Análisis Matemático I

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Matemático I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos
José Juan Urrutia Milán

Granada, 2023-2024

Índice general

1. Relaciones de Problemas

1.1. El Espacio Euclídeo. Espacios normados y métricos.

Ejercicio 1.1.1. Probar que, en cualquier espacio pre-hilbertiano X, el producto escalar se obtiene a partir de la norma mediante la llamada *identidad de polarización*:

$$4(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} &||x+y||^2 - ||x-y||^2 = (x+y|x+y) - (x-y|x-y) = \\ &\quad = \cancel{(x|x)} + (x|y) + (y|x) + \cancel{(y|y)} - \cancel{(x|x)} + (x|y) + (y|x) - \cancel{(y|y)} = 4(x|y) \end{aligned}$$

donde he usado que $(x|y) = (y|x)$ por ser simétrica, y que $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

Ejercicio 1.1.2. Si X e Y son espacios pre-hilbertianos, es una sana costumbre denotar ambos productos escalares por $(\cdot|\cdot)$ y ambas normas asociadas por $||\cdot||$. Sea $f : X \to Y$ una aplicación lineal que preserva la norma, es decir,

$$\|f(x)\| = \|x\|$$

Probar que entonces f también preserva el producto escalar:

$$(f(x) \mid f(y)) = (x|y) \quad \forall x, y \in X$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} 4(x|y) &\overset{(*)}{=} ||x+y||^2 - ||x-y||^2 = ||f(x+y)||^2 - ||f(x-y)||^2 = ||f(x)+f(y)||^2 - ||f(x)-f(y)||^2 = \\ &\overset{(*)}{=} 4(f(x)|f(y)) \Longrightarrow (x|y) = (f(x)|f(y)) \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he aplicado el ejercicio anterior; y he aplicado que por ser f una aplicación lineal se tiene que $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Ejercicio 1.1.3. Probar que todo espacio pre-hilbertiano X de dimensión $N \in \mathbb{N}$, se identifica totalmente con el espacio euclídeo N-dimensional; es decir, existe una biyección lineal $f : X \to \mathbb{R}^N$ que preserva el producto escalar:

$$(f(x)|f(y)) = (x|y) \quad \forall x, y \in X$$

En este sentido podemos decir que el espacio euclídeo N-dimensional es el único espacio pre-hilbertiano de dimensión N.

Sea $\mathcal{B}_X$ una base ortonormal de X, y $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^N$.

$$\mathcal{B}_X = \{v_1, \dots, v_n\} \qquad \mathcal{B}_\mathbb{R} = \{e_1, \dots, e_n\}$$

Entonces, definimos $f : X \to \mathbb{R}^N$ forma lineal de forma que los vectores de una base de aplican en los de la otra base. Es decir, $f(v_i) = e_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$. Como es una forma lineal y se aplica base en otra base, tenemos que es una biyección lineal.

Sea $x, y \in X$ tal que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i,\ y = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i v_i$. Comprobemos que preserva el producto escalar.

$$(f(x)|f(y)) = \left(f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) \middle| f\left(\sum_{i=1}^{n} b_i v_i\right)\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) \middle| \sum_{i=1}^{n} b_i f(v_i)\right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \middle| \sum_{i=1}^{n} b_i e_i\right) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \overset{(*)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \middle| \sum_{i=1}^{n} b_i v_i\right) = (x|y)$$

donde en $(*)$ he aplicado que las bases escogidas son ortonormales, por lo que el producto escalar de dos elementos es la suma del producto de sus componentes expresadas en la correspondiente base.

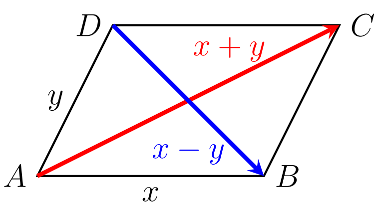
Ejercicio 1.1.4. Probar que, en todo espacio pre-hilbertiano X, se verifica la *identidad del paralelogramo*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

Interpretar geométricamente el resultado.

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2(x|y) + ||x||^2 + ||y||^2 - 2(x|y) = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

Geométricamente, tenemos que la suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo equivale a la suma de los cuadrados de las diagonales.



Ejercicio 1.1.5. Para cualquier espacio pre-hilbertiano X, discutir la posibilidad de que la desigualdad triangular sea una igualdad, es decir, encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir dos vectores $x, y \in X$ para verificar que $||x+y|| = ||x|| + ||y||$.

La demostración de la desigualdad triangular parte de la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$||(x|y)|| \leqslant ||x||\ ||y|| \qquad \forall x, y \in X$$

Además, tenemos que la igualdad se da solo en el caso de que sean linealmente dependientes.

Demostramos ahora la desigualdad triangular a partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2(x|y) \overset{(1)}{\leqslant} ||x||^2 + ||y||^2 + 2|(x|y)| \overset{(2)}{\leqslant}$$
$$\overset{(2)}{\leqslant} ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||\ ||y|| = (||x|| + ||y||)^2$$

Por tanto, tenemos que se da la igualdad si y solo si se dan las igualdades en (1) y (2).

- La igualdad en (1) se da si y solo si $(x|y) \geqslant 0$.
- La igualdad en (2) se da si y solo si se da la da desigualdad en Cauchy-Schwarz; y esta se da si y solo si $\{x, y\}$ son linealmente dependientes.

Por tanto, tenemos que se da la igualdad si y solo si ambos vectores son linealmente dependientes y además su producto escalar es positivo.

Ejercicio 1.1.6. Discutir la posibilidad de que la desigualdad triangular para la norma de la suma en $\mathbb{R}^N$ sea una igualdad, es decir, encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^N$ para verificar la siguiente igualdad: $||x+y||_1 = ||x||_1 + ||y||_1$.

En primer lugar, como la norma 1 no procede de ningún producto escalar, tenemos que no son aplicables los resultados del ejercicio anterior. Demostramos por tanto la desigualdad triangular en el caso de la norma 1:

$$||x+y||_1 = \sum_{k=1}^{N} |x_k + y_k| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |x_k| + |y_k| = ||x||_1 + ||y||_2, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Por tanto, tenemos que se dará la igualdad triangular si y solo si se cumple que $|x_k + y_k| = |x_k| + |y_k|,\ \forall k \in \Delta_N$. Veamos qué es necesario para que esto ocurra. Fijados $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$|x_k + y_k| = |x_k| + |y_k| \iff (|x_k + y_k|)^2 = (|x_k| + |y_k|)^2 \iff$$
$$\iff (x_k + y_k)^2 = (|x_k|)^2 + 2|x_k||y_k| + (|y_k|)^2 \iff$$
$$\iff x_k^2 + 2x_k y_k + y_k^2 = x_k^2 + 2|x_k||y_k| + y_k^2 \iff$$
$$\iff x_k y_k = |x_k y_k| \iff x_k y_k \geqslant 0$$

Por tanto, la igualdad triangular se da si y solo si $x_k y_k \geqslant 0,\ \forall k \in \Delta_N$.

Ejercicio 1.1.7. Probar que, para $N > 1$, no existe un producto escalar en $\mathbb{R}^N$ cuya norma asociada sea la de la suma, y que lo mismo le ocurre a la norma del máximo. Probar también que, en el espacio vectorial $\mathcal{C}[0,1]$, las normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_\infty$ no son las asociadas a ningún producto escalar.

Tenemos que en todo espacio pre-hilbertiano X se cumple la identidad del paralelogramo:

$$2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x+y||^2 + ||x-y||^2, \qquad \forall x,y \in X$$

Busquemos contraejemplos que demuestren que eso no es cierto para $X = \mathbb{R}^n$ con la norma 1 y la del máximo. Sean los valores siguientes:

$$\begin{aligned} x &= (1,\dots,1) & \qquad x+y &= (0,2,\dots,2) \\ y &= (-1,1,\dots,1) & \qquad x-y &= (2,0,\dots,0) \end{aligned}$$

Veamos que no se cumple la identidad del paralelogramo en $\mathbb{R}^n$ para la norma 1 y el máximo:

$$\begin{aligned} 2||x||_1^2 + 2||y||_1^2 &= 2n^2 + 2n^2 = 4n^2 \neq [2(n-1)]^2 + 2^2 = ||x+y||_1^2 + ||x-y||_1^2 \\ 2||x||_\infty^2 + 2||y||_\infty^2 &= 2\cdot 1^2 + 2\cdot 1^2 = 4 \neq 8 = 2^2 + 2^2 = ||x+y||_\infty^2 + ||x-y||_\infty^2 \end{aligned}$$

Por tanto, en $\mathbb{R}^n$ con la norma 1 y la norma del máximo no se cumple la identidad del paralelogramo. Por tanto, no existe un producto escalar asociado a dichas normas.

Veámoslo para el caso de $\mathcal{C}[0,1]$. Sean los valores siguientes:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \geqslant 0 \in [0,1] & \qquad (f+g)(x) &= \cos x + \operatorname{sen} x \geqslant 0 \in [0,1] \\ g(x) &= \operatorname{sen} x \geqslant 0 \in [0,1] & \qquad (f-g)(x) &= \cos x - \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Veámoslo para el caso de la norma 1:

$$||f||_1 = \int_0^1 |\cos x|\ dx = \operatorname{sen} x]_0^1 = \operatorname{sen} 1 \qquad ||g||_1 = \int_0^1 |\operatorname{sen} x|\ dx = -\cos x]_0^1 = -\cos 1 + 1$$

$$||f+g||_1 = \int_0^1 |\operatorname{sen} x + \cos x|\ dx = \operatorname{sen} x - \cos x]_0^1 = \operatorname{sen} 1 - \cos 1 + 1$$

$$||f-g||_1 = \int_0^1 |\cos x - \operatorname{sen} x|\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \operatorname{sen} x\ dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^1 \operatorname{sen} x - \cos x\ dx =$$
$$= \operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^1 = \sqrt{2} - 1 - \cos 1 - \operatorname{sen} 1 + \sqrt{2}$$

Escribimos ahora la identidad del paralelogramo para la norma 1:

$$\begin{aligned} 2||f||_1^2 + 2||g||_1^2 &= 2\cdot \operatorname{sen}^2 1 + 2\cdot(1-\cos 1)^2 \neq \\ &\neq (1 + \operatorname{sen} 1 - \cos 1)^2 + (2\sqrt{2} - 1 - \cos 1 - \operatorname{sen} 1)^2 = ||f+g||_1^2 + ||f-g||_1^2 \end{aligned}$$

Por tanto, en $\mathcal{C}[0,1]$ con la norma 1 no se cumple la identidad del paralelogramo; por lo que no existe un producto escalar asociado a dicha norma. Veámoslo para la norma del máximo.

$$||f||_\infty = \max_{x\in[0,1]}\{\cos x\} = 1 \qquad ||g||_\infty = \max_{x\in[0,1]}\{\operatorname{sen} x\} = \operatorname{sen} 1$$
$$||f+g||_\infty = \max_{x\in[0,1]}\{\cos x + \operatorname{sen} x\} = (f+g)\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$
$$||f-g||_\infty = \max_{x\in[0,1]}\{|\cos x - \operatorname{sen} x|\} = 1$$

Escribimos ahora la identidad del paralelogramo para la norma del máximo:

$$2||f||_\infty^2 + 2||g||_\infty^2 = 2(1+\operatorname{sen}^2 1) \neq 3 = 2 + 1^2 = ||f+g||_\infty^2 + ||f-g||_\infty^2$$

Por tanto, en $\mathcal{C}[0,1]$ con la norma del máximo no se cumple la identidad del paralelogramo; por lo que no existe un producto escalar asociado a dicha norma.

Ejercicio 1.1.8. Sea X un espacio vectorial y sean $\mu, \nu : X \to \mathbb{R}$ dos normas en X. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, definida para todo $x \in X$ en la forma que se indica, es una norma en X:

1. $\|x\| = \mu(x) + \nu(x)$:

   Comprobamos las tres condiciones:

   - $\|x\| = \mu(x)+\nu(x) \geqslant 0$ por ser la suma de términos no-negativos. Además, se tiene que $||x|| = 0 \Longleftrightarrow \mu(x) = \nu(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
   - $||\lambda x|| = \mu(\lambda x) + \nu(\lambda x) = |\lambda|\ [\mu(x) + \nu(x)] = |\lambda|\ ||x||$.
   - $||x+y|| = \mu(x+y) + \nu(x+y) \leqslant \mu(x) + \nu(x) + \mu(y) + \nu(y) = ||x|| + ||y||$.

2. $\|x\| = \max\{\mu(x), \nu(x)\}$

   Comprobamos las tres condiciones:

   - $\|x\| = \max\{\mu(x), \nu(x)\} \geqslant 0$ por ser $\mu(x), \nu(x) \geqslant 0$. Además, se tiene que $||x|| = 0 \Longleftrightarrow \mu(x) = \nu(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
   - $||\lambda x|| = \max\{\mu(\lambda x), \nu(\lambda x)\} = \max\{|\lambda|\,\mu(x), |\lambda|\,\nu(x)\} = |\lambda|\ \max\{\mu(x), \nu(x)\}$ y, por la definición de la norma, $|\lambda|\ ||x||$.
   - Probamos la desigualdad triangular:

     $$\begin{aligned}||x+y|| &= \max\{\mu(x+y), \nu(x+y)\} \leqslant \max\{\mu(x)+\mu(y), \nu(x)+\nu(y)\} \overset{(*)}{\leqslant} \\ &\overset{(*)}{\leqslant} \max\{\mu(x), \nu(x)\} + \max\{\mu(y), \nu(y)\} = ||x|| + ||y||\end{aligned}$$

     donde en $(*)$ he aplicado lo siguiente:

     $$\mu(x) + \mu(y) \leqslant \max\{\mu(x), \nu(x)\} + \max\{\mu(y), \nu(y)\}$$
     $$\nu(x) + \nu(y) \leqslant \max\{\mu(x), \nu(x)\} + \max\{\mu(y), \nu(y)\}$$

3. $\|x\| = \left[\mu(x)^2 + \nu(x)^2\right]^{1/2}$

   Comprobamos las tres condiciones:

- $\|x\| = \left[\mu(x)^2 + \nu(x)^2\right]^{1/2} \geqslant 0$ por ser raíz de la suma de términos no-negativos. Además, se tiene que $||x|| = 0 \Longleftrightarrow \mu(x) = \nu(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
- $||\lambda x|| = [\mu(\lambda x)^2 + \nu(\lambda x)^2]^{1/2} = [\lambda^2 (\mu(x)^2 + \nu(x)^2)]^{1/2} = |\lambda|\ ||x||$.
- Verificamos la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned}
||x+y|| &= \left[\mu(x+y)^2 + \nu(x+y)^2\right]^{1/2} \leqslant \\
&\leqslant \left[(\mu(x)+\mu(y))^2 + (\nu(x)+\nu(y))^2\right]^{1/2} \overset{(*)}{\leqslant} \\
&\overset{(*)}{\leqslant} \left[\mu(x)^2 + \nu(x)^2\right]^{1/2} + \left[\mu(y)^2 + \nu(y)^2\right]^{1/2} = ||x|| + ||y||
\end{aligned}$$

Comprobemos la desigualdad de $(*)$:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(\mu(x)+\mu(y))^2 + (\nu(x)+\nu(y))^2} \leqslant \sqrt{\mu(x)^2+\nu(x)^2} + \sqrt{\mu(y)^2+\nu(y)^2} \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow &[\mu(x)+\mu(y)]^2 + [\nu(x)+\nu(y)]^2 \leqslant \mu(x)^2 + \nu(x)^2 + \mu(y)^2 + \nu(y)^2 + \\
&\qquad + 2\sqrt{(\mu(x)^2+\nu(x)^2)(\mu(y)^2+\nu(y)^2)} \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow &2[\mu(x)\mu(y) + \nu(x)\nu(y)] \leqslant 2\sqrt{(\mu(x)^2+\nu(x)^2)(\mu(y)^2+\nu(y)^2)} \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow &\cancel{\mu(x)^2\mu(y)^2} + \cancel{\nu(x)^2\nu(y)^2} + 2\mu(x)\mu(y)\nu(x)\nu(y) \leqslant \cancel{\mu(x)^2\mu(y)^2} + \cancel{\nu(x)^2\nu(y)^2} + \\
&\qquad + \mu(x)^2\nu(y)^2 + \nu(x)^2\mu(y)^2 \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow &0 \leqslant [\mu(x)\nu(y) - \nu(x)\mu(y)]^2
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.1.9. Probar que la función $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\rho(x, y) = |y - x|^{1/2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

es una distancia en $\mathbb{R}$.

Comprobemos las tres condiciones para que sea una distancia:

1. $\rho(x, y) = |y - x|^{1/2} \geqslant 0$ trivialmente. Además, $\rho(x, y) = |y - x|^{1/2} = 0 \Longleftrightarrow y = x$.
2. $\rho(x, y) = |y - x|^{1/2} = \rho(y, x) = |x - y|^{1/2}$ ya que, en $\mathbb{R}$, se tiene que $|y - x| = |x - y|$.
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

$$\begin{aligned}
\rho(x,z) = |z-x|^{1/2} = |z-x+y-y|^{1/2} = \sqrt{|y-x+z-y|} \leqslant \sqrt{|y-x|+|z-y|} \overset{(*)}{\leqslant} \\
\overset{(*)}{\leqslant} \sqrt{|y-x|} + \sqrt{|z-y|} = \rho(x,y) + \rho(y,z)
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ he aplicado que, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} \Longleftrightarrow a + b \leqslant a + b + 2\sqrt{ab} \Longleftrightarrow 0 \leqslant 2\sqrt{ab}$$

Ejercicio 1.1.10. Sean X un espacio normado, Y un espacio vectorial y $f : Y \to X$ una aplicación lineal e inyectiva. Probar que, definiendo

$$||y|| = ||f(y)||, \qquad y \in Y$$

se obtiene una norma en Y. Establecer un resultado análogo para espacios métricos.

Demostramos que la norma así definida efectivamente es una norma.

- $||y|| = ||f(y)|| \geqslant 0$ por ser $||f(y)||$ una norma vectorial. Además, se tiene que $||y|| = ||f(y)|| = 0 \iff f(y) = 0 \iff y = 0$, donde la última doble implicación se debe a que f es inyectiva.
- $||\lambda y|| = ||f(\lambda y)||$. Por ser f lineal, tenemos que $||f(\lambda y)|| = ||\lambda f(y)||$, y por ser esta una norma en X, tenemos que $||\lambda f(y)|| = |\lambda|\ ||f(y)||$. Por hipótesis, tenemos que $|\lambda|\ ||f(y)|| = |\lambda|\ ||y||$, por lo que se tiene que $||\lambda y|| = |\lambda|\ ||y||$.
- Comprobemos la desigualdad triangular:

$$||x+y|| = ||f(x+y)|| \overset{(*)}{=} ||f(x)+f(y)|| \leqslant ||f(x)|| + ||f(y)|| = ||x|| + ||y||$$

  donde en $(*)$ hemos empleado que f es una aplicación lineal.

El resultado análogo para espacios métricos es:

Sean X un espacio métrico, Y un conjunto y $f : Y \to X$ una aplicación inyectiva. Probar que, definiendo

$$d(y,y') = d[f(y), f(y')], \qquad y, y' \in Y$$

se obtiene una distancia en Y. Demostrémoslo:

- $d(y,y') = d[f(y), f(y')] \geqslant 0$ por ser $d[f(y), f(y')]$ una distancia. Además, se tiene que $d(y,y') = d[f(y), f(y')] = 0 \iff f(y) = f(y') \iff y = y'$, donde la última doble implicación se debe a que f es inyectiva.
- La simetría se obtiene trivialmente por ser $d[f(y), f(y')]$ una distancia en X.
- Comprobemos la desigualdad triangular:

$$d(y,y') = d[f(y), f(y')] \leqslant d[f(y), f(z)] + d[f(z), f(y')] = d(y,z) + d(z,y')$$

Nótese que para los espacios métricos no se impone que Y sea un espacio vectorial ni que f sea una forma lineal inyectiva. Tan solo se imponen que X sea un conjunto e Y una aplicación inyectiva.

1.2. Topología de un espacio métrico

Ejercicio 1.2.1. Probar que, en todo espacio métrico, la distancia queda determinada cuando se conocen las bolas abiertas. En el caso particular de un espacio normado, probar que la norma queda determinada cuando se conoce la bola abierta unidad.

Sea (E, d) un espacio métrico, fijado $x \in E$, podemos pensar en $d(x, y)$ como en el ínfimo radio para el cual una bola abierta centrada en x no contenga a y. Expresamos esta idea intuitiva tratando de probar que:

$$d(x, y) = \inf\{r \in \mathbb{R}^+ : y \in B(x, r)\} \qquad \forall y \in E$$

Para ello, fijado $y \in E$, definimos por comodidad $A = \{r \in \mathbb{R}^+ : y \in B(x, r)\}$, y vemos que:

- Es no vacío, ya que como $\bigcup\limits_{r\in\mathbb{R}^+} B(x, r) = E$ y $y \in E$, ha de existir $r \in \mathbb{R}^+$ de forma que $y \in B(x, r)$, con lo que $r \in A$.
- $d(x, y)$ es un minorante de A, ya que si $r \in A$, entonces $y \in B(x, r)$, es decir, $d(x, y) < r$, de donde $d(x, y) < r$ para todo $r \in A$.

Como A es no vacío y minorado, sabemos que tiene ínfimo. Si consideramos ahora la sucesión $\left\{d(x, y) + \frac{1}{n}\right\}$, es claro que $\left\{d(x, y) + \frac{1}{n}\right\} \longrightarrow d(x, y)$. Además, tenemos que:

$$d(x, y) < d(x, y) + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow y \in B\left(x, d(x, y) + \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo que $d(x, y) + \frac{1}{n} \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos una sucesión de puntos de A que converge a un minorante de A, no queda más salida que $d(x, y) = \inf A$, como queríamos probar. Hemos demostrado que, a partir de las bolas abiertas, podemos calcular la distancia entre dos puntos arbitrarios de E.

En el caso de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, tenemos que $\|x\| = d(x, 0) = d(0, x)$. Entonces:

$$\|x\| = \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid x \in B(0, \varepsilon)\} = \inf\left\{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid \frac{x}{\varepsilon} \in B(0, 1)\right\} \quad \forall x \in X$$

donde la primera desigualdad se debe a lo ya demostrado, y la segunda se debe a que:

$$x \in B(0, \varepsilon) \Longleftrightarrow \|x\| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left\|\frac{x}{\varepsilon}\right\| < 1 \Longleftrightarrow \frac{x}{\varepsilon} \in B(0, 1)$$

Ejercicio 1.2.2. Sea X un espacio normado, $x, y \in X$ y $r, \rho \in \mathbb{R}^+$. Probar las siguientes afirmaciones. ¿Son ciertos los resultados análogos en un espacio métrico cualquiera?

1. $B(x, r) \cap B(y, \rho) \neq \emptyset \Longleftrightarrow ||y - x|| < r + \rho$.

   Al ser un espacio normado, podemos considerar la distancia correspondiente a la norma: $d(x, y) = ||y - x||$, $\forall x, y \in X$. Entonces:

$\Longrightarrow$) Sea $z \in B(x,r) \cap B(y,\rho)$. Entonces,

$$||y-x|| = d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z) < r + \rho$$

$\Longleftarrow$) Suponemos $||y-x|| = d(x,y) < r+\rho$, y buscamos $z \in B(x,r) \cap B(y,\rho)$.

Consideramos $z := \lambda x + (1-\lambda)y$ punto arbitrario del segmento que uno x e y. Veamos que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que z está en la intersección. Supongamos que lo está y veamos si existen dichos valores de λ.

$$\begin{aligned} z \in B(x,r) &\Longrightarrow d(x,z) < r \Longrightarrow d(x, \lambda x + (1-\lambda)y) < r \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \|(1-\lambda)y - (1-\lambda x)x\| = (1-\lambda)\|x-y\| < r \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow 1 - \frac{r}{\|x-y\|} < \lambda \\ z \in B(y,\rho) &\Longrightarrow d(y,z) < \rho \Longrightarrow d(y, \lambda x + (1-\lambda)y) < \rho \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \|\lambda(x-y)\| = \lambda\|x-y\| < \rho \Longrightarrow \lambda < \frac{\rho}{\|x-y\|} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$1 - \frac{r}{\|x-y\|} < \lambda < \frac{\rho}{\|x-y\|}$$

Dicho valor de λ existirá si y solo si $1 - \frac{r}{\|x-y\|} < \frac{\rho}{\|x-y\|}$. Veámoslo:

$$1 - \frac{r}{\|x-y\|} < \frac{\rho}{\|x-y\|} \Longleftrightarrow \|x-y\| - r < \rho \Longleftrightarrow \|x-y\| < r + \rho$$

Que es cierto por hipótesis. Por tanto, tenemos que la intersección no es nula.

Este resultado no es cierto para un espacio métrico cualquiera. Sea (X, d_{disc}). Entonces $B_1\left(0, \frac{3}{4}\right) = \{0\}$, $B_2\left(1, \frac{3}{4}\right) = \{1\}$. Se tiene que la intersección es nula. No obstante,

$$d(0,1) = 1 < \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

2. $B(y,\rho) \subset B(x,r) \Longleftrightarrow ||y-x|| < r - \rho$.

$\Longrightarrow$) Sea $z = x + \dfrac{r}{\|y-x\|}(y-x)$ un punto arbitrario de

Como $\|z-x\| = \left\| \dfrac{r'}{\|y-x\|}(y-x) \right\| = r' \cdot \left\| \dfrac{y-x}{\|y-x\|} \right\| = r' < r$, tenemos que $z \in B(y,\rho)$.

Al ser $B(y,\rho) \subset B(x,r)$, tenemos que $z \in B(x,r)$. Es decir, $\|z-x\| < r$. Entonces:

$$\|z-x\|$$

TERMINAR

$\Longleftarrow$) Sea $z \in B(y,\rho)$, es decir, $d(y,z) < \rho$. Veamos que $d(x,z) < r$.

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) < r - p + \rho = r$$

Por tanto, tenemos que $z \in B(x,r)$, por lo que se da la inclusión buscada.

Este resultado no es cierto para un espacio métrico cualquiera. Sea (X, d_{disc}). Entonces $B_1(0,1) = \{0\}$, $B_2\left(0,\frac{3}{4}\right) = \{0\}$. Se tiene trivialmente que

$$B_1(0,1) = \{x\} \subset \{x\} = B_2\left(0, \frac{3}{4}\right)$$

No obstante,

$$d(0,0) = 0 > r - \rho = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

Ejercicio 1.2.3. Dar un ejemplo de una familia numerable de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección no sea un conjunto abierto.

Dado $x \in \mathbb{R}$, sea la familia $\left\{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ que, como $\mathbb{N}$ es numerable, el conjunto también lo es. Es directo ver que su intersección es $\{x\}$, el cual no es un abierto porque $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x,\varepsilon) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \{x\}$.

Ejercicio 1.2.4. Si A es un subconjunto no vacío de un espacio métrico E con distancia d, se define la *distancia* de un punto $x \in E$ al conjunto A por

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$$

Probar que $\overline{A} = \{x \in E \mid d(x,A) = 0\}$.

$\subset$) Sea $x \in \overline{A} \subset E$. Entonces, $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, sea $z_n \in A$ tal que

$$0 \leqslant d(x, z_n) < \frac{1}{n}$$

Por el lema del Sándwich, tenemos que $\{d(x,z_n)\} \to 0$. Además, como se tiene que $0 \leqslant d(x,a)\ \forall a \in A$, tenemos que 0 es un minorante del conjunto. Por tanto, por la caracterización del ínfimo con sucesiones[1], tenemos que

$$0 = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\} = d(x,A).$$

$\supset$) Sea $x \in E$ tal que $d(x,A) = 0 = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$. Entonces, por la caracterización del ínfimo, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $a_n \in A$ con:

$$0 \leqslant d(x,a_n) < \frac{1}{n}$$

Por lo que $\{d(x,a_n)\} \longrightarrow 0$, luego $\{a_n\} \longrightarrow x$, de donde $x \in \overline{A}$.

Ejercicio 1.2.5. Sea X un espacio normado, $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, probar que

[1] El ínfimo de un conjunto es el único minorante que es límite de una sucesión de elementos del conjunto.

1. $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$,

   ⊂) Tenemos que $B(x,r) \subset \overline{B}(x,r) \in \mathcal{C}$. Entonces, como $\overline{B(x,r)}$ es el mínimo cerrado que contiene a $B(x,r)$, y las bolas cerradas son cerrados, tenemos que $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r)$.

   ⊃) (Opción que usa la caracterización secuencial del cierre).
   Tenemos que $y \in \overline{B(x,r)}$ si y solo si $\exists \{y_n\} \to y$, con $d(x,y_n) < r\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   Sea $y \in \overline{B}(x,r)$, es decir, $d(x,y) \leqslant r$. Entonces, definimos la sucesión $\{y_n\} = \{y - \frac{1}{n}(y-x)\}$. Tenemos claramente que $\{y_n\} \to y$. Veamos que $d(x,y_n) < r\ \forall n \in \mathbb{N}$:

   $$d(x,y_n) = d\left(x, y - \frac{1}{n}(y-x)\right) = \left\| y - x - \frac{1}{n}(y-x)\right\| = \left\|\left(1 - \frac{1}{n}\right)(y-x)\right\| \leqslant$$
   $$\leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) d(x,y) < d(x,y) \leqslant r$$

   Por tanto, tenemos que existe la sucesión buscada, por lo que $y \in \overline{B}(x,r)$.

   ⊃) Hemos de demostrar que $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$. Tenemos que

   $$\overline{B}(x,r) = B(x,r) \amalg^{2}\ S(x,r)$$

   En el caso de $y \in B(x,r)$, tenemos claramente que $B(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$.
   En el caso de $y \in S(x,r)$, veamos que $y \in \overline{B(z,r)}$, es decir hay que comprobar que $B(y,\varepsilon) \cap B(x,r) \neq \emptyset$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Por el apartado 1 del ejercicio 1.2.2, tenemos que esto se da si y solo si $\|x-y\| < r + \varepsilon$, lo cual es cierto ya que $\|x-y\| = r$, por lo que $S(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$.

   Por tanto, como ambos conjuntos son subconjuntos de $\overline{B(x,r)}$, se tiene de forma directa.

2. $B(x,r) = [\overline{B}(x,r)]^\circ$

   ⊂) Como las bolas abiertas son abiertos métricos, tenemos la siguiente igualdad: $B(x,r) = [B(x,r)]^\circ$. Además, tenemos que:

   $$[B(x,r)]^\circ = \bigcup \{U \in \mathcal{T} \mid U \subset B(x,r)\} \qquad \left[\overline{B}(x,r)\right]^\circ = \bigcup \{V \in \mathcal{T} \mid V \subset \overline{B}(x,r)\}$$

   Como $B(x,r) \subset \overline{B}(x,r)$, tenemos que $B(x,r) = [B(x,r)]^\circ \subset \left[\overline{B}(x,r)\right]^\circ$, teniendo por tanto esta inclusión.

   ⊃) Sea $y \in \left[\overline{B}(x,r)\right]^\circ$. Entonces, $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(y,\varepsilon) \subset \overline{B}(x,r)$. Entonces, por el ejercicio 1.2.2, apartado 2, tenemos que $\|x-y\| \leqslant r - \varepsilon < r$. Por tanto, $d(x,y) < r$, por lo que $y \in B(x,r)$.

Deducir que $\mathrm{Fr}(B(x,r)) = \mathrm{Fr}(\overline{B}(x,r)) = S(x,r)$.

$$\mathrm{Fr}(B(x,r)) = \overline{B(x,r)} \setminus [B(x,r)]^\circ = \overline{B}(x,r) \setminus B(x,r) = S(x,r)$$
$$\mathrm{Fr}(\overline{B}(x,r)) = \overline{\overline{B}(x,r)} \setminus \left[\overline{B}(x,r)\right]^\circ = \overline{B}(x,r) \setminus B(x,r) = S(x,r)$$

[2] Símbolo de unión de disjunta.

donde he empleado que $U \in \mathcal{T} \iff A = A^\circ$ y $C \in C_\mathcal{T} \iff C = \overline{C}$; junto que las bolas abiertas son abiertos métricos, y las bolas cerradas son cerrados métricos.

¿Son ciertos estos resultados en un espacio métrico cualquiera?

No. Sea (X, d_{disc}) espacio métrico asociado a la distancia discreta. Entonces, tomamos $B(0,1) = \{0\}$. Tenemos que $\overline{B}(0,1) = X$. No obstante, en el primer caso $\overline{B(0,1)} = \{0\} \neq X$, y en el segundo caso $[\overline{B}(x,r)]^\circ = X^\circ = X$ por ser este un abierto.

