. Además, también tendremos que buscar cómo poner y en función de s, y exigir hipótesis para que podamos hacerlo.

Definición 2.1 (Difeomorfismo)**.** Sea $r \in \mathbb{N}$, una aplicación $f : A \to B$ es un C^r-difeomorfismo si f es de clase $C^r(A)$, biyectiva y su inversa f^{-1} es de clase $C^r(B)$.

De esta forma, nos interesará que φ sea un C^1-difeomorfismo, para que se cumplan los dos primeros puntos de la enumeración anterior[1].

A continuación, realizaremos un razonamiento informal con la finalidad de comprobar qué pasará al realizar el cambio de variable, para luego formalizar el mismo.

Volviendo a la situación inicial, nos encontrábamos ante una ecuación de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

y nos disponíamos a realizar un cambio de variable

$$\begin{cases} s = \varphi_1(t, x) \\ y = \varphi_2(t, x) \end{cases}$$

De esta forma, suponiendo que $x = x(t)$ es solución de la ecuación, tenemos las variables s y y en función de t.

$$\begin{cases} s(t) = \varphi_1(t, x(t)) \\ y(t) = \varphi_2(t, x(t)) \end{cases}$$

Suponiendo ahora que podemos expresar y en función de s: $y = y(s)$, buscamos calcular:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}$$

Primero, calculamos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t, x)x'(t) \stackrel{(*)}{=} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t, x)f(t, x)$$

Donde en $(*)$ hemos usado que x era solución de la ecuación diferencial. Posteriormente:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x)$$

Así, llegamos a que:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, x) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t, x)f(t, x)}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x)f(t, x)}$$

[1]Recordamos que una función de $\mathbb{R}^2$ sea de clase C^1 significa que podemos hacer sus derivadas parciales respecto a las dos variables y que ambas son continuas.

Pero todavía no hemos terminado, ya que ahora tenemos la ecuación diferencial en función de las variables s, y, t y x, por lo que tenemos que terminar de librarnos de las variables t y x. Para ello, usamos la función ψ, ya que:

$$\varphi(t,x) = (s,y) \Longrightarrow \psi(s,y) = (t,x)$$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s,y)) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s,y))f(\psi(s,y))}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s,y)) + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s,y))f(\psi(s,y))}$$

En caso de que el denominador sea distinto de 0, tendremos ya la nueva expresión de la ecuación diferencial, definiendo:

$$\hat{f}(s,y) = \frac{\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s,y)) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s,y))f(\psi(s,y))}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s,y)) + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s,y))f(\psi(s,y))}$$

llegamos a que

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s,y)$$

Ejemplo. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\operatorname{sen}(x+t-3)}{(x-2t+1)^2}$$

buscamos aplicarle un cambio de variable.

La ecuación diferencial así no tiene sentido, pues nos falta darle un dominio de definición: Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función dada por:

$$f(t,x) = \frac{\operatorname{sen}(x+t-3)}{(x-2t+1)^2}$$

Buscamos un conjunto D abierto y conexo que haga que f sea continua.

f es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ salvo en los que se anula su denominador, y esto sucede en la recta

$$x - 2t + 1 = 0$$

que divide el plano en dos componentes conexas. Para el dominio de la función f, hemos de quedarnos con un semiplano. Elegimos el de la izquierda[2], por lo que nos quedamos con

$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2t + 1 > 0\}$$

Vamos a aplicarle a esta ecuación diferencial un cambio de variable:

$$\begin{cases} y & = x + t - 3 & = \varphi_2(t,x) \\ s & = x - 2t + 1 & = \varphi_1(t,x) \end{cases}$$

Primero, veamos que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ es un difeomorfismo de todo el plano en todo el plano:

[2]Sin ningún motivo, podría hacerse con el de la derecha.

1. φ es biyectiva, ya que se puede despejar de manera única (es un sistema de ecuaciones lineal compatible determinado).
2. φ es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$, ya que sus dos componentes son polinomios.
3. φ^{-1} es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$: ya que al despejar para hallar la expresión de φ^{-1}, sale que es un polinomio también.

Por tanto, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un C^1-difeomorfismo. Sin embargo, nos interesa verlo como un difeomorfismo de D. Buscamos su codominio D_1 para conseguirlo:

Primero, buscamos qué imagen tiene la recta $x - 2t + 1 = 0$, y es la recta $s = 0$, que nos divide del plano en dos semiplanos, uno a la izquierda y otro a la derecha. Ahora, la imagen de nuestro conjunto D es el plano de la derecha, ya que tiene que cumplir que:

$$x - 2t + 1 = s > 0$$

En definitiva:

$$D_1 = \{(s, y) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0\}$$

Además, sabemos que D_1 es abierto y conexo.

Ahora, buscamos la fórmula para nuestra aplicación $\hat{f}$. Podríamos usar la fórmula pero vamos a repetir los cálculos:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{{dy}/{dt}}{{ds}/{dt}}$$

Pensando que tanto y como x dependen de t:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dt} = x' + 1 \\ \dfrac{ds}{dt} = x' - 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{dy}{ds} = \frac{x' + 1}{x' - 2}$$

Ahora, usamos que x es solución de la ecuación diferencial, luego se cumplirá que $x' = f(t, x)$:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{x' + 1}{x' - 2} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x + t - 3)}{(x - 2t + 1)^2} + 1}{\dfrac{\operatorname{sen}(x + t - 3)}{(x - 2t + 1)^2} - 2}$$

A continuación, falta poner la ecuación en función de (s, y). Para ello, componemos con la ψ:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} y}{s^2} + 1}{\dfrac{\operatorname{sen} y}{s^2} - 2} = \frac{\operatorname{sen} y + s^2}{\operatorname{sen} y - 2s^2} = \hat{f}(s, y)$$

Finalmente, surge que tenemos que poner la y en función de s. La ecuación diferencial no está definida en todo el semiplano: el denominador de la expresión no puede anularse. Los puntos que cumplan:

$$\operatorname{sen} y - 2s^2 = 0$$

no pueden entrar en el dominio de la ecuación diferencial.

Lo que sucede es que los difeomorfismos transladan curvas en curvas, pero no necesariamente curvas en explícitas a curvas en explícitas, luego puede que una curva que en D se expresaba en explícitas no se pueda expresar en D_1 con ecuaciones explícitas, con lo que nos daría una singularidad (en este caso, se anularía dicho denominador). Próximamente, veremos la interpretación gráfica de que esto es lo que realmente sucede.

Ahora, precedemos a realizar una teoría formal que sustente todas las cuentas realizadas hasta el momento.

Definición 2.2 (Cambio de variable admisible)**.** Dada una ecuación diferencial de primer orden en forma normal

$$x' = f(t, x)$$

Con $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua con D un conjunto abierto y conexo, un cambio de variable admisible es una transformación:

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & D_1 \\ (t, x) & \longmapsto & (s, y) \end{array}$$

con D, $D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ abiertos y conexos, φ es C^1-difeomorfismo, y además cumple la condición de admisibilidad[3]:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x) f(t, x) \neq 0 \qquad \forall (t, x) \in D \tag{2.1}$$

Observación. La condición de admisibilidad de un cambio admisible tiene un sentido geométrico, y es que estaremos interesados en dar solución a una ecuación diferencial mediante una curva en explícitas. Sin embargo, al realizar un cambio de variable con cualquier difeomorfismo nada nos garantiza que al pasar la curva en explícitas por el difeomorfismo su imagen siga siendo una curva en explícitas (lo que sí nos garatiza es que siga siendo una curva).

Veamos qué condición nos garantiza que al pasar una curva en explícitas $x = x(t)$ por un difeomorfismo

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & D_1 \\ (t, x) & \longmapsto & (s, y) \end{array}$$

sigamos teniendo una curva en explícitas $y = y(s)$.

Dada una función $x = x(t)$, la curva que esta función describe viene dada por la gráfica de dicha función (suponiendo que el dominio de x es I):

$$G = \{(t, x(t)) \mid t \in I\}$$

[3]Esta última condición nos permite que podamos llevar curvas en explícitas $x = x(t)$ que son solución de la ecuación diferencial en D a curvas en explícitas $y = y(s)$ que son solución de la ecuación diferencial en D_1.

Si ahora aplicamos el difeomorfismo a G:

$$\varphi(G) = \{(\varphi_1(t, x(t)), \varphi_2(t, x(t))) \mid t \in I\}$$

Dicha curva se podrá poner en explícitas si existe una función y tal que $y = y(s)$. Es decir, que podamos expresar la segunda coordenada en función de la primera. Para ello, necesitamos que cada primera coordenada tenga una única coordenada segunda, para poder construir una función. Esto se garantiza si la función que lleva cada t en $\varphi_1(t, x(t))$ es inyectiva. Llamaremos a dicha función g:

$$g(t) = \varphi_1(t, x(t)) \qquad t \in I$$

Si exigimos que su derivada sea distinta de cero en todos los puntos de I, entonces g será estrictamente creciente o estrictamente decreciente, garantizando su inyectividad y que podamos pasar curvas en explícitas a curvas en explícitas. Para ello:

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{dt}(t) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))x'(t) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))f(t, x) \neq 0 \qquad \forall t \in I
\end{aligned}$$

Donde en $(*)$ hemos usado que estábamos trabajando con x, una función solución de nuestra ecuación diferencial en cuestión.

Por tanto, la condición de admisibilidad nos garantiza que podemos pasar curvas en explícitas en curvas en explícitas.

Proposición 2.1. *Dada una ecuación diferencial de primer orden en forma normal*

$$x' = f(t, x)$$

con $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua con D un conjunto abierto y conexo. Dado un cambio de variable admisible mediante una transformación

$$\begin{array}{rccc}
\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : & D & \longrightarrow & D_1 \\
& (t, x) & \longmapsto & (s, y)
\end{array}$$

Entonces, $\psi = \varphi^{-1}$ es un cambio de variable admisibile para la ecuación diferencial

$$y' = \hat{f}(s, y)$$

Teorema 2.2 (Cambio de variable para ecuaciones diferenciales)**.** *Dado una ecuación diferencial de primer orden en forma normal*

$$x' = f(t, x) \tag{2.2}$$

Con $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua con D un conjunto abierto y conexo. Sea $\varphi : D \to D_1$ un cambio de variable admisible.

Entonces, la ecuación 2.2 es equivalente[4] *a la ecuación*

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y) \tag{2.3}$$

[4] Quiere decir, que siempre que tengamos una curva en D que sea solución de la ecuación diferencial, podamos ir a D_1 aplicando φ y tendremos una solución de la ecuación diferencial definida en D_1, así como este mismo procedimiento al revés.

donde

$$\hat{f}(s,y) = \frac{\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t}(\psi(s,y)) + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}(\psi(s,y))f(\psi(s,y))}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}(\psi(s,y)) + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}(\psi(s,y))f(\psi(s,y))} \qquad \forall (s,y) \in D_1$$

Demostración. Supongamos que $x = x(t)$ es solución de la ecuación 2.2 definida en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$, y queremos realizar el cambio

$$\begin{cases} s = \varphi_1(t, x(t)) \\ y = \varphi_2(t, x(t)) \end{cases}$$

Defino

$$\begin{array}{rccc} S: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \varphi_1(t, x(t)) \end{array}$$

que es derivable por la regla de la cadena, con derivada distinta de 0:

$$S'(t) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(t,x)x'(t) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(t,x)f(t,x) \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

ya que el cambio era admisible. Defino $J = S(I)$ intervalo abierto, y podemos ahora aplicar el Teorema de la función inversa sobre S, obteniendo una función

$$\begin{array}{rccc} T: & J & \longrightarrow & I \\ & s & \longmapsto & T(s) \end{array}$$

de forma que cumpla

$$T(S(t)) = t \quad \forall t \in I$$
$$S(T(s)) = s \quad s \in J$$

Teníamos s en función de t y ahora hemos puesto t en función de s utilizando la primera ecuación del cambio de variable. Ahora, podemos definir (usando la segunda ecuación del cambio) la siguiente función, para expresar y en función de s, gracias a que hemos expresado t en función de s:

$$\begin{array}{rccc} y: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \varphi_2(T(s), x(T(s))) \end{array}$$

Nos falta derivar y respecto a s para comprobar que sea solución de la ecuación diferencial 2.3:

$$\begin{aligned} y'(s) &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s))) \cdot T'(s) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s))) \cdot x'(T(s)) \cdot T'(s) \\ &= T'(s)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s))) \cdot x'(T(s))\right) \\ &= T'(s)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(T(s), x(T(s))) \cdot f(T(s), x(T(s)))\right) \end{aligned}$$

Ahora, usamos que φ tiene de inversa a ψ, para así poder expresar

$$\psi(s, y(s)) = (T(s), x(T(s)))$$

y eliminar t y x de la expresión, dejándolo todo en función de s e y:

$$y'(s) = T'(s)\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(\psi(s, y(s))) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\psi(s, y(s))) \cdot f(\psi(s, y(s)))\right)$$

Falta ver que $T'(s)$ es el denominador de la expresión 2.3. Para ello, aplicamos la regla de derivación de la función inversa:

$$T'(s) = \frac{1}{S'(T(s))} = \frac{1}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(T(s), x(T(s))) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(T(s), x(T(s)))f(T(s), x(T(s)))}$$

Ahora, volvemos a usar que

$$\psi(s, y(s)) = (T(s), x(T(s)))$$

para obtener

$$T'(s) = \frac{1}{S'(T(s))} = \frac{1}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\psi(s, y(s))) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\psi(s, y(s)))f(\psi(s, y(s)))}$$

Finalmente, falta ver que si tenemos una solución en D_1, volvemos a tener una solución en D. Bastaría aplicar el mismo proceso pero al revés. Sin embargo, debemos comprobar que si φ es admisible para la ecuación 2.2, entonces ψ lo es para la ecuación 2.3.

Faltaría comprobar la expresión análoga a 2.1 para ψ, esto es:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial s}(s, y) + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(s, y)\hat{f}(s, y) \neq 0 \qquad \forall (s, y) \in D_1$$

Usando que:

$$\varphi'(\psi(s, y))\psi'(s, y) = Id$$

□

Nos falta ahora aprender estrategias para buscar el cambio de variable adecuado en cada caso. Para ello, aprenderemos primero a resolver las ecuaciones diferenciales más sencillas para así cuando se nos presente una más complicada, aplicar un cambio de variable para obtener una ecuación sencilla que sí sepamos resolver.

2.1. Cálculo de primitivas

Buscamos resolver ecuaciones diferenciales sencillas. Las ecuaciones diferenciales más sencillas que podemos encontrarnos son el cálculo de primitivas, es decir, cuando la derivada de x sólo está en función de t.

Pensamos en la ecuación diferencial:

$$x' = p(t) \tag{2.4}$$

con $p : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, el dominio de la ecuación diferencial es $D = I \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$. Sabemos que dicha ecuación diferencial tiene solución, gracias al Teorema Fundamental del Cálculo:

Teorema 2.3 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea $p : I \to \mathbb{R}$ una función continua, fijado $t_0 \in I$, entonces*

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)\ ds \qquad t \in I$$

es una función de clase $C^1(I)$ que cumple $P'(t) = p(t)$.

Por tanto, fijado $t_0 \in I$, las soluciones de la ecuación diferencial 2.4 son de la forma:

$$x(t) = k + \int_{t_0}^{t} p(s)\ ds \qquad k \in \mathbb{R}$$

Tenemos una primera clase de ecuaciones diferenciales que sabemos resolver, al menos a nivel teórico, ya que hay integrales que no pueden calcularse.

2.2. Ecuaciones de variables separadas

Una ecuación de variables separadas es una ecuación de la forma

$$x' = p(t)q(x)$$

con funciones

$$\begin{array}{rccc} p: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & p(t) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} q: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & q(x) \end{array}$$

continuas con $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalos abiertos. De esta forma, estamos manejando la ecuación diferencial

$$x' = f(t, x)$$

con

$$\begin{array}{rccc} f: & D = I \times\ J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & p(t)q(x) \end{array}$$

Observación. Notemos que el cálculo de primitivas es caso particular de las ecuaciones de variables separadas, ya que tomando $q(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$:

$$p(t)q(x) = p(t) \qquad \forall t \in I$$

Para su resolución, comenzaremos primero con unos cálculos informales que luego formalizaremos. Dada la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x)$$

Primero, buscaremos los valores $a \in J$ que hagan que $q(a) = 0$. En dicho caso, podemos definir la función

$$x(t) = a \quad t \in I$$

que es solución de la ecuación diferencial.

Una vez localizados todos los ceros de la ecuación, tendremos ya todas las soluciones constantes localizadas. Ahora, haremos separación de variable, que precisamente busca las soluciones que no son constantes. Hacemos la siguiente operación, que por ahora carece de rigor:

$$\frac{dx}{q(x)} = p(t)\ dt$$

Posteriormente, tomaremos primitivas en ambos lados:

$$\int \frac{dx}{q(x)} = \int p(t)\ dt$$

Notando por Φ a una primitiva para $\frac{1}{q}$ y por P a una primitiva de p, tendremos que:

$$\Phi(x) + c_1 = P(t) + c_2$$

Para ciertas constantes arbitrarias $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Sin embargo, como la diferencia de constantes sigue siendo una constante, podemos escribir simplemente:

$$\Phi(x) = P(t) + c$$

Si ahora podemos calcular una inversa de Φ (en caso de que esta sea biyectiva), podemos deducir que:

$$x(t) = \Phi^{-1}(P(t) + c)$$

Ejemplo. En este ejemplo, mostraremos que el procedimiento anterior parece funcionar ante las ecuaciones diferenciales de variables separadas, pese a carecer de sentido aparente. Para ello, trataremos de resolver la ecuación

$$x' = e^{t+x}$$

con dominio $D = \mathbb{R}^2$, que es una ecuación en variables separadas, ya que:

$$x' = e^{t+x} = e^t e^x$$

En este caso, no encontramos soluciones constantes, ya que $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Resolvámosla con la receta que acabamos de aprender:

$$\frac{dx}{dt} = e^t e^x$$
$$e^{-x}\ dx = e^t\ dt$$
$$\int e^{-x}\ dx = \int e^t\ dt$$
$$-e^{-x} = e^t + c$$

La última igualdad nos da la función x de manera implícita, buscamos ahora la forma de dar la función x de forma explícita:

$$e^{-x} = -e^t - c$$

y tomamos logaritmos, pensando en que esto nos va a determinar luego el dominio de la solución (de forma implícita, suponemos que la cantidad de la derecha es positiva).

$$\begin{aligned} -x(t) &= \ln(-e^t - c) \\ x(t) &= -\ln(-e^t - c) \end{aligned}$$

Nos preguntamos ahora por qué constantes c nos sirven y por el dominio de la función x:

- Cuando c tome valores positivos o 0, no va a tener sentido la expresión, por lo que exigimos $c < 0$.
- A continuación, buscamos el intervalo abierto en el que esté definida x. Nos interesa que $-e^t - c > 0$ para cierta constante negativa c, luego nos interesa que t sea chico, para que la cantidad sea positiva. Por tanto, el intervalo de definición de x será de la forma $I_c =]-\infty, a_c[$, para cierto $a_c \in \mathbb{R}$, que dependerá del valor de la constante c escogida para la solución.

Buscamos ahora dicha a_c, sea $c \in \mathbb{R}^-$:

$$-e^t - c > 0 \Longleftrightarrow -c > e^t \Longleftrightarrow \ln(-c) > \ln(e^t) = t$$

donde hemos usado que ln es una función estrictamente creciente, obteniendo que:

$$t \in I_c =]-\infty, \ln(-c)[$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación planteada al inicio son

$$\begin{array}{rccl} x: & I_c & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & -\ln\left(-e^t - c\right) \end{array}$$

Dado que hemos hecho una cuenta que a priori carece de sentido, la única forma de comprobar que lo que hemos hecho está bien es derivar x y comprobar que, efectivamente, es una solución de la ecuación diferencial.

De forma alternativa, veamos ahora que en realidad la receta que usamos tiene un fundamento teórico, que nos permite usarla bajo unas ciertas hipótesis, obteniendo siempre unos resultados fiables.

De esta forma, supongamos que $q(x) \neq 0\ \forall x \in J$ (para los valores en los que se anule q, tenemos soluciones constantes, luego falta comprobar qué ocurre donde q no se anula). Vamos a intentar hacer un cambio de variable que transforme la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x) \tag{2.5}$$

en un cálculo de primitivas de la forma

$$\frac{dy}{ds} = p(s) \tag{2.6}$$

En vez de dar el cambio, vamos a buscarlo. Dada una función

$$\begin{array}{rrcl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & (s,y) \end{array}$$

Exigimos que $\varphi_1 = Id_I$ y notaremos $\phi = \varphi_2$ por comodidad, con lo que queremos realizar el cambio

$$\left\{ \begin{array}{ll} s & = t \\ y & = \phi(x) \end{array} \right. \tag{2.7}$$

por lo que tendremos que buscar dicha función ϕ. Para que φ sea un difeomorfismo, es necesario que la función

$$\phi : J \to \mathbb{R}$$

sea de clase C^1, así como que $\phi'(x) \neq 0\ \forall x \in J$. No es necesario exigir que sea biyectiva, ya que luego tomaremos como codominio $\hat{J} = \phi(J)$, intervalo abierto.
De esta forma, la ecuación diferencial tras el cambio de variable tendrá como dominio $D_1 = I \times \hat{J}$.

Ahora, buscamos que φ sea admisible, es decir, que cumpla la condición de admisibilidad:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x) \neq 0 \quad \forall (t,x) \in D$$

Lo cual es inmediato, ya que $\varphi_1(t,x) = t$, luego:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x) = 1 + 0 \neq 0$$

La interpretación geométrica de que la condición de admisiblidad sea cierta siempre bajo un cambio del tipo 2.7 cuenta con una interpretación geométrica, ya que al ser $t = s$, cualquier curva que escribamos de forma explícita en D, al aplicarle el difeomorfismo podrá seguir escribiéndose de forma explícita en D_1, y viceversa.

Sea $x = x(t)$ una solución de 2.5, aplicamos ahora el cambio de variable, tal y como aprendimos al inicio de este Capítulo:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} \overset{(*)}{=} \phi'(x)x' = \phi'(x)p(t)q(x)$$

donde en $(*)$ hemos usado que

$$\frac{dt}{ds} = 1$$

y en la segunda igualdad que x es solución de 2.5.

Todavía no tenemos la ecuación cambiada, ya que seguimos teniendo los parámetros t y x. Para quitarlos, basta con usar $\psi = \phi^{-1}$, que sabemos que existe según las condiciones que hemos impuesto[5] sobre ϕ:

$$\phi(x) = y \Longrightarrow x = \psi(y) \quad \forall x \in J$$
$$\frac{dy}{ds} = p(t)\phi'(\psi(y))q(\psi(y))$$

Sin embargo, no hemos terminado, ya que queríamos buscar un cambio de variable que nos llevase a:

$$\frac{dy}{ds} = p(t)$$

Por lo que tenemos que exigir finalmente a ϕ que:

$$\phi'(x)q(x) = 1$$

Por tanto, fijado $x_0 \in J$, defino

$$\begin{array}{rccc} \phi: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{q(\xi)} \end{array}$$

Para que:

$$\phi'(x) = \frac{1}{q(x)} \Longrightarrow \phi'(x)q(x) = 1$$

Resumiendo, dada una ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = p(t)q(x)$$

Si aplicamos el cambio:

$$\left\{ \begin{array}{ll} s & = t \\ y & = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{q(\xi)} \end{array} \right. \qquad x_0 \in J$$

Llegamos a una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{ds} = p(t)$$

Que teóricamente sabemos resolver, ya que se trata de un cálculo de primitiva.

Ejemplo. Volvemos a la ecuación con la que empezamos el curso, con el fin de aplicarle la regla que acabamos de aprender:

$$x' = \lambda x$$

con dominio $D = \mathbb{R}^2$. Es de variables separadas. Las soluciones constantes de la ecuación son:

$$x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

[5] Hasta ahora, que ϕ sea de clase $C^1(J)$ y que tenga derivada no nula.

Ahora, como J debemos tomar tanto $\mathbb{R}^+$ como $\mathbb{R}^-$. En este ejemplo, tomaremos $J = \mathbb{R}^-$, y el resultado debe repetirse en $\mathbb{R}^+$ de forma análoga.

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int \lambda \; dt$$
$$\ln(-x) = \lambda t + c$$

y despejamos x:

$$-x(t) = e^{\lambda t + c}$$
$$x(t) = -e^{\lambda t + c} = -e^c e^{\lambda t}$$

En definitiva, las soluciones son:

$$x(t) = k \cdot e^{\lambda t} \quad k < 0$$

2.3. Ecuaciones homogéneas

Siguiendo con un nuevo tipo de ecuaciones diferenciales que aprenderemos a resolver reduciéndolas a un tipo de ecuaciones diferenciales que ya sabemos resolver, ahora es el turno de estudiar las ecuaciones diferenciales homogéneas.

Una ecuación diferencial homogénea es una ecuación de la forma:

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

con $h : J \to \mathbb{R}$ una funcion continua, siendo J un intervalo abierto.

Cómo identificarlas

Anteriormente estudiamos las ecuaciones de variables separadas, las cuales eran fáciles de identificar. Sin embargo, las ecuaciones homogéneas ya empiezan a ser algo más difíciles de identificar.

Mostraremos ahora varios ejemplos de ecuaciones diferenciales que son homogénas, aunque no sea fácil verlo:

1. La ecuación diferencial
$$x' = \frac{x+t}{t}$$
es homogénea, para la función
$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & u+1 \end{array}$$
Ya que
$$h\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t} + 1 = \frac{x}{t} + \frac{t}{t} = \frac{x+t}{t}$$

2. La ecuación diferencial
$$x' = \frac{t^2 + 2xt + 3x^2}{t^2 + x^2}$$
es homogénea, ya que si dividimos el numerador y el denominador entre t^2, llegamos a que:
$$x' = \frac{\frac{t^2 + 2xt + 3x^2}{t^2}}{\frac{t^2 + x^2}{t^2}} = \frac{1 + 2\left(\frac{x}{t}\right) + 3\left(\frac{x}{t}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2}$$
Luego la función h en este caso es la función
$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \dfrac{1 + 2u + 3u^2}{1 + u^2} \end{array}$$

Esta última ecuación diferencial parece haber sido identificada mediante una idea feliz (dividir todo entre t^2). Sin embargo, existe una teoría sobre funciones homogéneas, la cual pasamos a desarrollar brevemente ahora. Esta nos permitirá darnos cuenta de forma rápida de si una ecuación diferencial es o no homogénea.

Definición 2.3 (Función homogénea)**.** Dada una función $f : V \to W$ entre dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, decimos que es homogénea de grado r si se verifica que
$$f(\lambda \cdot v) = \lambda^r f(v) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad \forall v \in V$$

Proposición 2.4. *Dado un polinomio en n variables, este es una función homogénea de grado r si, y solo si todos sus monomios son de grado r*

A dichos polinomios, los llamamos polinomios homogéneos de grado r.

Se verifica que si tenemos una ecuación diferencial que venga dada por un cociente de dos funciones homogéneas del mismo grado r, entonces estamos ante una ecuación diferencial homogénea:
$$x' = \frac{f(t,x)}{g(t,x)}$$
Para comprobarlo, tendríamos que dividir el numerador y denominador del cociente entre t^r, obteniendo así la función h.

Observemos que lo que sucedía en el ejemplo anterior es que teníamos un cociente de polinomios homogéneos de grado 2 (por estar formados únicamente por monomios de grado 2), por lo que dividiendo entre t^2 pudimos sacar al función h.

Ejemplo. La ecuación diferencial
$$x' = \frac{t + \sqrt{x^2 + t^2}}{2x - t}$$
es homogénea, ya que tengo dos funciones homogéneas de grado 1 divididas. Si dividimos numerador y denominador por t, conseguimos verlo más fácil. Sin embargo, hemos de distinguir casos:

- Si $t > 0$:

$$x' = \frac{t + \sqrt{x^2+t^2}}{2x-t} = \frac{\dfrac{t + \sqrt{x^2+t^2}}{t}}{\dfrac{2x-t}{t}} = \frac{\dfrac{t}{t} + \sqrt{\dfrac{x^2+t^2}{t^2}}}{\dfrac{2x-t}{t}} = \frac{1 + \sqrt{\left(\dfrac{x}{t}\right)^2 + 1}}{2\left(\dfrac{x}{t}\right) - 1}$$

- Si $t < 0$:

$$x' = \frac{\dfrac{t}{t} + \dfrac{\sqrt{x^2+t^2}}{t}}{\dfrac{2x-t}{t}} = \frac{\dfrac{t}{t} - \dfrac{\sqrt{x^2+t^2}}{-t}}{\dfrac{2x-t}{t}} = \frac{\dfrac{t}{t} - \sqrt{\dfrac{x^2+t^2}{t^2}}}{\dfrac{2x-t}{t}} = \frac{1 - \sqrt{\left(\dfrac{x}{t}\right)^2 + 1}}{2\left(\dfrac{x}{t}\right) - 1}$$

Dominio de la ecuación diferencial

Ahora, trabajamos con una ecuación que es de la forma:

$$x' = f(t,x)$$

para cierta función $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y conexo[6] de forma que

$$f(t,x) = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

para cierta función $h : J \to \mathbb{R}$ con J un intervalo abierto y continua.

En primer lugar, observamos que f es continua, por ser composición de funciones continuas:

$$(t,x) \longmapsto \frac{x}{t} \longmapsto h\left(\frac{x}{t}\right)$$

Ahora, queremos ver cuál es dicho dominio D en el que está definida nuestra ecuación diferencial.

- Como primera observación, debemos excluir de D la recta $t = 0$, para que la definición de f tenga sentido.

- Suponiendo que[7] $J =]\alpha, \beta[$ para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

  Dado un punto $(t,x) \in D$ de nuestro dominio, este punto debería cumplir que $\frac{x}{t} \in J$ para que la definición de f tenga sentido. Decir que $\frac{x}{t} \in J$ es equivalente a que

  $$\alpha < \frac{x}{t} < \beta$$

  Por lo que los puntos $(t,x) \in D$ de nuestro dominio deberían cumplir dicha condición. Notemos que $\frac{x}{t}$ es la pendiente de un punto (t,x) de $\mathbb{R}^2$, por lo que todos los puntos que cumplen la ecuación superior son los que se encuentran en un sector angular, delimitado por las rectas $x = \alpha t$ y $x = \beta t$:

[6] Por la definición de ecuación diferencial.

[7] En el caso de que sea un intervalo no acotado, se razonaría de forma similar.

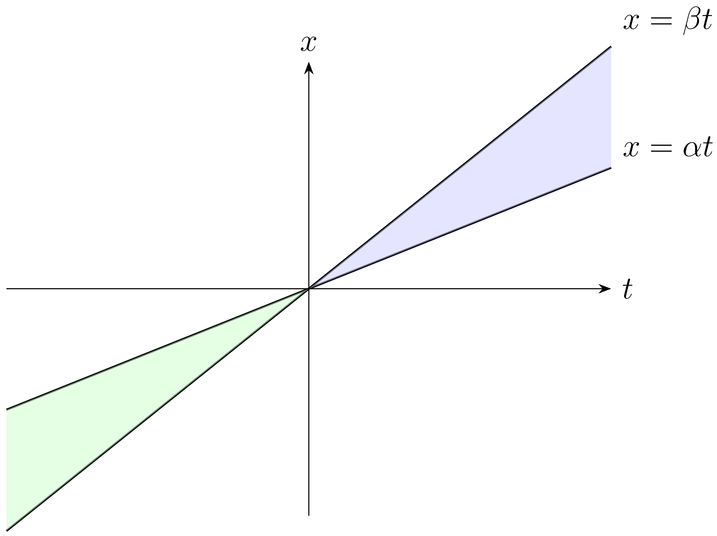


Figura 2.1: Sector angular, sin incluir el punto $(0, 0)$.

Como D ha de ser conexo, hemos de quedarnos con la parte de la izquierda o con la parte de la derecha del sector angular. Algebraicamente, estos dos son los conjuntos:

$$D_+ = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, \frac{x}{t} \in J\right\}$$
$$D_- = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0, \frac{x}{t} \in J\right\}$$

Observación. Notemos que en el ejemplo superior de la ecuación diferencial

$$x' = \frac{t + \sqrt{x^2 + t^2}}{2x - t}$$

distinguíamos los casos en los que t era positivo y en los que t era negativo. Esto tiene todo el sentido, ya que en realidad no estamos trabajando con una ecuación diferencial, sino con 2, ya que no habíamos tenido en cuenta el dominio de la ecuación diferencial. Esta puede estar definida o bien en D_+ o bien en D_-, por lo que estaríamos trabajando o bien con $t > 0$ o bien con $t < 0$, respectivamente.

Posicionamiento de las ecuaciones homogéneas

Nos preguntamos ahora por las relaciones que hay entre las ecuaciones homogéneas y las ya vistas hasta el momento: cálculo de primitivas y de variables separadas. ¿Son todas las ecuaciones de variables separadas homogéneas?

Respondemos a esta y a muchas más preguntas con los siguientes ejemplos:

- El cálculo de primitivas no está incluido en las ecuaciones diferenciales homogéneas, salvo la ecuación $x' = 0$.
- $x' = xt$ es de variables separadas pero no es homogénea.
- $x' = \frac{x}{t}$ es homogénea y es de variables separadas.

- $x' = \frac{x+t}{t}$ es homogénea pero no es de variables separadas.

Por tanto, vemos que hay ecuaciones homogéneas que son de cálculo de primitivas (aunque pocas), que hay algunas ecuaciones homogéneas que son a su vez de variables separadas y que hay ecuaciones homogéneas que no son de variables separadas. La situación es similar a la del diagrama 2.2.

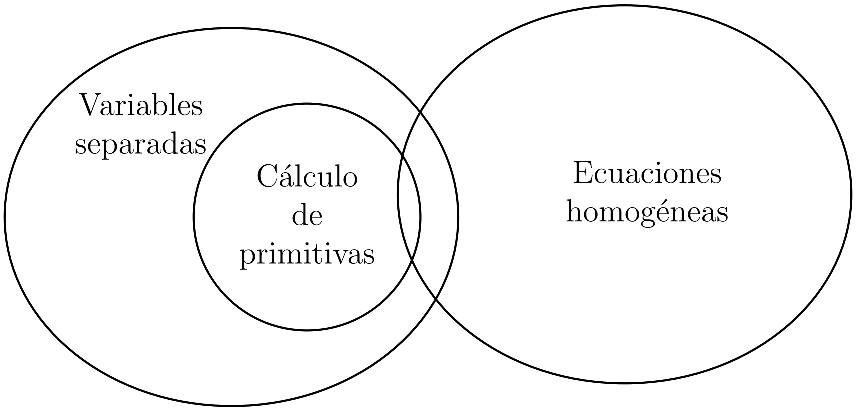


Figura 2.2: Diagrama de los tipos de ecuaciones diferenciales.

Resolución de ecuaciones homoǵeneas

Hay un cambio de variable que nos permite llevar ecuaciones diferenciales homogénes a ecuaciones diferenciales de variables separadas, que ya sabemos resolver. Por comodidad, supondremos que[8] el dominio elegido para la ecuación diferencial es D_+.

El cambio viene dado por la función

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ll} s & = t \\ y & = \dfrac{x}{t} \end{array} \right.$$

- Podemos despejar de manera única las variables t y x, luego es biyectiva, con inversa:
$$\psi : \left\{ \begin{array}{ll} t & = s \\ x & = sy \end{array} \right.$$
- Las componentes φ_1 y φ_2 de φ son polinomios, luego es de clase $C^1(D_+, \mathbb{R}^2)$.
- Y además, como las componentes ψ_1 y ψ_2 de ψ también son polinomios, tenemos que ψ es de clase $C^1(\varphi(D_+), \mathbb{R}^2)$.

Por tanto, hemos comprobado que φ es un C^1-difeomorfismo, luego falta comprobar la condición de admisibilidad para comprobar que sea un cambio de variable admisible. Sin embargo, esta propiedad estará garantizada, ya que no hemos cambiado la variable t, por lo que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x) f(t, x) = 1 + 0 \neq 0 \qquad \forall (t, x) \in D_+$$

[8]En caso contrario, es análogo.

Una vez comprobado que φ es un cambio de variable admisible, vemos cuál será el nuevo dominio de la ecuación diferencial una vez hecho el cambio de variable:

$$\varphi(D_+) = \varphi\left(\left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, \frac{x}{t} \in J\right\}\right) = \left\{(s,y) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0, y \in J\right\} =]0,+\infty[\times J$$

Por tanto, el sector angular D_+ que teníamos como dominio de la ecuación diferencial original, se aplica mediante φ en una banda horizontal, tal y como vemos en la figura 2.3.

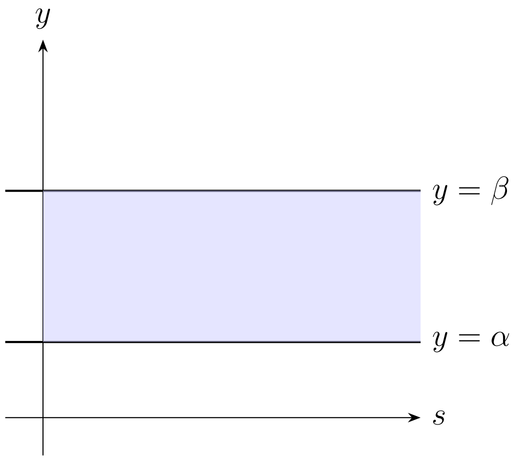


Figura 2.3: Banda horizontal, sin incluir la recta $s = 0$.

Procederemos ahora a realizar el cambio de variable, para ver qué forma adopta la ecuación. Teníamos la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

a la que le aplicamos el cambio

$$\begin{cases} s &= t \\ y &= \dfrac{x}{t} \end{cases}$$

Pensando que x está en función de t y que y está en función de s:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\cancelto{1}{\frac{dt}{ds}} \overset{(*)}{=} \frac{t \cdot \dfrac{dx}{dt} - x}{t^2} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{1}{t} \cdot \frac{x}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t}\right)$$

Donde en $(*)$ hemos aplicado que $y = \frac{x}{t}$, junto con la regla de derivación de un cociente. Tenemos ya la ecuación diferencial, pero sigue estando en función de las variables x y t. Falta aplicar que $y = \frac{x}{t}$ otra vez, que $s = t$ y que x era solución de la ecuación diferencial, por lo que se verifica:

$$\frac{dx}{dt} = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

Aplicando esto:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{t}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t}\left(h\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{x}{t}\right) = \frac{1}{s}(h(y) - y)$$

Que es una ecuación de variables separadas, para las funciones[9] $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ y $q : J \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$p(s) = \frac{1}{s}$$
$$q(y) = h(y) - y$$

Luego acabamos de ver que toda ecuación homogénea puede llevarse a una ecuación de variables separadas.

Recordamos que en variables separadas podíamos encontrarnos dos tipos de soluciones, constantes y no constantes. Observemos que cuando $q(b) = h(b) - b = 0$ para cierto b, encontramos soluciones constantes de la ecuación diferencial de variables separadas, que serán las funciones:

$$z(s) = b \qquad \forall s \in \mathbb{R}^+$$

Que al deshacer el cambio de variable, nos darán una semirrecta en el dominio original:

$$x(t) = b \cdot t \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Resumiendo, dada una ecuación diferencial en un dominio D_+ por:

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

para cierta $h : J \to \mathbb{R}$ continua, podemos aplicar el cambio de variable

$$\left\{ \begin{array}{ll} s & = t \\ y & = \dfrac{x}{t} \end{array} \right.$$

para llegar a la ecuación diferencial de variables separadas

$$y' = \frac{1}{s}(h(y) - y)$$

que ya sabemos resolver.

Ejemplo. Dada la ecuación diferencial (en la que usamos la notación geométrica en lugar de la física):

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

Se pide hallar su dominio de definición, así como encontrar una solución de dicha ecuación, cogiendo como condición de dicha solución que ha de cumplir:

$$y(-1) = -1$$

[9]El dominio de la primera es $\mathbb{R}^+$ porque es el mismo dominio en el que se mueve t y el de la segunda es el dominio en el que se mueve $\frac{x}{t}$.

Se trata de una ecuación diferencial homogénea, ya que se trata de un cociente de dos polinomios homogéneos de grado 1. Podemos comprobarlo dividiendo numerador y denominador entre x:

$$y' = \frac{y-x}{y+x} = \frac{\frac{y-x}{x}}{\frac{y+x}{x}} = \frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$$

Por lo que la función h a escoger sería:

$$h(\xi) = \frac{\xi-1}{\xi+1}$$

Y debemos elegir bien el dominio de definición de dicha función. Podría ser o bien $J_- =]-\infty, -1[$ o bien $J_+ =]-1, +\infty[$.
Como queremos que $y(-1) = -1$, buscamos tener $\frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1$, luego tomaremos $J = J_+$, ya que contiene el 1.

Una vez conocido el dominio de h, podemos ya escoger el dominio de definición de la ecuación diferencial. Este será D_+ o D_-. Como ha de cumplir que $(-1, -1) \in D$ siendo D el dominio de la ecuación diferencial, nos quedaremos con $D = D_-$, ya que es la opción que nos contiene las abscisas negativas. De esta forma:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, \frac{y}{x} > -1\right\}$$

Gráficamente, el dominio de definición D es el sector angular de la figura 2.4.

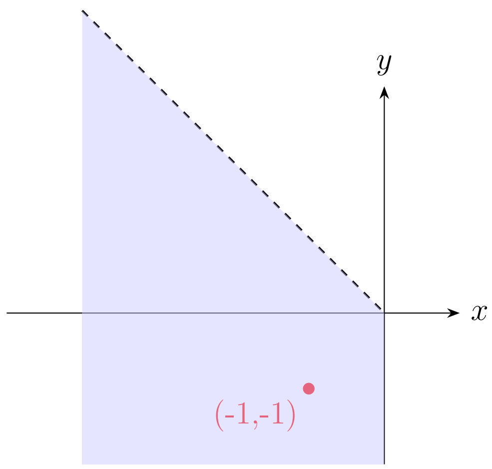


Figura 2.4: El sector angular D.

Ahora, haremos el cambio de variable, usando como nuevas variables u y v:

$$\varphi : \begin{cases} u &= x \\ v &= \frac{y}{x} \end{cases}$$

De esta forma, el conjunto D pasa a:

$$\varphi(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u < 0, v > -1\} =]-\infty, 0[\times]-1, +\infty[$$

Y el punto $(-1,-1)$ pasa a:

$$\varphi(-1,-1) = \left(-1, \frac{-1}{-1}\right) = (-1,1)$$

Gráficamente, vemos $\varphi(D)$ en la figura 2.5.

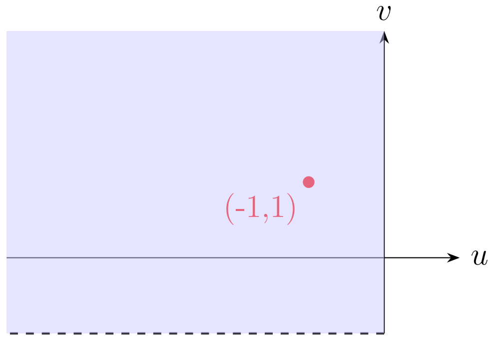


Figura 2.5: Dominio tras hacer el cambio de variable

Buscamos ahora la ecuación diferencial tras el cambio de variable, la cual resulta en:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{du} &= \frac{dv}{dx}\cancelto{1}{\frac{dx}{du}} = \frac{x\dfrac{dy}{dx} - y}{x^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{u}(h(v) - v) = \frac{1}{u}\left(\frac{v-1}{v+1} - v\right) \\ &= \frac{1}{u}\left(\frac{v-1}{v+1} - \frac{v^2+v}{v+1}\right) = \frac{-1}{u}\cdot\frac{1+v^2}{1+v}\end{aligned}$$

Y tenemos nuestra ecuación de variables separadas, que pasamos a resolver. Lo primero a observar es que nos interesa la solución concreta v tal que $v(-1) = 1$.

Observamos que la ecuación anterior no tienen soluciones constantes, por ser:

$$\frac{1+v^2}{1+v} > 0$$

Luego resolvemos por variables separadas:

$$\begin{gathered}\frac{dv}{du} = \frac{-1}{u}\cdot\frac{1+v^2}{1+v} \\ \int \frac{1+v}{1+v^2}\,dv = -\int \frac{du}{u}\end{gathered}$$

Como estamos trabajando con $u < 0$:

$$-\int \frac{du}{u} = -\ln(-u) + k$$

Y la primera integral la partimos en dos para resolverla, llegando a que:

$$\int \frac{1+v}{1+v^2}\,dv = \int \frac{1}{1+v^2}\,dv + \int \frac{v}{1+v^2}\,dv = \operatorname{arc\,tg} v + \frac{1}{2}\ln(1+v^2) + k'$$

Por tanto:
$$\operatorname{arc\,tg} v + \frac{1}{2}\ln(1+v^2) = -\ln(-u) + k$$
Y por el desarrollo teórico visto en la sección de ecuaciones de variables separables, sabemos que dicha expresión define de forma implícita una función v en función de u, para cierto $k \in \mathbb{R}$.
Ahora, volveremos al dominio original, deshaciendo el cambio de variable:
$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = -\ln(-x) + k$$
Que define y como función de x de forma implícita. Usando que $(x<0)$:
$$\ln(-x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2\right)$$
Podemos darle otra forma a la expresión, para verla de forma más clara:
$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) + \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = k$$
Es la familia de soluciones que nos resuelven la ecuación diferencial. Buscamos k para $y(-1) = -1$, sustituyendo y y x por -1:
$$k = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\sqrt{2}\right)$$
Para ver que esto define una ecuación implícita, deberíamos aplicar el Teorema, pero gracias a la teoría que venimos desarrollando hasta ahora, lo tenemos visto. Tenemos visto que dicha fórmula dos define una ecuación implícita en un entorno del punto $(-1,-1)$.

Sin embargo, estamos ante un problema específico en el que podemos llegar a ver algo más. Se trata de una curva que en cartesianas tiene una expresión compleja, pero en coordenadas polares puede intuirse la gráfica de la función de forma más fácil, por lo que cambiamos a coordenadas polares:
$$\left\{\begin{array}{ll} x & = r\cos\theta \\ y & = r\operatorname{sen}\theta \end{array}\right.$$
Y como:
$$\frac{y}{x} = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$$
Buscamos θ de forma que $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Como estamos trabajando con la solución que pasa por el $(-1,-1)$, estamos trabajando en el tercer cuadrante, por lo que tendremos $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Como la función arctan es la inversa de tan sólo en el intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, desplazamos θ, usando que la tangente es π-periódica:
$$\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Longrightarrow \theta - \pi \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$\arctan(\tan\theta) = \arctan(\tan(\theta-\pi)) = \theta - \pi$$

Luego:

$$\arctan(\tan\theta) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \theta - \pi$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$$

Y también:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Finalmente, llegamos a que la expresión en polares es:

$$\theta + \ln r = k + \pi$$

Se trata de la espiral logarítmica o de Arquímedes, que se entiende mejor tomando exponenciales:

$$r = e^{k-\theta+\pi}$$

Fijado un r, conforme movemos θ, se va formando una especie de circunferencia pero con r disminuyendo, luego se forma una espiral.

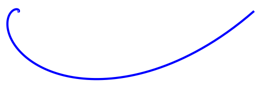


Figura 2.6: Espiral logarítmica.

Observación. Notemos que las espirales son curvas de la forma

$$r = f(\theta)$$

con f creciente o decreciente, escritas en coordenadas polares.

2.4. Ecuaciones reducibles a homogéneas

A continuación, estudiaremos otro tipo de ecuaciones diferenciales, las reducibles a homogéneas. Estas son similares a las homogéneas, pero en vez de ser una función en función de $\frac{x}{t}$, es una función en función de un cociente de polinomios en dos variables, ambos de grado 1, luego son de la forma:

$$x' = h\left(\frac{at+bx+c}{At+Bx+C}\right) \qquad a,b,c,A,B,C \in \mathbb{R}$$

con $h : I \to \mathbb{R}$ una función continua con I un intervalo abierto.

Ejercicio. Dar un dominio de definición para una ecuación reducible a homogénea.

Estaremos trabajando por tanto con una ecuación diferencial de la forma

$$x' = f(t,x)$$

con

$$f(t,x) = h\left(\frac{at+bx+c}{At+Bx+C}\right) \qquad a,b,c,A,B,C \in \mathbb{R}, \quad \forall (t,x) \in D$$

Y buscamos el dominio D en el que la función f está definida. Este tiene que ser un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^2$.

Dado $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, nos interesa:

- Primero, que el cociente anterior tenga sentido, es decir, que $At+Bx+C \neq 0$. Por tanto, esta recta estará excluida de D.
- Que podamos aplicar h al cociente anterior, es decir, que

$$\frac{at+bx+c}{At+Bx+C} \in I$$

El conjunto más grande en el que podemos definir f será un conjunto de la forma:

$$D = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid At + Bx + C \neq 0, \frac{at+bx+c}{At+Bx+C} \in I\right\}$$

Finalmente, falta comprobar que el conjunto sea abierto y conexo. Como el conjunto excluye a una recta del plano, sabemos por tanto que este contendrá como mínimo dos componentes conexas[10].

Resolución de ecuaciones reducibles a homogéneas

El truco que funciona casi siempre es realizar una traslación. Fijado $(t_*, x_*) \in \mathbb{R}^2$, defino

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ll} s & = t - t_* \\ y & = x - x_* \end{array} \right. \qquad (t_*, x_*) \in \mathbb{R}^2$$

que es fácil ver que es un cambio de variable admisible.
El cambio de variable es:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Y hay que quitar las variables t y x:

$$\frac{dy}{ds} = h\left(\frac{a(s+t_*)+b(y+x_*)+c}{A(s+t_*)+B(y+x_*)+C}\right)$$

Si conseguimos hacer:

$$\left\{ \begin{array}{ll} at_* + bx_* + c & = 0 \\ At_* + Bx_* + C & = 0 \end{array} \right.$$

Nos quedaría que:

$$\frac{dy}{ds} = h\left(\frac{a(s+t_*)+b(y+x_*)+c}{A(s+t_*)+B(y+x_*)+C}\right) = h\left(\frac{as+by}{As+By}\right)$$

Que se trata de una ecuación homogénea, por ser un cociente de polinomios homogéneos de grado 1.

[10]Si algún lector termina el ejercicio, solicitamos que se nos envíe para completar los aputnes.

- En el caso de que
$$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$$
Entonces, el sistema anterior es compatible determinado, por lo que existe una solución del sistema. Para realizar el cambio de variable, tomamos (t_*, x_*) de forma que sea solución del sistema, y al realizar el cambio de variable, podremos seguir el razonamiento superior, llegando a una ecuación homogénea.

- En el caso de que
$$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0$$
Entonces, se trata de un sistema incompatibles, por lo que no podremos realizar el razonamiento anterior.

  Sin embargo, lo que sucederá en dicho caso es que los vectores (a, b) y (A, B) serán linealmente dependientes en $\mathbb{R}^2$, luego podemos hacer:
$$(A, B) = \lambda(a, b) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
De esta forma, podemos escribir:
$$x' = h\left(\frac{at + bx + c}{At + Bx + C}\right) = h\left(\frac{at + bx + c}{\lambda(at + bx) + C}\right)$$
Que no es una ecuación homogénea, pero nos permite hacer el cambio de variable (suponiendo que $b \neq 0$):
$$y = at + bx$$

2.5. Ecuaciones lineales

Las ecuaciones diferenciales lineales son de la forma
$$x' = a(t)x + b(t)$$
para ciertas funciones $a, b : J \to \mathbb{R}$ continuas definidas en un intervalo abierto J.

Por tanto, la ecuación diferencial vendrá dada por una función $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma que
$$x' = f(t, x) = a(t)x + b(t) \qquad (t, x) \in J \times \mathbb{R}$$
Observemos que el dominio de f se trata de una banda vertical.

Las ecuaciones lineales pueden clasificarse en dos tipos:

- Si $b(t) = 0\ \forall t \in J$, entonces estamos ante una ecuación lineal homogénea[11].
- Si b no es la función constantemente igual a cero, decimos que es una ecuación lineal completa.

Observación. Observemos que $x' = \frac{x}{t}$ es de variables separadas, homogénea, reducible a homogenea y lineal homogénea.

[11] no tiene nada que ver con las ecuaciones homogéneas

2.5.1. Ecuaciones lineales homogeneas

Como hemos comentado antes, se tratan de ecuaciones de la forma

$$x' = a(t)x$$

para $a : J \to \mathbb{R}$ una función continua definida en un intervalo abierto J. Este tipo de ecuaciones sabemos ya resolverlas, pues son ecuaciones de variables separadas:

$$x' = p(t)q(x)$$

Para las funciones $p : J \to \mathbb{R}$, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned} p(t) &= a(t) \qquad t \in J \\ q(x) &= x \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Como $q(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, tenemos que sólo hay una solución constante:

$$x(t) = 0 \qquad t \in J$$

Para sacar el resto, hacemos separación de variables:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(t)x \\ \int \frac{dx}{x}\ dx &= \int a(t)\ dt \end{aligned}$$

Y dependerá de que x sea positivo o negativo para calcular la primera integral:

$$\int \frac{dx}{x}\ dx = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Y notando por:

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\ ds$$

para cierto $t_0 \in I$, tenemos que:

- Suponiendo que $x > 0$:

$$\begin{aligned} \ln x &= A(t) + c \\ x(t) &= e^c e^{A(t)} \qquad t \in J \end{aligned}$$

  Luego las soluciones son de la forma:

$$x(t) = k \cdot e^{A(t)} \qquad k \in \mathbb{R}^+, \quad t \in J$$

- Suponiendo que $x < 0$:

$$\begin{aligned} \ln(-x) &= A(t) + c \\ x(t) &= -e^c e^{A(t)} \qquad t \in J \end{aligned}$$

  Luego las soluciones son de la forma:

$$x(t) = k \cdot e^{A(t)} \qquad k \in \mathbb{R}^-, \quad t \in J$$

En definitiva, dada una ecuacion de la forma

$$x' = a(t)x \qquad t \in J$$

Entonces, sus soluciones son de la forma:

$$x(t) = k \cdot e^{A(t)} \qquad k \in \mathbb{R}, \quad t \in J$$

con

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds \qquad t \in J$$

para cierto $t_0 \in J$.

Ejemplo. Resolvamos

$$x' = \frac{x}{t} \qquad t \in \mathbb{R}^-$$

Trabajaremos por tanto en el semiplano en el que $t < 0$.

En este caso, tenemos $a(t) = \frac{1}{t}$, por lo que:

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s}\, ds = \ln(-t)$$

para cierto $t_0 \in \mathbb{R}^-$. Las soluciones de dicha ecuación serán:

$$x(t) = k \cdot e^{\ln(-t)} = -k \cdot t \qquad k \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^-$$

2.5.2. Ecuaciones lineales completas

Son de la forma

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{2.8}$$

para ciertas funciones $a, b : J \to \mathbb{R}$ con J un intervalo abierto de forma que la función b no es constantemente igual a 0. Notaremos a su dominio $D = J \times \mathbb{R}$.

Resolveremos este tipo de ecuaciones mediante un cambio de variable, el cual pasamos a buscar. Dada una función $l : J \to \mathbb{R}$ con $l(t) \neq 0 \ \forall t \in J$ y $l \in C^1(J)$, definimos el cambio de variable:

$$\varphi : \begin{cases} s &= t \\ y &= l(t)x \end{cases}$$

Que tenemos que ver que es admisible:

- φ es de clase $C^1(D)$, ya que sus componentes φ_1 y φ_2 son de clase $C^1(D)$ (φ_2 es productor de funciones de clase $C^1(D)$).
- Despejando las variables t y x (gracias a que $l(t) \neq 0 \ \forall t \in J$), podemos dar una inversa ψ de φ, por lo que es biyectiva:

  $$\psi : \begin{cases} t &= s \\ x &= \dfrac{y}{l(s)} \end{cases}$$

  Es fácil ver que ψ es inversa de φ.

- Observando las componentes ψ_1 y ψ_2, vemos que estas son de clase C^1, luego ψ es de clase C^1. Tenemos ya probado que φ es un difeomorfismo.
- Por ser $s = t$, tenemos garantizada la condición de admisibilidad, ya que:
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x(t))f(t, x(t)) = 1 + 0 \neq 0 \qquad \forall t \in J$$
- Finalmente, observemos que si $(t, x) \in D$, entonces $\varphi(t, x) \in D$, por lo que $\varphi(D) = D$:
$$\varphi(t, x) = (t, l(t)x) \in J \times \mathbb{R} = D$$

A continuación, aplicaremos dicha familia de cambios de variable (ya que por cada función l tenemos un cambio de variable distinto) a la ecuación 2.8:
$$\left\{\begin{array}{ll} s & = t \\ y & = lx \end{array}\right.$$
entendiendo que todo son funciones dependientes de t:
$$y' = l'x + lx' = l'x + l(ax + b)$$

sustituimos x por $\frac{y}{l}$:
$$y' = \frac{l'}{l}y + l\left(a\frac{y}{l} + b\right)$$
Y obtenemos otra ecuación diferencial lineal:
$$y' = \left(\frac{l'}{l} + a\right)y + bl$$
Sin embargo, podemos convertirlo en un cálculo de primitivas, buscando que:
$$\frac{l'}{l} + a = 0$$
Que podemos pensarlo como una ecuación diferencial para l:
$$l' = -a(t)l$$
Que es una ecuación lineal homogénea, cuyas soluciones sabemos ya que son de la forma:
$$l(t) = k \cdot e^{-A(t)} \qquad k \in \mathbb{R}, \quad t \in J$$
Escogemos la solución $l(t) = e^{-A(t)}$.

Por tanto, el resultado tras aplicar el cambio de variable con la función l ahora conocida resulta en la ecuación diferencial
$$y' = b(t)l(t)$$
que la resolvemos mediante cálculo de primitivas:
$$y(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)l(s)\ ds + k$$

con nuestra función l:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}\ ds + k$$

Una vez obtenida y, sacamos las soluciones de las ecuaciones lineales completas, deshaciendo el cambio de variable $x = \frac{y}{l}$:

$$x(t) = ke^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)\ ds$$

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$x' = \frac{x}{t} + 1$$

con $t < 0$.

Hacemos el cambio $y = l(t)x$, luego:

$$y' = l'x + lx' = l'x + l\left(\frac{x}{t} + 1\right) = \frac{l'}{l}y + l\left(\frac{y/l}{t} + 1\right)$$

$$y' = \left(\frac{l'}{l} + \frac{1}{t}\right)y + l$$

Buscamos una solución que cumpla:

$$\frac{l'}{l} + \frac{1}{t} = 0$$

Es decir:

$$l' = -\frac{l}{t}$$

No nos hacen falta todas las soluciones, simplemente una. Cogemos:

$$l(t) = e^{-\ln(-t)} = \frac{-1}{t} \qquad t \in \mathbb{R}^-$$

tenemos que $l(t) \neq 0\ \forall t \in \mathbb{R}^-$.

