Pokyny

Písomka sa skladá z troch (a bonusovej záverečnej) úloh, za každú viete získať 20 bodov.

Pri každej úlohe (ak nie je napísané inak) očakávam slovný popis jej riešenia. Tento popis by sa mal zamerať na hlavnú myšlienku riešenia, odôvodnenie správnosti a mal by obsahovať odhad časovej zložitosti.

Za riešenia je možné získavať aj čiastkové body a to buď za menej efektívne riešenia, alebo myšlienky smerujúce k správnemu riešeniu.

Ak používate algoritmus alebo postup priamo z prednášky, nemusíte ho bližšie popisovať, zamerajte sa na to, ako ho upravujete, poprípade aplikujete.

Čo (ne)používať: Počas písomky môžete voľne používať akékoľvek materiály uverejnené na stránke predmetu a takisto nahrané prednášky. Úplne v poriadku je využívať aj ďalšie materiály, ktoré ste využili pri učení (napr. stránku wikipédie o LCA).

V poriadku **nie je** využívať cudzie riešenia príkladov z písomky a takisto akákoľvek vzájomná komunikácia poprípade "vonkajšia"pomoc.

Férovo a s rozumom, ďakujem.

Odovzdávanie: Riešenie každej úlohy spracujte do samostatného dokumentu. Preferujem pekne natexované pdf-ká, nestrácajte tým však zbytočne veľa času. Akceptujem (aj keď nebudem nadšený) aj rukou písané a odfotené riešenia. Výsledné súbory však nech sú jasne pomenované a buď `.pdf` alebo `.jpg`.

Písomku môžete ukončiť kedykoľvek, stačí mi poslať jeden `.zip` nazvaný vaším AIS menom obsahujúci všetky odovzdávané súbory na adresu `michal.anderle@fmph.uniba.sk` Keď vám potvrdím, že som riešenie dostal, môžete z písomky odísť.

1. Tá o predávaní čísel (20 bodov)

Máme postupnosť n kladných celých čísel $c_1, c_2 \dots c_n$. Tieto čísla chceme postupne predať. Postupne nám prichádza n ponúk, ktoré sú označené $p_1, p_2 \dots p_n$. Ponuka p_i znamená, že ak tejto ponuke predáme číslo c, dostaneme $p_i \cdot c$ peňazí. Samozrejme, naším cieľom je získať čo najviac peňazí.

Problém je však v tom, že čísla z našej postupnosti nevieme predávať ľubovoľne. Každej ponuke môžeme predať iba jedno **z prvých troch čísel aktuálnej postupnosti**. Na každú ponuku zároveň musíme zareagovať a niektoré z prvých troch čísel postupnosti jej predať. Po predaji je číslo z postupnosti odstránené, čím sa postupnosť skráti.

Zistite maximálny obnos peňazí, ktoré vieme získať správnym reagovaním na ponuky.

Plný počet bodov získate za riešenie, ktoré dokáže efektívne riešiť túto úlohu pre $n \leq 500$.

Za efektívne riešenie, ktoré namiesto prvých troch kníh vyberá z prvých **dvoch** kníh môžete získať až 14 bodov.

vstup

```
n=4
// postupnost c1 až cn
16 6 2 10
// postupnosť ponúk p1 až pn
3 8 12 9
```

výstup

```
336
```

Prvej ponuke predáme tretie číslo z postupnosti, čím zarobíme $3 \cdot 2 = 6$ peňazí. Naša postupnosť následne vyzerá $(16, 6, 10)$. Druhej ponuke predáme druhé číslo za celkovú cenu 48 peňazí (všimnite si, že v tomto momente vieme druhej ponuke predať aj číslo 10, keďže je už tretie v poradí, to sa však neoplatí). Tretia ponuka dostane číslo 16 a posledná ponuka číslo 10.

2. Tá o jednoduchom hľadaní reťazca (20 bodov)

Miško sa rozhodol spraviť vlastný program, ktorý hľadá slovo `P` v texte `T`. Jeho program vyzeral nasledovne:

Listing programu (Python)

```python
x, y = 0, 0
while y < len(T):
    if x == len(P):
        print("Nasiel som hladany retazec")
        break
    if T[y] == P[x]:
        x += 1
        y += 1
        continue
    if x == 0:
        y += 1
        continue
    x = 0
```

Jeho riešenie však nie je správne. Zistite v čom a vytvorte program, ktorý pre zadané slovo `P` nájde **najkratší** reťazec `T`, na ktorom sa Miškov program nespráva správne, poprípade zistite, že taký reťazec `T` neexistuje.

