



## 第二章:命题逻辑等值演算



### □主要内容:

- 等值式与基本的等值式
- 等值演算与置换规则
- 析取范式与合取范式, 主析取范式与主合取范式
- 联结词完备集

### □本章与其他各章的联系

- 是第一章的抽象与延伸
- 是后续各章的先行准备



## 第一节：等值式



## 2.1 等值式



□ 若等价式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则称 $A$ 与 $B$ 等值，记作 $A \leftrightarrow B$ ，并称 $A \leftrightarrow B$ 是等值式(Equivalent Expression)



几点说明：

- 定义中， $A, B, \leftrightarrow$ 均为元语言符号
- $A$ 或 $B$ 中可能有哑元出现. 例如，在
$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge r))$$
中， $r$ 为左边公式的哑元.
- 用真值表可验证两个公式是否等值



## 2.1 等值式



### □ 例子

❖ 判断  $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

$p$	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$
0	1	0	1
1	0	1	1



## 2.1 等值式



### □ 例子

❖ 判断  $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

$p$	$q$	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1



## 2.1 等值式



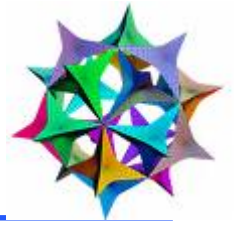
□ 如果命题变项很多，怎么办？

-- 利用已知的等值式通过代换得到新的等值式

□ 命题：设 $A$ 是一个命题公式，含有命题变项 $p_1, p_2, \dots, p_n$ ，又设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是任意的命题公式. 对每个 $i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )，把 $p_i$ 在 $A$ 中的所有出现都替换成 $A_i$ ，所得到的新命题公式记作 $B$ . 那么，如果 $A$ 是重言式，则 $B$ 也是重言式.



## 2.1 等值式



### □ 否定律

❖ 双重否定律  $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

❖ 德摩根律

•  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

•  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

□ 幂等律  $p \vee p \Leftrightarrow p, \quad p \wedge p \Leftrightarrow p$

### □ 交换律

❖  $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

❖  $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

❖  $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$



## 2.1 等值式



### □ 结合律

$$\diamond (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

$$\diamond (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

$$\diamond (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$$

### □ 分配律

$$\diamond p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\diamond p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$





## 2.1 等值式



### □ 常元律

- ❖ 零律:  $p \vee 1 \Leftrightarrow 1, p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
- ❖ 同一律:  $p \vee 0 \Leftrightarrow p, p \wedge 1 \Leftrightarrow p$
- ❖ 排中律:  $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$
- ❖ 矛盾律:  $p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$

### □ 吸收律

- ❖  $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
- ❖  $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$



## 2.1 等值式



- 蕴涵等值式  $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- 等价等值式  $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- 假言易位  $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
- 等价否定等值式  $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg p \leftrightarrow \neg q$
- 归谬论  $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \Leftrightarrow \neg p$



## 2.1 等值式



说明：

- (1) 16组等值模式都可以给出无穷多个同类型的具体的等值式。
- (2) 证明上述16组等值式的代入实例方法可用真值表法，把 $\Leftrightarrow$ 改为 $\leftrightarrow$ 所得的命题公式为永真式，则 $\Leftrightarrow$ 成立。



## 2.1 等值式



- **等值演算(Equivalent Calculation)**: 由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程
- **置换规则(Replacement Rule)**: 设 $\varphi(A)$ 是含公式A的命题公式,  $\varphi(B)$ 是用公式B置换了 $\varphi(A)$ 中所有A后得到的命题公式, 若  $A \Leftrightarrow B$ , 则  $\varphi(A) \Leftrightarrow \varphi(B)$
- 说明:
  - ❖ 等值演算过程中遵循的重要规则
  - ❖ 一个命题公式A, 经多次置换, 所得到的新公式与原公式等价



## 2.1 等值式



### 1. 用等值演算验证等值式

试证:  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

证明:

- a.  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (\neg q \vee r)$
- b.  $p \rightarrow (\neg q \vee r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$
- c.  $\neg p \vee \neg q \vee r \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$
- d.  $\neg(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$



## 2.1 等值式



试证:

$$\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee (\neg p \vee q)) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