Por tanto, tenemos:

$$y' = l(t) = -\frac{1}{t}$$

$$y(t) = k - \ln(-t) \qquad k \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^-$$

Luego:

$$x(t) = -t \cdot (k - \ln(-t)) \qquad \forall k \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^-$$

2.6. Ecuación de Riccati

Podemos entender la ecuación lineal como una ecuación diferencial que simula ser un polinomio de primer grado. Riccati intentó solucionar aquella ecuación diferenial que simula ser un polinomio de segundo grado:

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \tag{2.9}$$

para ciertas $a, b, c : J \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas en un intervalo abierto J.

La ecuación diferencial estará, por tanto, definida en un conjunto abierto y conexo $D = J \times \mathbb{R}$ y vendrá dada por la función

$$\begin{array}{rrcl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \end{array}$$

A diferencia de la ecuación lineal, la ecuación de Riccati no puede resolverse a no ser que se conozca de antemano una solución de la misma[12]. En dicho caso, podremos hayar todas las demás soluciones.

Suponemos, por tanto, que conocemos una solución $\phi : I \to \mathbb{R}$ de (2.9) en forma explícita definida en cierto intervalo abierto $I \subseteq J$ (ya que la solución no tiene por qué estar definida en todo el intervalo J).

Conocida dicha función ϕ, trataremos de resolverla aplicando el siguiente cambio de variable

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} s & = & t \\ y & = & \dfrac{1}{x - \phi(t)} \end{array} \right.$$

Por tanto, de nuestro dominio D tendremos que quitar la recta $x - \phi(x) = 0$, para que podamos considerar dicho cambio de variable. Para garantizar que el nuevo dominio a considerar siga siendo un conjunto conexo, tenemos dos posibles dominios a elegir:

$$D_+ = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I, x > \phi(t)\}$$
$$D_- = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I, x < \phi(t)\}$$

Se verifica que si tenemos una solución de (2.9), entonces esta estará definida bien en D_+ o bien en D_-, por lo que no perdemos (o partimos en dos) ninguna solución de la ecuación diferencial, salvo la solución $x = \phi(t)$, que no está presente en ninguno de los dos dominios.

La situación es la que representamos en la Figura 2.7.

[12] O que pueda obtenerse una a simple vista, por la sencillez de la ecuación.

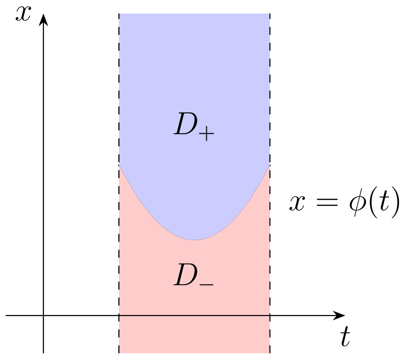


Figura 2.7: Componentes conexas de $I \times \mathbb{R}$ divididas por $x = \phi(t)$.

Veamos qué codominio tiene el cambio φ:

- Si nos encontramos en el dominio D_+, tenemos que $x > \phi(t)$, luego:
$$x - \phi(t) > 0 \Longrightarrow \frac{1}{x - \phi(t)} > 0$$
Y como t no varía, su codominio será $\mathcal{D}_+ = I \times \mathbb{R}^+$.

- Si nos encontramos en el dominio D_-, tenemos que $x < \phi(t)$, luego:
$$x - \phi(t) < 0 \Longrightarrow \frac{1}{x - \phi(t)} < 0$$
Y como t no varía, su codominio será $\mathcal{D}_- = I \times \mathbb{R}^-$.

- Finalmente, de forma intuitiva podemos decir que la curva $x = \phi(t)$ se va a infinito y que el infinito del dominio D se va a la recta $y = 0$ tras el cambio.

Por tanto, el codominio del cambio de variable será el representado en la Figura 2.8.

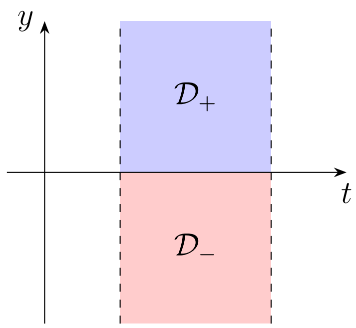


Figura 2.8: Componentes conexas de $I \times \mathbb{R}$ divididas por $y = 0$.

Finalmente, veamos que φ es un cambio de variable admisible para la ecuación(2.9):

- En primer lugar, veamos que es un difeomorfismo. Si miramos sus componentes:
$$\varphi(t, x) = \left(t, \frac{1}{x - \phi(t)}\right) = (s, y)$$
Como ϕ era solución de la ecuación diferencial, entonces es de clase C^1. Por tanto, las dos componentes de φ son de clase C^1, luego φ es de clase C^1.

- Buscamos ahora la inversa:

$$\psi : \left\{ \begin{array}{rcl} t & = & s \\ x & = & \dfrac{1}{y} + \phi(t) \end{array} \right.$$

Con lo que tenemos la función

$$\psi(s, y) = \left(s, \frac{1}{y} + \phi(s)\right)$$

Que también es de clase C^1.

- Finalmente, como $s = t$, el cambio es admisible.

Buscamos ahora expresar la ecuación diferencial tras realizar el cambio de variable. En lugar de derivar en la expresión de y en la fórmula de φ, preferimos derivar x en la fórmula de ψ para no tener que derivar un cociente:

$$x = \frac{1}{y} + \phi$$

Pensando que tanto x, y y ϕ son funciones dependientes de t:

$$x' = \frac{-y'}{y^2} + \phi' \tag{2.10}$$

Por otra parte, sustituyendo x en la ecuación (2.9), tenemos que:

$$\begin{aligned} x' = ax^2 + bx + c &= a\left(\frac{1}{y} + \phi\right)^2 + b\left(\frac{1}{y} + \phi\right) + c \\ &= \frac{a}{y^2} + \frac{2a\phi}{y} + a\phi^2 + \frac{b}{y} + b\phi + c \end{aligned}$$

Y como ϕ era solución de la ecuación (2.9):

$$\phi' = a\phi^2 + b\phi + c$$

Sustituyendo en (2.10):

$$x' = \frac{-y'}{y^2} + \phi' = \frac{-y'}{y^2} + a\phi^2 + b\phi + c$$

En definitiva:

$$\left. \begin{array}{rcl} x' & = & \dfrac{-y'}{y^2} + a\phi^2 + b\phi + c \\ x' & = & \dfrac{a}{y^2} + \dfrac{2a\phi}{y} + a\phi^2 + \dfrac{b}{y} + b\phi + c \end{array} \right\} \Longrightarrow \frac{-y'}{y^2} = \frac{a}{y^2} + \frac{2a\phi}{y} + \frac{b}{y}$$

Y multiplicando por y^2, llegamos a que:

$$y' = -(2a\phi + b)y - a$$

Que es una ecuación lineal, la cual pasaremos a resolver tanto en $\mathcal{D}_+$ como en $\mathcal{D}_-$. Puede pasar por tanto, que alguna solución corte $y = 0$, por lo que tengamos que tratarla como dos soluciones, una de una ecuación diferencial y otra de la otra.

Además, tendremos que agregar al conjunto final de soluciones la solución inical $x = \phi(t)$, la cual despreciamos al realizar el cambio de variable.

En resumen, dada una ecuación de Riccati de la forma:

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

Conocida una solución $x = \phi(t)$, podemos aplicar el cambio de variable

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} s & = & t \\ y & = & \dfrac{1}{x - \phi(t)} \end{array} \right.$$

Para llegar a una ecuación lineal, que tendrá la forma:

$$y' = -(2a\phi + b)y - a$$

Ejemplo. Veamos un ejemplo de resolución de una ecuación Riccati (posiblemente una de las más sencillas de resolver), aunque se trate también de una ecuación de variables separadas.

$$x' = x^2$$

Tenemos por tanto que el dominio en el que está definida es $D = \mathbb{R}^2$.

A simple vista, observamos que una solución particular es $x(t) = 0$. Se deja como ejercicio tratar de resolver la ecuación con dicha solución inicial.

En este ejemplo, tomaremos como solución la función $\phi : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(t) = \frac{-1}{t} \qquad t \in I$$

Para el intervalo $I = \mathbb{R}^-$ (también lo podríamos haber hecho en $\mathbb{R}^+$). Teníamos por tanto que la variable t se movía en $J = \mathbb{R}$ y ahora se mueve en $I = \mathbb{R}^-$.

Trabajaremos ahora en los dominios:

$$D_+ = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0, x > \frac{-1}{t} \right\}$$
$$D_- = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0, x < \frac{-1}{t} \right\}$$

El cambio de variable escogido es, por tanto:

$$y = \frac{1}{x - \phi(t)} = \frac{1}{x + \dfrac{1}{t}}$$

que también lo podemos escribir como:

$$x = \frac{1}{y} + \phi(t) = \frac{1}{y} - \frac{1}{t} \tag{2.11}$$

Esta función φ nos transforma ambos dominios en:

$$\varphi(D_+) = \mathcal{D}_+ = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$$
$$\varphi(D_-) = \mathcal{D}_- = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-$$

Derivamos la ecuación (2.11) pensando que tanto x como y dependen de t:

$$x' = \frac{-y'}{y^2} + \frac{1}{t^2}$$

Como inicialmente teníamos:

$$x' = x^2 = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{t}\right)^2 = \frac{1}{y^2} - \frac{2}{ty} + \frac{1}{t^2}$$

Llegamos a que:

$$\frac{-y'}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{2}{ty}$$

Multiplicamos por y^2 y:

$$y' = \frac{2}{t}y - 1$$

Llegamos a una ecuación lineal que pasamos a resolver, mediante otro cambio de variable:

$$z = l(t)y$$

que también podemos escribir por comodidad como

$$l(t)z = y$$

para distinta función[13] l. Derivamos:

$$y' = l'z + lz'$$
$$y' = \frac{2}{t}lz - 1$$

Y tenemos

$$lz' = y' - l'z = \frac{2}{t}lz - 1 - l'z = \left(\frac{2l}{t} - l'\right)z - 1$$

Buscamos que el paréntesis sea 0:

$$l' = \frac{2l}{t}$$

Y cogemos como solución:

$$l(t) \overset{(*)}{=} e^{2\ln(-t)} = e^{\ln(t^2)} = t^2 \qquad t \in \mathbb{R}^-$$

[13] A partir del cambio anterior, estamos trabajando con $\frac{1}{l(t)}$.

Teniendo en cuenta que en $(*)$ debemos considerar que $t < \mathbb{R}^-$. Luego:

$$lz' = t^2 z' = -1 \Longrightarrow z' = \frac{-1}{t^2}$$

Luego tenemos como soluciones:

$$z(t) = \frac{1}{t} + k \qquad k \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R}^-$$

Deshaciendo un cambio de variable $y = lz = t^2 z$:

$$y(t) = t + kt^2 \qquad k \in \mathbb{R}$$

Para $k = 1$ por ejemplo, sucede que tenemos la mitad de la solución en $\mathcal{D}_+$ y la otra mitad en $\mathcal{D}_-$.
Deshacemos ahora el otro cambio, $x = \dfrac{1}{y} + \phi$:

$$x(t) = \frac{1}{t + kt^2} - \frac{1}{t} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Y habría que ver dónde están definida las soluciones. Además, tenemos que añadir la solución de partida:

$$x(t) = \phi(t) = \frac{-1}{t} \qquad t \in \mathbb{R}^-$$

Al conjunto de posibles soluciones.

2.7. Relación con Teoría de Grupos

Como introdución a esta sección, recordamos primero la definición de grupo.

Definición 2.4 (Grupo)**.** Sea A un conjunto no vacío con una operación binaria interna[14] de la forma

$$* : A \times A \to A$$

Es un grupo si se verifica que:

(1) $*$ es asociativa:

$$(a * b) * c = a * (b * c) \qquad \forall a, b, c \in A$$

(2) Existencia de un elemento neutro para $*$:

$$\exists e \in A \mid a * e = e * a = a \qquad \forall a \in A$$

(3) Existencia de opuestos para $*$:

$$\forall a \in A \quad \exists b \in A \mid a * b = b * a = e$$

Al opuesto de a lo denotaremos por a^{-1}.

[14]Esto es, que el resultado de operar con dos elementos de A vuelve a ser un elemento de A.

Definición 2.5. Diremos que $G \subseteq \mathcal{G}$ es un subgrupo de un grupo $\mathcal{G}$ si G es un grupo con la operación interna de $\mathcal{G}$ inducida a G.

Además, en Álgebra I se probó la siguiente caracterización de subgrupo:

Proposición 2.5. *Sea $\mathcal{G}$ un grupo y $G \subseteq \mathcal{G}$. Entonces, G es un subgrupo de $\mathcal{G}$ si y solo si:*

1. *G es cerrado para la operación interna de $\mathcal{G}$.*
2. *$g \in G \Longrightarrow g^{-1} \in G$.*

Hay una teoría matemática que trata de dar sentido a que ciertos cambios de variable funcionan para ciertos "tipos" de ecuciones diferenciales y que otros cambios de variable funcionan para otros tipos de ecuaciones diferenciales.

En álgebra, hay una teoría que relaciona las ecuaciones polinómicas con un grupo. *Sophus Lie* trató de hacer lo mismo para las ecuaciones diferenciales, tratar de relacionarlas con un grupo para poder explicar qué cambio de variable hay que hacer para resolver una ecuación en cada caso. De esta forma, conectaría la Teoría de grupos con la solubilidad de las ecuaciones diferenciales.

Geométricamente, podemos decir que los grupos tienen la misión de detectar simetrías. Si tenemos por ejemplo un cuadrado con vértices numerados del 1 al 4 y lo rotamos 45º sobre el centro, obtenemos otro cuadrado distinto. Si por contrario lo rotamos 90º, tenemos el mismo cuadrado pero con distinta numeración en los vértices.

Hay una serie de rotaciones especiales que hace que el cuadrado sea invariante. El conjunto de rotaciones que deja invariante un cuadrado (esto es, el conjunto formado por las rotaciones de 0, 90, 180 y 270 grados) forma un grupo. Podemos pensar en él como en el conjunto $\{1, -1, i, -i\}$, que efectivamente es un grupo[15].

Resulta que cada figura simétrica tiene un grupo cíclico asociado que las dejan invariantes, llamado grupo de simetrías.

Podemos hacer una analogía entre las figuras con las rotaciones y las ecuaciones diferenciales con los cambios de variable. De esta forma, buscamos los cambios de variable que nos dejan las ecuaciones diferenciales invariantes. Esto es, que tanto el dominio como la expresión de la ecución diferencial sea la misma, aunque pueda pasar que una solución vaya en otra distinta tras aplicar el cambio de variable, al igual que sucedía con la numeración de los vértices de nuestro cuadrado.

La idea es, que dada una ecuación diferencial

$$x' = f(t, x) \tag{2.12}$$

definida en un dominio D dentro del plano, buscaremos un cambio de variable

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{l} s = \varphi_1(t, x) \\ y = \varphi_2(t, x) \end{array} \right.$$

[15]Para la operación interna de multiplicación en $\mathbb{C}$, con neutro 1.

que nos lleve D en él mismo y que tras hacer el cambio obtengamos que:

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s, y) = f(s, y) \qquad \forall (s, y) \in D$$

En este caso, diremos que (2.12) es invariante por φ.

Notemos que para $\varphi = Id_D$, esto se cumple para cualquier ecuación diferencial.

Ejemplo. Con este ejemplo, tratamos de mostrar que existen cambios de variable admisibles para una ecuación diferencial distintos de $Id_{\mathbb{R}^2}$ que dejan la ecuación diferencial invariante. Dada la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{3x^2 + 1}$$

Definida en $D = \mathbb{R}^2$. Le haremos el siguiente cambio de variable y veremos que dicho cambio deja la ecuación invariante.

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} s & = & -t \\ y^3 + y & = & x^3 + x + 8 \end{array} \right.$$

Supondremos por ahora que φ está bien definida (no sabemos por ahora si la segunda ecución nos da una función implícita $y = y(x)$), para ver que el cambio deja invariante la ecuación y luego veremos que es un cambio de variable bien definido y admisible para la misma.

Apliquemos el cambio de variable para ver qué ecuación obtenemos al final:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = -\frac{dy}{dt}$$

Derivamos de forma implícita:

$$3y^2y' + y' = 3x^2x' + x'$$
$$(3y^2 + 1)y' = (3x^2 + 1)x' = \frac{\cancel{(3x^2 + 1)}t}{\cancel{3x^2 + 1}} = t$$

Luego:

$$y' = \frac{t}{3y^2 + 1}$$

por lo que:

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{dy}{dt} = \frac{-t}{3y^2 + 1} = \frac{s}{3y^2 + 1}$$

Luego tenemos como nueva ecuación:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s}{3y^2 + 1} = \hat{f}(s, y) = f(s, y)$$

Falta ahora ver que la ecuación anterior nos da un cambio de variable admisible:

1. Veamos primero que las ecuaciones

$$\varphi : \begin{cases} s & = -t \\ y^3 + y & = x^3 + x + 8 \end{cases}$$

Definen un cambio de variable admisible. Suponiendo que no nos sabemos las fórmulas de Cardano Vieta[16], definimos una función:

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \xi & \longmapsto & \xi^3 + \xi \end{array}$$

con

$$\sigma'(\xi) = 3\xi^2 + 1 > 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Por lo que es estrictamente creciente, luego inyectiva.

Notemos además que es sobreyectiva, ya que

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \sigma(\xi) = \pm\infty$$

Y como σ es una función continua, por el Teorema de Bolzano tenemos que tiene que tomar todos los valores, luego σ es sobreyectiva. En definitiva, σ es biyectiva y además tiene inversa, la cual es derivable, gracias al Teorema de la Función Inversa, por ser $\sigma'(\xi) > 0$ $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Resulta por tanto que σ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}$.

Pensamos ahora en las ecuaciones como en:

$$\sigma(y) = \sigma(x) + 8$$

Y como es un difeomorfismo, podemos tomar la inversa:

$$y = \sigma^{-1}(\sigma(x) + 8)$$

Luego efectivamente, la fórmula anterior nos define y como función implícita, en función de x. Podemos ya escribir:

$$\varphi(t, x) = (s, y)$$

donde:

$$\begin{cases} s & = \varphi_1(t, x) = -t \\ y & = \varphi_2(t, x) = \sigma^{-1}(\sigma(x) + 8) \end{cases}$$

Con lo que la función φ está bien definida.

2. Además, vemos que φ es de clase C^1, por serlo sus componentes.

[16] Las que dan las raíces de los polinomios cúbicos..

3. Vemos que φ tiene inversa:

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ll} t & = \psi_1(s, y) = -s \\ x & = \psi_2(s, y) = \sigma^{-1}(\sigma(y) - 8) \end{array} \right.$$

Y que además ψ es de clase C^1, luego tenemos que φ era, efectivamente, un difeomorfismo.

4. Finalmente, vemos que es un cambio de variable admisible, ya que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x) f(t, x) = -1 + 0 \neq 0 \qquad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto, hemos visto ya un ejempo de un difeomorfismo distinto de la identidad que deja una ecuación diferencial invariante.

Proposición 2.6. *Sea* $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$ *el conjunto de todos los difeomorfismos en el plano:*

$$\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2) = \{\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid \varphi \textit{ difeomorfismo}\}$$

$\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$ *es un grupo con la operación de composición de funciones* $\circ$.

Demostración.

1. En primer lugar, para ver que $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$ sea un grupo, buscamos primero demostrar que la composición de funciones es cerrada para $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$. Es decir, que la composición de cualesquiera dos difeomorfismos es un difeomorfismo.

   Sean Φ, $\varphi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$, buscamos ver que $\phi = \Phi \circ \varphi$ es un difeomorfismo.

   - La composición de funciones de clase C^1 es de clase C^1, luego ϕ es de clase C^1.
   - La composición de funciones biyectivas resulta en una función biyectiva, luego ϕ es biyectiva.
   - Se verifica que[17]:
   $$\phi^{-1} = (\Phi \circ \phi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \Phi^{-1}$$
     Y tanto φ^{-1} como Φ^{-1} son de clase C^1 por ser ambos difeomorfismos, luego ϕ^{-1} es de clase C^1.

   Finalmente, llegamos a que:

   $$\Phi, \varphi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2) \Longrightarrow \Phi \circ \varphi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$$

2. Además, tenemos que ver que se cumplen las tres propiedades de la definición de grupo:

   (1) La composición de funciones es asociativa[18].

[17] Visto en Álgebra I.
[18] Visto en Álgebra I.

(2) Tiene un elemento neutro, $Id_{\mathbb{R}^2} \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$.

(3) Para cada $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$, tenemos $\varphi^{-1} \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$, con lo que:

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = Id_{\mathbb{R}^2}$$

Concluimos por tanto que $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ es un grupo con la operación $\circ$. □

Tenemos que $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ es el grupo de todos los cambios de variable que existen en el plano.

A continuación, vamos a introducir tres grupos relevantes: el grupo de las traslaciones, el grupo de las homotecias y el grupo de las rotaciones. Para un conocimiento más en profundidad de los resultados aquí descritos, se insta al lector que acuda a los apuntes de Geometría III.

Grupo de traslaciones

Dado $v \in \mathbb{R}^2$, $v = (v_1, v_2)$ un vector del plano, podemos definir el cambio

$$\varphi : \begin{cases} s &= t + v_1 \\ y &= x + v_2 \end{cases}$$

Resultado de trasladar cualquier punto del plano (t, x) por el vector v. Su inversa será

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} t &= s - v_1 \\ x &= y - v_2 \end{cases}$$

Que es la traslación según el vector $-v$.

Proposición 2.7. *Fijado $\lambda \in \mathbb{R}$, consideramos la translación según el vector $\lambda v = \lambda(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$:*

$$\varphi_\lambda : \begin{cases} s &= t + \lambda v_1 \\ y &= x + \lambda v_2 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Variando λ, consideramos ahora la familia uniparamétrica de traslaciones G:

$$G = \{\varphi_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Entonces, G es un subgrupo de $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$*.*

Demostración. Por una parte, tenemos que $G \subseteq \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$, ya que todas las traslaciones son difeomorfismos.

1. En primer lugar, observemos que:

$$\begin{aligned}\varphi_{\lambda+\mu}(t, x) &= (t + (\lambda + \mu)v_1, x + (\lambda + \mu)v_2) = ((t + \lambda v_1) + \mu v_1, (x + \lambda v_2) + \mu v_2) \\ &= \varphi_\mu(t + \lambda v_1, x + \lambda v_2) = \varphi_\mu(\varphi_\lambda(t, x))\end{aligned}$$

   Por lo que $\varphi_{\lambda+\mu} = \varphi_\mu \circ \varphi_\lambda$. De esta forma, dadas dos traslaciones cualesquiera, su composición es una traslación, por lo que tenemos la primera propiedad.

2. Dado φ_λ, tenemos que $\varphi_\lambda^{-1} = \varphi_{-\lambda}$, que también es una tralacion.

Luego G es un subgrupo de $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$. □

Grupo de homotecias

Una homotecia de razón $\lambda \in \mathbb{R}^+$ es de la forma:

$$\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\varphi_\lambda : \left\{ \begin{array}{rcl} s & = & \lambda t \\ y & = & \lambda x \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Que tiene por inversa

$$\varphi_\lambda^{-1} : \left\{ \begin{array}{rcl} t & = & \frac{t}{\lambda} \\ x & = & \frac{y}{\lambda} \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Proposición 2.8. *La familia uniparamétrica de homotecias es un subgrupo de* $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$*. Es decir, el siguiente conjunto es un subgrupo de* $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$*:*

$$G = \{\varphi_\lambda \mid \lambda > 0\}$$

Demostración. Para ello, primero vemos que

$$\varphi_{\lambda\cdot\mu} = \varphi_\lambda \circ \varphi_\mu$$

- De esta forma, la composición de dos homotecias es una homotecia.
- Además, $\varphi_\lambda^{-1} = \varphi_{1/\lambda}$, $\forall \varphi \in G$.

□

Grupo de rotaciones

Sea la matriz de la rotación de un ángulo θ:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Si le damos el valor $\theta = \pi/2$, vemos que es la matriz de la función lineal que nos da la rotación en sentido antihorario:

$$R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego el vector $e_1 = (1, 0)$ lo lleva en $e_2 = (0, 1)$ y el vector e_2 lo lleva en $-e_1$.

Proposición 2.9. *La familia uniparamétrica de rotaciones es un subgrupo de* $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$*. Es decir, el siguiente conjunto es un subgrupo de* $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$*:*

$$G = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

Demostración. Se comprueba viendo primero que

$$R_{\theta+\Theta} = R_\theta \circ R_\Theta$$

- De esta forma, la composición de dos giros es un giro.
- Además, $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$, $\forall R_\theta \in G$.

□

Aunque hay otros grupos uniparamétricos, estos son los más simples.

2.7.1. Ecuaciones diferenciales invariantes por traslaciones horizontales

Tomamos $v = (1, 0)$, luego trabajaremos con el grupo uniparamétrico de cambios de variable:

$$\varphi_\lambda : \left\{ \begin{array}{rcl} s & = & t + \lambda \\ y & = & x \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Partimos de una ecuación diferencial

$$x' = f(t, x)$$

Para una cierta función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. Le aplicamos el cambio y llegaremos a una nueva ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{ds} = \hat{f}_\lambda(s, y)$$

Y lo que buscamos es que

$$\hat{f}_\lambda(s, y) = f(s, y) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (s, y) \in \mathbb{R}^2$$

con el fin de dejar la ecuación diferencial invariante para dicho cambio de variable.

La primera observación es que φ_λ es siempre admisible para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\cancelto{1}{\frac{dt}{ds}} = \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Que en las nuevas variables queda como:

$$\frac{dy}{ds} = f(s - \lambda, y)$$

Ahora, buscamos que la ecuación sea invariante por todos los cambios de variable:

$$\hat{f}_\lambda(s, y) = f(s - \lambda, y) = f(s, y) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (s, y) \in \mathbb{R}^2$$

De esta forma, tenemos una función f en dos variables que toma los mismos valores en todas las líneas horizontales, luego f solo depende de y, con lo que la ecuación en función de las variables t y x sólo depende de x.

Ejemplo. Por ejemplo, la ecuación

$$x' = \operatorname{sen} x$$

es invariante por traslaciones horizontales, ya que f sólo depende de x:

$$y' = \operatorname{sen} y$$

Ejemplo. Si por contrario tomamos la ecuación

$$x' = \operatorname{sen}(t + x)$$

Y hacemos el mismo cambio:

$$y' = \operatorname{sen}(s + y - \lambda)$$

Observación. Las ecuaciones diferenciales que son invariantes por el grupo de traslaciones verticales son aquellas que sólo dependen de t (por un razonamiento similar). Es decir, las ecuaciones diferenciales que se resuelven mendiante cálculo de primitivas.

2.7.2. Ecuaciones diferenciales invariantes por homotecias

Trabajamos ahora con el grupo uniparamétrico de cambios

$$\varphi_\lambda : \left\{ \begin{array}{lcl} s & = & \lambda t \\ y & = & \lambda x \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}^2$$

Que también resulta ser un cambio de variable admisible, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$.

Dada una ecuación diferencial cualquiera:

$$x' = f(t, x)$$

para cierta función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, podemos aplicar el cambio de variable:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\cancel{\lambda} x'}{\cancel{\lambda}} = x' = f(t, x)$$

Cambiando ahora las variables por las nuevas:

$$\frac{dy}{ds} = f\left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right)$$

Ahora, buscamos que la solución sea invariante por todos los infinitos cambios de variable, es decir:

$$\hat{f}_\lambda(s, y) = f\left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) = f(s, y) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (s, y) \in \mathbb{R}^2$$

Notemos que esto lo cumplen todas las funciones homogéneas de grado 0:

$$P(\lambda t, \lambda x) = \lambda^r P(t, x) = P(t, x) \qquad r = 0$$

Geométricamente, son las funciones que sólo dependen de la pendiente de un punto, luego son las funciones constantes en las rectas que pasan por el origen.

Observación. Notemos que las ecuaciones diferenciales homogéneas son de la forma

$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

Por lo que la f de esta ecuación diferencial es una función homogénea, luego es invariante por homotecias.

Ejercicio. Encontrar la clase de ecuaciones diferenciales que son invariantes por rotaciones.

Como resumen de esta sección, podemos decir que encontrar un cambio de variable que deja una ecuación diferencial invariante es equivalente a resolverla.

3. Condición de exactitud y factores integrantes

Una vez estudiados los principales cambios de variable para resolver ecuaciones diferenciales, cambiamos ahora la forma en la que las resolveremos, procedimiento que describiremos y desarrollaremos a lo largo de este Capítulo.

Notación. Volveremos nuevamente a la notación geométrica, donde notaremos por x a la variable independiente y por $y = y(x)$ a la función incógnita.

Ahora, no estaremos interesados en buscar ecuaciones diferenciales en forma normal, sino que buscaremos ecuaciones de la forma

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \tag{3.1}$$

Y lo que haremos ahora para resolverla será buscar diferenciales exactas, es decir, buscar una función U de forma que la expresión (3.1) se reescriba como

$$\frac{d}{dx}[U(x, y)] = 0$$

De forma que, bajo unas ciertas condiciones, tendremos que $U(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$ con lo que tendremos una solución $y = y(x)$ expresada en forma implícita gracias a la función U.

Ejemplo. Motivaremos lo anteriormente descrito con este ejemplo, en el que trataremos de resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x} \tag{3.2}$$

buscando para ello una función que al derivarla respecto a x nos de la expresión que tenemos.

Lo primero para ello será reescribir la ecuación (3.2) para que sea de la forma (3.1). Para ello, es suficiente con desplazar todos los términos a la izquierda de la igualdad, obteniendo

$$x - y + (x + y)y' = 0 \tag{3.3}$$

Por lo que en este caso, tenemos las funciones

$$P(x, y) = x - y \qquad Q(x, y) = x + y$$

Reescribiendo la ecuación (3.3) con el objetivo de buscar un diferencial exacto, llegamos a la expresión

$$x + yy' - y + xy' = 0$$

donde observamos que la parte de la izquierda de la resta podemos verla como:

$$x + yy' = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = 0$$

Si también pudiéramos hacerlo en la derecha (algo que a priori parece más difícil), llegaríamos a una expresión de la forma:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) - \frac{d}{dx}[H(x,y)] = 0$$

Veremos próximamente que esto es imposible de hacer en este caso.

Sin embargo, existe un truco que sí nos permite resolver la ecuación (3.3), se basa en dividir la expresión entre x^2+y^2 (algo que por ahora parece una idea feliz, pero que cobrará sentido a lo largo del Capítulo, algo que llamaremos *factor integrante*):

$$\frac{x-y}{x^2+y^2} + \frac{x+y}{x^2+y^2}y' = 0$$

Vamos a reorganizar los términos cuidadosamente, para buscar un diferencial exacto:

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2} + \frac{-y+xy'}{x^2+y^2} = 0$$

Es difícil hallar un diferencial exacto a partir de una expresión, pero es fácil comprobar que algo lo sea. Proponemos la siguiente expresión como diferencial exacto y comprobaremos que funciona, por tener por ahora poco manejo en este procedimiento (aunque el término de la izquierda no es difícil de averiguar). Proponemos:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right) + \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 0$$

Es sencillo comprobar que el término de la izquierda se corresponde con lo que queríamos hacer, comprobémoslo ahora en la derecha:

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{xy'-y}{x^2} = \frac{xy'-y}{x^2+y^2}$$

Finalmente, vemos que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right) + \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 0$$

gracias a la linealidad de la derivada, y por ser la función[1]

$$(x,y) \longmapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

de clase C^1, concluimos finalmente que

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) = c \qquad c \in \mathbb{R}$$

[1] En este ejemplo no nos preocupamos por su intervalo de definición, ya que solo queremos mostrar el procedimiento que realizaremos a partir de ahora para resolver las ecuaciones diferenciales.

Una vez explicada de forma breve lo que haremos y motivada con el ejemplo anterior, pasaremos ahora al desarrollo teórico de este procedimiento, el cual se divide en dos:

- En primer lugar, estudiar una condición necesaria y suficiente para tener la condición de exactitud (esto es, poder encontrar un diferencial exacto) que nos permita obtener la función U anteriormente mencionada.
- En caso de que no podemos hacerlo, buscar algo por lo que multiplicar la ecuación original (un factor integrante) para que sí podamos hacerlo, tal y como hicimos en el ejemplo con $x^2 + y^2$.

Exigiremos varias hipótesis sobres las funciones P y Q de la expresión (3.1) (y sobre otros elementos relacionados con la ecuación diferencial) con el fin de obtener el resultado buscado.

3.1. Condición de exactitud

En todo lo que sigue, trabajaremos en un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y con dos funciones[2] $P, Q \in C^1(\Omega)$.

Si existe $U \in C^1(\Omega)$ una función de dos variables de forma que la ecuación (3.1) se transforme en una de la forma:

$$\frac{d}{dx}(U(x,y)) = 0$$

Derivando de forma implícita:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)y' = 0$$

Por tanto, lo que buscamos es una función U que cumpla:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q$$

Veremos a continuación que esto no es posible en general (sin exigir más condiciones). Es decir, no tiene por qué existir una funcion U de forma que sus dos parciales sean las funciones P y Q dadas. Para ello, recuperaremos el ejemplo anterior, introduciendo antes un teorema importante en esta sección[3].

Teorema 3.1 (de Clairaut). *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de dos variables definida en un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, si $f \in C^2(\Omega)$, entonces las derivadas cruzadas de f son iguales, es decir:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

[2]Notemos que en el ejemplo anterior, P y Q eran polinomios, por lo que cumplían esta condición.

[3]Se trata de un Teorema que se debería haber visto anteriormente, pero que no se ha hecho por la planificación del doble grado.

Demostración. Supuesto que $(0,0) \in \Omega$, por ser Ω abierto, existe $h \in \mathbb{R}$ tal que

$$(0,0) \in [0,h] \times [0,h] \subseteq \Omega$$

Sea $A = \{h \in \mathbb{R} \mid [0,h] \times [0,h] \subseteq \Omega\}$. Definimos $\Delta : A \to \mathbb{R}$ una función dada por

$$\Delta(h) = f(h,h) - f(h,0) - f(0,h) + f(0,0) \qquad h \in A$$

la demostración se basa en ver cómo es la función Δ:

Por una parte, fijado un $h \in A$, podemos definir la función $G_h : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$G_h(x) = f(x,h) - f(x,0) \qquad x \in A$$

Vemos fácilmente que $G_h \in C^2(A)$ $\forall h \in A$ por serlo f, con

$$G'_h(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) \qquad \forall x \in A$$

Podemos ahora usar G_h para ver el comportamiento de Δ:

$$\Delta(h) = G_h(h) - G_h(0) \qquad \forall h \in A$$

Aplicando ahora el Teorema del Valor Medio, obtenemos un $\xi_h \in]0,h[$ tal que

$$\Delta(h) = G_h(h) - G_h(0) = hG'_h(\xi_h) = h\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_h,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_h,0)\right] \qquad \forall h \in A$$

Como $f \in C^2(A)$, tenemos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ es una función de clase $C^1(A)$. Podemos ahora volver a aplicar el Teorema del Valor Medio en este último término, sobre la función resultado de la composición

$$h \longmapsto (\xi_h, h) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_h, h)$$

Que es de clase $C^1(A)$ por serlo $\frac{\partial f}{\partial x}$. De esta forma, obtenemos un $\eta_h \in]0,h[$ tal que

$$\Delta(h) = h\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_h,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_h,0)\right] = h^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi_h,\eta_h)\right] \qquad \forall h \in A$$

Buscamos ahora calcular el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\Delta(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

Donde hemos usado la continuidad de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (por ser $f \in C^2(A)$), ya que:

$$h \to 0 \Longrightarrow (\xi_h,\eta_h) \to (0,0) \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi_h,\eta_h) \to \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

De forma totalmente análoga, fijado $h \in A$, podemos ahora definir la función $D_h : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$D_h(y) = f(h,y) - f(0,y) \qquad y \in A$$

Función de clase $C^2(A)$ por serlo f, con

$$D_h'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) \qquad y \in A$$

De forma similar a la anterior, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio dos veces en la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}\Delta(h) &= D_h(h) - D_h(0) = hD_h'(\xi_h) = h\left[\frac{\partial f}{\partial y}(h,\xi_h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,\xi_h)\right] \\ &= h^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\eta_h,\xi_h)\right] \qquad \xi_h,\eta_h \in]0,h[\quad \forall h \in A\end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\Delta(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$$

Y por la unicidad del límite, concluimos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$$

Una vez probado que las derivadas cruzadas coinciden en el origen (supuesto que $(0,0) \in \Omega$), veamos ahora que coinciden en cualquier $(x,y) \in \Omega$ (ya sin suponer necesariamente que $(0,0) \in \Omega$).

Sea pues $(x_0,y_0) \in \Omega$, consideramos la traslación $t : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$t(x,y) = (x,y) - (x_0,y_0) = (x - x_0, y - y_0) \qquad (x,y) \in \Omega$$

Es fácil ver que $t(\Omega) = \Omega_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) + (x_0,y_0) \in \Omega\}$. Vemos también que t tiene como función inversa $t^{-1} : \Omega_0 \to \Omega$, con

$$t^{-1}(x,y) = (x,y) + (x_0,y_0) = (x + x_0, y + y_0) \qquad (x,y) \in \Omega_0$$

Definimos ahora la función $g : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x,y) = f(t^{-1}(x,y)) = f(x + x_0, y + y_0) \qquad (x,y) \in \Omega_0$$

Por ser t una traslación, se trata de una función continua, luego $t(\Omega) = \Omega_0$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$. Además, $t^{-1} \in C^\infty(\Omega_0)$, por lo que $g \in C^2(\Omega_0)$ por serlo también f. Finalmente:

$$(x_0,y_0) \in \Omega \Longrightarrow t(x_0,y_0) = (0,0) \in \Omega_0$$

Con lo que g cumple todas las hipótesis del Teorema recién demostrado en $(0,0)$, por lo que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0)$$

Y solo faltará ver la relación entre las parciales de g y de f. En primer lugar:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t^{-1}(x,y))\frac{\partial t_1^{-1}}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^{-1}(x,y))\frac{\partial t_2^{-1}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(t^{-1}(x,y)) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t^{-1}(x,y))\frac{\partial t_1^{-1}}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^{-1}(x,y))\frac{\partial t_2^{-1}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(t^{-1}(x,y))\end{aligned}$$

Donde hemos aplicado que:

$$\frac{\partial t_1^{-1}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial t_2^{-1}}{\partial y}(x,y) = 1 \qquad \frac{\partial t_1^{-1}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial t_2^{-1}}{\partial x}(x,y) = 0$$

Por tanto:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t^{-1}(x,y))\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t^{-1}(x,y))$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t^{-1}(x,y))\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(t^{-1}(x,y))$$

De donde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$$

Para cualquier $(x_0, y_0) \in \Omega$ arbitrario, de donde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

□

Ejemplo. Para las funciones

$$P(x,y) = x - y \qquad Q(x,y) = x + y$$

no es posible encontrar una función $U \in C^1(\mathbb{R}^2)$ que cumpla

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Demostración. Por reducción al absurdo, suponemos que existe una función U de forma que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = x - y \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = x + y \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

En dicho caso, entonces $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$ (de hecho, $U \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ por tratarse de polinomios). Notemos que:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(Q(x,y)) = 1 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(P(x,y)) = -1 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Por el Teorema de Clairaut, llegamos a que:

$$1 = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x,y) = -1 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Contradicción, con lo que no existe dicha función U. □

En general, dadas dos funciones de clase C^1 no podemos encontrar una tercera función de clase C^1 de forma que sus derivadas parciales sean las dos primeras funciones. Notemos que en el caso unidimensional, el Teorema Fundamental del Cálculo nos asegura que esto sí que es cierto, cosa que no pasa en varias variables.

Buscamos ahora una condición que nos permita encontrar una función $U \in C^1(\Omega)$ de forma que podamos escribir

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q$$

Para dos funciones P y Q de clase $C^1(\Omega)$. Veamos primero un resultado que nos da una condición necesaria:

Proposición 3.2 (Condición necesaria)**.** *Dadas dos funciones $P, Q \in C^1(\Omega)$, si existe una función $U \in C^1(\Omega)$ tal que*

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Entonces, se ha de cumplir la ***condición de exactitud****:*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Demostración. Recuperando parte de la demostración del ejemplo anterior, si existiera dicha función U, esta sería de clase $C^2(\Omega)$, luego aplicando el Teorema de Clairaut:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y}$$

□

Sin embargo, la condición de exactitud no se trata de una condición suficiente para poder encontrar dicha función U, sino que dependerá de la topología de Ω de que esto pueda hacerse o no. Para ver este resultado, es necesario introducir previamente un concepto ya visto en otras asignaturas.

Definición 3.1 (Forma de estrella)**.** Diremos que Ω tiene forma de estrella (o que es estrellado[4]) si existe $z_* \in \Omega$ tal que

$$[z, z_*] \subseteq \Omega \qquad \forall z \in \Omega$$

Es decir, que el segmento de extremos z y z_* esté contenido en Ω:

$$(1-t)z + tz_* \in \Omega \qquad \forall t \in [0,1], z \in \Omega$$

Notemos que la condición de ser estrellado se trata de una condicion geométrica. Ejemplos de conjuntos estrellados son:

$$\mathbb{R}^2 \qquad [0,1] \times [0,1] \qquad \mathbb{S}^1$$

[4]Tal y como se desarrolló en los apuntes de Topología I.

Todos estos son convexos. Sin embargo, existen conjuntos con forma de estrella que no son convexos, como el conjunto de la Figura 3.1.

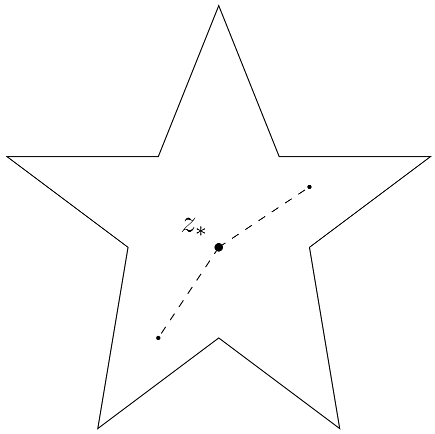


Figura 3.1: Conjunto estrellado desde z_*.

Definición 3.2 (Convexo)**.** Diremos que un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es convexo si dados cualesquiera dos puntos $\alpha, \beta \in \Omega$, se tiene que

$$[\alpha, \beta] \subseteq \Omega \qquad \forall \alpha, \beta \in \Omega$$

Es decir, que el segmento de extremos α y β esté contenido en Ω:

$$(1-t)\alpha + t\beta \in \Omega \qquad \forall t \in [0,1] \quad \alpha, \beta \in \Omega$$

De esta forma, vemos que un conjnto convexo es un conjunto estrellado desde cualquier punto, algo que se pondrá de manifiesto en la siguiente proposición. La propiedad de que un conjunto sea convexo se trata de una propiedad geométrica, concepto que ya se trató en Topología I y en Geometría III.

Proposición 3.3. *Sea Ω un conjunto convexo, entonces es estrellado.*

Demostración. Sea $z_* \in \Omega$, entonces $[z_*, \alpha] \subseteq \Omega\ \forall \alpha \in \Omega$, por ser Ω convexo. □

Recordando la Proposición 3.2, mostramos ahora el siguiente teorema, el cual nos proporciona la otra implicación que venimos buscando para tener una condición necesaria y suficiente.

Teorema 3.4. *Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto y tiene forma de estrella, sean $P, Q \in C^1(\Omega)$ funciones que cumplen la condición de exactitud, es decir, que:*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Entonces, existe una función $U \in C^2(\Omega)$ tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

En realidad, obtenemos un teorema mucho más general exigiendo solo que Ω sea simplemente conexo[5].

Para realizar la demostración, es necesario recordar previamente un concepto ya visto en Análisis Matemático II, las integrales dependientes de un parámetro.

3.1.1. Integrales dependientes de un parámetro

Sabemos que si tenemos una función continua f definida en un intervalo I, entonces si definimos

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} f(\xi)\ d\xi \qquad y_0 \in I, \forall y \in I$$

Sabemos por el Teorema Fundametal del Cálculo que $F \in C^1(I)$, con $F'(y) = f(y)$.

Sin embargo, nos podemos encontrar funciones definidas por integrales de diversas formas, como una función dada por la integral de una función de dos variables integrando solo una de ellas. Sea $f : J \times I \to \mathbb{R}$ una función y $a, b \in J$, definimos $F : I \to \mathbb{R}$ por

$$F(y) = \int_{a}^{b} f(x, y)\ dx \qquad \forall y \in I$$

Las funciones obtenidas de esta forma decimos que son funciones obtenidas mediante integrales dependientes de un parámetro (en este caso, el parámetro es y).

Antes de ver cómo podemos derivar este tipo de funciones, pensaremos en "el caso discreto". Es decir, dada una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ todas ellas definidas en un cierto intervalo I y dado $N \in \mathbb{N}$, podemos definir una función $F : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(y) = \sum_{n=1}^{N} f_n(y) \qquad \forall y \in I$$

De esta forma, sabemos ya derivar la función F:

$$\frac{dF}{dy}(y) = \frac{d}{dy}\left(\sum_{n=1}^{N} f_n(y)\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{df_n}{dy}(y)\right) \qquad \forall y \in I$$

gracias a la linealidad de la derivada. Resulta que esto se mantiene al pasar al "caso continuo", tal y como veremos en el siguiente teorema.

Veremos una versión más débil del teorema visto en Análisis Matemático II, que cuenta con las consecuencias justas para demostrar el Teorema 3.4.

Teorema 3.5 (Integral dependiente de un parámetro)**.** *Sea $G \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto, dada una aplicación $f : G \times [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase $C^1(G \times [a, b])$, definimos una función $F : G \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d) = \int_{a}^{b} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d, t)\ dt$$

[5]Noción que no hemos visto todavía. Intuitivamente, un conjunto es simplemente conexo si no tiene agujeros.

Entonces, $F \in C^1(G)$ *y*

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_i}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d, t)\; dt \qquad \forall i \in \{1, \ldots, d\}$$

Como consecuencia del teorema, la función F anteriormente definida como

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\; dx \qquad \forall y \in I$$

Si I era un intervalo abierto y f era de clase[6] $C^1([a, b] \times I)$, entonces $F \in C^1(I)$, y tenemos que

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\; dx \qquad \forall y \in I$$

Ejemplo. Dada la función

$$F(y) = \int_0^1 e^x \operatorname{sen}(x + y^2)\; dx \qquad \forall y \in I$$

Gracias al teorema de integrales dependientes de un parámetro, sabemos que la derivada de esta función es:

$$F'(y) = \int_0^1 2ye^x \cos(x + y^2)\; dx = 2y \int_0^1 e^x \cos(x + y^2)\; dx \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

Una vez terminado el repaso de integrales dependientes de un parámetro, estamos ya preparados para proceder con la demostracion del Teorema 3.4, el cual volvemos a enunciar:

Teorema 3.6. *Si* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *es abierto y tiene forma de estrella, sean* $P, Q \in C^1(\Omega)$ *funciones que cumplen la condición de exactitud, es decir, que:*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Entonces, existe una función $U \in C^2(\Omega)$ *tal que*

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Demostración. La demostración la haremos pensando que el punto z_* de Ω que nos da la condición de que tenga forma de estrella sea $z_* = (0, 0)$ y la demostración en el caso general se deja como ejercicio para el lector.

En dicho caso, definimos una función $U : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$U(x, y) = x \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y)\; d\lambda + y \int_0^1 Q(\lambda x, \lambda y)\; d\lambda \qquad \forall (x, y) \in \Omega$$

Notemos que U está bien definida, ya que:

[6]Notemos que el teorema se anunció pensando que los parámetros de la función serían los primeros, pero ahora tenemos el parámetro al final, es una situación totalmente análoga.

- En primer lugar, como Ω tiene forma de estrella desde $z_* = (0,0)$, entonces el segmento que une cualquier punto (x,y) con z_* estará en Ω, luego si $(x,y) \in \Omega$, entonces $(\lambda x, \lambda y) \in \Omega$ $\forall \lambda \in [0,1]$.

- Además, P y Q son funciones continuas, luego integrables en cualquier conjunto compacto (como lo es $[0,1]$), luego podemos calcular dichas integrales.

Como las funciones resultantes de las composiciones siguientes

$$\begin{gathered}(x,y,\lambda) \longmapsto (x\lambda, y\lambda) \longmapsto P(x\lambda, y\lambda) \\ (x,y,\lambda) \longmapsto (x\lambda, y\lambda) \longmapsto Q(x\lambda, y\lambda)\end{gathered}$$

son de clase $C^1(\Omega \times [0,1])$, podemos aplicar dos veces el teorema de las integrales dependientes de un parámetro, obteniendo que $U \in C^1(\Omega)$ y que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) &= \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda + x\int_0^1 \lambda \frac{\partial P}{\partial x}(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda + y\int_0^1 \lambda \frac{\partial Q}{\partial x}(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda \\ &\overset{(*)}{=} \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda + x\int_0^1 \lambda \frac{\partial P}{\partial x}(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda + y\int_0^1 \lambda \frac{\partial P}{\partial y}(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda\end{aligned}$$

Donde en $(*)$ hemos usado que P y Q cumplen la condición de exactitud. Podemos ahora escribirla como una diferencial exacta (compruébese), obteniendo que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda + \int_0^1 \lambda \frac{d}{d\lambda}[P(\lambda x, \lambda y)]\ d\lambda$$

Que podemos volver a escribir como una diferencial exacta (vuélvase a comprobar), llegando a que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda}[\lambda P(\lambda x, \lambda y)]\ d\lambda$$

donde podemos aplicar la Regla de Barrow:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda}[\lambda P(\lambda x, \lambda y)]\ d\lambda = [\lambda P(\lambda x, \lambda y)]_{\lambda=0}^{\lambda=1} = P(x,y)$$

Por un razonamiento análogo, llegamos a que:

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$

Finalmente, como las dos derivadas parciales de U son de clase $C^1(\Omega)$, concluimos que $U \in C^2(\Omega)$. □

3.1.2. Interpretación de la demostración

Pese a haber demostrado el Teorema 3.4, la demostración no es gratificante, ya que hemos obtenido de forma "mágica" una función U que cumplía lo que queríamos, y no sabemos de dónde proviene dicha fórmula. Trataremos en esta sección de dar sentido a esta, usando para ello la física.

En física, un campo vectorial en el plano es una aplicación que a cada punto $z = (x, y)$ le hace corresponder un vector (una flecha), $F(z) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$.

De esta forma, un campo vectorial para nosotros será una aplicación $F \in C^1(G, \mathbb{R}^2)$ con $G \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto. Pensaremos en este campo vectorial como en un campo de fuerzas (es decir, el vector $F(z)$ nos indicará cómo es la fuerza que se sufre al estar en el punto z).

Definición 3.3 (Campo de fuerzas conservativo)**.** Diremos que un campo de fuerzas F es conservativo si existe un potencial, es decir, una función $U : G \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$\nabla U = F$$

Es decir:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = F_2$$

Observación. El lector estará acostumbrado a ver en física el gradiente notado por $-\nabla V$ (con $V = -U$). Sin embargo, en esta sección trabajaremos con el gradiente refiriéndonos a ∇U.

Ejemplo. Dado el campo de fuerzas

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1, x_2) \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Que podemos pensar como una homotecia o como un campo vectorial:

- En el origen, tenemos el vector 0.
- Dado un punto (x, y), tenemos que dibujar el vector fuerza (gradiente) como la mitad del vector de posición.

Notemos que se trata de un campo repulsor, de forma que el módulo del vector fuerza se mantiene constante en circunferencias de un determinado radio, con dirección paralela a los radios de la misma. Conforme nos alejamos del origen, la fuerza se incrementa.

Resulta que F es un campo de fuerzas conservativo, ya que podemos encontrar un potencial para dicho campo, es decir, una función $U \in C^1(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$U(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

de forma que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_1, x_2) = \frac{x_1}{2} = F_1(x_1, x_2) \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x_1, x_2) = \frac{x_2}{2} = F_2(x_1, x_2) \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Ejemplo. Un ejemplo de campo no conservativo es

$$F(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

Se trata de un giro de 90º en sentido antihorario, un campo de fuerzas que describe el comportamiento de un vórtice (como hace el agua cuando se cuela en un sumidero). Se trata de un campo no conservativo, ya que no podemos encontrar un potencial, debido a que no se cumple la condición de exactitud.

En un campo de fuerzas no hay necesariamente energía (ya que puede no ser conservativo), pero lo que siempre hay es trabajo.

Definición 3.4 (Trabajo)**.** Dado un conjunto abierto $G \subseteq \mathbb{R}^2$, un campo de fuerzas en G y un camino en G, es decir, una función $\gamma \in C^1([a, b], G)$, el trabajo de F a lo largo de γ se define como

$$\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \ dt$$

A continuación, podemos reformular el Teorema 3.4 en términos físicos, obteniendo el siguiente teorema:

Teorema 3.7. *Si $G \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto y tiene forma de estrella, sea $F \in C^1(G, \mathbb{R}^2)$ un campo de fuerzas para el cual se cumple la condición de exactitud:*

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$$

Entonces, F es conservativo.

Finalmente, notemos que si tenemos dos caminos distintos con los mismos extremos, el trabajo por cada uno de ellos no tiene por qué coincidir. Sin embargo, esto sucede si el campo es conservativo:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \ dt &= \int_a^b \left[F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right] \ dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial U}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial U}{\partial x_2}(\gamma(t))\gamma_2'(t)\right] \ dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}[U(\gamma(t))] \ dt \overset{(*)}{=} U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))
\end{aligned}$$

Usando la regla de Barrow en $(*)$, concluimos que el trabajo para ir de un punto a otro por un camino γ es la diferencia del potencial entre los dos puntos.

Para entender ahora de dónde proviene la fórmula de la función U del Teorema 3.4:

$$U(x, y) = x\int_0^1 P(\lambda x, \lambda y) \ d\lambda + y\int_0^1 Q(\lambda x, \lambda y) \ d\lambda \qquad (x, y) \in \Omega$$

Lo que hacemos es pensar que tenemos un campo de fuerzas $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Y resulta que este campo de fuerzas es conservativo, y como el trabajo en un campo conservativo es independiente del camino elegido para calcular dicho trabajo, podemos elegir cualquier camino. Observamos ahora que la expresión de U es simplemente el trabajo a lo largo del camino dado por el segmento $[(0, 0), (x, y)]$ para cualquier $(x, y) \in \Omega$. Es decir, sea $(x, y) \in \Omega$, obtenemos el camino $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$\gamma(\lambda) = (\lambda x, \lambda y) \qquad \lambda \in [0, 1]$$

resulta que $\gamma \in C^1([0,1])$, con

$$\gamma'(\lambda) = (x, y) \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

Y si ahora escribimos el trabajo de F a lo largo de γ:

$$\int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \; dt = \int_0^1 [P(\lambda x, \lambda y)x + Q(\lambda x, \lambda y)y] \; d\lambda = U(x, y)$$

Además, puede probarse que la función U que nos da el Teorema 3.4 es única salvo una constante aditiva[7]. Lo que hicimos en la definición de U era fijar el origen de potencial en el origen, por lo que teníamos

$$U(0,0) = 0$$

Una vez que se conoce la existencia de dicho potencial (gracias al Teorema 3.4), no es necesario aplicar la fórmula para calcularlo, sino que podemos hacerlo por un procedimiento más práctico, el cual ilustramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Dadas las funciones

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 7x^6 + 6x^5y + 3x^2y^3 \\ Q(x, y) &= x^6 + 3x^3y^2 - 4y^3 \end{aligned}$$

se pide calcular un potencial para el campo de fuerzas $F = (P, Q)$.

Por una parte, sabemos que $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$ por tratarse de polinomios, con lo que nuestro dominio Ω en este caso será $\mathbb{R}^2$, que sabemos que es estrellado por ser convexo: sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, entonces:

$$(1-t)\alpha + t\beta \in \mathbb{R}^2 \qquad \forall t \in [0,1]$$

Falta comprobar la condición de exactitud para poder aplicar el Teorema 3.4, que nos provee de la existencia de un potencial para el campo F:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= 6x^5 + 9x^2y^2 \\ \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) &= 6x^5 + 9x^2y^2 \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema, sabemos que existe un potencial $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$, el cual pasamos a calcular de forma práctica:

Estamos buscando una función U de forma que:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y) = 7x^6 + 6x^5y + 3x^2y^3$$

Por tanto, integraremos en x pensando que la y es fija:

$$U(x, y) = \int (7x^6 + 6x^5y + 3x^2y^3) \; dx = x^7 + x^6y + x^3y^3 + \phi(y)$$

[7]De aquí que en los problemas de física podíamos poner el origen de potencial en el punto que queramos.

Es decir, por cada $y \in \mathbb{R}$, tenemos una primitiva a buscar, la cual tendrá una constante aditiva $c \in \mathbb{R}$. Si ahora juntamos todas las primitivas encontradas para cada y, la constante aditiva de cada y ahora será una función dependiente de y, ya que por cada valor de y habíamos encontrado una constante. Dicha función es la ϕ que hemos usado anteriormente.

Para terminar de buscar dicha ϕ (para determinar correctamente U), lo que hacemos es establecer la otra condición que teníamos de U, en relación a la función Q, que se pone de manifiesto en $(*)$:

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = x^6 + 3x^3y^2 + \phi'(y) \overset{(*)}{=} x^6 + 3x^2y^2 - 4y^3 = Q(x,y)$$

De donde $\phi'(y) = -4y^3$, por lo que $\phi(y) = -y^4$. Finalmente:

$$U(x,y) = x^7 + x^6y + x^3y^3 - y^4$$

Notemos que podíamos haber escogido $\phi(y) = -y^4 + c$ con cualquier $c \in \mathbb{R}$. Esto se debe a que como habíamos comentado antes, U es única salvo constante aditiva, lo que nos permite fijar el origen del potencial en el punto que queramos.

Veamos ahora un ejemplo donde no se puede buscar U porque el dominio que consideramos no tiene forma de estrella[8].

Ejemplo. Tomaremos como dominio

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 4\right\}$$

Es decir, el anillo formado por los puntos que están entre una circunferencia de radio $\sqrt{1/4} = 1/2$ y radio $\sqrt{4} = 2$, tal y como vemos en la Figura 3.2.

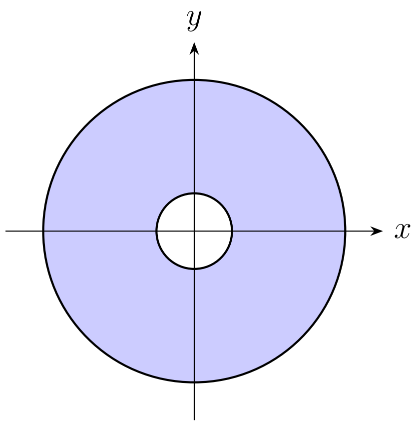


Figura 3.2: Dominio Ω.

Sean:

$$P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad Q(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

[8]Con la intuición de que tenemos que buscar un conjunto que no sea simplemente conexo, buscamos un conjunto con un agujero.

