

Pokyny

Písomka sa skladá z troch (a bonusovej záverečnej) úloh, za každú viete získať 20 bodov.

Pri každej úlohe (ak nie je napísané inak) očakávam slovný popis jej riešenia. Tento popis by sa mal zamerať na hlavnú myšlienku riešenia, odôvodnenie správnosti a mal by obsahovať odhad časovej zložitosti.

Za riešenia je možné získavať aj čiastkové body a to buď za menej efektívne riešenia, alebo myšlienky smerujúce k správne riešeniu.

Ak používate algoritmus alebo postup priamo z prednášky, nemusíte ho bližšie popisovať, zamerajte sa na to, ako ho upravujete, poprípade aplikujete.

Čo (ne)používať: Počas písomky môžete voľne používať akékoľvek materiály uverejnené na stránke predmetu a takisto nahrané prednášky. Úplne v poriadku je využívať aj ďalšie materiály, ktoré ste využili pri učení (napr. stránku wikipédie o LCA).

V poriadku **nie je** využívať cudzie riešenia príkladov z písomky a takisto akákoľvek vzájomná komunikácia poprípade "vonkajšia" pomoc.

Férovo a s rozumom, ďakujem.

Odovzdávanie: Riešenie každej úlohy spracujte do samostatného dokumentu. Preferujem pekne natexované pdf-ká, nestrácajte tým však zbytočne veľa času. Akceptujem (aj keď nebudem nadšený) aj rukou písané a odfotené riešenia. Výsledné súbory však nech sú jasne pomenované a buď .pdf alebo .jpg.

Písomku môžete ukončiť kedykoľvek, stačí mi poslať jeden .zip nazvaný vašim AIS menom obsahujúci všetky odovzdávané súbory na adresu `michal.anderle@fmph.uniba.sk` Keď vám potvrdím, že som riešenie dostal, môžete z písomky odísť.

1. Tá označujúca cesty (20 bodov)

Máme zadaný zakorenený strom s n vrcholmi. Niektoré z jeho **listov** sú označené. Vašou úlohou je označiť cesty z koreňa vedúce do týchto listov. Cesta je označená vtedy ak je označená aspoň jedna jej hrana. Samozrejme, vaším cieľom je minimalizovať počet označených hrán.

Keď však označíme niektoré hrany, označená cesta povedie z koreňa aj do niektorých neoznačených **listov**, čo nie je dobre. Minimalizujúc počet označených hrán, vyberte ich tak, aby z koreňa viedla označená cesta do čo najmenšieho počtu neoznačených listov.

No aby to bolo ešte o kúsok náročnejšie, množina označených listov sa mení (na začiatku nie je označený žiaden list), niekedy označenie pribudne, niekedy je odstránené a vy máte po každej zmene zistiť, koľko najmenej hrán je potrebných na označenie všetkých potrebných ciest a do koľkých najmenej neoznačených listov povedie označená cesta.

Až 14 bodov môžete získať ak navrhnete efektívne riešenie tohto problému za predpokladu, že koreň stromu má práve jedného priameho syna.

Najviac 6 bodov môžete získať za efektívne riešenie, ktoré predpokladá, že v strome nie sú nikdy označené viac ako dva vrcholy.

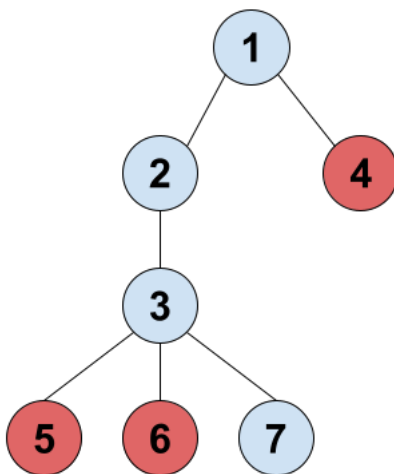
vstup

```
n=7 q=6
// otec vrcholov 2 až n
1 2 1 3 3 3
// q zmien
+ 4
+ 5
+ 6
+ 7
- 6
- 5
```

výstup

```
// minimálny počet hrán, minimálny počet
// neoznačených listov s označenou cestou
1 0
2 0
2 1
2 0
2 1
2 0
```

Po tretej úprave vyzerá strom ako na obrázku. Optimálne je označiť hrany (1,4) a (2,3) pričom list 7 je neoznačený, ale vedie do neho označená cesta.



Obr. 1: Vstupný strom z príkladu po tretej zmene.

2. Tá maticová (20 bodov)

Mali sme maticu $r \times c$, ktorá bola na začiatku vyplnená samými nulami. Následne sme p_r krát vybrali niektorý z riadkov a p_c niektorý zo stĺpcov a zmenili hodnoty v príslušnom riadku či stĺpci z 0 na 1 a naopak. Výsledná matica obsahovala presne k hodnôt 1. Ten istý riadok aj stĺpec sme mohli vybrať viackrát.

Zistite, koľkými rôznymi spôsobmi sme mohli zvoliť riadky a stĺpce tak, aby výsledná matica obsahovala k jednotiek. Dve možnosti považujeme za rôzne, ak existuje riadok alebo stĺpec, ktorý bol v oboch možnostiach vybraný rôzne veľa krát. Nezáleží teda na poradí vyberania.

vstup

```
r=2 c=2  
pr=2 pc=2  
k=4
```

výstup

4

Môžeme vybrať dva rôzne riadky a jeden stĺpec dvakrát, alebo dva rôzne stĺpce a jeden riadok dvakrát.

Program: Okrem slovného popisu vyžadujem v tejto úlohe aj pseudokód navrhnutého riešenia. Sústreďte sa najmä na hlavné časti algoritmu.

Riešenie za plný počet bodov by malo vedieť efektívne riešiť vstupy, v ktorých platí $1 \leq r, c, p_r, p_c \leq 1500$.

Až 12 bodov viete získať ak predpokladáte, že hodnoty na vstupe sú menšie ako 100.

Najviac 6 bodov získate za riešenie, v ktorom je $1 \leq r, c \leq 20$.

3. Tá o stringológii (20 bodov)

Na vstupe máte zadaný reťazec S . Nájdite najdlhší súvislý podreťazec S , ktorý sa v ňom nachádza aspoň dvakrát.

Pre reťazec `baaabaabaabbba` je takýmto podreťazcom `aabaab` na pozíciách 3 a 6.

Za riešenie s časovou zložitou $\Theta(n^3)$ môžete získať najviac 8 bodov.

Za riešenie s časovou zložitou $\Theta(n^2)$ môžete získať najviac 15 bodov.

Plný počet bodov môžete získať za riešenie s časovou zložitou $\Theta(n \log n)$.

Efektívnejšie (a dostatočne popísané) riešenia môžu získať bonusové body.

4. Tá o ankete (2 body)

Čestne prehlasujete, že hneď po odovzdaní vášho riešenia (a prípadnom obede) si otvoríte anketu a vyplníte časť k predmetu TEA, optimálne aj so slovným komentárom. A ku koncu skúškového tú anketu aj odošlete (či tam vyplníte zvyšok je na vás).

Ďakujem pekne za spätnú väzbu :)