Ejercicio 1.2.6. Para un intervalo $J \subset \mathbb{R}$, calcular los conjuntos J°, $\overline{J}$, J' y $\operatorname{Fr} J$.

Sean $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Calculamos en primer lugar el interior para los distintos intervalos:

$$\begin{aligned}
]a,b[&= [a,b]^\circ = [a,b[^\circ =]a,b]^\circ =]a,b[^\circ \\
]-\infty,b[&=]-\infty,b]^\circ =]-\infty,b[^\circ \\
]a,+\infty[&= [a,+\infty[^\circ =]a,+\infty[^\circ \\
\mathbb{R} &= [\mathbb{R}]^\circ
\end{aligned}$$

Calculamos ahora el cierre de los distintos intervalos:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \overline{[a,b]} = \overline{[a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{]a,b[} \\
]-\infty,b] &= \overline{]-\infty,b]} = \overline{]-\infty,b[} \\
[a,+\infty[&= \overline{[a,+\infty[} = \overline{]a,+\infty[} \\
\mathbb{R} &= \overline{\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

Veamos ahora el valor de J'. Tenemos que el conjunto de los puntos aislados es $\overline{J} \setminus J'$. Como un intervalo no tiene puntos aislados, tenemos que $\overline{J} \setminus J' = \emptyset$, por lo que $\overline{J} = J'$ para todo J intervalo.

Veamos el valor de la frontera:

$$\begin{aligned}
\{a,b\} &= \operatorname{Fr}[a,b] = \operatorname{Fr}[a,b[= \operatorname{Fr}]a,b] = \operatorname{Fr}]a,b[\\
\{b\} &= \operatorname{Fr}]-\infty,b] = \operatorname{Fr}]-\infty,b[\\
\{a\} &= \operatorname{Fr}[a,+\infty[= \operatorname{Fr}]a,+\infty[\\
\emptyset &= \operatorname{Fr}\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.7. En el espacio métrico $\mathbb{R}$ y para cada uno de los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, calcular su interior y su cierre, sus puntos de acumulación, sus puntos aislados y su frontera.

Números naturales $\mathbb{N}$:

1. $\mathbb{N}^\circ = \emptyset$, ya que $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B(x,\varepsilon) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathbb{N}$.
2. $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, ya que para $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset \iff x \in \mathbb{N}$
3. $\mathbb{N}' = \emptyset$, ya que si $0 < \varepsilon \leqslant 1 \in \mathbb{R}^+$, entonces $B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{N} \setminus \{x\} = \emptyset$.

4. $\overline{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{N}' = \mathbb{N}$.

5. $\mathrm{Fr}(\mathbb{N}) = \overline{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{N}^\circ = \mathbb{N}$.

Números enteros $\mathbb{Z}$:

1. $\mathbb{Z}^\circ = \emptyset$, ya que $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B(x,\varepsilon) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathbb{Z}$.

2. $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, ya que para $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

3. $\mathbb{Z}' = \emptyset$, ya que si $0 < \varepsilon \leqslant 1 \in \mathbb{R}^+$, entonces $B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{Z} \setminus \{x\} = \emptyset$.

4. $\overline{\mathbb{Z}} \setminus \mathbb{Z}' = \mathbb{Z}$.

5. $\mathrm{Fr}(\mathbb{Z}) = \overline{\mathbb{Z}} \setminus \mathbb{Z}^\circ = \mathbb{Z}$.

Números racionales $\mathbb{Q}$:

1. $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, ya que $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B(x,\varepsilon) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathbb{Q}$.

2. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, ya que $B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{Q} =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$, ya que entre dos reales hay infinidad de racionales.

3. $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, ya que $B(x,\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \setminus \{x\} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{Q}$.

4. $\overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}' = \emptyset$.

5. $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}^\circ = \mathbb{R}$.

Números irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

1. $[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]^\circ = \emptyset$, ya que $\nexists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B(x,\varepsilon) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]$.

2. $\overline{[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]} = \mathbb{R}$, ya que $B(x,\varepsilon) \cap [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}] =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}] \neq \emptyset \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$, ya que entre dos reales hay infinidad de irracionales.

3. $[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]' = \mathbb{R}$, ya que $B(x,\varepsilon) \cap [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}] \setminus \{x\} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{Q}$.

4. $\overline{[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]} \setminus [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]' = \emptyset$.

5. $\mathrm{Fr}([\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]) = \overline{[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]} \setminus [\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}]^\circ = \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.2.8. Si un subconjunto A de un espacio métrico E verifica que $A' = \emptyset$, probar que la topología inducida por E en A es la discreta. ¿Es cierto el recíproco?

Recordamos que $\mathcal{T}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$. Además, tenemos que el conjunto de puntos aislados de un espacio métrico es $\overline{A} \setminus A'$. Como $A' = \emptyset$, tenemos que el conjunto de puntos aislados es $\overline{A} \supset A$, por lo que todo punto de A es aislado.

Por tanto, $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \cap B(x,\varepsilon) = \{x\}$. Tenemos que $B(x,\varepsilon) \in \mathcal{T}$, por lo que $\{x\} \in \mathcal{T}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$, para todo $x \in A$. Además, como la unión arbitraria de abiertos es abierta, tenemos que, $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{T}_A$. Trivialmente se tiene que $\mathcal{T}_A \subset \mathcal{P}(A) = \mathcal{T}_{disc}$. Por doble inclusión, se tiene que $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_{disc}$.

El recíproco indica que, dado $A \subset E$, con $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_{disc} \Longrightarrow A' = \emptyset$. Veamos que no es cierto. Sea $E = \mathbb{R}$ espacio métrico, y consideremos $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$.

Para ver que $\mathcal{T}_{disc} \subset \mathcal{T}_A$, veamos que $\left\{\frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{T}_A\ \forall \frac{1}{n} \in A$, es decir, $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B\left(\frac{1}{n}, \varepsilon\right) \cap A = \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Para $\varepsilon \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, tenemos que:

$$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \geqslant \varepsilon$$
$$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \geqslant \varepsilon$$

Por tanto, tenemos que para $\varepsilon \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ se da. Por tanto, $\{x\} \in \mathcal{T}_A\ \forall x \in A$. Como las uniones arbitrarias de abiertos es abierto, tenemos que $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{T}_A$. La otra inclusión es trivial, por lo que tenemos que ambas topologías son iguales.

Veamos ahora que $A' \neq \emptyset$, ya que $0 \in A'$. Como $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$, por definición de convergencia en $\mathbb{R}$ tenemos que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, entonces $d\left(\frac{1}{n}, 0\right) < \varepsilon$. Entonces, tenemos que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ se tiene que

$$B(0, \varepsilon) \cap (A \setminus \{0\}) = B(0, \varepsilon) \cap A = \left\{\frac{1}{n},\ n \geqslant n_0\right\} \neq \emptyset \Longrightarrow 0 \in A'.$$

Ejercicio 1.2.9. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones convergentes en un espacio métrico E con distancia d. Probar que la sucesión $\{d(x_n, y_n)\}$ es convergente y calcular su límite.

Por ser ambas sucesiones convergentes, tenemos que:

$$\{x_n\} \to x \Longrightarrow d(x_n, x) \to 0$$
$$\{y_n\} \to y \Longrightarrow d(y_n, y) \to 0$$

Además, aplicando las propiedades de la distancia, tenemos que:

$$0 \leqslant |d(x_n, x) - d(x, y)| \leqslant d(x_n, y) \leqslant d(x_n, x) + d(x, y) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando límites y por el Lema del Sándwich, tenemos que $\{d(x_n, y)\} \to d(x, y)$.

Vemos ahora lo siguiente:

$$0 \leqslant |d(x_n, y) - d(y_n, y)| \leqslant d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, y) + d(y, y_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando límites, por el Lema del Sándwich y sabiendo que $\{d(x_n, y)\} \to d(x, y)$, tenemos que

$$\{d(x_n, y_n)\} \to d(x, y).$$

Ejercicio 1.2.10. Sea $E = \prod\limits_{k=1}^{N} E_k$ un producto de espacios métricos y $A = \prod\limits_{k=1}^{N} A_k \subset E$, donde $A_k \subset E_k$ para todo $k \in \Delta_N$. Probar que $A^\circ = \prod\limits_{k=1}^{N} A_k^\circ$ y $\overline{A} = \prod\limits_{k=1}^{N} \overline{A_k}$. Deducir que A es un abierto de E si, y sólo si, A_k es un abierto de E_k para todo $k \in \Delta_N$, mientras que A es un cerrado de E si, y sólo si, A_k es un cerrado de E_k para todo $k \in \Delta_N$.

TERMINAR

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\iff \exists \{x_n\} \to x, \text{ con } x_n \in A = \prod_{k=1}^{N} A_k \iff \\ &\iff \exists \{x_n(k)\} \to x(k), \text{ con } x_n(k) \in A_k \iff \\ &\iff x(k) \in \overline{A_k} \end{aligned}$$

1.3. Continuidad y límite funcional

Ejercicio 1.3.1. Sean E y F espacios métricos y $f : E \to F$ una función. Probar que f es continua si, y sólo si, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ para todo conjunto $A \subset E$.

$\Longrightarrow$) Sea $A \subset E$ y sea $y \in f\left(\overline{A}\right)$, entonces $\exists x \in \overline{A}$ de forma que $y = f(x)$. Sea $V \in \mathcal{U}(y)$, queremos ver que $V \cap f(A) \neq \emptyset$ para concluir que $y \in \overline{f(A)}$. Para ello, usaremos la definición de que f sea continua en x, con lo que $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$. Ahora, como $x \in \overline{A}$, tenemos que $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$, por lo que $\exists z \in f^{-1}(V) \cap A$. De esta forma, tendremos que (basta recordar la definición de $f^{-1}(V)$ y aplicar que $z \in A$) $f(z) \in V \cap f(A)$, como queríamos probar.

En definitiva, $V \cap f(A) \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{U}(y)$, siendo $y \in f\left(\overline{A}\right)$ arbitrario. Concluimos que $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

$\Longleftarrow$) Como la propiedad enunciada usa el cierre de un conjunto, trataremos de probar que f es continua probando que la preimagen de todo cerrado es un conjunto cerrado.

Para ello, si $C \subset F$ es un cerrado ($C = \overline{C}$) y $A = f^{-1}(C)$, queremos ver que A es cerrado. En este caso, tenemos que $f(A) \subset C$, y usando la igualdad:

$$f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{C} = C$$

Por lo que $\overline{A} \subset f^{-1}(C) = A$, de donde $A = \overline{A}$ y A es un cerrado de E, por lo que f es continua.

Ejercicio 1.3.2. Dado un subconjunto A de un espacio métrico E, la función característica de A es la función $\chi_A : E \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\chi_A(x) = 1 \ \ \forall x \in A \qquad \text{y} \qquad \chi_A(x) = 0 \ \ \forall x \in E \setminus A$$

Probar que χ_A es continua en un punto $x \in E$ si, y sólo si, $x \in A^\circ \cup (E \setminus A)^\circ$. Deducir que χ_A es continua si, y sólo si, A es a la vez abierto y cerrado.

Si $x \in A^\circ \cup (E \setminus A)^\circ$, tenemos dos casos:

- Si $x \in A^\circ$, entonces $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ de forma que $B(x, \delta) \subset A$, por lo que $\chi_{A|_{B(x,\delta)}}$ es constantemente igual a 1, luego es continua en x y como $B(x, \delta)$ es un abierto, el carácter local de la continuidad nos dice que χ_A es continua en x.

- Si $x \in (E \setminus A)^\circ$, de forma análoga, $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ de forma que $B(x, \delta) \subset E \setminus A$, por lo que $\chi_{A|_{B(x,\delta)}}$ es constantemente igual a 0, luego es continua en x y como $B(x, \delta)$ es un abierto, el carácter local de la continuidad nos dice que χ_A es continua en x.

Recíprocamente, probaremos que si $x \in Fr(A)$, entonces χ_A no es continua en x. Para ello, si $x \in Fr(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$, distinguimos casos:

- Si $x \in A$, entonces tomando $V =]0{,}5, 2[\in \mathcal{U}(f(x)) = \mathcal{U}(1)$, si χ_A fuese continua en x tendríamos que $U = \chi_A^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$, pero $\chi_A^{-1}(V) = A$, por lo que $A \in \mathcal{U}(x)$, contradicción con que $x \in A \setminus A^\circ$.

- Si $x \notin A$, entonces tomando $V =]-0{,}5, 0{,}5[\in \mathcal{U}(f(x)) = \mathcal{U}(0)$, si χ_A fuese continua en x tendríamos que $U = \chi_A^{-1}(V) = E \setminus A \in \mathcal{U}(x)$, contradicción con que $x \in Fr(A)$.

Una vez probado el enunciado, notemos que χ_A es continua si y solo si $E = A^\circ \cup (E \setminus A)^\circ$, es decir, si $Fr(A) = \overline{A} \setminus A^\circ = \emptyset$, si y solo si $\overline{A} = A^\circ$, pero como $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$, esto equivale a que $A^\circ = A = \overline{A}$, es decir, que A sea abierto y cerrado.

Ejercicio 1.3.3. Si E y F son espacios métricos, se dice que una función $f : E \to F$ es *localmente constante* cuando, para cada $x \in E$, existe $U \in \mathcal{U}(x)$ tal que $f\big|_U$ es constante. Probar que entonces f es continua. Dar un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y una función localmente constante $f : A \to \mathbb{R}$, cuya imagen $f(A)$ sea un conjunto infinito.

Tenemos el resultado pedido aplicando simplemente el carácter local de la continuidad: si $x \in E$, existe $U \in \mathcal{U}(x)$ de forma que $f\big|_U$ es constante, luego $f\big|_U$ es continua en x. Por el carácter local de la continuidad, como $U \in \mathcal{U}(x)$, tenemos que f es continua en x, para todo $x \in E$. Para el ejemplo pedido, podemos tomar por ejemplo $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ y $f = E\big|_A$, donde E es la función parte entera.

Ejercicio 1.3.4. Sea E un espacio métrico con distancia d y A un subconjunto no vacío de E. Probar la continuidad de la función $f : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = d(x, A) \overset{\text{def}}{=} \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} \qquad \forall x \in E$$

Si $x, y \in E$, tenemos que:

$$d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a) \qquad \forall a \in A$$

Si consideramos los conjuntos formados por dichos elementos y tomamos ínfimos a ambos lados:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\} \leqslant \inf\{d(x, y) + d(y, a) : a \in A\} = d(x, y) + d(y, A)$$

De donde deducimos que $d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y)$, para todo $x, y \in E$. Si repetimos los pasos pero sustituyendo x por y:

$$d(y, a) \leqslant d(y, x) + d(x, a) \qquad \forall a \in A$$

De donde:

$$d(y, A) \leqslant d(y, x) + d(x, A) \Longrightarrow d(y, A) - d(x, A) \leqslant d(y, x) = d(x, y) \qquad \forall x, y \in E$$

En definitiva, hemos probado que:

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y) \qquad \forall x, y \in E$$

Lo que claramente implica la continuidad de f.

Ejercicio 1.3.5. Sea E un espacio métrico con distancia d, y consideremos el espacio producto $E \times E$. Probar que, $\forall r \in \mathbb{R}_0^+$, el conjunto $\{(x, y) \in E \times E \mid d(x, y) < r\}$ es abierto, mientras que $\{(x, y) \in E \times E \mid d(x, y) \leqslant r\}$ es cerrado. En particular se tiene que la diagonal $\Delta(E) = \{(x, x) \mid x \in E\}$ es un conjunto cerrado. Deducir que, si F es otro espacio métrico y $f, g : E \to F$ son funciones continuas, entonces $\{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ es un subconjunto cerrado de E .

Hemos probado en teoría que si E es un espacio métrico, entonces su distancia $d : E \times E \to \mathbb{R}_0^+$ es una función continua. Por tanto:

- Como $[0, r[$ es un abierto ($[0, r[\, = \,]-r, r[\, \cap \mathbb{R}_0^+$) en $\mathbb{R}_0^+$, tenemos que:

$$\{(x, y) \in E \mid d(x, y) < r\} = d^{-1}([0, r[) \text{ es un abierto}$$

- Como $[0, r]$ es un cerrado en $\mathbb{R}_0^+$ (de hecho lo es en $\mathbb{R}$), tenemos que:

$$\{(x, y) \in E \mid d(x, y) \leqslant r\} = d^{-1}([0, r]) \text{ es un cerrado}$$

En particular, llamando A al primer conjunto y B al segundo: $\Delta(E) = B \setminus A$, por lo que es cerrado, como intersección de dos cerrados ($B \setminus A = B \cap ((E \times E) \setminus A)$).

Si $f, g : E \to F$ son continuas, si consideramos $\Phi : E \to F \times F$ dada por:

$$\Phi(x) = (f(x), g(x)) \qquad \forall x \in E$$

Es decir, $\Phi = (f, g)$, tenemos que Φ es continua $\Longleftrightarrow f$ y g son continuas, por lo que Φ es continua, y si consideramos $d \circ \Phi : E \to \mathbb{R}_0^+$ dada por:

$$(d \circ \Phi)(x) = d(\Phi(x)) = d(f(x), g(x)) \qquad \forall x \in E$$

Tendremos una función continua, como composición de dos funciones continuas. Finalmente, observamos que $\{0\} \subset \mathbb{R}_0^+$ es un conjunto cerrado, por lo que:

$$(d \circ \Phi)^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \mid d(f(x), g(x)) = 0\} = \{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$$

Es un conjunto cerrado.

Ejercicio 1.3.6. Sean E, F espacios métricos y $f : E \to F$ una función continua. Probar que su gráfica, es decir, el conjunto $\operatorname{Gr} f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ es un subconjunto cerrado del espacio métrico producto $E \times F$.

Sean $\Phi, \Psi : E \times F \to E \times F$ dadas por:

$$\Phi(x, y) = (x, y), \qquad \Psi(x, y) = (x, f(x)) \qquad \forall (x, y) \in E \times F$$

Es decir, Φ la función identidad en $E \times F$ y Ψ la que tiene como primera coordenada a π_1 y en la segunda a $f \circ \pi_1$, tenemos que ambas son continuas (Ψ es continua porque sus dos componentes son continuas). Como $E \times F$ es un espacio métrico con la distancia producto, en el ejercicio anterior demostramos que:

$$\{(x, y) \in E \times F \mid \Phi(x, y) = \Psi(x, y)\}$$

Es un conjunto cerrado, pero resulta que:

$$\{(x, y) \in E \times F \mid \Phi(x, y) = \Psi(x, y)\} = \{(x, y) \in E \times F \mid (x, y) = (x, f(x))\} = \operatorname{Gr} f$$

Ejercicio 1.3.7. Sea E un espacio métrico e Y un espacio pre-hilbertiano. Para $f, g \in \mathcal{F}(E, Y)$, se define una función $h \in \mathcal{F}(E)$ por $h(x) = (f(x) \mid g(x))$ para todo $x \in E$. Probar que, si f, g son continuas en un punto $a \in E$, entonces h también lo es.

En el Ejercicio 1.1.1 vimos que se cumplía la identidad de polarización:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Propiedad que usaremos para probar primero que $\langle\cdot,\cdot\rangle : Y \times Y \to \mathbb{R}$ es continua, como resultado de la composición que ilustramos:

$$(x, y) \longmapsto (x+y, x-y) \longmapsto \left(\|x+y\|^2, \|x-y\|^y\right) \longmapsto \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Donde:

- La primera es $\Phi_1 : Y \times Y \to Y \times Y$, dada por:

  $$\Phi_1(x, y) = (x+y, x-y)$$

  Que es continua, porque sus dos componentes lo son.

- La segunda es $\Phi_2 : Y \times Y \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dada por:

  $$\Phi_2(x, y) = \left(\|x\|^2, \|y\|^2\right)$$

  Que es continua, porque sus dos componentes son composición de dos funciones continuas.

- La tercera es $\Phi_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

  $$\Phi_3(x, y) = \frac{1}{4}(x-y)$$

  Que también es continua, como composición de funciones continuas.

Finalmente, si f y g son continuas en $a \in E$ y tomamos $\Phi = (f, g)$ obtenemos una función continua en $a \in E$, que nos permite escribir:

$$h = \langle\cdot,\cdot\rangle \circ \Phi$$

Por lo que h es continua en $a \in E$.

Ejercicio 1.3.8. Sea E un espacio métrico y $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones continuas en un punto $a \in E$. Probar que la función $h : E \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$ para todo $x \in E$, también es continua en a.

La clave es expresar h de la siguiente manera:

$$h(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\left(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\right) \qquad \forall x \in E$$

Como f, g son continuas en a, entonces $f+g$ y $f-g$ también lo son. Además, el valor absoluto es una función continua en $\mathbb{R}$, por lo que $|f-g|$ es continua en a. Por tanto, h es continua en a.

Ejercicio 1.3.9. Probar que si Y es un espacio normado, E un espacio métrico y $f : E \to Y$ una función continua en un punto $a \in E$, entonces la función $g : E \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \|f(x)\|$ para todo $x \in E$, también es continua en el punto a.

Tenemos que $g = \|\cdot\| \circ f$ y como f es continua en a y $\|\cdot\|$ es continua en $f(a)$ (ya que es continua en todo Y), tenemos que g es continua en a.

Ejercicio 1.3.10. Probar las siguientes igualdades:

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1.$

   Observando el límite, vemos que se parece a uno bien conocido:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

   Por tanto, lo que haremos será intentar aplicar el resultado visto en teoría sobre el límite de una composición de funciones (conviene tener el resultado delante para comprobar todas las hipótesis). De esta forma, si definimos $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por:

   $$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

   Y definimos también $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

   $$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

   Tenemos que φ verifica las dos hipótesis que ha de cumplir, puesto que:

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2 = 0$$
   $$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

   Como veníamos anunciando, como tenemos que:

   $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

   Concluimos que:

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(\varphi(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^4+y^4)}{x^4+y^4} = 1.$

   Procedemos de forma análoga, en primer lugar definimos $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por:

   $$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

   Y definimos $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

   $$\varphi(x,y) = x^4 + y^4 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Como se cumple que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^4 + y^4 = 0$$
$$\varphi(x,y) = x^4 + y^4 > 0 \Longleftrightarrow (x,y) \neq (0,0)$$

Y es bien sabido que:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Concluimos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(\varphi(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^4+y^4)}{x^4+y^4} = 1$$

1.4. Compacidad y conexión

Ejercicio 1.4.1. Probar que dos normas definidas en un mismo espacio vectorial, que dan lugar a los mismos conjuntos acotados, han de ser equivalentes.

Ya vimos en teoría que dos normas equivalentes en un mismo espacio vectorial dan lugar a los mismos conjuntos acotados, y aquí se nos pide probar el recíproco por lo que, una vez probado, que dos normas sean equivalentes es tanto como decir que dan lugar a los mismos conjuntos acotados.

Sean pues $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ dos normas definidas en X que dan lugar a los mismos conjuntos acotados, probemos que $\exists \lambda, \rho \in \mathbb{R}^+$ de forma que:

$$\lambda\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \rho\|x\|_1 \qquad \forall x \in X$$

Para ello, consideramos $B_1 = \{x \in X : \|x\|_1 \leqslant 1\}$, que obviamente es un conjunto acotado para $\|\cdot\|_1$, luego también para $\|\cdot\|_2$, es decir, podemos encontrar $C \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\|x\|_2 \leqslant C \ \forall x \in B_1$. Como podemos escrbir:

$$x = \|x\|_1 \frac{x}{\|x\|_1} \qquad \forall x \in X$$

Tenemos entonces que:

$$\|x\|_2 = \|x\|_1 \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 \overset{(*)}{\leqslant} C\|x\|_1 \qquad \forall x \in X$$

Donde en $(*)$ hemos usado que ${}^{x}/_{\|x\|_1} \in B_1$ para todo $x \in X$, por lo que $\|{}^{x}/_{\|x\|_1}\|_2 \leqslant C$. Aprovechando la simetría de la situación, podemos repetir este mismo razonamiento para $B_2 = \{x \in X : \|x\|_2 \leqslant 1\}$, obteniendo $C' \in \mathbb{R}^+$ de forma que:

$$\|x\|_1 \leqslant C'\|x\|_2 \qquad \forall x \in X$$

En definitiva, tenemos que:

$$\frac{1}{C'}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1 \qquad \forall x \in X$$

Con ${}^{1}/_{C'}, C \in \mathbb{R}^+$, por lo que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

Ejercicio 1.4.2. Dado un subconjunto A de un espacio normado, probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. A está acotado.

2. Si $\{a_n\}$ es una sucesión de puntos de A y $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números reales tal que $\{\lambda_n\} \to 0$, entonces $\{\lambda_n a_n\} \to 0$.

3. Para toda sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A se tiene que $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\} \to 0$.

¿Significa esto que si $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\} \to 0$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ está acotada?

Sea $(X, \|\cdot\|)$ el espacio normado sobre el que trabajemos, $A \subset X$, para este ejercicio usaremos la siguiente definición de convergencia de una sucesión de puntos de A: Si $\{a_n\}$ es una sucesión de puntos de A, decimos que converge a $a \in X$ si:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N} : \|a_n - a\| < \varepsilon\ \forall n \geqslant m$$

i) $\Longrightarrow$ *ii)* Si A está acotado, $\exists M \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\|a\| \leqslant M$ para todo $a \in M$. En particular, $\|a_n\| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, la convergencia de $\{\lambda_n\}$ a 0 nos permite encontrar para ε/M un $m \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$|\lambda_n| < \frac{\varepsilon}{M} \qquad \forall n \geqslant m$$

En definitiva:

$$\|\lambda_n a_n\| = |\lambda_n|\|a_n\| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon \qquad \forall n \geqslant m$$

Es decir, $\{\lambda_n a_n\} \to 0$.

ii) $\Longrightarrow$ *iii)* En particular, $\{\frac{1}{n}\}$ es una sucesión de números reales convergente a 0.

iii) $\Longrightarrow$ *i)* Por reducción al absurdo, si suponemos que A no está acotado, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $a_n \in A$ con $\|a_n\| > n$. De esta forma, $\{a_n\}$ es una sucesión de puntos de A, por lo que *iii)* nos dice que $\{a_n/n\} \to 0$. Sin embargo:

$$\left\|\frac{a_n}{n}\right\| = \frac{1}{n}\|a_n\| > \frac{n}{n} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Contradicción con que $\{a_n/n\} \to 0$.

Esto no significa que si tengamos una sucesión $\{a_n\}$ de forma que $\{\frac{a_n}{n}\} \to 0$, entonces $\{a_n\}$ esté acotada, ya que si tomamos $a_n = \sqrt{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\left\{\frac{a_n}{n}\right\} = \left\{\frac{\sqrt{n}}{n}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\} \to 0$$

Pero sin embargo $\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}$ no está acotada; de hecho, diverge.

Ejercicio 1.4.3. Probar que todo espacio métrico finito es compacto. Probar también que, en un conjunto no vacío E con la distancia discreta, todo subconjunto compacto de E es finito.

Sea (E, d) un espacio métrico finito y $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de E, por ser E finito ha de existir un elemento que se repita una cantidad infinita de veces, es decir, $\exists \alpha \in E$ de forma que $\forall n \in E\ \exists m > n$ con $x_m = \alpha$. De esta forma, podemos construir una parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que sea constantemente igual a α, luego convergente; por lo que E es compacto.

Que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $E \neq \emptyset$ sea convergente con la distancia discreta significa que $\exists x \in E$ tal que:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} : d_{\text{disc}}(x_n, x) < \varepsilon \ \forall n \geqslant m$$

En particular, como:

$$d_{\text{disc}}(x_n, x) = \begin{cases} 0 & \text{si y solo si } x_n = x \\ 1 & \text{si y solo si } x_n \neq x \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para que $\{x_n\}$ sea convergente, como ha de cumplir la condición anterior para cada $\varepsilon > 0$ (en particular, para $1 > \varepsilon > 0$), es necesario que exista un término a partir del cual todos los términos de $\{x_n\}$ sean iguales.

Una vez discutida la convergencia en dicho espacio métrico, sea $A \subset E$ un conjunto copacto para la distancia discreta, supongamos que A es infinito, por lo que podemos construir una sucesión $\{a_n\}$ con todos sus elementos distintos. Por ser A compacto, existe una parcial $\{a_{\sigma(n)}\}$ convergente, es decir, tiene un término a partir del cual todos sus términos son iguales, pero como los términos de $\{a_{\sigma(n)}\}$ son en particular términos de $\{a_n\}$, estos serán todos distintos entre sí. Hemos llegado a una contradicción, que venía de suponer que A era infinito, por lo que A es finito.

Ejercicio 1.4.4. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente de puntos de un espacio métrico y $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Probar que el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de puntos de A:

- Si x aparece infinitas veces en $\{a_n\}$, podemos quedarnos con el subconjunto de $\mathbb{N}$ de aquellos índices de la sucesión cuyos términos coinciden con x, con lo que obtenemos una parcial de $\{a_n\}$ constantemente igual a x, luego convergente.
- De forma análoga, si existe un $j \in \mathbb{N}$ de forma que a_j aparece infinitas veces en $\{a_n\}$, podemos obtener una parcial constantemente igual a a_j, luego convergente.
- En otro caso, construiremos una parcial de $\{a_n\}$ de forma recursiva, de forma que en dicha parcial no aparezca x:
  - El primer término será el primer término de la sucesión $\{a_n\}$ que sea distinto de x, con lo que será de la forma x_j para cierto $j \in \mathbb{N}$, que se alcanzará en alguna posición $k \in \mathbb{N}$: $a_k = x_j$. Definimos $\sigma(1) = k$.
  - Conocido el último término de la parcial, $a_{\sigma(n)}$, que coincidirá con x_m para cierto $m \in \mathbb{N}$, como el conjunto $\{x_n : n \leqslant m\}$ contiene m elementos y no hay ningún elemento que se repita de forma infinita, podremos encontrar un elemento a_k con $k > \sigma(n)$ de forma que $a_k = x_j$, para cierto $j > m$.

    En dicho caso, definimos $\sigma(n + 1) = k$.

  Lo que hemos hecho ha sido construir una parcial $\{a_{\sigma(n)}\}$ de elementos del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de forma que si $n > m$, entonces el elemento $a_{\sigma(n)}$ de la sucesión $\{x_n\}$ aparece antes en dicha sucesión que el elemento $a_{\sigma(m)}$. En definitiva, resulta que $\{a_{\sigma(n)}\}$ también es una parcial de $\{x_n\}$, por lo que ha de ser convergente, y al mismo límite x.

En definitiva, cualquier sucesión de puntos de A admite una parcial convergente, luego A es compacto.

Ejercicio 1.4.5. Probar que, si E es un espacio métrico compacto, y A es un subconjunto infinito de E, entonces $A' \neq \emptyset$.

Como A es infinito, podemos tomar $\{a_n\}$, una sucesión de puntos de A todos ellos distintos entre sí, es decir:

$$a_n = a_m \Longleftrightarrow n = m$$

En dicho caso, como E es compacto, existe una parcial convergente a un punto de E: $\exists \{a_{\sigma(n)}\} \to x \in E$. Veamos que $x \in A'$, con lo que $A' \neq \emptyset$. Para ello, sea $U \in \mathcal{U}(x)$, como $\{a_{\sigma(n)}\} \to x$, sabemos que $\exists m \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$x_n \in U \qquad \forall m \geqslant n$$

Por tanto, tendremos que $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, luego $x \in A'$.

Ejercicio 1.4.6. Sea E un espacio métrico con distancia d y K un subconjunto compacto de E. Probar que, para cada $x \in E$, existe un punto $k_x \in K$ tal que $d(x, k_x) \leqslant d(x, k)$ para todo $k \in K$.

Dado $x \in E$, definimos $f : K \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(k) = d(x, k) \qquad \forall k \in K$$

f es continua, ya que:

$$|f(t) - f(s)| = |d(x, t) - d(x, s)| \leqslant d(t, s) \qquad \forall t, s \in K$$

Y como K es compacto, tenemos que $f(K) = \{d(x, k) : k \in K\} \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, luego existe su mínimo, es decir, $\exists k_x \in K$ de forma que:

$$d(x, k_x) \leqslant d(x, k) \qquad \forall k \in K$$

Como queríamos probar.

Ejercicio 1.4.7. Sea A un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^N$ y consideremos en $\mathbb{R}^N$ cualquier distancia d que genere la topología usual. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, se puede encontrar un $a_x \in A$, tal que $d(x, a_x) \leqslant d(x, a)$ para todo $a \in A$.

