$$p \rightarrow q, p \vdash q$$

1	1	p		A
2	2	$p \rightarrow q$		A
1, 2	3	q	1, 2	$\rightarrow E$

$$(\neg q), ((\neg q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow q)) \vdash ((\neg p) \rightarrow q)$$

1	1	$\neg q$		A
2	2	$\neg q \rightarrow \neg p \rightarrow q$		A
1, 2	3	$\neg p \rightarrow q$	1, 2	$\rightarrow E$

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash r$$

1	1	p		A
2	2	$p \rightarrow q$		A
3	3	$q \rightarrow r$		A
1, 2	4	q	1, 2	$\rightarrow E$
1, 2, 3	5	r	3, 4	$\rightarrow E$

$$p \to (q \to r), p \to q, p \vdash r$$

1	1	p		A
2	2	$p \to q$		A
3	3	$p \to q \to r$		A
1, 2	4	q	1, 2	$\to E$
1, 3	5	$q \to r$	1, 3	$\to E$
1, 2, 3	6	r	4, 5	$\to E$

$$\neg(q), p \to q \vdash \neg(p)$$

1	1	p		A
2	2	$\neg q$		A
3	3	$p \to q$		A
1, 3	4	q	1, 3	$\to E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	2, 4	$\wedge I$
2, 3	6	$\neg p$	1, 5	$\neg I$

$$p \to (q \to r), p, \neg(r) \vdash \neg(q)$$

1	1	p		A
2	2	q		A
3	3	$\neg r$		A
4	4	$p \to q \to r$		A
1, 4	5	$q \to r$	1, 4	$\to E$
1, 2, 4	6	r	2, 5	$\to E$
1, 2, 3, 4	7	$r \wedge \neg r$	3, 6	$\wedge I$
1, 3, 4	8	$\neg q$	2, 7	$\neg I$

$$p \to \neg(q), q \vdash \neg(p)$$

1	1	p		A
2	2	q		A
3	3	$p \to \neg q$		A
1, 3	4	$\neg q$	1, 3	$\to E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	2, 4	$\wedge I$
2, 3	6	$\neg p$	1, 5	$\neg I$

$$\neg(p) \to q, \neg(q) \vdash p$$

1	1	$\neg p$		A
2	2	$\neg q$		A
3	3	$\neg p \to q$		A
1, 3	4	q	1, 3	$\to E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	2, 4	$\wedge I$
2, 3	6	p	1, 5	$\neg E$

$$p \to q \vdash (\neg(q) \to \neg(p))$$

1	1	p		A
2	2	$\neg q$		A
3	3	$p \to q$		A
1, 3	4	q	1, 3	$\to E$
1, 2, 3	5	$q \land \neg q$	2, 4	$\land I$
2, 3	6	$\neg p$	1, 5	$\neg I$
3	7	$\neg q \to \neg p$	6	$\to I$

$$p \to (q \to r) \vdash (q \to (p \to r))$$

1	1	p		A
2	2	q		A
3	3	$p \to q \to r$		A
1, 3	4	$q \to r$	1, 3	$\to E$
1, 2, 3	5	r	2, 4	$\to E$
2, 3	6	$p \to r$	5	$\to I$
3	7	$q \to p \to r$	6	$\to I$

$$q \to r \vdash ((\neg(q) \to \neg(p)) \to (p \to r))$$

1	1	p		A
2	2	$\neg q$		A
3	3	$q \to r$		A
4	4	$\neg q \to \neg p$		A
2, 4	5	$\neg p$	2, 4	$\to E$
1, 2, 4	6	$p \land \neg p$	1, 5	$\land I$
1, 4	7	q	2, 6	$\neg E$
1, 3, 4	8	r	3, 7	$\to E$
3, 4	9	$p \to r$	8	$\to I$
3	10	$(\neg q \to \neg p) \to p \to r$	9	$\to I$

$$p \to (p \to q), p \vdash q$$

1	1	p		A
2	2	$p \to p \to q$		A
1, 2	3	$p \to q$	1, 2	$\to E$
1, 2	4	q	1, 3	$\to E$

$$q \rightarrow (p \rightarrow r), \neg(r), q \vdash \neg(p)$$

1	1	p		A
2	2	q		A
3	3	$\neg r$		A
4	4	$q \rightarrow p \rightarrow r$		A
2, 4	5	$p \rightarrow r$	2, 4	$\rightarrow E$
1, 2, 4	6	r	1, 5	$\rightarrow E$
1, 2, 3, 4	7	$r \wedge \neg r$	3, 6	$\wedge I$
2, 3, 4	8	$\neg p$	1, 7	$\neg I$

