

$$p \rightarrow q, p \vdash q$$

1	1	$p \rightarrow q$	A
2	2	p	A
1, 2	3	q	1, 2 $\rightarrow E$

$$(\neg q), ((\neg q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow q)) \vdash ((\neg p) \rightarrow q)$$

1	1	$\neg q$	A
2	2	$\neg q \rightarrow \neg p \rightarrow q$	A
1, 2	3	$\neg p \rightarrow q$	1, 2 $\rightarrow E$

$$(\neg q), ((\neg q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow q)) \vdash ((\neg p) \rightarrow q)$$

1	1	$\neg q$	A
2	2	$\neg q \rightarrow \neg p \rightarrow q$	A
3	3	$\neg p$	A
1, 2	4	$\neg p \rightarrow q$	1, 2 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	q	3, 4 $\rightarrow E$
1, 2	6	$\neg p \rightarrow q$	5 $\rightarrow I$

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash r$$

1	1	$p \rightarrow q$	A
2	2	$q \rightarrow r$	A
3	3	p	A
1, 3	4	q	$\rightarrow E$
1, 2, 3	5	r	$\rightarrow E$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$$

1	1	$p \rightarrow q \rightarrow r$	A
2	2	$p \rightarrow q$	A
3	3	p	A
1, 3	4	$q \rightarrow r$	$\rightarrow E$
2, 3	5	q	$\rightarrow E$
1, 2, 3	6	r	$\rightarrow E$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$$

1	1	$p \rightarrow q \rightarrow r$	A
2	2	$p \rightarrow q$	A
3	3	p	A
2, 3	4	q	$\rightarrow E$
1, 3	5	$q \rightarrow r$	$\rightarrow E$
1, 2, 3	6	r	$\rightarrow E$

$$\neg(q), p \rightarrow q \vdash \neg(p)$$

1	1	$\neg q$	A
2	2	$p \rightarrow q$	A
3	3	p	A
2, 3	4	q	$\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	$\wedge I$
1, 2	6	$\neg p$	$\neg I$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg(r) \vdash \neg(q)$$

1	1	$p \rightarrow q \rightarrow r$	A
2	2	p	A
3	3	$\neg r$	A
1, 2	4	$q \rightarrow r$	$\rightarrow E$
5	5	q	A
1, 2, 5	6	r	$\rightarrow E$
1, 2, 3, 5	7	$r \wedge \neg r$	$\wedge I$
1, 2, 3	8	$\neg q$	$\neg I$

$$p \rightarrow \neg(q), q \vdash \neg(p)$$

1	1	$p \rightarrow \neg q$	A
2	2	q	A
3	3	p	A
1, 3	4	$\neg q$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	2, 4 $\wedge I$
1, 2	6	$\neg p$	3, 5 $\neg I$

$$\neg(p) \rightarrow q, \neg(q) \vdash p$$

1	1	$\neg p \rightarrow q$	A
2	2	$\neg q$	A
3	3	$\neg p$	A
1, 3	4	q	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	2, 4 $\wedge I$
1, 2	6	p	3, 5 $\neg E$

$$p \rightarrow q \vdash (\neg(q) \rightarrow \neg(p))$$

1	1	$p \rightarrow q$	A
2	2	$\neg q$	A
3	3	p	A
1, 3	4	q	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \wedge \neg q$	2, 4 $\wedge I$
1, 2	6	$\neg p$	3, 5 $\neg I$
1	7	$\neg q \rightarrow \neg p$	6 $\rightarrow I$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (q \rightarrow (p \rightarrow r))$$

1	1	$p \rightarrow q \rightarrow r$	A
2	2	q	A
3	3	p	A
1, 3	4	$q \rightarrow r$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	r	2, 4 $\rightarrow E$
1, 2	6	$p \rightarrow r$	5 $\rightarrow I$
1	7	$q \rightarrow p \rightarrow r$	6 $\rightarrow I$

$$q \rightarrow r \vdash ((\neg(q) \rightarrow \neg(p)) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

1	1	$q \rightarrow r$	A
2	2	$\neg q \rightarrow \neg p$	A
3	3	p	A
4	4	$\neg q$	A
2, 4	5	$\neg p$	2, 4 $\rightarrow E$
2, 3, 4	6	$p \wedge \neg p$	3, 5 $\wedge I$
2, 3	7	q	4, 6 $\neg E$
1, 2, 3	8	r	1, 7 $\rightarrow E$
1, 2	9	$p \rightarrow r$	8 $\rightarrow I$
1	10	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow p \rightarrow r$	9 $\rightarrow I$

$$p \vdash ((\neg(q \rightarrow r) \rightarrow \neg(p)) \rightarrow (\neg(r) \rightarrow \neg(q)))$$

1	1	p	A
2	2	$\neg(q \rightarrow r) \rightarrow \neg p$	A
3	3	$\neg r$	A
4	4	q	A
5	5	$q \rightarrow r$	A
4, 5	6	r	4, 5 $\rightarrow E$
3, 4, 5	7	$r \wedge \neg r$	3, 6 $\wedge I$
3, 4	8	$\neg(q \rightarrow r)$	5, 7 $\neg I$
2, 3, 4	9	$\neg p$	8, 2 $\rightarrow E$
1, 2, 3, 4	10	$p \wedge \neg p$	1, 9 $\wedge I$
1, 2, 3	11	$\neg q$	10, 4 $\neg I$
1, 2	12	$\neg r \rightarrow \neg q$	11 $\rightarrow I$
1	13	$(\neg(q \rightarrow r) \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg r \rightarrow \neg q$	12 $\rightarrow I$