第七章：二元关系

主要内容

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系

本章与后面各章的关系

- 是函数的基础
- 是图论的基础

第七章：二元关系

第一节：有序对与笛卡儿积

引言

- ❑ 关系是数学中最重要的概念之一
  - ❖ 父子关系、师生关系
  - ❖ 等于、大于、小于关系
  - ❖ 直线的平行、垂直关系
- ❑ 在计算机科学中有广泛应用
  - ❖ 人工智能
  - ❖ 程序设计
  - ❖ 数据库管理—关系数据库

7.1 有序对与笛卡儿积

- 有序对（序偶）：由两个元素x，y(<u>允许$x=y$</u>)按给定顺序排列组成的二元组合
  - 符号化：$\langle x, y\rangle$
  - x为第一元素，y为第二元素
  - 例：平面直角坐标系中的一个点的坐标
  - $<1,3>$和$<3,1>$是表示平面上两个不同的点
- $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$当且仅当$x=u$，$y=v$
  - 如果$x\neq y$，那么$<x, y>\neq<y, x>$

7.1 有序对与笛卡儿积

- 例：已知$\langle x+2, 4\rangle=\langle 5, 2x+y\rangle$，求$x, y$

解：根据有序对等式定义，只需求解方程式

$x+2=5$ 和 $2x+y=4$

得到： $x=3$， $y=-2$

7.1 有序对与笛卡儿积

- 笛卡尔积$A\times B$：集合A中元素为第一元素，集合B中元素为第二元素的有序对集
  - $A\times B=\{\langle x, y\rangle \mid x\in A \wedge y\in B\}$
- 例：设集合$A=\{a, b, c\}$，$B=\{0, 1\}$，求$A\times B$，$B\times A$，$(A\times B)\cap(B\times A)$
  - $A\times B=\{\langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 0\rangle, \langle c, 1\rangle\}$
  - $B\times A=\{\langle 0, a\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 0, b\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 0, c\rangle, \langle 1, c\rangle\}$
  - $(A\times B)\cap(B\times A)=\varnothing$

7.1 有序对与笛卡儿积

❑ 例：设集合A={1，2}，求$P(A)\times A$

解：

$P(A)$={∅，{1}，{2}，{1，2}}

$P(A)\times A$

={<∅，1>，<∅，2>，<{1}，1>，<{1}，2>，<{2}，1>，<{2}，2>，<{1，2}，1>，<{1，2}，2>}

7.1 有序对与笛卡儿积

- **说明：**
  - 如A，B均是有限集，$|A|=m$, $|B|=n$，则必有$|A\times B|=mn$

7.1 有序对与笛卡儿积

- 笛卡儿积的性质：
  - 对于任意集合A，$A\times\varnothing=\varnothing$，$\varnothing\times A=\varnothing$
  - 一般不满足交换律，当$A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$，$A\neq B$时，

    $A\times B\neq B\times A$
  - 一般不满足结合律，即当A，B，C均非空时，
    $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$

7.1 有序对与笛卡儿积

- 笛卡儿积的性质（续）：
  - 对任意三个集合*A*，*B*，*C*有

(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

(2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

(3) $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

(4) $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

(5) $A\subseteq C\wedge B\subseteq D\Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$

7.1 有序对与笛卡儿积

- 证明：
  - ❖对任意三个集合A，B，C有
    $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

证明： $<x, y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \vee (x\in A \wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in A\times B \vee <x, y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow <x, y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

7.1 有序对与笛卡儿积

- 例：设A，B，C，D是任意集合，判断下列命题是否正确？
  - $A\times B=A\times C \Rightarrow B=C$
    - 不正确。取$A=\varnothing$，$B\neq C$，$A\times B=A\times C=\varnothing$
  - $A-(B\times C)=(A-B)\times(A-C)$
    - 不正确。取$A=B=\{1\}$，$C=\{2\}$，

      $A-(B\times C)=\{1\}-\{<1,2>\}=\{1\}$

      而$(A-B)\times(A-C)=\varnothing\times\{1\}=\varnothing$

7.1 有序对与笛卡儿积

- 例：设A，B，C，D是任意集合，判断下列命题是否正确？
  - $A=B$，$C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$
    - 正确。
  - 存在集合A使得$A \subseteq A\times A$
    - 正确。取$A=\varnothing$时，$A\subseteq A\times A$

第二节：二元关系

7.2 二元关系

- 关系是指事物之间（个体之间）的相互联系
- 二元关系*R*：满足下列条件之一的集合
  - 集合非空，且它的元素都是有序对
  - 集合为空集
- 定义：*A*，*B*是集合，$A\times B$的子集叫做从*A*到*B*的一个二元关系
- 例：$A=\{0, 1\}$，$B=\{1, 2, 3\}$
  - $R_1=\{<0,2>\}$，$R_2=\{<0,1>\}$
  - $R_3=\varnothing$

7.2 二元关系

- 几类特殊关系：
  - 全域关系$E_A = A \times A$
  - 恒等关系$I_A=\{<x, x> | x \in A\}$
  - 空关系$\varnothing$

7.2 二元关系

- 例： $A=\{0,1,2\}$
  - $E_A=\{<0,0>,<0,1>,<0,2>,<1,0>,$ $<1,1>,<1,2>,<2,0>,<2,1>,<2,2>\}$
  - 恒等关系$I_A=\{<0,0>,<1,1>,<2,2>\}$

7.2 二元关系

- 包含关系
  - A是一个集合, 定义P(A)上的一个关系
  - $R_{\subseteq}=\{<u, v> \mid u\in P(A), v\in P(A), 且 u\subseteq v\}$
  - $A=\{a, b\}$, $P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, A\}$
  - $R_{\subseteq}=\{<\varnothing, \{a\}>, <\varnothing, \{b\}>, <\varnothing, \varnothing>, <\varnothing, A>, <\{a\}, \{a\}>, <\{a\}, A>, <\{b\}, \{b\}>, <\{b\}, A>, <A, A>\}$
- 例: $A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$
  - $R=\{<a, b> \mid a$是b的倍数$\}$
  - $R=\{<2, 2>, <3, 3>, <4, 2>, <4, 4>, <5, 5>, <6, 2>, <6, 3>, <6, 6>\}$

7.2 二元关系

- 关系表示方法
  - 枚举法（直观法、列举法）
    - xRy表示特定的序偶$\langle x, y\rangle \in R$
  - 谓词公式表示法（暗含法）
  - 关系矩阵表示法
  - 关系图表示法

7.2 二元关系

- 关系表示方法
  - 枚举法（直观法、列举法）
    - xRy表示特定的序偶$\langle x, y\rangle \in R$
  - 谓词公式表示法（暗含法）
  - 关系矩阵表示法
  - 关系图表示法

7.2 二元关系

关系矩阵表示法

设集合$A=\{a_1,\ldots,a_m\}$, $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$, R是A到B的关系, 则R的关系矩阵是一个m×n阶的矩阵

$$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$$

其中$r_{ij}=1$, 当$\langle a_i, b_j\rangle\in R$

$r_{ij}=0$, 当$\langle a_i, b_j\rangle\notin R$

如果R是A上的关系时, 则其关系矩阵是一个方阵

7.2 二元关系

例：$A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{x,y,z\}$,$|A|=4$, $|B|=3$,

$R=\{\langle a,x\rangle,\langle a,z\rangle,\langle b,y\rangle,\langle c,z\rangle,\langle d,y\rangle\}$

则M_R是4×3的矩阵

$$M_R=\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

其中$r_{13}=1$表示$\langle a,z\rangle\in R$,而$r_{23}=0$,表示$\langle b,z\rangle\notin R$

7.2 二元关系

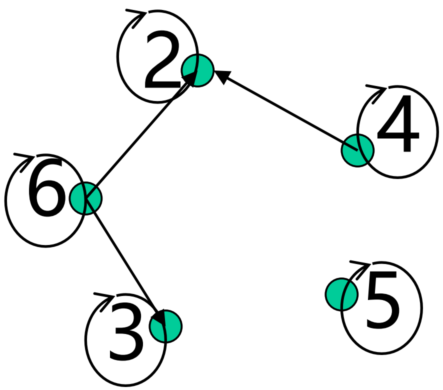
- 关系表示方法
  - 枚举法（直观法、列举法）
    - xRy表示特定的序偶$\langle x, y\rangle \in R$
  - 谓词公式表示法（暗含法）
  - 关系矩阵表示法
  - 关系图表示法

7.2 二元关系

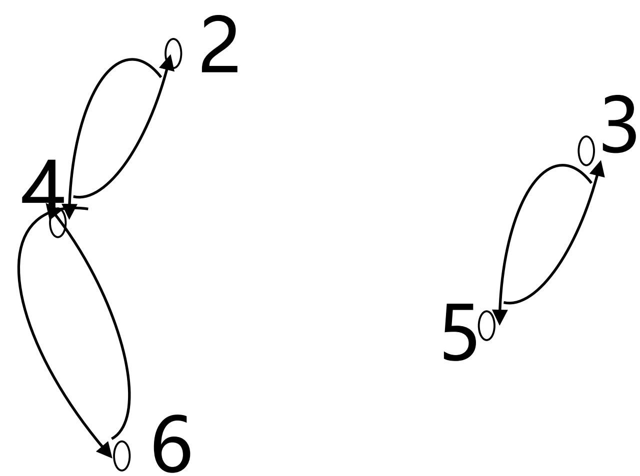
- 关系图：$A=\{a_1,\ldots,a_m\}$，$B=\{b_1,\ldots,b_n\}$
  - 结点： m+n 个空心点分别表示 $a_1, \cdots, a_m$ 和 $b_1, \cdots, b_n$
  - 有向边：如果$\langle a_i, b_j\rangle \in R$, 则由结点$a_i$向结点$b_j$通一条有向弧, 箭头指向$b_j$
  - 自回路：$\langle a_i, a_i\rangle \in R$, 则画一条以$a_i$到自身的一条有向弧
  - 这样形成的图称为关系R的关系图

- 例：$A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$

(1) $R_1=\{\langle a, b\rangle \mid a$是$b$的倍数$\}$



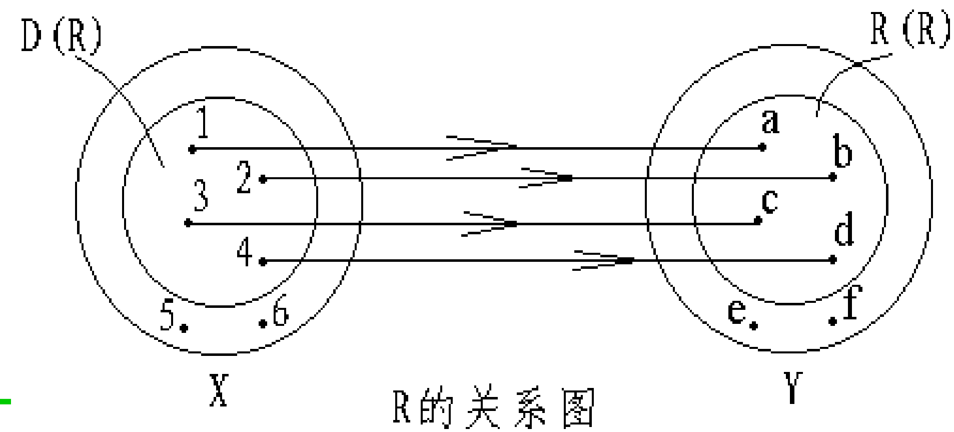
(2) $R_2=\{\langle a, b\rangle \mid (a-b)^2\in A\}$



