第二章:命题逻辑等值演算

❑ 主要内容:

- 等值式与基本的等值式
- 等值演算与置换规则
- 析取范式与合取范式，主析取范式与主合取范式
- 联结词完备集

❑ 本章与其他各章的联系

- 是第一章的抽象与延伸
- 是后续各章的先行准备

第一节：等值式

2.1 等值式

- 若等价式$A\leftrightarrow B$是重言式，则称A与B等值，记作$A\Leftrightarrow B$，并称$A\Leftrightarrow B$是等值式(Equivalent Expression)

几点说明：

- 定义中，A, B, $\Leftrightarrow$均为元语言符号
- A或B中可能有哑元出现. 例如，在

$$(p\to q)\Leftrightarrow ((\neg p\vee q)\vee (\neg r\wedge r))$$

中，r为左边公式的哑元.

- 用真值表可验证两个公式是否等值

2.1 等值式

- 例子
  - 判断$\neg\neg p \Leftrightarrow p$

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg p \leftrightarrow p$
0	1	0	1
1	0	1	1

2.1 等值式

- 例子
  - 判断 $p\to q \Leftrightarrow \neg p\vee q$

p	q	$\neg p$	$p\to q$	$\neg p\vee q$	$(p\to q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

2.1 等值式

- 如果命题变项很多，怎么办？

  -- 利用已知的等值式通过代换得到新的等值式

- 命题：设A是一个命题公式，含有命题变项p_1，p_2，…，p_n，又设A_1，A_2，…，A_n是任意的命题公式. 对每个i（i=1，2，…，n），把p_i在A中的所有出现都替换成A_i，所得到的新命题公式记作B. 那么，如果A是重言式，则B也是重言式.

2.1 等值式

- 否定律
  - 双重否定律 $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
  - 德摩根律
    - $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
    - $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
- 幂等律 $p \vee p \Leftrightarrow p$， $p \wedge p \Leftrightarrow p$
- 交换律
  - $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
  - $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
  - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$

2.1 等值式

- 结合律
  - $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
  - $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
  - $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
- 分配律
  - $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  - $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

2.1 等值式

- **常元律**
  - 零律：$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$， $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
  - 同一律：$p \vee 0 \Leftrightarrow p$， $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$
  - 排中律：$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$
  - 矛盾律：$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$
- **吸收律**
  - $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
  - $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

2.1 等值式

- 蕴涵等值式 $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- 等价等值式 $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$
- 假言易位 $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$
- 等价否定等值式 $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg p \leftrightarrow \neg q$
- 归谬论 $(p \to q) \wedge (p \to \neg q) \Leftrightarrow \neg p$

2.1 等值式

说明：

(1)16组等值模式都可以给出无穷多个同类型的具体的等值式。

(2)证明上述16组等值式的代入实例方法可用真值表法，把⇔改为↔所得的命题公式为永真式，则⇔成立。

2.1 等值式

- 等值演算(Equivalent Calculation)：由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程

- 置换规则(Replacement Rule)：设φ(A)是含公式A的命题公式， φ(B)是用公式B置换了φ(A)中所有A后得到的命题公式，若 $A \Leftrightarrow B$ ，则$\varphi(A) \Leftrightarrow \varphi(B)$

- 说明：
  - 等值演算过程中遵循的重要规则
  - 一个命题公式A，经多次置换，所得到的新公式与原公式等价

1.用等值演算验证等值式

试证：$p\to(q\to r)\Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$

证明：

a. $p\to(q\to r)\Leftrightarrow p\to(\neg q\vee r)$

b. $p\to(\neg q\vee r)\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee r$

c. $\neg p\vee\neg q\vee r\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r$

d. $\neg(p\wedge q)\vee r\Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$

2.1 等值式

试证：

$\neg(p \wedge q)\rightarrow(\neg p \vee(\neg p \vee q))\Leftrightarrow(\neg p \vee q)$

左边

$\Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q) \vee (\neg p \vee(\neg p \vee q))$

$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \vee(\neg p \vee q))$

$\Leftrightarrow(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$

$\Leftrightarrow(p \vee \neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p \vee q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

2. 用等值演算判断公式的类型

证明：

$((p\vee q)\wedge\neg(\neg p\wedge(\neg q\vee\neg r)))\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)$为一永真式

证明：原式

$\Leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee(q\wedge r)))\vee\neg(p\vee q)\vee\neg(p\vee r)$

