

$$p \rightarrow q, p \vdash q$$

1	1	$p \rightarrow q$	A
2	2	$p$	A
1, 2	3	$q$	$\rightarrow E$

$$(\neg q), ((\neg q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow q)) \vdash ((\neg p) \rightarrow q)$$

1	1	$\neg q$	A
2	2	$\neg q \rightarrow \neg p \rightarrow q$	A
1, 2	3	$\neg p \rightarrow q$	$\rightarrow E$

$$(\neg q), ((\neg q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow q)) \vdash ((\neg p) \rightarrow q)$$

1	1	$\neg q$	A
2	2	$\neg q \rightarrow \neg p \rightarrow q$	A
3	3	$\neg p$	A
1, 2	4	$\neg p \rightarrow q$	$\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q$	$\rightarrow E$
1, 2	6	$\neg p \rightarrow q$	$\rightarrow I$

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash r$$

1	1	$p \rightarrow q$	A
2	2	$q \rightarrow r$	A
3	3	$p$	A
1, 3	4	$q$	$\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$r$	$\rightarrow E$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$$

1	1	$p \rightarrow q \rightarrow r$	A
2	2	$p \rightarrow q$	A
3	3	$p$	A
1, 3	4	$q \rightarrow r$	$\rightarrow E$
2, 3	5	$q$	$\rightarrow E$
1, 2, 3	6	$r$	$\rightarrow E$

$$\neg(q), p \rightarrow q \vdash \neg(p)$$

1	1	$\neg q$	A
2	2	$p \rightarrow q$	A
3	3	$p$	A
2, 3	4	$q$	$\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \neg q$	I
1, 2	6	$\neg p$	$\neg I$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg(r) \vdash \neg(q)$$

1	1	$p \rightarrow q \rightarrow r$	A
2	2	$p$	A
3	3	$\neg r$	A
4	4	$q$	A
1, 2	5	$q \rightarrow r$	$\rightarrow E$
1, 2, 4	6	$r$	$\rightarrow E$
1, 2, 3, 4	7	$r \neg r$	I
1, 2, 3	8	$\neg q$	$\neg I$

$$p \rightarrow \neg(q), q \vdash \neg(p)$$

1	1	$p \rightarrow \neg q$	A
2	2	$q$	A
3	3	$p$	A
1, 3	4	$\neg q$	$\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \neg q$	I
1, 2	6	$\neg p$	$\neg I$

$$\neg(p) \rightarrow q, \neg(q) \vdash p$$

1	1	$\neg p \rightarrow q$	A
2	2	$\neg q$	A
3	3	$\neg p$	A
1, 3	4	$q$	$\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \neg q$	I
1, 2	6	$p$	$\neg E$

$$p \rightarrow q \vdash (\neg(q) \rightarrow \neg(p))$$

1	1	$p \rightarrow q$	A
2	2	$\neg q$	A
3	3	$p$	A
1, 3	4	$q$	$\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \neg q$	I
1, 2	6	$\neg p$	$\neg I$
1	7	$\neg q \rightarrow \neg p$	$\rightarrow I$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (q \rightarrow (p \rightarrow r))$$

1	1	$p \rightarrow q \rightarrow r$	A
2	2	$q$	A
3	3	$p$	A
1, 3	4	$q \rightarrow r$	$\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$r$	$\rightarrow E$
1, 2	6	$p \rightarrow r$	$\rightarrow I$
1	7	$q \rightarrow p \rightarrow r$	$\rightarrow I$

$$q \rightarrow r \vdash ((\neg(q) \rightarrow \neg(p)) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

