MN I

Examen VI

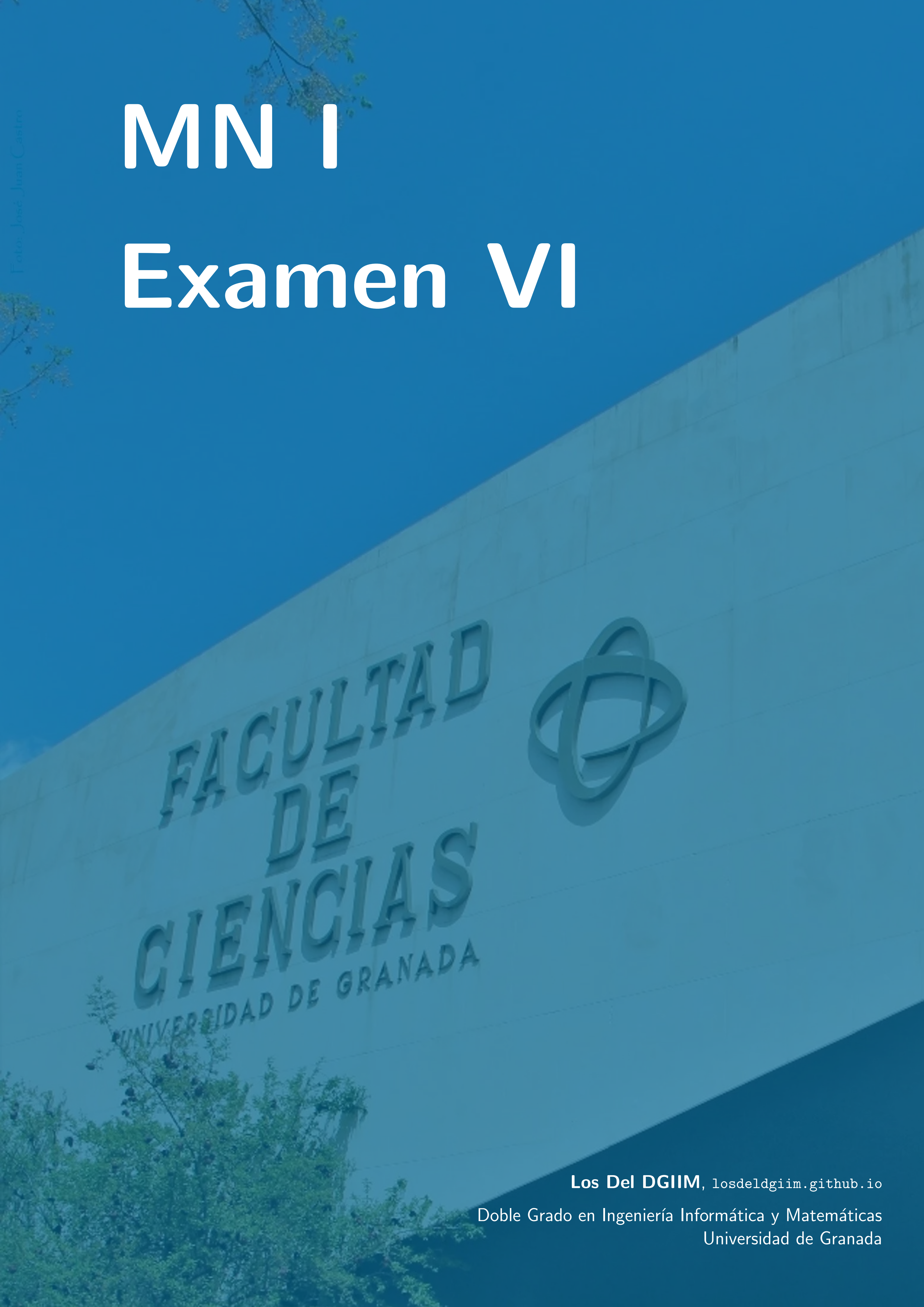

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

MN I
Examen VI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Roxana Acedo Parra

Granada, 2024

Asignatura Métodos Numéricos I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas. También Grado en Matemáticas y Doble Grado en Matemáticas y Física.

Grupo Único.

Profesor Juan José Nieto Muñoz.

Fecha 9 de abril de 2025.

Duración 2 horas.

Descripción Primer Parcial.