$$p \rightarrow \neg(\neg(q)), p \vdash q$$

1	1	p		A
2	2	$\neg q$		A
3	3	$p \rightarrow \neg(\neg q)$		A
1, 3	4	$\neg(\neg q)$	1, 3	$\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$\neg q \wedge \neg(\neg q)$	2, 4	$\wedge I$
1, 3	6	q	2, 5	$\neg E$

$$\neg(\neg(q)) \rightarrow p, \neg(p) \vdash \neg(q)$$

1	1	$\neg p$		A
2	2	$\neg(\neg q)$		A
3	3	$\neg(\neg q) \rightarrow p$		A
2, 3	4	p	2, 3	$\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$p \wedge \neg p$	1, 4	$\wedge I$
1, 3	6	$\neg q$	2, 5	$\neg E$

$$(\neg(p) \rightarrow \neg(q)), q \vdash p$$

1	1	q		A
2	2	$\neg p$		A
3	3	$\neg p \rightarrow \neg q$		A
2, 3	4	$\neg q$	2, 3	$\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	1, 4	$\wedge I$
1, 3	6	p	2, 5	$\neg E$

$$(p \rightarrow \neg(q)) \vdash (q \rightarrow \neg(p))$$

1	1	p		A
2	2	q		A
3	3	$p \rightarrow \neg q$		A
1, 3	4	$\neg q$	1, 3	$\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	2, 4	$\wedge I$
2, 3	6	$\neg p$	1, 5	$\neg I$
3	7	$q \rightarrow \neg p$	6	$\rightarrow I$

$$(\neg(p) \to q) \vdash (\neg(q) \to p)$$

1	1	$\neg p$		A
2	2	$\neg q$		A
3	3	$\neg p \to q$		A
1, 3	4	q	1, 3	$\to E$
1, 2, 3	5	$q \land \neg q$	2, 4	$\land I$
2, 3	6	p	1, 5	$\neg E$
3	7	$\neg q \to p$	6	$\to I$

$$(\neg(p) \to \neg(q)) \vdash (q \to p)$$

1	1	q		A
2	2	$\neg p$		A
3	3	$\neg p \to \neg q$		A
2, 3	4	$\neg q$	2, 3	$\to E$
1, 2, 3	5	$q \land \neg q$	1, 4	$\land I$
1, 3	6	p	2, 5	$\neg E$
3	7	$q \to p$	6	$\to I$

$$(p \to q), (q \to r) \vdash (p \to r)$$

1	1	p		A
2	2	$p \to q$		A
3	3	$q \to r$		A
1, 2	4	q	1, 2	$\to E$
1, 2, 3	5	r	3, 4	$\to E$
2, 3	6	$p \to r$	5	$\to I$

$$(p \to (q \to r)) \vdash ((p \to q) \to (p \to r))$$

1	1	p		A
2	2	$p \to q$		A
3	3	$p \to q \to r$		A
1, 2	4	q	1, 2	$\to E$
1, 3	5	$q \to r$	1, 3	$\to E$
1, 2, 3	6	r	4, 5	$\to E$
2, 3	7	$p \to r$	6	$\to I$
3	8	$(p \to q) \to p \to r$	7	$\to I$

$$(p \to (q \to (r \to s))) \vdash (r \to (p \to (q \to s)))$$

1	1	p		A
2	2	q		A
3	3	r		A
4	4	$p \to q \to r \to s$		A
1, 4	5	$q \to r \to s$	1, 4	$\to E$
1, 2, 4	6	$r \to s$	2, 5	$\to E$
1, 2, 3, 4	7	s	3, 6	$\to E$
1, 3, 4	8	$q \to s$	7	$\to I$
3, 4	9	$p \to q \to s$	8	$\to I$
4	10	$r \to p \to q \to s$	9	$\to I$

$$(p \to q) \vdash ((q \to r) \to (p \to r))$$

1	1	p		A
2	2	$p \to q$		A
3	3	$q \to r$		A
1, 2	4	q	1, 2	$\to E$
1, 2, 3	5	r	3, 4	$\to E$
2, 3	6	$p \to r$	5	$\to I$
2	7	$(q \to r) \to p \to r$	6	$\to I$