第三节：关系的运算

7.3 关系的运算

- 二元关系的定义域和值域
  - 定义域：$domR = \{x \mid \exists y(<x,y> \in R)\}$
  - 值域：$ranR = \{y \mid \exists x(<x,y> \in R)\}$
- 例
  - ***X={1,2,3,4,5,6},Y={a,b,c,d,e,f}***
  - ***R={<1,a>,<2,b>,<3,c>,<4,d>}***
  - ***domR={1,2,3,4}***
  - ***ranR={a,b,c,d}***



7.3 关系的运算

- 二元关系的逆关系

$$R^{-1}=\{<x,y>|<y,x>\in R\}$$

  - R^{-1}就是将R中的所有有序对的两个元素交换次序成为R^{-1}，故$|R|=|R^{-1}|$
- 说明
  - R^{-1} 的关系矩阵是R的关系矩阵的转置，即$M_{R^{-1}}=(M_R)^T$
  - R^{-1}的关系图就是将R的关系图中的弧改变方向即可以

7.3 关系的运算

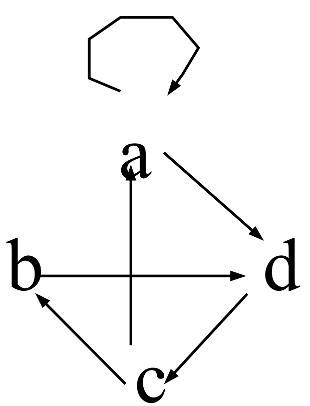
❑ 例：

- ❖ $R=\{\langle a,a\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle d,c\rangle\}$
- ❖ $R^{-1}=\{\langle a,a\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle\}$

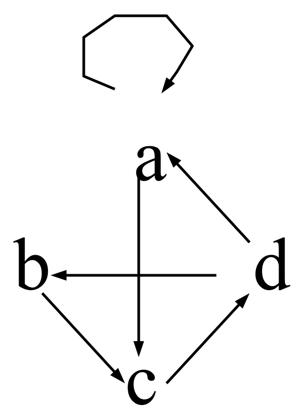
$$M_R = \begin{matrix} 1&0&0&1 \\ 0&0&0&1 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{matrix} \qquad M_R^{-1}=M_R^{T}= \begin{matrix} 1&0&1&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&1&0&0 \end{matrix}$$

- 例：
  - $R=\{<a,a>, <a,d>, <b,d>, <c,a>, <c,b>, <d,c>\}$
  - $R^{-1}=\{<a,a>, <d,a>, <d,b>, <a,c>, <b,c>, <c,d>\}$

R的关系图



R^{-1}的关系图



7.3 关系的运算

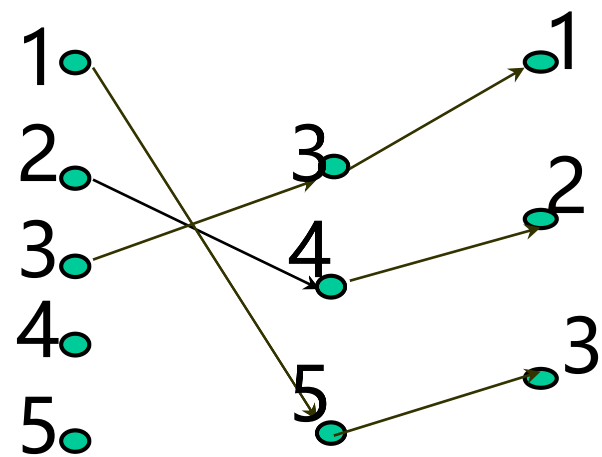
- 关系的右复合

$$F \circ G = \{<x,y> | \exists t(<x,t> \in F \wedge <t,y> \in G)\}$$

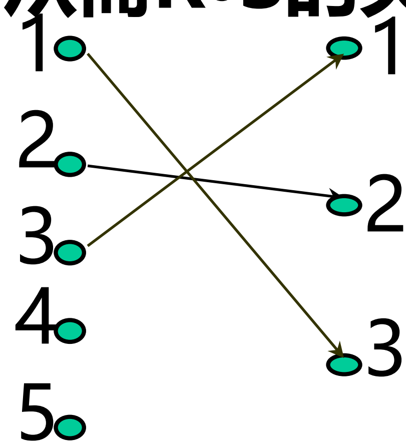
- 例
  - $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,2,3\}$
  - $R=\{<x,y> | x+y=6\}$
    $=\{<1,5>,<2,4>,<3,3>\}$
  - $S=\{<y,z> | y-z=2\}$
    $=\{<3,1>,<4,2>,<5,3>\}$
  - $R \circ S=\{<1,3>,<2,2>,<3,1>\}$

7.3 关系的运算

- 例（续）



从而R•S的关系图



回顾

- 有序对（序偶）：由两个元素x，y(允许x=y)按给定顺序排列组成的二元组合
- 笛卡尔积$A\times B$：集合A中元素为第一元素，集合B中元素为第二元素的有序对集
  - $A\times B=\{\langle x, y\rangle \mid x\in A \land y\in B\}$

回顾

- 二元关系
  - 空关系$\varnothing$
  - 全域关系$E_A = A \times A$
  - 恒等关系$I_A = \{<x, x> | x \in A\}$
  - 包含关系$R_{\subseteq} = \{<u, v> \mid u \in P(A), v \in P(A)$，且$u \subseteq v\}$

回顾

- 关系的四种表示方法：
  - 枚举法（直观法、列举法）
  - 谓词公式表示法（暗含法）
  - 关系矩阵表示法
  - 关系图表示法

回顾

- 定义域和值域：

$$domR = \{x \mid \exists y(<x,y> \in R)\}$$

$$ranR = \{y \mid \exists x(<x,y> \in R)\}$$

- 逆关系： $R^{-1} = \{<x,y> \mid <y,x> \in R\}$
- 右复合： $F \circ G = \{<x,y> \mid \exists t(<x,t> \in F \wedge <t,y> \in G)\}$

7.3 关系的运算

- 例： $A=\{a,b,c,d,e\}$
  - $R=\{<a,b>,<c,d>,<b,b>\}$
  - $S=\{<d,b>,<b,e>,<c,a>\}$
  - $R\circ S=\{<a,e>,<c,b>,<b,e>\}$
  - $S\circ R=\{<d,b>,<c,b>\}$
  - $R\circ R=\{<a,b>,<b,b>\}$
  - $S\circ S=\{<d,e>\}$
- 注意：$R\circ S\neq S\circ R$

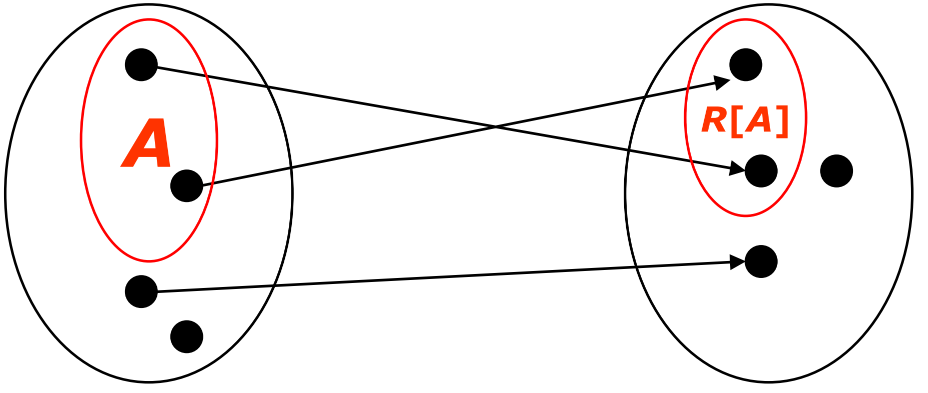
7.3 关系的运算

- 定义：***R***是二元关系，***A***是集合
  - ***R*在*A*上的限制**

    $$R \upharpoonright A = \{<x,y> \mid xRy \wedge x \in A\}$$

  - ***A*在*R*下的像**

    $$R[A] = ran(R \upharpoonright A)$$



7.3 关系的运算

- 例：$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle\}$，
  求：

$$R\uparrow\{1\} \qquad R\uparrow\varnothing \qquad R\uparrow\{2,3\}$$

$$R[\{1\}] \qquad R[\varnothing] \qquad R[\{2,3\}]$$

7.3 关系的运算

❑ 优先顺序：

- 逆运算优先于其他运算
- 关系运算优先于集合运算
- 没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序

7.3 关系的运算

- 定理：设F是任意的关系，则
  - $(F^{-1})^{-1}=F$
  - $domF^{-1}=ranF$, $ranF^{-1}=domF$

7.3 关系的运算

- 定理：设F，G，H是任意的关系
  ① $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$
  ② $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

证明：$<x, y> \in (F \circ G)^{-1}$

$\Leftrightarrow <y, x> \in F \circ G$

$\Leftrightarrow \exists t(<y, t> \in F \wedge <t, x> \in G)$

$\Leftrightarrow \exists t(<x, t> \in G^{-1} \wedge <t, y> \in F^{-1})$

$\Leftrightarrow <x, y> \in G^{-1} \circ F^{-1}$

7.3 关系的运算

- 例
  - $R=\{<a,a>,<a,c>,<b,b>,<c,b>,<c,c>\}$
  - $S=\{<a,1>,<a,4>,<b,2>,<c,4>,<c,5>\}$
  - $R\circ S=\{<a,1>,<b,2>,<c,2>,<a,4>,<c,4>,<a,5>,<c,5>\}$
  - $(R\circ S)^{-1}=\{<1,a>,<2,b>,<2,c>,<4,a>,<4,c>,<5,a>,<5,c>\}$
  - $R^{-1}=\{<a,a>, <c,a>,<b,b>,<b,c>,<c,c>\}$
  - $S^{-1}=\{<1,a>,<4,a>,<2,b>,<4,c>, <5,c>\}$
  - $S^{-1}\circ R^{-1}=\{<1,a>,<2,b>,<2,c>,<4,a>,<4,c>,<5,a>,<5,c>\}$

7.3 关系的运算

- 定理：设R为A上关系，则

$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

- 定理：
  - $R \circ (S \cup T) = R \circ S \cup R \circ T$
  - $R \circ (S \cap T) \subseteq R \circ S \cap R \circ T$
  - $(S \cup T) \circ X = S \circ X \cup T \circ X$
  - $(S \cap T) \circ X \subseteq S \circ X \cap T \circ X$

7.3 关系的运算

- 证明 $R\circ(S\cup T)=R\circ S\cup R\circ T$

$\forall\langle x,z\rangle\in R\circ(S\cup T)$

$\Leftrightarrow \exists y(\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in S\cup T)$

$\Leftrightarrow \exists y(\langle x,y\rangle\in R\wedge(\langle y,z\rangle\in S\vee\langle y,z\rangle\in T))$