1	1	$q \rightarrow r$	A
2	2	$\neg q \rightarrow \neg p$	A
3	3	$p$	A
4	4	$\neg q$	A
2, 4	5	$\neg p$	$\rightarrow E$
2, 3, 4	6	$p \neg p$	I
2, 3	7	$q$	$\neg E$
1, 2, 3	8	$r$	$\rightarrow E$
1, 2	9	$p \rightarrow r$	$\rightarrow I$
1	10	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow p \rightarrow r$	$\rightarrow I$

$$p \rightarrow (p \rightarrow q), p \vdash q$$

1	1	$p \rightarrow p \rightarrow q$	A
2	2	$p$	A
1, 2	3	$p \rightarrow q$	$\rightarrow E$
1, 2	4	$q$	$\rightarrow E$

$$q \rightarrow (p \rightarrow r), \neg(r), q \vdash \neg(p)$$

1	1	$q \rightarrow p \rightarrow r$	A
2	2	$\neg r$	A
3	3	$q$	A
4	4	$p$	A
1, 3	5	$p \rightarrow r$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 3, 4	6	$r$	4, 5 $\rightarrow E$
1, 2, 3, 4	7	$r \neg r$	2, 6 I
1, 2, 3	8	$\neg p$	4, 7 $\neg I$

$$p \rightarrow \neg(\neg(q)), p \vdash q$$

1	1	$p \rightarrow \neg(\neg q)$	A
2	2	$p$	A
3	3	$\neg q$	A
1, 2	4	$\neg(\neg q)$	1, 2 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$\neg q \neg(\neg q)$	3, 4 I
1, 2	6	$q$	3, 5 $\neg E$

$$\neg(\neg(q)) \rightarrow p, \neg(p) \vdash \neg(q)$$

1	1	$\neg(\neg q) \rightarrow p$	A
2	2	$\neg p$	A
3	3	$\neg(\neg q)$	A
1, 3	4	$p$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$p \neg p$	2, 4 I
1, 2	6	$\neg q$	3, 5 $\neg E$

$$(\neg(p) \rightarrow \neg(q)), q \vdash p$$

1	1	$\neg p \rightarrow \neg q$	A
2	2	$q$	A
3	3	$\neg p$	A
1, 3	4	$\neg q$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \neg q$	2, 4 I
1, 2	6	$p$	3, 5 $\neg E$

$$(p \rightarrow \neg(q)) \vdash (q \rightarrow \neg(p))$$

1	1	$p \rightarrow \neg q$	A
2	2	$q$	A
3	3	$p$	A
1, 3	4	$\neg q$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \neg q$	2, 4 I
1, 2	6	$\neg p$	3, 5 $\neg I$
1	7	$q \rightarrow \neg p$	6 $\rightarrow I$

$$(\neg(p) \rightarrow q) \vdash (\neg(q) \rightarrow p)$$

1	1	$\neg p \rightarrow q$	A
2	2	$\neg q$	A
3	3	$\neg p$	A
1, 3	4	$q$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \neg q$	2, 4 I
1, 2	6	$p$	3, 5 $\neg E$
1	7	$\neg q \rightarrow p$	6 $\rightarrow I$

$$(\neg(p) \rightarrow \neg(q)) \vdash (q \rightarrow p)$$

1	1	$\neg p \rightarrow \neg q$	A
2	2	$q$	A
3	3	$\neg p$	A
1, 3	4	$\neg q$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$q \neg q$	2, 4 I
1, 2	6	$p$	3, 5 $\neg E$
1	7	$q \rightarrow p$	6 $\rightarrow I$

$$(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow r)$$

1	1	$p \rightarrow q$	A
2	2	$q \rightarrow r$	A
3	3	$p$	A
1, 3	4	$q$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$r$	2, 4 $\rightarrow E$
1, 2	6	$p \rightarrow r$	5 $\rightarrow I$

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

1	1	$p \rightarrow q \rightarrow r$	A
2	2	$p \rightarrow q$	A
3	3	$p$	A
1, 3	4	$q \rightarrow r$	1, 3 $\rightarrow E$
2, 3	5	$q$	2, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	6	$r$	4, 5 $\rightarrow E$
1, 2	7	$p \rightarrow r$	6 $\rightarrow I$
1	8	$(p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r$	7 $\rightarrow I$

$$(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s))) \vdash (r \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow s)))$$

