



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра оптимального управления

Соседов Максим Николаевич

**Оптимальное управление в модели экономического роста
с двумя типами домохозяйств**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник
Ровенская Е.А.

г. Москва, 2024 г.

Содержание

1. Введение	2
2. Описание модели	2
2.1. Модель Рамсея—Касса—Купманса	2
2.2. Рабоче-капиталистическая модель роста	4
2.3. Сравнение моделей	5
2.4. Визуализация зависимости всех функций от управления	5
3. Принцип максимума для задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени	8
3.1. Постановка задачи	8
3.2. Проверка существования оптимального управления	9
3.3. Основные соотношения принципа максимума и условие трансвер- сальности	10
4. Численное решение задачи оптимального управления	11
4.1. Преобразование задачи для численного решения	11
4.2. Гамильтониан в рамках принципа максимума Понтрягина	12
4.3. Гамильтонова система	13
4.4. Седловой характер установившегося состояния	14
4.5. Алгоритм построения оптимальной траектории	14
4.6. Реализация алгоритма	15
4.7. Анализ полученных результатов	18
5. Литература и ссылки	19

1. Введение

Теория оптимального управления - это раздел математической оптимизации, который занимается поиском управления для динамической системы в течение периода времени, так что целевая функция (функционал) оптимизируется. Она имеет множество применений в науке, технике и исследованиях операций.

В том числе существуют экономические модели, которые можно рассматривать как задачи оптимального управления, например модели, характеризующие взаимоотношения процессов производства и потребления. В данной работе рассмотрена одна из таких задач, а именно модель рабоче-капиталистического роста, основанная на модели Рамсея—Касса—Купманса.

2. Описание модели

2.1. Модель Рамсея—Касса—Купманса

Так как в основе рабоче-капиталистической модели (РК-модели) лежит классическая модель Рамсея—Касса—Купманса, первым делом рассмотрим её.

Пусть дана производственная функция Кобба—Дугласа:

$$Y(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}, \quad (2.1)$$

где Y – объём производства, A – технологический коэффициент, K – капитал, L – рабочая сила, α – коэффициент эластичности по капиталу, $1 - \alpha$ – коэффициент эластичности по труду. При этом будем считать, что рабочая сила растёт экспоненциально, то есть $L(t) = L_0 e^{nt}$, где L_0 – начальное население и n – постоянный коэффициент прироста населения, известные параметры.

Рассмотрим задачу максимизации функции прибыли фирмы:

$$F(K, L) = Y(K, L) - wL - (r + \delta)K \rightarrow \max_{K, L},$$

Выпишем необходимое условие точки экстремума функции двух переменных:

Теорема 2.1 (необходимое условие точки экстремума функции двух переменных). Если точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума функции $f(x, y)$, то

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

То есть, в нашем случае:

$$F'_K(K, L) = \frac{\partial Y}{\partial K} - (r + \delta) = A\alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} - (r + \delta) = 0$$

$$F'_L(K, L) = \frac{\partial Y}{\partial L} - w = A(1 - \alpha) \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha - w = 0$$

Отсюда получим процентную ставку и равновесную заработную плату:

$$r(t) = A\alpha \left(\frac{L(t)}{K(t)}\right)^{1-\alpha} - \delta, \quad (2.2)$$

$$w(t) = A(1 - \alpha) \left(\frac{K(t)}{L(t)} \right)^\alpha, \quad (2.3)$$

где δ – амортизация капитала.

Теперь обратимся к достаточному условию точки экстремума:

Теорема 2.2 (достаточное условие точки экстремума функции двух переменных). Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно в некоторой области, содержащей стационарную точку $M_0(x_0, y_0)$. При этом обозначим Δ – Гессиан функции z . Тогда:

1. если $\Delta > 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума для данной функции;
2. если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума нет;
3. если $\Delta = 0$ то экстремум может быть, а может и не быть.

В нашем случае имеем:

$$\Delta = F''_{KK}F''_{LL} - (F''_{KL})^2 = A^2\alpha^2(1 - \alpha)^2K^{2\alpha-2}L^{-2\alpha} - A^2\alpha^2(1 - \alpha)^2K^{2\alpha-2}L^{-2\alpha} = 0$$

То есть, для того чтобы определить является ли точка экстремумом нужны дополнительные исследования. Для этого обратимся ко второму дифференциалу функции F :

$$d^2F = F''_{KK}dK^2 + F''_{LL}dL^2 + 2F''_{KL}dKdL = -\alpha(1 - \alpha)K^{-\alpha-1}L^{\alpha-2}(KdK - LdL)^2$$

Из последнего представления видно, что $d^2F < 0$, следовательно, функция F выпукла вверх и точка $M_0(K, L)$ является точкой максимума.

Теперь, считая, что фирма инвестирует $I(t)$ и теряет часть капитала $\delta K(t)$, определим изменение капитала как:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t), \quad (2.4)$$

при этом считаем, что капитал в начальный момент времени известен: $K(0) = K_0$.

Далее определим общее потребление, считая, что потребляется всё что получено, за исключением расходов на инвестиции:

$$C(t) = (r(t) + \delta)K(t) + w(t)L(t) - I(t) = Y(t) - I(t),$$

считая $u(t) \in [0, 1]$ управляющей переменной, перепишем последнее равенство в виде:

$$C(t) = u(t)Y(t), \quad (2.5)$$

то есть в данной задаче, по сути, мы управляем соотношением между потреблением и инвестициями.

Также введём функцию моментальной полезности. Данная функция буквально отражает то, насколько человеку «хорошо». Естественным образом она зависит от потребления. Также очевидно, что чем больше мы потребляем, тем

лучше, поэтому функция должна быть монотонна. А также функция должна отражать тот факт, что одинаковый прирост потребления не даёт одинаковый прирост полезности (функция не линейна), то есть разница между потреблением 1000 и 2000 не тождественна разнице 40000 и 41000, что вполне естественно соотносится с реальным ощущением потребления. Из всего вышесказанного вытекает логичное предложение определить функцию полезности как логарифм от потребления:

$$u(C) = \ln(C). \quad (2.6)$$

Тогда функция общественного благосостояния, которую мы хотим максимизировать по выбранному управлению, будет иметь вид:

$$U = \int_0^T e^{(n-\rho)t} \ln(C(t)) dt \rightarrow \max_{u(t)},$$

где ρ – константа дисконтирования, показывающая, что польза «сейчас» лучше, чем польза «потом». С учётом формулы (2.5):

$$U = \int_0^T e^{(n-\rho)t} \ln(u(t)Y(t)) dt \rightarrow \max_{u(t)}.$$

2.2. Рабоче-капиталистическая модель роста

Теперь опишем РК-модель. Производственная функция, процентная ставка, равновесная заработная плата и изменение капитала определяются теми же уравнениями (2.1) – (2.4). Но теперь будем считать, что капиталисты и рабочие – это разные сущности с отдельными функциями потребления. Соответственно:

$$C^W(t) = w(t)W(t),$$

где $W(t)$ – та же рабочая сила, что и в модели Рамсея. То есть считается, что весь доход рабочих тратится на потребление.

$$C^P(t) = (r(t) + \delta)K(t) - I(t),$$

то есть капиталисты потребляют всё, что не инвестируют, считая $v(t) \in [0, 1]$ управляющей переменной получим:

$$C^P(t) = v(t)(r(t) + \delta)K(t),$$

то есть в данном случае мы так же управляем соотношением между потреблением и инвестициями, но уже лишь со стороны капиталистов.