Estas funciones no pueden definirse en $\mathbb{R}^2$ (por tener una singularidad en el origen), pero sí en Ω, donde son $C^1(\Omega)$, con:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \frac{x^2+y^2-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{-x^2-y^2+2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

con lo que tenemos la condición de exactitud en un ejemplo en el que Ω no es estrellado. Para ver que no existe el potencial, lo razonaremos por el trabajo, buscando un camino cerrado en el que el trabajo no sea nulo, ya que si existiera un potencial U, entonces tendríamos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt &= \int_a^b \langle \nabla U(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt} U(\gamma(t)) \, dt = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))
\end{aligned}$$

Y si cogemos un camino cerrado, entonces $\gamma(a) = \gamma(b)$, con lo que obtendríamos trabajo nulo.

Cogeremos entonces el camino que recorre la circunferencia de radio 1 (a poco que se piense, para que el camino sea bueno tiene que pasar al otro lado del agujero del anillo[9]). Cogemos por tanto el camino $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

que es de clase $C^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$, con

$$\gamma'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \qquad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

Vemos representado el camino escogido en la Figura 3.3.

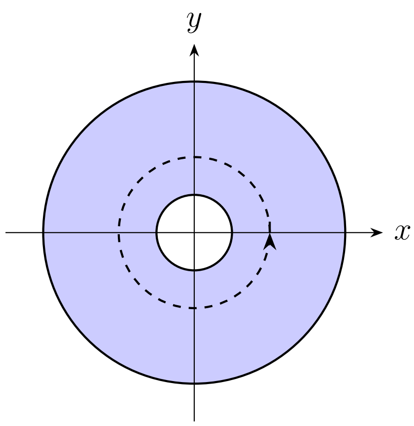


Figura 3.3: Camino γ.

Con lo que el trabajo del campo $F = (P, Q)$ será:

[9]Ya que si no podríamos coger un dominio menor que contenga al camino y sí sea estrellado o simplemente conexo, con lo que sí existiría un potencial.

$$\int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(\theta)), \gamma'(\theta)\rangle \, d\theta = \int_0^{2\pi} [-P(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta + Q(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\cos\theta] \, d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi} [-\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta] \, d\theta = -2\pi \neq 0$$

Tenemos ya un ejemplo en el que no se cumple la condición de exactitud y no podemos encontrar potencial y otro ejemplo en el que el dominio no es estrellado y tampoco podemos encontrar un potencial, con lo que parece que las condiciones de exactitud y dominio estrellado son ambas necesarias como hipótesis del Teorema 3.4.

Antes de pasar a la siguiente sección y con el objetivo de asentar todos los conceptos desarrollados en esta, realizaremos el siguiente ejercicio, el cual asentará conceptos importantes viéndolos de forma práctica.

Ejercicio. Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ un campo de fuerzas dado por:

$$F(x, y) = \left(\frac{2x}{y}, \frac{-x^2}{y^2}\right) \qquad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

¿Admite F potencial? Calcular el trabajo a lo largo de la curva $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, 1 + \operatorname{sen}\theta) \qquad \theta \in [0, \pi]$$

En primer lugar, definimos por comodidad $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, así como nuestras funciones $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$P(x, y) = \frac{2x}{y} \qquad Q(x, y) = \frac{-x^2}{y^2} \qquad (x, y) \in \Omega$$

de clase $C^1(\Omega)$, siendo $F = (P, Q)$. Y lo primero para ver si F admite un potencial será comprobar si P y Q cumplen con la condición de exactitud:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{-2x}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \Omega$$

Efectivamente, por lo que solo faltará ver que Ω es estrellado para estar en las hipótesis del Teorema 3.4, que nos asegura de la existencia de un potencial para F.

Para ello, demostremos que Ω es convexo: sean $(x, y), (u, v) \in \Omega$, entonces $x, u \in \mathbb{R}$ y $y, v \in \mathbb{R}^+$. Sea ahora $(\alpha, \beta) \in [(x, y), (u, v)]$, entonces:

$$(\alpha, \beta) = t(x, y) + (1 - t)(u, v) \qquad t \in [0, 1]$$

y tendremos que:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha & = tx + (1-t)u \in \mathbb{R} \\ \beta & = ty + (1-t)v \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow (\alpha, \beta) \in \Omega$$

por ser $t \leqslant 1$, $y, v \in \mathbb{R}^+$. Concluimos que Ω es convexo, luego tiene forma de estrella. Por tanto, sí, F admite un potencial $U \in C^2(\Omega)$.

Con vistas a calcular el trabajo a lo largo de la curva γ, calcularemos primero los puntos inicial y final de dicho recorrido:

$$\gamma(0) = (1, 1) \qquad \gamma(\pi) = (-1, 1)$$

En este caso son puntos distintos, pero si hubiera dado la casualidad de ser iguales, como nos encontramos en un campo de fuerzas F conservativo (por admitir un potencial), podríamos directamente concluir que el trabajo a lo largo de la curva es 0. Como esto no ha sucedido, tenemos ahora dos posibilidades:

- Calcular el trabajo directamente a partir de su definición.
- Calcular cuál es el potencial U y aplicar que el trabajo en un campo conservativo es la diferencia de los potenciales final e inicial.

Nos decantamos por la segunda opción, por tener cálculos más sencillos.

Una vez conocida la existencia de un potencial U, pasamos a calcularlo, sabiendo que es una función $U : \Omega \to \mathbb{R}$, $U \in C^2(\Omega)$ de forma que:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \Omega$$

De la primera igualdad, tenemos que:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y) = \frac{2x}{y}$$

con lo que para hallar U, fijamos un $y \in \mathbb{R}^+$ y calculamos una primitiva de la función real de variable real (por fijar el y) $P(x, y)$:

$$U(x, y) = \int P(x, y)\ dx = \int \frac{2x}{y}\ dx = \frac{x^2}{y} + \phi(y)$$

donde para cada $y \in \mathbb{R}^+$, $\phi(y)$ es la constante de integración que obtenemos en cada caso. Si aplicamos ahora la segunda igualdad, tenemos que:

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \frac{-x^2}{y^2} + \phi'(y) = \frac{-x^2}{y^2} = Q(x, y)$$

por lo que concluimos que $\phi'(y) = 0\ \forall y \in \mathbb{R}^+$, con lo que como función ϕ podemos coger cualquier función de la forma $\phi(y) = c$ con $c \in \mathbb{R}$. Elegiremos por comodidad $c = 0$, con lo que tenemos $\phi(y) = 0\ \forall y \in \mathbb{R}^+$.

Llegamos finalmente a que:

$$U(x, y) = \frac{x^2}{y} + \phi(y) = \frac{x^2}{y} \qquad \forall (x, y) \in \Omega$$

Y ya sí que podemos calcular el trabajo a lo largo de la curva γ:

$$U(\gamma(\pi)) - U(\gamma(0)) = U(-1, 1) - U(1, 1) = 0$$

Además de tener interés práctico el ejercicio superior, hemos visto que el recíproco de "si tenemos un camino cerrado en un campo conservativo, entonces el trabajo a lo largo de dicho camino es 0" es falso, porque hemos visto un ejemplo de trabajo nulo en un campo conservativo a lo largo de un camino que no es cerrado.

3.2. Ecuaciones exactas

Las ecuaciones exactas son ecuaciones diferenciales de la forma

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 \tag{3.4}$$

Con $P, Q \in C^1(\Omega)$ definidas en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, un conjunto abierto y conexo en el que se cumple la **condición de exactitud**:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Las ecuaciones exactas no son una familia de ecuaciones que sea fácil de detectar. Lo recomendable es, dada una ecuación diferencial, observar si se trata de algún tipo de ecuaciones de las descritas en el Capítulo 2. En caso contrario, posiblemente estemos ante una ecuación exacta (o que se pueda convertir fácilmente a exacta, como veremos en la siguiente sección).

Sin embargo, una vez detectado que una ecuación es exacta, resolverla es un proceso muy sencillo, por lo que podemos decir que lo más difícil de las ecuaciones exactas es darnos cuenta de que son exactas. La Proposición 3.8 nos mostrará cómo podemos resolver una ecuación diferencial exacta.

Proposición 3.8 (Resolución de ecuaciones exactas)**.** *Dada una ecuación exacta, es decir, una ecuación de la forma (3.4) definida en un conjunto abierto y conexo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ con $P, Q \in C^1(\Omega)$ de forma que se cumpla la condición de exactitud:*

Si fijamos un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ en el que $Q(x_0, y_0) \neq 0$, entonces existirá una solución $y : I \to \mathbb{R}$ para dicha ecuación diferencial definida en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ en la que $y(x_0) = y_0$.

Demostración. La primera dificultad de la demostración es que no hemos exigido nada sobre Ω (no hemos exigido que tenga forma de estrella), con lo que la condición de exactitud no es suficiente para asegurarnos la existencia de un potencial en Ω.

Sin embargo, dado que Ω es abierto, sí que podremos tomar un conjunto estrellado en cada punto (x, y) de Ω que esté contenido en el mismo conjunto. Tenida en cuenta esta dificultad, pasamos ya con la demostración:

Por ser Ω abierto, $\exists \varepsilon > 0$ de forma que podemos tomar un cuadrado[10] que contenga a (x_0, y_0) y no se salga de Ω:

$$(x_0, y_0) \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subseteq \Omega$$

Llamamos a dicho cuadrado $R = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$.

Por ser R un cuadrado, es fácil ver que es convexo (hágase), luego tiene forma de estrella, por lo que sabemos que existe un potencial: $\exists U \in C^2(R)$ de forma que:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \qquad \forall (x,y) \in R$$

[10]Podríamos tomar también una bola centrada en (x_0, y_0), o incluso cualquier conjunto estrellado que no se salga de Ω y contenga al punto (x_0, y_0), con lo que la demostración sería análoga.

Usando estas igualdades, podemos ahora reescribir la ecuación (3.4), obteniendo que esta se puede reescribir como la derivada exacta de una función:

$$P(x,y)+Q(x,y)y' = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)y' \overset{(*)}{=} \frac{d}{dx}[U(x,y)] = 0$$

Donde en $(*)$ hacemos un abuso de notación[11], entendiendo que y es una función que depende de x y lo que hacemos es derivar la función resultado de la composición:

$$x \longmapsto (x,y(x)) \longmapsto U(x,y(x))$$

Que es una función de una variable. Por ser esta composición una función de clase $C^1(\pi_1(R))$ (donde aplicamos que la composición de funciones de clase C^1 es de clase C^1), y ser su derivada constantemente igual a 0, existirá por tanto una constante $c \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$U(x,y) = c \qquad \forall (x,y) \in R$$

Sin embargo, como no estamos interesados en encontrar todas las soluciones en R, sino solo aquella que contenga al punto (x_0,y_0), podemos tomar $c = U(x_0,y_0)$, con lo que el potencial será una función definida en R y:

$$U(x,y) = U(x_0,y_0) \qquad \forall (x,y) \in R$$

Para concluir, lo que hacemos es buscar una función y definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ de forma que:

1. $x_0 \in I$.
2. $y(x_0) = y_0$.
3. $(x,y(x)) \in R \ \forall x \in I$.
4. $U(x,y(x)) = U(x_0,y_0) \ \forall x \in I$.

Es evidente que lo que tenemos que hacer ahora es busar aplicar el Teorema de la Función Implícita. Para ello, sea $F : R \to \mathbb{R}$ una función dada por

$$F(x,y) = U(x,y) - U(x_0,y_0) \qquad (x,y) \in R$$

se trata de una función $F \in C^1(R,\mathbb{R})$, que cumple que $F(x_0,y_0) = 0$ y que:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial U}{\partial y}(x_0,y_0) = Q(x_0,y_0) \neq 0$$

Por lo que podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita, con lo que existe una función $y : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$, $y \in C^1(I)$ que verifica todos los puntos de la enumeración anterior, con lo que la función y es solución de la ecuación diferencial (3.4). □

[11]¡No tiene sentido considerar la derivada de una función de dos variables!

Notemos que la intuición tras la condición $Q(x,y) \neq 0$ sobre la ecuación (3.4) significa que podemos despejar y' de forma que podamos expresar dicha ecuación en forma normal:

$$y' = \frac{-P(x,y)}{Q(x,y)}$$

Como hemos comentado anteriormente, no será difícil resolver ecuaciones diferenciales exactas. De hecho, como mostramos en la demostración, el procedimiento para resolverlas será:

1. Darnos cuenta de que estamos ante una ecuación diferencial exacta (tendremos que comprobar principalmente que cumple la condición de exactitud).

2. Calcular la función potencial de dicha ecuación diferencial de forma práctica (algo que ya aprendimos a hacer en un ejemplo), que consiste en calcular la una primitiva y ajustar el valor de una función ϕ.

3. Finalmente, aplicar el Teorema de la Función Implícita sobre un punto que nos interese tener en el dominio de la solución a escoger (la condición inicial que nos habrán exigido sobre la solución a encontrar).

Este procedimiento lo mostramos en el siguiente ejemplo, en el que resolvemos una ecuación diferencial exacta.

Ejemplo. Se pide resolver la ecuación

$$y^2 + 2x + (5y^4 + 2xy)y' = 0 \qquad y(0) = 3 \tag{3.5}$$

Dado que estamos en la sección de Ecuaciones Exactas, probablemente sea una ecuación exacta, comprobémoslo:

Sean $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$P(x,y) = y^2 + 2x \qquad Q(x,y) = 5y^4 + 2xy \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

tenemos que $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$, veamos si cumplen la condición de exactitud:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto, la ecuación (3.5) es una ecuación exacta, definida en $\Omega = \mathbb{R}^2$. Como nos interesará que el punto $(0,3)$ esté en la solución particular a encontrar, comprobemos el valor de $Q(0,3)$:

$$Q(0,3) = 5 \cdot 3^4 = 405 \neq 0$$

De esta forma, nos encontramos en las hipótesis de la Proposición 3.8, con lo que ya sabemos la existencia de una función $y : I \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto que es solución de (3.5) con $y(0) = 3$. Sin embargo, dado que no conocemos nada sobre dicha función y, nos disponemos a calcular el potencial U, para al menos conocer y de forma implícita mediante una ecuación.

Calculamos dicho potencial de forma práctica, tal y como hicimos en un ejemplo anterior. Primero, recordemos que buscamos una función $U : R \to \mathbb{R}$ de forma que:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y) = y^2 + 2x \qquad \forall (x, y) \in R$$

Con lo que integramos en x, pensando que y es una constante fija:

$$U(x, y) = \int (y^2 + 2x)\ dx = y^2 x + x^2 + \varphi(y)$$

Donde en cada y obtenemos una constante de integración $\varphi(y)$ que puede ser distinta en cada caso. Si ahora calculamos la derivada parcial de esta expresión respecto a y, imponiendo que dicha parcial debe coincidir con la función Q:

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = 2xy + \varphi'(y) = 5y^4 + 2xy = Q(x, y) \qquad \forall (x, y) \in R$$

llegamos a que $\varphi'(y) = 5y^4$ y podemos tomar, por ejemplo, $\varphi(y) = y^5$.

Tenemos finalmente que:

$$U(x, y) = y^2 x + x^2 + \varphi(y) = y^2 x + x^2 + y^5 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Y sabemos (gracias a la Proposición 3.8) que la ecuación (3.5) podemos ponerla como la derivada de una función de una variable igualada a 0. Por tanto, sabemos que las soluciones pueden escribirse como:

$$U(x, y) = c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Sin embargo, como no queremos todas las soluciones $y = y(x)$ de (3.5), nos quedamos con aquella que cumple $3 = y(0)$, con lo que:

$$U(x, y) = U(x_0, y_0) = U(0, 3) = 3^2 \cdot 0 + 0^2 + 3^5 = 3^5 = 243$$

Y como anteriormente comprobamos que $Q(0, 3) = 405 \neq 0$, no hace falta aplicar el Teorema de la Función Implícita, ya que la Proposición 3.8 ya nos garantiza la existencia de dicha función y, de la que conocemos que:

$$\begin{aligned} y^2 x + x^2 + y^5 &= 243 \\ y(0) &= 3 \end{aligned}$$

Que sospechamos que no puede ponerse en forma explícita, ya que requiere averiguar las raíces de un polinomio de grado 5.

Como acabamos de ver en el ejemplo superior, lo más difícil es darnos cuenta de que la ecuación diferencial que nos solicitan sea o no exacta, ya que el procedimiento que realizamos posteriormente para resolverla es muy mecánico y similar en todos los casos. Sin embargo, no hay que olvidar que la sencillez de resolución de este tipo de soluciones es gracias a la teoría que venimos desarrollando durante todo este Capítulo.

Cabe destacar que la idea para resolver ecuaciones exactas es totalmente distinta a la idea que teníamos en el Capítulo anterior para resolver ecuaciones diferenciales, usando para ello cambios de variable. En este caso, ha sido necesario anteriormente probar un resultado muy útil en Análisis y en muchos otros campos que se salen de la Matemática (como la Física), que es la existencia de un potencial para un campo de fuerzas dado bajo unas condiciones.

Sin embargo, desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales se trata (por ahora) de un resultado muy pobre, ya que para que una ecuación diferencial sea exacta ha de cumplir la condición de exactitud, una condición muy rígida y que cumplen poquísimas ecuaciones diferenciales.

A pesar de ello, resulta que dada cualquier ecuación diferencial, es posible siempre encontrar una función que al multiplicarla por nuestra ecuación diferencial la convierta en una ecuación exacta, la cual ya sabemos (y es sencillo hacerlo) resolver. Dicha función que usamos para convertir una ecuación en exacta se trata del **factor integrante**, y es lo que nos mantendrá ocupados durante la siguiente sección.

3.3. Factor integrante

Como hemos comentado anteriormente (y motivamos al inicio del Capítulo), un factor integrante es una función "misteriosa" que tiene la cualidad de convertir cualquier[12] ecuación diferencial que tratemos resolver en una ecuación exacta, las cuales sabemos resolver.

El nombre de "factor integrante" proviene de la notación clásica, donde era frecuente decir "integrar una ecuación diferencial" para indicar que esta se estaba resolviendo, con lo que la función que usamos para resolverla es el "factor" que nos permite integrarla.

Veamos primero un ejemplo que motive el uso y la definición del mismo:

Ejemplo. Dada la ecuación:

$$y' + y = 0 \tag{3.6}$$

Sabemos desde el inicio de este documento que sus soluciones son funciones de la familia

$$y(x) = ke^{-x} \qquad k \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Y resulta que (3.6) no es una ecuación exacta, ya que sean $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$P(x,y) = y \qquad Q(x,y) = 1 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

tenemos que $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$, con:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1 \neq 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Con lo que (3.6) no cumple la condición de exactitud, por lo que no es una ecuación exacta.

[12]Este resultado no es objetivo de Ecuaciones Diferenciales I, aunque merece ya ser conocido.

Sin embargo, podemos encontrar distintas funciones que al multiplicarlas por (3.6) nos conviertan dicha ecuación en una ecuación exacta:

1. En primer lugar, sea $\mu_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\mu_1(x) = e^x$, veamos que nos transforma la ecuación (3.6) en una ecuación exacta al multiplicar por μ_1:

   $$\mu_1(x)(y + y') = e^x(y + y') = e^x y + e^x y' = 0$$

   en efecto, ahora la ecuación es exacta (compruébese), teniendo que:

   $$e^x y + e^x y' = \frac{d}{dx}(e^x y) = 0$$

   donde pensamos en y como función de x, con lo que soluciones suyas son funciones $y = y(x)$ dadas de forma implícita por:

   $$e^x y = c \qquad c \in \mathbb{R}$$

   con lo que fijando $c \in \mathbb{R}$ obtenemos una solución:

   $$y(x) = c \cdot e^{-x} \qquad x \in \mathbb{R}$$

   Que tiene la forma que ya conocíamos. De esta forma, vemos que μ_1 es un factor integrante para (3.6).

2. De otra forma, sea $\mu_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $\mu_2(y) = {}^1/_y$, al multiplicar μ_2 por (3.6):

   $$\mu_2(y)(y + y') = \frac{y + y'}{y} = 1 + \frac{y'}{y} = 0 \qquad y > 0$$

   que vuelve a ser una ecuación exacta (compruébese), teniendo que:

   $$1 + \frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}(x + \ln y) = 0 \qquad y > 0$$

   De esta forma y análogamente, soluciones de (3.6) son funciones $y = y(x)$ dadas de forma implícita por la familia de ecuaciones:

   $$x + \ln y = d \qquad d \in \mathbb{R}$$

3. Notemos que tomando $\mu_3 : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ dada por $\mu_3(y) = {}^1/_y$ obtenemos el resto de soluciones que nos faltaron en el punto anterior, salvo la solución $y(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Como hemos visto anteriormente, un "factor integrante" (todavía no sabemos lo que es) es una función que en algunos casos puede venir dado en función de x, otras veces en función de y, $\ldots$, y que puede estar definida en unos dominios muy grandes (como μ_1) o en otros más restringidos que nos dan parte de las soluciones (como μ_2 y μ_3).

Cabe destacar que si los factores integrantes cuentan con singularidades o puntos en los que se anulan, en dichos puntos estaremos perdiendo información sobre la ecuación, con lo que nos interesarán factores integrantes con un mayor dominio de definición.

Definición 3.5 (Factor integrante)**.** Dada una ecuación diferencial definida en un conjunto D. Sea $\Omega \subseteq D$, un factor integrante para dicha ecuación es una función $\mu : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase $C^1(\Omega)$ de forma que:

1) Se verifique que

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega \tag{3.7}$$

Es decir, que si tenemos una ecuación de la forma (3.4) y la multiplicamos por $\mu(x,y)$, entonces obtenemos una ecuación exacta.

2) $\mu(x,y) \neq 0$ $\forall (x,y) \in \Omega$, para no perder información.

De esta forma, dada una ecuación diferencial, un factor integrante para la misma será cualquier función definida en un subconjunto del conjunto de definición de la ecuación que no se anule y que al multiplicarla por nuestra ecuación obtengamos una ecuación exacta.

Como el factor integrante no se anula en ningún punto, las soluciones de la ecuación diferencial exacta que obtenemos al multiplicar por el factor integrante son las mismas que las soluciones para la ecuación diferencial que teníamos de partida, restringida a Ω.

Ejemplo. Como hemos visto en el ejemplo superior, ejemplos de factores integrantes distintos para la ecuación

$$y + y' = 0$$

definida en $D = \mathbb{R}^2$ son:

1. Tomando $\Omega = \mathbb{R}^2$:

$$\mu_1(x,y) = e^x$$

2. Tomando $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ o $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$:

$$\mu_2(x,y) = \frac{1}{y} \qquad \mu_3(x,y) = \frac{1}{y}$$

Observación. Notemos que si tenemos una ecuación diferencial que ya es exacta, cualquier función constantemente igual a un número real (salvo 0) será un factor integrante para la misma:

$$\mu_c(x,y) = c \qquad c \neq 0, \quad (x,y) \in \Omega$$

3.3.1. Métodos de búsqueda de un factor integrante

Dada una ecuación diferencial, nos ponemos a buscar un factor integrante que sirva para la misma. Lo que haremos será partir de lo único que conocemos de los factores integrantes, que es su definición, con lo que buscamos una función que no se anule y que cumpla la ecuación (3.7) en un subconjunto del conjunto de definición de la ecuación diferencial que tenemos.

La idea para buscar dicho factor integrante será ver la ecuación (3.7) como una ecuación en derivadas parciales con incógnita μ. Esta podemos reescribirla usando la fórmula de la derivación de un producto:

$$\begin{gathered}\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial\mu}{\partial y}(x,y)P(x,y)+\mu(x,y)\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial\mu}{\partial x}(x,y)Q(x,y)+\mu(x,y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial\mu}{\partial y}(x,y)P(x,y)-\frac{\partial\mu}{\partial x}(x,y)Q(x,y)=\mu(x,y)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\end{gathered}$$

Obtenemos una expresión muy engorrosa que podemos ahora reescribir, donde notaremos por f_x a la parcial de la función f respecto a x y análogamente con y. Además, quitaremos la dependencia de las variables (x,y):

$$\begin{aligned}(\mu P)_y&=(\mu Q)_x\\ \mu_yP+\mu P_y&=\mu_xQ+\mu Q_x\\ \mu_yP-\mu_xQ&=\mu(Q_x-P_y)\end{aligned}$$

Con lo que obtenemos una ecuación en derivadas parciales del factor integrante μ.

Aunque no sea objetivo de esta asignatura, comentaremos que las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales son familias de funciones que dependen de infinitas constantes, por lo que su espacio de soluciones tiene dimensión infinita.

Sin embargo, no necesitaremos encontrar todas las soluciones, sino sólamente una, que será la que usemos como factor integrante. Recordamos que este no puede anularse.

Para buscar dicha solución, lo que haremos será que el factor integrante en realidad será una función que dependerá de una única variable, la cual puede ser a su vez función de x y de y. Es decir, podemos buscar factores integantes que dependan de:

- solo x: $\mu(x,y)=m(x)$.
- solo y: $\mu(x,y)=m(y)$.
- de la suma de x e y: $\mu(x,y)=m(x+y)$.
- del producto de x e y: $\mu(x,y)=m(x\cdot y)$.
- del cuadrado de la norma del vector (x,y): $\mu(x,y)=m(x^2+y^2)$.

En general, dada cualquier[13] función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y una función $m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, podemos tomar como factor integrante la función $\mu:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada como resultado de la composición:

$$\begin{gathered}\mu=m\circ f\\ (x,y)\xmapsto{f}f(x,y)\xmapsto{m}m(f(x,y))\end{gathered}$$

[13]Cualesquiera funciones f y m que tras realizar la composición nos permitan tener que μ sea un factor integrante.

Sin embargo, los de la lista anterior son los más comunes y los más útiles en los problemas a resolver, aunque podríamos también encontrarnos un problema que se resuelva con un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = m(47x^8 + 27y^2 - 4)$, por ejemplo.

Observación. Las 4 primeras "formas" de posibles factores integrantes pueden parecer tener sentido por la sencillez de sus fórmulas. Sin embargo, la quinta de ellas parece ser más rara. Resulta que en el siglo XIX había muchos problemas geométricos que planteaban ecuaciones diferenciales a resolver, y dichos problemas ahora han sido olvidados pero se han mantenido las ecuaciones diferenciales en diversos libros.

De esta forma, en muchos de esos problemas intervenía la distancia de un punto al origen, fórmula que se haya en la expresión $\mu(x,y) = m(x^2 + y^2)$.

Recomendamos probar primero con las 4 "formas" de factores integantes de la lista superior y si en algún caso nos atrancamos con una ecuación, buscar un factor integrante de la última "forma".

Cabe destacar que en la notación clásica se llama a la función de una variable que usamos para definir μ (es decir, m), también como μ, notación que no usamos por ser confusa.

Ejemplo. Veamos varios ejemplos de distintos factores integrantes, con la finalidad de que nos quede claro cómo es que se definien estos, para entender completamente los factores integrantes:

1. En primer lugar, discutimos el caso del factor integrante

$$\mu(x,y) = e^x$$

Resulta que lo que hacíamos era tomar la función

$$m(\xi) = e^\xi$$

Y quedarnos con la función resultado de la composición

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \stackrel{\pi_1}{\longmapsto} & x & & \\ & & \xi & \stackrel{m}{\longmapsto} & e^\xi \end{array}$$

2. Si ahora consideramos:

$$\mu(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$$

Lo que hacemos es tomar la función

$$m(\xi) = \operatorname{sen}(\xi)$$

Y tomar μ como resultado de la composición

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \stackrel{\phi}{\longmapsto} & x+y & & \\ & & \xi & \stackrel{m}{\longmapsto} & \operatorname{sen}(\xi) \end{array}$$

donde hemos usado la función $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x,y) = x + y$.

3. Análogamente, si consideramos ahora
$$\mu(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$
Podemos tomar
$$m(\xi) = \frac{1}{\xi}$$
Y tomar μ como resultado de la composición
$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \overset{\psi}{\longmapsto} & x^2+y^2 & & \\ & & \xi & \overset{m}{\longmapsto} & \dfrac{1}{\xi} \end{array}$$
donde hemos usado la función $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x,y) = x^2+y^2$.

Finalmente, para cada "forma" de factor integrante tenemos que ver qué condiciones ha de cumplir la ecuación diferencial de partida para ver si es o no posible buscar un factor de dicha forma que nos permita resolver la ecuación.

Factor integrante que solo depende de x

Ahora, buscaremos qué condición deben cumplir las ecuaciones diferenciales para poder ser resueltas por un factor integrante del tipo $\mu(x,y) = m(x)$.

Anteriormente, vimos que la fórmula (3.7) podía traducirse (haciendo un abuso de la notación) en
$$\mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y)$$
y que lo que teníamos que hacer era resolver dicha ecuación en derivadas parciales, buscando una función μ. En este caso, estamos buscando una función de la forma $\mu(x,y) = m(x)$, con lo que:
$$\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) = m'(x) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$
Y podemos ya sustituir en la ecuación en derivadas parciales, obteniendo que:
$$-m'(x)Q = m(x)(Q_x - P_y)$$
despejando para dejar a un lado lo que depende de m y al otro lo que depende de P y Q (este paso hace necesario suponer que $Q(x,y) \neq 0 \ \forall (x,y) \in \Omega$):
$$\frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$$
Con lo que podremos encontrar un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = m(x)$ si y solo si la ecuación diferencial dada cumple que el cociente:
$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)}{Q(x,y)}$$

sea una expresión que solo dependa de x en todo Ω, a la que notamos por $f(x)$ (además, es necesario que $Q(x,y) \neq 0\ \forall (x,y) \in \Omega$). En cuyo caso, estaremos ante una ecuación diferencial lineal homogénea:

$$m' = m \cdot f$$

con lo que sus soluciones son de la forma:

$$m(\xi) = e^{F(\xi)}$$

siendo F una primitiva de f, y ya podemos calcular μ como $m \circ \pi_1$.

Ejemplo. Consideremos la ecuación lineal completa:

$$b(t) + a(t)x - x' = 0$$

Siendo $a, b : J \to \mathbb{R}$ funciones continuas en un intervalo abierto $J \subseteq \mathbb{R}$.
De esta forma, tenemos funciones $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$ dadas por:

$$P(t,x) = b(t) + a(t)x \qquad Q(t,x) = -1$$

La condición de exactitud con esta nueva notación queda ahora como:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) = a(t) \neq 0 = \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x) \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

Con lo que una ecuación lineal completa cualquier no es exacta, pero veamos que sí que acepta un factor integrante del tipo $\mu(t,x) = m(t)$. Como hemos visto anteriormente, esto pasará si (tenemos que $Q(t,x) = -1 \neq 0\ \forall (t,x) \in J \times \mathbb{R}$):

$$\frac{P_x - Q_t}{Q} = f(t)$$

Es decir, si dicho cociente es función únicamente de t. Sustituyendo:

$$\frac{a(t)}{-1} = f(t)$$

Obtenemos un cociente que es función de t, con lo que por la teoría vista, sabemos que existe el factor integrante μ, que sólo depende de t, cuya función m vendrá dada por:

$$m(\xi) = e^{-A(\xi)}$$

Siendo A una primitiva de a. De esta forma, podemos multiplicar la ecuación lineal completa de partida por $\mu(t,x) = e^{-A(t)}$, obteniendo una ecuación exacta:

$$e^{-A(t)}b(t) - e^{-A(t)}(a(t)x - x') = b(t)e^{-A(t)} + \frac{d}{dt}\left(e^{-A(t)}x\right) = 0$$

Factor integrante que solo depende de $x^2 + y^2$

De la misma forma que hicimos para $\mu(x, y) = m(x)$, razonamos ahora de forma análoga para buscar qué condición es la que tiene que cumplir una ecución diferencial para admitir un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = m(x^2 + y^2)$.

Para ello, al igual que hicimos en la sección anterior, calcularemos primero las derivadas parciales de μ:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y) = 2xm'(x^2 + y^2) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y) = 2ym'(x^2 + y^2) \qquad \forall (x, y) \in \Omega$$

Y podemos usar estas fórmulas en la ecuación

$$\mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y)$$

obteniendo que:

$$[2yP - 2xQ]m'(x^2 + y^2) = m(x^2 + y^2)[Q_x - P_y]$$

y si ahora dejamos a un lado todo lo que depende de m y todo lo que depende de P y Q (este paso nos hace suponer que $yP(x, y) - xQ(x, y)$ no puede anularse, para cualquier $(x, y) \in \Omega$):

$$\frac{m'(x^2 + y^2)}{m(x^2 + y^2)} = \frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ}$$

Con lo que podremos encontrar un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = m(x^2+y^2)$ si y solo si la ecuación diferencial dada cumple que el cociente:

$$\frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y)}{2yP(x, y) - 2xQ(x, y)}$$

sea una expresión que solo dependa de $x^2 + y^2$ en todo Ω, a la que denotaremos por $f(x^2 + y^2)$ (además, $yP(x, y) - xQ(x, y) \neq 0 \ \forall (x, y) \in \Omega$). En cuyo caso, volveremos a estar ante una ecuación diferencial lineal homogénea:

$$m' = m \cdot f$$

con lo que sus soluciones serán de la forma:

$$m(\xi) = e^{F(\xi)}$$

siendo F una primitiva de f, y ya podemos calcular μ como:

$$\mu = m \circ \phi$$

Siendo $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función dada por

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Ejemplo. Volviendo al ejemplo de la espiral logarítmica:

$$x - y + (y + x)y' = 0$$

Este vuelve a ser un ejemplo de ecuación diferencial que no es exacta:

Sean $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$P(x, y) = x - y \qquad Q(x, y) = y + x \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

se tiene que $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$, y si comprobamos la condición de admisibilidad:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -1 \neq 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

vemos que no se cumple.

Veamos si esta ecuación admite un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = m(x^2 + y^2)$. Para ello, calculamos el cociente que hemos visto en este apartado, de forma que si está en función de $x^2 + y^2$, entonces sí será posible calcular dicho factor integrante. Trabajando en[14] $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ} = \frac{1 + 1}{2y(x - y) - 2x(y + x)} = \frac{1}{xy - y^2 - xy - x^2} = \frac{-1}{x^2 + y^2}$$

Y llegamos a un cociente que depende de $x^2 + y^2$:

$$f(x^2 + y^2) = \frac{-1}{x^2 + y^2}$$

De esta forma, tomamos m como (gracias a la teoría desarrollada):

$$m(\xi) = e^{-\ln \xi} = \frac{1}{\xi}$$

Con lo que el factor integante para este caso será:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Y si multiplicamos la ecuación de la espiral logarítmica por μ obtendremos una ecuación exacta (compruébese).

[14] Para hallar Ω lo que hemos hecho ha sido calcular primero el cociente, calcular luego dónde no se anula el denominador de dicho cociente y, para que quede bonito, decir el dominio antes de calcular el cociente.

4. Ecuación Lineal de Orden Superior

Antes de introducir el concepto de ecuación lineal de orden superior, primero es necesario generalizar una definición que hicimos al inicio de este documento:

Definición 4.1 (Ecuación Diferencial de orden m y solución)**.** Una ecuación diferencial de orden $m \in \mathbb{N}$ ($m \geqslant 1$) viene dada por una función

$$\begin{array}{rrcl} \Phi: & D \subset \mathbb{R}^{m+2} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x_0, x_1, \dots, x_m) & \longmapsto & \Phi(t, x_0, x_1, \dots, x_m) \end{array}$$

continua donde $D \subset \mathbb{R}^{m+2}$ es un abierto conexo de $\mathbb{R}^{m+2}$.
Una solución de dicha ecuación diferencial será una función $x : I \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo abierto tal que:

(I) x es m veces derivable en I.

(II) $(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(m)}(t)) \in D \ \forall t \in I$.

(III) $\Phi(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(m)}(t)) = 0 \ \forall t \in I$.

En esta sección, estaremos interesados en resolver ecuaciones lineales de orden superior. Es decir, las que son de la forma:

$$x^{(m)} + a_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \qquad m \geqslant 1 \tag{4.1}$$

con $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, b : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas en un intervalo abierto.

En dicho caso, estaremos ante una ecuación lineal de orden m.

Definición 4.2. Una ecuación diferencial lineal se dice:

- Homogénea si $b(t) = 0 \ \forall t \in I$.
- Completa si $b(t) \neq 0$ para algún $t \in I$.

Ejemplo. Mostramos a continuación varios ejemplos de ecuaciones lineales que motivarán su estudio durante este Capítulo.

1. El caso $m = 1$ ha sido ya estudiado anteriormente, se trata de la ecuación lineal de primer orden:
$$x' + a_0(t)x = b(t)$$
Por tanto, esta sección estará dedicada a las ecuaciones lineales de orden 2 o mayor. Recordamos que las ecuaciones diferenciales de orden 2 tienen una gran importancia en la física, gracias a la conocida 2^a Ley de Newton: $F = m \cdot a$.

2. La ecuación del oscilador armónico es una ecuación que representa la posición x de un cuerpo atado a una pared con un muelle a lo largo del tiempo t, tal y como mostramos en la Figura 4.1:
$$m\ddot{x} + kx = 0$$
donde m es la masa del cuerpo y k es la constante de elasticidad del muelle, de forma que si el muelle es muy duro k será muy grande y si es muy blando, k tendrá un valor pequeño.

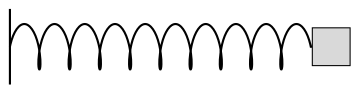


Figura 4.1: Muelle atado a la pared.

De esta forma, si estiramos el muelle hacia la derecha, aparecerá una fuerza en sentido contrario. Análogamente, si comprimimos el muelle hacia la izquierda, volverá a aparecer una fuerza en sentido contrario. Se dice que la fuerza de un muelle es una fuerza recuperadora.

La fórmula se deduce a partir de la Segunda Ley de Newton ($F = m \cdot a$) y de la Ley de Hooke, que nos indica que la fuerza de un muelle para una posición del cuerpo x es directamente proporcional a dicha posición:
$$F(x) = -kx$$
De esta forma:
$$\left.\begin{array}{r} F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x} \\ F(x) = -kx \end{array}\right\} \Longrightarrow m\ddot{x} = -kx \Longleftrightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$
Que es una ecuación diferencial lineal de orden 2, ya que como $m \neq 0$, podemos dividir la expresión entre m, obteniendo que:
$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$
Por lo que trabajamos con las funciones $a_0, a_1, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por:
$$a_1(t) = 0 \qquad a_0(t) = \frac{k}{m} \qquad b(t) = 0 \qquad t \in \mathbb{R}$$

3. Como un último ejemplo de ecuación lineal que se maneja en la práctica y que es de un orden mayor que 2, en ingeniería se trabaja mucho con la ecuación que describe las vibraciones de un puente a lo largo del tiempo, que resulta en una ecuación de cuarto grado.

Una vez motivado el uso e importancia de las ecuaciones lineales de orden superior, pasamos a desarrollar la teoría matemática que sustenta este tipo de ecuaciones, la cual está basada en un resultado que enunciaremos pero que se demostrará en el siguiente Capítulo (por no disponer de las herramientas necesarias por ahora).

Este resultado es un teorema que nos da la existencia y unicidad de una solución para cada tipo de ecuación lineal de orden m (siendo m cualquier número natural mayor o igual que 1), una vez fijada una condición inicial que esta función solución ha de cumplir.

Definición 4.3 (Condición inicial)**.** Dada una ecuación diferencial lineal de orden m cuyos coeficientes están definidos en un intervalo I, dar una condición inicial para dicha ecuación será dar un punto $t_0 \in I$ y m valores $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{R}$ de forma que exijamos que toda solución $x : J \to \mathbb{R}$ (con $J \subseteq I$) de dicha ecuación, además de ser solución, ha de cumplir la condición inicial. Es decir, x ha de cumplir:

$$x(t_0) = \alpha_0, \qquad x'(t_0) = \alpha_1, \qquad \ldots, \qquad x^{(m-1)}(t_0) = \alpha_{m-1}$$

a parte de ser solución de dicha ecuación diferencial.

De esta forma, para dar una condición inicial sobre una ecuación lineal de orden m, habrá que exigir m "condiciones" sobre un mismo punto $t_0 \in I$, que serán el valor de la función y de sus sucesivas derivadas (hasta la $(m-1)$-ésima) en dicho punto.

Ejemplo. Para la ecuación del oscilador armónico:

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

1. Una condición inicial es exigir, por ejemplo:

$$x(t_0) = 0 \qquad x'(t_0) = 1$$

   En dicho caso, la condición inicial tiene sentido físico, ya que estaremos diciendo que en el instante t_0, que entendemos como el origen temporal del movimiento:

   - El muelle parte del origen (posición 0) o posición de equilibrio.
   - El muelle comienza con velocidad 1 (por lo que le hemos dado un impulso al muelle).

De forma intuitiva, vemos que una vez dadas una posición y velocidad iniciales al muelle, somos capaces de recrear todo el movimiento que este realizará (de forma sencilla, sabemos que el muelle se estirará y que su elasticidad ejercerá una fuerza en sentido contrario), con lo que seremos capaces de describir su posición x a lo largo del tiempo t, con lo que para dicha condición inicial, se espera un único movimiento del muelle (una única solución de la ecuación diferencial).

2. Por otra parte, la condición inicial

$$x(t_0) = 1 \qquad x'(t_0) = 0$$

establece que:

- El muelle parte en la posición inicial resultado de desplazar el cuerpo conectado al muelle una unidad a la derecha (según la Figura 4.1) de la posición de equilibrio, con lo que el muelle comienza estirado.
- El muelle no tiene velocidad inicial.

En este caso, podemos pensar que una vez comience a pasar el tiempo (se vaya aumentando t de forma progresiva), veremos que se ejercerá una fuerza hacia la izquierda del cuerpo, como resultado de haber estirado el muelle en un inicio, con lo que también seremos capaces de describir un único movimiento para dicho muelle en estas condiciones iniciales.

Este ejemplo nos ha servido para darnos cuenta de que, una vez fijada una condición inicial sobre un movimiento (sobre una ecuación diferencial), seremos capaces de describir la posición del móvil gracias a ese movimiento y dichas condiciones iniciales de forma única.

Por tanto, podemos ya sospechar que dar una condición inicial sobre una ecuación lineal de cualquier orden m nos es suficiente para encontrar una única solución de dicha ecuación, intuición que se manifiesta a través del siguiente teorema.

Teorema 4.1 (Existencia y unicidad de las soluciones)**.** *Dada una ecuación lineal de orden m cuyos coeficientes están definidos en un intervalo I y dados $t_0 \in I$, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{R}$ que conforman una condición inicial para dicha ecuación.*

Entonces, existe una única solución x de dicha ecuación diferencial, definida en todo el intervalo I, que cumple las condiciones iniciales, es decir:

$$x(t_0) = \alpha_0, \qquad x'(t_0) = \alpha_1, \qquad \dots, \qquad x^{(m-1)}(t_0) = \alpha_{m-1}$$

Demostración. La demostración se encuentra en el Teorema 5.8, que presentaremos en el siguiente Capítulo por ser necesario el uso de herramientas que aún no hemos desarrollado. □

Notemos que, a parte de que el teorema nos da la existencia y unicidad de las soluciones para cualquier ecuación lineal de orden m (que no es poco), además nos garantiza que siempre que dicha ecuación lineal esté definida en un dominio $D = I \times \mathbb{R}$, las soluciones estarán siempre definidas en todo el intervalo I, algo que no sucede con las ecuaciones diferenciales que no son lineales.

Ejemplo. La ecuación diferencial con condición inicial:

$$x' = x^2 \qquad x(0) = 1$$

se encuentra definida en el dominio $D = \mathbb{R}^2$, siendo su solución:

$$x(t) = \frac{1}{1-t} \qquad t \in \left]-\infty, 1\right[$$

Esta vemos que no está definida en todo $\mathbb{R}$.

Una vez observada la importancia de que las soluciones están definidas en todo el intervalo I, notemos que el Teorema 4.1 nos asegura que podemos usar las condiciones iniciales para "etiquetar" las soluciones de la ecuación diferencial, tal y como hacíamos en el ejemplo del muelle.

Observación. Cuando definimos una ecuación diferencial lineal de orden m no tuvimos en cuenta un detalle de la definición, el cual mostraremos ahora, una vez visto el Teorema 4.1, y es que en la definición de una ecuación lineal de orden m, no consideramos un coeficiente $a_m(t)$ como sí hacemos con el resto de coeficientes, sino que sólamente consideramos el caso $a_m(t) = 1\ \forall t \in I$.

Notemos que si tenemos una ecuación de la forma:

$$a_m(t)x^{(m)} + a_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

en la que $a_m(t) \neq 0\ \forall t \in I$ (que para nosotros no es lineal de orden m), entonces podemos dividir la ecuación entera entre $a_m(t)$, obteniendo una ecuación diferencial lineal de orden m con coeficientes distintos (todos ellos divididos entre a_m).

Por tanto, este tipo de ecuaciones diferenciales no serán problema para nosotros, pero sí lo serán aquellas en las que $\exists t \in I$ tal que $a_m(t) = 0$, ya que dichas ecuaciones diferenciales no serán para nosotros ecuaciones lineales. Esto se debe a que para este tipo de ecuaciones, el Teorema (4.1) no es cierto, tal y como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial

$$tx' - x = 0$$

con dominio $D = \mathbb{R}^2$, que tiene como familia de funciones solución las rectas que pasan por el origen, tal y como vemos en la Figura 4.2:

$$x(t) = ct \qquad c \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

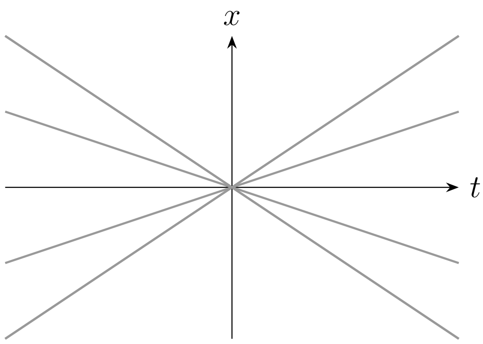


Figura 4.2: Familia de rectas que pasan por el origen.

Sin embargo, esta ecuación diferencial no es una ecuación lineal de orden 1, ya que tenemos como coeficientes $a_0, a_1, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dados por

$$a_0(t) = -1 \qquad a_1(t) = t \qquad b(t) = 0 \qquad t \in \mathbb{R}$$

y tenemos que $a_1(0) = 0$.

Como hemos dicho anteriormente, no consideramos a este tipo de ecuaciones diferenciales como ecuaciones diferenciales lineales, y lo hacemos por una razón justificada, y es que para este tipo de ecuaciones podemos encontrar condiciones iniciales que no nos den una única solución, de forma que a veces tengamos varias soluciones para una misma condición inicial, así como que en otros casos directamente no exista una solución:

1. Si consideramos como condición inicial $x(0) = 0$, entonces tendremos infinitas soluciones de la ecuación diferencial, ya que todas las rectas de la familia anterior pasan por el punto $(0, 0)$, con lo que todas ellas cumplen la ecuación inicial y son solución de la ecuación diferencial. No se cumple la unicidad.

2. Si ahora consideramos como condición inicial $x(0) = 1$, entonces no tenemos ninguna solución para la ecuación diferencial que cumpla esta condición inicial, ya que la recta vertical que pasa por el origen no forma parte de dicha familia de soluciones de la ecuación, por no ser una función. No se cumple la existencia.

Por tanto, la definición de ecuación diferencial lineal va asociada al Teorema 4.1, con lo que es otro indicador de su importancia.

Sin embargo, si queremos trabajar ante este tipo de ecuaciones, como en este caso a_1 solo se anula en un punto, podemos considerar la ecuación lineal de orden 1:

$$x' - \frac{x}{t} = 0$$

definida bien en $D^+ = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, bien en $D^- = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ y en cada caso obtenemos una ecuación lineal.

A pesar de ello, lo que estamos haciendo es quedarnos con parte de las soluciones anteriores de forma que se cumpla la existencia y unicidad, al eliminar toda la recta $t = 0$ del problema.

Ecuación lineal de orden 1

Ya hemos comentado anteriormente que la demostración del Teorema 4.1 la dejamos para el siguiente Capítulo por no estar preparados para realizarla. Sin embargo, podemos ya demostrar un resultado más débil, que nos enuncia el teorema para el caso $m = 1$:

Proposición 4.2 (Existencia y unicidad para ecuaciones lineales de orden 1)**.** *Dada una ecuación lineal de orden 1:*

$$x' + a_0(t)x = b(t)$$

con $a_0, b : I \to \mathbb{R}$ *funciones continuas en un intervalo* I *y dados* $t_0 \in I$*,* $\alpha_0 \in \mathbb{R}$*.*

Entonces, existe una única solución x *de la ecución lineal, definida en todo el intervalo* I *que cumple la condición inicial, es decir:*

$$x(t_0) = \alpha_0$$

Demostración. Necesitamos pues, demostrar la existencia y unicidad de dicha solución x:

Existencia.

Veamos que el problema de valores iniciales

$$x' + a_0(t)x = b(t) \qquad x(t_0) = \alpha_0$$

tiene una solución x que cumple las propiedades enuncidas. Sea pues $x : I \to \mathbb{R}$ una función dada por:

$$x(t) = e^{-A_0(t)}[\alpha_0 + F(t)] \qquad t \in I$$

donde $A_0, F : I \to \mathbb{R}$ son funciones definidas por

$$A_0(t) = \int_{t_0}^{t} a_0(s)\ ds \qquad F(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A_0(s)}b(s)\ ds \qquad t \in I$$

las cuales están bien definidas gracias al Teorema Fundamental del Cálculo, por ser a_0 y $e^{A_0}b$ funciones continuas en I (la segunda por ser producto de una función continua por una composición de funciones continuas), con lo que x está bien definida.

Además, el Teorema Fundamental del Cálculo nos garantiza que las funciones $A_0, F \in C^1(I)$, con lo que $x \in C^1(I)$. Veamos que x cumple la condición inicial y que es solución de la ecuación lineal de orden 1:

- Por una parte, calculamos el valor de $x(t_0)$, teniendo en cuenta que:

$$A_0(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} a_0(s)\ ds = 0$$
$$F(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} e^{A_0(s)}b(s)\ ds = 0$$

con lo que:

$$x(t_0) = e^{-A_0(t_0)}(\alpha_0 + F(t_0)) = e^0(\alpha_0 + 0) = \alpha_0$$

- Por otra, parte, derivamos x para comprobar si cumple con la ecuación diferencial, usando para ello la derivada del producto:

$$x'(t) = -a_0(t)e^{-A_0(t)}[\alpha_0 + F(t)] + e^{-A_0(t)}e^{A_0(t)}b(t) \overset{(*)}{=} -a_0(t)x(t) + b(t)$$

  Donde en $(*)$ hemos aplicado que:

$$x(t) = e^{-A_0(t)}[\alpha_0 + F(t)]$$

Notemos que para que x fuera solución era suficiente con coger como A_0 cualquier primitiva de a_0 y como F cualquier primitiva de $e^{A_0}b$. Sin embargo, para que x cumpliera la condición inicial, hemos tomado aquellas integrales indefinidas centradas en t_0.

Unicidad.
Supongamos que tenemos dos soluciones de la ecuación lineal de orden 1, las funciones $x_1, x_2 : I \to \mathbb{R}$ que cumplen con la condición inicial, es decir:

$$x_1(t_0) = \alpha_0 = x_2(t_0)$$

y tratamos de demostrar que dichas funciones son iguales. Para ello, definimos $y : I \to \mathbb{R}$ dada por:

$$y(t) = x_1(t) - x_2(t) \qquad t \in I$$

Como x_1, x_2 son soluciones de la ecuación diferencial lineal, entonces son de clase $C^1(I)$, con lo que $y \in C^1(I)$ y podemos calcular su derivada:

$$\begin{aligned} y'(t) &= x_1'(t) - x_2'(t) = -a_0(t)x_1(t) + \cancel{b(t)} + a_0(t)x_2(t) - \cancel{b(t)} \\ &= -a_0(t)(x_1(t) - x_2(t)) = -a_0(t)y(t) \qquad \forall t \in I \end{aligned}$$

De esta forma, si x_1 y x_2 eran soluciones de la ecuación lineal completa, resulta que y es solución de la ecuación lineal homogénea asociada a dicha ecuación.

Además, resulta que y cumple con la condición inicial $y(t_0) = 0$:

$$y(t_0) = x_1(t_0) - x_2(t_0) = \alpha_0 - \alpha_0 = 0$$

Con vistas a demostrar que y es constantemente igual a 0, lo que haremos será resolver la ecuación diferencial

$$y' + a_0(t)y = 0$$

buscando un factor integrante para dicha ecuación. En el capítulo anterior, vimos que un factor integante para esta ecuación era $\mu(t, x) = e^{A_0(t)}$, con lo que multiplicamos la ecuación diferencial, obteniendo que:

$$e^{A_0(t)}y'(t) + a_0(t)e^{A_0(t)}y(t) = 0$$

con lo que estamos ante una ecuación exacta, de forma que podemos pensar dicha expresión como la derivada de una función de una variable:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{A_0(t)}y(t)\right) = 0$$

Como consecuencia, tenemos que las soluciones de la ecuación diferencial son de la forma:

$$e^{A_0(t)}y(t) = c \qquad c \in \mathbb{R} \quad t \in I$$

Sin embargo, como no buscamos todas las soluciones, sólo buscamos aquella que cumple que $y(t_0) = 0$, llegamos a que $c = 0$, con lo que la expresión de la función y es:

$$y(t) = 0 \qquad \forall t \in I$$

Concluimos que $x_1(t) = x_2(t)$ $\forall t \in I$.

□

La demostración para el caso $m = 1$ no es difícil, por lo que nos preguntamos qué es lo que hace que al pasar a cualquier m esta se complique.

Ecuación lineal de orden 2

Resulta que a partir de las ecuaciones lineales de orden 2 no podemos encontrar una fórmula que nos describa las soluciones de la ecuación lineal. Veremos ahora una breve justificación de por qué no, aunque no ahondaremos mucho en el problema.

Puede demostrarse que la ecuación de Riccati (estudiada anteriormente) no tiene fórmula, así como que cualquier ecuación lineal de segundo orden puede pasarse a una ecuación de Riccati. Dada una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$$

con $a_0, a_1 : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Resulta que hay una relación entre esta ecuación y la de Riccati de primer orden, ya que si cogemos $x : J \to \mathbb{R}$ una solución de dicha ecuación diferencial definida en un intervalo abierto $J \subseteq I$ en el que $x(t) \neq 0$ $\forall t \in J$, entonces, podemos definir $y : J \to \mathbb{R}$ dada por:

$$y(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} \qquad t \in J$$

Que es de clase $C^1(J)$, por ser $x \in C^2(J)$ y $x(t) \neq 0$ $\forall t \in J$. Derivando:

$$y' = \frac{x''x - (x')^2}{x^2}$$

Ahora, utilizamos que x es solución de la ecuación lineal de segundo orden lineal homogénea:

$$y' = \frac{x''x - (x')^2}{x^2} = \frac{(-a_1x' - a_0x)x - (x')^2}{x^2} \overset{(*)}{=} -a_1y - a_0 - y^2$$

Donde en $(*)$ usamos que $y = \frac{x'}{x}$. Con lo que y es una función que cumple:

$$y' = -a_1(t)y - a_0(t) - y^2$$

Que es una ecuación de Riccati.

Como la ecuación de Riccati no se puede resolver en general (no tiene fórmula), podemos pensar que la ecuación lineal homogénea de segundo grado tampoco se puede resolver en general, con lo que no hay esperanza de encontrar una fórmula general.

Resulta que, conocida una solución de la ecuación lineal de segundo orden, sí que podemos encontrar sus soluciones.

Una ecuación lineal de tercer orden puede pasar a una de segundo orden, con lo que de esta en adelante también vemos que no hay mucha expectativa a poder hallar una fórmula para ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor que 1, sino que el camino para resolverlas será mucho más teórico.

A pesar de ello, si tenemos una ecuación de la forma (4.1) en la que los coeficientes son funciones constantes, entonces sí que podremos hayar una fórmula para la misma, tal y como veremos próximamente.

4.1. Espacio vectorial de las funciones

Con el objetivo de desarrollar la teoría necesaria para aprender a resolver las ecuaciones diferenciales lineales, hacemos un breve repaso de álgebra lineal, viendo conceptos que ya se dieron en las asignaturas de Geometría I y Geometría II. Las proposiciones que carezcan de demostración se dejan como ejercicio al lector, con la finalidad de respasar dichos conceptos.

Definición 4.4 (Espacio vectorial)**.** Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un conjunto no vacío V dotado de las operaciones:

- Suma
$$\begin{array}{rccl} + : & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array}$$

- Producto por escalares
$$\begin{array}{rccl} \cdot : & \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V \\ & (a, u) & \longmapsto & a \cdot u \end{array}$$

de forma que $(V, +)$ es un grupo conmutativo o abeliano y el producto por escalares cumple las propiedades:

- Pseudo-asociativa: $\quad a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u \qquad \forall a, b \in \mathbb{K}, u \in V$
- Existencia de un elemento neutro: $\quad \exists e \in \mathbb{K} \mid e \cdot u = u \qquad \forall u \in V$

- Distributiva respecto de la suma vectorial:

$$a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v \qquad \forall a \in \mathbb{K}, u, v \in V$$

- Distributiva respecto de la suma escalar:

$$(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u \qquad \forall a, b \in \mathbb{K}, u \in V$$

Repasado el concepto de espacio vectorial, en esta sección nos interesaremos por el conjunto de todas las aplicaciones sobre un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$, por lo que definiremos el siguiente conjunto por comodidad:

Definición 4.5. Dado un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$, definimos el conjunto:

$$\mathbb{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ es una aplicación}\}$$

Podemos pensar en $\mathbb{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ también como en el conjunto de todas las curvas en explícitas.

Proposición 4.3. *El conjunto $\mathbb{F}(I, \mathbb{R})$ junto con la suma y el producto por escalares:*

$$+ : V \times V \to V \qquad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$

dados por:

$$\begin{array}{rcl} (f + g)(t) & = & f(t) + g(t) \\ (\lambda \cdot f)(t) & = & \lambda \cdot (t) \end{array} \qquad \forall t \in I \qquad f, g \in \mathbb{F}(I, \mathbb{R}) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Proposición 4.4. *Dado un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$:*

- *El conjunto de las funciones continuas definidas en I es un subespacio vectorial de $\mathbb{F}(I, \mathbb{R})$.*
- *El conjunto de las funciones de clase $C^k(I)$ definidas en I es un subespacio vectorial de $\mathbb{F}(I, \mathbb{R})$, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

4.1.1. Independencia lineal de funciones

Repasaremos el concepto de la independencia lineal entre vectores en un espacio vectorial, concepto ya conocido pero que se manifiesta de formas distintas en relación al espacio en el que nos encontremos. Repasamos su definición:

Definición 4.6 (Independencia lineal)**.**
Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y dados $v_1, \ldots, v_k \in V$, se dice que son linealmente independientes cuando, dados $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, entonces:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$$

Es decir, que el vector 0 sólo acepta una única representación como combinacion lineal de dichos vectores.

En nuestro contexto, dadas $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, la independecia lineal de esas funciones quiere decir que, dadas $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k = 0$$

Es decir, que se verifique:

$$\lambda_1 f_1(t) + \cdots + \lambda_k f_k(t) = 0 \qquad \forall t \in I$$

Entonces, tengamos que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Definición 4.7 (Generalización para cualquier cardinalidad)**.**
Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, sea $S \subseteq V$ un conjunto de vectores, diremos que los vectores de S son linealmente independientes si, para todo subconjunto finito $F \subseteq S$, los vectores de F son linealmente independientes.

