

$$p \rightarrow q, p \vdash q$$

1	1	$p \rightarrow q$	A
2	2	p	A
1, 2	3	q	$\rightarrow E$

$$(\neg q), ((\neg q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow q)) \vdash ((\neg p) \rightarrow q)$$

1	1	$\neg q$	A
2	2	$\neg q \rightarrow \neg p \rightarrow q$	A
1, 2	3	$\neg p \rightarrow q$	$\rightarrow E$

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash r$$

1	1	$p \rightarrow q$	A
2	2	$q \rightarrow r$	A
3	3	p	A
1, 3	4	q	$\rightarrow E$
1, 2, 3	5	r	$\rightarrow E$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$$

1	1	$p \rightarrow q \rightarrow r$	A
2	2	$p \rightarrow q$	A
3	3	p	A
1, 3	4	$q \rightarrow r$	1, 3 $\rightarrow E$
2, 3	5	q	2, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	6	r	4, 5 $\rightarrow E$

$$\neg(q), p \rightarrow q \vdash \neg(p)$$

1	1	$\neg q$	A
2	2	$p \rightarrow q$	A
3	3	p	A
2, 3	4	q	2, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	1, 4 $\wedge I$
1, 2	6	$\neg p$	3, 5 $\neg I$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg(r) \vdash \neg(q)$$

1	1	$p \rightarrow q \rightarrow r$	A
2	2	p	A
3	3	$\neg r$	A
1, 2	4	$q \rightarrow r$	1, 2 $\rightarrow E$
5	5	q	A
1, 2, 5	6	r	4, 5 $\rightarrow E$
1, 2, 3, 5	7	$r \wedge \neg r$	3, 6 $\wedge I$
1, 2, 3	8	$\neg q$	5, 7 $\neg I$

$$p \rightarrow \neg(q), q \vdash \neg(p)$$

1	1	$p \rightarrow \neg q$	A
2	2	q	A
3	3	p	A
1, 3	4	$\neg q$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	2, 4 $\wedge I$
1, 2	6	$\neg p$	3, 5 $\neg I$

$$\neg(p) \rightarrow q, \neg(q) \vdash p$$

1	1	$\neg p \rightarrow q$	A
2	2	$\neg q$	A
3	3	$\neg p$	A
1, 3	4	q	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	2, 4 $\wedge I$
1, 2	6	p	3, 5 $\neg E$

$$p \rightarrow q \vdash (\neg(q) \rightarrow \neg(p))$$

1	1	$p \rightarrow q$	A
2	2	$\neg q$	A
3	3	p	A
1, 3	4	q	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	2, 4 $\wedge I$
1, 2	6	$\neg p$	3, 5 $\neg I$
1	7	$\neg q \rightarrow \neg p$	2, 6 $\rightarrow I$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (q \rightarrow (p \rightarrow r))$$

1	1	$p \rightarrow q \rightarrow r$	A
2	2	q	A
3	3	p	A
1, 3	4	$q \rightarrow r$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	r	2, 4 $\rightarrow E$
1, 2	6	$p \rightarrow r$	3, 5 $\rightarrow I$
1	7	$q \rightarrow p \rightarrow r$	2, 6 $\rightarrow I$

$$q \rightarrow r \vdash ((\neg(q) \rightarrow \neg(p)) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

1	1	$q \rightarrow r$	A
2	2	$\neg q \rightarrow \neg p$	A
3	3	p	A
4	4	$\neg q$	A
2, 4	5	$\neg p$	2, 4 $\rightarrow E$
2, 3, 4	6	$p \wedge \neg p$	3, 5 $\wedge I$
2, 3	7	q	4, 6 $\neg E$
1, 2, 3	8	r	1, 7 $\rightarrow E$
1, 2	9	$p \rightarrow r$	8, 3 $\rightarrow I$
1	10	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow p \rightarrow r$	9, 2 $\rightarrow I$

$$p \rightarrow (p \rightarrow q), p \vdash q$$

1	1	$p \rightarrow p \rightarrow q$	A
2	2	p	A
1, 2	3	$p \rightarrow q$	1, 2 $\rightarrow E$
1, 2	4	q	2, 3 $\rightarrow E$