$\Leftrightarrow \exists y((\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in S)\vee$
$(\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in T))$

$\Leftrightarrow \exists y(\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in S)\vee$
$\exists y(\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in T)$

$\Leftrightarrow \langle x,z\rangle\in R\circ S\vee\langle x,z\rangle\in R\circ T$

$\Leftrightarrow \langle x,z\rangle\in R\circ S\cup R\circ T$

7.3 关系的运算

- 证明 $R\circ(S\cap T)\subseteq R\circ S\cap R\circ T$

$\forall <x,y>\in R\circ(S\cap T)$

$\Leftrightarrow \exists t\ (<x,t>\in R\wedge <t,y>\in S\cap T)$

$\Leftrightarrow \exists t\ (<x,t>\in R\wedge <t,y>\in S\wedge <t,y>\in T)$

$\Leftrightarrow \exists t\ ((<x,t>\in R\wedge <t,y>\in S)$

$\wedge(<x,t>\in R\wedge <t,y>\in T))$

$\Rightarrow \exists t\ (<x,t>\in R\wedge <t,y>\in S)$

$\wedge\exists t\ (<x,t>\in R\wedge <t,y>\in T)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in R\circ S\wedge <x,y>\in R\circ T$

$\Leftrightarrow <x,y>\in R\circ S\cap R\circ T$

7.3 关系的运算

- 定理:
  - $R\upharpoonright(A\cup B) = R\upharpoonright A\cup R\upharpoonright B$
  - $R[A\cup B] = R[A]\cup R[B]$
  - $R\upharpoonright(A\cap B) = R\upharpoonright A\cap R\upharpoonright B$
  - $R[A\cap B] \subseteq R[A]\cap R[B]$

7.3 关系的运算

- 定理: $R[A\cap B] \subseteq R[A]\cap R[B]$

证明：$\forall y\in R[A\cap B]$

$\Leftrightarrow \exists x(<x,y>\in R\wedge x\in A\cap B)$

$\Leftrightarrow \exists x(<x,y>\in R\wedge x\in A\wedge x\in B)$

$\Leftrightarrow \exists x((<x,y>\in R\wedge x\in A)\wedge(<x,y>\in R\wedge x\in B))$

$\Rightarrow \exists x(<x,y>\in R\wedge x\in A)\wedge \exists x(<x,y>\in R\wedge x\in B)$

$\Leftrightarrow y\in R[A]\wedge y\in R[B]$

$\Leftrightarrow y\in R[A]\cap R[B]$

7.3 关系的运算

- **R的n次幂**
  - 记为R^n
  - $R^0 = I_A$
  - $R^{n+1}=R^n \circ R$
- 定理：设R是集合A上的关系，$m,n \in N$
  - $R^m \circ R^n=R^{m+n}$
  - $(R^m)^n=R^{mn}$

证明思路：使用归纳法并利用复合关系的结合律

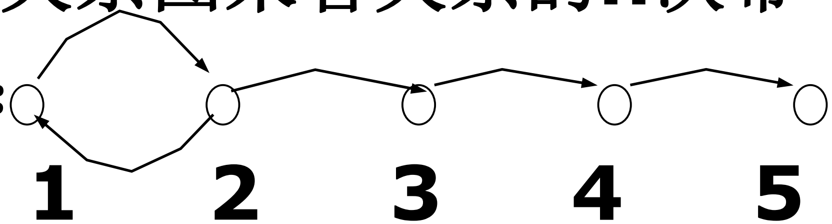
7.3 关系的运算

- 例$R=\{<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,4>,<4,5>\}$
  - $R^0=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>\}$
  - $R^1=R$
  - $R^2=\{<1,1>,<2,2>,<1,3>,<2,4>,<3,5>\}$
  - $R^3=R^2\circ R$
    $=\{<1,2>,<2,1>,<1,4>,<2,3>,<2,5>\}$
  - $R^4=R^3\circ R$
    $=\{<1,1>,<2,2>,<1,5>,<2,4>,<1,3>\}$
  - $R^5=R^4\circ R$
    $=\{<1,2>,<1,4>,<2,1>,<2,3>,<2,5>\}$

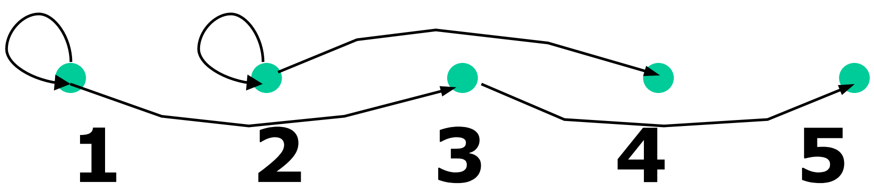
7.3 关系的运算

从关系图来看关系的n次幂

***R*:**



R^2就是所有在R中通过二条弧连接的点，则在R^2这两点间直接有条弧。



$R^3, R^4 \ldots$

7.3 关系的运算

- 定理：R是A上的二元关系，若存在自然数s和t，且$s<t$，使$R^s=R^t$，则
  ① 对所有的$k≥0$，则$R^{s+k}=R^{t+k}$
  ② 对所有的$k,i≥0$，则有$R^{s+kp+i}=R^{s+i}$
    - $p=t-s$
  ③ 设$S=\{R^0,R^1,R^2,\ldots,R^{t-1}\}$，则$R$的每一次幂都是$S$的元素，即对任意$q\in N$, $R^q\in S$

7.3 关系的运算

- 定理：R是A上的二元关系，若存在自然数s和t，且$s<t$，使$R^s=R^t$
  ① 对所有的$k\geq 0$，则$R^{s+k}=R^{t+k}$
  ② 对所有的$k,i\geq 0$，则有$R^{s+kp+i}=R^{s+i}$
  - $p=t-s$

  ③ 设$S=\{R^0,R^1,R^2,\ldots,R^{t-1}\}$，则$R$的每一次幂是$S$的元素，即对任意$q\in N$, $R^q\in S$

证明：对k进行归纳。

k=0时$R^{s+kp+i}=R^{s+i}$显然成立

假设$R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，这里$p=t-s$，那么

$R^{s+(k+1)p+i}=R^{s+kp+i+p}=R^{s+kp+i}\circ R^{p}$

$=R^{s+i}\circ R^{p}=R^{s+p+i}=R^{s+t-s+i}$

$=R^{t+i}=R^{s+i}$

回顾

- 定义域和值域：

$$domR = \{x \mid \exists y(<x,y> \in R)\}$$

$$ranR = \{y \mid \exists x(<x,y> \in R)\}$$

- 逆关系： $R^{-1} = \{<x,y> \mid <y,x> \in R\}$
- 右复合： $F \circ G = \{<x,y> \mid \exists t(<x,t> \in F \wedge <t,y> \in G)\}$
- R在A上的限制： $R \uparrow A = \{<x,y> \mid xRy \wedge x \in A\}$
- A在R下的像： $R[A] = ran(R \uparrow A)$

回顾

- **R的n次幂**
  - 记为R^n
  - $R^0 = I_A$
  - $R^{n+1} = R^n \circ R$

7.3 关系的运算

- 定理：R是A上的二元关系，若存在自然数s和t，且$s<t$，使$R^s=R^t$
  ① 对所有的$k\geq 0$，则$R^{s+k}=R^{t+k}$
  ② 对所有的$k,i\geq 0$ ，则有$R^{s+kp+i}=R^{s+i}$
  - $p=t-s$

  ③ 设$S=\{R^0,R^1,R^2,\ldots,R^{t-1}\}$，则$R$的每一次幂是$S$的元素，即对任意$q\in N$, $R^q\in S$

7.3 关系的运算

证明：若q<t，则$R^q \in S$ 。

若q≥t，则存在自然数k，i使得

$$q=s+kp+i$$

其中$0\leq i\leq p-1$，所以

$$R^q= R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$

由于$0\leq i\leq p-1$

$$s+i \leq s+p-1 = s+t-s-1=t-1$$

第四节：关系的性质

7.4 关系的性质

- 自反性
  - $\forall a \in A$，有 $\langle a,a\rangle \in R$，则R为A上的*自反*关系
- 反自反性
  - $\forall a \in A$，有 $\langle a,a\rangle \notin R$，R为A上的*反自反*关系
- 例 $A=\{a,b,c\}$
  - $R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle c,a\rangle\}$
  - $R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$
  - $R_3=\{\langle a,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$

7.4 关系的性质

- 例：R是I_+上的整除关系，则R具有自反性
  - 证明：$\forall x \in I_+$，x能整除x，
  - $\therefore \langle x,x\rangle \in R$，$\therefore$R具有自反性
- 例：R是I上的同余关系，则R具有自反性
  - 证明：$\forall x \in I$，$(x-x)/k=0 \in I$,
  - $\because$x与x同余$\therefore \langle x,x\rangle \in R \therefore$R具有自反性
- 其它≤，≥关系，均是自反关系

7.4 关系的性质

- 例：**N**上的互质关系是反自反关系
  - 证明：$\forall$**x**$\in$**N**，**x**与**x**是不互质的，
  - $\therefore$**<x,x>** $\notin$ **R**，$\therefore$**R**具有反自反关系

- 实数上的<,>关系,均是反自反关系

7.4 关系的性质

- 关系矩阵的特点？
  - 自反关系的关系矩阵的对角元素均为**1**
  - 反自反关系的关系矩阵的对角元素均为**0**
- 关系图的特点？
  - 自反关系的关系图中每个顶点都有环
  - 反自反关系的关系图中每个顶点都没有环
- 定理：**R**是**A**上的关系，则：
  - **R**是自反关系的充要条件是$I_A \subseteq R$
  - **R**是反自反关系的充要条件是$R \cap I_A = \Phi$

7.4 关系的性质

- 对称关系*R*
  - $\forall a,b\in A$,如果$<a,b>\in R$,则必有$<b,a>\in R$
- 例
  - $R_1=\{<1,1>,<2,3>,<3,2>\}$
  - R_1是对称的
  - $R_2=\{<1,1>,<3,3>\}$
  - R_2是对称的
  - $R_3=\{<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,1>\}$
  - R_3不是对称的

7.4 关系的性质

- 关系矩阵特点？
  - 对称关系的关系矩阵是对称矩阵
- 关系图特点？
  - 如果两个顶点之间有边，一定是一对方向相反的边（无单边）
- 定理： R在A上对称当且仅当$R=R^{-1}$

证明：必要性

$$<x,y>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R^{-1}$$

充分性

$$<x,y>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R^{-1} \Rightarrow <y,x>\in R$$

7.4 关系的性质

- 反对称关系R
  - $\forall a,b \in A$,如果$<a,b> \in R$且$<b,a> \in R$,则必有$a=b$
  - $\forall a,b \in A$,如果$a \neq b$,$<a,b> \in R$,则必有$<b,a> \notin R$
- 例: $A=\{a,b,c\}$
  - $R=\{<a,a>,<b,b>\}$
  - $S=\{<a,b>,<a,c>\}$
  - $T=\{<a,c>,<b,a>,<a,b>\}$
  - R,S是反对称的,T不是反对称的

