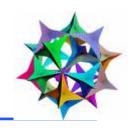
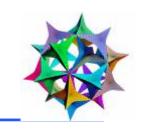


# 第五章: 等值演算与推理



- □本章的主要内容
- 一阶逻辑等值式与基本的等值式
- 置换规则、换名规则、代替规则
- ●前東范式
- 一阶逻辑推理理论
- □本章与其他各章的关系
- 本章的先行基础是前四章
- 本章是集合论各章的先行基础

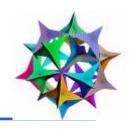






第一节: 等值式与置换规则





□等值式(Equivalence):公式*A,B*的等价式*A↔B*为永真式

**❖**符号: *A*⇔*B*, 也称*A*逻辑恒等于*B* 





- □第一类等值式: 命题逻辑的重言式的代 换实例
  - ❖理由: 重言式的代换实例都是永真式
- □例





#### □ 第二类等值式:

1. 消去量词等值式

给定<u>有限</u>个体域 **D**={**a**1,**a**2,...,**a**n}

 $\forall x \ A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \land A(a_2) \land \dots \land A(a_n)$ 

 $\exists x \ A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \lor A(a_2) \lor ... \lor A(a_n)$ 

2. 量词否定等值式

x在公式A(x)中自由出现

 $\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$ 

 $\neg \exists x \ A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$ 





- 回例:设个体域为 $D=\{a,b,c\}$ ,将下面公式的量词消去
  - 1.  $\forall x \ \mathsf{F}(x) \lor \exists y \ \mathsf{G}(y)$ 
    - $\Leftrightarrow$  (F(a)  $\wedge$  F(b)  $\wedge$  F(c))  $\vee$  (G(a)  $\vee$  G(b)  $\vee$  G(c))
  - 2.  $\neg(\forall x \ \mathsf{F}(x) \lor \exists y \ \mathsf{G}(y))$ 
    - $\Leftrightarrow \exists x \neg \mathsf{F}(x) \land \forall y \neg \mathsf{G}(y)$
    - $\Leftrightarrow (\neg F(a) \lor \neg F(b) \lor \neg F(c)) \land \\ (\neg G(a) \land \neg G(b) \land \neg G(c))$





#### □ 第二类等值式:

3. 量词辖域收缩与扩张等值式 x在公式A(x)中自由出现,但不在B中自由出现

(1a)  $\forall x (A(x) \lor B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \lor B$ 

(1b)  $\forall x (A(x) \land B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \land B$ 

 $(1c) \ \forall x \ (A(x) \to B) \Leftrightarrow \exists x \ A(x) \to B$ 

 $(1d) \ \forall x \ (B \to A(x)) \Leftrightarrow B \to \forall x \ A(x)$ 

(2a)  $\exists x (A(x) \lor B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \lor B$ 

(2b)  $\exists x (A(x) \land B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \land B$ 

 $(2c) \exists x (A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$ 

 $(2d) \exists x (B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$ 





#### □ 第二类等值式:

4. 量词分配等值式

#### x在公式A(x)和B(x)中自由出现

$$(1) \ \forall x \ (A(x) \land B(x)) \Leftrightarrow \forall x \ A(x) \land \forall x \ B(x)$$

(2) 
$$\exists x (A(x) \lor B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \lor \exists x B(x)$$

$$(3) \exists x \ (A(x) \to B(x)) \Leftrightarrow \forall x \ A(x) \to \exists x \ B(x)$$







#### 下列等值式不成立!

x在公式A(x)和B(x)中自由出现

(1)  $\forall x (A(x) \lor B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \lor \forall x B(x)$ 

提示:任意实数,或者是有理数或者是无理数或者任意实数是有理数,或者任意实数是无理数

(2)  $\exists x (A(x) \land B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \land \exists x B(x)$ 

提示:存在实数,既是有理数又是无理数存在实数是有理数,并且存在实数是无理数





- 置換规则: 给定ϕ(A)
  - ❖ 若 A ⇔ B ,则φ(A) ⇔ φ(B)
- □ 换名规则:
  - ❖  $\forall x A(x) \Leftrightarrow \forall x' A(x'), x'$ 不在A中出现
  - ❖ ∃x A(x) ⇔∃x' A(x'), x'不在A中出现
- □ 代替规则
  - ❖ A(x) ⇔ A(x'), x'不在A中出现





