Topología II
Examen I

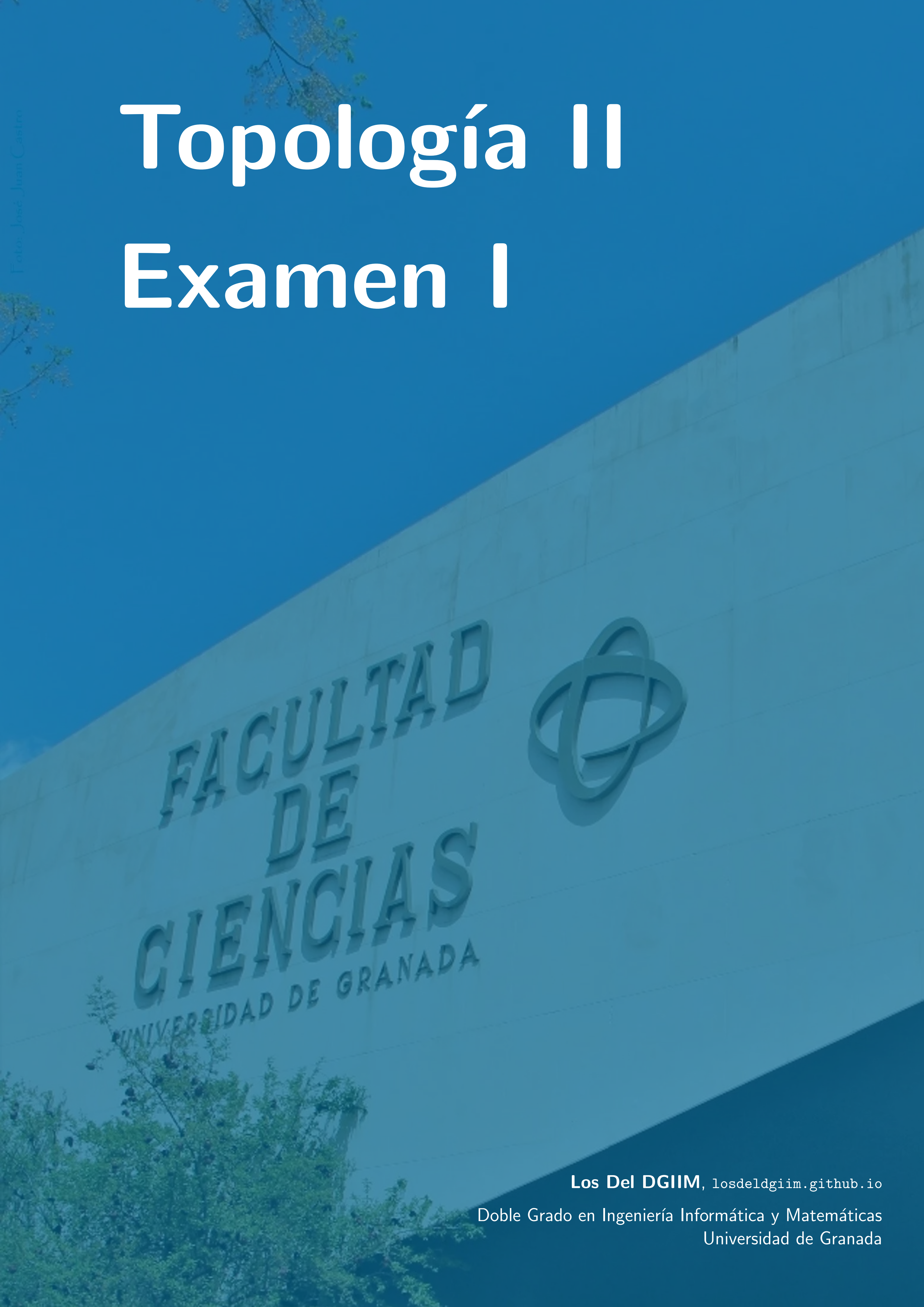

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología II
Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

Asignatura Topología II.

Curso Académico 2023/24.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo Grupo A.

Descripción Prueba del Tema 1.

Fecha 25 de abril de 2024.

Ejercicio 1 (7.5 puntos)**.** Sea $X_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \geqslant 2\}$ con la topología usual inducida.

a) Encontrar un retracto de deformación de X_n distinto de X_n (detallar la retracción y la homotopía).

b) Estudiar si $X_1 \cong X_n$ cuando $n \geqslant 2$.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Sea X un conjunto con $|X| \geqslant 2$. Fijado $x_0 \in X$ se considera la topología

$$T = \{U \subseteq X : x_0 \notin U\} \cup \{X\}$$

¿Es (X, T) contráctil?