1	1	$p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s$	A
2	2	$r$	A
3	3	$p$	A
4	4	$q$	A
1, 3	5	$q \rightarrow r \rightarrow s$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 3, 4	6	$r \rightarrow s$	4, 5 $\rightarrow E$
1, 2, 3, 4	7	$s$	2, 6 $\rightarrow E$
1, 2, 3	8	$q \rightarrow s$	7 $\rightarrow I$
1, 2	9	$p \rightarrow q \rightarrow s$	8 $\rightarrow I$
1	10	$r \rightarrow p \rightarrow q \rightarrow s$	9 $\rightarrow I$

$$(p \rightarrow q) \vdash ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

1	1	$p \rightarrow q$	A
2	2	$q \rightarrow r$	A
3	3	$p$	A
1, 3	4	$q$	1, 3 $\rightarrow E$
1, 2, 3	5	$r$	2, 4 $\rightarrow E$
1, 2	6	$p \rightarrow r$	5 $\rightarrow I$
1	7	$(q \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow r$	6 $\rightarrow I$

$$p \vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$$

1	1	$p$	A
2	2	$p \rightarrow q$	A
1, 2	3	$q$	1, 2 $\rightarrow E$
1	4	$(p \rightarrow q) \rightarrow q$	3 $\rightarrow I$

$$p \vdash ((\neg(q \rightarrow r) \rightarrow \neg(p)) \rightarrow (\neg(r) \rightarrow \neg(q)))$$

1	1	$p$	A
2	2	$\neg(q \rightarrow r) \rightarrow \neg p$	A
3	3	$\neg r$	A
4	4	$q$	A
5	5	$q \rightarrow r$	A
4, 5	6	$r$	4, 5 $\rightarrow E$
3, 4, 5	7	$r \neg r$	3, 6 $I$
3, 4	8	$\neg(q \rightarrow r)$	5, 7 $\neg I$
2, 3, 4	9	$\neg p$	8, 2 $\rightarrow E$
1, 2, 3, 4	10	$p \neg p$	1, 9 $I$
1, 2, 3	11	$\neg q$	10, 4 $\neg I$
1, 2	12	$\neg r \rightarrow \neg q$	11 $\rightarrow I$
1	13	$(\neg(q \rightarrow r) \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg r \rightarrow \neg q$	12 $\rightarrow I$

$$p, q \vdash (p \wedge q)$$

1	1	p	A
2	2	q	A
1, 2	3	p q	1, 2 I

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r))$$

1	1	p q → r	A
2	2	p	A
3	3	q	A
2, 3	4	p q	2, 3 I
1, 2, 3	5	r	1, 4 →E
1, 2	6	q → r	5 →I
1	7	p → q → r	6 →I

$$(p \wedge q) \vdash p$$

1	1	p q	A
1	2	p	1 E

$$(p \wedge q) \vdash q$$

1	1	p q	A
1	2	q	1 E

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash ((p \wedge q) \rightarrow r)$$

1	1	p → q → r	A
2	2	p q	A
2	3	p	2 E
1, 2	4	q → r	1, 3 →E
2	5	q	2 E
1, 2	6	r	4, 5 →E
1	7	p q → r	6 →I

$$(p \wedge q) \vdash (q \wedge p)$$

1	1	p q	A
1	2	q	1 E
1	3	p	1 E
1	4	q p	2, 3 I

$$(q \rightarrow r) \vdash ((p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r))$$

1	1	$q \rightarrow r$		A
2	2	$p \wedge q$		A
2	3	$p$	2	E
2	4	$q$	2	E
1, 2	5	$r$	1, 4	$\rightarrow$ E
1, 2	6	$p \wedge r$	3, 5	I
1	7	$p \wedge q \rightarrow p \wedge r$	6	$\rightarrow$ I