第八章：函数

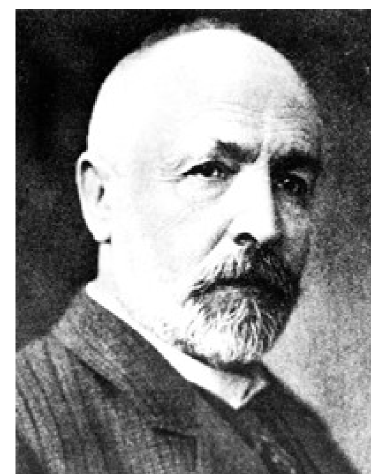
- 主要内容
- 函数的定义与性质
  - 函数定义
  - 函数性质
- 函数运算
  - 函数的合成
  - 反函数
- 双射函数与集合的基数

第一节：函数的定义与性质

8.1 函数的定义与性质

❑ 函数的历史：

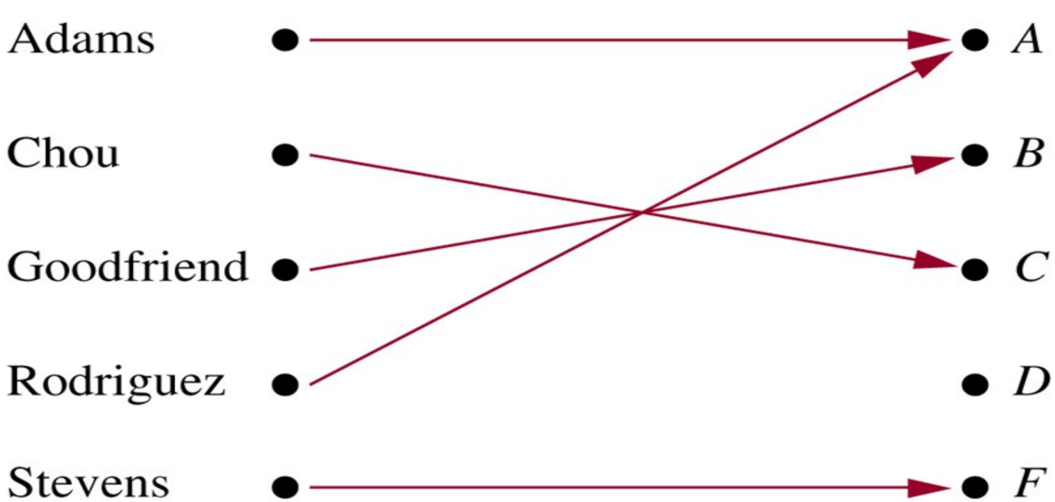
- 十七世纪伽俐略提出过非形式化的函数概念
- 笛卡尔的解析几何中讨论一个变量对另一个变量的依赖关系
- 莱布尼兹、牛顿在几何和微积分中都使用函数
- 康托在集合论中用“集合”和“对应”的概念给出了近代函数定义



康托尔，G.(F.P.)

8.1 函数的定义与性质

- 函数是具有特殊性质的二元关系
  - 也称为映射或变换
- 本章定义一般函数类和各种特殊子类
  - 侧重讨论离散函数



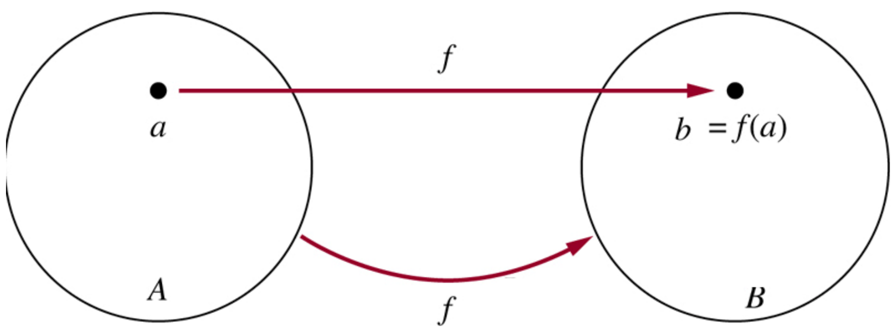
8.1 函数的定义与性质

- 函数(映射)F：F为二元关系，满足
  - $\forall x \in dom\ F$都存在唯一的$y \in ranF$,使xFy成立
- F在x的值y：xFy
  - 记做$y=F(x)$
  - x称为F的自变量
- 函数相等：设F，G是函数
  - $F=G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$