7.4 关系的性质

- 例: 实数集合上≤关系是反对称关系
  - ∀x,y∈实数集,如x≠y,且x≤y,则y≤x不成立
- 例：≥,<,>关系,均是反对称关系

- 反对称关系矩阵和关系图特点?
  - 若r_{ij}=1，且$i \neq j$，则r_{ji}=0
  - 如果两个顶点之间有边，一定是一条有向边（无双向边）
- 定理： R在A上反对称当且仅当$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

7.4 关系的性质

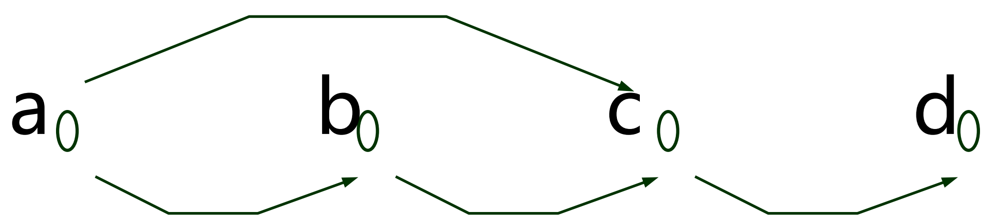
- 传递关系
  - $\forall a,b,c \in A$,如果$<a,b> \in R, <b,c> \in R$, 必有$<a,c> \in R$
- 例
  - $R_1 = \{<x,y>,<z,x>,<z,y>\}$
  - 是传递关系
  - $R_2 = \{<a,b>,<c,d>\}$
  - 是传递关系
  - $R_3 = \{<a,b>,<b,a>\}$
  - 不是传递关系

7.4 关系的性质

- 例:整除关系D_{I_+}是I_+上的传递关系
  - $\forall x,y,z\in I_+$,如$\langle x,y\rangle\in D_{I_+}$,$\langle y,z\rangle\in D_{I_+}$,即x能整除y,且y能整除z,则必有x能整除z,$\langle x,z\rangle\in D_{I_+}$
- 例:P(A)上的包含关系$\subseteq$具有传递性
  - 若$u\subseteq v$,$v\subseteq w$,则必有$u\subseteq w$
- 例:实数集上的$\leq$关系具有传递性
  - 若$x\leq y$,$y\leq z$必有$x\leq z$

7.4 关系的性质

- 传递关系关系图特点？
  - 如果结点**a**能通过有向弧组成的有向路径通向结点**x**,则**a**必须有有向弧直接指向**x**,否则**R**就不是传递的
- 例：**R={<a,b>,<b,c>,<c,d>,<a,c>}**



- 定理：**R**在**A**上传递当且仅当$R\circ R \subseteq R$

7.4 关系的性质

自　反： $\forall x(x \in X \to xRx)$

反自反： $\forall x(x \in X \to x \not R x)$

对　称： $\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \to yRx)$

反对称： $\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \to x = y)$

传　递： $\forall x \forall y \forall z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$

7.4 关系的性质

- 设A是集合，R_1和R_2是A上的关系
  - ① 若R_1，R_2是自反和对称的，则$R_1 \cup R_2$也是自反的和对称的
  - ② 若R_1和R_2是传递的，则$R_1 \cap R_2$也是传递的

7.4 关系的性质

- 设A是集合，R_1和R_2是A上的关系

若R_1，R_2是自反的和对称的，则$R_1 \cup R_2$也是自反的和对称的

证明：R_1，R_2是自反的$\Rightarrow I_A \subseteq R_1$，$I_A \subseteq R_2$

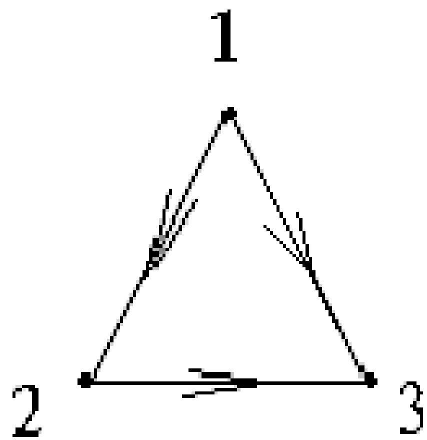
所以$I_A \subseteq R_1 \cup R_2$

R_1，R_2是对称的$\Rightarrow R_1 = R_1^{-1}$和$R_2 = R_2^{-1}$

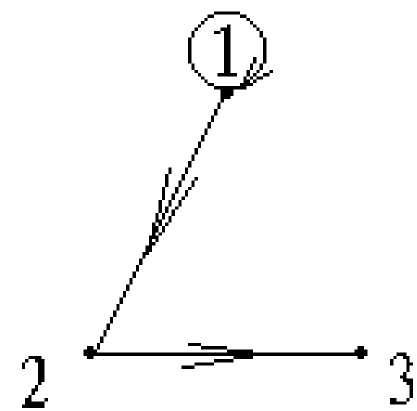
所以$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2$

7.4 关系的性质

- 例： $X=\{1,2,3\}$，判断关系的性质
  - $R_1=\{<1,2>,<2,3>,<1,3>\}$



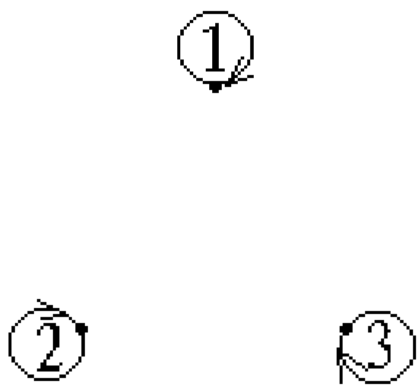
- 反自反
- 反对称
- 可传递



- $R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>\}$
- 反对称

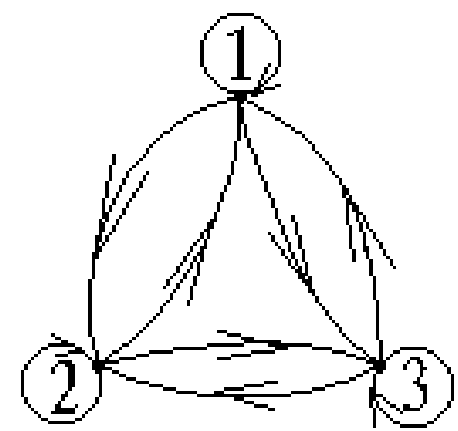
7.4 关系的性质

- $R_3=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$



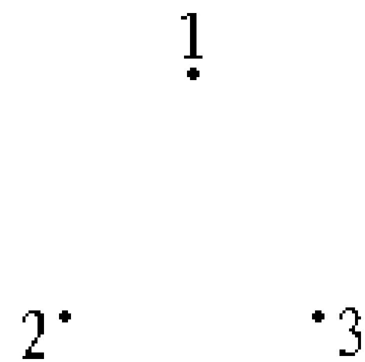
  - 自反，对称，反对称，可传递的

- $R_4= E_x$
  - 自反，对称，可传递的



7.4 关系的性质

- $X=\{1,2,3\}$, $R_5=\varnothing$
  - 反自反的，对称的，反对称的，可传递的



- 若$X=\varnothing$，X上的空关系
  - 自反的，反自反的，对称的，反对称的，可传递的

第五节：关系的闭包

7.5 关系的闭包

- 定义：**R**是非空集合**A**上的关系,若**A**上另外有一个关系**R′**满足如下三条：
  - **R′**是自反的(对称的，传递的）
  - $R \subseteq R'$
  - **A**上任何一个满足以上两条的关系**R″**，均有$R' \subseteq R''$，

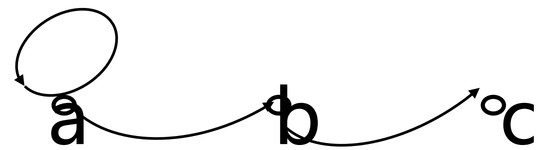
  称关系**R′**为**R**的自反(对称,传递)闭包,记作**r(R)**(**s(R)**,**t(R)**)

7.5 关系的闭包

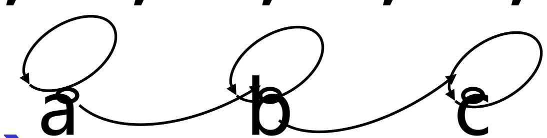
- 解释
  - R′是在R的基础上添加有序对
  - 添加元素的目的是使R′具有自反性(对称性,传递性)
  - 添加后使之具有自反性(对称性,传递性)的所有关系中R′是最小的一个

7.5 关系的闭包

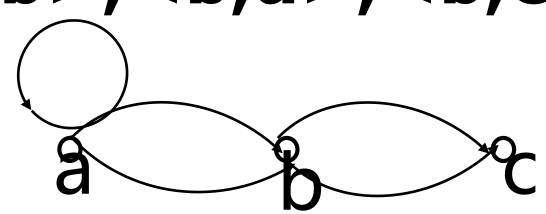
- 例A={a,b,c}，R={<a,a>,<a,b>,<b,c>}



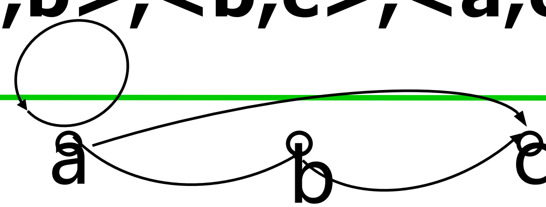
- 自反闭包r(R)
- {<a,a>,<a,b>,<b,c>,<b,b>,<c,c>}



- 对称闭包s(R)
- {<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>}



- 传递闭包t(R)
- {<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>}



7.5 关系的闭包

❑ 定理：R是非空集合A上的关系,则

$$r(R)=R\cup I_A$$

证明：$R\subseteq R\cup I_A$，$R\cup I_A$是自反的

设R''满足$R\subseteq R''$,R''是自反的

$\forall <a,b>\in R\cup I_A$

则$<a,b>\in R$或$<a,b>\in I_A$

如$<a,b>\in R$,由$R\subseteq R''$知$<a,b>\in R''$

如$<a,b>\in I_A$,由R''的自反性知$<a,b>\in R''$

均有$<a,b>\in R''$

$\therefore R\cup I_A\subseteq R''$

7.5 关系的闭包

- 定理：设R是非空集A的关系,则

$$s(R)=R\cup R^{-1}$$

证明:

- $R\subseteq R\cup R^{-1}$满足定义第2条
- $\forall\langle a,b\rangle\in R\cup R^{-1}$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R\vee\langle a,b\rangle\in R^{-1}$

$\Leftrightarrow\langle b,a\rangle\in R^{-1}\vee\langle b,a\rangle\in R$

$\Leftrightarrow\langle b,a\rangle\in R\cup R^{-1}$

$\therefore R\cup R^{-1}$是对称的

7.5 关系的闭包

❖如$R \subseteq R''$,且R''是对称的

$\forall \langle a,b \rangle \in R \cup R^{-1}$

$\langle a,b \rangle \in R$或$\langle a,b \rangle \in R^{-1}$

如$\langle a,b \rangle \in R$,由$R \subseteq R''$,则$\langle a,b \rangle \in R''$

如$\langle a,b \rangle \in R^{-1}$,则$\langle b,a \rangle \in R$,则$\langle b,a \rangle \in R''$