$\Leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee q)\wedge(p\vee r))\vee\neg((p\vee q)\wedge(p\vee r))$

$\Leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))\vee\neg((p\vee q)\wedge(p\vee r))$

$\Leftrightarrow 1$

回顾

- **等值式**

  若等价式$A \leftrightarrow B$是重言式，则称A与B等值，记作$A \Leftrightarrow B$，并称$A \Leftrightarrow B$是等值式

- **16组等值式**

16组等值式

- 否定律
  - 双重否定律 $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
  - 德摩根律
    - $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
    - $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
- 幂等律 $p \vee p \Leftrightarrow p$， $p \wedge p \Leftrightarrow p$
- 交换律
  - $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
  - $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
  - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$

16组等值式

- 结合律
  - $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
  - $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
  - $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
- 分配律
  - $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  - $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

16组等值式

- 常元律
  - 零律：$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$， $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
  - 同一律：$p \vee 0 \Leftrightarrow p$， $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$
  - 排中律：$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$
  - 矛盾律：$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$
- 吸收律
  - $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
  - $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

16组等值式

- 蕴涵等值式 $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- 等价等值式 $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$
- 假言易位 $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$
- 等价否定等值式 $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg p \leftrightarrow \neg q$
- 归谬论 $(p \to q) \wedge (p \to \neg q) \Leftrightarrow \neg p$

回顾

- 等值演算

  由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程

- 等值演算的用途

  （1）验证等值式

  （2）判断公式的类型

2.1 等值式

3．解判定问题

在某次研讨会的中间休息时间，3名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人判断如下：

甲：王教授不是苏州人，是上海人

乙：王教授不是上海人，是苏州人

丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人

听完这3人的判断后，王教授笑着说，你们3人中有一人说得全对，有一人说对了一半，另一人说得全不对。试用逻辑演算分析王教授到底是哪里人。

第二节：析取范式与合取范式

2.2 析取范式和合取范式

- 文字(literal): 命题变项及其否定
- 简单析取式(Simple Disjunction):仅由有限个文字构成的析取式
- 简单合取式(Simple Conjunction):仅由有限个文字构成的合取式
- 例：设p、q为二个命题变元
  - p，q，$p\vee p$，$q\vee q$，$\neg p\vee q$，$\neg q\vee \neg p$，$p\vee q$，$p\vee \neg q$ 称为简单析取式
  - p，q，$p\wedge p$，$q\wedge q$，$\neg p\wedge q$，$\neg q\wedge \neg p$，$p\wedge q$，$p\wedge \neg q$ 称为简单合取式。

2.2 析取范式和合取范式

- 定理:

  1)一个*简单析取式*是*永真式*当且仅当它同时含某个命题变元及它的否定式

  2)一个*简单合取式*是*永假式*当且仅当它同时含某个命题变元及它的否定式

2.2 析取范式和合取范式

- 析取范式(Disjunctive Normal Form)：由有限个简单合取式构成的析取式
  - $A_1 \vee \ldots \vee A_n$, A_i 为简单合取式
  - $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- 合取范式(Conjunctive Normal Form)：由有限个简单析取式构成的合取式
  - $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$, A_i 为简单析取式
  - $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- 析取范式与合取范式统称为*范式*(Normal Form)

2.2 析取范式和合取范式

- 定理：
  - A_i *简单合取式*， $A_1 \vee \ldots \vee A_n \Leftrightarrow F$ 当且仅当 $A_i \Leftrightarrow F$，任意A_i
  - A_i *简单析取式*， $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Leftrightarrow T$ 当且仅当 $A_i \Leftrightarrow T$，任意A_i

2.2 析取范式和合取范式

- 范式存在定理：任意命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式

方法：

步骤一：消去“→”、“↔”联结词

步骤二：消去双重否定符，内移否定符

步骤三：使用分配律

2.2 析取范式和合取范式

- 范式存在定理：任意命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式

方法：

步骤一：消去“→”、“↔”联结词

步骤二：消去双重否定符，内移否定符

步骤三：使用分配律

2.2 析取范式和合取范式

- 步骤一：利用等值公式：化去“→”、“↔”联结词
  - $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
  - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$