左边

$$\Leftrightarrow \neg \neg(p \wedge q) \vee (\neg p \vee (\neg p \vee q))$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \vee (\neg p \vee q))$$

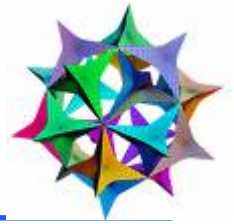
$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee \neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q)$$



## 2.1 等值式



### 2. 用等值演算判断公式的类型

证明:

$((p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r))) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)$  为一永真式

证明: 原式

$$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee (q \wedge r))) \vee \neg(p \vee q) \vee \neg(p \vee r)$$

$$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee r)) \vee \neg((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

$$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \vee \neg((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

$$\Leftrightarrow 1$$



# 回顾



## □等值式

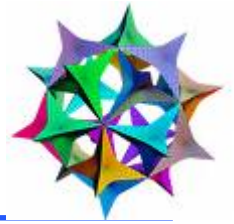
若等价式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则称 $A$ 与 $B$ 等值，记作 $A \leftrightarrow B$ ，并称 $A \leftrightarrow B$ 是等值式

## □16组等值式





# 16组等值式



## □ 否定律

❖ 双重否定律  $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

❖ 德摩根律

•  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

•  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

□ 幂等律  $p \vee p \Leftrightarrow p, \quad p \wedge p \Leftrightarrow p$

## □ 交换律

❖  $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

❖  $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

❖  $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$



# 16组等值式



## □ 结合律

$$\diamond (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

$$\diamond (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

$$\diamond (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$$

## □ 分配律

$$\diamond p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\diamond p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$



# 16组等值式



## □ 常元律

- ❖ 零律:  $p \vee 1 \Leftrightarrow 1, p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
- ❖ 同一律:  $p \vee 0 \Leftrightarrow p, p \wedge 1 \Leftrightarrow p$
- ❖ 排中律:  $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$
- ❖ 矛盾律:  $p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$

## □ 吸收律

- ❖  $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
- ❖  $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$



## 16组等值式



- 蕴涵等值式  $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- 等价等值式  $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- 假言易位  $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
- 等价否定等值式  $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg p \leftrightarrow \neg q$
- 归谬论  $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \Leftrightarrow \neg p$



# 回顾



## □ 等值演算

由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程

## □ 等值演算的用途

- (1) 验证等值式
- (2) 判断公式的类型



## 2.1 等值式



### 3. 解判定问题

在某次研讨会的中间休息时间，3名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人判断如下：

甲：王教授不是苏州人，是上海人

乙：王教授不是上海人，是苏州人

丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人

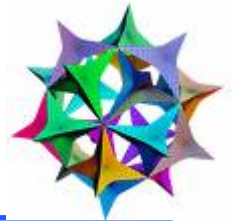
听完这3人的判断后，王教授笑着说，你们3人中有一人说得全对，有一人说对了一半，另一人说得全不对。试用逻辑演算分析王教授到底是哪里人。



## 第二节：析取范式与合取范式



## 2.2 析取范式和合取范式

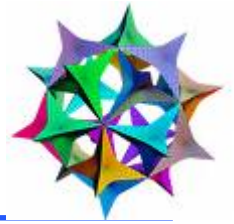


- 文字(**literal**): 命题变项及其否定
- 简单析取式(**Simple Disjunction**): 仅由有限个文字构成的析取式
- 简单合取式(**Simple Conjunction**): 仅由有限个文字构成的合取式
- 例: 设 $p$ 、 $q$ 为二个命题变元
  - ❖  $p, q, p \vee p, q \vee q, \neg p \vee q, \neg q \vee \neg p, p \vee q, p \vee \neg q$  称为简单析取式
  - ❖  $p, q, p \wedge p, q \wedge q, \neg p \wedge q, \neg q \wedge \neg p, p \wedge q, p \wedge \neg q$  称为简单合取式。





## 2.2 析取范式和合取范式

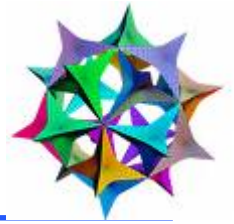


□ 定理:

- 1) 一个 **简单析取式** 是 **永真式** 当且仅当它同时含某个命题变元及它的否定式
- 2) 一个 **简单合取式** 是 **永假式** 当且仅当它同时含某个命题变元及它的否定式