Sea $x \in \mathbb{R}^N$, si $A = \emptyset$ el resultado es cierto. Si $A \neq \emptyset$, consideramos (existe por ser el de la derecha un conjunto no vacío y minorado por 0):

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}$$

Por la caracterización del ínfimo, sabemos que existe una sucesión de puntos del conjunto convergente a él, es decir, existe $\{a_n\}$ con $a_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\{d(x, a_n)\} \to d(x, A)$. Hemos visto en teoría que toda sucesión convergente está acotada, luego $\{d(x, a_n)\}$ está acotada, es decir, $\exists R \in \mathbb{R}^+$ de forma que $d(x, a_n) \leqslant R$ $\forall n \in \mathbb{N}$, por lo que $a_n \in B(x, R + 1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, de donde la sucesión $\{a_n\}$ está acotada. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, admite una parcial convergente $\{a_{\sigma(n)}\} \to a_x \in \overline{A} = A$.

Si nos fijamos en el ejercicio anterior, no usamos que K era compacto para probar que f era continua, por lo que si volvemos a definir $f : A \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(a) = d(x, a) \qquad \forall a \in A$$

Tenemos que f es continua, ya que:

$$|f(a) - f(b)| = |d(x, a) - d(x, b)| \leqslant d(a, b) \qquad \forall a, b \in A$$

Finalmente, de $\{a_{\sigma(n)}\} \to a_x$ y la continuidad de f, concluimos que:

$$\{d(x, a_{\sigma(n)})\} = \{f(a_{\sigma(n)})\} \to f(a_x) = d(x, a_x)$$

Sin embargo, $\{d(x, a_{\sigma(n)})\}$ es una parcial de $\{d(x, a_n)\}$, que era convergente a $d(x, A)$, por lo que $d(x, a_x) = d(x, A)$. En definitiva, tenemos que:

$$d(x, a_x) = d(x, A) \leqslant d(x, a) \qquad \forall a \in A$$

Ejercicio 1.4.8. Sea F un conjunto no vacío con la distancia discreta. Probar que si E es un espacio métrico conexo, toda función continua de E en F es constante.

Es bien sabido ya que si F es un conjunto no vacío con la distancia discreta, entonces esta distancia genera la topología discreta:

$$\mathcal{T}_{d_{\text{disc}}} = \mathcal{T}_{\text{disc}} = \mathcal{P}(F)$$

Demostraremos un sencillo Lema para probar este ejercicio:

Lema. *Si $(X, \mathcal{T}_{disc})$ es un espacio topológico con la topología discreta y $A \subset X$ contiene al menos dos elementos distintos, entonces A no es conexo.*

Demostración. Sean, pues $x, y \in A$ con $x \neq y$. En dicho caso, tomando:

$$U = \{x\}, \qquad V = A \setminus \{x\}$$

Tenemos que $U, V \in \mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_{\text{disc}}$, $U, V \neq \emptyset$, así como que:

$$U \cap V = \{x\} \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset \qquad U \cup V = \{x\} \cup (A \setminus \{x\}) = A$$

Tenemos una partición de A en abiertos no vacíos, por lo que A no es conexo. □

Si ahora en las condiciones del enunciado tenemos una aplicación $f : E \to F$ continua y no constante, entonces $\exists x, y \in E$ de forma que $f(x) \neq f(y)$. En dicho caso, $f(E) \subset F$ contiene dos puntos distintos: $f(x)$ y $f(y)$, por lo que $f(E)$ no es conexo. Sin embargo, como f es continua y E es conexo, $f(E)$ es conexo, contradicción, que viene de suponer que f es no constante.

Ejercicio 1.4.9. Probar que, en todo espacio métrico, el cierre de un conjunto conexo es conexo.

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$ un conjunto conexo, veamos que $\overline{A}$ es conexo. Para ello, sea $f : \overline{A} \to \{0, 1\}$ una aplicación continua, vamos a probar que es constante. Observemos que $f\big|_A : A \to \{0, 1\}$ es una aplicación continua que parte de un conexo, luego es constante, es decir, para cierto $\alpha \in \{0, 1\}$ tenemos que:

$$f(a) = f\big|_A(a) = \alpha \qquad \forall a \in A$$

Sea ahora $x \in \overline{A}$, sabemos que existe $\{a_n\} \to x$ con $a_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N}$. Por ser f continua, tenemos que:

$$\{\alpha\} = \{f(a_n)\} \to f(a)$$

Por lo que $f(a) = \alpha$, para todo $a \in \overline{A}$; luego f es constante, por lo que $\overline{A}$ es conexo.

Ejercicio 1.4.10. Probar que el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geqslant 0\}$ es conexo pero A° no lo es.

Lo primero es obtener una intuición geométrica sobre el conjunto A, para pensar argumentos sobre por qué es conexo y por qué A° no lo es.

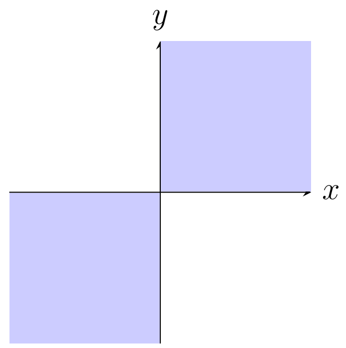


Figura 1.1: En azúl el conjunto A°, que junto con los ejes forma A.

Una forma de probar que A es conexo es mediante una de las últimas proposiciones vistas en teoría sobre la conexión:

$$A \text{ es conexo} \iff \forall x, y \in A\ \exists C \subset A \text{ conexo con } x, y \in C$$

Para ello, la estrategia será demostrar que dado cualquier punto de A, el segmento que une dicho punto con el origen se queda contenido en A, con lo que podemos unir dos puntos cualesquiera de A pasando por el origen. De esta forma, el conjunto no es convexo, pero resulta que fijado un punto, la propiedad de contener un segmento de cualquier otro extremo sí que se cumple. Este tipo de conjuntos reciben el nombre de *conjuntos estrellados*.

Comenzando con la demostración, sea $(x, y) \in A$, probemos que:

$$Seg(x, y) = \{t(x, y) : t \in [0, 1]\} \subset A$$

Para ello, si $(u, v) \in Seg(x, y)$, entonces $\exists t \in [0, 1]$ de forma que:

$$(u, v) = t(x, y) = (tx, ty)$$

Por lo que:

$$uv = t^2xy \geqslant 0 \Longrightarrow (u, v) \in A$$

Por ser $t^2 \geqslant 0$ y $xy \geqslant 0$. Además, $Seg(x, y)$ es conexo para todo $(x, y) \in A$, ya que dado $(x, y) \in A$ podemos definir $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(t) = t(x, y) \qquad \forall t \in [0, 1]$$

Con lo que:

$$f([0, 1]) = \{t(x, y) : t \in [0, 1]\} = Seg(x, y)$$

Como f es continua y $[0, 1]$ es conexo por ser un intervalo de $\mathbb{R}$, tenemos que $Seg(x, y)$ es conexo $\forall (x, y) \in A$.

Ahora, si $(x, y), (u, v) \in A$, podemos considerar $Seg(x, y), Seg(u, v) \subset A$, de forma que:

- $(x, y), (0, 0) \in Seg(x, y)$.
- $(u, v), (0, 0) \in Seg(u, v)$.

De esta forma, tenemos que $(0, 0) \in Seg(x, y) \cap Seg(u, v) \neq \emptyset$, y como ambos son conexos, resulta que $Seg(x, y) \cup Seg(u, v)$ es un conjunto conexo que contiene a (x, y) y a (u, v); por lo que A es conexo.

Para probar que A° no es conexo, empecemos probando que[3]:

$$A^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$$

$\supseteq$) Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi(x, y) = xy \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Tenemos que:

$$\varphi^{-1}(\mathbb{R}^+) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \varphi(x, y) > 0\}$$

Por lo que este conjunto es un abierto contenido en A, luego está dentro de A°.

$\subseteq$) Sea $U \subset A$ un conjunto abierto, si suponemos que $\exists (x, y) \in U$ con $xy = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$; en cualquiera de estos dos casos, tendremos que $B((x, y), \delta) \not\subset U$ $\forall \delta > 0$, por lo que U no es abierto, contradicción que viene de suponer que hay un punto en U que verifica $xy = 0$, por lo que $xy > 0$ para todo $(x, y) \in U$, es decir, $U \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$.

[3]Todavía no lo sabemos, solo tenemos una intuición.

Una vez conocida la forma de A°, si tomamos:

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y < 0\}, \qquad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$$

Es claro que:

$$U \cup V = A^\circ, \qquad U \cap V = \emptyset, \qquad U, V \neq \emptyset$$

Finalmente, como $\mathbb{R}^-$ y $\mathbb{R}^+$ son abiertos en $\mathbb{R}$ y:

$$U = \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-, \qquad V = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

Concluimos que U, V son abiertos en $\mathbb{R}^2$. En definitiva, A° no es conexo.

Ejercicio 1.4.11. Sea X un espacio normado. Probar que para cualesquiera $x, y \in X \setminus \{0\}$ se tiene

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant \frac{2\,\|x-y\|}{\|x\|}$$

Deducir que la función $\varphi : X \setminus \{0\} \to X$, dada por $\varphi(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ para todo $x \in X \setminus \{0\}$, es continua.

En primer lugar:

$$\begin{aligned}\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| &= \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\| + \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\ &= \frac{1}{\|x\|}\|x-y\| + \left\| y\left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|}\right) \right\| = \frac{1}{\|x\|}\|x-y\| + \left| \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right| \|y\| \\ &\forall x, y \in X \setminus \{0\}\end{aligned}$$

Ahora:

$$\left| \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right| \|y\| = \frac{|\|y\| - \|x\||}{\|x\|\|y\|}\|y\| \leqslant \frac{\|x-y\|}{\|x\|} \qquad \forall x, y \in X \setminus \{0\}$$

Por lo que:

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant \frac{\|x-y\|}{\|x\|} + \frac{\|x-y\|}{\|x\|} = \frac{2\,\|x-y\|}{\|x\|} \qquad \forall x, y \in X \setminus \{0\}$$

Si ahora consideramos la función $\varphi : X \setminus \{0\} \to X$ dada por:

$$\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|} \qquad \forall x \in X \setminus \{0\}$$

Fijado $x \in X$, dado $\varepsilon > 0$, si $y \in X \setminus \{0\}$ con:

$$\|y - x\| = \|x - y\| < \frac{\|x\|\varepsilon}{2} = \delta$$

Entonces:

$$\|\varphi(y) - \varphi(x)\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant \frac{2\,\|x-y\|}{\|x\|} < \frac{2\|x\|\varepsilon}{2\|x\|} = \varepsilon$$

Por lo que φ es continua en x, $\forall x \in E$.

Ejercicio 1.4.12. Probar que, si X es un espacio normado de dimensión mayor que 1, el conjunto $X \setminus \{0\}$ es conexo. Deducir que la *esfera unidad* dada por la ecuación $S(0,1) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ es un conjunto conexo.

Usaremos la misma proposición que usamos en el Ejercicio 1.4.10. Para ello, sean $x, y \in X \setminus \{0\}$:

- Si x e y son linealmente independientes, entonces la recta que pasa por dichos dos puntos:
$$R(x,y) = \{tx + (1-t)y : t \in \mathbb{R}\}$$
no contiene al cero, ya que si $0 \in R(x,y)$, entonces $\exists t \in \mathbb{R}^*$ (ya que si $t = 0$, entonces $0 = y \in X \setminus \{0\}$) de forma que:
$$tx + (1-t)y = 0 \Longrightarrow x = \frac{t-1}{t} y$$
Por lo que x e y son linealmente dependientes, contradicción. De esta forma, tenemos que $R(x,y)$ es un conjunto convexo, luego conexo, contenido en $X \setminus \{0\}$ que contiene a x y a y; por lo que podemos "conectar" cualesquiera dos puntos linealmente independientes en $X \setminus \{0\}$.

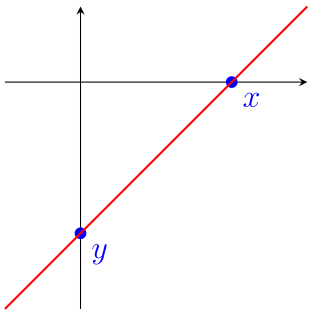


Figura 1.2: Cómo conectar dos puntos linealmente independientes.

- Si x e y son linealmente dependientes, entonces $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ de forma que $y = \lambda x$. Distinguimos casos:
  - Si $\lambda = 0$, entonces $y = 0$, pero $y \in X \setminus \{0\}$, por lo que este caso es imposible.
  - Si $\lambda > 0$, podemos repetir el razonamiento anterior tomando:
  $$Seg(x,y) = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$$
  que no contiene al cero, ya que si $0 \in Seg(x,y)$, entonces $\exists t \in [0,1]$ de forma que:
  $$0 = tx + (1-t)y \Longrightarrow tx = (t-1)\lambda x \Longrightarrow t = (t-1)\lambda \Longrightarrow \lambda = \frac{t}{t-1} < 0$$
  contradicción, por lo que $0 \notin Seg(x,y)$, luego $Seg(x,y) \subset X \setminus \{0\}$, con $x, y \in Seg(x,y)$ y dicho conjunto es convexo, luego conexo.

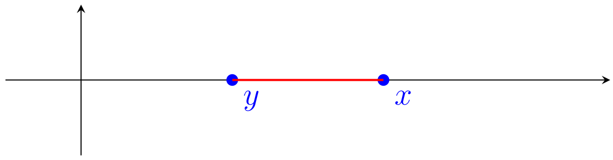


Figura 1.3: Cómo conectar dos puntos linealmente dependientes positivamente.

- Si $\lambda < 0$, como $dimX > 1$, existe $z \in X \setminus \{0\}$ linealmente independiente con x, luego también es linealmente independiente con y. Usando el primer caso, tenemos que $R(x, z), R(y, z)$ son dos conjuntos conexos con:
  - $x, z \in R(x, z)$.
  - $y, z \in R(y, z)$.

  Por lo que $R(x, z) \cap R(y, z) \neq \emptyset$, con lo que $R(x, z) \cup R(y, z)$ es un conjunto conexo con $x, y \in R(x, z) \cup R(y, z)$.

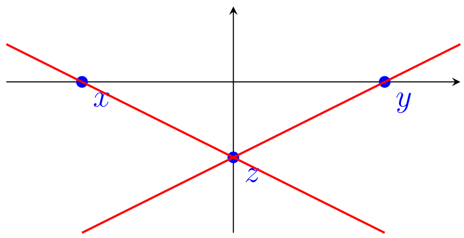


Figura 1.4: Cómo conectar dos puntos linealmente dependientes negativamente.

En definitiva, $X \setminus \{0\}$ es conexo. Sea ahora:

$$S(0, 1) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

Si definimos $\varphi : X \setminus \{0\} \to X$ dada por:

$$\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|} \qquad \forall x \in X \setminus \{0\}$$

Tenemos por el Ejercicio 1.4.11 que φ es continua, y como acabamos de ver que $X \setminus \{0\}$ es conexo, tenemos que $\varphi(X \setminus \{0\})$ es también un conexo. Veamos finalmente que $\varphi(X \setminus \{0\}) = S(0, 1)$:

$\subseteq$) Sea $x \in X \setminus \{0\}$, entonces:

$$\|\varphi(x)\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|}\|x\| = 1$$

Luego $\varphi(x) \in S(0, 1)$, para todo $x \in X \setminus \{0\}$.

$\supseteq$) Sea $x \in S(0, 1) \subset X \setminus \{0\}$, entonces:

$$\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|} = x$$

Luego $x \in \varphi(X \setminus \{0\})$.

1.5. Complitud y continuidad uniforme

Ejercicio 1.5.1. Probar que, en cualquier espacio métrico, toda sucesión de Cauchy está acotada.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy de un espacio métrico (E, d), para $\varepsilon = 1$ $\exists m \in \mathbb{N}$ de forma que si $p, q \geqslant m$ entonces $d(x_p, x_q) < 1$. Podemos escribir:

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_n : n \leqslant m\} \cup \{x_n : n > m\}$$

Y tenemos que:

- $\{x_n : n \leqslant m\}$ es un conjunto finito de m elementos, luego es un conjunto acotado.
- Si $x_n \in \{x_n : n > m\}$, entonces tomando $k = n - m \in \mathbb{N}$ tenemos que $m, m + k \geqslant m$, por lo que:

  $$d(x_m, x_{m+k}) = d(x_m, x_n) < 1$$

  Luego $x_n \in B(x_m, 1)$. En definitiva, tenemos que:

  $$\{x_n : n > m\} \subset B(x_m, 1)$$

  Por lo que también es un conjunto acotado.

Finalmente, tenemos que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es unión de dos conjuntos acotados, luego también estará acotado, es decir, la sucesión $\{x_n\}$ está acotada.

Ejercicio 1.5.2. Probar que todo espacio métrico compacto es completo.

Sea (E, d) un espaciom métrico compacto, para ver que es completo tomamos una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ y queremos ver que es convergente. Como el espcio es compacto, existirá una parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ convergente a cierto $x \in E$. En dicho caso, dado $\varepsilon > 0$:

- Como $\{x_n\}$ es de Cauchy, $\exists m_1 \in \mathbb{N}$ de forma que si $p, q \geqslant m_1$ entonces $d(x_p, x_q) < \varepsilon/2$.
- Como $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$, $\exists m_2 \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geqslant m_2$ entonces $d(x_{\sigma(n)}, x) < \varepsilon/2$.

Tomando $m = \max\{m_1, m_2\}$, si tomamos $n \geqslant m$, tenemos que $\sigma(n) \geqslant n \geqslant m$, con lo que:

$$d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_{\sigma(n)}) + d(x_{\sigma(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Lo que implica que $\{x_n\} \to x$.

En general, si $\{x_n\}$ es de Cauchy y tenemos una parcial convergente, la sucesión será convergente al mismo límite que su parcial.

Ejercicio 1.5.3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Probar que definiendo

$$\rho(x,y) = |f(x) - f(y)| \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

se obtiene una distancia en $\mathbb{R}$, equivalente a la usual. ¿Cuándo es ρ completa?

Tenemos mucho trabajo por hacer:

Probar que ρ es una distancia en $\mathbb{R}$. Para ello, hemos de probar:

D1) $\rho(x,z) = |f(x) - f(z)| \leqslant |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = \rho(x,y) + \rho(y,z)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

D2) $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = \rho(y,x)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

D3) $|f(x) - f(y)| = \rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = f(y) \Longleftrightarrow x = y$.

Probar que ρ es equivalente a la distancia usual de $\mathbb{R}$. Para ello, si d es la distancia usual de $\mathbb{R}$:

$$d(x,y) = |x - y| \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Tenemos que:

- Si $\{d(x_n,x)\} \to 0$, como f es continua, tenemos que:

$$\{\rho(x_n,x)\} = \{d(f(x_n), f(x))\} \to 0$$

- Si $\{d(f(x_n), f(x))\} = \{\rho(x_n,x)\} \to 0$, como f^{-1} es continua por ser f continua, inyectiva y estar definida en un intervalo, tenemos que:

$$\{\rho(f^{-1}(x_n), f^{-1}(x))\} = \{d(f^{-1}(f(x_n)), f^{-1}(f(x)))\} = \{d(x_n,x)\} \to 0$$

Y como vimos que la convergencia de sucesiones caracteriza la topología de los espacios métricos, tenemos que d y ρ son distancias equivalentes.

Caracterizar cuándo ρ es una distancia completa. Si escribimos la definición de que $\{x_n\}$ sea convergente a $x \in \mathbb{R}$ para ρ o que sea de Cauchy para ρ:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \Longrightarrow |f(x_n) - f(x)| = \rho(x_n,x) < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} : p,q \geqslant m \Longrightarrow |f(x_p) - f(x_q)| = \rho(x_p,x_q) < \varepsilon$$

Vemos que obteneos las definiciones de que $\{f(x_n)\} \to f(x)$ y de que $\{f(x_n)\}$ sea de Cauchy para la distancia usual de $\mathbb{R}$. Por tanto, podemos sospechar a partir de lo visto en teoría que:

$$(\mathbb{R}, \rho) \text{ es completo} \Longleftrightarrow f(\mathbb{R}) \text{ es cerrado}$$

$\Longleftarrow$) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy para ρ, entonces $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy para la distancia usual, y como $f(\mathbb{R})$ es cerrado y es subconjunto de un espacio completo ($\mathbb{R}$), tenemos que $f(\mathbb{R})$ es completo, con lo que existe $y \in f(\mathbb{R})$ de forma que $\{f(x_n)\} \to y$, y existirá $x \in \mathbb{R}$ de forma que $y = f(x)$. Que $\{f(x_n)\} \to f(x)$ significa que $\{x_n\}$ converge a x para ρ, por lo que toda sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}, \rho)$ es convergente, como queríamos probar.

$\Longrightarrow$) Si $\{y_n\} \to y$ con $y_n \in f(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{y_n\}$ es de Cauchy. Por ser $y_n \in f(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in \mathbb{R}$ de forma que $y_n = f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, con lo que $\{x_n\}$ es de Cauchy para ρ. Como $(\mathbb{R}, \rho)$ es completo, existe $x \in \mathbb{R}$ de forma que $\{x_n\}$ converge a x para ρ, es decir, que $\{f(x_n)\} \to f(x)$. Como tenemos que:

$$y \leftarrow \{y_n\} = \{f(x_n)\} \to f(x)$$

Deducimos que $y = f(x)$, luego $y \in f(\mathbb{R})$; con lo que $f(\mathbb{R})$ es un conjunto cerrado.

Ejercicio 1.5.4. ¿Qué se puede afirmar sobre la composición de dos funciones uniformemente continuas?

Que la composición es uniformemente continua. Formalmente, si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son dos funciones uniformemente continuas, entonces $g \circ f$ es una función uniformemente continua. Para verlo, dado $\varepsilon > 0$, la continuidad uniforme de g nos da $\delta > 0$ de modo que:

$$x, y \in Y \text{ con } d(x, y) < \delta \Longrightarrow d(g(x), g(y)) < \varepsilon$$

Para δ, la continuidad uniforme de de f nos da $\eta > 0$ de modo que:

$$u, v \in X \text{ con } d(u, v) < \eta \Longrightarrow d(f(u), f(v)) < \delta$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ hemos encontrado $\eta > 0$ de modo que si $u, v \in X$ con $d(u, v) < \eta$, entonces:

$$d(f(u), f(v)) < \delta \Longrightarrow d((g \circ f)(u), (g \circ f)(v)) = d(g(f(u)), g(f(v))) < \varepsilon$$

Ejercicio 1.5.5. Dado un espacio normado $X \neq \{0\}$, probar que la función

$$\begin{array}{rccc} f: & X \setminus \{0\} & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{\|x\|} \end{array}$$

no es uniformemente continua. Sin embargo, probar también que, para cada $\delta \in \mathbb{R}^+$, la restricción de f al conjunto $\{x \in X : \|x\| \geqslant \delta\}$ es una función lipschitziana.

f no es uniformemente continua, ya que podemos considerar $\{1/n\}$, $\{-1/n\}$, dos sucesiones de forma que:

$$\left\{d\left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}\right)\right\} \to 0, \qquad \left\{d\left(f\left(\frac{1}{n}\right), f\left(\frac{-1}{n}\right)\right)\right\} = \{d(1, -1)\}$$

Para ver que la restricción mencionada es lipschitziana, observemos que si tomamos $x, y \in \{x \in X : \|x\| \geqslant \delta\}$, tenemos entonces que $1/\|x\| \leqslant 1/\delta$, y si usamos la desigualdad que conseguimos en el Ejercicio 1.4.11, tenemos que:

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \frac{2}{\|x\|}\|x - y\| \leqslant \frac{2}{\delta}\|x - y\|$$

Por tanto, tomando $M = 2/\delta$, tenemos que f restringida a dicho conjunto es lipschitziana.

Ejercicio 1.5.6. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico E y la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \inf\{d(x,a) : a \in A\} \end{array}$$

Probar que f es no expansiva.

Si recordamos el Ejercicio 1.3.4, en este demostramos que:

$$|f(x) - f(y)| = |d(x,A) - d(y,A)| \leqslant d(x,y) \qquad \forall x, y \in E$$

Por tanto, f es lipschitziana, con constante de lipschitz menor o igual que 1, es decir, f es no expansiva.

Ejercicio 1.5.7. Dado $y \in \mathbb{R}^N$, se define $T_y \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ usando el producto escalar en $\mathbb{R}^N$:

$$T_y(x) = (x|y) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Calcular la norma de la aplicación lineal T_y, considerando en $\mathbb{R}^N$:

1. La norma euclídea.

   Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que:

   $$\|T_y(x)\|_2 = |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|_2\|y\|_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

   De donde deducimos que $\|T_y\| \leqslant \|y\|_2$. Sin embargo, como:

   $$\|T_y(y)\|_2 = \langle y, y\rangle = \|y\|_2^2$$

   Concluimos que $\|T_y\| = \|y\|_2$.

2. La norma del máximo.

   Hemos visto en teoría que:

   $$\|T_y\| = \max\{\|T_y(x)\| : x \in X \text{ con } \|x\|_\infty = 1\} = \max\left\{\sum_{i\in\Delta_N} x_i y_i : \|x\|_\infty = 1\right\}$$

   Por tanto, la forma de maximizar el producto es tomando:

   $$u_i = sgn(y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_i > 0 \\ -1 & \text{si } y_i < 0 \\ 0 & \text{si } y_i = 0 \end{cases}$$

   Para así tener $\|u\|_\infty = 1$, con lo que al final obtenemos:

   $$\|T_y\| = \sum_{i\in\Delta_n} x_i y_i = \sum_{i\in\Delta_N} |y_i| = \|y\|_1$$

3. La norma de la suma.

   De forma análoga, hemos visto que:

$$\|T_y\| = \max\{\|T_y(x)\| : x \in X \text{ con } \|x\|_1 = 1\} = \max\left\{\sum_{i\in\Delta_N} x_i y_i : \|x\|_1 = 1\right\}$$

   Y la forma de maximiar el producto es tomando:

$$u_k = 1 \text{ si } |y_k| = \max_{i\in\Delta_N}\{|y_i|\}$$
$$u_i = 0 \text{ si } i \neq k$$

   Para así tener $\|u\|_\infty = 1$, con lo que obtenemos:

$$\|T_y\| = \sum_{i\in\Delta_N} x_i y_i = |y_k| = \|y\|_\infty$$

Ejercicio 1.5.8. Consideremos los espacios normados $X = \mathbb{R}^N$ con la norma de la suma y $Y = \mathbb{R}^N$ con la norma del máximo. Denotando como siempre por $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ a la base usual de $\mathbb{R}^N$, probar que, para toda $T \in L(X, Y)$, se tiene:

$$\|T\| = \max\{|\,(T(e_j) \mid e_k)\,| : j, k \in \Delta_n\}$$

1.6. Diferenciabilidad

Ejercicio 1.6.1. Probar que la norma de un espacio normado $X \neq \{0\}$ nunca es diferenciable en 0.

Sea $X \neq \{0\}$, consideramos sobre X una norma $\|\cdot\|$ y supongamos que existe $T \in L(X, \mathbb{R})$ de forma que $\|\cdot\|$ es diferenciable en 0 con diferencial T, es decir, que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\|x\| - \|0\| - T(x-0)}{\|x-0\|} = 0$$

Pero tenemos que:

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{\|x\| - \|0\| - T(x-0)}{\|x-0\|} = \lim_{x\to 0} \frac{\|x\| - T(x)}{\|x\|} = \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{T(x)}{\|x\|}\right) \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{T(x)}{\|x\|} = 1$$

Fijado $u \in X$ arbitrario con $\|u\| = 1$, tomando $t \in \mathbb{R}$ podemos hacer el cambio de variable $x = tu$, ya que $x \to 0$ cuando $t \to 0$ y $x \neq 0$ para $t \neq 0$, por lo que:

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{T(x)}{\|x\|} = \lim_{t\to 0} \frac{T(tu)}{\|tu\|}$$

Como tenemos que:

$$\frac{T(tu)}{\|tu\|} = \frac{tT(u)}{|t|\|u\|} = \frac{tT(u)}{|t|} = sgn(t)T(u) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Tendremos que $sgn(t)T(u) = T(u)$ cuando $t > 0$ y que $sgn(t)T(u) = -T(u)$ cuando $t < 0$. Como el límite anterior existía cuando $t \to 0$, ha de ser $T(u) = -T(u)$, es decir, $T(u) = 0$. Como u era arbitrario, tendremos que:

$$T(v) = 0 \qquad \forall v \in \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

Lo cual implica que $T(x) = 0$ para todo $x \in X$, ya que:

$$T(x) = T(tu) = tT(u) = 0$$

Para ciertos $t \in \mathbb{R}$ y $u \in \{v \in X : \|v\| = 1\}$. En definitiva, $T \equiv 0$. Sin embargo, entonces tendríamos que:

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{T(x)}{\|x\|} = 0$$

Lo cual es una contradicción, por lo que no existe tal función T; es decir, $\|\cdot\|$ no es diferenciable en 0.

Ejercicio 1.6.2. Probar que la norma euclídea es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ y calcular su diferencial. ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es diferenciable la norma de la suma?

Por la definición de la norma euclídea, tenemos que:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Por lo que una buena forma de estudiar la diferenciabilidad de $\|\cdot\|_2$ puede ser definiendo:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \langle x, x\rangle \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Con lo que tenemos que $g(x) \in \mathbb{R}_0^+ \ \forall x \in \mathbb{R}^N$ y $\|\cdot\|_2 = h \circ g$.

Diferenciabilidad de h. Sabemos de Cálculo II que h es derivable en $\mathbb{R}^+$, con:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Por lo que h es diferenciable en $\mathbb{R}^+$, teniendo para todo $a \in \mathbb{R}^+$ $Dh(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$Dh(a)(k) = \frac{k}{2\sqrt{a}} \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

Diferenciabilidad de g. Fijados $a, h \in \mathbb{R}^N$, observemos que:

$$\begin{aligned} g(a) &= \langle a, a\rangle \\ g(a+h) &= \langle a+h, a+h\rangle = \langle a, a\rangle + 2\langle a, h\rangle + \langle h, h\rangle \end{aligned}$$

Por lo que tenemos $g(a+h) - g(a) = 2\langle a, h\rangle + \langle h, h\rangle$. Es fácil pensar que tomando $T(h) = 2\langle a, h\rangle$ para todo $h \in \mathbb{R}^N$ obtenemos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a) - T(h)}{\|h\|_2} = \lim_{h\to 0} \frac{\langle h, h\rangle}{\sqrt{\langle h, h\rangle}} = \lim_{h\to 0} \sqrt{\langle h, h\rangle} = \lim_{h\to 0} \|h\|_2 = 0$$

Donde en la última igualdad hemos usado que $\|\cdot\|_2$ es continua en 0. En definitiva, tenemos que g es diferenciable en a, $\forall a \in \mathbb{R}^N$, con $Dg(a) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por:

$$Dg(a)(k) = 2\langle a, k\rangle \qquad \forall k \in \mathbb{R}^N$$

En definitiva, tenemos que g es diferenciable en $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, y que h es diferenciable en $g(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^+$. Por la regla de la cadena, tenemos que $\|\cdot\|_2 = h \circ g$ es diferenciable en $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, con:

$$D\|\cdot\|_2(a) = Dh(g(a)) \circ Dg(a) \qquad \forall a \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} D\|\cdot\|_2(a)(k) &= \left(Dh(g(a)) \circ Dg(a)\right)(k) = Dh(g(a))\left(Dg(a)(k)\right) = Dh(g(a))(2\langle a, k\rangle) \\ &= \frac{2\langle a, k\rangle}{2\sqrt{g(a)}} = \frac{\langle a, k\rangle}{\sqrt{\langle a, a\rangle}} = \frac{\langle a, k\rangle}{\|a\|_2} = \left\langle \frac{a}{\|a\|_2}, k \right\rangle \qquad \forall k \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

Si pensamos ahora en la norma de la suma en $\mathbb{R}^2$:

$$\|(x, y)\|_1 = |\pi_1(x, y)| + |\pi_2(x, y)| = |x| + |y| \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

No lo detallaremos tanto como el apartado anterior, pero está claro que si $x \neq 0$ y $y \neq 0$ entonces $\|\cdot\|_1$ es diferenciable en (x, y). Por otro lado, tendremos que si $x = 0$ o $y = 0$, entonces $\|\cdot\|_1$ no será diferenciable en (x, y). En definitiva, $\|\cdot\|_1$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.