Notemos que esta definición de independencia lineal para conjuntos de vectores de cualquier cardinalidad generaliza el concepto de independencia lineal para un conjunto finito de vectores, ya que siempre que tengamos k vectores linealmente independientes, si nos quedamos con un subconjunto de longitud menor o igual que k de dichos vectores, estos seguirán siendo linealmente independientes.

La independencia lineal de funciones depende del intervalo I, ya que podemos encontrar funciones linealmente independientes en un intervalo J con $I \subsetneq J$ de forma que al restringirnos al intervalo I sean linealmente dependientes (basta considerar dos funciones que coincidan en todo el intervalo I y que haya algún punto de J en el que no coincidan).

Este suceso se da porque la independencia lineal va ligada al espacio vectorial en el que nos encontremos, con lo que cuando hablemos de independencia lineal de varios vectores habrá que especificar el espacio vectorial en el que nos encontramos. En nuestro caso, como estaremos trabajando sobre el espacio vectorial $\mathbb{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, será suficiente con especificar el intervalo I.

Proposición 4.5. *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Si $S \subseteq V$ es un subespacio vectorial del mismo, dados $f_1, \ldots, f_k \in V$:*

$$f_1, \ldots, f_k \text{ son linealmente independientes en } S \Longleftrightarrow \text{ lo son en } V$$

Independencia lineal por derivación

Buscamos ahora un método para comprobar si un conjunto de funciones es linealmente independiente. Por tanto, dadas $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$\lambda_1 f_1(t) + \cdots + \lambda_k f_k(t) = 0 \qquad \forall t \in I$$

Buscamos averiguar el valor de las constantes λ_i. Notemos que, si suponemos que las funciones f_i son derivables al menos una vez, obtenemos que:

$$\lambda_1 f_1'(t) + \cdots + \lambda_k f_k'(t) = 0 \qquad \forall t \in I$$

Sin embargo, podemos generalizar esta igualdad, ya que si suponemos que las funciones son derivables h veces para algún $h \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\lambda_1 f_1^{(h)}(t) + \cdots + \lambda_k f_k^{(h)}(t) = 0 \qquad \forall t \in I$$

Recordemos que tratábamos de encontrar el valor de las constantes λ_i. De esta forma, vemos que si suponemos que todas las funciones f_i con $i \in \{1, \ldots, k\}$ son derivables $k-1$ veces, podemos encontrar k ecuaciones lineales de forma que tengamos k incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}
\lambda_1 f_1(t) & + & \cdots & + & \lambda_k f_k(t) & = & 0 \\
\lambda_1 f_1'(t) & + & \cdots & + & \lambda_k f_k'(t) & = & 0 \\
\lambda_1 f_1''(t) & + & \cdots & + & \lambda_k f_k''(t) & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\lambda_1 f_1^{(k-1)}(t) & + & \cdots & + & \lambda_k f_k^{(k-1)}(t) & = & 0
\end{array}\right.$$

Así, no es que tengamos un sistema de ecuaciones lineales que nos permita hayar el valor de los λ_i, sino que tenemos un sistema de ecuaciones lineales para cada $t \in I$ con las mismas incógnitas.

Sin embargo, al tratarse de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo, una solución del mismo siempre es $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$, con lo que bastará ver que el sistema es compatible determinado para algún $t \in I$, para concluir que para dicho t la solución es única, con lo que como para dicho t solo sirve la solución de todos los λ_i iguales a 0, la única solución posible para todos los t es esta misma.

En resumen, con ver que el determinante de la matriz de coeficientes del sistema para algún $t \in I$ es distinto de 0, entonces sabremos que el sistema de ecuaciones lineales superior es compatible determinado, y que una solución suya es $\lambda_i = 0$ $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, con lo que las funciones $f_1, \ldots, f_k$ eran linealmente independientes.

Con esta premisa, motivamos la siguiente definición.

Definición 4.8 (Wronskiano)**.**
Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, dadas $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ funciones derivables $k-1$ veces, definimos su Wronskiano como la función $W(f_1, \ldots, f_k) : I \to \mathbb{R}$ dada por:

$$W(f_1, \ldots, f_k)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & \cdots & f_k(t) \\ f_1'(t) & \cdots & f_k'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(t) & \cdots & f_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix} \qquad t \in I$$

Proposición 4.6. *Sean $f_1, \ldots, f_k$ funciones derivables $k-1$ veces en un intervalo abierto I. Si existe $t_0 \in I$ tal que $W(f_1, \ldots, f_k)(t_0) \neq 0$, entonces $f_1, \ldots, f_k$ son linealmente independientes en I.*

Demostración. Con el desarrollo realizado hasta el momento la demostración no sería necesaria, pero la realizamos a modo de resumen.
Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\lambda_1 f_1(t) + \cdots + \lambda_k f_k(t) = 0 \qquad \forall t \in I$$

Entonces, fijado $t \in I$, se cumple que:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}
\lambda_1 f_1(t) & + & \cdots & + & \lambda_k f_k(t) & = & 0 \\
\lambda_1 f_1'(t) & + & \cdots & + & \lambda_k f_k'(t) & = & 0 \\
\lambda_1 f_1''(t) & + & \cdots & + & \lambda_k f_k''(t) & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\lambda_1 f_1^{(k-1)}(t) & + & \cdots & + & \lambda_k f_k^{(k-1)}(t) & = & 0
\end{array}\right. \tag{4.2}$$

y por ser un sistema de ecuacionces lineales homogéneo, se cumple que la solución dada por $\lambda_i = 0\ \forall i \in \{1, \ldots, k\}$ es una solución del mismo (a la que llamaremos solución trivial). Como $W(f_1, \ldots, f_k)(t_0) \neq 0$, el sistema (4.2) es compatible determinado para dicho t_0, con lo que la única solución para dicho t_0 será la trivial.

Por tanto:

$$\lambda_1 f_1(t) + \cdots + \lambda_k f_k(t) = 0 \quad \forall t \in I \quad \Longrightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$$

Concluimos que $f_1, \ldots, f_k$ son linealmente independientes. □

Ejemplo. Mostraremos algunos ejemplos en los que aplicaremos esta última proposición, para demostrar que ciertas aplicaciones son linealmente independientes, todos estos ejemplos trabajando sobre $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- Consideramos las funciones seno y coseno, y veamos que estas son linealmente independientes:

$$W(\cos, \operatorname{sen})(t) = \begin{vmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = \cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1 \neq 0$$

- Consideramos ahora los primeros k monomios: $f_0, f_1, \ldots, f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma que:

$$f_k(t) = t^k \quad k \geqslant 1, \qquad f_0(t) = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

  Veamos que $f_0, f_1, \ldots, f_k$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$:

$$W(f_0, f_1, \ldots, f_k)(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & \cdots & t^k \\ 0 & 1 & 2t & \cdots & kt^{k-1} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & k(k-1)t^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k! \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k! \neq 0$$

- Veamos ahora un ejemplo en el que el Wronskiano se anula en algún punto, en el caso de las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f_1(t) = \cos(t^2)$, $f_2(t) = \operatorname{sen}(t^2)$. Vamos a probar que son linealmente independientes en $\mathbb{R}$:

$$W(f_1, f_2)(t) = \begin{vmatrix} \cos(t^2) & \operatorname{sen}(t^2) \\ -2t\operatorname{sen}(t^2) & 2t\cos(t^2) \end{vmatrix} = 2t(\cos^2(t^2) + \operatorname{sen}^2(t^2)) = 2t$$

  Por tanto, el Wronskiano se anula solo en $t = 0$, pero al ser $W(f_1, f_2)(t) \neq 0$ para cualquier $t \neq 0$, sabemos gracias a la proposición anterior que f_1 y f_2 son linealmente independientes.

Ejemplo. Veamos ahora un ejemplo en el que vemos que el recíproco de la Proposición 4.6 es falso. Es decir, que si tenemos funciones linealmente independientes, no hay nada que impida que su Wronskiano no sea la función constantemente igual a 0. Trabajando en $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, consideramos f_1, f_2 las funciones dadas por:

$$f_1(t) = t^2 \qquad f_2(t) = -|t|t \qquad t \in \mathbb{R}$$

Veamos que estas funciones son linealmente independientes en $\mathbb{R}$, pero que el Wronskiano es 0.

En primer lugar, hemos de ver que f_2 es derivable, algo que se ve fácil si reescribimos su expresión:

$$f_2(t) = -|t|t = \left\{ \begin{array}{rl} -t^2 & t \geqslant 0 \\ t^2 & t < 0 \end{array} \right. \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

luego podemos calcular su derivada:

$$f_2'(t) = \left\{ \begin{array}{rl} -2t & t \geqslant 0 \\ 2t & t \leqslant 0 \end{array} \right\} = -2|t| \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Tenemos que $f_2 \in C^1(\mathbb{R})$, pero que $f_2 \notin C^2(\mathbb{R})$. Ya que aunque la tangente en 0 sea común, se ve que las derivadas segundas no coinciden. Estamos ya listos para calcular el Wronskiano de f_1 y f_2:

$$W(f_1, f_2)(t) = \left| \begin{array}{cc} t^2 & -|t|t \\ 2t & -2|t| \end{array} \right| = -2|t|t^2 + 2|t|t^2 = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sin embargo, es fácil ver que son linealmente independientes, ya que f_1 es la parábola con vértice en el origen que diverge positivamente, mientras que f_2 coincide con f_1 en $\mathbb{R}^-$ y en $\mathbb{R}^+$ coincide con la parábola de vértice 0 que diverge negativamente, tal y como vemos en la Figura 4.3, con lo que son linealmente independientes por coincidir en un subconjunto del dominio y tener valores distintos en otro, luego no podemos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f_1 = \lambda f_2$.

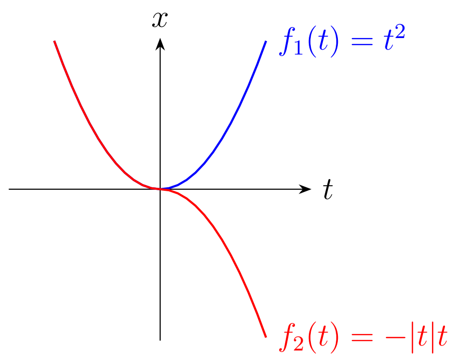


Figura 4.3: Gráficas de f_1 y f_2.

Otra opción de razonar por qué son linealmente independientes es, al igual que antes, partir de la definición. No obstante, para buscar los valores de λ_1 y λ_2 que hacen que $\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ no nos es tan fácil como antes, ya que ahora tenemos que hacer una elección más afinada de los valores de t. Por ejemplo, para $t = -1/2$ y $t = 1/2$, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 1/4 \cdot \lambda_1 - 1/4 \cdot \lambda_2 &= 0 \quad (t = -1/2) \\ 1/4 \cdot \lambda_1 + 1/4 \cdot \lambda_2 &= 0 \quad (t = 1/2) \end{cases}$$

Veamos ahora que este sistema es compatible determinado:

$$\begin{vmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{vmatrix} = \frac{1}{4^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4^2} \cdot (1+1) = \frac{2}{4^2} \neq 0$$

Por tanto, la única solución del sistema es $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, con lo que f_1 y f_2 son linealmente independientes. En los casos anteriores, existía (al menos) un t para el cual la única solución era la trivial, mientras que este caso hemos tenido que elegir dos valores de t distintos.

4.1.2. Aplicaciones lineales

Ahora, haremos un breve repaso de aplicaciones lineales, concepto que ya se trató en las pasadas asignaturas de Geometría o Álgebra lineal, pero que nos servirá ahora para trabajar con las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior.

Definición 4.9 (Aplicación lineal)**.** Dados V, W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, una aplicación lineal es una aplicación $L : V \to W$ de forma que:

$$L(u+v) = L(u) + L(v) \qquad L(\lambda u) = \lambda L(u) \qquad \forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$$

En Geometría, vimos ya que el espacio vectorial de las matrices de orden $n \cdot m$ era isomorfo al espacio vectorial de aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensiones n y m, con lo que esencialmente, son el mismo objeto matemático.

Como a partir de una matriz de orden $n \cdot m$ podemos definir un único sistema de ecuaciones lineales homogéneo de n ecuaciones y m incógnitas, tenemos una correspondencia uno a uno entre las aplicaciones lineales y los sistemas de ecuaciones lineales.

Definición 4.10 (Núcleo)**.** Dada una aplicación lineal $L : V \to W$, definimos:

$$\ker L = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$$

Concepto que también vimos ya en Geometría, pero que ahora podemos entender como un objeto matemático que se corresponde de forma biyectiva con el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, gracias a la correspondencia existente entre las aplicaciones lineales y los sistemas de ecuaciones.

De esta forma, cualquier tipo de ecuación (ya sea diferencial, en diferencias, ...) que tenga una naturaleza lineal puede ser resuelta gracias a la teoría del Álgebra lineal, como una relación de la forma:

$$L(x) = b$$

Para cierta aplicación lineal $L : V \to W$, siendo $x \in V$ y $b \in W$. Así, las soluciones de la ecuación de naturaleza lineal antes comentada vendrán dadas por $\ker L$.

Proposición 4.7. *Dados dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, y una aplicación lineal $L : V \to W$, entonces* $\ker L$ *es un subespacio vectorial de V.*

Esta última proposición nos muestra que en cualquier ecuación lineal de la naturaleza que sea, siempre que tengamos un conjunto de soluciones, este formará un espacio vectorial, con lo que la suma de soluciones también será solución y que el producto de un escalar por una solución seguirá siendo una solución de la ecuación.

4.2. Ecuación lineal homogénea de orden superior

Consideramos una ecuación diferencial lineal homogénea de cualquier orden k:

$$x^{(k)} + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \tag{4.3}$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas en un mismo intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$.

Siguiendo el último razonamiento visto en la Sección 4.1.2, nos interesará buscar dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, así como una aplicación lineal $L : V \to W$ de forma que seamos capaces de transformar cualquier ecuación de la forma (4.3), de naturaleza lineal, en buscar una relación

$$L(x) = b \qquad x \in V \quad b \in W$$

de forma que el conjunto de soluciones de (4.3) coincida con $\ker L$.

Mirando la ecuación (4.3), observamos que en nuestro caso tenemos que coger una aplicación con fórmula:

$$L(x) = x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x$$

como todas las soluciones de la ecuación serán funciones de clase $C^k(I)$, cogeremos como espacio vectorial $V = C^k(I)$, que es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, al ser subespacio de $\mathbb{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Notemos que si exigimos esto sobre x, lo único que podemos esperar de b es que sea una aplicación continua, con lo que tomamos $W = C(I)$, que también es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ por la misma razón, con lo que ya podemos definir la aplicación $L : C^k(I) \to C(I)$ dada por la fórmula superior.

Definición 4.11 (Operador diferencial)**.** Dada una ecuación diferencial lineal homogénea de orden k de la forma (4.3), definimos su operador diferencial[1] como la aplicación $L : C^k(I) \to C(I)$ dada por:

$$L[x] = x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x$$

Es sencillo demostrar que L es lineal.

[1] "Operador" por ser una aplicación que lleva funciones en funciones (se suele denotar con corchetes, tal y como hemos hecho) y "diferencial" por estar relacionado con una ecuación diferencial.

Ejemplo. Dada la ecuación
$$x'' + t^2x' - x = 0$$
Se trata de una ecuación lineal homogénea de orden 2, ya que podemos tomar como coeficientes las funciones $a_0, a_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por:
$$a_1(t) = t^2, \quad a_0(t) = -1 \qquad t \in \mathbb{R}$$
El operador diferencial para esta ecuación es la función $L : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ tal que:
$$L[x] = x'' + a_1x' + a_0x \qquad x \in C^2(\mathbb{R})$$
De esta forma:
$$L[e^t] = e^t + t^2e^t - e^t = t^2e^t \neq 0$$
Con lo que e^t no es solución de la ecuación diferencial.

Dada una ecuación diferencial lineal homogénea de orden k, podemos considerar su operador diferencial L, de forma que podemos tomar:
$$Z = \ker L = \{x \in C^k(I) \mid L[x] = 0\}$$
Que es el conjunto de las soluciones de la ecuación lineal homogénea.

Ejemplo. Volviendo al ejemplo de la ecuación diferencial que describe el movimiento de un muelle:
$$x'' + x = 0$$
Soluciones no triviales de la misma son $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por:
$$\varphi_1(t) = \cos t, \quad \varphi_2(t) = \operatorname{sen} t \qquad t \in \mathbb{R}$$
Por tanto, por ser Z un espacio vectorial, todas las combinaciones lineales de φ_1 y φ_2 (recordemos que anteriormente demostramos que φ_1 y φ_2 eran linealmente independientes) son solución de dicha ecuación:
$$\{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq Z$$
Nos preguntamos ahora por si hay alguna solución de la ecuación diferencial que no sea combinación lineal de las funciones φ_1 y φ_2. Un primer argumento intuitivo de que sí se da la igualdad es que se trata de una ecuación lineal diferencial de segundo orden, por lo que sus soluciones dependerán de dos parámetros, y tenemos ya un espacio vectorial de dimensión 2 de soluciones de la ecuación.

Teorema 4.8. *Dada una ecuación diferencial lineal de orden k, sea L su operador diferencial, consideramos $Z = \ker L$. Entonces:*
$$\dim Z = k$$

Demostración. Para ello, será suficiente con ver que existe un isomorfismo[2] entre Z y un espacio vectorial de dimensión k sobre el mismo cuerpo. El más sencillo que se nos ocurre es $\mathbb{R}^k$. De esta forma, fijado $t_0 \in I$, consideramos $\Phi_{t_0} : Z \to \mathbb{R}^k$ dada por:

$$\Phi_{t_0}(x) = \left(x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(k-1)}(t_0)\right) \qquad x \in Z$$

En primer lugar, Φ_{t_0} es lineal, ya que dados $x, y \in Z$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_{t_0}(\lambda x + y) = \left(\lambda x(t_0) + y(t_0), \lambda x'(t_0) + y'(t_0), \dots, \lambda x^{(k-1)}(t_0) + y^{(k-1)}(t_0)\right) =$$
$$= \lambda \left(x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(k-1)}(t_0)\right) + \left(y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(k-1)}(t_0)\right) = \lambda\Phi_{t_0}(x) + \Phi_{t_0}(y)$$

- Φ_{t_0} es un monomorfismo por la unicidad del problema de valores iniciales vista en el Teorema 4.1, con lo que $\dim Z \leqslant k$.
- Φ_{t_0} es un epimorfismo por la existencia de las soluciones dada por el Teorema 4.1 ante una condición inicial, con lo que $\dim Z \geqslant k$.

Concluimos que $\dim Z = k$. □

Este teorema, aunque parezca tener poca importancia por su fácil demostración, es de gran relevancia, al garantizarnos que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal de orden k debe depender de k parámetros, lo que nos garantiza que no estamos dejando ninguna solución fuera de nuestro espacio vectorial de soluciones.

Ejemplo. Dada la ecuación

$$x'' - x = 0$$

Soluciones de la misma son $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi_1(t) = e^t \qquad \varphi_2(t) = e^{-t} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Y como φ_1 y φ_2 son funciones linealmente independientes, ya que:

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Como sabemos que el conjunto de soluciones tiene dos dimensiones, sabemos que:

$$Z = \{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

Con lo que todas las soluciones de la ecuación serán de la forma:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R}$$

Sin embargo, como las bases no son únicas, podemos coger también como soluciones $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\psi_1(t) = \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \psi_2(t) = \operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \qquad t \in \mathbb{R}$$

[2]Recordamos que un isomorfismo es una aplicación lineal biyectiva entre dos espacios vectoriales.

Que son soluciones por ser $\psi_1, \psi_2 \in Z$, combinación lineal de e^t y e^{-t}. Como también son funciones linealmente independientes (calcúlese su Wronskiano), podemos considerar:

$$Z = \{k_1 \cosh + k_2 \operatorname{senh} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$$

Para esta ecuación, tenemos $\Phi_0 : Z \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\Phi_0(x) = (x(0), x'(0)) \qquad x \in Z$$

de esta forma:

$$\Phi_0(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = (c_1 + c_2, c_1 - c_2) \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Respecto a la base $\{\varphi_1, \varphi_2\}$. Si ahora cambiamos la base y tomamos $\{\psi_1, \psi_2\}$, tenemos:

$$\Phi_0(k_1\psi_1 + k_2\psi_2) = (k_1, k_2) \qquad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Si ahora cambiamos el punto de definición de la función, obtenemos otro isomorfismo. Por ejemplo: $\Phi_1 : Z \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\Phi_1(x) = (x(1), x'(1)) \qquad x \in Z$$

Tenemos en la base $\{\varphi_1, \varphi_2\}$:

$$\Phi_1(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = \left(c_1 \cdot e + \frac{c_2}{2}, c_1 \cdot e - \frac{c_2}{e}\right) \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

y en la base $\{\psi_1, \psi_2\}$:

$$\Phi_1(k_1\psi_1 + k_2\psi_2) = \left(\frac{k_1(e + e^{-1}) + k_2(e - e^{-1})}{2}, \frac{k_1(e - e^{-1}) + k_2(e + e^{-1})}{2}\right) \qquad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Con vistas a demostrar la siguiente proposición, usaremos la notación:

Notación. Dados $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^k$ de forma que:

$$v_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{kj}) \qquad a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, k\}$$

Definimos:

$$\det(v_1|v_2|\ldots|v_k) = \det((a_{ij})_{i,j}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Es decir, el determinante donde ponemos los vectores por columnas.

Proposición 4.9. *Consideramos una ecuación diferencial lineal homogénea cuyos coeficientes están definidos en un intervalo abierto I. Dadas $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in Z$, son equivalentes:*

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ *son linealmente independientes en I.*

ii) $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(t) \neq 0 \;\forall t \in I$.

iii) $\exists t_0 \in I \mid W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(t) \neq 0$.

Demostración. Tenemos, pues, que demostrar que:

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Es evidente.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Por la Proposición 4.6.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Como $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ son linealmente independientes y $\dim Z = k$, el conjunto $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ es una base de Z. Fijado $t_0 \in I$, consideramos el isomorfismo $\Phi_{t_0} : Z \to \mathbb{R}^k$ definido en la demostración del Teorema 4.8.

De esta forma, el conjunto $\mathcal{B}' = \{\Phi_{t_0}(\varphi_1), \ldots, \Phi_{t_0}(\varphi_k)\}$ es una base de $\mathbb{R}^k$, ya que los isomorfismos llevan bases en bases. Como $\mathcal{B}'$ es una base de $\mathbb{R}^k$, entonces:

$$\det(\Phi_{t_0}(\varphi_1)| \ldots |\Phi_{t_0}(\varphi_k)) = W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(t_0) \neq 0$$

Como t_0 era arbitrario, podemos repetir la demostración en cualquier $t \in I$, con lo que obtenemos que $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(t) \neq 0 \;\forall t \in I$.

□

De esta forma, entre las soluciones de una ecuación diferencial, el Wronskiano caracteriza la independencia funcional. Por tanto, si el Wronskiano de dos funciones linealmente independientes en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se anula en algún punto $t_0 \in I$, entonces no pueden ser soluciones de una ecuación diferencial lineal con coeficientes en I (aunque sí lo podrá ser en otro intervalo $J \subset \mathbb{R}$ de forma que $I \not\subset J$).

Ejemplo. Anteriormente vimos que las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f_1(t) = \cos(t^2), \qquad f_2(t) = \operatorname{sen}(t^2) \qquad t \in \mathbb{R}$$

tenian como Wronskiano:

$$W(f_1, f_2)(t) = 2t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Con lo que dichas funciones no pueden ser solución de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden definida en todo $\mathbb{R}$.

Sin embargo, es un buen ejercicio tratar de encontrar la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden que verifican f_1 y f_2, con el fin de encontrar que tiene algún tipo de discontinuidad en $t = 0$, con lo que probablemente solo podamos considerar dicha ecuación diferencial bien en $\mathbb{R}^+$, bien en $\mathbb{R}^-$.

Definición 4.12. Una base de Z es llamada de forma clásica "sistema fundamental".

De esta forma, resolver una ecuación lineal homogénea de orden k es encontrar un sistema fundamental para dicha ecuación.

4.2.1. Fórmula de Jacobi-Liouville

Definición de un determinante

Antes de pasar a ver la fórmula de Jacobi-Liouville, recordaremos primero de Geometría I cuál era la definición del determinante de una matriz cuadrada, ya que necesitaremos primero ver un resultado antes de demostrar dicha fórmula.

Definición 4.13 (Permutación)**.** Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $A = \{1, \ldots, n\}$, una permutación de A es cualquier aplicación biyectiva $\sigma : A \to A$.

De esta forma, dado $n \in \mathbb{N}$, podemos definir el conjunto de todas las permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$:

$$S_n = \{\sigma \mid \sigma \text{ es una permutación de } \{1, \ldots, n\}\}$$

Notación. Si σ es una permutación de $\{1, \ldots, n\}$, es usual denotar a σ por:

$$\sigma = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \ldots\ \sigma(n))$$

Ejemplo. Para $n = 2$, estaremos interesados en el conjunto $A = \{1, 2\}$, con lo que todas las permutaciones de A que podemos considerar son $f, g : A \to A$ dadas por:

$$\begin{array}{ll} f(1) = 1 & f(2) = 2 \\ g(1) = 2 & g(2) = 1 \end{array}$$

Usando la notación anterior, tenemos que:

$$\begin{array}{c} f = (f(1)\ f(2)) = (1\ 2) \\ g = (g(1)\ g(2)) = (2\ 1) \end{array}$$

Con lo que:

$$S_2 = \{(1\ 2), (2\ 1)\}$$

Proposición 4.10 (Grupo de permutaciones)**.** *Se verifica que* $(S_n, \circ)$ *es un grupo.*

Definición 4.14 (Signatura)**.** Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\sigma \in S_n$, decimos que σ es par si a partir de σ podemos obtener la permutación identidad con un número par de trasposiciones (esto es, intercambiar símbolos contiguos de dicha permutación). En caso contrario, diremos que σ es impar.

A partir de esta definición, podemos definir la aplicación signatura, $\varepsilon : S_n \to \{-1, +1\}$ dada por:

$$\varepsilon(\sigma) = \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{Si } \sigma \text{ es par} \\ -1 & \text{Si } \sigma \text{ es impar} \end{array} \right.$$

Ejemplo. Dada la permutación de S_5:

$$\sigma = (3\ 4\ 2\ 1\ 5)$$

Para obtener la permutación identidad tenemos que realizar las trasposiciones:

1. Intercambiar el 4 con el 2: (3 2 4 1 5).
2. Intercambiar el 4 con el 1: (3 2 1 4 5).
3. Intercambiar el 3 con el 2: (2 3 1 4 5).
4. Intercambiar el 3 con el 1: (2 1 3 4 5).
5. Intercambiar el 1 con el 2: (1 2 3 4 5).

Por lo que σ es impar, con lo que $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Definición 4.15 (Determinante)**.** Sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{K})$ una matriz $n \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, definimos el determinante de A como:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Ejemplo. Para una matriz de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Teorema 4.11 (Fórmula de Jacobi-Liouville)**.** *Consideramos una ecuación diferencial lineal homogénea de la forma (4.3). Supongamos que tenemos $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in Z$, y tomamos $t_0 \in I$. Entonces:*

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(t) = W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a_{k-1}(s)\ ds} \qquad \forall t \in I$$

Notemos que la fórmula de Jacobi-Liouville nos da la equivalencia entre *ii*) y *iii*) en la última Proposición, aunque esto ya lo tengamos probado.

Derivada de un determinante

Antes de pasar a demostrar su fórmula, debemos primero averiguar cómo se deriva una función definida a partir de un determinante.

Proposición 4.12. *Dadas $\{f_{ij}\}_{i,j\in\{1,\ldots,k\}}$ funciones definidas en un intervalo abierto I, todas ellas derivables, si definimos $D : I \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$D(t) = \det((f_{ij}(t))_{i,j}) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1k}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2k}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k1}(t) & f_{k2}(t) & \cdots & f_{kk}(t) \end{vmatrix} \qquad t \in I$$

Entones, D es derivable, con derivada:

$$D'(t) = \begin{vmatrix} f'_{11}(t) & \cdots & f'_{1k}(t) \\ f_{21}(t) & \cdots & f_{2k}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k1}(t) & \cdots & f_{kk}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \cdots & f_{1k}(t) \\ f'_{21}(t) & \cdots & f'_{2k}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k1}(t) & \cdots & f_{kk}(t) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \cdots & f_{1k}(t) \\ f_{21}(t) & \cdots & f_{2k}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{k1}(t) & \cdots & f'_{kk}(t) \end{vmatrix}$$

Demostración. A partir de la definición del determinante de una matriz cuadrada, tenemos que:

$$D(t) = \det((f_{ij}(t))_{i,j}) = \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) f_{1\sigma(1)}(t) f_{2\sigma(2)}(t) \dots f_{k\sigma(k)}(t)$$

Con cada f_{ij} una función derivable, por lo que D es derivable, y usando que la derivada de la suma es la suma de las derivadas y la fórmula de la derivada de un producto, llegamos a que:

$$\begin{aligned} D'(t) &= \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma)(f_{1\sigma(1)}(t) f_{2\sigma(2)}(t) \dots f_{k\sigma(k)}(t))' = \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) f'_{1\sigma(1)}(t) f_{2\sigma(2)}(t) \dots f_{k\sigma(k)}(t) + \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) f_{1\sigma(1)}(t) f'_{2\sigma(2)}(t) \dots f_{k\sigma(k)}(t) + \\ &\quad + \dots + \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) f_{1\sigma(1)}(t) f_{2\sigma(2)}(t) \dots f'_{k\sigma(k)}(t) \end{aligned}$$

Que son cada uno de los determinantes anunciados en la proposición. □

Notemos que como el determinante de una matriz cuadrada coincide con el determinante de su matriz traspuesta, la proposición es cierta también derivando por columnas.

Estamos ya listos para realizar la demostración de la Fórmula de Jacobi-Liouville:

Demostración. Probaremos la igualdad anterior probando que las dos funciones son solución de la misma ecuación diferencial lineal homogénea con las mismas condiciones iniciales, con lo que la unicidad del Teorema 4.1 nos da la igualdad funcional[3].

Como $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ son soluciones de una ecuación lineal homogénea de grado k, tenemos que son de clase $C^k(I)$; por lo que su Wronskiano es una función de clase $C^1(I)$, con derivada:

$$\frac{d}{dt} W(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \begin{vmatrix} \varphi'_1 & \cdots & \varphi'_k \\ \varphi'_1 & \cdots & \varphi'_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_2^{(k-2)} & \cdots & \varphi_k^{(k-2)} \\ \varphi_1^{(k-1)} & \cdots & \varphi_k^{(k-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_k \\ \varphi''_1 & \cdots & \varphi''_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_2^{(k-2)} & \cdots & \varphi_k^{(k-2)} \\ \varphi_1^{(k-1)} & \cdots & \varphi_k^{(k-1)} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_k \\ \varphi'_1 & \cdots & \varphi'_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_2^{(k-2)} & \cdots & \varphi_k^{(k-2)} \\ \varphi_1^{(k)} & \cdots & \varphi_k^{(k)} \end{vmatrix}$$

De forma que todos los determinantes son 0 (por tener dos filas iguales), salvo el último, luego:

$$\frac{d}{dt} W(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_k \\ \varphi'_1 & \cdots & \varphi'_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_2^{(k-2)} & \cdots & \varphi_k^{(k-2)} \\ \varphi_1^{(k)} & \cdots & \varphi_k^{(k)} \end{vmatrix}$$

[3]Estrategia inventada por Cauchy.

Ahora, aplicamos que $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ son solución de una ecuación diferencial de la forma (4.3), con lo que:

$$\varphi_i^{(k)} = -a_{k-1}\varphi_i^{(k-1)} - \ldots - a_1\varphi_i' - a_0\varphi_i \qquad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

y podemos sustituir en la fórmula anterior, aplicando la multilinealidad del determinante:

$$\frac{d}{dt}W(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_k \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_k' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(k-2)} & \cdots & \varphi_k^{(k-2)} \\ \varphi_1^{(k)} & \cdots & \varphi_k^{(k)} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{k-1}\begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_k \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_k' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(k-2)} & \cdots & \varphi_k^{(k-2)} \\ \varphi_1^{(k-1)} & \cdots & \varphi_k^{(k-1)} \end{vmatrix} - \ldots - a_1 \cancelto{0}{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_k \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_k' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(k-2)} & \cdots & \varphi_k^{(k-2)} \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_k' \end{vmatrix}} - a_0 \cancelto{0}{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_k \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_k' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(k-2)} & \cdots & \varphi_k^{(k-2)} \\ \varphi_1 & \cdots & \varphi_k \end{vmatrix}} =$$

$$= -a_{k-1}\begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_k \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_k' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(k-2)} & \cdots & \varphi_k^{(k-2)} \\ \varphi_1^{(k-1)} & \cdots & \varphi_k^{(k-1)} \end{vmatrix} = -a_{k-1} \cdot W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$$

Por tanto, el Wronskiano es solución de una ecuación lineal de primer orden, que cumple la condición en t_0:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -a_{k-1}(t)x \\ x(t_0) & = & W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t_0) \end{array} \right.$$

Procedemos ahora a resolver esta ecuación, que sabemos que tiene solución única por lo desarrollado en este Capítulo. La solución es:

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} a_{k-1}(s)\ ds}$$

ya que cualquier ecuación con valor inicial:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & a(t)x \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

tiene por solución:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\ ds}$$

Por tanto, por la unicidad de la solución, concluimos que:

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a_{k-1}(s)\ ds} \qquad \forall t \in I$$

Por ser ambas funciones solución de la misma ecuación diferencial con las mismas condiciones iniciales. $\square$

Reducción del orden

Supongamos que tenemos una ecuación lineal homogénea de segundo orden:

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$$

Con $a_0, a_1 : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Sabemos que no es posible resolverla en general, pero veamos ahora que es posible resolverla si conocemos una solución no trivial[4] de la misma, $\varphi_1(t)$.

Notemos que resolverla equivale a, en estas condiciones, encontrar otra solución particular no trivial de la misma, φ_2 que sea linealmente independiente con φ_1, por lo que $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ sea un sistema fundamental para dicha ecuación.

Buscamos pues una función φ_2 de forma que se tenga:

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = c \cdot e^{-\displaystyle\int_{t_0}^{t} a_{k-1}(t)\ ds}$$

Para algún $c \in \mathbb{R}^*$, $t \in I$. Notemos que:

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2$$

Ejemplo. Como c podemos coger cualquier número. Por ejemplo, si cogemos como φ_1 aquella solución con condición inicial:

$$\varphi_1(t_0) = 2 \qquad \varphi_1'(t_0) = 0$$

Podemos coger como c cualquier número, por ejemplo $c = 77$:

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t_0) = \begin{vmatrix} 2 & \varphi_2(t_0) \\ 0 & \varphi_2'(t_0) \end{vmatrix} = 77$$

Y bastará buscar φ_2.

Ejemplo. Dada la ecuación:

$$t^2x'' - 2x = 0$$

Notemos que no es una ecuación lineal diferencial homogénea de segundo orden, por tener un primer coeficiente a_2, por lo que trabajamos con la ecuación lineal homogénea:

$$x'' - \frac{2}{t^2}x = 0 \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

Donde hemos cogido el dominio $\mathbb{R}^+$ de forma arbitraria (podíamos haber escogido también $\mathbb{R}^-$). Observamos que una solución particular de la ecuación es:

$$\varphi(t) = t^2 \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

Para buscar otra, dado cualquier número (salvo 0), por ejemplo, $6 \in \mathbb{R}$, buscamos una nueva solución x de la ecuación diferencial que cumpla:

$$W(x, \varphi)(t) = 6 \cdot e^{-\displaystyle\int_{t_0}^{t} a_1(t)\ ds} = 6 \cdot e^{-\displaystyle\int_{t_0}^{t} 0\ ds} = 6 \cdot e^0 = 6$$

[4]Notemos que $x \equiv 0$ es solución de cualquier ecuación lineal homogénea.

De esta forma:

$$W(x, \varphi) = \begin{vmatrix} x & \varphi \\ x' & \varphi' \end{vmatrix} = x\varphi' - x'\varphi = 2tx - t^2x' = 6$$

Esta es una ecuación lineal completa de primer orden, que ya sabemos resolver de muchas formas. Hagámoslo mediante su factor integrante, $1/t^4$.s

$$\frac{2}{t^3}x - \frac{1}{t^2}x' = \frac{6}{t^4}$$

Aunque podríamos resolver esta ecuación por el método ya desarrollado en el Capítulo anterior (igualando a 0, obteniendo el potencial, etc.), resolvemos mediante un método más rápido. Observamos que en el término de la derecha tenemos la derivada de un producto, por lo que podemos expresarla:

$$-\frac{2}{t^3}x + \frac{1}{t^2}x' = -\frac{6}{t^4} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2}x\right) = -\frac{6}{t^4}$$

Integrando en ambos términos de la igualdad (y usando como constante de integración 0, puesto que tan solo necestamos una solución):

$$\frac{1}{t^2}x = \frac{2}{t^3}$$

De esta forma:

$$x(t) = \frac{2}{t} \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

Con lo que tenemos ya un sistema fundamental de funciones de la ecuación diferencial planteada:

$$\{\varphi, x\} = \left\{t^2, \frac{2}{t}\right\}$$

Por lo que el espacio de soluciones de la ecuación está conformado por las funciones que son combinación lineal de ellas.

4.3. Ecución lineal completa de orden superior

Ahora, estaremos interesados en las ecuaciones de la forma:

$$x^{(k)} + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

Con $b, a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$.

Para empezar, su conjunto de funciones soluciones ya no conforman un espacio vectorial, debido a que el 0 ya no es solución. Sin embargo, las ecuaciones completas están ligadas a las homogéneas, de forma que cuando se sepa resolver su homogénea asociada (aquella con los mismos coeficientes a_i), se sabe resolver la completa.

Punto de vista geométrico

Dada una aplicación lineal $L : V \to W$ entre dos espacios vectoriales, podemos encontrar las ecuaciones:

$$Lx = b \qquad Lx = 0$$

Siendo la primera la ecuación completa y la segunda su homogénea asociada. Notemos que el conjunto de soluciones de la segunda ecuación es $\ker L$, un espacio vectorial, mientras que el conjunto de soluciones de la primera ecuación es un espacio afín, lo que se refleja en:

$$L^{-1}(b) = x_* + \ker L$$

con $x_* \in L^{-1}(b)$. Es decir, cualquier solución de la ecuación completa ($L^{-1}(b)$) es una solución particular $x_* \in L^{-1}(b)$ más una solución de la ecuación homogénea.

Ejemplo. Dada la ecuación lineal completa:

$$x'' + x = t^2$$

Para buscar una solución particular, como b es un polinomio de segundo grado, tratamos de buscar una solución que sea un polinomio de segundo grado:

$$\varphi(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \qquad \varphi''(t) = 2\gamma \qquad t \in \mathbb{R}$$

con lo que buscamos la igualdad

$$2\gamma + \alpha + \beta t + \gamma t^2 = t^2$$

Igualando coeficiente a coeficiente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\gamma + \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 0 \\ \gamma & = & 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} \alpha & = & -2 \\ \beta & = & 0 \\ \gamma & = & 1 \end{array}\right.$$

Con lo que la solución particular buscada es:

$$\varphi(t) = t^2 - 2 \qquad t \in \mathbb{R}$$

Concluimos que cualquier solución de la ecuación tiene la forma:

$$x(t) = t^2 - 2 + c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ya que sabíamos que $\{\cos, \operatorname{sen}\}$ es un sistema fundamental de la ecuación homogénea asociada a esta ecuación lineal completa.

Proposición 4.13 (Principio de superposición lineal)**.** *Supongamos que sabemos resolver dos ecuaciones completas:*

$$Lx = b_1 \qquad Lx = b_2$$

Con una solución particular de cada una: x_1 y x_2. Entonces, ante la ecuación:

$$Lx = c_1 b_1 + c_2 b_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Una solución de la ecuación será $c_1 x_1 + c_2 x_2$.

Demostración.

$$L[c_1x_1 + c_2x_2] = c_1L[x_1] + c_2L[x_2] \overset{(*)}{=} c_1b_1 + c_2b_2$$

Por lo que $c_1x_1 + c_2x_2$ es solución de $Lx = c_1b_1 + c_2x_2$, donde en $(*)$ hemos usado que x_1 es solución de $Lx = b_1$ y que x_2 es solución de $Lx = b_2$. □

Ejemplo. Si ahora tenemos:

$$x'' + x = t^2 + 2e^t$$

Lo que hacemos es aplicar el principio de superposición lineal:

- La ecuación $x'' + x = t^2$ admite como solución particular $x_1(t) = t^2 - 2$, con $t \in \mathbb{R}$.
- Buscamos una solución para la ecuación $x'' + x = 2e^t$, que puede comprobarse que es $x_2(t) = {}^1\!/_2 \cdot e^t$, con $t \in \mathbb{R}$.

De esta forma, una solución particular para la ecuación anterior es:

$$\varphi(t) = t^2 - 2 + e^t \qquad t \in \mathbb{R}$$

Y para obtener el conjunto total de soluciones, es cualquier función de la forma:

$$x(t) = t^2 - 2 + e^t + c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R}$$

4.4. Ecuación lineal con coeficientes constantes

Estudiaremos ahora las ecuaciones lineales homogéneas[5] de la forma:

$$x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x = 0 \tag{4.4}$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$. Este tipo de ecuaciones las podemos ver de la forma:

$$L[x] = 0$$

Siendo L el operador diferencial para dicha ecuación. Estaremos interesados en el conjunto de soluciones de dicha ecuación, que sabemos ya que es $\ker L$. Para ello, bastará con encontrar un sistema fundamental para $\ker L$, que ya sabemos que ha de estar formado por k funciones linealmente independientes.

Para ello, evaluaremos L en funciones del tipo $e^{\lambda t}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$L[e^{\lambda t}] = e^{\lambda t}(\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0) = e^{\lambda t}P(\lambda)$$

Observamos que nos queda la misma función $e^{\lambda t}$ por un polinomio, que es conocido tras conocer la ecuación diferencial.

[5] Notemos que sabiendo resolver las ecuaciones homogéneas, ya sabemos resolver las completas.

Definición 4.16 (Polinomio característico)**.** Dada una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes de la forma (4.4), definimos su polinomio característico como la función $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$P(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Proposición 4.14. *Sea una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes de la forma (4.4) y sea L su operador diferencial. Fijado $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que:*

$$e^{\lambda t} \in \ker L \Longleftrightarrow \lambda \text{ es raíz del polinomio característico de la ecuación}$$

Demostración.

$$e^{\lambda t} \in \ker L \Longleftrightarrow L[e^{\lambda t}] = e^{\lambda t}P(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow P(\lambda) = 0$$

□

Ejemplo. Se pide resolver la ecuación

$$x'' - 5x' + 6x = 0$$

Para ello, calcularemos su polinomio característico, la función $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Buscamos las raíces de P:

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right.$$

Por tanto, definimos las funciones $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\varphi_1(t) = e^{2t} \qquad \varphi_2(t) = e^{3t} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Estas son linealmente independientes, ya que:

$$\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} = \frac{e^{3t}}{e^{2t}} = e^t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Con lo que no existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_1 = k \cdot \varphi_2$. Por tanto, el sistema fundamental de la ecuación es $\{e^{2t}, e^{3t}\}$. Otra forma de ver que efectivamente son linealmente independientes es la siguiente observación.

Observación. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ todos ellos distintos, sea I un intervalo no trivial, definimos las funciones

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \qquad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t} \qquad \ldots \qquad \varphi_k(t) = e^{\lambda_k t} \qquad t \in I$$

Tenemos que todas ellas son linealmente independientes en $C^k(I)$.

Demostración. Sabemos que $\varphi_i \in C^\infty(I)$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$:

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_k)(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & e^{\lambda_k t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_k e^{\lambda_k t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_k^{k-1} e^{\lambda_k t} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)t} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}$$
$$\overset{(*)}{=} e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)t} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

donde en $(*)$ hemos usado la fórmula del determinante de Vandermonde[6]. □

Observación. Dada una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes de la forma (4.4), si su polinomio característico tiene k raíces reales y distintas $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, entonces $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_k t}\}$ es un sistema fundamental para (4.4).

4.4.1. Raíces complejas del polinomio característico

Ejemplo. Se pide resolver la ecuación

$$x'' + x = 0$$

Para ello, calcularemos su polinomio característico: $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, que no tiene raíces reales, ya que sus raíces son $\pm i$. Sin embargo, nos preguntamos si $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{C}$

$$\varphi_1(t) = e^{it} \qquad \varphi_2(t) = e^{-it} \quad t \in I$$

son funciones solución de la ecuación de alguna forma (algo que responderemos en esta sección). Notemos que, usando la notación trigonométrica:

$$\varphi_1(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t \qquad \varphi_2(t) = \cos t - i \operatorname{sen} t \qquad \forall t \in I$$

De esta forma, ahora trabajamos con ecuaciones lineales de la forma:

$$x^{(k)} + a_{k-1} x^{(k-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 = 0 \tag{4.5}$$

con $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$.
Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, una función $x : I \to \mathbb{C}$ tendrá una parte real x_1 y una imaginaria, x_2:

$$x(t) = x_1(t) + i x_2(t)$$

Aunque el lector posiblemente no esté familiarizado con las funciones complejas, introducimos unos conceptos básicos necesarios para el estudio de esta Sección.

Definición 4.17. Dada una función $x : I \to \mathbb{C}$ y dos funciones $x_1, x_2 : I \to \mathbb{R}$ tales que $x(t) = x_1(t) + i x_2(t)$ $\forall t \in I$, decimos que:

- x es de clase $C^k(I) \iff x_1$ y x_2 son de clase $C^k(I)$. En cuyo caso:

$$x^{(r)}(t) = x_1^{(r)}(t) + i x_2^{(r)}(t) \qquad \forall r \leqslant k, \quad t \in I$$

[6]Vista en Métodos Numéricos I.

- Diremos que x es solución compleja de la ecuación (4.5) si, además de darse $x \in C^k(I)$, se verifica que:

$$x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \ldots + a_1x' + a_0 = 0 \qquad \forall t \in I$$

Ejemplo. Sea $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, consideramos la función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$x(t) = e^{\lambda t} \qquad t \in \mathbb{R}$$

En primer lugar, consideramos la igualdad:

$$e^{\lambda t} = e^{at+ibt} = e^{at}(\cos(bt) + i\operatorname{sen}(bt))$$

Definimos por tanto $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$x_1(t) = e^{at}\cos(bt) \qquad x_2(t) = e^{at}\operatorname{sen}(bt) \qquad t \in \mathbb{R}$$

De esta forma, tenemos que:

$$x(t) = x_1(t) + ix_2(t)$$

Como $x_1, x_2 \in C^\infty$, se verifica que $x \in C^\infty$. Además, se tiene que (compruébese):

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Observación. Si ahora tenemos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ todos ellos distintos, sea I un intervalo no trivial, si definimos las funciones

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \qquad \varphi_2 = e^{\lambda_2 t} \qquad \ldots \qquad \varphi_k(t) = e^{\lambda_k t} \qquad t \in I$$

Tenemos que todas ellas son linealmente independientes.

Definimos:

$$Z_{\mathbb{C}} = \{x : I \to \mathbb{C} \mid x \text{ es solución de (4.5)}\}$$

Que resulta que es un espacio vectorial complejo de dimensión k.

Observación. Si consideramos una ecuación de la forma (4.4) con coeficientes constantes, si cogemos $x_1, x_2 \in Z$, entonces $x_1 + ix_2 \in Z_{\mathbb{C}}$, por ser $Z_{\mathbb{C}}$ un espacio vectorial complejo y $Z \subseteq Z_{\mathbb{C}}$.

Proposición 4.15. *Si $x : I \to \mathbb{C} \in Z_{\mathbb{C}}$ es una solución compleja de (4.4) con $Re(x) = x_1$, $Im(x) = x_2$. Entonces $x_1, x_2 \in Z$.*

Observación. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ cualquiera, si tenemos $v_1, v_2 \in V$ dos vectores linealmente independientes, entonces:

$$\frac{v_1 + v_2}{2}, \ \frac{v_1 - v_2}{2i} \text{ son linealmente independientes}$$

Ejemplo. Resolvamos ahora la ecuación:

$$x'' + x' + x = 0$$

Su polinomio característico será $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$, cuyas raíces son:

$$\lambda_\pm = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Tenemos que $\{e^{\lambda_+ t}, e^{\lambda_- t}\}$ es un sistema fundamental (una base de $Z_\mathbb{C}$). Notemos que se dan las igualdades:

$$\begin{aligned}
e^{\lambda_+ t} &= e^{-t/2}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] \\
e^{\lambda_- t} &= e^{-t/2}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]
\end{aligned}$$

Estamos interesados en buscar otra base más simple a partir de la observación anterior:

$$Re(e^{\lambda_+ t}) = e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \qquad Im(e^{\lambda_+ t}) = e^{-t/2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Con lo que $\{Re(e^{\lambda_+ t}), Im(e^{\lambda_+ t})\}$ es un sistema fundamental.

Ejercicio. Se pide estudiar la ecuación:

$$x'' + cx' + kx = 0 \qquad c, k > 0$$

Ejercicio. La ecuación:

$$x'' + 2x' + x = 0$$

Tiene como raíces del polinomio característico $\lambda = -1$ (raíz doble), con lo que una solución es:

$$x(t) = e^{-t} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Y no sabemos encontrar una solución linealmente independiente. Para encontrarla:

$$x_2(t) = te^{-t} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Si fuera de orden 3, multiplicar por t^2.

5. Sistemas Lineales

Notación. Por comodidad, a lo largo de la sección notaremos al conjunto de matrices de orden $n \times m$ sobre $\mathbb{R}$ por:

$$\mathbb{R}^{n\times m} = M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

Estudiaremos sistemas lineales de primer orden, es decir, ecuaciones de la forma:

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{5.1}$$

Con $A : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ y $b : I \to \mathbb{R}^d$, funciones continuas[1] en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Si notamos por $A = (a_{ij})_{i,j}$, $b = (b_i)$ y $x = (x_i)$ a las correspondientes coordenadas de A, b y x, podemos reescribir (5.1) en forma de sistema, como:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1' & = & a_{11}(t)x_1 & + & \cdots & + & a_{1d}(t)x_d & + & b_1(t) \\ x_2' & = & a_{21}(t)x_1 & + & \cdots & + & a_{2d}(t)x_d & + & b_2(t) \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ x_d' & = & a_{d1}(t)x_1 & + & \cdots & + & a_{dd}(t)x_d & + & b_d(t) \end{array}\right. \tag{5.2}$$

Ejemplo. Supongamos que estamos en la situación de la Figura 5.1, con dos masas m_1 y m_2, y dos muelles con constantes elásticas k_1 y k_2. Supongamos además que a la masa m_2 se le aplica una fuerza $F(t)$.

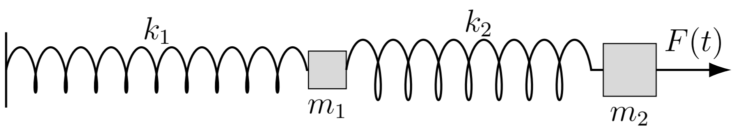


Figura 5.1: Dos masas conectadas por muelles.

Describiremos este sistema de forma matemática describiendo x_1, la distancia de la masa m_1 a su posición de equilibrio; y x_2, la distancia de la masa m_2 a su posición de equilibrio a lo largo del tiempo t.

Suponiendo que inicialmente (en el instante t_0) el primer muelle está dilatado (es decir, $x_1(t_0) > 0$) y que el segundo muelle está contraído ($x_2(t_0) - x_1(t_0) < 0$), aplicando las leyes de Newton, llegamos al sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} m_1x_1'' & = & -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2x_2'' & = & -k_2(x_2 - x_1) + F(t) \end{array}\right.$$

[1] Recordemos que esto significa que sean continuas coordenada a coordenada.

La máquina descrita sigue estas ecuaciones diferenciales, que no están en la categoría que nos interesa, por ser de segundo orden. Sin embargo, un sistema lineal de cualquier orden se puede hacer siempre de primer orden. Para ello, buscamos transformar dos ecuaciones de segundo orden en 4 ecuaciones de primer orden.

El truco para cambiar orden por dimensión es llamar incógnita a las derivadas. Definimos:

$$y_1 = x_1 \qquad y_2 = x_1' \qquad y_3 = x_2 \qquad y_4 = x_2'$$

De esta forma:

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \dfrac{-k_1}{m_1}y_1 + \dfrac{k_2}{m_1}(y_3 - y_1) \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= \dfrac{-k_2}{m_2}(y_3 - y_1) + \dfrac{F(t)}{m_2} \end{cases}$$

Obtenemos ya un sistema de ecuaciones lineal de primer orden. Los físicos dicen que hemos pasado del espacio de las configuraciones al espacio de estados.

Tenemos:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}\right) & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{-k_2}{m_2} & 0 \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{F(t)}{m_2} \end{pmatrix}$$

Este cambio se puede aplicar siempre que queramos, y esta es la razón por la que en este capítulo solo estudiaremos sistemas de ecuaciones lineales de primer orden, porque sabiendo resolverlo sabemos resolver cualquier sistema lineal de orden superior.

Teorema 5.1 (Existencia y unicidad de las soluciones)**.** *Dados $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, existe una única solución del sistema:*

$$x' = A(t)x + b(t) \qquad x(t_0) = x_0$$

*definida en **todo** el intervalo I.*

Para su demostración, será necesario repasar varios conceptos ya vistos en otras asignaturas.

Corolario 5.1.1. *Ahora, si tenemos una ecuación lineal de orden superior:*

$$x^{(k)} + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

Lo que hacemos es tomar como incógnitas:

$$y_1 = x \qquad y_2 = x' \qquad \dots \qquad y_k = x^{(k-1)}$$

Y plantear el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ \vdots & & \vdots \\ y_{k-1}' & = & y_k \\ y_k' & = & -a_0(t)y_1 - a_1(t)y_2 - \cdots - a_{k-1}(t)y_k + b(t) \end{array}\right.$$

Con lo que el Teorema de existencia y unicidad del Capítulo anterior es un corolario del Teorema 5.8.

Comenzamos entonces con el recordatorio de los conceptos necesarios para la demostración del Teorema 5.8. En particular, será necesario recordar normas matriciales, integrales vectoriales y convergencia uniforme.

Normas matriciales

Dada cualquier norma[2] (vectorial) $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, esta nos permite definir una norma matricial $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\|A\| = \text{máx}\{\|Ax\| \mid \|x\| \leqslant 1\} \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

Observación. En el caso de que no se especifique la norma, se sobreentiende que es la norma euclídea.

Notemos que está bien definida[3], ya que consideramos la función $x \longmapsto \|Ax\|$ (que es continua) definida en la bola unidad junto con su frontera (que es un conjunto compacto), por lo que la imagen de un compacto es un compacto y al estar en $\mathbb{R}$, es un conjunto cerrado y acotado.

De forma geométrica, cada A es una transformación del espacio $\mathbb{R}^d$ en sí mismo. Lo que hacemos para calcular su norma es calcular las imágenes de todos los vectores de la bola unidad (junto con su frontera) y quedarnos con la mayor norma de todos ellos. Si consideramos la norma vectorial euclídea, lo que hacemos es coger la mayor distancia al origen.

Ejemplo. Considerando el espacio normado $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, si tomamos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

La aplicación lineal asociada a A transforma $\mathbb{S}^1$ en una elipse de eje mayor 2 y eje menor $1/2$, tal y como vemos en la Figura 5.2, con lo que $\|A\| = 2$.

[2]Recordamos que una norma es cualquier función que cumpla la desigualdad triangular, homogeneidad por homotecias y no degeneración.

[3]Que en realidad existe un máximo.

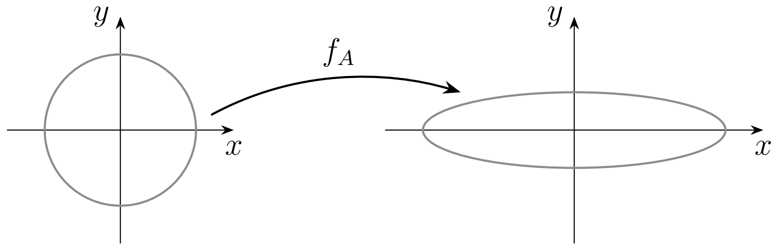


Figura 5.2: Transformación de $\mathbb{S}^1$ por la aplicación lineal asociada a A.

Las normas matriciales así definidas tienen más propiedades que las normas vectoriales de las que provienen, que ya fueron vistas en Métodos Numéricos I:

Proposición 5.2. *Se verifica que:*

1. $\|I\| = 1$.
2. $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{d\times d}$.
3. $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathbb{R}^{d\times d}$.

Demostración. Demostramos cada igualdad:

1. Evidente.
2. A partir de la definición, sean $A, B \in \mathbb{R}^{d\times d}$:
$$\begin{aligned}\|AB\| &= \text{máx}\{\|ABu\| \mid \|u\| \leqslant 1\} \leqslant \text{máx}\{\|A\|\|Bu\| \mid \|u\| \leqslant 1\} \\ &\leqslant \text{máx}\{\|A\|\|B\|\|u\| \mid \|u\| \leqslant 1\} = \|A\|\|B\|\end{aligned}$$
3. A partir de la definición de $\|A\|$, sabemos que $\|Au\| \leqslant \|A\|$ para cualquier $u \in \mathbb{S}^1$ y $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. De esta forma:
$$\left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|Ax\| \leqslant \|A\|$$
con lo que:
$$\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$$

□

Integrales vectoriales

Supongamos que tenemos $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ una función continua en un intervalo compacto, con lo que f tiene d coordenadas: $f = (f_1, \ldots, f_d)$, todas ellas continuas. De esta forma, podemos definir la integral de f como el vector formado por las integrales de sus componentes

$$\int_a^b f(t)\ dt = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_a^b f_1(t)\ dt \\ \displaystyle\int_a^b f_2(t)\ dt \\ \vdots \\ \displaystyle\int_a^b f_d(t)\ dt \end{pmatrix}$$

Proposición 5.3. *Sea $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ una función continua. Entonces, se verifica:*

$$A \cdot \left(\int_a^b f(t)\ dt\right) = \int_a^b [A \cdot f(t)]\ dt$$

Demostración. Si notamos a las coordenadas de A por $A = (a_{ij})_{i,j}$:

$$A\left(\int_a^b f(t)\ dt\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)\ dt \\ \int_a^b f_2(t)\ dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_d(t)\ dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^d \left(a_{1j} \int_a^b f_j(t)\ dt\right) \\ \sum_{j=1}^d \left(a_{2j} \int_a^b f_j(t)\ dt\right) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^d \left(a_{dj} \int_a^b f_j(t)\ dt\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \int_a^b \left(\sum_{j=1}^d a_{1j} \cdot f_j(t)\right)\ dt \\ \int_a^b \left(\sum_{j=1}^d a_{2j} \cdot f_j(t)\right)\ dt \\ \vdots \\ \int_a^b \left(\sum_{j=1}^d a_{dj} \cdot f_j(t)\right)\ dt \end{pmatrix} = \int_a^b [A \cdot f(t)]\ dt$$

□

Proposición 5.4. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ una función continua y $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^d$. Entonces, se verifica:*

$$\left\| \int_a^b f(t)\ dt \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\ dt$$

Demostración. Por comodidad, definimos $\Delta_m = \{1, \ldots, m\}$.

Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ una partición de $[a,b]$ y $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ $\forall j \in \Delta_m$. Como las componentes de f y la función $\|f\|$ son continuas, son integrables en el sentido de Riemann y podemos considerar las sumas de Riemann asociadas a la partición P con etiquetas ξ_j $\forall j \in \Delta_m$. Entonces, se cumple que:

$$\sigma(\|f\|, P) = \sum_{j=1}^d \|f(\xi_j)\|(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^d \|f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})\| \geqslant \left\| \sum_{j=1}^d (f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})) \right\|$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^d \left(\sum_{k=1}^d (f_k(\xi_j)(x_j - x_{j-1}))e_k \right) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^d \left(\sum_{j=1}^d (f_k(\xi_j)(x_j - x_{j-1}))e_k \right) \right\|$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^d (\sigma(f_k, P)e_k) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \sigma(f_1, P) \\ \sigma(f_2, P) \\ \vdots \\ \sigma(f_d, P) \end{pmatrix} \right\|$$

Por lo que $\sigma(\|f\|, P) \geqslant \|(\sigma(f_1, P), \dots, \sigma(f_d, P))\|$ para toda partición P del intervalo $[a, b]$.

Por tanto, si $\{P_n\}$ es una sucesión de particiones de $[a, b]$ tales que $\{\Delta P_n\} \longrightarrow 0$ (donde ΔP_n es el diámetro de la partición P_n), usando que $\|f\|$ y todas las componentes de f son Riemann-integrables, se tiene que:

$$\int_a^b \|f(t)\| \, dt = \lim_{n\to\infty} \sigma(\|f\|, P_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} \left\| \begin{pmatrix} \sigma(f_1, P_n) \\ \vdots \\ \sigma(f_d, P_n) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f_1, P_n) \\ \vdots \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f_d, P_n) \end{pmatrix} \right\|$$
$$= \left\| \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t) \, dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_d(t) \, dt \end{pmatrix} \right\| = \left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\|$$

Es decir:

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\| \, dt$$

□

Convergencia uniforme

Dada cualquier norma vectorial $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y fijado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, podemos definir[4] $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in I} \|\varphi(t)\| \qquad \forall \varphi \in \mathbb{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R}^d)$$

Observación. En el caso de que no se especifique la norma, se sobreentiende que es la norma euclídea.

Definición 5.1 (Norma del máximo)**.** Recordamos la definición de la norma vectorial del máximo, $\|\cdot\|_{\text{máx}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|x\|_{\text{máx}} = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|\} \qquad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Que en algunos contextos se denota también por $\|\cdot\|_1$.

Ejemplo. En $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\text{máx}})$:

1. Sea $\varphi_1 :]0, 1[\to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ e^t \end{pmatrix} \qquad t \in]0, 1[$$

   Tenemos que $\|\varphi_1\|_\infty = e$.

[4] En este caso, no obtenemos una norma, porque puede tomar el valor ∞.

2. Sea ahora $\varphi_2 :]0,1[\to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in]0,1[$$

Tenemos que $\|\varphi_2\|_\infty = \infty$.

Definición 5.2 (Convergencia Uniforme)**.** Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ y una función f, todas ellas definidas sobre un mismo intervalo I y con imagen en $\mathbb{R}$, decimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f si:

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0$$

Ejemplo. Dadas $f, \psi \in \mathbb{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ y $\delta \in \mathbb{R}^+$, que:

$$\|f - \psi\|_\infty \leqslant \delta$$

significa que ψ no se puede separar de f más que δ. Podemos observar esto gráficamente en la Figura 5.3, donde ψ debe estar en la región delimitada por las líneas discontinuas.

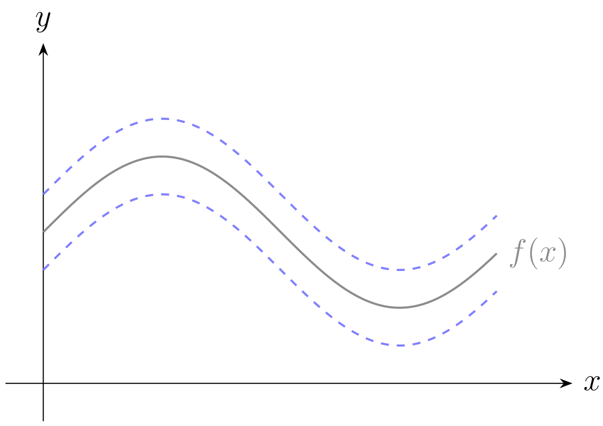


Figura 5.3: Región en la que debe estar ψ.

Algunas propiedades de la convergencia uniforme[5] son:

Proposición 5.5. *Sean $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que convergen uniformemente a f. Si f_n son continuas para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua.*

Proposición 5.6. *Si $[a,b] \subseteq I$ y tenemos $f_n : I \to \mathbb{R}^d$ funciones continuas que convergen uniformemente a $f : I \to \mathbb{R}^d$, entonces:*

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f$$

Sin embargo, si f_n son derivables y convergen uniformemente a f, entonces no podemos asegurar que f sea derivable:

[5]Que ya fueron vistas en Análisis Matemático II.

Ejemplo. Sean $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f_n(t) = \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n} \qquad n \in \mathbb{N} \quad t \in \mathbb{R}$$

Tenemos que $f_n \to f$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$, ya que:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{\operatorname{sen}(nt)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Y tenemos que:

$$f_n'(t) = \cos(nt) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Que no convergen a f', ya que:

$$f_n'(\pi) = (-1)^n \not\to f'(\pi) = 0$$

Proposición 5.7 (Test de Weierstrass). *Sean $f_n : I \to \mathbb{R}^d$ y consideramos una sucesión M_n de números reales tal que:*

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leqslant M_n \qquad \forall t \in I, \quad \forall n \geqslant 0$$

Si $\sum M_n < \infty$ converge, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en I.

Este Test de Weierstrass nos permite demostrar la existencia del límite de una sucesión de funciones sin conocer la función límite.

Ejemplo. Sabemos que:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Si definimos:

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Recordando la teoría que usábamos en Análisis Matemático II sobre el radio de convergencia, vemos que el radio de convergencia de S_n es infinito, por lo que podemos garantizar convergencia uniforme en cada intervalo compacto de $\mathbb{R}$, pero no en todo $\mathbb{R}$.

   Pensando en que los polinomios siempre divergen en $-\infty$, podemos intuir que la convergencia en todo $\mathbb{R}$ no la tenemos garantizada, ya que la función exponencial tiende a 0 en dicho límite.

   De esta forma, una serie de polinomios nunca puede converger a una función que está acotada en un intervalo no acotado.

2. De forma análoga y usando el Test de Weierstrass, podemos demostrar la convergencia de la suesión $\{S_n\}$ en cada intervalo compacto $[a, b]$:

$$|S_{n+1}(t) - S_n(t)| = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0 \qquad \forall t \in [a, b]$$

Estamos ya listos para realizar la demostración del Teorema 5.8:

Teorema 5.8 (Existencia y unicidad de las soluciones)**.** *Dados $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, existe una única solución del sistema:*

$$x' = A(t)x + b(t) \qquad x(t_0) = x_0 \tag{5.3}$$

*definida en **todo** el intervalo I.*

Demostración. Inicialmente, demostraremos el teorema en un caso particular y veremos que el caso general se puede reducir al particular:

- Supongamos que I es un intervalo acotado de longitud l y que:

$$\|A(t)\| \leqslant \alpha \quad \|b(t)\| \leqslant \beta \qquad \forall t \in I$$

Exitencia. Queremos llegar a que tenemos una solución x del problema de valores iniciales (5.3), esta cumplirá:

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

Con lo que la integraremos (vectorialmente) cogiendo $t_0 \in I$ (son funciones continuas en un compacto):

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\ ds = \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]\ ds$$

Aplicando coordenada a coordenada la Regla de Barrow y que $x(t_0) = x_0$:

$$x(t) - x_0 = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} x'(s)\ ds = \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]\ ds$$

Y hemos llegado a una ecuación integral que cumplirá la x buscada:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]\ ds$$

Buscaremos soluciones aproximadas (buscamos las iterantes de Picard): La primera aproximación la tomamos como la condición inicial:

$$x_0(t) = x_0 \qquad t \in I$$

con lo que podemos definir:

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x_n(s) + b(s)]\ ds \qquad \forall n \in \mathbb{N}:$$

La idea de la demostración es construir las iterantes de Picard (que están bien definidas y todas de clase $C^1(I)$). Los pasos a seguir son:

1. Demostraremos que las iterantes de Picard convergen uniformemente (esto será una función continua).

2. Una vez que sabemos que x_n tienden a un límite, haciendo n tender a infinito, vamos a llegar a la ecuación integral, usando para ello la comnutación de integral con convergencia uniforme.
   El límite de Picard es una solución integral.
3. Probar que una solución de la ecuación integral es una solución del problema de valores iniciales.

Comenzando ahora con la demostración, definimos las Iterantes de Picard:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \\ x_{n+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x_n(s) + b(s)]\ ds \end{aligned}$$

Con $x_n : I \to \mathbb{R}^d$ bien definidas y continuas $\forall n \in \mathbb{N}$ (hágase por inducción). Además, $x_n \in C^1(I)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, gracias al Teorema Fundamental del Cálculo.

Veamos que $\{x_n\}$ converge uniformemente en I, usando para ello el Test de Weierstrass. Comenzamos acotando la primera diferencia:

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_0(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} [A(s)x_0 + b(s)]\ ds \right\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)x_0 + b(s)\|\ ds \right| \\ &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} [\|A(s)\|\|x_0\| + \|b(s)\|]\ ds \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} [\alpha \cdot \|x_0\| + \beta]\ ds \right| \\ &\leqslant (\alpha \cdot \|x_0\| + \beta) \cdot l = M_0 \in \mathbb{R} \qquad \forall t \in I \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \|x_2(t) - x_1(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} [A(s)(x_1(s) - x_0(s))]\ ds \right\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)(x_1(s) - x_0(s))\|\ ds \right| \\ &\leqslant \alpha \left| \int_{t_0}^{t} \|x_1(s) - x_0(s)\|\ ds \right| \leqslant \alpha M_0 \left| \int_{t_0}^{t} ds \right| \leqslant \alpha M_0 |t - t_0| \end{aligned}$$

Donde hemos mantenido la dependencia de t, ya que si ahora decimos que $\alpha M_0 |t - t_0| \leqslant \alpha M_0 l = M_1$, obtendremos luego una serie $\{\sum M_n\}$ que no converja, con lo que tratamos de mantener la dependencia de t hasta el final:

$$\begin{aligned} \|x_3(t) - x_2(t)\| &\leqslant \alpha \left| \int_{t_0}^{t} \|x_2(s) - x_1(s)\|\ ds \right| \leqslant \alpha^2 M_0 \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0|\ ds \right| \\ &= \alpha^2 M_0 \frac{|t - t_0|^2}{2} \end{aligned}$$

En definitiva, se puede probar por inducción que:

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leqslant M_0 \frac{\alpha^n |t - t_0|^n}{n!} \qquad \forall t \in I$$

Definimos ahora:

$$M_n = M_0 \cdot \frac{(\alpha \cdot l)^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Una serie conocida, con lo que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = M_0 \cdot e^{\alpha \cdot l} \in \mathbb{R}$$

Por el Test de Weierstrass, concluimos que $\{x_n\}$ converge uniformemente a una función $x : I \to \mathbb{R}^d$, que por ahora solo sabemos que es continua, por ser x_n continua $\forall n \in \mathbb{N}$.

Veamos ahora que x es solución al problema de valores iniciales. Como:

$$\|A(t)x_n(t) - A(t)x(t)\| \leqslant \alpha \|x_n(t) - x(t)\|$$

Tenemos que $\{Ax_n\} \to Ax$, con lo que:

$$\int_{t_0}^{t} A(s)x_n(s)\ ds \longrightarrow \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)\ ds$$

En definitiva:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]\ ds$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que $x \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$:

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \qquad \forall t \in I$$

Con lo que x es solución de (5.3) y se tiene que:

$$x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} [A(s)x(s) + b(s)]\ ds = x_0$$

Unicidad. Supongamos que $x, y : I \to \mathbb{R}^d$ son ambas soluciones de (5.3). Como son soluciones, también cumplen la ecuación integral:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]\ ds$$
$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)y(s) + b(s)]\ ds$$

Restando:

$$x(t) - y(t) = \int_{t_0}^{t} [A(s)(x(s) - y(s))]\ ds$$

Con lo que:

$$\|x(t) - y(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [A(s)(x(s) - y(s))]\ ds \right\| \leqslant \alpha \left| \int_{t_0}^{t} \|x(s) - y(s)\|\ ds \right| \qquad \forall t \in I$$

Tomando $f(t) = \|x(t) - y(t)\|$ $\forall t \in I$, tenemos una función continua no negativa que está en las hipótesis del Lema 5.9, concluimos que $f(t) = 0$ $\forall t \in I$, con lo que $x(t) = y(t)$ $\forall t \in I$.

- De vuelta al caso general, buscamos quitar las hipótesis de que I sea un intervalo acotado. Para ello, tomamos una sucesión $\{I_n\}$ de intervalos abiertos y acotados de forma que $t_0 \in I_0$, $I_n \subseteq I_{n+1}$, $\overline{I_n} \subseteq I$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n = I$$

Podemos ahora definir:

$$\alpha_n = \max_{t\in\overline{I_n}} \|A(t)\| \qquad \beta_n = \max_{t\in\overline{I_n}} \|b(t)\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Con lo que la hipótesis extra anterior se verifica en cada intervalo I_n.

Unicidad. Si $x, y : I \to \mathbb{R}^d$ son soluciones de (5.3), entonces $x_{|I_n}$ y $y_{|I_n}$ son soluciones de (5.3) en I_n, donde sabemos que se verifica $x(t) = y(t)$ $\forall t \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $x(t) = y(t)$ $\forall t \in I$.

Existencia. Si ahora llamamos x_n a la solución del problema de valores iniciales en el intervalo I_n, definimos $x : I \to \mathbb{R}^d$

$$x(t) = x_n(t) \text{ si } t \in I_n$$

Es una función bien definida gracias a la unicidad en cada I_n, es derivable y cumple la ecuación diferencial porque lo es y la cumple en cada I_n.

□

Lema 5.9. *Sea J un intervalo y $f : J \to \mathbb{R}_0^+$ continua, sean $t_0 \in J$, $\alpha > 0$:*

$$f(t) \leqslant \alpha \left| \int_{t_0}^{t} f(s)\ ds \right| \quad \forall t \in J \Longrightarrow f(t) = 0 \quad \forall t \in J$$

Demostración. Realizando primero la demostración en un caso más específico:

- Si J es compacto, $\exists \max_{t\in J} f(t) = m$, con lo que:

$$f(t) \leqslant \alpha \cdot m \cdot |t - t_0| \qquad \forall t \in J$$

$$f(t) \leqslant \alpha \left| \int_{t_0}^{t} [\alpha \cdot m \cdot |s - t_0|]\ ds \right| \leqslant m \cdot \frac{\alpha^2 |t - t_0|^2}{2} \qquad \forall t \in J$$

En definitiva, se puede probar por inducción que:

$$0 \leqslant f(t) \leqslant m \cdot \frac{\alpha^n |t - t_0|^n}{n!} \qquad \forall t \in J$$

Como sabemos que la serie de dichos términos converge, sabemos que la sucesión tiende a 0, luego tomando límites llegamos a que $0 \leqslant f(t) \leqslant 0$ $\forall t \in J$, concluimos que $f(t) = 0$ $\forall t \in J$.

- Sea ahora J cualquier intervalo, tomamos J_n un intervalo compacto de forma que $J_n \subseteq J_{n+1}$ con $t_0 \in J_0$ y:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} J_n = J$$

Por el paso anterior, $f(t) = 0$ $\forall t \in J_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $f(t) = 0$ $\forall t \in J$.

□

5.1. Sistemas lineales homogéneos

Nos preocupamos ahora por sistemas de la forma

$$x' = A(t)x \tag{5.4}$$

con $A : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ una función continua. Sean $V = C^1(I, \mathbb{R}^d)$ y $W = C^0(I, \mathbb{R}^d)$.

Definición 5.3. Dado un sistema lineal homogéneo de la forma (5.4), definimos el operador asociado a la ecuación como la aplicación $L : V \to W$ dado por:

$$L[x] = x' - Ax$$

Se verifica que el operador lineal L asociado a la ecuación (5.4) es lineal. Más aún, se verifica que $Z = \ker L$ es el espacio vectorial de las soluciones de la ecuación (5.4).

Proposición 5.10. *Dado un sistema lineal homogéneo de la forma (5.4), con L el operador asociado a la ecuación, se verifica que:*

$$\dim Z = d.$$

Demostración. La demostración es similar al caso de una ecuación diferencial lineal de orden superior.
Para ello, fijado $t_0 \in I$, definimos $\Phi_{t_0} : Z \to \mathbb{R}^d$ dada por $\Phi_{t_0}(x) = x(t_0)$, que es un isomorfismo entre Z y $\mathbb{R}^d$ gracias al Teorema 5.8, concluimos que $\dim Z = d$. □

Dados $\phi_1, \ldots, \phi_d \in Z$ funciones linealmente independientes en V, todas las soluciones de (5.4) las obtendremos mediante combinaciones lineales de dichas funciones:

$$x(t) = c_1\phi_1(t) + \ldots + c_d\phi_d(t) \qquad c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$$

Proposición 5.11. *Dadas $\phi_1, \ldots, \phi_d \in Z$, son equivalentes:*

i) $\{\phi_1, \ldots, \phi_d\}$ *es una base.*

ii) $\det(\phi_1(t)|\ldots|\phi_d(t)) \neq 0\ \forall t \in I$.

iii) $\det(\phi_1(t)|\ldots|\phi_d(t)) \neq 0$ *para cierto* $t \in I$.

Demostración. Se deja como ejercicio para el lector por su analogía con el caso de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior. □

Sabemos que la ecuación de la forma (5.4) no se puede resolver de forma explícita para $d \geqslant 2$. En el siguiente ejemplo, veremos soluciones de ecuaciones de la forma (5.4) que sí se pueden resolver de forma explícita.

Ejemplo. Un primer ejemplo de estos son los sistemas triangulares. Consideramos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1' & = x_1 + x_2 \\ x_2' & = \frac{1}{t}x_2 \end{array}\right.$$

Estamos trabajando con $I = \mathbb{R}^+$, $d = 2$ y:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} \quad \forall t \in I$$

Comenzaremos resolviendo la segunda ecuación y luego sustituyendo en la primera:

$$x_2' = \frac{1}{t} x_2$$

Sabemos que las soluciones de esta ecuación son de la forma $x_2 : I \to \mathbb{R}$

$$x_2(t) = c_2 t \qquad c_2 \in \mathbb{R} \quad t \in I$$

Trataremos de resolver ahora la ecuación:

$$x_1' = x_1 + c_2 t$$

que es una ecuación lineal completa. Para resolverla, haremos uso de su estructura afín: buscaremos una solución a ojo y le sumaremos las soluciones de su ecuación homogénea. Buscamos con una función de la forma:

$$x_1(t) = \alpha t + \beta \qquad t \in I$$

Derivando:

$$\alpha = \alpha t + \beta + c_2 t$$

Que nos lleva a unas ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha & = \beta \\ \alpha + c_2 & = 0 \end{cases}$$

Con lo que la solución particular buscada es:

$$x_1(t) = -c_2(t+1) \qquad t \in I$$

Finalmente, una solución de la ecuación completa es $x_1 : I \to \mathbb{R}$ dada por:

$$x_1(t) = -c_2(t+1) + c_1 e^t \qquad c_2 \in \mathbb{R} \quad t \in I$$

Por tanto, la solución general del sistema es:

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t - c_2(t+1) \\ c_2 t \end{pmatrix}, \qquad c_2, c_2 \in \mathbb{R}, \qquad t \in I$$

Para buscar una base que nos dé el espacio de soluciones para el sistema, haremos elecciones de c_1 y c_2 para obtener dos funciones linealmente independientes. De esta forma, una base la obtenemos con:

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} -(t+1) \\ t \end{pmatrix} \qquad \forall t \in I$$

Que son dos funciones $\phi_1, \phi_2 : I \to \mathbb{R}$ linealmente independientes, ya que:

$$\det(\phi_1(t) | \phi_2(t)) = t \cdot e^t \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

5.1.1. Sistemas de coeficientes constantes

Un tipo de sistemas que también se puede resolver siempre es cuando la función A es constante. Veamos este ejemplo, donde trabajamos con una matriz $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, con lo que $I = \mathbb{R}$.

Supongamos que $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{R}$ es un valor propio no trivial de A, y consideramos $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ un vector propio asociado a λ. En dicho caso, la función $x : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$x(t) = e^{\lambda t} \cdot v \qquad t \in I$$

Es una solución del sistema, ya que:

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t} v$$

Y se tiene que:

$$Ax(t) = e^{\lambda t} Av = \lambda e^{\lambda t} v = x'(t) \qquad \forall t \in I$$

De esta forma, ante un sistema de coeficientes constantes en el que la matriz A sea diagonalizable, bastará encontrar los valores y vectores propios de la matriz para hayar las soluciones.

Ejemplo. Sea el sistema de ecuaciones diferenciales dado por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, con $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -2$. Además, sabemos que los vectores $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (1, -1)$ son vectores propios asociados a dichos valores, respectivamente. De esta forma, sabemos que:

$$\phi_1(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \phi_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \forall t \in I$$

Son soluciones del sistema, que además son linealmente independientes, ya que:

$$\det(\phi_1(t)|\phi_2(t)) = e^{2t} \det(v_1|v_2) \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

Valores propios complejos

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, si tomamos $\lambda \in \sigma(A) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, con vector propio $w \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$. Lo que haremos ahora será buscar soluciones del sistema en los complejos, es decir, buscar una función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^d$ pensando en $\mathbb{C}$ como en $\mathbb{R}^2$: $x = u + iv$. Al obtener una solución compleja x, notando por $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ a su parte real e imaginaria, respectivamente, $u = \Re(x)$ y $v = \Im(x)$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x' = u' + iv' \\ x' = Ax = Au + iAv \end{array}\right\} \Longrightarrow u' + iv' = A \cdot (u + iv) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u' = Au \\ v' = Av \end{array}\right.$$

Por tanto, tenemos que u y v son soluciones *reales* del sistema. Es decir, la parte real e imaginaria de una solución compleja de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes es solución de dicho sistema.

Ejemplo. Si ahora tomamos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Es la matriz asociada a la rotación de 90º, que no tiene valores propios reales, sino complejos:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i\}$$

Con vectores propios asociados $v_1 = (1, i)$, $v_2 = (1, -i)$ linealmente independientes. Podemos construir una solución compleja:

$$\psi(t) = e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} \\ ie^{it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & + & i\operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & + & i\cos t \end{pmatrix} \qquad \forall t \in I$$

De donde podemos obtener dos soluciones reales:

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \qquad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad t \in I$$

Que son linealmente independientes, por ser $\det(\phi_1(t)|\phi_2(t)) \neq 0\ \forall t \in I$.

Consideramos ahora otra forma de resolver el mismo sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & -x_1 \end{array} \right.$$

Para resolverlo, lo pasamos a una ecuación de orden superior. Para ello, derivamos la primera ecuación:

$$x_1'' = x_2' = -x_1$$

Despejando, tenemos la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden, que sabemos resolver por el Capítulo anterior:

$$x_1'' + x_1 = 0$$

Su polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, el cual tiene soluciones complejas $\pm i$. Por tanto, dos soluciones linealmente independientes son:

$$e^{it} = \cos t + i\operatorname{sen} t$$
$$e^{-it} = \cos t - i\operatorname{sen} t$$

Tomando las partes reales e imaginarias como base de Z, obtenemos la solución general para x_1, y así para x_2.

$$x_1(t) = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t$$
$$x_2(t) = -c_1\operatorname{sen} t + c_2\cos t$$

5.1.2. Matriz solución y matriz fundamental

Hemos ya trabajado con los sistemas lineales homogéneos, los que tenían la forma (5.4) con $A : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ una función continua. Seguiremos ahora trabajando con una ecuación de la misma forma, pero ahora no estaremos interesados en buscar soluciones $x : I \to \mathbb{R}^d$, sino en buscar *matrices solución*.

Definición 5.4 (Matriz solución)**.** Dada una ecuación de la forma (5.4) siendo $A : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ una función continua, diremos que una función $\Phi : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ es una matriz solución de la ecuación si es derivable[6] y cumple que:

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \qquad \forall t \in I$$

Ejemplo. Antes teníamos el sistema $x' = Ax$ dado por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puede comprobarse que $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \qquad t \in I$$

es una matriz solución del sistema. También lo es:

$$\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t & 3\operatorname{sen} t \\ -2\operatorname{sen} t & 3\cos t \end{pmatrix} \qquad t \in I$$

Observación. Sea $\Phi : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$, si notamos a sus columnas por $\phi_1, \dots, \phi_d$:

$$\Phi = (\phi_1|\dots|\phi_d)$$

Φ es una matriz solución de (5.4) $\Longleftrightarrow \phi_1, \dots, \phi_d \in Z$.

Esto se debe a que si tenemos una matriz $B = (b_1|\dots|b_d)$, entonces:

$$A \cdot B = (Ab_1|\dots|Ab_d)$$

Con lo que si se cumple $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, entonces:

$$(\phi_1'|\dots|\phi_d') = A(\phi_1|\dots|\phi_d)$$

y viceversa.

A partir de esta observación, una matriz solución no es nada más que una matriz cuyas columnas son soluciones.

Definición 5.5 (Matriz fundamental)**.** Sea Φ una matriz solución de un sistema de la forma (5.4) con $A : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ una función continua. Si existe[7] $t \in I$ tal que $\det(\Phi(t)) \neq 0$, diremos que Φ es una matriz fundamental.

[6] Recordamos que esto es equivalente a que cada componente sea derivable.

[7] Esto es equivalente a que el determinante sea distinto de 0 para todo $t \in I$, gracias a la teoría desarrollada.

Observación. Notemos que una matriz fundamental es una matriz cuyas columnas forman un sistema fundamental: Si $\Phi = (\phi_1|\ldots|\phi_d)$ es una matriz fundamental, entonces $\{\phi_1, \ldots, \phi_d\}$ es un sistema fundamental.

Como realizar combinaciones lineales de $\phi_1, \ldots, \phi_d$ es equivalente a multiplicar la matriz Φ por un vector:

$$\alpha_1\phi_1 + \ldots + \alpha_d\phi_d = \Phi \cdot \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{array}\right)$$

Obtentemos la identidad:

$$Z = \{\Phi \cdot c \mid c \in \mathbb{R}^d\}$$

Notemos que si exigimos solo que Φ sea una matriz solución (no necesariamente fundamental), solo obtenemos la inclusión:

$$\{\Phi \cdot c \mid c \in \mathbb{R}^d\} \subseteq Z$$

Derivación del producto de dos matrices

Con vistas a demostrar una proposición, aprenderemos ahora a derivar un producto de matrices.

Lema 5.12. *Sean $\Phi, \Psi : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ funciones derivables, entonces $\Phi \cdot \Psi$ es derivable, con*[8]*:*

$$(\Phi \cdot \Psi)' = \Phi' \cdot \Psi + \Phi \cdot \Psi'$$

Demostración. Si $\Phi = (\phi_{ij})_{i,j}$ y $\Psi = (\psi_{ij})_{i,j}$, tenemos que ϕ_{ij}, ψ_{ij} son derivables, para todo $i, j \in \{1, \ldots, d\}$. Si definimos:

$$\xi_{ij} = \sum_{k=1}^{d} \phi_{ik} \cdot \psi_{kj} \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, d\}$$

Entonces, tenemos que $\Phi \cdot \Psi = (\xi_{ij})_{i,j}$, con cada ξ_{ij} derivable por ser suma de productos de funciones derivables. Ahora, si escribimos el cociente incremental de la función $\Phi \cdot \Psi$:

$$\frac{1}{h}[\Phi(t+h) \cdot \Psi(t+h) - \Phi(t)\Psi(t)] =$$
$$= \frac{1}{h}[\Phi(t+h) \cdot \Psi(t+h) - \Phi(t+h) \cdot \Psi(t)] + \frac{1}{h}[\Phi(t+h)\Psi(t) - \Phi(t)\Psi(t)]$$

Sacando factor común:

$$\frac{1}{h}[\Phi(t+h) \cdot \Psi(t+h) - \Phi(t)\Psi(t)] =$$
$$= \frac{\Phi(t+h)}{h}[\Psi(t+h) - \Psi(t)] + \frac{1}{h}[\Phi(t+h) - \Phi(t)]\Psi(t)$$

[8]Recordemos que el producto de matrices no es conmutativo, luego debemos mantener el orden en la fórmula.

Y si ahora hacemos $h \to 0$:

$$(\Phi \cdot \Psi)'(t) = \Phi(t) \cdot \Psi'(t) + \Phi'(t) \cdot \Psi(t) = \Phi'(t) \cdot \Psi(t) + \Phi(t) \cdot \Psi'(t) \qquad \forall t \in I$$

□

Proposición 5.13. *Supongamos que Φ es una matriz solución y que $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Entonces $\Phi \cdot C$ es una matriz solución.*

Demostración. Que Φ sea una matriz solución significa que es derivable y que:

$$\Phi'(t) = A(t) \cdot \Phi(t) \qquad \forall t \in I$$

Por el Lema 5.12:

$$(\Phi \cdot C)' = \Phi' \cdot C = (A \cdot \Phi) \cdot C = A \cdot (\Phi \cdot C)$$

Con lo que $\Phi \cdot C$ es una matriz solución. □

Corolario 5.13.1. *Si Φ es una matriz fundamental y $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$ con $\det(C) \neq 0$. Entonces $\Phi \cdot C$ es una matriz fundamental.*

Ejercicio. Si tenemos una matriz fundamental Φ, podemos obtener todas las bases de soluciones si multiplicamos por cada matriz $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$ con $\det(C) \neq 0$.

La resolución de este caso es parte del Ejercicio 6.5.7, pero se insta al lector a intentar resolverlo por su cuenta.

Definición 5.6 (Matriz fundamental principal en un punto)**.** Dado $t_0 \in I$, decimos que Φ es una matriz fundamental principal en t_0 si Φ es una matriz fundamental y se verifica que

$$\Phi(t_0) = Id_d$$

Ejemplo. Si consideramos el sistema anterior $x' = Ax$ dado por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que la matriz $\Phi : I \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \qquad t \in I$$

Es fundamental. Además, es principal en cualquier punto de la forma $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Proposición 5.14. *Dado un sistema lineal homogéneo de la forma (5.4) y $t_0 \in I$, entonces existe una única matriz fundamental principal en t_0.*

Demostración. Demostramos tanto la existencia como la unicidad de la matriz fundamental principal en t_0.

Existencia: Dado un sistema lineal homogéneo de la forma (5.4), consideramos Z, que sabemos que tiene $\dim Z = d$. De esta forma, cogemos $\phi_1, \ldots, \phi_d \in Z$ funciones linealmente independientes y definimos $\Phi : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ dada por:

$$\Phi(t) = (\phi(t)_1 | \ldots | \phi(t)_d) \qquad t \in I$$

De esta forma, Φ es una matriz fundamental para (5.4), con lo que su determinante será no nulo: $\det(\Phi(t)) \neq 0 \ \forall t \in I$. Consideramos $\Phi^{-1}(t_0) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, con $\det(\Phi^{-1}(t_0)) \neq 0$, por lo que aplicando el Corolario 5.13.1, tenemos que la función $\Phi \cdot \Phi^{-1}(t_0) : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ es una matriz fundamental, que verifica que:

$$(\Phi \cdot \Phi^{-1}(t_0))(t_0) = \Phi(t_0) \cdot \Phi^{-1}(t_0) = Id_d$$

Por tanto, $\Phi \cdot \Phi^{-1}(t_0)$ es una matriz fundamental principal en t_0.

Unicidad: Supongamos ahora que $\Phi, \Psi : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ son dos matrices fundamentales principales en $t_0 \in I$. Si notamos a sus columnas por:

$$\Phi = (\phi_1 | \ldots | \phi_d) \qquad \Psi = (\psi_1 | \ldots | \psi_d)$$

con $\phi_i, \psi_i : I \to \mathbb{R}^d \ \forall i \in \{1, \ldots, d\}$. Como $\Phi(t_0) = Id_d = \Psi(t_0)$, tenemos que tanto ϕ_i como ψ_i son ambas soluciones de la ecuación (5.4) para la condición inicial $t_0 \in I$, $\alpha_i = (0, \ldots, 0, \overset{i)}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}$, para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$. Sin embargo, el Teorema 5.8 nos garantiza la unicidad de dichas soluciones, con lo que $\phi_i = \psi_i \ \forall i \in \{1, \ldots, d\}$.

Luego $\Phi = \Psi$.

□

Ejercicio. Existe una Fórmula de Jacobi-Liouville para sistemas:
Dada una matriz solución $\Phi(t)$ de (5.4), tomamos $t_0 \in I$. Resulta que:

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) \cdot e^{\displaystyle\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(s))\ ds} \qquad \forall t \in I$$

Donde notamos por $\operatorname{tr}(A(s))$ a la traza de la matriz A en el punto $s \in \mathbb{R}$. Se pide:

- Demostrar la fórmula.
- Ver que la fórmula del Capítulo anterior es un caso particular de esta.

(**Pista**: derivar la función $\det \Phi(t)$, sacar una ecuación diferencial de primer orden de la que es solución y comprobar que la expresión de la derecha también es solución del mismo problema de valores iniciales.)

5.2. Exponencial de una matriz

Como motivación, volvemos a la ecuación diferencial del inicio del curso:

$$x' = \lambda x$$

Tenemos que una solución suya viene dada por $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x(t) = e^{\lambda t} x_0 \qquad t \in \mathbb{R}$$

para cierto $x_0 \in \mathbb{R}$. Si ahora consideramos el sistema de ecuaciones homogéneo siguiente

$$x' = Ax,$$

sería lógico pensar que las soluciones del sistema serán de la forma:

$$x(t) = e^{tA} x_0$$

Pero, ¿qué es la exponencial de una matriz?

5.2.1. Definición de exponencial de una matriz

Recordando la definición de la exponencial, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, e^λ se define como:

$$e^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$$

Es decir, el límite de una serie de potencias, pero ¿cómo podemos generalizar este límite a las matrices? Pues bien, podemos pensar intuitivamente en este límite como en un “polinomio de grado infinito”, y en asignaturas pasadas[9] aprendimos ya que dado un polinomio, por ejemplo $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda + 3$, podemos cambiar su dominio de definición (usualmente $\mathbb{R}$) a $\mathbb{R}^{d\times d}$, a partir de la fórmula:

$$P(A) = A^3 - A + 3I \qquad A \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

Por lo que ya sabemos evaluar polinomios en matrices. Antes de definir qué es la exponencial de una función, es necesario antes ver ciertos resultados, para poder realizar dicha definición.

Lema 5.15. *Sea $\{A_n\}$ con $A_n \in \mathbb{R}^{d\times d}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ una sucesión de matrices y $\{M_n\}$ con $M_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ una sucesión de números reales de forma que $\|A_n\| \leqslant M_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_n < \infty$$

Lema 5.16. *La siguiente serie de matrices es convergente:*

$$\left\{ \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} A^n \right\}$$

[9] Como en Geometría II.

Demostración. Si consideramos la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n!}A^n\right\}$, tenemos que:

$$\left\|\frac{1}{n!}A^n\right\| = \frac{1}{n!}\|A^n\| \overset{(*)}{\leqslant} \frac{1}{n!}\|A\|^n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{5.5}$$

Donde en $(*)$ hemos usado que $\|\cdot\|$ es una norma matricial, con lo que se da que $\|A \cdot B\| \leqslant \|A\|\|B\|$ para cualesquiera matrices A y B, que puede generalizarse para todo $n \in \mathbb{N}$ fácilmente por inducción. Si ahora definimos la sucesión $\{M_n\}$ de forma que:

$$M_n = \frac{1}{n!}\|A\|^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

la desigualdad (5.5) nos da que $\|A_n\| \leqslant M_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, de la definición de exponencial, tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = e^{\|A\|} < \infty$$

Por el Lema 5.15, tenemos que la serie anterior es convergente, como queríamos demostrar. □

Definición 5.7 (Exponencial de una matriz cuadrada)**.** Sea $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ una matriz cuadrada, definimos:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

que sabemos que es convergente por el Lema 5.16.

Observación. Notemos que en el Lema 5.16, además de probar que la serie que nos da la definición de la exponencial de una matriz es convergente, habíamos conseguido probar que:

$$\|e^A\| \leqslant e^{\|A\|} \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

Una vez definida la exponencial de una matriz, la única forma que tenemos de calcularla para una matriz dada es a partir de la definición, por lo que tendremos que calcular el límite de una serie de potencias matriciales.

Parece lógico pensar que las matrices para las cuales es fácil calcular su exponencial son aquellas para las que es fácil calcular sus potencias, tal y como pondremos de manifiesto en el siguiente ejemplo, donde aprendemos a calcular la exponencial de las matrices más sencillas.

Ejemplo. Calcularemos a continuación la exponencial de varias matrices, de forma que para estas es fácil calcular su exponencial.

1. Calculemos e^0, con $0 \in \mathbb{R}^{d\times d}$:

$$e^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}0^n = Id_d$$

   donde hemos hecho uso de que, en $\mathbb{R}$, $0^0 = 1$.

2. Si ahora tratamos de calcular la exponencial de cualquier matriz diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix} \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$$

   Sabemos que:

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d^n \end{pmatrix} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   De esta forma:

$$e^A = \frac{1}{0!}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix} +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{k!}\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d^k \end{pmatrix} + \ldots$$

   con lo que obtenemos la matriz diagonal de forma que en la posición i, i de la matriz (con $i \in \{1, \ldots, d\}$) tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\lambda_i^n = e^{\lambda_i}$$

   Es decir, en cada componente de la diagonal tenemos el desarrollo en serie de la exponencial de cada λ_i, con lo que:

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_d} \end{pmatrix}$$

3. Si ahora calculamos la exponencial de cualquier matriz nilpotente (cualquier matriz que tenga una potencia nula), sucederá algo parecido a lo que nos sucedía con la exponencial, y es que la serie se convierte en una suma finita.

   Un ejemplo muy representativo de esto es la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz cuyas componentes son todo ceros salvo la diagonal que se encuentra por encima de la diagonal princpal, cuyos componentes son todo unos. Esta matriz cuenta con una propiedad especial, y es que en cada potencia de la matriz la diagonal de los unos asciende un nivel (compruébese), con lo que si seguimos calculando potencias, obtenemos finalmente que:

$$A^{d-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad A^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Por lo que $A^k = 0$ para cualquier $k \geqslant d$. De esta forma, solo tenemos que calcular una suma finita para calcular la exponencial de una matriz, que a su vez es fácil de calcular:

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2! & \cdots & 1/(d-1)! \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1/2! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Y estas son las matrices más fáciles para las que se puede obtener la exponencial de una matriz.

Hay métodos alternativos que nos permiten calcular la exponencial de cualquier matriz, entre los que distinguimos:

- Un método algebraico con muchos cálculos que no nos interesará.
- Un método basado en ecuaciones diferenciales, que justificará por qué nos interesan las exponenciales de las matrices y que veremos a continuación.

5.2.2. Formas de cálculo de exponenciales de matrices

Proposición 5.17. *Dado un sistema de la forma:*

$$x' = Ax \tag{5.6}$$

con $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. La función $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ dada por:

$$\Phi(t) = e^{tA} \qquad t \in \mathbb{R}$$

es la matriz fundamental de (5.6) principal en $t_0 = 0$.

Demostración. La demostración se podría hacer si previamente aprendemos a derivar series de potencias matriciales, algo que no haremos, por lo que optamos por esta otra demostración, que podemos realizar tras la demostración del Teorema 5.8.

Calculemos las iterantes de Picard para la ecuación (5.6) con cualquiera condición inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$, viendo cómo es la sucesión $\{x_n(t)\}$:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \\ x_{n+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} Ax_n(s)\ ds \end{aligned}$$

Por la teoría vista en la demostración del Teorema 5.8, sabemos que $\{x_n(t)\}$ converge uniformemente a una función x en $I \subseteq \mathbb{R}$, con I un intervalo acotado y que x era solución del problema con las condiciones iniciales. Calculemos una expresión para dicha x:

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t Ax_0\ ds = x_0 + tAx_0 = (I + tA)x_0$$

Que es un polinomio de primer grado en t.

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t A(I + sA)x_0\ ds = x_0 + tAx_0 + \frac{s^2}{2}A^2x_0 = \left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2\right)x_0$$

Que es un polinomio de segundo grado en t. Por inducción se podría probar que:

$$x_n(t) = \left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n\right)x_0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por una parte, sabemos que el paréntesis converge a e^{tA} y que x_0 es un vector constante. Como el producto de matrices por vectores es una operación continua, tenemos que $\{x_n(t)\} \to e^{tA}x_0$. Por otra parte, sabemos que las iterantes de Picard convergen absolutamente a la solución del problema de valor inicial, $x(t)$. Por tanto, deducimos que:

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

Para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

Para finalizar la demostración, hemos de probar tres cosas:

- Que Φ es una matriz solución de (5.6).
- Que Φ es una matriz fundamental.
- Que $\Phi(0) = I$, para tener que es principal en 0.

1. Ver que Φ es una matriz solución de (5.6) es equivalente a ver que sus columnas son soluciones vectoriales de la misma ecuación. Para ello, escribimos cómo son las columnas de Φ:

   $$\Phi(t) = (\phi_1(t)|\dots|\phi_d(t)) = (\Phi(t)e_1|\dots|\Phi(t)e_d)$$

   donde hemos notado por e_i al i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^d$. Sin embargo, antes vimos que cualquier función definida de la forma:

   $$x_v(t) = e^{tA}v \qquad v \in \mathbb{R}^d$$

   Es una solución de (5.6), por lo que $\Phi(t)e_i$ es solución de la ecuación, para cualquier e_i vector de la base canónica, de donde deducimos que Φ es una matriz solución de (5.6).

3. Tenemos que:
$$\Phi(0) = e^0 = I$$

2. Como $\Phi(0) = I$, tenemos que $\det(\Phi(0)) = 1 \neq 0$, por lo que Φ es matriz fundamental de (5.6), y en el punto 3 vimos que es principal en 0.

□

Observación. Notemos que la Proposición 5.17 nos da una equivalencia entre los sistemas de ecuaciones lineales y el cálculo de exponenciales de una matriz:

- Si sabemos calcular e^{tA}, sabemos ya resolver el sistema $x' = Ax$, ya que cualquier función vectorial de la forma $e^{tA} \cdot v$ será solución, independientemente del $v \in \mathbb{R}^d$ escogido.

- Si ahora tenemos un sistema $x' = Ax$ y queremos calcular e^{tA}, si resolvemos el sistema, obtenemos una matriz fundamental $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d\times d}$. Sin embargo, esta no tiene por qué ser la matriz fundamental principal en 0. A pesar de ello, anteriormente vimos en el Corolario 5.13.1, que nos permite realizar el cálculo ($\det(\Phi(t)) \neq 0\ \forall t \in \mathbb{R}$):
$$\Phi(t)\Phi(0)^{-1}$$
Obteniendo una matriz fundamental que además es principal en 0, ya que:
$$\Phi(0)\Phi(0)^{-1} = I$$
Por lo que dada cualquier matriz fundamental de (5.6), ya sabemos calcular la exponencial de la matriz A:
$$e^{At} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$$

5.2.3. Casos de cálculo de la exponencial de una matriz

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, veamos ahora varios casos de cálculo de e^A. Cada nuevo caso de cálculo engloba a los anteriores, pero el proceso para conseguir e^A es más difícil cuanto más general sea el caso.

Si A es diagonalizable en $\mathbb{R}$

En dicho caso, tendremos $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ valores propios reales de forma que podamos encontrar $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{R}^d$ vectores linealmente independientes[10] teniendo que v_i sea un vector propio del valor propio λ_i, $\forall i \in \{1, \ldots, d\}$. Vimos en la Sección 5.1.1 que si teníamos un sistema de la forma $x' = Ax$, entonces las funciones:
$$x_{v_i}(t) = e^{\lambda_i t} \cdot v_i \qquad i \in \{1, \ldots, d\}$$
eran solución del sistema. En esta situación, podemos producir una matriz solución, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ de la forma:
$$\Phi(t) = (x_{v_1}(t)| \ldots |x_{v_d}(t)) \qquad t \in \mathbb{R}$$

[10]Luego forman una base.

Que es una matriz fundamental, ya que:

$$\det(\Phi(0)) = \det(v_1|\dots|v_d) \neq 0$$

Por ser $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_d\}$ una base de $\mathbb{R}^d$, con lo que finalmente podemos aplicar la siguiente fórmula:

$$e^{tA} = \Phi(t) \cdot \Phi(0)^{-1} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Para obtener e^{tA}.

Ejemplo. Buscamos calcular la exponencial de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

A tiene valores propios $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -2$, de forma que los vectores $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (1, -1)$ forman una base de $\mathbb{R}^2$ de vectores propios. Por tanto, la matriz:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental de $x' = Ax$, con:

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Y bastaría calcular $\Phi(t) \cdot \Phi(0)^{-1}$ para obtener e^{tA}.

Si A es diagonalizable en $\mathbb{C}$

En dicho caso, tendremos r valores propios reales: $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ y r vectores propios reales linealmente independientes, $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^d$. Además, tendremos $d-r$ valores propios complejos, de forma que cuando tengamos un valor propio complejo, su conjugado también será un valor propio complejo, por lo que tendremos los valores propios complejos $\mu_1, \dots, \mu_s, \overline{\mu_1}, \dots, \overline{\mu_s} \in \mathbb{C}$ de forma que $2s = d-r$. Para cada valor propio complejo, tendremos un vector propio que sea linealmente independiente del resto, por lo que tendremos como vectores propios $w_1, \dots, w_s, \overline{w_1}, \dots, \overline{w_s} \in \mathbb{C}^d$ de forma que:

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, w_1, \overline{w_1}, \dots, w_s, \overline{w_s}\}$$

Sea una base de vectores propios de $\mathbb{R}^d$. Construiremos las funciones:

$$\begin{aligned} x_{v_i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d \qquad & i \in \{1, \dots, r\} \\ x_{w_j} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^d \qquad & j \in \{1, \dots, s\} \end{aligned}$$

dadas por:

$$\begin{aligned} x_{v_i}(t) = e^{\lambda_i t} \cdot v_i \qquad & t \in \mathbb{R}, \quad i \in \{1, \dots, r\} \\ x_{w_j}(t) = e^{\mu_j t} \cdot w_j \qquad & t \in \mathbb{R}, \quad j \in \{1, \dots, s\} \end{aligned}$$

Notemos que hemos usado solo los vectores propios w_j y que no hemos usado los vectores $\overline{w_j}$, ya que cuando tengamos $w_j \in \mathbb{C}^d$, entonces los vectores:

$$\begin{aligned} Re(z) &= \frac{1}{2}w_j + \frac{1}{2}\overline{w_j} \\ Im(z) &= \frac{1}{2i}w_j - \frac{1}{2i}\overline{w_j} \end{aligned}$$

Son linealmente independientes, y estos serán los que nos interesen[11]. Definimos ahora:

$$\psi_j(t) = Re(x_{w_j}(t)) \qquad \tilde{\psi_j}(t) = Im(x_{w_j}(t)) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Anteriormente vimos que x_{w_j}, ψ_j y $\tilde{\psi_j}$ son soluciones de $x' = Ax$, por lo que la matriz $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ dada por:

$$\Phi(t) = \Big(x_{v_1}(t)|\ldots|x_{v_r}(t)|\psi_1(t)|\tilde{\psi_1}(t)|\ldots|\psi_s(t)|\tilde{\psi_s}(t)\Big) \qquad t \in \mathbb{R}$$

Es una matriz solución, que además es fundamental por ser $\mathcal{B}$ una base. Finalmente, aplicamos la fórmula:

$$e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$$

Ejemplo. Buscamos ahora calcular la exponencial de matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta tiene como valores propios $\mu_1 = i$ y $\mu_2 = -i$, de forma que los vectores $w_1 = (1, i)$ y $w_2 = (1, -i)$ forman una base de $\mathbb{C}^2$ de vectores propios. Anteriormente vimos que las funciones:

$$e^{it} \cdot w_1 \qquad e^{-it} \cdot w_2$$

eran solución de $x' = Ax$. Con la primera (la segunda se obtiene con el conjugado) obtenemos las funciones:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= Re(e^{it}, ie^{it}) = (\cos t, -\operatorname{sen} t) \\ \widetilde{\psi_1}(t) &= Im(e^{it}, ie^{it}) = (\operatorname{sen} t, \cos t) \end{aligned}$$

Con lo que podemos construir la matriz $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

que es solución y fundamental por ser $\{(1, i), (1, -i)\}$ una base de $\mathbb{C}^2$. Adicionalmente, hemos tenido la suerte de que:

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Con lo que $e^{tA} = \Phi(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$.

[11]Por lo que a pesar de no considerar las funciones $x_{\overline{w_j}}$, las consideramos de forma implícita al considerar las funciones x_{w_j} y luego considerar sus partes real e imaginaria.

Como curiosidad, vemos que obtenemos la generalización de la fórmula:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

ya que:

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}} + I = 0$$

Ejercicio. Se deja como ejercicio obtener la fórmula de e^{tA} a partir de su propia definición. Resulta un buen ejercicio para saber manejar bien las series.

Cualquier matriz A. Forma canónica de Jordan

Para conseguir todas las casuísticas de cálculo de la exponencial de una matriz, es necesario tener en cuenta las matrices no diagonalizables. Para ello, es necesario antes estudiar la forma canónica de Jordan de una matriz cualquiera $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$.

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, existen $P, J \in \mathbb{R}^{d\times d}$ de forma que:

$$A = PJP^{-1}$$

Con J una matriz diagonal por bloques, a la que llamaremos forma de Jordan de[12] la matriz A. Es decir, J es de la forma:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

con:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix} \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, r\}$$

De esta forma, se verifica que una matriz es diagonalizable si y solo si tiene tantas cajas de Jordan como dimensiones ($r = d$), es decir, si todas sus cajas de Jordan son diagonalizables (y por tanto, de dimensión 1).

Ejemplo. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz de forma que su polinomio característico es de la forma $p(\lambda) = (\lambda - 3)^3$. Es decir, que tiene como valor propio 3 con multiplicidad algebraica 3, las posibes formas de Jordan para esta matriz A son:

$$\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

[12]Esta es única salvo conmutaciones de los bloques.

Que se corresponden con que la matriz A tenga multiplicidad geométrica 3 (y por tanto sea diagonalizable), 2 y 1, respectivamente.

Una vez que sepamos cual es la forma de Jordan de una matriz dada (por ejemplo, razonando por la multiplicidad geométrica de los valores propios), hallar una matriz P de cambio será sencillo, ya que bastará con resolver el sistema:

$$AP = PJ$$

imponiendo que $|P| \neq 0$ para que P sea invertible.

Veremos ahora cómo podemos calcular la exponencial de cualquier matriz si previamente conocemos su forma canónica de Jordan. Para ello, será necesario primero ver un par de resultados.

Lema 5.18. *Si dos matrices son semejantes, entonces sus potencias son semejantes. Dicho de otra forma, si $A, B, P \in \mathbb{R}^{d\times d}$ de forma que:*

$$A = PBP^{-1}$$

Entonces:

$$A^n = PB^nP^{-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración. Para $n \in \{0, 1\}$ la demostración es trivial. Procedemos por inducción sobre n:

Para $n = 2$:

$$A^2 = A \cdot A = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) \overset{(*)}{=} PB^2P^{-1}$$

Donde en $(*)$ hemos aplicado que el producto de matrices es asociativo.

Supuesto para n, veámoslo para $n + 1$:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = (PB^nP^{-1})(PBP^{-1}) \overset{(*)}{=} PB^{n+1}P^{-1}$$

Donde en $(*)$ hemos vuelto a aplicar que el producto de matrices es asociativo.

□

Proposición 5.19. *Si dos matrices son semejantes, entonces sus exponenciales son semejantes. Dicho de otra manera, si $A, B, P \in \mathbb{R}^{d\times d}$ de forma que:*

$$A = PBP^{-1}$$

Entonces:

$$e^A = Pe^BP^{-1}$$

Demostración. Si consideramos las sumas parciales de la serie que nos permite calcular e^A:

$$\begin{aligned} S_n^A &= I + A + \frac{1}{2}A^2 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n \\ &\overset{(*)}{=} I + PBP^{-1} + \frac{1}{2}PB^2P^{-1} + \ldots + \frac{1}{n!}PB^nP^{-1} \\ &\overset{(**)}{=} P\left(I + B + \frac{1}{2}B^2 + \ldots + \frac{1}{n!}B^n\right)P^{-1} = PS_n^BP^{-1} \end{aligned}$$

Donde en $(*)$ hemos usado el Lema 5.18 y en $(**)$ la propiedad distributiva del producto de matrices[13]. Si ahora tomamos límites cuando $n \to \infty$ y aplicamos que el producto de matrices es una operación continua, llegamos a la igualdad que queríamos probar. □

A partir de la Proposición 5.19, calcular e^A se reduce a hallar la forma canónica de Jordan de la matriz A junto con la matriz P de cambio de base y por último saber calcular e^J.

Nos interesaremos por tanto, en ver cómo calcular e^J, siendo J una matriz en forma canónica de Jordan. Sin embargo, notemos que las matrices diagonales por bloques tienen una propiedad especial (demostrarla se deja como ejercicio), y es que:

$$J^n = \begin{pmatrix} J_1^n & & & \\ & J_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r^n \end{pmatrix} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, al igual que pasaba con las matrices diagonales, tenemos que:

$$e^J = \begin{pmatrix} e^{J_1^n} & & & \\ & e^{J_2^n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_r^n} \end{pmatrix}$$

De esta forma, calcular e^A para cualquier matriz A se reduce a saber cómo calcular e^H, siendo H una matriz de la forma:

$$H = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Y esta exponencial vamos a calcularla a partir del sistema de ecuaciones diferenciales

[13]Teniendo en cuenta que el producto no es conmutativo.

lineal dado por $x' = Hx$, es decir, el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1' & = & \lambda x_1 & + & x_2 \\ x_2' & = & \lambda x_2 & + & x_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{r-1}' & = & \lambda x_{r-1} & + & x_r \\ x_r' & = & \lambda x_r & & \end{array}\right.$$

Para ello, vamos a aplicar el cambio de variable:

$$y_i(t) = e^{-\lambda t} x_i(t) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, r\}$$

Tenemos que:

$$\begin{array}{ll} y_i' = e^{-\lambda t} x_i' - \lambda e^{-\lambda t} x_i = e^{-\lambda t}(x_i' - \lambda x_i) = e^{-\lambda t} x_{i+1} = y_{i+1} & \forall i \in \{1, \ldots, r-1\} \\ y_r' = e^{-\lambda t} x_r' - \lambda e^{-\lambda t} x_r = e^{-\lambda t}(x_r' - \lambda x_r) = e^{-\lambda t} \cdot 0 = 0 & \end{array}$$

Por lo que nos queda el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccc} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ \vdots & & \vdots \\ y_{r-1}' & = & y_r \\ y_r' & = & 0 \end{array}\right.$$

Que ya se puede resolver de forma fácil en escalera, con:

$$\begin{aligned} y_r(t) &= c_r \\ y_{r-1}(t) &= c_{r-1} + c_r t \\ y_{r-2}(t) &= c_{r-2} + c_{r-1} t + c_r \frac{t^2}{2} \\ &\vdots \\ y_1(t) &= c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2} + \ldots + c_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio, tenemos:

$$\begin{aligned} x_r(t) &= e^{\lambda t} c_r \\ x_{r-1}(t) &= e^{\lambda t} \left(c_{r-1} + c_r t\right) \\ x_{r-2}(t) &= e^{\lambda t} \left(c_{r-2} + c_{r-1} t + c_r \frac{t^2}{2}\right) \\ &\vdots \\ x_1(t) &= e^{\lambda t} \left(c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2} + \ldots + c_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\right) \end{aligned}$$

Y para construir una matriz fundamental de $x' = Hx$, vamos dando valores a las constantes. Si les damos a las constantes los valores de las componentes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^d$, obtenemos la matriz:

$$\Phi(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & {t^2}/{2} & \cdots & {t^{r-1}}/{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & {t^{r-2}}/{(r-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & {t^{r-3}}/{(r-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Que es matriz fundamental, por tener determinante 1. De esta forma:

$$e^{tJ} = \Phi(t) \cdot \Phi(0)^{-1} = \Phi(t) \cdot I = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & {t^2}/{2} & \cdots & {t^{r-1}}/{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & {t^{r-2}}/{(r-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & {t^{r-3}}/{(r-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Consideramos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Que solo tiene el valor propio $\lambda_1 = 2$ (raíz doble), con espacio vectorial asociado a dicho valor de dimensión 1, generado por el vector $v_1 = (0, 1)$. En este caso, la forma canónica de Jordan podría ser:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ó} \qquad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix}$$

Y la primera es imposible, ya que sería diagonalizable. Finalmente, calculamos una matriz P tal que:

$$A = PJP^{-1}$$

Que podemos calcular gracias al sistema:

$$AP = PJ$$

imponiendo que $|P| \neq 0$ para que P sea invertible. Una matriz P admisible (hay muchas), es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que:

$$e^A = Pe^J P^{-1}$$

Y usando la fórmula anteriormente obtenida para el caso $r = 2$:

$$e^J = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo que llegamos a que (háganse las cuentas):

$$e^A = Pe^J P^{-1}$$

6. Relaciones de Problemas

6.1. Ecuaciones y sistemas

Ejercicio 6.1.1. En Teoría del Aprendizaje, se supone que la velocidad a la que se memoriza una materia es proporcional a la cantidad que queda por memorizar. Suponemos que M es la cantidad total de materia a memorizar y $A(t)$ es la cantidad de materia memorizada a tiempo t. Determine una ecuación diferencial para $A(t)$. Encuentre soluciones de la forma $A(t) = a + be^{\lambda t}$.

Tras interpretar el enunciado, deducimos que:

$$A' = \lambda(M - A),$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es la constante de proporcionalidad. Esta es la ecuación diferencial que buscamos, con dominio $D = \mathbb{R}^2$ y condición inicial $A(0) = 0$.

Para resolverlo, empleamos conocimientos del Capítulo 2. Como se trata de una ecuación lineal, sus soluciones son de la forma:

$$A(t) = e^{-\lambda t}\left(\int e^{\lambda t} M\lambda dt + C\right) = e^{-\lambda t}\left(Me^{\lambda t} + C\right) = M + Ce^{-\lambda t}$$

Empleando la condición inicial, tenemos que $A(0) = M + C = 0 \Longrightarrow C = -M$. Por tanto, la solución es:

$$A(t) = M - Me^{-\lambda t} = M(1 - e^{-\lambda t}) \qquad \text{definida en } \mathbb{R}$$

Ejercicio 6.1.2. Interprete cada enunciado como una ecuación diferencial:

1. El grafo de $y(x)$ verifica que la pendiente de la recta tangente en un punto es el cuadrado de la distancia del punto al origen.

