Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Отчет

по расчетно-графической работе «Дифференциальные уравнения. Ряды»

по дисциплине «Дополнительные главы высшей математики»

Авторы:

Жаркова Е.С.,

Филипцев Д.В.,

Бабич А.А.

Факультет: ФИТиП

Группа: М3203

Преподаватель:

Возианова А.В.

Санкт-Петербург 2021

Задание 1

4. Найдите закон движения и определите период T математического маятника длиной lпри малых отклонениях.
   Найдите закон движения математического маятника, если на него действует внешняя вынуждающая сила по закону $f(t) = \sin t$. Как изменится закон движения, если длина маятника l такова, что без вынуждающей силы период колебаний равен 2π? Объясните это с физической точки зрения. Изобразите решения на графиках. Проведите анализ интегральных траекторий.

М3203.

Задание 1.

• Математический маятник

$x(\alpha)$ – мал. по абсолютной величине, так что рассматриваем только малые отклонения.

Гармон. осциллятор описывает дифф. уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2 x = 0 \qquad \ddot{x} + w^2 x = 0$$

$\sin x \sim x$

$\left\{ \begin{array}{l} w \text{ – неизот. лог. поддр. циклическая частота} \\ w^2 = g/l \end{array} \right.$

$$x = x_0 \cos(w_0 t + \varphi_0)$$

период:

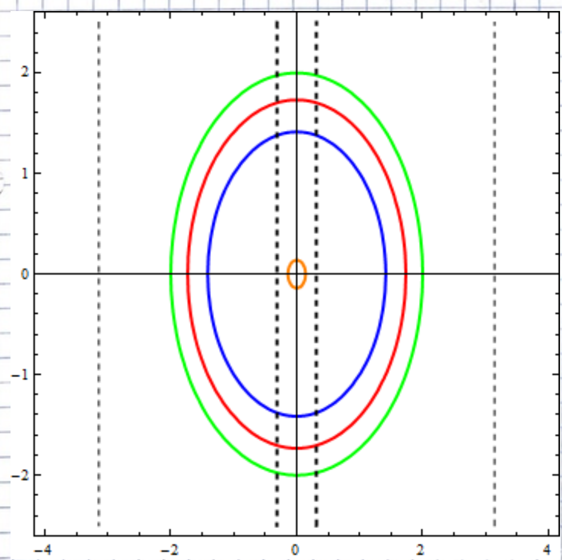
$$T = 2\pi \sqrt{l/g}$$

• $u = x'$

$\Downarrow$

$$\frac{u^2}{2} + \frac{w^2 x^2}{2} = E$$

закон сохр. энергии. → изобрази как уравнение кривой на плоскости!



Каждая линия – фазовая траектория.

Мы должны учитывать, что $\sin x \sim x$ ⇒ мы можем доверять только оранжевой линии, т.к. она не выходит за ограниченную область.

Для различных значений E различные кривые

Уравнение с учетом вынуждающей сил:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2 x + \frac{F(t)}{m} = 0$$ ← вынужд. сила. $F(t) = \sin t$.

её можно рассмотреть как гармоническую в виде:

$$\frac{F(t)}{m} = A_0 \cos(w_1 t)$$

угловая частота этой силы.

- Как изменится закон движения, если без вынужд. сил $T = 2\pi$.

$$T = 2\pi\sqrt{l/g} \Rightarrow \sqrt{l/g} = 1 \Rightarrow w = 1 \quad w^2 = 1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{w^2}_{1} x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

Задание 2

4. $\begin{cases} x' = 4y + x \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 3$

$\begin{cases} x' = 4y + x \\ y' = 2x + 3 \end{cases}$ $x(0) = 0$ $y(0) = 3$

1 метод:

$x'' = 4y' + x' = 8x + 12y + x'$

$4y = x' - x$

$x'' = 8x + 3x' - 3x + x' = 5x + 4x'$

$x'' - 4x' - 5x = 0$

$\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 5$

$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}$

$x' = -C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{5t}$

$-C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{5t} = 4y + C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}$