## 2.2 析取范式和合取范式



- 析取范式(Disjunctive Normal Form): 由有限个简单合取式构成的析取式
  - ❖  $A_1 \vee \dots \vee A_n$ ,  $A_i$  为简单合取式
  - ❖  $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- 合取范式(Conjunctive Normal Form): 由有限个简单析取式构成的合取式
  - ❖  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ ,  $A_i$  为简单析取式
  - ❖  $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- 析取范式与合取范式统称为 **范式**(Normal Form)



## 2.2 析取范式和合取范式



□定理:

❖  $A_i$  简单合取式,  $A_1 \vee \dots \vee A_n \Leftrightarrow F$  当且仅当  
 $A_i \Leftrightarrow F$ , 任意  $A_i$

❖  $A_i$  简单析取式,  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Leftrightarrow T$  当且仅当  
 $A_i \Leftrightarrow T$ , 任意  $A_i$



## 2.2 析取范式和合取范式



□ 范式存在定理：任意命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式

方法：

步骤一：消去“ $\rightarrow$ ”、“ $\leftrightarrow$ ”联结词

步骤二：消去双重否定符，内移否定符

步骤三：使用分配律



## 2.2 析取范式和合取范式



□ 范式存在定理：任意命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式

方法：

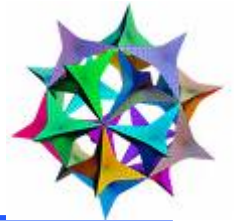
步骤一：消去“ $\rightarrow$ ”、“ $\leftrightarrow$ ”联结词

步骤二：消去双重否定符，内移否定符

步骤三：使用分配律



## 2.2 析取范式和合取范式



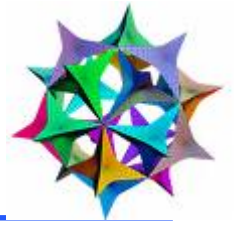
□ 步骤一：利用等值公式：化去“ $\rightarrow$ ”、“ $\leftrightarrow$ ”联结词

$$\diamond p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$\diamond p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$



## 2.2 析取范式和合取范式



□ 范式存在定理：任意命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式

方法：

步骤一：消去“ $\rightarrow$ ”、“ $\leftrightarrow$ ”联结词

步骤二：消去双重否定符，内移否定符

步骤三：使用分配律



## 2.2 析取范式和合取范式



### □ 消去双重否定符，内移否定符

#### ❖ 德摩根律

$$\bullet \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$$\bullet \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

#### ❖ 双重否定律 $\neg\neg p \Leftrightarrow p$





## 2.2 析取范式和合取范式



□ 范式存在定理：任意命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式

方法：

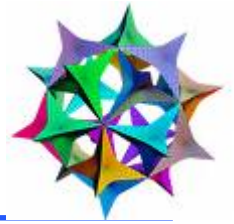
步骤一：消去“ $\rightarrow$ ”、“ $\leftrightarrow$ ”联结词

步骤二：消去双重否定符，内移否定符

步骤三：使用分配律



## 2.2 析取范式和合取范式



□ 利用 “ $\wedge$ ” 对 “ $\vee$ ” 的分配，将公式化成为析取范式

$$\diamond p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

□ 利用 “ $\vee$ ” 对 “ $\wedge$ ” 的分配，将公式化成为合取范式

$$\diamond p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$



## 2.2 析取范式和合取范式



□ 例：求  $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge q)$  的析取范式

1. 化去  $\rightarrow$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \wedge q)$$

2. “ $\wedge$ ”对 “ $\vee$ ”分配，化为析取范式

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge p \wedge q) \vee (q \wedge p \wedge q)$$

3. 最简析取范式

$$\Leftrightarrow p \wedge q$$



## 2.2 析取范式和合取范式



□ 例：求 $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$ 的析取范式和合取范式

(一) 求析取范式

$$\begin{aligned}\text{原式} &\Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r) \rightarrow p \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee p \\ &\Leftrightarrow (\neg \neg(p \vee q) \wedge \neg r) \vee p \\ &\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee p \\ &\Leftrightarrow ((p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)) \vee p \\ &\Leftrightarrow p \vee (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \\ &\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg r)\end{aligned}$$



## 2.2 析取范式和合取范式



### (二)求合取范式

$$\begin{aligned}\text{原式} &\Leftrightarrow (\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vee \mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vee \mathbf{r}) \vee \mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow (\neg \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge \neg \mathbf{r}) \vee \mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow ((\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge \neg \mathbf{r}) \vee \mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{p} \vee \mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \vee \neg \mathbf{r}) \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \vee \neg \mathbf{r})\end{aligned}$$



## 2.2 析取范式和合取范式



问题:

- ☐ 一个命题公式的析取范式是不是唯一的?
- ☐ 同一命题公式的析取范式是不是等值的?