Функция моментальной полезности будет также логарифмической, но в данном случае зависеть от среднего потребления каждого рабочего или капиталиста (2.6), при этом среднее будет взвешенным в том смысле, что мы хотим

показать, что вклад в общую функцию полезности будет зависеть от количества рабочих и капиталистов. Тогда функция общественного благосостояния, которую мы хотим максимизировать, теперь будет иметь вид:

$$U^0 = \int_0^T e^{-\rho t} \left(W(t) \ln \left(\frac{C^w(t)}{W(t)} \right) + P(t) \ln \left(\frac{C^P(t)}{P(t)} \right) \right) dt,$$

где $P(t) = P_0 e^{nt}$ количество капиталистов.

2.3. Сравнение моделей

Теперь подробнее рассмотрим сходства и отличия представленных моделей. Как уже было отмечено выше, большинство уравнений описывающих модели совпадают, принципиальное же отличие заключается в подходе к рассмотрению отношений между рабочими и капиталистами. В РК-модели считается, что это два разных потребителя, а функция для максимизации отражает суммарную полезность для этих потребителей.

2.4. Визуализация зависимости всех функций от управления

Для большего понимания чем именно мы управляем, и как это отражается на параметрах рассматриваемой модели возьмём какое-либо конкретное управление $v(t)$ и отобразим на графиках изменения интересующих нас переменных, а именно посмотрим как меняется объём производства $Y(t)$, капитал $K(t)$, процентная ставка $r(t)$ и заработная плата $w(t)$. Для реализации данной задачи используем язык программирования *python*. В частности для построения графиков используется библиотека *matplotlib*. Для решения возникающих задач Коши воспользуемся *классическим методом Рунге — Кутты четвёртого порядка*.

Для настройки модели были выбраны следующие параметры

$$A = 1, \alpha = 0.3, \rho = 0.05, \delta = 0.1, q = 0.1, K_0 = 1, L_0 = 1, n = 0.04$$

Для демонстрации нужных нам зависимостей и сравнения характерного поведения моделей последовательно выберем константные управления $u(t) \equiv 0.1, u(t) \equiv 0.15, u(t) \equiv 0.2$ и $v(t) \equiv 0.1, v(t) \equiv 0.15, v(t) \equiv 0.2$, а также рассмотрим переключаемые управления с точкой переключения в середине временного отрезка:

$$u(t), v(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{T}{2}) \\ 1, & t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}, u(t), v(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{T}{2}) \\ 0, & t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}$$

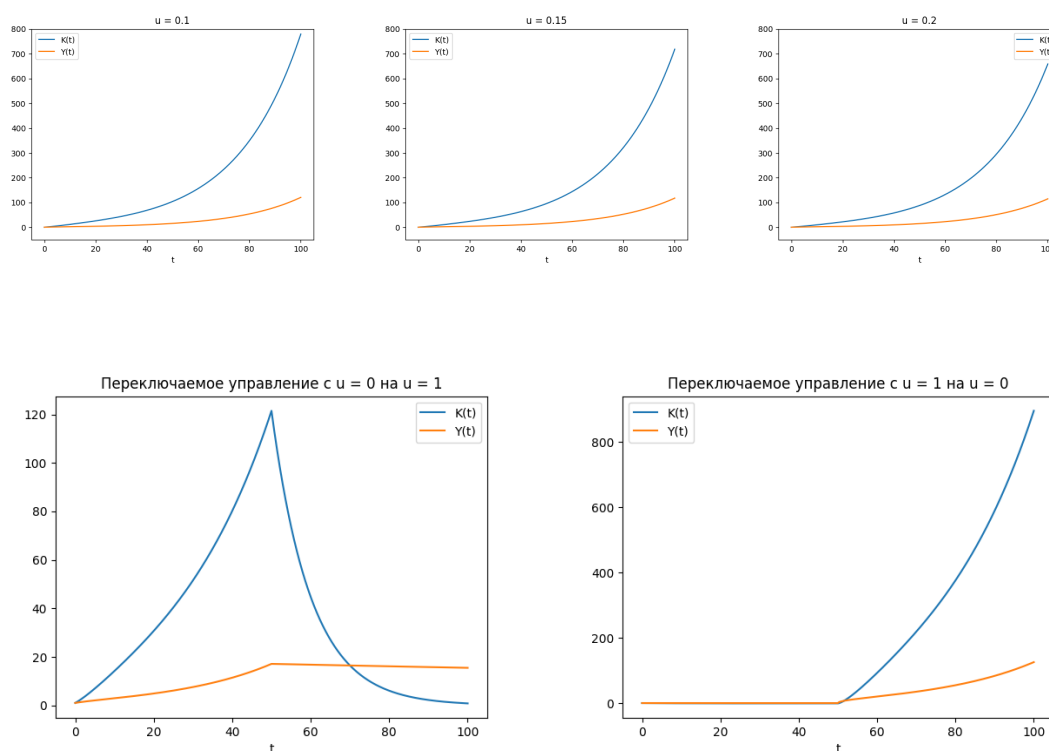


Рис. 1: Зависимость капитала и производственной функции для модели Рамсея.