$4y = -2C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{5t}$

$y = C_2 e^{5t} - \frac{1}{2} C_1 e^{-t}$

$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \end{cases}$

2 метод:

$\begin{vmatrix} 4-k & 1 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix}$ $(4-k)(3-k) - 2 = 0$

$12 - 4k - 3k + k^2 - 2 = 0$

$k^2 - 7k + 10 = 0$

$k_1 = 2$ $k_2 = 5$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$

$2\lambda = -\nu$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ $\nu = 1$

$\begin{cases} -\lambda + \nu = 0 \\ 2\lambda - 2\nu = 0 \end{cases}$

$\lambda = \nu = 1$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \end{cases}$

$\begin{cases} x = C_1 + C_2 = 0 \\ y = -\frac{1}{2} C_1 + C_2 = 3 \end{cases}$ $1{,}5 C_1 = -3$

$\Downarrow$

$C_1 = -2$

$C_2 = 2$

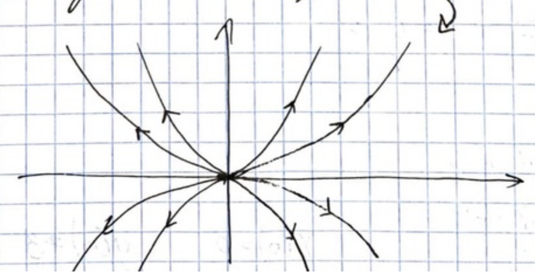
Харак. корни $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 5$.

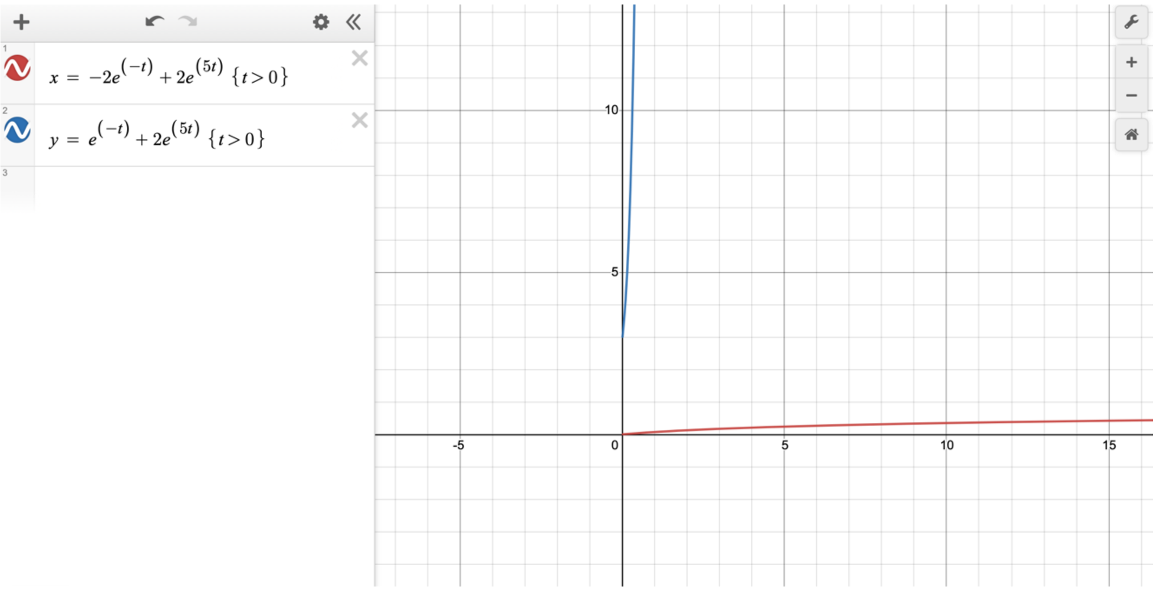
$\lambda_1 \neq \lambda_2$; $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$; $\lambda_1, \lambda_2 \in R$

$\Downarrow$

неустойчивый узел.