$$p \vdash ((p \to q) \to q)$$

1	1	p		A
2	2	$p \to q$		A
1, 2	3	q	1, 2	$\to E$
1	4	$(p \to q) \to q$	3	$\to I$

$$p \vdash ((\neg(q \to r) \to \neg(p)) \to (\neg(r) \to \neg(q)))$$

1	1	p		A
2	2	q		A
3	3	$\neg r$		A
4	4	$q \to r$		A
5	5	$\neg(q \to r) \to \neg p$		A
2, 4	6	r	2, 4	$\to E$
2, 3, 4	7	$r \land \neg r$	3, 6	$\land I$
2, 3	8	$\neg(q \to r)$	4, 7	$\neg I$
2, 3, 5	9	$\neg p$	8, 5	$\to E$
1, 2, 3, 5	10	$p \land \neg p$	1, 9	$\land I$
1, 3, 5	11	$\neg q$	2, 10	$\neg I$
1, 5	12	$\neg r \to \neg q$	11	$\to I$
1	13	$(\neg(q \to r) \to \neg p) \to \neg r \to \neg q$	12	$\to I$

$$p, q \vdash (p \land q)$$

1	1	p		A
2	2	q		A
1, 2	3	$p \land q$	1, 2	$\land I$

$$((p \land q) \to r) \vdash (p \to (q \to r))$$

1	1	p		A
2	2	q		A
3	3	$p \land q \to r$		A
1, 2	4	$p \land q$	1, 2	$\land I$
1, 2, 3	5	r	3, 4	$\to E$
1, 3	6	$q \to r$	5	$\to I$
3	7	$p \to q \to r$	6	$\to I$

$$(p \land q) \vdash p$$

1	1	$p \land q$		A
1	2	p	1	$\land E$

$$(p \land q) \vdash q$$

1	1	$p \land q$		A
1	2	q	1	$\land E$

$$p \to (q \to r) \vdash ((p \land q) \to r)$$

1	1	$p \to q \to r$		A
2	2	$p \land q$		A
2	3	p	2	$\land E$
2	4	q	2	$\land E$
1, 2	5	$q \to r$	1, 3	$\to E$
1, 2	6	r	4, 5	$\to E$
1	7	$p \land q \to r$	6	$\to I$

$$(p \land q) \vdash (q \land p)$$

1	1	$p \land q$		A
1	2	p	1	$\land E$
1	3	q	1	$\land E$
1	4	$q \land p$	2, 3	$\land I$

$$(q \to r) \vdash ((p \land q) \to (p \land r))$$

1	1	$q \to r$		A
2	2	$p \land q$		A
2	3	p	2	$\land E$
2	4	q	2	$\land E$
1, 2	5	r	1, 4	$\to E$
1, 2	6	$p \land r$	3, 5	$\land I$
1	7	$p \land q \to p \land r$	6	$\to I$

$$(p \lor q) \vdash (q \lor p)$$

1	1	p		A
2	2	q		A
3	3	$p \lor q$		A
1, 2	4	$q \lor p$	1, 2	$\lor I$
2	5	$p \to q \lor p$	4	$\to I$
1	6	$q \to q \lor p$	4	$\to I$

$$(q \to r) \vdash ((p \lor q) \to (p \lor r))$$

1	1	p		A
2	2	q		A
3	3	$q \to r$		A
4	4	$p \lor q$		A
2, 3	5	r	2, 3	$\to E$
1, 2, 3	6	$p \lor r$	1, 5	$\lor I$
2, 3	7	$p \to p \lor r$	6	$\to I$
1, 3	8	$q \to p \lor r$	6	$\to I$
1, 2, 3	9	$p \lor q \to p \lor r$	6	$\to I$

$$(p \lor (q \lor r)) \vdash (q \lor (p \lor r))$$

1	1	p		A
2	2	q		A
3	3	r		A
4	4	$p \lor q \lor r$		A
5	5	$q \lor r$		A
1, 3	6	$p \lor r$	1, 3	$\lor I$
1, 2, 3	7	$q \lor p \lor r$	2, 6	$\lor I$
2, 3	8	$p \to q \lor p \lor r$	7	$\to I$
1, 3	9	$q \to q \lor p \lor r$	7	$\to I$
1, 2	10	$r \to q \lor p \lor r$	7	$\to I$
1, 2, 3	11	$q \lor r \to q \lor p \lor r$	7	$\to I$

$$(p \rightarrow q), (p \rightarrow (\neg q)) \vdash (\neg p)$$

1	1	p		A
2	2	$p \rightarrow q$		A
3	3	$p \rightarrow \neg q$		A
1, 2	4	q	1, 2	$\rightarrow E$
1, 3	5	$\neg q$	1, 3	$\rightarrow E$
1, 2, 3	6	$q \wedge \neg q$	4, 5	$\wedge I$
2, 3	7	$\neg p$	1, 6	$\neg I$

$$(p \rightarrow (\neg p)) \vdash (\neg p)$$

1	1	p		A
2	2	$p \rightarrow \neg p$		A
1, 2	3	$\neg p$	1, 2	$\rightarrow E$
1, 2	4	$p \wedge \neg p$	1, 3	$\wedge I$

