第四章:一阶逻辑基本概念

- 本章的主要内容
  - 一阶逻辑命题符号化
  - 一阶逻辑公式、解释及分类
- 本章与其他章的联系
  - 克服命题逻辑的局限性
  - 是第五章的先行准备

第一节：一阶逻辑命题符号化

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 例子
  - 凡是人都要死 $p \to q$
  - 苏格拉底是人 r
  - 推出：~~苏格拉底要死~~?

命题之间的联系无法刻画

- 命题逻辑的表示能力缺陷
  - 命题演算的基本单元为简单命题
  - 不能研究命题的结构、成分和内部逻辑的特征
  - 不能表达二个原子命题所具有的共同特征，无法处理一些简单又常见的推理

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 一阶逻辑
  - 对命题做进一步分解
  - 揭示命题的内部结构以及命题间的内在联系
- 命题分解
  - 个体词（名词、代词）
  - 谓词
  - 量词
- 例：
  - 南京是城市
  - 个体词：南京
  - 谓词：是城市

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 个体词（**Individual Term**）：研究对象中独立存在的具体或抽象的个体
  - 个体常项：具体或特定的个体词
    - 南京，东南大学，**1**，**2**
  - 个体变项：抽象或泛指的个体词
    - ***x,y,z***
    - 取值范围称为个体域或论域
  - 空集不能作为论域
  - *全总个体域*：宇宙间一切事物

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 谓词（Predicate）：刻画个体词性质及个体词之间的关系的词
  - 谓词常项：具体性质或关系的谓词
    - $F(a,b)$：小王和小李是同学
    - $G(x)$：x是有理数
  - 谓词变项：抽象或泛指的性质或关系的谓词
    - $L(x,y)$：x,y具有关系L
- n元谓词$P(x_1,\ldots,x_n)$
  - $P(x_1,\ldots,x_n)$: $D^n\rightarrow\{F,T\}$，D为个体域
  - 不带个体变项的谓词为0元谓词。当为谓词常项时，0元谓词即命题

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 例:将下列命题用0元谓词符号化
  - 2既是素数又是偶数
    - F(x)：x是素数
    - G(x)：x是偶数
    - a:2
    - F(a) ∧ G(a)
- 例:将下列命题用0元谓词符号化
  - 如果3>5，则2>3
    - F(x,y):x>y
    - a:3, b:5, c:2
    - F(a,b)→F(c,a)

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 量词（Quantifier）：表示个体常项或变项之间数量关系的词
- 全称量词∀（Universal Quantifier）： ∀***x***表示个体域里的所有个体***x***
  - 对应日常语言中的“一切的”、“所有的”等
  - 一元谓词**F(*x*)**个体域为**D**， **∀*x*F(*x*)**真值
    - **∀*x*F(*x*)**为真：**F(*a*)**为真，对所有***a***∈**D**
    - **∀xF(*x*)**为假：**F(*a*)**为假，对某个***a***∈**D**
  - **∀*x*∀*y*G(*x*,*y*)**：个体域里所有个体***x*,*y***有关系**G**
    - **∀*x*∀*y*G(*x*,*y*)**为真：**G(*a*,*b*)**为真，对所有***a*,*b***∈**D**
    - **∀x∀*y*G(*x*,*y*)**为假：**G(a,b)**为假，对某对***a*,*b***∈**D**

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 存在量词∃（Existential Quantifier）： ∃x表示个体域里有一个个体x
  - 对应日常语言中的“存在”、“有一个”等
  - 一元谓词F(*x*)个体域为D， ∃*x*F(*x*)真值
    - ∃*x*F(*x*)为真：F(*a*)为真，存在某个*a*∈D
    - ∃*x*F(*x*)为假：F(*a*)为假，对任意*a*∈D
  - ∃*x*∃*y*G(*x*,*y*)：个体域里存在个体*x*,*y*有关系G
- 全称量词与存在量词联合
  - ∀*x*∃*y*G(*x*,*y*)：

    个体域里任意x,存在个体*y*, *x*, *y*有关系G
  - ∃*x*∀*y*G(*x*,*y*)：

    个体域里存在x和所有个体*y*都有关系G

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 讨论：$\forall x F(x)$, $\exists x F(x)$, $F(x)$的联系、区别
  - $F(x)$是不能确定真值的谓词
  - $\forall x F(x)$, $\exists x F(x)$都是命题
  - x称为约束变元

