Die Grundlagen der Mathematik

Ihr Name

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Aussagenlogik und Prädikatenlogik

1.1 Aussagenlogik

Die Aussagenlogik ist ein Bereich der Logik, der sich mit Aussagen und den logischen Beziehungen zwischen ihnen befasst. Eine Aussage ist eine Behauptung, die entweder wahr oder falsch sein kann. In der Aussagenlogik verwenden wir oft Symbole, um Aussagen darzustellen. Zum Beispiel könnten wir die Symbole p und q verwenden, um zwei verschiedene Aussagen darzustellen.

Die Aussagenlogik verwendet eine Reihe von logischen Operatoren, um komplexere Aussagen aus einfacheren zu bilden. Die grundlegenden logischen Operatoren sind:

- Die Konjunktion $\wedge$, die „und“ bedeutet.
- Die Disjunktion $\vee$, die „oder“ bedeutet.
- Die Implikation $\rightarrow$, die „impliziert“ oder „führt zu“ bedeutet.
- Die Negation $\neg$, die „nicht“ bedeutet.

Jeder dieser Operatoren hat bestimmte Regeln, wie er in Beweisen verwendet werden kann. Diese Regeln sind Teil des Kalküls des natürlichen Schließens, einem formalen System, das in der Aussagen- und Prädikatenlogik verwendet wird, um Beweise zu führen. Die spezifischen Regeln für jeden Operator werden in den nachstehenden Abschnitten detailliert beschrieben.

1.2 Kalkül des natürlichen Schließens in der Aussagenlogik

1.2.1 Einführung

Das Kalkül des natürlichen Schließens ist ein formales System, das in der Aussagen- und Prädikatenlogik verwendet wird, um Beweise zu führen. Es wurde entwickelt, um eine Methode zur Verfügung zu stellen, die der Art und Weise, wie Menschen intuitiv logische Schlussfolgerungen ziehen, so nahe wie möglich kommt.

Im Kalkül des natürlichen Schließens gibt es zwei Arten von Regeln für jeden logischen Operator: Einführungs- und Eliminierungsregeln. Die Einführungsregeln erlauben es uns, eine Aussage mit einem bestimmten Operator zu „erzeugen“, während die Eliminierungsregeln es uns erlauben, diesen Operator wieder zu „entfernen“.

Zum Beispiel erlaubt die Einführungsregel für die Konjunktion (und) uns, aus den Aussagen A und B die Aussage $A \wedge B$ zu erzeugen. Die entsprechende Eliminierungsregel erlaubt es uns, aus der Aussage $A \wedge B$ entweder A oder B zu extrahieren.

Ein wichtiger Aspekt des Kalküls des natürlichen Schließens ist, dass er es uns erlaubt, Beweise „von unten nach oben“ zu führen. Das heißt, wir beginnen mit den Prämissen und wenden dann die Regeln an, um die gewünschte Schlussfolgerung zu erreichen. Dies steht im Gegensatz zu anderen formalen Systemen, in denen man oft „von oben nach unten“ arbeitet, indem man versucht, die Schlussfolgerung in bekanntere Aussagen zu zerlegen.

In den folgenden Abschnitten werden wir die spezifischen Regeln des natürlichen Schließens für die verschiedenen logischen Operatoren im Detail betrachten und Beispiele für ihre Anwendung geben.

1.2.2 Regeln des natürlichen Schließens

Im Kalkül des natürlichen Schließens werden Beweise oft in einer tabellarischen Form präsentiert, in der jede Zeile eines Beweises eine Aussage, eine Zeilennummer, eine Regel und eine Referenz auf die Zeilen enthält, auf die die Regel angewendet wird. Zusätzlich wird jeder Aussage ein Satz von Annahmenindizes zugeordnet, die anzeigen, auf welchen Annahmen die Aussage basiert.

Die allgemeine Form einer Zeile in einem Beweis im Kalkül des natürlichen Schließens sieht folgendermaßen aus:

$$i_1, i_2, \ldots, i_k \quad (n) \quad P \quad \text{Regelname}\, j_1, j_2, \ldots, j_l$$

Hier repräsentiert $i_1, i_2, \ldots, i_k$ die Indizes der Annahmen, auf denen die Aussage P basiert, (n) ist die Zeilennummer, „Regelname“ ist die Regel, die in dieser Zeile angewendet wird, und $j_1, j_2, \ldots, j_l$ sind die Zeilennummern, auf die die Regel angewendet wird.

In den folgenden Abschnitten werden wir die spezifischen Regeln des natürlichen Schließens für die verschiedenen logischen Operatoren im Detail betrachten und Beispiele für ihre Anwendung geben.

Regeln für die Annahmeneinführung

Die Annahmeneinführung ist eine grundlegende Regel im Kalkül des natürlichen Schließens. Sie erlaubt es uns, eine Aussage als Annahme in den Beweis einzuführen. Diese Annahme kann dann in den folgenden Zeilen des Beweises verwendet werden, um weitere Aussagen abzuleiten.

Die Regel der Annahmeneinführung wird oft durch das Symbol A dargestellt. Es gibt keine spezifischen Bedingungen für die Anwendung dieser Regel, da sie einfach eine Aussage als Annahme in den Beweis einführt.

$$n \quad (n) \quad P \quad A$$

Hier repräsentiert n den Index der Annahme, der mit der Zeilennummer (n) übereinstimmt, P ist die Aussage, die als Annahme eingeführt wird, und A ist die Regel der Annahmeneinführung.

Es ist wichtig zu beachten, dass Annahmen im Kalkül des natürlichen Schließens nicht unbedingt wahr sein müssen. Sie dienen lediglich als Ausgangspunkt für den Beweis. Wenn wir aus einer Annahme einen Widerspruch ableiten können, dann können wir schließen, dass die ursprüngliche Annahme falsch sein muss. Dies ist die Grundlage für den Beweis durch Widerspruch, eine wichtige Methode im Kalkül des natürlichen Schließens.

In einigen Fällen können wir eine Annahme auch wieder aufheben, wenn wir ihre Konsequenzen untersucht haben. Dies ist zum Beispiel die Grundlage für die Regel der Implikationseinführung, die es uns erlaubt, aus der Annahme P und der daraus abgeleiteten Aussage Q die Implikation $P \to Q$ zu erzeugen. In diesem Fall sagen wir, dass die Annahme P für den Beweis der Implikation $P \to Q$ entfernt oder aufgehoben wurde.

Regeln für die Konjunktion

Die Konjunktion, oft dargestellt durch das Symbol $\wedge$, ist ein logischer Operator, der „und“ bedeutet. Im Kalkül des natürlichen Schließens gibt es zwei grundlegende Regeln für die Konjunktion: die Einführungs- und die Eliminierungsregel.

$$\begin{array}{lll} i & (1)\, P & ... \\ j & (2)\, Q & ... \\ i,j & (3)\, P \wedge Q & \wedge I(1,2) \end{array}$$

Die Einführungsregel für die Konjunktion $(\wedge I)$ besagt, dass wenn wir zwei Aussagen P und Q haben, wir daraus die Aussage $P \wedge Q$ ableiten können.

$$\begin{array}{lll} i & (1)\, P \wedge Q & ... \\ i & (2)\, P & \wedge E1(1) \\ i & (3)\, Q & \wedge E2(2) \end{array}$$

i, j sind dabei Listen von Annahmen.

Die Eliminierungsregeln für die Konjunktion ($\wedge E1$ und $\wedge E2$) besagen, dass wenn wir eine Aussage der Form $P \wedge Q$ haben, wir daraus entweder P oder Q ableiten können.

Regeln für die Disjunktion

Die Disjunktion, oft dargestellt durch das Symbol $\vee$, ist ein logischer Operator, der „oder" bedeutet. Im Kalkül des natürlichen Schließens gibt es zwei grundlegende Regeln für die Disjunktion: die Einführungs- und die Eliminierungsregel.

Die Einführungsregeln für die Disjunktion ($\vee I1$ und $\vee I2$) besagen, dass wenn wir eine Aussage P oder Q haben, wir daraus die Aussage $P \vee Q$ ableiten können.

i	(1)	P	...
i	(2)	$P \vee Q$	$\vee I1(1)$

i	(1)	Q	...
i	(2)	$P \vee Q$	$\vee I2(1)$

Die Eliminierungsregel für die Disjunktion ($\vee E$) besagt, dass wenn wir eine Aussage der Form $P \vee Q$ haben und wir wissen, dass aus beiden P und Q eine bestimmte Aussage R folgt, wir daraus R ableiten können.

i	(1)	$P \vee Q$	...
2	(2)	Q	A
$2, j$	(3)	R	...
3	(4)	Q	A
$3, k$	(5)	R	...
i, j, k	(6)	R	$\vee E(1, 2, 3, 4, 5)$

i, j, k sind dabei Listen von Annahmen.

Regeln für die Implikation

Die Implikation, oft dargestellt durch das Symbol $\rightarrow$, ist ein logischer Operator, der „impliziert" oder „führt zu" bedeutet. Im Kalkül des natürlichen Schließens gibt es zwei grundlegende Regeln für die Implikation: die Einführungs- und die Eliminierungsregel.

Die Einführungsregel für die Implikation ($\rightarrow I$) besagt, dass wenn wir aus der Annahme P die Aussage Q ableiten können, wir daraus die Aussage $P \rightarrow Q$ ableiten können.

1	(1)	P	A
$1, i$	(2)	Q	...
i	(3)	$P \rightarrow Q$	$\rightarrow I(1, 2)$

Die Eliminierungsregel für die Implikation ($\rightarrow E$) besagt, dass wenn wir eine Aussage der Form $P \rightarrow Q$ und die Aussage P haben, wir daraus die Aussage Q ableiten können.

i	(1)	$P \to Q$	...
j	(2)	P	...
i, j	(3)	Q	$\to E(1,2)$

i, j sind dabei Listen von Annahmen.

Regeln für die Äquivalenz

Die Einführungsregel für die Äquivalenz ($\leftrightarrow I$) besagt, dass wenn wir Aussagen der Form $P \to Q$ und $Q \to P$ haben, wir daraus die Aussage $P \leftrightarrow Q$ ableiten können.

i	(1)	$P \to Q$	...
j	(2)	$Q \to P$	...
i, j	(3)	$P \leftrightarrow Q$	$\leftrightarrow I(1,2)$

Die Eliminierungsregel für die Äquivalenz ($\leftrightarrow E$) besagt, dass wenn wir eine Aussage der Form $P \leftrightarrow Q$ haben, wir daraus die Aussagen $P \to Q$ und $Q \to P$ ableiten können.

i	(1)	$P \leftrightarrow Q$	...
i	(2)	$P \to Q$	$\leftrightarrow E1(1)$
i	(3)	$Q \to P$	$\leftrightarrow E2(1)$

i, j sind dabei Listen von Annahmen.

In diesen Tabellen bezeichnet die erste Spalte jeder Zeile die getroffenen Annahmen, von denen die Zeile abhängt, die zweite Spalte die Zeilennummer, die dritte Spalte die Aussage, die geschlussfolgert wurde, und die vierte Spalte die Regel, die zum Schließen der Aussage verwendet wurde. Die Regel A bezeichnet die Regel der Annahme.

Regeln für die Negation

Die Negation, oft dargestellt durch das Symbol $\neg$, ist ein logischer Operator, der „nicht“ bedeutet. Im Kalkül des natürlichen Schließens gibt es zwei grundlegende Regeln für die Negation: die Einführungs- und die Eliminierungsregel.

Die Einführungsregel für die Negation ($\neg I$) besagt, dass wenn wir aus der Annahme P einen Widerspruch ableiten können, wir daraus die Aussage $\neg P$ ableiten können.

1	(1)	P	A
$1, i$	(2)	$\bot$	...
i	(3)	$\neg P$	$\neg I(1,2)$

Die Einführungsregel des Widerspruchs ($\bot I$) besagt, dass wenn wir eine Aussage der Form P und die Aussage $\neg P$ haben, wir daraus einen Widerspruch $\bot$ ableiten können.

i	(1)	P	...
j	(2)	$\neg P$	...
i, j	(3)	$\bot$	$\bot I(1,2)$

i, j sind dabei Listen von Annahmen.

Das Widerspruchssymbol $\bot$ wird verwendet, um einen logischen Widerspruch darzustellen. Ein Widerspruch tritt auf, wenn wir aus den gegebenen Annahmen sowohl eine Aussage als auch ihre Negation ableiten können. Im Kalkül des natürlichen Schließens wird ein Widerspruch oft als Beweisziel verwendet, insbesondere wenn wir die Negation einer Aussage beweisen wollen. Wenn wir aus der Annahme einer Aussage einen Widerspruch ableiten können, dann können wir schließen, dass die ursprüngliche Aussage falsch sein muss, und daher ist ihre Negation wahr.

Erweitertes Kalkül des natürlichen Schließens mit Negationseliminierung ($\neg E$)

In diesem Kapitel stellen wir eine Variante des Kalküls des natürlichen Schließens vor, die die Regel der Negationseliminierung ($\neg E$) einführt. Diese Regel ermöglicht es, aus der Annahme $\neg P$ und einem daraus resultierenden Widerspruch $\bot$ die Aussage P abzuleiten.

1	(1)	$\neg P$	A
$1, i$	(2)	$\bot$	$\dots$
i	(3)	P	$\neg E(1,2)$

1.3 Prädikatenlogik

1.3.1 Syntax der Prädikatenlogik

Die Syntax der Prädikatenlogik definiert die Struktur und Formation von Aussagen oder Ausdrücken in der Prädikatenlogik. Hier sind die grundlegenden Elemente:

1. **Terme**: Terme repräsentieren Objekte. Sie können aus einzelnen Variablen (wie x, y, z), Konstanten (wie a, b, c) oder Funktionssymbolen (wie f, g, h) bestehen, die auf andere Terme angewendet werden.

2. **Prädikate**: Prädikate sind Funktionen, die Terme aufnehmen und einen Wahrheitswert zurückgeben. Sie werden oft durch Großbuchstaben (wie P, Q, R) dargestellt. Ein Prädikat mit den Termen kann als eine Aussage betrachtet werden. Zum Beispiel könnte $P(x)$ eine Aussage sein, die wahr ist, wenn x eine bestimmte Eigenschaft hat, und falsch, wenn x diese Eigenschaft nicht hat.

3. **Quantoren**: Es gibt zwei Quantoren in der Prädikatenlogik: den Allquantor ($\forall$) und den Existenzquantor ($\exists$). Der Allquantor $\forall x P(x)$ besagt, dass

$P(x)$ für alle x wahr ist. Der Existenzquantor $\exists x P(x)$ besagt, dass es mindestens ein x gibt, für das $P(x)$ wahr ist.

4. **Logische Operatoren**: Die Prädikatenlogik verwendet die gleichen logischen Operatoren wie die Aussagenlogik: Negation ($\neg$), Konjunktion ($\wedge$), Disjunktion ($\vee$), Implikation ($\rightarrow$), und Äquivalenz ($\leftrightarrow$).

5. **Klammern**: Klammern werden verwendet, um die Reihenfolge der Operationen in Ausdrücken zu klären.

6. **Mengenschreibweise**: Die Mengenschreibweise, oft dargestellt durch das Symbol $\{x|P(x)\}$ und wird verwendet, um eine Menge zu definieren, deren Elemente eine bestimmte Eigenschaft erfüllen. In dieser Notation repräsentiert x eine Variable, die für jedes Element in der Menge steht, und $P(x)$ ist ein Prädikat, das eine Aussage über x macht. Das Symbol „“ wird gelesen als „so dass“ oder „für die gilt“.

Ein Ausdruck in der Prädikatenlogik ist dann wohldefiniert, wenn er den Regeln der Syntax folgt. Zum Beispiel sind $P(x)$, $\forall x P(x)$, und $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ wohldefinierte Ausdrücke in der Prädikatenlogik.

1.4 Kalkül des natürlichen Schließens in der Prädikatenlogik

Regeln für den Allquantor

Die Allquantifikation, oft dargestellt durch das Symbol $\forall$, ist ein logischer Operator, der „für alle“ bedeutet. Im Kalkül des natürlichen Schließens gibt es zwei grundlegende Regeln für die Allquantifikation: die Einführungs- und die Eliminierungsregel.

Die Einführungsregel für die Allquantifikation ($\forall I$) besagt, dass wenn wir eine Aussage $P(x)$ für eine beliebige, aber fest gewählte Variable x beweisen können, wir daraus die allgemeine Aussage $\forall x, P(x)$ ableiten können. Dabei darf x in den Annahmen, aus denen $P(x)$ abgeleitet wird, nicht vorkommen.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & P(x) & ... \\ i & (2) & \forall x(P(x)) & \forall I(1) \end{array}$$

Die Eliminierungsregel für die Allquantifikation ($\forall E$) besagt, dass wenn wir eine allgemeine Aussage der Form $\forall x, P(x)$ haben, wir daraus eine spezielle Aussage $P(t)$ für ein beliebiges Term t ableiten können.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & \forall x(P(x)) & ... \\ i & (2) & P(t) & \forall E(1) \end{array}$$

i ist dabei eine Liste von Annahmen.

Bitte beachten Sie, dass in der Prädikatenlogik Variablen und Terme eine wichtige Rolle spielen. Eine Variable ist ein Platzhalter, der für jedes Objekt in der Domäne der Diskussion stehen kann. Ein Term ist eine konkrete Bezeichnung für ein spezifisches Objekt in der Domäne. In der Regel der Allquantor-Eliminierung steht t für einen solchen Term.

Regeln für den Existenzquantor

Der Existenzquantor, oft dargestellt durch das Symbol $\exists$, ist ein logischer Operator, der „es existiert" bedeutet. Im Kalkül des natürlichen Schließens gibt es zwei grundlegende Regeln für den Existenzquantor: die Einführungs- und die Eliminierungsregel.

Die Einführungsregel für den Existenzquantor ($\exists I$) besagt, dass wenn wir eine Aussage $P(t)$ haben, wobei t ein Term ist, wir daraus die Aussage $\exists x P(x)$ ableiten können.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & P(t) & ... \\ i & (2) & \exists x(P(x)) & \exists I(1) \end{array}$$

Die Eliminierungsregel für den Existenzquantor ($\exists E$) besagt, dass wenn wir eine Aussage der Form $\exists x P(x)$ haben und aus der Annahme $P(t)$ für ein neues t (t ist eine Variable, die in den bisherigen Schritten des Beweises noch nicht verwendet wurde) eine Aussage Q ableiten können, die kein t enthält, wir daraus die Aussage Q ableiten können.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & \exists x P(x) & ... \\ 2 & (2) & P(t) & A \\ 2, j & (3) & Q & ... \\ i, j & (4) & Q & \exists E(1, 2, 3) \end{array}$$

i, j sind dabei Listen von Annahmen.

Alternativ kann diese Regel wie folgt direkter definiert werden um somit die Notwendigkeit, zunächst eine Instanz $P(t)$ anzunehmen zu umgehen :

$$\begin{array}{llll} i & (1) & \exists x P(x) & ... \\ i & (2) & P(t) & \exists E(1) \end{array}$$

Beweis.

$$\begin{array}{llll} 1 & (1) & \exists x P(x) & A \\ 2 & (2) & P(t) & A \\ 1 & (3) & P(t) & \exists E(1, 2, 2) \end{array}$$

□

Regeln für den Eindeutigkeitsquantor ($\exists !$)

Der Eindeutigkeitsquantor, oft dargestellt durch das Symbol $\exists !$, ist ein logischer Operator, der „es existiert genau ein" bedeutet. Der Eindeutigkeitsquantor kann wie folgt definiert werden:

$$\exists ! x(P(x)) \leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow x = y))$$

Einführungsregel für $\exists!$ ($\exists! I$) Die Einführungsregel ermöglicht die Ableitung einer Aussage der Form $\exists! x(P(x))$, wenn neben der Existenz $\exists x(P(x))$ auch nachgewiesen werden kann, dass wenn wir ein neues a und b (a als auch b ist dabei eine Variable, die in den bisherigen Schritten des Beweises noch nicht verwendet wurde) mit $P(a)$ bzw. $P(b)$ voraussetzen, $a = y$ gilt.

i	(1) $\exists x(P(x))$	...
2	(2) $P(a)$	A
3	(3) $P(b)$	A
$2, 3, j$	(4) $a = b$	...
i, j	(5) $\exists! x(P(x))$	$\exists! I(1, 2, 3, 4)$

Eliminierungsregel für $\exists!$ ($\exists! E$) Die Eliminierungsregel erlaubt die Ableitung weiterer Schlussfolgerungen aus einer Aussage der Form $\exists! x(P(x))$. Angenommen, es existiert genau ein x, das $P(x)$ erfüllt, dann kann aus dieser Tatsache eine beliebige Aussage Q gefolgert werden.

i	(1) $\exists! x(P(x))$	...
2	(2) $P(a) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow a = y)$	A
i	(3) Q	$\exists! E(1, 2)$

Regeln für das Identitätssymbol

Das Identitätssymbol, oft dargestellt durch das Symbol =, wird in der Prädikatenlogik verwendet, um die Gleichheit von Termen auszudrücken. Im Kalkül des natürlichen Schließens gibt es zwei grundlegende Regeln für das Identitätssymbol: die Einführungs- und die Eliminierungsregel.

Die Einführungsregel für das Identitätssymbol ($= I$) besagt, dass für jeden Term t, die Aussage $t = t$ wahr ist.

$$(1) \quad t = t \quad = I$$

Die Eliminierungsregel für das Identitätssymbol ($= E$) besagt, dass wenn wir eine Aussage der Form $t = u$ und eine Aussage $P(t)$ haben, wir daraus die Aussage $P(u)$ ableiten können.

i	(1)	$t = u$	...
2	(2)	$P(t)$	A
$2, i$	(3)	$P(u)$	$= E(1, 2)$

i	(1)	$u = t$	...
2	(2)	$P(t)$	A
$2, i$	(3)	$P(u)$	$= E(1, 2)$

i ist dabei eine Liste von Annahmen.

Regeln für das Nicht-Gleichheitszeichen

Das Nicht-Gleichheitszeichen, dargestellt durch das Symbol $\neq$, ist ein logischer Operator, der die Ungleichheit zweier Terme ausdrückt. Wir führen zwei grundlegende Regeln für das Nicht-Gleichheitszeichen ein: die Einführungs- und die Eliminierungsregel.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & \neg t = u & ... \\ i & (2) & t \neq u & \neq I1 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} i & (1) & t \neq u & ... \\ i & (2) & \neg t = u & \neq E(1) \end{array}$$

Vereinfachung für das Nicht-Gleichheitszeichen

Das Symbol $\neq$, das die Ungleichheit von Elementen darstellt, ist in seiner Bedeutung offensichtlich und direkt verständlich. Es bedeutet einfach, dass zwei Elemente nicht gleich sind. Aufgrund dieser direkten und intuitiven Bedeutung können wir in vielen Fällen auf separate Einführungs- und Eliminierungsregeln für $\neq$ verzichten.

Die Notation $t \neq u$ ist äquivalent zu $\neg(t = u)$ und kann direkt verwendet werden, ohne dass eine formale Regel angewendet werden muss. Dies vereinfacht den Umgang mit der Ungleichheit in logischen Argumentationen und Beweisen.

Daher können wir in Zukunft die Verwendung von $t \neq u$ als eine unmittelbare Folgerung von $\neg(t = u)$ und umgekehrt ansehen, ohne explizit eine Regel anzuwenden.

1.5 Zusammenfassung der Regeln der Aussagenlogik und Prädikatenlogik

1.5.1 Aussagenlogik

Regeln für die Konjunktion

$$\begin{array}{lll} i & (1)\, P & ... \\ j & (2)\, Q & ... \\ i,j & (3)\, P \wedge Q & \wedge I(1,2) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} i & (1)\, P \wedge Q & ... \\ i & (2)\, P & \wedge E1(1) \\ i & (3)\, Q & \wedge E2(2) \end{array}$$

Regeln für die Disjunktion

$$\begin{array}{llll} i & (1) & P & ... \\ i & (2) & P \vee Q & \vee I1(1) \end{array}$$

i	(1)	Q	...
i	(2)	$P \vee Q$	$\vee I2(1)$

i	(1)	$P \vee Q$	...
2	(2)	P	A
$2, j$	(3)	R	...
3	(4)	Q	A
$3, k$	(5)	R	...
i, j, k	(6)	R	$\vee E(1,2,3,4,5)$

Regeln für die Implikation

1	(1)	P	A
$1, i$	(2)	Q	...
i	(3)	$P \to Q$	$\to I(1,2)$

i	(1)	$P \to Q$	...
j	(2)	P	...
i, j	(3)	Q	$\to E(1,2)$

Regeln für die Äquivalenz

i	(1)	$P \to Q$	...
j	(2)	$Q \to P$	...
i, j	(3)	$P \leftrightarrow Q$	$\leftrightarrow I(1,2)$

i	(1)	$P \leftrightarrow Q$	...
i	(2)	$P \to Q$	$\leftrightarrow E1(1)$
i	(3)	$Q \to P$	$\leftrightarrow E2(1)$

Regeln für die Negation

1	(1)	P	A
$1, i$	(2)	$\bot$	...
i	(3)	$\neg P$	$\neg I(1,2)$

1	(1)	$\neg P$	A
$1, i$	(2)	$\bot$	...
i	(3)	P	$\neg E(1,2)$

i	(1)	P	...
j	(2)	$\neg P$	...
i, j	(3)	$\bot$	$\bot I(1,2)$

1.5.2 Prädikatenlogik

Regeln für den Allquantor

i	(1)	$P(x)$	...
i	(2)	$\forall x(P(x))$	$\forall I(1)$

Dabei darf x in den Annahmen, aus denen $P(x)$ abgeleitet wird, nicht vorkommen.

i	(1)	$\forall x(P(x))$	...
i	(2)	$P(t)$	$\forall E(1)$

Regeln für den Existenzquantor

i	(1)	$P(t)$	...
i	(2)	$\exists x(P(x))$	$\exists I(1)$

i	(1)	$\exists x(P(x))$	...
2	(2)	$P(t)$	A
$2, j$	(3)	Q	...
i, j	(4)	Q	$\exists E(1, 2, 3)$

oder alternativ:

i	(1)	$\exists x(P(x))$	...
i	(2)	$P(t)$	$\exists E(1)$

t ist eine Variable, die in den bisherigen Schritten des Beweises noch nicht verwendet wurde

Regeln für das Identitätssymbol

(1)	$t = t$	$= I$

i	(1)	$t = u$	...
2	(2)	$P(t)$	A
$2, i$	(3)	$P(u)$	$= E\,(1, 2)$

Regeln für den Eindeutigkeitsquantor ($\exists!$)

i	(1)	$\exists x(P(x))$	...
2	(2)	$P(a)$	A
3	(3)	$P(b)$	A
$2, 3, j$	(4)	$a = b$	...
i, j	(5)	$\exists! x(P(x))$	$\exists! I(1, 2, 3, 4)$

i	(1)	$\exists! x(P(x))$	...
i	(2)	$P(a) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow a = y)$	A
i	(3)	Q	$\exists! E(1, 2)$

Kapitel 2

Grundlegende Beweisprinzipien

2.1 Argumente

Ein Argument in der Logik besteht aus einer Reihe von Aussagen, die als Prämissen bezeichnet werden, und einer Aussage, die als Schlussfolgerung bezeichnet wird. Die Prämissen sollen die Schlussfolgerung unterstützen oder begründen.

Formal kann ein Argument als geordnetes Paar (Γ, ϕ) definiert werden, wobei Γ eine Menge von Aussagen (die Prämissen) und ϕ eine einzelne Aussage (die Schlussfolgerung) ist.

In der symbolischen Logik werden Argumente oft in der Form „$\Gamma \vdash \phi$“ dargestellt, wobei $\vdash$ das Symbol für „führt zu“ ist. Die Interpretation dieser symbolischen Darstellung ist, dass wenn alle Aussagen in Γ wahr sind, dann muss auch ϕ wahr sein.

Hat die Menge Γ keine Elemente, dann lassen wir das Symbol $\vdash$ auch weg und schreiben kürzer ϕ für das Argument anstelle von $\vdash \phi$.

Wenn Γ nur aus einem Element ψ besteht, können wir auch die Äquivalenz „$\psi \dashv\vdash \phi$“ verwenden, wobei $\dashv$ das Symbol für „führt zu“ in umgekehrter Richtung ist. Dies bedeutet, dass wenn ϕ wahr ist, dann muss auch ψ wahr sein.

Ein Argument (Γ, ϕ) wird als gültig bezeichnet, wenn es eine Ableitung der Schlussfolgerung ϕ aus den Prämissen in Γ gemäß den Regeln des Kalküls des natürlichen Schließens gibt. Mit anderen Worten, es gibt eine Sequenz von Anwendungen der Einführungs- und Eliminierungsregeln, die von den Prämissen zu der Schlussfolgerung führt.

2.2 Beweise und Beweistabellen

Ein Beweis in diesem Kontext ist eine solche Sequenz von Anwendungen der Einführungs- und Eliminierungsregeln, die von den Prämissen eines Arguments zu seiner Schlussfolgerung führt. Ein Beweis zeigt, dass ein Argument gültig ist, indem er explizit demonstriert, wie die Schlussfolgerung aus den Prämissen abgeleitet werden kann.

Ein Beweis wird oft in Form einer Beweistabelle (nicht zu verwechseln mit Wahrheitswertetabellen) dargestellt. Eine Beweistabelle ist eine tabellarische Darstellung eines Beweises, in der jede Zeile eine Anwendung einer Regel repräsentiert. Jede Zeile enthält vier Teile: eine Liste von Zeilennummern, die die Annahmen repräsentieren, von denen die Zeile abhängt, eine Zeilennummer, eine Aussage, die durch die Anwendung der Regel abgeleitet wird, und die verwendete Regel.

Zum Beispiel betrachten Sie das folgende Argument in der Aussagenlogik:

$$P \to Q, P \vdash Q$$

Dieses Argument besteht aus zwei Prämissen, $P \to Q$ und P, und einer Schlussfolgerung, Q. Die Interpretation dieses Arguments ist, dass wenn $P \to Q$ (wenn P dann Q) wahr ist und P wahr ist, dann muss auch Q wahr sein. Dies ist ein gültiges Argument in der Aussagenlogik, da es der Regel der Implikation ($\to E$) entspricht, die besagt, dass wenn wir eine Aussage der Form $P \to Q$ und die Aussage P haben, wir daraus die Aussage Q ableiten können.

Die Beweistabelle für dieses Argument sieht folgendermaßen aus:

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	P	A
$1,2$	(3)	Q	$\to E(1,2)$

In dieser Tabelle repräsentiert jede Zeile eine Anwendung einer Regel. Die erste Spalte listet die Zeilennummern der Annahmen auf, von denen die Zeile abhängt. Die zweite Spalte ist die Zeilennummer. Die dritte Spalte enthält die Aussage, die durch die Anwendung der Regel abgeleitet wird, und die vierte Spalte gibt die verwendete Regel an.

Kapitel 3

Beweise in der Logik

3.1 Grundlegende Beweise

In diesem Abschnitt präsentieren wir Beweise für einige grundlegende Regeln der Aussagenlogik.

Theorem 1 (Tautologie aus der Regel R der Aussage $P \dashv\vdash Q$ (R))**.** *Gelte die auf der Regel R basierende Tautologie $P \dashv\vdash Q$, dann gilt auch $\vdash P \leftrightarrow Q$.*

Beweis.

1	(1)	P	A
1	(2)	Q	$R(1)$
	(3)	$P \to Q$	$\to I(1,2)$
4	(4)	Q	A
4	(5)	P	$R(4)$
	(6)	$Q \to P$	$\to I(4,5)$
	(7)	$P \leftrightarrow Q$	$\leftrightarrow I(3,6)$

□

Theorem 2 (Äquivalenzimplikation ($\leftrightarrow E3$))**.** *a)* $P \leftrightarrow Q, P \vdash Q$

b) $P \leftrightarrow Q, Q \vdash P$

Beweis. a)

1	(1)	$P \leftrightarrow Q$	A
2	(2)	P	A
1	(3)	$P \to Q$	$\leftrightarrow E1(2)$
1	(4)	Q	$\leftrightarrow E2(2,3)$

b)

1	(1)	$P \leftrightarrow Q$	A
2	(2)	Q	A
1	(3)	$Q \to P$	$\leftrightarrow E2(2)$
1	(4)	Q	$\leftrightarrow E2(2,3)$

□

Theorem 3 (Idempotenz der Disjunktion ($\vee$ Idem.)). $P \vee P \dashv\vdash P$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$P \vee P$	A
2	(2)	P	A
1	(3)	P	$\vee E(1,2,2,2,2)$

$\dashv$:

1	(1)	P	A
2	(2)	$P \vee P$	$\vee I1(1,1)$

□

Theorem 4 (Idempotenz der Konjunktion ($\wedge$ Idem.)). $P \wedge P \dashv\vdash P$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$P \wedge P$	A
2	(2)	P	$\wedge E1(1)$

$\dashv$:

1	(1)	P	A
2	(2)	$P \wedge P$	$\wedge I(1,1)$

□

Theorem 5 (Kommutativgesetz der Disjunktion ($\vee Komm.$)). $P \vee Q \vdash Q \vee P$

Beweis.