$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$





Задание 3

4. $f(x) = \dfrac{9}{-x^2 + 10x - 16}$, $x_0 = 5$

$$f(x) = \frac{9}{-x^2+10x-16} \qquad x_0 = 5$$

$$f(x_0) = \frac{9}{-25+50-16} = \frac{9}{9} = 1$$

$$f'(x) = \frac{9(2x-10)}{(-x^2+10x-16)^2}$$

$$f'(x_0) = 0$$

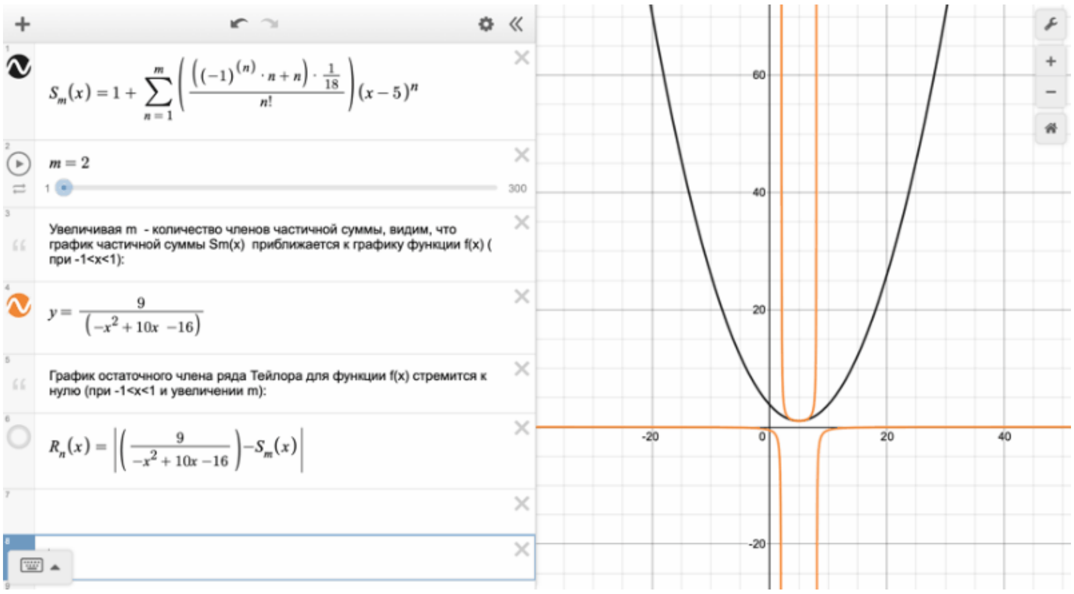
$$f''(x) = \frac{9(2x-10)\overset{\to 0}{(4x-20)}}{(-x^2+10x-16)^3} + \frac{18}{(-x^2+10x-16)^2}$$

