第三部分 代数结构

- 主要内容
- 代数系统----二元运算及其性质、代数系统和子代数
- 半群与群----半群、独异点、群
- 格与布尔代数----格、布尔代数

第九章 代数系统

- 主要内容
- 二元运算及其性质
  - 一元和二元运算定义及其实例
  - 二元运算的性质
- 代数系统
  - 代数系统定义及其实例
  - 子代数
  - 积代数
- 代数系统的同态与同构

第一节：二元运算及其性质

9.1 二元运算及其性质

本部分用代数方法来研究数学结构,故又叫***代数结构***,它将用抽象的方法来研究集合上的关系和运算。代数的概念和方法已经渗透到计算机科学的许多分支中,它对程序理论、数据结构、编码理论的研究和逻辑电路的设计已具有理论和实践的指导意义。

代数,也称代数结构或代数系统,是指定义有若干运算的集合

9.1 二元运算及其性质

代数常由3部分组成：

1.一个集合，叫做代数的*载体*。

2.定义在载体上的*运算*。

3.载体的特异元素，叫做代数*常数*。

因此，代数通常用载体，运算和常数组成的n重组表示

9.1 二元运算及其性质

- 二元运算:设S是个集合,S×S到S的一个函数(映射)f: S×S→S称为S上的一个二元代数运算

注：映射有存在性和唯一性的要求,运算当然要此要求。

①存在性：∀x,y∈S，f(<x,y>)要有结果，并且此结果∈S

②唯一性：∀x,y∈S，f(<x,y>)只能有一个结果∈S

9.1 二元运算及其性质

- **例**
  - 自然数集合上的加法和乘法
  - 整数集合?
  - 任意集合S的幂集上的并、交运算
  - 命题集合上的合取、析取运算
- **通常用*，·，+，×来表示二元运算，称为算符**

例：f是A上的二元运算，即f是A×A→A的映射。

$\forall x,y\in A$，$f(<x,y>)=z\in A$,用算符*表示，即$x*y=z$

9.1 二元运算及其性质

- **例：f是R上的二元运算:**

$\forall$ **x,y** $\in$ **R， f(<x,y>)=x, 用 算 符 * 表 示 , 即 x*y=x**

计算：**3*4，(-5)*0.2**

9.1 二元运算及其性质

- **一元运算：设A是个集合，函数f：A→A称为A上的一个一元代数运算**
- **例：**
  - 整数集合、有理数集合上的相反数
  - 非零有理数x的倒数1/x
  - 集合的补运算
  - 逻辑公式的补运算

9.1 二元运算及其性质

例：在I_+上定义运算：*，+。$\forall x,y \in I_+$

$x*y$=x,y的最大公约数，$x+y$=x,y的最小公倍数

求：6*8，6+8，12*15，12+15

例：在R上求平方根运算（一元运算）

不是一个代数运算

-9不存在平方根，存在性不满足

9有两个平方根，3，-3，唯一性不满足

9.1 二元运算及其性质

- 例：设$S=\{1,2\}$，给出$P(S)$上的运算$\sim$和$\oplus$运算表，S为全集合

a_i	$\sim a_i$
Φ	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	Φ

$\oplus$	Φ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
Φ	Φ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	Φ	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	Φ	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	Φ

9.1 二元运算及其性质

- **可交换的运算**：*为S上的二元运算，对于任意的x，y∈S都有x*y=y*x
  - *满足交换律
  - 实数集合的加法、逻辑公式集合的合取
  - 函数的复合运算
- **可结合的运算**：*为S上的二元运算，对于任意的x，y,z∈S都有(x*y)*z=x*(y*z)
  - *满足结合律
  - 实数集合的加法、逻辑公式集合的合取
  - 函数的复合运算

9.1 二元运算及其性质

- ***适合幂等律**：*为S上的二元运算，对于任意的x∈S都有x*x=x
  - 满足x*x=x的x称为运算*的**幂等元**
- 例
  - 集合的并和交适合幂等律
  - 集合的⊕和-一般不适合幂等律
  - 0是加法的幂等元
  - 0和1是乘法的幂等元