- □两类基本等值式
- ◆命题逻辑的重言式的代换实例
- ◆与量词相关的等值式
  - 1. 消去量词等值式

$$\forall x \ A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \land A(a_2) \land ... \land A(a_n)$$

$$\exists x \ A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \lor A(a_2) \lor ... \lor A(a_n)$$

2. 量词否定等值式

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x \ A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$





#### □ 第二类等值式:

3. 量词辖域收缩与扩张等值式

x在公式A(x)中自由出现,但不在B中自由出现

(1a) 
$$\forall x (A(x) \lor B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \lor B$$

(1b) 
$$\forall x (A(x) \land B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \land B$$

$$(1c) \ \forall x \ (A(x) \to B) \Leftrightarrow \exists x \ A(x) \to B$$

(1d) 
$$\forall x (B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$$

(2a) 
$$\exists x (A(x) \lor B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \lor B$$

(2b) 
$$\exists x (A(x) \land B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \land B$$

$$(2c) \exists x (A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$$

(2d) 
$$\exists x (B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$$





#### □ 第二类等值式:

4. 量词分配等值式

#### x在公式A(x)和B(x)中自由出现

(1) 
$$\forall x (A(x) \land B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \land \forall x B(x)$$

(2) 
$$\exists x (A(x) \lor B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \lor \exists x B(x)$$

$$(3) \exists x (A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$





- □置换规则
- □换名规则
- □代替规则





□ 例:消去既是约束出现又是自由出现的变项

1. 
$$\forall x \ \mathsf{F}(x,y,z) \to \exists y \ \mathsf{G}(x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow \forall t \; \mathsf{F}(t,y,z) \to \exists y \; \mathsf{G}(x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow \forall t \; \mathsf{F}(t,y,z) \to \exists w \; \mathsf{G}(x,w,z)$$

#### 2. $\forall x (F(x,y) \rightarrow \exists y G(x,y,z))$

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x,t) \to \exists y G(x,y,z))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x,y) \to \exists t G(x,t,z))$$





- □ 给定 $D=\{a,b,c\}$ ,消去下列公式的量词
  - $\Leftrightarrow \forall x (F(x) \lor \exists y G(y))$
  - $\Leftrightarrow \forall x \ \mathsf{F}(x) \lor \exists y \ \mathsf{G}(y)$
  - ⇔ (F(a) ∧ F(b) ∧ F(c)) ∨ (G(a) ∨ G(b) ∨ G(c))
  - $\Leftrightarrow \forall x \exists y F(x,y)$
  - $\Leftrightarrow \forall x (F(x,a) \lor F(x,b) \lor F(x,c))$
  - ⇔ (F(a,a) ∨ F(a,b) ∨ F(a,c)) ∧ (F(b,a) ∨
    F(b,b) ∨ F(b,c)) ∧ (F(c,a) ∨ F(c,b) ∨
    F(c,c))





#### □ 给定解释I如下:

- **❖** D={2, 3}
- $* a^* = 2$
- $f^*(2) = 3, f^*(3) = 2$
- $F^*(2) = F, F^*(3) = T$
- $G^*(2,2)=G^*(2,3)=G^*(3,2)=T, G^*(3,3)=F$
- $L^*(2,2)=L^*(3,3)=T, L^*(2,3)=L^*(3,2)=F$

#### □ 求下列各式在I下的真值:

- $\Rightarrow \exists x (F(f(x)) \land G(x, f(x)))$
- ∀x∃yL(x,y)
- $\Rightarrow \exists y \forall x L(x,y)$





- □ 求下列各式在|下的真值:
  - $\Leftrightarrow \exists x (F(f(x)) \land G(x, f(x)))$
  - $\Leftrightarrow$  (F(f(2))  $\land$  G(2, f(2)))  $\lor$  (F(f(3))  $\land$  G(3, f(3)))
  - $\Leftrightarrow$  (F(3)  $\land$  G(2, 3))  $\lor$  (F(2)  $\land$  G(3, 2))
  - $\Leftrightarrow$  (T  $\wedge$  T)  $\vee$  (F  $\wedge$  T)
  - $\Leftrightarrow$  T
  - **♦** ∀x∃yL(x,y)
  - $\Leftrightarrow$  T
  - $\Rightarrow \exists y \forall x L(x,y)$
  - $\Leftrightarrow$  F