$$f''(x_0) = \frac{18}{(-25+50-16)^2} = \frac{2}{9}$$

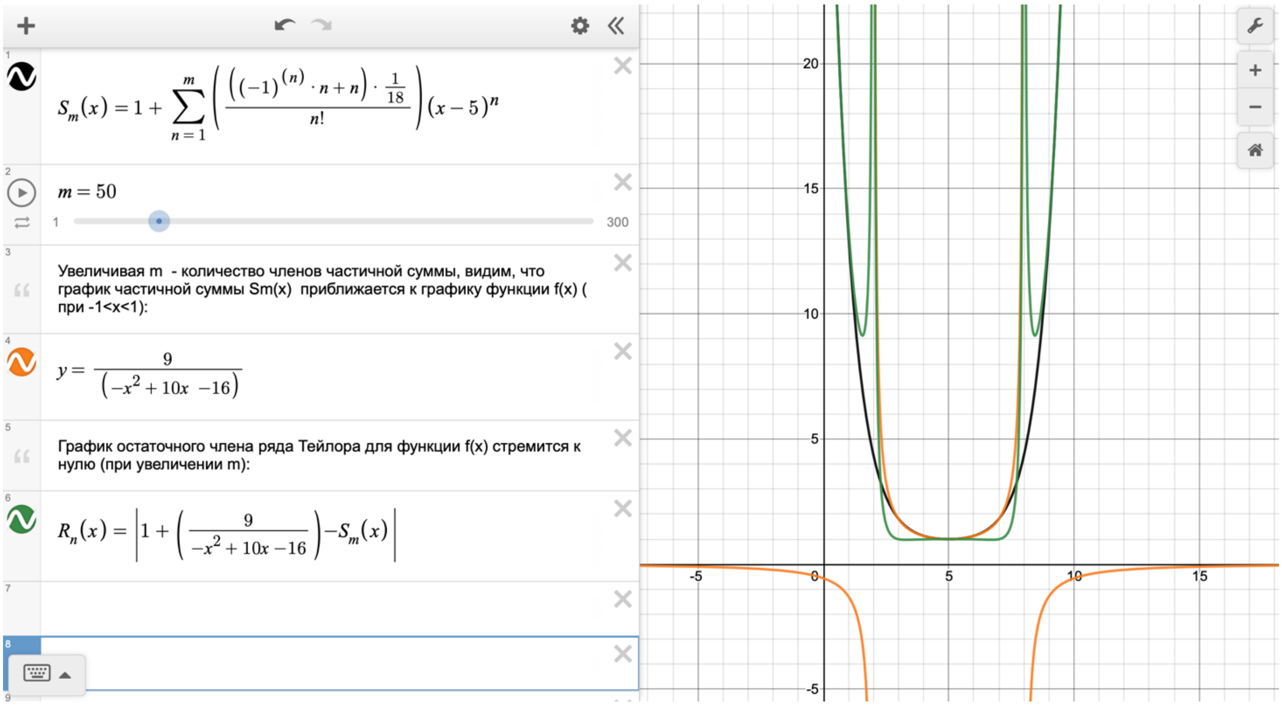
$$f'''(x) = \frac{9(2x-10)\overset{\to 0}{(4x-20)}(6x-30)}{(-x^2+10x-16)^4} + \frac{\overset{\to 0}{36(2x-10)}}{(-x^2+10x-16)^3} + \frac{\overset{\to 0}{36(4x-20)}}{(-x^2+10x-16)^3}$$

$$f'''(x_0) = 0$$

ряд Тейлора. где $f(x) = 1 + 0 + \dfrac{2/9}{2!}(x-5)^2 + 0 + \ldots$



$S_m(x) = 1 + \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{\left((-1)^{(n)} \cdot n + n \right) \cdot \frac{1}{18}}{n!} \right) (x-5)^n$
$m = 2$
1
300
Увеличивая m - количество членов частичной суммы, видим, что график частичной суммы Sm(x) приближается к графику функции f(x) (при -1<x<1):
$y = \frac{9}{(-x^2 + 10x - 16)}$
График остаточного члена ряда Тейлора для функции f(x) стремится к нулю (при -1<x<1 и увеличении m):
$R_n(x) = \left| \left(\frac{9}{-x^2 + 10x - 16} \right) - S_m(x) \right|$
60
40
20
-20
0
20
40
-20



$S_m(x) = 1 + \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{\left((-1)^{(n)} \cdot n + n \right) \cdot \frac{1}{18}}{n!} \right) (x-5)^n$
$m = 50$
1
300
Увеличивая m - количество членов частичной суммы, видим, что график частичной суммы Sm(x) приближается к графику функции f(x) (при -1<x<1):
$y = \frac{9}{(-x^2 + 10x - 16)}$
График остаточного члена ряда Тейлора для функции f(x) стремится к нулю (при увеличении m):
$R_n(x) = \left| 1 + \left(\frac{9}{-x^2 + 10x - 16} \right) - S_m(x) \right|$
20
15
10
5
-5
0
5
10
15
-5

Задание 4, индивидуальное

Жаркова Е.С. , Вариант 5:

Задание 1.