Za odhalenie, popísanie a prezentovanie chyby v programe na nejakých príkladoch môžete získať až 6 bodov.

3. Tá s dopisovaním (20 bodov)

Na mobile sa snažíte čo najrýchlejšie napísať slovo `S`. Zaujímavý je samozrejme počet stlačení nejakej klávesy. K dispozícii máte všetky malé písmená anglickej abecedy a takisto možnosť **backspacu**, ktorého stlačenie vymaže posledný napísaný znak.

Váš mobil sa vám však s písaním snaží pomôcť, a ponúka vám možnosť doplniť rozpísaný text na nejaké slovo, ktoré pozná. Využitie tejto možnosti stojí iba jedno stlačenie a okamžite doplní celé zvolené slovo.

Pre príklad si predstavte, že chcete napísať slovo `autobus`. Napíšete `a` a mobil vám ponúkne doplniť to na slovo `auto`. Vy túto možnosť akceptujete a na dve stlačenia máte na obrazovke napísané štyri znaky. Dopíšete teraz `b`, mobil správne zistí, že chcete napísať `autobus` a vy to už len doplníte štvrtým stlačením.

(V nižšie uvedenom príklade by sme dokonca prvé `a` ani nemuseli písať, keďže `auto` by bola prvá možnosť na doplnenie.)

A ako presne toto doplňanie slov funguje? Mobil má interný **usporiadaný** slovník `T`. Vždy keď máte rozpísané nejaké slovo, mobil vám ponúka na doplnenie prvé slovo z `T`, ktoré začína na to, čo ste napísali.

Na vstupe dostanete zoznam slov `T` a tiež niekoľko slov `S`, ktoré chete čo najrýchlejšie napísať na klávesnici. Pre každé slovo nájdite najmenší počet stlačení, ktoré potrebujete na jeho napísanie.

vstup	výstup

`// slovník T`
`pocet=3`
`auto`
`autobus`
`autostrada`
`// slova na pisanie`
`pocet=7`
`auto`
`aut`
`a`
`autobusar`
`autobus`
`autostrad`
`utobus`
	`1`
	`2`
	`1`
	`5`
	`3`
	`4`
	`6`

Slovo `auto` je v slovníku `T` prvé, takže je ponúknuté ako možnosť doplnenia, keď ešte nič nemáme napísané, preto nám stačí jedno stlačenie na jeho napísanie. Zároveň si všimnite, že ak máme napísané `auto`, mobil nám ponúkne na doplnenie opäť slovo `auto`.
Slovo `autobusar` vieme napísať tak, že zvolíme možnosť doplnenia (dostaneme `auto`), dopíšeme `b`, doplníme na `autobus` a dopíšeme `a` a `r`.
Pri písaní slova `autostrad` dokonca využijeme v poslednom kroku backspace, ktorý vymaže posledné písmeno.

4. Tá bonusová s otázkami ($3 \times (0.5 + 1.5)$ body)

Keďže anketu ste už vypĺňali, bonusová otázka je teraz o niečo ťažšia. Dá sa však za ňu získať až 6 bodov a tieto body sa nepočítajú do plného počtu bodov.

Pre každý z nasledujúcich výrokov určite či je pravdivý (pol bodu) a svoje tvrdenie odôvodnite (jeden a pol bodu).

1. V orientovanom ohodnotenom grafe s n vrcholmi a m hranami, ktoré sú ohodnotené celými číslami z rozsahu 1 až 100 vieme nájsť najkratšiu cestu medzi dvoma vrcholmi v čase $O(n + m)$.
2. Nech je problém SAT polynomiálne redukovateľný na problém A z triedy NP. Je A NP-úplný problém?
3. V neorientovanom váhovanom grafe, v ktorom sú všetky váhy hrán navzájom rôzne patria dve najlacnejšie hrany do niektorej najlacnejšej kostry.