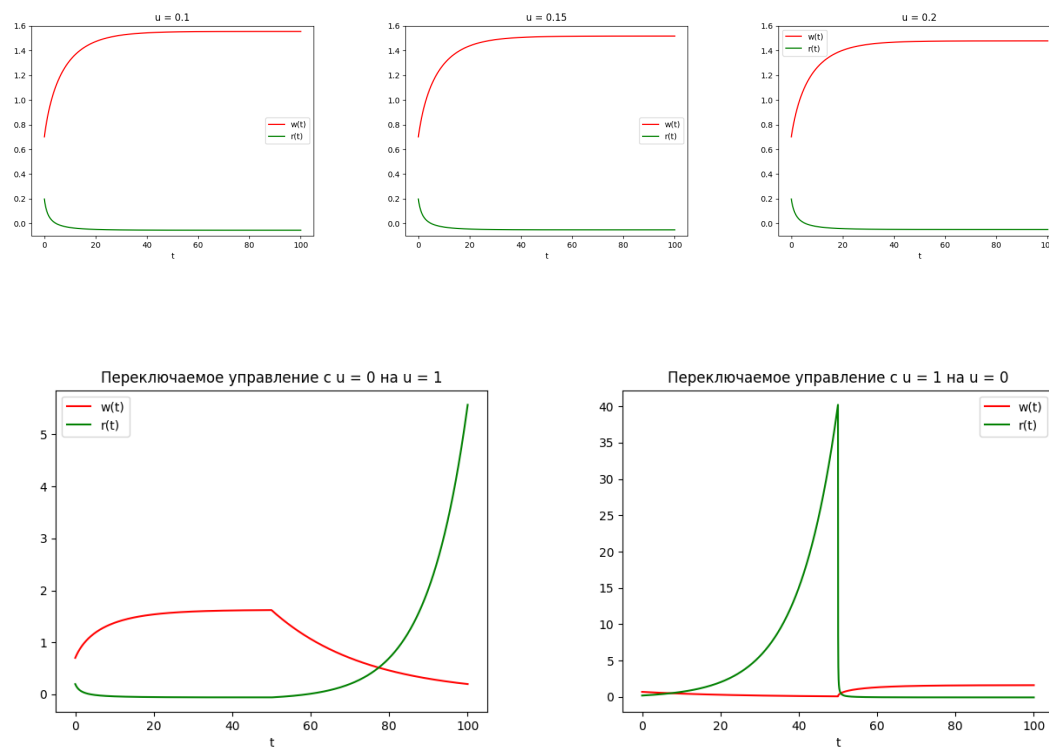


Рис. 2: Зависимость процентной ставки и заработной платы для модели Рамсея.

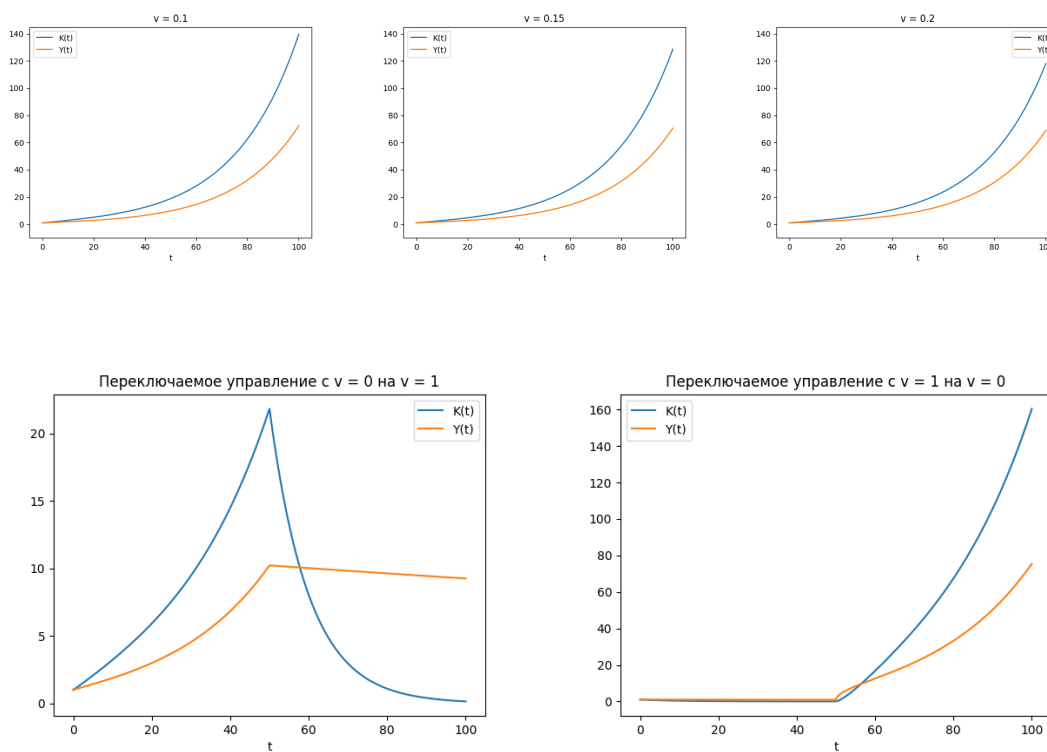


Рис. 3: Зависимость капитала и производственной функции для РК-модели.

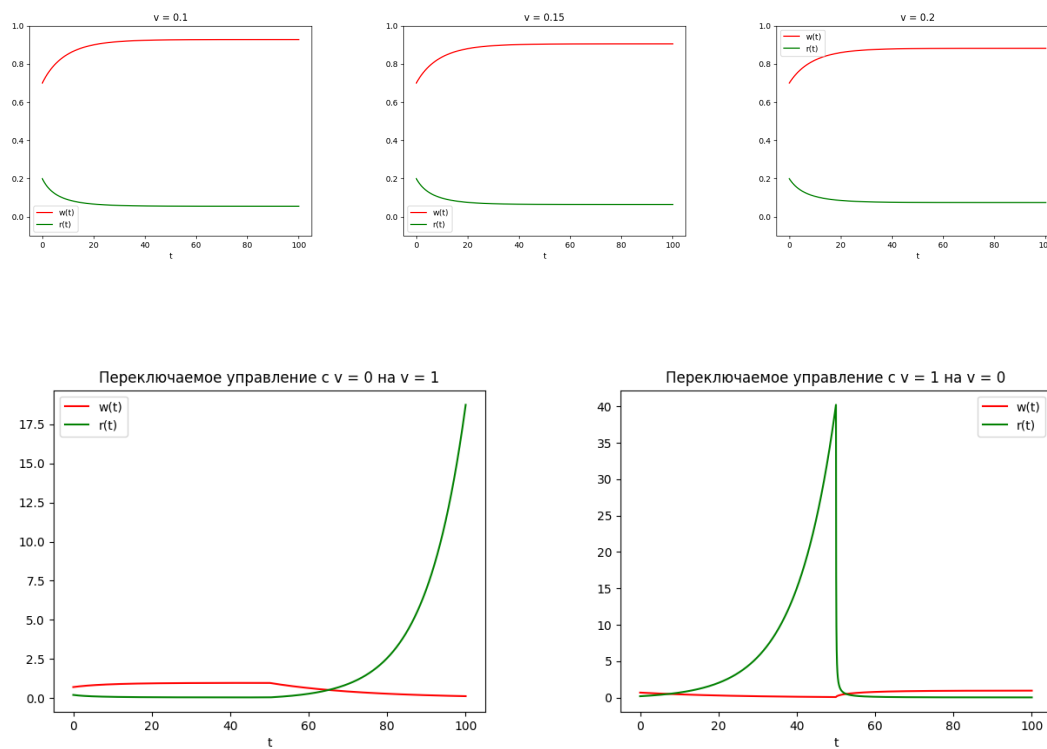


Рис. 4: Зависимость процентной ставки и заработной платы для РК-модели.