Вычислить приближенно значение функции с точностью 0,0001.

$$\cos\frac{4}{5}$$

$\cos 4/5 = \cos 0{,}8$ табл. значен.: 0,696706709

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

$$\cos 0{,}8 \approx 1 - \frac{0{,}8^2}{2!} + \frac{0{,}8^4}{4!} - \frac{0{,}8^6}{6!} + \frac{0{,}8^8}{8!} =$$

0,32 0,01706667 0,000364 0,000004161

точность: 0,0001

$= 0{,}696706$

Задание 2.

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью 0,0001.

$$\int_0^1 e^{-x^2/2}dx$$

$\int_0^1 e^{-x^2/2} dx$ - точность: 0,0001

$$\int_0^1 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^6}{2^3 3!} + \frac{x^8}{2^4 \cdot 4!} - \frac{x^{10}}{2^5 \cdot 5!} =$$

$$= \left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{336} + \frac{x^9}{3456} - \frac{x^{11}}{42240}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$= 1 - 0{,}1666667 + 0{,}025 - 0{,}002976 + 0{,}0002893 - 0{,}00002367 = 0{,}8556227$

Значение в интернете: 0,855624

Задание 3.

Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Ограничиться четырьмя членами ряда.

$$y' = \cos y + 3\ ;y(0) = \pi/2$$

№3

$y' = \cos y + 3 \qquad y(0) = \pi/2$

$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$

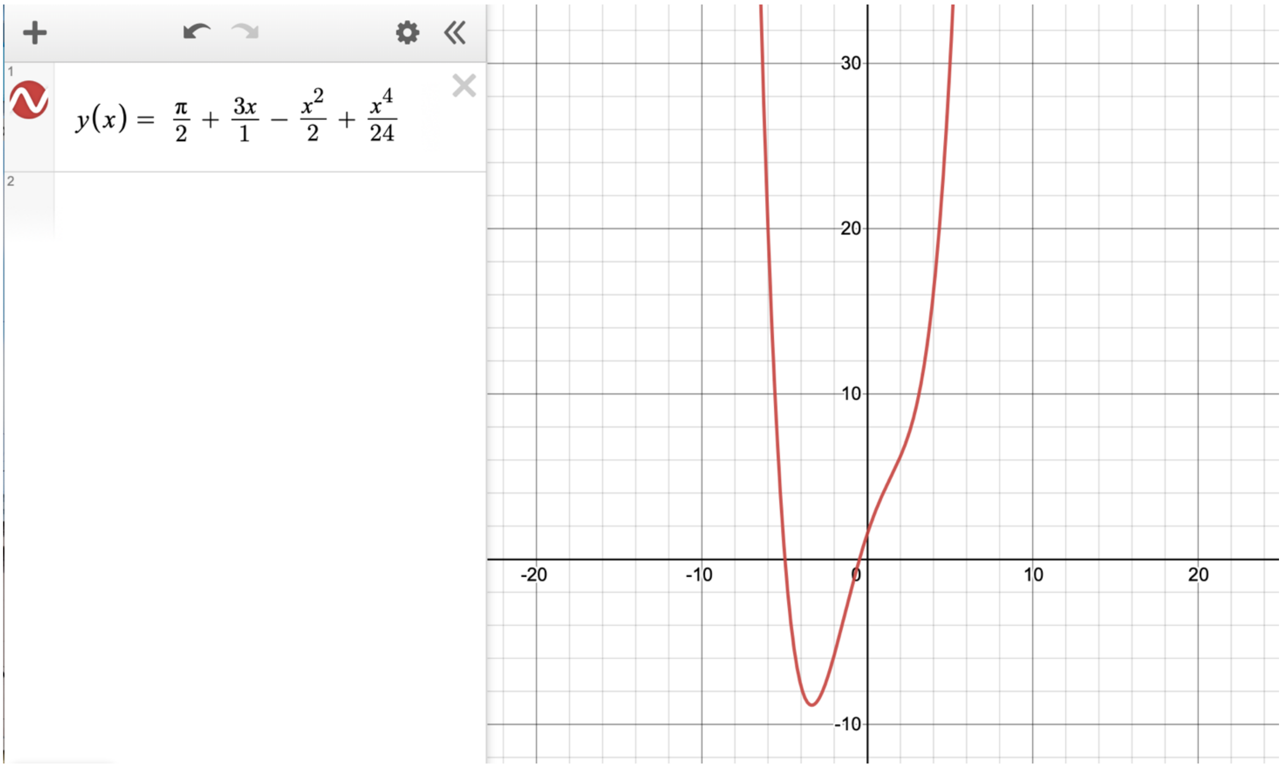
$y'(0) = \cos \pi/2 + 3 = 3$

$y''(0) = (\cos y + 3)' = -\sin y = -1$

$y'''(0) = (-\sin y)' = -\cos y = 0$

$y^{IV}(0) = (-\cos y)' = \sin y = 1$

$y(x) = \frac{\pi}{2} + 3x - \frac{x^2}{2} + 0 + \frac{x^4}{24}$



Филипцев Д.В., Вариант 14:

Задание 1.

Вычислить приближенно значение функции с точностью 0,0001.

$$\cos 36°$$

Степенные ряды в приближённых методах

Вариант 14.

1) $\cos 36° \approx \cos 0{,}62832$ - перевод в радианы

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} + \ldots$$

$$\cos 0{,}62832 = 1 - \frac{(0{,}62832)^2}{2!} + \frac{(0{,}62832)^4}{4!} - \frac{(0{,}62832)^6}{6!} + \frac{(0{,}62832)^8}{8!}$$

$$\cos 0{,}62832 \approx 0{,}8050.$$

$$\cos 36° = 0{,}8050169944$$