# 第五章: 等值演算与推理





第二节:前束范式



### 5.2 前東范式



- □ 前東范式(Prenex Normal): 一阶逻辑公式满足
  - ❖ 量词都出现在公式最前面
  - ❖ 量词的辖域一直延伸到公式末
  - ❖ 形如Q1X1Q2X2...QkXk B
  - **❖ Q为∀或∃,B**不含量词
- □ 例:下列哪个为前束范式?
  - $\Rightarrow \exists x \exists y (F(x) \land G(y) \land \neg H(x,y))$
  - $\Rightarrow \exists x (F(x) \land \exists y (G(y) \land \neg H(x,y)))$





- □ 前東范式存在定理: 一阶逻辑任何公式都存 在等值的前東范式
  - 1. 将公式中的联接词→、↔换为¬、∨、∧
  - 2. 利用量词否定等值式把-深入到原子公式前
  - 3. 利用换名规则或代替规则
  - 4. 利用量词辖域的扩张收缩律把量词移到全式的最前面





- □ 例: 求下面公式的前束范式
  - $\Leftrightarrow \forall x \ \mathsf{F}(x) \land \neg \exists x \ \mathsf{G}(x)$
  - $\Leftrightarrow \forall x \ \mathsf{F}(x) \land \neg \exists y \ \mathsf{G}(y)$
  - $\Leftrightarrow \forall x \; \mathsf{F}(x) \land \forall y \neg \; \mathsf{G}(y)$
  - $\Leftrightarrow \forall x \ \forall y \ (\mathsf{F}(x) \land \neg \ \mathsf{G}(y))$

#### 或者

- $\Leftrightarrow \forall x \ \mathsf{F}(x) \land \forall x \neg \ \mathsf{G}(x)$
- $\Leftrightarrow \forall x (F(x) \land \neg G(x))$





- □ 例: 求下面公式的前束范式
  - $\Leftrightarrow \forall x \ \mathsf{F}(x) \lor \neg \exists x \ \mathsf{G}(x)$
  - $\Leftrightarrow \forall x \; \mathsf{F}(x) \vee \forall x \neg \; \mathsf{G}(x)$
  - $\Leftrightarrow \forall x \ \mathsf{F}(x) \lor \forall y \neg \ \mathsf{G}(y)$
  - $\Leftrightarrow \forall x \ \forall y \ (F(x) \lor \neg G(y))$





□例: 求下面公式的前束范式

$$\forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(x,y) \land H(x,y))$$

#### 使用换名规则:

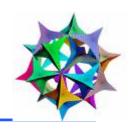
$$\forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(x,y) \land H(x,y))$$

$$\Leftrightarrow \forall z F(z) \rightarrow \exists y (G(x,y) \land H(x,y))$$

$$\Leftrightarrow \exists z (F(z) \rightarrow \exists y (G(x,y) \land H(x,y))$$

$$\Leftrightarrow \exists z \exists y (F(z) \rightarrow (G(x,y) \land H(x,y)))$$





#### □ 使用代替规则:

```
\forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(x,y) \land H(x,y))
```

- $\Leftrightarrow \forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(z,y) \land H(z,y))$
- $\Leftrightarrow \exists x (F(x) \rightarrow \exists y (G(z,y) \land H(z,y))$
- $\Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \rightarrow (G(z,y) \land H(z,y)))$



# 第五章: 等值演算与推理





第三节: 推理理论





- □逻辑(语义)蕴涵: 给定A1,...,Ak和B
  - **❖**符号: {*A*<sub>1</sub>,...,A<sub>k</sub>} ⊨ B
  - ❖对任意赋值V:
    - 如果ν(Ai)=T,则ν(B)=T
    - 或者存在Ai, 使得v(Ai)=F
  - ❖称由前提A₁,...,Aょ推出结论B的推理是有效的
  - **⇔B**为有效结论
- □定理:  $\{A_1,...,A_k\} \models B$  当且仅当

 $A_1 \land ... \land A_k \rightarrow B$  为重言式





□例:证明  $\exists x \neg A(x) \models \neg \forall x A(x)$ 

证明(反证法): 设∃x¬A(x) ⊭ ¬∀xA(x)

存在个体域D的赋值I,

 $I(\exists x \neg A(x)) = T, I(\neg \forall x A(x)) = F$ 

由于I(∃x¬A(x))=T,存在a∈D,¬A(a)=T

故存在a∈D, A(a)=F

由于 $I(\neg \forall x A(x)) = F$ , $I(\forall x A(x)) = T$ 

矛盾!