   Sea el punto $P = (x_0, y(x_0))$. La pendiente de la recta tangente en dicho punto es $m_t = y'(x_0)$. Por otro lado, la distancia del punto al origen, notada por $d(P, O)$ es $d(P, O) = \sqrt{x_0^2 + y(x_0)^2}$. Como la condición impuesta en el enunciado es $m_t = (d(P, O))^2$, tenemos que la ecuación diferencial que describe el enunciado es:

   $$y' = x^2 + y^2 \qquad \text{con dominio } D = \mathbb{R}^2$$

2. El grafo de $y(x)$ verifica en cada punto que la distancia del origen al punto de corte de la recta tangente con el eje de ordenadas coincide con la distancia del origen al punto de corte de la recta normal con el eje de abscisas.

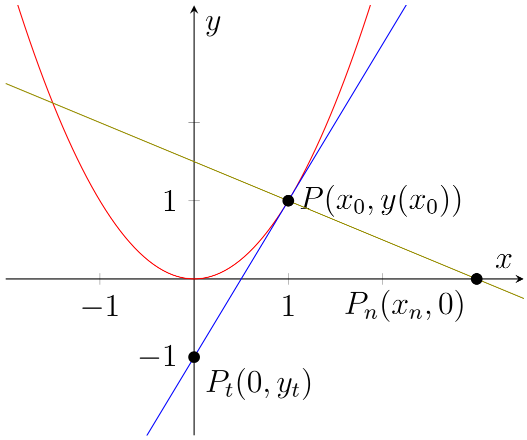


Figura 6.1: Representación gráfica del enunciado del Ejercicio 6.1.2.2.

La representación gráfica de la situación se encuentra en la Figura 6.1.

Sea el punto $P = (x_0, y(x_0))$. Para ambas rectas, usaremos la ecuación punto-pendiente. Para la recta tangente, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} m_t = y'(x_0) \\ P_t = (0, y_t) \end{array}\right\} \Longrightarrow y'(x_0) = \frac{y(x_0) - y_t}{x_0 - 0} \Longrightarrow y_t = y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0)$$

Notemos además que, en el caso de $x_0 = 0$, también podemos ver que se cumple que $y_t = y(x_0) - 0 \cdot y'(x_0) = y(x_0)$. Respecto a la recta normal, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} m_n = -\dfrac{1}{y'(x_0)} \\ P_n = (x_n, 0) \end{array}\right\} \Longrightarrow -\frac{1}{y'(x_0)} = \frac{0 - y(x_0)}{x_n - x_0} \Longrightarrow x_n = y(x_0) \cdot y'(x_0) + x_0$$

Notemos que, si $y'(x_0) = 0$, se cumple también que $x_n = 0 \cdot y(x_0) + x_0 = x_0$. Además, si $x_n = x_0$, entonces se tiene que $y'(x_0) = 0$ o $y(x_0) = 0$, por lo que también se cumple.

La ecuación diferencial que especifica el enunciado es $|y_t| = |x_n|$. Por tanto, tenemos que:

$$|y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0)| = |y(x_0) \cdot y'(x_0) + x_0|$$

Quitando los valores absolutos, llegamos a que:

$$\begin{array}{c} y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0) = y(x_0) \cdot y'(x_0) + x_0 \Longrightarrow y(x_0) - x_0 = y'(x_0)\,(y(x_0) + x_0) \\ y(x_0) - x_0 \cdot y'(x_0) = -y(x_0) \cdot y'(x_0) - x_0 \Longrightarrow y(x_0) + x_0 = y'(x_0)\,(x_0 - y(x_0)) \end{array}$$

Por tanto, las ecuaciones diferenciales que describen el enunciado son:

$$\begin{array}{ll} y - x = y'\,(y + x) & \text{con dominio } \Omega_1 = \mathbb{R}^3 \\ y + x = y'\,(x - y) & \text{con dominio } \Omega_2 = \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Estas ecuaciones diferenciales no están en forma normal. Si quisiésemos dejarlas en forma normal (que no es recomendable, puesto que se dividen los dominios y se pierden soluciones), estas serían:

$$y' = \frac{y-x}{y+x} \qquad \text{con dominio} \begin{cases} D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < -x\} \\ \vee \\ D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x\}. \end{cases}$$

$$y' = \frac{y+x}{x-y} \qquad \text{con dominio} \begin{cases} D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\} \\ \vee \\ D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}. \end{cases}$$

Ejercicio 6.1.3. En ciertas reacciones químicas, la velocidad a la que se forma un nuevo compuesto viene dada por la ecuación

$$x' = k(x-\alpha)(\beta - x),$$

donde $x(t)$ es la cantidad de compuesto a tiempo t, $k > 0$ es una constante de proporcionalidad y $\beta > \alpha > 0$. Usando el campo de direcciones, prediga el comportamiento de $x(t)$ cuando $t \to +\infty$.

El dominio de la ecuación diferencial es $D = \mathbb{R}^2$. Tenemos que x' solo se anula en $x = \alpha$ y $x = \beta$. Consideramos por tanto los siguientes casos:

- Si $x \in]-\infty, \alpha[$: En este caso, $x < \alpha < \beta$, luego $x - \alpha < 0$ y $\beta - x > 0$. Por tanto, $x' < 0$, luego es decreciente.
- Si $x \in]\alpha, \beta[$: En este caso, $\alpha < x < \beta$, luego $x - \alpha > 0$ y $\beta - x > 0$. Por tanto, $x' > 0$, luego es creciente.
- Si $x \in]\beta, +\infty[$: En este caso, $x > \beta > \alpha$, luego $x - \alpha > 0$ y $\beta - x < 0$. Por tanto, $x' < 0$, luego es decreciente.

El campo de direcciones se encuentra en la Figura 6.2.

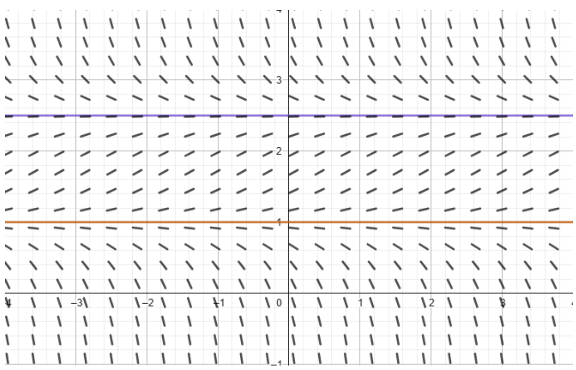


Figura 6.2: Campo de direcciones del Ejercicio 6.1.3.

Por tanto, para el comportamiento de $x(t)$ cuando $t \to +\infty$, tenemos que:

- Si $x(0) \in]-\infty, \alpha[$, entonces x' es decreciente, luego $x(t) \to -\infty$.
- Si $x(0) \in]\alpha, \beta[$, entonces x' es creciente, luego $x(t) \to \beta$.

- Si $x(0) \in]\beta, +\infty[$, entonces x' es decreciente, luego $x(t) \to \beta$.

Ejercicio 6.1.4. Encuentre la familia de trayectorias ortogonales a las familias de curvas siguientes, teniendo en cuenta que para resolver las ecuaciones que aparecen en 2 y 3 habrá que esperar a la siguiente lección:

1. $xy = k$,

   Buscamos en primer lugar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas dada. Para ello, derivamos implícitamente la ecuación dada:

$$0 = y + xy' \Longrightarrow y' = -\frac{y}{x} \qquad \text{con dominio } \left\{ \begin{array}{rcl} D_1 & = & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ & \vee & \\ D_2 & = & \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

   Notemos que hemos tenido que dividir el dominio en dos partes, puesto que la ecuación diferencial no está definida en $x = 0$. De aquí en adelante, debemos trabajar con ambos dominios. La familia de curvas dada son las soluciones de dicha ecuación diferencial (en ambos dominios).

   Sabiendo que el producto de las pendientes ortogonales es -1, tenemos que la ecuación diferencial que describe las curvas ortogonales es:

$$y' = \frac{x}{y} \qquad \text{con dominio } \left\{ \begin{array}{rcl} D_{11} & = & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ & \vee & \\ D_{12} & = & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \\ & \vee & \\ D_{21} & = & \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \\ & \vee & \\ D_{22} & = & \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-. \end{array} \right.$$

2. $y = kx^4$,

   Buscamos en primer lugar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas dada. Para ello, derivamos implícitamente la ecuación dada:

$$0 = 4kx^3 - y' \Longrightarrow y' = 4kx^3 = 4 \cdot \frac{y}{x^4} \cdot x^3 = 4 \cdot \frac{y}{x} \qquad \text{con dominio } \left\{ \begin{array}{rcl} D_1 & = & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ & \vee & \\ D_2 & = & \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

   Por tanto, tenemos que la familia de curvas dada son las soluciones de dicha ecuación diferencial. Sabiendo que el producto de las pendientes ortogonales es -1, tenemos que la ecuación diferencial que describe las curvas ortogonales es:

$$y' = -\frac{x}{4y} \qquad \text{con dominio } \left\{ \begin{array}{rcl} D_{11} & = & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ & \vee & \\ D_{12} & = & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \\ & \vee & \\ D_{21} & = & \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+ \\ & \vee & \\ D_{22} & = & \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-. \end{array} \right.$$

3. $y = e^{kx}$.

   Buscamos en primer lugar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas dada. Para ello, derivamos implícitamente la ecuación dada:

$$0 = ke^{kx} - y' \Longrightarrow y' = ke^{kx}$$

   Para despejar la k, tenemos que $k = \dfrac{\ln y}{x}$. Por tanto, tenemos que:

$$y' = \frac{\ln y}{x} \cdot e^{\frac{\ln y}{x} \cdot x} = \frac{\ln y}{x} \cdot y = \frac{y}{x} \ln y \qquad \text{con dominio} \begin{cases} D_1 &= \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ & \vee \\ D_2 &= \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

   Por tanto, tenemos que la familia de curvas dada son las soluciones de dicha ecuación diferencial. Sabiendo que el producto de las pendientes ortogonales es -1, tenemos que la ecuación diferencial que describe las curvas ortogonales es:

$$y' = -\frac{x}{y \ln y} \qquad \text{con dominio} \begin{cases} D_{11} &= \mathbb{R}^+ \times]0, 1[\\ & \vee \\ D_{12} &= \mathbb{R}^+ \times]1, +\infty[\\ & \vee \\ D_{21} &= \mathbb{R}^- \times]0, 1[\\ & \vee \\ D_{22} &= \mathbb{R}^- \times]1, +\infty[. \end{cases}$$

Ejercicio 6.1.5. Haga un dibujo aproximado del campo de direcciones asociado a la ecuación

$$x' = t + x^3.$$

Dibuje la curva donde las soluciones alcanzan un punto crítico. Considerando una solución tal que $x(0) = 0$, demuestre que tal solución alcanza en 0 un mínimo local estricto y que de hecho es el mínimo global.

Las soluciones alcanzan un punto crítico donde $x'(t) = 0$, es decir, $t + x^3 = 0$. Por tanto, las soluciones alcanzan un punto crítico en la curva $x(t) = \sqrt[3]{-t}$. Razonemos ahora el campo de direcciones:

- Sobre la recta $x(t) = \sqrt[3]{-t}$, tenemos que $x'(t) = 0$, por lo que el campo de direcciones es horizontal.

- Por encima de la recta, sabemos que $t + x^3 > 0$, por lo que $x' > 0$. El campo de direcciones es creciente.

- Por debajo de la recta, sabemos que $t + x^3 < 0$, por lo que $x' < 0$. El campo de direcciones es decreciente.

El dibujo, tanto del campo de direcciones como de la curva, se encuentra en la Figura 6.3.

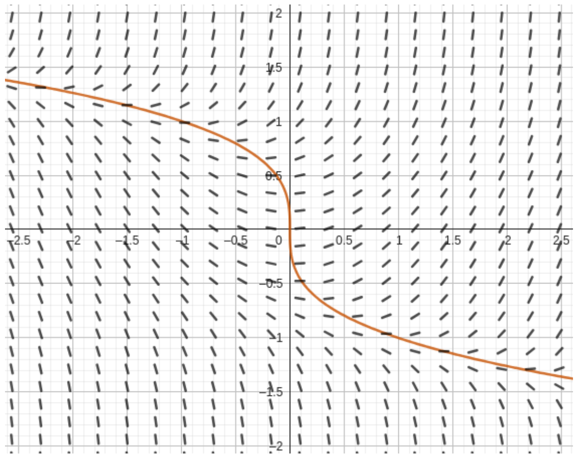


Figura 6.3: Campo de direcciones y curva del Ejercicio 6.1.5.

Supongamos ahora una solución tal que $x(0) = 0$. Como x es una solución de una ecuación diferencial de primer orden, tenemos que $x \in C^1(\mathbb{R})$. Por tanto, x es derivable en 0. Calculamos la derivada de x en 0:

$$x'(0) = 0 + x(0)^3 = 0$$

Por tanto, tenemos que es un punto crítico. Comprobemos que es un mínimo local estricto. Para ello, calculamos la segunda derivada de x en 0:

$$x''(0) = 1 + 3x(0)^2 \cdot x'(0) = 1 + 3 \cdot 0^2 \cdot 0 = 1 > 0$$

Por tanto, es un mínimo local estricto.

Respecto de la demostración de que es un mínimo global, intuitivamente observando el campo de direcciones se tiene. No obstante, busquemos demostrarlo formalmente. Supongamos que $\exists t_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \neq 0$ tal que $x(t_0) \leqslant 0$.

- Como $x(0) = 0$ es un mínimo local, en un entorno del origen, los puntos con coordenada t positiva están en el primer cuadrante. Además, como en ese cuadrante tenemos que $x' > 0$, entonces $x(t) > 0$ para $t > 0$. Por tanto, ha de ser $t_0 < 0$.

- Como $t_0 < 0$ y $x(t_0) \leqslant 0$, tenemos que $(t_0, x(t_0))$ está en el tercer cuadrante o en el semieje OT negativo. En está región, tenemos que $x' < 0$, por lo que $x(t)$ es decreciente. Entonces, como $x(t_0) \leqslant 0$ y $t_0 < 0$, tenemos que $x(0) < x(t_0) \leqslant 0$, lo que contradice que $x(0) = 0$.

Por tanto, no existe $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \neq 0$ tal que $x(t_0) \leqslant 0$, por lo que $x(t) > 0$ para $t \neq 0$. Por tanto, $x(0)$ es un mínimo global.

Ejercicio 6.1.6. Resuelva los siguientes apartados:

1. Estudie cuántas funciones diferenciables $y(x)$ se pueden extraer de la curva

$$C \equiv x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 1,$$

dando su intervalo maximal de definición.

Buscamos obtener y en función de x. Hay dos opciones:

Opción 1: Buscamos completar cuadrados para obtener las funciones $y(x)$:

$$\begin{aligned}x^2+2y^2+2x+2y &= (x+1)^2-1+2(y^2+y) = \\ &= (x+1)^2-1+2(y^2+y+1/4-1/4) = \\ &= (x+1)^2-1+2(y+1/2)^2-1/2\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$C \equiv (x+1)^2+2(y+1/2)^2 = 5/2 \equiv (y+1/2)^2 = \frac{5/2-(x+1)^2}{2}$$

Aplicando la raíz cuadrada, tenemos que:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{5/2-(x+1)^2}{2}} - \frac{1}{2}$$

Opción 2: Despejamos y usando la ecuación de segundo grado, considerando x fijo:

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 2\cdot(x^2+2x-1)}}{4} = -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{4-4\cdot 2\cdot(x^2+2x-1)}{16}} = \\ &= -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{4+4\cdot 2\cdot(2-2)-4\cdot 2\cdot(x^2+2x-1)}{16}} = \\ &= -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{4+4\cdot 2\cdot(2)-4\cdot 2\cdot(x^2+2x+1)}{16}} = \\ &= -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{20-4\cdot 2\cdot(x+1)^2}{16}} = -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5/2-(x+1)^2}{2}}\end{aligned}$$

En ambos casos, vemos que obtenemos dos funciones diferenciables, una para cada signo. Como C es una elipse, se trata de la parte superior e inferior de la misma. El intervalo maximal de definición es aquel que mantiene el argumento de la raíz cuadrada positivo:

$$\begin{aligned}&\frac{5/2-(x+1)^2}{2} \geqslant 0 \Longrightarrow 5/2 \geqslant (x+1)^2 \Longrightarrow |x+1| \leqslant \sqrt{5/2} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow -\sqrt{5/2}-1 \leqslant x \leqslant \sqrt{5/2}-1\end{aligned}$$

Por tanto, el intervalo maximal de definición es $I = \left[-\sqrt{5/2}-1, \sqrt{5/2}-1\right]$.

2. Usando derivación implícita, encuentre una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x,y)$ que admita como soluciones a las funciones del apartado anterior.

   Derivamos implícitamente la ecuación dada:

   $$2x+2+(4y+2)y' = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{2x+2}{4y+2} = -\frac{x+1}{2y+1}$$

   Por tanto, la ecuación diferencial que describe las funciones del apartado anterior es $y = f(x,y)$, con:

   $$f(x,y) = -\frac{x+1}{2y+1} \qquad \text{con dominio} \left\{\begin{array}{c} D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2y+1>0\} \\ \vee \\ D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2y+1<0\}.\end{array}\right.$$

3. La misma cuestión para una ecuación del tipo $g(y, y') = 0$.

   Despejamos x de la ecuación de C usando la ecuación de segundo grado:

$$x(y) = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (2y^2 + 2y - 1)}}{2} =$$
$$= -1 \pm \sqrt{1 - 2y^2 - 2y + 1} = -1 \pm \sqrt{2(1 - y^2 - y)}$$

   Veamos cuál es el intervalo maximal de definición de $x(y)$:

$$1 - y^2 - y \geqslant 0 \Longrightarrow y^2 + y - 1 \leqslant 0 \Longrightarrow \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

   Por tanto, el intervalo maximal de definición es $J = \left[\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

   Usando el resultado anterior, tenemos que:

$$0 = 2x + 2 + (4y+2)y' = 2 \cdot \left(-\cancel{1} \pm \sqrt{2(1 - y^2 - y)}\right) + \cancel{2} + (4y+2)y' =$$
$$= \pm\sqrt{2(1 - y^2 - y)} + (2y+1)y'$$

   Por tanto, la curva C tiene como ecuaciones diferenciales asociadas las siguientes, ambas definidas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times J$:

$$\pm\sqrt{2(1 - y^2 - y)} + (2y+1)y' = 0$$

Ejercicio 6.1.7. Una persona, partiendo del origen, se mueve en la dirección del eje x positivo tirando de una cuerda de longitud s atada a una piedra. Se supone que la cuerda se mantiene tensa en todo momento, y que la piedra es arrastrada desde el punto de partida $(0, s)$. La trayectoria que describe la piedra es una curva clásica llamada tractriz. Encuentre una ecuación diferencial para la misma.

Observación. Se supone que la cuerda se mantiene tangente a la trayectoria de la piedra en todo momento.

La situación descrita se encuentra en la Figura 6.4.

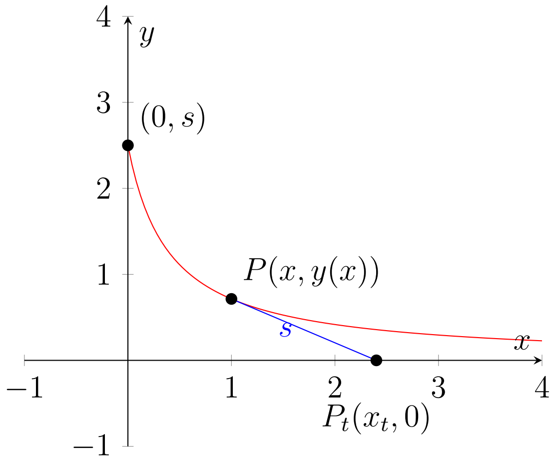


Figura 6.4: Representación gráfica de la situación del Ejercicio 6.1.7.

Por tanto, la condición impuesta es que la distancia desde un punto de la gráfica al punto de corte de la tangente a la curva por ese punto con el eje de abscisas es constante e igual a s. Es decir, si el punto es $(x, y(x))$, entonces la condición es:

$$\sqrt{(x-x_t)^2 + y(x)^2} = s$$

Veamos cómo calcular x_t. Usando la definición de pendiente con los puntos P y P_t, tenemos:

$$y'(x) = \frac{y(x)-0}{x-x_t} \Longrightarrow x_t = x - \frac{y(x)}{y'(x)}$$

Notemos que $y'(x) = 0$ no tiene sentido, puesto que la recta descrita sea horizontal, y por tanto no habría punto de corte con el eje X (es decir, no habría un único x_t). Por tanto, la ecuación diferencial que describe la curva es:

$$\sqrt{\left(x - x + \frac{y(x)}{y'(x)}\right)^2 + y(x)^2} = s \Longrightarrow \sqrt{\frac{y(x)^2}{y'(x)^2} + y(x)^2} = s$$

Elevando al cuadrado, tenemos que:

$$\frac{y(x)^2}{y'(x)^2} + y(x)^2 = s^2 \Longrightarrow y'(x)^2 = \frac{y(x)^2}{s^2 - y(x)^2}$$

Notemos que $y(x) < s$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que el denominador es siempre positivo. Aplicamos ahora la raíz cuadrada, sabiendo que $y'(x) < 0$ por ser la pendiente de la curva decreciente, y $y(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{\sqrt{s^2 - y(x)^2}}$$

Usando la notación correspondiente, tenemos que la ecuación diferencial que admite como solución a la curva descrita es:

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{s^2-y^2}} \qquad \text{con dominio } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ -s < y < s\}$$

Ejercicio 6.1.8. Demuestre que si $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x'' + x = 0, \tag{6.1}$$

entonces también cumple, para alguna constante $c \in \mathbb{R}$,

$$(x')^2 + x^2 = c. \tag{6.2}$$

Encuentre una solución de $(x')^2 + x^2 = 1$ que no sea solución de (6.1).

Demostración. Sea $I \subset \mathbb{R}$ el intervalo de definición de $x(t)$ solución de (6.1). Definimos la función auxiliar

$$\begin{array}{rccl} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & (x'(t))^2 + x^2(t). \end{array}$$

Por ser x una solición de una ecuación diferencial de segundo orden, tenemos que $x \in C^2(I)$. Por tanto, $x,\ x' \in C^1(I)$ y, por tanto f es derivable. Calculamos su derivada:

$$f'(t) = 2x'(t)x''(t) + 2x(t)x'(t) = 2x'(t)\ \left[x''(t) + x(t)\right] = 2x'(t) \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, $f'(t) = 0$ para todo $t \in I$, lo que implica que f es constante en I. Es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x'(t))^2 + x^2(t) = c \quad \forall t \in I.$$

Por tanto, queda demostrado lo pedido. □

Para la segunda parte, sea la solución $x(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{gathered}(x'(t))^2 + x^2(t) = 0^2 + 1^2 = 1,\\ x''(t) + x(t) = 0 + 1 = 1\end{gathered}$$

Ejercicio 6.1.9. Una nadadora intenta atravesar un río pasando de la orilla $y = -1$ a la orilla opuesta $y = 1$. La corriente es uniforme, con velocidad $v_R > 0$ y paralela a la orilla. Por otra parte, la nadadora se mueve a velocidad constante $v_N > 0$ y apunta siempre hacia una torre situada en el punto $T = (2, 1)$. Las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_R + v_N \cdot \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}},\\ \frac{dy}{dt} &= v_N \cdot \frac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}},\end{aligned}$$

describen la posición (x, y) de la nadadora en el instante t; es decir $x = x(t)$, $y = y(t)$.

1. Explique cómo se ha obtenido este sistema.

   Representemos la situación en la Figura 6.5.

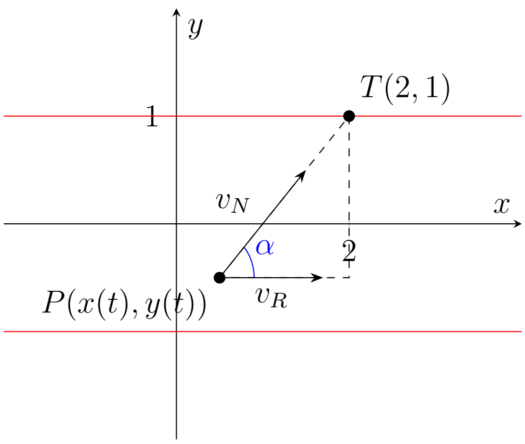


Figura 6.5: Representación gráfica de la situación del Ejercicio 6.1.9.

Tenemos que $x(t)$ es la componente horizontal de la posición de la nadadora, por lo que $x'(t)$ es la velocidad horizontal de la nadadora:

$$x'(t) = v_R + v_N \cdot \cos(\alpha) \overset{(*)}{=} v_R + v_N \cdot \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}$$

donde en $(*)$ hemos empleado la definición de coseno como cateto contiguo sobre hipotenusa. Por otro lado, $y(t)$ es la componente vertical de la posición de la nadadora, por lo que $y'(t)$ es la velocidad vertical de la nadadora:

$$y'(t) = v_N \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \overset{(*)}{=} v_N \cdot \frac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}}$$

donde en $(*)$ hemos empleado la definición de seno como cateto opuesto sobre hipotenusa.

2. Encuentre la ecuación diferencial de la órbita $y = y(x)$.

   Tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{v_N \cdot \dfrac{1-y}{\sqrt{(2-x)^2+(1-y)^2}}}{v_R + v_N \cdot \dfrac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2+(1-y)^2}}} = \frac{1-y}{\dfrac{v_R}{v_N}\sqrt{(2-x)^2+(1-y)^2} + 2 - x}$$

Ejercicio 6.1.10. Encuentre una ecuación diferencial de segundo orden que admita como soluciones a las siguientes familias de funciones, donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

1. $x = c_1e^t + c_2e^{-t}$,

   Derivamos dos veces:

$$\begin{aligned} x' &= c_1e^t - c_2e^{-t}, \\ x'' &= c_1e^t + c_2e^{-t}. \end{aligned}$$

   Como conclusión, vemos que $x'' = x$ con dominio $D = \mathbb{R}^2$ admite como solución a la familia de funciones dada.

2. $x = c_1 \cosh t + c_2 \operatorname{senh} t$.

   Derivamos dos veces:

$$\begin{aligned} x' &= c_1 \operatorname{senh} t + c_2 \cosh t, \\ x'' &= c_1 \cosh t + c_2 \operatorname{senh} t. \end{aligned}$$

   Como conclusión, vemos que $x'' = x$ con dominio $D = \mathbb{R}^2$ admite de nuevo como solución a la familia de funciones dada.

Ejercicio 6.1.11. Dada la ecuación de Clairaut:

$$x = tx' + \varphi(x')$$

1. Encuentre una familia uniparamétrica de soluciones rectilíneas.

   La ecuación de la recta es:
   $$x(t) = at + b \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$
   Veamos qué condición hemos de imponer para que cumpla la ecuación de Clairaut:
   $$at + b = at + \varphi(a) \Longrightarrow b = \varphi(a)$$
   Por tanto, tenemos que una familia uniparamétrica de soluciones rectilíneas es:
   $$x_a(t) = at + \varphi(a) \qquad a \in \mathbb{R}$$

2. Suponiendo que $\varphi(x) = x^2$, demuestre que $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ también es solución.

   Para esto, vemos:
   $$tx' + \varphi(x') = t \cdot \left(\frac{-2t}{4}\right) + \left(\frac{-2t}{4}\right)^2 = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4} = -\frac{t^2}{4} = x$$
   Por tanto, $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ es solución.

3. ¿Qué relación hay entre esta solución y las que se han encontrado antes?

   Suponemos $\varphi(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Veamos que, para cada $a \in \mathbb{R}$, $\exists! t_a \in \mathbb{R}$ tal que x_a es tangente a $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ en $t = t_a$.

   En primer lugar, calculamos los puntos de corte entre ambas curvas:
   $$x_a(t) = -\frac{t^2}{4} \Longrightarrow at + a^2 = -\frac{t^2}{4} \Longrightarrow t^2 + 4at + 4a^2 = 0 \Longrightarrow$$
   $$\Longrightarrow t_a = \frac{-4a \pm \sqrt{16a^2 - 16a^2}}{2} = -2a$$
   Por tanto, el punto de tangencia es $t_a = -2a$. Por otro lado, calculamos la pendiente de la recta tangente en t_a:
   $$x'(t_a) = \frac{-2t_a}{4} = \frac{4a}{4} = a$$
   Por tanto, queda demostrado. Esto se conoce como que la solución hallada en el apartado anterior es la envolvente de la familia de soluciones rectilíneas.

Ejercicio 6.1.12. Resuelva los problemas 6 y 7 de la página 33 (sección 2.6) del libro de Ahmad-Ambrosetti.

1. **Problema 6:** Transformar la ecuación $e^{x'} = x$ en una ecuación en forma normal y prueba que tiene una única solución tal que $x(t_0) = a$ para todo t_0 y todo $a \in \mathbb{R}^+$.

   Aplicando el logaritmo neperiano, tenemos que la ecuación diferencial en forma normal es:
   $$x' = \ln x \qquad \text{con dominio } D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

2. **Problema 7:** Encuentra la ecuación cuya solución es la catenaria:

$$x(t) = \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Calculamos su derivada:

$$x'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{senh}(t)$$

Por tanto, la ecuación diferencial que describe la catenaria es:

$$x' = \operatorname{senh}(t) \qquad \text{con dominio } D = \mathbb{R}^2$$

6.2. Cambios de Varible

Ejercicio 6.2.1. Estudie las soluciones de la ecuación

$$x' = \frac{t-5}{x^2}$$

dando en cada caso su intervalo maximal de definición.

Tenemos que se trata de una ecuación de variables separadas de la forma dada por $x' = p(t)q(x)$, con:

$$\begin{array}{rccl} p: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & t-5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} q: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

donde consideramos $I = \mathbb{R}$ y, para que el dominio sea conexo, podemos considerar $J = \mathbb{R}^+$ o $J = \mathbb{R}^-$.

Usamos por tanto el método de variables separadas. En primer lugar, comprobamos que q no tiene raíces en J:

$$q(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow 1 = 0$$

Una vez comprobado esto, procedemos a resolver la ecuación usando el método de variables separadas:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t-5}{x^2} \Longrightarrow x^2 dx = (t-5)dt \Longrightarrow \int x^2 dx = \int (t-5)dt \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{x^3}{3} = \frac{t^2}{2} - 5t + C' \qquad C' \in \mathbb{R}$$

Despejando x obtenemos la solución de la ecuación diferencial:

$$x(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 - 15t + C} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Busquemos ahora su intervalo maximal de definición (llamémoslo $\widehat{I} \subset I$). Necesitamos que $x(t) \in J$ para todo $t \in \widehat{I}$ y que x sea derivable en $\widehat{I}$. Distinguimos casos:

- $\underline{J = \mathbb{R}^+}$: En este caso, necesitamos que $x(t) > 0$ para todo $t \in \widehat{I}$. Para ello, basta con que el radicando sea positivo:

  $$\frac{3}{2}t^2 - 15t + C > 0$$

  Veamos en qué puntos se anula el radicando:

  $$\frac{3}{2}t^2 - 15t + C = 0 \Longrightarrow t = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 6C}}{3} = 5 \pm \sqrt{25 - \frac{2C}{3}}$$

  Distinguimos en función de C:

  $$25 - \frac{2C}{3} = 0 \Longrightarrow C = \frac{75}{2}$$

- $\underline{C > 75/2}$: En este caso, el último radicando es negativo, luego no se anula el radicando de x, y este es siempre positivo. Por tanto, $x(t) > 0$ para todo $t \in I$; es decir, $x(t) \in J$ para todo $t \in I$. Además, como la raíz cúbica es derivable en $\mathbb{R}^*$ y el radicando de x es siempre positivo, x es derivable en I, luego el intervalo maximal de definición es I, $\widehat{I} = I$.
- $\underline{C = 75/2}$: En este caso, el último radicando se anula en $t = 5$. Por tanto, $\underline{x(t) > 0}$ para $t \in I \setminus \{5\}$. Por tanto, como el intervalo de definición de la solución debe ser conexo, consideramos las dos siguientes opciones:

$$I_1 =]-\infty, 5[\qquad I_2 =]5, +\infty[$$

En ambos casos, como $x(t) \in J$ para todo $t \in I_1$ y todo $t \in I_2$, y x es derivable en I_1 y I_2, el intervalo maximal de definición es $\widehat{I} = I_1$ o $\widehat{I} = I_2$.
- $\underline{C < 75/2}$: En este caso, el último radicando es positivo, luego se anula en dos puntos, t_1 y t_2 dados por:

$$t_1 = 5 - \sqrt{25 - \frac{2C}{3}} \qquad t_2 = 5 + \sqrt{25 - \frac{2C}{3}}$$

Por tanto, $x(t) > 0$ para $t \in I \setminus [t_1, t_2]$. Por tanto, como el intervalo de definición de la solución debe ser conexo, consideramos las dos siguientes opciones:

$$I_1 =]-\infty, t_1[\qquad I_2 =]t_2, +\infty[$$

En todos los casos, como $x(t) \in J$ para todo $t \in I_1$ y todo $t \in I_2$, y x es derivable en I_1 y I_2, el intervalo maximal de definición es $\widehat{I} = I_1$ o $\widehat{I} = I_2$.

- $\underline{J = \mathbb{R}^-}$: En este caso, necesitamos que $x(t) < 0$ para todo $t \in \widehat{I}$. Para ello, basta con que el radicando sea negativo:

$$\frac{3}{2}t^2 - 15t + C < 0$$

Distinguimos en función de C:

- $\underline{C > 75/2}$: En este caso, el último radicando es negativo, luego no se anula el radicando de x. Además, $x(t) > 0$ para todo $t \in I$, por lo que no hay solución en este caso.
- $\underline{C = 75/2}$: En este caso, el último radicando se anula en $t = 5$. Por tanto, $\underline{x(t) > 0}$ para $t \in I \setminus \{5\}$. Además, como el intervalo de definición de la solución debe ser abierto y conexo, no hay solución en este caso.
- $\underline{C < 75/2}$: En este caso, el último radicando es positivo, luego se anula en dos puntos, t_1 y t_2 dados por:

$$t_1 = 5 - \sqrt{25 - \frac{2C}{3}} \qquad t_2 = 5 + \sqrt{25 - \frac{2C}{3}}$$

Por tanto, $x(t) < 0$ para $t \in [t_1, t_2]$. Como en el abierto es derivable, el intervalo maximal de definición es $\widehat{I} =]t_1, t_2[$.

Ejercicio 6.2.2. En Dinámica de Poblaciones, dos modelos muy conocidos son la ecuación de Verhulst o logística

$$P' = P(\alpha - \beta P)$$

y la ecuación de Gompertz

$$P' = P(\alpha - \beta \ln P)$$

siendo $P(t)$ la población a tiempo t de una determinada especie y α, β parámetros positivos. Calcule en cada caso la solución con condición inicial $P(0) = 100$.

Resolvamos en primer lugar la ecuación de Verhulst. Se trata de una ecuación de variables separadas de la forma $P' = p(t)q(P)$, con:

$$\begin{array}{rccl} p: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} q: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(\alpha - \beta P) \end{array}$$

donde consideramos $I = J = \mathbb{R}$. Comprobamos las raíces de q en J:

$$q(P) = 0 \Longleftrightarrow P(\alpha - \beta P) = 0 \Longleftrightarrow P = 0, \frac{\alpha}{\beta}$$

Por tanto, dos soluciones de la ecuación son, para todo $t \in I$:

$$P(t) = 0 \qquad P(t) = \frac{\alpha}{\beta}$$

Procedemos ahora a resolver la ecuación de variables separadas. Para ello, trabajaremos con $J_1 = \mathbb{R}^-$, $J_2 =]0, \alpha/\beta[$ y $J_3 =]\alpha/\beta, +\infty[$, ya que necesitamos que $q(P) \neq 0$ para todo P en la segunda componente del dominio.

- $\underline{J_1 = \mathbb{R}^-}$:

  Como en este caso no cumple que $P(0) = 100 \in J_1$, no nos interesa este dominio.

- $\underline{J_2 =]0, \alpha/\beta[}$:

  Veamos qué hemos de de imponer para considerar este dominio; es decir, para que $P(0) = 100 \in J_2$:

  $$100 \in J_2 \Longleftrightarrow 100 < \frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow 100\beta < \alpha$$

  En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio $I \times J_2$:

  $$P' = P(\alpha - \beta P) \Longrightarrow \frac{dP}{dt} = P(\alpha - \beta P) \Longrightarrow \frac{dP}{P(\alpha - \beta P)} = dt \Longrightarrow$$
  $$\Longrightarrow \int \frac{dP}{P(\alpha - \beta P)} = \int dt$$

  Para resolver la primera integral, aplicamos el método de descomposición en fracciones simples:

  $$\frac{1}{P(\alpha - \beta P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{\alpha - \beta P} = \frac{A(\alpha - \beta P) + BP}{P(\alpha - \beta P)}$$

- Para $P = 0$: $1 = A \cdot \alpha \Longrightarrow A = {}^1\!/\!_\alpha$.
- Para $P = {}^\alpha\!/\!_\beta$: $1 = B \cdot {}^\alpha\!/\!_\beta \Longrightarrow B = {}^\beta\!/\!_\alpha$.

Por tanto, tenemos que:

$$\Longrightarrow \int \frac{dP}{P(\alpha - \beta P)} = \int dt \Longrightarrow \frac{1}{\alpha}\int \frac{dP}{P} + \frac{\beta}{\alpha}\int \frac{dP}{\alpha - \beta P} = \int dt \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\alpha}\ln(P) - \frac{1}{\alpha}\ln(\alpha - \beta P) = t + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

donde en la última implicación hemos usado que $P \in J_2$.

Operando con la solución obtenida, llegamos a:

$$\ln\left(\frac{P}{\alpha - \beta P}\right) = \alpha(t + C) \Longrightarrow \frac{P}{\alpha - \beta P} = e^{\alpha(t+C)} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow P(1 + \beta e^{\alpha(t+C)}) = \alpha e^{\alpha(t+C)} \Longrightarrow P = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 + \beta e^{\alpha(t+C)}}$$

Estudiamos el intervalo de definición de la solución $\widehat{I} \subset I$ de manera que $P(t) \in J_2$ para todo $t \in \widehat{I}$ y P sea derivable en $\widehat{I}$. Como P es derivable en $\mathbb{R}$, solo necesitamos que $P(t) \in J_2$ para todo $t \in \widehat{I}$:

$$0 < P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 + \beta e^{\alpha(t+C)}}$$
$$\frac{\alpha}{\beta} > P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 + \beta e^{\alpha(t+C)}} \Longrightarrow \alpha + \cancel{\alpha\beta e^{\alpha(t+C)}} > \cancel{\alpha\beta e^{\alpha(t+C)}} \Longrightarrow \alpha > 0$$

Esto tenemos que se tiene directamente, luego $\widehat{I} = I$.

Por tanto, para $P \in J_2$, la familia de soluciones es:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 + \beta e^{\alpha(t+C)}} \qquad t \in I, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Estableciendo la condición inicial $P(0) = 100$, obtenemos:

$$P(0) = 100 = \frac{\alpha e^{\alpha C}}{1 + \beta e^{\alpha C}} \Longrightarrow 100(1 + \beta e^{\alpha C}) = \alpha e^{\alpha C} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 100 + 100\beta e^{\alpha C} = \alpha e^{\alpha C} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 100 = \alpha e^{\alpha C} - 100\beta e^{\alpha C} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 100 = e^{\alpha C}(\alpha - 100\beta) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow e^{\alpha C} = \frac{100}{\alpha - 100\beta} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{\alpha - 100\beta}\right)$$

Por tanto, la solución con condición inicial $P(0) = 100$ es:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1 + \beta e^{\alpha(t+C)}}, \quad t \in I, \qquad C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{\alpha - 100\beta}\right)$$

- $J_3 =]^\alpha/_\beta, +\infty[$:

  Veamos qué hemos de de imponer para considerar este dominio; es decir, para que $P(0) = 100 \in J_3$:

$$100 \in J_3 \iff 100 > \frac{\alpha}{\beta} \iff 100\beta > \alpha$$

En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio $I \times J_3$. Por los cáculos realizados en el caso anterior, tenemos que:

$$\frac{1}{\alpha}\ln(P) - \frac{1}{\alpha}\ln(\beta P - \alpha) = t + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Estudiamos el intervalo de definición de la solución $\widehat{I} \subset I$ de manera que $P(t) \in J_3$ para todo $t \in \widehat{I}$ y P sea derivable en $\widehat{I}$:

$$\frac{\alpha}{\beta} < P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1 + \beta e^{\alpha(t+C)}} \Longrightarrow -\alpha + \cancel{\alpha\beta e^{\alpha(t+C)}} < \cancel{\alpha\beta e^{\alpha(t+C)}} \Longrightarrow -\alpha < 0 \Longrightarrow \alpha > 0$$

$$\beta e^{\alpha(t+C)} \neq 1 \Longrightarrow e^{\alpha(t+C)} \neq \frac{1}{\beta} \Longrightarrow \alpha(t+C) \neq \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \Longrightarrow t + C \neq -\frac{\ln(\beta)}{\alpha} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow t \neq -\frac{\ln(\beta)}{\alpha} - C$$

Como el intervalo de definición de la solución debe ser conexo, consideramos las dos siguientes opciones:

$$\widehat{I}_1 = \left]-\infty, -\frac{\ln(\beta)}{\alpha} - C\right[\qquad \widehat{I}_2 = \left]-\frac{\ln(\beta)}{\alpha} - C, +\infty\right[$$

Llegamos por tanto a que la familia de soluciones para $P \in J_3$ es:

$$P(t) = \frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1 + \beta e^{\alpha(t+C)}} \qquad C \in \mathbb{R} \qquad \text{con dominio } \begin{cases} t \in \widehat{I}_1 \\ \vee \\ t \in \widehat{I}_2 \end{cases}$$

Estableciendo la condición inicial $P(0) = 100$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
P(0) = 100 = \frac{\alpha e^{\alpha C}}{-1 + \beta e^{\alpha C}} &\Longrightarrow 100(-1 + \beta e^{\alpha C}) = \alpha e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow -100 + 100\beta e^{\alpha C} = \alpha e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow -100 = \alpha e^{\alpha C} - 100\beta e^{\alpha C} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow -100 = e^{\alpha C}(\alpha - 100\beta) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow e^{\alpha C} = \frac{-100}{\alpha - 100\beta} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow C = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{100\beta - \alpha}\right)
\end{aligned}$$

Para dicho valor de C, veámos cuál es el intervalo de definición de la solución tal que 0 pertenece a él:

$$\frac{-\ln(\beta)-\ln\left(\frac{100}{100\beta-\alpha}\right)}{\alpha}<0 \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{\beta}\right)-\ln\left(\frac{100}{100\beta-\alpha}\right)<0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \ln\left(\frac{100\beta-\alpha}{100\beta}\right)<0 \Longleftrightarrow \frac{100\beta-\alpha}{100\beta}<1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \cancel{100\beta}-\alpha<\cancel{100\beta} \Longleftrightarrow \alpha>0$$

Por tanto, la solución con condición inicial $P(0)=100$ es:

$$P(t)=\frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1+\beta e^{\alpha(t+C)}},\quad t\in\widehat{I_2},\qquad C=\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{100\beta-\alpha}\right)$$

Por tanto, y a modo de resumen, las soluciones de la ecuación de Verhulst con condición inicial $P(0)=100$ son, en función de los parámetros α,β:

- $\underline{100=\alpha/\beta}$: En este caso, se trata de la solución constante, luego:

$$P(t)=100=\frac{\alpha}{\beta}\qquad t\in I$$

- $\underline{100<\alpha/\beta}$: En este caso, la solución está en J_2, luego:

$$P(t)=\frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{1+\beta e^{\alpha(t+C)}},\quad t\in I,\qquad C=\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{\alpha-100\beta}\right)$$

- $\underline{100>\alpha/\beta}$: En este caso, la solución está en J_3, luego:

$$P(t)=\frac{\alpha e^{\alpha(t+C)}}{-1+\beta e^{\alpha(t+C)}},\quad t\in\widehat{I_2},\qquad C=\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{100}{100\beta-\alpha}\right)$$

Resolvamos ahora la ecuación de Gompertz. Se trata de una ecuación de variables separadas de la forma $P'=p(t)q(P)$, con:

$$\begin{array}{rccc} p: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} q: & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(\alpha-\beta\ln P) \end{array}$$

donde consideramos $I=\mathbb{R}$, $J=\mathbb{R}^+$. Comprobamos las raíces de q en J:

$$q(P)=0 \Longleftrightarrow P(\alpha-\beta\ln P)=0 \Longleftrightarrow P=0,e^{\alpha/\beta}$$

La solución $P=0$ no es válida, puesto que no pertenece al dominio J. Por tanto, la única solución constante es:

$$P(t)=e^{\alpha/\beta}\qquad t\in I$$

Procedemos ahora a resolver la ecuación de variables separadas. Para ello, trabajaremos con $J_1=\left]0,e^{\alpha/\beta}\right[$ y $J_2=\left]e^{\alpha/\beta},+\infty\right[$, ya que necesitamos que $q(P)\neq 0$ para todo P en la segunda componente del dominio.

- $J_1 = \left]0, e^{\alpha/\beta}\right[$:

  Veamos qué hemos de de imponer para considerar este dominio; es decir, para que $P(0) = 100 \in J_1$:

$$100 \in J_1 \iff 100 < e^{\alpha/\beta} \iff \ln 100 < \frac{\alpha}{\beta}$$

  En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio $I \times J_1$:

$$P' = P(\alpha - \beta \ln P) \Longrightarrow \frac{dP}{dt} = P(\alpha - \beta \ln P) \Longrightarrow \frac{dP}{P(\alpha - \beta \ln P)} = dt \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \int \frac{dP}{P(\alpha - \beta \ln P)} = \int dt$$

  Para resolver la integral del logaritmo, aplicamos el cambio de variable $P = e^u$, luego $dP = e^u du$:

$$\int \frac{dP}{P(\alpha - \beta \ln P)} = \int \frac{e^u du}{e^u(\alpha - \beta u)} = \int \frac{du}{\alpha - \beta u} = -\frac{1}{\beta}\ln(\alpha - \beta u) + C' =$$
$$= -\frac{1}{\beta}\ln(\alpha - \beta \ln P) + C' \qquad C' \in \mathbb{R}$$

  donde hemos hecho uso de que:

$$\alpha - \beta u > 0 \iff u < \frac{\alpha}{\beta} \iff \ln P < \frac{\alpha}{\beta} \iff 0 < P < e^{\alpha/\beta} \iff P \in J_1$$

  Operando, llegamos a que:

$$-\frac{1}{\beta}\ln(\alpha - \beta \ln P) = t + C \Longrightarrow \alpha - \beta \ln P = e^{-\beta(t+C)} \Longrightarrow \ln P = \frac{\alpha - e^{-\beta(t+C)}}{\beta}$$

  Por tanto, la solución uniparamétrica de la ecuación de Gompertz en J_1 es:

$$P(t) = \exp\left(\frac{\alpha - e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \qquad t \in I, \qquad C \in \mathbb{R}$$

  Estableciendo la condición inicial $P(0) = 100$, obtenemos:

$$P(0) = 100 = \exp\left(\frac{\alpha - e^{-\beta C}}{\beta}\right) \Longrightarrow \ln(100) = \frac{\alpha - e^{-\beta C}}{\beta} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow e^{-\beta C} = \alpha - \beta \ln(100) \Longrightarrow C = -\frac{1}{\beta}\ln(\alpha - \beta \ln(100))$$

  Por tanto, la solución con condición inicial $P(0) = 100$ es:

$$P(t) = \exp\left(\frac{\alpha - e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \qquad t \in I, \qquad C = -\frac{1}{\beta}\ln(\alpha - \beta \ln(100))$$

- $J_2 = \left]e^{\alpha/\beta}, +\infty\right[$:

  Veamos qué hemos de de imponer para considerar este dominio; es decir, para que $P(0) = 100 \in J_2$:

  $$100 \in J_2 \Longleftrightarrow 100 > e^{\alpha/\beta} \Longleftrightarrow \ln 100 > \frac{\alpha}{\beta}$$

  En este caso, resolvemos la ecuación de variables separadas con dominio $I \times J_2$. Por los cáculos realizados en el caso anterior, tenemos que:

  $$-\frac{1}{\beta}\ln(\beta \ln P - \alpha) = t + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

  donde hemos hecho uso de que:

  $$\alpha - \beta u < 0 \Longleftrightarrow u > \frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow \ln P > \frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow P > e^{\alpha/\beta} \Longleftrightarrow P \in J_2$$

  Operando, llegamos a que la solución uniparamétrica de la ecuación de Gompertz en J_2, definida en el intervalo $\widehat{I} \subset I$ es:

  $$P(t) = \exp\left(\frac{\alpha + e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \qquad t \in \widehat{I}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

  Estudiemos el intervalo de definición de la solución $\widehat{I} \subset I$ de manera que $P(t) \in J_2$ para todo $t \in \widehat{I}$ y P sea derivable en $\widehat{I}$:

  $$\frac{\alpha + e^{-\beta(t+C)}}{\beta} > \frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow \cancel{\alpha} + e^{-\beta(t+C)} > \cancel{\alpha} \Longleftrightarrow e^{-\beta(t+C)} > 0$$

  Por tanto, el intervalo de definición de la solución es $\widehat{I} = I$.

  Estableciendo la condición inicial $P(0) = 100$, y repitiendo los cálculos del apartado anterior, llegamos a:

  $$P(0) = 100 \Longrightarrow C = -\frac{1}{\beta}\ln(\beta \ln(100) - \alpha)$$

  Por tanto, la solución con condición inicial $P(0) = 100$ es:

  $$P(t) = \exp\left(\frac{-\alpha + e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \qquad t \in I, \qquad C = -\frac{1}{\beta}\ln(\beta \ln(100) - \alpha)$$

Por tanto, y a modo de resumen, las soluciones de la ecuación de Gompertz con condición inicial $P(0) = 100$ son, en función de los parámetros α, β:

- $100 = e^{\alpha/\beta}$: En este caso, se trata de la solución constante, luego:

  $$P(t) = 100 = e^{\alpha/\beta} \qquad t \in I$$

- $\underline{100 < e^{\alpha/\beta}}$: En este caso, la solución está en J_1, luego:

$$P(t) = \exp\left(\frac{\alpha - e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \qquad t \in I, \qquad C = -\frac{1}{\beta}\ln(\alpha - \beta\ln(100))$$

- $\underline{100 > e^{\alpha/\beta}}$: En este caso, la solución está en J_2, luego:

$$P(t) = \exp\left(\frac{-\alpha + e^{-\beta(t+C)}}{\beta}\right) \qquad t \in I, \qquad C = -\frac{1}{\beta}\ln(\beta\ln(100) - \alpha)$$

Ejercicio 6.2.3. Nos planteamos resolver la ecuación

$$x' = \cos(t - x)$$

Compruebe que el cambio $y = t - x$ nos lleva a una ecuación de variables separadas. Resuelva e invierta el cambio para llegar a una expresión explícita de $x(t)$. Repase el procedimiento por si se ha perdido alguna solución por el camino.

Al no indicarnos nada sobre la primera variable, suponemos que esta no varía, luego el cambio de variable a aplicar es:

$$\begin{cases} s = t, \\ y = t - x. \end{cases}$$

Al no especificar dominio de la ecuación, suponemos que está definida en $\mathbb{R}^2$. Consideramos entonces las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t,x) & \longmapsto & (s,y) = (t, t-x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \psi = (\psi_1, \psi_2) : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (s,y) & \longmapsto & (t,x) = (s, s-y) \end{array}$$

Para emplear el cambio de variable, en primer lugar hemos de comprobar que φ es un difeomorfismo. Para ello, hemos demostrar que φ es biyectiva y que $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Demostraremos en primer lugar que $\varphi \circ \psi = Id_{\mathbb{R}^2} = \psi \circ \varphi$:

$$\begin{array}{ll} \varphi \circ \psi(s,y) = \varphi(s, s-y) = (s, s-(s-y)) = (s,y) = Id_{\mathbb{R}^2}(s,y) & \forall (s,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \psi \circ \varphi(t,x) = \psi(t, t-x) = (t, t-(t-x)) = (t,x) = Id_{\mathbb{R}^2}(t,x) & \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Por tanto, hemos demostrado que φ es biyectiva y que $\varphi^{-1} = \psi$. Además, como ambas componentes de φ, ψ son de clase 1, tenemos que $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, luego φ es un difeomorfismo.

A continuación, hemos de comprobar que el cambio es admisible. Aunque lo sabemos puesto que no varía la primera variable, lo demostramos:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} f(t,x) = 1 + 0 \cdot \cos(t-x) = 1 \neq 0$$

Por tanto, tenemos que el cambio de variable es admisible. Procedemos a aplicarlo a la ecuación dada:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} = 1 - \cos(t - x) = 1 - \cos y$$

Usando la notación usual, la nueva ecuación diferencial, con dominio $\mathbb{R}^2$, es:

$$y' = 1 - \cos y$$

Esta es de la forma $y' = p(s)q(y)$, con:

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} q: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & 1 - \cos y \end{array}$$

Buscamos en primer lugar los valores en los que se anula q:

$$q(y) = 0 \Longleftrightarrow 1 - \cos y = 0 \Longleftrightarrow \cos y = 1 \Longleftrightarrow y = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Fijado ahora $k \in \mathbb{Z}$, restringimos ahora el dominio de q a $J_k =]2\pi k, 2\pi(k+1)[$. En J tenemos que q no se anula, luego procedemos a resolver la ecuación de variables separadas:

$$\frac{dy}{ds} = 1 - \cos y \Longrightarrow \frac{dy}{1 - \cos y} = ds \Longrightarrow \int \frac{dy}{1 - \cos y} = \int ds$$

Para poder resolver la integral, reducimos el dominio de q, considerando ahora para cada $k \in \mathbb{Z}$ el intervalo $J_k' =]\pi k, \pi(k+1)[$. En este dominio, la función $1+\cos y$ no se anula, por lo que podemos multiplicar y dividir por ella para resolver la integral a la que hemos llegado:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{1 - \cos y} &= \int \frac{1 + \cos y}{1 - \cos^2 y} dy = \int \frac{1 + \cos y}{\operatorname{sen}^2 y} dy = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 y} dy + \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen}^2 y} dy = \\ &= -\frac{1}{\operatorname{tg} y} - \frac{1}{\operatorname{sen} y} + C' \qquad C' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Por tanto, la familia de soluciones con $y \in J_k'$ es:

$$-\frac{1}{\operatorname{tg} y} - \frac{1}{\operatorname{sen} y} = s + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Sabemos que define una ecuación implícita $y(s)$ en cierto dominio $\widehat{I} \subset \mathbb{R}$.

- En J_k', sabemos que $\operatorname{tg}(y) > 0$, luego $-\frac{1}{\operatorname{tg} y} < 0$.
- En J_k', sabemos que $\operatorname{sen}(y) > 0$, luego $-\frac{1}{\operatorname{sen} y} < 0$.
- Por tanto, tenemos que $s + C < 0$, es decir, $s < -C$.

Por tanto, tan solo podemos concluir que $\widehat{I} \subset]-\infty, -C[$.

Deshaciendo el cambio de variable, llegamos a que la familia de soluciones con $t \in \widehat{I}$ es:

$$-\frac{1}{\operatorname{tg}(t-x)} - \frac{1}{\operatorname{sen}(t-x)} = t + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 6.2.4. Experimentalmente, se sabe que la resistencia al aire de un cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado de la velocidad del mismo. Por tanto, si $v(t)$ es la velocidad a tiempo t, la ecuación de Newton nos dice que

$$v' + \frac{k}{m}v^2 = g,$$

donde m es la masa del cuerpo, g es la constante de gravitación universal y $k > 0$ depende de la geometría (aerodinámica) del cuerpo. Si se supone que $v(0) = 0$, calcule la solución explícita y describa el comportamiento a largo plazo.

Se trata de una ecuación de variables separadas de la forma $v' = p(t)q(v)$, con:

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} q: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & -\dfrac{k}{m}v^2 + g \end{array}$$

Comprobamos las raíces de q en $\mathbb{R}$:

$$q(v) = 0 \Longleftrightarrow -\frac{k}{m}v^2 + g = 0 \Longleftrightarrow v^2 = \frac{gm}{k} \Longleftrightarrow \begin{cases} v_1 = -\sqrt{\dfrac{gm}{k}}, \\ v_2 = \sqrt{\dfrac{gm}{k}}. \end{cases}$$

Como buscamos la solución que cumple $v(0) = 0$, consideramos el dominio dado por $J =]v_1, v_2[$. En este dominio, q no se anula, luego procedemos a resolver la ecuación de variables separadas:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v^2 + g \Longrightarrow \frac{dv}{-\frac{k}{m}v^2 + g} = dt \Longrightarrow \int \frac{dv}{-\frac{k}{m}v^2 + g} = \int dt \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow m \int \frac{dv}{-kv^2 + gm} = t + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Para resolver la integral, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{-kv^2 + gm} = \frac{A}{v - v_1} + \frac{B}{v - v_2} = \frac{A(v - v_2) + B(v - v_1)}{(v - v_1)(v - v_2)}$$

- Para $v = v_1$: $1 = A(v_1 - v_2) \Longrightarrow A = \dfrac{1}{v_1 - v_2} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{mg}}$.
- Para $v = v_2$: $1 = B(v_2 - v_1) \Longrightarrow B = \dfrac{1}{v_2 - v_1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{mg}}$.

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
m\int \frac{dv}{-kv^2+gm} &= m\int \left(\frac{A}{v-v_1}+\frac{B}{v-v_2}\right)dv = \\
&= m\left(A\ln(v-v_1)+B\ln(v_2-v)\right)+C' = \\
&= \frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\left(\ln(v_2-v)-\ln(v-v_1)\right)+C' = \\
&= \frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ln\left(\frac{v_2-v}{v-v_1}\right)+C' = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}-v}{\sqrt{\frac{gm}{k}}+v}\right)+C'
\end{aligned}$$

Por tanto, la famlia de soluciones en J es:

$$\frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}-v}{\sqrt{\frac{gm}{k}}+v}\right) = t+C \qquad C\in\mathbb{R}$$

Operando, llegamos a:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}-v}{\sqrt{\frac{gm}{k}}+v} &= \exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right) \\
-v\left[1+\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\right] &= \sqrt{\frac{gm}{k}}\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)-\sqrt{\frac{gm}{k}} \\
v &= -\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)-\sqrt{\frac{gm}{k}}}{1+\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)} \\
v &= \frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}\left[1-\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\right]}{1+\exp\left((t+C)\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)}
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución con condición inicial $v(0)=0$ es:

$$\begin{aligned}
v(0)=0=\frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}\left[1-\exp\left(C\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\right]}{1+\exp\left(C\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)} \Longrightarrow 1=\exp\left(C\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right) \Longrightarrow \\
\Longrightarrow C\cdot\frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}=0 \Longrightarrow C=0
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución con condición inicial $v(0) = 0$ es:

$$v(t) = \frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}\left[1 - \exp\left(t \cdot \frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\right]}{1 + \exp\left(t \cdot \frac{2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Estudiemos ahora el comportamiento a largo plazo de la solución. Para ello, consideramos el límite cuando $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = -\sqrt{\frac{gm}{k}}$$

Observación. No nos termina de cuadrar el resultado obtenido, aunque hemos revisado los cálculos. Si algún lector encuentra algún error, le agradeceríamos que nos lo comunicara.