Ejercicio 1.6.3. Probar que, tanto la diferenciabilidad de una función, como su diferencial, se conservan por traslaciones. Más concretamente, sean X, Y espacios normados, Ω un abierto no vacío de X y $f : \Omega \to Y$ diferenciable en un punto $a \in \Omega$. Fijados $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$, se define $\hat{\Omega} = \{x \in X \mid x + x_0 \in \Omega\}$ y la función $\hat{f} : \hat{\Omega} \to Y$ dada por

$$\hat{f}(x) = f(x + x_0) + y_0 \quad \forall x \in \hat{\Omega}$$

Probar que $\hat{f}$ es diferenciable en $a - x_0$ con $D\hat{f}(a - x_0) = Df(a)$.

En primer lugar, como $a - x_0 + x_0 = a \in \Omega$, tenemos que $a - x_0 \in \hat{\Omega}$. Como f es diferenciable en a, tenemos que:

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a) - Df(a)(z - a)}{\|z - a\|} = 0$$

Tomando $z = x + x_0$, como $z \to a$ cuando $x \to a - x_0$ y además $z \neq a$ cuando $x \neq a - x_0$, podemos realizar dicho cambio de variable, obteniendo que:

$$\lim_{x \to a - x_0} \frac{f(x + x_0) - f(a) - Df(a)(x + x_0 - a)}{\|x + x_0 - a\|} = 0$$

Sin embargo, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{x \to a - x_0} \frac{f(x + x_0) - f(a) - Df(a)(x + x_0 - a)}{\|x + x_0 - a\|} \\
&= \lim_{x \to a - x_0} \frac{f(x + x_0) + y_0 - f(a) - y_0 - Df(a)(x - (a - x_0))}{\|x - (a - x_0)\|} \\
&= \lim_{x \to a - x_0} \frac{\hat{f}(x) - \hat{f}(a - x_0) - Df(a)(x - (a - x_0))}{\|x - (a - x_0)\|}
\end{aligned}$$

Lo que claramente significa que $\hat{f}$ es diferenciable en $a - x_0$, con:

$$D\hat{f}(a - x_0) = Df(a)$$

Ejercicio 1.6.4. Sea Ω un abierto no vacío de un espacio normado X y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciable en un punto $a \in \Omega$. Sea J un intervalo abierto tal que $f(\Omega) \subseteq J$ y $g : J \to \mathbb{R}$ una función derivable en el punto $b = f(a)$. Probar que $g \circ f$ es diferenciable en a, ¿Cuál es la relación entre $D(g \circ f)(a)$ y $Df(a)$?

Como g es derivable en b, entonces es diferenciable en b, con:

$$Dg(b)(h) = g'(b)h \qquad \forall h \in \mathbb{R}$$

Por la regla de la cadena, como f es diferenciable en a y g es diferenciable en $b = f(a)$, tenemos que $g \circ f$ es diferenciable en a, con:

$$D(g \circ f)(a) = Dg(b) \circ Df(a)$$

Por lo que:

$$D(g \circ f)(a)(h) = Dg(b)(Df(a)(h)) = g'(b) \cdot Df(a)(h) = g'(f(a)) \cdot Df(a)(h) \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 1.6.5. Dar un ejemplo de una función $f \in D(\mathbb{R}^N)$ tal que f no es de clase $C^1(\mathbb{R}^N)$.

Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \begin{cases} x_1^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x_1}\right) & \text{si } x_1 \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x_1 = 0 \end{cases}$$

Si denotamos:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 \neq 0\}$$

Tenemos que $\Omega = \pi_1^{-1}(\mathbb{R}^*)$, por lo que Ω es abierto. Es claro que $f\big|_\Omega$ es continua, por lo que f es continua en Ω. Sea ahora $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ y $\{x_n\} \to x$:

- Si para cierto $n \in \mathbb{N}$ tenemos $x_n(1) = 0$, entonces $f(x_n) = 0 \leqslant x_n(1) = 0$.
- Si para cierto $n \in \mathbb{N}$ tenemos $x_n(1) \neq 0$, entonces:

$$0 \leqslant |f(x_n)| = \left|(x_n(1))^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n(1)}\right)\right| \leqslant |(x_n(1))^2|$$

En cualquier caso, tenemos que $0 \leqslant |f(x_n)| \leqslant |(x_n(1))^2|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y como $\{x_n\} \to x$, tenemos que $\{x_n(1)\} \to x(1) = 0$, por lo que también $\left\{(x_n(1))^2\right\} \to 0$, de donde $\{f(x_n)\} \to 0 = f(x)$. Luego f es continua en x; por lo que f es continua.

Además, f es diferenciable en Ω, ya que si consideramos:

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} p: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x(1) \end{array}$$

Tenemos que $p(\Omega) \subset \mathbb{R}^*$ por definición de Ω y $f\big|_\Omega = g \circ p$, ambas diferenciables, luego $f\big|_\Omega$ es diferenciable, y como Ω es abierto, f es diferenciable en Ω. Por otra parte, si $a \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$, tenemos que:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{\|h\|} \leqslant \frac{(h(1))^2}{|h(1)|} = |h(1)| \qquad \forall h \in \Omega$$
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{\|h\|} = \frac{0}{\|h\|} = 0 \qquad \forall h \in \left(\mathbb{R}^N \setminus \Omega\right) \setminus \{0\}$$

Por lo que:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{\|h\|} \leqslant |h(1)| \qquad \forall h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

De donde se deduce fácilmente que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{\|h\|} = 0$$

Lo que significa que f es derivable en a, con $Df(a) \equiv 0$. En conclusión, $f \in D(\mathbb{R}^N)$.

Lo que hacemos ahora es considerar la aplicación $Df : \mathbb{R}^N \to L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, donde consideramos en este último espacio la norma:

$$\|T\| = \text{máx}\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}$$

Veamos que Df no es continua en 0, es decir, que existe una sucesión $\{a_n\}$ convergente a 0 de elementos de $\mathbb{R}^N$ de forma que $\{Df(a_n)\}$ no converge a la función constantemente igual a 0. Para ello, tomamos $v = e_1$ y consideramos:

$$a_n = \left(\frac{1}{n\pi}, 0, \ldots, 0\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

En dicho caso, tenemos que:

$$Df(a_n)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_n + tv) - f(a_n)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\frac{1}{n\pi} + t)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi} + t}\right)}{t}$$

Y si recordamos la función:

$$g(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

con derivada:

$$g'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Y definimos $x_n = \frac{1}{n\pi}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} Df(a_n)(v) &= \lim_{t\to 0} \frac{(\frac{1}{n\pi} + t)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi} + t}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(x_n + t) - g(x_n)}{t} \\ &= g'(x_n) = -\cos(n\pi) = (-1)^{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Por lo que $\{Df(a_n)\}$ no converge a cero, por tanto, Df no es continua en 0.

1.7. Vector derivada

Ejercicio 1.7.1. Sea Y un espacio pre-hilbertiano, Ω un abierto de $\mathbb{R}$ y $f, g : \Omega \to Y$ dos funciones diferenciables en un punto $a \in \Omega$. Probar que la función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = (f(t)|g(t)) \quad \forall t \in \Omega$$

es derivable en el punto a y calcular su derivada $\varphi'(a)$.

Si $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio pre-hilbertiano, probaremos que φ es derivable en el punto a definiendo $\Phi = (f, g) : \Omega \to Y^2$ dada por:

$$\Phi(t) = (f(t), g(t)) \qquad \forall t \in \Omega$$

Y definiendo $\Psi : Y^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\Psi(x, y) = \langle x, y \rangle \qquad \forall (x, y) \in Y^2$$

Con lo que $\varphi = \Psi \circ \Phi$.

Diferenciabilidad de Φ. Como tanto f como g son diferenciables en a, tenemos que $\Phi = (f, g)$ es diferenciable en a, con:

$$\Phi'(a) = (f'(a), g'(a))$$

Por lo que $D\Phi(a)(t) = t\Phi'(a)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Diferenciabilidad de Ψ. Fijado $(x, y) \in Y^2$, si tomamos $T : Y^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$T(u, v) = \langle x, v \rangle + \langle u, y \rangle \qquad \forall (u, v) \in Y^2$$

Tendremos que (como trabajamos en $Y \times Y$, consideramos la norma producto):

$$\frac{\Psi((x, y) + (u, v)) - \Psi(x, y) - T(u, v)}{\|(u, v)\|_\infty} = \frac{\langle x + u, y + v \rangle - \langle x, y \rangle - \langle x, v \rangle - \langle u, y \rangle}{\|(u, v)\|_\infty}$$
$$= \frac{\langle u, v \rangle}{\max\{\|u\|, \|v\|\}} \overset{(*)}{\leqslant} \frac{\|u\|\|v\|}{\max\{\|u\|, \|v\|\}} = \min\{\|u\|, \|v\|\} \qquad \forall (u, v) \in Y \times Y$$

Donde en $(*)$ hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwartz. En definitiva, tenemos que:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\Psi((x, y) + (u, v)) - \Psi(x, y) - T(u, v)}{\|(u, v)\|_\infty} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \min\{\|u\|, \|v\|\} = 0$$

Por lo que Ψ es diferenciable en todo punto $(x, y) \in Y^2$, con $D\Psi(x, y) : Y^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$D\Psi(x, y)(u, v) = \langle x, v \rangle + \langle u, y \rangle \qquad \forall (u, v) \in Y \times Y$$

Finalmente, tenemos por la regla de la cadena que $\varphi = \Psi \circ \Phi$ es diferenciable en a, con:

$$D\varphi(a) = D\Psi(\Phi(a)) \circ D\Phi(a)$$

Por tanto, φ es derivable en a, y tenemos que:

$$\begin{aligned} D\varphi(a)(h) &= D\Psi(\Phi(a))\,(D\Phi(a)(h)) = D\Psi(\Phi(a))\,(h\Phi'(a)) = D\Psi(f(a), g(a))\,(hf'(a), hg'(a)) \\ &= \langle f(a), hg'(a)\rangle + \langle g(a), hf'(a)\rangle = h\left[\langle f(a), g'(a)\rangle + \langle g(a), f'(a)\rangle\right] \qquad \forall h \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Por lo que finalmente obtenemos:

$$\varphi'(a) = D\varphi(a)(1) = \langle f(a), g'(a)\rangle + \langle g(a), f'(a)\rangle$$

Ejercicio 1.7.2. Sean Y, Z espacios normados y consideremos dos funciones f, g, $f : \Omega \to Y$ y $g : U \to Z$, donde Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ y U es un abierto no vacío de Y. Supongamos que f es derivable en un punto $a \in \Omega$ y que g es diferenciable en el punto $b = f(a)$. Calcular el vector derivada de $g \circ f$ en el punto a.

Aplicando directamente la regla de la cadena obtenemos que $g \circ f$ es diferenciable en a, luego derivable en a, con:

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$$

Por lo que:

$$D(g \circ f)(a)(h) = Dg(f(a))(Df(a)(h)) = Dg(f(a))(hf'(a)) = h \cdot Dg(f(a))(f'(a)) \qquad \forall h \in \mathbb{R}$$

De donde:

$$(g \circ f)'(a) = D(g \circ f)(a)(1) = Dg(f(a))(f'(a))$$

Ejercicio 1.7.3. Sean X, Z espacios normados, Ω un abierto no vacío de X y U un abierto no vacío de $\mathbb{R}$. Sea $f : \Omega \to U$ una función diferenciable en un punto $a \in \Omega$ y $g : U \to Z$ una función derivable en el punto $b = f(a)$. Calcular la diferencial de $g \circ f$ en a.

Aplicando la regla de la cadena obtenemos que $g \circ f$ es diferenciable en a, luego derivable en a, con:

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$$

Por lo que:

$$D(g \circ f)(a)(h) = Dg(f(a))(Df(a)(h)) = Df(a)(h) \cdot g'(f(a)) = h \cdot Df(a)(1) \cdot g'(f(a)) \qquad \forall h \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 1.7.4. Probar que, dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, la hipérbola

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2\}$$

no es una curva paramétrica, pero cada una de sus ramas es una curva explícita.

Tenemos que:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \iff a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2 \iff ay = \pm\sqrt{b^2x^2 - a^2b^2}$$
$$\iff y = \pm\frac{\sqrt{b^2x^2 - a^2b^2}}{a} \iff y = \pm\frac{b\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Por tanto, definiendo $\varphi_1, \varphi_2 : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\varphi_1(x) = \frac{b\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \qquad \varphi_2(x) = -\frac{b\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

Tenemos que $H = Gr(\varphi_1) \cup Gr(\varphi_2)$.
Si observamos que $Gr(\varphi_1) \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ y $Gr(\varphi_2) \subset \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$, vemos que $Gr(\varphi_1) \cup Gr(\varphi_2)$ es un conjunto disconexo, por lo que no puede ser una curva paramétrica, puesto que estas son la imagen de un intervalo de $\mathbb{R}$ (un conjunto conexo) por una función continua, que debe ser un conjunto conexo.

Ejercicio 1.7.5. Describir geométricamente las curvas cuyas ecuaciones paramétricas son:

1. $x = e^t$, $y = e^{-t}$ $\qquad \forall t \in \mathbb{R}$
2. $x = \cosh t$, $y = \operatorname{senh} t$ $\qquad \forall t \in \mathbb{R}$

1.8. Vector gradiente

Ejercicio 1.8.1. Calcular todas las derivadas direccionales en el punto $(-1, 0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = x^3 - 3xy + z^3 \qquad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Sea $u = (u_1, u_2, u_3) \in S$ una dirección y $a = (-1, 0, 0)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+tu) - f(a)}{t} &= \frac{f(-1+tu_1, tu_2, tu_3) - f(-1,0,0)}{t} \\
&= \frac{(-1+tu_1)^3 - 3tu_2(-1+tu_1) + t^3u_3^3 + 1}{t} \\
&= \frac{t^3u_1^3 - 3t^2u_1^2 + 3tu_1 \cancel{-1} + 3tu_2 - 3t^2u_2u_1 + t^3u_3^3 \cancel{+1}}{t} \\
&= t^2u_1^3 - 3tu_1^2 + 3u_1 + 3u_2 - 3tu_2u_1 + t^2u_3^3 \qquad \forall t \in \mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}
f'_u(-1,0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} &= \lim_{t\to 0} \left(t^2u_1^3 - 3tu_1^2 + 3u_1 + 3u_2 - 3tu_2u_1 + t^2u_3^3\right) \\
&= 3(u_1 + u_2) \qquad \forall u \in S
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.8.2. Sea J un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$. Si $f : J \to \Omega$ es una función derivable en un punto $a \in J$ y $g : \Omega \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $b = f(a)$, probar que la función $h : g \circ f : J \to \mathbb{R}$ es derivable en punto a, con:

$$h'(a) = \langle \nabla g(b), f'(a) \rangle$$

Como f es derivable en a, tenemos que f es diferenciable en a, con:

$$Df(a)(x) = f'(a)x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Aplicando la regla de la cadena, tenemos que h es diferenciable en a, con:

$$Dh(a) = Dg(b) \circ Df(a)$$

Además, como g es diferenciable en b, es parcialmente derivable en b, con:

$$Dg(b)(x) = \langle \nabla g(b), x \rangle \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Por tanto:

$$Dh(a)(x) = Dg(b)(Df(a)(x)) = Dg(b)(f'(a)x) = \langle \nabla g(a), f'(a)x \rangle \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Y finalmente tenemos que:

$$h'(a) = Dh(a)(1) = \langle \nabla g(a), f'(a) \rangle$$

Ejercicio 1.8.3. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ y $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones parcialmente derivables en un punto $a \in \Omega$. Probar que las funciones $f+g$ y fg son parcialmente derivables en a con

$$\begin{aligned}\nabla(f+g)(a) &= \nabla f(a) + \nabla g(a)\\ \nabla(fg)(a) &= g(a)\nabla f(a) + f(a)\nabla g(a)\end{aligned}$$

Suponiendo que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$, probar también que f/g es parcialmente derivable en a con

$$\nabla(f/g)(a) = \frac{g(a)\nabla f(a) - f(a)\nabla g(a)}{g(a)^2}$$

Las demostraciones son análogas a las que siempre se hacen para las reglas de derivación. Para $f+g$, como:

$$\frac{(f+g)(a+te_k) - (f+g)(a)}{t} = \frac{f(a+te_k) - f(a)}{t} + \frac{g(a+te_k) - g(a)}{t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^*, \forall k \in \Delta_N$$

Tenemos entonces que:

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_k}(a) \qquad \forall k \in \Delta_N$$

De donde $\nabla(f+g)(a) = \nabla f(a) + \nabla g(a)$. Para fg:

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(a+te_k) - (fg)(a)}{t} &= \frac{f(a+te_k)g(a+te_k) - g(a+te_k)f(a) + g(a+te_k)f(a) - f(a)g(a)}{t}\\ &= g(a+te_k)\cdot\frac{f(a+te_k) - f(a)}{t} + f(a)\cdot\frac{g(a+te_k) - g(a)}{t}\\ &\forall t \in \mathbb{R}^*, \forall k \in \Delta_N\end{aligned}$$

Tenemos entonces que:

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_k}(a) = g(a)\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + f(a)\frac{\partial g}{\partial x_k}(a) \qquad \forall k \in \Delta_N$$

De donde $\nabla(fg)(a) = g(a)\nabla f(a) + f(a)\nabla g(a)$. Suponiendo que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{(f/g)(a+te_k) - (f/g)(a)}{t} &= \frac{\dfrac{f(a+te_k)}{g(a+te_k)} + \dfrac{f(a)}{g(a)}}{t} = \frac{f(a+te_k)g(a) + f(a)g(a+te_k)}{g(a+te_k)g(a)t}\\ &= \frac{f(a+te_k)g(a) - g(a)f(a) + g(a)f(a) - f(a)g(a+te_k)}{g(a+te_k)g(a)t}\\ &= \frac{g(a)\cdot\dfrac{f(a+te_k) - f(a)}{t}}{g(a+te_k)g(a)} - \frac{f(a)\cdot\dfrac{g(a+te_k) - g(a)}{t}}{g(a+te_k)g(a)}\\ &\forall t \in \mathbb{R}^*, \forall k \in \Delta_N\end{aligned}$$

De donde:

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x_k}(a) = \frac{g(a)\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) - f(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a)}{g(a)^2} \qquad \forall k \in \Delta_N$$

Por lo que tenemos también que $\nabla(f/g)(a) = \frac{g(a)\nabla f(a) - f(a)\nabla g(a)}{g(a)^2}$

Ejercicio 1.8.4. Fijado $p \in \mathbb{R}^*$, se considera la función $f : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|^p$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea. Probar que $f \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, con

$$\nabla f(x) = p\|x\|^{p-2}x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

Como consecuencia, encontrar una función $g \in C^1(\mathbb{R}^N)$ que verifique

$$\nabla g(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Opción 1. Desarrollamos la expresión de la norma euclídea:

$$f(x) = \|x\|^p = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}\right)^p \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{(0,0)\}$$

Calculemos las derivadas parciales de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = p\|x\|^{p-1} \cdot \frac{1}{2\|x\|} \cdot 2x_i = p\|x\|^{p-2}x_i \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{(0,0)\}$$

Por tanto, $\quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{(0,0)\}$ tenemos que:

$$\nabla f(x) = \big(p\|x\|^{p-2}x_1, \dots, p\|x\|^{p-2}x_i, \dots, p\|x\|^{p-2}x_n\big) = p\|x\|^{p-2} \cdot x$$

Opción 2. Si definimos

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^N \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^p \end{array}$$

Vemos que $g(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}^+$ y que $f = h \circ g$. En el Ejercicio 1.6.2 vimos que g era diferenciable en $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, con:

$$Dg(a)(x) = \left\langle \frac{a}{\|a\|}, x \right\rangle \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N, \forall a \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

Además, sabemos que h es derivable en $\mathbb{R}^+$, con $h'(x) = px^{p-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$, luego es diferenciable en $\mathbb{R}^+$, con:

$$Dh(a)(x) = pa^{p-1}x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+$$

Por la regla de la cadena, obtenemos que $f = h \circ g$ es diferenciable en $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, con $Df(a) = Dh(g(a)) \circ Dg(a)$, por lo que:

$$\begin{aligned} Df(a)(x) &= Dh(g(a))(Dg(a)(x)) = Dh(g(a))\left(\left\langle \frac{a}{\|a\|}, x \right\rangle\right) = p\|a\|^{p-1}\left\langle \frac{a}{\|a\|}, x \right\rangle \\ &= p\|a\|^{p-2}\langle a, x\rangle \qquad \forall a \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

De donde:

$$Df(x)(e_k) = p\|x\|^{p-2}\langle x, e_k\rangle = p\|x\|^{p-2}x_k \qquad \forall k \in \Delta_N$$

Finalmente, vemos que:

$$\nabla f(x) = \sum_{k=1}^N Df(x)(e_k)e_k = p\|x\|^{p-2}(x_1, x_2, \dots, x_N) = p\|x\|^{p-2}x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

Como ∇f es una función claramente continua, $f \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

La función g pedida vemos que es la siguiente:

$$g(x) = \frac{\|x\|^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Ejercicio 1.8.5. Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie explícita de ecuación $z = x + y^3$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, en el punto $(1, 1, 2)$.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y^3$. Tenemos que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$; y las derivadas parciales de f son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2$$

De donde $\nabla f(1, 1) = (1, 3)$. Por tanto, la ecuación del plano tangente a dicha superficie en el punto $(1, 1, 2)$ es:

$$\pi \equiv z - 2 = 1(x - 1) + 3(y - 1) \Longrightarrow \pi \equiv x + 3y - z = 2$$

Ejercicio 1.8.6. Sea Ω un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^2$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se considera la superficie explícita $S \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$S = \{(x, f(x, z), z) \mid (x, z) \in \Omega\}$$

Calcular la ecuación del plano tangente a S en un punto arbitrario $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

Usamos la siguiente notación:

$$y_0 = f(x_0, z_0) \qquad \alpha_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, z_0) \qquad \beta_0 = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, z_0)$$

Veamos ahora que dicho plano es el siguiente:

$$\Pi \equiv y - y_0 = \alpha_0(x - x_0) + \beta_0(z - z_0)$$

Tenemos que se trata de una superficie explícita, donde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la función definida por:

$$\begin{aligned} g(x, z) = f(x_0, z_0) + \alpha_0(x - x_0) + \beta_0(z - z_0) = f(x_0, z_0) + (\nabla f(x_0, z_0) \mid [(x, z) - (x_0, z_0)]) \overset{(*)}{=} \\ \overset{(*)}{=} f(x_0, z_0) + Df(x_0, y_0)[(x, z) - (x_0, z_0)]) \end{aligned}$$

donde en $(*)$ he aplicad la relación de la diferencial con su gradiente como producto escalar. Además, por el significado analítico de la diferencial, tenemos que:

$$\lim_{(x,z)\to(x_0,z_0)} \frac{f(x, z) - g(x, z)}{\|(x, z) - (x_0, z_0)\|} = 0$$

Es decir, g es una buena aproximación de f cerca del punto buscado. Por tanto, el plano tangente es Π mencionado.

Ejercicio 1.8.7. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ una función parcialmente derivable en todo punto de Ω. Probar que, si la función $\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ está acotada, entonces f es continua. Usando la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad f(0, 0) = 0$$

comprobar que, con las mismas hipótesis, no se puede asegurar que f sea diferenciable.

2. Prácticas

2.1. Continuidad

Ejercicio 2.1.1. Estudiar la continuidad de los campos escalares definidos por

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad g(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^4} \qquad h(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, con $f(0,0) = g(0,0) = h(0,0) = 0$.

Tenemos que $\{(0,0)\} \in C_{\mathcal{T}_u}$, por lo que $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \in \mathcal{T}_u$. Tenemos que $f_{\big|U}, g_{\big|U}, h_{\big|U}$ son racionales, por lo que son una funciones continuas. Por tanto, por el carácter local de la continuidad tenemos que f, g, h son continuas en todo punto de U. Veamos ahora si son continuas en el origen.

En este caso, al ser el límite en el origen son de ayuda los límites direccionales en coordenadas cartesianas. Dado $x \in \mathbb{R}^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{x^2(1+\lambda^2)} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^3}{x^2(1+\lambda^4x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x}{1+\lambda^4x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} h(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2 x^3}{x^2(1+\lambda^4x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2 x}{1+\lambda^4x^2} = 0$$

Por tanto, tenemos que los límites direccionales en f depende de λ, por lo que tenemos que no coinciden. Por tanto, f **no tiene límite en el origen.**

Para el caso de g, h, tenemos todos sus límites direccionales excepto uno: el uso de coordenadas cartesianas no nos sirve para calcular el límite en la dirección de e_2. Calculamos por tanto el segundo límite parcial:

$$\lim_{t\to 0} g(0,t) = \frac{0}{0+t^4} = \lim_{t\to 0} h(0,t)$$

Por tanto, tenemos que todos los límites direccionales de g, h existen y son iguales a 0. Por tanto, de existir el límite, este será 0. Intentemos realiza una acotación:

$$0 < |g(x,y)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^4}\right| \cdot |y| < |y|$$

$$0 < |h(x,y)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right| = \left|\frac{y^2}{x^2+y^4}\right| \cdot |x| < |x|$$

Como $(x,y)\to(0,0)$, tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0.$$

Ejercicio 2.1.2. Estudiar la continuidad de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada, para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\cdot \operatorname{sen}(x+y) & \text{si}\quad x+y\neq 0\\ 0 & \text{si}\quad x+y=0\end{cases}$$

Veamos que $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\neq 0\}\in\mathcal{T}_u$. Para ello, vemos que el siguiente conjunto es un cerrado: $\mathbb{R}^2\setminus U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}\in C_{\mathcal{T}_u}$. Definimos la función polinómica continua $f(x,y)=x+y$. Tenemos que $\mathbb{R}^2\setminus U=f^{-1}(\{0\})$, que es un cerrado por ser f continua y $\{0\}\in C_{\mathcal{T}_u}$. Por tanto, tenemos que $U\in\mathcal{T}_u$.

La restricción de f a U es el producto de una función racional por la composición de la función suma con el seno, ambas continuas. Por tanto, $f_{|U}$ es continua. Por tanto, por el carácter local de la continuidad, tenemos que f es continua en todos los puntos de U.

Veamos ahora en los puntos que no pertenecen a U:

$$\mathbb{R}^2\setminus U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=-y\}=\{(a,-a)\in\mathbb{R}^2\}$$

Realizamos la siguiente distinción:

1. $a\neq 0$. Es decir, excluimos en esta distinción el origen. Estudiemos los límites parciales:

$$\lim_{x\to a} f(x,-a)=\lim_{x\to a}\frac{x^2+a^2}{x-a}\cdot\frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a}=\frac{2a^2}{0}\cdot 1=\pm\infty$$

donde he aplicado que $\lim\limits_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a}=1$. El signo del límite dependerá si es el límite por la derecha o por la izquierda, pero en cualquier caso diverge. Por tanto, como no existe el primer límite parcial, tenemos que f no es continua en ningún punto de $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}\setminus\{(0,0)\}$.

2. $a=0$. Es decir, estudiamos en el origen. En este caso, nos puede ser de ayuda calcular los límites direccionales en coordenadas.

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\lambda^2)}{x^2(1+\lambda)^2}\cdot\operatorname{sen}[x(1+\lambda)]=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\lambda^2)}{x(1+\lambda)}\cdot\frac{\operatorname{sen}[x(1+\lambda)]}{x(1+\lambda)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\lambda^2)}{1+\lambda}\cdot\frac{\operatorname{sen}[x(1+\lambda)]}{x(1+\lambda)}=0$$

donde he aplicado que $\lim\limits_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a}=1$. Por tanto, vemos que no aporta información. Realizamos el siguiente cambio de variable: $(x,y)=\varphi(t)=(t,-t+t^p)$ para cierto $p\in\mathbb{N}$. Comprobemos que este cambio de variable es válido:

$$\lim_{t\to 0}\varphi(t)=(0,0)\qquad \varphi(t)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\ \forall t\neq 0.$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} f(\varphi(t)) &= \lim_{t\to 0} f(t, -t+t^p) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2+(-t+t^p)^2}{t^p}\cdot\frac{\operatorname{sen}(t^p)}{t^p} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t^2+t^2+t^{2p}-2t^{p+1}}{t^p}\cdot\frac{\operatorname{sen}(t^p)}{t^p} = \lim_{t\to 0}\frac{2+t^{2p-2}-2t^{p-1}}{t^{p-2}}\cdot\frac{\operatorname{sen}(t^p)}{t^p}\end{aligned}$$

Para $p>2$ (3, por ejemplo), tenemos que $(f\circ\varphi)(t)$ diverge en 0, por lo que f no tiene límite en el origen. Por tanto, f no es continua en el origen.

En conclusión, se tiene que f solo es continua en U. Es decir, f es continua en $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ si y solo si $x+y\neq 0$.

Ejercicio 2.1.3. Estudiar la continuidad del campo escalar $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definido, para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, por:

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{cc}\dfrac{y\log(1+x^2)}{x^2+y^2} & \text{si}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si}\quad x=y=0\end{array}\right.$$

Sea $U=\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$. Como un único punto es un cerrado, tenemos que U es abierto. Veamos que la restricción de f a U es continua. Tenemos que es el producto de una función racional con la función $(x,y)\mapsto\log(1+x^2)$. Esta es una composición de una función polinómica que toma valores en $\mathbb{R}^+$ con el logaritmo, que es continua en $\mathbb{R}^+$. Por tanto, tenemos que la composición es continua, y por tanto f es continua en U. Estudiemos el caso del origen.

En primer lugar, definimos $\varphi:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ por:

$$\varphi(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$$

Es importante notar que $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=1$. Por tanto, tenemos que $\ln(1+x^2)=x^2\varphi(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}^*$. Entonces:

$$0<|f(x,y)|=\left|\frac{y\log(1+x^2)}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{y\cdot\varphi(x)x^2}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\cdot|y\cdot\varphi(x)|<|y\cdot\varphi(x)|$$

Como tenemos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\cdot\varphi(x)=0\cdot 1=0$, por la acotación conseguida se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$$

Por tanto, tenemos que f es continua en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.1.4. Dado $\alpha\in\mathbb{R}$, estudiar la existencia de límite en el punto dado por $a=(0,1,2)$ del campo escalar $f:\mathbb{R}^3\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y,z)=\frac{x(y-1)(z-2)}{(x^2+(y-1)^2+(z-2)^2)^\alpha}\qquad\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{a\}$$

Hacemos uso de los límites direccionales según la dirección de $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$, con $\|(u,v,w)\|_2=1$:

$$\lim_{t\to 0} f(tu,1+tv,2+tw)=\lim_{t\to 0}\frac{t^3\cdot uvw}{(t^2(u^2+v^2+z^2))^\alpha}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3\cdot uvw}{t^{2\alpha}}=\lim_{t\to 0} t^{3-2\alpha}\cdot uvw$$

Distinguimos según los valores de α:

1. Para $3 - 2\alpha < 0 \iff \alpha > \dfrac{3}{2}$:

   Tenemos que $\lim\limits_{t\to 0} t^{3-2\alpha} \cdot uvw = \pm\infty$, dependiendo de si es el límite por la derecha o por la izquierda. En cualquier caso, tenemos que no existen los límites direccionales y, por tanto, no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

2. Para $3 - 2\alpha = 0 \iff \alpha = \dfrac{3}{2}$:

   Tenemos que $\lim\limits_{t\to 0} t^{3-2\alpha} \cdot uvw = uvw$, por lo que el valor del límite direccional depende de la dirección. Por tanto, no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

3. Para $3 - 2\alpha > 0 \iff \alpha < \dfrac{3}{2}$:

   Tenemos que $\lim\limits_{t\to 0} t^{3-2\alpha} \cdot uvw = 0$, por lo que todos los límites direccionales son iguales a 0.

   Intentemos realizar la acotación. Para ello, acotamos en su lugar la función resultante del límite direccional $f(tu, 1+tv, 2+tw) = t^{3-2\alpha} \cdot uvw$.

   Haciendo uso de que $\|(u,v,w)\|_2 = 1 = \sqrt{u^2+v^2+w^2}$, veamos que $|uvw| \leqslant 1$:

   $$\sqrt{u^2+v^2+w^2} = 1 \Longrightarrow \sqrt{u^2} = |u| \leqslant 1$$

   Análogamente, se tiene que $|v|, |w| \leqslant 1$, por lo que $|uvw| \leqslant 1$. Por tanto, tenemos que:

   $$0 < |f(tu, 1+tv, 2+tw)| = |t^{3-2\alpha} \cdot uvw| = |t^{3-2\alpha}| \cdot |uvw| \leqslant |t^{3-2\alpha}|$$

   Por tanto, tenemos que $\lim\limits_{(x,y,z)\to a} f(x,y,z) = 0$.