### 复习



- □ 公式A和B等值:  $A \leftrightarrow B$ 为永真式
- □ 两类基本等值式:
  - 1. 命题逻辑的重言式的代换实例
  - 2. 关于量词的等值式
- □ 三条规则:
  - 1. 置换规则
  - 2. 换名规则
  - 3. 代替规则
- □前東范式
- □ 推理正确:  $\{A_1,...,A_k\} \models B$  当且仅当

 $A_1 \land ... \land A_k \rightarrow B$  为重言式





□ 第一组 命题逻辑推理定律代换实例

例如:  $\forall x F(x) \land \exists y G(y) \Rightarrow \forall x F(x)$ 

为化简律代换实例

□ 第二组 由基本等值式生成

例如:由 $\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$ 生成

 $\neg \forall x A(x) \Rightarrow \exists x \neg A(x) \Rightarrow \exists x \neg A(x) \Rightarrow \neg \forall x A(x)$ 

□ 第三组 常用的推理定律

例如: (1)  $\forall x A(x) \lor \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \lor B(x))$ 

 $(2) \exists x (A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \land \exists x B(x)$ 

注意: 反向蕴涵式不成立





#### □证明:

- 1.  $\forall x A(x) \lor \forall x B(x) \models \forall x (A(x) \lor B(x))$
- 2.  $\forall x(A(x) \lor B(x)) \not\models \forall xA(x) \lor \forall xB(x)$





□全称量词消去规则(UI)

 $\forall x A(x)$ 

 $\forall x A(x)$ 

结论: A(y)

结论: A(c)

- □条件
  - **❖**x不在∀y和∃y的辖域内自由出现
  - **❖**A(y)指由A(x)把y代入x得到



## UI条件



□ 设真命题  $\forall x \exists y (x > y)$ 

推导如下:

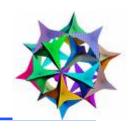
1.  $\exists y(y>y)$  使用UI规则

该结论是错误的!!!

取解释I: 个体域为实数域,F(x, y): x > y

原因在于: x在3y的辖域内自由出现





□全称量词引入规则(UG),给定前提  $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$ 

结论: ∀*x A*(*x*)

□条件:

❖✗不在Г中任何公式自由出现



# UG条件



□ 前提: F(x), F(x)→G(x)

结论: ∀*x* G(x)

推导如下:

**1.** F(x)→G(x) 前提引入

2. F(x) 前提引入

3. G(x) 假言推理

**4.** ∀**x G**(**x**) 使用UG规则

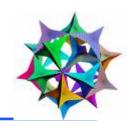
该结论是错误的!!!

取解释I: 个体域为整数域Z, F(x): x是偶数,

G(x): x被2整除

原因在于: **Χ**在Γ中的公式自由出现





□存在量词消去规则(EI),给定前提

$$\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$$

 $\exists X A(x)$ 

结论: A(c)

- □条件:
  - **❖c**不在Γ的任何公式出现
- □例:要证明如果行列式有两行或两列成比例,则 行列式为零,只须取行列式的任意两行或两列, 设它们成比例,证明行列式为零



## EI规则



□ 设真命题 ∃x(c<x)

推导如下:

**1.** *c*<*c* 使用EI规则

该结论是错误的!!!

取解释I: 个体域为实数域

原因在于:c在 $\Gamma$ 中的公式自由出现





□存在量词引入规则(EG)

A(y)

A(c)

结论:∃**x A**(**x**)

结论:∃*x A(x)* 

□条件:

**❖**y和c分别不在∃x和∀x的辖域内自由出现



## EG规则



□设个体域是实数域,真命题 ∃x(x>0)

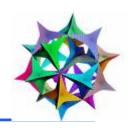
推导如下:

1. ∃x∃x(x>x) 使用EG规则

该结论是错误的!!!