1	(1)	$P \vee Q$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$Q \vee P$	$\vee I2(2)$
4	(4)	Q	A
4	(5)	$Q \vee P$	$\vee I1(4)$
1	(6)	$Q \vee P$	$\vee E(1,2,3,4,5)$

□

Theorem 6 (Kommutativgesetz der Konjunktion ($\wedge Komm.$)). $P \wedge Q \vdash Q \wedge P$

Beweis.

1	(1)	$P \wedge Q$	A
1	(2)	P	$\wedge E1(1)$
1	(3)	Q	$\wedge E2(1)$
1	(4)	$Q \wedge P$	$\wedge I(3,2)$

□

Theorem 7 (Kommutativgesetz der Äquivalenz ($Komm. \leftrightarrow$)). $P \leftrightarrow Q \vdash Q \leftrightarrow P$

Beweis.

1	(1)	$P \leftrightarrow Q$	A
1	(2)	$P \rightarrow Q$	$\leftrightarrow E1(1)$
1	(3)	$Q \rightarrow P$	$\leftrightarrow E2(1)$
1	(4)	$P \wedge Q$	$\leftrightarrow I(3,2)$

□

Theorem 8 (Assoziativgesetz der Disjunktion ($\vee$ Ass.))**.** $(P \vee (Q \vee R)) \dashv\vdash ((P \vee Q) \vee R)$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$P \vee (Q \vee R)$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee Q$	$\vee I1(2)$
2	(4)	$(P \vee Q) \vee R$	$\vee I1(3)$
5	(5)	$Q \vee R$	A
5	(6)	Q	A
6	(7)	$P \vee Q$	$\vee I2(6)$
6	(8)	$(P \vee Q) \vee R$	$\vee I1(7)$
9	(9)	R	A
9	(10)	$(P \vee Q) \vee R$	$\vee I2(9)$
5	(11)	$(P \vee Q) \vee R$	$\vee E(5,6,8,9,10)$
1	(12)	$(P \vee Q) \vee R$	$\vee E(1,2,4,5,11)$

$\dashv$:

1	(1)	$(P \vee Q) \vee R$	A
2	(2)	$P \vee Q$	A
2	(3)	P	A
3	(4)	$P \vee (Q \vee R)$	$\vee I1(3)$
5	(5)	Q	A
5	(6)	$Q \vee R$	$\vee I1(5)$
5	(7)	$P \vee (Q \vee R)$	$\vee I2(6)$
2	(8)	$P \vee (Q \vee R)$	$\vee E(2,3,4,5,7)$
9	(9)	R	A
9	(10)	$Q \vee R$	$\vee I2(9)$
9	(11)	$P \vee (Q \vee R)$	$\vee I2(10)$
1	(12)	$P \vee (Q \vee R)$	$\vee E(1,2,8,9,11)$

□

Theorem 9 (Assoziativgesetz der Konjunktion ($\wedge$ Ass.))**.** $(P \wedge (Q \wedge R)) \dashv\vdash ((P \wedge Q) \wedge R)$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$P \wedge (Q \wedge R)$	A
1	(2)	P	$\wedge E1(1)$
1	(3)	$Q \wedge R$	$\wedge E2(1)$
1	(4)	Q	$\wedge E1(3)$
1	(5)	R	$\wedge E2(3)$
1	(6)	$P \wedge Q$	$\wedge I(2,4)$
1	(7)	$(P \wedge Q) \wedge R$	$\wedge I(6,5)$

$\dashv$:

1	(1)	$(P \wedge Q) \wedge R$	A
1	(2)	$P \wedge Q$	$\wedge E1(1)$
1	(3)	R	$\wedge E2(1)$
1	(4)	P	$\wedge E1(2)$
1	(5)	Q	$\wedge E2(2)$
1	(6)	$Q \wedge R$	$\wedge I(5,3)$
1	(7)	$P \wedge (Q \wedge R)$	$\wedge I(4,6)$

□

Theorem 10 (Modus Tollens (MT))**.** $P \to Q, \neg Q \vdash \neg P$

Beweis.

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$\neg Q$	A
3	(3)	P	A
1, 3	(4)	Q	$\to E(1,3)$
1, 2, 3	(5)	$\perp$	$\perp I(2,4)$
1, 2	(6)	$\neg P$	$\neg I(3,5)$

□

Theorem 11 (Modus Tollens (MT))**.** $\neg P \to \neg Q, Q \vdash P$

Beweis.

1	(1)	$\neg P \to \neg Q$	A
2	(2)	Q	A
3	(3)	$\neg P$	A
1, 3	(4)	$\neg Q$	$\to E(1,3)$
1, 2, 3	(5)	$\perp$	$\perp I(2,4)$
1, 2	(6)	P	$\neg E(3,5)$

□

Theorem 12 (Modus Tollens der Äquivalenz (MT))**.** $P \leftrightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$

Beweis.

1	(1)	$P \leftrightarrow Q$	A
1	(2)	$P \to Q$	$\leftrightarrow E1(1)$
3	(3)	$\neg Q$	A
1, 3	(4)	$\neg P$	$MT(3,2)$

□

Theorem 13 (Modus Tollens der Äquivalenz (MT))**.** $P \leftrightarrow Q, \neg P \vdash \neg Q$

Beweis.

1	(1)	$P \leftrightarrow Q$	A
1	(2)	$Q \to P$	$\leftrightarrow E2(1)$
3	(3)	$\neg P$	A
1, 3	(4)	$\neg Q$	$MT(3, 2)$

□

Theorem 14 (Modus Tollens der Äquivalenz (MT))**.** $\neg P \leftrightarrow \neg Q, Q \vdash P$

Beweis.

1	(1)	$\neg P \leftrightarrow \neg Q$	A
1	(2)	$\neg P \to \neg Q$	$\leftrightarrow E1(1)$
3	(3)	Q	A
1, 3	(4)	P	$MT(3, 2)$

□

Theorem 15 (Modus Tollens der Äquivalenz (MT))**.** $\neg P \leftrightarrow \neg Q, P \vdash Q$

Beweis.

1	(1)	$\neg P \leftrightarrow \neg Q$	A
1	(2)	$\neg Q \to \neg P$	$\leftrightarrow E2(1)$
3	(3)	P	A
1, 3	(4)	Q	$MT(3, 2)$

□

Theorem 16 (Kontraposition (CP))**.** $P \to Q \dashv\vdash \neg Q \to \neg P$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$\neg Q$	A
1, 2	(3)	$\neg P$	$MT(1, 2)$
1	(4)	$\neg Q \to \neg P$	$\to I(2, 3)$

$\dashv$:

1	(1)	$\neg P \to \neg Q$	A
2	(2)	Q	A
1, 2	(3)	P	$MT(1, 2)$
1	(4)	$Q \to P$	$\to I(2, 3)$

□

Theorem 17 (Exportation ($rExp$))**.** $(P \wedge Q) \to R \dashv\vdash P \to (Q \to R)$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$(P \land Q) \to R$	A
2	(2)	P	A
3	(3)	Q	A
2, 3	(4)	$P \land Q$	$\land I(2,3)$
1, 2, 3	(5)	R	$\to E(1,4)$
1, 2	(6)	$Q \to R$	$\to I(3,5)$
1	(7)	$P \to (Q \to R)$	$\to E(2,6)$

$\dashv$:

1	(1)	$P \to (Q \to R)$	A
2	(2)	$P \land Q$	A
2	(3)	P	$\land E1(2)$
2	(4)	Q	$\land E2(2)$
1, 2	(5)	$Q \to R$	$\to E(1,3)$
1, 2	(6)	R	$\to E(5,4)$
1	(7)	$(P \land Q) \to R$	$\to I(2,6)$

□

Theorem 18 (Exportation ($rExp$))**.** $(P \land Q) \to R \dashv\vdash Q \to (P \to R)$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$(P \land Q) \to R$	A
2	(2)	P	A
3	(3)	Q	A
2, 3	(4)	$P \land Q$	$\land I(2,3)$
1, 2, 3	(5)	R	$\to E(1,4)$
1, 3	(6)	$P \to R$	$\to I(2,5)$
1	(7)	$Q \to (P \to R)$	$\to E(3,6)$

$\dashv$:

1	(1)	$Q \to (P \to R)$	A
2	(2)	$P \land Q$	A
2	(3)	P	$\land E1(2)$
2	(4)	Q	$\land E2(2)$
1, 2	(5)	$P \to R$	$\to E(1,4)$
1, 2	(6)	R	$\to E(5,3)$
1	(7)	$(P \land Q) \to R$	$\to I(2,6)$

□

Theorem 19 (Implikationstransposition ($ImpTrans$))**.** $P \to (Q \to R) \vdash Q \to (P \to R)$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$P \to (Q \to R)$	A
1	(2)	$(P \land Q) \to R$	$rExp(1)$
1	(3)	$Q \to (P \to R)$	$rExp(2)$

□

Theorem 20 (Erweiterte Äquivalenzregel ($\leftrightarrow rel.a(...)$))**.** $P \leftrightarrow (Q \wedge R), Q \rightarrow R \vdash P \leftrightarrow Q$

Beweis.

1	(1)	$P \leftrightarrow (Q \wedge R)$	A
2	(2)	$Q \rightarrow R$	A
3	(3)	P	A
1, 3	(4)	$Q \wedge R$	$\leftrightarrow E3(1,3)$
1, 3	(5)	Q	$\wedge E1(4)$
1	(6)	$P \rightarrow Q$	$\rightarrow I(3,5)$
7	(7)	Q	A
2, 7	(8)	R	$\rightarrow E(2,7)$
2, 7	(9)	$Q \wedge R$	$\wedge I(7,8)$
1, 2, 7	(10)	P	$\leftrightarrow E3(1,9)$
1, 2	(11)	$Q \rightarrow P$	$\rightarrow I(7,10)$
1, 2	(12)	$P \leftrightarrow Q$	$\leftrightarrow I(11,6)$

□

Theorem 21 (Regel der doppelten Negation (DN))**.** $P \dashv\vdash \neg\neg P$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	P	A
2	(2)	$\neg P$	A
1, 2	(3)	$\bot$	$\bot I(1,2)$
1	(4)	$\neg\neg P$	$\neg I(2,3)$

$\dashv$:

1	(1)	$\neg\neg P$	A
2	(2)	$\neg P$	A
1, 2	(3)	$\bot$	$\bot I(2,1)$
1	(4)	P	$\neg E(2,3)$

□

Theorem 22 (Gesetz vom ausgeschlossenen dritten (Law of Excluded Middle, LEM))**.** $\vdash P \vee \neg P$

Beweis.

1	(1)	$\neg(P \vee \neg P)$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee \neg P$	$\vee I1(2)$
1, 2	(4)	$\bot$	$\bot I(1,3)$
1	(5)	$\neg P$	$\neg I(2,4)$
5	(6)	$P \vee \neg P$	$\vee I2(5)$
1, 5	(7)	$\bot$	$\bot I(1,6)$
	(8)	$P \vee \neg P$	$\neg E(1,7)$

□

Theorem 23 (De Morgan 1 (DeM))**.** $\neg(P \vee Q) \dashv\vdash \neg P \wedge \neg Q$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\neg(P \vee Q)$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee Q$	$\vee I1(2)$
1, 2	(4)	$\perp$	$\perp I(1,3)$
1	(5)	$\neg P$	$\neg I(2,4)$
6	(6)	Q	A
6	(7)	$P \vee Q$	$\vee I2(6)$
1, 6	(8)	$\perp$	$\perp I(1,7)$
1	(9)	$\neg Q$	$\neg I(6,8)$
1	(10)	$\neg P \wedge \neg Q$	$\wedge I(5,9)$

$\dashv$:

1	(1)	$\neg P \wedge \neg Q$	A
1	(2)	$\neg P$	$\wedge E1(1)$
1	(3)	$\neg Q$	$\wedge E2(1)$
4	(4)	$P \vee Q$	A
5	(5)	P	A
1, 5	(6)	$\perp$	$\perp I(2,5)$
1	(7)	$\neg(P \vee Q)$	$\neg I(4,6)$
8	(8)	Q	A
1, 8	(9)	$\perp$	$\perp I(3,8)$
1	(10)	$\neg(P \vee Q)$	$\neg I(4,9)$
1	(11)	$\neg(P \vee Q)$	$\vee E(4,5,7,8,10)$

□

Theorem 24 (De Morgan 2 (DeM))**.** $\neg(P \wedge Q) \dashv\vdash \neg P \vee \neg Q$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\neg(P \wedge Q)$	A
	(2)	$P \vee \neg P$	LEM
3	(3)	P	A
4	(4)	Q	A
3, 4	(5)	$P \wedge Q$	$\wedge I(3,4)$
1, 3, 4	(6)	$\perp$	$\perp I(1,5)$
1, 3	(7)	$\neg Q$	$\neg I(4,6)$
1, 3	(8)	$\neg P \vee \neg Q$	$\vee I2(7)$
9	(9)	$\neg P$	A
9	(10)	$\neg P \vee \neg Q$	$\vee I1(9)$
1	(11)	$\neg P \vee \neg Q$	$\vee E(2,3,8,9,10)$

$\dashv$:

1	(1)	$\neg P \vee \neg Q$	A
2	(2)	$P \wedge Q$	A
2	(3)	P	$\wedge E1(2)$
2	(4)	Q	$\wedge E2(2)$
5	(5)	$\neg P$	A
2, 5	(6)	$\bot$	$\bot I(3,5)$
5	(7)	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg I(2,6)$
8	(8)	$\neg Q$	A
2, 8	(9)	$\bot$	$\bot I(4,8)$
8	(10)	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg I(2,9)$
1	(11)	$\neg(P \wedge Q)$	$\vee E(1,5,7,8,10)$

□

Theorem 25 (Distributivgesetz 1 (Dis))**.** $P \wedge (Q \vee R) \dashv\vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$P \wedge (Q \vee R)$	A
1	(2)	P	$\wedge E1(1)$
1	(3)	$Q \vee R$	$\wedge E2(1)$
4	(4)	Q	A
1, 4	(5)	$P \wedge Q$	$\wedge I(2,4)$
1, 4	(6)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$\vee I1(5)$
7	(7)	R	A
1, 7	(8)	$P \wedge R$	$\wedge I(2,7)$
1, 7	(9)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$\vee I2(8)$
1	(10)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$\vee E(3,4,6,7,9)$

$\dashv$:

1	(1)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	A
2	(2)	$P \wedge Q$	A
2	(3)	P	$\wedge E1(2)$
2	(4)	Q	$\wedge E2(2)$
2	(5)	$Q \vee R$	$\vee I1(4)$
2	(6)	$P \wedge (Q \vee R)$	$\wedge I(3,5)$
7	(7)	$P \wedge R$	A
7	(8)	P	$\wedge E1(7)$
7	(9)	R	$\wedge E2(7)$
7	(10)	$Q \vee R$	$\vee I2(9)$
7	(11)	$P \wedge (Q \vee R)$	$\wedge I(8,10)$
1	(12)	$P \wedge (Q \vee R)$	$\vee E(1,2,6,7,11)$

□

Theorem 26 (Distributivgesetz 1 (Dis))**.** $(P \vee Q) \wedge R \dashv\vdash (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$(P \vee Q) \wedge R$	A
1	(2)	R	$\wedge E2(1)$
1	(3)	$P \vee Q$	$\wedge E1(1)$
4	(4)	P	A
1, 4	(5)	$P \wedge R$	$\wedge I(4,2)$
1, 4	(6)	$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	$\vee I1(5)$
7	(7)	Q	A
1, 7	(8)	$Q \wedge R$	$\wedge I(7,2)$
1, 7	(9)	$(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$	$\vee I2(8)$
1	(10)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$\vee E(3,4,6,7,9)$

$\dashv$:

1	(1)	$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	A
2	(2)	$P \wedge R$	A
2	(3)	P	$\wedge E1(2)$
2	(4)	R	$\wedge E2(2)$
2	(5)	$P \vee Q$	$\vee I1(3)$
2	(6)	$(P \vee Q) \wedge R$	$\wedge I(5,4)$
7	(7)	$Q \wedge R$	A
7	(8)	Q	$\wedge E1(7)$
7	(9)	R	$\wedge E2(7)$
7	(10)	$P \vee Q$	$\vee I2(8)$
7	(11)	$(P \vee Q) \wedge R$	$\wedge I(10,9)$
1	(12)	$P \wedge (Q \vee R)$	$\vee E(1,2,6,7,11)$

□

Theorem 27 (Distributivgesetz 2 (Dis))**.** $P \vee (Q \wedge R) \dashv\vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$P \vee (Q \wedge R)$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee Q$	$\vee I1(2)$
2	(4)	$P \vee R$	$\vee I1(2)$
2	(5)	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$\wedge I(3,4)$
6	(6)	$Q \wedge R$	A
6	(7)	Q	$\wedge E1(6)$
6	(8)	R	$\wedge E2(6)$
6	(9)	$P \vee Q$	$\vee I2(7)$
6	(10)	$P \vee R$	$\vee I2(8)$
6	(11)	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$\wedge I(9,10)$
1	(12)	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$\vee E(1,2,5,6,11)$

$\dashv$:

1	(1)	$(P \lor Q) \land (P \lor R)$	A
1	(2)	$P \lor Q$	$\land E1(1)$
1	(3)	$P \lor R$	$\land E2(1)$
4	(4)	P	A
4	(5)	$P \lor (Q \land R)$	$\lor I1(4)$
6	(6)	Q	A
7	(7)	R	A
6, 7	(8)	$Q \land R$	$\land I(6,7)$
6, 7	(9)	$P \lor (Q \land R)$	$\lor I2(8)$
1, 7	(10)	$P \lor (Q \land R)$	$\lor E(2,4,5,6,9)$
1	(11)	$P \lor (Q \land R)$	$\lor E(3,4,5,7,10)$

□

Theorem 28 (Distributivgesetz 2 (Dis))**.** $(P \land Q) \lor R \dashv\vdash (P \lor R) \land (Q \lor R)$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$(P \land Q) \lor R$	A
2	(2)	R	A
2	(3)	$P \lor R$	$\lor I2(2)$
2	(4)	$Q \lor R$	$\lor I2(2)$
2	(5)	$(P \lor R) \land (Q \lor R)$	$\land I(3,4)$
6	(6)	$P \land Q$	A
6	(7)	P	$\land E1(6)$
6	(8)	Q	$\land E2(6)$
6	(9)	$P \lor R$	$\lor I1(7)$
6	(10)	$Q \lor R$	$\lor I1(8)$
6	(11)	$(P \lor Q) \land (P \lor R)$	$\land I(9,10)$
1	(12)	$(P \lor Q) \land (P \lor R)$	$\lor E(1,2,5,6,11)$

$\dashv$:

1	(1)	$(P \lor R) \land (Q \lor R)$	A
1	(2)	$P \lor R$	$\land E1(1)$
1	(3)	$Q \lor R$	$\land E2(1)$
4	(4)	R	A
4	(5)	$(P \land Q) \lor R$	$\lor I2(4)$
6	(6)	P	A
7	(7)	Q	A
6, 7	(8)	$P \land Q$	$\land I(6,7)$
6, 7	(9)	$(P \land Q) \lor R$	$\lor I1(8)$
1, 7	(10)	$(P \land Q) \lor R$	$\lor E(2,4,5,6,9)$
1	(11)	$(P \land Q) \lor R$	$\lor E(3,4,5,7,10)$

□

Theorem 29 (Materielle Implikation (MI))**.** $(P \to Q) \dashv\vdash \neg P \lor Q$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$P \to Q$	A
	(2)	$\neg P \vee P$	LEM
3	(3)	$\neg P$	A
3	(4)	$\neg P \vee Q$	$\vee I1(3)$
5	(5)	P	A
1, 5	(6)	Q	$\to E(1,5)$
1, 5	(7)	$\neg P \vee Q$	$\vee I2(6)$
1	(8)	$\neg P \vee Q$	$\vee E(2,3,4,5,7)$

$\dashv$:

1	(1)	$\neg P \vee Q$	A
2	(2)	P	A
3	(3)	$\neg Q$	A
2	(4)	$\neg\neg P$	$DN(2)$
2, 3	(5)	$\neg\neg P \wedge \neg Q$	$\wedge I(4,3)$
2, 3	(6)	$\neg(\neg P \vee Q)$	$DeM(5)$
1, 2, 3	(6)	$\perp$	$\perp I(1,6)$
1, 2	(7)	Q	$\neg E(3,6)$
1	(8)	$P \to Q$	$\to I(2,7)$

□

Theorem 30 (Implikation-Negations-Regel (IN))**.** $\neg(P \to Q) \dashv\vdash P \wedge \neg Q$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\neg(P \to Q)$	A
	(2)	$P \to Q \leftrightarrow \neg P \vee Q$	$MI()$
1	(3)	$\neg(\neg P \vee Q)$	$MT(1,2)$
1	(4)	$\neg\neg P \wedge \neg Q$	$DeM(3)$
1	(5)	$\neg\neg P$	$\wedge E1(4)$
1	(6)	P	$DN(5)$
1	(7)	Q	$\wedge E2(4)$
1	(8)	$P \wedge Q$	$\wedge I(6,7)$

$\dashv$:

1	(1)	$P \wedge \neg Q$	A
1	(2)	P	$\wedge E1(1)$
1	(3)	$\neg Q$	$\wedge E2(1)$
1	(4)	$\neg\neg P$	$DN(2)$
1	(5)	$\neg\neg P \wedge \neg Q$	$\wedge I(4,3)$
1	(6)	$\neg(\neg P \vee Q)$	$DeM(5)$
	(7)	$P \to Q \leftrightarrow \neg P \vee Q$	$MI()$
1	(8)	$\neg(P \to Q)$	$MT(6,7)$

□

Theorem 31 (Erweiterte Implikationseinführung ($\to I$))**.** $Q \vdash P \to Q$

Beweis.

1	(1)	Q	A
1	(2)	$\neg P \vee Q$	$\vee I1(1)$
1	(3)	$P \to Q$	$MI(2)$

$\square$

Theorem 32 (Erweiterte Implikationseinführung ($\to I$)). $\neg P \vdash P \to Q$

Beweis.

1	(1)	$\neg P$	A
1	(2)	$\neg P \vee Q$	$\vee I2(1)$
1	(3)	$P \to Q$	$MI(2)$

$\square$

Theorem 33 (Äquivalenz der Negation 1 (EqCP)). $P \leftrightarrow Q \dashv\vdash \neg P \leftrightarrow \neg Q$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$P \leftrightarrow Q$	A
1	(2)	$P \to Q$	$\leftrightarrow E1(1)$
1	(3)	$Q \to P$	$\leftrightarrow E2(1)$
1	(4)	$\neg Q \to \neg P$	$CP(2)$
1	(5)	$\neg P \to \neg Q$	$CP(3)$
1	(6)	$\neg P \leftrightarrow \neg Q$	$\leftrightarrow I(4,5)$

$\dashv$:

1	(1)	$\neg P \leftrightarrow \neg Q$	A
1	(2)	$\neg P \to \neg Q$	$\leftrightarrow E1(1)$
1	(3)	$\neg Q \to \neg P$	$\leftrightarrow E2(1)$
1	(4)	$Q \to P$	$CP(2)$
1	(5)	$P \to Q$	$CP(3)$
1	(6)	$P \leftrightarrow Q$	$\leftrightarrow I(4,5)$

$\square$

Theorem 34 (Äquivalenz der Negation (EqCP)). $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \dashv\vdash \forall x(\neg P(x) \leftrightarrow \neg Q(x))$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$	A
1	(2)	$P(a) \leftrightarrow Q(a)$	$\forall E(1)$
1	(3)	$\neg P(a) \leftrightarrow \neg Q(a)$	$EqCP(2)$
1	(4)	$\forall x(\neg P(x) \leftrightarrow \neg Q(x))$	$\forall I(3)$

$\dashv$:

1	(1)	$\forall x(\neg P(x) \leftrightarrow \neg Q(x))$	A
1	(2)	$\neg P(a) \leftrightarrow \neg Q(a)$	$\forall E(1)$
1	(3)	$P(a) \leftrightarrow Q(a)$	$EqCP(2)$
1	(4)	$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$	$\forall I(3)$

$\square$

Theorem 35 (Beschreibung der Äquivalenz (Df.Eq))**.** $P \leftrightarrow Q \dashv\vdash (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$P \leftrightarrow Q$	A
1	(2)	$P \rightarrow Q$	$\leftrightarrow E1(1)$
1	(3)	$Q \rightarrow P$	$\leftrightarrow E2(1)$
	(4)	$P \vee \neg P$	LEM
5	(5)	P	A
$1, 5$	(6)	Q	$\rightarrow E(2, 5)$
$1, 5$	(7)	$P \wedge Q$	$\wedge I(5, 6)$
$1, 5$	(8)	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	$\vee I1(7)$
9	(9)	$\neg P$	A
$1, 9$	(10)	$\neg Q$	$MT(3, 9)$
$1, 9$	(11)	$\neg P \wedge \neg Q$	$\wedge I(9, 10)$
$1, 9$	(12)	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	$\vee I2(11)$
1	(13)	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	$\vee E(4, 5, 8, 9, 12)$

$\dashv$:

1	(1)	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	A
2	(2)	$P \wedge Q$	A
2	(3)	P	$\wedge E1(2)$
2	(4)	Q	$\wedge E2(2)$
2	(5)	$P \rightarrow Q$	$\rightarrow I(4)$
2	(6)	$Q \rightarrow P$	$\rightarrow I(3)$
2	(7)	$P \leftrightarrow Q$	$\leftrightarrow I(5, 6)$
8	(8)	$\neg P \wedge \neg Q$	A
8	(9)	$\neg P$	$\wedge E1(8)$
8	(10)	$\neg Q$	$\wedge E2(8)$
8	(11)	$P \rightarrow Q$	$\rightarrow I(9)$
8	(12)	$Q \rightarrow P$	$\rightarrow I(10)$
8	(13)	$P \leftrightarrow Q$	$\leftrightarrow I(11, 12)$
1	(14)	$P \leftrightarrow Q$	$\vee E(1, 2, 7, 8, 13)$

□

Theorem 36 (Beschreibung der Äquivalenz (Df.Eq))**.**

$$P \leftrightarrow Q \dashv\vdash (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$P \leftrightarrow Q$	A
1	(2)	$P \rightarrow Q$	$\leftrightarrow E1(1)$
1	(3)	$Q \rightarrow P$	$\leftrightarrow E2(1)$
1	(4)	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	$\wedge I(2, 3)$

$\dashv$:

1	(1)	$(P \to Q) \land (Q \to P)$	A
1	(2)	$P \to Q$	$\land E1(1)$
1	(3)	$Q \to P$	$\land E2(1)$
1	(4)	$P \leftrightarrow Q$	$\leftrightarrow I(2,3)$

□

Theorem 37 (Beschreibung der Äquivalenz (Df.Eq)).

$$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \dashv\vdash \forall x(P(x) \to Q(x)) \land \forall x(Q(x) \to P(x))$$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$	A
1	(2)	$P(a) \leftrightarrow Q(a)$	$\forall E(1)$
1	(3)	$P(b) \leftrightarrow Q(b)$	$\forall E(1)$
1	(4)	$P(a) \to Q(a)$	$\leftrightarrow E1(2)$
1	(5)	$Q(b) \to P(b)$	$\leftrightarrow E2(3)$
1	(6)	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	$\forall I(4)$
1	(7)	$\forall x(Q(x) \to P(x))$	$\forall I(5)$
1	(8)	$\forall x(Q(x) \to P(x)) \land \forall x(P(x) \to Q(x))$	$\land I(6,7)$

$\dashv$:

1	(1)	$\forall x(P(x) \to Q(x)) \land \forall x(Q(x) \to P(x))$	A
1	(2)	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	$\land E1(1)$
1	(3)	$\forall x(Q(x) \to P(x))$	$\land E2(1)$
1	(4)	$P(a) \to Q(a)$	$\forall E(2)$
1	(5)	$Q(a) \to P(a)$	$\forall E(3)$
1	(6)	$P(a) \leftrightarrow Q(a)$	$\leftrightarrow I(4,5)$
1	(7)	$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$	$\forall I(6)$

□

Theorem 38 (Exklusiv-Oder-Äquivalenz (EOEq)).

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \dashv\vdash (\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q)$$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	A
	(2)	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \to Q) \land (Q \to P))$	$Df.Eq()$
1	(3)	$\neg((P \to Q) \land (Q \to P))$	$MT(1,2)$
1	(4)	$\neg(P \to Q) \lor \neg(Q \to P)$	$DeM(3)$
5	(5)	$\neg(P \to Q)$	A
5	(6)	$P \land \neg Q$	$IN(3)$
5	(7)	$(\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q)$	$\lor I2(6)$
8	(8)	$\neg(Q \to P)$	A
8	(9)	$Q \land \neg P$	$IN(8)$
8	(10)	$\neg P \land Q$	$\land Komm.(9)$
8	(11)	$(\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q)$	$\lor I1(10)$
1	(12)	$(\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q)$	$\lor E(4,5,7,8,11)$

$\dashv$:

1	(1)	$(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$	A
2	(2)	$(\neg P \wedge Q)$	A
2	(3)	$(Q \wedge \neg P)$	$\wedge Komm.(2)$
2	(4)	$\neg(Q \rightarrow P)$	$IN(3)$
2	(5)	$\neg(P \rightarrow Q) \vee \neg(Q \rightarrow P)$	$\vee I2(4)$
6	(6)	$(P \wedge \neg Q)$	A
6	(7)	$\neg(P \rightarrow Q)$	$IN(6)$
6	(8)	$\neg(P \rightarrow Q) \vee \neg(Q \rightarrow P)$	$\vee I1(7)$
1	(9)	$\neg(P \rightarrow Q) \vee \neg(Q \rightarrow P)$	$\vee E(1,2,5,6,8)$
1	(10)	$\neg((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$	$DeM(9)$
	(11)	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$	$Df.Eq()$
1	(12)	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$MT(10,11)$

□

Theorem 39 (Implikationstransitivität $(\rightarrow T)$)**.** $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$

Beweis.

1	(1)	$A \rightarrow B$	A
2	(2)	$B \rightarrow C$	A
3	(3)	A	A
1, 3	(4)	B	$\rightarrow E(1,3)$
1, 2, 3	(5)	C	$\rightarrow E(2,4)$
1, 2	(6)	$A \rightarrow C$	$\rightarrow I(3,5)$

□

Theorem 40 (Äquivalenztransitivität$(\leftrightarrow T)$)**.** $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \vdash A \leftrightarrow C$

Beweis.