Ejercicio 2.1.5. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, estudiar la existencia de límite en el origen del campo escalar $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2-xy} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

En este caso, tenemos que solo está definida en el primer cuadrante. Por tanto, no tiene sentido considerar todos los límites radiales, sino tan solo los que se encuentran en el primer cuadrante. Usando coordenadas polares, sea $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ y $\rho \in \mathbb{R}^+$. Entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) &= \lim_{\rho\to 0} \rho^{\alpha+\beta-2} \cdot \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - \cos\theta\operatorname{sen}\theta} = \\ &= \lim_{\rho\to 0} \rho^{\alpha+\beta-2} \cdot \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{1-\cos\theta\operatorname{sen}\theta} = \lim_{\rho\to 0} 2\rho^{\alpha+\beta-2} \cdot \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{2-\operatorname{sen}(2\theta)}\end{aligned}$$

Distinguimos según los valores de α:

1. Para $\alpha + \beta < 2$:

   Tenemos que $\lim\limits_{\rho\to 0} 2\rho^{\alpha+\beta-2} \cdot \frac{\cos^\alpha\theta\operatorname{sen}^\beta\theta}{2-\operatorname{sen}(2\theta)} = +\infty$. No existen los límites radiales y, por tanto, no existe $\lim\limits_{x\to(0,0)} f(x)$.

2. Para $\alpha+\beta=2$:

   Tenemos que $\lim\limits_{\rho\to 0} 2\rho^{\alpha+\beta-2}\cdot \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{2-\operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{2-\operatorname{sen}(2\theta)}$, por lo que el valor del límite direccional depende del ángulo θ. Por tanto, no existe $\lim\limits_{x\to(0,0)} f(x)$.

3. Para $\alpha+\beta>2$:

   Tenemos que $\lim\limits_{\rho\to 0} 2\rho^{\alpha+\beta-2}\cdot \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{2-\operatorname{sen}(2\theta)} = 0$, por lo que todos los límites radiales son iguales a 0.

   Intentemos realizar la acotación. Para ello, acotamos en su lugar la función resultante del límite radial $f(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta) = 2\rho^{\alpha+\beta-2}\cdot \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{2-\operatorname{sen}(2\theta)}$.

$$0<|f(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)| = \left|2\rho^{\alpha+\beta-2}\cdot\frac{\cos^\alpha\theta\operatorname{sen}^\beta\theta}{2-\operatorname{sen}(2\theta)}\right| \leqslant \left|2\rho^{\alpha+\beta-2}\cdot\frac{1}{2-\operatorname{sen}(2\theta)}\right| \leqslant \left|2\rho^{\alpha+\beta-2}\right|$$

   Por tanto, tenemos que $\lim\limits_{(x,y,z)\to 0} f(x,y,z)=0$.

Ejercicio 2.1.6. Estudiar la continuidad del campo escalar $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definido por:

$$\begin{aligned} &f(x,y) = (x+y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}^* \\ &f(x,0)=f(0,y)=0 \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Sea $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy=0\}$. Sea $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dado por $(x,y)\mapsto xy$ la función continua producto. Tenemos que $A=g^{-1}\{0\}$, y $\{0\}$ es un cerrado. Por tanto, tenemos que A es un cerrado y $U=\mathbb{R}\setminus A$ es un abierto.

La restricción de f a U es un producto de tres funciones continuas. La primera es polinómica, y las otras dos funciones son composiciones de funciones racionales con el seno, que es una función continua. Por tanto, tenemos que $f\big|_U$ es continua. Por el carácter local de la continuidad, tenemos que f es continua en cualquier punto de U. Veamos ahora para los puntos de A.

Tenemos que $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy=0\}$, por lo que al menos una de las dos coordenadas ha de ser nula:

1. Sean los puntos $(a,0)$, con $a\neq 0$. Entonces, calculamos el primer límite parcial:

$$\lim_{y\to 0} f(a,y) = \lim_{y\to 0}(a+y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$$

   a) Supongamos $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right)\neq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{a}\neq \pi k \Longleftrightarrow a\neq\frac{1}{\pi k}$, con $k\in\mathbb{Z}^*$.

   Entonces, tenemos que $a\operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right)\neq 0$. Como $\lim\limits_{y\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$ no converge, tenemos que $\lim\limits_{y\to 0} f(a,y)$ tampoco lo hace, por lo que f no es continua en estos puntos.

b) Supongamos $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{a} = \pi k \Longleftrightarrow a = \frac{1}{\pi k}$, con $k \in \mathbb{Z}^*$.
Entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,0)} (x+y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) =$$
$$= a\operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right)\cdot\operatorname{sen}(\infty) = 0\cdot\operatorname{sen}(\infty) = 0$$

2. Sean los puntos $(0,a)$, con $a \neq 0$. Entonces, como la función es simétrica ($f(x,y) = f(y,x)$), se tiene que ocurre al igual que en el caso pasado.

   Si $a = \frac{1}{\pi k}$, con $k \in \mathbb{Z}^*$, entonces la función en $(0,a)$ converge a 0.

   Si $a \neq \frac{1}{\pi k}$, $\forall k \in \mathbb{Z}^*$, entonces la función en $(0,a)$ no tiene límite en $(0,a)$.

3. Estudiamos ahora el origen:

   Realizamos la siguiente acotación:

$$0 \leqslant |f(x,y)| = \left|(x+y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leqslant |x+y| \qquad \forall x,y \neq \frac{1}{\pi k},\ \text{con } k \in \mathbb{Z}^*$$

   Por tanto, como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x+y| = 0$, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Ejercicio 2.1.7. Estudiar la existencia de límite en el origen para los campos escalares $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidos, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, como se indica:

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

   Comprobamos los límites direccionales en coordenadas cartesianas, que al ser el límite en el origen quedan:

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-\lambda^2)}{x^2(1+\lambda^2)} = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

   Por tanto, como vemos que los límites direccionales dependen del valor de $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que f no tiene límite en el origen.

2. $g(x,y) = \dfrac{x^2\operatorname{sen} y}{x^2+y^2}$

   Tenemos la siguiente acotación:

$$0 \leqslant |g(x,y)| = \left|\frac{x^2\operatorname{sen} y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\operatorname{sen} y\right| \leqslant |\operatorname{sen} y|$$

   Tenemos que $\lim_{y\to 0}\operatorname{sen} y = 0$. Por tanto, como tenemos la acotación buscada, se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0.$$

3. $h(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^4)\,\mathrm{sen}^2(y)}{y^4+x^8}$

Definimos $\varphi, \Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $\varphi(y) = \frac{\mathrm{sen}\, y}{y}$ y $\Psi(x) = \frac{\ln(1+x^4)}{x^4}$, tal que $\mathrm{sen}^2\, y = \varphi^2(y) \cdot y^2$ y $\ln(1+x^4) = \Psi(x) \cdot x^4$. Además,

$$\lim_{y\to 0} \varphi(y) = \lim_{y\to 0} \frac{\mathrm{sen}\, y}{y} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \Psi(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^4)}{x^4} = 1$$

Veamos cuánto valen los límites parciales:

$$\lim_{x\to 0} h(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^4)\cdot 0}{x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^8} = 0$$

Aplicamos ahora este cambio de variable $x = \varphi(t) = (t, t^2)$. Entonces:

$$\lim_{t\to 0} h(\varphi(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^4)\,\mathrm{sen}^2(t^2)}{t^8+t^8} = \lim_{t\to 0} \frac{\Psi(t)\cdot \cancel{t^4} \cdot \varphi^2(t^2)\cdot \cancel{t^4}}{2\cancel{t^8}} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, tenemos que aplicando el cambio de variable $x = (t,t^2)$ obtenemos un candidato a límite distinto que usando $x = (t,0)$. Por tanto, tenemos que h no tiene límite en el origen.

Ejercicio 2.1.8. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la continuidad del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido, para $(x,y) \in \mathbb{R}^n$, como se indica:

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$

Sea el subconjunto $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$, y consideramos su complementario $\mathbb{R}^2 \setminus U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$. Por tanto, dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x,y) = x - y$ función continua, tenemos que $U = f^{-1}\{0\}$. Por tanto, como es la imagen inversa de un cerrado por una función continua, tenemos que U es un abierto. Además, como $f\big|_U$ es una función racional, tenemos que es continua. Por el carácter local de continuidad, tenemos que f es continua en todos los puntos de U.

Para los puntos de $\mathbb{R}^2 \setminus U$, tenemos que $\mathbb{R}^2 \setminus U = \{(a,a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$. Entonces, para estudiar los límites laterales, realizamos la siguiente distinción:

a) Si $a \neq 0$:
$$\lim_{x\to a} f(x,a) = \lim_{x\to a} \frac{x+a}{x-a} = \frac{2a}{0} = \pm\infty$$
Tenemos que $f(x,a)$ diverge en (a,a), por lo que f no tiene límite en (a,a) para todo $a \neq 0$.

b) Si $a = 0$, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \qquad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y}{-y} = -1$$

Por tanto, tenemos que los límites laterales no coinciden, por lo que f no tiene límite en el origen.

Por tanto, tenemos que f solo es continua en U.

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2-y^2} & \text{si} \quad x^2 \neq y^2 \\ 0 & \text{si} \quad x^2 = y^2 \end{cases}$

Sea el subconjunto $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \neq y^2\}$, y consideramos su complementario $\mathbb{R}^2 \setminus U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$. Por tanto, dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x,y) = x^2 - y^2$ función continua, tenemos que $U = f^{-1}\{0\}$. Por tanto, como es la imagen inversa de un cerrado por una función continua, tenemos que U es un abierto. Además, como $f_{|_U}$ es una función racional, tenemos que es continua. Por el carácter local de continuidad, tenemos que f es continua en todos los puntos de U.

Para los puntos de $\mathbb{R}^2 \setminus U$, tenemos que $\mathbb{R}^2 \setminus U = \{(a,a),(a,-a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$. Entonces, para estudiar los límites laterales, realizamos la siguiente distinción:

a) Si $a \neq 0$:
$$\lim_{x\to a} f(x,a) = \lim_{x\to a} \frac{x^3}{x^2-a^2} = \frac{a^3}{0} = \pm\infty$$
Tenemos que $f(x,a)$ diverge en (a,a), por lo que f no tiene límite en (a,a) para todo $a \neq 0$.
Además, $f(x,a) = f(x,-a)$, por lo que f tampoco tiene límite en $(a,-a)$ para todo $a \neq 0$.

b) Si $a = 0$, tenemos:
$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0 \qquad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{-y^2} = 0$$
Aplicamos ahora el cambio de variable $x = (t, t+t^p)$, para cierto $p^+ \in \mathbb{R}$. Entonces:
$$\lim_{t\to 0} f(t,t+t^p) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^2-(t+t^p)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^2-t^2-t^{2p}-2t^{p+1}} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{-t^{2p-3}-2t^{p-2}}$$
Para $t = 2$, tenemos:
$$\lim_{t\to 0} f(t,t+t^p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{-t-2} = -\frac{1}{2}$$
Tenemos que no coincide con el límite dado por los límites laterales, por lo que f no es continua en el origen.

Por tanto, tenemos que f solo es continua en U.

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{xy} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$

Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $(x,y) \mapsto xy$ función polinómica, por lo que continua. Tenemos que $A = g^{-1}\{0\}$, y $\{0\}$ es un cerrado. Por tanto, tenemos que A es un cerrado y $U = \mathbb{R} \setminus A$ es un abierto.

La restricción de f a U es una función polinómica, por lo que continua. Por el carácter local de la continuidad, tenemos que f es continua en cualquier punto de U. Veamos ahora para los puntos de A.

Tenemos que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$, por lo que al menos una de las dos coordenadas ha de ser nula:

a) Sean los puntos $(a, 0)$, con $a \neq 0$. Entonces, calculamos el segundo límite parcial:
$$\lim_{y\to 0} f(a, y) = \lim_{y\to 0} \frac{a^3 - y^3}{ay} = \frac{a^3}{0} \pm \infty$$
donde afirmamos que diverge ya que $a \neq 0$. Por tanto, f no es continua en los puntos $(a, 0)$, con $a \neq 0$.

b) Sean los puntos $(0, a)$, con $a \neq 0$. Entonces, calculamos el primer límite parcial:
$$\lim_{x\to 0} f(x, a) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - a^3}{xa} = \frac{-a^3}{0} \pm \infty$$
donde afirmamos que diverge ya que $a \neq 0$. Por tanto, f no es continua en los puntos $(0, a)$, con $a \neq 0$.

c) Sea el origen $(0, 0)$. Entonces, calculamos el primer límite parcial:
$$\lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$
Aplicamos ahora el cambio de variable $x = (t, t^p)$, para cierto $p \in \mathbb{R}^+$. Tenemos que:
$$\lim_{t\to 0} f(t, t^p) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 - t^{3p}}{t^{p+1}} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - t^{3p-3}}{t^{p-2}} = 1 \qquad \text{para } p = 2.$$
Por tanto, tenemos que según el cambio de variable del límite parcial, el candidato a límite es 0. No obstante, en este último cambio de variable se tiene que el candidato es 1. Por tanto, tenemos que f no tiene límite en el origen, por lo que tampoco es continua en este punto.

Por tanto, tenemos que f solo es continua en U.

4. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} \arctan(x^2 + y^2) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$

Sea $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$. Tenemos que su complementario es la imagen inversa de $\{0\}$ por la proyección en la segunda coordenada, que es una función continua. Por ser $\{0\}$ un cerrado, tenemos que $\mathbb{R}^2 \setminus U$ es un cerrado, por lo que U es un abierto. Además, tenemos que f restringido a U es el producto de una función racional por la composición de una polinómica con la arcotangente, que es continua. Por tanto, tenemos que $f_{|_U}$ es una función continua, y por el carácter local de la continuidad, tenemos que f es continua en todos los puntos de U.

Realizamos la siguiente distinción:

a) Para $(a, 0)$, con $a \neq 0$, tenemos que el segundo límite parcial es:

$$\lim_{y \to 0} f(a, y) = \lim_{y \to 0} \frac{a}{y} \arctan(a^2 + y^2) = \frac{a}{0} \arctan(a^2)$$

Por tanto, tenemos que el segundo límite parcial diverge, ya que la arcotangente converge a un valor no nulo y el cociente, al dividir entre 0, diverge.

b) Estudiemos ahora el límite en el origen:

Definimos la siguiente aplicación continua, por ser el producto de una función racionar por la composición de una polinómica con la arcotangente:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\arctan(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \end{array}$$

Por tanto, para $(x, y) \neq (0, 0)$, tenemos la siguiente relación:

$$\arctan(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2) \cdot \varphi(x, y)$$

Veamos en primer lugar el límite de φ en el origen. Para ello, definimos f, g tal que $\varphi = f \circ g$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & \mathbb{R}^* \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Tenemos que $g(x, y) = x^2 + y^2$ y $f(t) = \dfrac{\arctan t}{t}$. Veamos si podemos aplicar el cambio de variable $t = g(x, y)$.

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} g(x, y) = 0 \qquad g(x, y) \in \mathbb{R}^* \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

Por tanto, podemos usar el Teorema del Cambio de variable en el sentido original:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \Longrightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(g(x, y)) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \varphi(x, y) = 1$$

Realizamos ahora el cambio de variable $x = (t, t^p)$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} f(t, t^p) &= \lim_{t \to 0} \frac{t}{t^p} \arctan(t^2 + t^{2p}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^{p-1}} (t^2 + t^{2p}) \varphi(t, t^p) = \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^{p-3}} (1 + t^{2p-2}) \varphi(t, t^p) = 1 \qquad (\text{para } p = 3) \end{aligned}$$

donde he usado al final el límite de φ en el origen.

Veamos ahora el valor del límite parcial:

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

Por tanto, tenemos que dos cambios de variable me dan candidatos a límite distintos, por lo que no hay límite en el origen.

Ejercicio 2.1.9. Dado $n \in \mathbb{N}$, estudiar la existencia de límite en el origen para el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \frac{x^n y^n}{x^2y^2 + (x-y)^2} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Estudiamos en primer lugar los límites parciales:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^n \cdot 0}{0 + x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \qquad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0 + y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Por tanto, tenemos que; en caso de converger, lo hará a 0. Para ver si converge, estudiamos los límites direccionales en coordenadas cartesianas:

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^n \cdot \lambda^n x^n}{x^2 \cdot \lambda^2 x^2 + x^2(1-\lambda)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{2n} \cdot \lambda^n}{x^4 \cdot \lambda^2 + x^2(1-\lambda)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{2n-2} \cdot \lambda^n}{x^2 \cdot \lambda^2 + (1-\lambda)^2}$$

Realizamos la siguiente distinción:

1. Si $2n - 2 > 2 \iff n > 2$: Tenemos que $\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = 0$.

2. Si $2n - 2 = 2 \iff n = 2$: Tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + x^{-2} \cdot (1-\lambda)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \frac{(1-\lambda)^2}{x^2}}$$

   En el caso de $\lambda = 1$, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{1^2}{1^2 + \frac{0}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1^2}{1^2} = 1$$

   Por tanto, como para $\lambda = 1$ el límite direccional difiere del resto, tenemos que no es convergente.

3. Si $2n - 2 < 2 \iff n < 2$: Para $\lambda = 1$, tenemos

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^{2n-2} \cdot 1^n}{x^2 \cdot 1^2} = \lim_{x\to 0} x^{2n-4} = \infty$$

   Por tanto, como este límite direccional no existe, tenemos que f no es convergente si $n < 2$.

Observación. En este caso, habiendo hecho el cambio de variable $x = (t,t)$, habría sido bastante más rápido, y no habría sido necesario calcular los límites parciales. No obstante, al seguir un procedimiento rutinario se optó por calcular los límites direccionales con coordenadas cartesianas.

Por tanto, tenemos que f solo puede ser convergente si $n > 2$, y tenemos que el candidato a límite es 0. Intentemos acotar f:

$$0 \leqslant |f(x,y)| = \left| \frac{x^n y^n}{x^2y^2 + (x-y)^2} \right| = \left| \frac{x^{n-2} y^{n-2}}{1 + \left(\frac{x-y}{xy}\right)^2} \right| \leqslant |x^{n-2} y^{n-2}|$$

Definiendo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ dado por $g(x,y) = |x^{n-2}y^{n-2}|$, tenemos la relación de orden $\|f(x)\| \leqslant g(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Además, como g es continua, tenemos que su límite en el origen debe ser igual a $g(0,0) = 0$.

Por tanto, debido a la acotación que hemos conseguido, tenemos que si $n > 2$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Ejercicio 2.1.10. Dados $\alpha, b \in \mathbb{R}$, estudiar la existencia de límite en el punto $(0,b)$ del campo escalar $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = x^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+,\ y \in \mathbb{R}$$

Realizamos la siguiente distinción:

1. Si $\alpha > 0$:

   Tenemos la siguiente acotación:

   $$0 \leqslant |f(x,y)| = \left| x^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} \right| \leqslant |x^\alpha|$$

   Como $\alpha > 0$, tenemos que $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$. Por tanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = 0$.

2. Si $\alpha = 0$, $b \neq 0$:

   Tenemos que $f(x,y) = \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}$, que es una composición de una función racional con el seno, ambas continuas. Por tanto, tenemos que f es continua en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Además, existe una extensión continua de f que incluye al punto $(0,b)$ con $g(x,y) = f(x,y)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+,\ y \in \mathbb{R}$. Esta es:

   $$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2} \end{array}$$

   Por tanto, se tiene que:

   $$g(0,b) = \operatorname{sen} \frac{1}{b^2} = \lim_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y)$$

3. Si $\alpha = 0$, $b = 0$:

   Tenemos que $f(x,y) = \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}$. Calculamos el primer límite parcial por la derecha:

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x,0) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$$

   Tenemos que este no converge. Por tanto, se tiene que $f(x,y)$ no converge en el origen si $\alpha = 0$.

4. Si $\alpha < 0$:

   Calculamos el primer límite parcial:

$$\lim_{x\to 0} f(x,b) = \lim_{x\to 0} x^\alpha \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+b^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+b^2}}{x^{-\alpha}}$$

   Distinguimos ahora en función de los valores de b. Tenemos que:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{b^2} = 0 \iff \frac{1}{b^2} = \pi k \iff b^2 = \frac{1}{\pi k} \iff b = \pm\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}^*$$

   a) Si $\alpha < 0$, $b \neq \pm\frac{1}{\sqrt{\pi k}}$, con $k \in \mathbb{Z}^*$:

   Tenemos que el primer límite parcial no existe, ya que:

$$\lim_{x\to 0} f(x,b) = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{b^2}}{0} = \pm\infty$$

   Por tanto, tenemos que f no tiene límite en $(0,b)$ para estos valores de α, b.

   b) Si $\alpha < 0$, $b = \pm\frac{1}{\sqrt{\pi k}}$, con $k \in \mathbb{Z}^*$:

   En este caso, lo que nos dificulta la resolución es el seno. Para poder trabajar con él, tenemos en cuesta el siguiente límite, que es la definición formal de derivada del seno:

$$\lim_{t\to a} \frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} a}{t-a} = \cos a$$

   Por tanto, para $a = \frac{1}{b^2}$, tenemos:

$$\lim_{t\to\frac{1}{b^2}} \frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}\frac{1}{b^2}}{t - \frac{1}{b^2}} = \cos\frac{1}{b^2} = \cos(\pi k) = \pm 1$$

   Por el Teorema de cambio de variable, usamos $t = \varphi(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$. Tenemos que $t \to \frac{1}{b^2}$ si $(x,y) \to (0,b)$, y $t \neq \frac{1}{b^2}$ para $(x,y) \neq (0,b)$. Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2} - \operatorname{sen}\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{b^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}}{\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{b^2}} = \cos\frac{1}{b^2} = \cos(\pi k) = \pm 1$$

   Haciendo uso de ese límite, podemos reescribir $f(x,y)$ de la siguiente forma:

$$f(x,y) = x^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = x^\alpha\left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{b^2}\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{b^2}} =$$

$$= x^{\alpha/2} \cdot x^{\alpha/2}\left(\frac{b^2 - (x^2+y^2)}{b^2(x^2+y^2)}\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{b^2}}$$

Estudiamos ahora $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = x^{\alpha/2}[b^2 - (x^2+y^2)]$.
Usamos el cambio de variable $(x,y) = \left(x, \sqrt{b^2 - x^2 + x^{-\alpha/2}}\right)$. Tenemos que $(x,y) \to (0,b)$ cuando $x \to 0$, y que $(x,y) \neq (0,b)$ para $x \neq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
& g\left(x, \sqrt{b^2 - x^2 + x^{-\alpha/2}}\right) = \\
& = x^{\alpha/2}\left[b^2 - \left(x^2 + \left(\sqrt{b^2 - x^2 + x^{-\alpha/2}}\right)^2\right)\right] = \\
& = x^{\alpha/2}\left[b^2 - \left(x^2 + \left|b^2 - x^2 + x^{-\alpha/2}\right|\right)\right] \overset{(*)}{=} \\
& \overset{(*)}{=} x^{\alpha/2}\left[b^2 - \left(x^2 + b^2 - x^2 + x^{-\alpha/2}\right)\right] = \\
& = x^{\alpha/2}\left[x^{-\alpha/2}\right] = 1
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ suponemos que $b^2 - x^2 + x^{-\alpha/2} \geqslant 0$. Esto es posible, ya que $b^2 > 0$ y, a la hora de tomar límites, siempre podremos coger $\delta \in \mathbb{R}^+$ lo suficientemente pequeño como para que dicho término sea positivo.

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
& f(x, \sqrt{b^2 - x^2 + x^{-\alpha/2}}) = \\
& = x^{\alpha/2}\left(\frac{g(x, \sqrt{b^2 - x^2 + x^{-\alpha/2}})}{b^2(x^2 + (b^2 - x^2 + x^{-\alpha/2}))}\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + \left(b^2 - x^2 + x^{-\alpha/2}\right)}\right)}{\frac{1}{x^2 + \left(b^2 - x^2 + x^{-\alpha/2}\right)} - \frac{1}{b^2}}
\end{aligned}$$

donde hemos usado de nuevo que podemos presuponer que $b^2 - x^2 + x^{-\alpha/2} \geqslant 0$. Por el Teorema del Cambio de Variable en su sentido original, tenemos que el término del cociente del seno converge a 1. Además, el término central converge a $\frac{1}{b^4}$ cuando $x \to 0$. No obstante, el término de la derecha diverge, por lo que esta función diverge cuando $x \to 0$.

Por tanto, por el Teorema del Cambio de Variable, tenemos que f no tiene límite en $(0,b)$ si $\alpha < 0$, $b = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}$, con $k \in \mathbb{Z}^*$.

Ejercicio 2.1.11. Dado $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, estudiar la existencia de límite en el punto u del campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{u\} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{|x-a| + |y-b| + |z-c|} \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{u\}$$

1. Si $abc \neq 0$:

   Calculamos el primer límite parcial:

   $$\lim_{x \to a} f(x,b,c) = \lim_{x \to a} \frac{xbc}{|x-a|} = \frac{abc}{0} = \pm\infty$$

   Por tanto, tenemos que el primer límite parcial no converge, por lo que f no tiene límite en u si $abc \neq 0$.

2. Si $bc \neq 0$, $a = 0$:

   Calculamos el primer límite parcial:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x, b, c) = \lim_{x \to 0^+} \frac{xbc}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} bc = bc$$

   Calculamos el primer segundo parcial:

$$\lim_{y \to b} f(0, y, c) = \lim_{y \to b} \frac{0}{|y - b|} = \lim_{y \to b} 0 = 0$$

   Por tanto, como $bc \neq 0$, tenemos que los límites parciales no coinciden, por lo que f no tiene límite en u si $bc \neq 0$, $a = 0$.

   Además, tenemos que esto se generaliza a siempre que haya 2 componentes de u no nulas y la tercera nula. Sea u_k la componente nula. Entonces, el límite parcial k-ésimo no será nulo (valdrá el producto de las otras dos componentes), mientras que el resto de límites parciales serán nulos, al anularse el denominador.

   Por tanto, si u tiene dos componentes no nulas y una tercera nula, tenemos que f no tiene límite en u.

3. Si $a \neq 0$, $b, c = 0$:

   Tenemos la siguiente acotación:

$$0 \leqslant |f(x, y, z)| = \left| \frac{xyz}{|x - a| + |y| + |z|} \right| = \left| \frac{z}{|x - a| + |y| + |z|} \right| \cdot |xy| \leqslant |xy|$$

   Donde hemos usado que $\left| \frac{z}{|x-a|+|y|+|z|} \right| \leqslant 1$, que $|x - a| + |y| > 0$. Por tanto, debido a la acotación tenemos que, si $a \neq 0$, $b, c = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to u} f(u) = 0$.

   Además, tenemos que esto se generaliza a siempre que haya 2 componentes de u nulas y la tercera no nula. Sea u_k la componente no nula. Entonces, será necesario acotar por $u_k \cdot u_j$, donde u_j es una de las componentes nulas.

   Por tanto, si u tiene dos componentes nulas y una tercera no nula, tenemos que $\lim\limits_{x \to u} f(u) = 0$.

4. Si $a, b, c = 0$:

   Tenemos la misma acotación que en el caso anterior:

$$0 \leqslant |f(x, y, z)| = \left| \frac{xyz}{|x| + |y| + |z|} \right| = \left| \frac{z}{|x| + |y| + |z|} \right| \cdot |xy| \leqslant |xy|$$

   Donde hemos usado que $\left| \frac{z}{|x|+|y|+|z|} \right| \leqslant 1$, que $|x| + |y| > 0$. Por tanto, debido a la acotación tenemos que, si $a, b, c = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to u} f(u) = 0$.

Ejercicio 2.1.12 (Prueba DGIIM 2023-24)**.** Dados $a, b \in \mathbb{R}$, estudiar la continuidad del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por:

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\} \qquad f(a,b) = 0$$

Definimos el conjunto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\}$, que claramente es abierto por ser $\{(a,b)\} \in C_{\mathcal{T}_u}$. En U, tenemos que el denominador es una función polinómica, luego continua. Además, el denominador es la composición de una función polinómica (luego continua) que toma siempre valores en $\mathbb{R}^+$ con la raíz cuadrada, que es continua. Como la compoisición de funciones continuas es continua, tenemos que el denominador es una función continua en U. Además, como el cociente de funciones continuas es continua, tenemos que $f_{|_U}$ es continua. Por el carácter local de la continuidad, tenemos que f es continua en todos los puntos de U. Estudiemos ahora en (a,b). Para ello, realizamos la siguiente distinción de casos:

1. Si $a, b \neq 0$:

   Calculamos el primer límite parcial. Tenemos que:

   $$f(x,b) = \frac{xb}{\sqrt{(x-a)^2}} = \frac{xb}{|x-a|} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$$

   Que claramente diverge, por lo que $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x,b)$. Por tanto, como el primer límite parcial no existe, tenemos que f no es continua en (a,b).

2. Si $a = 0,\ b \neq 0$:

   Estudiamos el primer límite parcial. Tenemos que:

   $$f(x,b) = \frac{xb}{\sqrt{x^2 + \cancel{(y-b)^2}}} = \frac{xb}{|x|} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$\lim_{x \to 0^+} f(x,b) = \lim_{x \to 0^+} \frac{xb}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{xb}{x} = b \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x,b) = \lim_{x \to 0^-} \frac{xb}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{xb}{-x} = -b$$

   Por tanto, como $b \neq 0$, tenemos que $b \neq -b$, por lo que $\nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x,b)$. Por tanto, como el primer límite parcial no existe, tenemos que f no es continua en (a,b).

3. Si $a \neq 0,\ b = 0$:

   Se demuestra que no es continua de forma análoga al caso anterior. Tenemos que:

   $$f(a,y) = \frac{ay}{\sqrt{(a-a)^2 + (y-0)^2}} = \frac{ay}{|y|} \qquad \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$\lim_{y \to 0^+} f(a,y) = \lim_{y \to 0^+} \frac{ay}{|y|} = \lim_{y \to 0^+} \frac{ay}{y} = a \qquad \lim_{y \to 0^-} f(a,y) = \lim_{y \to 0^-} \frac{ay}{|y|} = \lim_{y \to 0^-} \frac{ay}{-y} = -a$$

   Por tanto, como $a \neq 0$, tenemos que $a \neq -a$, por lo que $\nexists \lim\limits_{y \to 0} f(a,y)$. Por tanto, como el primer segundo parcial no existe, tenemos que f no es continua en (a,b).

4. Si $a, b = 0$:

   Estamos en el caso del origen. Tenemos que:

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

   Veamos que es continua usando la siguiente acotación:

$$0 \leqslant |f(x,y)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \cdot |y| \leqslant |y|$$

   Como $|y| \to 0$, tenemos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Por tanto, tenemos que f es continua en $(0,0)$.

2.2. Diferenciabilidad

Ejercicio 2.2.1. Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, de los campos escalares $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidos de la siguiente forma, donde $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^4} \qquad \forall (x,y) \in U \qquad f(0,0) = 0$

   Sabemos que U es abierto. Como $f_{\big|U}$ es racional, tenemos que $f_{\big|U} \in C^1(U)$. Por tanto por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, en U tenemos que f es diferenciable, luego continua; y sus derivadas parciales son también continuas en todo punto de U. Calculémoslas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^4) - 2x^3y}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2xy^5}{(x^2+y^4)^2} \qquad \forall (x,y) \in U$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^4) - x^2y \cdot 4y^3}{(x^2+y^4)^2} = \frac{x^4 + x^2y^4 - 4x^2y^4}{(x^2+y^4)^2} = \frac{x^4 - 3x^2y^4}{(x^2+y^4)^2} \qquad \forall (x,y) \in U$$

   Estudiamos ahora la existencia de las derivadas parciales en el origen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

   Por tanto, tenemos que f es parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, con $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

   Estudiamos ahora la diferenciabilidad en el origen. Para ello, definimos la aplicación $\varphi : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - (\nabla f(0,0) \mid (x,y))}{\|(x,y)\|} = \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = \frac{x^2y}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \forall (x,y) \in U$$

   Calculamos el límite radial según la dirección $y = x$:

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x,x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{(x^2+x^4)\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   Por tanto, de tener φ límite en el origen (que no lo sabemos), será $\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$, por lo que f no es diferenciable en el origen. Por tanto, hemos visto que f en diferenciable en U.

   Por la condición suficiente de diferenciabilidad, si alguna de las dos derivadas parciales fuese continua en el origen, entonces f sería diferenciable en el origen. Por tanto, las derivadas parciales son continuas en U, pero no en el origen.

   Por último, estudiamos la continuidad de f en el origen. Tenemos que:

$$0 \leqslant |f(x,y)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right| \leqslant |y| \qquad \forall (x,y) \in U$$

de donde se deduce que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, por lo que f es continua en el origen.

En resumen, f es continua y parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, pero tan solo es diferenciable en U. Además, ambas derivadas parciales tan solo son continuas en U.