Ejercicio 6.2.5. Calcule la solución de la ecuación

$$y' = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$$

que verifica $y(0) = 1$.

En este caso, se trata de una ecuación reducible a homogénea. Estudiemos qué cambio de variable hemos de emplear:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Por tanto, hemos de emplear una traslación según el vector $(x_*, y_*) \in \mathbb{R}^2$. En primer lugar, el dominio de la ecuación diferencial ha de ser una de las componentes conexas de:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y - 1 \neq 0\right\}$$

Para que el punto $(0, y(0)) = (0, 1)$ esté en el dominio, el dominio será:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y - 1 < 0\right\}$$

Consideramos entonces el cambio de variable:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : & D & \longrightarrow & D_1 \\ & (x, y) & \longmapsto & (u, v) = (x - x_*, y - y_*) \end{array}$$

donde el codominio, D_1, es:

$$\begin{aligned} D_1 = \varphi(D) &= \left\{\varphi(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y - 1 < 0\right\} = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u + x_*, v + y_*) \in D\right\} = \\ &= \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + x_* - v - y_* - 1 < 0\right\} \end{aligned}$$

La inversa de φ, puesto que podemos despejar cada una de las componentes de forma única, es:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi^{-1} : & D_1 & \longrightarrow & D \\ & (u, v) & \longmapsto & (x, y) = (u + x_*, v + y_*) \end{array}$$

Por tanto, φ, φ^{-1} son biyectivas. Como además son de clase C^1 por ser ambas componentes polinómicas, tenemos que φ es un difeomorfismo. Además, es admisible, ya que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} y' = 1 + 0 \cdot y' = 1 \neq 0$$

Por tanto, procedemos a aplicar el cambio de variable a la ecuación dada:

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = \frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1} = \frac{u+x_*+v+y_*-3}{u+x_*-v-y_*-1}$$

Buscamos ahora resolver el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x_* + y_* = 3, \\ x_* - y_* = 1. \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_* = 2, \\ y_* = 1. \end{array}\right.$$

Por tanto, tras haber aplicado el cambio de variable según la traslación de $(2,1)$, la ecuación diferencial se convierte en:

$$v' = \frac{u+v}{u-v}$$

Como buscamos que $y(0) = 1$, tenemos que $v(-2) = 0$. Esta es una ecuación homogénea, con dominio:

$$\begin{aligned} D_1' &= \{(u,v) \in D_1 \mid u < 0\} = \\ &= \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u < 0,\ u - v < 0\right\} \end{aligned}$$

El cambio de variable a aplicar es:

$$\begin{array}{rccl} \varphi' = (\varphi_1', \varphi_2') : & D_1' & \longrightarrow & D_2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (t,s) = (u, {}^{v}\!/\!{}_{u}) \end{array}$$

donde el codominio, D_2, es:

$$\begin{aligned} D_2 = \varphi'(D_1') &= \left\{\varphi'(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u,v) \in D_1'\right\} = \left\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid (t, s\cdot t) \in D_1'\right\} = \\ &= \left\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0,\ t - s \cdot t < 0\right\} \end{aligned}$$

La inversa de φ', puesto que podemos despejar cada una de las componentes de forma única, es:

$$\begin{array}{rccl} (\varphi')^{-1} : & D_2 & \longrightarrow & D_1' \\ & (t,s) & \longmapsto & (u,v) = (t, s\cdot t) \end{array}$$

Por tanto, $\varphi', (\varphi')^{-1}$ son biyectivas. Como además son de clase C^1 por ser ambas componentes cociente o producto de funciones de clase C^1, tenemos que φ' es un difeomorfismo. Además, es admisible, ya que la primera componente no varía. La demostración de que es admisible es:

$$\frac{\partial \varphi_1'}{\partial u} + \frac{\partial \varphi_1'}{\partial v} v' = 1 + 0 \cdot v' = 1 \neq 0$$

Por tanto, procedemos a aplicar el cambio de variable a la ecuación dada:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{du}\cdot\cancelto{1}{\frac{du}{dt}}=-\frac{v}{u^2}+\frac{v'}{u}=-\frac{1}{u}\cdot\frac{v}{u}+\frac{1}{u}\cdot\frac{1+{}^{v}/_{u}}{1-{}^{v}/_{u}}=-\frac{s}{t}+\frac{1}{t}\cdot\frac{1+s}{1-s}$$

Por tanto, la ecuación homogénea se convierte en:

$$s'=\frac{1}{t}\left(\frac{1+s}{1-s}-s\right)\qquad\text{con dominio } D_2=\mathbb{R}^-\times\,]-\infty,1[$$

Esta es una ecuación de variables separadas, luego procedemos a resolverla. Buscamos las raíces de la función con variable s:

$$\frac{1+s}{1-s}-s=0\Longleftrightarrow 1+s=s(1-s)=s-s^2\Longleftrightarrow s^2+1=0$$

Vemos que no tiene soluciones constantes, luego aplicamos el método de resolución:

$$\frac{ds}{\dfrac{1+s}{1-s}-s}=\frac{dt}{t}\Longrightarrow\int\frac{1-s}{1+s^2}\,ds=\int\frac{dt}{t}\Longrightarrow\int\frac{1}{1+s^2}\,ds-\int\frac{s}{1+s^2}\,ds=\ln(-t)+C'\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\arctan(s)-\frac{1}{2}\ln(1+s^2)=\ln(-t)+C$$

Por la teoría vista de resolución de ecuaciones en variables separadas, tenemos que esto define una función implícita $s(t)$ en $\widehat{I}_3\subset\mathbb{R}^-$. Veamos el dominio de la solución, para lo cual consideramos:

- $\arctan(s)\in\,]{}^{-\pi}/_{2},{}^{\pi}/_{4}[$ para todo $s\in\,]-\infty,1[$.
- $\ln(1+s^2)>0$ para todo $s\in\,]-\infty,1[$, por lo que $-\dfrac{1}{2}\ln(1+s^2)<0$.
- Por tanto, la parte izquierda de la igualdad es menor que ${}^{\pi}/_{4}$ para cualquier $s\in\,]-\infty,1[$.
- Por tanto, y debido a que es una igualdad, tenemos que:

  $$\ln(-t)+C<\frac{\pi}{4}\Longrightarrow -t<e^{\pi/4-C}\Longrightarrow t>-e^{\pi/4-C}$$

- Deducimos por tanto que $\widehat{I}_3\subset\left]-e^{\pi/4-C},0\right[$.

  No obstante, no podemos asegurar que se dé la igualdad, y estudiar el dominio concreto es complejo.

Deshacemos el segundo cambio de variable:

$$\arctan\left(\frac{v}{u}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{v}{u}\right)^2\right)=\ln(-u)+C$$

Esto define una función implícita $v(u)$ en $\widehat{I}_2=\widehat{I}_3\subset\left]-e^{\pi/4-C},0\right[$. Por último, deshacemos el primer cambio de variable:

$$\arctan\left(\frac{y-1}{x-2}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2\right)=\ln(-x+2)+C$$

Esta ecuación define una función implícita $y(x)$ en el dominio $\widehat{I_1} \subset \left]-e^{\pi/4-C}+2, 2\right[$. Estableciendo la condición inicial $y(0)=1$, obtenemos:

$$\arctan\left(\frac{1-1}{0-2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{1-1}{0-2}\right)^2\right) = \ln(-0+2)+C \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \arctan(0) - \frac{1}{2}\ln(1+0) = \ln(2)+C \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow C = -\ln(2)$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada que verifica $y(0)=1$ es la función implícita $y(x)$ definida por la ecuación siguiente en un dominio contenido en $\left]-2e^{\pi/4}+2, 2\right[$:

$$\arctan\left(\frac{y-1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2\right) = \ln\left(\frac{-x+2}{2}\right)$$

Ejercicio 6.2.6. Resuelva los siguientes problemas lineales:

1. $x' + 3x = e^{-3t}, \qquad x(1) = 5$

   En este caso, se trata de una ecuación lineal completa con dominio $\mathbb{R}^2$. Buscamos transformarla en una ecuación que podamos resolver mediante cálculo de primitivas. Para ello, sea una función $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $l(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $l \in C^1(\mathbb{R})$, y buscaremos cuál ha de ser su valor para convertir la ecuación diferencial en un cálculo de primitivas. Aplicamos el cambio de variable siguiente:

   $$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t,x) & \longmapsto & (s,y) = (t, l(t)x) \end{array}$$

   Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

   $$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (s,y) & \longmapsto & (t,x) = (s, y/l(s)) \end{array}$$

   En primer lugar, tenemos que φ, φ^{-1} son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1 (la segunda es producto o cociente de funciones de clase 1), tenemos que φ es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable[1]. Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

   $$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} = xl' + lx' = l'\cdot\frac{y}{l} + l(-3x+e^{-3t}) = \left(\frac{l'}{l}-3\right)y + le^{-3t}$$

   Por tanto, la ecuación se convierte en:

   $$y' = \left(\frac{l'}{l}-3\right)y + le^{-3t} \qquad \text{con dominio } \mathbb{R}^2$$

[1] De aquí en adelante, no lo demostraremos en cada ejercicio.

Para convertirlo en un cálculo de primitivas, buscamos l tal que $\frac{l'}{l} - 3 = 0$, es decir, $l' = 3l$. Como dominio, como l no puede anularse, consideramos $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ (también podríamos haber elegido $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$). Esta ecuación es de variables separadas, luego procedemos a resolverla:

$$l' = 3l \Longrightarrow \frac{dl}{l} = 3dt \Longrightarrow \int \frac{dl}{l} = \int 3dt \Longrightarrow \ln(l) = 3t + C \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow l = e^{3t+C} = ke^{3t} \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

Como no tenemos ninguna condición más sobre l, sea (considerando $k = 1$):

$$l(t) = e^{3t} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Por tanto, usando dicha función l, la ecuación tras aplicar el cambio de variable es:

$$y' = le^{-3t} = e^{3t}e^{-3t} = 1 \Longrightarrow y(s) = s + C, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución uniparamétrica de la ecuación dada:

$$x(t) = \frac{y(t)}{l(t)} = \frac{t + C}{e^{3t}} = e^{-3t}(t + C) \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Usando la condición inicial $x(1) = 5$, obtenemos:

$$x(1) = e^{-3}(1 + C) = 5 \Longrightarrow C = 5e^3 - 1$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada que verifica $x(1) = 5$ es:

$$x(t) = e^{-3t}(t + 5e^3 - 1) \qquad t \in \mathbb{R}$$

2. $x' - \frac{x}{t} = \frac{1}{1+t^2}, \qquad x(2) = 0$

   En este caso, se trata de una ecuación lineal completa cuyo dominio viene dado por $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Buscamos transformarla en una ecuación que podamos resolver mediante cálculo de primitivas. Para ello, sea una función $l : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ con $l(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$ y $l \in C^1(\mathbb{R}^+)$, y buscaremos cuál ha de ser su valor para convertir la ecuación diferencial en un cálculo de primitivas. Aplicamos el cambio de variable siguiente:

$$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) = (t, l(t)x) \end{array}$$

   Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1} : & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ & (s, y) & \longmapsto & (t, x) = (s, {}^{y}/_{l(s)}) \end{array}$$

   En primer lugar, tenemos que φ, φ^{-1} son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1 (la segunda es producto o cociente de funciones de clase 1), tenemos que φ es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable. Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} = xl' + lx' = l' \cdot \frac{y}{l} + l\left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{y}{tl(t)}\right) = \left(\frac{l'}{l} + \frac{1}{t}\right)y + \frac{l}{1+t^2}$$

Por tanto, la ecuación se convierte en:

$$y' = \left(\frac{l'}{l} + \frac{1}{t}\right)y + \frac{l}{1+t^2} \qquad \text{con dominio } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Para convertirlo en un cálculo de primitivas, buscamos l tal que $\dfrac{l'}{l} + \dfrac{1}{t} = 0$, es decir, $l' = -\dfrac{l}{t}$. Como dominio, como l no puede anularse, consideramos el conjunto $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Esta ecuación es de variables separadas, luego procedemos a resolverla:

$$\frac{dl}{l} = -\frac{dt}{t} \Longrightarrow \int \frac{dl}{l} = -\int \frac{dt}{t} \Longrightarrow \ln(l) = -\ln(t) + C \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow l = ke^{-\ln(t)} = \frac{k}{t} \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

Como no tenemos ninguna condición más sobre l, sea (considerando $k = 1$):

$$l(t) = \frac{1}{t} \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto, usando dicha función l, la ecuación tras aplicar el cambio de variable es:

$$y' = \frac{l}{1+t^2} = \frac{1}{t+t^3} \qquad \text{con dominio } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Esta ecuación se resuelve mediante cálculo de primitivas:

$$y' = \frac{1}{t+t^3} = \frac{1}{t(1+t^2)}$$

Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{A(1+t^2) + (Bt+C)t}{t(1+t^2)}$$

- Para $t = 0$: $1 = A \cdot 1 \Longrightarrow A = 1$.
- Para $t = 1$: $1 = 2A + B + C \Longrightarrow B + C = -1$.
- Para $t = -1$: $1 = 2A + B - C \Longrightarrow B - C = -1 \Longrightarrow B = -1,\ C = 0$.

Por tanto, la solución de la ecuación dada es:

$$y(t) = \int \frac{1}{t(1+t^2)}dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C = \ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) + C$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución uniparamétrica de la ecuación dada:

$$x(t) = \frac{y(t)}{l(t)} = \frac{\ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) + C}{1/t} = t\ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) + Ct \qquad t \in \mathbb{R}^+, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Usando la condición inicial $x(2) = 0$, obtenemos:

$$x(2) = 2\ln\left(\frac{2}{\sqrt{1+4}}\right) + 2C = 0 \Longrightarrow -\ln\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = C$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada que verifica $x(2) = 0$ es:

$$x(t) = t\ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) - t\ln\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

3. $x' = \cosh t \cdot x + \operatorname{senh} t, \qquad x(0) = 1$

   En este caso, se trata de una ecuación lineal completa con dominio $\mathbb{R}^2$. Buscamos transformarla en una ecuación que podamos resolver mediante cálculo de primitivas. Para ello, sea una función $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $l(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $l \in C^1(\mathbb{R})$, y buscaremos cuál ha de ser su valor para convertir la ecuación diferencial en un cálculo de primitivas. Aplicamos el cambio de variable siguiente:

$$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) = (t, l(t)x) \end{array}$$

   Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (s, y) & \longmapsto & (t, x) = (s, y/l(s)) \end{array}$$

   En primer lugar, tenemos que φ, φ^{-1} son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1 (la segunda es producto o cociente de funciones de clase 1), tenemos que φ es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable. Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} = xl' + lx' = l' \cdot \frac{y}{l} + l(\cosh t \cdot \frac{y}{l} + \operatorname{senh} t) = \left(\frac{l'}{l} + \cosh t\right) y + l \operatorname{senh} t$$

   Por tanto, la ecuación se convierte en:

$$y' = \left(\frac{l'}{l} + \cosh t\right) y + l \operatorname{senh} t \qquad \text{con dominio } \mathbb{R}^2$$

   Para convertirlo en un cálculo de primitivas, buscamos l tal que $\frac{l'}{l} + \cosh t = 0$, es decir, $l' = -l\cosh t$. Como dominio, como l no puede anularse, consideramos $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Esta ecuación es de variables separadas, luego procedemos a resolverla:

$$l' = -l\cosh t \Longrightarrow \frac{dl}{l} = -\cosh t dt \Longrightarrow \int \frac{dl}{l} = -\int \cosh t dt \Longrightarrow \ln(l) = -\operatorname{senh} t + C \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow l = ke^{-\operatorname{senh} t} \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

Como no tenemos ninguna condición más sobre l, sea (considerando $k = 1$):

$$l(t) = e^{-\operatorname{senh} t} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Por tanto, usando dicha función l, la ecuación tras aplicar el cambio de variable es:

$$y' = e^{-\operatorname{senh} t} \operatorname{senh} t$$

Empleando el método de cálculo de primitivas, obtenemos:

$$y(t) = \int_0^t e^{-\operatorname{senh} u} \operatorname{senh} u \; du \; + C \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

donde dicha integral no hemos podido resolverla, puesto que no conocemos una primitiva suya.

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución uniparamétrica de la ecuación dada:

$$x(t) = \frac{y(t)}{l(t)} = e^{\operatorname{senh} t} \left(\int_0^t e^{-\operatorname{senh} u} \operatorname{senh} u \; du \; + C \right) \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Usando la condición inicial $x(0) = 1$, obtenemos:

$$x(0) = e^{\operatorname{senh} 0} \left(\int_0^0 e^{-\operatorname{senh} u} \operatorname{senh} u \; du \; + C \right) = 1 \cdot C = 1 \Longrightarrow C = 1$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada que verifica $x(0) = 1$ es:

$$x(t) = e^{\operatorname{senh} t} \left(\int_0^t e^{-\operatorname{senh} u} \operatorname{senh} u \; du \; + 1 \right) \qquad t \in \mathbb{R}$$

Es cierto que la solución depende de una integral de la cual no conocemos una primitiva, pero hemos obtenido la solución en términos de dicha integral.

Ejercicio 6.2.7. Fijado $c \in \mathbb{R}$, sean $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tal que $a(t) \geqslant c > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y

$$\lim_{t \to +\infty} b(t) = 0.$$

Demuestre que todas las soluciones de la ecuación $x' = -a(t)x + b(t)$ tienden a cero cuando $t \to +\infty$. (Indicación: regla de L'Hôpital en la fórmula de variación de constantes).

En primer lugar, buscamos las soluciones de la ecuación lineal dada, con dominio $\mathbb{R}^2$. Buscamos transformarla en una ecuación que podamos resolver mediante cálculo de primitivas. Para ello, sea una función $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $l(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $l \in C^1(\mathbb{R})$, y buscaremos cuál ha de ser su valor para convertir la ecuación diferencial en un cálculo de primitivas. Aplicamos el cambio de variable siguiente:

$$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) = (t, l(t)x) \end{array}$$

Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (s,y) & \longmapsto & (t,x)=(s, y/l(s)) \end{array}$$

En primer lugar, tenemos que φ, φ^{-1} son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1 (la segunda es producto o cociente de funciones de clase 1), tenemos que φ es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable. Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} = xl' + lx' = l'\cdot\frac{y}{l} + l\left(-a(t)\cdot\frac{y}{l} + b(t)\right) = \left(\frac{l'}{l} - a(t)\right)y + lb(t)$$

Por tanto, la ecuación se convierte en:

$$y' = \left(\frac{l'}{l} - a(t)\right)y + lb(t) \qquad \text{con dominio } \mathbb{R}^2$$

Para convertirlo en un cálculo de primitivas, buscamos l tal que $\dfrac{l'}{l} - a(t) = 0$, es decir, $l' = a(t)l$. Como dominio, como l no puede anularse, consideramos $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Esta ecuación es de variables separadas, luego procedemos a resolverla:

$$l' = a(t)l \Longrightarrow \frac{dl}{l} = a(t)dt \Longrightarrow \int\frac{dl}{l} = \int a(t)dt \Longrightarrow \ln(l) = \int a(t)dt + C \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow l = \exp\left(\int_0^t a(u)\ du\ + C\right) \qquad t\in\mathbb{R}$$

Como no tenemos ninguna condición más sobre l, sea (considerando $C = 0$):

$$l(t) = \exp\left(\int_0^t a(u)\ du\right) \qquad t\in\mathbb{R}$$

Por tanto, usando dicha función l, la ecuación tras aplicar el cambio de variable es:

$$y' = lb(t) = \exp\left(\int_0^t a(u)\ du\right)b(t) \qquad \text{con dominio } \mathbb{R}^2$$

Esta ecuación se resuelve mediante cálculo de primitivas:

$$y(t) = \int_0^t \exp\left(\int_0^u a(v)\ dv\right)b(u)\ du + C \qquad t\in\mathbb{R}, \qquad C\in\mathbb{R}$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución uniparamétrica de la ecuación dada:

$$x(t) = \frac{y(t)}{l(t)} = \frac{\displaystyle\int_0^t \exp\left(\int_0^u a(v)\ dv\right)b(u)\ du + C}{\exp\left(\displaystyle\int_0^t a(u)\ du\right)} \qquad t\in\mathbb{R}, \qquad C\in\mathbb{R}$$

Estudiemos en primer lugar la convergencia del denominador de la fracción:

$$\int_0^t a(u)\ du \geqslant \int_0^t c\ du = ct$$

Por tanto, el denominador diverge positivamente. No obstante, respecto del numerador no podemos concluir nada. Para evitar casos en los que el numerador oscila, estudiaremos el siguiente caso:

$$\lim_{t\to+\infty} \exp\left(\int_0^t a(u)\ du\right)|b(t)|$$

Como el integrando es positivo, tenemos tan solo los dos siguientes casos:

- Si dicho límite converge a un valor $k \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^t \exp\left(\int_0^u a(v)\ dv\right)|b(u)|\ du + C}{\exp\left(\displaystyle\int_0^t a(u)\ du\right)} = \frac{k}{\exp\left(\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^t a(u)\ du\right)} = 0$$

- Si dicho límite diverge positivamente, podemos aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^t \exp\left(\int_0^u a(v)\ dv\right)|b(u)|\ du + C}{\exp\left(\displaystyle\int_0^t a(u)\ du\right)} \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{\exp\left(\displaystyle\int_0^t a(u)\ du\right)|b(t)|}{\exp\left(\displaystyle\int_0^t a(u)\ du\right)a(t)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{|b(t)|}{a(t)} = 0$$

  donde en la última igualdad he empleado que $a(t) \geqslant c > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} b(t) = 0$.

En conclusión, hemos demostrado que, en cualquier caso, se tiene:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^t \exp\left(\int_0^u a(v)\ dv\right)|b(u)|\ du + C}{\exp\left(\displaystyle\int_0^t a(u)\ du\right)} = 0$$

Por otro lado, tenemos el siguiente resultado para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leqslant \left|\frac{\displaystyle\int_0^t \exp\left(\int_0^u a(v)\ dv\right)b(u)\ du + C}{\exp\left(\displaystyle\int_0^t a(u)\ du\right)}\right| \leqslant \frac{\displaystyle\int_0^t \exp\left(\int_0^u a(v)\ dv\right)|b(u)|\ du + C}{\exp\left(\displaystyle\int_0^t a(u)\ du\right)}$$

Por el lema del sandwich, tomando límite a $+\infty$ tenemos que:

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = 0 \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$$

Por tanto, hemos demostrado lo pedido.

Ejercicio 6.2.8. La ecuación de Bernoulli tiene la forma

$$x' = a(t)x + b(t)x^n,$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y $n \in \mathbb{R}$. Compruebe que el cambio de variable $y = x^\alpha$ lleva la ecuación de Bernoulli a una ecuación del mismo tipo, y ajuste el valor de α para que la ecuación obtenida sea lineal ($n = 0$). Usando el cambio anterior, resuelva los problemas de valores iniciales

$$x' = x + t\sqrt{x}, \quad x(0) = 1.$$

El dominio de la ecuación de Bernoulli es $D = I \times J$, con $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalos abiertos y J dependerá del exponente n (podrá ser $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$, o $\mathbb{R}$.). Fijado $\alpha \in \mathbb{R}$, aplicamos el cambio de variable siguiente:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : & I \times J & \longrightarrow & D_1 \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) = (t, x^\alpha) \end{array}$$

Veamos cuál es el codominio de φ:

$$D_1 = \varphi(D) = \left\{(s, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (s, y^{1/\alpha}) \in D\right\} = I \times J$$

Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi^{-1} : & D_1 & \longrightarrow & I \times J \\ & (s, y) & \longmapsto & (t, x) = (s, y^{1/\alpha}) \end{array}$$

En primer lugar, tenemos que φ, φ^{-1} son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1, tenemos que φ es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable. Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} = \alpha x^{\alpha-1} x' = \alpha x^{\alpha-1} \left(a(t)x + b(t)x^n\right) = \\ &= \alpha x^{\alpha-1} a(t)x + \alpha x^{\alpha-1} b(t)x^n = \alpha x^\alpha a(t) + \alpha x^{\alpha-1+n} b(t) = \\ &= \alpha x^\alpha a(t) + \alpha (x^\alpha)^{\frac{\alpha-1+n}{\alpha}} b(t) = \alpha a(t)y + \alpha b(t) y^{\frac{\alpha-1+n}{\alpha}} \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación se convierte en:

$$y' = \alpha a(t)y + \alpha b(t) y^{\frac{\alpha-1+n}{\alpha}} \qquad \text{con dominio } I \times \widehat{J}$$

Como tenemos que $\dfrac{\alpha - 1 + n}{\alpha} \in \mathbb{R}$, la ecuación obtenida es de Bernoulli. Para que la ecuación obtenida sea lineal, necesitamos que:

$$\frac{\alpha - 1 + n}{\alpha} = 0 \iff \alpha - 1 + n = 0 \iff \alpha = 1 - n$$

Para valor de α obtenido, la ecuación de Bernoulli se convierte en una ecuación lineal:

$$y' = \alpha a(t)y + \alpha b(t) y^{\frac{\alpha-1+n}{\alpha}} = (1 - n)a(t)y + (1 - n)b(t)$$

Resolvemos ahora la ecuación dada:

$$x' = x + t\sqrt{x}, \quad x(0) = 1$$

Su dominio es $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Por lo visto, tenemos que el valor $\alpha = 1 - {}^1\!/_2 = {}^1\!/_2$ hace que la ecuación de Bernoulli se convierta en una ecuación lineal:

$$y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}t \qquad \text{con dominio } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

Empleando la fórmula obtenida en Teoría para resolver ecuaciones lineales, obtenemos:

$$y(t) = e^{t/2}\left(\int e^{-u/2} \cdot \frac{u}{2}\, du + C\right) \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Para resolver la integral, empleamos el método de integración por partes:

$$\left[\begin{array}{rr} a = {}^u\!/_2 & a' = {}^1\!/_2 \\ b' = e^{-u/2} & b = -2e^{-u/2} \end{array}\right]$$

Por tanto:

$$\int e^{-u/2} \cdot \frac{u}{2}\, du = -2e^{-u/2} \cdot \frac{u}{2} - \int -2e^{-u/2} \cdot \frac{1}{2}\, du = -ue^{-u/2} + \int e^{-u/2}\, du =$$
$$= -ue^{-u/2} - 2e^{-u/2} + C = -e^{-u/2}(u+2) + C$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada es:

$$y(t) = e^{t/2}\left(C - e^{-t/2}(t+2)\right) = Ce^{t/2} - (t+2) \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución uniparamétrica de la ecuación dada:

$$x(t) = (y(t))^2 = (Ce^{t/2} - (t+2))^2 \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Usando la condición inicial $x(0) = 1$, obtenemos:

$$x(0) = (C-2)^2 = 1 \Longrightarrow C - 2 \overset{(*)}{=} 1 \Longrightarrow C = 3$$

donde en $(*)$ hemos usado la condición de que $x \in \mathbb{R}^+$. Por tanto, la solución de la ecuación dada que verifica $x(0) = 1$ es:

$$x(t) = (3e^{t/2} - (t+2))^2 \qquad t \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 6.2.9. Se considera la ecuación de Ricatti

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2.$$

Encuentre una solución particular de la forma $y(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando esta solución particular, calcule la solución que cumple $y(1) = 2$ y estudie su intervalo maximal de definición.

El dominio de la ecuación de Ricatti es $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Buscamos en primer lugar la solución particular de la ecuación de Ricatti de la forma $y(x) = x^\alpha$:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1} = -\frac{1}{x^2} - \frac{x^\alpha}{x} + x^{2\alpha} = -\frac{1}{x^2} - x^{\alpha-1} + x^{2\alpha} \Longrightarrow \alpha x^{\alpha+1} = -1 - x^{\alpha+1} + x^{2\alpha+2}$$

Al igualar dos polinomios, se ha de tener que coincidan en los términos del mismo grado, luego $\alpha = -1$. Por tanto, la solución particular de la ecuación de Ricatti es $y(x) = \phi(x) = x^{-1} = {}^1\!/\!_x$ definida en $\mathbb{R}^+$.

Buscamos entonces aplicar el cambio de variable siguiente:

$$\begin{array}{rccl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & D & \longrightarrow & D_1 \\ & (x,y) & \longmapsto & (s,z) = \left(x, \dfrac{1}{y-\phi(x)}\right) = \left(x, \dfrac{1}{y - {}^1\!/\!_x}\right) \end{array}$$

Veamos en primer lugar cuál es el dominio de φ, $D \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Como hemos de eliminar la recta $y - \phi(x) = 0$, tenemos dos componentes conexas a elegir. Necesitamos que $(1,2) \in D$, y sabemos que $\phi(1) = 1$, luego necesitamos que $y > \phi(x)$, por lo que el dominio de φ es:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid y > {}^1\!/\!_x\right\}$$

Veamos cuál es el codominio de φ:

$$\begin{aligned} D_1 = \varphi(D) &= \left\{(s,z) \in \mathbb{R}^2 \mid (s, {}^1\!/\!_z + {}^1\!/\!_s) \in D\right\} = \left\{(s,z) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0,\ {}^1\!/\!_z + {}^1\!/\!_s > {}^1\!/\!_s\right\} = \\ &= \left\{(s,z) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0,\ {}^1\!/\!_z > 0\right\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1}: & D_1 & \longrightarrow & D \\ & (s,z) & \longmapsto & (x,y) = \left(s, \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{s}\right) \end{array}$$

En primer lugar, tenemos que φ, φ^{-1} son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1 (la segunda es suma de cocientes de funciones de clase 1), tenemos que φ es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable.

Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{dz}{dx}$$

Para hallar esa derivada, trabajaremos mejor con la segunda componente de φ^{-1}, entendiendo que y, z y ϕ son funciones dependientes de x:

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} \Longrightarrow y' = -\frac{z'}{z^2} - \cancel{\frac{1}{x^2}} &\overset{(*)}{=} -\cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{x}}{x} + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)^2 = \\ &= -\frac{1}{xz} - \cancel{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{zx} + \cancel{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{xz} + \frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado la ecuación de Ricatti. Multiplicando por $-z^2$ ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$z' = -\frac{z}{x} - 1 \qquad \text{con dominio } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

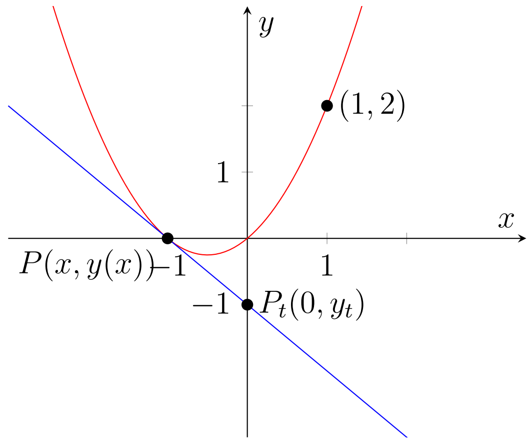


Figura 6.6: Representación gráfica del enunciado del Ejercicio 6.2.10.

Esta ecuación es lineal completa, por lo que podemos resolverla. Empleando la fórmula desarrollada en Teoría para resolverlas, tenemos que:

$$z(x) = e^{-\ln(x)}\left(-\int e^{\ln(u)}\,du + C\right) = \frac{1}{x}\left(-\int u\,du + C\right) = \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2} + C\right) = -\frac{x}{2}+\frac{C}{x}$$

Veamos el intervalo de definición J de la solución obtenida. Como necesitamos que $x, z > 0$, tenemos que:

$$-\frac{x}{2} + \frac{C}{x} > 0 \Longleftrightarrow \frac{C}{x} > \frac{x}{2} \Longleftrightarrow 2C > x^2 \Longrightarrow \sqrt{2C} > x \Longrightarrow J = \left]0, \sqrt{2C}\right[$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución uniparamétrica de la ecuación dada:

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} + \frac{1}{x} = \frac{1}{-x/2 + C/x} + \frac{1}{x} = \frac{2x}{2C - x^2} + \frac{1}{x} \qquad x \in \left]0, \sqrt{2C}\right[$$

Usando la condición inicial $y(1) = 2$, obtenemos:

$$y(1) = \frac{2\cdot 1}{2C-1} + \frac{1}{1} = 2 \Longrightarrow \frac{2}{2C-1} = 1 \Longrightarrow 2 = 2C - 1 \Longrightarrow C = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada que verifica $y(1) = 2$ es:

$$y(x) = \frac{2x}{3 - x^2} + \frac{1}{x} \qquad x \in \mathbb{R}^+ \qquad x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$$

Ejercicio 6.2.10. Encuentre una curva $y = y(x)$ que pase por el punto $(1, 2)$ y cumpla la siguiente propiedad: la distancia de cada punto de la curva al origen coincide con la segunda coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de ordenadas. (C. Sturm, Cours d'Analyse 1859, Vol 2, pag 41).

La representación gráfica de la situación descrita se encuentra en la Figura 6.6.

La distancia de un punto $P(x, y(x))$ al origen es $d(P, O) = \sqrt{x^2 + y(x)^2}$, y la segunda coordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje de ordenadas es y_t. Calculemos y_t usando la definición de pendiente:

$$y'(x) = \frac{y(x) - y_t}{x - 0} \Longrightarrow y_t = -y'(x)x + y(x)$$

Notemos además que, en el caso de $x = 0$, se tiene que $y_t = y(x)$, por lo que se sigue teniendo. Como la condición impuesta por el enunciado es que $d(P, O) = y_t$, tenemos que:

$$\sqrt{x^2 + y(x)^2} = -y'(x)x + y(x) \qquad \text{con dominio } \mathbb{R}^3$$

Expresando en forma normal, tenemos que:

$$y' = -\frac{\sqrt{x^2+y^2} - y}{x} = -\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x} \qquad \text{con dominio } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Notemos que, al pasar a forma normal, hemos tenido que reducir el dominio. Optamos por los valores de x positivos puesto que $(1, 2)$ es un punto de la curva.

Pasamos entonces a resolver la ecuación diferencial dada. Para ello, como se trata de una ecuación homogénea, aplicamos el cambio de variable:

$$\begin{array}{rccl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & D_1 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x, z) = \left(x, \dfrac{y}{x}\right) \end{array}$$

Veamos cuál es el codominio de φ:

$$D_1 = \varphi(D) = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, zx) \in D\right\} = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\right\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1}: & D_1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ & (x, z) & \longmapsto & (x, y) = (x, xz) \end{array}$$

En primer lugar, tenemos que φ, φ^{-1} son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1 (la segunda es producto o cociente de funciones de clase 1), tenemos que φ es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable.

Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{y}{x^2} + \frac{y'}{x} = -\frac{z}{x} + \frac{-\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}}{x} = \frac{-\sqrt{1+z^2}}{x} \qquad \text{con dominio } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Esta ecuación es de variables separadas, y la función dependiente de z no tiene soluciones constantes, luego aplicamos directamente el método:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = -\frac{dx}{x} \Longrightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = -\int \frac{dx}{x} \Longrightarrow \operatorname{arcsenh}(z) = -\ln(x) + C \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z = \operatorname{senh}(-\ln(x) + C) \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución uniparamétrica de la ecuación dada:

$$y(x) = x \operatorname{senh}(-\ln(x) + C) \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

Usando la condición inicial $y(1) = 2$, obtenemos:

$$y(1) = \operatorname{senh}(-\ln(1) + C) = 2 \Longrightarrow \operatorname{senh}(C) = 2 \Longrightarrow \frac{e^C - e^{-C}}{2} = 2 \Longrightarrow e^C - e^{-C} = 4 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow e^{2C} - 1 = 4e^C \Longrightarrow (e^C)^2 - 4e^C - 1 = 0 \Longrightarrow e^C = \frac{4 + \sqrt{16+4}}{2} = 2 + \sqrt{5} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow C = \ln(2 + \sqrt{5})$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada que verifica $y(1) = 2$ es:

$$y(x) = x \operatorname{senh}(-\ln(x) + \ln(2 + \sqrt{5})) = x \operatorname{senh}\left(\ln\left(\frac{2+\sqrt{5}}{x}\right)\right) \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

Ejercicio 6.2.11. Identifique la clase de ecuaciones invariantes por el grupo de transformaciones $s = \lambda t$, $y = \lambda^2 x$, con $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Consideramos un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ abierto y conexo, una función continua $f : D \to \mathbb{R}$ y una ecuación diferencial de la forma:

$$x' = f(t, x)$$

Consideramos ahora el cambio de variable dado por:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\lambda = (\varphi_1, \varphi_2) : & D & \longrightarrow & D \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) = (\lambda t, \lambda^2 x) \end{array}$$

Veamos qué condiciones hemos de imponer sobre el dominio D para que sea este invariante por φ, es decir, $\varphi(D) = D$:

$$D = \varphi(D) = \left\{(s, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda^2}\right) \in D\right\} = \left\{(s, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda^2}\right) \in D\right\}$$

Imponer condiciones sobre D es complejo. El primer cuadrante sería un posible dominio, pero consideraremos $D = \mathbb{R}^2$, puesto que en clase solo se han estudiado transformaciones que dejan invariantes en todo el plano.

Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\lambda^{-1} : & D & \longrightarrow & D \\ & (s, y) & \longmapsto & (t, x) = (s/\lambda, y/\lambda^2) \end{array}$$

En primer lugar, tenemos que $\varphi_\lambda, \varphi_\lambda^{-1}$ son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1 por ser polinómicas, tenemos que φ_λ es un difeomorfismo. Además, es admisible ya que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} x' = \lambda + 0 \cdot f(t, x) = \lambda \neq 0$$

Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\lambda} = \lambda^2 x' \cdot \frac{1}{\lambda} = \lambda f(t, x) = \lambda f\left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda^2}\right) = \widehat{f}(s, y)$$

Por tanto, para que la ecuación sea invariante por el grupo de transformaciones dado, hemos de tener que:

$$f(s,y) = \widehat{f}(s,y) = \lambda f\left(\frac{s}{\lambda}, \frac{y}{\lambda^2}\right) \qquad \forall (s,y)\in D,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Dar más información sobre f es complicado, por lo que nos limitamos a esta condición.

Ejercicio 6.2.12. Resuelva los problemas 42 y 45 (pag. 79) del libro de Nagle-Saff-Sneider.

1. **Problema 42:** Utilize la sustitución $y = ux^2$ para resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

Hay dos posibles dominios, $D_1 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ y $D_2 = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$. Sea el dominio escogido D. Aplicamos el cambio de variable:

$$\begin{array}{rccc} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & D & \longrightarrow & D' \\ & (x,y) & \longmapsto & (x,u) = (x, y/x^2) \end{array}$$

Veamos cuál es el codominio de φ:

$$D' = \varphi(D) = \left\{(x,u)\in\mathbb{R}^2 \mid (x, ux^2)\in D\right\} = D$$

Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1}: & D' & \longrightarrow & D \\ & (x,u) & \longmapsto & (x,y) = (x, ux^2) \end{array}$$

En primer lugar, tenemos que φ, φ^{-1} son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1, tenemos que φ es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable. Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{du}{dx}\cdot \cancelto{1}{\frac{dx}{dx}} = -\frac{2y}{x^3} + \frac{y'}{x^2} = -\frac{2u}{x} + \frac{\frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right)}{x^2} = \\ &= -\frac{2u}{x} + \frac{2ux + \cos(u)}{x^2} = \frac{\cos(u)}{x^2} \qquad \text{con dominio } D \end{aligned}$$

Esta ecuación es de variables separadas. Veamos las soluciones constantes:

$$\cos(u) = 0 \Longrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$$

Respecto a las soluciones no constantes, aplicamos el método de separación de variables. Fijado $k\in\mathbb{Z}$, sea el dominio $D_k = D_k^1 = \mathbb{R}^+ \times \left]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi\right[$

o $D_k^2 = \mathbb{R}^- \times]^{-\pi}/2 + k\pi, ^{\pi}/2 + k\pi[$. Aplicamos el método de separación de variables:

$$\frac{du}{\cos(u)} = \frac{dx}{x^2} \Longrightarrow \int \frac{du}{\cos(u)} = \int \frac{dx}{x^2}$$

Para resolver la primera integral, aplicamos el cambio de variable $u = \arcsin(t) + k\pi$ definido en $]-1, 1[$, con $du = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$:

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\cos(u)} &= \int \frac{1}{\cos(\arcsin(t) + k\pi)} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\cos(k\pi)} \int \frac{1}{(\sqrt{1-t^2})^2}\; dt = \\ &= \frac{1}{\cos(k\pi)} \int \frac{1}{1-t^2}\; dt\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que:

$$\begin{aligned}\cos(\arcsin(t) + k\pi) &= \cos(\arcsin(t))\cos(k\pi) - \sin(\arcsin(t))\cancelto{0}{\sin(k\pi)} = \\ &= \sqrt{1-t^2}\cos(k\pi)\end{aligned}$$

Para resolver la integral resultante, aplicamos la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{1-t^2}\; dt = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t}\; dt = \frac{A(1-t) + B(1+t)}{1-t^2}\; dt$$

- Para $t = 1$: $A = 1/2$
- Para $t = -1$: $B = 1/2$

Por tanto, la integral resultante es:

$$\frac{1}{\cos(k\pi)} \int \frac{1}{1-t^2}\; dt = \frac{1}{2\cos(k\pi)} \int \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\; dt = \frac{1}{2\cos(k\pi)} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + C'$$

Por tanto, la solución de la ecuación dada es:

$$\frac{1}{2\cos(k\pi)} \ln\left(\frac{1+\sin(u-k\pi)}{1-\sin(u-k\pi)}\right) = -\frac{1}{x} + C$$
$$\frac{1}{2\cos(k\pi)} \ln\left(\frac{1+\sin(u)\cos(k\pi)}{1-\sin(u)\cos(k\pi)}\right) = -\frac{1}{x} + C$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución uniparamétrica de la ecuación dada:

$$\frac{1}{2\cos(k\pi)} \ln\left(\frac{1+\sin\left(^{y}/_{x^2}\right)\cos(k\pi)}{1-\sin\left(^{y}/_{x^2}\right)}\right) = -\frac{1}{x} + C$$

2. **Problema 45: [Ecuaciones Acopladas]** Al analizar ecuaciones acopladas de la forma

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= ax + by,\\ \frac{dx}{dt} &= \alpha x + \beta y,\end{aligned}$$

donde a, b, α, β son constantes, quisiéreamos determinar la relación entre x e y en vez de las soluciones individuales $x(t)$, $y(t)$. Para hacer esto, divida la primera ecuación entre la segunda para obtener:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{\alpha x + \beta y}$$

Esta nueva ecuación es homogénea, de modo que podemos resolverla mediante la sustitución $u = y/x$. Nos referimos a sus soluciones como *curvas integrales*. Determine las curvas integrales del sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -4x - y,\\ \frac{dx}{dt} &= 2x - y.\end{aligned}$$

Las curvas integrales de este sistema son las soluciones de:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x - y}{2x - y} \quad \text{con dominio } D = \left\{\begin{array}{lcl} D^- & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y < 0\} \\ \quad\vee & & \\ D^+ & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y > 0\} \end{array}\right.$$

Esta ecuación es homogénea. Como al aplicar el cambio de variable dividiremos entre x, los posibles dominios son:

$$D' = \left\{\begin{array}{lcl} D^-_- & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ 2x - y < 0\} \\ D^-_+ & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ 2x - y < 0\} \\ D^+_- & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ 2x - y > 0\} \\ D^+_+ & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ 2x - y > 0\} \end{array}\right.$$

Aplicamos el cambio de variable:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & D' & \longrightarrow & D'_1 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x, u) = (x, y/x) \end{array}$$

Veamos cuál es el codominio de φ:

$$D'_1 = \varphi(D') = \left\{(x, u) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, ux) \in D'\right\} =$$
$$= \left\{\begin{array}{lcl} (D')^-_- & = & \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ 2x - ux < 0\} = \mathbb{R}^- \times \left]-\infty, 2\right[\\ (D')^-_+ & = & \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ 2x - ux < 0\} = \mathbb{R}^+ \times \left]2, +\infty\right[\\ (D')^+_- & = & \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ 2x - ux > 0\} = \mathbb{R}^- \times \left]2, +\infty\right[\\ (D')^+_+ & = & \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ 2x - ux > 0\} = \mathbb{R}^+ \times \left]-\infty, 2\right[\end{array}\right.$$

Tenemos que su inversa, por poder despejar de forma única cada componente, es:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1}: & D_1' & \longrightarrow & D' \\ & (x,u) & \longmapsto & (x,y)=(x,ux) \end{array}$$

En primer lugar, tenemos que φ, φ^{-1} son biyectivas, y al ser ambas componentes de clase 1, tenemos que φ es un difeomorfismo. Además, es admisible por no variar la primera variable.

Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada, obtenemos:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{d\cancelto{1}{x}}{\cancel{d}x} = -\frac{y}{x^2}+\frac{y'}{x} = -\frac{u}{x}+\frac{\frac{-4-u}{2-u}}{x} = \frac{u^2-3u-4}{2-u}\cdot\frac{1}{x} \qquad \text{con dominio } D_1'$$

Las curvas integrales son las soluciones de esa ecuación de variables separadas, estudiadas en cada uno de los 4 posibles dominios. Luego sería necesario deshacer el cambio de variable para obtener la solución en términos de x e y.

6.3. Diferenciales Exactas

Ejercicio 6.3.1. Calcula, si es posible, una función potencial para las siguientes parejas de funciones. Especifica en cada caso el dominio en el que se trabaja.

1. $P(x,y) = x + y^3$, $Q(x,y) = x^2/2 + y^2$.

   En este caso, $\Omega = \mathbb{R}^2$, que trivialmente es convexo y por tanto estrellado. Además, $P, Q \in C^1(\Omega)$ al ser polinomios. Veamos ahora si se cumple la condición de exactitud:

   $$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 3y^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = x$$

   Por tanto, como no se tiene que $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \Omega$, no se da la condición de exactitud y no existe por tanto una función potencial para el campo vectorial (P, Q).

2. $P(x,y) = 1/2 \operatorname{sen} 2x - xy^2$, $Q(x,y) = y(1-x^2)$

   En este caso, $\Omega = \mathbb{R}^2$, que trivialmente es convexo y por tanto estrellado. Además, $P, Q \in C^1(\Omega)$ al ser composición, suma y producto de funciones de clase 1. Veamos ahora si se cumple la condición de exactitud:

   $$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

   Por tanto, existe una función potencial para este campo vectorial. Para encontrarla, como se busca que $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q$, tenemos que:

   $$U(x,y) = \int Q(x,y)dy = \int y(1-x^2)dy = \frac{y^2}{2}(1-x^2) + \varphi(x)$$

   donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que depende solo de x y representa la constante de integración. Derivando U respecto de x obtenemos:

   $$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy^2}{2} + \varphi'(x)$$
   $$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = -xy^2 + 1/2 \operatorname{sen} 2x$$

   Por tanto, $\varphi'(x) = 1/2 \operatorname{sen} 2x$. Entonces (y eligiendo como constante de integración 0 por ser el potencial único salvo una constante aditiva):

   $$\varphi(x) = \int \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x$$

   Por tanto, la función potencial es (salvo una constante aditiva):

   $$U(x,y) = \frac{y^2}{2}(1-x^2) - \frac{1}{4}\cos 2x$$

3. $P(x,y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$, $Q(x,y) = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$.

   Estudiemos en este caso el dominio Ω, que no es trivial. Para que $P, Q \in C^1(\Omega)$, necesitamos que:

   $$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -y\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, -x < y < x\}$$

   Representamos el dominio en la Figura 6.7.

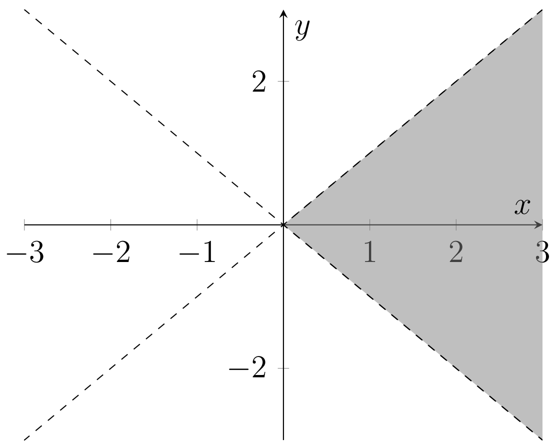


Figura 6.7: Dominio Ω del Ejercicio 6.3.1.3.

   Veamos ahora que Ω es convexo y por tanto estrellado, algo que intuitivamente podemos deducir.

   - Sean $z = (x,y),\ z' = (x', y') \in \Omega$, y veamos que $[z, z'] \subset \Omega$.

     $$\begin{aligned}[z,z'] &= \{t(x,y) + (1-t)(x',y') \mid t \in [0,1]\} = \\ &= \{(tx + (1-t)x', ty + (1-t)y') \mid t \in [0,1]\}\end{aligned}$$

     - Por un lado, como $x, x' > 0$ y $t, 1-t \geqslant 0$ pero no se anulan a la vez, tenemos que $tx + (1-t)x' > 0$.
     - Por otro lado, sabiendo que $-x < y < x$ y $-x' < y' < x'$, razonamos de forma directa que:

       $$-(tx+(1-t)x') = t(-x)+(1-t)(-x') < ty+(1-t)y' < tx+(1-t)x'$$

     Por tanto, $[z, z'] \subset \Omega$ y Ω es convexo.

   Además, como los argumentos de las raíces son positivos, $P, Q \in C^1(\Omega)$. Veamos ahora si se cumple la condición de exactitud:

   $$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} - \frac{1}{2\sqrt{x-y}} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

   Por tanto, existe una función potencial para este campo vectorial. Para encontrarla, como se busca que $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P$, tenemos que:

   $$U(x,y) = \int P(x,y)dx = \int \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}dx = \frac{2}{3}(x+y)^{3/2} + \frac{2}{3}(x-y)^{3/2} + \varphi(y)$$

donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que depende solo de y y representa la constante de integración. Derivando U respecto de y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} + \varphi'(y) \\
\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= Q(x,y) = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}
\end{aligned}$$

Por tanto, $\varphi'(y) = 0$. Entonces, por ejemplo, $\varphi(y) = 0$. Por tanto, la función potencial es (salvo una constante aditiva):

$$U(x,y) = \frac{2}{3}(x+y)^{3/2} + \frac{2}{3}(x-y)^{3/2}$$

Ejercicio 6.3.2. Resuelve las siguientes ecuaciones, sabiendo que admiten un factor integrante que depende de una sola de las variables x, y.

1. $6xy + (4y + 9x^2)y' = 0$

   El dominio de esta ecuación es $D = \mathbb{R}^2$, que es abierto y conexo. Buscamos obtener un factor integrante $\mu : \Omega \to \mathbb{R}$, donde Ω será el dominio del factor integrante que más adelante daremos. Para ello, necesitamos que se cumpla la condición de exactitud tras multiplicar por μ. Definimos:

$$\begin{array}{rccc}
P: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & (x,y) & \longmapsto & 6xy
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}
Q: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & (x,y) & \longmapsto & 4y + 9x^2
\end{array}$$

   Tenemos $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$ por ser polinómicas. Calculemos las derivadas parciales implicadas en la condición de exactitud:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial y}P + \mu\frac{\partial P}{\partial y} \\
\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} &= \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}
\end{aligned}$$

   Por tanto, la condición de exactitud se traduce en:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P - \frac{\partial \mu}{\partial x}Q = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

   Comprobemos ahora que admite un factor integrante que depende solo de y. Sea $m : \pi_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ de forma que $\mu(x,y) = m(y)$ para todo $(x,y) \in \Omega$. Entonces, tenemos que las derivadas parciales de μ son:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = m'(y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Por tanto, la condición de exactitud se traduce en:

$$\begin{aligned} m'(y)\cdot 6xy &= m(y)\,(18x-6x) \qquad \forall (x,y)\in\Omega \\ m'(y)\cdot y &= m(y)\cdot 2 \end{aligned}$$

Para obtener el factor integrante m, planteamos la siguiente ecuación diferencial donde, como $m(y)\neq 0$ para todo $y\in\pi_2(\Omega)$, suponemos que $m(y)>0$ (en caso contrario, habríamos obtenido otro factor integrante válido):

$$m' = \frac{2}{y}m \qquad \text{con dominio} \left\{\begin{array}{c} \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \\ \vee \\ \mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^+ \end{array}\right.$$

Esta es una ecuación en variables separadas sin soluciones constantes, luego:

$$\int \frac{dm}{m} = \int \frac{2}{y}dy \Longrightarrow \ln(m) = 2\ln|y| \Longrightarrow m(y) = |y|^2 = y^2$$

donde he supuesto constante aditiva nula (ya que tan solo buscamos un factor integrante). Por tanto, un factor integrante es $\mu(x,y)=y^2$ para todo $(x,y)\in\Omega$, donde hay dos posibles dominios:

$$\Omega = \left\{\begin{array}{ccc} \Omega_+ & = & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \\ & \vee & \\ \Omega_- & = & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^- \end{array}\right.$$

En cualquiera de los casos, Ω es abierto, conexo y estrellado, con $P,Q\in C^1(\Omega)$. Consideramos la siguiente ecuación diferencial:

$$\mu P + \mu Q y' = 0 \qquad \text{con dominio } \Omega$$

Hemos visto que esa ecuación cumple la condición de exactitud. Buscamos ahora el potencial $U:\Omega\to\mathbb{R}$ tal que $\nabla U = (\mu P, \mu Q)$. Usando la derivada parcial respecto de x, tenemos que:

$$U(x,y) = \int \mu P dx = \int 6xy\cdot y^2 dx = 6y^3\int x dx = 3y^3x^2 + \varphi(y)$$

donde $\varphi:\pi_2(\Omega)\to\mathbb{R}$ es una función que depende solo de y y representa la constante de integración. Derivando U respecto de y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= 9y^2x^2 + \varphi'(y) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= \mu Q(x,y) = y^2(4y+9x^2) = 9y^2x^2 + 4y^3 \end{aligned}$$

Por tanto, $\varphi'(y) = 4y^3$. Entonces, por ejemplo, $\varphi(y)=y^4$. Por tanto, la función potencial es (salvo una constante aditiva):

$$U(x,y) = 3y^3x^2 + y^4 \qquad \forall (x,y)\in\Omega$$

Por tanto, tenemos que:

$$0 = \mu(x,y) \cdot (P(x,y) + Q(x,y)y') = \frac{d}{dx}(U(x,y)) = 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Veamos ahora qué valores anulan a Q:

$$Q(x,y) = 0 \iff 4y + 9x^2 = 0 \iff y = -\frac{9}{4}x^2$$

Por tanto, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$ tal que $y_0 \neq {}^{-9}/_{4}x_0^2$, tenemos que la ecuación $U(x,y) = U(x_0, y_0)$ define una función implícita $y(x)$ en un entorno de x_0, que es solución de la ecuación diferencial de partida.

2. $2y\cos x - xy \operatorname{sen} x + (2x\cos x)y' = 0$

   El dominio de esta ecuación es $D = \mathbb{R}^2$, que es abierto y conexo. Buscamos obtener un factor integrante $\mu : \Omega \to \mathbb{R}$, donde Ω será el dominio del factor integrante que más adelante daremos. Para ello, necesitamos que se cumpla la condición de exactitud tras multiplicar por μ. Definimos:

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & 2y\cos x - xy \operatorname{sen} x \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} Q: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & 2x\cos x \end{array}$$

   Tenemos $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$ por ser composición, suma y producto de funciones de clase 1. Calculemos las derivadas parciales implicadas en la condición de exactitud:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial y}P + \mu\frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} &= \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned}$$

   Por tanto, la condición de exactitud se traduce en:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P - \frac{\partial \mu}{\partial x}Q = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

   Calculamos ahora las deriavadas parciales de Q, P que nos faltan:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2\cos x - x\operatorname{sen} x \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2\cos x - 2x\operatorname{sen} x \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -x\operatorname{sen} x$$

   Por tanto, comprobemos que admite un factor integrante que depende solo de x. Sea $m : \pi_1(\Omega) \to \mathbb{R}$ de forma que $\mu(x,y) = m(x)$ para todo $(x,y) \in \Omega$. Entonces, tenemos que las derivadas parciales de μ son:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) = m'(x) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Por tanto, la condición de exactitud se traduce en:

$$-m'(x) \cdot (2x \cos x) = -m(x) \cdot x \operatorname{sen} x \qquad \forall (x, y) \in \Omega$$

Para obtener el factor integrante m, planteamos la siguiente ecuación diferencial donde, como $m(x) \neq 0$ para todo $x \in \pi_1(\Omega)$, suponemos que $m(x) > 0$ (en caso contrario, habríamos obtenido otro factor integrante válido):

$$m' = \frac{x \operatorname{sen} x}{2x \cos x} m = \frac{\operatorname{tg}(x)}{2} \cdot m \qquad \text{con dominio }]0, \pi/2[\times \mathbb{R}^+$$

donde hemos elegido ese dominio por ser una de las componentes conexas del dominio de la rama principal de la función tangente. Se podrían elegir otros dominios, pero dependería de la condición inicial. Esta es una ecuación en variables separadas sin soluciones constantes, luego:

$$\int \frac{dm}{m} = \int \frac{\operatorname{tg}(x)}{2} dx \Longrightarrow \ln(m) = -\frac{1}{2} \ln(\cos x) \Longrightarrow m(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$$

donde he supuesto constante aditiva nula (ya que tan solo buscamos un factor integrante). Por tanto, un factor integrante es $\mu(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$ para todo $(x, y) \in \Omega$, donde un posible dominio (de nuevo, dependería de la condición inicial) es:

$$\Omega =]0, \pi/2[\times \mathbb{R}$$

En cualquiera de los casos, Ω es abierto, conexo y estrellado, con $P, Q \in C^1(\Omega)$. Consideramos la siguiente ecuación diferencial:

$$\mu P + \mu Q y' = 0 \qquad \text{con dominio } \Omega$$

Hemos visto que esa ecuación cumple la condición de exactitud. Buscamos ahora el potencial $U : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla U = (\mu P, \mu Q)$. Usando la derivada parcial respecto de y, tenemos que:

$$U(x, y) = \int \mu Q dy = \int 2x \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x}} dy = 2xy\sqrt{\cos x} + \varphi(x)$$

donde $\varphi : \pi_1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es una función que depende solo de x y representa la constante de integración. Derivando U respecto de x obtenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = 2y \left(\sqrt{\cos x} - \frac{x \operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}} \right) + \varphi'(x)$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \mu P(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\cos x}} (2y \cos x - xy \operatorname{sen} x)$$

Por tanto, tenemos que $\varphi'(x) = 0$. Entonces, por ejemplo, $\varphi(x) = 0$. Por tanto, la función potencial es (salvo una constante aditiva):

$$U(x, y) = 2xy\sqrt{\cos x} \qquad \forall (x, y) \in \Omega$$

Por tanto, tenemos que:

$$0 = \mu(x,y) \cdot (P(x,y) + Q(x,y)y') = \frac{d}{dx}(U(x,y)) = 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Veamos ahora qué valores anulan a Q:

$$Q(x,y) = 0 \Longleftrightarrow 2x\cos x$$

No obstante, como en nuestro dominio no se puede anular la función $\tan x$, no hay valores que anulen a Q en Ω. Por tanto, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, tenemos que la ecuación $U(x,y) = U(x_0, y_0)$ define una función implícita $y(x)$ en un entorno de x_0, que es solución de la ecuación diferencial de partida.