1	(1)	$A \leftrightarrow B$	A
2	(2)	$B \leftrightarrow C$	A
1	(3)	$A \rightarrow B$	$\leftrightarrow E1(1)$
1	(4)	$B \rightarrow A$	$\leftrightarrow E2(1)$
2	(5)	$B \rightarrow C$	$\leftrightarrow E1(2)$
2	(6)	$C \rightarrow B$	$\leftrightarrow E2(2)$
1, 2	(7)	$A \rightarrow C$	$\rightarrow T(3,5)$
1, 2	(8)	$C \rightarrow A$	$\rightarrow T(4,6)$
1, 2	(9)	$A \leftrightarrow C$	$\leftrightarrow I(7,8)$

□

Theorem 41 (Beschreibung des Existenzquantors$(Df.\exists)$)**.** $\exists x(P(x)) \dashv\vdash \neg\forall x(\neg(P(x))$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\exists x(P(x))$	A
2	(2)	$P(a)$	A
3	(3)	$\forall x(\neg(P(x)))$	A
3	(4)	$\neg(P(a)$	$\forall E(3)$
2, 3	(5)	$\perp$	$\perp I(2,4)$
2	(6)	$\neg\forall x(\neg P(x))$	$\neg I(3,5)$
1	(7)	$\neg\forall x(\neg P(x))$	$\exists E(1,2,6)$

$\dashv$:

1	(1)	$\neg\forall x(\neg P(x))$	A
2	(2)	$\neg\exists x(P(x))$	A
3	(3)	$P(a)$	A
3	(4)	$\exists x(P(x))$	$\exists I(3)$
2, 3	(5)	$\perp$	$\perp I(2,4)$
2	(6)	$\neg P(a)$	$\neg I(3,5)$
2	(7)	$\forall x(\neg P(x))$	$\forall I(6)$
1, 2	(8)	$\perp$	$\perp I(1,7)$
1	(9)	$\exists x(P(x))$	$\neg E(2,8)$

□

Theorem 42 (Beschreibung des Existenzquantors($Df.\exists$))**.** $\exists x(\neg P(x)) \dashv\vdash \neg\forall x(P(x))$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\exists x(\neg P(x))$	A
2	(2)	$\neg P(a)$	A
3	(3)	$\forall x(P(x))$	A
3	(4)	$P(a)$	$\forall E(3)$
2, 3	(5)	$\perp$	$\perp I(2,4)$
2	(6)	$\neg\forall x(P(x))$	$\neg I(3,5)$
1	(7)	$\neg\forall x(P(x))$	$\exists E(1,2,6)$

$\dashv$:

1	(1)	$\neg\forall x(P(x))$	A
2	(2)	$\neg\exists x(\neg P(x))$	A
3	(3)	$\neg P(a)$	A
3	(4)	$\exists x(\neg P(x))$	$\exists I(3)$
2, 3	(5)	$\perp$	$\perp I(2,4)$
2	(6)	$P(a)$	$\neg E(3,5)$
3	(7)	$\forall x(P(x))$	$\forall I(6)$
1, 3	(8)	$\perp$	$\perp I(1,7)$
1	(9)	$\exists x(P(x))$	$\neg E(2,8)$

□

Theorem 43 (Beschreibung des Existenzquantors($Df.\exists$))**.** $\neg\forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \dashv\vdash \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\neg\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$	A
1	(2)	$\exists x \neg(P(x) \to \neg Q(x))$	$\exists Df.(1)$
3	(3)	$\neg(P(a) \to \neg Q(a))$	A
3	(4)	$P(a) \wedge \neg\neg Q(a)$	$DeM(Imp)(3)$
3	(5)	$P(a)$	$\wedge E1(4)$
3	(6)	$\neg\neg Q(a)$	$\wedge E2(4)$
3	(7)	$Q(a)$	$DN(6)$
3	(8)	$P(a) \wedge Q(a)$	$\wedge I(5,7)$
3	(9)	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\exists I(8)$
1	(10)	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	$\exists I(2,3,9)$

$\dashv$:

1	(1)	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	A
2	(2)	$P(a) \wedge Q(a)$	A
2	(3)	$P(a)$	$\wedge E1(2)$
2	(4)	$Q(a)$	$\wedge E2(2)$
2	(5)	$\neg\neg Q(a)$	$DN(4)$
2	(6)	$P(a) \wedge \neg\neg Q(a)$	$\wedge I(3,5)$
2	(7)	$P(a) \to \neg Q(a)$	$DeM(Imp)(6)$
2	(8)	$\exists x(P(x) \to \neg Q(x))$	$\exists I(7)$
2	(9)	$\neg\forall x(\neg(P(x) \to \neg Q(x)))$	$\exists Df.(8)$
1	(10)	$\neg\forall x(\neg(P(x) \to \neg Q(x)))$	$\exists I(1,2,9)$

□

Theorem 44 (Beschreibung des Allquantors($Df.\forall$))**.** $\forall x(P(x)) \dashv\vdash \neg\exists x \neg(P(x))$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\forall x(P(x))$	A
2	(2)	$\exists x(\neg P(x))$	A
3	(3)	$\neg P(a)$	A
1	(4)	$P(a)$	$\forall E(1)$
1, 3	(5)	$\perp$	$\perp I(3,4)$
3	(6)	$\neg\forall x(P(x))$	$\neg I(1,5)$
2	(7)	$\neg\forall x(P(x))$	$\exists E(2,3,6)$
1, 2	(8)	$\perp$	$\perp I(1,7)$
1	(7)	$\neg\exists x(\neg P(x))$	$\neg I(2,8)$

$\dashv$:

1	(1)	$\neg\exists x(\neg P(x))$	A
2	(2)	$\neg P(a)$	A
2	(3)	$\exists x(\neg P(x))$	$\exists I(2)$
1, 2	(4)	$\perp$	$\perp I(1,3)$
1	(5)	$P(a)$	$\neg E(2,4)$
1	(6)	$\forall x(P(x))$	$\forall I(5)$

□

Theorem 45 (Beschreibung des Allquantors($Df.\forall$)). $\forall x(\neg P(x)) \dashv\vdash \neg\exists x(P(x))$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\forall x(\neg P(x))$	A
2	(2)	$\exists x(P(x))$	A
3	(3)	$P(a)$	A
1	(4)	$\neg P(a)$	$\forall E(1)$
1, 3	(5)	$\bot$	$\bot I(3,4)$
3	(6)	$\neg\exists x(P(x))$	$\neg I(2,5)$
1	(7)	$\neg\exists x(P(x))$	$\forall E(1,6)$

$\dashv$:

1	(1)	$\neg\exists x(P(x))$	A
2	(2)	$P(a)$	A
2	(3)	$\exists x(P(x))$	$\exists I(2)$
1, 2	(4)	$\bot$	$\bot I(1,3)$
1	(5)	$\neg P(a)$	$\neg E(2,4)$
1	(6)	$\forall x(\neg P(x))$	$\forall I(5)$

□

Theorem 46 (Beschreibung des Allquantors($Df.\forall$)). $\forall x(P(x) \to Q(x)) \dashv\vdash \neg\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	A
2	(2)	$\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$	A
2	(3)	$P(a) \land \neg Q(a)$	$\exists E(2)$
2	(4)	$P(a)$	$\land E1(3)$
2	(5)	$\neg Q(a)$	$\land E2(3)$
1	(6)	$P(a) \to Q(a)$	$\forall E(1)$
1, 2	(7)	$Q(a)$	$\to E(4,6)$
1, 2	(8)	$\bot$	$\bot I(5,7)$
1	(9)	$\neg\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$	$\neg I(2,9)$

$\dashv$:

1	(1)	$\neg\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$	A
1	(2)	$\forall x(\neg(P(x) \land \neg Q(x)))$	$\forall Df.(1)$
1	(3)	$\neg(P(a) \land \neg Q(a))$	$\forall E(2)$
1	(4)	$\neg P(a) \lor \neg\neg Q(a)$	$DeM(3)$
5	(5)	$\neg P(a)$	A
5	(6)	$\neg P(a) \lor Q(a)$	$\lor I1(5)$
7	(7)	$\neg\neg Q(a)$	A
7	(8)	$Q(a)$	$DN(7)$
7	(9)	$\neg P(a) \lor Q(a)$	$\lor I2(7)$
1	(10)	$\neg P(a) \lor Q(a)$	$\lor E(4,5,6,7,9)$
1	(11)	$P(a) \to Q(a)$	$MI(10)$
1	(12)	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	$\forall I(11)$

□

3.1.1 Theoreme zur Quantorendistribution

Die folgenden Regeln werden im folgenden Verlauf mit ($Dis.\forall/\exists$) abgekürzt.

Theorem 47 (Implikation aus universeller Äquivalenz I ($\leftrightarrow \forall E1$))**.**

$$P(a), \forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \vdash Q(a)$$

Beweis.

1	(1)	$P(a)$	A
2	(2)	$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$	A
2	(3)	$P(a) \leftrightarrow Q(a)$	$\forall E(2)$
$1,2$	(4)	$Q(a)$	$\leftrightarrow E1(1,3)$

□

Theorem 48 (Implikation aus universeller Äquivalenz I ($\leftrightarrow \forall E2$))**.**

$$Q(a), \forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \vdash P(a)$$

Beweis.

1	(1)	$Q(a)$	A
2	(2)	$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$	A
2	(3)	$P(a) \leftrightarrow Q(a)$	$\forall E(2)$
$1,2$	(4)	$Q(a)$	$\leftrightarrow E2(1,3)$

□

Theorem 49 (Allquantor und Implikation)**.** $\forall x(P \rightarrow F(x)) \dashv\vdash P \rightarrow \forall x(F(x))$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\forall x(P \rightarrow F(x))$	A
2	(2)	P	A
$1,2$	(3)	$P \rightarrow F(x)$	$\forall E(1)$
$1,2$	(4)	$F(x)$	$\rightarrow E(2,3)$
2	(5)	$\forall x(F(x))$	$\forall I(4)$
1	(6)	$P \rightarrow \forall x(F(x))$	$\rightarrow I(2,5)$

$\dashv$:

1	(1)	$P \rightarrow \forall x(F(x))$	A
2	(2)	P	A
1	(3)	$\forall x(F(x))$	$\rightarrow E(1,2)$
$1,2$	(4)	$F(x)$	$\forall E(3)$
2	(5)	$P \rightarrow F(x)$	$\rightarrow I(2,4)$
1	(6)	$\forall x(P \rightarrow F(x))$	$\forall I(5)$

□

Theorem 50 (Allquantor und Konjunktion)**.** $\forall x(P \wedge F(x)) \dashv\vdash P \wedge \forall x(F(x))$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\forall x(P \wedge F(x))$	A
1	(2)	$P \wedge F(x)$	$\forall E(1)$
1	(3)	P	$\wedge E1(2)$
1	(4)	$F(x)$	$\wedge E2(2)$
1	(5)	$\forall x(F(x))$	$\forall I(4)$
1	(6)	$P \wedge \forall x(F(x))$	$\wedge I(3,5)$

$\dashv$:

1	(1)	$P \wedge \forall x(F(x))$	A
1	(2)	P	$\wedge E1(1)$
1	(3)	$\forall x(F(x))$	$\wedge E2(1)$
1	(4)	$F(x)$	$\forall E(3)$
1	(5)	$P \wedge F(x)$	$\wedge I(2,4)$
1	(6)	$\forall x(P \wedge F(x))$	$\forall I(5)$

□

Theorem 51 (Existenzquantor und Konjunktion)**.** $\exists x(P \wedge F(x)) \dashv\vdash P \wedge \exists x(F(x))$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\exists x(P \wedge F(x))$	A
1	(2)	$P \wedge F(x)$	$\exists E(1)$
1	(3)	P	$\wedge E1(2)$
1	(4)	$F(x)$	$\wedge E2(2)$
1	(5)	$\exists x(F(x))$	$\exists I(4)$
1	(6)	$P \wedge \exists x(F(x))$	$\wedge I(3,5)$

$\dashv$:

1	(1)	$P \wedge \exists x(F(x))$	A
1	(2)	P	$\wedge E1(1)$
1	(3)	$\exists x(F(x))$	$\wedge E2(1)$
1	(4)	$F(x)$	$\exists E(3)$
1	(5)	$P \wedge F(x)$	$\wedge I(2,4)$
1	(6)	$\exists x(P \wedge F(x))$	$\exists I(5)$

□

Theorem 52 (Allquantor und Disjunktion)**.** $\forall x(P \vee F(x)) \dashv\vdash P \vee \forall x(F(x))$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\forall x(P \vee F(x))$	A
2	(2)	$\neg(P \vee \forall x(F(x)))$	A
2	(3)	$\neg P \wedge \neg\forall x(F(x))$	$DeM(2)$
2	(4)	$\neg P \wedge \neg\forall x(F(x))$	$DeM(2)$
2	(5)	$\neg P$	$\wedge E1(4)$
2	(6)	$\neg\forall x(F(x))$	$\wedge E2(4)$
2	(7)	$\exists x(\neg F(x))$	$Df.\exists(6)$
2	(8)	$\neg F(a)$	$\exists E(7)$
1	(9)	$P \vee F(a)$	$\forall E(8)$
10	(10)	P	A
$2, 10$	(11)	$\perp$	$\perp I(5, 10)$
10	(12)	$P \vee \forall x(F(x)$	$\neg E(2, 11)$
13	(13)	$F(a)$	A
$2, 13$	(14)	$\perp$	$\perp I(13, 8)$
13	(15)	$P \vee \forall x(F(x)$	$\neg E(2, 14)$
1	(10)	$P \vee \forall x(F(x)$	$\vee E(9, 10, 12, 13, 15)$

$\dashv$:

1	(1)	$P \vee \forall x(F(x))$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee F(x)$	$\vee I1(2)$
2	(4)	$\forall x(P \vee F(x))$	$\forall I(3)$
5	(5)	$\forall x(F(x))$	A
5	(6)	$F(x)$	$\forall E(4)$
5	(7)	$P \vee F(x)$	$\vee I2(6)$
5	(8)	$\forall x(P \vee F(x))$	$\forall I(7)$
5	(9)	$\forall x(P \vee F(x))$	$\vee E(1, 2, 4, 5, 8)$

$\square$

Theorem 53 (Existenzquantor und Disjunktion)**.** $\exists x(P \vee F(x)) \dashv\vdash P \vee \exists x(F(x))$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\exists x(P \vee F(x))$	A
2	(2)	$P \vee F(a)$	A
3	(3)	P	A
$1, 3$	(4)	$P \vee \exists x(F(x))$	$\vee I1(3)$
5	(5)	$F(a)$	A
$1, 5$	(6)	$\exists x(F(x))$	$\exists I(5)$
$1, 5$	(7)	$P \vee \exists x(F(x))$	$\vee I2(6)$
2	(8)	$P \vee \exists x(F(x))$	$\vee E(2, 3, 4, 5, 7)$
1	(9)	$P \vee \exists x(F(x))$	$\exists E(1, 2, 8)$

$\dashv$:

1	(1)	$P \vee \exists x(F(x))$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee F(x)$	$\vee I1(2)$
2	(4)	$\exists x(P \vee F(x))$	$\exists I(3)$
5	(5)	$\exists x(F(x))$	A
5	(6)	$F(a)$	$\exists E(5)$
5	(7)	$P \vee F(a)$	$\vee I2(6)$
5	(8)	$\exists x(P \vee F(x))$	$\exists I(7)$
1	(9)	$\exists x(P \vee F(x))$	$\vee E(1,2,4,5,8)$

$\square$

Theorem 54 (Existenzquantor und Implikation)**.** $\exists x(F(x) \to P) \dashv\vdash \forall x(F(x)) \to P$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\exists x(F(x) \to P)$	A
2	(2)	$F(a) \to P$	A
3	(3)	$\forall x(F(x))$	A
3	(4)	$F(a)$	$\forall E(3)$
2, 3	(5)	P	$\to E(2,4)$
2	(6)	$\forall x(F(x)) \to P$	$\to I(3,5)$
1	(7)	$\forall x(F(x)) \to P$	$\exists E(1,2,6)$

$\dashv$:

1	(1)	$\forall x(F(x)) \to P$	A
2	(2)	$\forall x(F(x))$	A
1	(3)	P	$\to E(1,2)$
1	(4)	$F(a) \to P$	$\to I(3)$
1	(5)	$\exists x(F(x) \to P)$	$\exists I(4)$

$\square$

Theorem 55 (Allquantor-Distribution ($\forall\wedge$))**.** $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \dashv\vdash \forall x(F(x)) \wedge \forall x(G(x))$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\forall x(F(x) \wedge G(x))$	A
1	(2)	$F(x) \wedge G(x)$	$\forall E(1)$
1	(3)	$F(x)$	$\wedge E1(2)$
1	(4)	$\forall x(F(x))$	$\forall I(3)$
1	(5)	$G(x)$	$\wedge E2(2)$
1	(6)	$\forall x(G(x))$	$\forall I(5)$
1	(7)	$\forall x(F(x)) \wedge \forall x(G(x))$	$\wedge I(3,5)$

$\dashv$:

1	(1)	$\forall x(F(x)) \wedge \forall x(G(x))$	A
1	(2)	$\forall x(F(x))$	$\wedge E1(1)$
1	(3)	$F(x)$	$\forall E(2)$
1	(4)	$\forall x(G(x))$	$\wedge E2(1)$
1	(5)	$G(x)$	$\forall E(4)$
1	(6)	$F(x) \wedge G(x)$	$\wedge I(3,5)$
1	(7)	$\forall x(F(x) \wedge G(x))$	$\forall I(6)$

□

Theorem 56 (Existenzquantor-Distribution $(\exists\vee)$)**.** $\exists x(F(x) \vee G(x)) \dashv\vdash \exists x(F(x)) \vee \exists x(G(x))$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\exists x(F(x) \vee G(x))$	A
2	(2)	$F(a) \vee G(a)$	A
3	(3)	$F(a)$	A
3	(4)	$\exists x(F(x))$	$\exists I(3)$
3	(5)	$\exists x(F(x)) \vee \exists x(G(x))$	$\vee I1(4)$
6	(6)	$G(a)$	A
6	(7)	$\exists x(G(x))$	$\exists I(6)$
6	(8)	$\exists x(F(x)) \vee \exists x(G(x))$	$\vee I2(7)$
2	(9)	$\exists x(F(x)) \vee \exists x(G(x))$	$\vee E(2,3,5,6,8)$
1	(10)	$\exists x(F(x)) \vee \exists x(G(x))$	$\exists E(1,2,9)$

$\dashv$:

1	(1)	$\exists x(F(x)) \vee \exists x(G(x))$	A
2	(2)	$\exists x(F(x))$	A
7	(11)	$\exists x(F(x) \vee G(x))$	$\exists E(7,8,9)$
3	(3)	$F(a)$	A
3	(4)	$F(a) \vee G(a)$	$\vee I1(3)$
3	(5)	$\exists x(F(x) \vee G(x))$	$\exists I(4)$
2	(6)	$\exists x(F(x) \vee G(x))$	$\exists I(2,3,5)$
7	(7)	$\exists x(G(x))$	A
8	(8)	$G(a)$	A
8	(9)	$F(a) \vee G(a)$	$\vee I2(8)$
8	(10)	$\exists x(F(x) \vee G(x))$	$\exists I(9)$
7	(11)	$\exists x(F(x) \vee G(x))$	$\exists E(7,8,9)$
1	(12)	$\exists x(F(x) \vee G(x))$	$\exists E(1,2,6,7,11)$

□

Theorem 57 (Vertauschung des Existenzquantors $(\exists \leftrightarrow \exists)$)**.** $\exists x \exists y F(x,y) \vdash \exists y \exists x F(x,y)$

Beweis.

1	(1)	$\exists x \exists y F(x,y)$	A
2	(2)	$\exists y F(a,y)$	A
3	(3)	$F(a,b)$	A
3	(4)	$\exists x F(x,b)$	$\exists I(3)$
3	(5)	$\exists y \exists x F(x,y)$	$\exists I(4)$
2	(6)	$\exists y \exists x F(x,y)$	$\exists E(2,3,5)$
1	(7)	$\exists y \exists x F(x,y)$	$\exists E(1,2,6)$

□

Theorem 58 (Vertauschung des Allquantors ($\forall \leftrightarrow \forall$)). $\forall x \forall y F(x,y) \vdash \forall y \forall x F(x,y)$

Beweis.

1	(1)	$\forall x \forall y F(x,y)$	A
1	(2)	$\forall y F(a,y)$	$\forall E(1)$
1	(3)	$F(a,b)$	$\forall E(2)$
1	(4)	$\forall x F(x,b)$	$\forall I(3)$
1	(5)	$\forall y \forall x F(x,y)$	$\forall I(4)$

□

3.1.2 Theoreme mit dem Identitätssymbol

Theorem 59 (Kommutativität der Identität (=Komm.(...)). $a = b \vdash b = a$

Beweis.

1	(1)	$a = b$	A
	(2)	$a = a$	$=I$
1	(3)	$b = a$	$=E(1,2)$

□

Theorem 60 (Transitivität der Identität (=Trans.(...)). *a)* $a = b, b = c \vdash a = c$

b) $a = b, c = b \vdash a = c$

Beweis. a)

1	(1)	$a = b$	A
2	(2)	$b = c$	A
1, 2	(3)	$a = c$	$= E(1,2)$

b)

1	(1)	$a = b$	A
2	(2)	$c = b$	A
1, 2	(3)	$a = c$	$= E(1,2)$

□

Theorem 61 (Identität und Substitution $(=, S)$)**.** $Fa \dashv\vdash \exists x(x = a \wedge Fx)$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	Fa	A
	(2)	$a = a$	$= I$
1	(3)	$a = a \wedge Fa$	$\wedge I(2,1)$
1	(4)	$\exists x(x = a \wedge Fx)$	$\exists I(3)$

$\dashv$:

1	(1)	$\exists x(x = a \wedge Fx)$	A
2	(2)	$b = a \wedge Fb$	A
2	(3)	$b = a$	$\wedge E1(2)$
2	(4)	Fb	$\wedge E2(2)$
2	(5)	Fa	$= E(3,4)$
1	(6)	Fa	$\exists E(1,2,5)$

□

Einführungs- und Eliminierungsregeln für die Identität und Substitution

Das Symbol := wird in der mathematischen Logik verwendet, um eine Definition oder eine explizite Zuweisung auszudrücken. Wenn wir sagen, $t := u$, meinen wir, dass t durch u definiert wird oder dass t identisch zu u ist, basierend auf einer Definition oder Zuweisung. Diese Art der Zuweisung ist besonders nützlich in der Konstruktion mathematischer Beweise, um Klarheit über die Beziehung zwischen verschiedenen Entitäten zu schaffen.

Die Eliminierungsregel, die aus dem Theorem der Identität und Substitution folgt, besagt, dass aus den Aussagen $t := u$ und der Aussage $P(t)$, auf $P(u)$ geschlossen werden kann, ohne dass $P(t)$ von der Annahme $t := u$ abhängt. Die Regel wird wie folgt formuliert:

1	(1)	$t := u$	A
j	(2)	$P(t)$	...
j	(3)	$P(u)$	$:= E(1,2)$

1	(1)	$t := u$	A
j	(2)	$P(u)$	...
j	(3)	$P(t)$	$:= E(1,2)$

Hierbei ist $:= E(...)$ die Regel für Identitätssubstitution, und i, j sind Listen von Annahmen, wobei j die Annahme $t := u$ nicht enthält.

Die Einführungsregel, die aus dem Theorem der Identität und Substitution abgeleitet wird, erlaubt es, von der Aussage $P(u)$ auf $t := u \wedge P(t)$ zu schließen, unter der Voraussetzung, dass t eine neue Variable ist, die in den bisherigen Schritten des Beweises noch nicht verwendet wurde:

j	(1)	$P(u)$	A
j	(2)	$t := u \wedge P(t)$	$:= I(1)$

Hierbei ist $:= I(...)$ die Einführungs-Regel für Identitätssubstitution, und j ist eine Liste von Annahmen, die $P(u)$ enthält.

Zusammenfassung der bewiesenen Sätze

In diesem Kapitel fassen wir die bewiesenen Sätze aus dem vorherigen Kapitel zusammen.

- **Tautologie aus der Regel R der Aussage $P \dashv\vdash Q$ (R)**
  - Gelte $P \dashv\vdash Q$, dann gilt auch $\vdash P \leftrightarrow Q$.
- **Idempotenz der Disjunktion ($Idem.\vee$):**
  - $P \vee P \vdash P$
- **Idempotenz der Konjunktion ($Idem.\wedge$):**
  - $P \vee P \vdash P$
- **Kommutativgesetz der Disjunktion ($Komm.\vee$):**
  - $P \vee Q \vdash Q \vee P$
- **Kommutativgesetz der Konjunktion ($Komm.\wedge$):**
  - $P \wedge Q \vdash Q \wedge P$
- **Assoziativgesetz der Disjunktion ($Ass.\vee$):**
  - $(P \vee (Q \vee R)) \dashv\vdash ((P \vee Q) \vee R)$
- **Assoziativgesetz der Konjunktion ($Ass.\wedge$):**
  - $(P \wedge (Q \wedge R)) \dashv\vdash ((P \wedge Q) \wedge R)$
- **Modus Tollens (MT):**
  - $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$
  - $\neg P \rightarrow \neg Q, Q \vdash P$
  - $P \leftrightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$
  - $\neg P \leftrightarrow \neg Q, Q \vdash P$

- **Kontraposition (CP):**
  - $P \to Q \dashv\vdash \neg Q \to \neg P$
- **Regel der doppelten Negation (DN):**
  - $P \dashv\vdash \neg\neg P$
- **Gesetz des ausgeschlossenen Dritten (LEM):**
  - $\vdash P \vee \neg P$
- **De Morgansche Regeln (DeM):**
  - $\neg(P \wedge Q) \dashv\vdash \neg P \vee \neg Q$
  - $\neg(P \vee Q) \dashv\vdash \neg P \wedge \neg Q$
- **Distributivgesetze (Dis):**
  - $P \wedge (Q \vee R) \dashv\vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
  - $P \vee (Q \wedge R) \dashv\vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- **Beschreibung von Implikation (MI()):**
  - $(P \to Q) \dashv\vdash \neg P \vee Q$
- **Erweiterte Implikationseinführung ($\to I$):**
  - $Q \vdash P \to Q$
  - $\neg P \vdash P \to Q$
- **Äquivalenz der Negation (EqCP):**
  - $P \leftrightarrow Q \dashv\vdash \neg P \leftrightarrow \neg Q$
  - $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \dashv\vdash \forall x(\neg P(x) \leftrightarrow \neg Q(x))$
- **Beschreibung der Äquivalenz (Df.Eq):**
  - $P \leftrightarrow Q \dashv\vdash (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
  - $P \leftrightarrow Q \dashv\vdash (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
  - $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \dashv\vdash \forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \to P(x))$
- **Implikationstransitivität ($\to T$)**
  - $A \to B, B \to C \vdash A \to C$
- **Äquivalenztransitivität ($\leftrightarrow T$)**
  - $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \vdash A \leftrightarrow C$
- **Beschreibung des Existenzquantors($Df.\exists$)**

- $\exists x(P(x)) \dashv\vdash \neg\forall x(\neg(P(x))$

- **Beschreibung des Allquantors($Df.\forall$)**
  - $\forall x(P(x)) \dashv\vdash \neg\exists x(\neg(P(x))$

- **Theoreme der Quantorendistribution ($Dis.\forall/\exists$)**
  - $\forall x(P \to F(x)) \dashv\vdash P \to \forall x(F(x))$
  - $\forall x(P \wedge F(x)) \dashv\vdash P \wedge \forall x(F(x))$
  - $\exists x(P \wedge F(x)) \dashv\vdash P \wedge \exists x(F(x))$
  - $\forall x(P \vee F(x)) \dashv\vdash P \vee \forall x(F(x))$
  - $\exists x(P \vee F(x)) \dashv\vdash P \vee \exists x(F(x))$
  - $\exists x(F(x) \to P) \dashv\vdash \forall x(F(x)) \to P$

Diese Sätze bilden die Grundlage für viele weitere Beweise in der Logik. Sie sind grundlegende Werkzeuge, die in vielen verschiedenen Kontexten angewendet werden können.

Kapitel 4

Mengenlehre

Die Mengenlehre ist ein fundamentaler Teil der Mathematik, der die Grundlage für viele andere Bereiche bildet. In diesem Kapitel werden wir die Zermelo-Fraenkel (ZF) Axiome der Mengenlehre einführen und diskutieren.

4.1 Das Extensionalitätsaxiom

Das erste Axiom, das wir betrachten, ist das Extensionalitätsaxiom (Ext). Es besagt, dass zwei Mengen gleich sind, wenn sie genau die gleichen Elemente haben. Formal ausgedrückt sagt man, dass für alle Mengen A und B gilt

$$A = B \dashv\vdash \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Dieses Axiom ist fundamental für die Definition von Gleichheit in der Mengenlehre.

Theorem 62 (Theorem über die Ungleichheit von Mengen)**.** *Für alle Mengen A und B gilt:*

$$A \neq B \dashv\vdash \exists x(x \notin A \wedge x \in B) \vee \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$A \neq B$	A
	(2)	$A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$	Ext
1	(3)	$\neg\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$	$MT(1,2)$
1	(4)	$\exists x(\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B))$	$\exists Df.(3)$
5	(5)	$\neg(a \in A \leftrightarrow a \in B))$	A
5	(6)	$(a \notin A \wedge a \in B) \vee (a \in A \wedge a \notin B)$	$EOEq(5)$
5	(7)	$\exists x((x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B))$	$\exists I(6)$
5	(8)	$\exists x(x \notin A \wedge x \in B) \vee \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$	$\exists \vee (7)$
1	(9)	$\exists x(x \notin A \wedge x \in B) \vee \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$	$\exists E(5,6,8)$

$\dashv$:

1	(1)	$\exists x(x \notin A \wedge x \in B) \vee \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$	A
1	(2)	$\exists x((x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B))$	$\exists \vee (1)$
1	(3)	$(a \notin A \wedge a \in B) \vee (a \in A \wedge a \notin B)$	A
3	(4)	$\neg(a \in A \leftrightarrow a \in B)$	$EOEq(2)$
3	(5)	$\exists x(\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B))$	$\exists I(4)$
3	(6)	$\neg\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$	$\exists Df.(5)$
	(7)	$A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$	Ext
3	(8)	$A \neq B$	$MT(6,7)$
1	(9)	$A \neq B$	$\exists E(2,3,8)$

□

Regeln für die Gleichheit von Mengen

Das Extensionalitätsaxiom, oft dargestellt durch das Symbol =, definiert die Gleichheit von Mengen. Basierend auf diesem Axiom können wir zwei grundlegende Regeln für die Gleichheit von Mengen formulieren: die Einführungs- und die Eliminierungsregel.

Die Einführungsregel für die Gleichheit von Mengen ($= I$) besagt, dass wenn wir für jedes Element x zeigen können, dass x in beiden Mengen A und B enthalten ist oder nicht enthalten ist, dann können wir daraus schließen, dass A und B gleich sind.

$1, i$	(1)	$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$	A
i	(2)	$A = B$	$=_{Ext.} I(1)$

Die Eliminierungsregel für die Gleichheit von Mengen ($= E$) besagt, dass wenn wir wissen, dass A und B gleich sind und wir ein Element x in A haben, wir daraus schließen können, dass x auch in B enthalten ist, und umgekehrt.

i	(1)	$A = B$	...
j	(2)	$x \in A$	...
i, j	(3)	$x \in B$	$=_{Ext.} E1(1,2)$

i	(1)	$A = B$	...
j	(2)	$x \in B$	...
i, j	(3)	$x \in A$	$=_{Ext.} E2(1,2)$

i, j sind dabei Listen von Annahmen.

Regeln für die Ungleichheit von Mengen

Das Theorem über die Ungleichheit von Mengen definiert die Ungleichheit von Mengen. Basierend auf diesem Theorem können wir zwei grundlegende Regeln formulieren: die Einführungs- und die Eliminierungsregel.

Die Einführungsregel für die Ungleichheit von Mengen ($\neq I$) besagt, dass wenn wir ein Element x finden können, das entweder in A aber nicht in B, oder in B aber nicht in A enthalten ist, wir daraus schließen können, dass A und B ungleich sind.

i	(1)	$x \notin A \wedge x \in B$	...
i	(2)	$A \neq B$	$\neq SI1(1)$

i	(1)	$x \in A \wedge x \notin B$	...
i	(2)	$A \neq B$	$\neq SI2(1)$

Die Eliminationsregel für die Ungleichheit von Mengen $\neg E$ besagt, dass wenn wir wissen, dass A und B ungleich sind, wir daraus schließen können, dass es mindestens ein Element x gibt, das entweder nur in A oder nur in B enthalten ist.

i	(1)	$A \neq B$	A
i	(2)	$\exists x(x \notin A \wedge x \in B) \vee \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$	$\neq SE(1)$

4.2 Definition der Teilmenge und Beweis der Äquivalenz

Definition 4.2.1 (Teilmenge)**.** Für zwei Mengen A und B, sagen wir, dass A eine Teilmenge von B ist (geschrieben als $A \subseteq B$), wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist. Formal ausgedrückt:

$$\forall A \forall B(A \subseteq B \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)).$$

Regeln für die Teilmenge

Die Teilmenge, oft dargestellt durch das Symbol $\subseteq$, ist eine Beziehung zwischen zwei Mengen. Basierend auf unserer Definition für die Teilmenge, können wir zwei grundlegende Regeln für die Teilmenge einfügen: die Einführungs- und die Eliminierungsregel.

Die Einführungsregel für die Teilmenge ($\subseteq I$) besagt, dass wenn wir für jedes Element x aus einer Menge A zeigen können, dass x auch in einer Menge B enthalten ist, dann können wir daraus schließen, dass A eine Teilmenge von B ist. Dabei darf x in keiner der Annahmen aus i vorkommen.