Solución.

Ejercicio 1 (7.5 puntos)**.** Sea $X_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \geqslant 2\}$ con la topología usual inducida.

a) Encontrar un retracto de deformación de X_n distinto de X_n (detallar la retracción y la homotopía).

Si consideramos:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 2\}$$

y definimos $H : X_n \times [0,1] \to X_n$ dada por:

$$H(x,t) = (1-t)x + 2t\frac{x}{\|x\|}$$

observemos que $\|x\| \neq 0$ para todo $x \in X_n$ así como que:

$$\begin{aligned}\|H(x,t)\| &= \left\|(1-t)x + 2t\frac{x}{\|x\|}\right\| = \|x\|\left(1-t+\frac{2t}{\|x\|}\right) = \|x\|(1-t)+2t \\ &\geqslant 2(1-t)+2t = 2 \qquad \forall x \in X_n, \quad \forall t \in [0,1]\end{aligned}$$

Por lo que $H(x,t) \in X_n$ para todo $(x,t) \in X_n \times [0,1]$, por lo que H está bien definida. Es claro también que H es continua, y observamos además que:

- $H(x,0) = x \quad \forall x \in X_n$.
- $H(x,1) = \dfrac{2x}{\|x\|} \in S \quad \forall x \in X_n$.
- Si $y \in S$:
$$H(y,1) = 2\frac{y}{\|y\|} = y$$

En definitiva, si consideramos $r : X_n \to S$ dada por:

$$r(x) = H(x,1) = 2\frac{x}{\|x\|}$$

tenemos que H es una homotopía entre Id_{X_n} y $i \circ r$ (con $i : S \hookrightarrow X_n$), por lo que S es un retracto de deformación de X_n.

b) Estudiar si $X_1 \cong X_n$ cuando $n \geqslant 2$.

Para cada $m \geqslant 1$ tenemos que $S_m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| = 2\}$ es un retracto de deformación de X_m. Observamos además que la aplicación $f : \mathbb{S}^m \to S_m$ dada por:

$$f(x) = 2x$$

es un homeomorfismo, de donde deducimos que:

$$\pi_1(X_m) = \pi_1(S_m) \cong \pi_1(\mathbb{S}^m) \qquad \forall m \geqslant 1$$

Ahora, si $n \geqslant 2$ tenemos por un lado que:

$$\pi_1(X_1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

y por otro lado que:

$$\pi_1(X_n) \cong \pi_1(\mathbb{S}^n) = \{1\}$$

Por lo que X_1 y X_n no pueden ser homeomorfos.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Sea X un conjunto con $|X| \geqslant 2$. Fijado $x_0 \in X$ se considera la topología

$$T = \{U \subseteq X : x_0 \notin U\} \cup \{X\}$$

¿Es (X, T) contráctil?

Sí es contráctil, pues si consideramos $H : X \times [0, 1] \to X$ dada por:

$$H(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } t \in [0, 1/2[\\ x_0 & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Si tomamos $U \in T$:

- Si $U = X$ tenemos trivialmente que $H^{-1}(X) = X \times [0, 1]$, que es un conjunto abierto.
- Si $U \neq X$ tenemos entonces que $x_0 \notin U$, y:

  $$\begin{aligned} H^{-1}(U) &= \{(x,t) \in X \times [0,1] : H(x,t) \in U\} \\ &= \{(x,t) \in X \times [0,1] : (t \geqslant 1/2 \wedge x_0 \in U) \vee (t < 1/2 \wedge x \in U)\} \\ &= \{(x,t) \in X \times [0,1] : t < 1/2 \wedge x \in U\} = U \times [0, 1/2[\end{aligned}$$

  Con $U \times [0, 1/2[$ un conjunto abierto, como producto de dos conjuntos abiertos.

En definitiva, tenemos que H es continua, así como que:

- $H(x, 0) = x \quad \forall x \in X$.
- $H(x, 1) = x_0 \quad \forall x \in X$.

Por lo que H es una homotopía entre Id_X y la función constantemente igual a x_0, de donde $\{x_0\}$ es un retracto de deformación de (X, T), por lo que este espacio topológico es contráctil.