$$q \rightarrow (p \rightarrow r), \neg(r), q \vdash \neg(p)$$

1	1	$q \rightarrow p \rightarrow r$	A
2	2	$\neg r$	A
3	3	q	A
1, 3	4	$p \rightarrow r$	1, 3 $\rightarrow E$
5	5	p	A
1, 3, 5	6	r	4, 5 $\rightarrow E$
1, 2, 3, 5	7	$r \wedge \neg r$	2, 6 $\wedge I$
1, 2, 3	8	$\neg p$	5, 7 $\neg I$

$$p \rightarrow \neg(\neg(q)), p \vdash q$$

1	1	$p \rightarrow \neg(\neg q)$	A
2	2	p	A
1, 2	3	$\neg(\neg q)$	1, 2 $\rightarrow E$
4	4	$\neg q$	A
1, 2, 4	5	$\neg q \wedge \neg(\neg q)$	3, 4 $\wedge I$
1, 2	6	q	4, 5 $\neg E$

$$\neg(\neg(q)) \rightarrow p, \neg(p) \vdash \neg(q)$$

1	1	$\neg(\neg q) \rightarrow p$	A
2	2	$\neg p$	A
3	3	$\neg(\neg q)$	A
1, 3	4	p	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$p \wedge \neg p$	2, 4 $\wedge I$
1, 2	6	$\neg q$	3, 5 $\neg E$

$$(\neg(p) \rightarrow \neg(q)), q \vdash p$$

1	1	$\neg p \rightarrow \neg q$	A
2	2	q	A
3	3	$\neg p$	A
1, 3	4	$\neg q$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	2, 4 $\wedge I$
1, 2	6	p	3, 5 $\neg E$

$$(p \rightarrow \neg(q)) \vdash (q \rightarrow \neg(p))$$

1	1	$p \rightarrow \neg q$	A
2	2	q	A
3	3	p	A
1, 3	4	$\neg q$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	2, 4 $\wedge I$
1, 2	6	$\neg p$	3, 5 $\neg I$
1	7	$q \rightarrow \neg p$	2, 6 $\rightarrow I$

$$(\neg(p) \rightarrow q) \vdash (\neg(q) \rightarrow p)$$

1	1	$\neg p \rightarrow q$	A
2	2	$\neg q$	A
3	3	$\neg p$	A
1, 3	4	q	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	2, 4 $\wedge I$
1, 2	6	p	3, 5 $\neg E$
1	7	$\neg q \rightarrow p$	2, 6 $\rightarrow I$

$$(\neg(p) \rightarrow \neg(q)) \vdash (q \rightarrow p)$$

1	1	$\neg p \rightarrow \neg q$	A
2	2	q	A
3	3	$\neg p$	A
1, 3	4	$\neg q$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	2, 4 $\wedge I$
1, 2	6	p	3, 5 $\neg E$
1	7	$q \rightarrow p$	2, 6 $\rightarrow I$

$$(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow r)$$

1	1	$p \rightarrow q$	A
2	2	$q \rightarrow r$	A
3	3	p	A
1, 3	4	q	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	r	2, 4 $\rightarrow E$
1, 2	6	$p \rightarrow r$	3, 5 $\rightarrow I$

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

1	1	$p \rightarrow q \rightarrow r$	A
2	2	$p \rightarrow q$	A
3	3	p	A
1, 3	4	$q \rightarrow r$	1, 3 $\rightarrow E$
2, 3	5	q	2, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	6	r	4, 5 $\rightarrow E$
1, 2	7	$p \rightarrow r$	3, 6 $\rightarrow I$
1	8	$(p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r$	2, 7 $\rightarrow I$

$$(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s))) \vdash (r \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow s)))$$

1	1	$p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s$	A
2	2	r	A
3	3	p	A
1, 3	4	$q \rightarrow r \rightarrow s$	1, 3 $\rightarrow E$
5	5	q	A
1, 3, 5	6	$r \rightarrow s$	4, 5 $\rightarrow E$
1, 2, 3, 5	7	s	2, 6 $\rightarrow E$
1, 2, 3	8	$q \rightarrow s$	5, 7 $\rightarrow I$
1, 2	9	$p \rightarrow q \rightarrow s$	8, 3 $\rightarrow I$
1	10	$r \rightarrow p \rightarrow q \rightarrow s$	9, 2 $\rightarrow I$

$$(p \rightarrow q) \vdash ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

1	1	$p \rightarrow q$	A
2	2	$q \rightarrow r$	A
3	3	p	A
1, 3	4	q	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	r	2, 4 $\rightarrow E$
1, 2	6	$p \rightarrow r$	3, 5 $\rightarrow I$
1	7	$(q \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow r$	2, 6 $\rightarrow I$

$$p \vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$$

1	1	p	A
2	2	$p \rightarrow q$	A
1, 2	3	q	1, 2 $\rightarrow E$
1	4	$(p \rightarrow q) \rightarrow q$	2, 3 $\rightarrow I$

$$p \vdash ((\neg(q \rightarrow r) \rightarrow \neg(p)) \rightarrow (\neg(r) \rightarrow \neg(q)))$$