8.1 函数的定义与性质

- **A到B的函数*f*:** 设A，B是集合，如果*f*为函数，且dom*f*=*A*, ran*f*⊆*B*
  - 记为*f*: *A*→*B*
- **存在性** $\forall x(x \in A \rightarrow \exists y(y \in B \wedge <x, y> \in f))$

  and
- **唯一性** $(<x, y_1> \in f \wedge <x, y_2> \in f) \rightarrow y_1 = y_2$



8.1 函数的定义与性质

- 例：f: {a,b,c,d} → {1,2,3}

f(a)=1

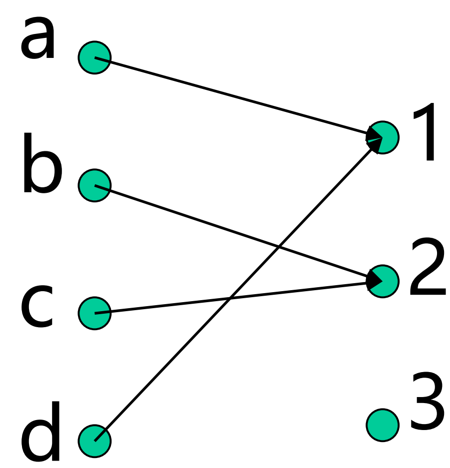
f(b)=2

f(c)=2

f(d)=1

或

x	f(x)
a	1
b	2
c	2
d	1



8.1 函数的定义与性质

- A到B的函数集合B^A (B上A)
  - $B^A = \{f \mid f: A \to B\}$
- 例：设$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a,b\}$，求B^A

解：$B^A=\{f_0,f_1,\ldots,f_7\}$

$f_0=\{<1,a>,<2,a>,<3,a>\}$

$f_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_2=\{<1,a>,<2,b>,<3,a>\}$

$f_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,b>\}$

$f_4=\{<1,b>,<2,a>,<3,a>\}$

$f_5=\{<1,b>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_6=\{<1,b>,<2,b>,<3,a>\}$

$f_7=\{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$

8.1 函数的定义与性质

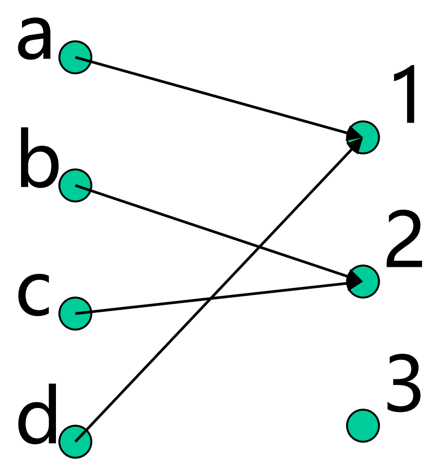
- 若A=Φ，B是任意集合，那么B^A={Φ}
- 若A≠Φ而B=Φ，不存在从A到B的函数

8.1 函数的定义与性质

- 函数的像：设f是从A到B的函数，$A'\subseteq A$，$B'\subseteq B$
  - $f(A')=\{f(x)\mid x\in A'\}$,叫做$A'$在函数$f$下的像
    - $f(A)$为函数f的像(f的值域)
  - $f^{-1}(B')=\{x\mid x\in A\wedge f(x)\in B'\}$,称$f^{-1}(B')$为$B'$在$f$下的完全原像
- 性质：
  - $A'\subseteq f^{-1}(f(A'))$
  - $A'\neq f^{-1}(f(A'))$
    - 例：f:$\{1,2,3\}\to\{0,1\}$, $f(1)=f(2)=0$, $f(3)=1$ 考虑$A'=\{1\}$

8.1 函数的定义与性质

例 设f：$\{a,b,c,d\}\to\{1,2,3\}$



- $f(\{a\})=$
  $\{1\}$
- $f(\{a,b\})=$
  $\{1,2\}$
- $f(\Phi)=$
  Φ
- $f^{-1}(\{1\})=$
  $\{a,d\}$

8.1 函数的定义与性质

- 满(单、双)射：设f是从A到B的函数
  - 满射：$\mathrm{ran}f=B$
  - 单射：$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
    - 或者：$f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$
  - 双射：f是满射且是单射

8.1 函数的定义与性质

- 例：判断函数类型
  - $f: R \rightarrow R,\ f(x)=2x+5$

解:

① $\forall y \in R$, 存在$x=(y-5)/2$,使得$f(x)=y$, f是满射

② $\forall x_1, x_2 \in R$, $x_1 \neq x_2$, 有 $2x_1+5 \neq 2x_1+5$, 即 $f(x_1) \neq f(x_2)$,f是单射

③ f是双射

8.1 函数的定义与性质

- 例：判断f: A→B是否构成函数，如果是，是否为单射、满射和双射
  - $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{6,7,8,9,10\}$, $f=\{<1,8>,<3,9>,<4,10>,<2,6>,<5,9>\}$
  - A, B同上, $f=\{<1,7>,<2,6>,<4,5>,<1,9>,<5,10>\}$
  - $A=B=R^+$, $f(x)=x/(x^2+1)$
  - $A=B=R\times R$, $f(<x,y>)=<x+y,x-y>$

令$L=\{<x,y>\mid x,y\in R \wedge y=x+1\}$,计算f(L)

8.1 函数的定义与性质

- 例：构造双射函数f
  - $A=P(\{1,2,3\})$, $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$
  - $A=[0,1]$, $B=[1/4,1/2]$
  - $A=Z$, $B=N$