## 2.2 析取范式和合取范式



- 极小项 **Miniterm** (极大项 **Maxterm**): 含有  $n$  个命题变项的简单合取式 (简单析取式), 并满足
  - ❖ 每个命题变元和它的否定式不同时出现, 而二者之一必出现且仅出现一次
  - ❖ 第  $i$  个命题变项或它的否定式出现在从左算起的第  $i$  位上(若无角标, 则按字典顺序排列)
- 若有  $n$  个命题变项, 则有  $2^n$  个极小项 (极大项)
- 如果我们把不带否定符的命题变项取成1, 带否定符的命题变项取成0, 那么每一个极小项都对应一个二进制数, 因而也对应一个十进制数



## 2.2 析取范式和合取范式



□ 极小项的编码: 对应成真赋值

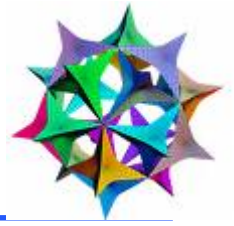
三个变元  $p$ 、 $q$ 、 $r$  可构造 8 个极小项:

$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	FFF	0	记作 $m_0$
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	FFT	1	记作 $m_1$
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	FTF	2	记作 $m_2$
$\neg p \wedge q \wedge r$	FTT	3	记作 $m_3$
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	TFF	4	记作 $m_4$
$p \wedge \neg q \wedge r$	TFT	5	记作 $m_5$
$p \wedge q \wedge \neg r$	TTF	6	记作 $m_6$
$p \wedge q \wedge r$	TTT	7	记作 $m_7$





## 2.2 析取范式和合取范式



□ 极大项的编码: 对应成真赋值

如三个变元  $p$ 、 $q$ 、 $r$ , 其记法如下:

$p \vee q \vee r$     **F F F**    **0**    记作  $M_0$

$p \vee q \vee \neg r$     **F F T**    **1**    记作  $M_1$

$p \vee \neg q \vee r$     **F T F**    **2**    记作  $M_2$

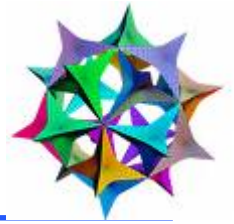
$p \vee \neg q \vee \neg r$     **F T T**    **3**    记作  $M_3$

.....

$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$     **T T T**    **7**    记作  $M_7$



## 2.2 析取范式和合取范式



□ 定理: 设  $m_i$  和  $M_i$  是命题变元  $p_1, p_2, \dots, p_n$  形成的极小项和极大项, 则:

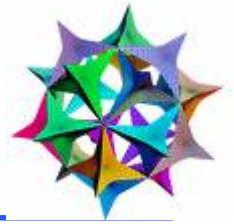
(1)  $m_i \wedge m_j \Leftrightarrow F, (i \neq j)$

(2)  $M_i \vee M_j \Leftrightarrow T, (i \neq j)$

(3)  $\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \neg M_i \Leftrightarrow m_i$



## 2.2 析取范式和合取范式



- 主析取范式 Principal Disjunctive Normal Form (主合取范式 Principal Conjunctive Normal Form): 由 $n$ 个命题变项构成的析取范式(合取范式)中所有的简单合取式(简单析取式)都是极小项(极大项)
- 定理: 任何命题公式都存在着与其等值的主析取范式和主合取范式, 并且是唯一的。



## 2.2 析取范式和合取范式



### □ 证法一

❖ 在真值表中，使命题公式的真值为T的指派所对应的极小项的析取，即为此公式的主析取范式

证：给定一个命题公式**A**，使其为**T**的真值指派所对应的极小项为 $m'_1, m'_2, \dots, m'_k$ ，这些极小项的析取记为**B**，为此要证 $A \Leftrightarrow B$ ，即要证**A**与**B**在相同的指派下具有相同的真值。