1	1	p	A
2	2	$\neg(q \rightarrow r) \rightarrow \neg p$	A
3	3	$\neg r$	A
4	4	q	A
5	5	$q \rightarrow r$	A
4, 5	6	r	4, 5 $\rightarrow E$
3, 4, 5	7	$r \wedge \neg r$	3, 6 $\wedge I$
3, 4	8	$\neg(q \rightarrow r)$	5, 7 $\neg I$
2, 3, 4	9	$\neg p$	8, 2 $\rightarrow E$
1, 2, 3, 4	10	$p \wedge \neg p$	1, 9 $\wedge I$
1, 2, 3	11	$\neg q$	10, 4 $\neg I$
1, 2	12	$\neg r \rightarrow \neg q$	11, 3 $\rightarrow I$
1	13	$(\neg(q \rightarrow r) \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg r \rightarrow \neg q$	2, 12 $\rightarrow I$

$$p, q \vdash (p \wedge q)$$

1	1	p	A
2	2	q	A
1, 2	3	$p \wedge q$	1, 2 $\wedge I$

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r))$$

1	1	$p \wedge q \rightarrow r$	A
2	2	p	A
3	3	q	A
2, 3	4	$p \wedge q$	2, 3 $\wedge I$
1, 2, 3	5	r	1, 4 $\rightarrow E$
1, 2	6	$q \rightarrow r$	3, 5 $\rightarrow I$
1	7	$p \rightarrow q \rightarrow r$	2, 6 $\rightarrow I$

$$(p \wedge q) \vdash p$$

1	1	$p \wedge q$	A
1	2	p	1 $\wedge E$

$$(p \wedge q) \vdash q$$

1	1	$p \wedge q$	A
1	2	p	1 $\wedge E$
1	3	q	1 $\wedge E$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash ((p \wedge q) \rightarrow r)$$

1	1	$p \rightarrow q \rightarrow r$	A
2	2	$p \wedge q$	A
2	3	p	2 $\wedge E$
2	4	q	2 $\wedge E$
1, 2	5	$q \rightarrow r$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2	6	r	4, 5 $\rightarrow E$
1	7	$p \wedge q \rightarrow r$	2, 6 $\rightarrow I$

$$(p \wedge q) \vdash (q \wedge p)$$

1	1	$p \wedge q$	A
1	2	p	1 $\wedge E$
1	3	q	1 $\wedge E$
1	4	$q \wedge p$	2, 3 $\wedge I$

$$(q \rightarrow r) \vdash ((p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r))$$

1	1	$q \rightarrow r$	A
2	2	$p \wedge q$	A
2	3	p	2 $\wedge E$
2	4	q	2 $\wedge E$
1, 2	5	r	1, 4 $\rightarrow E$
1, 2	6	$p \wedge r$	3, 5 $\wedge I$
1	7	$p \wedge q \rightarrow p \wedge r$	2, 6 $\rightarrow I$

$$(p \vee q) \vdash (q \vee p)$$

1	1	$p \vee q$	A
2	2	p	A
2	3	$q \vee p$	2 $\vee I$
	4	$p \rightarrow q \vee p$	2, 3 $\rightarrow I$
5	5	q	A
2	6	$q \rightarrow q \vee p$	3, 5 $\rightarrow I$
1	7	$q \vee p$	1, 4, 6 $\vee E$
5	8	$q \vee p$	5 $\vee I$

$$(q \rightarrow r) \vdash ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$$