Observaciones Contiene respuestas a varias versiones, no a una única prueba. Este profesor, al darnos la corrección de este examen no diferenció entre las preguntas de nuestro examen y las del examen de Matemáticas y Matemáticas y Física. Los del DGIIM tuvimos que hacer el 1. a), c), d) y e), el 3) y 4).

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces se verifica que

$$f(y) = f(x_0) + f'(x_0)(y - x_0) + f[y, x_0, x_0](y - x_0)^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

b) Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, y definimos $g(x) := f[x, x_0]$, entonces se verifica que

$$g'(x) = \frac{f'(x) - g(x)}{x - x_0}, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq x_0.$$

c) Dados dos números reales: y_0 y y_1 cumpliendo $y_0 < y_1$, y otros 2 d_0 y d_1 estrictamente positivos, entonces el polinomio de grado menor o igual a 3 que resuelve el siguiente problema de interpolación de tipo Hermite, es estrictamente creciente.

x_i	0	1
$p(x_i)$	y_0	y_1
$p'(x_i)$	d_0	d_1

d) Dados 3 números reales: y_0, y_1, y_2, cumpliendo $y_0 < y_1 < y_2$ y otro d_1 estrictamente positivo, entonces el spline cuadrático $s \in S_2(0, 1, 2)$ que resuelve el siguiente problema, es estrictamente creciente;

$$s(0) = y_0, \quad s(1) = y_1, \quad s(2) = y_2, \quad s'(1) = d_1.$$

e) Al interpolar una función $f(x)$ cualquiera en 5 puntos diferentes, sabemos que puede haber varios polinomios de grado menor o igual a 5 que la interpolen; pero si la función de partida es un polinomio de grado 3, entonces hay un único polinomio de grado menor o igual a 5 que la interpola: el propio polinomio.

f) Al aproximar una función continua $f(x)$ cualquiera mediante mínimos cuadrados discretos usando su valor en 5 nodos diferentes: $\{x_1 < x_2 < \ldots < x_5\}$, hay un único polinomio $p(x)$ de grado menor o igual a 4 que la ajusta y que, además, minimiza el siguiente error:

$$\sum_{i=1}^{5} |p(x_i) - f(x_i)|. \qquad \text{(es sin elevar al cuadrado, no una errata)}$$

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Considera la función $f(x) = e^{-(x^2/2)}$.

a) Calcula, si es posible, un polinomio $p(x) \in \mathbb{P}_2[x]$ que interpole a f en los nodos 1 y -1 y a su derivada en 0. ¿Cuántos polinomios hay cumpliendo estas condiciones?

b) Si añadimos una cuarta condición: $p(0) = f(0) = 1$, pero seguimos buscando en $\mathbb{P}_2[x]$, que tiene dimensión 3, ¿habrá solución? En caso afirmativo, encuéntrala.

c) Sabiendo que $|f^{(3)}(x)| \leqslant 2$ en $[-1,1]$, ¿podrías dar una estimación del mayor error cometido al aproximar $f(x)$ en $[-1,1]$ por las evaluaciones del polinomio del apartado anterior?

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Dada la nube de puntos:

x_i	0	1	2	2	1	0
y_i	2	1	3	1	2	0

a) Calcula el polinomio de grado menor o igual a 1 que mejor aproxima esta nube de puntos.

b) Si añadimos el punto $(4,3)$ y rehacemos el ajuste, ¿qué polinomio obtendríamos y por qué?

c) Si cambiamos los datos y_i por $\dfrac{y_i}{2}$ y rehacemos el ajuste, ¿qué polinomio obtendríamos y por qué?

Ejercicio 4 (4 puntos)**.** Considera la función $f(x) = |x|$, el espacio $V = C\left([-\pi,\pi]\right)$ con el producto escalar continuo:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx,$$

y el subespacio H generado por las funciones: $\varphi_1(x) = \cos(x)$ y $\varphi_2(x) = \cos(2x)$.

a) ¿Es posible encontrar alguna mejor aproximación por mínimos cuadrados continuos de f en H? En caso afirmativo, calcúlalas todas.

b) Calcula la distancia entre f y el subespacio H y determina si se alcanza en algún $u \in H$.

c) Determina de manera justificada, una base ortogonal de H.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces se verifica que

$$f(y) = f(x_0) + f'(x_0)(y - x_0) + f[y, x_0, x_0](y - x_0)^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Solución: $\boxed{\text{Cierto.}}$ Simplemente calculamos $f[y, x_0, x_0]$ a partir de la correspondiente tabla de diferencias divididas con el nodo x_0 repetido e y como tercer nodo:

x_i	$f(x_i)$		
x_0	$f(x_0)$		
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	
y	$f(y)$	$\dfrac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$	$\dfrac{\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} - f'(x_0)}{y - x_0} := f[x_0, x_0, y]$