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 例：将下列命题符号化
  - 凡是人都呼吸 （个体域为人类集合）
    - $F(x)$: x呼吸
    - $\forall x F(x)$
  - 有的人用左手写字（个体域为人类集合）
    - $G(x)$: x用左手写字
    - $\exists x G(x)$
  - 凡是人都呼吸（个体域为全总个体域）
    - $F(x)$: x呼吸, $M(x)$: x是人
    - $\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$
  - 有的人用左手写字（个体域为全总个体域）
    - $G(x)$: x用左手写字, $M(x)$: x是人
    - $\exists x(M(x)\wedge G(x))$

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 例：将下列命题符号化并判断真假值
  - 所有有理数都是整数 （个体域为有理数集合）
    - F(x): x是整数
    - $\forall x F(x)$
  - 所有有理数都是整数 （个体域为实数集合）
    - F(x): x是整数, Q(x): x是有理数
    - $\forall x\,(Q(x)\rightarrow F(x))$

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 例：将下列命题符号化并判断真假值
  - 任意x，$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ （个体域为自然数集合）
    - $F(x)$: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$
    - $\forall xF(x)$
  - 存在x, $x+5=3$ （个体域为自然数集合）
    - $G(x)$: $x+5=3$
    - $\exists xG(x)$
  - 任意x，$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ （个体域为实数集合）
  - 存在x, $x+5=3$ （个体域为实数集合）

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 谓词逻辑符号化几点说明
  - 不同的个体域，符号化形式可能不一样，命题真值也可能不同
  - 一般默认是全总个体域，即包含一切个体
  - 特性谓词：描述个体变元取值范围的谓词
    - 全称量化中，特性谓词常作为蕴涵式的前件
    - $\forall x\ (M(x)\rightarrow F(x))$
    - 存在量化中，特性谓词常作为合取项之一
    - $\exists x\ (M(x)\wedge G(x))$

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 例：将下列命题符号化
  - 凡是学生都需要学习和考试
  - 在北京工作的人未必是北京人
  - 没有人登上过木星

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 例：将下列命题符号化
  - 凡是学生都需要学习和考试
    - F(x): x是学生；G(x)：x学习；H(x)：x考试
    - $\forall x(F(x) \rightarrow G(x) \wedge H(x))$
  - 在北京工作的人未必是北京人
    - F(x): x在北京工作；G(x)：x是北京人
    - $\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$
    - $\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$
  - 没有人登上过木星
    - M(x): x是人； H(x)：x登上过木星
    - $\neg \exists x(M(x) \wedge H(x))$

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 例：将下列命题符号化
  - 不存在跑得同样快的两只兔子
  - 有的兔子比所有的乌龟跑得快
  - 尽管有些人聪明，未必所有人都聪明

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 例：将下列命题符号化
  - 不存在跑得同样快的两只兔子
    - F(x)：x是兔子，L(x,y): x和y跑得同样快
    - $\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge F(y)\wedge L(x,y))$
  - 有的兔子比所有的乌龟跑得快
    - F(x)：x是兔子， G(y)：y是乌龟， H(x,y): x比y跑得快
    - $\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$
  - 尽管有些人聪明，未必所有人都聪明
    - F(x): x是人；G(x)：x聪明
    - $\exists x(F(x)\wedge G(x))\wedge\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$
    - $\exists x(F(x)\wedge G(x))\wedge\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

4.1 一阶逻辑命题符号化

注意事项

- 根据命题的实际意义选取全称量词或存在量词
- 多个量词同时出现时，不能随意颠倒顺序
  - 符号化：对任意的x，存在着y，使得x+y=5
  - 给定实数域
  - $F(x,y)$：$x+y=5$
  - $\forall x\exists yF(x,y)$　　　　T
  - 不同于$\exists y\forall xF(x,y)$　　F

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 例子
  - 凡是人都要死
  - 苏格拉底是人
  - 推出：苏格拉底要死？

$F(x)$: x是人；$G(x)$: x要死

a: 苏格拉底

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \wedge F(a) \rightarrow G(a)$$