2. $g(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} \qquad \forall (x,y) \in U \qquad g(0,0) = 0$

Sabemos que U es abierto. Como $g_{|_U}$ es racional, tenemos que $g_{|_U} \in C^1(U)$. Por tanto por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, en U tenemos que g es diferenciable, luego continua; y sus derivadas parciales son también continuas en todo punto de U. Calculémoslas:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^4) - 2x^3y^2}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2} \qquad \forall (x,y) \in U$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^2(x^2+y^4) - x^2y^2 \cdot 4y^3}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2yx^4 + 2x^2y^5 - 4x^2y^5}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2yx^4 - 2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2} =$$
$$= \frac{2yx^2(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2} \qquad \forall (x,y) \in U$$

Estudiamos ahora la existencia de las derivadas parciales en el origen:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{g(0,y)-g(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

Por tanto, tenemos que g es parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, con $\nabla g(0,0) = (0,0)$. Veamos ahora que $\frac{\partial g}{\partial y}$ es continua en el origen:

$$0 \leqslant \left|\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\right| = \left|\frac{2yx^2(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}\right| = |2y| \cdot \left|\frac{x^2}{x^2+y^4}\right| \cdot \left|\frac{x^2-y^4}{x^2+y^4}\right| \leqslant |2y| \qquad \forall (x,y) \in U$$

Por tanto, deducimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$, por lo que $\frac{\partial g}{\partial y}$ es continua en el origen.

Como además la función g es parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, tenemos que g es diferenciable en el origen, por lo que g es diferenciable en $\mathbb{R}$ y, por tanto, continua en $\mathbb{R}^2$.

Por último, falta estudiar la continuidad de las derivadas parciales. Ya se ha visto que la derivada parcial respecto de y es continua en $\mathbb{R}^2$. Veámoslo para la derivada parcial respecto de x. Aplicando el cambio de variable $(x,y) = (t^2, t)$, tenemos:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial g}{\partial x}(t^2,t) = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2t^6}{(t^4+t^4)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^8}{4t^8} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, aplicando el Teorema de Cambio de Variable, de tener límite la parcial respecto de x en el origen, este sería $\frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$, por lo que $\frac{\partial g}{\partial x}$ no es continua en el origen.

3. $h(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \qquad \forall (x,y) \in U \qquad h(0,0) = 0$

   Sabemos que U es abierto. Como $h_{\big|U}$ es racional, tenemos que $h_{\big|U} \in C^1(U)$. Por tanto por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, en U tenemos que h es diferenciable, luego continua; y sus derivadas parciales son también continuas en todo punto de U. Calculémoslas:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2) - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \qquad \forall (x,y) \in U$$

   Por simetría, se tiene directamente que

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} \qquad \forall (x,y) \in U$$

   Estudiamos ahora la existencia de las derivadas parciales en el origen:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x,0) - h(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

   De nuevo, por simetría, tenemos que:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 0$$

   Por tanto, tenemos que h es parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, con $\nabla h(0,0) = (0,0)$.

   Veamos ahora que sus derivadas parciales son continuas en el origen:

$$0 \leqslant \left|\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)\right| = \left|\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right| = |2x| \cdot \left|\frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \leqslant |2x| \qquad \forall (x,y) \in U$$

   Por tanto, deducimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial h}{\partial x}(0,0)$, por lo que $\frac{\partial h}{\partial x}$ es continua en el origen. Análogamente, también se demuestra que $\frac{\partial h}{\partial x}$ en continua en el origen. Por tanto, ambas derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$

   Por tanto, por la condición suficiente de diferenciabilidad, tenemos que h es diferenciable en el origen, por lo que es continua también en el origen.

   En conclusión, tenemos que $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Ejercicio 2.2.2. Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = \frac{x^3(y-1)^2}{x^2+|y-1|} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}, \qquad f(0,1) = 0$$

Consideramos $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$, que sabemos que es un cerrado por ser la imagen inversa de $\{1\}$ (cerrado) mediante la proyección en la segunda coordenada, que es una función continua. Por tanto, sea $U = \mathbb{R}^2 \setminus C$.

Observación. Notemos que en este caso no se escoge $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$, ya que en ese abierto la función f no es de clase 1 por no serlo el valor absoluto.

Tenemos que $f_{\big|_U} \in C^1(U)$; y usando el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, tenemos que f es continua y diferenciable en todo punto de U. Además, sus derivadas parciales son continuas en todo punto de U. En concreto, para todo $(x,y) \in U$, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{3x^2(y-1)^2(x^2+|y-1|) - 2x^4(y-1)^2}{(x^2+|y-1|)^2} = \\ &= \frac{x^2(y-1)^2\ [3\cdot(x^2+|y-1|)-2x^2]}{(x^2+|y-1|)^2} = \frac{x^2(y-1)^2\ [3\cdot|y-1|+x^2]}{(x^2+|y-1|)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2(y-1)x^3(x^2+|y-1|) - x^3(y-1)^{\cancel{2}}\cdot\frac{|y-1|}{\cancel{y-1}}}{(x^2+|y-1|)^2} = \\ &= \frac{x^3(y-1)\ [2(x^2+|y-1|)-|y-1|\ ]}{(x^2+|y-1|)^2} = \frac{x^3(y-1)\ [2x^2+|y-1|\ ]}{(x^2+|y-1|)^2}\end{aligned}$$

Estudiamos ahora para los puntos de C. Tenemos que $C = \{(c,1) \mid c \in \mathbb{R}\}$. Veamos el valor de las derivadas parciales en dichos puntos. Tenemos que $f(x,1) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c,1) = \lim_{x\to c} \frac{f(x,1)-f(c,1)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{0-0}{x-c} = 0$$

Respecto a la segunda derivada parcial, tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(c,1) = \lim_{y\to 1} \frac{f(c,y)-f(c,1)}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{\frac{c^3(y-1)^2}{c^2+|y-1|} - 0}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{c^3(y-1)}{c^2+|y-1|} = 0 \qquad \forall c \neq 0$$

No obstante, para $c=0$, tenemos que $f(0,y) = 0\ \forall y \in \mathbb{R}$; por lo que el resultado anterior también es válido para $c=0$. Por tanto, f es parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, y se tiene que $\nabla f(c,1) = (0,0)$ para todo $(c,1) \in C$.

Veamos ahora que las derivadas parciales de f son continuas en todo punto $(c,1) \in C$.

$$\begin{aligned}0 \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &= \left|\frac{x^2(y-1)^2\ [3\cdot|y-1|+x^2]}{(x^2+|y-1|)^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+|y-1|}\right| \left|\frac{[3\cdot|y-1|+x^2]}{x^2+|y-1|}\right| (y-1)^2 \overset{(*)}{\leqslant} \\ &\overset{(*)}{\leqslant} \left|\frac{3\ [\ |y-1|+x^2]}{x^2+|y-1|}\right| (y-1)^2 = 3(y-1)^2\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos aplicado que $[3\cdot|y-1|+x^2] \leqslant 3\ [\ |y-1|+x^2]$, ya que $x^2 \geqslant 0$. Por tanto, se deduce que $\lim\limits_{(x,y)\to(c,1)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(c,1)$, por lo que $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en C y, por tanto, lo es en $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}0 \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| &= \left|\frac{x^3(y-1)\ [2x^2+|y-1|\ ]}{(x^2+|y-1|)^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+|y-1|}\right| \left|\frac{[2x^2+|y-1|\ ]}{x^2+|y-1|}\right| |x|\ |y-1| \overset{(**)}{\leqslant} \\ &\overset{(**)}{\leqslant} \left|\frac{2\ [x^2+|y-1|\ ]}{x^2+|y-1|}\right| |x|\ |y-1| = 2\ |x|\ |y-1|\end{aligned}$$

donde en $(**)$ hemos aplicado que $[2x^2+|y-1|\,] \leqslant 2\,[x^2+|y-1|\,]$, ya que $|y-1| \geqslant 0$. Por tanto, se deduce que $\lim\limits_{(x,y)\to(c,1)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(c,1)$, por lo que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en C y, por tanto, lo es en $\mathbb{R}^2$.

En conclusión, como las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$, tenemos que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Ejercicio 2.2.3. Probar que el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = \frac{x^6(x^2+y^2)}{(y-x^2)^2+x^6} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(0,0) = 0$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

Consideramos $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, que es un abierto por ser $\{(0,0)\}$ un cerrado. Además, $f_{|U} \in C^1(U)$ por ser racional; por lo que por el carácter local de la diferenciabilidad f es diferenciable en todo punto de U.

Como no pide información sobre las derivadas parciales en los puntos de U, evitamos calcularlas; ya que a simple vista parecen complejas. Veamos si f es parcialmente derivable en el origen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^8}{x^4+x^6}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{1+x^2} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

Por tanto, tenemos que f es parcialmente derivable en el origen, con $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Veamos ahora si f es diferenciable o no en el origen. Para ello, buscamos acotar la función $\varphi : U \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-(\nabla f(0,0) \mid (x,y))}{\|(x,y)\|} = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^6(x^2+y^2)}{[(y-x^2)^2+x^6]\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$= \frac{x^6\sqrt{x^2+y^2}}{(y-x^2)^2+x^6} \qquad \forall x \in U$$

Tenemos que la acotación es:

$$0 \leqslant |\varphi(x,y)| \leqslant |\sqrt{x^2+y^2}| \qquad \forall (x,y) \in U$$

de lo que se deduce que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = 0$, luego f es diferenciable en el origen. Por tanto, f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.2.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = (x+y)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(0,0) = 0$$

Consideramos $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ abierto, y veamos que $f_{|U} \in C^1(U)$. Como en la Figura 2.1 se ve, el término de la derecha es composición de funciones de clase C^1

en sus respectivos dominios; y por la Regla de la Cadena, dicha composición es de clase 1. Veamos cuáles son esas funciones. Tenemos que la aplicación $p : U \to \mathbb{R}^+$ es polinómica, por lo que es de clase 1. Además, $\sqrt{x}$ es también de clase 1; por lo que la composición (el denominador) es de clase 1. Además, la función inversa $\frac{1}{x}$ con dominio en $\mathbb{R}^+$ es de clase 1, por lo que el argumento del seno es de clase 1. Por último, $x \mapsto \operatorname{sen} x$ es de clase 1, y el argumento hemos visto que también; por lo que por la Regla de Cadena, tenemos que la composición es de clase 1.

$$U \xrightarrow{\quad p \quad} \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\quad \sqrt{x} \quad} \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\quad \frac{1}{x} \quad} \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\quad \operatorname{sen}(x) \quad} [0,1] \subset \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto x^2+y^2 \longmapsto \sqrt{x^2+y^2} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \longmapsto \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Figura 2.1: Composición del término de la derecha.

Además, el término de la izquierda es polinómico, por lo que es también de clase 1. Por tanto, $f_{|_U} \in C^1(U)$. Por el carácter local de la continuidad y diferenciabilidad, tenemos que f es continua y diferenciable para todo punto de U. Además, sus derivadas parciales son continuas en todo punto de U. La parcial respecto de x para todo punto de U es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= n(x+y)^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x+y)^n\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{-1}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x = \\ &= n(x+y)^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - (x+y)^n\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

La derivada parcial respecto de y de f coincide debido a la simetría. Por tanto, calculamos ahora la derivada parcial respecto de x en el origen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^n\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1}\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{|x|}$$

- <u>Para $n-1<0 \Longleftrightarrow n<1$</u>:

  Tenemos que la derivada parcial respecto a x en el origen no está definida (el límite no converge, diverge), por lo que f no es diferenciable en el origen. Además, por la simetría, la derivada parcial respecto a y en el origen tampoco está definida.

  Para estudiar la continuidad de f en el origen, distinguimos casos:

  - <u>Para $n=0$</u>:

    Tenemos que $f(x,y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Como es límite buscado es en el origen, aplicamos el cambio de variable $(x,y) = (t,t)$:

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2t^2}}\right) = \lim_{t\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\ |t|}\right)$$

Por tanto, este límite no existe, por lo que el límite de f en el origen tampoco existe, implicando que f no es continua en el origen.

- Para $n < 0$:

  Como es límite buscado es en el origen, aplicamos el cambio de variable $(x,y) = (t,t)$:

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} (2t)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2t^2}}\right) = \lim_{t\to 0} 2^n t^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\ |t|}\right)$$

  Por tanto, este límite no existe (diverge), por lo que el límite de f en el origen tampoco existe, implicando que f no es continua en el origen.

Por tanto, f es continua, diferenciable y con derivadas parciales continuas tan solo en U para $n < 1$.

- Para $n - 1 = 0 \Longleftrightarrow n = 1$:

Tenemos que la derivada parcial respecto a x en el origen no está definida (el límite no converge), ya que queda:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{|x|}$$

Por tanto, f no es diferenciable en el origen. Además, por la simetría, la derivada parcial respecto a y en el origen tampoco está definida. Veamos ahora si f es continua en el origen:

$$0 \leqslant |f(x,y)| = \left|(x+y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leqslant x + y$$

de lo que se deduce que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, por lo que f es continua en el origen.

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}^2$. No obstante, f es diferenciable y con derivadas parciales continuas tan solo en U.

- Para $n - 1 > 0 \Longleftrightarrow n > 1$: :

Tenemos que las derivadas parciales en el origen son nulas, por lo que el gradiente es $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Estudiamos por tanto la diferenciabilidad. Para ello, definimos la función $\varphi : U \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - (\nabla f(0,0) \mid (x,y))}{\|(x,y)\|} = \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}$$

Por facilidad para los cálculos, usamos la norma 1 en el denominador:

$$\varphi(x,y) = \frac{(x+y)^n}{|x|+|y|}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Buscamos acotar dicha función. Para todo $(x,y) \in U$, tenemos:

$$0 \leqslant |\varphi(x,y)| = \left|\frac{(x+y)^n}{|x|+|y|}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leqslant \left|\frac{(x+y)^n}{|x|+|y|}\right| = \frac{|(x+y)^n|}{|x|+|y|} \overset{(*)}{\leqslant}$$
$$\overset{(*)}{\leqslant} \frac{|(x+y)^n|}{|x+y|} = |(x+y)^{n-1}|$$

donde, como $n > 1$, se deduce que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = 0$. Además, en $(*)$ hemos usado la desigualdad triangular.

Entonces, f es diferenciable, y por tanto continua, en el origen. Tan solo falta por ver si las derivadas parciales son continuas en el origen Para ello, calculamos el límite radial en el origen en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) &= \lim_{x\to 0^+} n(2x)^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right) - (2x)^n\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)\cdot\frac{x}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \lim_{x\to 0^+} n(2x)^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right) - 2^n\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)\cdot\frac{x^{n+1}}{2^{\frac{3}{2}}x^3} = \\ &= \lim_{x\to 0^+} n(2x)^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right) - 2^{n-\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)\cdot x^{n-2}\end{aligned}$$

- Para $n = 2$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \lim_{x\to 0^+} 4x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right) - \sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)$$

  Tenemos que, para $n = 2$, ese límite no converge; ya que no lo hace el coseno. Por tanto, la derivada parcial respecto a x (y por simetría también respecto a y) no son continuas en el origen. Por tanto, ambas derivadas parciales son continuas tan solo en U.

- Para $n > 2$:
  La derivada parcial respecto a x en coordenadas polares es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta) &= n\rho^{n-1}[\cos\theta+\operatorname{sen}\theta]^{n-1}\operatorname{sen}\frac{1}{|\rho|} - \rho^n[\cos\theta+\operatorname{sen}\theta]^n\cos\frac{1}{|\rho|}\cdot\frac{\rho\cos\theta}{\rho^2|\rho|} = \\ &= \rho^{n-1}[\cos\theta+\operatorname{sen}\theta]^{n-1}\left[n\operatorname{sen}\frac{1}{|\rho|} - \rho[\cos\theta+\operatorname{sen}\theta]\cos\frac{1}{|\rho|}\cdot\frac{\rho\cos\theta}{\rho^2|\rho|}\right] = \\ &= \rho^{n-1}[\cos\theta+\operatorname{sen}\theta]^{n-1}\left[n\operatorname{sen}\frac{1}{|\rho|} - \frac{1}{|\rho|}[\cos\theta+\operatorname{sen}\theta]\cos\theta\cos\frac{1}{|\rho|}\right]\end{aligned}$$

Acotamos dicha función:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\right| = \\
&= \left|\rho^{n-1}\right| \cdot \left|[\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta]^{n-1}\right| \cdot \left|n\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{|\rho|} - \frac{1}{|\rho|}[\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta]\cos\theta\cos\frac{1}{|\rho|}\right| \overset{(*)}{\leqslant} \\
&\overset{(*)}{\leqslant} \left|\rho^{n-1}\right| \cdot \left|[\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta]^{n-1}\right| \cdot \left[\left|n\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{|\rho|}\right| + \left|\frac{1}{|\rho|}[\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta]\cos\theta\cos\frac{1}{|\rho|}\right|\right] \leqslant \\
&\leqslant \left|\rho^{n-1}\right| \cdot 2^{n-1} \cdot \left[n + \frac{2}{|\rho|}\right] = \left|\rho^{n-2}\right| \cdot 2^{n-1} \cdot [n|\rho| + 2]
\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que $|b-c| \leqslant |b| + |-c| = |b| + |c|$ para todo $b, c \in \mathbb{R}$. Como $n \geqslant 2$, tenemos que $\lim\limits_{\rho\to 0} |\rho^{n-2}| \cdot 2^{n-1} \cdot [n|\rho| + 2] = 0$. Por tanto, tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Por tanto, tenemos que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Ejercicio 2.2.5. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}^+$, estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha}{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(0,0) = 0$$

Ejercicio 2.2.6. Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \qquad f(0,0,0) = 0$$

Sea $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Tenemos que U es un abierto, y veamos que $f_{|_U} \in C^1(U)$. El numerador es polinómica, por lo que es de clase 1. El denominador es una composición de una polinómica con la raíz cuadrada, que es de clase 1 en $\mathbb{R}^+$. Por tanto, tenemos que $f_{|_U}$ es cociente de dos funciones de clase 1, por lo que $f_{|_U} \in C^1(U)$. Por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, tenemos que f es continua y diferenciable en todo punto de U. Además, sus derivadas parciales son continuas en todo punto de U, siendo estas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y,z) = \frac{yz\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{x^2yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{yz(x^2+y^2+z^2) - x^2yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \forall (x,y,z) \in U$$

Además, por la simetría notemos que todas las derivadas parciales coinciden. Calculemos ahora el valor de las derivadas parciales en el origen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} f(0,0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0,0) - f(0,0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

De nuevo, por simetría, tenemos que todas las derivadas parciales en el origen coinciden. Veamos que la derivada parcial respecto de x es continua en el origen. Para todo $(x,y,z) \in U$, se tiene:

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y,z)\right| &= \left|\frac{yz(x^2+y^2+z^2) - x^2yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant \left|\frac{yz(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right| + \left|\frac{x^2yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right| = \\
&= \left|\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| + \left|\frac{x^2yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| = \\
&= \left|\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| + \left|\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)}\right| \left|\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| \leqslant |z| + |z|
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} f(x,y,z) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} f(0,0,0)$$

Por tanto, $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $\mathbb{R}^3$, y análogamente se tiene que lo son el resto de derivadas parciales. Por tanto, queda directamente demostrado que $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

Ejercicio 2.2.7 (Prueba DGIIM 2023-24)**.** Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad\qquad f(0,0) = 0$$

Sea el conjunto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \in \mathcal{T}_u$. El primer término es polinómico, por lo que es de clase $C^1(U)$. El segundo término es composición del coseno, que es de clase $C^1(\mathbb{R})$, con una función racional, que es de clase $C^1(U)$. Como la composición de funciones de clase C^1 es de clase C^1, tenemos que el segundo término es de clase $C^1(U)$. Como el producto de funciones de clase C^1 es de clase C^1, tenemos que $f\big|_U \in C^1(U)$. Por el carácter local de la continuidad y la diferenciabilidad, tenemos que f es continua y diferenciable en todo punto de U. Además, sus derivadas parciales son continuas en todo punto de U, siendo estas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{2x}{x^2+y^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \qquad \forall (x,y) \in U$$

Por simetría, como $f(x,y) = f(y,x)$, tenemos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Calculamos ahora el valor de las derivadas parciales en el origen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos\frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x^2} = 0$$

Por simetría, tenemos que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Por tanto, tenemos que f es parcialmente derivable en el origen, con $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Veamos ahora si f es diferenciable en el origen. Para ello, definimos la función $\varphi : U \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - (\nabla f(0,0) \mid (x,y))}{\|(x,y)\|} = \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = \frac{(x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Veamos que φ está acotada. Para todo $(x,y) \in U$, tenemos:

$$0 \leqslant |\varphi(x,y)| = \left|\frac{(x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, tenemos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = 0$. Por tanto, f es diferenciable en el origen, y por tanto continua en el origen. Veamos ahora si las derivadas parciales son continuas en el origen. Para ello, consideramos dos sucesiones de puntos de U que convergen al origen. Tomamos:

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot n+1}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Es directo ver que $\{x_n\} \to 0$ y $\{x'_n\} \to 0$. Además, sabemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2x}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 2x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Veamos ahora que $\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es continua en el origen. Para ello, tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,0) = 2x_n\cos\left(\frac{1}{x_n^2}\right) + \frac{2}{x_n}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n^2}\right) = 2x_n\cdot 1 + \frac{2}{x_n}\cdot 0 = 2x_n$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x'_n,0) = 2x'_n\cos\left(\frac{1}{(x'_n)^2}\right) + \frac{2}{x'_n}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{(x'_n)^2}\right) = 2x'_n\cos(1) + \frac{2}{x'_n}\operatorname{sen}(1)$$

Por tanto,

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,0)\right\} = \{2x_n\} \to 0$$
$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x'_n,0)\right\} = \left\{2x'_n\cos(1) + \frac{2}{x'_n}\operatorname{sen}(1)\right\} \to 0 + \operatorname{sen}1\cdot\infty = \infty$$

Es decir, tenemos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en el origen, ya que para dos sucesiones distintas de puntos de U que convergen al origen, tenemos que las sucesiones de valores de $\frac{\partial f}{\partial x}$ no convergen al mismo valor. Por tanto, $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en el origen, y por simetría, tampoco lo es $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el origen. Por tanto, f es diferenciable en el origen, pero sus derivadas parciales no son continuas en el origen.

En resumen, tenemos que f es continua y diferenciable en $\mathbb{R}^2$, pero sus derivadas parciales no son continuas en el origen.

Ejercicio 2.2.8 (Ordinaria DGIIM 2022-23 y 2023-24[1])**.** Probar que la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\frac{xy-\operatorname{sen}(xy)}{(x^2+y^2)^2}\qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\qquad f(0,0)=0$$

es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$.

Sea $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Tenemos que U es un abierto, y veamos que la restricción $f_{|_U}\in C^1(U)$. El numerador es la diferencia de una funión polinómica, luego de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$, con la composición de la misma polinómica con el seno, que es de clase $C^1(\mathbb{R})$. Por tanto, el numerador es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$. El numerador es polinómica, por lo que es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$. Por tanto, $f_{|_U}$ es el cociente de dos funciones de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$, por lo que $f_{|_U}\in C^1(U)$. Además, las derivadas parciales de f son continuas en todo punto de U, siendo estas para todo $(x,y)\in U$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{(y-y\cos(xy))(x^2+y^2)^2-4x(x^2+y^2)(xy-\operatorname{sen}(xy))}{(x^2+y^2)^4}=\\&=\frac{y(1-\cos(xy))(x^2+y^2)-4x(xy-\operatorname{sen}(xy))}{(x^2+y^2)^3}=\\&=\frac{y(1-\cos(xy))}{(x^2+y^2)^2}-\frac{4x(xy-\operatorname{sen}(xy))}{(x^2+y^2)^3}\end{aligned}$$

Además, como $f(x,y)=f(y,x)$, por simetría tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)\qquad\forall (x,y)\in U$$

Trabajamos ahora en el origen. Calculamos el valor de las derivadas parciales en el origen. Para ello, tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=\frac{0}{(x^2)^2}-\frac{4x(0-0)}{(x^2)^3}=0-0=0\qquad\forall x\in\mathbb{R}^*$$

Por tanto, tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

Como el enunciado nos pide demostrar que es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$, ya sabemos que es continua y diferenciable en el origen. Para probar lo buscado, hemos de demostrar que sus derivadas parciales son continuas en el origen. Es decir, tenemos que ver que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

Buscamos entonces acotar la función $\frac{\partial f}{\partial x}$ con una función que tienda a 0 cuando $(x,y)\to(0,0)$.

[1]Se repitió ambos años.

Por la regla de L'Hôpital, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{2t} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos t}{2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, definiendo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^* \qquad\qquad \varphi(t) = \frac{1}{2}$$

tenemos que φ es continua en el origen, y por tanto verifica:

$$t^2\varphi(t) = 1 - \cos(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

De forma análoga, por la regla de L'Hôpital, tenemos que:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t-\operatorname{sen} t}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{3t^2} = \frac{1}{6}$$

Por tanto, definiendo $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\psi(t) = \frac{t-\operatorname{sen}(t)}{t^3} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^* \qquad\qquad \psi(t) = \frac{1}{6}$$

tenemos que ψ es continua en el origen, y por tanto verifica:

$$t^3\psi(t) = t - \operatorname{sen}(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Tomando $t = xy$ para $(x, y) \in U$, tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y \cdot x^2y^2\varphi(xy)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{4x \cdot x^3y^3\psi(xy)}{(x^2+y^2)^3}$$

Por tanto, usando que $x^2 \leqslant x^2 + y^2$ e $y^2 \leqslant x^2 + y^2$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &= \left|\frac{y \cdot x^2y^2\varphi(xy)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{4x \cdot x^3y^3\psi(xy)}{(x^2+y^2)^3}\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\frac{y \cdot x^2y^2\varphi(xy)}{(x^2+y^2)^2}\right| + \left|\frac{4x \cdot x^3y^3\psi(xy)}{(x^2+y^2)^3}\right| \leqslant \\ &\leqslant |y \cdot \varphi(xy)| + |4y \cdot \psi(xy)| \end{aligned}$$

Como $\{xy\} \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ y φ y ψ son continuas en el origen, tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y \cdot \varphi(xy)|\, |4y \cdot \psi(xy)| = 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{6} = 0$$

Y, como es una acotación de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ que tiende a 0, tenemos lo buscadoo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

Por tanto, la derivada parcial de f respecto de x es también continua en el origen. Por simetría, tenemos que la derivada parcial de f respecto de y es continua en el origen.

Por tanto, como f es parcialmente diferenciable, con derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^2$, tenemos que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Ejercicio 2.2.9 (Ordinaria DGIIM 2023-24 Incidencias)**.** Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y)=\frac{y\log(1+x^2)}{x^2+y^2}\quad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\qquad f(0,0)=0$$

2.3. Imagen de una función de dos variables

Ejercicio 2.3.1. Calcular la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$, donde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leqslant 2y - y^2\} \qquad \text{y} \qquad f(x, y) = x^2 + y(y^3 - 4)$$

Veamos en primer lugar el conjunto en el que está definido, A:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leqslant 2y - y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2y + y^2 \leqslant 0\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1\} = \\ &= \overline{B}[(0, 1), 1] \end{aligned}$$

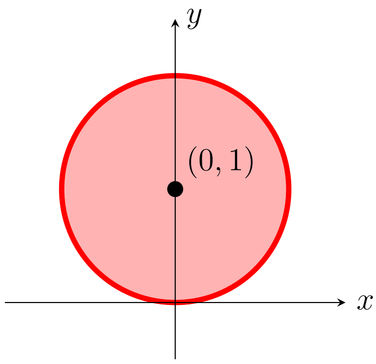


Figura 2.2: Conjunto de definición $A = \overline{B}[(0, 1), 1]$.

Como A es una bola cerrada, tenemos que es un conjunto cerrado y acotado, luego compacto. Además, es convexo, luego conexo. Como f es continua por ser polinómica, tenemos que $f(A) \subset \mathbb{R}$ es compacto (Teorema de Weierstrass) y conexo (Teorema del Valor Intermedio), por lo que es un intervalo cerrado y acotado, por lo que tiene mínimo y máximo.

Estudiamos en primer lugar su interior. Tenemos que $A^\circ = B[(0, 1), 1]$. Como f es diferenciable en todo punto de A° por ser polinómica, tenemos que f es parcialmente derivable en todo punto $(x, y) \in A^\circ$, con:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4$$

Por tanto, los puntos críticos del interior de A son aquellos que cumplen la condición necesaria de extremo relativo, $\nabla f(x, y) = 0$. En este caso, el único punto crítico del interior de A es el punto $(0, 1) \in A^\circ$.

Nos falta por estudiar la frontera de A. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Fr} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 2y - y^2\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 = 1\} = \\ &= S[(0, 1), 1] \end{aligned}$$

Además, como para todo $(x, y) \in A$, se tiene que $x^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1$, entonces:

$$(y - 1)^2 \leqslant 1 \Longrightarrow |y - 1| \leqslant 1 \Longrightarrow y \in [0, 2]$$

Por tanto, para $(x, y) \in \mathrm{Fr}\, A \subset A$, tenemos que:

$$f(x, y) = x^2 + y(y^3 - 4) = 2y - y^2 + y^4 - 4y = y^4 - y^2 - 2y$$

Es decir, $f(\mathrm{Fr}\, A) = h([0, 2])$, con $h : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $h(y) = y^4 - y^2 - 2y$. Calculamos por tanto la imagen de dicha función real de variable real. Como es polinómica, tenemos que h es derivable en $[0, 2]$, con $h'(y) = 4y^3 - 2y - 2$. Los puntos críticos son entonces los que anulan la primera derivada:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & & 2 & 2 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Por tanto, tenemos que $h'(y) = 2(y - 1)(2y^2 + 2y + 1)$. Como $y \in [0, 2]$, tenemos que el segundo factor no se anula. Por tanto, tenemos que los posibles extremos absolutos de h son $\{0, 1, 2\}$.

$$h(0) = 0 \qquad h(1) = -2 \qquad h(2) = 16 - 4 - 4 = 8$$

Por tanto, $h([0, 2]) = f(\mathrm{Fr}\, A) = [-2, 8]$.

Como el único candidato a extremo relativo del interior de A era el punto $(0, 1)$, y $f(0, 1) = -3$, tenemos que:

$$f(A) = [-3, 8]$$

El mínimo absoluto se da en $(0, 1)$, y el máximo absoluto se da para $y = 2$, es decir, para el punto $(0, 2)$.

Ejercicio 2.3.2. Calcular la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$, donde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0\} \qquad \text{y} \qquad f(x, y) = (x - 2)^2 + 2y^2$$

Veamos en primer lugar el conjunto en el que está definido, A:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0\} = \overline{B}[(1, 0), 2] \cap (\mathbb{R}^+_0 \times \mathbb{R})$$

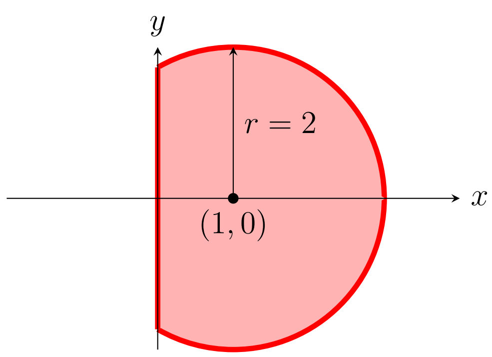


Figura 2.3: Conjunto de definición A.

Tenemos que $\mathbb{R}^+_0 \times \mathbb{R} = g^{-1}([0, +\infty[)$, donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$ es una función continua y $[0, +\infty[$ es un cerrado. Como la imagen inversa de un cerrado mediante una función continua es un cerrado, tenemos que $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ es un cerrado. Además, como una bola cerrada es un cerrado, tenemos que A es la intersección de dos cerrados, luego es cerrado. Además, es acotado, ya que $A \subset B[(1,0),3]$ (por ejemplo). Por tanto como es cerrado y acotado y $A \subset \mathbb{R}^n$, tenemos que es compacto.

Además, una bola cerrada es convexa, y el semiplano $x \geqslant 0$ también es convexo, luego su intersección es convexa, luego conexa.

Como f es continua por ser polinómica, tenemos que $f(A) \subset \mathbb{R}$ es compacto (Teorema de Weierstrass) y conexo (Teorema del Valor Intermedio), por lo que es un intervalo cerrado y acotado, por lo que tiene mínimo y máximo.