2.2 析取范式和合取范式

- 范式存在定理：任意命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式

方法：

步骤一：消去“→”、“↔”联结词

步骤二：消去双重否定符，内移否定符

步骤三：使用分配律

2.2 析取范式和合取范式

- 消去双重否定符，内移否定符
  - 德摩根律
    - $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
    - $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
  - 双重否定律 $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

2.2 析取范式和合取范式

- 范式存在定理：任意命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式

方法：

步骤一：消去“→”、“↔”联结词

步骤二：消去双重否定符，内移否定符

步骤三：使用分配律

2.2 析取范式和合取范式

- 利用“∧”对“∨”的分配，将公式化成为析取范式
  - $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- 利用“∨”对“∧”的分配，将公式化成为合取范式
  - $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- 例：求$(p \to q) \wedge (p \wedge q)$的析取范式

1. 化去$\to$

   $\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \wedge q)$

2. “$\wedge$”对“$\vee$”分配，化为析取范式

   $\Leftrightarrow (\neg p \wedge p \wedge q) \vee (q \wedge p \wedge q)$

3. 最简析取范式

   $\Leftrightarrow p \wedge q$

2.2 析取范式和合取范式

- 例：求$((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$的析取范式和合取范式

  (一) 求析取范式

原式$\Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r) \rightarrow p$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee p$

$\Leftrightarrow (\neg\neg(p \vee q) \wedge \neg r) \vee p$

$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee p$

$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)) \vee p$

$\Leftrightarrow p \vee (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg r)$

2.2 析取范式和合取范式

(二)求合取范式

原式 $\Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r) \to p$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee p$

$\Leftrightarrow (\neg\neg(p \vee q) \wedge \neg r) \vee p$

$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee p$

$\Leftrightarrow (p \vee p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$

2.2 析取范式和合取范式

问题：

- 一个命题公式的析取范式是不是唯一的？

- 同一命题公式的析取范式是不是等值的？

2.2 析取范式和合取范式

- 极小项 **Miniterm** (极大项 **Maxterm**):含有n个命题变项的简单合取式(简单析取式)，并满足
  - 每个命题变元和它的否定式不同时出现，而二者之一必出现且仅出现一次
  - 第i个命题变项或它的否定式出现在从左算起的第i位上(若无角标，则按字典顺序排列)
- 若有 n 个命题变项，则有2^n个极小项（极大项）
- 如果我们把不带否定符的命题变项取成1，带否定符的命题变项取成0，那么每一个极小项都对应一个二进制数，因而也对应一个十进制数

2.2 析取范式和合取范式

- 极小项的编码:对应成真赋值

三个变元p、q、r可构造8个极小项：

$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	FFF	0	记作 m_0
$\neg p\wedge\neg q\wedge r$	FFT	1	记作 m_1
$\neg p\wedge q\wedge\neg r$	FTF	2	记作 m_2
$\neg p\wedge q\wedge r$	FTT	3	记作 m_3
$p\wedge\neg q\wedge\neg r$	TFF	4	记作 m_4
$p\wedge\neg q\wedge r$	TFT	5	记作 m_5
$p\wedge q\wedge\neg r$	TTF	6	记作 m_6
$p\wedge q\wedge r$	TTT	7	记作 m_7

2.2 析取范式和合取范式

❑极大项的编码:对应成假赋值

如三个变元 p、q、r，其记法如下：

$p \vee q \vee r$ F F F 0 记作 M_0

$p \vee q \vee \neg r$ F F T 1 记作 M_1

$p \vee \neg q \vee r$ F T F 2 记作 M_2

$p \vee \neg q \vee \neg r$ F T T 3 记作 M_3

…………

$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ T T T 7 记作 M_7

2.2 析取范式和合取范式

- 定理:设m_i和M_i是命题变元p_1，p_2… p_n形成的极小项和极大项，则:

(1) $m_i \wedge m_j \Leftrightarrow$ F, $(i \neq j)$

(2) $M_i \vee M_j \Leftrightarrow$ T, $(i \neq j)$

(3) $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$; $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

2.2 析取范式和合取范式

- 主析取范式 Principal Disjunctive Normal Form (主合取范式 Principal Conjunctive Normal Form)：由n个命题变项构成的析取范式(合取范式)中所有的简单合取式(简单析取式)都是极小项(极大项)
- 定理: 任何命题公式都存在着与其等值的主析取范式和主合取范式，并且是唯一的。