1	(1)	$x \in A$	A
$1, i$	(2)	$x \in B$	...
i	(3)	$A \subseteq B$	$\subseteq I1(1,2)$

oder

i	(1)	$x \in A \rightarrow x \in B$	...
i	(2)	$A \subseteq B$	$\subseteq I2(1)$

Die Eliminierungsregel für die Teilmenge ($\subseteq E$) besagt, dass wenn wir wissen, dass A eine Teilmenge von B ist und wir ein Element x in A haben, wir daraus schließen können, dass x auch in B enthalten ist.

i	(1)	$x \in A$	...
j	(2)	$A \subseteq B$	...
i, j	(3)	$x \in B$	$\subseteq E(1,2)$

i, j sind dabei Listen von Annahmen.

Definition 4.2.2 (Keine Teilmenge)**.** Für zwei Mengen A und B, sagen wir, dass A keine Teilmenge von B ist (geschrieben als $A \nsubseteq B$), wenn es mindestens ein Element in A gibt, das nicht in B ist. Formal ausgedrückt:

$$A \nsubseteq B \leftrightarrow \neg(A \subseteq B).$$

Unter Verwendung dieser Definition und der gegebenen Regeln der Aussagenlogik und Prädikatenlogik können wir das folgende Argument beweisen:

Theorem 63 (Theorem über die Gleichheit von Mengen)**.** *Unter Verwendung des Extensionalitätsaxioms gilt für alle Mengen A und B:*

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \dashv\vdash A = B$$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$	A
1	(2)	$A \subseteq B$	$\wedge E1(1)$
1	(3)	$B \subseteq A$	$\wedge E2(2)$
4	(4)	$x \in A$	A
$1, 4$	(5)	$x \in B$	$\subseteq E(4,2)$
1	(6)	$x \in A \rightarrow x \in B$	$\rightarrow I(4,5)$
7	(7)	$x \in B$	A
$1, 7$	(8)	$x \in A$	$\subseteq E(7,3)$
1	(8)	$x \in B \rightarrow x \in A$	$\rightarrow I(7,8)$
1	(9)	$x \in A \leftrightarrow x \in B$	$\leftrightarrow I(6,8)$
1	(10)	$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$	$\wedge I(9)$
1	(11)	$A = B$	$=_{Ext.} I(10)$

$\dashv$:

1	(1)	$A = B$	A
2	(2)	$x \in A$	A
$1, 2$	(3)	$x \in B$	$=_{Ext.} E1(1,2)$
1	(3)	$A \subseteq B$	$\subseteq I1(1,2)$
4	(4)	$x \in B$	A
$1, 4$	(5)	$x \in A$	$=_{Ext.} E2(1,4)$
1	(6)	$B \subseteq A$	$\subseteq I1(4,5)$
1	(7)	$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$	$\wedge I(3,6)$

□

Regeln basierend auf der Definition der Mengenidentität

Das Theorem über die Gleichheit von Mengen stellt einen Zusammenhang zwischen der Gleichheit von Mengen und der Teilmenge her. Basierend auf diesem Theorem können wir Regeln für die Einführung und Eliminierung der Gleichheit von Mengen sowie der Teilmenge formulieren.

Die Einführungsregel für die Gleichheit von Mengen basierend auf der Teilmenge ($= I$) besagt, dass wenn wir zeigen können, dass A eine Teilmenge von B und B eine Teilmenge von A ist, dann können wir daraus schließen, dass A und B gleich sind.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & A \subseteq B & ... \\ j & (2) & B \subseteq A & ... \\ i,j & (3) & A = B & \subseteq, \supseteq E(1,2) \end{array}$$

Die Eliminierungsregel für die Gleichheit von Mengen basierend auf der Teilmenge ($= E$) besagt, dass wenn wir wissen, dass A und B gleich sind, dann können wir daraus schließen, dass A eine Teilmenge von B und B eine Teilmenge von A ist.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & A = B & ... \\ i & (2) & A \subseteq B & \subseteq, \supseteq I1(1) \\ i & (3) & B \subseteq A & \subseteq, \supseteq I2(1) \end{array}$$

i sind dabei Listen von Annahmen.

Theorem 64 (Transitivität von Teilmengen($\subseteq$(Trans.)). *Für alle Mengen A, B und C gilt: Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, dann $A \subseteq C$.*

$$A \subseteq B, B \subseteq C \vdash A \subseteq C$$

Beweis.

$$\begin{array}{llll} 1 & (1) & A \subseteq B & A \\ 2 & (2) & B \subseteq C & A \\ 3 & (3) & x \in A & A \\ 1,3 & (5) & x \in B & \subseteq E(3,1) \\ 1,2,3 & (6) & x \in C & \subseteq E(5,2) \\ 1,2 & (7) & A \subseteq C & \subseteq I1(3,6) \end{array}$$

□

4.3 Das Axiom der leeren Menge

Das Axiom der leeren Menge ($\emptyset$) in der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre besagt, dass es eine Menge gibt, die keine Elemente enthält. Formal ausgedrückt:

$$\vdash \exists O \forall x (x \notin O)$$

Dieses Axiom garantiert die Existenz der leeren Menge, die wir oft mit $\emptyset$ bezeichnen.

Einführungsregel für die leere Menge

Die leere Menge $\emptyset$ ist ein spezielles Objekt in der Mengenlehre, das durch das Axiom der leeren Menge definiert wird. Dieses Axiom besagt, dass es eine Menge gibt, die keine Elemente enthält. Die Einführungsregel für die leere Menge leitet sich aus dem Axiom der leeren Menge ab und wird wie folgt formuliert:

$$(1) \quad x \notin \emptyset \quad \emptyset$$

Regeln für das Nicht-Enthaltensein

Das Nicht-Enthaltensein, dargestellt durch das Symbol $\notin$, ist ein logischer Operator, der bedeutet, dass ein Element nicht zu einer Menge gehört. Wir führen zwei grundlegende Regeln für das Nicht-Enthaltensein ein: die Einführungs- und die Eliminierungsregel.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & \neg(a \in A) & ... \\ i & (2) & a \notin A & \notin I(1) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} i & (1) & a \notin A & ... \\ i & (2) & \neg(a \in A) & \notin E(1) \end{array}$$

Vereinfachung für das Nicht-Enthaltensein

Das Symbol $\notin$, das das Nicht-Enthaltensein darstellt, ist in seiner Bedeutung offensichtlich und direkt verständlich. Es bedeutet einfach, dass ein bestimmtes Element nicht zu einer Menge gehört. Aufgrund dieser direkten und intuitiven Bedeutung können wir in vielen Fällen auf separate Einführungs- und Eliminierungsregeln für $\notin$ verzichten.

Die Notation $a \notin A$ ist äquivalent zu $\neg(a \in A)$ und kann direkt verwendet werden, ohne dass eine formale Regel angewendet werden muss. Dies vereinfacht den Umgang mit dem Nicht-Enthaltensein in logischen Argumentationen und Beweisen.

Daher können wir in Zukunft die Verwendung von $a \notin A$ als eine unmittelbare Folgerung von $\neg(a \in A)$ und umgekehrt ansehen, ohne explizit eine Regel anzuwenden.

4.3.1 Die Eindeutigkeit der leeren Menge

Um zu zeigen, dass die leere Menge eindeutig bestimmt ist, können wir das Extensionalitätsaxiom verwenden. Angenommen, es gibt zwei leere Mengen O_1 und O_2. Nach dem Extensionalitätsaxiom sind diese beiden Mengen gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben. Da beide Mengen keine Elemente haben, müssen sie gleich sein. Daher ist die leere Menge eindeutig.

Theorem 65 (Eindeutigkeit der leeren Menge)**.**

$$\exists O \forall x (x \notin O) \vdash O = \emptyset$$

Beweis.

1	(1)	$\exists O \forall x(x \notin O)$	A
2	(2)	$\forall x(x \notin O)$	A
2	(3)	$x \notin O$	$\forall E(2)$
	(4)	$x \notin \emptyset$	$\emptyset$
2	(5)	$x \notin O \wedge x \notin \emptyset$	$\wedge I(3,4)$
2	(6)	$(x \in O \wedge x \in \emptyset) \vee (x \notin O \wedge x \notin \emptyset)$	$\vee I2(5)$
2	(7)	$(x \in O \leftrightarrow x \in \emptyset)$	$\forall Df.(6)$
2	(8)	$\forall x(x \in O \leftrightarrow x \in \emptyset)$	$\forall I(7)$
2	(9)	$O = \emptyset$	$=_{Ext.} I(8)$
1	(9)	$O = \emptyset$	$\exists I(1,2,8)$

□

Theorem 66 (Leere Menge als Teilmenge ($\emptyset \subseteq$)). *Für jede Menge A, ist die leere Menge $\emptyset$ eine Teilmenge von A, das heißt:*

$$\vdash \forall A\, (\emptyset \subseteq A)$$

Beweis.

(1)	$x \notin \emptyset$	$\emptyset$
(2)	$x \notin A \rightarrow x \notin \emptyset$	$\rightarrow I_{enh.}(1)$
(3)	$x \in \emptyset \rightarrow x \in A$	$CP(2)$
(4)	$\emptyset \subseteq A$	$\subseteq I2(3)$

□

Theorem 67 (Existenz in einer Menge ($\emptyset_{\neg}(...)$)). *Für jede Menge S gilt:*

$$\exists x \in S \vdash S \neq \emptyset$$

Beweis.

1	(1)	$\exists x \in S$	A
2	(2)	$a \in S$	A
	(3)	$a \notin \emptyset$	$\emptyset$
2	(4)	$a \in S \wedge a \notin \emptyset$	$\wedge I(2,3)$
2	(5)	$S \neq \emptyset$	$\neq SI2(4)$
1	(6)	$S \neq \emptyset$	$\exists E(1,2,7)$

□

Bemerkung. Das Symbol $\emptyset$ wird oft verwendet, um die leere Menge zu repräsentieren. Es stammt aus der skandinavischen Schreibweise des Buchstabens „O“ und wurde von den Mathematikern André Weil und Bourbaki eingeführt. Es ist wichtig zu beachten, dass $\emptyset$ nur ein Symbol ist und nicht als eine Zahl oder ein anderes mathematisches Objekt betrachtet werden sollte. In der Mengenlehre repräsentiert es speziell eine Menge, die keine Elemente enthält.

4.4 Das Aussonderungsaxiom

Das Aussonderungsaxiom (Auss) ist ein weiteres grundlegendes Axiom in der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre. Es ermöglicht die Konstruktion einer Menge, die alle Elemente einer gegebenen Menge enthält, die eine bestimmte Eigenschaft erfüllen. Formal ausgedrückt:

$$\vdash \forall A \forall P \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge P(x)))$$

Dieses Axiom garantiert, dass für jede Menge A und jede Eigenschaft P, es eine Menge B gibt, die alle Elemente von A enthält, die P erfüllen.

Theorem 68 (Theorem der Existenz einer Eigenschaftsmenge ($Auss1.$))**.** *Für alle Eigenschaften P gilt:*

$$\exists A(\forall x(P(x) \rightarrow x \in A)) \vdash \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow P(x))$$

Beweis.

	(1)	$\exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge P(x)))$	$Auss.$
2	(2)	$\exists A(\forall x(P(x) \rightarrow x \in A))$	A
3	(3)	$\forall x(x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge P(x)))$	A
4	(4)	$\forall x(P(x) \rightarrow x \in A)$	A
3	(5)	$x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge P(x))$	$\forall E(3)$
4	(6)	$P(x) \rightarrow x \in A$	$\forall E(4)$
3, 4	(7)	$x \in A \leftrightarrow P(x)$	$\leftrightarrow rel.a(5,6)$
3, 4	(8)	$\forall x(x \in B \leftrightarrow P(x))$	$\forall I(7)$
2, 3	(9)	$\forall x(x \in B \leftrightarrow P(x))$	$\exists E(2,4,8)$
2	(10)	$\forall x(x \in B \leftrightarrow P(x))$	$\exists E(1,3,9)$
2	(11)	$\exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow P(x))$	$\exists I(10)$

□

4.4.1 Element-Symbol

Das Elementsymbol, oft dargestellt durch das Symbol $\in$, wird in der Mengenlehre verwendet, um die Zugehörigkeit eines Elements zu einer Menge auszudrücken. Wir führen nun zwei grundlegende Regeln für das Elementsymbol ein: die Einführungs- und die Eliminierungsregel.

Die Einführungsregel für das Elementsymbol ($\in I$) besagt, dass wenn wir eine Aussage der Form $P(a)$ haben, wir daraus die Aussage $a \in \{x \in A | P(x)\}$ ableiten können.

i	(1)	$P(a)$	...
j	(2)	$a \in A$	...
i, j	(3)	$a \in \{x \in A \| P(x)\}$	$\in I(1,2)$

i	(1)	$a \in A \wedge P(a)$	...
i	(2)	$a \in \{x \in A \| P(x)\}$	$\in I(1)$

Die Eliminierungsregel für das Elementsymbol ($\in E$) besagt, dass wenn wir eine Aussage der Form $a \in \{x \in A|P(x)\}$ haben, wir daraus die Aussage $P(a)$ ableiten können, analog die Aussage $a \in A$.

i	(1)	$a \in \{x \in A\|P(x)\}$	...
i	(2)	$P(a)$	$\in E(1)$

i	(1)	$a \in \{x \in A\|P(x)\}$	...
i	(2)	$a \in A$	$\in E(1)$

i	(1)	$a \in \{x \in A\|P(x)\}$	...
i	(2)	$a \in A \wedge P(a)$	$\in E(1)$

i und j sind dabei Listen von Annahmen.

Theorem 69 (Nichtzugehörigkeit zu einer Menge)**.** *Für jede Menge A mit einer Eigenschaft P gilt:*

$$\forall x(x \notin \{x \in A \mid P(x)\} \leftrightarrow (x \notin A \vee \neg P(x)))$$

Beweis.

1	(1)	$\neg(x \notin \{x \in A \mid P(x)\})$	A
1	(2)	$x \in \{x \in A \mid P(x)\}$	$DN(1)$
1	(3)	$x \in A \wedge P(a)$	$\in E(2)$
1	(4)	$\neg(x \notin A \vee \neg P(a))$	$DeM(3)$
	(5)	$\neg(x \notin \{x \in A \mid P(x)\}) \to \neg(x \notin A \vee \neg P(a))$	$\to I(1,4)$
	(6)	$x \notin A \vee \neg P(a) \to x \notin \{x \in A \mid P(x)\}$	$CP(5)$
7	(7)	$\neg(x \notin A \vee \neg P(a))$	A
7	(8)	$x \in A \wedge P(a)$	$DeM(7)$
7	(9)	$x \in \{x \in A \mid P(x)\}$	$\in I(8)$
7	(10)	$\neg(x \notin \{x \in A \mid P(x)\})$	$DN(9)$
	(11)	$\neg(x \notin A \vee \neg P(a)) \to \neg(x \notin \{x \in A \mid P(x)\})$	$\to I(10)$
	(12)	$x \notin \{x \in A \mid P(x)\} \to x \notin A \vee \neg P(a)$	$CP(11)$
	(13)	$x \notin \{x \in A \mid P(x)\} \leftrightarrow x \notin A \vee \neg P(a)$	$\leftrightarrow I(6,12)$

□

4.4.2 Nicht-Element-Symbol

Das Nicht-Element-Symbol, oft dargestellt durch das Symbol $\notin$, wird in der Mengenlehre verwendet, um die Nichtzugehörigkeit eines Elements zu einer Menge auszudrücken. Wir führen nun zwei grundlegende Regeln für das Nicht-Element-Symbol ein: die Einführungs- und die Eliminierungsregel.

Die Einführungsregel für das Nicht-Element-Symbol ($\notin I$) besagt, dass wenn wir eine Aussage der Form $\neg P(a)$ oder $a \notin A$ haben, wir daraus die Aussage $a \notin \{x \in A|P(x)\}$ ableiten können.

i	(1)	$\neg P(a)$	...
i	(2)	$a \notin \{x \in A\|P(x)\}$	$\notin I(1)$

i	(1)	$a \notin A$	...
i	(2)	$a \notin \{x \in A \mid P(x)\}$	$\notin I(1)$

Die Eliminierungsregel für das Nicht-Element-Symbol ($\notin E$) besagt, dass wenn wir eine Aussage der Form $a \notin \{x \in A|P(x)\}$ haben, wir daraus die Aussage $\neg P(a)$ oder $a \notin A$ ableiten können.

i	(1)	$a \notin \{x \in A \mid P(x)\}$	...
i	(2)	$a \notin A \vee \neg P(a)$	$\notin E(1)$

4.4.3 Eigenschaften des Aussonderungsaxioms

Die Menge B enthält alle Elemente der Menge A, die die Eigenschaft P erfüllen.

Theorem 70 (Eindeutigkeit der ausgesonderten Menge in einer allgemeineren Variante ($\exists! P(x)\mathbb{S}$))**.** *Seien B und C Mengen, die alle Elemente erfüllen, die die Eigenschaft P erfüllen, dann gilt unter Verwendung des Extensionalitätsaxioms $B = C$, das heißt:*

$$\forall x(x \in B \leftrightarrow P(x)) \wedge \forall x(x \in C \leftrightarrow P(x)) \vdash B = C$$

Beweis.

1	(1)	$\forall x(x \in B \leftrightarrow P(x)) \wedge \forall x(x \in C \leftrightarrow P(x))$	A
1	(2)	$\forall x(x \in B \leftrightarrow P(x))$	$\wedge E1(1)$
1	(3)	$\forall x(x \in C \leftrightarrow P(x))$	$\wedge E2(1)$
1	(4)	$x \in B \leftrightarrow P(x)$	$\forall E(2)$
1	(5)	$x \in C \leftrightarrow P(x)$	$\forall E(3)$
1	(6)	$x \in B \leftrightarrow x \in C$	$\leftrightarrow T(4,5)$
1	(7)	$\forall x(x \in B \leftrightarrow x \in C)$	$\forall I(6)$
1	(8)	$B = C$	$=_{Ext.} I(6)$

□

Theorem 71 (Eindeutigkeit der ausgesonderten Menge)**.** *Seien B und C Mengen, die alle Elemente einer Menge A enthalten, die die Eigenschaft P erfüllen, dann gilt unter Verwendung des Extensionalitätsaxioms $B = C$, das heißt:*

$$\forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge P(x)) \vdash B = \{x \in A|P(x)\}$$

Beweis.

1	(1)	$\forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge P(x))$	A
1	(2)	$x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge P(x)$	$\forall E(1)$
3	(3)	$x \in B$	A
1, 3	(4)	$x \in A \wedge P(x)$	$\leftrightarrow E3(2,3)$
1, 3	(5)	$x \in \{x \in A \vert P(x)\}$	$\in I(4)$
1	(6)	$x \in B \rightarrow x \in \{x \in A \vert P(x)\}$	$\rightarrow I(3,5)$
7	(7)	$x \in \{x \in A \vert P(x)\}$	A
7	(8)	$x \in A \wedge P(x)$	$\in E(7)$
1, 7	(9)	$x \in B$	$\leftrightarrow E3(2,8)$
1	(10)	$x \in \{x \in A \vert P(x)\} \rightarrow x \in B$	$\leftrightarrow E3(2,8)$
1	(11)	$x \in B \leftrightarrow x \in \{x \in A \vert P(x)\}$	$\leftrightarrow I(6,10)$
1	(12)	$\forall x(x \in B \leftrightarrow x \in \{x \in A \vert P(x)\})$	$\forall I(11)$
1	(13)	$B = \{x \in A \vert P(x)\}$	$=_{Ext.}\ I(12)$

□

Bemerkung. Das Aussonderungsaxiom ist ein Schlüsselkonzept in der Mengenlehre und ermöglicht die Konstruktion von Mengen, die bestimmte Eigenschaften erfüllen. Es dient als Grundlage für die Definition von Teilmengen und ist ein wichtiger Baustein für die Entwicklung vieler anderer Konzepte in der Mengenlehre. Die ausgesonderte Menge einer Menge A mit einer Eigenschaft P wird oft als $\{x \in A|P(x)\}$ oder $\{x|x \in A \cap P(x)\}$ bezeichnet. Diese Notation stellt sicher, dass die ausgesonderte Menge eindeutig ist, da sie durch das Aussonderungsaxiom und das Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt ist.

Theorem 72 (Eigenschaften von A als Teilmenge von A ($P(\mathbb{S}) \subseteq \mathbb{S}$))**.**

$$\vdash \{x \in A \mid P(x)\} \subseteq A$$

Beweis.

1	(1)	$x \in \{x \in A \mid P(x)\}$	A
1	(2)	$x \in A \wedge P(x)$	$\in E(1)$
1	(3)	$x \in A$	$\wedge E1(2)$
1	(4)	$\{x \in A \mid P(A)\} \subseteq A$	$\subseteq I1(1,3)$

□

4.4.4 Allquantor und Existenzquantor in Mengen

Die Regeln für $\forall x \in A(P(x))$ und $\exists x \in A(P(x))$ können aus den allgemeinen Regeln für den Allquantor und den Existenzquantor abgeleitet werden, indem wir die folgenden Definitionen verwenden:

$$\forall x \in A(P(x)) \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow P(x))$$

$$\exists x \in A(P(x)) \leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge P(x))$$

Definition 4.4.1 (Def. des Allquantors für Mengen ($Df.Set(\forall)$)). Der Ausdruck $\forall x \in A(P(x))$ wird definiert und abgekürzt als:

$$\forall x \in A(P(x)) \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow P(x))$$

Regeln für den Allquantor für Mengen

Die Einführungsregel für den Allquantor in Bezug auf Mengen ($\forall_{Set}I$) lässt sich wie folgt formulieren: Wenn wir eine Aussage $P(x)$ für ein beliebiges, aber fest gewähltes Element x aus einer Menge A beweisen können, und x kommt in den Annahmen, aus denen $P(x)$ abgeleitet wird, nicht vor, dann können wir die allgemeine Aussage $\forall x \in A(P(x))$ ableiten.

$$\begin{array}{llll} 1 & (1) & x \in A & A \\ 1, i & (2) & P(x) & ... \\ i & (3) & \forall x \in A(P(x)) & \forall_{Set}I1(1,2) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} i & (1) & \forall x(x \in A \rightarrow P(x)) & ... \\ i & (3) & \forall x \in A(P(x)) & \forall_{Set}I2(1,2) \end{array}$$

Die Eliminierungsregel für den Allquantor in Bezug auf Mengen ($\forall_{Set}E$) formuliert sich folgendermaßen: Aus einer allgemeinen Aussage der Form $\forall x \in A(P(x))$ können wir eine spezielle Aussage $P(t)$ für ein beliebiges Element t aus der Menge A ableiten.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & \forall x \in A(P(x)) & ... \\ i & (2) & \forall x(x \in A \rightarrow P(x)) & \forall_{Set}E1(1) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} i & (1) & \forall x \in A(P(x)) & ... \\ i & (2) & t \in A \rightarrow P(t) & \forall_{Set}E2(1) \end{array}$$

Hierbei bezieht sich i auf eine Liste von Annahmen und t ist ein spezifisches Element der Menge A.

Definition 4.4.2 (Def. des Existenzquantors für Mengen ($Df.Set(\exists)$)). Der Ausdruck $\exists x \in A(P(x))$ wird definiert und abgekürzt als:

$$\exists x \in A(P(x)) \leftrightarrow \exists x(x \in A \land P(x))$$

Definition und Regeln für den Existenzquantor für Mengen

Die Einführungsregel für den Existenzquantor in Bezug auf Mengen ($\exists_{Set}I$) lässt sich wie folgt formulieren: Wenn wir eine Aussage $P(x)$ für ein spezifisches Element x aus einer Menge A beweisen können, wobei x tatsächlich ein Element von A ist, dann können wir daraus die Existenzaussage $\exists x \in A(P(x))$ ableiten.

$$\begin{array}{llll} 1 & (1) & x \in A & A \\ 1, i & (2) & P(x) & ... \\ i & (3) & \exists x \in A(P(x)) & \exists_{Set}I1(1,2) \end{array}$$

i	(1)	$\exists x(x \in A \land P(x))$	...
i	(3)	$\exists x \in A(P(x))$	$\exists_{Set} I2(1,2)$

Die Eliminierungsregel für den Existenzquantor in Bezug auf Mengen ($\exists_{Set} E$) formuliert sich folgendermaßen: Aus einer Existenzaussage der Form $\exists x \in A(P(x))$ können wir, unter gewissen Bedingungen, eine spezielle Aussage $P(t)$ für ein Element t aus der Menge A ableiten.

i	(1)	$\exists x \in A(P(x))$	...
i	(2)	$\exists x(x \in A \land P(x))$	$\exists_{Set} E1(1)$

i	(1)	$\exists x \in A(P(x))$	...
2	(2)	$t \in A \land P(t)$	A
$2, j$	(3)	Q	...
j	(4)	$t \in A \land P(t)$	$\exists_{Set} E2(1,2,3)$

i, j sind dabei Listen von Annahmen.

Definition 4.4.3 (Def. des Eindeutigkeitsquantors für Mengen ($Df.Set(\exists!)$))**.** Der Ausdruck $\exists! x \in A(P(x))$ wird definiert und abgekürzt als:

$$\exists! x \in A(P(x)) \leftrightarrow \exists! x(x \in A \land P(x))$$

Definition und Regeln für den Eindeutigkeitsquantor für Mengen

Die Regel, die zeigt, dass aus der Aussage $\exists! x \in A(P(x))$ folgt, dass genau ein x existiert, das $x \in A \land P(x)$ erfüllt, kann wie folgt ausgedrückt werden:

i	(1)	$\exists! x \in A(P(x))$	...
i	(2)	$\exists! x(x \in A \land P(x))$	$\exists!_{Set} E(1)$

Umgekehrt formulieren wir nun die Regel, die zeigt, dass aus der formalen Aussage $\exists! x(x \in A \land P(x))$ folgt, dass genau ein x in der Menge A mit der Eigenschaft $P(x)$ existiert, ist wie folgt:

i	(1)	$\exists! x(x \in A \land P(x))$	...
i	(2)	$\exists! x \in A(P(x))$	$\exists!_{Set} I(1)$

i ist dabei eine Liste von Annahmen.

Theorem 73 (Beschreibung des Allquantors ($\forall_{Set} E3(...)$))**.**

$$\forall x \in A(P(x)), y \in A \vdash P(y)$$

Beweis.

1	(1)	$\forall x \in A(P(x))$	A
2	(2)	$y \in A$	A
1	(3)	$\forall x(x \in A \to P(x))$	$\forall_{Set} E1(1)$
1	(4)	$y \in A \to P(y)$	$\forall E(3)$
1, 2	(5)	$P(y)$	$\to E(4,2)$

□

Theorem 74 (Beschreibung des Allquantors ($\neg\exists_{Set}Df.(...)$)).

$$\forall x \in A(P(x)) \dashv\vdash \neg\exists x \in A(\neg P(x))$$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\forall x \in A(P(x))$	A
1	(2)	$\forall x(x \in A \rightarrow P(x))$	$\forall_{Set}E1(1)$
1	(3)	$\neg\exists x(x \in A \wedge \neg P(x))$	$\forall Df.(2)$
	(4)	$\exists x \in A(\neg P(x)) \leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \neg P(x))$	$\exists_{Set}$
	(5)	$\neg\exists x \in A(\neg P(x)) \leftrightarrow \neg\exists x(x \in A \wedge \neg P(x))$	$EqCP(4)$
1	(6)	$\neg\exists x \in A(\neg P(x))$	$\leftrightarrow E3(3,6)$

$\dashv$:

1	(1)	$\neg\exists x \in A(\neg P(x))$	A
	(2)	$\exists x \in A(\neg P(x)) \leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \neg P(x))$	$\exists_{Set}$
	(3)	$\neg\exists x \in A(\neg P(x)) \leftrightarrow \neg\exists x(x \in A \wedge \neg P(x))$	$EqCP(2)$
1	(4)	$\neg\exists x(x \in A \wedge \neg P(x))$	$\leftrightarrow E3(1,3)$
1	(5)	$\forall x(x \in A \rightarrow P(x))$	$\forall Df.(4)$
1	(6)	$\forall x \in A(P(x))$	$\forall_{Set}I2(5)$

$\square$

Theorem 75 (Beschreibung des Existenzquantors ($\neg\forall_{Set}Df.(...)$)). $\exists x \in A(P(x)) \dashv\vdash \neg\forall x \in A(\neg P(x))$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\exists x \in A(P(x))$	A
1	(2)	$\exists x(x \in A \wedge P(x))$	$\exists_{Set}E1(1)$
1	(3)	$\neg\forall x(x \in A \rightarrow \neg P(x))$	$\exists Df.(2)$
	(4)	$\forall x \in A(\neg P(x)) \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow \neg P(x))$	$\forall_{Set}$
	(5)	$\neg\forall x \in A(\neg P(x)) \leftrightarrow \neg\forall x(x \in A \rightarrow \neg P(x))$	$EqCP(4)$
	(6)	$\neg\forall x(x \in A \rightarrow \neg P(x)) \rightarrow \neg\forall x \in A(\neg P(x))$	$\leftrightarrow E2(5)$
1	(7)	$\neg\forall x \in A(\neg P(x))$	$\rightarrow E(3,6)$

$\dashv$:

1	(1)	$\neg\forall x \in A(\neg P(x))$	A
	(2)	$\forall x \in A(\neg P(x)) \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow \neg P(x))$	$\forall_{Set}$
	(3)	$\neg\forall x \in A(\neg P(x)) \leftrightarrow \neg\forall x(x \in A \rightarrow \neg P(x))$	$EqCP(2)$
1	(4)	$\neg\forall x(x \in A \rightarrow \neg P(x))$	$\leftrightarrow E3(1,3)$
1	(5)	$\exists x(x \in A \wedge P(x))$	$\exists Df.(4)$
1	(6)	$\exists x \in A(P(x))$	$\exists_{Set}I2(5)$

$\square$

Theorem 76 (Eigenschaftserweiterung ($M = \{M \mid P\}(...)$)).

$$\forall x \in M(P(x)) \dashv\vdash M = \{x \in M \mid P(x)\}$$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$\forall x \in M(P(x))$	A
	(2)	$\{x \in M \mid P(x)\} \subseteq M$	$P(\mathbb{S}) \subseteq \mathbb{S}$
1	(3)	$\forall x(x \in M \to P(x))$	$\forall_{Set} E1(1)$
4	(4)	$y \in M$	A
1	(5)	$y \in M \to P(y)$	$\forall E(3)$
1, 4	(6)	$P(y)$	$\to E(5,4)$
1, 4	(7)	$y \in \{x \in M \mid P(x)\}$	$\in I(4,6)$
1	(8)	$M \subseteq \{x \in M \mid P(x)\}$	$\subseteq I1(4,7)$
1	(9)	$M = \{x \in M \mid P(x)\}$	$\subseteq, \supseteq E(2,8)$

$\dashv$:

1	(1)	$M = \{x \in M \mid P(x)\}$	A
2	(2)	$y \in M$	A
1, 2	(3)	$y \in \{x \in M \mid P(x)\}$	$=_{Ext.} E1(2)$
1, 2	(4)	$P(y)$	$\in E(3)$
1	(5)	$y \in M \to P(y)$	$\to I(2,4)$
1	(6)	$\forall y(y \in M \to P(y))$	$\forall I(5)$
1	(7)	$\forall y \in M(P(y))$	$\forall_{Set} I2(6)$

□

4.5 Definition des Schnitts

Definition 4.5.1 (Schnitt)**.** Der Schnitt von zwei Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind. Dies wird als $A \cap B$ bezeichnet und kann als eine spezielle Anwendung des Aussonderungsaxioms formuliert werden:

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$$

Formal ausgedrückt unter Verwendung des Aussonderungsaxioms:

$$\forall A \forall B \exists C \forall x(x \in C \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B))$$

Regeln für den Schnitt

Der Schnitt, oft dargestellt durch das Symbol $\cap$, ist eine Operation auf zwei Mengen, die die Menge aller Elemente, die in beiden Mengen enthalten sind, bildet. Wir können auf Basis der vorherigen Definition nun Einführungs- und Eliminationsregeln für den Schnitt definieren.

Die Einführungsregel für den Schnitt ($\cap I$) ermöglicht es uns, aus der Zugehörigkeit eines Elements zu zwei Mengen A und B die Zugehörigkeit desselben Elements zum Schnitt $A \cap B$ zu schließen:

i	(1) $x \in A$	...
j	(2) $x \in B$	...
i, j	(3) $x \in A \cap B$	$\cap I(1,2)$

i	(1) $x \in A \land x \in B$	...
i	(2) $x \in A \cap B$	$\cap I(1)$

Die Eliminierungsregel für den Schnitt ($\cap E1$ und $\cap E2$) besagt, dass wenn wir ein Element haben, das zum Schnitt $A \cap B$ gehört, wir daraus schließen können, dass dieses Element sowohl zu A als auch zu B gehört:

i	(1) $x \in A \cap B$	...
i	(2) $x \in A \land x \in B$	$\cap E(1)$

i	(1) $x \in A \cap B$	...
i	(2) $x \in A$	$\cap E1(1)$
i	(3) $x \in B$	$\cap E2(2)$

i, j sind dabei Listen von Annahmen.