## 2.2 析取范式和合取范式



首先对于使**A**为T的指派显然使**B**为T

对于使**A**为**F**的指派，它对应的极小项(设为 $m'_j$ )不包含在 $m'_1, m'_2, \dots, m'_k$ 中。所以 $m'_j$ 为使**B**为**F**的指派

所以**A**  $\Leftrightarrow$  **B** 得证



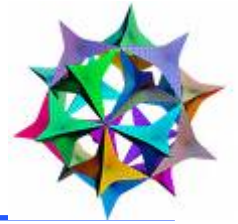
## 2.2 析取范式和合取范式



- 一个公式的主析取范式即为令此公式的真值为 $\mathbf{T}$ 的指派所对应的极小项的析取。
- 一个命题公式的真值表是唯一的，因此一个命题公式的主析取范式也是唯一的



## 2.2 析取范式和合取范式



$p \wedge q \vee r$  的真值表

p	q	r	$p \wedge q \vee r$
F	F	F	F
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>T</b>	<b>T</b>
F	T	F	F
<b>F</b>	<b>T</b>	<b>T</b>	<b>T</b>
T	F	F	F
<b>T</b>	<b>F</b>	<b>T</b>	<b>T</b>
<b>T</b>	<b>T</b>	<b>F</b>	<b>T</b>
<b>T</b>	<b>T</b>	<b>T</b>	<b>T</b>

$$p \wedge q \vee r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$



## 2.2 析取范式和合取范式



### □ 证法二：构造法

❖ 用等值演算方法求命题公式主析取范式的方法

- ① 将命题公式化归为与其等值的析取范式
- ② 添变元：

$$A_i \wedge (p_j \vee \neg p_j) \Leftrightarrow (A_i \wedge p_j) \vee (A_i \wedge \neg p_j)$$

- ③ 消去重复项





## 2.2 析取范式和合取范式



□ 例：求 $(p \wedge (p \rightarrow q)) \vee q$ 的主析取范式

解：原式

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee q$$

❖ ----(1)化为析取范式

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee q$$

❖ ----(2)化简

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (q \wedge (p \vee \neg p))$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$$

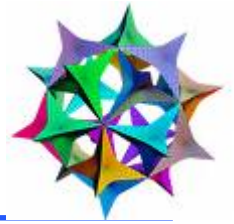
❖ ----(3)添项

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow m_1 \vee m_3$$

❖ ----(4)合并相同最小项



## 2.2 析取范式和合取范式

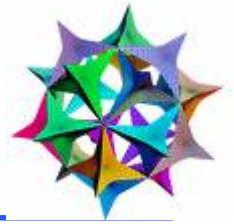


### □主合取范式

- ❖任何一个命题公式都可求得它的主合取范式
- ❖一个命题公式的主合取范式是唯一的
- ❖在真值表中，令命题公式的真值为“**F**”的指派就对应其主合取范式的一个极大项
- ❖构造法



## 2.2 析取范式和合取范式



□ 例:求 $p \wedge (p \rightarrow q) \vee q$ 的主合取范式

解: 原式  $\Leftrightarrow p \wedge (\neg p \vee q) \vee q$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee q$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee q$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge q$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (q \vee (p \wedge \neg p))$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2$$

p	q	上式
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>F</b>
F	T	T
<b>T</b>	<b>F</b>	<b>F</b>
T	T	T



## 2.2 析取范式和合取范式



- 主析（合）取范式的用途讨论：
  - ① 求公式的成真与成假赋值
  - ② 判断公式类型
  - ③ 判断两个命题公式是否等值
  - ④ 应用主析（合）取范式分析和解决实际问题



## 2.2 析取范式和合取范式



### □ 1. 求公式的成真与成假赋值

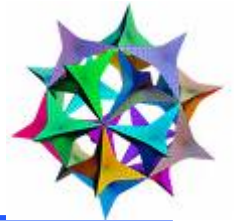
例：  $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$

