

Optimizing Monte Carlo Simulations Through Variance Reduction

Ahmed MILI, Liam SEIFRITZ, Enki MILLET, Ihab Machmoum

23 December 2024

1 Introduction

La méthode de Monte Carlo est largement utilisée pour estimer le prix des options financières, notamment dans le modèle de Black-Scholes. Cependant, cette méthode peut souffrir d'une variance élevée, ce qui signifie que la précision des estimations peut nécessiter un très grand nombre de simulations pour converger vers une valeur fiable. Afin d'améliorer l'efficacité et la précision de ces simulations, des techniques de réduction de variance, comme les variantes antithétiques (Antithetic Variates), peuvent être utilisées.

2 Problème initial

Dans le code de base, nous simulons un ensemble de chemins pour le prix de l'actif sous-jacent à l'option. Ces chemins sont générés à partir d'un processus de diffusion basé sur la volatilité et le taux d'intérêt. Chaque chemin génère un payoff (valeur obtenue à l'échéance de l'option) qui est actualisé et utilisé pour estimer le prix de l'option.

Cependant :

La méthode génère une variance élevée, ce qui rend l'estimation lente. Plus la variance est élevée, plus il faut de simulations pour obtenir un résultat fiable, ce qui augmente les coûts de calcul.

3 Solution : Les variantes antithétiques

Les **variantes antithétiques** constituent une méthode efficace pour réduire la variance dans les simulations Monte Carlo. L'idée principale est de créer des chemins supplémentaires en utilisant des variables aléatoires opposées (ou complémentaires) pour chaque chemin simulé.

Pour chaque nombre aléatoire normal généré dans une simulation, nous créons un deuxième chemin en utilisant son opposé $-normal$. Ces deux chemins (normal et $-normal$) sont corrélés négativement. Les deux chemins produisent des payoffs qui, lorsqu'ils sont moyennés, réduisent les fluctuations globales et donc la variance de l'estimation.

4 Modifications apportées dans le code

Dans la méthode **generate** définie dans le fichier `BlackScholesMCPricer.cpp`, chaque chemin est accompagné d'un chemin **antithétique**. Pour cela, deux chemins distincts sont calculés à chaque étape temporelle :

- Le **chemin normal** utilise un nombre aléatoire généré normalement, noté normal, suivant une loi normale centrée réduite ($\mu = 0, \sigma = 1$).
- Le **chemin antithétique** utilise l'opposé de ce nombre aléatoire, noté $-\text{normal}$.

Pour chaque paire de chemins (normal et $-\text{normal}$), nous calculons les **payoffs correspondants** à l'échéance. Cela inclut les payoffs associés au chemin normal et au chemin antithétique, calculés en fonction des prix simulés.

Ensuite, les payoffs sont **actualisés** (ou discountés) avec le taux d'intérêt r pour ramener leur valeur à l'instant présent. La formule utilisée est la suivante :

$$\text{Payoff Actualisé} = e^{-rT} \cdot \text{Payoff}$$

Où :

- r est le taux d'intérêt sans risque.
- T est le temps jusqu'à l'échéance.
- Payoff est la valeur brute calculée à partir du chemin simulé.

Les deux **payoffs actualisés** (chemin normal et antithétique) sont ensuite **moyennés**, ce qui permet de réduire la variance globale de l'estimation.

$$\text{Payoff Moyen} = \frac{\text{Payoff Actualisé}_{\text{normal}} + \text{Payoff Actualisé}_{\text{antithétique}}}{2}$$

À chaque itération, deux nouveaux chemins (normal et antithétique) sont ajoutés. L'estimation courante du prix de l'option est mise à jour en conséquence en tenant compte de ces deux chemins :

$$\text{Estimation Courante} = \frac{N \cdot \text{Estimation Précédente} + \text{Payoff Actualisé}_{\text{normal}} + \text{Payoff Actualisé}_{\text{antithétique}}}{N + 2}$$

Où :

- N est le nombre total de chemins déjà simulés.
- Estimation Précédente est la valeur estimée avant d'ajouter les deux nouveaux chemins.

Cette approche permet de **réduire la variance dans les simulations Monte Carlo**, ce qui améliore la précision des estimations et réduit significativement le temps d'exécution. Par exemple, dans ce projet, le temps de calcul est passé de 4 minutes 20 à seulement 2 minutes 20.

En résumé, l'utilisation de chemins antithétiques constitue une amélioration efficace pour optimiser les simulations Monte Carlo tout en maintenant une précision élevée.