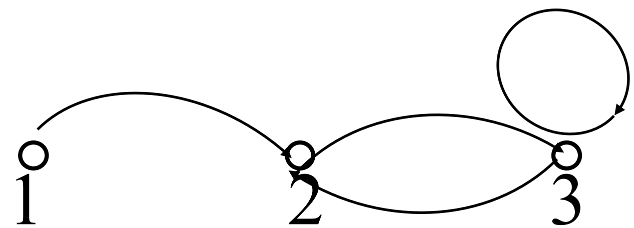
因R''对称

$\therefore \langle a,b \rangle \in R''$,$\therefore R \cup R^{-1} \subseteq R''$

满足定义第3条

7.5 关系的闭包

- 例:设$A=\{1,2,3\}$,A上的关系R如图,求 $r(R)$,$s(R)$



解:$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

$r(R)= R\cup I_A$

$=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,1\rangle\}$

$s(R)= R\cup R^{-1}$

$=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

7.5 关系的闭包

定理：设R是非空集合A上的关系，则

$$t(R)= R^1 \cup R^2 \cup \ldots$$

证明：首先证明$R^1 \cup R^2 \cup \ldots \subseteq t(R)$，使用归纳法。

$n=1$，显然$R^1= R \subseteq t(R)$

假设$R^k \subseteq t(R)$，对任意$<x,y>$有

$$<x,y> \in R^{k+1} = R^k \circ R^1$$

$$\Leftrightarrow \exists t(<x,t> \in R^k \wedge <t,y> \in R^1)$$

$$\Rightarrow \exists t(<x,t> \in t(R) \wedge <t,y> \in t(R))$$

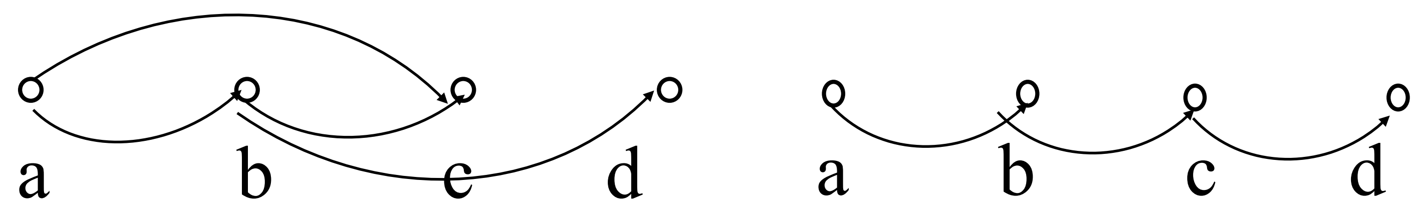
$$\Rightarrow <x,y> \in t(R)$$

其次，$t(R) \subseteq R^1 \cup R^2 \cup \ldots$即证$R^1 \cup R^2 \cup \ldots$传递

推论：设A是非空有限集，R是集合A上的二元关系，则存在正整数n，使得$t(R)=R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$

7.5 关系的闭包

- 例 $A=\{a,b,c,d\}$
  - $R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle\}$
  - $S=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$，求 $t(R)$, $t(S)$



- **解:** $R^2=\{\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle\}$, $R^3=\varnothing$

$\therefore t(R)=R\cup\{\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle\}$

$S^2=\{\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle\}$, $S^3=\{\langle a,d\rangle\}$, $S^4=\varnothing$

$\therefore t(S)=S\cup\{\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle\}\cup\{\langle a,d\rangle\}$

回顾

❑ 关系的性质

自 反： $\forall x(x \in X \to xRx)$

反自反： $\forall x(x \in X \to x \not R x)$

对 称： $\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \to yRx)$

反对称： $\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \to x = y)$

传 递： $\forall x \forall y \forall z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$

回顾

- 关系的判断
  - R是自反关系的充要条件是$I_A \subseteq R$
  - R是反自反关系的充要条件是$R \cap I_A = \Phi$
  - R在A上对称的充要条件是$R = R^{-1}$
  - R在A上反对称的充要条件是$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
  - R在A上传递的充要条件是$R \circ R \subseteq R$

回顾

- 关系的闭包
  - R′是自反的(对称的，传递的）
  - R⊆R′
  - A上任何一个满足以上两条的关系R″，均有R′⊆R″
- 闭包的构造
  - $r(R)=R\cup I_A$
  - $s(R)=R\cup R^{-1}$
  - $t(R)= R^1\cup R^2\cup\ldots$

7.5 关系的闭包

- 给定关系R，r(R)，s(R)，t(R)的关系矩阵分别为M，M_r，M_s，M_t，那么：
  - $M_r = M + E$
  - $M_s = M + M'$
  - $M_t = M + M^2 + M^3 + \ldots$

7.5 关系的闭包

- 关系图分别为G，G_r，G_s，G_t，那么：
  - 考察G的每个顶点，如果没有环就加上一个环，最终得到的是G_r
  - 考察G的每一条边，如果有一条从x_i到x_j的单向边，则在G中加一条x_j到x_i的反方向边，最终得到G_s
  - 考察G的每个顶点x_i，找出从x_i出发的所有2步，3步，…，n步长的路径。设路径的终点为x_{j1}，x_{j2}，…，x_{jk}。如果没有从x_i到x_{jl}的边，就加上这条边，最终得到G_t

7.5 关系的闭包

- 定理：设A是一集合，R是A上的二元关系，则有：
  - R是自反的当且仅当r(R)＝R
  - R是对称的当且仅当s(R)＝R
  - R是可传递的当且仅当t(R)＝R
- R是自反的当且仅当r(R)＝R

证明：R$\subseteq$r(R)。由自反闭包定义，r(R)$\subseteq$R。

7.5 关系的闭包

- 定理：设A是集合，R_1和R_2是A上的二元关系，$R_1 \subseteq R_2$，则有：
  - $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
  - $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
  - $t(R_1) \subseteq t(R_2)$
- $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

证明： $r(R_1)=R_1 \cup I_A$，$r(R_2)=R_2 \cup I_A$

7.5 关系的闭包

- 定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：
  - 若R是自反的，则s(R),t(R)也自反
  - 若R是对称的，则r(R),t(R)也对称
  - 若R是可传递的，则r(R)也可传递

7.5 关系的闭包

- 定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：
  - 若R是对称的，则t(R)也对称

证明：归纳法证明若R是对称，则R^n也对称

n=1，显然成立

假设R^n对称，对任意$\langle x,y\rangle$

$$\langle x,y\rangle \in R^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle \in R^n \wedge \langle t,y\rangle \in R)$$
$$\Rightarrow \exists t(\langle t,x\rangle \in R^n \wedge \langle y,t\rangle \in R)$$
$$\Rightarrow \langle y,x\rangle \in R \circ R^n \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R^{n+1}$$

7.5 关系的闭包

- 定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：
  - 若R是对称的，则t(R)也对称

证明：$\ldots \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R \circ R^n \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R^{n+1}$

任取$\langle x,y\rangle$，有

$$\langle x,y\rangle \in t(R)$$
$$\Rightarrow \exists n(\langle x,y\rangle \in R^n)$$
$$\Rightarrow \exists n(\langle y,x\rangle \in R^n)$$
$$\Rightarrow \langle y,x\rangle \in t(R)$$

- **若R是传递的，s(R)不一定是传递的**
  - ❖反例：$R=\{\langle a,b\rangle,\langle c,b\rangle\}$，

    R是传递的

    $s(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$

    s(R)不是传递的

第六节：等价关系与划分

7.6 等价关系与划分

- 等价关系：非空集合A上的关系，满足：
  - 自反的
  - 对称的
  - 可传递的
- 例
  - 实数(或I、N集上)集合上的“=”关系
  - 全集上集合的相等关系
  - 命题集合上的命题等价关系

7.6 等价关系与划分

例：设$A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge (x-y)$可被3整除$\}$

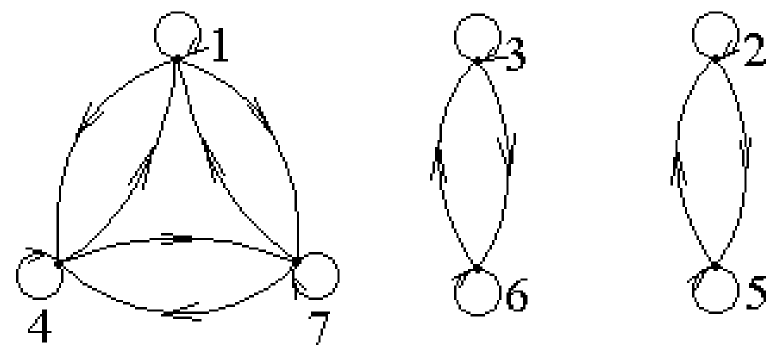
试证明R是等价关系

解：(1)$R=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,1\rangle\}$

(2) R的关系矩阵

$$M_R=\begin{bmatrix}1001001\\0100100\\0010010\\1001001\\0100100\\0010010\\1001001\end{bmatrix}$$

(3) 的关系图



R

- **R**满足自反、对称和可传递的

7.6 等价关系与划分

- **等价类：** 设**R**是非空**A**集合上的等价关系，对于任何**x**∈**A**，令：
  - $[x]_R = \{y \mid y \in A \land xRy\}$
  - $[x]_R$是由$x \in A$生成的**R**等价类
  - x为等价类$[x]_R$的表示元素

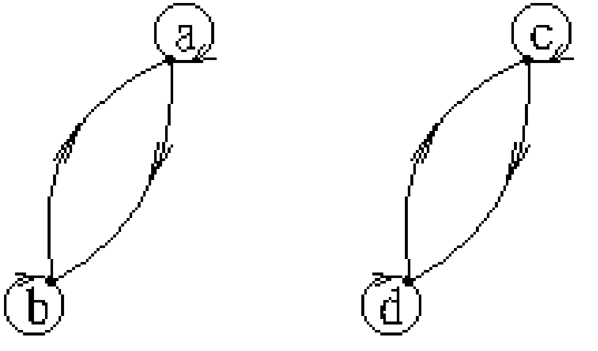
7.6 等价关系与划分

❑讨论

- ❖等价类$[x]_R$是一个集合，$[x]_R \subseteq A$（$[x]_R$是A的子集）
- ❖$[x]_R$中的元素是在A中，所有与x具有等价关系R的元素所组成的集合
- ❖在等价关系中的关系图中，一个最大连通子图中的点就是一个等价类

7.6 等价关系与划分

- 例：
  - A={a,b,c,d}
  - R={<a,a>，<b,b>，<a,b>，<b,a>，<c,c>，<d,d>，<c,d>，<d,c>}
  - $[a]_R$ ={a,b}= $[b]_R$
  - $[c]_R$ ={c,d}= $[d]_R$



7.6 等价关系与划分

- 例：设A=N
  - R={<x,y>|x∈A∧y∈A∧(x-y)可被3整除}
- 等价类
  - $[0]_R$ ={0，3，6，9…}
  - $[1]_R$ ={1，4，7，10…}
  - $[2]_R$={2，5，8，11…}

7.6 等价关系与划分

- 定理 设A是一个集合，R是A上的等价关系，xRy当且仅当$[x]=[y]$
- 证明：
  - 充分性，因为$x\in[x]=[y]$,即$x\in[y]$，所以xRy。
  - 必要性，已知xRy，考虑$[x]$的任意元素z，有zRx。根据R的传递性，有zRy，因此$z\in[y]$。证明$[x]\subseteq[y]$。类似可证明$[y]\subseteq[x]$，所以$[x]=[y]$

7.6 等价关系与划分

- **定理：** 设**A**是一个集合，**R**是**A**上的等价关系，
  - 对于所有$x,y \in A$，或者$[x]=[y]$，或者 $[x]\cap[y]=\varnothing$

证明： 只需证明如果$x \not R y$，则$[x]\cap[y]=\varnothing$

反证法： 假设$[x]\cap[y]\neq\varnothing$，则$\exists z \in [x]\cap[y]$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle \in R \wedge \langle z,y\rangle \in R$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R$ (矛盾!)