Y basta despejar $f(y)$ de la última expresión.

b) Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, y definimos $g(x) := f[x, x_0]$, entonces se verifica que

$$g'(x) = \frac{f'(x) - g(x)}{x - x_0}, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq x_0.$$

Solución: $\boxed{\text{Cierto.}}$ Reescribimos $g(x)$ usando las propiedades de las diferencias divididas (se puede usar la tabla de diferencias divididas con 2 nodos: x_0 y x):

$$g(x) := f[x, x_0] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

y, derivando, obtenemos el resultado

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^2} = \frac{f'(x) - g(x)}{x - x_0}.$$

c) Dados dos números reales: y_0 y y_1 cumpliendo $y_0 < y_1$, y otros 2 d_0 y d_1 estrictamente positivos, entonces el polinomio de grado menor o igual a 3 que resuelve el siguiente problema de interpolación de tipo Hermite, es estrictamente creciente.

x_i	0	1
$p(x_i)$	y_0	y_1
$p'(x_i)$	d_0	d_1

Solución: $\boxed{\text{Falso.}}$ Basta en pensar en polinomios de grado 3 (que son los que interpolan 4 datos que suban y bajen entre 0 y 1. Por concretar un contraejemplo:

$$p(x) = (x - a)(x - b)(x - c), \quad \text{con } 0 < a < b < c < 1.$$

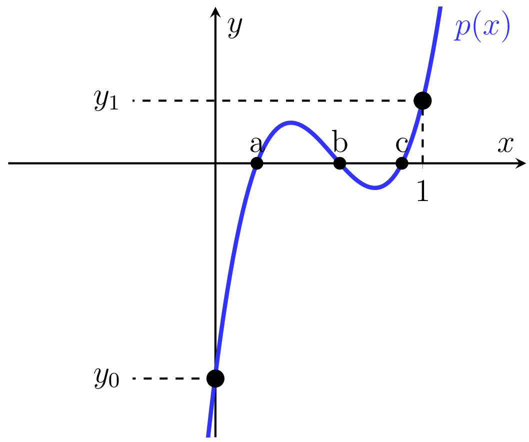

Figura 1: Ejemplo: $p(x) = (x - 0{,}2)(x - 0{,}6)(x - 0{,}9)$

d) Dados 3 números reales: y_0, y_1, y_2, cumpliendo $y_0 < y_1 < y_2$ y otro d_1 estrictamente positivo, entonces el spline cuadrático $s \in S_2(0, 1, 2)$ que resuelve el siguiente problema, es estrictamente creciente;

$$s(0) = y_0, \quad s(1) = y_1, \quad s(2) = y_2, \quad s'(1) = d_1.$$

Solución: $\boxed{\text{Falso.}}$ Basta pensar en dos polinomios de grado dos, uno convexo y otro cóncavo, que peguen bien en el nodo $x = 1$.
Por concretar un contraejemplo (pensamos en $y_1 = 0$ de modo que $x = 1$ sea un cero y nodo en común):

$$s(x) = \begin{cases} s(x)_1 = (x + a)(x - 1), & x \leqslant 1, \\ s(x)_2 = (2 + a - x)(x - 1), & x \geqslant 1, \end{cases}$$

con $a > 0$ (el poner los ceros simétricos es para que salga derivable en 0 sin añadir nada).

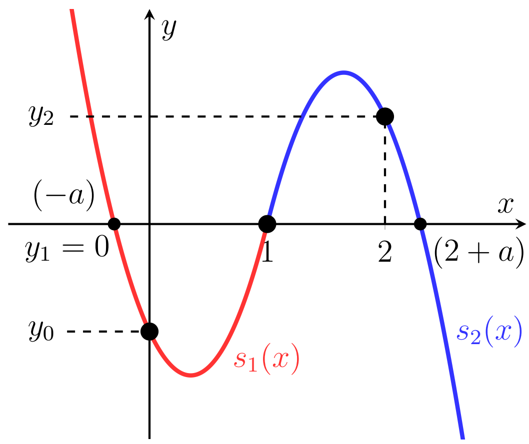

Figura 2: Ejemplo graficado con $a = 0{,}3$

e) Al interpolar una función $f(x)$ cualquiera en 5 puntos diferentes, sabemos que puede haber varios polinomios de grado menor o igual a 5 que la interpolen;

pero si la función de partida es un polinomio de grado 3, entonces hay un único polinomio de grado menor o igual a 5 que la interpola: el propio polinomio.