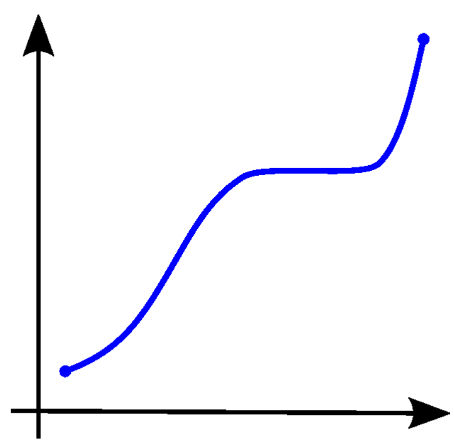
8.1 函数的定义与性质

- **常函数**：$f: A\to B$满足
  - 如果存在$c\in B$,使对每一$x\in A$,有$f(x)=c$

- **恒等函数I_A**: $A\to A$，对每一$x\in A$有$f(x)=x$
  - 恒等函数是双射函数

8.1 函数的定义与性质

- **(严格)单调递增**：设$<A,\preccurlyeq>$，$<B,\preccurlyeq>$为偏序集，$f: A\to B$
  - **单调递增**：如果对任意的x，$y\in A$，$x\prec y$，就有$f(x)\preccurlyeq f(y)$
  - **严格单调递增**：如果对任意的x，$y\in A$，$x\prec y$，就有$f(x)\prec f(y)$



8.1 函数的定义与性质

- 特征函数：设$A'\subseteq A$，函数$\chi_{A'}$：$A\to\{0,1\}$定义为

$$\chi_{A'}(x)= \begin{cases} 1 & \text{如果}x\in A' \\ 0 & \text{如果}x\notin A' \end{cases}$$

称它是集合A'的特征函数

- 例：设$A=\{a,b,c,d\}$, $A'=\{b,d\}$

$$\chi_{A'}:A'\to\{0,1\}$$

则 $\chi_{A'}(a)=0$, $\chi_{A'}(b)=1$

$\chi_{A'}(c)=0$, $\chi_{A'}(d)=1$

8.1 函数的定义与性质

- 如果函数**f:A →B**的前域**A**非空，那么集合族 $\{f^{-1}(\{y\})|y\in B\wedge f^{-1}(\{y\})\neq\Phi\}$ 形成**A**的一个划分，与此划分相关联的等价关系**R**可如下定义：

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

称**R为f诱导的A上的等价关系**

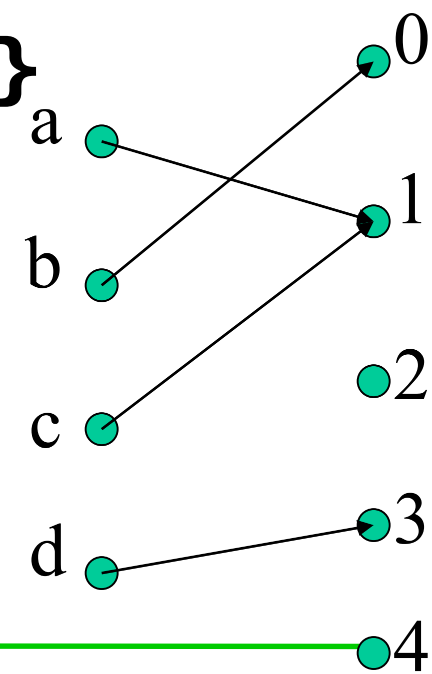
- **定义:** 设**R**是一集合**A**上的等价关系，函数

$$g:A\to A/R, g(x)=[x]_R$$

叫做从**A**到商集**A/R**的**自然映射**

8.1 函数的定义与性质

- 例 设A={a,b,c,d},B={0,1,2,3,4}
  - f(a)=1,f(b)=0,f(c)=1,f(d)=3
  - f诱导的等价关系R的等价类{a,c},{b},{d}
- 从A到A/R的自然映射g?
- g:{a,b,c,d}→{{a,c},{b},{d}}
  - g(a)={a,c}
  - g(b)={b}
  - g(c)={a,c}
  - g(d)={d}



第二节：函数的复合与反函数

8.2 函数的复合与反函数

- 函数的复合：关系的右复合
- 性质1：$F\circ G$还是一个函数

证明：对任一$x\in dom(F\circ G)$，假设

$<x,y_1>\in F\circ G$ 且 $<x,y_2>\in F\circ G$

$\Rightarrow \exists t_1(<x,t_1>\in F\wedge <t_1,y_1>\in G)\wedge$
$\exists t_2(<x,t_2>\in F\wedge <t_2,y_2>\in G)$

$\Rightarrow \exists t_1\exists t_2(t_1=t_2\wedge <t_1,y_1>\in G\wedge <t_2,y_2>\in G)$

$\Rightarrow y_1=y_2$

8.2 函数的复合与反函数

- 性质2：$\mathrm{dom}F\circ G=\{x \mid x\in \mathrm{dom}F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}(G)\}$

证明：对任一$x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$

$\Rightarrow \exists t\exists y(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G)$

$\Rightarrow \exists t\exists y(x\in \mathrm{dom}F\wedge t=F(x)\wedge t\in \mathrm{dom}G)$

$\Rightarrow \exists t(x\in \mathrm{dom}F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}G)$

$\Rightarrow x\in\{x \mid x\in \mathrm{dom}F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}(G)\}$

8.2 函数的复合与反函数

- 性质3：$\forall x \in \mathrm{dom} F \circ G$ 有 $F \circ G(x)=G(F(x))$

证明：$x \in \mathrm{dom} F \wedge F(x) \in \mathrm{dom}(G)$

$\Rightarrow \langle x, F(x)\rangle \in F \wedge \langle F(x), G(F(x))\rangle \in G$