4.5.1 Eigenschaften des Schnitts

Theorem 77 (Idempotenz des Schnitts (Idem. $\vee$))**.** *Für jede Menge A gilt:*

$$A = A \cap A$$

Beweis.

1	(1)	$x \in A \cap A$	A
1	(2)	$x \in A$	$\cap E1(1)$
	(3)	$A \cap A \subseteq A$	$\subseteq I1(1,2)$
4	(4)	$x \in A$	A
4	(5)	$x \in A \cap A$	$\cap I(4,4)$
	(6)	$A \subseteq A \cap A$	$\subseteq I1(4,5)$
	(7)	$A = A \cap A$	$\subseteq, \supseteq E(3,6)$

□

Theorem 78 (Kommutativität des Schnitts(Komm. $\vee$))**.** *Für alle Mengen A und B gilt:*

$$A \cap B = B \cap A$$

Beweis.

1	(1)	$x \in A \cap B$	A
1	(2)	$x \in A$	$\cap E1(1)$
1	(3)	$x \in B$	$\cap E2(1)$
1	(4)	$x \in B \cap A$	$\cap I(3,2)$
	(5)	$A \cap B \subseteq B \cap A$	$\subseteq I1(1,4)$
6	(6)	$x \in B \cap A$	A
6	(7)	$x \in B$	$\cap E1(6)$
6	(8)	$x \in A$	$\cap E2(6)$
6	(9)	$x \in A \cap B$	$\cap I(8,7)$
	(10)	$B \cap A \subseteq A \cap B$	$\subseteq I1(6,9)$
	(11)	$A \cap B = B \cap A$	$\subseteq, \supseteq E(5,10)$

□

Regeln zur Kommutativität des Schnitts zweier Mengen

Die Regel für die Überführung von $A \cap B$ zu $B \cap A$ basiert auf der Kommutativität des Schnitts und kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{array}{llll} i & (1) & A \cap B & A \\ i & (2) & B \cap A & \cap Komm.(1) \end{array}$$

Die Regel, die zeigt, dass wenn ein Element z in $A \cap B$ enthalten ist, es auch in $B \cap A$ enthalten ist, nutzt ebenfalls die Kommutativität des Schnitts:

$$\begin{array}{llll} i & (1) & z \in A \cap B & A \\ i & (2) & z \in B \cap A & \cap Komm.(1) \end{array}$$

Dabei ist i eine Liste von Annahmen.

Theorem 79 (Assoziativität des Schnitts)**.** *Für alle Mengen A, B, und C gilt:*

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Beweis.

$$\begin{array}{llll} 1 & (1) & x \in (A \cap B) \cap C & A \\ 1 & (2) & x \in (A \cap B) & \cap E1(1) \\ 1 & (3) & x \in C & \cap E2(1) \\ 1 & (4) & x \in A & \cap E1(2) \\ 1 & (5) & x \in B & \cap E2(2) \\ 1 & (6) & x \in B \cap C & \cap I(5,3) \\ 1 & (7) & x \in A \cap (B \cap C) & \cap I(4,6) \\ & (8) & (A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C) & \cap I(1,7) \\ 9 & (9) & x \in A \cap (B \cap C) & A \\ 9 & (10) & x \in (B \cap C) & \cap E2(9) \\ 9 & (11) & x \in A & \cap E1(9) \\ 9 & (12) & x \in B & \cap E1(10) \\ 9 & (13) & x \in C & \cap E2(10) \\ 9 & (14) & x \in A \cap B & \cap I(11,12) \\ 9 & (15) & x \in (A \cap B) \cap C & \cap I(14,13) \\ & (16) & A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C & \cap I(9,15) \\ & (17) & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) & \subseteq, \supseteq E(8,16) \end{array}$$

□

Theorem 80 (Nichtexistenz einer universellen Menge in ZF)**.** *Angenommen, es gibt eine universelle Menge U in der ZF-Mengenlehre, dann führt dies unter Verwendung des Aussonderungsaxioms zu einem Widerspruch durch das Russell'sche Paradoxon. Das heißt:*

$$\vdash \neg \exists U \forall A (A \in U)$$

Beweis. Wir nutzen im folgenden

1	(1)	$\exists U \forall A (A \in U)$	A
2	(2)	$\forall A (A \in U)$	A
	(3)	$R := \{x \in U \mid x \notin x\}$	$:=$
4	(4)	$R \in R$	A
4	(5)	$R \notin R$	$\in E(4)$
4	(6)	$\perp$	$\perp I(4,5)$
	(7)	$R \notin R$	$\neg I(4,6)$
	(8)	$R \notin U \vee R \in R$	$\notin E(7)$
	(9)	$R \in R \vee R \notin U$	$\vee Komm.(8)$
	(10)	$R \notin R \rightarrow R \notin U$	$MI(9)$
	(11)	$R \notin U$	$\rightarrow E(7,10)$
2	(12)	$R \in U$	$\forall E(2)$
2	(13)	$\perp$	$\perp I(12,11)$
1	(14)	$\perp$	$\exists E(1,2,13)$
	(15)	$\neg(\exists U \forall A (A \in U))$	$\neg I(1,14)$

□

Theorem 81 (Teilmengenbeziehung des Schnitts($\cap\ \subseteq$))**.** *Für alle Mengen A und B gilt:*

a) $A \cap B \subseteq A$

b) $A \cap B \subseteq B$

Beweis. a)

1	(1)	$x \in A \cap B$	A
1	(2)	$x \in A$	$\cap E1(1)$
	(3)	$A \cap B \subseteq A$	$\subseteq I1(1,2)$

b)

1	(1)	$x \in A \cap B$	A
1	(2)	$x \in A$	$\cap E2(1)$
	(3)	$A \cap B \subseteq A$	$\subseteq I1(1,2)$

□

Theorem 82 (Teilmengenbeziehung ($\cap\ \subseteq$))**.** *Für alle Mengen A und B gilt:*

a) $A \subseteq B \dashv\vdash A \cap B = A$

b) $B \subseteq A \dashv\vdash A \cap B = B$

Beweis. a) $\vdash$:

1	(1)	$A \subseteq B$	A
	(2)	$A \cap B \subseteq A$	$\cap \subseteq$
3	(3)	$x \in A$	A
1, 3	(4)	$x \in B$	$\subseteq E(3,1)$
1, 3	(5)	$x \in A \cap B$	$\cap I(3,4)$
1	(6)	$A \subseteq A \cap B$	$\subseteq I1(3,5)$
1	(7)	$A \cap B = A$	$\subseteq, \supseteq E(3,6)$

$\dashv$:

1	(1)	$A \cap B = A$	A
1	(2)	$A \subseteq A \cap B$	$\subseteq, \supseteq I1(1)$
1	(3)	$A \cap B \subseteq B$	$\cap \subseteq$
1	(4)	$A \subseteq B$	$\subseteq (Trans.)(2,3)$

b) $\vdash$:

1	(1)	$B \subseteq A$	A
	(2)	$A \cap B \subseteq B$	$\cap \subseteq$
3	(3)	$x \in B$	A
1, 3	(4)	$x \in A$	$\subseteq E(3,1)$
1, 3	(5)	$x \in A \cap B$	$\cap I(3,4)$
1	(6)	$B \subseteq A \cap B$	$\subseteq I1(3,5)$
1	(7)	$A \cap B = B$	$\subseteq, \supseteq E(3,6)$

$\dashv$:

1	(1)	$A \cap B = B$	A
1	(2)	$B \subseteq A \cap B$	$\subseteq, \supseteq I1(1)$
1	(3)	$A \cap B \subseteq A$	$\cap \subseteq$
1	(4)	$B \subseteq A$	$\subseteq (Trans.)(2,3)$

□

Theorem 83 (Schnitt mit der leeren Menge ($\cap\emptyset$))**.** *Für jede Menge A gilt:*

a) $\vdash \emptyset \cap A = \emptyset$

b) $\vdash A \cap \emptyset = \emptyset$

Beweis. a)

(1)	$\emptyset \subseteq A$	$\emptyset \subseteq$
(2)	$\emptyset \cap A = \emptyset$	$\cap \subseteq (1)$

b)

(1)	$\emptyset \subseteq A$	$\emptyset \subseteq$
(2)	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$\cap \subseteq (1)$

□

4.5.2 Der unendliche Schnitt

Theorem 84 (Unabhängigkeit des unendlichen Schnitts von Ursprungsmenge)**.** *Der Unendliche Schnitt ist unabhängig von seiner Ursprungsmenge. Das heißt:*

$$P(C), P(D) \vdash \{x \in C \mid \forall A(P(A) \to x \in A)\} = \{x \in D \mid \forall A(P(A) \to x \in A)\}$$

Beweis.

1	(1)	$P(C)$	A
2	(2)	$P(D)$	A
3	(3)	$x \in \{x \in C \mid \forall A(P(A) \to x \in A)\}$	A
3	(4)	$\forall A(P(A) \to x \in A)$	$\in E(3)$
3	(5)	$P(D) \to x \in D$	$\forall E(4)$
2, 3	(6)	$x \in D$	$\to E(2,4)$
2, 3	(7)	$x \in \{x \in D \mid \forall A(P(A) \to x \in A)\}$	$\in I(4,6)$
2	(8)	$\{x \in C \mid \forall A(P(A) \to x \in A)\} \subseteq \{x \in D \mid \forall A(P(A) \to x \in A)\}$	$\subseteq I1(3,7)$
9	(9)	$x \in \{x \in D \mid \forall A(P(A) \to x \in A)\}$	A
9	(10)	$\forall A(P(A) \to x \in A)$	$\in E(9)$
9	(11)	$P(C) \to x \in C$	$\forall E(10)$
1, 9	(12)	$x \in C$	$\to E(1,10)$
1, 9	(13)	$x \in \{x \in C \mid \forall A(P(A) \to x \in A)\}$	$\in I(10,12)$
1	(14)	$\{x \in D \mid \forall A(P(A) \to x \in A)\} \subseteq \{x \in C \mid \forall A(P(A) \to x \in A)\}$	$\subseteq I1(9,13)$
1, 2	(15)	$\{x \in C \mid \forall A(P(A) \to x \in A)\} = \{x \in D \mid \forall A(P(A) \to x \in A)\}$	$\subseteq E(8,14)$

□

Definition 4.5.2 (Der unendliche Schnitt ($Df.\bigcap\{A \mid P(A)\}$))**.** Angenommen, es gibt mindestens eine Menge C für die $P(C)$ erfüllt ist. Dann existiert der unendliche Schnitt $\bigcap\{A \mid P(A)\}$ und ist definiert durch:

$$\exists C(P(C) \to \bigcap_{P(A)} A := \bigcap\{A \mid P(A)\} := \{x \in C \mid \forall A(P(A) \to x \in A)\})$$

Bemerkung. Aufgrund des vorherigen Theorems zur Unabhängigkeit des unendlichen Schnitts von der Ursprungsmenge, können wie die Bezeichnung ($Df.\bigcap\{A \mid P(A)\}$) so wählen, dass sie unabhängig von der Ursprungsmenge C aus $\{x \in C \mid \forall A(P(A) \to x \in A)\}$ ist.

Regeln für den unendlichen Schnitt

Der unendliche Schnitt, dargestellt durch das Symbol $\bigcap$, ist eine Operation über eine Menge von Mengen, die durch eine Eigenschaft definiert sind. Basierend auf unserer Definition für den unendlichen Schnitt können wir zwei grundlegende Regeln formulieren: die Einführungs- und die Eliminierungsregel.

Die Einführungsregel für den unendlichen Schnitt ($\bigcap I$) besagt, dass wenn wir zeigen können, dass ein Element x in jeder Menge enthalten ist, die eine bestimmte Eigenschaft P erfüllt, dann ist x im unendlichen Schnitt aller Mengen mit dieser Eigenschaft enthalten.

i	(1)	$P(C)$	...
j	(2)	$\forall A(P(A) \to x \in A)$	...
i,j	(3)	$x \in \bigcap\{A \mid P(A)\}$	$\bigcap I(1,2)$

Die Eliminierungsregel für den unendlichen Schnitt ($\bigcap E$) besagt, dass wenn wir wissen, dass ein Element x im unendlichen Schnitt aller Mengen mit einer bestimmten Eigenschaft P enthalten ist und eine bestimmte Menge B diese Eigenschaft P erfüllt, dann ist x auch in B enthalten.

i	(1)	$x \in \bigcap\{A \mid P(A)\}$	...
i	(2)	$P(B) \land x \in B$	$\bigcap E(1)$
i	(3)	$\forall A(P(A) \to x \in A)$	$\bigcap E(1)$

i,j sind dabei Listen von Annahmen.

Theorem 85 (Der unendlichen Schnitt als Teilmenge $\bigcap A \subseteq A$)**.**

$$P(C) \vdash \bigcap_{P(A)} A \subseteq C$$

Beweis.

1	(1)	$P(C)$	A
2	(2)	$x \in \bigcap_{P(A)} A$	A
2	(3)	$\forall A(P(A) \to x \in A)$	$\bigcap E(2)$
2	(4)	$P(C) \to x \in C$	$\forall E(3)$
1, 2	(5)	$x \in C$	$\to E(1,4)$
1	(6)	$x \in C$	$\subseteq I1(2,5)$

□

4.6 Das Axiom der Paarmenge

Das Axiom der Paarmenge (Pair) ist ein weiteres grundlegendes Axiom in der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre. Es ermöglicht die Konstruktion von Mengen, die aus genau zwei Elementen bestehen. Formal ausgedrückt:

$$\forall A \forall B \exists C \forall x(x \in C \leftrightarrow (x = A \lor x = B))$$

Dieses Axiom garantiert, dass für jede zwei Mengen A und B, es eine Menge C gibt, die genau A und B als Elemente enthält.

Theorem 86 (Eindeutigkeit der Paarmenge)**.** *Seien C und D zwei Paarmengen, die beide die Elemente A und B enthalten, dann sind diese unter Verwendung des Extensionalitätsaxioms gleich, das heißt:*

$$(\forall x(x \in C \leftrightarrow (x = A \lor x = B)) \land \forall x(x \in D \leftrightarrow (x = A \lor x = B))) \vdash (C = D)$$

Beweis.

1	(1)	$\forall x(x \in B \leftrightarrow (x = A \vee x = B)) \wedge \forall x(x \in C \leftrightarrow (x = A \vee x = B))$	A
1	(2)	$Q(x) = (x = A \vee x = B) \wedge \forall x(x \in B \leftrightarrow Q(x)) \wedge \forall x(x \in C \leftrightarrow Q(x))$	$:= I(1)$
1	(3)	$\forall x(x \in B \leftrightarrow Q(x)) \wedge \forall x(x \in C \leftrightarrow Q(x))$	$\wedge E2(2)$
1	(4)	$B = C$	$\exists! P(x)\mathbb{S}(3)$

□

Regeln für die Paarmenge

Die Einführungsregel für die Paarmenge besagt, dass aus der Existenz von zwei Elementen A und B eine Menge C konstruiert werden kann, die genau diese Elemente enthält.

i	(1)	$x = A \vee x = B$	...
i	(2)	$x \in \{A, B\}$	$\in I2(1)$

(1)	$A \in \{A, B\}$	$\in I2$

(1)	$B \in \{A, B\}$	$\in I2$

Die Eliminierungsregel für die Paarmenge ermöglicht es uns, aus der Existenz einer Paarmenge C zu schließen, dass wenn ein Element x in C enthalten ist, dieses Element entweder A oder B sein muss.

i	(1)	$x \in \{A, B\}$	...
i	(2)	$x = A \vee x = B$	$\in E2(1)$

i ist dabei eine Liste von Annahmen.

Regeln für die Nicht-Zugehörigkeit zur Paarmenge

Die Nicht-Einführungsregel für die Paarmenge ($\notin I2(...)$) besagt, dass aus der Tatsache, dass ein Element x weder gleich A noch gleich B ist, folgt, dass x nicht in der Menge $\{A, B\}$ enthalten ist.

i	(1)	$x \neq A \wedge x \neq B$	...
i	(2)	$x \notin \{A, B\}$	$\notin I2(1)$

i	(1)	$x \neq A$	...
j	(2)	$x \neq B$	...
i, j	(3)	$x \notin \{A, B\}$	$\notin I2(1, 2)$

Die Nicht-Eliminierungsregel für die Paarmenge ($\notin E2(...)$) erlaubt den Schluss, dass wenn ein Element x nicht in der Menge $\{A, B\}$ enthalten ist, x weder A noch B sein kann.

i	(1)	$x \notin \{A, B\}$	...
i	(2)	$x \neq A \wedge x \neq B$	$\notin E2(1)$

i	(1)	$x \notin \{A, B\}$	...
i	(2)	$x \neq A$	$\notin E2(1)$

i	(1)	$x \notin \{A, B\}$	...
i	(2)	$x \neq B$	$\notin E2(1)$

i, j ist dabei eine Liste von Annahmen.

4.6.1 Eigenschaften der Paarmenge

Theorem 87 (Paarmenge ist keine leere Menge $\{.,.\} \neq \emptyset$)**.** *Für alle a und b gilt:*

$$\vdash \{a, b\} \neq \emptyset$$

Beweis.

(1)	$a \in \{a, b\}$	$\in I2$
(2)	$\exists x(x \in \{a, b\})$	$\exists I(1)$
(3)	$\{a, b\} \neq \emptyset$	$\emptyset_{\neg}(2)$

□

Theorem 88 (Einzigartiges Element in der Paarmenge)**.** *Wenn $A = B$, dann enthält die Paarmenge C nur ein einzigartiges Element, nämlich A.*

$$A = B, a \in \{A, B\}, b \in \{A, B\} \vdash a = b$$

Beweis.

1	(1)	$A = B$	A
2	(2)	$a \in \{A, B\}$	A
3	(3)	$b \in \{A, B\}$	A
1, 2	(4)	$a \in \{A, A\}$	$= E(1, 2)$
1, 3	(5)	$b \in \{A, A\}$	$= E(1, 3)$
1, 2	(6)	$a = A \vee a = A$	$\in E2(4)$
1, 2	(7)	$a = A$	$\vee Idem.(6)$
1, 3	(8)	$b = A \vee b = A$	$\in E2(5)$
1, 3	(9)	$b = A$	$\vee Idem.(8)$
1, 2, 3	(10)	$a = b$	$= Trans.(7, 9)$

□

Regeln für die Einführung und Eliminierung von Elementen in einer Einermenge

Die Einführungsregel für Elemente in einer Menge ($\in I$) besagt, dass aus der Gleichheit von a und A gefolgert werden kann, dass a in der Menge {A} enthalten ist.

i	(1)	$a = A$	...
i	(2)	$a \in \{A\}$	$\in I3(1)$

$$(1) \quad a \in \{a\} \quad \in I4$$

Die Eliminierungsregel für Elemente aus einer Menge ($\in E$) ermöglicht es, aus der Tatsache, dass a in der Menge {A} enthalten ist, zu schließen, dass $a = A$.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & a \in \{A\} & ... \\ i & (2) & a = A & \in E3(1) \end{array}$$

i ist dabei eine Liste von Annahmen.

Regeln für die Nicht-Zugehörigkeit zu einer Einermenge

Die Nicht-Einführungsregel für Elemente in einer Einermenge ($\notin I3(...)$) besagt, dass aus der Ungleichheit von a und b gefolgert werden kann, dass a nicht in der Menge $\{b\}$ und umgekehrt enthalten ist.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & a \neq b & ... \\ i & (2) & a \notin \{b\} & \notin I3(1) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} i & (1) & a \neq b & ... \\ i & (2) & b \notin \{a\} & \notin I3(1) \end{array}$$

Die Nicht-Eliminierungsregel für Elemente aus einer Einermenge ($\notin E3(...)$) ermöglicht es, aus der Tatsache, dass a nicht in der Menge $\{b\}$ enthalten ist, zu schließen, dass a nicht gleich b und umgekehrt ist.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & a \notin \{b\} & ... \\ i & (2) & a \neq b & \notin E3(1) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} i & (1) & a \notin \{b\} & ... \\ i & (2) & b \neq a & \notin E3(1) \end{array}$$

i ist dabei eine Liste von Annahmen.

Bemerkung. Die Paarmenge ist ein wichtiges Konzept in der Mengenlehre und dient als Grundlage für die Definition von geordneten Paaren, Relationen und Funktionen. Es ermöglicht auch die Konstruktion komplexerer Mengenstrukturen. Die eindeutige Paarmenge, die die Elemente A und B enthält, wird oft als $\{A, B\}$ bezeichnet. Dies ist eine kompakte Notation, die in der Mengenlehre weit verbreitet ist. Wenn $A = B$, dann wird die Paarmenge einfach als $\{A\}$ oder $\{B\}$ bezeichnet, da in diesem Fall die Menge nur ein einzigartiges Element enthält.

Theorem 89 (Elemente als Teilmenge ($\{.\} \to\subseteq (...)$))**.** *Sei A eine beliebige Menge, dann gilt für alle a:*

$$a \in A \vdash \{a\} \subseteq A$$

Beweis.

1	(1)	$x \in \{a\}$	A
2	(2)	$a \in A$	A
1	(3)	$x = a$	$\in E3(1)$
$1,2$	(4)	$x \in A$	$= E(3,2)$
2	(4)	$\{a\} \subseteq A$	$\subseteq I1(1,4)$

□

4.7 Definition der Differenz

Definition 4.7.1 (Differenz)**.** Die Differenz von zwei Mengen A und B, bezeichnet mit $A \setminus B$ oder $A - B$, ist die Menge aller Elemente, die in A enthalten sind, aber nicht in B. Dies kann als eine spezielle Anwendung des Aussonderungsaxioms formuliert werden:

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Formal ausgedrückt unter Verwendung des Aussonderungsaxioms:

$$\forall A \forall B \exists C \forall x (x \in C \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B))$$

Regeln für die Differenz

Die Differenz, oft dargestellt durch das Symbol $\setminus$ oder $-$, ist eine Operation auf zwei Mengen, die die Menge aller Elemente, die in A enthalten sind, aber nicht in B, bildet. Wir können auf Basis der vorherigen Definition nun Einführungs- und Eliminationsregeln für die Differenz definieren.

Die Einführungsregel für die Differenz ($\setminus I$) ermöglicht es uns, aus der Zugehörigkeit eines Elements zu A und der Nicht-Zugehörigkeit desselben Elements zu B die Zugehörigkeit dieses Elements zur Differenz $A \setminus B$ zu schließen:

i	$(1)\, x \in A$	...
j	$(2)\, x \notin B$	...
i,j	$(3)\, x \in A \setminus B$	$-_{Set}I(1,2)$

Die Eliminierungsregel für die Differenz ($\setminus E$) besagt, dass wenn wir ein Element haben, das zur Differenz $A \setminus B$ gehört, wir daraus schließen können, dass dieses Element zu A gehört und nicht zu B:

i	$(1)\, x \in A \setminus B$	...
i	$(2)\, x \in A$	$-_{Set}E1(1)$
i	$(3)\, x \notin B$	$-_{Set}E2(1)$

i, j sind dabei Listen von Annahmen.

Theorem 90 (Charakterisierung von Elementen in Differenzmengen ($-_{\neq}I(...)$))**.** *Für alle a, b, c und alle Mengen A gilt:*

a) $c \in A \setminus \{a\} \vdash c \neq a$

b) $c \in A \setminus \{a, b\} \vdash c \neq a$

c) $c \in A \setminus \{a, b\} \vdash c \neq b$

d) $c \in A \setminus B, b \in B \vdash c \neq b$

Beweis. a)

1	(1)	$c \in A \setminus \{a\}$	A
1	(2)	$c \notin \{a\}$	$-_{Set}E2(1)$
1	(3)	$c \neq a$	$\notin E3(2)$

b)

1	(1)	$c \in A \setminus \{a, b\}$	A
1	(2)	$c \notin \{a, b\}$	$-_{Set}E2(1)$
1	(3)	$c \neq a$	$\notin E2(2)$

c)

1	(1)	$c \in A \setminus \{a, b\}$	A
1	(2)	$c \notin \{a, b\}$	$-_{Set}E2(1)$
1	(3)	$c \neq b$	$\notin E2(2)$

d)

1	(1)	$c \in A \setminus B$	A
2	(2)	$b \in B$	A
1	(3)	$c \notin B$	$-_{Set}E2(1)$
4	(4)	$c = b$	A
1, 4	(5)	$b \notin B$	$= E(4, 3)$
1, 2, 4	(6)	$\perp$	$\perp I(2, 5)$
1, 2	(6)	$c \neq b$	$\neg I(4, 6)$

□

Theorem 91 (Charakterisierung von Elementen in Differenzmengen ($-_{\notin}$))**.** *Für alle a, b, c und alle Mengen A gilt:*

a) $\vdash a \notin A \setminus \{a\}$

b) $\vdash a \notin A \setminus \{a, b\}$

c) $\vdash b \notin A \setminus \{a, b\}$

Beweis. a)

1	(1)	$a \in A \setminus \{a\}$	A
	(2)	$a = a$	$= I$
1	(3)	$a \neq a$	$-_{\neq}I(1)$
1	(4)	$\perp$	$\perp I(2, 3)$
	(5)	$a \notin A \setminus \{a\}$	$\neg I(1, 4)$

b)

1	(1)	$a \in A \setminus \{a, b\}$	A
	(2)	$a = a$	$= I$
1	(3)	$a \neq a$	$-_{\neq} I(1)$
1	(4)	$\perp$	$\perp I(2,3)$
	(5)	$a \notin A \setminus \{a, b\}$	$\neg I(1,4)$

c)

1	(1)	$b \in A \setminus \{a, b\}$	A
	(2)	$b = b$	$= I$
1	(3)	$b \neq b$	$-_{\neq} I(1)$
1	(4)	$\perp$	$\perp I(2,3)$
	(5)	$b \notin A \setminus \{a, b\}$	$\neg I(1,4)$

□

4.8 Das Axiom der Vereinigung

Das Axiom der Vereinigung (Union) ist ein weiteres grundlegendes Axiom in der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre. Es ermöglicht die Konstruktion einer Menge, die alle Elemente einer gegebenen Menge von Mengen enthält. Formal ausgedrückt:

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow \exists C (C \in A \wedge x \in C))$$

Dieses Axiom garantiert, dass für jede Menge A, es eine Menge B gibt, die alle Elemente der Mengen in A enthält.

Bemerkung. Das Axiom der Vereinigung ist ein Schlüsselkonzept in der Mengenlehre und ermöglicht die Konstruktion komplexerer Mengenstrukturen. Es dient als Grundlage für die Definition von Vereinigungen von Mengen und ist ein wichtiger Baustein für die Entwicklung der Theorie der Kardinalität, Ordinalität und viele andere Konzepte in der Mengenlehre. Die eindeutige Vereinigung einer Menge A wird oft als $\bigcup A$ oder $\bigcup_{x \in A} x$ bezeichnet. Diese Notation stellt sicher, dass die Vereinigung eindeutig ist, da sie alle Elemente der Mengen in A enthält und durch das Axiom der Vereinigung und das Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt ist.

Theorem 92 (Eindeutigkeit der Vereinigung)**.** *Seien A, B, C, wobei B und C alle Elemente der Mengen in A enthalten, dann sind B und C unter Verwendung des Extensionalitätsaxioms gleich, das heißt:*

$$\forall x (x \in B \leftrightarrow \exists D (D \in A \wedge x \in D)) \wedge \forall x (x \in C \leftrightarrow \exists D (D \in A \wedge x \in D)) \vdash (B = C)$$

Beweis.

1	(1)	$\forall x (x \in B \leftrightarrow \exists D (D \in A \wedge x \in D)) \wedge \forall x (x \in C \leftrightarrow \exists D (D \in A \wedge x \in D))$	A
1	(2)	$Q(x) = \exists D (D \in A \wedge x \in D) \wedge \forall x (x \in B \leftrightarrow Q(x)) \wedge \forall x (x \in C \leftrightarrow Q(x))$	$:= I(1)$
1	(3)	$\forall x (x \in B \leftrightarrow Q(x)) \wedge \forall x (x \in C \leftrightarrow Q(x))$	$\wedge E2(2)$
1	(4)	$B = C$	$\exists! P(x) \mathbb{S}(3)$

□

Regeln für die Vereinigung von Mengen

Die Einführungsregel für die Vereinigung von Mengen ($\bigcup I$) besagt, dass aus der Existenz einer Menge von Mengen A eine Menge B konstruiert werden kann, die alle Elemente der Mengen in A enthält.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & x \in C & ... \\ j & (2) & C \in A & ... \\ i,j & (2) & x \in \bigcup A & \bigcup I(1,2) \end{array}$$

Die Eliminierungsregel für die Vereinigung von Mengen ($\bigcup E$) ermöglicht es, aus der Existenz einer Vereinigungsmenge B zu schließen, dass wenn ein Element x in B enthalten ist, dieses Element in mindestens einer der Mengen in der Menge A enthalten sein muss.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & x \in \bigcup A & ... \\ i & (2) & \exists C(C \in A \wedge x \in C) & \bigcup E(1) \end{array}$$

i, j sind dabei Listen von Annahmen.

4.8.1 Eigenschaften der Vereinigung

Theorem 93 (Teilmengen und Vereinigungen ($\bigcup \subseteq$)). *Sei A eine Teilmenge von B, dann gilt:*

$$A \subseteq B \vdash \bigcup A \subseteq \bigcup B$$

Beweis.

$$\begin{array}{llll} 1 & (1) & A \subseteq B & A \\ 2 & (2) & x \in \bigcup A & A \\ 2 & (3) & \exists X(X \in A \wedge x \in X)A & \bigcup E(2) \\ 4 & (4) & C \in A \wedge x \in C & A \\ 4 & (5) & C \in A & \wedge E1(4) \\ 4 & (6) & x \in C & \wedge E2(4) \\ 1,4 & (7) & C \in B & \subseteq E(5,1) \\ 1,4 & (8) & x \in \bigcup B & \bigcup I(7,6) \\ 1,2 & (9) & x \in \bigcup B & \exists E(3,4,8) \\ 1 & (10) & \bigcup A \subseteq \bigcup B & \subseteq I1(2,9) \end{array}$$

□

4.9 Definition der Vereinigung zweier Mengen

Definition 4.9.1 (Vereinigung). Die Vereinigung von zwei Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die entweder in A oder in B oder in beiden enthalten sind. Dies wird als $A \cup B$ bezeichnet und kann als eine spezielle Anwendung des Axioms der Vereinigung formuliert werden:

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\}$$

Theorem 94 (Vereinigung ($Df.\cup$)). *Für alle Mengen A, B und alle Elemente z gilt:*

$$z \in A \cup B \dashv\vdash (z \in A \vee z \in B)$$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$z \in A \cup B$	A
1	(2)	$z \in \bigcup\{A, B\}$	$Df.Vereinigung$
1	(3)	$\exists C(C \in \{A, B\} \wedge z \in C)$	$\bigcup E(2)$
1	(4)	$C \in \{A, B\} \wedge z \in C$	$\exists E(3)$
1	(5)	$C \in \{A, B\}$	$\wedge E1(4)$
1	(6)	$C = A \vee C = B$	$\in E2(5)$
7	(7)	$C = A$	A
1	(8)	$z \in C$	$\wedge E2(4)$
1, 7	(9)	$z \in A$	$= E(7, 8)$
1, 7	(10)	$z \in A \vee z \in B$	$\vee I1(9)$
11	(11)	$C = B$	A
1, 11	(12)	$z \in B$	$= E(11, 9)$
1, 11	(13)	$z \in A \vee z \in B$	$\vee I2(9)$
1	(14)	$z \in A \vee z \in B$	$\vee E(6, 7, 10, 11, 13)$

$\dashv$:

1	(1)	$z \in A \vee z \in B$	A
2	(2)	$z \in A$	A
	(3)	$A = A$	$= I$
	(4)	$A = A \vee A = B$	$\vee I1(3)$
	(5)	$A \in \{A, B\}$	$\in I2(4)$
2	(6)	$z \in \bigcup\{A, B\}$	$\bigcup I(5, 2)$
2	(7)	$z \in A \cup B$	$Df.Vereinigung$
8	(8)	$z \in B$	A
	(9)	$B = B$	$= I$
	(10)	$A = B \vee B = B$	$\vee I2(9)$
	(11)	$B \in \{A, B\}$	$\in I2(10)$
8	(12)	$z \in \bigcup A, B$	$\bigcup I(11, 8)$
8	(13)	$z \in A \cup B$	$Df.Vereinigung$
1	(14)	$z \in A \cup B$	$\vee E(1, 2, 7, 8, 13)$

□

Regeln für die Vereinigung zweier Mengen

Die Einführungsregel für die Vereinigung zweier Mengen ($\cup I$) besagt, dass, wenn ein Element x in der Menge A oder in der Menge B enthalten ist, es auch in der Vereinigung $A \cup B$ enthalten ist.

i	(1)	$x \in A$	...
i	(2)	$x \in A \cup B$	$\cup I(1)$

i	(1)	$x \in B$	...
i	(2)	$x \in A \cup B$	$\cup I(1)$

i	(1)	$x \in A \vee x \in B$	...
i	(2)	$x \in A \cup B$	$\cup I(1)$

Die Eliminierungsregel für die Vereinigung zweier Mengen ($\cup E$) ermöglicht es, aus der Existenz eines Elements x in der Vereinigung $A \cup B$ zu schließen, dass dieses Element entweder in A oder in B enthalten sein muss.

i	(1)	$x \in A \cup B$	...
	(2)	$x \in A \vee x \in B$	$\cup E(1)$

i ist dabei eine Liste von Annahmen.

