Pokyny

Písomka sa skladá z troch (a bonusovej záverečnej) úloh, za každú viete získať 20 bodov.

Pri každej úlohe (ak nie je napísané inak) očakávam slovný popis jej riešenia. Tento popis by sa mal zamerať na hlavnú myšlienku riešenia, odôvodnenie správnosti a mal by obsahovať odhad časovej zložitosti.

Za riešenia je možné získavať aj čiastkové body a to buď za menej efektívne riešenia, alebo myšlienky smerujúce k správnemu riešeniu.

Ak používate algoritmus alebo postup priamo z prednášky, nemusíte ho bližšie popisovať, zamerajte sa na to, ako ho upravujete, poprípade aplikujete.

Čo (ne)používať: Počas písomky môžete voľne používať akékoľvek materiály uverejnené na stránke predmetu a takisto nahrané prednášky. Úplne v poriadku je využívať aj ďalšie materiály, ktoré ste využili pri učení (napr. stránku wikipédie o LCA).

V poriadku **nie je** využívať cudzie riešenia príkladov z písomky a takisto akákoľvek vzájomná komunikácia poprípade "vonkajšia" pomoc.

Férovo a s rozumom, ďakujem.

Odovzdávanie: Riešenie každej úlohy spracujte do samostatného dokumentu. Preferujem pekne natexované pdf-ká, nestrácajte tým však zbytočne veľa času. Akceptujem (aj keď nebudem nadšený) aj rukou písané a odfotené riešenia. Výsledné súbory však nech sú jasne pomenované a buď `.pdf` alebo `.jpg`.

Písomku môžete ukončiť kedykoľvek, stačí mi poslať jeden `.zip` nazvaný vaším AIS menom obsahujúci všetky odovzdávané súbory na adresu `michal.anderle@fmph.uniba.sk` Keď vám potvrdím, že som riešenie dostal, môžete z písomky odísť.

1. Tá o redukovaní ($10 + 10$ bodov)

Hamiltonovská kružnica – rozhodovací problém: pre zadaný graf G zistite, či sa v ňom nachádza kružnica prechádzajúca každým vrcholom grafu práve raz.

Hamiltonovská cesta – rozhodovací problém: pre zadaný graf G zistite, či sa v ňom nachádza cesta prechádzajúca každým vrcholom grafu práve raz.

(a) Vymyslite a popíšte polynomiálnu redukciu problému Hamiltonovskej *cesty* na problém Hamiltonovskej *kružnice.*

(b) Vymyslite a popíšte polynomiálnu redukciu problému Hamiltonovskej *kružnice* na problém Hamiltonovskej *cesty.*

Upozornenie: Pri návrhu polynomiálnej redukcie sa riaďte Definíciou 5.2. zo skrípt. Samozrejme, Turingov stroj nám stačí popísať ako klasický algoritmus.

Inými slovami, popíšte algoritmus, ktorý transformuje vstup pre jeden problém (napr. kružnica) tak, aby bol vyhovujúci pre druhý problém (napr. cesta) a správna odpoveď na oboch vstupoch pre zodpovedajúce problémy je rovnaká.

2. Tá zastávková (20 bodov)

Podzemné metro má $n + 1$ zastávok očíslovaných od 0 po n, na začiatku sa nachádzate na zastávke číslo 0 a chcete sa dostať na zastávku n. Na cestovanie slúžia špeciálne k-lístky. Pomocou k-lístka môžete nasadnúť na ľubovoľné množstvo spojov, jedným spojom sa však môžete presunúť **o najviac k zastávok**. Ak sa teda nachádzate na zastávke i, môžete sa jedným spojom presunúť na ľubovoľnú zastávku v rozmedzí $i - k$ až $i + k$.

Nakúpiť si môžete **jeden** k-lístok pre ľubovoľné $1 \le k \le n$. Pre každý k-lístok poznáte jeho cenu c_k.

Vždy, keď vystúpite na zastávke i, musíte počkať t_i minút na príchod ďalšieho spoja. Čakanie je však otravné, preto na ceste na zastávku n nechcete čakať dokopy viac ako q minút. Splniac túto podmienku však chcete minimalizovať cenu, ktorú zaplatíte za lístok. Zistite, ktorý k-lístok si máte kúpiť.

vstup

```
n=5 q=5
// ceny k-lístkov
1 10 7 3 15
// čas čakania na zastávkách 1, 2 ... n-1
3 4 3 2
```

výstup

```
kúp 4-lístok
```

Všimnite si, že na zastávke 0 a n nie je žiadne čakanie, preto pre ne ani neuvádzame hodnoty na vstupe. S 1-lístkom alebo 2-lístkom by sme čakali príliš dlho. S 3-lístkom vieme trasu prejsť bez čakania väčšieho ako 5 minút (a to dokonca dvoma spôsobmi $0- > 1- > 4- > 5$ s čakaním 5 minút a $0- > 3- > 5$ s čakaním 3 minúty). 4-lístok je však lacnejší a takisto sa s ním dá trasa prejsť bez veľkého čakania.

3. Tá o farbiacom sa strome (20 bodov)

Máme zadaný strom s n vrcholmi zakorenený vo vrchole 1 a permutáciu vrcholov $p_1, p_2 \dots p_n$. Postupne iterujeme cez túto permutáciu a pre vrchol p_i nájdeme cestu z koreňa do vrcholu p_i, spočítame počet označených vrcholov na tejto ceste a následne označíme vrchol p_i.

Pre každý vrchol v permutácii zistite počet označených vrcholov na ceste z koreňa určený týmto postupom.

Program: Okrem slovného popisu vyžadujem v tejto úlohe aj pseudokód navrhnutého riešenia. Sústreďte sa najmä na hlavné časti algoritmu.

Za priamočiare a korektné naprogramovania vyššie popísaného postupu môžete dostať najviac 6 bodov. Plný počet bodov získate za efektívne riešenie pre $n \le 10^5$.

vstup

```
n=5
// hrany stromu
1 2
1 3
3 4
3 5
// permutácia vrcholov
3 5 1 2 4
```

výstup

```
// počty označených v poradí permutácie
0 1 0 1 2
```

Ako prvý označíme vrchol 3, predtým nič označené nebolo. Následne sa pozeráme na cestu z koreňa 1 do vrcholu 5, na tejto ceste je jeden označený vrchol 3. Pri poslednom vrchole permutácie, 4, sú na ceste z koreňa označené dva vrcholy – samotný koreň 1 a vrchol 3.

4. Tá o ankete (2 body)

Čestne prehlasujete, že hneď po odovzdaní vášho riešenia (a prípadnom obede) si otvoríte anketu a vyplníte časť k predmetu TEA, optimálne aj so slovným komentárom. A ku koncu skúškového tú anketu aj odošlete (či tam vyplníte zvyšok je na vás).

Ďakujem pekne za spätnú väzbu :)