1	1	$q \rightarrow r$	A
2	2	$p \vee q$	A
3	3	p	A
3	4	$p \vee r$	3 $\vee I$
	5	$p \rightarrow p \vee r$	3, 4 $\rightarrow I$
6	6	q	A
3	7	$q \rightarrow p \vee r$	4, 6 $\rightarrow I$
2	8	$p \vee r$	2, 5, 7 $\vee E$
	9	$p \vee q \rightarrow p \vee r$	8, 2 $\rightarrow I$
1, 6	10	r	1, 6 $\rightarrow E$
1, 6	11	$p \vee r$	10 $\vee I$

$$(p \vee (q \vee r)) \vdash (q \vee (p \vee r))$$

1	1	$p \vee q \vee r$		A
2	2	p		A
2	3	$p \vee r$	2	$\vee I$
2	4	$q \vee p \vee r$	3	$\vee I$
	5	$p \rightarrow q \vee p \vee r$	2, 4	$\rightarrow I$
6	6	$q \vee r$		A
2	7	$q \vee r \rightarrow q \vee p \vee r$	4, 6	$\rightarrow I$
1	8	$q \vee p \vee r$	1, 5, 7	$\vee E$
9	9	q		A
2	10	$q \rightarrow q \vee p \vee r$	9, 4	$\rightarrow I$
9	11	$q \vee p \vee r$	9	$\vee I$
12	12	r		A
2	13	$r \rightarrow q \vee p \vee r$	12, 4	$\rightarrow I$
2, 6	14	$q \vee p \vee r$	10, 13, 6	$\vee E$
2	15	$q \vee p \vee r$	3	$\vee I$
12	16	$p \vee r$	12	$\vee I$

$$(p \rightarrow q), (p \rightarrow (\neg q)) \vdash (\neg p)$$

1	1	$p \rightarrow q$		A
2	2	$p \rightarrow \neg q$		A
3	3	p		A
1, 3	4	q	1, 3	$\rightarrow E$
2, 3	5	$\neg q$	2, 3	$\rightarrow E$
1, 2, 3	6	$q \wedge \neg q$	4, 5	$\wedge I$
1, 2	7	$\neg p$	3, 6	$\neg I$

$$(p \rightarrow (\neg p)) \vdash (\neg p)$$

1	1	$p \rightarrow \neg p$		A
2	2	p		A
1, 2	3	$\neg p$	1, 2	$\rightarrow E$
1, 2	4	$p \wedge \neg p$	2, 3	$\wedge I$
1	5	$\neg p$	2, 4	$\neg I$

$$p \vdash (q \rightarrow (p \wedge q))$$

1	1	p		A
2	2	q		A
1, 2	3	$p \wedge q$	1, 2	$\wedge I$
1	4	$q \rightarrow p \wedge q$	2, 3	$\rightarrow I$

$$(p \wedge (q \wedge r)) \vdash (q \wedge (p \wedge r))$$

1	1	$p \wedge q \wedge r$	A
1	2	p	1 $\wedge E$
1	3	$q \wedge r$	1 $\wedge E$
1	4	q	3 $\wedge E$
1	5	r	3 $\wedge E$
1	6	$p \wedge r$	2, 5 $\wedge I$
1	7	$q \wedge p \wedge r$	4, 6 $\wedge I$

$$((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \vdash (p \rightarrow (q \wedge r))$$

1	1	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	A
1	2	$p \rightarrow q$	1 $\wedge E$
1	3	$p \rightarrow r$	1 $\wedge E$
4	4	p	A
1, 4	5	q	2, 4 $\rightarrow E$
1, 4	6	r	3, 4 $\rightarrow E$
1, 4	7	$q \wedge r$	5, 6 $\wedge I$
1	8	$p \rightarrow q \wedge r$	4, 7 $\rightarrow I$

$$q \vdash (p \vee q)$$

1	1	q	A
1	2	$p \vee q$	1 $\vee I$

$$(p \wedge q) \vdash (p \vee q)$$

1	1	$p \wedge q$	A
1	2	p	1 $\wedge E$
1	3	$p \vee q$	2 $\vee I$

$$((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \vdash ((p \vee q) \rightarrow r)$$

1	1	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	A
1	2	$p \rightarrow r$	1 $\wedge E$
1	3	$q \rightarrow r$	1 $\wedge E$
4	4	$p \vee q$	A
1, 4	5	r	2, 3, 4 $\vee E$
1	6	$p \vee q \rightarrow r$	4, 5 $\rightarrow I$

$$(p \rightarrow q), (r \rightarrow s) \vdash ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s))$$