Theorem 95 (Vereinigung ($\{.,.\} = \{.\} \cup \{.\}(...)$)). *Für alle a, b gilt:*

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$$

Beweis.

1	(1)	$x \in \{a, b\}$	A
1	(2)	$x = a \vee x = b$	$\in E2(1)$
1	(3)	$x = a \vee x = b$	$\in E2(1)$
4	(4)	$x = a$	A
4	(5)	$x \in \{a\}$	$\in I3(4)$
4	(6)	$x \in \{a\} \vee x \in \{b\}$	$\vee I1(5)$
4	(7)	$x \in \{a\} \cup \{b\}$	$\cup I(6)$
8	(8)	$x = b$	A
8	(9)	$x \in \{b\}$	$\in I3(8)$
8	(10)	$x \in \{a\} \vee x \in \{b\}$	$\vee I2(9)$
8	(11)	$x \in \{a\} \cup \{b\}$	$\cup I(10)$
1	(12)	$x \in \{a\} \cup \{b\}$	$\vee E(3, 4, 7, 8, 11)$
	(13)	$\{a, b\} \subseteq \{a\} \cup \{b\}$	$\subseteq I1(1, 12)$
14	(14)	$x \in \{a\} \cup \{b\}$	A
14	(15)	$x \in \{a\} \vee x \in \{b\}$	$\cup E(14)$
14	(16)	$x \in \{a\} \vee x \in \{b\}$	$\cup E(14)$
17	(17)	$x \in \{a\}$	A
17	(18)	$x = \{a\}$	$\in E3(17)$
17	(19)	$x = \{a\} \vee x = \{b\}$	$\vee I1(18)$
17	(20)	$x \in \{a, b\}$	$\in I2(19)$
21	(21)	$x \in \{b\}$	A
21	(22)	$x = \{b\}$	$\in E3(21)$
21	(23)	$x = \{a\} \vee x = \{b\}$	$\vee I2(22)$
21	(24)	$x \in \{a, b\}$	$\in I2(23)$
14	(25)	$x \in \{a, b\}$	$\vee E(16, 17, 20, 21, 24)$
	(26)	$\{a\} \cup \{b\} \subseteq \{a, b\}$	$\subseteq I1(14, 25)$
	(27)	$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$	$\subseteq, \supseteq E(13, 26)$

□

Theorem 96 (Idempotenz der Vereinigung (Idem. $\vee$)). *Für jede Menge A gilt:*

$$\vdash A = A \cup A$$

Beweis.

1	(1)	$x \in A \cup A$	A
1	(2)	$x \in A \vee x \in A$	$\cup E(1)$
1	(3)	$x \in A$	$\vee Idem.(2)$
	(4)	$A \cup A \subseteq A$	$\subseteq I1(1,3)$
5	(5)	$x \in A$	A
5	(6)	$x \in A \cup A$	$\cup I(5)$
	(7)	$A \subseteq A \cup A$	$\subseteq I1(5,6)$
	(8)	$A = A \cup A$	$\subseteq, \supseteq E(4,7)$

□

Theorem 97 (Kommutativität der Vereinigung (Komm. $\vee$)). *Für alle Mengen A und B gilt:*

$$\vdash A \cup B = B \cup A$$

Beweis.

1	(1)	$x \in A \cup B$	A
1	(2)	$x \in A \vee x \in B$	$\cup E(1)$
1	(3)	$x \in B \vee x \in A$	$\vee Komm.(2)$
1	(4)	$x \in B \cup A$	$\cup I(3)$
	(5)	$A \cup B \subseteq B \cup A$	$\subseteq I1(1,4)$
6	(6)	$x \in B \cup A$	A
6	(7)	$x \in B \vee x \in A$	$\cup E(6)$
6	(8)	$x \in A \vee x \in B$	$\vee Komm.(7)$
6	(9)	$x \in A \cup B$	$\cup I(8)$
	(10)	$B \cup A \subseteq A \cup B$	$\subseteq I1(6,9)$
	(11)	$A \cup B = B \cup A$	$\subseteq, \supseteq E(5,10)$

□

Regeln zur Kommutativität der Vereinigung zweier Mengen

Die Regel für die Überführung von $A \cup B$ zu $B \cup A$ basiert auf der Kommutativität der Vereinigung und kann wie folgt ausgedrückt werden:

i	(1)	$A \cup B$	A
i	(2)	$B \cup A$	$\cup Komm.(1)$

Die Regel, die zeigt, dass wenn ein Element z in $A \cup B$ enthalten ist, es auch in $B \cup A$ enthalten ist, nutzt ebenfalls die Kommutativität der Vereinigung:

i	(1)	$z \in A \cup B$	A
i	(2)	$z \in B \cup A$	$\cup Komm.(1)$

i ist dabei eine Liste von Annahmen.

Theorem 98 (Charakterisierung der Vereinigung als Implikation($\cup / \to I(...)$)). *Für alle Mengen A und B und alle Elemente z gilt:*

1. $z \in A \cup B \dashv\vdash z \notin A \to z \in B$

2. $z \in A \cup B \dashv\vdash z \notin B \to z \in A$

Beweis. 1. $\vdash$:

1	(1)	$z \in A \cup B$	A
1	(2)	$z \in A \vee z \in B$	$\cup E(1)$
3	(3)	$z \in A$	A
3	(4)	$\neg(z \notin A)$	$DN(3)$
3	(5)	$\neg(z \notin A) \vee z \in B$	$\vee I1(4)$
6	(6)	$z \in B$	A
6	(7)	$\neg(z \notin A) \vee z \in B$	$\vee I2(6)$
1	(8)	$\neg(z \notin A) \vee z \in B$	$\vee E(2,3,5,6,8)$
1	(9)	$z \notin A \to z \in B$	$MI(8)$

$\dashv$:

1	(1)	$z \notin A \to z \in B$	A
1	(2)	$\neg(z \notin A) \vee z \in B$	$MI(1)$
3	(3)	$\neg(z \notin A)$	A
3	(4)	$z \in A$	$DN(3)$
3	(5)	$z \in A \vee z \in B$	$\vee I1(4)$
6	(6)	$z \in B$	A
6	(7)	$z \in A \vee z \in B$	$\vee I2(6)$
1	(8)	$z \in A \vee z \in B$	$\vee E(2,3,5,6,7)$
1	(9)	$z \in A \cup B$	$\cup I(8)$

2. $\vdash$:

1	(1)	$z \in A \cup B$	A
1	(2)	$z \in B \cup A$	$= Komm.(1)$
1	(3)	$z \notin B \to z \in A$	1(2)

$\dashv$:

1	(1)	$z \notin A \to z \in B$	A
1	(2)	$z \in B \cup A$	1(1)
1	(3)	$z \in A \cup B$	$= Komm.(2)$

□

Theorem 99 (Vereinigung von drei Mengen ($Df.\cup$)). *Für alle Mengen A, B und C und alle Elemente z gilt:*

$$z \in (A \cup B) \cup C \dashv\vdash (z \in A \vee z \in B) \vee z \in C$$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$z \in (A \cup B) \cup C$	A
1	(2)	$z \in (A \cup B) \vee z \in C$	$\cup E(1)$
3	(3)	$z \in (A \cup B)$	A
3	(4)	$z \in A \vee z \in B$	$\cup E(3)$
3	(5)	$(z \in A \vee z \in B) \vee z \in C$	$\vee I1(4)$
6	(6)	$z \in C$	A
6	(7)	$(z \in A \vee z \in B) \vee z \in C$	$\vee I2(6)$
1	(8)	$(z \in A \vee z \in B) \vee z \in C$	$\vee E(2,3,5,6,7)$

$\dashv$:

1	(1)	$(z \in A \vee z \in B) \vee z \in C$	A
2	(2)	$z \in A \vee z \in B$	A
2	(3)	$z \in (A \cup B)$	$\cup I(2)$
2	(4)	$z \in (A \cup B) \cup C$	$\cup I(2)$
5	(5)	$z \in C$	A
5	(6)	$z \in (A \cup B) \cup C$	$\cup I(5)$
1	(7)	$z \in (A \cup B) \cup C$	$\vee E(1,2,4,5,6)$

□

Theorem 100 (Vereinigung von drei Mengen $(Df.\cup)$)**.** *Für alle Mengen A, B und C und alle Elemente z gilt:*

$$z \in A \cup (B \cup C) \dashv\vdash z \in A \vee (z \in B \vee z \in C)$$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$z \in A \cup (B \cup C)$	A
1	(2)	$z \in A \vee z \in (B \cup C)$	$\cup E(1)$
3	(3)	$z \in (B \cup C)$	A
3	(4)	$z \in B \vee z \in C$	$\cup E(3)$
3	(5)	$z \in A \vee (z \in B \vee z \in C)$	$\vee I1(4)$
6	(6)	$z \in A$	A
6	(7)	$z \in A \vee (z \in B \vee z \in C)$	$\vee I2(6)$
1	(8)	$z \in A \vee (z \in B \vee z \in C)$	$\vee E(2,3,5,6,7)$

$\dashv$:

1	(1)	$z \in A \vee (z \in B \vee z \in C)$	A
2	(2)	$z \in B \vee z \in C$	A
2	(3)	$z \in (B \cup C)$	$\cup I(2)$
2	(4)	$z \in A \cup (B \cup C)$	$\cup I(2)$
5	(5)	$z \in A$	A
5	(6)	$z \in A \cup (B \cup C)$	$\cup I(5)$
1	(7)	$z \in A \cup (B \cup C)$	$\vee E(1,2,4,5,6)$

□

Regeln für die Vereinigung von drei Mengen

Die Einführungsregel für die Vereinigung von drei Mengen ($\cup Ib$) besagt, dass, wenn ein Element z in der Menge A, B oder C enthalten ist, es auch in der Vereinigung $A \cup (B \cup C)$ enthalten ist.

i	(1)	$z \in A \vee (z \in B \vee z \in C)$	...
i	(2)	$z \in A \cup (B \cup C)$	$\cup I(1)$

i	(1)	$(z \in A \vee z \in B) \vee z \in C$	...
i	(2)	$z \in (A \cup B) \cup C$	$\cup I(1)$

Die Eliminierungsregel für die Vereinigung von drei Mengen ($\cup E_3$) ermöglicht es, aus der Existenz eines Elements z in der Vereinigung $A \cup (B \cup C)$ zu schließen, dass dieses Element entweder in A oder in B oder in C enthalten sein muss.

i	(1)	$z \in A \cup (B \cup C)$	...
i	(2)	$z \in A \vee (z \in B \vee z \in C)$	$\cup E(1)$

i	(1)	$z \in (A \cup B) \cup C$	...
i	(2)	$(z \in A \vee z \in B) \vee z \in C$	$\cup E(1)$

i ist dabei eine Liste von Annahmen.

Theorem 101 (Assoziativität der Vereinigung). *Für alle Mengen A, B, und C gilt:*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Beweis.

1	(1)	$x \in (A \cup B) \cup C$	A
1	(2)	$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$	$\cup E(1)$
1	(3)	$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$	$\vee Ass.(2)$
1	(4)	$x \in A \cup (B \cup C)$	$\cup I(3)$
	(5)	$(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$	$\subseteq I1(1,4)$
6	(6)	$x \in A \cup (B \cup C)$	A
6	(7)	$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$	$\cup E(6)$
6	(8)	$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$	$\vee Ass.(7)$
6	(9)	$x \in (A \cup B) \cup C$	$\cup I(8)$
	(10)	$A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$	$\subseteq I1(6,9)$
	(11)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$\subseteq, \supseteq E(5,10)$

□

Theorem 102 (Vereinigung und Durchschnitt von Mengen). *Für alle Mengen A, B und C und alle Elemente z gilt:*

$$z \in A \cup (B \cap C) \dashv\vdash z \in A \vee (z \in B \wedge z \in C)$$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$z \in A \cup (B \cap C)$	A
1	(2)	$z \in A \vee z \in (B \cap C)$	$\cup E(1)$
3	(3)	$z \in A$	A
3	(4)	$z \in A \vee (z \in B \wedge z \in C)$	$\vee I1(3)$
5	(5)	$z \in (B \cap C)$	A
5	(6)	$z \in B$	$\cap E1(5)$
5	(7)	$z \in C$	$\cap E2(5)$
5	(8)	$z \in B \wedge z \in C$	$\wedge I(6,7)$
5	(9)	$z \in A \vee (z \in B \wedge z \in C)$	$\vee I2(8)$
1	(10)	$z \in A \vee (z \in B \wedge z \in C)$	$\vee E(2,3,4,5,9)$

$\dashv$:

1	(1)	$z \in A \vee (z \in B \wedge z \in C)$	A
2	(2)	$z \in A$	A
2	(3)	$z \in (A \cup (B \cap C))$	$\cup I(2)$
4	(4)	$z \in B \wedge z \in C$	A
4	(5)	$z \in B \cap C$	$\cap I(4)$
4	(6)	$z \in A \cup (B \cap C)$	$\cup I(5)$
1	(7)	$z \in A \cup (B \cap C)$	$\vee E(1,2,3,4,6)$

□

Theorem 103 (Vereinigung und Durchschnitt von Mengen)**.** *Für alle Mengen A, B und C und alle Elemente z gilt:*

$$z \in (A \cap B) \cup C \dashv\vdash (z \in A \wedge z \in B) \vee z \in C$$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$z \in (A \cap B) \cup C$	A
1	(2)	$z \in (A \cap B) \vee z \in C$	$\cup E(1)$
3	(3)	$z \in C$	A
3	(4)	$(z \in A \wedge z \in B) \vee z \in C$	$\vee I2(3)$
5	(5)	$z \in (A \cap B)$	A
5	(6)	$z \in A$	$\cap E1(5)$
5	(7)	$z \in B$	$\cap E2(5)$
5	(8)	$z \in A \wedge z \in B$	$\wedge I(6,7)$
5	(9)	$(z \in A \wedge z \in B) \vee z \in C$	$\vee I1(8)$
1	(10)	$(z \in A \wedge z \in B) \vee z \in C$	$\vee E(2,3,4,5,9)$

$\dashv$:

1	(1)	$(z \in A \wedge z \in B) \vee z \in C$	A
2	(2)	$z \in C$	A
2	(3)	$z \in (A \cap B) \cup C$	$\cup I(2)$
4	(4)	$z \in A \wedge z \in B$	A
4	(5)	$z \in A \cap B$	$\cap I(4)$
4	(6)	$z \in (A \cap B) \cup C$	$\cup I(5)$
1	(7)	$z \in (A \cap B) \cup C$	$\vee E(1,2,3,4,6)$

□

Theorem 104 (Vereinigung und Durchschnitt von Mengen)**.** *Für alle Mengen A, B und C und alle Elemente z gilt:*

$$z \in A \cap (B \cup C) \dashv\vdash z \in A \wedge (z \in B \vee z \in C)$$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$z \in A \cap (B \cup C)$	A
1	(2)	$z \in A$	$\cap E1(1)$
1	(3)	$z \in (B \cup C)$	$\cap E2(1)$
1	(4)	$z \in B \vee z \in C$	$\cup E(1)$
1	(5)	$z \in A \wedge (z \in B \vee z \in C)$	$\wedge I(2,4)$

$\dashv$:

1	(1)	$z \in A \wedge (z \in B \vee z \in C)$	A
1	(2)	$z \in A$	$\wedge E1(1)$
1	(3)	$z \in B \vee z \in C$	$\wedge E2(1)$
1	(4)	$z \in (B \cup C)$	$\cup I(3)$
1	(5)	$z \in A \cap (B \cup C)$	$\cap I(2,4)$

□

Theorem 105 (Vereinigung und Durchschnitt von Mengen)**.** *Für alle Mengen A, B und C und alle Elemente z gilt:*

$$z \in (A \cup B) \cap (C \cup D) \dashv\vdash (z \in A \vee z \in B) \wedge (z \in C \vee z \in D)$$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$z \in (A \cup B) \cap (C \cup D)$	A
1	(2)	$z \in (A \cup B)$	$\cap E1(1)$
1	(3)	$z \in (C \cup D)$	$\cap E2(1)$
1	(4)	$z \in A \vee z \in B$	$\cup E(2)$
1	(5)	$z \in C \vee z \in D$	$\cup E(3)$
1	(6)	$(z \in A \vee z \in B) \wedge (z \in C \vee z \in D)$	$\wedge I(4,5)$

$\dashv$:

1	(1)	$(z \in A \vee z \in B) \wedge (z \in C \vee z \in D)$	A
1	(2)	$z \in A \vee z \in B$	$\wedge E1(1)$
1	(3)	$z \in C \vee z \in D$	$\wedge E2(1)$
1	(4)	$z \in (A \cup B)$	$\cup I(2)$
1	(5)	$z \in (C \cup D)$	$\cup I(3)$
1	(6)	$z \in (A \cup B) \cap (C \cup D)$	$\cap I(4,5)$

□

Theorem 106 (Vereinigung und Durchschnitt von Mengen)**.** *Für alle Mengen A, B und C und alle Elemente z gilt:*

$$z \in (A \cap B) \cup (C \cap D) \dashv\vdash (z \in A \wedge z \in B) \vee (z \in C \wedge z \in D)$$

Beweis. $\vdash$:

1	(1)	$z \in (A \cap B) \cup (C \cap D)$	A
1	(2)	$z \in (A \cap B) \vee z \in (C \cap D)$	$\cup E(1)$
3	(3)	$z \in (A \cap B)$	A
3	(4)	$z \in A \wedge z \in B$	$\cap E(3)$
3	(5)	$(z \in A \wedge z \in B) \vee (z \in C \wedge z \in D)$	$\vee I1(4)$
6	(6)	$z \in (C \cap D)$	A
6	(7)	$z \in C \wedge z \in D$	$\cap E(6)$
6	(8)	$(z \in A \wedge z \in B) \vee (z \in C \wedge z \in D)$	$\vee I2(7)$
1	(9)	$(z \in A \wedge z \in B) \vee (z \in C \wedge z \in D)$	$\vee E(2,3,5,6,8)$

$\dashv$:

1	(1)	$(z \in A \wedge z \in B) \vee (z \in C \wedge z \in D)$	A
2	(2)	$(z \in A \wedge z \in B)$	A
2	(3)	$z \in (A \cap B)$	$\cap I(2)$
2	(4)	$z \in (A \cap B) \cup (C \cap D)$	$\cup I(3)$
5	(5)	$(z \in C \wedge z \in D)$	A
5	(6)	$z \in (C \cap D)$	$\cap I(5)$
5	(7)	$z \in (A \cap B) \cup (C \cap D)$	$\cup I(6)$
1	(8)	$z \in (A \cap B) \cup (C \cap D)$	$\vee E(1,2,4,5,7)$

□

Regeln für die Vereinigung und den Durchschnitt von Mengen

Die Einführungsregel für die Vereinigung und den Durchschnitt von Mengen ($\cup \cap I$) ermöglicht es, aus der Tatsache, dass ein Element z in einer spezifischen Kombination von Mengen enthalten ist, zu schließen, dass es auch in der entsprechenden kombinierten Menge enthalten ist. Sie sind wie folgt definiert:

i	(1)	$z \in A \wedge (z \in B \vee z \in C)$	...
i	(2)	$z \in A \cap (B \cup C)$	$\cap \cup I(1)$

i	(1)	$(z \in A \vee z \in B) \wedge z \in C$	...
i	(2)	$z \in (A \cup B) \cap C$	$\cap \cup I(1)$

i	(1)	$z \in A \vee (z \in B \wedge z \in C)$	...
i	(2)	$z \in A \cup (B \cap C)$	$\cap \cup I(1)$

i	(1)	$(z \in A \wedge z \in B) \vee z \in C$	...
i	(2)	$z \in (A \cap B) \cup C$	$\cap \cup I(1)$

i	(1)	$(z \in A \vee z \in B) \wedge (z \in C \vee z \in D)$	...
i	(2)	$z \in (A \cup B) \cap (C \cup D)$	$\cap \cup I(1)$

i	(1)	$(z \in A \wedge z \in B) \vee (z \in C \wedge z \in D)$	...
i	(2)	$z \in (A \cap B) \cup (C \cap D)$	$\cap \cup I(1)$

Die Eliminierungsregel für die Vereinigung und den Durchschnitt von Mengen ($\cup\cap E$) ermöglicht es, aus der Existenz eines Elements z in einer kombinierten Menge zu schließen, dass dieses Element spezifischen Bedingungen in Bezug auf die ursprünglichen Mengen entspricht. Sie sind wie folgt definiert:

i	(1)	$z \in A \cap (B \cup C)$	...
i	(2)	$z \in A \wedge (z \in B \vee z \in C)$	$\cap\cup E(1)$

i	(1)	$z \in (A \cup B) \cap C$	...
i	(2)	$(z \in A \vee z \in B) \wedge z \in C$	$\cap\cup E(1)$

i	(1)	$z \in A \cup (B \cap C)$	...
i	(2)	$z \in A \vee (z \in B \wedge z \in C)$	$\cap\cup E(1)$

i	(1)	$z \in (A \cap B) \cup C$	...
i	(2)	$(z \in A \wedge z \in B) \vee z \in C$	$\cap\cup E(1)$

i	(1)	$z \in (A \cup B) \cap (C \cup D)$	...
i	(2)	$(z \in A \vee z \in B) \wedge (z \in C \vee z \in D)$	$\cap\cup E(1)$

i	(1)	$z \in (A \cap B) \cup (C \cap D)$	...
i	(2)	$(z \in A \wedge z \in B) \vee (z \in C \wedge z \in D)$	$\cap\cup E(1)$

Theorem 107 (Distributivität der Vereinigung über den Schnitt (Dist. $\vee\wedge$))**.** *Für alle Mengen A, B, und C gilt:*

$$\vdash A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Beweis.

1	(1)	$x \in A \cup (B \cap C)$	A
1	(2)	$x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$	$\cap\cup E(1)$
1	(3)	$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$	$\wedge\vee Dis.(2)$
1	(4)	$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$\cap\cup I(3)$
	(5)	$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$\subseteq I1(1,4)$
6	(6)	$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$	A
6	(7)	$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$	$\cap\cup E(6)$
6	(8)	$x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$	$\wedge\vee Dis.(7)$
6	(9)	$x \in A \cup (B \cap C)$	$\cap\cup I(8)$
	(10)	$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$	$\subseteq I1(6,9)$
	(11)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$\subseteq, \supseteq E(5,10)$

□

Theorem 108 (Distributivität der Vereinigung über den Schnitt (Dist. $\vee\wedge$))**.** *Für alle Mengen A, B, und C gilt:*

$$\vdash (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Beweis.

1	(1)	$x \in (A \cap B) \cup C$	A
1	(2)	$(x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C$	$\cap \cup E(1)$
1	(3)	$(x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C)$	$\wedge \vee Dis.(2)$
1	(4)	$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$	$\cap \cup I(3)$
	(5)	$(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$	$\subseteq I1(1,4)$
6	(6)	$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$	A
6	(7)	$(x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C)$	$\cap \cup E(6)$
6	(8)	$(x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C$	$\wedge \vee Dis.(7)$
6	(9)	$x \in (A \cap B) \cup C$	$\cap \cup I(8)$
	(10)	$(A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$	$\subseteq I1(6,9)$
	(11)	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	$\subseteq, \supseteq E(5,10)$

□

Theorem 109 (Distributivität des Schnitts über die Vereinigung (Dist. $\wedge\vee$))**.**
Für alle Mengen A, B, und C gilt:

$$\vdash A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Beweis.

1	(1)	$x \in A \cap (B \cup C)$	A
1	(2)	$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$	$\cap \cup E(1)$
1	(3)	$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$	$\wedge \vee Dis.(2)$
1	(4)	$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$\cap \cup I(3)$
	(5)	$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$\subseteq I1(1,4)$
6	(6)	$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$	A
6	(7)	$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$	$\cap \cup E(6)$
6	(8)	$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$	$\wedge \vee Dis.(7)$
6	(9)	$x \in A \cap (B \cup C)$	$\cap \cup I(8)$
	(10)	$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$	$\subseteq I1(6,9)$
	(11)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$\subseteq, \supseteq E(5,10)$

□

Theorem 110 (Distributivität der Vereinigung über den Schnitt (Dist. $\vee\wedge$))**.**
Für alle Mengen A, B, und C gilt:

$$\vdash (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Beweis.

1	(1)	$x \in (A \cap B) \cup C$	A
1	(2)	$(x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C$	$\cap \cup E(1)$
1	(3)	$(x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C)$	$\wedge \vee Dis.(2)$
1	(4)	$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$	$\cap \cup I(3)$
	(5)	$(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$\subseteq I1(1,4)$
6	(6)	$x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$	A
6	(7)	$(x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C)$	$\cap \cup E(6)$
6	(8)	$(x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C$	$\wedge \vee Dis.(7)$
6	(9)	$x \in (A \cup B) \cap C$	$\cap \cup I(8)$
	(10)	$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$	$\subseteq I1(6,9)$
	(11)	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$\subseteq, \supseteq E(5,10)$

□

4.9.1 Eigenschaften von Teilmengen in Bezug auf Vereinigung und Durchschnitt

Die folgenden Regeln kürzen wir im folgenden mit $R(\subseteq, \cap/\cup)$ oder $R(\subseteq, \cup/\cap)$ab.

Theorem 111 (Teilmengen und Vereinigung)**.** *Für alle Mengen A, B, und C gilt:*

$$A \subseteq C, B \subseteq C \vdash A \cup B \subseteq C$$

Beweis.

1	(1)	$A \subseteq C$	A
2	(2)	$B \subseteq C$	A
3	(3)	$x \in A \cup B$	A
3	(4)	$x \in A \vee x \in B$	$\cup E(3)$
5	(5)	$x \in A$	A
1, 5	(6)	$x \in C$	$\subseteq E(5,1)$
7	(7)	$x \in B$	A
2, 7	(8)	$x \in C$	$\subseteq E(7,2)$
1, 2, 3	(9)	$x \in C$	$\vee E(3,5,6,7,8)$
1, 2	(10)	$A \cup B \subseteq C$	$\subseteq I1(3.9)$

□

Theorem 112 (Teilmengen und Vereinigung mit einer weiteren Menge)**.** *Für alle Mengen A, B, und C gilt:*

$$A \subseteq B \vdash A \cup C \subseteq B \cup C$$

Beweis.

1	(1)	$A \subseteq B$	A
2	(2)	$x \in A \cup C$	A
2	(3)	$x \in A \vee x \in C$	$\cup E(2)$
4	(4)	$x \in A$	A
1, 4	(5)	$x \in B$	$\subseteq E(4,1)$
1, 4	(6)	$x \in B \cup C$	$\cup I(5)$
7	(7)	$x \in C$	A
7	(8)	$x \in B \cup C$	$\cup I(6)$
1, 2	(9)	$x \in B \cup C$	$\vee E(3,4,6,7,8)$
1	(10)	$A \cup C \subseteq B \cup C$	$\subseteq I1(2,9)$

□

Theorem 113 (Teilmengen und Durchschnitt mit einer weiteren Menge)**.** *Für alle Mengen A, B, und C gilt:*

$$A \subseteq B \vdash A \cap C \subseteq B \cap C$$

Beweis.

1	(1)	$A \subseteq B$	A
2	(2)	$x \in A \cap C$	A
2	(3)	$x \in A$	$\cap E1(2)$
2	(4)	$x \in C$	$\cap E2(2)$
1, 2	(5)	$x \in B$	$\subseteq E(3,1)$
1, 2	(6)	$x \in B \cap C$	$\cap I(5,4)$
1	(6)	$A \cap C \subseteq B \cap C$	$\cap I(5,4)$

□

Theorem 114 (Teilmengen und Vereinigung von zwei Paaren $(a, b \subset c, d \vdash a \cup b \subset c \cup d(...))$)**.** *Für alle Mengen A, B, C, und D gilt:*

$$A \subseteq B, C \subseteq D \vdash A \cup C \subseteq B \cup D$$

Beweis.

1	(1)	$A \subseteq B$	A
1	(2)	$C \subseteq D$	A
3	(3)	$x \in A \cup C$	A
3	(4)	$x \in A \vee x \in C$	$\cup E(3)$
5	(5)	$x \in A$	A
1, 5	(6)	$x \in B$	$\subseteq E(5,1)$
1, 5	(7)	$x \in B \cup C$	$\cup I(6)$
8	(8)	$x \in C$	A
8	(9)	$x \in D$	$\subseteq E(8,2)$
2, 8	(10)	$x \in B \cup D$	$\cup I(9)$
1, 2, 3	(11)	$x \in B \cup D$	$\vee E(4,5,7,8,10)$
1, 2	(12)	$A \cup C \subseteq B \cup D$	$\subseteq I1(3,11)$

□

Theorem 115 (Teilmengen und Durchschnitt von zwei Paaren ($a, b \subset c, d \vdash a \cap b \subset c \cap d(...)$)). *Für alle Mengen A, B, C, und D gilt:*

$$A \subseteq B, C \subseteq D \vdash A \cap C \subseteq B \cap D$$

Beweis.

1	(1)	$A \subseteq B$	A
2	(2)	$C \subseteq D$	A
3	(3)	$x \in A \cap C$	A
3	(4)	$x \in A$	$\cap E(3)$
3	(5)	$x \in C$	$\cap E(3)$
1, 3	(6)	$x \in B$	$\subseteq E(4, 1)$
2, 3	(7)	$x \in D$	$\subseteq E(5, 2)$
1, 2, 3	(8)	$x \in B \cap D$	$\cap I(6, 7)$
1, 2	(9)	$A \cap C \subseteq B \cap D$	$\subseteq E(3, 8)$

□

Theorem 116 (Vereinigung ($\{., .\} \subseteq . \cup .(...)$)). *Für alle Mengen A, B und alle Elemente z gilt:*

$$a \in A, b \in B \vdash \{a, b\} \subseteq A \cup B$$

Beweis.

1	(1)	$a \in A$	A
2	(2)	$b \in B$	A
1	(3)	$\{a\} \subseteq A$	$\{.\} \rightarrow \subseteq (1)$
2	(4)	$\{b\} \subseteq B$	$\{.\} \rightarrow \subseteq (2)$
1, 2	(5)	$\{a\} \cup \{b\} \subseteq A \cup B$	$a, b \subset c, d \vdash a \cup b \subset c \cup d(3, 4)$
	(6)	$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$	$\{., .\} = \{.\} \cup \{.\}()$
	(7)	$\{a, b\} \subseteq A \cup B$	$= E(6, 5)$

□

4.10 Das Axiom der Potenzmenge

Das Axiom der Potenzmenge ist ein weiteres grundlegendes Axiom in der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre. Es ermöglicht die Konstruktion einer Menge, die alle Teilmengen einer gegebenen Menge enthält. Formal ausgedrückt:

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq A)$$

Dieses Axiom garantiert, dass für jede Menge A, es eine Menge B gibt, die alle Teilmengen von A enthält. Die Menge B heißt Potenzmenge von A.

4.10.1 Eigenschaften der Potenzmenge

Die Potenzmenge B enthält alle Teilmengen der Menge A.

Theorem 117 (Eindeutigkeit der Potenzmenge)**.** *Seien A, B und C Mengen, wobei B und C Potenzmengen von A sind. Unter Verwendung des Extensionalitätsaxioms gilt $B = C$, das heißt:*

$$\forall x(x \in B \leftrightarrow x \subseteq A) \wedge \forall x(x \in C \leftrightarrow x \subseteq A) \vdash B = C$$

Beweis.