$\Rightarrow \langle x, G(F(x))\rangle \in F \circ G$

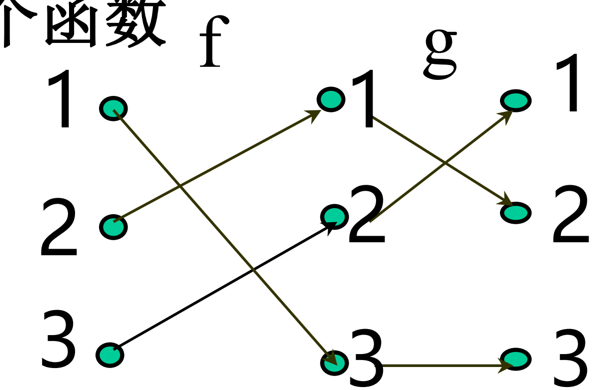
$\Rightarrow x \in \mathrm{dom} F \circ G \wedge F \circ G(x)=G(F(x))$

- 推论1：给定函数 F, G, H, 则 $F\circ(G\circ H)$ 和 $(F\circ G)\circ H$ 都是函数，且

$$F\circ(G\circ H)=(F\circ G)\circ H$$

8.2 函数的复合与反函数

- 例：集合$A=\{1,2,3\}$, A上的两个函数
  - $f=\{<1,3>,<2,1>,<3,2>\}$
  - $g=\{<1,2>,<2,1>,<3,3>\}$

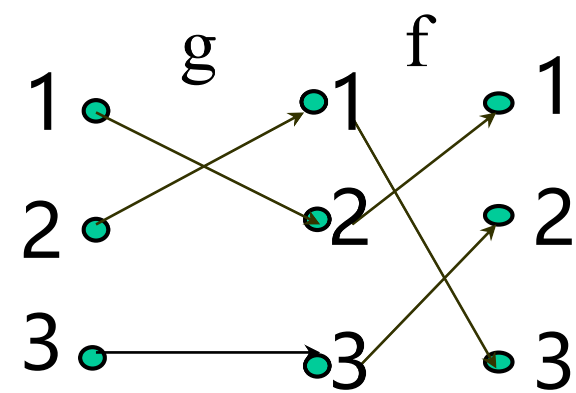


- $f\circ g=$

  $\{<1,3>,<2,2>,<3,1>\}$

- $g\circ f=$

  $\{<1,1>,<2,3>,<3,2>\}$



- $f\circ f=$

  $\{<1,2>,<2,3>,<3,1>\}$

- $f\circ f\circ f=$

  $\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\} = I_A$

8.2 函数的复合与反函数

- 例：*A*上的三个函数

  $f(a)=3-a,\ g(a)=2a+1,\ h(a)=a/3$

求：

- $(f \circ g)(a)$

  $=g(f(a))=g(3-a)=2(3-a)+1=7-2a$

- $(g \circ f)(a)$

  $=f(g(a))=f(2a+1)=2-2a$

- $(f \circ g)\circ h(a)$

  $=h(7-2a)=(7-2a)/3$

8.2 函数的复合与反函数

- **推论2**：设 $f:A\to B$，$g:B\to C$，则 $f\circ g:A\to C$，且 $\forall x\in A$ 都有 $f\circ g(x)=g(f(x))$

证明：由性质1，$f\circ g$ 是函数，由性质2易证

$\mathrm{dom}(f\circ g)=A$, $\mathrm{ran}(f\circ g)\subseteq C$

由性质3，$f\circ g(x)=g(f(x))$

8.2 函数的复合与反函数

- 定理：设函数$f:A\to B$, $g:B\to C$ 则:
  - 若f和g都是满射,则f∘g 也是满射
  - 若f和g都是单射,则f∘g也是单射
  - 若f和g都是双射,则f∘g也是双射