1	1	$p \rightarrow q$	A
2	2	$r \rightarrow s$	A
3	3	$p \wedge r$	A
3	4	p	3 $\wedge E$
3	5	r	3 $\wedge E$
1, 3	6	q	1, 4 $\rightarrow E$
2, 3	7	s	2, 5 $\rightarrow E$
1, 2, 3	8	$q \wedge s$	6, 7 $\wedge I$
1, 2	9	$p \wedge r \rightarrow q \wedge s$	8, 3 $\rightarrow I$

$$(p \rightarrow q), (r \rightarrow s) \vdash ((p \vee r) \rightarrow (q \vee s))$$

1	1	$p \rightarrow q$	A
2	2	$r \rightarrow s$	A
3	3	$p \vee r$	A
4	4	p	A
1, 4	5	q	1, 4 $\rightarrow E$
1, 4	6	$q \vee s$	5 $\vee I$
1	7	$p \rightarrow q \vee s$	4, 6 $\rightarrow I$
8	8	r	A
1, 4	9	$r \rightarrow q \vee s$	8, 6 $\rightarrow I$
1, 3	10	$q \vee s$	9, 3, 7 $\vee E$
1	11	$p \vee r \rightarrow q \vee s$	10, 3 $\rightarrow I$
8, 2	12	s	8, 2 $\rightarrow E$
8, 2	13	$q \vee s$	12 $\vee I$

$$(p \rightarrow (q \wedge r)) \vdash ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$$

1	1	$p \rightarrow q \wedge r$	A
2	2	p	A
1, 2	3	$q \wedge r$	1, 2 $\rightarrow E$
1, 2	4	q	3 $\wedge E$
1	5	$p \rightarrow q$	2, 4 $\rightarrow I$
1, 2	6	q	3 $\wedge E$
1, 2	7	r	3 $\wedge E$
1	8	$p \rightarrow r$	2, 7 $\rightarrow I$
1	9	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	8, 5 $\wedge I$

$$((\neg p) \rightarrow p) \vdash p$$

1	1	$\neg p \rightarrow p$	A
2	2	$\neg p$	A
1, 2	3	p	1, 2 $\rightarrow E$
1, 2	4	$p \wedge \neg p$	2, 3 $\wedge I$
1	5	p	2, 4 $\neg E$

$$(p \leftrightarrow q) \vdash (q \leftrightarrow p)$$

1	1	$p \leftrightarrow q$		A
1	2	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	1	$\leftrightarrow E$
1	3	$p \rightarrow q$	2	$\wedge E$
1	4	$q \rightarrow p$	2	$\wedge E$
1	5	$q \leftrightarrow p$	3, 4	$\leftrightarrow I$
1	6	$p \rightarrow q$	2	$\wedge E$

$$p, (p \leftrightarrow q) \vdash q$$

1	1	p		A
2	2	$p \leftrightarrow q$		A
2	3	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	2	$\leftrightarrow E$
2	4	$p \rightarrow q$	3	$\wedge E$
2	5	$q \rightarrow p$	3	$\wedge E$
1, 2	6	q	1, 4	$\rightarrow E$

$$(p \leftrightarrow q), (q \leftrightarrow r) \vdash (p \leftrightarrow r)$$

1	1	$p \leftrightarrow q$		A
2	2	$q \leftrightarrow r$		A
1	3	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	1	$\leftrightarrow E$
1	4	$p \rightarrow q$	3	$\wedge E$
1	5	$q \rightarrow p$	3	$\wedge E$
2	6	$(q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)$	2	$\leftrightarrow E$
2	7	$q \rightarrow r$	6	$\wedge E$
2	8	$r \rightarrow q$	6	$\wedge E$
9	9	p		A
1, 9	10	q	9, 4	$\rightarrow E$
1, 2, 9	11	r	10, 7	$\rightarrow E$
1, 2	12	$p \rightarrow r$	9, 11	$\rightarrow I$
1	13	$p \rightarrow q$	3	$\wedge E$
1	14	$q \rightarrow p$	3	$\wedge E$
2	15	$q \rightarrow r$	6	$\wedge E$
2	16	$r \rightarrow q$	6	$\wedge E$
17	17	r		A
9	18	$r \rightarrow p$	17, 9	$\rightarrow I$
1, 2	19	$p \leftrightarrow r$	18, 12	$\leftrightarrow I$
1, 9	20	p	10, 5	$\rightarrow E$
1, 2, 9	21	q	8, 11	$\rightarrow E$