1	(1)	$\forall x(x \in B \leftrightarrow x \subseteq A) \wedge \forall x(x \in C \leftrightarrow x \subseteq A)$	A
1	(2)	$Q(x) = (x \subseteq A) \wedge \forall x(x \in B \leftrightarrow Q(x)) \wedge \forall x(x \in C \leftrightarrow Q(x))$	$:= I(1)$
$1, 2$	(3)	$\forall x(x \in B \leftrightarrow Q(x)) \wedge \forall x(x \in C \leftrightarrow Q(x))$	$\wedge E2(2)$
$1, 2$	(4)	$B = C$	$\exists! P(x)\mathbb{S}(3)$

□

Bemerkung. Das Axiom der Potenzmenge ist ein Schlüsselkonzept in der Mengenlehre und ermöglicht die Konstruktion komplexerer Mengenstrukturen. Es dient als Grundlage für die Definition von Potenzmengen und ist ein wichtiger Baustein für die Entwicklung der Theorie der Kardinalität, Ordinalität und viele andere Konzepte in der Mengenlehre. Die eindeutige Potenzmenge einer Menge A wird oft als $\mathcal{P}(A)$ bezeichnet. Diese Notation stellt sicher, dass die Potenzmenge eindeutig ist, da sie alle Teilmengen der Menge A enthält und durch das Axiom der Potenzmenge und das Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt ist.

Regeln für die Potenzmenge

Die Einführungsregel für die Potenzmenge ($\mathcal{P}I$) besagt, dass, wenn eine Menge x eine Teilmenge der Menge A ist, x auch in der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ enthalten ist.

i	(1)	$x \subseteq A$	...
i	(2)	$x \in \mathcal{P}(A)$	$\mathcal{P}I(1)$

Die Eliminierungsregel für die Potenzmenge ($\mathcal{P}E$) ermöglicht es, aus der Existenz einer Menge x in der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ zu schließen, dass x eine Teilmenge von A ist.

i	(1)	$x \in \mathcal{P}(A)$	...
i	(2)	$x \subseteq A$	$\mathcal{P}E(1)$

i ist dabei eine Liste von Annahmen.

Theorem 118 (Teilmengen und Potenzmengen ($\subseteq \rightarrow \mathcal{P}(...)$))**.** *Sei A eine Teilmenge von B, dann gilt:*

$$A \subseteq B \vdash \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$$

Beweis.

1	(1)	$A \subseteq B$	A
2	(2)	$x \in \mathcal{P}(A)$	A
2	(3)	$x \subseteq A$	$\mathcal{P}E(2)$
1, 2	(4)	$x \subseteq B$	$\subseteq (Trans.)(3,1)$
1, 2	(5)	$x \in \mathcal{P}(B)$	$\mathcal{P}I(4)$
1	(6)	$\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$	$\subseteq I1(2,5)$

□

Theorem 119 (Elemente und ihre Einermengen in der Potenzmenge (EiP))**.** *Sei A eine Menge, dann gilt für alle a:*

$$a \in A \vdash \{a\} \in \mathcal{P}(A)$$

Beweis.

1	(1)	$a \in A$	A
1	(2)	$\{a\} \subseteq A$	$\{.\} \rightarrow \subseteq (1)$
1	(3)	$a \in \mathcal{P}(A)$	$\mathcal{P}I(2)$

□

Theorem 120. *Seien A Mengen, dann gilt für alle a:*

$$a \in \mathcal{P}(A) \vdash \forall B(a \in \mathcal{P}(A \cup B))$$

Beweis.

1	(1)	$a \in \mathcal{P}(A)$	A
1	(2)	$a \subseteq A$	$\mathcal{P}E(1)$
1	(2)	$\{a\} \subseteq A$	$\{.\} \rightarrow \subseteq (1)$
1	(3)	$a \in \mathcal{P}(A)$	$\mathcal{P}I(2)$

□

4.11 Das kartesische Produkt

Definition 4.11.1 (Geordnetes Paar)**.** Für alle a und b definieren wir das geordnete Paar (a, b), als folgende Paarmenge:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Bemerkung. Ein geordnetes Paar ist eine Paarmenge und damit eindeutig bestimmt.

Regeln für geordnete Paare

Die Einführungsregel für das geordnete Paar ($\mathcal{O}I$) besagt, dass aus zwei gegebenen Elemente a und b und der Aussage $P(\{\{a\},\{a,b\}\})$ die Aussage $P((a,b))$ abgeleitet werden kann.

i	(1)	$P(\{x,\{x,y\}\})$	...
i	(2)	$P((x,y))$	$(.,.)I(1)$

Die Einführungsregel für das geordnete Paar ($\mathcal{O}I$) besagt, dass aus zwei gegebenen Elemente a und b und der Aussage $P((a,b))$ die Aussage $P(\{\{a\},\{a,b\}\})$ abgeleitet werden kann.

i	(1)	$P((x,y))$	...
i	(2)	$P(\{x,\{x,y\}\})$	$(.,.)E(1)$

i ist dabei eine Liste von Annahmen.

Theorem 121 (Obermenge geordneter Paare ($\supseteq (.,.)(...)$))**.** *Seien a und b Elemente von Mengen A und B respektive. Dann ist das geordnete Paar (a,b) ein Element der Menge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$. Das heißt:*

$$a\in A, b\in B\vdash (a,b)\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$$

Beweis.

1	(1)	$a\in A$	A
2	(2)	$b\in B$	A
1, 2	(3)	$\{a,b\}\subseteq A\cup B$	$\{.,.\}\subseteq .\cup .(1,2)$
1, 2	(4)	$\{a,b\}\in\mathcal{P}(A\cup B)$	$\mathcal{P}I(3)$
1	(5)	$a\in A\cup B$	$\cup I(1)$
1	(6)	$\{a\}\in\mathcal{P}(A\cup B)$	$\mathcal{P}I(5)$
1, 2	(7)	$\{\{a\},\{a,b\}\}\subseteq\mathcal{P}(A\cup B)$	$\{.,.\}\subseteq .\cup .(6,4)$
1, 2	(8)	$\{\{a\},\{a,b\}\}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$	$\mathcal{P}I(7)$
1, 2	(9)	$(a,b)\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$	$(.,.)I(8)$

□

Theorem 122 (Existenz des kartesischen Produkts)**.** *Seien A und B Mengen. Dann existiert eine Menge C so, dass für alle Elemente x gilt:*

$$\exists C\forall x(x\in C\leftrightarrow(\exists a\in A\exists b\in B(x=(a,b))))$$

Beweis.

1	(1)	$\exists a \in A \exists b \in B(x = (a, b))$	A
1	(2)	$\exists a(a \in A \land \exists b \in B(x = (a, b)))$	$\exists_{Set} E1(1)$
3	(3)	$m \in A \land \exists b \in B(x = (m, b))$	A
3	(4)	$m \in A$	$\land E1(3)$
3	(5)	$\exists b \in B(x = (m, b)$	$\land E2(3)$
3	(6)	$\exists b(b \in B \land x = (m, b))$	$\exists_{Set} E1(5)$
7	(7)	$n \in B \land x = (m, n)$	A
7	(8)	$n \in B$	$\land E1(7)$
7	(9)	$x = (m, n)$	$\land E2(7)$
3, 7	(10)	$(m, n) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$	$\supseteq (.,.)(4, 8)$
3, 7	(11)	$x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$	$= E(9, 10)$
3	(12)	$x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$	$\exists E(6, 7, 11)$
1	(13)	$x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$	$\exists E(2, 3, 12)$
	(14)	$\exists a \in A \exists b \in B(x = (a, b)) \to x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$	$\to I(1, 13)$
	(15)	$\forall x(\exists a \in A \exists b \in B(x = (a, b)) \to x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)))$	$\forall I(14)$
	(16)	$\exists D(\forall x(\exists a \in A \exists b \in B(x = (a, b)) \to x \in D)))$	$\exists I(15)$
	(17)	$\exists C \forall x(x \in C \leftrightarrow (\exists a \in A \exists b \in B(x = (a, b))))$	$Auss 1.16$

□

Theorem 123 (Eindeutigkeit des kartesischen Produkts)**.** *Seien E und F zwei Mengen, die beide das kartesische Produkt von A und B darstellen. Dann sind diese unter Verwendung des Extensionalitätsaxioms gleich, das heißt:*

$$(\forall x(x \in E \leftrightarrow (\exists a \in A \exists b \in B(x = (a, b)))) \land \forall x(x \in F \leftrightarrow (\exists a \in A \exists b \in B(x = (a, b))))) \vdash (E = F)$$

Beweis.

1	(1)	$\forall x(x \in E \leftrightarrow (\exists a \in A \exists b \in B(x = (a, b)))) \land \forall x(x \in F \leftrightarrow (\exists a \in A \exists b \in B(x = (a, b))))$	A
1	(2)	$Q(x) = \exists a \in A \exists b \in B(x = (a, b)) \land \forall x(x \in B \leftrightarrow Q(x)) \land \forall x(x \in C \leftrightarrow Q(x))$	$:= I(1)$
1	(3)	$\forall x(x \in E \leftrightarrow Q(x)) \land \forall x(x \in F \leftrightarrow Q(x))$	$\land E2(2)$
1	(4)	$E = F$	$\exists ! P(x)\mathbb{S}$

□

Definition 4.11.2 (Kartesisches Produkt $(A \times B)$)**.** Das kartesische Produkt von zwei Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b), wobei a ein Element von A und b ein Element von B ist. Dies wird als $A \times B$ bezeichnet und kann als eine spezielle Anwendung des Axioms der Potenzmengen formuliert werden:

$$A \times B = \{x \mid \exists a \in A \exists b \in B(x = (a, b))\}$$

Bemerkung. Das kartesische Produkt ist gemäß des vorherigen Theorems eine Menge.

Einführungsregel für das kartesische Produkt ($\times I$)

Die Einführungsregel für das kartesische Produkt ermöglicht es, aus der Zugehörigkeit zu den Mengen A und B die Zugehörigkeit eines geordneten Paares zum kartesischen Produkt $A \times B$ abzuleiten.

i	(1)	$a \in A$	...
j	(2)	$b \in B$	...
i, j	(3)	$(a, b) \in A \times B$	$\times I(1, 2)$

i, j sind dabei Listen von Annahmen.

Eliminierungsregel für das kartesische Produkt ($\times E$)

Die Eliminierungsregel für das kartesische Produkt ermöglicht es, aus der Zugehörigkeit eines geordneten Paares zum kartesischen Produkt $A \times B$ die Zugehörigkeit der Elemente zu ihren jeweiligen Mengen abzuleiten.

i	(1)	$(a, b) \in A \times B$	...
i	(2)	$a \in A$	$\times E1(1)$
i	(3)	$b \in B$	$\times E2(1)$

i, j sind dabei Listen von Annahmen.

4.12 Das Axiom der Unendlichkeit

Das Axiom der Unendlichkeit ($Inf.$) ist ein weiteres grundlegendes Axiom in der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre. Es garantiert die Existenz mindestens einer unendlichen Menge und ist somit die Grundlage für die Entwicklung der Theorie der natürlichen Zahlen in der Mengenlehre. Formal ausgedrückt:

$$\exists A(\emptyset \in A \land \forall x \in A(x \cup \{x\} \in A))$$

Dieses Axiom garantiert, dass es mindestens eine Menge A gibt, die das leere Set enthält und für jedes Element x in A, das Set $x \cup \{x\}$ ebenfalls in A ist.

4.12.1 Die natürlichen Zahlen

Definition 4.12.1 (Existenz der natürlichen Zahlen in ZF ($Df.\mathbb{N}$))**.** Unter Verwendung des Axioms der Unendlichkeit und des Aussonderungsaxioms kann die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in der ZF-Mengenlehre definiert werden als:

$$\mathbb{N} := \bigcap\{A \mid \emptyset \in A \land \forall x \in A(x \cup \{x\} \in A)\}$$

Regeln für die Zugehörigkeit zu den natürlichen Zahlen

Basierend auf unserer Definition für die natürlichen Zahlen können wir zwei grundlegende Regeln formulieren: die Einführungs- und die Eliminierungsregel. Diese basieren auf den Regeln für den unendlichen Schnitt (siehe z.B. $\bigcap I(...)$).

Die Einführungsregel für die natürlichen Zahlen ($\in \mathbb{N}I(...)$) besagt, dass wenn wir zeigen können, dass ein Element x in jeder Menge enthalten ist, die das Axiom der Unendlichkeit erfüllt, dann ist x ein Element der natürlichen Zahlen.

$$\begin{array}{lll} i & (1) & \forall A(\emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A) \to x \in A) & ... \\ i & (2) & x \in \mathbb{N} & \in \mathbb{N}I(1) \end{array}$$

Die Eliminierungsregel für den unendlichen Schnitt ($\in \mathbb{N}E(...)$) besagt, dass wenn wir wissen, dass ein Element x ein Element von $\mathbb{N}$ ist, dann diese Eigenschaft P erfüllt, dann ist x auch in B enthalten.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & x \in \mathbb{N} & ... \\ i & (2) & \forall A(\emptyset \in A \wedge \forall x \in A(x \cup \{x\} \in A) \to x \in A) & \in \mathbb{N}E(1) \end{array}$$

i sind dabei Listen von Annahmen.

Regeln für die Nichtzugehörigkeit zu den natürlichen Zahlen

Um das Konzept der natürlichen Zahlen weiter zu verfeinern, führen wir Regeln für den Umgang mit der Negation, d.h., der Nichtzugehörigkeit zu den natürlichen Zahlen, ein. Diese Regeln sind essentiell für Beweise, die die Nichtzugehörigkeit einer Zahl zu den natürlichen Zahlen behandeln.

Die Einführungsregel für $x \notin \mathbb{N}$ ($\notin \mathbb{N}I(...)$) besagt, dass, wenn gezeigt werden kann, dass ein Element x in einer Menge nicht enthalten ist, die das Axiom der Unendlichkeit erfüllt, dann ist x kein Element der natürlichen Zahlen.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & \exists A(\emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A) \wedge x \notin A) & ... \\ i & (2) & x \notin \mathbb{N} & \notin \mathbb{N}I(1) \end{array}$$

Die Eliminierungsregel für $x \notin \mathbb{N}$ ($\notin \mathbb{N}E(...)$) ermöglicht es uns, aus der Tatsache, dass x nicht zu $\mathbb{N}$ gehört, die Existenz einer Menge zu folgern, welche das Axiom der Unendlichkeit erfüllt und x nicht enthält.

$$\begin{array}{llll} i & (1) & x \notin \mathbb{N} & ... \\ i & (2) & \exists A(\emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A) \wedge x \notin A) & \notin \mathbb{N}E(1) \end{array}$$

Hierbei ist i eine Liste von Annahmen.

Theorem 124 (Leere Menge als Element von $\mathbb{N}$ ($\emptyset \in \mathbb{N}$))**.**

$$\vdash \emptyset \in \mathbb{N}$$

Beweis.

1	(1)	$\emptyset \in A \land \forall x \in A(x \cup \{x\} \in A$	A
1	(2)	$\emptyset \in A$	$\land E1(1)$
	(3)	$\emptyset \in A \land \forall x \in A(x \cup \{x\} \in A \rightarrow \emptyset \in A$	$= I1, 2$
	(4)	$\emptyset \in \mathbb{N}$	$\in \mathbb{N}I(3)$

□

Theorem 125 (Nachfolger als Element von $\mathbb{N}$ ($n+1 \in \mathbb{N}$))**.** *Für alle n gilt:*

$$n \in \mathbb{N} \vdash n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$$

Beweis.

1	(1)	$n \in \mathbb{N}$	A
2	(2)	$\emptyset \in A \land \forall x \in A(x \cup \{x\} \in A)$	A
1	(3)	$\forall X(\emptyset \in X \land \forall y \in X(y \cup \{y\} \in X) \rightarrow n \in X)$	$\in \mathbb{N}E(1)$
1	(4)	$\emptyset \in A \land \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A) \rightarrow n \in A$	$\in \mathbb{N}E(1)$
1, 2	(5)	$n \in A$	$\rightarrow E(4, 2)$
2	(6)	$\forall x \in A(x \cup \{x\} \in A)$	$\rightarrow E(4, 2)$
1, 2	(7)	$n \cup \{n\} \in A$	$\forall_{Set} E3(5, 6)$
1	(8)	$\emptyset \in A \land \forall x \in A(x \cup \{x\} \in A) \rightarrow n \cup \{n\} \in A$	$\rightarrow I(2, 7)$
1	(9)	$\forall x(\emptyset \in X \land \forall x \in X(x \cup \{x\} \in X) \rightarrow n \cup \{n\} \in X)$	$\rightarrow I(8)$
1	(10)	$n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$	$\in \mathbb{N}I(9)$

□

Definition 4.12.2 (Definition der Zahl 0)**.** Die natürliche Zahl 0 wird definiert als die leere Menge:

$$0 := \emptyset.$$

Definition 4.12.3 (Definition der Zahl 1)**.** Die natürliche Zahl 1 wird definiert als:

$$1 := 0 \cup \{0\}.$$

Definition 4.12.4 (Definition des Nachfolgers $n + 1 - def.(...)$)**.** Für eine natürliche Zahl n definieren wir dessen Nachfolger $n + 1$ wie folgt:

$$n \in \mathbb{N} \rightarrow n + 1 := n \cup \{n\}$$

Regeln für die Zugehörigkeit zu natürlichen Zahlen

Wir führen im Folgenden die Regeln der Elementzugehörigkeit von $0 \in \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{N}$ und $n + 1 \in \mathbb{N}$ unter der Voraussetzung, dass $n \in \mathbb{N}$ ist, ein:

$$(1) \quad 0 \in \mathbb{N} \quad 0 \in \mathbb{N}$$

Daraus folgt: $0 \in \mathbb{N}$.

(1)	$1 \in \mathbb{N}$	$1 \in \mathbb{N}$

i	(1)	$n \in \mathbb{N}$	A
i	(2)	$n+1 \in \mathbb{N}$	$(n+1) \in \mathbb{N}(1)$

i ist dabei eine Liste von Annahmen.

Diese Regeln und Definitionen bilden die Grundlage für das Verständnis der Konstruktion der natürlichen Zahlen und ihrer Eigenschaften gemäß den Peano-Axiomen.

Theorem 126 (Erweiterung um Einermenge$\in I5$)**.** *Für jede Menge B gilt:*

a) $\vdash a \in A \cup \{a\}$

b) $\vdash a \in \{a\} \cup A$

Beweis. 1.

(1)	$a \in \{a\}$	$\in I4$
(1)	$a \in A \cup \{a\}$	$\cup I(1)$

2.

(1)	$a \in \{a\}$	$\in I4$
(1)	$a \in \{a\} \cup A$	$\cup I(1)$

□

Theorem 127 (Erweiterungsmenge ist keine Teilmenge$\nsubseteq I(...)$)**.** *Für alle Mengen A, B und alle a gilt:*

$$a \notin B, A = B \cup \{a\} \vdash A \nsubseteq B$$

Beweis.

1	(1)	$a \notin B$	A
2	(2)	$A = B \cup \{a\}$	A
3	(3)	$A \subseteq B$	A
	(4)	$a \in B \cup \{a\}$	$\in I5$
2	(5)	$a \in A$	$= E(2,4)$
$2,3$	(6)	$a \in B$	$\subseteq E(5,3)$
$2,3$	(7)	$a \in B$	$\subseteq E(5,3)$
$1,2,3$	(8)	$\perp$	$\perp I(1,7)$
$1,2$	(9)	$A \nsubseteq B$	$\perp I(1,7)$

□

Theorem 128 (Existenz des Vorgängers in $\mathbb{N}$ $(n-1) \in \mathbb{N}(...)$)**.** *Für alle m gilt:*

$$m \in \mathbb{N}, m \neq 0 \vdash \exists x \in \mathbb{N}(x + 1 = m)$$

Beweis.

1	(1)	$m \in \mathbb{N}$	A
2	(2)	$m \neq 0$	A
3	(3)	$\forall x \in \mathbb{N}(x + 1 \neq m)$	A
3	(4)	$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid (n+1) \neq m\}$	$M = \{M \mid P\}(3)$
5	(5)	$A := \mathbb{N} \setminus \{m\}$	A
	(6)	$m \notin \mathbb{N} \setminus \{m\}$	$-_{\notin}$
	(7)	$m \notin A$	$:= E(5, 6)$
	(8)	$0 \in \mathbb{N}$	$0 \in \mathbb{N}$
2	(9)	$0 \notin \{m\}$	$\notin I3(2)$
2	(10)	$0 \in \mathbb{N} \setminus \{m\}$	$-_{Set}I(8, 9)$
2	(11)	$0 \in A$	$:= E(5, 10)$
11	(12)	$y \in \mathbb{N} \setminus \{m\}$	A
3, 12	(13)	$y + 1 \neq \{m\}$	$\forall_{Set}E3(3, 12)$
12	(14)	$y \in \mathbb{N}$	$-_{Set}E1(12)$
12	(15)	$y + 1 \in \mathbb{N}$	$(n + 1) \in \mathbb{N}(14)$
3, 12	(16)	$y + 1 \in \mathbb{N} \setminus \{m\}$	$-_{Set}I(12, 15)$
3	(17)	$\forall y \in \mathbb{N} \setminus \{m\}(y + 1 \in \mathbb{N} \setminus \{m\})$	$\forall_{Set}I1(11, 16)$
3	(18)	$\forall y \in A(y + 1 \in A)$	$:= E(5, 17)$
2, 3	(19)	$0 \in A \wedge \forall y \in A(y + 1 \in A)$	$\wedge I(11, 18)$
2, 3	(20)	$(0 \in A \wedge \forall y \in A(y + 1 \in A)) \wedge m \notin A$	$\wedge I(19, 7)$
2, 3	(21)	$m \notin \mathbb{N}$	$\notin \mathbb{N}I(20)$
1, 2, 3	(22)	$\bot$	$\bot I(1, 21)$
1, 2	(23)	$\neg(\forall x \in \mathbb{N}(x + 1 \neq m))$	$\neg I(3, 22)$
1, 2	(24)	$\exists x \in \mathbb{N}(x + 1 = m)$	$\neg\forall_{Set}Df.(23)$

□

4.13 Das Axiom der Regularität

Das Axiom der Regularität (Reg.), auch als Axiom der Fundierung bekannt, ist ein weiteres grundlegendes Axiom in der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre. Es wird verwendet, um das Induktionsprinzip zu beweisen. Formal ausgedrückt:

$$\forall A(A \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in A(x \cap A = \emptyset))$$

Regel der Regularität

Wir führen im Folgenden die Regel der Regularität ein. Diese Regel ermöglicht es, aus der Annahme, dass eine Menge A nicht leer ist ($A \neq \emptyset$), die Existenz eines Elements x in A zu schlussfolgern, für das gilt, dass x und A disjunkt sind ($x \cap A = \emptyset$):

i	(1)	$A \neq \emptyset$	A
i	(2)	$\exists x \in A(x \cap A = \emptyset)$	$RegI(1)$

i ist dabei eine Liste von Annahmen.

Theorem 129 (Prinzip der einseitigen Elementbeziehung $\notin$ $AEP(...)$)**.** *Für alle a und b gilt:*

$$a \in b \vdash b \notin a.$$

Beweis.

1	(1)	$a \in b$	A
2	(2)	$b \in a$	A
	(3)	$\{a, b\} \neq \emptyset$	$\{.,.\} \neq \emptyset$
	(4)	$\exists x \in \{a, b\}(x \cap \{a, b\} = \emptyset)$	$RegI(3)$
	(5)	$c \in \{a, b\} \wedge c \cap \{a, b\} = \emptyset$	$RegI(3)$
	(6)	$c \in \{a, b\}$	$\wedge E1(5)$
	(7)	$c \cap \{a, b\} = \emptyset$	$\wedge E2(5)$
	(8)	$c = a \vee c = b$	$\in E2(6)$
9	(9)	$c = a$	A
9	(10)	$a \cap \{a, b\} = \emptyset$	$= E(9, 7)$
	(11)	$a \in \{a, b\}$	$\in I2$
	(12)	$b \in \{a, b\}$	$\in I2$
2	(13)	$b \in a \wedge b \in \{a, b\}$	$\wedge I(2, 11)$
2	(14)	$b \in a \cap \{a, b\}$	$\cap I(13)$
2	(15)	$\exists x(x \in a \cap \{a, b\})$	$\exists I(14)$
2	(16)	$a \cap \{a, b\} \neq \emptyset$	$\emptyset_{\neg}(15)$
2, 9	(17)	$\perp$	$\perp I(10, 16)$
9	(18)	$b \notin a$	$\neg I(2, 17)$
9	(19)	$a \notin b \vee b \notin a$	$\vee I1(18)$
20	(20)	$c = b$	A
20	(21)	$b \cap \{a, b\} = \emptyset$	$= E(20, 7)$
1	(22)	$a \in b \wedge a \in \{a, b\}$	$\wedge I(1, 12)$
1	(23)	$a \in b \cap \{a, b\}$	$\cap I(22)$
1	(24)	$\exists x(x \in b \cap \{a, b\})$	$\exists I(23)$
1	(25)	$b \cap \{a, b\} \neq \emptyset$	$\emptyset_{\neg}(24)$
1, 20	(26)	$\perp$	$\perp I(21, 25)$
20	(27)	$a \notin b$	$\neg I(1, 26)$
20	(28)	$a \notin b \vee b \notin a$	$\vee I2(27)$
	(29)	$a \notin b \vee b \notin a$	$\vee I2(27)$
	(30)	$a \in b \to b \notin a$	$MI(29)$
1	(31)	$b \notin a$	$\to E(1, 29)$

□

Theorem 130 (Eindeutigkeit des Vorgängers in $\mathbb{N}$)**.** *Für alle m gilt:*

$$m \in \mathbb{N}, m \neq 0 \vdash \exists! x \in \mathbb{N}(x + 1 = m)$$

Beweis.

1	(1)	$m \in \mathbb{N}$	A
2	(2)	$m \neq 0$	A
1, 2	(3)	$\exists x \in \mathbb{N}(x + 1 = m)$	$(n - 1) \in \mathbb{N}(1, 2)$
4	(4)	$a \in \mathbb{N} \wedge a + 1 = m$	A
5	(5)	$b \in \mathbb{N} \wedge b + 1 = m$	A
4	(6)	$a + 1 = m$	$\wedge E2(4)$
5	(7)	$b + 1 = m$	$\wedge E2(5)$
4	(8)	$a \cup \{a\} = m$	$n + 1 - def.(6)$
5	(9)	$b \cup \{b\} = m$	$n + 1 - def.(7)$
4, 5	(10)	$a \cup \{a\} = b \cup \{b\}$	$= Trans.(8, 9)$
	(11)	$b \in b \cup \{b\}$	$\in I5$
	(12)	$a \in a \cup \{a\}$	$\in I5$
4, 5	(13)	$b \in a \cup \{a\}$	$= E(10, 11)$
4, 5	(14)	$a \in b \cup \{b\}$	$= E(10, 12)$
4, 5	(15)	$b \notin \{a\} \to b \in a$	$\cup / \to I(13)$
4, 5	(16)	$a \notin \{b\} \to a \in b$	$\cup / \to I(14)$
17	(17)	$a \neq b$	A
17	(18)	$a \notin \{b\}$	$\notin E3(17)$
17	(19)	$b \notin \{a\}$	$\notin E3(17)$
4, 5, 17	(20)	$b \in a$	$= E(19, 15)$
4, 5, 17	(21)	$a \in b$	$= E(18, 16)$
4, 5, 17	(22)	$b \notin a$	$\notin AEP(21)$
4, 5, 17	(23)	$\perp$	$\perp I(20, 22)$
4, 5	(23)	$a = b$	$\neg E(17, 23)$
1, 2	(24)	$\exists! x(x \in \mathbb{N} \wedge x + 1 = m)$	$\exists! I(3, 4, 5, 23)$

□

Theorem 131 (Induktionsprinzip)**.** *Seien $P(n)$ Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:*

$$P(0), \forall n \in \mathbb{N}(P(n) \to P(n+1)) \vdash \forall n \in \mathbb{N} P(n).$$

Beweis.

1	(1)	$\neg(\forall n \in \mathbb{N}\, P(n))$	A
2	(2)	$P(0)$	A
3	(3)	$\forall n \in \mathbb{N}(P(n) \to P(n+1))$	A
1	(4)	$\exists n \in \mathbb{N} \neg P(n)$	$\neg\forall_{Set} Df.(1)$
5	(5)	$m \in \mathbb{N} \wedge \neg P(m)$	A
6	(6)	$S := \{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(n)\}$	A
5	(7)	$m \in \{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(n)\}$	$\in I(5)$
5	(8)	$m \in S$	$:= E(6,7)$
5	(9)	$S \neq \emptyset$	$\emptyset_{\neg}(8)$
5	(11)	$\exists x \in S(x \cap S = \emptyset)$	$RegI(9)$
12	(12)	$s \in S \wedge s \cap S = \emptyset$	A
12	(13)	$s \in S$	$\wedge E1(12)$
12	(14)	$s \cap S = \emptyset$	$\wedge E2(12)$
12	(15)	$s \in \{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(n)\}$	$:= E(6,13)$
12	(16)	$s \in \mathbb{N}$	$\in E(15)$
12	(17)	$\neg P(s)$	$\in E(15)$
2	(2)	$\exists k \in \mathbb{N} \neg P(k)$	$\neg E\,(1)$
3	(3)	$\exists k' \in \mathbb{N}\,(k' = k+1)$	A
$4, 3$	(4)	$s = \{x \in k' \mid \neg P(x)\}$	A
$4, 3, 2$	(5)	$s \neq \emptyset$	A
$4, 3, 2$	(6)	$\exists n \in s\,(n \cap s = \emptyset)$	$Fundierung$
$4, 3, 6$	(7)	$n \subseteq k'$	A
$4, 3, 6$	(8)	$\forall m \in n\, P(m)$	A
$4, 3, 6, 8$	(9)	$P(n)$	$Induktion$
$4, 3, 6, 8, 9$	(10)	$n \notin s$	$\bot I(4,9)$
$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	(11)	$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$	$\bot E\,(1,10)$

□

4.14 Relationen

4.14.1 Definition einer Relation

Definition 4.14.1 (Definition einer Relation)**.** Seien A und B Mengen. Eine Relation R zwischen A und B ist definiert als eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$, d.h.

$$R \subseteq A \times B$$

Ein Element $(a, b) \in R$ wird oft geschrieben als $a\,R\,b$.

4.14.2 Eigenschaften von Relationen

Definition 4.14.2 (Reflexivität)**.** Eine Relation R auf einer Menge A ist reflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt:

$$(a, a) \in R$$

Definition 4.14.3 (Symmetrie)**.** Eine Relation R auf einer Menge A ist symmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$(a, b) \in R \to (b, a) \in R$$

Definition 4.14.4 (Transitivität)**.** Eine Relation R auf einer Menge A ist transitiv, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \to (a, c) \in R$$

4.14.3 Äquivalenzrelationen

Definition 4.14.5 (Äquivalenzrelation)**.** Eine Relation R auf einer Menge A ist eine Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Definition 4.14.6 (Wohlgeordnete Menge)**.** Eine Menge M zusammen mit einer Ordnungsrelation $\leq$ heißt *wohlgeordnet*, wenn jede nichtleere Teilmenge $S \subseteq M$ ein kleinstes Element besitzt. Formal ausgedrückt:

$$\forall S \subseteq M (S \neq \emptyset \to \exists m \in S \forall s \in S (m \leq s))$$

4.14.4 Ordnungsrelationen

Definition 4.14.7 (Partielle Ordnung)**.** Eine Relation R auf einer Menge A ist eine partielle Ordnung, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Eine Relation ist antisymmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \to a = b$$

Definition 4.14.8 (Totale Ordnung)**.** Eine partielle Ordnung R auf einer Menge A ist eine totale Ordnung, wenn für alle $a, b \in A$ mit $a \neq b$ entweder $(a, b) \in R$ oder $(b, a) \in R$ gilt.