8.2 函数的复合与反函数

- 定理：设函数f:$A \to B$, g:$B \to C$ 则:
  - 若f和g都是满射,则$f \circ g$也是满射

证明：任取$c \in C$

g是满射⇒存在$b \in B$, $g(b)=c$

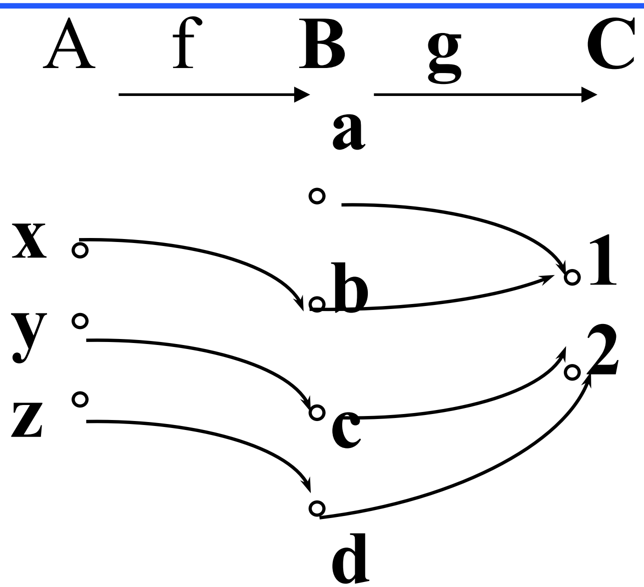
f是满射⇒存在$a \in A$, $f(a)=b$

由性质3

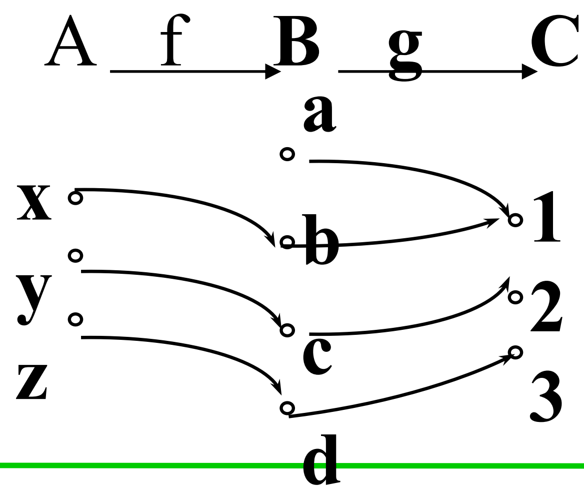
$f \circ g(a)=g(f(a))=g(b)=c$

从而证明$f \circ g$是满射

8.2 函数的复合与反函数



$f \circ g$是满射, f不是满射



$f \circ g$是单射, g不是单射

8.2 函数的复合与反函数

- 定理：给定函数f:A→B,有
  - $f = f \circ I_B = I_A \circ f$

证明：首先易证$f \circ I_B$和$I_A \circ f$都是函数

$$<x,y> \in f \Rightarrow <x,y> \in f \wedge y \in B$$

$$\Rightarrow <x,y> \in f \wedge <y,y> \in I_B$$

$$\Rightarrow <x,y> \in f \circ I_B$$

同理可以证明

$$<x,y> \in f \circ I_B \Rightarrow <x,y> \in f$$

8.2 函数的复合与反函数

- 给定函数F，F^{-1}不一定是函数
- 例：$A=\{a,b,c\}$,$B=\{1,2,3\}$
  - $f=\{\langle a,3\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,1\rangle\}$, f非单射非满射
  - $f^{-1}=\{\langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 1,c\rangle\}$
  - f^{-1}不是函数
- 讨论：任给单射函数f:$A\rightarrow B$
  - f^{-1}是函数
  - f^{-1}:ran$f\rightarrow A$的双射函数
  - f^{-1}不一定是B到A的双射函数

8.2 函数的复合与反函数

- 定理：函数$f:A\to B$是双射函数$\Rightarrow f^{-1}:B\to A$是双射函数

证明：由关系逆的性质

$$\mathrm{dom}f^{-1}=\mathrm{ran}f=B$$

$$\mathrm{ran}f^{-1}=\mathrm{dom}f=A$$

$\forall x\in B$，假设有$y_1,y_2\in A$，使得

$$\langle x,y_1\rangle\in f^{-1}\wedge\langle x,y_2\rangle\in f^{-1}$$

则 $\langle y_1,x\rangle\in f\wedge\langle y_2,x\rangle\in f$

f是单射，故$y_1=y_2$，所以f^{-1}是函数

同样可以证明f^{-1}是单射和满射

8.2 函数的复合与反函数

- 定理：函数$f:A\to B$是双射函数$\Rightarrow$

  $f^{-1}\circ f=I_B$，$f\circ f^{-1}=I_A$

证明：首先易证$f^{-1}\circ f$是B到B的函数。

$\forall\langle x,y\rangle$,

$$\langle x,y\rangle\in f^{-1}\circ f$$
$$\Rightarrow\exists t(\langle x,t\rangle\in f^{-1}\wedge\langle t,y\rangle\in f)$$
$$\Rightarrow\exists t(\langle t,x\rangle\in f\wedge\langle t,y\rangle\in f)$$
$$\Rightarrow x=y\wedge x,y\in B$$
$$\Rightarrow\langle x,y\rangle\in I_B$$

同理可以证明$I_B\subseteq f^{-1}\circ f$

8.2 函数的复合与反函数

- 例：设f:R→R, g:R→R

$$f(x)=\begin{cases} x^2, x\geq 3 \\ -2, x<3 \end{cases}$$

$$g(x) = x+2$$

求：$f \circ g$, $g \circ f$. 如果f和g存在反函数，求出它们的反函数

第三节：双射函数与集合的基数

8.3 集合的基数

- **等势：** 集合A和B等势,如果存在从A到B的双射函数
  - 记作A≈B
- 例：Z≈N
  - f: Z→N，使得
    - $f(x)=2x$， $x\geq 0$
    - $f(x)=-2x-1$, $x<0$
- 例：N×N≈N
  - f: N×N→N，使得
    - $f(\langle m,n\rangle)=(m+n+1)(m+n)/2 + m$