Задание 2.

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью 0,0001.

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^6)}{x^6} dx$$

② $\int\limits_0^{0,5} \frac{\ln(1+x^6)}{x^6}$ · разложение функции в ряд Маклорена

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5}$

$\ln(1+x^6) = x^6 - \frac{x^{12}}{2} + \frac{x^{18}}{3} - \frac{x^{24}}{4} + \frac{x^{30}}{5}$

$\frac{\ln(1+x^6)}{x^6} = 1 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^{12}}{3} - \frac{x^{18}}{4} + \frac{x^{24}}{5}$

интегрирование почленно

$\int\limits_0^{0,5} \frac{\ln(1+x^6)}{x^6}\,dx = \int\limits_0^{0,5} 1\,dx - \int\limits_0^{0,5} \frac{x^6}{2}\,dx + \int\limits_0^{0,5} \frac{x^{12}}{3}\,dx$

$- \int\limits_0^{0,5} \frac{x^{18}}{4}\,dx + \int\limits_0^{0,5} \frac{x^{24}}{5}\,dx =$

$= x\Big|_0^{0,5} - \frac{x^7}{14}\Big|_0^{0,5} + \frac{x^{13}}{39}\Big|_0^{0,5} - \frac{x^{19}}{76}\Big|_0^{0,5} + \frac{x^{25}}{125}\Big|_0^{0,5}$

$= 0,5 - \frac{(0,5)^7}{14} + \frac{(0,5)^{13}}{39} - \frac{(0,5)^{19}}{76} + \frac{(0,5)^{25}}{125} =$

$\approx 0,4994$

ответ через калькулятор 0,4994450694

Задание 3.

Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Ограничиться четырьмя членами ряда.

$$y' = x\cos y + x^2\ ;\ y(2) = \pi/2$$

3 $\quad y' = x\cos y + x^2 \qquad y(2) = \frac{\pi}{2}$

$$y(x) = y(2) + \frac{y'(2)}{1!}(x-2) + \frac{y''(2)}{2!}(x-2)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n$$

$$y' = x\cos y(2) + x^2 = x\cos\frac{\pi}{2} + x^2 = x^2$$

$$y'' = (x\cos y(2) + x^2)' = -x\sin y(2) + \cos y(2) + 2x$$
$$= x$$

$$y''' = (-x\sin y(2) + \cos y(2) + 2x)' =$$
$$= -2\underbrace{\sin y(2)}_{=1} - x\underbrace{\cos y(2)}_{=0} + 2 = -2 + 2 = 0.$$

$$y'''' = (-2\sin y(2) - x\cos y(2) + 2)' =$$
$$= x\sin y(2) - 3\cos y(2) = x.$$

$$y(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{x^2(x-2)}{1} + \frac{x(x-2)^2}{2!} +$$
$$+ \frac{x(x-2)^4}{4!}$$

Бабич А.А.