Для наглядности производственная функция и капитал были отделены от процентной ставки и заработной платы, из-за разного порядка значений этих функций.

Теперь проведём некоторый анализ полученных представлений. Сперва отметим, что характерное поведение обеих моделей совпадает, что говорит об их близости. Теперь изучим поведение функций Y и K : для обеих моделей на первых трёх графиках видно, что чем меньше значение управления u или v , тем больше значения функций, при этом стоит обратить внимание, что максимальное значение функций, достигающееся в разных моделях отличается (см. вертикальную шкалу), объясняется это тем, что при прочих равных параметрах в модели Рамсея количество потребления численно выше, так как оно включает весь объём производства, в то время как в РК модели максимальное значение потребления (а значит и инвестиций, так как они связаны управлением) выражается лишь через потребление капиталистов.

Хорошее представление о влиянии управления дают рис. 1 и рис. 3. В обоих случаях на них явно видно, что когда $u(t), v(t) = 0$, то рост максимален и наоборот, когда $u(t), v(t) = 1$, капитал начинает быстро убывать (отметим, что экспоненциально). Объясняется это достаточно просто: вспомнив, что управление отвечает за соотношение между потреблением и инвестициями (при $u, v = 0$ потребление также равно нулю, то есть все полученные средства идут на инвестиции) очевидно, что чем больше мы инвестируем в производство, тем быстрее оно растёт и наоборот, если все полученные средства потреблять, ничего не инвестирую, то капитал убывает из-за обесценивания.

Из экспоненциального возрастания значений функции r можно сделать вывод, что отношение рабочей силы к капиталу $\frac{L}{K}$ возрастает экспоненциально.

3. Принцип максимума для задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени

3.1. Постановка задачи

В этом разделе рассмотрим немного изменённую задачу оптимального управления. Теперь будем считать, что мы хотим максимизировать функционал ни на каком-то конкретном отрезке времени, а на бесконечном полуинтервале $T \in [0, \infty)$. В общем виде данная задача формулируется следующим образом

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \in U$$

$$J(x(t), u(t)) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max_{u(t)},$$

где $x \in \mathbb{R}$ – фазовая переменная, $U \subset \mathbb{R}$ – допустимое множество управления. В дальнейшем считаем, что для любого допустимого управления u существует соответствующая ему траектория x , причем для любого $t \geq 0$ ее значения $x(t)$

лежат в G , где G — заданное открытое множество в \mathbb{R} . Произвольная пара (x, u) , где u — допустимое управление и x — соответствующая ему траектория, называется *допустимой парой*. Допустимая пара (x_*, u_*) называется *оптимальной допустимой парой*, если функционал полезности $J(x, u)$ принимает на ней свое наибольшее возможное значение. В этом случае u_* — *оптимальное допустимое управление*, а x_* — *оптимальная допустимая траектория*.

Для нашей модели переобозначим управление таким образом, чтобы мы управляли инвестициями: $I = (r + \delta)K - C^P = (r + \delta)K - v(r + \delta)K = (r + \delta)K(1 - v) = u(r + \delta)K$. Также будем считать, что множество допустимых управлений $U = [0, 1 - \epsilon]$, это вытекает из соображения о том, что какую-то часть дохода капиталисты обязаны потреблять. В таком случае постановка задачи оптимального управления будет иметь следующий вид

$$\dot{K}(t) = u(t)(r(t) + \delta)K(t) - \delta K(t), \quad u(t) \in U = [0, 1 - \epsilon], \quad (3.1)$$

$$K(0) = K_0, \quad (3.2)$$

$$J = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left(L(t) \ln \left(\frac{C^L(t)}{L(t)} \right) + P(t) \ln \left(\frac{C^P(t)}{P(t)} \right) \right) dt \rightarrow \max_{u(t)}. \quad (3.3)$$

Здесь $K(t)$ — фазовая переменная, $u(t)$ — управление. Отметим, что хоть подынтегральное выражение зависит ещё и от переменной $L(t)$, тем не менее мы рассматриваем одномерную задачу, так как динамика фазовой переменной $L(t) = L_0 e^{nt}$ нам известна и не зависит от управления.

3.2. Проверка существования оптимального управления

Обратимся к трём основным условиям, сформулированным в [1], которые помогут нам рассмотреть вопрос о существовании оптимального управления.

(A1) Существует такое $C_0 \geq 0$, что

$$\langle x, f(x, u) \rangle \leq C_0(1 + x^2), \forall x \in G, u \in U.$$

(A2) Для всякого $x \in G$ множество

$$Q(x) = \{(z^0, z) \in \mathbb{R}^2 : z^0 \leq g(x, u), z = f(x, u), u \in U\}$$

выпукло.

(A3) Существует такая положительная функция μ на $[0, \infty)$, что $\mu(t) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow \infty$ и, какова бы ни была допустимая пара (x, u) , выполняется неравенство

$$e^{-\rho t} \max_{u \in U} |g(x(t), u)| \leq \mu(t), \forall t \geq 0.$$

Проверим вышеприведённые условия для задачи (3.1)-(3.3).

$$\langle K, u(r + \delta)K - \delta K \rangle = K^{1+\alpha} u A \alpha e^{nt(1-\alpha)} \leq C_0(1 + K^2),$$

так как $\alpha < 1$, следовательно, $K^{1+\alpha}$ действительно ограничено K^2 . Таким образом условие (A1) выполнено.

Управляемая система (3.1) аффинная по управлению, множество U выпуклое, а функция мгновенной полезности

$$\begin{aligned} g(K, u) &= L \ln \left(\frac{C^L}{L} \right) + P \ln \left(\frac{C^P}{P} \right) = \\ &= L \ln(w) + P \ln \left(\frac{(1-u)(r+\delta)K}{P} \right) \end{aligned}$$

вогнутая по переменной u . Следовательно, для задачи (3.1)–(3.3) выполняется условие выпуклости (A2).