9.1 二元运算及其性质

- **运算*对⊙是可分配的**：⊙和*为S上的二元运算，对于任意的x，y，z∈S都有

  $x*(y\odot z)=(x*y)\odot(x*z)$ （左分配律）

  $(y\odot z)*x=(y*x)\odot(z*x)$ （右分配律）

  - *对⊙是满足分配律

- 例
  - 实数上的乘法对加法是可分配的
  - 集合上的交对并是可分配的
  - 逻辑公式上的合取对析取是可分配的

9.1 二元运算及其性质

- **运算*和⊙满足吸收律**：⊙和*为S上的二元运算，对于任意的x，y∈S都有

  $$x*(x\odot y)=x$$

  $$x\odot(x*y)=x$$

- 例
  - 集合上的交和并满足吸收律
  - 逻辑公式上的合取和析取满足吸收律

9.1 二元运算及其性质

- **左幺元（右幺元）**：设*是A上的二元运算，如果存在元素e_L（或e_r）$\in$A，使得对一切x$\in$A，均有

$$e_L * x = x \quad (\text{或} x * e_r = x)$$

则称e_L（e_r）是A中关于运算*的一个左幺元（右幺元）

  - 若元素e既是左幺元，又是右幺元，则称e是A中关于*的一个幺元（e也可记为1，称单位元）

9.1 二元运算及其性质

- 例:
  - 实数集上加法运算，0是幺元;
    乘法运算，1是幺元
  - 幂集P（A）上的$\cup$运算，$\varnothing$是幺元;
    $\cap$运算，A是幺元
- 例：实数集R上定义运算$\forall a,b \in R$，$a*b=a$，

则不存在左幺元，使得$\forall b \in R$，$e_L*b=b$，而对一切$a \in R$，$\forall b \in R$，有$b*a=b$，

$\therefore$该代数系统不存在左幺元。

但是R中的每一个元素a都是右幺元

9.1 二元运算及其性质

- **定理：若e_l和e_r分别是S上对于*的左幺元和右幺元,那么$e_l=e_r$，且这个元素就是幺元**

证明： $e_l=e_l * e_r=e_r$

- **推论：一个二元运算的幺元是唯一的**

证明： 设$e=e_l=e_r$. 假设e'是S中的单位元，则

$e'=e * e'=e$

9.1 二元运算及其性质

- **左零元（右零元）**：*是A上的二元运算，如果存在元素0_L（或0_r）$\in A$，使得对一切$x \in A$，

  均有$0_L * x = 0_L$（或$x * 0_r = 0_r$）

  则称0_L（0_r）是A中关于运算*的一个左零元（右零元）

  - 若元素0既是左零元，又是右零元，则称0是A中关于运算*的一个零元
  - 注：零元不一定是0！

9.1 二元运算及其性质

- 例:
  - 实数集合R上,对×运算而言,0是零元
  - P(A)上,对∪运算A是零元;对∩运算∅是零元
  - 命题上,对∨运算T是零元;对∧运算F是零元

9.1 二元运算及其性质

- **定理：** 若0_l和0_r分别是S上对于*的左零元和右零元,那么$0_l=0_r$，且这个元素就是零元。而且零元是唯一的
- **定理：** 设*为S上的二元运算，1和0分别为*运算的幺元和零元，如果S至少有两个元素，则$1\neq 0$

证明： 反证法。假设1=0，任意$x\in S$有

$$x=x*1=x*0=0$$

与S至少有两个元素矛盾!

9.1 二元运算及其性质

- 设*是集合A上的二元运算，1∈A是运算*的幺元，对于∀x∈A，如果存在一个元素y_l（或y_r）∈A，使得

$$y_l*x=1\ (或x*y_r=1)$$

则称y_l（或y_r）是x的***左逆元（或右逆元）***

- 如果x的逆元存在，则称x是**可逆的**
- 例：Z上的加法运算，则任一元素的逆元就是它的相反数；而对N上的加法运算，只有0存在逆元是0
- 例：n阶矩阵加法和乘法

9.1 二元运算及其性质

- 代数$A=\langle\{a, b, c\}, *\rangle$由下表定义

*	a	b	c
a	a	a	b
b	a	b	c
c	b	c	b

可以看出，b是幺元。a的逆元是c, b的逆元是自身，c的逆元是a和c

9.1 二元运算及其性质

定理： 设Z是集合，*是Z上的二元运算,并且是**可结合的**，运算*的幺元是1。若$x \in Z$有左逆元和右逆元,则它的左逆元等于右逆元,且逆元是唯一的。

证明：

（1）先证左逆元=右逆元：

设y_l和y_r分别是x的左逆元和右逆元,

∵x是可逆的和可结合的（条件给出）

$\therefore y_l*x=x*y_r=1$

$\because y_l*x*y_r=(y_l*x)*y_r=1*y_r=y_r$;

$y_l*x*y_r=y_l*(x*y_r)= y_l*1 =y_l$;

$\therefore y_l=y_r$

（2）证明逆元是唯一的：

假设y和z是x的二个不同的逆元，

则$y=y*1=y*(x*z)=(y*x)*z=1*z=z$，

这和假设相矛盾。

∴x若存在逆元的话一定是唯一的（前提*是可结合的）

9.1 二元运算及其性质

- ***满足消去律**：***是S上的二元运算，对于每一x,y,z∈S有**
  若x*y=x*z,且x≠0,则y=z；（左消去律）
  若y*x=z*x,且x≠0,则y=z；（右消去律）
- 例：
  - **整数集合上加法，乘法运算都满足消去律**
  - **幂集合上交和并运算*不满足*消去律**