8.3 集合的基数

- 例：$(0,1)\approx R$
  - f: $(0,1)\rightarrow R$，使得
    - $f(x)=\tan\pi(x-1/2)$
- 例：$[0,1]\approx(0,1)$
  - f: $[0.1]\rightarrow (0.1)$，使得
    - $f(x)=1/2,\quad x=0$
    - $f(x)=1/4,\quad x=1$
    - $f(x)=1/2^{n+2},\quad x=1/2^n$
    - $f(x)=x,\quad$ 其他x

8.3 集合的基数

- 例：$[0,1] \approx [a,b]$，对任何 $a<b$, $a, b \in R$
  - $f: [0,1] \to [a,b]$，使得
    - $f(x)=(b-a)x+a$
- 例：$P(A) \approx \{0,1\}^A$
  - $f: P(A) \to \{0,1\}^A$，使得
    - $f(A')=\chi_{A'}$, $\forall A' \in P(A)$

8.3 集合的基数

- **定理：** 对任意集合A, B, C
  - ① $A \approx A$
  - ② 若$A \approx B$，则$B \approx A$
  - ③ 若$A \approx B$，$B \approx C$，则$A \approx C$
- **总结**
  - $N \approx Z \approx N \times N$
  - $R \approx [0,1] \approx (0,1)$

    $N \approx R$?

8.3 集合的基数

- **康托定理：**
  - $N \not\approx R$
  - 对任意集合A都有，$A \not\approx P(A)$

- **康托定理：**
  - $N \not\approx R$
  - 对任意集合A都有，$A \not\approx P(A)$

证明：只需证明$N \not\approx [0,1]$

任一[0,1]间实数必可写成无限的十进制小数

$$x=0.x_1x_2\ldots, \quad 0 \le x_i \le 9$$

设$f:N \to [0,1]$是从N到[0,1]的任何一个函数，则可列出f 的所有函数值如下:

8.3 集合的基数

- 康托定理：
  - $N \not\approx R$
  - 对任意集合A都有，$A \not\approx P(A)$

证明：…则可列出f的所有函数值如下

$f(0)= 0.a^{(1)}_1\ a^{(1)}_2\ldots\ldots$

$f(1)= 0.a^{(2)}_1\ a^{(2)}_2\ldots\ldots$

$f(2)= 0.a^{(3)}_1\ a^{(3)}_2\ldots\ldots$

….

$f(n-1)= 0.a^{(n)}_1\ a^{(n)}_2\ldots\ldots a^{(n)}_n\ldots$

….

设$y=0.b_1b_2\ldots$, $b_i \neq a^{(i)}_i$, $i=1,2,\ldots$

y不在ran$f$中！

8.3 集合的基数

- **康托定理：**
  - $N \not\approx R$
  - 对任意集合A都有，$A \not\approx P(A)$

证明：设g:A→P(A)是函数。可以构造

$$B=\{x|x\in A\wedge x\notin g(x)\}$$

则B∈P(A)，对任意x∈A有

$$x\in B \Leftrightarrow x\notin g(x)$$

故$B\neq g(x)$，所以B不在rang中

8.3 集合的基数

- **优势于：**
  - B优势于A($A \preccurlyeq\cdot B$): 存在从A到B的单射函数
  - B真优势于A($A \prec\cdot B$): $A \preccurlyeq\cdot B$且$B \not\approx A$
- **例：**
  - $N \preccurlyeq\cdot N$, $N \preccurlyeq\cdot R$, $A \preccurlyeq\cdot P(A)$
  - $N \prec\cdot R$, $A \prec\cdot P(A)$
- **定理：** 给定任意集合A, B, C

  ① $A \preccurlyeq\cdot A$

  ② 若$A \preccurlyeq\cdot B$且$B \preccurlyeq\cdot A$，则$A \approx B$

  ③ 若$A \preccurlyeq\cdot B$且$B \preccurlyeq\cdot C$，则$A \preccurlyeq\cdot C$

8.3 集合的基数

- 对于有限集：集合中不同元素的个数
- 对于无限集呢？是否所有无限集的基数都一样？
- 为了比较两个集合的“大小”，确定有限集和无限集的概念，引进自然数集合
- 给定集合A，$A^{+}=A\cup\{A\}$，称A^{+}是A的后继集合
- 利用后继集合的概念来定义自然数集合{0，1，2，……}

回顾

- 等势：集合A和B等势,如果存在从A到B的*双射*函数
- $N\approx Z\approx N\times N$；$R\approx(0,1)\approx[0,1]\approx[a,b]\approx(a,b]\approx(a,b)$；$P(A)\approx\{0,1\}^A$
- 康托定理：
  - $N\not\approx R$
  - 对任意集合A都有，$A\not\approx P(A)$
- 优势于：
  - B优势于A($A\preccurlyeq\cdot B$): 存在从A到B的*单射*函数
  - B真优势于A($A\prec\cdot B$): $A\preccurlyeq\cdot B$且$B\not\approx A$
- 后继集合：给定集合A，$A^+=A\cup\{A\}$

8.3 集合的基数

- 设$A=\varnothing$，则A的后继集合可写成
  - $A^+=\varnothing\cup\{\varnothing\}=\{\varnothing\}$
  - $(A^+)^+=\{\varnothing\}\cup\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
  - $((A^+)^+)^+=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\cup\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
    $=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