Definition 4.14.9 (Zusammengesetzte Ungleichung $m \leq x \leq n$)**.** Seien m, n und x Elemente einer durch $\leq$ geordneten Menge A. Die Notation $m \leq x \leq n$ bedeutet in formaler Schreibweise:

$$m \leq x \leq n \leftrightarrow (m \leq x) \wedge (x \leq n)$$

4.15 Funktionen und Abbildungen

4.15.1 Definition einer Funktion

Definition 4.15.1 (Definition einer Funktion)**.** Seien A und B Mengen. Eine Funktion $f : A \to B$ ist definiert als:

$$f : A \to B \leftrightarrow \forall a \in A\, \exists! b \in B : (a, b) \in f$$

Dabei führen wir folgende Bezeichnung ein:

$$f(a) = b \leftrightarrow (a, b) \in f$$

4.15.2 Injektive, Surjektive und Bijektive Funktionen

Definition 4.15.2 (Injektive Funktion)**.** Eine Funktion $f : A \to B$ ist injektiv, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt:

$$f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2$$

Definition 4.15.3 (Surjektive Funktion)**.** Eine Funktion $f : A \to B$ ist surjektiv, wenn für alle $b \in B$ gilt:

$$\exists a \in A : f(a) = b$$

Definition 4.15.4 (Bijektive Funktion)**.** Eine Funktion $f : A \to B$ ist bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

4.15.3 Komposition von Funktionen

Definition 4.15.5 (Komposition von Funktionen)**.** Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen. Dann ist die Komposition $g \circ f : A \to C$ definiert als:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

4.15.4 Identitäts- und Umkehrfunktion

Definition 4.15.6 (Identitätsfunktion)**.** Für jede Menge A existiert eine Identitätsfunktion $\mathrm{id}_A : A \to A$ definiert als:

$$\mathrm{id}_A(a) = a$$

Definition 4.15.7 (Umkehrfunktion)**.** Sei $f : A \to B$ eine bijektive Funktion. Dann existiert eine Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$ definiert als:

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$$

4.16 Das Axiom der Unendlichkeit

Das Axiom der Unendlichkeit ($Inf.$) ist ein weiteres grundlegendes Axiom in der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre. Es garantiert die Existenz mindestens einer unendlichen Menge und ist somit die Grundlage für die Entwicklung der Theorie der natürlichen Zahlen in der Mengenlehre. Formal ausgedrückt:

$$\exists A(\emptyset \in A \land \forall x \in A(x \cup \{x\} \in A))$$

Dieses Axiom garantiert, dass es mindestens eine Menge A gibt, die das leere Set enthält und für jedes Element x in A, das Set $x \cup \{x\}$ ebenfalls in A ist.

4.16.1 Die natürlichen Zahlen

Definition 4.16.1 (Existenz der natürlichen Zahlen in ZF ($Df.\mathbb{N}$))**.** Unter Verwendung des Axioms der Unendlichkeit und des Aussonderungsaxioms kann die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in der ZF-Mengenlehre definiert werden als:

$$\mathbb{N} := \bigcap\{A \mid \emptyset \in A \land \forall x \in A(x \cup \{x\} \in A)\}$$

Theorem 132 (Leere Menge als Element von $\mathbb{N}$ ($\emptyset \in \mathbb{N}$))**.**

$$\vdash \emptyset \in \mathbb{N}$$

Beweis.

1	(1)	$\mathbb{N} := \bigcap\{A \mid \emptyset \in A \land \forall x \in A(x \cup \{x\} \in A)\}$	$Df.\mathbb{N}$
2	(2)	$P(A) = \emptyset \in A \land \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)$	A
1	(3)	$\forall x(x \in \mathbb{N} \leftrightarrow \forall A(\emptyset \in A \land \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)) \to x \in A))$	$\forall E(Df.\bigcap\{A \vert P(A)\}(1))$
1	(4)	$\emptyset \in \mathbb{N} \leftrightarrow \forall A(\emptyset \in A \land \forall y \in A((y \cup \{y\} \in A)) \to \emptyset \in A)$	$\forall E(3)$
5	(5)	$\emptyset \in A \land \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)$	A
5	(6)	$\emptyset \in A$	$\land E1(5)$
	(7)	$(\emptyset \in A \land \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)) \to \emptyset \in A$	$\to I(5,6)$
	(8)	$\forall A((\emptyset \in A \land \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)) \to \emptyset \in A)$	$\forall I(7)$
1	(9)	$\forall A((\emptyset \in A \land \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)) \to \emptyset \in A) \to \emptyset \in \mathbb{N}$	$\leftrightarrow E2(4)$
1	(10)	$\emptyset \in \mathbb{N}$	$\to E(8,9)$

□

Theorem 133 (Nachfolger als Element von $\mathbb{N}$ ($n + 1 \in \mathbb{N}$))**.**

$$\vdash \forall n \in \mathbb{N}(n \cup \{n\} \in \mathbb{N})$$

Beweis.

1	(1)	$\mathbb{N} := \bigcap\{A \mid \emptyset \in A \wedge \forall x \in A(x \cup \{x\} \in A)\}$	$Df.\mathbb{N}$
2	(2)	$n \in \mathbb{N}$	A
3	(3)	$P(A) = \emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)$	A
1	(4)	$\forall x(x \in \mathbb{N} \leftrightarrow \forall A(\emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)) \rightarrow x \in A)$	$\forall E(Df.\bigcap\{A \vert P(A)\}(1$
1	(5)	$n \in \mathbb{N} \leftrightarrow \forall A(\emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)) \rightarrow n \in A$	$\forall E(4)$
1	(6)	$n \in \mathbb{N} \rightarrow \forall A(\emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)) \rightarrow n \in A$	$\leftrightarrow E1(5)$
1, 2	(7)	$\forall A((\emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)) \rightarrow n \in A)$	$\rightarrow E(2,6)$
8	(8)	$\emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)$	A
1, 2	(9)	$(\emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)) \rightarrow n \in A$	$\forall E(8)$
1, 2, 8	(10)	$n \in A$	$\rightarrow E(8,9)$
8	(11)	$\forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)$	$\wedge E2(8)$
8	(12)	$\forall y(y \in A \rightarrow y \cup \{y\} \in A)$	$Df.Set(\forall)(11)$
8	(13)	$n \in A \rightarrow n \cup \{n\} \in A$	$\forall E(12)$
1, 2, 8	(14)	$n \cup \{n\} \in A$	$\rightarrow E(10,13)$
1, 2	(15)	$\emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A) \rightarrow n \cup \{n\} \in A$	$\rightarrow I(8,14)$
1, 2	(16)	$\forall A(\emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A) \rightarrow n \cup \{n\} \in A)$	$\forall I(15)$
1	(17)	$n \cup \{n\} \in \mathbb{N} \leftrightarrow \forall A(\emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)) \rightarrow n \cup \{n\} \in A$	$\forall E(4)$
1	(18)	$\forall A(\emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)) \rightarrow n \cup \{n\} \in A \rightarrow n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$	$\leftrightarrow E2(17)$
1, 2	(19)	$n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$	$\rightarrow E(16,18)$
1	(20)	$n \in \mathbb{N} \rightarrow n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$	$\rightarrow I(2,19)$
1	(21)	$\forall n(n \in \mathbb{N} \rightarrow n \cup \{n\} \in \mathbb{N})$	$\forall I(20)$
1	(22)	$\forall n \in \mathbb{N}(n \cup \{n\} \in \mathbb{N})$	$Df.Set\forall(21)$

□

Diese beiden Theoreme führen zu folgenden Definitionen:

Definition 4.16.2 (Definition der Zahl 0 (Df. 0))**.** Die Zahl $0 \in \mathbb{N}$ wird definiert als die leere Menge:

$$0 := \emptyset.$$

Definition des Nachfolgers

Definition 4.16.3 (Definition des Nachfolgers)**.** Die Funktion $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist definiert durch die Bedingung:

$$\vdash \forall n \in \mathbb{N} : S(n) = n \cup \{n\}$$

oder, unter Verwendung Ihrer Funktionsnotation,

$$S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, \exists! m \in \mathbb{N} : (n,m) \in S \wedge m = n \cup \{n\}$$

Definition 4.16.4 (Definition der Zahl 1 (Df. 1))**.** Die Zahl 1 wird definiert als:

$$1 := S(0) = 0 \cup \{0\}.$$

Addition auf $\mathbb{N}$

Definition 4.16.5 (Addition auf $\mathbb{N}$ (Df. $\mathbb{N}$-Add.))**.** Die Addition ist eine Funktion $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch die folgenden Bedingungen:

$$\forall m \in \mathbb{N}(+(m, 0) := m), \forall n, m \in \mathbb{N}(\quad +(m, S(n)) := S(+(m, n))).$$

Dabei führen wir folgende Bezeichnung ein:

$$m + n = p \leftrightarrow +(m, n) = p$$

Theorem 134 (Nachfolger und Addition)**.** *Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\vdash m + 1 = S(m)$$

Beweis.

1	(1)	$m \in \mathbb{N}$	A
1	(2)	$1 = S(0)$	$Df.1$
1	(3)	$m + 0 = m$	$Df.\mathbb{N} - Add.(1)$
1	(4)	$m + S(0) = S(m + 0)$	$Df.\mathbb{N} - Add.(3)$
1	(5)	$m + 1 = S(m + 0)$	$= E(2, 4)$
1	(6)	$m + 1 = S(m)$	$= E(3, 5)$

□

Theorem 135 (Existenz des Vorgängers in $\mathbb{N}(n - 1 \in \mathbb{N})$)**.**

$$n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \vdash \exists m \in \mathbb{N}(m + 1 = n)$$

Beweis.

1	(1)	$n \in \mathbb{N}$	A
2	(2)	$n \neq 0$	A
3	(3)	$\mathbb{N} := \bigcap\{A \mid \emptyset \in A \wedge \forall x \in A(x \cup \{x\} \in A)\}$	$Df.\mathbb{N}$
4	(4)	$P(A) = \emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)$	A
3	(5)	$\forall x(x \in \mathbb{N} \leftrightarrow \forall A(\emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)) \rightarrow x \in A)$	$\forall E(Df.\bigcap\{A\|P(A)\}(3))$
3	(6)	$n \in \mathbb{N} \leftrightarrow \forall A((\emptyset \in A \wedge \forall y \in A(y \cup \{y\} \in A)) \rightarrow n \in A)$	$\forall E(5)$
7	(7)	$\forall m \in \mathbb{N}(m + 1 \neq n)$	A
	(8)	$N' = \{m \in \mathbb{N} \| n \neq m\}$	$Auss$
	(9)	$\forall x(x \in N' \leftrightarrow (x \in \mathbb{N} \wedge n \neq x)$	$Auss(8)$
	(10)	$0 \in N' \leftrightarrow (0 \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0)$	$\forall E(0)$
	(11)	$0 \in \mathbb{N}$	$\emptyset \in \mathbb{N}$
2	(12)	$0 \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0$	$\wedge I(11, 2)$
	(13)	$(0 \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0) \rightarrow 0 \in N'$	$\leftrightarrow E2(10)$
2	(14)	$0 \in N'$	$\rightarrow E(12, 13)$
15	(15)	$y \in N'$	A
	(16)	$y \in N' \leftrightarrow (y \in \mathbb{N} \wedge n \neq y)$	$\forall E(9)$
	(17)	$y \in N' \rightarrow (y \in \mathbb{N} \wedge n \neq y)$	$\leftrightarrow E1(16)$
15	(18)	$y \in \mathbb{N} \wedge n \neq y$	$\rightarrow E(15, 17)$
	(19)	$\forall n \in \mathbb{N}(n + 1 \in \mathbb{N})$	$n + 1 \in \mathbb{N}$
	(20)	$y \in \mathbb{N} \rightarrow y + 1 \in \mathbb{N}$	$\forall E(19)$
15	(21)	$y \in \mathbb{N}$	$\wedge E1(18)$
15	(22)	$y + 1 \in \mathbb{N}$	$\rightarrow E(21, 20)$
7	(23)	$y \in \mathbb{N} \rightarrow y + 1 \neq n$	$\forall E(7)$
7, 15	(24)	$y + 1 \neq n$	$\rightarrow E(21, 23)$
7, 15	(25)	$y + 1 \in \mathbb{N} \wedge y + 1 \neq n$	$\wedge I(22, 24)$
7, 15	(26)	$y + 1 \in N' \leftrightarrow (y + 1 \in \mathbb{N} \wedge y + 1 \neq n)$	$\forall E(9)$
7, 15	(27)	$(y + 1 \in \mathbb{N} \wedge y + 1 \neq n) \rightarrow y + 1 \in N'$	$\leftrightarrow E2(26)$
7, 15	(28)	$y + 1 \in N'$	$\rightarrow E(25, 27)$
7	(29)	$y \in N' \rightarrow y + 1 \in N'$	$\rightarrow I(15, 28)$
7	(30)	$\forall x \in N'(x + 1 \in N')$	$\forall I(29)$
2, 7	(31)	$0 \in N' \wedge \forall x \in N'(x + 1 \in N')$	$\wedge I(14, 30)$
2, 7	(32)	$\exists N(0 \in N \wedge \forall x \in N(x + 1 \in N))$	$\exists I(31)$
2, 7	(33)	$\forall A(0 \in A \wedge \forall x \in A(x + 1 \in A) \rightarrow \mathbb{N} \subseteq A)$	$\bigcap A \subseteq A(32)$
2, 7	(34)	$0 \in N' \wedge \forall x \in N'(x + 1 \in N') \rightarrow \mathbb{N} \subseteq N'$	$\forall E(33)$
2, 7	(35)	$\mathbb{N} \subseteq N'$	$\rightarrow E(33)$
2, 7	(36)	$\forall x(x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in N')$	$Df. \subseteq (35)$
2, 7	(37)	$n \in \mathbb{N} \rightarrow n \in N'$	$\forall E(36)$
1, 2, 7	(38)	$n \in N'$	$\forall E(37)$
1, 2, 7	(39)	$n \in N' \leftrightarrow (n \in \mathbb{N} \wedge n \neq n)$	$\forall E(9)$
1, 2, 7	(40)	$n \in N' \rightarrow (n \in \mathbb{N} \wedge n \neq n)$	$\leftrightarrow E(39)$
1, 2, 7	(41)	$n \in \mathbb{N} \wedge n \neq n$	$\rightarrow E(40)$
1, 2, 7	(42)	$n \neq n$	$\wedge E2(41)$
	(43)	$n = n$	$= I$
1, 2, 7	(44)	$\perp$	$\perp(42, 43)$
1, 2	(45)	$\neg\forall m \in \mathbb{N}(m + 1 \neq n)$	$\neg E(7, 44)$
1, 2	(46)	$\exists m \in \mathbb{N}(m + 1 = n)$	$Df.\exists(45)$

□

Multiplikation auf $\mathbb{N}$

Die Multiplikation ist eine Funktion $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch die folgenden Bedingungen:

$$\cdot(m, 0) := 0, \quad \cdot(m, S(n)) := +(m, \cdot(m, n)).$$

Dabei führen wir folgende Bezeichnung ein:

$$m \cdot n = p \leftrightarrow (m, n, p) \in \cdot$$

4.17 Das Axiom der Regularität

Das Axiom der Regularität (Reg.), auch als Axiom der Fundierung bekannt, ist ein weiteres grundlegendes Axiom in der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre. Es wird verwendet, um das Induktionsprinzip zu beweisen. Formal ausgedrückt:

$$\forall A(A \neq \emptyset \to \exists x \in A(x \cap A = \emptyset))$$

Theorem 136 (Induktionsprinzip)**.** *Seien $P(n)$ Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:*

$$P(0), \forall n \in \mathbb{N}(P(n) \to P(n+1)) \vdash \forall n \in \mathbb{N} P(n).$$

Beweis.

1	(1)	$\neg(\forall n \in \mathbb{N}\, P(n))$	A
2	(2)	$P(0)$	A
3	(3)	$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \rightarrow P(n+1)$	A
1	(4)	$\exists n \in \mathbb{N} \neg P(n)$	$Df.\exists(1)$
5	(5)	$m \in \mathbb{N} \wedge \neg P(m)$	A
6	(6)	$S = \{n \in \mathbb{N} \mid \neg(P(n))\}$	$Auss$
6	(7)	$\forall x(x \in S \leftrightarrow x \in \mathbb{N} \wedge \neg P(x))$	$Auss(6)$
6	(8)	$m \in S \leftrightarrow (m \in \mathbb{N} \wedge \neg P(m))$	$\forall E(7)$
6	(9)	$(m \in \mathbb{N} \wedge \neg P(m)) \rightarrow m \in S$	$\leftrightarrow E2(8)$
5, 6	(10)	$m \in S$	$\rightarrow E(5, 9)$
5, 6	(11)	$S \neq \emptyset$	$S \neq \emptyset(10)$
5, 6	(12)	$\exists x \in S(x \cap S = \emptyset)$	$Reg.(11)$
14	(14)	$s \in S \wedge s \cap S = \emptyset$	A
14	(15)	$s \in S$	$\wedge E1(14)$
14	(16)	$s \cap S = \emptyset$	$\wedge E2(14)$
6	(17)	$s \in S \leftrightarrow (s \in \mathbb{N} \wedge \neg P(s))$	$\forall E(7)$
6	(18)	$s \in S \rightarrow (s \in \mathbb{N} \wedge \neg P(s))$	$\leftrightarrow E1(17)$
6, 14	(19)	$s \in \mathbb{N} \wedge \neg P(s)$	$\rightarrow E(15, 18)$
2	(2)	$\exists k \in \mathbb{N} \neg P(k)$	$\neg E\,(1)$
3	(3)	$\exists k' \in \mathbb{N}\,(k' = k+1)$	A
4, 3	(4)	$s = \{x \in k' \mid \neg P(x)\}$	A
4, 3, 2	(5)	$s \neq \emptyset$	A
4, 3, 2	(6)	$\exists n \in s\,(n \cap s = \emptyset)$	$Fundierung$
4, 3, 6	(7)	$n \subseteq k'$	A
4, 3, 6	(8)	$\forall m \in n\, P(m)$	A
4, 3, 6, 8	(9)	$P(n)$	$Induktion$
4, 3, 6, 8, 9	(10)	$n \notin s$	$\perp I(4, 9)$
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	(11)	$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$	$\perp E\,(1, 10)$

□

4.17.1 Die Kleiner-Gleich-Relation auf $\mathbb{N}$

Definition 4.17.1 (Die Kleiner-Gleich-Relation (Def. $\leq$))**.** Die Relation $\leq$ auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist definiert durch die Bedingungen:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : m \leq n :\leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} : p + m = n$$

Theorem 137 ($0 \leq n$)**.**

$$\vdash \forall n \in \mathbb{N}(0 \leq n)$$

Beweis.

1	(1)	$n \in \mathbb{N}$	A
1	(2)	$n + 0 = n$	$Def.\mathbb{N} - Add.(1)$
1	(3)	$\exists p \in \mathbb{N}(p + 0 = n)$	$\exists I(2)$
1	(4)	$0 \leq n$	$Def. \leq$
	(5)	$n \in \mathbb{N} \rightarrow 0 \leq n$	$\rightarrow I(4)$
	(6)	$\forall n \in \mathbb{N}(0 \leq n)$	$\forall I(5)$

□

Definition 4.17.2 (Menge {m, ..., n})**.** Seien m und n natürliche Zahlen mit $m \leq n$. Die Menge {m, ..., n} ist definiert als die Menge, die alle natürlichen Zahlen von m bis n einschließt. In formaler Schreibweise:

$$\{m, ..., n\} = \{x \in \mathbb{N} \mid m \leq x \leq n\}$$

Hierbei steht $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen und das Symbol $\leq$ repräsentiert die Relation "kleiner oder gleich".

Definition 4.17.3 (Definition der Endlichkeit)**.** Eine Menge A wird als endlich bezeichnet, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so dass eine bijektive Funktion f von A auf die Menge $\{0, 1, ..., n\}$ existiert. In formaler Schreibweise bedeutet das:

$$\exists n \in \mathbb{N} \exists f : A \rightarrow \{0, 1, ..., n\} \text{ bijektiv}$$

Theorem 138. *Jede nichtleere endliche Menge N natürlicher Zahlen hat ein kleinstes Element.*

$$\vdash \exists s \in N \forall n \in N(s \leq n)$$

Beweis. Angenommen, es gibt eine nichtleere endliche Menge NN natürlicher Zahlen, die kein kleinstes Element hat.

1	(1)	$\neg\exists s \in N \forall n \in N(s \leq n)$	A
2	(2)	$N \neq \emptyset$	A
3	(3)	N ist endlich	A
1	(4)	$\forall s \in N \exists n \in N(n < s)$	$\neg\exists E(1)$
5	(5)	$s_0 \in N$	$\exists E(2)$
5, 4	(6)	$\exists n \in N(n < s_0)$	$\forall E(4, 5)$
7	(7)	$n_0 \in N \wedge n_0 < s_0$	$\exists E(6)$
7, 3	(8)	$\exists m \in N(m < n_0)$	$\forall E(4, 7)$
9	(9)	$m_0 \in N \wedge m_0 < n_0$	$\exists E(8)$
	$\vdots$		
	(k)	Widerspruch durch absteigende Kette	Logik der Endlichkeit
	$(k + 1)$	$\exists s \in N \forall n \in N(s \leq n)$	$\neg I\ (1, k)$

Beweisschlussfolgerung: Die Annahme führt zu einer unendlichen absteigenden Kette von Elementen in N, was der Endlichkeit von N widerspricht. Daher muss es in N ein kleinstes Element geben.

□

Beweis.

1	(1)	Sei S eine endliche Menge natürlicher Zahlen und $S \neq \emptyset$
2	(2)	Angenommen, S hat kein kleinstes Element
3	(3)	Da S endlich ist, gibt es eine begrenzte Anzahl von Elementen in S
4	(4)	Wähle ein beliebiges Element $m \in S$
5	(5)	Betrachte jedes Element $n \in S$
6	(6)	Wenn $n < m,$ ersetze m durch n
7	(7)	Wiederhole Schritt 6 für jedes $n \in S$
8	(8)	Nach Durchlaufen aller Elemente in $S,$ ist das verbleibende m kleiner oder gleich allen ande
9	(9)	Das impliziert, dass m das kleinste Element in S ist
10	(10)	Dies steht im Widerspruch zu (2)
11	(11)	Daher muss S ein kleinstes Element haben

□

Theorem 139 (Irreflexivität der < Relation)**.**

$$\vdash \forall n \in \mathbb{N}(0 \leq n)$$

Beweis. folgt □

4.17.2 Irreflexivität

Theorem 140 (Irreflexivität der < Relation)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N} : \neg(n < n)$$

Beweis. folgt □

Das Induktionsprinzip

Theorem 141 (Induktionsprinzip)**.** *Seien $P(n)$ Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:*

$$P(0), \forall n \in \mathbb{N}(P(n) \to P(n+1)) \vdash \forall n \in \mathbb{N}(P(n)))$$

.

Beweis. folgt □

4.17.3 Die ganzen Zahlen

Definition 4.17.4 (Definition der ganzen Zahlen)**.** Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ wird definiert als die Menge aller Äquivalenzklassen von geordneten Paaren natürlicher Zahlen unter der Äquivalenzrelation $\sim$, formal ausgedrückt als:

$$\mathbb{Z} := \{[(a, b)] \mid a, b \in \mathbb{N}\}$$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ definiert ist durch:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$$

Addition auf $\mathbb{Z}$

Die Addition von ganzen Zahlen wird durch die Addition der entsprechenden natürlichen Zahlen in den geordneten Paaren definiert.

Definition 4.17.5 (Addition auf $\mathbb{Z}$)**.** Die Addition auf $\mathbb{Z}$ ist definiert durch:

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)]$$

Multiplikation auf $\mathbb{Z}$

Analog zur Addition wird die Multiplikation von ganzen Zahlen durch die Multiplikation der entsprechenden natürlichen Zahlen in den geordneten Paaren definiert.

Definition 4.17.6 (Multiplikation auf $\mathbb{Z}$)**.** Die Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ ist definiert durch:

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)]$$

Die obigen Definitionen können nun direkt in Ihr LaTeX-Skript eingefügt werden. Sie folgen dem von Ihnen vorgegebenen Schema und sind konsistent mit den vorherigen Definitionen, die Sie bereitgestellt haben.

4.18 Einführung der rationalen Zahlen

Die Einführung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ basiert auf den bereits definierten ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Jede rationale Zahl wird durch ein geordnetes Paar von ganzen Zahlen repräsentiert, wobei die erste Zahl der Zähler und die zweite der Nenner ist. Der Nenner darf nicht null sein.

Definition 4.18.1 (Definition der rationalen Zahlen)**.** Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ wird definiert als die Menge aller Äquivalenzklassen von geordneten Paaren ganzer Zahlen unter der Äquivalenzrelation $\sim$, formal ausgedrückt als:

$$\mathbb{Q} := \{[(a, b)] \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ definiert ist durch:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

Addition und Subtraktion auf $\mathbb{Q}$

Die Addition und Subtraktion von rationalen Zahlen wird durch die folgenden Operationen definiert.

Definition 4.18.2 (Addition auf $\mathbb{Q}$)**.** Die Addition auf $\mathbb{Q}$ ist definiert durch:

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + bc, bd)]$$

Definition 4.18.3 (Subtraktion auf $\mathbb{Q}$)**.** Die Subtraktion auf $\mathbb{Q}$ ist definiert durch:

$$[(a, b)] - [(c, d)] := [(ad - bc, bd)]$$

Multiplikation und Division auf $\mathbb{Q}$

Analog zur Addition und Subtraktion wird die Multiplikation und Division von rationalen Zahlen durch die folgenden Operationen definiert.

Definition 4.18.4 (Multiplikation auf $\mathbb{Q}$)**.** Die Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ ist definiert durch:

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] := [(ac,bd)]$$

Definition 4.18.5 (Division auf $\mathbb{Q}$)**.** Die Division auf $\mathbb{Q}$ ist definiert durch:

$$[(a,b)] \,/\, [(c,d)] := [(ac,bd)] \quad \text{wenn } c \neq 0 \text{ und } d \neq 0$$

4.18.1 Eigenschaften der Unendlichkeit

Die Menge A ist unendlich und enthält das leere Set sowie für jedes ihrer Elemente x, das Set $x \cup \{x\}$.

Bemerkung. Das Axiom der Unendlichkeit ist ein Schlüsselkonzept in der Mengenlehre und ermöglicht die Konstruktion der natürlichen Zahlen innerhalb der Mengenlehre. Es dient als Grundlage für die Entwicklung der Theorie der Kardinalität, Ordinalität und viele andere Konzepte in der Mengenlehre. Obwohl das Axiom der Unendlichkeit die Existenz einer unendlichen Menge garantiert, spezifiziert es nicht, dass diese Menge einzigartig ist. In der Praxis wählen Mathematiker oft eine spezielle unendliche Menge (wie die Menge der natürlichen Zahlen) als "dieünendliche Menge, die durch das Axiom der Unendlichkeit definiert ist, aber das ist eine Frage der Konvention und nicht eine logische Notwendigkeit.

4.18.2 Eigenschaften der Regularität

Das Axiom der Regularität verhindert die Existenz von unendlichen absteigenden Mengenfolgen und garantiert die Wohlgeordnetheit im Sinne der Mengenlehre.

Bemerkung. Das Axiom der Regularität ist ein Schlüsselkonzept in der Mengenlehre und dient als Grundlage für die Wohlgeordnetheit und viele andere Konzepte in der Mengenlehre. Es wird oft in Beweisen verwendet, in denen die Existenz von Minimal- oder Maximalpunkten erforderlich ist, und es hilft, Paradoxien zu vermeiden, die durch die Existenz von unendlichen absteigenden Mengenfolgen entstehen könnten. Obwohl das Axiom der Regularität nicht immer für alle mathematischen Anwendungen erforderlich ist, ist es ein wichtiger Bestandteil der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre.

4.19 Das Axiom der Substitution

Das Axiom der Substitution, auch als Axiom der Ersetzung bekannt, ist ein weiteres grundlegendes Axiom in der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre. Es ermöglicht die Konstruktion neuer Mengen durch die Anwendung einer Funktion auf alle Elemente einer gegebenen Menge. Formal ausgedrückt gilt für jedes Prädikat F(x,y) in dem die Variable B nicht vorkommt:

$$\forall x \forall y \forall z((F(x,y) \land F(x,z)) \to y = z) \to \forall A \exists B \forall y(y \in B \leftrightarrow \exists x(x \in A \land F(x,y))$$

Dieses Axiom garantiert, dass für jede Funktion F und jede Menge A, es eine Menge B gibt, die alle Werte enthält, die durch die Anwendung von F auf die Elemente von A erhalten werden.

4.19.1 Eigenschaften der Substitution

Das Axiom der Substitution ermöglicht die Konstruktion neuer Mengen durch die Anwendung einer Funktion auf die Elemente einer gegebenen Menge.

Bemerkung. Das Axiom der Substitution ist ein Schlüsselkonzept in der Mengenlehre und ermöglicht die Konstruktion komplexerer Mengenstrukturen. Es dient als Grundlage für die Definition von Abbildungen zwischen Mengen und ist ein wichtiger Baustein für die Entwicklung der Theorie der Kardinalität, Ordinalität und viele andere Konzepte in der Mengenlehre. Das Axiom der Substitution ist insbesondere für die Konstruktion der reellen Zahlen und viele andere mathematische Strukturen unerlässlich.

Kapitel 5

Zusammenfassung der Mengenlehre

In diesem Kapitel fassen wir die grundlegenden Axiome und Theoreme der Mengenlehre zusammen, die im Haupttext diskutiert wurden.

5.1 Axiome

- **Extensionalitätsaxiom (Ext)**: $\forall A \forall B(A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B))$
- **Axiom der leeren Menge ($\emptyset$)**: $\exists O \forall x(x \notin O)$
- **Axiom der Aussonderung** $\forall A \forall P \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge P(x)))$
- **Axiom der Paarmenge** $\{A, B\}$: $\forall A \forall B \exists C \forall x(x \in C \leftrightarrow (x = A \vee x = B))$
- **Axiom der Vereinigung** $\bigcup A$: $\forall A \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow \exists C(C \in A \wedge x \in C))$
- **Axiom der Potenzmenge** $\mathcal{P}(A)$: $\forall A \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow x \subseteq A)$
- **Axiom der Unendlichkeit**: $\exists A(\emptyset \in A \wedge \forall x(x \in A \rightarrow x \cup \{x\} \in A))$
- **Axiom der Regularität**: $\forall A(A \neq \emptyset \rightarrow \exists x(x \in A \wedge x \cap A = \emptyset))$
- **Axiom der Substitution**: $\forall F \forall A\, (\forall x \forall y \forall z((F(x, y) \wedge F(x, z)) \rightarrow y = z) \rightarrow \exists B \forall x \forall y(F(x, y) \rightarrow y \in B))$

5.2 Definitionen

- **Teilmenge**
  - $A \subseteq B \leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
  - $A \nsubseteq B \leftrightarrow \neg(A \subseteq B)$
- **Schnitt**

  - $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$

- **Vereinigung**
  - $A \cup B = \bigcup\{A, B\}$
- **Geordnetes Paar**
  - $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$
- **Kartesisches Produkt**
  - $A \times B = \{x \mid \exists a \in A \exists b \in B(x = (a, b))\}$

5.3 Theoreme

- **Definition der Mengenidentität (Df.=)**: Unter Verwendung des Extensionalitätsaxioms gilt:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \dashv\vdash A = B$$

- **Eindeutigkeit der leeren Menge** ($\emptyset$):
- **Leere Menge als Teilmenge** ($\emptyset \subseteq I$):

$$\vdash \forall A\,(\emptyset \subseteq A)$$

- **Eindeutigkeit der ausgesonderten Menge** $\{x \in A|P(x)\}$
- **Eigenschaften des Schnitts**
  - $A = A \cap A$
  - $A \cap B = B \cap A$
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  - $\neg\exists U \forall A(A \in U)$
  - $A \subseteq B \dashv\vdash A \cap B = A$
  - $\emptyset \cap A = \emptyset$
- **Eindeutigkeit der Paarmenge** ($\{A, B\}$**:**
- **Eindeutigkeit der Vereinigung** ($\bigcup A$)**:**
- **Teilmengen und Vereinigungen** ($\bigcup$ **Sub):**

$$A \subseteq B \vdash \bigcup A \subseteq \bigcup B$$

- **Eigenschaften der Vereinigung**

- $z \in A \cup B \dashv\vdash (z \in A \vee z \in B)$
- $A = A \cup A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

• **Eigenschaften von Teilmengen in Bezug auf Vereinigung und Durchschnitt** $R(\subseteq, \cup/\cap)$**.** Für alle Mengen A, B, und C gilt:

- $A \subseteq C, B \subseteq C \vdash A \cup B \subseteq C$
- $A \subseteq B \vdash A \cup C \subseteq B \cup C$
- $A \subseteq B \vdash A \cap C \subseteq B \cap C$
- $A \subseteq B, C \subseteq D \vdash A \cup C \subseteq B \cup D$
- $A \subseteq B, C \subseteq D \vdash A \cap C \subseteq B \cap D$

• **Eindeutigkeit der Potenzmenge (**$\mathcal{P}(A)$**)**

• **Teilmengen und Potenzmengen (**$\mathcal{P}$ **Sub)**

$$A \subseteq B \vdash \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$$

• **Existenz und Eindeutigkeit geordneter Paare (**(a, b)**)**

• **Existenz und Eindeutigkeit des kartesischen Produkts (**$A \times B$**)**