Ejercicio 6.3.3. Encuentra p, $q \in \mathbb{R}$ para que la ecuación

$$-y^2 + (x^2 + xy)y' = 0$$

admita un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = x^p y^q$. Usa dicho factor integrante para resolver la ecuación. Indica un método de resolución alternativo.

Para que la ecuación admita un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = x^p y^q$, necesitamos que se cumpla la condición de exactitud tras multiplicar por μ. Definimos:

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & -y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} Q: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2 + xy \end{array}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mu(x,y)P(x,y) &= x^p y^q \cdot (-y^2) = -x^p y^{q+2} \\ \mu(x,y)Q(x,y) &= x^p y^q \cdot (x^2 + xy) = x^{p+1} y^q (x+y) \end{aligned}$$

Tenemos $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$ por ser polinómicas. Impongamos ahora que se cumpla la condición de exactitud:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mu P)}{\partial y}(x,y) &= -(q+2)x^p y^{q+1} = x^p y^q(-(q+2)y) \\ \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}(x,y) &= (p+1)x^p y^q (x+y) + x^{p+1}y^q = x^p y^q((p+1)(x+y) + x) \end{aligned}$$

Por tanto, para que se de la condición de exactitud, necesitamos que:

$$-(q+2)y = (p+2)x + (p+1)y$$

Por tanto, resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{aligned} -q-2 &= p+1 \\ 0 &= p+2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} p &= -2 \\ -q-2 &= -1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} p = -2 \\ q = -1 \end{cases}$$

Por tanto, consideramos el factor integrante $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2y}$. Para que esté bien definido, necesitamos que $x \neq 0$ y $y \neq 0$, y además tenemos que nunca se anula. Por tanto, este factor integrante es es admitido por dicha ecuación diferencial en todo dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto y conexo que esté contenido en uno de los cuadrantes del plano.

Para resolver la ecuación diferencial, multiplicamos por el factor integrante y obtenemos:

$$\mu P + \mu Q y' = 0 \qquad \text{con dominio } \Omega$$

Hemos visto que esa ecuación cumple la condición de exactitud. Buscamos ahora el potencial $U : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla U = (\mu P, \mu Q)$. Usando la derivada parcial respecto de y, tenemos que:

$$U(x,y) = \int \mu Q dy = \int \frac{x^2}{x^2y} + \frac{xy}{x^2y} dy = \int \frac{1}{y} + \frac{1}{x} dy = \ln|y| + \frac{y}{x} + \varphi(x)$$

donde $\varphi : \pi_1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es una función que depende solo de x y representa la constante de integración. Derivando U respecto de x obtenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2} + \varphi'(x)$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \mu P(x,y) = \frac{-y^2}{x^2y} = -\frac{y}{x^2}$$

Por tanto, $\varphi'(x) = 0$. Entonces, por ejemplo, $\varphi(x) = 0$. Por tanto, la función potencial es (salvo una constante aditiva):

$$U(x,y) = \ln|y| + \frac{y}{x} \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Por tanto, tenemos que:

$$0 = \mu(x,y) \cdot (P(x,y) + Q(x,y)y') = \frac{d}{dx}(U(x,y)) = 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Veamos ahora qué valores anulan a Q:

$$Q(x,y) = 0 \iff x^2 + xy = 0 \iff x(x+y) = 0$$

Por tanto, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$ tal que $x_0 + y_0 \neq 0$ (ya que $x_0 \neq 0$ ya está impuesto por Ω), tenemos que la ecuación $U(x,y) = U(x_0,y_0)$ define una función implícita $y(x)$ en un entorno de x_0, que es solución de la ecuación diferencial de partida.

El método de resolución alternativo consiste usar el cambio de variable $u = {}^{y}\!/_{x}$, pero se deja como ejercicio al lector por no ser materia de este Capítulo.

Ejercicio 6.3.4. Encuentra una condición suficiente para que la ecuación dada por $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ admita un factor integrante μ tal que $\mu(x,y) = m(xy)$. Mediante un factor integrante de este tipo, encuentra la solución general de la ecuación

$$1 + xy + y^2 + (1 + xy + x^2)y' = 0.$$

Calculemos en primer lugar las derivadas parciales implicadas en la condición de exactitud:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y}P + \mu\frac{\partial P}{\partial y}$$
$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Por tanto, la condición de exactitud se traduce en:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P - \frac{\partial \mu}{\partial x}Q = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Calculamos ahora las derivadas parciales de μ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) = m'(xy)y \\ \dfrac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = m'(xy)x \end{cases}$$

Por tanto, la condición de exactitud se traduce en este caso en:

$$m'(xy)(xP(x,y) - yQ(x,y)) = m(xy)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)$$

Por tanto, y suponiendo que $xP(x,y) - yQ(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$, Tenemos que:

$$\frac{m'(xy)}{m(xy)} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)}{xP(x,y) - yQ(x,y)}$$

Por tanto, como necesitamos que exista una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)}{xP(x,y) - yQ(x,y)} = f(xy) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Es decir, necesitamos que dicho cociente esté bien definido en todo $(x,y) \in \Omega$ (esto podemos asegurarlo imponiendo que el denominador no se anule en Ω) y que sea función de xy.

Para la ecuación dada, tenemos que $\Omega = \mathbb{R}^2$ y:

$$\begin{cases} P(x,y) = 1 + xy + y^2 \\ Q(x,y) = 1 + xy + x^2 \end{cases}$$

Calculamos las derivadas parciales necesarias:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = x + 2y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = y + 2x \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\frac{m'(xy)}{m(xy)} = \frac{y+2x-(x+2y)}{x(1+xy+y^2)-y(1+xy+x^2)} = \frac{x-y}{(x+x^2y+xy^2)-(y+xy^2+yx^2)} = \frac{x-y}{x-y} = 1$$

En este caso, la función f es constante e igual a 1, y aunque el denominador se anule en la recta $x=y$, podemos asegurar que el cociente está bien definido en todo Ω. Por tanto, existe un factor integrante de la forma $\mu(x,y)=m(xy)$ para la ecuación dada. Para calcularlo, resolvemos la siguiente ecuación diferencial:

$$m' = m \qquad \text{con dominio } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$$

donde hemos supuesto que $m(xy)>0$ para todo $xy\in\mathbb{R}^+$ (en caso contrario, habríamos obtenido otro factor integrante válido). Esta es una ecuación en variables separadas, cuya solución es (usando como variable independiente χ):

$$\int \frac{dm}{m} = \int d\xi \Longrightarrow \ln(m)=\xi \Longrightarrow m(\xi)=e^{\xi}$$

donde he supuesto constante aditiva nula (ya que tan solo buscamos un factor integrante). Por tanto, un factor integrante es $\mu(x,y)=m(xy)=e^{xy}$ para todo $(x,y)\in\Omega$.

Para resolver la ecuación diferencial, multiplicamos por el factor integrante y obtenemos:

$$\mu P + \mu Q y' = 0 \qquad \text{con dominio } \Omega$$

Hemos visto que esa ecuación cumple la condición de exactitud. Buscamos ahora el potencial $U:\Omega\to\mathbb{R}$ tal que $\nabla U=(\mu P,\mu Q)$. Usando la derivada parcial respecto de x, tenemos que:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int \mu P dx = \int e^{xy}(1+xy+y^2)dx = \frac{1}{y}e^{xy} + e^{xy}\left(x-\frac{1}{y}\right) + ye^{xy} + \varphi(y) = \\ &= (x+y)e^{xy} + \varphi(y) \end{aligned}$$

donde $\varphi:\pi_2(\Omega)\to\mathbb{R}$ es una función que depende solo de y y representa la constante de integración. Derivando U respecto de y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= e^{xy} + x(x+y)e^{xy} + \varphi'(y) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= \mu Q(x,y) = e^{xy}(1+xy+x^2) \end{aligned}$$

Por tanto, $\varphi'(y)=0$. Entonces, por ejemplo, $\varphi(y)=0$. Por tanto, la función potencial es (salvo una constante aditiva):

$$U(x,y) = (x+y)e^{xy} \qquad \forall (x,y)\in\Omega$$

Por tanto, tenemos que:

$$0 = \mu(x,y)\cdot(P(x,y)+Q(x,y)y') = \frac{d}{dx}\left(U(x,y)\right) = 0 \qquad \forall (x,y)\in\Omega$$

Por tanto, para cada $(x_0,y_0)\in\Omega$ tal que $Q(x_0,y_0)\neq 0$, tenemos que la ecuación $U(x,y)=U(x_0,y_0)$ define una función implícita $y(x)$ en un entorno de x_0, que es solución de la ecuación diferencial de partida.

Ejercicio 6.3.5. Dada una función $H \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $H = H(x,y)$, se considera el sistema Hamiltoniano asociado

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y). \end{cases}$$

Al tratarse de un sistema autónomo, es posible obtener la ecuación de las órbitas.

1. Demuestra que la ecuación de las órbitas se puede escribir como

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial H}{\partial y}(x,y)y' = 0$$

y comprueba que se trata de una ecuación exacta.

2. Se supone que $H(x,y) = x^2+2y^2$. Escribe el sistema, la ecuación de las órbitas y encuentra las soluciones y las órbitas.

Ejercicio 6.3.6. Dado un dominio Ω del plano se considera un campo vectorial $B : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $B = (B_1, B_2)$, $B = B(x,y)$. Se supone $B \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Diremos que B es un campo solenoidal si se cumple

$$\operatorname{div} B := \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} = 0,$$

donde div es el operador divergencia.

1. Determina los valores de las constantes a, b, c, d para los que el campo $B(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ es solenoidal.

2. Demuestra que si el dominio Ω tiene forma de estrella entonces para cada campo solenoidal B existe una función $A \in C^2(\Omega)$ tal que $\frac{\partial A}{\partial x} = B_2$, $\frac{\partial A}{\partial y} = -B_1$.

Ejercicio 6.3.7. Se considera un campo de fuerzas $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$, $F = F(x,y,z)$, de clase C^1.

1. Demuestra que existe una función $U \in C^2(\mathbb{R}^3)$ que cumple $\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$, $\frac{\partial U}{\partial y} = F_2$, $\frac{\partial U}{\partial z} = F_3$ si y solo si se cumplen las condiciones de exactitud

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

2. Generalización a $\mathbb{R}^d$.

Ejercicio 6.3.8. Se considera un campo de fuerzas $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2)$, $F = F(x,y)$, de clase C^1. Se define la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T = T(x,y)$ como el trabajo realizado a lo largo del camino $\gamma(t) = (tx, t^2y)$, $t \in [0,1]$.

1. Demuestra que T es una función de clase C^1.

2. Calcula las derivadas parciales de T.

3. Se define ahora $\widetilde{T}$ como el trabajo realizado a lo largo del camino $\widetilde{\gamma}(t) = (t^2x, ty)$, $t \in [0,1]$. ¿Se puede asegurar que T y $\widetilde{T}$ coinciden?

6.4. Ecuación Lineal de Orden Superior

Ejercicio 6.4.1. Encuentra funciones $a, b \in C(I)$ de modo que t, t^2 sean soluciones de una ecuación lineal
$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$
con $a, b \in C(I)$. Discute si el intervalo I puede ser toda la recta real o no.

Sea L el operador diferencial L asociado a dicha ecuación. Entonces, tenemos que:

$$L(t) = 0 \Longleftrightarrow a(t) + b(t)t = 0 \quad \forall t \in I$$
$$L(t^2) = 0 \Longleftrightarrow 2 + 2a(t)t + b(t)t^2 = 0 \quad \forall t \in I$$

Por tanto, tenemos que $a(t) = -b(t)t$ para todo $t \in I$, por lo que:

$$0 = 2 - 2b(t)t^2 + b(t)t^2 = 2 - b(t)t^2 \quad \forall t \in I \Longrightarrow \begin{cases} b(t) = \dfrac{2}{t^2} \\ a(t) = -\dfrac{2}{t} \end{cases} \quad \forall t \in I$$

Por tanto, tenemos que $0 \notin I$. Como I es un intervalo, entonces $I \subset \mathbb{R}^+$ o $I \subset \mathbb{R}^-$, pero no puede ser toda la recta real.

Ejercicio 6.4.2. Encuentra un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $3x'' - 2x' - 8x = 0$

Observación. Busca soluciones de la forma $e^{\lambda t}$.

Por el método de variación de constantes, encuentra la solución general de la ecuación $3x'' - 2x' - 8x = \cosh(t)$.

Supongamos $e^{\lambda t}$ una solución de la ecuación dada. Entonces, tenemos que:

$$L[e^{\lambda t}] = 0 \Longleftrightarrow 3\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ y $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ son soluciones de la ecuación dada. Veamos que son linealmente independientes:

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

Para resolver la ecuación completa dada, buscamos una solución particular. Debido al término $\cosh(t)$, buscamos una solución de la forma:

$$x_p(t) = \alpha \cosh(t) + \beta \operatorname{senh}(t)$$

Calculemos los valores de α y β:

$$x_p'(t) = \alpha \operatorname{senh}(t) + \beta \cosh(t)$$
$$x_p''(t) = \alpha \cosh(t) + \beta \operatorname{senh}(t)$$

Por tanto, que sea solución de la ecuación completa implica que:

$$\begin{aligned}3(\alpha\cosh(t)+\beta\operatorname{senh}(t))-2(\alpha\operatorname{senh}(t)+\beta\cosh(t))-8(\alpha\cosh(t)+\beta\operatorname{senh}(t))&=\cosh(t)\\(3\alpha-2\beta-8\alpha)\cosh(t)+(3\beta-2\alpha-8\beta)\operatorname{senh}(t)&=\cosh(t)\end{aligned}$$

Como senh, cosh son linealmente independientes, entonces:

$$\left\{\begin{array}{l}-5\alpha-2\beta=1\\-2\alpha-5\beta=0\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha={}^{-5}/_{21}\\\beta={}^{2}/_{21}\end{array}\right.$$

Por tanto, tenemos que una solución particular de la ecuación dada es:

$$x_p(t)={}^{-5}/_{21}\cosh(t)+{}^{2}/_{21}\operatorname{senh}(t)$$

Por tanto, la solución general de la ecuación dada es:

$$x(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-4/3t}+{}^{-5}/_{21}\cosh(t)+{}^{2}/_{21}\operatorname{senh}(t)\qquad\text{con } t\in\mathbb{R}, c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Ejercicio 6.4.3. Encuentra la solución general de la ecuación

$$y''+\frac{2}{x}\cdot y'+y=\frac{1}{x},$$

sabiendo que dos soluciones de la ecuación homogénea son $\frac{\operatorname{sen}x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$.

Como dominio, consideramos $I=\mathbb{R}^+$ (el caso $I=\mathbb{R}^-$ es análogo). Al ser el término independiente ${}^1/_x$, buscamos una solución particular de la forma:

$$y_p(x)=\alpha+\frac{\beta}{x}\quad\text{con } \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Calculamos las derivadas:

$$y_p'(x)=\frac{-\beta}{x^2}\qquad y_p''(x)\qquad=\frac{2\beta}{x^3}$$

Por tanto, que sea solución de la ecuación dada implica que:

$$\begin{aligned}\frac{2\beta}{x^3}+\frac{2}{x}\cdot\frac{-\beta}{x^2}+\alpha+\frac{\beta}{x}&=\frac{1}{x}\\\frac{\cancel{2\beta}}{\cancel{x^3}}-\frac{\cancel{2\beta}}{\cancel{x^3}}+\alpha+\frac{\beta}{x}&=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

Veamos en primer lugar que $1, {}^1/_x$ son linealmente independientes. Para ello, calculamos su Wronskiano:

$$W(1,{}^1/_x)=\begin{vmatrix}1&{}^1/_x\\0&-{}^1/_{x^2}\end{vmatrix}=-{}^1/_{x^2}\neq0$$

Por tanto, tenemos que $1, {}^1/_x$ son linealmente independientes, por lo que la igualdad anterior se traduce en:

$$\begin{cases}\alpha=0\\\beta=1\end{cases}$$

Por tanto, tenemos que una solución particular de la ecuación dada es:

$$y_p(x) = \frac{1}{x}$$

Por otro lado, comprobemos que las soluciones de la homogénea dadas son linealmente independientes. Para ello, calculamos su Wronskiano:

$$\begin{aligned}
W\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}, \frac{\cos x}{x}\right)(x) &= \begin{vmatrix} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \frac{\cos x}{x} \\ \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} & \frac{-x\operatorname{sen} x - \cos x}{x^2} \end{vmatrix} = \\
&= \frac{-x\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x}{x^3} - \frac{x\cos^2 x - \operatorname{sen} x\cos x}{x^3} = \\
&= \frac{-x(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{x^3} = \frac{-1}{x^2} \neq 0
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que ${}^{\operatorname{sen} x}/_{x}, {}^{\cos x}/_{x}$ son linealmente independientes. Por tanto, la solución general de la ecuación dada es:

$$y(x) = c_1 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} + c_2 \cdot \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x} \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}^+, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 6.4.4. Se considera la ecuación

$$(1+t)x'' - (1+2t)x' + tx = te^t.$$

Se pide:

1. Comprueba que $z_0(t) = e^t$ es una solución particular de la ecuación homogénea.

   El dominio de la ecuación es $\mathbb{R}^2$, y $z_0 \in C^2(\mathbb{R})$. Por tanto, z_0 puede ser solución; veamos si lo es:

   $$L[z_0] = e^t(1 + t - 1 - 2t + t) = e^0 \cdot 0 = 0$$

   Por tanto, z_0 es solución de la ecuación homogénea.

2. Efectúa el cambio $x = uz_0$ en la ecuación completa para reducir su orden y poder integrarla.

   En primer lugar, tenemos que:

   $$\begin{aligned} x' &= u'z_0 + uz_0' = e^t(u' + u) \\ x'' &= u''z_0 + 2u'z_0' + uz_0'' = e^t(u'' + 2u' + u) \end{aligned}$$

   Por tanto, sustituyendo en la ecuación dada, tenemos que:

   $$\begin{aligned} (1+t)e^t(u'' + 2u' + u) - (1+2t)e^t(u' + u) + te^t u &= te^t \\ (1+t)(u'' + 2u' + u) - (1+2t)(u' + u) + tu &= t \\ (1+t)u'' + (2(1+t) - (1+2t))u' + (1 + t - (1+2t) + t)u &= t \\ (1+t)u'' + u' &= t \end{aligned}$$

Establecemos ahora otro cambio de variable $y = u'$, de modo que la ecuación anterior se convierte en:

$$(1+t)y' + y = t \Longrightarrow y' = \frac{t-y}{1+t} \qquad \text{con dominio } \Omega = \begin{cases} \Omega_- =]-\infty, -1[\\ \Omega_+ =]-1, \infty[\end{cases}$$

Para resolverla, trabajaremos con Ω_+, pero el procedimiento es análogo para Ω_-. Esta es una ecuación lineal completa, que por el Capítulo 2 sabemos resolver. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \exp\left(\int \frac{-1}{1+t}dt\right)\left(C' + \int \frac{t}{1+t}\exp\left(-\int \frac{-1}{1+s}ds\right)dt\right) \\
&= \exp(-\ln(1+t))\left(C' + \int \frac{t}{1+t}\cdot(1+t)dt\right) \\
&= \frac{1}{1+t}\left(C' + \int tdt\right) = \frac{1}{1+t}\left(C' + \frac{t^2}{2}\right) = \frac{C'}{1+t} + \frac{t^2}{2(1+t)}
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
u(t) &= \int y(t)dt = \int \left(\frac{C'}{1+t} + \frac{t^2}{2(1+t)}\right)dt \\
&= C'\int \frac{1}{1+t}dt + \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{1+t}dt
\end{aligned}$$

Realizamos la división de polinomios del segundo caso:

$$\begin{array}{l}
(\quad t^2) : (t+1) = t - 1 + \dfrac{1}{t+1} \\
\underline{-t^2 - t} \\
\qquad -t \\
\qquad \underline{\ \ t+1} \\
\qquad\quad\ \ 1
\end{array}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
u(t) &= C'\ln(1+t) + \frac{1}{2}\int\left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right)dt \\
&= C'\ln(1+t) + \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t) + D'\right) \\
&= C'\ln(1+t) + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+t) + D \\
&= \left(C' + \frac{1}{2}\right)\ln(1+t) + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + D \\
&= C\ln(1+t) + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + D
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
x(t) &= u(t)e^t \\
&= \left(C\ln(1+t) + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + D\right)e^t \qquad \text{con } t \in \Omega_+
\end{aligned}$$

Ejercicio 6.4.5. Consideremos la ecuación

$$x^2y'' - 7xy' + 16y = 0.$$

Encuentra una solución particular de tipo potencia ($y_1(x) = x^m$) y usa la fórmula de Liouville para encontrar la solución general.

Supongamos $y_1(x) = x^m$ una solución de la ecuación dada. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} L[y_1] = 0 &\Longleftrightarrow x^2m(m-1)x^{m-2} - 7xmx^{m-1} + 16x^m = 0 \\ &\Longleftrightarrow m(m-1)x^m - 7mx^m + 16x^m = 0 \\ &\Longleftrightarrow x^m(m^2 - 8m + 16) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x^m(m-4)^2 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, para $m = 4$ tenemos que $y_1(x) = x^4$ es solución de la ecuación dada.

Ejercicio 6.4.6. Fijado $I \subset \mathbb{R}$, sean $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_k(t) \in C^k(I)$ que cumplen:

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)(t) \neq 0 \ \forall t \in I$$

Demuestra que existe una ecuación lineal homogénea

$$x^{(k)} + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$$

con $a_{k-1}, \dots, a_1, a_0 \in C(I)$ tal que $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_k(t)$ es un sistema fundamental. ¿Es cierta esta conclusión cuando $W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)(t) = 0$ para cada $t \in I$?

Como su Wronskiano es distinto de cero para algún $t \in I$, entonces $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ son linealmente indepentientes en $\mathbb{F}(I, \mathbb{R})$. Construyamos ahora la ecuación diferencial. Como $\varphi_i \in \ker L$ para $i = 1, 2, \dots, k$, entonces tenemos que:

$$\varphi_i^{(k)} + a_{k-1}(t)\varphi_i^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)\varphi_i' + a_0(t)\varphi_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$$

Por tanto, definimos el siguiente sistema:

$$M = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_1' & \cdots & \varphi_1^{(k-2)} & \varphi_1^{(k-1)} \\ \varphi_2 & \varphi_2' & \cdots & \varphi_2^{(k-2)} & \varphi_2^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_k & \varphi_k' & \cdots & \varphi_k^{(k-2)} & \varphi_k^{(k-1)} \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ a_{k-2} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -\varphi_1^{(k)} \\ -\varphi_2^{(k)} \\ \vdots \\ -\varphi_k^{(k)} \end{pmatrix}$$

Por tanto, obtener los coeficientes a es equivalente a resolver el sistema:

$$M(t)a(t) = b(t) \quad \forall t \in I$$

Tenemos que:

$$|M| = |M^t| = W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k) \neq 0$$

Por tanto, dicho sistema tiene solución única, existiendo entonces los coeficientes $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, a_0$ buscados. No obstante, es necesario demostrar que $a_i \in C(I)$ para cada $i = 0, 1, \dots, k-1$, algo que obtenemos al resolver el sistema mediante

Cramer, ya que el determinante es una función continua. Por tanto, se tiene que existe una ecuación lineal homogénea de forma que $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ son soluciones, y al ser linealmente independientes, forman un sistema fundamental.

Por otro lado, si $W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)(t) = 0$ para cada $t \in I$, entonces, suponiendo que existiese dicha ecuación lineal homogénea de la cual fueran solución, tendríamos que no son linealmente independientes, por lo que no formarían un sistema fundamental. Por tanto, en este segundo caso no se cumpliría la conclusión.

Ejercicio 6.4.7. Se considera la ecuación

$$y' + y^2 + \alpha(t)y + \beta(t) = 0$$

donde $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. Dada una solución $y(t)$ definida en un intervalo abierto $J \subset I$ se define

$$x(t) = c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} y(s)ds\right) \qquad \forall t \in J$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante y $t_0 \in J$. Demuestra que $x(t)$ es solución de una ecuación lineal y homogénea de segundo orden.

Como y es continua en J, en particular lo es en cada compacto contenido en J, luego x está bien definida. Además, por el Teorema Fundamental del Cálculo, $x \in C^1(J)$, con:

$$x'(t) = c\exp\left(\int_{t_0}^{t} y(s)ds\right) y(t) = x(t)y(t)$$

Por tanto, tenemos que:

$$x'' = x'y + y'x = xy^2 + x\left(-y^2 - \alpha\big|_J \cdot y - \beta\big|_J\right) = x\left(-y\alpha\big|_J - \beta\big|_J\right)$$

Por tanto, como $\alpha, \beta, y \in C(J)$, entonces $x \in C^2(J)$, y por tanto x es solución de la ecuación lineal y homogénea de segundo orden siguiente:

$$x'' + x\left(y\alpha\big|_J + \beta\big|_J\right) = 0 \quad \text{con dominio } J$$

Ejercicio 6.4.8. Se considera la ecuación $x'' + a(t)x = 0$ donde $a \in C^1(I)$.

1. Dadas dos soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la ecuación anterior, demuestra que la función producto $z(t) = x_1(t)x_2(t)$ es solución de la ecuación de tercer orden

$$z''' + 4a(t)z' + 2a'(t)z = 0.$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
z' &= x_1'x_2 + x_1x_2' \\
z'' &= x_1''x_2 + 2x_1'x_2' + x_1x_2'' \\
z''' &= x_1'''x_2 + x_1''x_2' + 2x_1''x_2' + 2x_1'x_2'' + x_1'x_2'' + x_1x_2''' = \\
&= x_1'''x_2 + 3x_1''x_2' + 3x_1'x_2'' + x_1x_2'''
\end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de que, dada una solución x de la primera ecuación, como $x'' = -a(t)x$, entonces $x'' \in C^1(I)$, y por tanto $x''' \in C(I)$, con:

$$x''' = -a'(t)x - a(t)x'$$

Por tanto, y usando que x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación dada, tenemos que:

$$\begin{aligned}
z''' &= x_1'''x_2 + 3x_1''x_2' + 3x_1'x_2'' + x_1x_2''' = \\
&= (-a'(t)x_1 - a(t)x_1')x_2 + 3(-a(t)x_1)x_2' + 3x_1'(-a(t)x_2) + x_1(-a'(t)x_2 - a(t)x_2') = \\
&= -2a'(t)x_1x_2 - 4a(t)x_1'x_2 - 4a(t)x_1x_2' = \\
&= -2a'z - 4az'
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $z''' + 3az' + 2a'z = 0$, por lo que z es solución de la ecuación de tercer orden dada.

2. Se supone que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ forman un sistema fundamental para la ecuación de segundo orden, demuestra que las funciones $x_1^2(t)$, $x_1(t)x_2(t)$, $x_2^2(t)$ forman un sistema fundamental de la ecuación de tercer orden.

   Observación. Prueba la identidad

$$\begin{vmatrix} v_1^2 & w_1^2 & v_1w_1 \\ 2v_1v_2 & 2w_1w_2 & v_2w_1 + v_1w_2 \\ v_2^2 & w_2^2 & v_2w_2 \end{vmatrix} = (w_1v_2 - v_1w_2)^3.$$

   Por el apartado anterior, tenemos de forma directa que x_1x_2 es solución de la ecuación de tercer orden dada. Además, como en ningún momento hemos hecho uso de que x_1 y x_2 sean distintas, entonces x_1^2 y x_2^2 también son soluciones de la ecuación de tercer orden dada. Por tanto, tan solo nos es necesario que sean linealmente independientes. Para ello, calcularemos su Wronskiano:

$$\begin{aligned}
W(x_1^2, x_1x_2, x_2^2) &= \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ 2x_1x_1' & x_1'x_2 + x_1x_2' & 2x_2x_2' \\ 2(x_1')^2 + 2x_1x_1'' & x_1''x_2 + 2x_1'x_2' + x_1x_2'' & 2(x_2')^2 + 2x_2x_2'' \end{vmatrix} = \\
&= -\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_1x_2 \\ 2x_1x_1' & 2x_2x_2' & x_1'x_2 + x_1x_2' \\ 2(x_1')^2 + 2x_1x_1'' & 2(x_2')^2 + 2x_2x_2'' & x_1''x_2 + 2x_1'x_2' + x_1x_2'' \end{vmatrix} = \\
&= -2\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_1x_2 \\ 2x_1x_1' & 2x_2x_2' & x_1'x_2 + x_1x_2' \\ (x_1')^2 & (x_2')^2 & x_1'x_2' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_1x_2 \\ 2x_1x_1' & 2x_2x_2' & x_1'x_2 + x_1x_2' \\ 2x_1x_1'' & 2x_2x_2'' & x_1''x_2 + x_1x_2'' \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

   Usando en el primer determinante la identidad dada y en el segundo que x_1, x_2 son soluciones de la ecuación $x'' + a(t)x = 0$, tenemos que:

$$W(x_1^2, x_1x_2, x_2^2) = -2(x_2x_1' - x_1x_2')^3 - \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_1x_2 \\ 2x_1x_1' & 2x_2x_2' & x_1'x_2 + x_1x_2' \\ -2ax_1^2 & -2ax_2^2 & -2a(x_1x_2) \end{vmatrix}$$

El segundo sumando es nulo por ser la tercera fila proporcional a la primera. Usando el Wroskiano de x_1, x_2, tenemos que:

$$W(x_1^2, x_1x_2, x_2^2) = -2W(x_1, x_2)^3$$

Por tanto, como $W(x_1, x_2) \neq 0$ por ser x_1, x_2 linealmente independientes, entonces:

$$W(x_1^2, x_1x_2, x_2^2) \neq 0$$

Por tanto, x_1^2, x_1x_2, x_2^2 son linealmente independientes, y como eran soluciones de la ecuación de tercer orden dada, forman un sistema fundamental.

Ejercicio 6.4.9. Demuestra que las funciones $f_j(t) = |t - j|$, $j = 1, \dots, n$ son linealmente independientes en $I =]0, \infty[$.

Observación. Las funciones f_j son derivables en cada intervalo $]0, 1[$, $]1, 2[$, ...

En primer lugar, tenemos que, para cada $j = 1, 2, \dots, n$:

$$f_j(t) = \begin{cases} j - t & \text{si } t < j \\ t - j & \text{si } t \geqslant j \end{cases}$$

Por tanto, f_j es derivable en $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$. Calculemos su derivada:

$$f_j'(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < j \\ 1 & \text{si } t \geqslant j \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$$

Por tanto, buscamos coeficientes $c_1, c_2, \dots, c_n$ tales que:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j f_j(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Como al derivar ha de mantenerse la igualdad, tenemos que:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j f_j'(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$$

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, consideramos $t_i \in]i, i+1[$, de modo que tenemos la siguiente ecuación:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j'(t_i) = \sum_{j=1}^{i-1} c_j f_j'(t_i) + \sum_{j=i}^{n} c_j f_j'(t_i) = \sum_{j=1}^{i} c_j - \sum_{j=i+1}^{n} c_j$$

Por tanto, como para cada i tenemos una ecuación de este tipo, entonces tenemos un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas. Su matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j} \text{ con } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \leqslant i \\ -1 & \text{si } j > i \end{cases}$$

Restando la primera fila al resto, obtenemos:

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2^{n-1} \neq 0$$

Por tanto, el sistema tiene solución única, y por tanto $f_1, f_2, \dots, f_n$ son linealmente independientes.

Ejercicio 6.4.10. Fijado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se pide:

1. Encuentra dos funciones $f_1, f_2 \in C^1(I)$ que sean linealmente independientes en I mientras que sus derivadas son linealmente dependientes.

   Sean $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ definidas por:

   $$f_1(t) = t \qquad f_2(t) = t + 1$$

   Tenemos que $f_1, f_2 \in C^1(I)$ por ser polinómicas, con:

   $$f_1'(t) = 1 = f_2'(t) \qquad \forall t \in I$$

   Veamos que f_1, f_2 son linealmente independientes calculando su Wronskiano:

   $$W(f_1, f_2)(t) = \begin{vmatrix} t & t+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = t - t - 1 = -1 \neq 0 \quad \forall t \in I$$

   Por tanto, como $\exists t \in I$ tal que $W(f_1, f_2)(t) \neq 0$, entonces f_1, f_2 son linealmente independientes. No obstante, ya que $f_1' = f_2'$, vemos que sus derivadas son linealmente dependientes.

2. Demuestra que si $f_1, f_2, \dots, f_n \in C^1(I)$ son funciones tales que $f_0, f_1, \dots, f_n$ son linealmente independientes entonces $f_1', f_2', \dots, f_n'$ son también linealmente independientes. La notación f_0 se emplea para la función constante $f_0(t) = 1$.

   Como no podemos asegurar que sean derivables $k-1$ veces, no podemos considerar su Wronskiano. Para estudiar su independencia lineal, buscamos coeficientes $c_1, c_2, \dots, c_n$ tales que:

   $$\sum_{j=1}^{n} c_j f_j'(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

   Integrando, obtenemos:

   $$\sum_{j=1}^{n} c_j \int f_j'(t) dt = 0 \quad \forall t \in I$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, y unificando constantes de integración en C, tenemos que:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j f_j(t) + C = 0 \quad \forall t \in I$$

Definiendo $c_0 = C$, tenemos que:

$$\sum_{j=0}^{n} c_j f_j(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

Por ser $f_0, f_1, \dots, f_n$ linealmente independientes, entonces $c_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Por tanto, $f_1', f_2', \dots, f_n'$ son linealmente independientes.

Ejercicio 6.4.11.

1. Dada la ecuación del oscilador armónico $x'' + \omega^2 x = 0$ con $\omega > 0$, demuestra que las funciones $\cos \omega t$, $\operatorname{sen} \omega t$ forman un sistema fundamental.

   En primer lugar, hemos de comprobar que $x_1(t) = \cos \omega t$ y $x_2(t) = \operatorname{sen} \omega t$ son soluciones de la ecuación dada. Para ello, derivamos:

   $$\begin{array}{llll} x_1'(t) & = -\omega \operatorname{sen} \omega t & x_2'(t) & = \omega \cos \omega t \\ x_1''(t) & = -\omega^2 \cos \omega t & x_2''(t) & = -\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \end{array}$$

   Por tanto, sustituyendo en la ecuación dada, tenemos que:

   $$\begin{gathered} x_1''(t) + \omega^2 x_1(t) = -\omega^2 \cos \omega t + \omega^2 \cos \omega t = 0 \\ x_2''(t) + \omega^2 x_2(t) = -\omega^2 \operatorname{sen} \omega t - \omega^2 \operatorname{sen} \omega t = 0 \end{gathered}$$

   Por tanto, x_1, x_2 son soluciones de la ecuación dada. Veamos ahora que son linealmente independientes:

   $$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} \cos \omega t & \operatorname{sen} \omega t \\ -\omega \operatorname{sen} \omega t & \omega \cos \omega t \end{vmatrix} = \omega \cos^2 \omega t + \omega \operatorname{sen}^2 \omega t = \omega \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

   Por tanto, como $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $W(x_1, x_2)(t) \neq 0$, entonces x_1, x_2 son linealmente independientes, y por tanto forman un sistema fundamental.

2. Consideramos ahora el oscilador forzado $x'' + \omega^2 x = A \operatorname{sen}(\Omega t) + B \cos(\Omega t)$, donde $\Omega > 0$ es un número real. Demuestra que esta ecuación admite una solución del tipo $x(t) = a \cos(\Omega t) + b \operatorname{sen}(\Omega t)$ si $\Omega \neq \omega$.

   Lo resolveremos mediante el principio de superposición. Sean:

   $$\begin{aligned} b_1(t) &= \cos(\Omega t), \\ b_2(t) &= \operatorname{sen}(\Omega t) \end{aligned}$$

Como buscamos resolver los sistemas $L[x] = b_1$ y $L[x] = b_2$, buscamos x_1, x_2 soluciones respectivamente, de la forma:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a\cos(\Omega t), \\ x_2(t) &= b\,\mathrm{sen}(\Omega t) \end{aligned}$$

Impongamos ahora que $L[x_1] = b_1$ y $L[x_2] = b_2$. Para ello, derivamos:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -a\Omega\,\mathrm{sen}(\Omega t), \\ x_2'(t) &= b\Omega\cos(\Omega t), \\ x_1''(t) &= -a\Omega^2\cos(\Omega t), \\ x_2''(t) &= -b\Omega^2\,\mathrm{sen}(\Omega t) \end{aligned}$$

Por tanto, imponiendo que $L[x_1] = b_1$ y $L[x_2] = b_2$, tenemos que:

$$\begin{aligned} -a\Omega^2\cos(\Omega t) + \omega^2 a\cos(\Omega t) = \cos(\Omega t) = a\cos(\Omega t)(\omega^2 - \Omega^2) \\ -b\Omega^2\,\mathrm{sen}(\Omega t) + \omega^2 b\,\mathrm{sen}(\Omega t) = \mathrm{sen}(\Omega t) = b\,\mathrm{sen}(\Omega t)(\omega^2 - \Omega^2) \end{aligned}$$

Por tanto, para que se tenga $L[x_1] = b_1$ y $L[x_2] = b_2$, es necesario que:

$$a = b = \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2}$$

Por tanto, usando el principio de superposición, como $L[Ax_1 + Bx_2] = AL[x_1] + BL[x_2] = Ab_1 + Bb_2$, tenemos que una solución de la ecuación completa dada es:

$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) = \frac{A}{\omega^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t) + \frac{B}{\omega^2 - \Omega^2}\,\mathrm{sen}(\Omega t)$$

3. Resuelve la ecuación $x'' + \omega^2 x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\,\mathrm{sen}(\Omega_i t + \varphi_i)$ cuando $\omega \neq \Omega_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

   Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, consideramos la ecuación:

   $$x'' + \omega^2 x = \alpha_i\,\mathrm{sen}(\Omega_i t + \varphi_i)$$

   Por el apartado anterior, sabemos que una ecuación particular de la ecuación anterior es:

   $$x_i(t) = \frac{\alpha_i}{\omega^2 - \Omega_i^2}\,\mathrm{sen}(\Omega_i t + \varphi_i)$$

   Por tanto, por el principio de superposición, una solución de la ecuación dada es:

   $$x(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\omega^2 - \Omega_i^2}\,\mathrm{sen}(\Omega_i t + \varphi_i)$$

   Por tanto, la solución general de la ecuación dada es:

   $$x(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\,\mathrm{sen}(\omega t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\omega^2 - \Omega_i^2}\,\mathrm{sen}(\Omega_i t + \varphi_i), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

4. ¿Cómo son las soluciones en el caso $\Omega_i = \omega$ para algún i?

Ejercicio 6.4.12. Se considera la ecuación

$$x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t}$$

donde $a_0, \ldots, a_{k-1}$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son constantes. Encuentra la condición necesaria y suficiente para que la ecuación admita una solución del tipo $x(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}$.

Para el razonamiento a seguir, es necesario considerar $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. En caso contrario, tendremos n' sumandos distintos, donde $n' < n$, y los coeficientes A_i se pueden reagrupar para obtener un único sumando con coeficiente $A_i + A_j$.

Veamos en primer lugar que $x(t)$ puede ser solución. Como es suma de funciones de clase C^∞, entonces $x \in C^\infty(\mathbb{R})$. Consideramos la derivada de orden j de $x(t)$:

$$x^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^j e^{\lambda_i t} \qquad \forall j = 0, 1, \ldots, k$$

Por tanto, sustituyendo en la ecuación dada (definiendo $a_k = 1$), tenemos que una condición necesaria y suficiente para que $x(t)$ sea solución es:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j x^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} \Longleftrightarrow \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=1}^{n} a_j c_i \lambda_i^j e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{k} a_j \lambda_i^j = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t}$$

Como $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}$ es linealmente independiente, entonces los coeficientes de los términos exponenciales han de ser iguales, es decir:

$$c_i \sum_{j=0}^{k} a_j \lambda_i^j = A_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Por tanto, una condición necesaria y suficiente para que la ecuación admita una solución del tipo $x(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}$ es:

$$c_i = \frac{A_i}{\sum\limits_{j=0}^{k} a_j \lambda_i^j} \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

6.5. Sistemas Lineales

Ejercicio 6.5.1. Calcula la solución general del sistema lineal homogéneo $x' = Ax$ para las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. A_1.

Calculamos el polinomio característico de A_1:

$$\begin{aligned} p_{A_1}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda-1)(1-\lambda+1) = (1-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\sigma(A_1) = \{1, 0, 2\}.$$

Calculamos los vectores propios asociados a cada valor propio:

$$V_1 = \ker(A_1 - I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$V_0 = \ker(A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$V_2 = \ker(A_1 - 2I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por tanto, tres soluciones del sistema son:

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_0(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad x_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Además, estas son linealmente independientes, ya que:

$$\det(x_1 \mid x_0 \mid x_2) = e^{1+0+2} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

donde el segundo determinante no es nulo porque vectores asociados a valores propios distintos son linealmente independientes. Por tanto, tenemos que la solución general del sistema es:

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

2. A_2.

Calculamos el polinomio característico de A_2:

$$\begin{aligned}
p_{A_2}(\lambda) = \det(A_2 - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) + 2(0 + (1-\lambda)) = \\
&= (1-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) + 2(1-\lambda) = (1-\lambda)\left(-\lambda(2-\lambda)+2\right) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\sigma(A_2) = \{1, 1+i, 1-i\}.$$

Calculamos los vectores propios asociados a cada valor propio:

$$V_1 = \ker(A_2 - I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$V_{1+1} = \ker(A_2 - (1+i)I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -i & -1 & 2 \\ -1 & -i & 0 \\ -1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por tanto, tenemos que dos soluciones son:

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x_{1+i}(t) = e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = e^t(\cos t + i\operatorname{sen} t)\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t + i\cos t \\ -\cos t - i\operatorname{sen} t \\ -\cos t - i\operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

Por tanto, como $Re(x_{1+i}), Im(x_{1+i})$ son dos soluciones de $x' = Ax$, tenemos que tres soluciones reales son:

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x_2(t) = e^t \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ -\cos t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \qquad x_3(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

Veamos ahora si son linealmente independientes:

$$\det(x_1 \mid x_2 \mid x_3) = e^{3t}\det\begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{sen} t & \cos t \\ 2 & -\cos t & -\operatorname{sen} t \\ 1 & -\cos t & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \neq 0$$

Por tanto, la solución general del sistema es:

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t) \qquad t \in \mathbb{R}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 6.5.2. Se considera el problema de valores iniciales para el sistema de ecuaciones de segundo orden

$$\begin{cases} x'' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \\ x'(t_0) = v_0, \end{cases}$$

con $A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N})$, $b \in C(I, \mathbb{R}^N)$, I intervalo abierto, $t_0 \in I$, $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^N$. Demuestra que la sucesión de iterantes

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} (t-s)[A(s)x_n(s) + b(s)]ds + x_0 + v_0(t-t_0)$$

con inicialización $x_0(t) = x_0$ converge uniformemente en compactos de I a una solución del problema. Demuestra que esta solución es única.

Sea $J \subset I$ un intervalo compacto, y sea $\lambda(J)$ su longitud (finito, por ser un intervalo cerrado). Como A, b y la norma son continuas en I, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$ de forma que:

$$\|A(t)\| \leqslant \alpha, \quad \|b(t)\| \leqslant \beta, \quad \forall t \in J.$$

Probaremos la convergencia uniforme mediante el Test de Weierstrass. Estudiemos la diferencia entre dos iterantes consecutivos:

$$\begin{aligned}
\|x_1(t) - x_0(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (t-s)[A(s)x_0(s) + b(s)]ds + v_0(t-t_0) \right\| \leqslant \\
&\leqslant \left\| \int_{t_0}^{t} (t-s)[A(s)x_0 + b(s)]ds \right\| + \|v_0(t-t_0)\| \leqslant \\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|(t-s)[A(s)x_0 + b(s)]\| \, ds \right| + |t-t_0| \, \|v_0\| \leqslant \\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |t-s|[\|A(s)x_0\| + \|b(s)\|]ds \right| + \lambda(J) \, \|v_0\| \leqslant \\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \lambda(J)[\|A(s)\| \, \|x_0\| + \|b(s)\|]ds \right| + \lambda(J) \, \|v_0\| \leqslant \\
&\leqslant |\lambda(J)(\alpha\|x_0\| + \beta)(t-t_0)| + \lambda(J) \, \|v_0\| \leqslant \lambda^2(J)(\alpha\|x_0\| + \beta) + \lambda(J) \, \|v_0\| .
\end{aligned}$$

Definimos la siguiente constante:

$$M_0 := \lambda^2(J)(\alpha\|x_0\| + \beta) + \lambda(J) \, \|v_0\| .$$

Veamos ahora para $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
\|x_2(t) - x_1(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (t-s)A(s) \left(x_1(s) - x_0(s)\right) ds \right\| \leqslant \\
&\leqslant \lambda(J)\alpha M_0 |t-t_0| \\
\|x_3(t) - x_2(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (t-s)A(s) \left(x_2(s) - x_1(s)\right) ds \right\| \leqslant \\
&\leqslant \lambda^2(J)\alpha^2 M_0 \left| \int_{t_0}^{t} |s-t_0| ds \right| = \lambda^2(J)\alpha^2 M_0 \frac{|t-t_0|^2}{2}
\end{aligned}$$

Es fácil probar por inducción que:

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leqslant \lambda^n(J)\alpha^n M_0 \frac{|t-t_0|^n}{n!} \leqslant \lambda^n(J)\alpha^n M_0 \frac{\lambda^n(J)}{n!}.$$

Definimos por tanto la sucesión de constantes:

$$M_n = \alpha^n M_0 \cdot \frac{\lambda^{2n}(J)}{n!} = M_0 \cdot \frac{(\alpha\lambda^2(J))^n}{n!}$$

Por el desarrollo de Taylor de la exponencial, tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\lambda^2(J))^n}{n!} = M_0 e^{\alpha\lambda^2(J)} < \infty.$$

Por tanto, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ converge, y por tanto la sucesión de iterantes $x_n(t)$ converge uniformemente en J a una función continua $x(t)$. Como J era un intervalo compacto arbitrario, la sucesión converge uniformemente en compactos de I. Veamos ahora qué función es.

Por inducción, es fácil probar que $x_n \in C(I, \mathbb{R}^N)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que el integrando es continuo para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, podemos intercambiar el límite y la integral:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} (t-s)[A(s)x_{n-1}(s) + b(s)]ds + x_0 + v_0(t-t_0) = \\
&= \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} (t-s)[A(s)x_{n-1}(s) + b(s)]ds + x_0 + v_0(t-t_0) = \\
&= \int_{t_0}^{t} (t-s)[A(s)x(s) + b(s)]ds + x_0 + v_0(t-t_0) = \\
&= t \cdot \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]ds - \int_{t_0}^{t} s[A(s)x(s) + b(s)]ds + x_0 + v_0(t-t_0)
\end{aligned}$$

Una vez obtenida la función límite x, veamos que es solución del problema de valores iniciales. Derivamos x usando el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + b(s)]ds + v_0 \\
x''(t) &= A(t)x(t) + b(t).
\end{aligned}$$

Por tanto, vemos que la ecuación la cumple. Veamos si cumple las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
x(t_0) &= \int_{t_0}^{t_0} [A(s)x(s) + b(s)]ds + x_0 + v_0(t_0 - t_0) = x_0, \\
x'(t_0) &= \int_{t_0}^{t_0} [A(s)x(s) + b(s)]ds + v_0 = v_0.
\end{aligned}$$

Por tanto, la función x es solución del problema de valores iniciales con dominio J. Por la unicidad de la solución del problema de valores iniciales, tenemos que x es la única solución del problema de valores iniciales en J.

Ejercicio 6.5.3. Construye un sistema de ecuaciones lineal y homogéneo que tenga como soluciones linealmente independientes

$$x_1 = (1, \operatorname{sen} t)^t, \quad x_2 = (\operatorname{sen} t, 1)^t.$$

Justifica razonadamente si los coeficientes de tal sistema pueden estar o no definidos en toda la recta real.

Sea la matriz $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, de forma que:

$$x' = A(t)x$$

Calculemos x' para cada una de las soluciones dadas:

$$\begin{aligned} x_1' &= \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix} = A(t)x_1 = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) + a_{12}(t)\operatorname{sen} t \\ a_{21}(t) + a_{22}(t)\operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \\ x_2' &= \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = A(t)x_2 = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)\operatorname{sen} t + a_{12}(t) \\ a_{21}(t)\operatorname{sen} t + a_{22}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}(t) + a_{12}(t)\operatorname{sen} t = 0, \\ a_{11}(t)\operatorname{sen} t + a_{12}(t) = \cos t, \\ a_{21}(t) + a_{22}(t)\operatorname{sen} t = \cos t, \\ a_{21}(t)\operatorname{sen} t + a_{22}(t) = 0. \end{cases}$$

Despuejando $a_{11}(t)$ y $a_{22}(t)$, tenemos que el sistema queda:

$$\begin{cases} a_{11}(t) = -a_{12}(t)\operatorname{sen} t, \\ -a_{12}(t)\operatorname{sen}^2 t + a_{12}(t) = \cos t, \\ a_{21}(t) - a_{21}(t)\operatorname{sen}^2 t = \cos t, \\ a_{22}(t) = -a_{21}(t)\operatorname{sen} t. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{11}(t) = -a_{12}(t)\operatorname{sen} t, \\ a_{12}(t)(1-\operatorname{sen}^2 t) = \cos t, \\ a_{21}(t)(1-\operatorname{sen}^2 t) = \cos t, \\ a_{22}(t) = -a_{21}(t)\operatorname{sen} t. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{11}(t) = -a_{12}(t)\operatorname{sen} t, \\ a_{12}(t)\cos^2 t = \cos t, \\ a_{21}(t)\cos^2 t = \cos t, \\ a_{22}(t) = -a_{21}(t)\operatorname{sen} t. \end{cases}$$

Por tanto, en los puntos de t en los que el coseno se anula, el sistema es compatible indeterminado, ya que cualquier valor de $a_{12}(t)$ y $a_{21}(t)$ satisface el sistema. Por tanto, en los valores que no se anula el coseno, tenemos:

$$\begin{cases} a_{11}(t) = -\operatorname{tg} t, \\ a_{12}(t) = \frac{1}{\cos t}, \\ a_{21}(t) = \frac{1}{\cos t}, \\ a_{22}(t) = -\operatorname{tg} t. \end{cases} \Longrightarrow A(t) = \begin{pmatrix} -\operatorname{tg} t & \frac{1}{\cos t} \\ \frac{1}{\cos t} & -\operatorname{tg} t \end{pmatrix}.$$

Como vemos, dichos coeficientes no están definidos en toda la recta real, ya que el coseno se anula en ciertos puntos. Por tanto, tan solo es posible definirlo en los intervalos de la forma:

$$I_k = \left]\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi, \left(\frac{3}{2}+k\right)\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ejercicio 6.5.4. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = Ax + b(t), \end{cases}$$

donde A es una matriz cuadrada de orden N y $b(t) = e^{\mu t}v$, con $v \in \mathbb{R}^N$. Si μ no es valor propio de A, prueba que existe una solución particular de la forma $x(t) = e^{\mu t}w$. Usa esta idea y el principio de superposición para encontrar una solución particular del sistema

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 3x_2 + 3e^{2t}, \\ x_2' = x_1 - 2x_2 - 8e^{-3t}. \end{cases}$$

Para encontrar una solución particular de la forma $x(t) = e^{\mu t}w$, derivamos x:

$$x'(t) = \mu e^{\mu t}w = Ae^{\mu t}w + e^{\mu t}v \Longrightarrow -\cancel{e^{\mu t}}v = (A - \mu I)\cancel{e^{\mu t}}w \Longrightarrow w = -(A - \mu I)^{-1}v.$$

donde $\exists (A - \mu I)^{-1}$ porque μ no es valor propio de A, por o que $|A - \mu I| \neq 0$. Por tanto, una solución particular del sistema es:

$$x(t) = -e^{\mu t}(A - \mu I)^{-1}v.$$

Consideramos ahora la matriz A y el vector $b(t)$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ -8e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Calculamos el polinomio característico de A:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + |A| = \lambda^2 - 1 \Longrightarrow \sigma(A) = \{1, -1\}.$$

Como $b(t)$ no es de la forma $e^{\mu t}v$, no podemos aplicar el resultado anterior de forma directa. No obstante, consideramos:

$$b_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2(t) = e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Como $2, -3 \notin \sigma(A)$, y usando el resultado que acabamos de demostrar, podemos encontrar, respectivamente, una solución particular del sistema $x' = Ax + b_1(t)$ y $x' = Ax + b_2(t)$. Sean estas, respectivamente, $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -e^{2t}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -e^{2t}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e^{2t}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ x_2(t) &= -e^{-3t}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} = -e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -e^{-3t}\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} = e^{-3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución particular del sistema $x' = Ax + b(t)$, usando el principio de superposición, es:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.5.5. Se considera el sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son continuas. Demuestra que este sistema se puede reformular como una ecuación escalar compleja del tipo $z' = \alpha(t)z$ donde la incógnita $z = z(t)$ puede tomar valores complejos y la función $\alpha : I \to \mathbb{C}$ se determina a partir de $a(t)$ y $b(t)$. Utiliza este hecho para resolver el sistema original.

Ejercicio 6.5.6. Se definen las funciones:

$$x(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{\sigma}} \operatorname{sen}(t\sigma)\ d\sigma, \quad y(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{\sigma}} \cos(t\sigma)\ d\sigma,$$

Demuestra que (x, y) es solución de un sistema lineal homogéneo. Resuelve el sistema con las condiciones iniciales adecuadas para calcular las integrales.

Observación. Tenga en cuenta que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ejercicio 6.5.7. Dada una matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema $x' = A(t)x$, con $A : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ continua y una función $\Psi : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ de clase C^1, demuestra que:

$\Psi(t)$ es matriz fundamental $\Longleftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}^{N\times N}$ constante, con $|C| \neq 0$, tal que $\Psi(t) = \Phi(t)C$.

Demostramos mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$ Supongamos que $\Psi(t)$ es matriz fundamental. Entononces, sean:

$$\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_N), \quad \Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_N).$$

Entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, como Φ es matriz fundamental, podemos expresar ψ_i como combinación lineal de las columnas de Φ:

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^N c_{ij}\phi_j(t),$$

donde c_{ij} son constantes. Por tanto, definiendo $C = (c_{ij})_{i,j}$, tenemos que $\Psi(t) = \Phi(t)C$. Además, como Ψ es matriz fundamental, tenemos que $|\Psi(t)| \neq 0$, por lo que $|C| \neq 0$.

Notemos que dicha C es la matriz de cambio de base entre ambas bases (la de Φ y la de Ψ).

$\Longleftarrow$ Supongamos que existe $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$ constante, con $|C| \neq 0$, tal que $\Psi(t) = \Phi(t)C$. Veamos que $\Psi(t)$ es matriz solución. Como Φ es matriz solución, tenemos que:

$$\Phi' = A\Phi.$$

Por tanto, usando la derivada del producto de matrices, tenemos que:

$$\Psi' = (\Phi C)' = \Phi' C + \Phi C' = \Phi' C = A\Phi C = A\Psi.$$

Por tanto, es matriz solución. Además, tenemos que:

$$|\Psi| = |\Phi C| = |\Phi| \cdot |C| \neq 0,$$

Por tanto, Ψ es matriz fundamental.

Ejercicio 6.5.8. Dos tanques del mismo volumen V contienen inicialmente agua salada con concentración C_1, C_2 respectivamente Se produce un transvase de agua entre los dos tanques a una velocidad fija de $k\,{}^{l}\!/_{\text{min}}$ y en ambas direcciones, de manera que el volumen V de cada tanque se mantiene constante. Plantea y resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales que rige la cantidad de sal Q_1, Q_2 en cada tanque. Explica el comportamiento a largo plazo.

Ejercicio 6.5.9. Dada $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{N\times N})$, demuestra que si la matriz $A(t)$ conmuta con $B(t) = \displaystyle\int_0^t A(s)\ ds$, entonces $\Phi(t) = e^{B(t)}$ es matriz fundamental del sistema $x' = A(t)x$.

Ejercicio 6.5.10. Por el método de variación de constantes, encuentra la solución general del sistema completo $x' = Ax + b(t)$ en los siguientes casos

1. $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.5.11. En este ejercicio probaremos un resultado sobre independencia lineal para funciones que son productos de polinomios y exponenciales. Lo haremos en tres pasos:

1. Demuestra que si $p(t)$ es un polinomio no nulo, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ y $m = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\frac{d^m}{dt^m}\left[p(t)e^{\alpha t}\right] = q(t)e^{\alpha t},$$

donde $q(t)$ es otro polinomio no nulo.

2. Se supone que $p_1, \ldots, p_r$ son polinomios y $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ números distintos entre sí ($\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$). Entonces si la identidad

$$p_1(t)e^{\alpha_1 t} + \ldots + p_r(t)e^{\alpha_r t} = 0$$

es válida en algún intervalo I se cumplirá

$$p_1 \equiv p_2 \equiv \ldots \equiv p_r \equiv 0.$$

3. Dados números naturales $n_1, \ldots, n_r$ las funciones

$$e^{\alpha_1 t}, te^{\alpha_1 t}, \ldots, t^{n_1}e^{\alpha_1 t}, \ldots, e^{\alpha_r t}, te^{\alpha_r t}, \ldots, t^{n_r}e^{\alpha_r t}$$

son linealmente independientes en I.

Ejercicio 6.5.12. Se considera el operador diferencial

$$L[y] = y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ son números reales.

1. Demuestra, para cada $m \geqslant 0$, la identidad

$$L\left[t^m e^{\lambda t}\right] = \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} t^{m-h} p^{(h)}(\lambda) e^{\lambda t}$$

donde $p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$.

2. Utiliza esta identidad y el ejercicio anterior para obtener un sistema fundamental de la ecuación $L[y] = 0$. Se distinguirá el caso de raíces complejas.

3. Resuelve la ecuación

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0.$$

4. Se pasa la ecuación del apartado anterior a un sistema $x' = Ax$, con $x \in \mathbb{R}^5$, por el cambio $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = y''$, $x_4 = y'''$, $x_5 = y^{(4)}$. Diseña dos posibles estrategias para calcular e^{At}. ¿Cuál sería más conveniente?

Ejercicio 6.5.13. ¿Es cierta la identidad $e^A e^B = e^{A+B}$ para matrices arbitrarias $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$?

Ejercicio 6.5.14. Calcula e^A para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6.5.15. Dada $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ se considera el sistema $x' = Ax$

1. Prueba que $e^{(t-t_0)A}$ es matriz fundamental principal en $t = t_0$.

2. $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

3. Se considera ahora el problema de valores iniciales $x' = Ax + b(t)$, $x(t_0) = x_0$ donde $b : I \to \mathbb{R}^N$ es una función continua. Prueba que la solución está dada por la fórmula

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s)\, ds.$$

Ejercicio 6.5.16. Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ define $\operatorname{sen}(A)$ y $\cos(A)$. Calcula:

$$\cos\left(\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right)$$