成真赋值为001, 011, 101, 110, 111

成假赋值为000, 010, 100



## 2.2 析取范式和合取范式



### □ 2. 判断公式的类型

设 $A$ 含 $n$ 个命题变项

$A$ 为重言式

$\Leftrightarrow A$ 的主析取范式含 $2^n$ 个极小项

$\Leftrightarrow A$ 的主合取范式为1

$A$ 为矛盾式

$\Leftrightarrow A$ 的主析取范式为0

$\Leftrightarrow A$ 的主合析取范式含 $2^n$ 个极大项

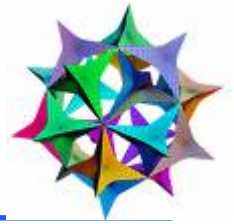
$A$ 为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow A$ 的主析取范式中至少含一个（但不是全部）极小项

$\Leftrightarrow A$ 的主合取范式中至少含一个（但不是全部）极大项



## 2.2 析取范式和合取范式



### □ 2. 判断公式的类型

例： 用公式的主析取范式判断下述公式的类型：

(1)  $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$

(2)  $p \rightarrow (p \vee q)$

(3)  $(p \vee q) \rightarrow r$



## 2.2 析取范式和合取范式



### □ 3. 判断两个命题公式是否等值

例：用主析取范式判两个公式是否等值

(1)  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  与  $(p \wedge q) \rightarrow r$

(2)  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  与  $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

解：  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

$(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

$(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

显见，(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.





# 回顾



- 文字(**literal**): 命题变项及其否定
- 简单析取式: 仅由有限个文字构成的析取式
- 简单合取式: 仅由有限个文字构成的合取式
- 析取范式: 由有限个简单合取式构成的析取式
- 合取范式: 由有限个简单析取式构成的合取式
- 怎么求范式:
  - 步骤一: 消去“ $\rightarrow$ ”、“ $\leftrightarrow$ ”联结词
  - 步骤二: 消去双重否定符, 内移否定符
  - 步骤三: 使用分配律



# 回顾



- 极小项 **Minterm** (极大项 **Maxterm**): 含有  $n$  个命题变项的简单合取式 (简单析取式), 并满足
  - ❖ 每个命题变元和它的否定式不同时出现, 而二者之一必出现且仅出现一次
  - ❖ 第  $i$  个命题变项或它的否定式出现在从左算起的第  $i$  位上(若无角标, 则按字典顺序排列)
- 主析取范式 Principal Disjunctive Normal Form (主合取范式 Principal Conjunctive Normal Form): 由  $n$  个命题变项构成的析取范式(合取范式中所有的简单合取式(简单析取式)都是极小项(极大项))



# 回顾



## □ 真值表

❖ 在真值表中，使命题公式的真值为T的指派所对应的极小项的析取，即为此公式的主析取范式

## □ 构造法

① 将命题公式化归为与其等值的析取范式

② 添变元：

③ 消去重复项  $A_i \wedge (p_j \vee \neg p_j) \Leftrightarrow (A_i \wedge p_j) \vee (A_i \wedge \neg p_j)$



## 2.2 析取范式和合取范式



- 例：某研究所要从3名科研骨干A，B，C中挑选1~2名出国进修，由于工作需要，选派时要满足以下条件：
- ① 若A去，则C同去。
  - ② 若B去，则C不能去。
  - ③ 若C不去，则A或B可以去。

解：设p：派A去； q：派B去； r：派C去。  
则 $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \rightarrow (p \vee q))$



## 2.2 析取范式和合取范式



经演算可得：

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \rightarrow (p \vee q))$$

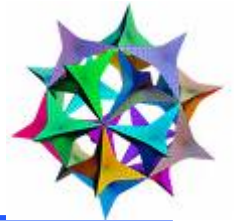
$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_5$$

可知选派方案有三种：

- ① C去，A，B都不去。
- ② B去，A，C不去。
- ③ A，C去，B不去。



## 2.2 析取范式和合取范式



### 主合取范式与主析取范式转换

□ 公式:  $\mathbf{A} = m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \dots \vee m_{i_s}$

❖  $\neg \mathbf{A} = m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \dots \vee m_{j_t}, \quad t=2^n-s$

❖  $\mathbf{A} \Leftrightarrow \neg \neg \mathbf{A}$

$\Leftrightarrow \neg(m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \dots \vee m_{j_t})$