第二节：一阶逻辑公式及其解释

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 一阶谓词语言$\mathscr{L}$（ First-order Predicate Language ）的字母表（ Alphabet）
  - 非逻辑符号
    - 个体常项符号：*a, b, c, …*
    - 函数符号：*f, g, h, …*
    - 谓词符号：F, G, H, …
  - 逻辑符号
    - 个体变项符号：*x, y, z, …*
    - 量词符号：$\forall$，$\exists$
    - 联结词符号：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$
    - 括号与逗号：(，)，，
- 函数符号不同于谓词符号

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 一阶谓词语言$\mathcal{L}$的项（Term）：
  - ① 个体常项符号和个体变项符号是项
  - ② 若$f(x_1,\ldots,x_n)$是n元函数符号，$t_1,\ldots,t_n$是n个项，则$f(t_1,\ldots,t_n)$是项
  - ③ 有限次使用①，②生成的符号串才是项
- 例：下列符号串是否为项？
  - a, b
  - x, y
  - $f(x,y)$：$x+y$; $f(a,y)$: $a-y$
  - $f(f(a,b),b)$：$f(a,b)+b$

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 一阶谓词语言$\mathcal{L}$的原子公式（Atomic Formula）：
  - $F(x_1,\ldots,x_n)$为n元谓词符号
  - $t_1,\ldots,t_n$为n个项
  - $F(t_1,\ldots,t_n)$为$\mathcal{L}$的原子公式
- 例：下列符号串为原子公式
  - $F(a, b)$
  - $F(x, y)$
  - $F(f(x,y),a)$

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 一阶谓词语言$\mathscr{L}$的合式公式（谓词公式）（**Predicate Formula** ）：

1. 原子公式是合式公式
2. A为合式公式，则$\neg A$是合式公式
3. A，B为合式公式,则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$ 为合式公式
4. 如A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式
5. 只有有限次应用**1-4**构成的符号串才是合式公式

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 例子
  - $F(a, b)$
  - $F(a, b) \to G(x,y)$
  - $F(a, b) \to \forall x G(x,y)$
  - $\forall x(F(a, b) \to G(x,y))$
  - $(\exists y)(\forall x)(\forall G(x,y))$

4.2一阶逻辑公式及其解释

个体词 $\xrightarrow{\text{函数}}$ 项 $\xrightarrow{\text{谓词}}$

原子公式 $\xrightarrow{\text{联结词和量词}}$ 合式公式

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 辖域（Scope）：紧接在量词后面括号内的合式公式
  - $\forall x\ P(x)$，$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$
  - $\forall x\ M(x) \rightarrow D(x)$
- 自由变元与指导变元
  - 指导变元（Guide Variable）：出现在量词$\forall x$, $\exists x$辖域内的变元x
  - $\forall x\ M(x) \rightarrow D(x)$
  - 自由变元（Free Variable）：非约束出现的变元
  - $\forall x\ M(x) \rightarrow D(x)$
- 闭式（封闭公式）（Closed Formula）：不含自由出现的个体变项的公式

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 例：指出下列公式中的指导变元，各量词的辖域，自由出现和约束出现的个体变项
  - $F(a, b)\rightarrow\forall xG(x,y)$
  - $\forall x(F(a, b)\rightarrow G(x,y))$
  - $\forall xF(a, x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(z))$

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 如何赋予合式公式含义?
  - 定义域
  - 函数变项需要指定具体函数
  - 谓词变项需要指定具体谓词

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 例：$\forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \rightarrow G(f(x,y), g(x,y)))$
  - 定义域：全总个体域
  - 函数变项需要指定具体函数
    - f(x,y)：x+y
    - g(x,y)：xy
  - 谓词变项需要指定具体谓词
    - F(x)：x是实数
    - G(x,y)：x=y

任意x, y，如果x, y是实数，则x+y=xy

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 解释（Explanation）：非逻辑符号集***L***生成的一阶语言$\mathscr{L}$，$\mathscr{L}$的解释**I**由4部分组成
  - a) 非空个体域D_I
  - b) I将任意一个个体常项符号$a \in L$映射到D_I上的个体a^*
  - c) I将任意一个n元函数$f \in L$映射到D_I上的n元函数$f^*: (D_I)^n \to D_I$
  - d) I将任意一个n元谓词$F \in L$映射到D_I上的n元关系R_F

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 公式**A**在**I**下的解释A_I：
  a) 取个体域D_I
  b) A中个体常项符号$a \in L$替换为D_I上的个体a^*
  c) A中的n元函数$f \in L$替换为D_I上的n元函数f^*: $(D_I)^n \to D_I$
  d) A中n元谓词$F \in L$替换为D_I上的n元关系R_F