Вычислить приближенно значение функции с точностью 0,0001.

Вариант 1:

$$\sin\frac{3}{4}$$

Бабич А. М3203 РГР инт. зад

Вар I

№ 1) $\sin\frac{3}{4} = \sin 0{,}75$ 0,0001

Разложение:

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Посчитаем несколько членов:

$n=1$: $0{,}75$

$n=2$: $\frac{0{,}75^3}{3!} = \frac{0{,}421875}{6} \approx -0{,}0703125$

$n=3$: $\frac{0{,}75^5}{5!} \approx 0{,}00197754$

$n=4$: $\frac{0{,}75^7}{7!} \approx -0{,}0000084704$

по модулю меньше 0,0001

Результат: $0{,}75 - 0{,}0703125 + 0{,}00197754$

$\approx 0{,}6817$

Задание 2.

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд вычислить приближенно интеграл с точностью 0,0001.

$$\int_0^{0.5} e^{-2x^2} dx$$

Задание 2.

$$\int_0^{0,5} e^{-2x^2} dx$$

Разложение e^x в ряд Маклорена:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in R$$

$$e^{-2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n \cdot x^{2n}}{n!}$$

Интегрируем:

$$\int_0^{0,5} e^{-2x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n \cdot x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} \int_0^{0,5} x^{2n} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!(2n+1)2^{2n+1}}$$

$n=0$: $\frac{2}{2} = 1$

$n=1$: $\frac{4}{24} = \frac{1}{6} \approx 0,16666$

$n=2$: $\frac{8}{320} = \frac{1}{40} = 0,025$

$n=3:\ -\dfrac{16}{5376} \approx -0{,}0029761905$

$n=4:\ \dfrac{32}{110592} \approx -0{,}000289351851852$

$n=5:\ \dfrac{64}{2703360} \approx 0{,}00002367424\ldots$

$< 0{,}0001$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2x^2}\,dx \approx 0{,}8556.$$

Задание 3.

Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Ограничиться четырьмя членами ряда.

$$y' = y^3 - 5x\,;\ y(0) = 1$$

Задание №3.

$y' = y^3 - 5x \qquad y(0)=1 \quad x_0 = 0$

4 члена.

$y(0)=1$

$y'(0)=1-0=1\neq 0$

$y''=(y^3-5x)'=3y^2y'-5 \Rightarrow y''(0)=-2\neq 0$

$y'''=(3y^2y'-5)'=3(y^2y')'=$

$=3\left((y^2)'y'+y^2y''\right)=3\left(2y(y')^2+y^2y''\right)\Rightarrow$

$\qquad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -2$

$\Rightarrow y'''(0)=0$

$y^{IV} = \left(3(y(y')^2 + y^2 y'')\right)' = 3 \cdot (2y(y')^2 + y^2 y'')' =$

$= 3 \cdot \left((2y(y')^2)' + (y^2 y'')'\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow y^{IV}(0) = -30 \neq 0$

Искомое решение: $y(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{-2}{2!}x^2 +$

$+ \frac{-30}{4!}x^4$

Ответ: $y(x) \approx -\frac{5}{4}x^4 - x^2 + 2$

Задание 5

4. $f(x) = |x|$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

Задание 5.