Для проверки условия (A3) проведём следующую оценку:

$$e^{-\rho t} \max_{u \in U} |g(K, L, u)| \leq e^{(n-\rho)t} (P_0 |\ln \epsilon| + P_0 |\ln \alpha F| + L_0 \ln w + |\ln P|),$$

из данного представления, из-за того что все подлогарифмические функции возрастают не более чем экспоненциально, видно, что при $n > \rho$ (что в действительности выполняется на практике) выражение в правой части может быть ограничено некой экспонентой. Следовательно, условие (A3) выполнено.

Тогда сформулируем теорему, дающую нам достаточное условие существования оптимального управления.

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия (A1)–(A3). Тогда в задаче (3.1)–(3.3) существует оптимальное допустимое управление.

Данная теорема в общем виде доказывается в главе 1.2 книги [1]. В нашем же случае она позволяет установить, что оптимальное управление существует.

3.3. Основные соотношения принципа максимума и условие трансверсальности

Рассмотрим теперь общий вариант принципа максимума Понтрягина для задачи (3.1)–(3.3) и обсудим дополнительные краевые условия для сопряженных переменных и гамильтониана на бесконечности.

Функция Гамильтона-Понтрягина $\mathcal{H}(K, t, u, \psi)$ и гамильтониан $H(K, t, \psi)$ в задаче (3.1)–(3.3) определяются соответственно выражениями

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(K, t, u, \psi) &= (u(r+\delta)K - \delta K)\psi + e^{-\rho t} \left[L \ln \left(\frac{C^L}{L} \right) + P \ln \left(\frac{C^P}{P} \right) \right] \\ H(K, t, \psi) &= \sup_{u \in U} \mathcal{H}(K, t, u, \psi), \end{aligned}$$

где $\psi = \psi(t)$ – сопряжённая переменная, соответствующая допустимой паре (K, u) .

Динамика сопряжённой переменной описывается уравнением

$$\dot{\psi} = \left(uA\alpha^2 \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha-1} - \delta \right) \psi - e^{-\rho t} \frac{\alpha P}{K}, \quad (3.4)$$

при этом

$$\psi(0) > 0, \quad (3.5)$$

Будем говорить, что допустимая пара (K, u) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина для задачи (3.1)-(3.3) вместе с соответствующей ей сопряжённой переменной ψ , если для ψ выполняется условие (3.5) и на $[0, \infty)$ выполняется следующее условие максимума:

$$\mathcal{H}(K(t), t, u(t), \psi(t)) \stackrel{a.e.}{=} H(K(t), t, \psi(t)). \quad (3.6)$$

На основании введённых функций можно сформулировать аналог теоремы из третьей главы [1].

Теорема 3.2. Пусть выполняются условия (A1)–(A3) и допустимая пара (K, u) оптимальна в задаче (3.1)-(3.3). Тогда пара (K, u) удовлетворяет основным соотношениям (3.4)–(3.6) принципа максимума Понтрягина вместе с некоторой соответствующей сопряжённой переменной ψ .

При этом в качестве условий трансверсальности на бесконечности обычно предлагается использовать следующее “естественное” обобщение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0 \quad (3.7)$$

Таким образом, выражения (3.4)-(3.7) формируют основные соотношения принципа максимума и условие трансверсальности в задаче (3.1)-(3.3)

4. Численное решение задачи оптимального управления

4.1. Преобразование задачи для численного решения

Для численного решения немного преобразуем задачу (3.1)-(3.3). Так как производственная функция (2.1) является однородной первой степени, то удобно сделать переход к относительным величинам. Введем обозначение: $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$ – капитал на одного рабочего, тогда с учётом выражений (2.2) и (3.1) получим новую динамику фазовой переменной:

$$\dot{k}(t) = u(t)\alpha Ak^\alpha(t) - \delta k(t), \quad u(t) \in U = [0, 1 - \epsilon], \quad (4.1)$$

с учётом начального условия

$$k(0) = \frac{K_0}{L_0} = k_0, \quad (4.2)$$

Также преобразуем функционал (3.3). Перейдём к введённой ранее переменной $k(t)$ и избавимся от слагаемых не влияющих на максимизацию (не зависящих от управления):

$$J(k(t), u(t)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} ((1+q) \ln Ak^\alpha(t) + q \ln(1-u(t))) dt \rightarrow \max_{u(t)}, \quad (4.3)$$

где $q = \frac{P_0}{L_0}$ – есть отношение начального количества капиталистов к начальному отношению рабочих, заданный параметр.

4.2. Гамильтониан в рамках принципа максимума Понтрягина

Применим принцип максимума Понтрягина для решения задачи (4.1)-(4.3). Введя сопряженную переменную $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(t)$, интерпретируемую в экономике как теневая цена капитала, составим гамильтониан задачи:

$$\tilde{H}(u, k, t, \psi) = ((1 + q) \ln Ak(t)^\alpha + q \ln(1 - u(t))) e^{-\rho t} + \tilde{\psi}(u\alpha Ak^\alpha - \delta k).$$

Чтобы избавиться от экспоненциального члена, зависящего от времени, введем новые переменные:

$$\psi = \tilde{\psi}e^{\rho t}, \quad H(u, k, \psi) = e^{\rho t} \tilde{H}(u, k, t, \tilde{\psi}),$$

и рассмотрим гамильтониан задачи в следующем виде

$$H(u, k, \psi) = (1 + q) \ln Ak^\alpha + q \ln(1 - u) + \psi(u\alpha Ak^\alpha - \delta k). \quad (4.4)$$

Запишем необходимое условие максимума для гамильтониана $H(u, k, \psi)$ (4.4) по переменной u

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{1}{1 - u} + \psi\alpha Ak^\alpha = 0$$

Из этого уравнения получаем выражение для безусловного максимизатора гамильтониана

$$u^0 = 1 - \frac{1}{\psi\alpha Ak^\alpha} \quad (4.5)$$

Введем конструкцию максимизированного гамильтониана в задаче с ограничениями на управляющую переменную u

$$\hat{H}(k, \psi) = \max_{u \in [0, 1 - \epsilon]} H(u, k, \psi)$$

Лемма 4.1. *Максимизированный гамильтониан $\hat{H}(k, \psi)$ строится в соответствии с расположением точки максимума u^0 по следующему алгоритму:*

1. Если $u^0 \in [0, 1 - \epsilon]$, то $\hat{H}(k, \psi) = H(u^0, k, \psi)$.
2. Если $u^0 < 0$, то $\hat{H}(k, \psi) = H(0, k, \psi)$.
3. Если $u^0 > 1 - \epsilon$, то $\hat{H}(k, \psi) = H(1 - \epsilon, k, \psi)$.