Estudiamos en primer lugar su interior. Tenemos que $A^\circ = B[(1,0),2] \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Como f es diferenciable en todo punto de A° por ser polinómica, tenemos que f es parcialmente derivable en todo punto $(x,y) \in A^\circ$, con:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-2) \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y$$

Por tanto, los puntos críticos del interior de A son aquellos que cumplen la condición necesaria de extremo relativo, $\nabla f(x,y) = 0$. En este caso, el único punto crítico del interior de A es el punto $(2,0) \in A^\circ$.

Nos falta por estudiar la frontera de A. Tenemos que $\operatorname{Fr} A = C_1 \cup C_2$, donde:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 4,\ x \geqslant 0\} = S[(1,0),2] \cap (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}) \\
C_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0,\ (x-1)^2 + y^2 \leqslant 4\} = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1^2 + y^2 \leqslant 4\} = \\
&= \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leqslant 3\} = \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]\right\}
\end{aligned}$$

Estudiamos en primer lugar C_1. En este arco paramétrico, tenemos que $y^2 = 4-(x-1)^2$. Además, como en todo punto de C_1 se tiene que $(x-1)^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0$, tenemos que $|x-1| \leqslant 2,\ x \geqslant 0$, luego $x \in [0,3]$. Definimos entonces la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rrcl}
h_1: & [0,3] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 & x & \longmapsto & (x-2)^2 + 2y^2 = (x-2)^2 + 2(4-(x-1)^2)
\end{array}$$

Tenemos que h_1 es una función real de variable real. Como es polinómica, es derivable en todo punto de $]0,3[$, por lo que los puntos críticos de su interior son aquellos que anulan la primera derivada:

$$\begin{aligned}
h_1(x) = (x-2)^2 + 2(4-(x-1)^2) = x^2 + 4 - 4x + 8 - 2x^2 - 2 + 4x = -x^2 + 10 \Longrightarrow \\
\Longrightarrow h_1'(x) = -2x = 0 \Longleftrightarrow x = 0
\end{aligned}$$

Por tato, tenemos que los candidatos a extremos absolutos de h_1 son $\{0,3\}$.

$$h_1(0) = 10 \qquad h_1(3) = 1$$

Por tanto, $h_1([0,3]) = f(C_1) = [1,10]$.

Estudiamos ahora C_2. En este caso, nos definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rrcl}
h_2: & [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 & y & \longmapsto & (x-2)^2 + 2y^2 = 4 + 2y^2
\end{array}$$

Tenemos que h_2 es una función real de variable real. Como es polinómica, es derivable en todo punto de $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$, por lo que los puntos críticos de su interior son aquellos que anulan la primera derivada:

$$h_2'(y) = 4y = 0 \Longleftrightarrow y = 0$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos absolutos de h_2 son $\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$.

$$h_2(-\sqrt{3}) = h_2(\sqrt{3}) = 10 \qquad h_2(0) = 4$$

Por tanto, $h_2([-\sqrt{3}, \sqrt{3}]) = f(C_2) = [4, 10]$.

Como el único candidato a extremo relativo del interior de A era el punto $(2, 0)$, y $f(2, 0) = 0$, tenemos que:

$$f(A) = [0, 10]$$

Ejercicio 2.3.3. Calcular la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$, donde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 \leqslant 2\} \qquad \text{y} \qquad f(x, y) = x^2(y-1)^3$$

Veamos en primer lugar el conjunto en el que está definido, A:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{y^2}{2} \leqslant 1\right\}$$

Por tanto, se trata de una elipse centrada en el origen, con semiejes $b = 1$ y $a = \sqrt{2}$, con el eje mayor en el eje Y.

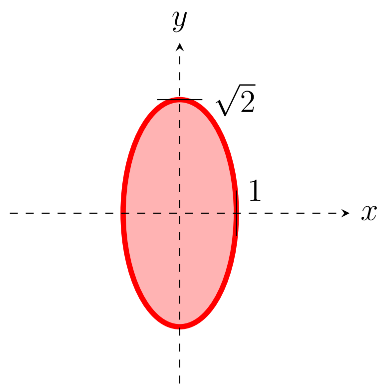


Figura 2.4: Conjunto de definición A.

Sabemos que A es homeomorfo a $\overline{B}(0, 1)$, por lo que es compacto y conexo. No obstante, resolveremos dicho ejercicio sin usar dicha propiedad, parte del temario de Topología I.

En primer lugar, sabemos que es cerrado, ya que es la imagen inversa mediante una función polinómica (luego continua) del intervalo $]-\infty, 1]$, que es cerrado. Además, es acotado, ya que $A \subset B(0, 2)$ (por ejemplo). Por tanto como es cerrado y acotado y $A \subset \mathbb{R}^n$, tenemos que es compacto.

Para ver que es conexo, vamos a ver que es convexo. Sea $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$. Tenemos que ver que $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] \subset A$. En efecto, un punto de dicho segmento es de la forma:

$$(1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) \qquad \text{con } t \in [0, 1]$$

Por tanto, tenemos que:

$$2((1-t)x_1+tx_2)^2+((1-t)y_1+ty_2)^2 \overset{(*)}{\leqslant} 2((1-t)x_1^2+tx_2^2)+((1-t)y_1^2+ty_2^2)=$$
$$=(1-t)[2x_1^2+y_1^2]+t[2x_2^2+y_2^2] \overset{(**)}{\leqslant} (1-t)\cdot 2+t\cdot 2=2 \qquad \forall t\in[0,1]$$

donde en $(*)$ hemos usado que, como la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=x^2$ es convexa, entonces $[(1-t)a+tb]^2\leqslant(1-t)a^2+tb^2$ para todo $a,b\in\mathbb{R}$ y todo $t\in[0,1]$. En $(**)$ hemos usado que $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A$. Por tanto, tenemos que $[(x_1,y_1),(x_2,y_2)]\subset A$, luego A es convexo, luego conexo.

Como f es continua por ser polinómica, tenemos que $f(A)\subset\mathbb{R}$ es compacto (Teorema de Weierstrass) y conexo (Teorema del Valor Intermedio), por lo que es un intervalo cerrado y acotado, por lo que tiene mínimo y máximo.

Estudiamos en primer lugar su interior. Tenemos que $A^\circ=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 2x^2+y^2<2\}$. Como f es diferenciable en todo punto de A° por ser polinómica, tenemos que f es parcialmente derivable en todo punto $(x,y)\in A^\circ$, con:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x(y-1)^3 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x^2(y-1)^2$$

Por tanto, los puntos críticos del interior de A son aquellos que cumplen la condición necesaria de extremo relativo, $\nabla f(x,y)=0$.

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Longleftrightarrow\begin{cases}2x(y-1)^3=0\\3x^2(y-1)^2=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \quad\vee\\y=1\end{cases}$$

Por tanto, hay un conjunto no numerable de puntos críticos del interior de A. Estos son $\{(0,y),(x,1)\in\mathbb{R}^2\mid x,y\in\mathbb{R}\}$. Tenemos que:

$$f(0,y)=0 \qquad f(x,1)=0$$

Nos falta por estudiar la frontera de A. Tenemos que $\operatorname{Fr}A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 2x^2+y^2=2\}$. Tenemos que $x^2=1-\frac{y^2}{2}$. Además, como en todo punto de A, se tiene que $y^2\leqslant 2$, por lo que $y\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$. Nos definimos entonces la siguiente función auxiliar:

$$\begin{aligned}h:\ \left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]&\longrightarrow\mathbb{R}\\ y&\longmapsto x^2(y-1)^3=\left(1-\frac{y^2}{2}\right)(y-1)^3\end{aligned}$$

Tenemos que h es una función real de variable real. Como es polinómica, es derivable en todo punto de $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$, por lo que los puntos críticos de su interior son aquellos que anulan la primera derivada:

$$h'(y)=-y(y-1)^3+\left(1-\frac{y^2}{2}\right)[3(y-1)^2]=(y-1)^2\left[-y(y-1)+3\left(1-\frac{y^2}{2}\right)\right]=$$
$$=(y-1)^2\left[-y^2+y+3-\frac{3y^2}{2}\right]=(y-1)^2\left[-\frac{5y^2}{2}+y+3\right]=0\Longleftrightarrow\begin{cases}y=1\\ \quad\vee\\ y=\dfrac{1\pm\sqrt{31}}{5}\end{cases}$$

Veamos cuáles valores de y son válidos. Como $y \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, tenemos que:

$$\frac{1 \pm \sqrt{31}}{5} < \sqrt{2} \Longleftrightarrow 1 \pm \sqrt{31} < 5\sqrt{2} \Longleftrightarrow 1 + 31 \pm 2\sqrt{31} < 50 \Longleftrightarrow \pm\sqrt{31} < 18$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{31}}{5} > \sqrt{-2} \Longleftrightarrow 1 \pm \sqrt{31} > -5\sqrt{2} \Longleftrightarrow -1 \mp \sqrt{31} < 5\sqrt{2} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 1 + 31 \pm 2\sqrt{31} < 50 \Longleftrightarrow \pm\sqrt{31} < 18$$

Por tanto, tenemos que los tres candidatos son válidos. Veamos cuáles son los extremos absolutos de h en $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

$$h\left(\sqrt{2}\right) = h\left(-\sqrt{2}\right) = 0 = h(1)$$

Por la complejidad de los cálculos, evitamos calcular la imagen de los otros dos puntos críticos, sino tan solo su signo. Como $h(y) = \left(1 - \frac{y^2}{2}\right)(y-1)^3$ y el primer término siempre es positivo, el segundo término, $y - 1$, determina el signo de $h(y)$.

$$h\left(\frac{1+\sqrt{31}}{5}\right) > 0 \Longleftrightarrow \frac{1+\sqrt{31}}{5} > 1 \Longleftrightarrow 1 + \sqrt{31} > 5 \Longleftrightarrow \sqrt{31} > 4 \Longleftrightarrow 31 > 16$$

$$h\left(\frac{1-\sqrt{31}}{5}\right) < 0 \Longleftrightarrow \frac{1-\sqrt{31}}{5} < 1 \Longleftrightarrow 1 - \sqrt{31} < 5 \Longleftrightarrow -\sqrt{31} < 4$$

Por tanto, tenemos que la imagen de f es:

$$f(A) = \left[h\left(\frac{1-\sqrt{31}}{5}\right), h\left(\frac{1+\sqrt{31}}{5}\right)\right]$$

Ejercicio 2.3.4. Calcular la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$, donde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2 - y^2\} \qquad \text{y} \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$$

Veamos en primer lugar el conjunto en el que está definido, A:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 2 - y^2\}$$

El primer conjunto es directo ver que se trata del semiplano $x \geqslant 0$. El segundo conjunto es la región del plano delimitada por la parábola $x = -y^2 + 2$. Dibujémoslo:

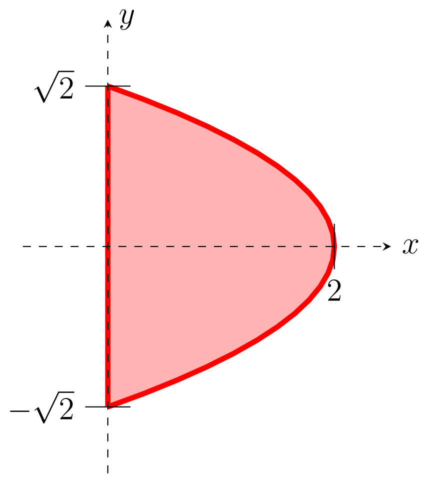


Figura 2.5: Conjunto de definición A.

Sabemos que A es homeomorfo a $\overline{B}(0,1)$, por lo que es compacto y conexo. No obstante, resolveremos dicho ejercicio sin usar dicha propiedad, parte del temario de Topología I.

En primer lugar, sabemos que el semiplano $x \geqslant 0$ es cerrado, ya que es la imagen inversa mediante una función polinómica (luego continua) del intervalo $[0,+\infty[$, que es cerrado. La región delimitada por la parábola es cerrada, ya que es la imagen inversa mediante una función polinómica (luego continua) del intervalo $]-\infty,2]$, que es cerrado. Por tanto, A es la intersección de dos cerrados, luego es cerrado.

Además, es acotado, ya que $A \subset B(0,7)$ (por ejemplo). Por tanto como es cerrado y acotado y $A \subset \mathbb{R}^n$, tenemos que es compacto. Veamos ahora que es conexo. El semiplano es convexo. Veamos que la región delimitada por la parábola también lo es. Sea P dicha región, y sean $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in P$. Tenemos que ver que $[(x_1,y_1),(x_2,y_2)] \subset P$. Un punto de dicho segmento es de la forma:

$$(1-t)(x_1,y_1)+t(x_2,y_2) = ((1-t)x_1+tx_2,(1-t)y_1+ty_2) \qquad \text{con } t \in [0,1]$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}((1-t)y_1+ty_2)^2+((1-t)x_1+tx_2) &\overset{(*)}{\leqslant} (1-t)y_1^2+ty_2^2+(1-t)x_1+tx_2 = \\ &= (1-t)[y_1^2+x_1]+t[y_2^2+x_2] \overset{(**)}{\leqslant} (1-t)\cdot 2+t\cdot 2 = 2\cdot(1-t+t) = 2\end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que, como la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=x^2$ es convexa, entonces $[(1-t)a+tb]^2 \leqslant (1-t)a^2+tb^2$ para todo $a,b\in\mathbb{R}$ y todo $t\in[0,1]$. En $(**)$ hemos usado que $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in P$. Por tanto, tenemos que $[(x_1,y_1),(x_2,y_2)]\subset P$, luego P es convexo.

Como la intersección de dos conjuntos convexos es convexa, tenemos que A es convexo, luego conexo.

Por tanto, tenemos que A es compacto y conexo, y como $f\in C^1(A)$, en particular continua, tenemos que $f(A)\subset\mathbb{R}$ es compacto (Teorema de Weierstrass) y conexo (Teorema del Valor Intermedio), por lo que es un intervalo cerrado y acotado, por lo que tiene mínimo y máximo. Es decir:

$$f(A) = [\min f(A), \max f(A)]$$

Estudiamos en primer lugar su interior. Tenemos que:

$$A^\circ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<2-y^2\}$$

Como f es diferenciable en todo punto de A° por ser polinómica, tenemos que f es parcialmente derivable en todo punto $(x,y)\in A^\circ$, con:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x-2 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

Por tanto, los puntos críticos del interior de A son aquellos que cumplen la condición necesaria de extremo relativo, $\nabla f(x,y)=0$. En este caso, el único punto crítico del interior de A es el punto $(1,0)\in A^\circ$, con $f(1,0)=-1$.

Nos falta por estudiar la frontera de A. Tenemos que:

$$\operatorname{Fr} A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0, x+y^2\leqslant 2\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=2-y^2, x\geqslant 0\}$$

Sea $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, x + y^2 \leqslant 2\} = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leqslant 2\}$. Además, como en C_1 se tiene $x = 0$, $f_{|_{C_1}}(y) = y^2$. Nos definimos entonces la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccl} h_1 : & \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & x^2 + y^2 - 2x = y^2 \end{array}$$

Tenemos que h_1 es una función real de variable real. Como es polinómica, es derivable en todo punto de $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, por lo que los puntos críticos de su interior son aquellos que anulan la primera derivada:

$$h_1'(y) = 2y = 0 \Longleftrightarrow y = 0$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos absolutos de h_1 son $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

$$h_1(-\sqrt{2}) = h_1(\sqrt{2}) = 2 \qquad h_1(0) = 0$$

Por tanto, $h_1\left(\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]\right) = f(C_1) = [0, 2]$.

Sea $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2 - y^2, x \geqslant 0\}$. Para todo punto de x, se tiene que $x \geqslant 0$, luego $2-y^2 \geqslant 0$, luego $y^2 \leqslant 2$. Por tanto, en C_2, como $x = 2-y^2$ y $0 \leqslant y^2 \leqslant 2$, tenemos que $x \in [0, 2]$. Por tanto, definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccl} h_2 : & [0, 2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 + y^2 - 2x = x^2 + 2 - x - 2x = x^2 - 3x + 2 \end{array}$$

Tenemos que h_2 es una función real de variable real. Como es polinómica, es derivable en todo punto de $]0, 2[$, por lo que los puntos críticos de su interior son aquellos que anulan la primera derivada:

$$h_2'(x) = 2x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos absolutos de h_2 son $\{-\sqrt{2}, 3/2, \sqrt{2}\}$.

$$h_2(0) = 2 \qquad h_2(2) = 0 \qquad h_2\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

Por tanto, $h_2([0, 2]) = f(C_2) = \left[-\frac{1}{4}, 2\right]$. Por tanto, tenemos que la imagen de f es:

$$f(A) = [-1, 2]$$

Ejercicio 2.3.5. Calcular la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$, donde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\} \qquad \text{y} \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - x$$

Veamos en primer lugar el conjunto en el que está definido, A:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant -1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \leqslant 0\}$$

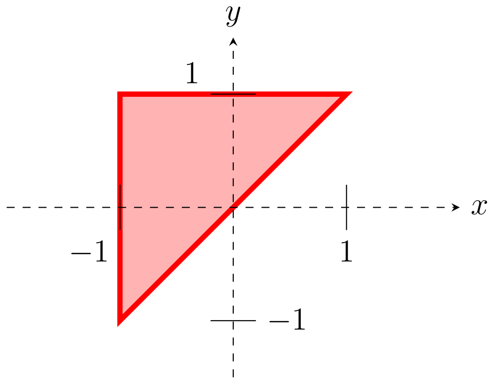


Figura 2.6: Conjunto de definición A.

Se trata de tres conjuntos cerrados, ya que son la imagen inversa mediante funciones polinómicas (luego continuas) de $[-1,+\infty[,\ ]-\infty,1]$ y $]-\infty,0]$, respectivamente. Por tanto, A es la intersección de tres cerrados, luego es cerrado. Además, es acotado, ya que $A \subset B(0,2)$ (por ejemplo). Por tanto como es cerrado y acotado y $A \subset \mathbb{R}^n$, tenemos que es compacto. Veamos ahora que es conexo.

Tenemos que en los tres casos se trata de semiplanos, por lo que son convexos. Como la intersección de convexos es convexa, tenemos que A es convexo, luego conexo.

Por tanto, tenemos que A es compacto y conexo, y como $f \in C^1(A)$, en particular continua, tenemos que $f(A) \subset \mathbb{R}$ es compacto (Teorema de Weierstrass) y conexo (Teorema del Valor Intermedio), por lo que es un intervalo cerrado y acotado, por lo que tiene mínimo y máximo. Es decir:

$$f(A) = [\min f(A), \max f(A)]$$

Estudiamos en primer lugar su interior. Tenemos que:

$$A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < y < 1\}$$

Como f es diferenciable en todo punto de A° por ser polinómica, tenemos que f es parcialmente derivable en todo punto $(x,y) \in A^\circ$, con:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 1 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x$$

Por tanto, los puntos críticos del interior de A son aquellos que cumplen la condición necesaria de extremo relativo, $\nabla f(x,y) = 0$. En este caso, el único punto que anula el gradiente es el punto $({}^2\!/\!_3, {}^{-1}\!/\!_3)$, pero este punto no pertenece al interior de A, por lo que no es candidato a extremo relativo del interior de A.

Nos falta por estudiar la frontera de A. Tenemos que $\mathrm{Fr}\, A = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -1, -1 \leqslant y \leqslant 1\} \\
C_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1, -1 \leqslant x \leqslant 1\} \\
C_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0, -1 \leqslant x \leqslant 1\}
\end{aligned}$$

Estudiamos en primer lugar C_1. Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccl}
h_1 : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& y & \longmapsto & (-1)^2 + y^2 + (-1)y - (-1) = y^2 - y + 2
\end{array}$$

Tenemos que h_1 es una función real de variable real. Como es polinómica, es derivable en todo punto de $]-1,1[$, por lo que los puntos críticos de su interior son aquellos que anulan la primera derivada:

$$h_1'(y) = 2y - 1 = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos absolutos de h_1 son $\{-1, 1/2, 1\}$.

$$h_1(-1) = 4 \qquad h_1(1) = 2 \qquad h_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$$

Por tanto, $h_1([-1,1]) = f(C_1) = [7/4, 4]$. Estudiamos en segundo lugar C_2. Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rrcl} h_2: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2+1+x-x = x^2+1 \end{array}$$

Tenemos que h_2 es una función real de variable real. Como es polinómica, es derivable en todo punto de $]-1,1[$, por lo que los puntos críticos de su interior son aquellos que anulan la primera derivada:

$$h_2'(x) = 2x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos absolutos de h_2 son $\{-1, 0, 1\}$.

$$h_2(-1) = h(1) = 2 \qquad h_2(0) = 1$$

Por tanto, $h_2([-1,1]) = f(C_2) = [1,2]$. Estudiamos en tercer lugar C_3. Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rrcl} h_3: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2+x^2+x^2-x = 3x^2-x \end{array}$$

Tenemos que h_3 es una función real de variable real. Como es polinómica, es derivable en todo punto de $]-1,1[$, por lo que los puntos críticos de su interior son aquellos que anulan la primera derivada:

$$h_3'(x) = 6x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos absolutos de h_3 son $\{-1, 1/6, 1\}$.

$$h_3(-1) = 4 \qquad h_3(1) = 2 \qquad h_3\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}$$

Por tanto, $h_3([-1,1]) = f(C_3) = [-1/12, 4]$. Por tanto, tenemos que la imagen de f es:

$$f(A) = \left[-\frac{1}{12}, 4\right]$$

Ejercicio 2.3.6 (Prueba DGIIM 2022-23 y 2023-24[2])**.** Calcular la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$, donde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2(1 - y^2)\} \qquad \text{y} \qquad f(x, y) = (x - 1)^4 + y^2$$

Veamos en primer lugar el conjunto en el que está definido, A:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y^2 \leqslant 2\}$$

El primer conjunto es directo ver que se trata del semiplano $x \geqslant 0$. El segundo conjunto es la región del plano delimitada por la parábola $x = -2y^2+2$. Dibujémoslo:

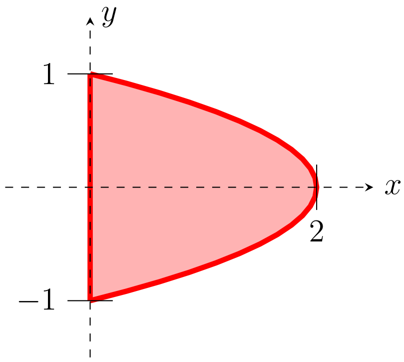


Figura 2.7: Conjunto de definición A.

Sabemos que A es homeomorfo a $\overline{B}(0, 1)$, por lo que es compacto y conexo. No obstante, resolveremos dicho ejercicio sin usar dicha propiedad, parte del temario de Topología I.

En primer lugar, sabemos que el semiplano $x \geqslant 0$ es cerrado, ya que es la imagen inversa mediante una función polinómica (luego continua) del intervalo $[0, +\infty[$, que es cerrado. La región delimitada por la parábola es cerrada, ya que es la imagen inversa mediante una función polinómica (luego continua) del intervalo $]-\infty, 2]$, que es cerrado. Por tanto, A es la intersección de dos cerrados, luego es cerrado.

Además, es acotado, ya que $A \subset B(0, 7)$ (por ejemplo). Por tanto como es cerrado y acotado y $A \subset \mathbb{R}^n$, tenemos que es compacto. Veamos ahora que es conexo. El semiplano es convexo. Veamos que la región delimitada por la parábola también lo es. Sea P dicha región, y sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P$. Tenemos que ver que $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] \subset P$. Un punto de dicho segmento es de la forma:

$$(1 - t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) = ((1 - t)x_1 + tx_2, (1 - t)y_1 + ty_2) \qquad \text{con } t \in [0, 1]$$

Por tanto, tenemos que:

$$((1 - t)x_1 + tx_2) + 2\left((1 - t)y_1 + ty_2\right)^2 \overset{(*)}{\leqslant} (1 - t)x_1 + tx_2 + 2\left((1 - t)y_1^2 + ty_2^2\right) =$$
$$= (1 - t)\left(x_1 + 2y_1^2\right) + t\left(x_2 + 2y_2^2\right) \overset{(**)}{\leqslant} (1 - t) \cdot 2 + t \cdot 2 = 2$$

donde en $(*)$ hemos usado que, como la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ es convexa, entonces $[(1 - t)a + tb]^2 \leqslant (1 - t)a^2 + tb^2$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y todo

[2]Se repitió ambos años.

$t \in [0,1]$. En $(**)$ hemos usado que $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P$. Por tanto, tenemos que $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] \subset P$, luego P es convexo. Como la intersección de dos conjuntos convexos es convexa, tenemos que A es convexo, luego conexo.

Por tanto, tenemos que A es compacto y conexo, y como $f \in C^1(A)$, en particular continua, tenemos que $f(A) \subset \mathbb{R}$ es compacto (Teorema de Weierstrass) y conexo (Teorema del Valor Intermedio), por lo que es un intervalo cerrado y acotado, por lo que tiene mínimo y máximo. Es decir:

$$f(A) = [\text{mín}\, f(A), \text{máx}\, f(A)]$$

Estudiamos en primer lugar su interior. Tenemos que:

$$A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2 - 2y^2\}$$

Como f es diferenciable en todo punto de A° por ser polinómica, tenemos que f es parcialmente derivable en todo punto $(x,y) \in A^\circ$, con:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(x-1)^3 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

Por tanto, los puntos críticos del interior de A son aquellos que cumplen la condición necesaria de extremo relativo, $\nabla f(x,y) = 0$. En este caso, el único punto crítico del interior de A es el punto $(1,0) \in A^\circ$, con $f(1,0) = 0$.

Nos falta por estudiar la frontera de A. Tenemos que:

$$\text{Fr}\, A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, x + 2y^2 \leqslant 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2 - 2y^2, x \geqslant 0\}$$

Sea $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, x + 2y^2 \leqslant 2\} = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leqslant 1\}$. Nos definimos entonces la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccl} h_1: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & (x-1)^4 + y^2 = 1 + y^2 \end{array}$$

Tenemos que h_1 es una función real de variable real. Como es polinómica, es derivable en todo punto de $]-1,1[$, por lo que los puntos críticos de su interior son aquellos que anulan la primera derivada:

$$h_1'(y) = 2y = 0 \Longleftrightarrow y = 0$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos absolutos de h_1 son $\{-1, 0, 1\}$.

$$h_1(-1) = h_1(1) = 2 \qquad h_1(0) = 1$$

Por tanto, $h_1([-1,1]) = f(C_1) = [1,2]$.

Sea $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2 - 2y^2, x \geqslant 0\}$. Como $2 - 2y^2 \geqslant 0$, tenemos que $y \in [-1,1]$, por lo que $y^2 \in [0,1]$. Además, como en C_2 se tiene $x = 2 - 2y^2$, se tiene que $y^2 = 1 - \frac{x}{2}$ y $x \in [0,2]$. Por tanto, definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccl} h_2: & [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (x-1)^4 + y^2 = (x-1)^4 + 1 - \dfrac{x}{2} \end{array}$$

Tenemos que h_2 es una función real de variable real. Como es polinómica, es derivable en todo punto de $]-1,1[$, por lo que los puntos críticos de su interior son aquellos que anulan la primera derivada:

$$h_2'(x) = 4(x-1)^3 - \frac{1}{2} = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos absolutos de h_2 son $\{0, 3/2, 2\}$.

$$h_2(0) = 2 \qquad h_2(2) = 1 \qquad h_2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{16}$$

Por tanto, $h_2\left([0,2]\right) = f(C_2) = \left[\frac{5}{16}, 2\right]$. Por tanto, tenemos que la imagen de f es:

$$f(A) = [0,2]$$

Ejercicio 2.3.7 (Ordinaria DGIIM 2023-24)**.** Calcula la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$, donde

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0\} \qquad \text{y} \qquad f(x,y) = \frac{xy}{2 + x^2 + y^2}$$

Ejercicio 2.3.8 (Ordinaria DGIIM 2022-23)**.** Calcula la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$, donde

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\} \qquad \text{y} \qquad f(x,y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$

Veamos en primer lugar el conjunto en el que está definido, A:

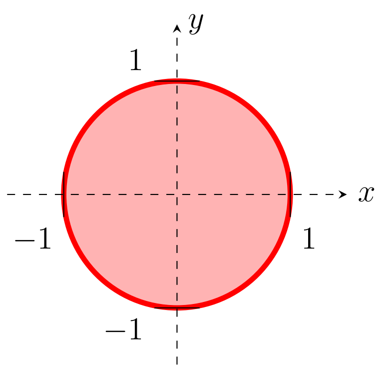


Figura 2.8: Conjunto de definición A.

Sabemos que A es una bola cerrada, por lo que es un conjunto cerrado y acotado, luego es compacto. Además, como es una bola, es convexo, luego es conexo. Por tanto, tenemos que A es compacto y conexo, y como $f \in C^1(A)$ por ser racional, en particular es continua y tenemos que $f(A) \subset \mathbb{R}$ es compacto (Teorema de Weierstrass) y conexo (Teorema del Valor Intermedio), por lo que es un intervalo cerrado y acotado, por lo que tiene mínimo y máximo. Es decir:

$$f(A) = [\text{mín}\, f(A), \text{máx}\, f(A)]$$

Estudiamos en primer lugar su interior. Tenemos que:

$$A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} = B(0,1)$$

Como f es diferenciable en todo punto de A° por ser racional, tenemos que f es parcialmente derivable en todo punto $(x,y) \in A^\circ$, con:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(1+x^2+y^2) - xy(2x)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{y(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad \forall (x,y) \in A^\circ$$

Por simetría, tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(1-y^2+x^2)}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad \forall (x,y) \in A^\circ$$

Por tanto, los puntos críticos del interior de A son aquellos que cumplen la condición necesaria de extremo relativo, $\nabla f(x,y) = 0$. En este caso, los puntos críticos del interior de A son los puntos $(x,y) \in A^\circ$ tales que $y = 0$ o $x = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} y(1-x^2+y^2) = 0 \\ x(1-y^2+x^2) = 0 \end{array} \right.$$

Como $x^2 + y^2 < 1$, tenemos que $x^2 < 1$. Por tanto, tenemos que $1 - x^2 + y^2 > 1 - x^2 > 0$, luego la primera ecuación solo se da para $y = 0$. Análogamente, la segunda ecuación solo se da para $x = 0$. Por tanto, el único punto crítico del interior de A es el punto $(0,0) \in A^\circ$, con $f(0,0) = 0$.

Nos falta por estudiar la frontera de A. Tenemos que $\operatorname{Fr} A = S(0,1)$, la circunferencia unidad centrada en el origen, que podemos parametriar como:

$$\operatorname{Fr} A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, t \in [-\pi, \pi]\}$$

Para $(x,y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, tenemos que:

$$f(\cos t, \operatorname{sen} t) = \frac{\cos t \operatorname{sen} t}{1 + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} = \frac{\cos t \operatorname{sen} t}{2} = \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}$$

Por tanto, nos definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccl} h: & [-\pi, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{4} \end{array}$$

Tenemos que h es una función real de variable real. Como es polinómica, es derivable en todo punto de $]-\pi, \pi[$, por lo que los puntos críticos de su interior son aquellos que anulan la primera derivada:

$$h'(t) = \frac{2\cos 2t}{4} = 0 \Longleftrightarrow \cos 2t = 0$$

Usando que $t \in [-\pi, \pi]$, tenemos que los puntos que anulan h' son $\{-\pi/4, \pi/4, 3\pi/4, -3\pi/4\}$. Por tanto, tenemos que los candidatos a extremos absolutos de h son $\{\pm\pi, \pm\pi/4, \pm 3\pi/4\}$. Tenemos que:

$$h(-\pi) = h(\pi) = 0 \qquad h\left(\frac{\pi}{4}\right) = h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \qquad h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = h\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

Por tanto, $h\left([-\pi,\pi]\right) = f(\operatorname{Fr} A) = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. Por tanto, tenemos que la imagen de f es:

$$f(A) = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$

Ejercicio 2.3.9 (Ordinaria DGIIM 2023-24 Incidencias)**.** Calcula la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$, donde

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0\} \qquad \text{y} \qquad f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y$$

2.4. Funciones Implícitas

Ejercicio 2.4.1. Probar que el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{ll} e^{u+x}\cos(y+v)-x^2+y^2 & =0 \\ e^{u+x}\operatorname{sen}(y+v)-2xy & =0 \end{array}\right.$$

define funciones implícitas $u=u(x,y)$ y $v=v(x,y)$, diferenciables en un entorno del punto $(1,0)$, con $u(1,0)=-1$ y $v(1,0)=0$. Calcular las derivadas parciales de u y v en dicho punto.