  ....
- 定义自然数集合{0，1，2，……}
  - $\varnothing=0$
  - $\varnothing^+=0^+=1$，$(\varnothing^+)^+=1^+=2$
  - 上述求0的后继集合而得到N={0，1，2，……}

8.3 集合的基数

- 有穷集：一个集合是有穷的⇔它与某个自然数等势
  - 否则为无穷
- 例：
  - 有穷集：{a,b,c}
  - 无穷集：N, R
- 三类不同基数
  - 有穷集合A: $\mathrm{card}A=n \Leftrightarrow A \approx n$
  - 自然数集N：$\mathrm{card}N=\aleph_0$
  - 实数集R: $\mathrm{card}R=\aleph$

8.3 集合的基数

- 基数相等和大小：给定集合A和B
  - $\mathrm{card}A=\mathrm{card}B \Leftrightarrow A\approx B$
  - $\mathrm{card}A\leq \mathrm{card}B \Leftrightarrow A\preccurlyeq\cdot B$
  - $\mathrm{card}A<\mathrm{card}B \Leftrightarrow \mathrm{card}A\leq \mathrm{card}B \wedge \mathrm{card}A\neq \mathrm{card}B$
- 例：
  - $\mathrm{card}N=\mathrm{card}N\times N=\aleph_0$
  - $\mathrm{card}P(N)=\mathrm{card}2^N=\mathrm{card}[a,b]=\mathrm{card}(a,b)=\aleph$
  - $\aleph_0<\aleph$

8.3 集合的基数

- **可数集：** A为可数集，如果cardA$\leq\aleph_0$
- 例：
  - 可数集：{a,b,c}, N, Z, Q
  - 不可数集：R, (0,1)

8.3 集合的基数

- 例：给定集合A，B，C，满足 $\mathrm{card}A=\aleph_0$，$\mathrm{card}B=n\ (n\neq 0)$，求 $\mathrm{card}A\times B$

解：令 $A=\{a_0,a_1,\ldots\}$, $B=\{b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}\}$

函数 $f:A\times B\to N$

$$f(<a_i,b_j>)=in+j$$

f为双射，故

$$\mathrm{card}A\times B=\aleph_0$$

第八章 习题课

- 主要内容
- 函数，从A到B的函数 $f:A\to B$，B^A，函数的像与完全原像
- 函数的性质：单射、满射、双射函数
- 重要函数：恒等函数、常函数、单调函数、集合的特征函数、自然映射
- 集合等势的定义与性质
- 集合优势的定义与性质
- 重要的集合等势以及优势的结果
- 可数集与不可数集
- 集合基数的定义

基本要求

- 给定 f, A, B, 判别 f 是否为从A到B的函数
- 判别函数 f:$A \rightarrow B$的性质（单射、满射、双射）
- 熟练计算函数的值、像、复合以及反函数
- 证明函数 f:$A \rightarrow B$的性质（单射、满射、双射）
- 给定集合A, B，构造双射函数 f:$A \rightarrow B$
- 能够证明两个集合等势
- 能够证明一个集合优势于另一个集合
- 知道什么是可数集与不可数集
- 会求一个简单集合的基数

练习1

1．给定A, B 和 f, 判断是否构成函数 f:$A \to B$. 如果是，说明该函数是否为单射、满射、双射的. 并根据要求进行计算.

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{6,7,8,9,10\}$,

$$f=\{\langle 1,8\rangle,\langle 3,10\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 4,9\rangle\}$$

(2) $A=B=\mathrm{R}$, $f(x)=x^3$

(3) $A=\mathrm{N}\times\mathrm{N}$, $B=\mathrm{N}$, $f(\langle x,y\rangle)=|x^2-y^2|$. 计算$f(\mathrm{N}\times\{0\})$, $f^{-1}(\{0\})$

练习2

2. 设 $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathrm{R}^{\mathrm{R}}$，且

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ -1, & x<0\end{cases},\quad f_2(x)=x,$$

$$f_3(x)=\begin{cases}-1, & x\in Z\\ 1, & x\notin Z\end{cases}\quad f_4(x)=1$$

令E_i是由f_i导出的等价关系，i=1,2,3,4，即 $xE_iy \Leftrightarrow f_i(x)=f_i(y)$

(1) 画出偏序集$<\{\mathrm{R}/E_1, \mathrm{R}/E_2, \mathrm{R}/E_3, \mathrm{R}/E_4\},T>$的哈斯图，其中$T$是加细关系：

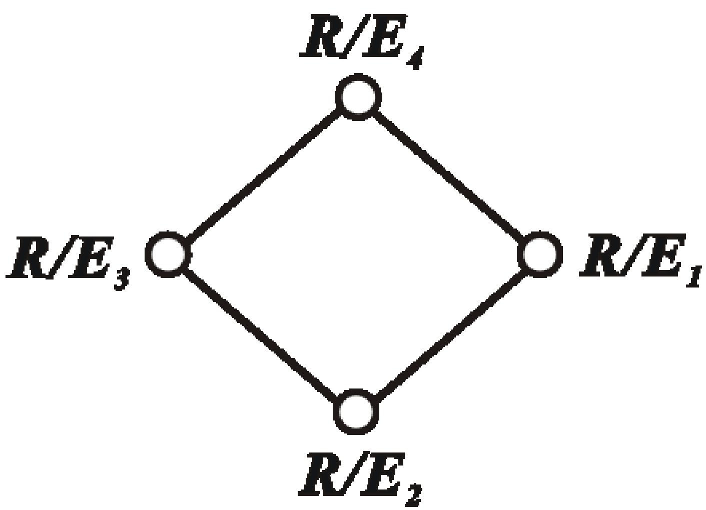
$$<\mathrm{R}/E_i, R/E_j>\in T \Leftrightarrow \forall x(x\in \mathrm{R}/E_i \to \exists y(y\in R/E_j \wedge x\subseteq y))$$