$\Leftrightarrow \neg m_{j_1} \wedge \neg m_{j_2} \wedge \dots \wedge \neg m_{j_t}$

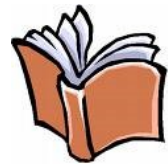
$\Leftrightarrow \mathbf{M}_{j_1} \wedge \mathbf{M}_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{M}_{j_t}$



## 2.2 析取范式和合取范式



- 讨论：具有  $n$  个变项的命题公式有多少个不同的主析取范式？
- 对于含有  $n$  个变项的命题公式，必定可写出  $2^{2^n}$  个主析取范式(包括0)。
- 同理，含有  $n$  个变项的命题公式，也可写出  $2^{2^n}$  个主合取范式(包括1)。



### 第三节：联结词的完备集





## 2.3 联结词的完备集



“与非”联结词:

符号 “ $\uparrow$ ”

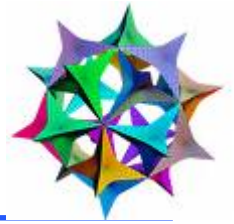
$(p \uparrow q)$ 读作: “p与q的否定”

$$\square (p \uparrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$$

p	q	$p \uparrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	T
<b>T</b>	<b>T</b>	<b>F</b>



## 2.3联结词的完备集



□ “或非”联结词:

符号: “ $\downarrow$ ”

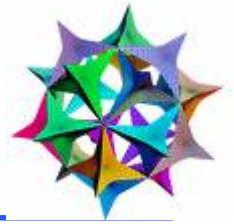
$(p \downarrow q)$ 读作: “p或q的否定”

$(p \downarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$

p	q	$p \downarrow q$
<b>F</b>	<b>F</b>	<b>T</b>
F	T	F
T	F	F
T	T	F



## 2.3 联结词的完备集



- 真值函数F(Truth Function):  $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$
- 联结词完备集**S**(Complete Set of Connectives):
  - ❖ **S**是一个联结词集合
  - ❖ 每一个真值函数都可以由仅含**S**中的联结词构成的公式表示
- **定理**: **S** =  $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 是联结词完备集
- 证明**: 任何一个 $n$  ( $n \geq 1$ ) 元真值函数都与唯一的一个主析取范式等值, 而主析取范式仅含 $\neg, \vee, \wedge$



## 2.3 联结词的完备集

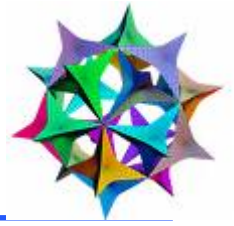


□ 推论:  $S = \{\neg, \wedge\}$  是联结词完备集

证明: 
$$\begin{aligned} p \vee q &\Leftrightarrow \neg \neg (p \vee q) \\ &\Leftrightarrow \neg (\neg p \wedge \neg q) \end{aligned}$$



## 2.3 联结词的完备集



□ **定理:**  $\{\uparrow\}$ ,  $\{\downarrow\}$  是联结词完备集

**证明:**

首先,  $\neg p \Leftrightarrow \neg (p \wedge p) \Leftrightarrow p \uparrow p$

其次,  $p \wedge q \Leftrightarrow \neg \neg (p \wedge q)$

$$\Leftrightarrow \neg (p \uparrow q)$$

$$\Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$$

$$(p \uparrow q) \Leftrightarrow \neg (p \wedge q)$$



## 第二章 习题课



### □主要内容

- 等值式与等值演算
- 基本等值式（16组，24个公式）
- 主析取范式与主合取范式
- 联结词完备集



# 基本要求



- 深刻理解等值式的概念
- 牢记基本等值式的名称及它们的内容
- 熟练地应用基本等值式及置换规则进行等值演算
- 理解文字、简单析取式、简单合取式、析取范式、合取范式的概念
- 深刻理解极小项、极大项的概念、名称及下角标与成真、成假赋值的关系
- 熟练掌握求主范式的方法（等值演算、真值表等）
- 会用主范式求公式的成真赋值、成假赋值、判断公式的类型、判断两个公式是否等值
- 会将公式等值地化成指定联结词完备集中的公式
- 会用命题逻辑的概念及运算解决简单的应用问题



## 练习1:概念



1. 设 $A$ 与 $B$ 为含 $n$ 个命题变项的公式, 判断下列命题是否为真?