Sea $\Omega=\mathbb{R}^4\in\mathcal{T}_u$ y $F=(F_1,F_2):\Omega\to\mathbb{R}^2$ definida por:

$$\begin{aligned} F_1(x,y,u,v) &= e^{u+x}\cos(y+v)-x^2+y^2 \\ F_2(x,y,u,v) &= e^{u+x}\operatorname{sen}(y+v)-2xy \end{aligned}$$

Tenemos que ambas componentes de F son de clase $C^1(\mathbb{R}^4)$, ya que son suma, producto y composición de funciones de clase C^1: exponencial, el seno, el coseno, y funciones polinómicas. Por tanto, tenemos que $F\in C^1(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^2)$.

Evidentemente, $(1,0,-1,0)\in\Omega$ y $F(1,0,-1,0)=(0,0)$. Falta por comprobar que:

$$\det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}(1,0,-1,0)\right)\neq 0$$

Para ello, buscamos la matriz jacobiana de F en el punto $(1,0,-1,0)$. Para ello, dado un punto genérico $P=(x,y,u,v)\in\Omega$, tenemos que:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(P)=e^{u+x}\cos(y+v)-2x & \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(P)=-e^{u+x}\operatorname{sen}(y+v)+2y \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial u}(P)=e^{u+x}\cos(y+v) & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}(P)=-e^{u+x}\operatorname{sen}(y+v) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(P)=e^{u+x}\operatorname{sen}(y+v)-2y & \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(P)=e^{u+x}\cos(y+v)-2x \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u}(P)=e^{u+x}\operatorname{sen}(y+v) & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}(P)=e^{u+x}\cos(y+v) \end{array}$$

En particular, en el punto $P_0=(1,0,-1,0)$ tenemos que:

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(P_0)=-1, & \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(P_0)=0, & \dfrac{\partial F_1}{\partial u}(P_0)=1, & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}(P_0)=0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(P_0)=0, & \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(P_0)=-1, & \dfrac{\partial F_2}{\partial u}(P_0)=0, & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}(P_0)=1 \end{array}$$

Por tanto, la matriz jacobiana de F en el punto P_0 es:

$$JF(P_0)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el determinante que nos interesa es:

$$\det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}(P_0)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Por el teorema de la función implícita, tenemos que existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, con $(1,0) \in U$, de manera que F define funciones implícitas $u, v : U \to \mathbb{R}$, diferenciables en U, con $u(1,0) = -1$ y $v(1,0) = 0$, tales que:

$$\left\{\begin{array}{ll} F_1(x,y,u(x,y),v(x,y)) & = 0 \\ F_2(x,y,u(x,y),v(x,y)) & = 0 \end{array}\right. \qquad \forall (x,y) \in U \tag{2.1}$$

Nos falta ahora por calcular las derivadas parciales de u y v en el punto $(1,0)$. En la Ecuación 2.1, tenemos dos funciones de dos variables idénticamente nulas, por lo que sus derivadas parciales han de ser idénticamente nulas en todo punto de U. Entonces, si abreviamos entendiendo que todas las funciones se evalúan en un punto genérico $(x,y) \in U$, tenemos que las derivadas parciales respecto de x de la Ecuación 2.1 son:

$$\begin{aligned} e^{u+x}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(y+v) - e^{u+x}\operatorname{sen}(y+v)\frac{\partial v}{\partial x} - 2x &= 0 \\ e^{u+x}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\operatorname{sen}(y+v) + e^{u+x}\cos(y+v)\frac{\partial v}{\partial x} - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Evaluando en el punto $(1,0)$, como $u(1,0) = -1$ y $v(1,0) = 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned} e^{-1+1}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}(1,0)\right)\cos(0) - e^{-1+1}\operatorname{sen}(0)\frac{\partial v}{\partial x}(1,0) - 2 &= 0 \\ e^{-1+1}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}(1,0)\right)\operatorname{sen}(0) + e^{-1+1}\cos(0)\frac{\partial v}{\partial x}(1,0) - 0 &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = 1 \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x}(1,0) = 0$$

De manera análoga, las derivadas parciales respecto de y de la Ecuación 2.1 son:

$$\begin{aligned} e^{u+x}\frac{\partial u}{\partial y}\cos(y+v) - e^{u+x}\operatorname{sen}(y+v)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2y &= 0 \\ e^{u+x}\frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}(y+v) + e^{u+x}\cos(y+v)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) - 2x &= 0 \end{aligned}$$

Evaluando en el punto $(1,0)$, como $u(1,0) = -1$ y $v(1,0) = 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned} e^{-1+1}\frac{\partial u}{\partial y}(1,0)\cos(0) - e^{-1+1}\operatorname{sen}(0)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}(1,0)\right) + 0 &= 0 \\ e^{-1+1}\frac{\partial u}{\partial y}(1,0)\operatorname{sen}(0) + e^{-1+1}\cos(0)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}(1,0)\right) - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,0) = 0 \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial y}(1,0) = 1$$

En resumen, las derivadas parciales de u y v en el punto $(1,0)$ son:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(1,0) = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(1,0) = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(1,0) = 1$$

Ejercicio 2.4.2. Probar que la ecuación

$$xyz + \ln(z-5) - 2x - 2y - 2x^2y^2 = 0$$

define una función implícita $z = z(x,y)$, diferenciable en un entorno del punto $(1,1)$, con $z(1,1) = 6$. Calcular $\nabla z(1,1)$.

Sea $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 5\}$. Tenemos que Ω es la imagen inversa de $]5,+\infty[$ por la proyección en la tercera componente, que es continua. Por tanto, Ω es abierto. Definimos la función $F : \Omega \to \mathbb{R}$ como:

$$F(x,y,z) = xyz + \ln(z-5) - 2x - 2y - 2x^2y^2$$

Claramente, se verifica que $P_0 = (1,1,6) \in \Omega$ y $F(1,1,6) = 0$. Tenemos que la función $g : \Omega \to \mathbb{R}$ definida como $g(x,y,z) = \ln(z-5)$ es de clase $C^1(\Omega)$, ya que es composición de una función polinómica ($C^1(\mathbb{R}^3)$) que, en Ω, toma valores en $\mathbb{R}^+$, con la función logaritmo ($C^1(\mathbb{R}^+)$). Por tanto, como F es suma g con funciones polinómicas ($C^1(\Omega)$), tenemos que $F \in C^1(\Omega)$. Nos falta comprobar que $\det\left(\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\right) \neq 0$. Tenemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = xy + \frac{1}{z-5} \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(P_0) = 1 + \frac{1}{6-5} = 2 \neq 0$$

Por tanto, por el teorema de la función implícita, tenemos que existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, con $(1,1) \in U$, de manera que F define una función implícita $z : U \to \mathbb{R}$, diferenciable en U, con $z(1,1) = 6$, tal que:

$$F(x,y,z(x,y)) = 0 \qquad \forall (x,y) \in U$$

Nos falta por calcular $\nabla z(1,1)$. Para ello, en U, tenemos que $F(x,y,z(x,y)) = 0$, por lo que sus derivadas parciales respecto de x e y han de ser idénticamente nulas. Por tanto, evaluando todas las funciones en un punto genérico $(x,y) \in U$, tenemos que:

$$\begin{aligned} yz + xy\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{z-5}\frac{\partial z}{\partial x} - 2 - 4xy^2 = 0 \\ xz + xy\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{z-5}\frac{\partial z}{\partial y} - 2 - 4x^2y = 0 \end{aligned}$$

Evaluando en el punto $(1,1)$, como $z(1,1)=6$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
6+\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)+\frac{1}{6-5}\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)-2-4=0\\
6+\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)+\frac{1}{6-5}\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)-2-4=0
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)=0=\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$$

Por tanto, $\nabla z(1,1)=(0,0)$.

Ejercicio 2.4.3. Probar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} zx^3+w^2y^3 & =1\\ 2zw^3+xy^2 & =0 \end{cases}$$

define funciones implícitas $z=z(x,y)$ y $w=w(x,y)$, diferenciables en un entorno del punto $(0,1)$, con $z(0,1)=0$ y $w(0,1)=1$. Probar también que la función $(x,y)\mapsto(z(x,y),w(x,y))$ es inyectiva en un entorno de $(0,1)$.

Sea $\Omega=\mathbb{R}^4\in\mathcal{T}_u$ y $F=(F_1,F_2):\Omega\to\mathbb{R}^2$ definida por:

$$\begin{aligned}
F_1(x,y,z,w)&=zx^3+w^2y^3-1\\
F_2(x,y,z,w)&=2zw^3+xy^2
\end{aligned}$$

Tenemos que ambas componentes de F son de clase $C^1(\mathbb{R}^4)$ por ser polinómicas, por lo que $F\in C^1(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^2)$. Además, trivialmente se tiene que $P_0=(0,1,0,1)\in\Omega$ y $F(0,1,0,1)=(0,0)$. Nos falta por comprobar que:

$$\det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,w)}(0,1,0,1)\right)\neq 0$$

Para ello, buscamos la matriz jacobiana de F en el punto $(0,1,0,1)$. Para ello, dado un punto genérico $P=(x,y,z,w)\in\Omega$, tenemos que:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(P)=3zx^2\quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(P)=3w^2y^2\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}(P)=x^3\quad \frac{\partial F_1}{\partial w}(P)=2wy^3$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(P)=y^2\quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(P)=2xy\quad \frac{\partial F_2}{\partial z}(P)=2w^3\quad \frac{\partial F_2}{\partial w}(P)=6zw^2$$

Por tanto, en el punto $P_0=(0,1,0,1)$ tenemos que:

$$JF(P_0)=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Por tanto, el determinante que nos interesa es:

$$\det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,w)}(P_0)\right)=\begin{vmatrix} 0 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4\neq 0$$

Por el teorema de la función implícita, tenemos que existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, con $(0,1) \in U$, de manera que F define funciones implícitas $z, w : U \to \mathbb{R}$, diferenciables en U, con $z(0,1) = 0$ y $w(0,1) = 1$, tales que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_1(x,y,z(x,y),w(x,y)) & = 0 \\ F_2(x,y,z(x,y),w(x,y)) & = 0 \end{array} \right. \qquad \forall (x,y) \in U \tag{2.2}$$

Nos falta ahora por probar que la función $h : U \to \mathbb{R}^2$ definida como $h(x,y) = (z(x,y), w(x,y))$ es inyectiva en un entorno de $(0,1)$. Para ello, buscamos aplicar el teorema de la función inversa local en el punto $(1,0)$.

En primer lugar, calculamos $Jh(0,1)$. Para ello, calculamos las derivadas parciales de z y w en el punto $(0,1)$. En U, tenemos que $F(x,y,z(x,y),w(x,y)) = 0$, por lo que sus derivadas parciales respecto de x e y han de ser idénticamente nulas. Por tanto, evaluando todas las funciones en un punto genérico $(x,y) \in U$, tenemos que las derivadas parciales respecto de x son:

$$\begin{aligned} 3zx^2 + x^3\frac{\partial z}{\partial x} + 2wy^3\frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ 2w^3\frac{\partial z}{\partial x} + 6zw^2\frac{\partial w}{\partial x} + y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, buscamos las derivadas parciales respecto de x en un punto genérico $(x,y) \in U$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{2wy^3\frac{\partial w}{\partial x} + 3zx^2}{x^3} = -\frac{6zw^2\frac{\partial w}{\partial x} + y^2}{2w^3} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow 4w^4y^3\frac{\partial w}{\partial x} + 6zw^3x^2 = 6zx^3w^2\frac{\partial w}{\partial x} + y^2x^3 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2x^3 - 6zx^3w^2}{4w^4y^3 - 6zx^3w^2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{6zw^2 \cdot \frac{y^2x^3 - 6zx^3w^2}{4w^4y^3 - 6zx^3w^2} + y^2}{2w^3} = -\frac{3zx^3 \cdot \frac{y^2 - 6zw^2}{2w^2y^3 - 3zx^3} + y^2}{2w^3}$$

En concreto, en el punto $(0,1)$, como $z(0,1) = 0$ y $w(0,1) = 1$, tenemos que:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = -\frac{1}{2} \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(0,1) = 0$$

Análogamente, las derivadas parciales respecto de y son:

$$\begin{aligned} x^3\frac{\partial z}{\partial y} + 2wy^3\frac{\partial w}{\partial y} + 3w^2y^2 &= 0 \\ 2w^3\frac{\partial z}{\partial y} + 6zw^2\frac{\partial w}{\partial y} + 2xy &= 0 \end{aligned}$$

Buscamos las derivadas parciales respecto de y en un punto genérico $(x,y) \in U$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{2wy^3\frac{\partial w}{\partial y} + 3w^2y^2}{x^3} = -\frac{3zw^2\frac{\partial w}{\partial y} + xy}{w^3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2w^4y^3\frac{\partial w}{\partial y} + 3w^4y^2 = 3zw^2x^3\frac{\partial w}{\partial y} + x^4y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial w}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4y - 3w^4y^2}{2w^4y^3 - 3zw^2x^3}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{3zw^2 \cdot \frac{x^4y-3w^4y^2}{2w^4y^3-3zw^2x^3} + xy}{w^3} = -\frac{3yz \cdot \frac{x^4-3w^4y}{2w^2y^3-3zx^3} + xy}{w^3}$$

En concreto, en el punto $(0,1)$, como $z(0,1) = 0$ y $w(0,1) = 1$, tenemos que:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial y}(0,1) = -\frac{3}{2}$$

Por tanto, la matriz jacobiana de h en el punto $(0,1)$ es:

$$Jh(0,1) = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

En un punto genérico, tenemos que:

$$Jh(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{3zx^3 \cdot \frac{y^2-6zw^2}{2w^2y^3-3zx^3} + y^2}{2w^3} & -\dfrac{3yz \cdot \frac{x^4-3w^4y}{2w^2y^3-3zx^3} + xy}{w^3} \\[2ex] \dfrac{y^2x^3 - 6zx^3w^2}{4w^4y^3 - 6zx^3w^2} & \dfrac{x^4y - 3w^4y^2}{2w^4y^3 - 3zw^2x^3} \end{pmatrix}$$

Empezamos ahora a comprobar las hipótesis del teorema de la función inversa local en el punto $(0,1)$ para la función h. Claramente, h es diferenciable en U, ya que ambas componentes son diferenciables en U. Además, se tiene que $(0,1) \in U$. También se tiene que $\det Jh(0,1) = 3/4 \neq 0$, por lo que solo falta comprobar que Dh es continua en $(0,1)$.

En la matriz $Jh(x,y)$, tenemos que todas las parciales son continuas en $(0,1)$, por lo que Dh es continua en $(0,1)$. Por tanto, se cumplen todas las hipótesis del teorema de la función inversa local en el punto $(0,1)$ para la función h, por lo que existe un abierto $V \subset \mathbb{R}^2$ con $(0,1) \in V$ tal que h es inyectiva en V.

Ejercicio 2.4.4. Probar que el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{ll} t\cos x + x\cos y + y\cos t & = \pi \\ t^2 + x^2 + y^2 - tx & = \pi^2 \end{array} \right.$$

define funciones implícitas $x = x(t)$ e $y = y(t)$, derivables en un entorno del origen, con $x(0) = 0$ e $y(0) = \pi$. Calcular $x'(0)$ e $y'(0)$.

Sea $\Omega = \mathbb{R}^3 \in \mathcal{T}_u$ y $F = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$F_1(t,x,y) = t\cos x + x\cos y + y\cos t - \pi$$
$$F_2(t,x,y) = t^2 + x^2 + y^2 - tx - \pi^2$$

Tenemos que ambas componentes de F son de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$ por ser producto de polinómicas con trigonométricas, por lo que $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Además, trivialmente se tiene que $P_0 = (0, 0, \pi) \in \Omega$ y $F(0, 0, \pi) = (0, 0)$. Nos falta por comprobar que:

$$\det\left(\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}(0, 0, \pi)\right) \neq 0$$

Para ello, buscamos la matriz jacobiana de F en el punto $(0, 0, \pi)$. Para ello, dado un punto genérico $P = (t, x, y) \in \Omega$, tenemos que:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}(P) = \cos x - y \operatorname{sen} t \quad \frac{\partial F_1}{\partial x}(P) = -t \operatorname{sen} x + \cos y \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(P) = -x \operatorname{sen} y + \cos t$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}(P) = 2t - x \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}(P) = 2x - t \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y}(P) = 2y$$

Por tanto, en el punto $P_0 = (0, 0, \pi)$ tenemos que:

$$JF(P_0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2\pi \end{pmatrix}$$

Por tanto, el determinante que nos interesa es:

$$\det\left(\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}(P_0)\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2\pi \end{vmatrix} = -2\pi \neq 0$$

Por el teorema de la función implícita, tenemos que existe un abierto $U \subset \mathbb{R}$, con $0 \in U$, de manera que F define funciones implícitas $x, y : U \to \mathbb{R}$, diferenciables en U, con $x(0) = 0$ y $y(0) = \pi$, tales que:

$$\left\{\begin{array}{ll} F_1(t, x(t), y(t)) & = 0 \\ F_2(t, x(t), y(t)) & = 0 \end{array}\right. \qquad \forall t \in U \tag{2.3}$$

Nos falta ahora por calcular $x'(0)$ e $y'(0)$. Para ello, para todo $t \in U$, se tiene que $F(t, x(t), y(t)) = 0$, por lo que sus derivadas respecto de t han de ser idénticamente nulas. Por tanto, evaluando todas las funciones en un punto genérico $t \in U$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \cos x - t \operatorname{sen} x x'(t) + \cos y x'(t) - x seny y'(t) + \cos t y'(t) - y \operatorname{sen} t = 0 \\ 2t + 2xx'(t) + 2yy'(t) - x - tx'(t) = 0 \end{aligned}$$

Evaluando en el punto $t = 0$, como $x(0) = 0$ e $y(0) = \pi$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 - x'(0) + y'(0) = 0 \\ 2\pi y'(0) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$x'(0) = 1 \qquad y'(0) = 0.$$

Ejercicio 2.4.5. Probar que el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{ll} x^3u - yu^3 + xv^3 - y^3v & = 0 \\ (x^2+y^2)(u^4+v^4) + 2uv & = 0 \end{array}\right.$$

define funciones implícitas $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, diferenciables en un entorno del punto $(1, 0)$, con $u(1, 0) = 1$ y $v(1, 0) = -1$. Calcular las derivadas parciales de u y v en el punto $(1, 0)$.

Sea $\Omega = \mathbb{R}^4 \in \mathcal{T}_u$ y $F = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\begin{aligned} F_1(x, y, u, v) &= x^3u - yu^3 + xv^3 - y^3v \\ F_2(x, y, u, v) &= (x^2+y^2)(u^4+v^4) + 2uv \end{aligned}$$

Tenemos que ambas componentes de F son de clase $C^1(\mathbb{R}^4)$ por ser polinómicas, por lo que $F \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$. Además, trivialmente se tiene que $P_0 = (1, 0, 1, -1) \in \Omega$ y $F(1, 0, 1, -1) = (0, 0)$. Nos falta por comprobar que:

$$\det\left(\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)}(1, 0, 1, -1)\right) \neq 0$$

Para ello, buscamos la matriz jacobiana de F en el punto $(1, 0, 1, -1)$. Para ello, dado un punto genérico $P = (x, y, u, v) \in \Omega$, tenemos que:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(P) = 3x^2u + v^3 \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y}(P) = -u^3 - 3y^2v$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}(P) = x^3 - 3yu^2 \qquad \frac{\partial F_1}{\partial v}(P) = 3xv^2 - y^3$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(P) = 2x(u^4+v^4) \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y}(P) = 2y(u^4+v^4)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u}(P) = 4u^3(x^2+y^2) + 2v \qquad \frac{\partial F_2}{\partial v}(P) = 4v^3(x^2+y^2) + 2u$$

Por tanto, en el punto $P_0 = (1, 0, 1, -1)$ tenemos que:

$$JF(P_0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el determinante que nos interesa es:

$$\det\left(\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)}(P_0)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Por el teorema de la función implícita, tenemos que existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, con $(1, 0) \in U$, de manera que F define funciones implícitas $u, v : U \to \mathbb{R}$, diferenciables en U, con $u(1, 0) = 1$ y $v(1, 0) = -1$, tales que:

$$\left\{\begin{array}{ll} F_1(x, y, u(x, y), v(x, y)) & = 0 \\ F_2(x, y, u(x, y), v(x, y)) & = 0 \end{array}\right. \qquad \forall (x, y) \in U \tag{2.4}$$

Nos falta ahora por calcular las derivadas parciales de u y v en el punto $(1,0)$. Tenemos que, en U, se tiene que $F(x,y,u(x,y),v(x,y))$ es idénticamente nula, por lo que sus derivadas parciales respecto de x e y han de serlo también. Por tanto, evaluando todas las funciones en un punto genérico $(x,y)\in U$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
3x^2u+x^3\frac{\partial u}{\partial x}-3yu^2\frac{\partial u}{\partial x}+v^3+3xv^2\frac{\partial v}{\partial x}-y^3\frac{\partial v}{\partial x}&=0\\
2x(u^4+v^4)+4(x^2+y^2)\left(u^3\frac{\partial u}{\partial x}+v^3\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2\left(v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)&=0
\end{aligned}$$

Evaluando en el punto $(1,0)$, como $u(1,0)=1$ y $v(1,0)=-1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
3+\frac{\partial u}{\partial x}(1,0)-1+3\frac{\partial v}{\partial x}(1,0)&=0\\
4+4\left(\frac{\partial u}{\partial x}(1,0)-\frac{\partial v}{\partial x}(1,0)\right)+2\left(-\frac{\partial u}{\partial x}(1,0)+\frac{\partial v}{\partial x}(1,0)\right)&=0
\end{aligned}$$

Es decir, tenemos que:

$$\begin{aligned}
2+\frac{\partial u}{\partial x}(1,0)+3\frac{\partial v}{\partial x}(1,0)&=0\\
4+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(1,0)-\frac{\partial v}{\partial x}(1,0)\right)&=0
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0)=-2\qquad \frac{\partial v}{\partial x}(1,0)=0$$

Análogamente, las derivadas parciales respecto de y son:

$$\begin{aligned}
x^3\frac{\partial u}{\partial y}-u^3-3yu^2\frac{\partial u}{\partial y}+3xv^2\frac{\partial v}{\partial y}-3y^2v-y^3\frac{\partial v}{\partial y}&=0\\
2y(u^4+v^4)+4(x^2+y^2)\left(u^3\frac{\partial u}{\partial y}+v^3\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)&=0
\end{aligned}$$

Evaluando en el punto $(1,0)$, como $u(1,0)=1$ y $v(1,0)=-1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y}(1,0)-1+3\frac{\partial v}{\partial y}(1,0)&=0\\
4\left(\frac{\partial u}{\partial y}(1,0)-\frac{\partial v}{\partial y}(1,0)\right)+2\left(-\frac{\partial u}{\partial y}(1,0)+\frac{\partial v}{\partial y}(1,0)\right)&=0
\end{aligned}$$

Es decir, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y}(1,0)-1+3\frac{\partial v}{\partial y}(1,0)&=0\\
2\left(\frac{\partial u}{\partial y}(1,0)-\frac{\partial v}{\partial y}(1,0)\right)&=0
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,0)=\frac{1}{4}\qquad \frac{\partial v}{\partial y}(1,0)=\frac{1}{4}$$

Ejercicio 2.4.6 (Prueba DGIIM 2022-23 y 2023-24[3]). Probar que la ecuación

$$\operatorname{sen}(yz) + \operatorname{sen}(xz) + \operatorname{sen}(xy) = 0$$

define una función implícita $z = z(x, y)$, diferenciable en un entorno del punto $(\pi, 0)$ con $z(\pi, 0) = 1$. Calcular $\nabla z(\pi, 0)$.

Sea $\Omega = \mathbb{R}^3$, que claramente es abierto, y $F : \Omega \to \mathbb{R}$ definida como:

$$F(x, y, z) = \operatorname{sen}(yz) + \operatorname{sen}(xz) + \operatorname{sen}(xy)$$

Tenemos que F es de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$ por ser suma de funciones de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$, y cada sumando es de clase 1 por ser composición de funciones de funciones polinómicas ($C^1(\mathbb{R}^3)$) con la función seno ($C^1(\mathbb{R})$). Además, trivialmente se tiene que $P_0 = (\pi, 0, 1) \in \Omega$ y $F(\pi, 0, 1) = 0$. Nos falta por comprobar que:

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\right) \neq 0$$

Para ello, buscamos la matriz jacobiana de F en el punto $(\pi, 0, 1)$. Para ello, dado un punto genérico $P = (x, y, z) \in \Omega$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(P) &= z\cos(xz) + y\cos(xy) \\
\frac{\partial F}{\partial y}(P) &= z\cos(yz) + x\cos(xy) \\
\frac{\partial F}{\partial z}(P) &= y\cos(yz) + x\cos(xz)
\end{aligned}$$

Por tanto, en el punto $P_0 = (\pi, 0, 1)$ tenemos que:

$$JF(P_0) = \begin{pmatrix} -1 & 1+\pi & -\pi \end{pmatrix}$$

Por tanto, el determinante que nos interesa es:

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\right) = -\pi \neq 0$$

Por el teorema de la función implícita, tenemos que existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, con $(\pi, 0) \in U$, de manera que F define una función implícita $z : U \to \mathbb{R}$, diferenciable en U, con $z(\pi, 0) = 1$, tal que:

$$F(x, y, z(x, y)) = 0 \qquad \forall (x, y) \in U \tag{2.5}$$

Nos falta ahora por calcular $\nabla z(\pi, 0)$. Para ello, para todo $(x, y) \in U$, se tiene que $F(x, y, z(x, y)) = 0$, por lo que sus derivadas parciales respecto de x e y han

[3]Se repitió ambos años.

de ser idénticamente nulas. Por tanto, evaluando todas las funciones en un punto genérico $(x,y)\in U$, tenemos que:

$$y\cos(yz)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cos(xz)+y\cos(xy)=0$$

$$\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos(xy)+x\cos(xz)\frac{\partial z}{\partial y}+x\cos(xy)=0$$

Evaluando en el punto $(\pi,0)$, como $z(\pi,0)=1$, tenemos que:

$$-\left(1+\pi\frac{\partial z}{\partial x}(\pi,0)\right)=0\Longrightarrow\frac{\partial z}{\partial x}(\pi,0)=-\frac{1}{\pi}$$

$$1-\pi\frac{\partial z}{\partial y}(\pi,0)+\pi=0\Longrightarrow\frac{\partial z}{\partial y}(\pi,0)=\frac{1+\pi}{\pi}$$

Por tanto,

$$\nabla z(\pi,0)=\left(\frac{-1}{\pi},\frac{1+\pi}{\pi}\right)$$

Ejercicio 2.4.7 (Ordinaria DGIIM 2023-24)**.** Probar que el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{ll} x^2+y^2-2uv & =0\\ x^3+y^3+u^3-v^3 & =0\end{array}\right.$$

define funciones implícitas $u=u(x,y)$ y $v=v(x,y)$, diferenciables en un entorno del punto $(1,-1)$, con $u(1,-1)=v(1,1)=-1$.

Probar también que la función $(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$ es de clase C^1 e inyectiva en un entorno del punto $(1,-1)$.

Ejercicio 2.4.8 (Ordinaria DGIIM 2022-23)**.** Probar que el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{ll} e^{xu-yv}\cos(xv+yu)+u & =0\\ e^{xu-yv}\operatorname{sen}(xv+yu)+v & =0\end{array}\right.$$

define funciones implícitas $u=u(x,y)$ y $v=v(x,y)$, diferenciables en un entorno del origen , con $u(0,0)=-1$ y $v(0,0)=0$. Calcular las derivadas parciales de u y v en el origen.

Sea $\Omega=\mathbb{R}^4$, que claramente es abierto, y $F=(F_1,F_2):\Omega\to\mathbb{R}^2$ definida como:

$$\begin{aligned} F_1(x,y,u,v)&=e^{xu-yv}\cos(xv+yu)+u\\ F_2(x,y,u,v)&=e^{xu-yv}\operatorname{sen}(xv+yu)+v\end{aligned}$$

Tenemos que F es de clase $C^1(\mathbb{R}^4)$ por ser suma de funciones de clase $C^1(\mathbb{R}^4)$, y el primer sumando es de clase 1 por ser producto de funciones de clase $C^1(\mathbb{R}^4)$. Además, trivialmente se tiene que $P_0=(0,0,-1,0)\in\Omega$ y $F(0,0,-1,0)=(0,0)$. Nos falta por comprobar que:

$$\det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}(P_0)\right)\neq 0$$

Para ello, buscamos la matriz jacobiana de F en el punto $(0,0,-1,0)$. Para ello, dado un punto genérico $P=(x,y,u,v)\in\Omega$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x}(P) &= e^{xu-yv}\left(u\cos\left(xv+yu\right)-v\operatorname{sen}\left(xv+yu\right)\right)\\
\frac{\partial F_1}{\partial y}(P) &= e^{xu-yv}\left(-v\cos\left(xv+yu\right)-u\operatorname{sen}\left(xv+yu\right)\right)\\
\frac{\partial F_1}{\partial u}(P) &= e^{xu-yv}\left(x\cos\left(xv+yu\right)-y\operatorname{sen}\left(xv+yu\right)\right)+1\\
\frac{\partial F_1}{\partial v}(P) &= e^{xu-yv}\left(-y\cos\left(xv+yu\right)-xx\operatorname{sen}\left(xv+yu\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial x}(P) &= e^{xu-yv}\left(u\operatorname{sen}\left(xv+yu\right)+v\cos\left(xv+yu\right)\right)\\
\frac{\partial F_2}{\partial y}(P) &= e^{xu-yv}\left(-v\operatorname{sen}\left(xv+yu\right)+u\cos\left(xv+yu\right)\right)\\
\frac{\partial F_2}{\partial u}(P) &= e^{xu-yv}\left(x\operatorname{sen}\left(xv+yu\right)+y\cos\left(xv+yu\right)\right)\\
\frac{\partial F_2}{\partial v}(P) &= e^{xu-yv}\left(-y\operatorname{sen}\left(xv+yu\right)+x\cos\left(xv+yu\right)\right)+1
\end{aligned}$$

Por tanto, en el punto $P_0=(0,0,-1,0)$ tenemos que:

$$JF(P_0)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto, el determinante que nos interesa es:

$$\det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}(P_0)\right)=\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

Por el teorema de la función implícita, tenemos que existe un abierto $U\subset\mathbb{R}^2$, con $(0,0)\in U$, de manera que F define funciones implícitas $u,v:U\to\mathbb{R}$, diferenciables en U, con $u(0,0)=-1$ y $v(0,0)=0$, tales que:

$$\left\{\begin{array}{ll} F_1(x,y,u(x,y),v(x,y)) & =0\\ F_2(x,y,u(x,y),v(x,y)) & =0\end{array}\right.\qquad \forall (x,y)\in U \tag{2.6}$$

Nos falta ahora por calcular las derivadas parciales de u y v en el punto $(0,0)$. Tenemos que, en U, se tiene que $F(x,y,u(x,y),v(x,y))$ es idénticamente nula, por lo que sus derivadas parciales respecto de x e y han de serlo también. Por tanto, evaluando todas las funciones en un punto genérico $(x,y)\in U$, tenemos que sus derivadas parciales respecto de x son:

$$e^{xu-yv}\left[\left(u+x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos\left(xv+yu\right)-\left(v+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial x}\right)\operatorname{sen}\left(xv+yu\right)\right]+\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$e^{xu-yv}\left[\left(u+x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial x}\right)\operatorname{sen}\left(xv+yu\right)+\left(v+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos\left(xv+yu\right)\right]+\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

Evaluando en el punto $(0,0)$, como $u(0,0) = -1$ y $v(0,0) = 0$, tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0$$

Análogamente, las derivadas parciales respecto de y son:

$$e^{xu-yv}\left[\left(x\frac{\partial u}{\partial y} - v - y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos\left(xv+yu\right) - \left(x\frac{\partial u}{\partial y} + u + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\operatorname{sen}\left(xv+yu\right)\right] + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$e^{xu-yv}\left[\left(x\frac{\partial u}{\partial y} - v - y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\operatorname{sen}\left(xv+yu\right) + \left(x\frac{\partial u}{\partial y} + u + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos\left(xv+yu\right)\right] + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Evaluando en el punto $(0,0)$, como $u(0,0) = -1$ y $v(0,0) = 0$, tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 1$$

Ejercicio 2.4.9 (Ordinaria DGIIM 2023-24 Incidencias)**.** Probar que el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{ll} e^{u+x}\cos(y+v) & = xu - yv \\ e^{u+x}\operatorname{sen}(y+v) & = xv + yu \end{array}\right.$$

define funciones implícitas $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$, diferenciables en un entorno del punto $(0,1)$, con $u(0,1) = 0$ y $v(0,1) = -1$. Calcular las derivadas parciales de u y v en dicho punto.