7.6 等价关系与划分

- **定理：** 设R是集合A上的等价关系，则

$$A=\cup\{[x] \mid x\in A\}$$

证明： 首先易证$\cup\{[x] \mid x\in A\} \subseteq A$

其次，对任意$y\in A$

$y\in A \Rightarrow y\in[y] \wedge y\in A$

$\Rightarrow y\in\cup\{[x] \mid x\in A\}$

所以：$A \subseteq \cup\{[x] \mid x\in A\}$

7.6 等价关系与划分

- 商集：R是A上的等价关系，
  - R的所有等价类构成的集合
  - 记为A/R：$\{[x]_R \mid x \in A\}$
- 例：A为全班同学的集合，|A|=n，（n∈N）
  - 按指纹的相同关系R_1是一个等价关系
  - $A/R_1=\{[x_1]_{R1},\cdots[x_n]_{R1}\}$
  - 同姓关系R_2是一等价关系
  - A/R_2 ={[张]，[李]，…}

7.6 等价关系与划分

- **划分：** 给定一非空集合A，A的一个划分为非空子集族$S=\{A_1, A_2, \ldots A_m\}$，满足：

① $\varnothing \notin S$

② $\forall A_i \forall A_j (A_i, A_j \in S \land A_i \neq A_j \rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing)$

③ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = A$

7.6 等价关系与划分

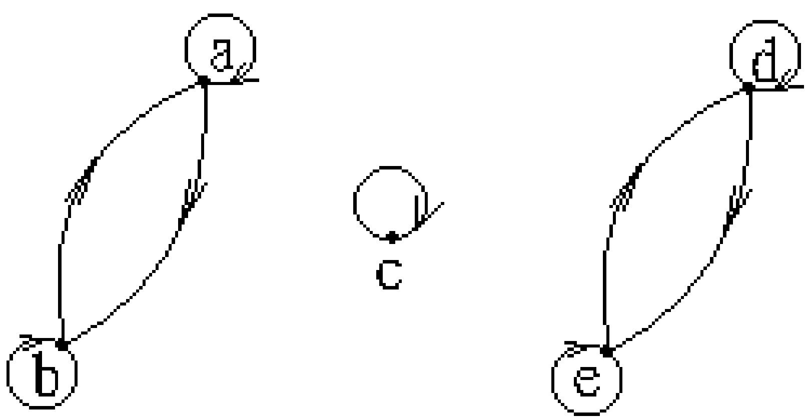
- 例：$A=\{a,b,c\}$,下列哪些A_i为A的一个划分？
  - $A_1=\{\{a\},\{b,c\}\}$
  - $A_2=\{\{a\},\{c\},\{b\}\}$
  - $A_3=\{\{a\},\{a,b,c\}\}$
  - $A_4=\{\{a,b\},\{c\},\varnothing\}$
  - $A_5=\{\{a,\{a\}\},\{b,c\}\}$

7.6 等价关系与划分

- 等价关系与划分有一一对应关系
- 划分到等价关系转化：**A**是一非空集合，**S**是**A**的一个划分，下述关系必定是一个等价关系
  - $R=\{<x,y> \mid x, y\in A \land x,y$在$S$的同一划分$\}$
- 等价关系到划分的转化：设**A**是非空集合，**R**是**A**上的等价关系。**R**的商集是**A**的划分

7.6 等价关系与划分

- 例：A ={a,b,c,d,e}
  - S={{a,b},{c},{d,e}}
    对应划分S的等价关系为
  - R={a,b}×{a,b}∪{c}×{c}∪{d,e}×{d,e}
    ={<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>,<c,c>,<d,d>,<e,e>,<d,e>,<e,d>}



7.6 等价关系与划分

- 例：给出A={1，2，3}上所有的等价关系

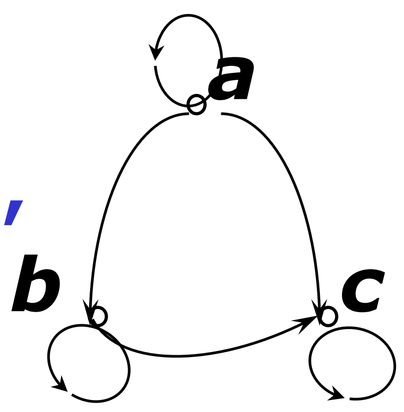
第七节：偏序关系

7.7 偏序关系

- 次序在现实生活中常见：
  - 小于，包含等
- 研究序理论的动机：
  - 研究一般次序关系
  - 推导出一般序关系的性质
  - 这些关系可以应用于所有特定的序关系

7.7 偏序关系

- 偏序关系R (记作≼)
  - 自反性: $\forall a \in A$，有$<a,a>\in R$
  - 反对称性: $\forall a,b \in R$,如果$<a,b>\in R$且$<b,a>\in R$,则必有$a=b$
  - 传递性: $\forall a,b,c \in A$,如果$<a,b>\in R, <b,c>\in R$, 必有$<a,c>\in R$
- 例:偏序关系
  - $A=\{a,b,c\}$
  - $R=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>, <b,c>,<c,c>\}$



7.7 偏序关系

- 例：A是非零自然数集，$\preccurlyeq$是A上的整除关系。
  - $\forall a\in A$, a能整除a
    $\therefore$ $\preccurlyeq$具有自反性
  - $\forall a,b\in A$,如a能整除b,且b能整除a,则$a=b$
    $\therefore$ $\preccurlyeq$具有反对称性
  - $\forall a,b,c\in A$,如a能整除b,b能整除c,则a能整除c,$\langle a,c\rangle\in\ \preccurlyeq$
    $\therefore$ $\preccurlyeq$具有传递性
- $\preccurlyeq$是A上的偏序关系

7.7 偏序关系

- 小于$\prec$：$a\prec b \Leftrightarrow a\preccurlyeq b \wedge a\neq b$
- 可比：a与b可比 $\Leftrightarrow a\preccurlyeq b \vee b\preccurlyeq a$
  - 可比不同于等于
- 例：A={1，2，3}，$\preccurlyeq$是A上的整除关系
  - 1，3可比
- 全序关系R：R是A上的偏序关系, 满足:
  - $\forall a,b\in A$, a与b可比
- 例：实数上的$\leq,\geq$关系是全序关系

回顾

- 等价关系
  - 自反的
  - 对称的
  - 可传递的
- 等价类：设**R**是非空**A**集合上的等价关系，对于任何$x \in A$，令：
  - $[x]_R = \{y \mid y \in A \land xRy\}$
  - $[x]_R$是由$x \in A$生成的**R**等价类
  - x为等价类$[x]_R$的表示元素

回顾

- 商集：R是A上的等价关系，
  - R的所有等价类构成的集合
  - 记为A/R：$\{[x]_R \mid x \in A\}$

回顾

- 偏序关系R ： $a \preccurlyeq b$
  - 自反性，反对称性，传递性
- 小于$\prec$：$a \prec b \Leftrightarrow a \preccurlyeq b \wedge a \neq b$
- 可比：a与b可比 $\Leftrightarrow a \preccurlyeq b \vee b \preccurlyeq a$
- 全序关系：R是A上的偏序关系, 满足：
  - $\forall a,b \in A$, a与b可比

7.7 偏序关系

❑哈斯图

- ❖得名于德国数学家**Helmut Hasse**
- ❖用来表示有限偏序集的一种数学图表
  - 偏序集：<A, ≼>

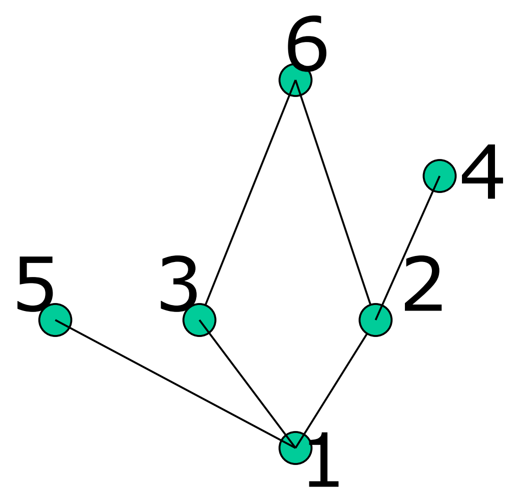
7.7 偏序关系

- 覆盖：<A,≼>，*b*覆盖*a*如果
  - $a \prec b$，不存在$c \in A$，$a \prec c \prec b$
- 哈斯图思路：
  ① 所有结点的自回路均省略
  ② 省略所有弧上的箭头,适当排列A中元素的位置,如$a \preccurlyeq b$,则*a*画在*b*的下方
  ③ 如$a \preccurlyeq b$,$b \preccurlyeq c$,则必有$a \preccurlyeq c$, *a*到*b*有边, *b*到*c*有边,则*a*到*c*的无向弧省略

条件2，3等于说如果b覆盖a,则画一条从a到b的弧线，否则不画

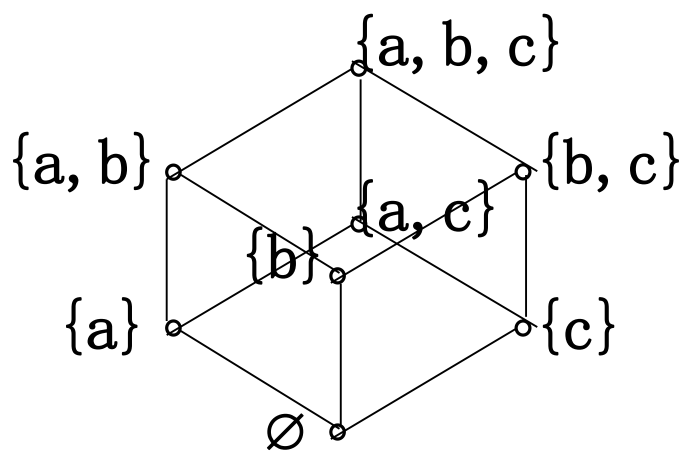
7.7 偏序关系

- 例：画出下列偏序集的哈斯图。
  - $<\{1,2,3,4,5,6\},R_{\text{整除}}>$
  - $R_{\text{整除}}=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<6,6>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>,<2,4>,<2,6>,<3,6>\}$



7.7 偏序关系

- 例：**A={a,b,c},包含关系R是P(A)上的偏序关系,哈斯图如下:**
  - **P(A)={∅,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}**