$f(x) = |x| \qquad (-\pi ; \pi) \qquad$ четное $\Rightarrow b_n = 0$

$f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \le x \le 0 \\ x & 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi$

$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} x \cos nx\, d(nx) = -\frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} x\, d \sin nx =$

$= -\frac{2}{\pi n} \left(x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx\,dx \right) = -\frac{2}{\pi n} \left(\pi \sin n\pi - 0 + \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) =$

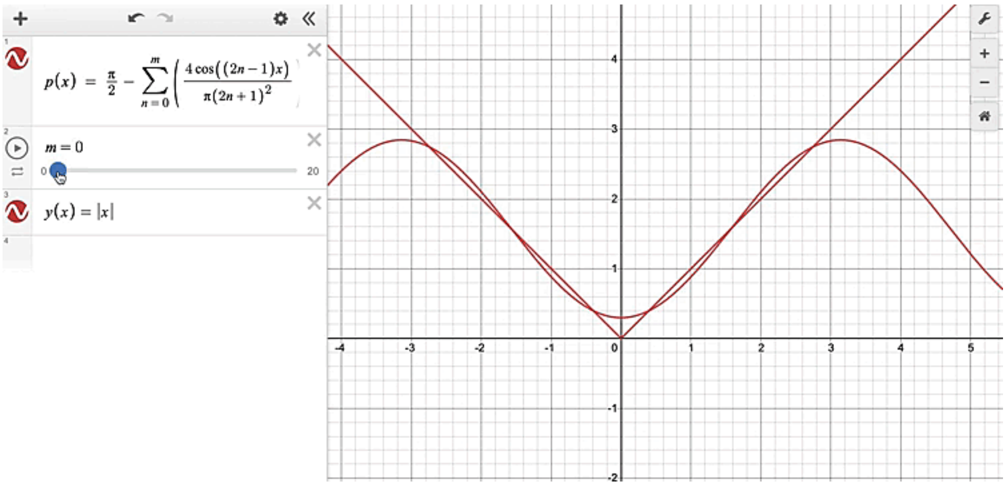
$= \frac{2}{\pi n^2} (\cos \pi n - 1) \qquad \cos \pi n = (-1)^n \qquad \frac{2 \cdot ((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$

$\Downarrow$

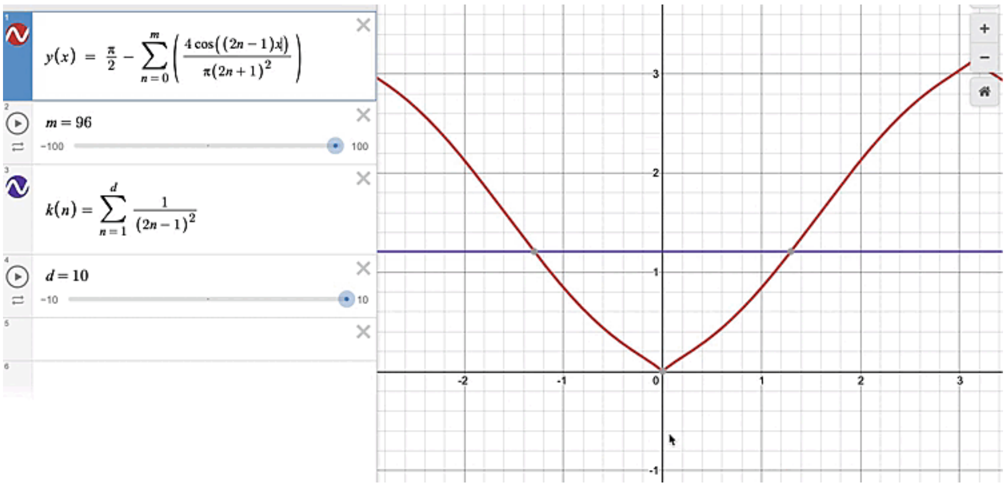
$\begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$

$b_n = 0$

$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cos nx}{\pi n^2}$



$p(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{4\cos((2n-1)x)}{\pi(2n+1)^2} \right)$
$m = 0$
0
20
$y(x) = |x|$



$y(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{4\cos((2n-1)x)}{\pi(2n+1)^2} \right)$
$m = 96$
−100
100
$k(n) = \sum_{n=1}^{d} \frac{1}{(2n-1)^2}$
$d = 10$
−10
10