(2) $g_i:\mathrm{R}\to \mathrm{R}/E_i$ 是自然映射，求$g_i(0)$，i=1,2,3,4.

(3) 对每个i, 说明 g_i 的性质（单射、满射、双射）.

解答

(1) 哈斯图如下



(2) $g_1(0) = \{x \mid x \in \mathrm{R} \wedge x \geq 0\}$, $g_2(0)=\{0\}$, $g_3(0)=\mathrm{Z}$, $g_4(0)=\mathrm{R}$

(3) g_1, g_3, g_4是满射的；g_2是双射的.

练习3

3．对于以下集合A和B，构造从A到B的双射函数 $f{:}A\to B$

(1) $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a, b, c\}$

(2) $A=(0,1)$，$B=(0,2)$

(3) $A=\{x \mid x\in \mathrm{Z} \land x<0\}$，$B=\mathrm{N}$

(4) $A=\mathrm{R}$，$B=\mathrm{R}^+$

解

(1) $f=\{<1,a>, <2,b>, <3,c>\}$

(2) $f{:}A\to B$, $f(x)=2x$

(3) $f{:}A\to B$, $f(x)=-x-1$

(4) $f{:}A\to B$, $f(x)=\mathrm{e}^x$

练习4

4. 设 $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $f(<x,y>)=<x+y,x-y>$

证明 f 既是满射的，也是单射的.

证： 任取 $<u,v>\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，存在 $<\dfrac{u+v}{2},\dfrac{u-v}{2}>$

使得 $$f(<\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}>)=<u,v>$$

因此 f 是满射的

对于任意的 $<x,y>$, $<u,v>\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, 有

$$f(<x,y>)=f(<u,v>)\Leftrightarrow<x+y,x-y>=<u+v,u-v>$$

$$\Leftrightarrow x+y=u+v,\ x-y=u-v\Leftrightarrow x=u,\ y=v$$

$$\Leftrightarrow<x,y>=<u,v>$$

因此 f 是单射的.

证明方法

1. 证明 $f:A\to B$是满射的方法：任取 $y\in B$, 找到 x (即给出x的表示)或者证明存在$x\in A$，使得$f(x)=y$.

2. 证明 $f:A\to B$是单射的方法:

方法一 $\forall x_1,x_2\in A$,

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$ … $\Rightarrow x_1=x_2$

推理前提 推理过程 推理结论

方法二 $\forall x_1,x_2\in A$,

$x_1\neq x_2\Rightarrow$ … $\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

推理前提 推理过程 推理结论

3. 证明 $f:A\to B$不是满射的方法： 找到 $y\in B$, $y\notin \mathrm{ran}f$

4. 证明 $f:A\to B$不是单射的方法：找到 $x_1,x_2\in A$, $x_1\neq x_2$, 且 $f(x_1)=f(x_2)$

练习5

5. 设A, B为二集合, 证明：如果$A \approx B$, 则 $P(A) \approx P(B)$

证明： 因为$A \approx B$，存在双射函数 f:$A \to B$，反函数 f^{-1}：$B \to A$

构造函数 g:$P(A) \to P(B)$,

$$g(T) = f(T), \ \forall T \subseteq A \quad （f(T)\text{是}T\text{在函数}f\text{的像}）$$

证明 g 的满射性：对于任何$S \subseteq B$, 存在 $f^{-1}(S) \subseteq A$, 且

$$g(f^{-1}(S)) = f \circ f^{-1}(S) = S$$

证明g的单射性：

$$g(T_1) = g(T_2) \Rightarrow f(T_1) = f(T_2)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(T_1) = f^{-1}(f(T_2))$$

$$\Rightarrow I_A(T_1) = I_A(T_2) \Rightarrow T_1 = T_2$$

综合上述得到$P(A) \approx P(B)$.

证明集合*A*与*B*等势的方法

方法一：直接构造从*A*到*B*的双射，即定义一个从*A*到*B*的函数 $f:A\to B$，证明 f 的满射性，证明 f 的单射性

方法二：利用定理8.8“优势”，构造两个单射 $f:A\to B$ 和 $g:B\to A$. 即 定义函数 f 和 g，证明 f 和 g 的单射性

方法三：利用等势的传递性

方法四：直接计算*A*与*B*的基数，得到card A=card B.

注意：

以上方法中最重要的是方法一.

证明集合*A*与自然数集合N等势的通常方法是：找到一个“数遍”*A*中元素的顺序.

作业

- 3
- 6
- 19
- 20