2.2 析取范式和合取范式

- 证法一
  - 在真值表中，使命题公式的真值为T的指派所对应的极小项的析取，即为此公式的主析取范式

证：给定一个命题公式A，使其为T的真值指派所对应的极小项为$m'_1, m'_2, \ldots, m'_k$,这些极小项的析取记为B，为此要证$A \Leftrightarrow B$，即要证A与B在相同的指派下具有相同的真值。

首先对于使***A***为T的指派显然使***B***为**T**

对于使***A***为**F**的指派，它对应的极小项(设为m'_j)不包含在$m'_1, m'_2, \ldots, m'_k$中。所以m'_j为使B为**F**的指派

所以$A \Leftrightarrow B$得证

2.2 析取范式和合取范式

- 一个公式的主析取范式即为令此公式的真值为**T**的指派所对应的极小项的析取。

- 一个命题公式的真值表是唯一的，因此一个命题公式的主析取范式也是唯一的

p∧q∨r的真值表

p	q	r	p∧q∨r
F	F	F	F
F	**F**	**T**	**T**
F	T	F	F
F	**T**	**T**	**T**
T	F	F	F
T	**F**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**
T	**T**	**T**	**T**

$$p \wedge q \vee r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

2.2 析取范式和合取范式

- 证法二：构造法
  - 用等值演算方法求命题公式主析取范式的方法

① 将命题公式化归为与其等值的析取范式

② 添变元:

$$A_i \wedge (p_j \vee \neg p_j) \Leftrightarrow (A_i \wedge p_j) \vee (A_i \wedge \neg p_j)$$

③ 消去重复项

- 例：求$(p\wedge(p\rightarrow q))\vee q$的主析取范式

解：原式

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg p)\vee(p\wedge q)\vee q$

- ----(1)化为析取范式

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee q$

- ----(2)化简

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(q\wedge(p\vee\neg p))$

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge q)$

- ----(3)添项

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge q) \Leftrightarrow m_1 \vee m_3$

- ----(4)合并相同最小项

2.2 析取范式和合取范式

- 主合取范式
  - 任何一个命题公式都可求得它的主合取范式
  - 一个命题公式的主合取范式是唯一的
  - 在真值表中，令命题公式的真值为“F”的指派就对应其主合取范式的一个极大项
  - 构造法

2.2 析取范式和合取范式

- 例:求$p\wedge(p\rightarrow q)\vee q$的主合取范式

解：原式 $\Leftrightarrow p\wedge(\neg p\vee q)\vee q$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg p)\vee(p\wedge q)\vee q$

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee q$

$\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge q$

$\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(q\vee(p\wedge\neg p))$

$\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(\neg p\vee q)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$

p	q	上式
F	F	F
F	T	T
T	F	F
T	T	T

2.2 析取范式和合取范式

- 主析（合）取范式的用途讨论：

① 求公式的成真与成假赋值

② 判断公式类型

③ 判断两个命题公式是否等值

④ 应用主析（合）取范式分析和解决实际问题

2.2 析取范式和合取范式

- **1. 求公式的成真与成假赋值**

例： $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

成真赋值为001, 011, 101, 110, 111

成假赋值为000, 010, 100

2.2 析取范式和合取范式

- **2. 判断公式的类型**

设A含n个命题变项

A为重言式

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式含2^n个极小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式为1

A为矛盾式

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式为0

$\Leftrightarrow$ A的主合析取范式含2^n个极大项

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式中至少含一个（但不是全部）极小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式中至少含一个（但不是全部）极大项

- **2. 判断公式的类型**

例： 用公式的主析取范式判断下述公式的类型：

（1）$\neg(p\rightarrow q)\wedge q$

（2）$p\rightarrow(p\vee q)$

（3）$(p\vee q)\rightarrow r$

3. 判断两个命题公式是否等值

例： 用主析取范式判两个公式是否等值

(1) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\wedge q)\rightarrow r$

(2) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$

解： $p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\rightarrow q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

显见，(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

回顾

- 文字(**literal**): 命题变项及其否定
- 简单析取式:仅由有限个文字构成的析取式
- 简单合取式:仅由有限个文字构成的合取式
- 析取范式:由有限个简单合取式构成的析取式
- 合取范式:由有限个简单析取式构成的合取式
- 怎么求范式:

步骤一：消去“$\rightarrow$”、“$\leftrightarrow$”联结词

步骤二：消去双重否定符，内移否定符

步骤三：使用分配律

回顾

- 极小项 **Miniterm** (极大项 **Maxterm**):含有n个命题变项的简单合取式 (简单析取式)，并满足
  - 每个命题变元和它的否定式不同时出现，而二者之一必出现且仅出现一次
  - 第i个命题变项或它的否定式出现在从左算起的第i位上(若无角标，则按字典顺序排列)
- 主析取范式 **Principal Disjunctive Normal Form** (主合取范式 **Principal Conjunctive Normal Form**)：由n个命题变项构成的析取范式(合取范式)中所有的简单合取式(简单析取式)都是极小项(极大项)

回顾

- 真值表
  - 在真值表中，使命题公式的真值为T的指派所对应的极小项的析取，即为此公式的主析取范式
- 构造法

① 将命题公式化归为与其等值的析取范式

② 添变元:

$$A_i \wedge (p_j \vee \neg p_j) \Leftrightarrow (A_i \wedge p_j) \vee (A_i \wedge \neg p_j)$$

③ 消去重复项

2.2 析取范式和合取范式

- 例：某研究所要从3名科研骨干A，B，C中挑选1～2名出国进修，由于工作需要，选派时要满足以下条件：

① 若A去，则C同去。

② 若B去，则C不能去。

③ 若C不去，则A或B可以去。

解:设p：派A去；q：派B去；r：派C去。

则$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r)\wedge(\neg r\rightarrow(p\vee q))$

经演算可得：

$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r)\wedge(\neg r\rightarrow(p\vee q))$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_2\vee m_5$

可知选派方案有三种：

① C去，A，B都不去。

② B去，A，C不去。

③ A，C去，B不去。

主合取范式与主析取范式转换

- 公式: $A = m_{i_1} \lor m_{i_2} \lor \ldots \lor m_{i_s}$
  - $\neg A = m_{j_1} \lor m_{j_2} \lor \ldots \lor m_{j_t}$， $t=2^n-s$
  - $A \Leftrightarrow \neg\neg A$

    $\Leftrightarrow \neg(m_{j_1} \lor m_{j_2} \lor \ldots \lor m_{j_t})$

    $\Leftrightarrow \neg m_{j_1} \land \neg m_{j_2} \land \ldots \land \neg m_{j_t}$

    $\Leftrightarrow M_{j_1} \land M_{j_2} \land \ldots \land M_{j_t}$

2.2 析取范式和合取范式

- 讨论：具有n个变项的命题公式有多少个不同的主析取范式？
- 对于含有 n 个变项的命题公式，必定可写出2^{2^n}个主析取范式(包括0)。
- 同理，含有 n 个变项的命题公式，也可写出2^{2^n}个主合取范式(包括1)。

第三节：联结词的完备集

2.3 联结词的完备集

“与非”联结词：

符号“↑”

(p↑q)读作：“p与q的否定”

- **$(p \uparrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$**

p	q	p↑q
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	**T**	**F**

2.3联结词的完备集

- **“或非”联结词：**

  符号：“↓”

  (p↓q)读作：“p或q的否定”

  $(p\downarrow q)\Leftrightarrow \neg(p\vee q)$

p	q	p↓q
F	**F**	**T**
F	T	F
T	F	F
T	T	F

2.3 联结词的完备集

- 真值函数F(Truth Function): $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$
- 联结词完备集S(Complete Set of Connectives):
  - S是一个联结词集合
  - 每一个真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示
- 定理: S ={¬，∨，∧}是联结词完备集

  证明：任何一个n（$n\geq1$）元真值函数都与唯一的一个主析取范式等值，而主析取范式仅含¬，∨，∧

- 推论: S ={¬，∧}是联结词完备集

  证明：$p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q)$

  $\Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

2.3 联结词的完备集

❑ 定理: {↑}, {↓}是联结词完备集

证明:

首先, $\neg p \Leftrightarrow \neg(p \wedge p) \Leftrightarrow p \uparrow p$

其次, $p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q)$

$\Leftrightarrow \neg(p \uparrow q)$

$\Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$

$p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

$(p \uparrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

第二章 习题课

❑主要内容

- 等值式与等值演算
- 基本等值式（16组，24个公式）
- 主析取范式与主合取范式
- 联结词完备集

基本要求

- 深刻理解等值式的概念
- 牢记基本等值式的名称及它们的内容
- 熟练地应用基本等值式及置换规则进行等值演算
- 理解文字、简单析取式、简单合取式、析取范式、合取范式的概念
- 深刻理解极小项、极大项的概念、名称及下角标与成真、成假赋值的关系
- 熟练掌握求主范式的方法（等值演算、真值表等）
- 会用主范式求公式的成真赋值、成假赋值、判断公式的类型、判断两个公式是否等值
- 会将公式等值地化成指定联结词完备集中的公式
- 会用命题逻辑的概念及运算解决简单的应用问题

练习1:概念

1. 设A与B为含n个命题变项的公式，判断下列命题是否为真?