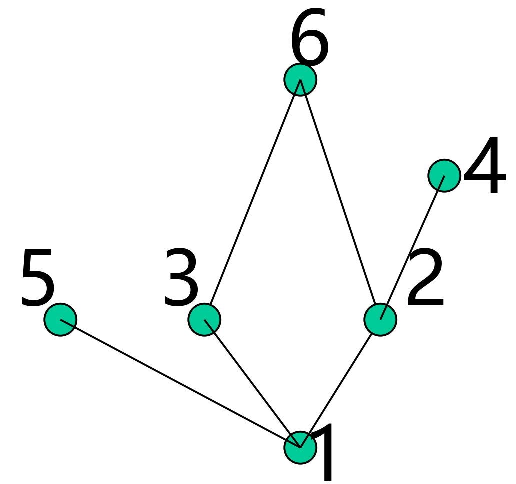


7.7 偏序关系

- **最小(大)元：** 设$<A, \preccurlyeq>$是偏序集,集合$B \subseteq A$
  - 最大元$b \in B$：$\forall a \in B$,均有$a \preccurlyeq b$
  - 最小元$b \in B$：$\forall a \in B$,均有$b \preccurlyeq a$
- 说明
  - 如果A的子集B存在最大(小)元素,则最大(小)元素是唯一的
  - 最大(小)元可能不存在

7.7 偏序关系

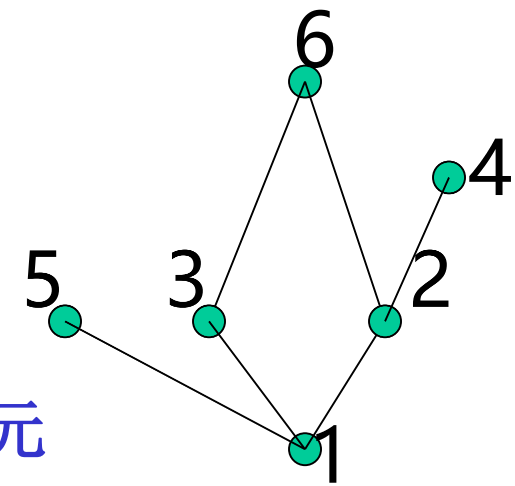
例:A={1,2,3,4,5,6},R是整除关系,哈斯图为



A中不存在最大元

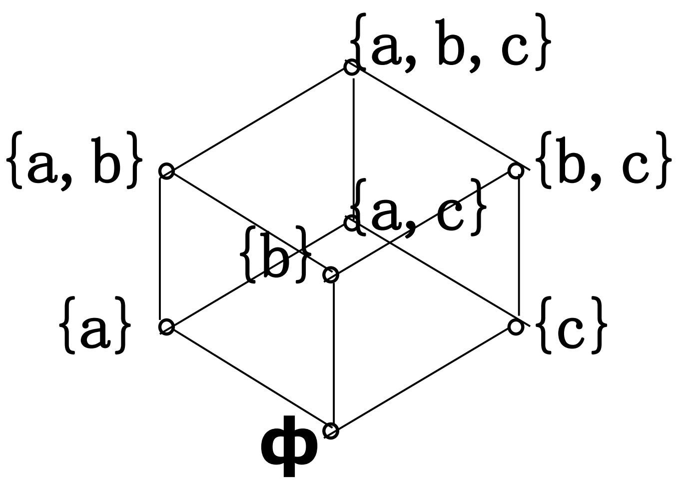
7.7 偏序关系

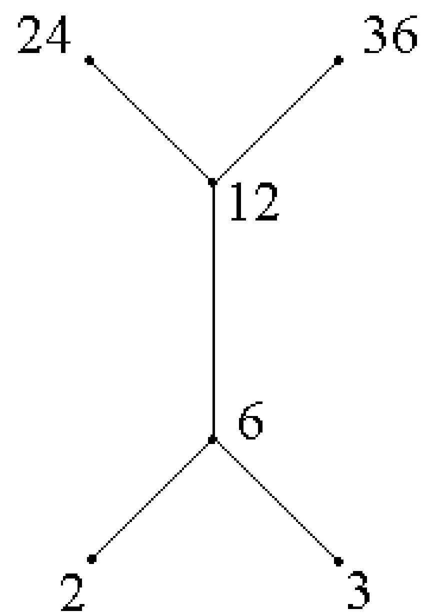
- **极大(小)元**：设$<A, \preccurlyeq>$是偏序集，$B\subseteq A$
  - 极大元$b\in B$：$\forall a\in B$，如$b\preccurlyeq a$，则$a=b$
    - 不存在$a\in B$，$b\prec a$
  - 极小元$b\in B$：$\forall a\in B$，如$a\preccurlyeq b$，则$a=b$
    - 不存在$a\in B$，$a\prec b$
- **说明**
  - 极大元未必是最大元
  - 极大元未必是唯一的
  - 如果B是有限集，则B必存在极大元
  - 最大元就是极大元



7.7 偏序关系

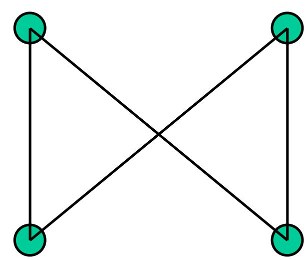
- 例：下列哈斯图表示的偏序集是否有最大(小)元？是否有极大(小)元？





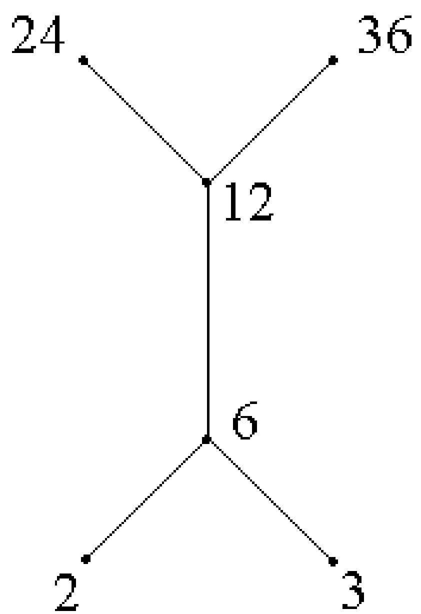
7.7 偏序关系

- **上(下)界**：设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$是偏序集，$B \subseteq A$，$a \in A$
  - **B的上界a**：对每个$b \in B$，有$b \preccurlyeq a$
  - **B的下界a**：对每个$b \in B$，有$a \preccurlyeq b$
- **说明**
  - 上下界不一定唯一



7.7 偏序关系

- 例：<A， $R_{整除}$>, A={2,3,6,12,24,36}
  B:{2,3},{2,3,6},{6,12},{6,12,24,36}



A	上界	下界
B		
{2,3}	6, 12, 24, 36	
{2,3,6}	6, 12, 24, 36	
{6,12}	12, 24, 36	2, 3, 6
{6,12,24,36}		2, 3, 6

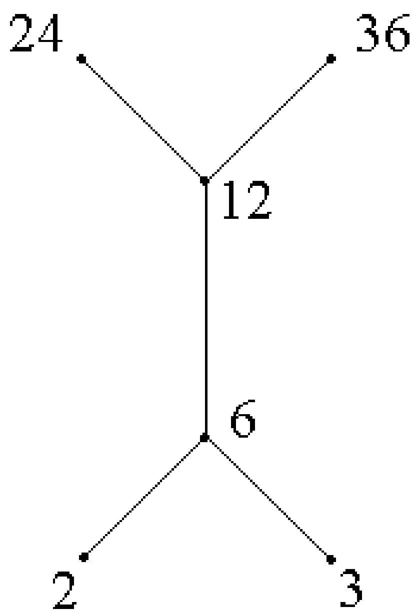
7.7 偏序关系

- 上(下)确界：设<A, ≼>是偏序集, B⊆A
  - 最小上界：C={b|b为B的上界}的最小元
  - 最大下界：D={b|b为B的下界}的最大元
- 说明
  - B的最小元一定是B的下界，同时也是B的最大下界；B的最大元一定是B的上界，同时也是B的最小上界
  - 最小上界或最大下界可能不存在
  - 若存在最小上界或最大下界，是唯一的

7.7 偏序关系

例:〈A, $R_{整除}$〉, A={2,3,6,12,24,36}

B:{2,3},{2,3,6},{6,12},{6,12,24,36}



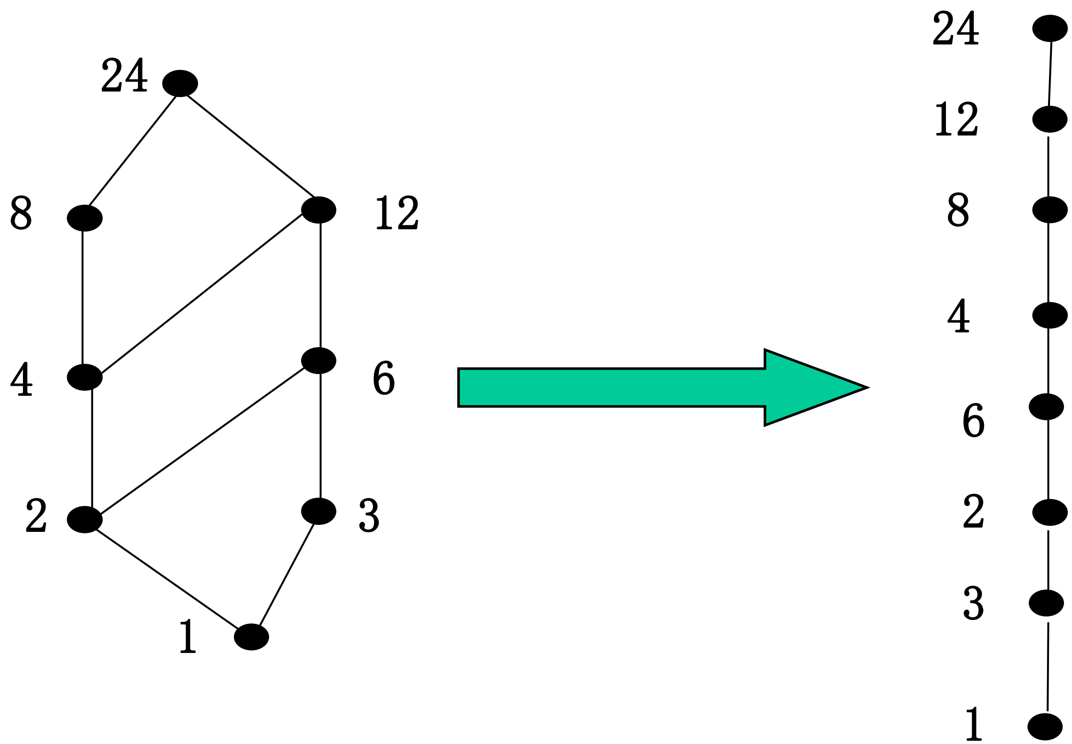
A B	上确界	下确界
{2,3 }	6	
{2,3,6 }	6	
{6,12 }	12	6
{6,12,24,36 }		6