Рассмотрим подробнее образовавшиеся ветви гамильтониана

$$H_1 = H(0, k, \psi) = (1 + q) \ln Ak^\alpha - \psi\delta k$$

$$H_2 = H(u^0, k, \psi) = q \ln Ak^\alpha - \ln \alpha \psi + \alpha \psi Ak^\alpha - \psi\delta k - 1$$

$$H_3 = H(1 - \epsilon, k, \psi) = (1 + q) \ln Ak^\alpha + \ln \epsilon + \psi((1 - \epsilon)\alpha Ak^\alpha - \delta k)$$

Лемма 4.2. *Максимизированный гамильтониан $\hat{H}(k, \psi)$ является строго вогнутой функцией по переменной k для всех $\psi > 0$.*

Для доказательства леммы (4.2) заметим, что вторые производные соответствующих ветвей гамильтониана строго отрицательны

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H_1}{\partial k^2} &= -\frac{(1+q)\alpha}{k^2} < 0 \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial k^2} &= -\frac{q\alpha}{k^2} + A\alpha^2(\alpha-1)\psi k^{\alpha-2} < 0 \\ \frac{\partial^2 H_3}{\partial k^2} &= -\frac{(1+q)\alpha}{k^2} + A\alpha^2(\alpha-1)\psi(1-\epsilon)k^{\alpha-2} < 0\end{aligned}$$

Таким образом, максимизированный гамильтониан разбивается на три области, которые склеиваются между собой, при этом являясь строго вогнутой функцией. Отметим, что в большинстве прикладных задач, в том числе и нашей (в чём мы позже убедимся) выполняется именно $u^* \in (0, 1-\epsilon)$, значит оптимальное управление совпадает с безусловным максимизатором, а значит точка глобального максимума принадлежит области $\hat{H}(k, \psi) = H(u^0, k, \psi)$, поэтому дальнейшее исследование будет проводиться именно в ней.

4.3. Гамильтонова система

Рассмотрим принцип максимума Понтрягина. В выбранной области, с учётом выражения (4.5), динамика сопряженной переменной описывается уравнением

$$\dot{\psi}(t) = \rho\psi(t) - \frac{(1+q)\alpha}{k(t)} - \psi(t)(u(t)\alpha Ak^\alpha(t) - \delta) \quad (4.6)$$

Подставив безусловный максимизатор $u^0(t)$ (4.5) в динамику теневых цен $\psi(t)$ (4.6) и капитала на одного рабочего $k(t)$ (4.1), составим гамильтонову систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = \psi(t)(\rho + \delta - \alpha Ak^\alpha(t)) - \frac{q\alpha}{k(t)} \\ \dot{k}(t) = \alpha Ak^\alpha(t) - \frac{1}{\psi(t)} - \delta k(t) \end{cases} \quad (4.7)$$

Для удобства введем новую переменную $z = z(t)$

$$z(t) = \psi(t)k(t), \quad \dot{z}(t) = \dot{\psi}(t)k(t) + \psi(t)\dot{k}(t)$$

Рассмотрим гамильтонову систему (4.7) в переменных (k, z)

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = z(t)(\alpha Ak^{\alpha-1}(t) + \rho - \alpha^2 Ak^{\alpha-1}(t)) - q\alpha - 1 \\ \dot{k}(t) = \alpha Ak^\alpha(t) - \frac{k(t)}{z(t)} - \delta k(t) \end{cases} \quad (4.8)$$

Найдем установившееся состояние (k^*, z^*) гамильтоновой системы (4.8), которое является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 0 = z(t)(\alpha Ak^{\alpha-1}(t) + \rho - \alpha^2 Ak^{\alpha-1}(t)) - q\alpha - 1 \\ 0 = \alpha Ak^\alpha(t) - \frac{k(t)}{z(t)} - \delta k(t) \end{cases}$$

Решением данной системы является пара чисел

$$\begin{cases} k^* = \left(\frac{q\alpha\delta + \rho + \delta}{A\alpha^2(q+1)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ z^* = \frac{\alpha(q+1)}{\rho + \delta(1-\alpha)} \end{cases} \quad (4.9)$$

4.4. Седловой характер установившегося состояния

Анализ характеристических свойств установившегося состояния (k^*, z^*) (4.9) связан с рассмотрением собственных чисел и векторов линеаризованной гамильтоновой системы. В матричной записи гамильтонова система (4.8), линеаризованная в окрестности (k^*, z^*) , имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{k}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} k(t) - k^* \\ z(t) - z^* \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Элементы матрицы A вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2 A(k^*)^{\alpha-1} - \delta - \frac{1}{z^*} & \frac{k^*}{(z^*)^2} \\ -z^* A\alpha(\alpha-1)^2 (k^*)^{\alpha-2} & \alpha A(1-\alpha)(k^*)^{\alpha-1} + \rho \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Собственные числа матрицы A являются решением уравнения

$$\det(A - \chi E) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \chi & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \chi \end{pmatrix} = 0. \quad (4.11)$$

Здесь χ обозначает собственное число и $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ есть единичная матрица.

Замечание 1. Позже мы убедимся, что собственные числа χ_1 и χ_2 действительные и имеют разные знаки, следовательно, установившееся состояние (k^*, z^*) является седловой точкой. Это означает, что для линеаризованной системы только две траектории сходятся к установившемуся состоянию вдоль направления, которое определяется собственным вектором, отвечающим отрицательному собственному числу.

4.5. Алгоритм построения оптимальной траектории

Перейдём к алгоритму построения оптимальной траектории в задаче управления (4.1)-(4.3) на основе анализа гамильтоновой системы (4.8), опираясь на алгоритм представленный в диссертации [2]. Алгоритм построения оптимальной траектории состоит из следующих шагов.