原因在于: c在3x的辖域内自由出现





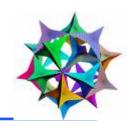
- lue 自然推理系统 $lue{N}_{\mathscr{L}}$ 
  - ① 字母表
  - ② 合式公式
  - ③ 推理规则集
  - ④ 关于量词的规则集





- 形式推演(语法蕴涵): 给定A1,...,Ak和B
  - **❖** 符号: {**A**1,...,**A**k} ⊢ **B**
  - ❖ 存在公式序列C1, C2,...,Cn, 对每个 i(i=1,...,n),
    - *Ci*是某个*Aj*, 或者
    - Ci是由序列中前面的公式应用推理规则得到
    - $C_n = B$
  - \* 称 $C_1,...,C_n$ 是有 $A_1,...,A_k$ 推B的证明





- □证明苏格拉底论证
  - > 凡是人都要死, 苏格拉底是人, 推出: 苏格拉底要死
  - **❖ M(x)**: x是人, D(x): x是要死的, s: 苏格拉底
  - ◆ 前提: ∀x(M(x)→D(x)), M(s)
  - ❖ 结论: D(s)

#### 证明:

① M(s) 前提引入

②  $\forall x(M(x)\rightarrow D(x))$  前提引入

3 M(s)→D(s)  $\forall$ -

④ **D**(s) 假言推理





#### □构造下面推理的证明

**⋄**前提:  $\forall x(F(x)\rightarrow G(x)), \forall x(G(x)\rightarrow H(x))$ 

\*结论: ∀xF(x)→∀xH(x)

#### 证明:

①  $\forall x F(x)$ 

② **F(x)** 

 $\textcircled{4} F(x) \rightarrow G(x)$ 

 $\bigcirc$   $\forall x (G(x) \rightarrow H(x))$ 

 $\bigcirc$  **G**(x)→**H**(x)

 $\bigcirc F(x) \rightarrow H(x)$ 

#### 附加前提引入

 $\bigcirc$ 1) $\forall$ -

前提引入

3∀-

前提引入

**⑤**∀–

④⑥假言三段论

②⑦假言推理

**⊗∀+** 





### □构造下面推理的证明

前提:  $\exists x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$ 

结论:  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ 

### 证明:

②  $\forall x \forall y (F(x) \rightarrow G(y))$ 

 $4 F(z) \rightarrow G(z)$ 

 $\bigcirc$   $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ 

前提引入

①置换

 $\bigcirc$ V-

**③**∀−

4





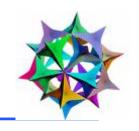
- □ 构造下面推理的证明
  - ◆ 前提: ∀x(P(x)→Q(x)),¬Q(a)
  - ❖ 结论: ∀x ¬ P(x)?

#### 证明:

- $\bigcirc$  ¬Q(a)

- $4 \neg P(a)$
- **⑤** ∀x ¬ P(x)?





 $\Box$ 在自然推理系统 $N_{\mathcal{L}}$ 中,构造推理的证明:

人都喜欢吃蔬菜。但不是所有的人都喜欢 吃鱼。所以,存在喜欢吃蔬菜而不喜欢吃鱼 的人。

### 解:

令 F(x): x为人,G(x): x喜欢吃蔬菜,

H(x): x喜欢吃鱼.

- □前提:  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \neg \forall x(F(x) \rightarrow H(x))$
- □结论:  $\exists x (F(x) \land G(x) \land \neg H(x))$





#### □ 证明:用归谬法

$$(1) \neg \exists x (F(x) \land G(x) \land \neg H(x))$$

(2) 
$$\forall x \neg (F(x) \land G(x) \land \neg H(x))$$

$$(3) \neg (F(y) \land G(y) \land \neg H(y))$$

$$(4) G(y) \rightarrow \neg F(y) \lor H(y)$$

(5) 
$$\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$$

(6) 
$$F(y) \rightarrow G(y)$$

$$(7) \quad F(y) \to \neg F(y) \lor H(y)$$

(8) 
$$F(y) \rightarrow H(y)$$

$$(9) \quad \forall y (F(y) \rightarrow H(y))$$

$$(10) \ \forall x (F(x) \rightarrow H(x))$$

$$(11) \neg \forall x (F(x) \rightarrow H(x))$$

(12) 0

#### 结论否定引入

- (1)置换
- **(2)**∀−
- (3)置换 前提引入
  - (5)∀−
- (4)(6)假言三段论
- (7)置换
- $(8)\forall$ +
- (9)置换 前提引入

(10)(11)合取



# 作业