Solución. $\boxed{\text{Falso.}}$ La primera parte es, como sabemos, cierta: al interpolar en 5 puntos, hay unicidad en $\mathcal{P}_4$, pero nunca en $\mathcal{P}_5$; sea quien sea la f que origina dichos puntos. Por tanto, que f sea un polinomio de grado 3 no cambia nada.

f) Al aproximar una función continua $f(x)$ cualquiera mediante mínimos cuadrados discretos usando su valor en 5 nodos diferentes: $\{x_1 < x_2 < \ldots < x_5\}$, hay un único polinomio $p(x)$ de grado menor o igual a 4 que la ajusta y que, además, minimiza el siguiente error:

$$\sum_{i=1}^{5} |p(x_i) - f(x_i)|. \text{ (es sin elevar al cuadrado, no una errata)}$$

Solución: $\boxed{\text{Cierto.}}$ Al aproximar en 5 puntos con polinomios de $\mathcal{P}_4[x]$ (que tiene dimensión 5), el polinomio resultante es en realidad el que la interpola, ya que este minimiza el error (cuadrático), pues justo da un error igual a 0 (el mínimo posible). Por tanto $|p(x_i) - f(x_i)| = 0$, con o sin cuadrado, también es el mínimo posible: cero.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Considera la función $f(x) = e^{-(x^2/2)}$.

a) Calcula, si es posible, un polinomio $p(x) \in \mathbb{P}_2[x]$ que interpole a f en los nodos 1 y -1 y a su derivada en 0. ¿Cuántos polinomios hay cumpliendo estas condiciones?

Al interpolar en 2 nodos de tipo Lagrange, con un dato tipo Hermite en otro nodo (dejando un hueco), a priori no sabemos qué puede pasar. Elegimos en este caso coeficientes indeterminados, $\boxed{p(x) = A + Bx + Cx^2}$, e imponemos las condiciones a ver qué pasa:

$$\begin{cases} p(-1) = f(-1) = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ p(1) = f(1) = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ p'(0) = f'(0) = 0.+ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - B + C = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ A + B + C = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{e}} - C \\ B = 0 \end{cases}$$

$$p_C(x) = \frac{1}{\sqrt{e}} + C(x^2 - 1), \quad C \in \mathbb{R},$$

lo que responde a la pregunta, hay infinitas posibilidades.

b) Si añadimos una cuarta condición: $p(0) = f(0) = 1$, pero seguimos buscando en $\mathbb{P}_2[x]$, que tiene dimensión 3, ¿habrá solución? En caso afirmativo, encuéntrala.

Al añadir el dato $p(0) = f(0)$, hemos rellenado el hueco y ya así tenemos datos tipo Hermite que dan unisolvencia en $\mathbb{P}_3[x]$. Pero como nos piden en $\mathbb{P}_2[x]$ de nuevo, podría no haber solución.

Aunque, visto lo ocurrido en el apartado anterior, parece que este dato simplemente va a fijar el valor de C: basta imponer ese dato más al que ya tenemos $p_C(x) = 1 + C(x^2 - 1)$ a ver qué pasa:

$$p_C(0) = f(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} - C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{e}} - 1 = \frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$$

$$\Rightarrow p(x) = 1 + \frac{1-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}x^2$$

c) Sabiendo que $|f^{(3)}(x)| \leqslant 2$ en $[-1, 1]$, ¿podrías dar una estimación del mayor error cometido al aproximar $f(x)$ en $[-1, 1]$ por las evaluaciones del polinomio del apartado anterior?

La clave es que el polinomio obtenido: $p(x) = 1 + \frac{\rho+1}{\rho}x^2$ interpola a $f(x)$ en 3 nodos: $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$ (además de a su derivada, pero eso lo obviamos), por lo que podemos usar la fórmula para el error de interpolación con $n = 2$:

$$E(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x+1)x(x-1),\ x \in [-1, 1]$$

A partir de aquí, podemos hacer varias estimaciones, no se pide la óptima, por ejemplo:

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \frac{2}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{4}{3},\ x \in [-1, 1]$$

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Dada la nube de puntos:

x_i	0	1	2	2	1	0
y_i	2	1	3	1	2	0

a) Calcula el polinomio de grado menor o igual a 1 que mejor aproxima esta nube de puntos.