1. Аналитическое вычисление установившегося состояния (k^*, z^*) по формулам (4.9)

2. Линеаризация гамильтоновой системы (4.8) в окрестности установившегося состояния (k^*, z^*) . Вычисляются элементы матрицы A (4.11).
3. Вычисление собственных чисел χ_1, χ_2 и векторов линеаризованной системы.
4. Фиксируется положительный параметр $\epsilon > 0$, задающий точность алгоритма. Строится характеристическая точка (k_ϵ, z_ϵ) в ϵ -окрестности установившегося состояния (k^*, z^*) в направлении собственного вектора, отвечающего отрицательному собственному числу. Считается, что от установившегося состояния (k^*, z^*) до характеристического состояния (k_ϵ, z_ϵ) производится интегрирование линеаризованной системы (4.10).
5. Производится переход от нелинейной гамильтоновой системы (4.8) к уравнению для $z(k)$ делением одного уравнения на другое. Рассматривается динамика $\frac{dz}{dk}$ в фазовой плоскости (k, z) , при этом считаем, что $z(k_\epsilon) = z_\epsilon$. Производится интегрирование методом Рунге-Кутты в обратном направлении по переменной k от характеристического состояния (k_ϵ, z_ϵ) . Интегрирование производится до достижения фазовой переменной k значения k_0 .
6. Развертка интегрированной траектории в прямом времени и масштабирование временной шкалы.

Замечание 4.2. Предложенный алгоритм аппроксимирует единственную оптимальную траекторию, сходящуюся к установившемуся состоянию.

4.6. Реализация алгоритма

Для реализации данного алгоритма используем язык программирования *python*. В частности для построения графиков используется библиотека *matplotlib*. Для решения возникающих задач Коши воспользуемся классическим методом Рунге — Кутты четвёртого порядка. Для нахождения собственных чисел и векторов матрицы используется библиотека *numpy*.

Для численного решения были использованы следующие параметры, описывающие модель:

$$A = 1, \alpha = 0.3, \rho = 0.05, \delta = 0.1, q = 0.1, k_0 = 0.1$$

При заданных параметрах точка установившегося состояния (4.9) принимает значения

$$\begin{pmatrix} k^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5369324633587672 \\ 2.7500000000000004 \end{pmatrix}$$

Собственные значения матрицы частных производных линеаризованной системы (4.10) принимают значения

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.17392324 \\ 0.22392324 \end{pmatrix}$$

Таким образом мы убедились в верности **Замечания 1**. Далее вычислим собственный вектор, соответствующий отрицательному собственному значению

$$h = \begin{pmatrix} -0.42637854 \\ -0.12837894 \end{pmatrix}$$

Положим параметр $\epsilon = 0.00001$, определяющий окрестность точки устоявшегося состояния и вычислим характеристическую точку (k_ϵ, z_ϵ)

$$\begin{pmatrix} k_\epsilon \\ z_\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^* \\ z^* \end{pmatrix} + \epsilon h = \begin{pmatrix} 0.5369281995734054 \\ 2.749998716210628 \end{pmatrix}$$

Интегрируя уравнение $\frac{dz}{dk}$ в обратном направлении переменной k получим начальное значение фазовой переменной. График траектории в фазовой плоскости (k, z) представлен на рисунке 5.

$$z(0) = 1.2898567505212197$$

Далее интегрируем систему (4.8) в прямом времени и получаем значения функций $k(t)$ и $z(t)$, графики которых представлены на рисунках 6 и 7.

Производя обратную замену $\psi = \frac{z}{k}$, получаем значение функции $\psi(t)$ для подстановки в выражение для максимизатора гамильтониана $u^0(t)$ (4.5). Его график изображён на рисунке 8.

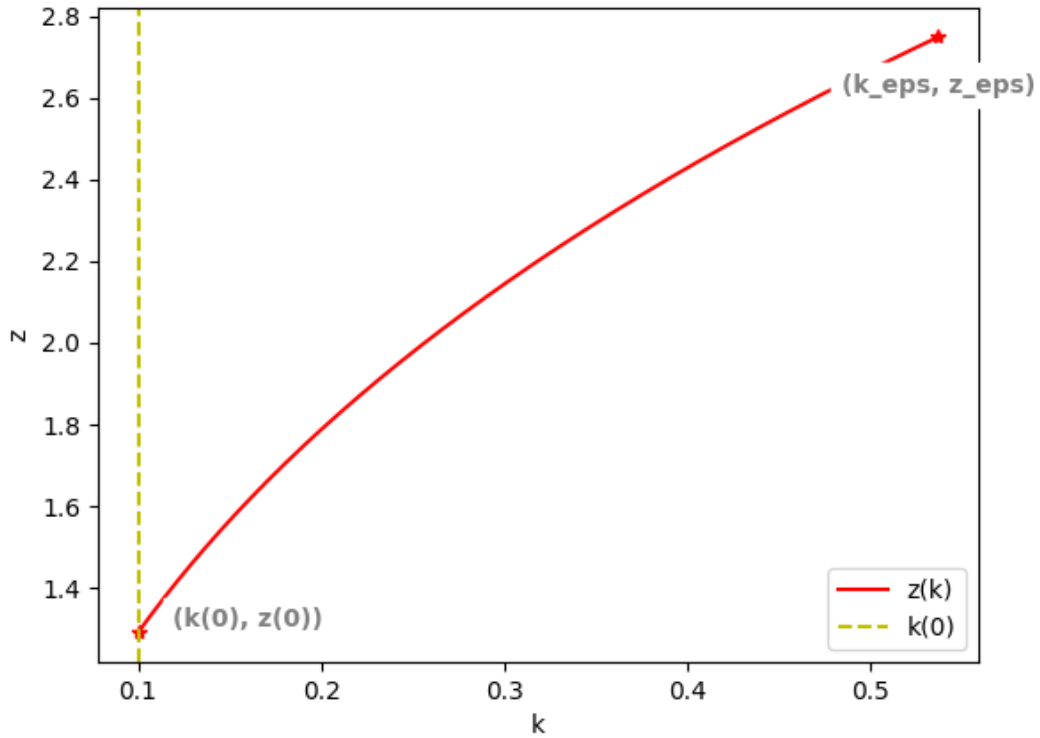


Рис. 5: График зависимости фазовых переменных.