- (1)  $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A$ 与 $B$ 有相同的主析取范式
- (2) 若 $A$ 为重言式, 则 $A$ 的主合取范式为0
- (3) 若 $A$ 为矛盾式, 则 $A$ 的主析取范式为1
- (4) 任何公式都能等值地化成 $\{\wedge, \vee\}$ 中的公式
- (5) 任何公式都能等值地化成 $\{\neg, \rightarrow, \wedge\}$ 中的公式

真  
假  
假  
假  
真

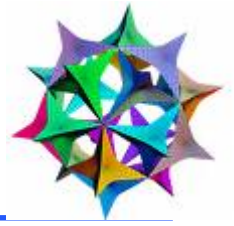
说明:

- (2) 重言式的主合取范式不含任何极大项, 为1.
- (3) 矛盾式的主析取范式不含任何极小项, 为0.
- (4)  $\{\wedge, \vee\}$ 不是完备集, 如矛盾式不能写成 $\{\wedge, \vee\}$ 中的公式.
- (5)  $\{\neg, \rightarrow\}$ 是完备集.





## 练习2：联结词完备集



2. 将  $A = (p \rightarrow \neg q) \wedge r$  改写成下述各联结词集中的公式:

(1)  $\{\neg, \wedge, \vee\}$

(2)  $\{\neg, \wedge\}$

(3)  $\{\neg, \vee\}$       解

(4)  $\{\neg, \rightarrow\}$       (1)  $(p \rightarrow \neg q) \wedge r \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge r$

(5)  $\{\uparrow\}$       (2)  $(p \rightarrow \neg q) \wedge r \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \wedge r$

(6)  $\{\downarrow\}$       (3)  $(p \rightarrow \neg q) \wedge r \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge r$   
 $\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg r)$



## 练习2 解答



$$\begin{aligned}(4) \quad (p \rightarrow \neg q) \wedge r &\Leftrightarrow \neg(\neg(p \rightarrow \neg q) \vee \neg r) \\ &\Leftrightarrow \neg((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5) \quad (p \rightarrow \neg q) \wedge r &\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \wedge r \\ &\Leftrightarrow (p \uparrow q) \wedge r \\ &\Leftrightarrow \neg \neg((p \uparrow q) \wedge r) \\ &\Leftrightarrow ((p \uparrow q) \uparrow r) \uparrow ((p \uparrow q) \uparrow r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6) \quad (p \rightarrow \neg q) \wedge r &\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge r \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg r) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \downarrow \neg q) \downarrow \neg r \\ &\Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \downarrow (r \downarrow r)\end{aligned}$$

说明：答案不惟一



## 练习3：应用题



3. 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足以下条件:

- (1) 若赵去, 钱也去
- (2) 李、周两人中至少有一人去
- (3) 钱、孙两人中去且仅去一人
- (4) 孙、李两人同去或同不去
- (5) 若周去, 则赵、钱也去

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国?



## 练习3解答



解此类问题的步骤:

1. 设简单命题并符号化
2. 用复合命题描述各条件
3. 写出由复合命题组成的合取式
4. 将合取式化成主范式
5. 求真赋值, 并做出解释和结论



## 练习3解答



解

1. 设简单命题并符号化

设  $p$ : 派赵去,  $q$ : 派钱去,  $r$ : 派孙去,  $s$ : 派李去,  $u$ : 派周去

2. 写出复合命题

(1) 若赵去, 钱也去

$$p \rightarrow q$$

(2) 李、周两人中至少有一人去

$$s \vee u$$

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人

$$(q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)$$

(4) 孙、李两人同去或同不去

$$(r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)$$

(5) 若周去, 则赵、钱也去

$$u \rightarrow (p \wedge q)$$



## 练习3解答

3. 设(1)—(5)构成的合取式为 $A$

$$A = (p \rightarrow q) \wedge (s \vee u) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)) \wedge (u \rightarrow (p \wedge q))$$

4. 化成析取式

$$A \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$$

结论：由上述析取式可知， $A$ 的成真赋值为00110与11001，

派孙、李去（赵、钱、周不去）

派赵、钱、周去（孙、李不去）



# 作业



- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6
- ☐ 15
- ☐ 27
- ☐ 29