$$p \vdash (q \rightarrow (p \wedge q))$$

1	1	p		A
2	2	q		A
1, 2	3	$p \wedge q$	1, 2	$\wedge I$
1	4	$q \rightarrow p \wedge q$	3	$\rightarrow I$

$$(p \wedge (q \wedge r)) \vdash (q \wedge (p \wedge r))$$

1	1	$p \wedge q \wedge r$		A
1	2	p	1	$\wedge E$
1	3	$q \wedge r$	1	$\wedge E$
1	4	q	3	$\wedge E$
1	5	r	3	$\wedge E$
1	6	$p \wedge r$	2, 5	$\wedge I$
1	7	$q \wedge p \wedge r$	4, 6	$\wedge I$

$$((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \vdash (p \rightarrow (q \wedge r))$$

1	1	p		A
2	2	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$		A
2	3	$p \rightarrow q$	2	$\wedge E$
1, 2	4	q	1, 3	$\rightarrow E$
2	5	$p \rightarrow r$	2	$\wedge E$
1, 2	6	r	1, 5	$\rightarrow E$
1, 2	7	$q \wedge r$	4, 6	$\wedge I$
2	8	$p \rightarrow q \wedge r$	7	$\rightarrow I$

$$q \vdash (p \lor q)$$

1	1	q		A
1	2	$p \lor q$	1	$\lor I$

$$(p \land q) \vdash (p \lor q)$$

1	1	$p \land q$		A
1	2	p	1	$\land E$
1	3	$p \lor q$	2	$\lor I$

$$((p \to r) \land (q \to r)) \vdash ((p \lor q) \to r)$$

1	1	$(p \to r) \land (q \to r)$		A
2	2	$p \lor q$		A
1	3	$p \to r$	1	$\land E$
1	4	$q \to r$	1	$\land E$
1, 2	5	r	2, 3, 4	$\lor E$
1	6	$p \lor q \to r$	5	$\to I$

$$(p \to q), (r \to s) \vdash ((p \land r) \to (q \land s))$$

1	1	$p \to q$		A
2	2	$r \to s$		A
3	3	$p \land r$		A
3	4	p	3	$\land E$
1, 3	5	q	1, 4	$\to E$
3	6	r	3	$\land E$
2, 3	7	s	2, 6	$\to E$
1, 2, 3	8	$q \land s$	5, 7	$\land I$
1, 2	9	$p \land r \to q \land s$	8	$\to I$

$$(p \to q), (r \to s) \vdash ((p \lor r) \to (q \lor s))$$

1	1	p		A
2	2	r		A
3	3	$p \to q$		A
4	4	$r \to s$		A
5	5	$p \lor r$		A
1, 3	6	q	1, 3	$\to E$
2, 4	7	s	2, 4	$\to E$
1, 2, 3, 4	8	$q \lor s$	6, 7	$\lor I$
2, 3, 4	9	$p \to q \lor s$	8	$\to I$
1, 3, 4	10	$r \to q \lor s$	8	$\to I$
1, 2, 3, 4	11	$p \lor r \to q \lor s$	8	$\to I$

$$(p \rightarrow (q \land r)) \vdash ((p \rightarrow q) \land (p \rightarrow r))$$

1	1	p		A
2	2	$p \rightarrow q \land r$		A
1, 2	3	$q \land r$	1, 2	$\rightarrow E$
1, 2	4	q	3	$\land E$
1, 2	5	r	3	$\land E$
2	6	$p \rightarrow q$	4	$\rightarrow I$
2	7	$p \rightarrow r$	5	$\rightarrow I$
2	8	$(p \rightarrow q) \land (p \rightarrow r)$	6, 7	$\land I$

$$((\neg p) \rightarrow p) \vdash p$$

1	1	$\neg p$		A
2	2	$\neg p \rightarrow p$		A
1, 2	3	p	1, 2	$\rightarrow E$
1, 2	4	$p \land \neg p$	1, 3	$\land I$

$$(p \leftrightarrow q) \vdash (q \leftrightarrow p)$$

1	1	$p \leftrightarrow q$		A
1	2	$(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$	1	$\leftrightarrow E$
1	3	$p \rightarrow q$	2	$\land E$
1	4	$q \rightarrow p$	2	$\land E$
1	5	$q \leftrightarrow p$	3, 4	$\leftrightarrow I$

$$p, (p \leftrightarrow q) \vdash q$$

1	1	p		A
2	2	$p \leftrightarrow q$		A
2	3	$(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$	2	$\leftrightarrow E$
2	4	$p \rightarrow q$	3	$\land E$
1, 2	5	q	1, 4	$\rightarrow E$