Para buscar $p(x) = c_0 + c_1 x$, aplicamos los resultados de clase:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow G = A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}, b = A^T y = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Resolvemos

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow p(x) = 1 + \frac{x}{2}.$$

b) Si añadimos el punto $(4, 3)$ y rehacemos el ajuste, ¿qué polinomio obtendríamos y por qué?

Puesto que $p(4) = 1 + \frac{4}{2} = 3$, el punto adicional $(4, 3)$ resulta que es un punto de la gráfica de $p(x)$ y, aunque se pueden repetir los cálculos con un punto más, sabemos que saldrá el mismo polinomio, pues cualquier otro aumentaría el error.

c) Si cambiamos los datos y_i por $\dfrac{y_i}{2}$ y rehacemos el ajuste, ¿qué polinomio obtendríamos y por qué?

Aunque se puede repetir la cuenta, en general, al multiplicar los datos por un escalar no nulo y rehacer el ajuste, se obtiene el mismo polinomio de antes multiplicado por el mismo escalar; veámoslo usando el sistema abstracto. Llamamos c_λ a los nuevos coeficientes del nuevo polinomio.

$$(A^T A)c_\lambda = A^T(\lambda y) = \lambda A^T y \Rightarrow c_\lambda = (A^T A)^{-1}(\lambda A^T y) = \lambda (A^T A)^{-1} A^T y = \lambda c.$$

Por tanto, en nuestro caso, se obtendría $p(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4}$.

Ejercicio 4 (4 puntos)**.** Considera la función $f(x) = |x|$, el espacio $V = C([-\pi, \pi])$ con el producto escalar continuo:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx,$$

y el subespacio H generado por las funciones: $\varphi_1(x) = \cos(x)$ y $\varphi_2(x) = \cos(2x)$.

a) ¿Es posible encontrar alguna mejor aproximación por mínimos cuadrados continuos de f en H? En caso afirmativo, calcúlalas todas.

Este ejercicio es aplicación directa del teorema de mínimos cuadrados, puesto que $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es prehilbertiano y $H \subseteq V$ es de dimensión finita. Por lo tanto, sí hay una única mejor aproximación de f en H y sabemos calcularla, pues incluso nos han dado una base de H: $\mathcal{B} = \{\cos(x), \cos(2x)\}$. Concretamente $\boxed{u_f = c_0\cos(x) + c_1\cos(2x)}$ y $c = (c_0, c_1)$ es la única solución del sistema de Gramm.

$$Gc = b \text{ con } G = \begin{pmatrix} \langle\cos(x), \cos(x)\rangle & \langle\cos(x), \cos(2x)\rangle \\ \langle\cos(2x), \cos(x)\rangle & \langle\cos(2x), \cos(2x)\rangle \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} \langle f(x), \cos(x)\rangle \\ \langle f(x), \cos(2x)\rangle \end{pmatrix}$$

Haciendo las (tediosas pero triviales) cuentas, el sistema obtenido es

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\pi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/\pi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p(x) = \frac{-4}{\pi}\cos(x)$$

b) Calcula la distancia entre f y el subespacio H y determina si se alcanza en algún $u \in H$.

De nuevo usando el teorema de la mejor aproximación, sabemos que sí se alcanza, en u_f:

$$\|f - u_f\| = \min_{u \in H} \|f - u\| = \mathrm{dist}(f, H).$$

Por tanto solo hay que calcular

$$\|f - u_f\| = \sqrt{\langle f - u_f, f - u_f \rangle} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(|x| + \frac{4}{\pi}\cos(x)\right)^2 dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi^4 - 24}{3\pi^2}}.$$

c) Determina de manera justificada, una base ortogonal de H.

Al calcular la matriz de Gramm ya hemos visto que $\langle \cos(x), \cos(2x)\rangle = 0$, por lo que la base que nos han dado ya es ortogonal, y no hay que hacer nada, salvo indicarlo. Y si uno no se da cuenta y aplica Gramm-Schmidt, todas las operaciones también están incluidas en el cálculo de G:

$$\varphi_0 = \cos(x), \quad \bar{\varphi}_1 = \varphi_1 - \frac{\langle \varphi_1, \varphi_0\rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_0\rangle}\varphi_0 = \cos(2x) - \frac{\langle \cos(2x), \cos(x)\rangle}{\langle \cos(x), \cos(x)\rangle}\cos(x) = \cos(2x)$$