7.7 偏序关系

- **拓扑排序：**给定一个非空有限的偏序集合 $\langle A,\preccurlyeq'\rangle$，构造出一个全序集合 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$，使得每当 $a\preccurlyeq' b$ 有 $a\preccurlyeq b$，方法如下：
  - 选取A的极小元a，使a是 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 列表表示中的第一个元素
  - 对子集A-{a}重复这一过程，每次一个新的极小元素被找到，它在 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 的列表表示中成为下一个元素
  - 重复这一过程，直到A的元素被抽完

7.7 偏序关系

- 例：求下列偏序集对应的全序集



第七章 习题课

- 有序对：
  - 由两个元素x，y按给定顺序排列组成的二元组合
- 笛卡儿积：
  - 集合A中元素为第一元素，集合B中元素为第二元素的有序对集
- 二元关系R：
  - 满足下列条件之一的集合：
    - 集合非空，且它的元素都是有序对
    - 集合为空集
- 从A到B的关系：
  - A，B是集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系
- A上的关系：
  - $A=B$
- 空关系，全域关系，恒等关系，包含关系
- 关系的表示法：
  - 集合表达式、关系矩阵、关系图

第七章　习题课

- 关系的八种运算：

◆定义域：$domR = \{x \mid \exists y(<x,y> \in R)\}$

◆值域：$ranR = \{y \mid \exists x(<x,y> \in R)\}$

◆域：$fldR = domR \cup ranR$

◆逆：$R^{-1} = \{<x,y> \mid <y,x> \in R\}$

◆右复合：$F \circ G = \{<x,y> \mid \exists t(<x,t> \in F \wedge <t,y> \in G)\}$

◆限制：$R \upharpoonright A = \{<x,y> \mid xRy \wedge x \in A\}$

◆像：$R[A] = ran(R \upharpoonright A)$

◆幂：

❖ $R^0 = I_A$；　$R^{n+1} = R^n \circ R$

第七章　习题课

● 关系运算的五种性质：

◆自　反：　$\forall x(x \in X \rightarrow xRx)$

◆反自反：　$\forall x(x \in X \rightarrow x \not R x)$

◆对　称：

$$\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \rightarrow yRx)$$

◆反对称：

$$\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$$

◆传　递：

$$\forall x \forall y \forall z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

- 关系的三种闭包：

◆自反闭包：

$$r(R)=R\cup I_A$$

◆对称闭包：

$$s(R)=R\cup R^{-1}$$

◆传递闭包：

$$t(R)= R^1\cup R^2\cup\ldots$$

- *A*上的等价关系：
  - ❖ 自反的；对称的；可传递的
- 等价类：
  - ❖ $[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$
- 商集：
  - ❖ R的所有等价类构成的集合，
  - ❖ 记为A/R：$\{[x]_R \mid x \in A\}$
- 划分：

  A的非空子集族$S=\{A_1, A_2, \ldots A_m\}$，满足：
  - ❖ $\varnothing \notin S$
  - ❖ $\forall A_i \forall A_j (A_i, A_j \in S \wedge A_i \neq A_j \rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing)$
  - ❖ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = A$
- *A*上的偏序关系与偏序集

基本要求

- 熟练掌握关系的三种表示法
- 能够判定关系的性质，以及等价关系、偏序关系
- 掌握含有关系运算的集合等式
- 掌握等价关系、等价类、商集、划分、哈斯图、偏序集等概念
- 计算$A\times B$, dom R, ran$R$, fld$R$, R^{-1}, $R\circ S$, R^n , $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$
- 求等价类和商集A/R
- 给定A的划分π，求出π所对应的等价关系
- 求偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、上确界、下确界
- 掌握基本的证明方法
  - 证明涉及关系运算的集合等式
  - 证明关系的性质、证明关系是等价关系或偏序关系

练习1

1．设$A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{<x,y> \mid x, y \in A$且$x+2y \le 6\}$，

$S = \{<1,2>, <1,3>,<2,2>\}$,

求:

(1) R的集合表达式

(2) R^{-1}

(3) dom R, ran R, fld R

(4) $R \circ S$, R^3

(5) $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$

解答

(1) $R = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>\}$

(2) $R^{-1} = \{<1,1>, <2,1>, <1,2>, <2,2>, <1,3>\}$

(3) $\mathrm{dom}R = \{1, 2, 3\}$, $\mathrm{ran}R = \{1,2\}$, $\mathrm{fld}R = \{1, 2, 3\}$

(4) $R\circ S = \{<1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

$R^3 = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>\}$

(5) $r(R) = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,3>\}$

$s(R) = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>, <2,2>, <3,1>, <1,3>\}$

$t(R) = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>\}$

练习2

2．设$A=\{1,2,3,4\}$，在$A\times A$上定义二元关系R：

$$\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle\in R \Leftrightarrow x+y=u+v,$$

求R导出的划分.

$$\begin{aligned}A\times A=\{&\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle,\\ &\langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle,\\ &\langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}\end{aligned}$$

根据 $\langle x,y\rangle$ 中的 $x+y=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 将A划分成等价类：

$$\begin{aligned}A/R=\{&\{\langle 1,1\rangle\}, \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}, \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle\},\\ &\{\langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle\},\\ &\{\langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle\},\\ &\{\langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle\}, \{\langle 4,4\rangle\}\}\end{aligned}$$

练习3

3．设R是Z上的模 n 等价关系, 即

$$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y (\bmod n),$$

试给出由R确定的Z的划分π.

解　设除以 n 余数为 r 的整数构成等价类 $[r]$，则

$$[r] = \{ kn+r \mid k \in \mathrm{Z} \},\ \ r = 0, 1, \ldots, n-1$$

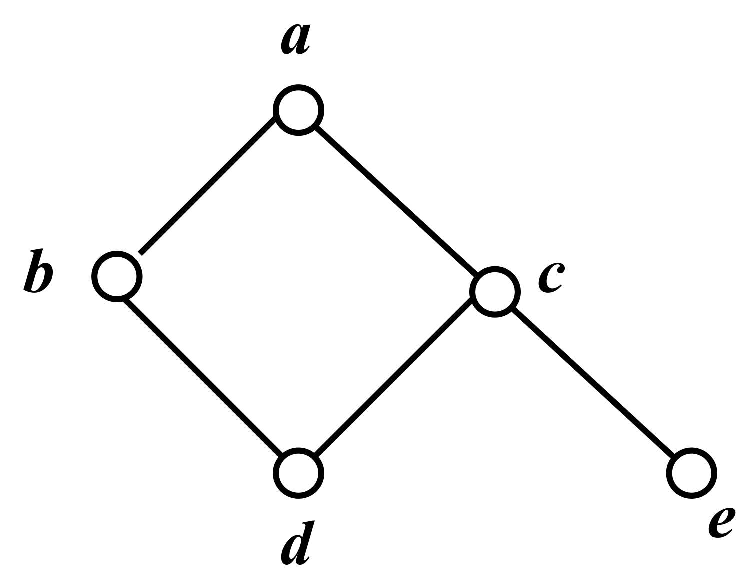
$$\pi = \{ [r] \mid r = 0, 1, \ldots, n-1 \}$$

练习4

4．设偏序集 $<A, R>$ 的哈斯图如图所示.

(1) 写出A和R的集合表达式

(2) 求该偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元



解：

(1) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{<d,b>, <d,a>, <d,c>, <e,c>, <e,a>, <b,a>, <c,a>\} \cup I_A$

(2) 极大元和最大元是a，

极小元是d, e；

没有最小元.

练习5

5．设R是A上的二元关系， 设

$$S = \{<a,b> \mid \exists c(<a,c>\in R \wedge <c,b>\in R)\}.$$

证明如果R是等价关系，则S也是等价关系。

证： R是A上的等价关系.

(1) 证自反　任取x,

$$x\in A \Rightarrow <x,x>\in R \Rightarrow \exists x\,(<x,x>\in R \wedge <x,x>\in R) \Rightarrow <x,x>\in S$$

(2) 证对称　任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in S \Rightarrow \exists c(<x,c>\in R \wedge <c,y>\in R)$$

$$\Rightarrow \exists c\,(<c,x>\in R \wedge <y,c>\in R) \Rightarrow <y,x>\in S$$

(3) 证传递　任取$<x,y>$, $<y,z>$,

$$<x,y>\in S \wedge <y,z>\in S$$

$$\Rightarrow \exists c\,(<x,c>\in R \wedge <c,y>\in R) \wedge \exists d\,(<y,d>\in R \wedge <d,z>\in R)$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R \wedge <y,z>\in R \Rightarrow <x,z>\in S$$

练习6

6. 设偏序集$<A,R>$和$<B,S>$，定义$A\times B$上二元关系T:

$$<x,y>T<u,v> \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明T为偏序关系.

证：(1) 自反性 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in A\times B \Rightarrow x\in A\wedge y\in B \Rightarrow xRx\wedge ySy \Rightarrow <x,y>T<x,y>$$

(2) 反对称性 任取$<x,y>,<u,v>$

$$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<x,y> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v$$

$$\Rightarrow <x,y>=<u,v>$$

(3) 传递性 任取$<x,y>,<u,v>, <w,t>$

$$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<w,t> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt$$

$$\Rightarrow <x,y>T<w,t>$$

关系性质的证明方法

1. 证明R在A上自反

任取x,

$x \in A \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,x \rangle \in R$

前提 推理过程 结论

2. 证明R在A上对称

任取$\langle x,y \rangle$,

$\langle x,y \rangle \in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle y,x \rangle \in R$

前提 推理过程 结论

关系性质的证明方法

3. 证明R在A上反对称

任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in R\wedge<y,x>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow x=y$$

前提　　　　推理过程　　　　结论

4. 证明R在A上传递

任取$<x,y>,<y,z>$,

$$<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <x,z>\in R$$

前提　　　　推理过程　　　　结论

练习7

7．R,S为A上的关系，证明 $R \subseteq S \Rightarrow t(R) \subseteq t(S)$

证：只需证明对于任意正整数n, $R^n \subseteq S^n$. 对n归纳.

n=1, 显然为真.

假设对于n，命题为真，任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y> \in R^{n+1} \\
\Rightarrow\ & <x,y> \in R^n \circ R \\
\Rightarrow\ & \exists t\,(<x,t> \in R^n \wedge <t,y> \in R) \\
\Rightarrow\ & \exists t\,(<x,t> \in S^n \wedge <t,y> \in S) \\
\Rightarrow\ & <x,y> \in S^n \circ S \\
\Rightarrow\ & <x,y> \in S^{n+1}
\end{aligned}
$$

关系等式或包含式的证明方法

数学归纳法（主要用于幂运算）

证明中用到关系运算的定义和公式, 如:

$$x \in \mathrm{dom}R \Leftrightarrow \exists y(<x,y> \in R)$$

$$y \in \mathrm{ran}R \Leftrightarrow \exists x(<x,y> \in R)$$

$$<x,y> \in R \Leftrightarrow <y,x> \in R^{-1}$$

$$<x,y> \in R \circ S \Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in R \wedge <t,y> \in S)$$

$$<x,y> \in R \upharpoonright A \Leftrightarrow x \in A \wedge <x,y> \in R$$

$$y \in R[A] \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge <x,y> \in R)$$

$$r(R) = R \cup I_A$$

$$s(R) = R \cup R^{-1}$$

$$t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots$$

作业

- 4
- 13
- 15
- 20
- 25
- 26
- 36
- 41
- 46