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 给定解释I
  - 个体域为自然数集N
  - $a^* = 2$
  - $f^* = x+y$, $g^* = xy$
  - F^*：$x=y$
- 给出下列公式在I下的解释，讨论真假值
  - $\forall x\, F(g(x, y), z)$
  - $\forall x\, (F(g(x, a), a) \rightarrow F(x, f(x,a)))$
  - $\forall x\, F(g(x, a),x) \rightarrow F(x,y)$

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 给定解释I
  - 个体域为自然数集N
  - $a^* = 2$
  - $f^* = x+y, g^* = xy$
  - F^*：$x=y$
- 给出下列公式在I下的解释，讨论真假值
  - $\forall x\, F(g(x, y), z)$
    $\Leftrightarrow \forall x\, (xy=z)$
  - $\forall x\, (F(g(x, a), a) \rightarrow F(x, f(x,a)))$
    $\Leftrightarrow \forall x\, ((2x=2) \rightarrow (x=x+2))$
  - $\forall x\, F(g(x, a),x) \rightarrow F(x,y)$
    $\Leftrightarrow \forall x\, (2x=x) \rightarrow x=y$

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 合式公式分类：公式*A*
  - 重言式(永真式)（Tautology）：*A*在任意的解释下为真
  - 矛盾式(永假式)（Contradiction）：*A*在任意的解释下为假
  - 可满足式（Satisfiable）：*A*在某个解释下为真

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 代换实例（Substitution Instance）
  - 给定命题公式A_0，含命题变项$p_1,\ldots,p_n$
  - $A_1,\ldots,A_n$是n个谓词公式
  - A称为A_0的代换实例, 如果
    - A通过用A_i代替A_0中的p_i得到

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 定理：重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是永假式

  证明思路：给定重言式A_0，对于命题变项$p_1,\ldots,p_n$的任意赋值，A_0都为真

- 例：已知$p\to(q\to p)$为重言式，那么

  $F(x)\to(G(x)\to F(x))$是否是重言式？

  $\forall x(F(x)\to(G(x)\to F(x)))$呢？

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 例：判断下列公式类型
  - $\forall x\, F(x) \rightarrow \exists x\, F(x)$
  - $\exists x\, (F(x) \wedge G(x))$
  - $\neg (\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)) \wedge \exists y G(y)$

4.2一阶逻辑公式及其解释

- 例：判断下列公式类型
  - $\forall x\, F(x) \rightarrow \exists x\, F(x)$ 永真式
    - 对任意解释I，如果I使得$\forall x\, F(x)$为真，对任意$x \in D_I$，$F(x)$为真，I必使得$\exists x\, F(x)$为真
  - $\exists x\, (F(x) \wedge G(x))$ 可满足式
    - 解释I：D_I为实数集R
    - F(x): x是整数；G(x): x是有理数
  - $\neg(\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)) \wedge \exists y G(y)$ 矛盾式
    - 是 $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$ 的代换实例

第四章 习题课

- 主要内容
- 个体词、谓词、量词
- 一阶逻辑命题符号化
- 一阶语言$\mathscr{L}$

  项、原子公式、合式公式
- 公式的解释

  量词的辖域、指导变元、个体变项的自由出现与约束出现、闭式、解释
- 公式的类型

  永真式(逻辑有效式)、矛盾式(永假式)、可满足式

基本要求

- 准确地将给定命题符号化
- 理解一阶语言的概念
- 深刻理解一阶语言的解释
- 熟练地给出公式的解释
- 深刻理解永真式、矛盾式、可满足式的概念, 会判断简单公式的类型

练习1

1. 在分别取个体域为

(a) D_1=N

(b) D_2=R

(c) D_3为全总个体域

的条件下, 将下面命题符号化，并讨论真值:

对于任意的数x，均有 $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

解 设$G(x)$: $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

(a) $\forall x G(x)$ 假

(b) $\forall x G(x)$ 真

(c) 又设$F(x)$:x是实数

$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 真

练习2

2. 在一阶逻辑中将下列命题符号化

(1) 大熊猫都可爱

(2) 有人爱发脾气

(3) 说所有人都爱吃面包是不对的

(4) 没有不爱吃糖的人

(5) 任何两个不同的人都不一样高

(6) 不是所有的汽车都比所有的火车快

练习2

2. 在一阶逻辑中将下列命题符号化

(1) 大熊猫都可爱

设$F(x)$: x为大熊猫，$G(x)$: x可爱

$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(2) 有人爱发脾气

设$F(x)$: x是人，$G(x)$: x爱发脾气

$\exists x(F(x)\wedge G(x))$

(3) 说所有人都爱吃面包是不对的

设$F(x)$: x是人，$G(x)$: x爱吃面包

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 或 $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

练习2

(4) 没有不爱吃糖的人

设$F(x)$: x是人， $G(x)$: x爱吃糖

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 或 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(5) 任何两个不同的人都不一样高

设$F(x)$:x是人, $H(x,y)$: x与y相同, $L(x,y)$: x与y一样高

$\forall x\forall y((F(x)\wedge F(y)\wedge\neg H(x,y))\rightarrow\neg L(x,y))$

(6) 不是所有的汽车都比所有的火车快

设$F(x)$:x是汽车, $G(y)$:y是火车, $H(x,y)$:x比y快

$\neg\forall x\forall y((F(x)\wedge G(y))\rightarrow H(x,y))$

或 $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

综合习题

- 将下列命题符号化

1. 所有计算机系的学生都要选修一门数学课程
2. 没有整数能大于所有整数
3. 有位教师从未被学生问过问题
4. 有的人喜欢所有的花
5. 对于任意给定的正实数，都存在比它大的实数

练习3

3. 给定解释 I 如下:

(a) 个体域D=N

(b) $\bar{a}=2$

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y,\quad \bar{g}(x,y)=x\cdot y$

(d) $\bar{F}(x,y): x=y$

说明下列公式在 I 下的涵义,并讨论真值

(1) $\forall xF(g(x,a),x)$

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,a),y)\rightarrow F(f(y,a),x))$

(3) $\forall x\forall y\exists zF(f(x,y),z)$

(4) $\exists x\forall y\forall zF(f(y,z),x)$

(5) $\exists xF(f(x,x),g(x,x))$

练习3

3. 给定解释 I 如下:

(a) 个体域D=N

(b) $\bar{a}=2$

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y,\quad \bar{g}(x,y)=x\cdot y$

(d) $\bar{F}(x,y): x=y$

说明下列公式在 I 下的涵义,并讨论真值

(1) $\forall xF(g(x,a),x)$

$\forall x(2x=x)$ 假

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,a),y)\rightarrow F(f(y,a),x))$

$\forall x\forall y(x+2=y\rightarrow y+2=x)$ 假

练习3

(3) $\forall x \forall y \exists z F(f(x,y),z)$

$\forall x \forall y \exists z(x+y=z)$　　真

(4) $\exists x \forall y \forall z F(f(y,z),x)$

$\exists x \forall y \forall z(y+z=x)$　　假

(3),(4)说明$\forall$与$\exists$不能随意交换

(5) $\exists x F(f(x,x),g(x,x))$

$\exists x(x+x=x \cdot x)$　　真

练习4

4. 证明下面公式既不是永真式，也不是矛盾式:

(1) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$

(2) $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

练习4

4. 证明下面公式既不是永真式，也不是矛盾式:

(1) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$

解释1: D_1=N，$F(x)$:x是偶数，$G(x)$: x是素数，　　真

解释2: D_2=N，$F(x)$:x是偶数，$G(x)$: x是奇数，　　假

(2) $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

解释1: D_1=Z，$F(x)$:x是正数，$G(x)$: x是负数，　$H(x,y)$:$x>y$

真

解释2: D_2=Z，$F(x)$:x是偶数，$G(x)$: x是奇数，

$H(x,y)$:$x>y$

假

练习5

5. 证明下列公式为永真式:

(1) $(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)$

(2) $\forall x(F(x)\rightarrow(F(x)\vee G(x)))$

练习5

5. 证明下列公式为永真式:

(1) $(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)$

$(A\rightarrow B)\wedge A\rightarrow B$的代换实例

(2) $\forall x(F(x)\rightarrow(F(x)\vee G(x)))$

设I是任意的一个解释, 对每一个$x\in D_I$,

$F(x)\rightarrow(F(x)\vee G(x))$恒为真

作业

- 1
- 4
- 5
- 8
- 10
- 11