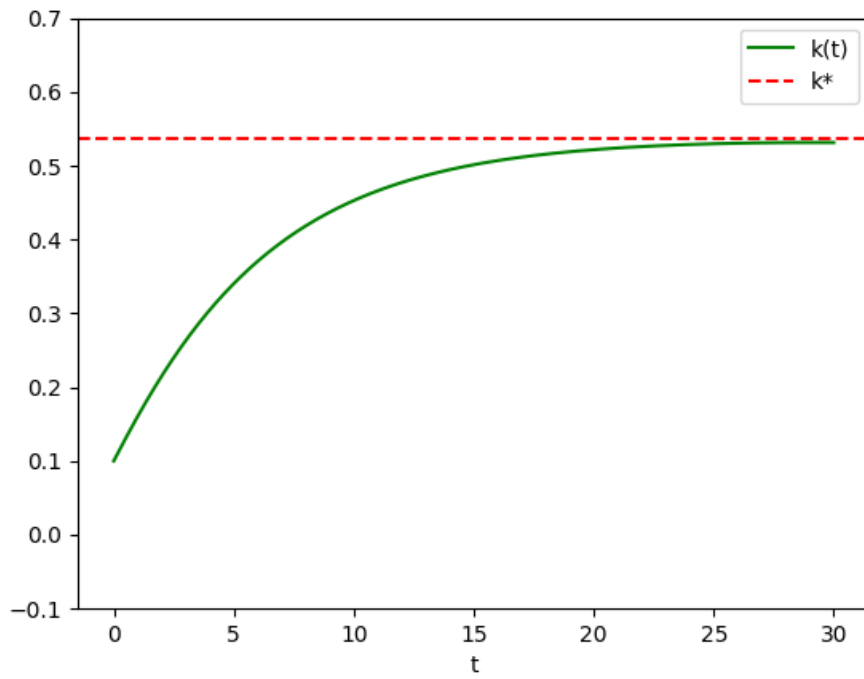


Рис. 6: График изменения капитала на одного рабочего с течением времени.

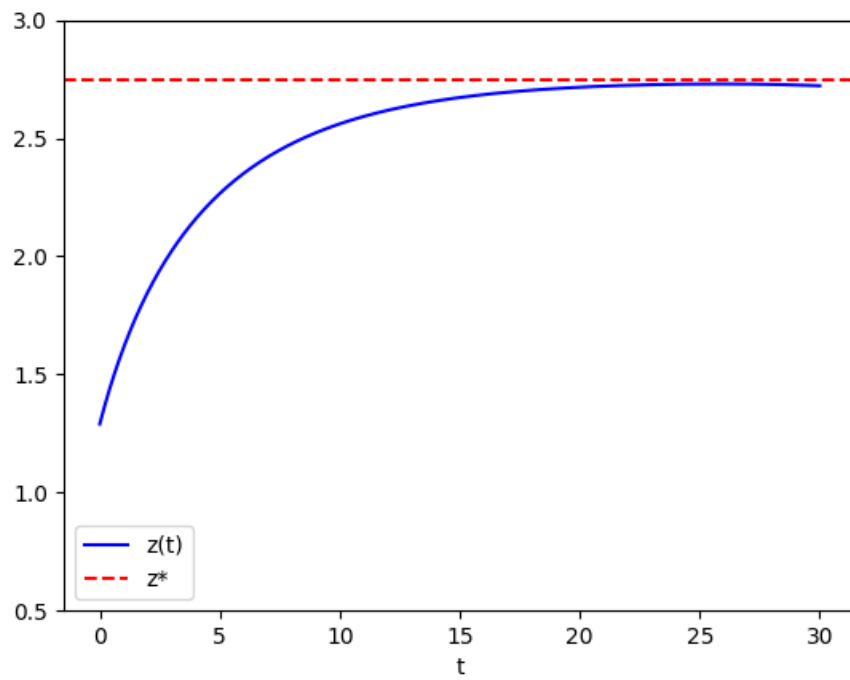


Рис. 7: График фазовой переменной $z(t)$.

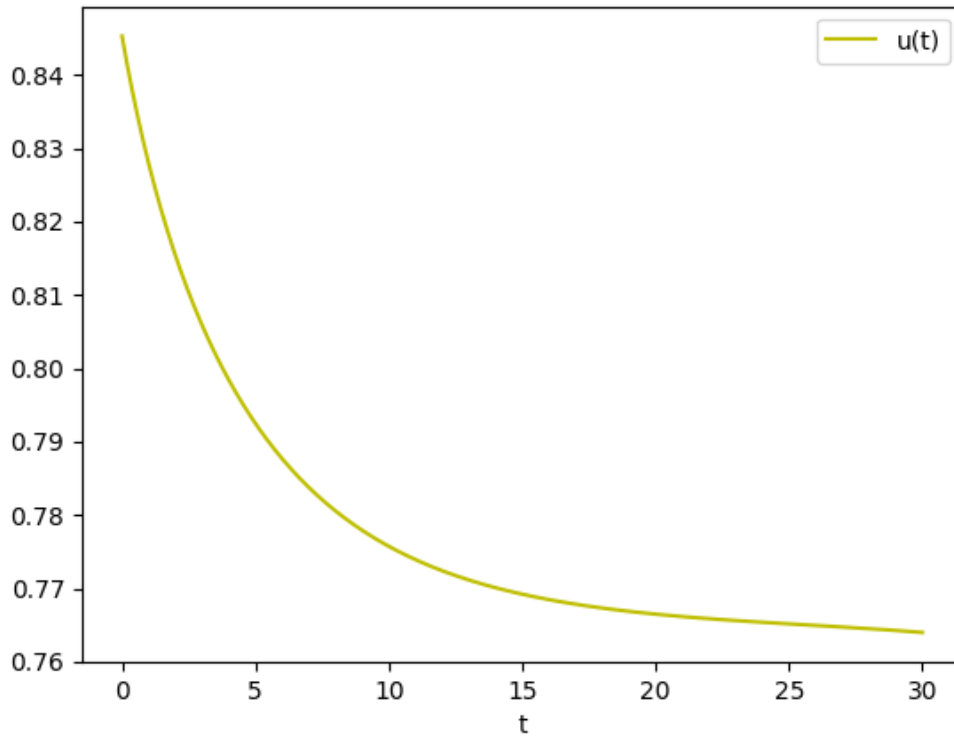


Рис. 8: График максимизатора гамильтониана, совпадающий с оптимальным управлением $u^*(t)$.

4.7. Анализ полученных результатов

Анализируя результаты, полученные с помощью численных методов, можно прийти к выводу, что система действительно сходится к установившемуся состоянию (k^*, z^*) (4.9), хоть и с некоторой погрешностью. Также важно отметить, что из графика на рис. 8 видно, что максимизатор гамильтониана удовлетворяет ограничениям $u^0(t) \in U = (0, 1 - \epsilon)$ на всём временном промежутке, а значит искомое оптимальное управление совпадает с ним. Далее, придя в установившееся состояние, фазовые переменные k и z изменяться не будут.

5. Литература и ссылки

Список литературы

- [1] С. М. Асеев, А. В. Кряжимский, “Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста”, Труды МИАН, 257, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2007, 3–271; Proc. Steklov Inst. Math., 257 (2007), 1–255
- [2] А. А. Красовский, МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ, 2008 г.
- [3] Hartman Ph. Ordinary Differential Equations. N.Y., London, Sydney: J. Wiley and Sons, 1964.