(1) $A \Leftrightarrow B$当且仅当A与B有相同的主析取范式 真

(2) 若A为重言式，则A的主合取范式为0 假

(3) 若A为矛盾式，则A的主析取范式为1 假

(4) 任何公式都能等值地化成$\{\wedge, \vee\}$中的公式 假

(5) 任何公式都能等值地化成$\{\neg, \rightarrow, \wedge\}$中的公式 真

说明:

(2) 重言式的主合取范式不含任何极大项，为1.

(3) 矛盾式的主析取范式不含任何极小项, 为0.

(4) $\{\wedge, \vee\}$不是完备集，如矛盾式不能写成$\{\wedge, \vee\}$中的公式.

(5) $\{\neg, \rightarrow\}$是完备集.

练习2：联结词完备集

2．将$A = (p\to\neg q)\land r$改写成下述各联结词集中的公式:

(1) $\{\neg, \land, \lor\}$

(2) $\{\neg, \land\}$

(3) $\{\neg, \lor\}$

(4) $\{\neg, \to\}$

(5) $\{\uparrow\}$

(6) $\{\downarrow\}$

解

(1) $(p\to\neg q)\land r \Leftrightarrow (\neg p\lor\neg q)\land r$

(2) $(p\to\neg q)\land r \Leftrightarrow \neg(p\land q)\land r$

(3) $(p\to\neg q)\land r \Leftrightarrow (\neg p\lor\neg q)\land r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p\lor\neg q)\lor\neg r)$

练习2 解答

(4) $(p\rightarrow\neg q)\wedge r \Leftrightarrow \neg(\neg(p\rightarrow\neg q)\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow \neg((p\rightarrow\neg q)\rightarrow\neg r)$

(5) $(p\rightarrow\neg q)\wedge r \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\wedge r$

$\Leftrightarrow (p\uparrow q)\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg\,\neg((p\uparrow q)\wedge r)$

$\Leftrightarrow ((p\uparrow q)\uparrow r)\uparrow((p\uparrow q)\uparrow r)$

(6) $(p\rightarrow\neg q)\wedge r \Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p\vee\neg q)\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p\downarrow\neg q)\downarrow\neg r$

$\Leftrightarrow (p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q)\downarrow(r\downarrow r)$

说明：答案不惟一

练习3：应用题

3. 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足以下条件：

(1) 若赵去，钱也去

(2) 李、周两人中至少有一人去

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人

(4) 孙、李两人同去或同不去

(5) 若周去，则赵、钱也去

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国？

练习3解答

解此类问题的步骤:

1.设简单命题并符号化

2. 用复合命题描述各条件

3. 写出由复合命题组成的合取式

4. 将合取式化成主范式

5. 求成真赋值, 并做出解释和结论

练习3解答

解

1. 设简单命题并符号化

设 p: 派赵去，q: 派钱去，r: 派孙去，s: 派李去，u: 派周去

2. 写出复合命题

(1) 若赵去，钱也去 $p\rightarrow q$

(2) 李、周两人中至少有一人去 $s\vee u$

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人 $(q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)$

(4) 孙、李两人同去或同不去 $(r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s)$

(5) 若周去，则赵、钱也去 $u\rightarrow(p\wedge q)$

练习3解答

3. 设(1)—(5)构成的合取式为A

$$A=(p\to q)\wedge(s\vee u)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))\wedge$$
$$((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))\wedge(u\to(p\wedge q))$$

4. 化成析取式

$$A\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge u)$$

结论：由上述析取式可知，A的成真赋值为00110与11001，

派孙、李去（赵、钱、周不去）

派赵、钱、周去（孙、李不去）

作业

- 4
- 5
- 6
- 15
- 27
- 29