9.1 二元运算及其性质

- **例：对于下面给定的集合和该集合上的二元运算，指出该运算的性质，并求出它的单位元、零元和所有可逆元素的逆元**

  (1) Z^+，$x*y = \mathrm{lcm}(x, y)$（求最小公倍数）

  (2) Q，$x*y = x+y-xy$

回顾

代数常由3部分组成：

1.一个集合，叫做代数的*载体*。

2.定义在载体上的*运算*。

3.载体的特异元素，叫做代数*常数*。

因此，代数通常用载体，运算和常数组成的n重组表示

- 二元运算**:设S是个集合,S×S到S的一个函数(映射)f: S×S→S称为S上的一个二元代数运算**
- **一元运算：设A是个集合,** 函数**f: A→A称为A上的一个一元代数运算**

回顾

- 运算的性质：
  - 交换律：$x*y=y*x$
  - 结合律：$(x*y)*z=x*(y*z)$
  - 幂等律：$x*x=x$
  - 分配律：$x*(y\odot z)=(x*y)\odot(x*z)$ （左分配律）
    $(y\odot z)*x=(y*x)\odot(z*x)$ （右分配律）
  - 吸收律：$x*(x\odot y)=x$
    $x\odot(x*y)=x$
  - 消去律：若$x*y=x*z$,且$x\neq 0$,则$y=z$ （左消去律）
    若$y*x=z*x$,且$x\neq 0$,则$y=z$ （右消去律）

回顾

- 代数常数
  - **左幺元（右幺元）：**

    $e_L * x = x$（或 $x * e_r = x$）
  - **左零元（右零元）：**

    $0_L * x = 0_L$（或 $x * 0_r = 0_r$）
  - **左逆元（右逆元）：**

    $y_l * x = 1$（或 $x * y_r = 1$）

第二节：代数系统

9.2 代数系统

- **代数系统**：非空集合S和集合上k个一元或二元运算$f_1,\ldots,f_k$所组成的系统
  - 符号$V=<S,f_1, f_2,\ldots f_k>$
- 构成一个代数系统必须具备的条件：
  - 一个非空集合S,称为*载体*
  - 在S上的*运算*

9.2 代数系统

- 常见代数系统：
  - $<N, +>$
  - $<Z, +, \cdot>$
  - $<M_n(R), +, \cdot>$
  - $<P(S), \cup, \cap, \sim>$
- 特异元素（代数常元）：
  - 二元运算中的单位元与零元
  - $<Z,+>$中的$+$运算的单位元0
  - $<P(S), \cup, \cap, \sim>$中$\cup$和$\cap$运算的单位元$\varnothing$和S

9.2 代数系统

- 通常也可把特异元素（常数）放在代数系统之中，形成 $<S, f_1, f_2, \ldots f_k, x>$ ：
  - $<N, +, 0>$
  - $<P(S), \cup, \cap, \sim, \varnothing, S>$
- 代数系统的基数 $|V|=|S|$，

  就是非空集合的基数

9.2 代数系统

- **同类型的代数系统：**
  - 两个代数系统中有相同个数的运算和常数，且对应运算的元数相同
- **例：**
  - $V_1=<R, +, \cdot, -, 0, 1>$
  - $V_2=<P(S), \cup, \cap, \sim, \varnothing, S>$

9.2 代数系统

- 同类型的代数系统不一定具有相同的运算性质
- 代数结构的主要内容：

  从代数系统的构成成分和遵从的算律出发，将代数系统分类，然后研究其共同性质，再将研究结果运用到具体的代数系统中

9.2 代数系统

- **运算封闭：** 设*和Δ是集合S上的二元和一元运算，S′是S的子集
  - 如果a,b∈S′蕴涵着a*b∈S′，那么S′对*是封闭的
  - 如果a∈S′蕴涵着Δ a∈S′，那么S′对Δ是封闭的
- 例：减法是Z上的运算，Z的子集自然数N
  - 可能x,y∈N，但x-y∉N
  - 减法在N上不是封闭的，即**N对减法不封闭**
- 例：N对Z的加法运算+是封闭的

9.2 代数系统

- 子代数系统：$<S,f_1,\ldots,f_k>$是一个代数系统
  - $B \subseteq A, B \neq \Phi$
  - B对运算$f_1,f_2,\ldots,f_k$是封闭的
  - B和S有相同的代数常元
  - $<B,f_1,\ldots,f_k>$是$<S,f_1,\ldots,f_k>$的代数子系统
- 例：整数集合Z在加法下构成一个代数系统$<Z,+,0>$
  - Z_1是奇数集合，$<Z_1,+>$是否其子代数系统？
  - Z_2是偶数集合，$<Z_2,+,0>$是否其子代数系统？

9.2 代数系统

- 例：<Z,-> 是代数系统
  - <N,->不是子代数系统
    - N对减法不封闭的
- 注：
  - 任何$V=<S,f_1,\ldots,f_k>$的子代数一定存在
  - 最大的子代数是它自己
  - 最小子代数：所有常元构成的子代数
    - 可能不存在！

9.2 代数系统

- 积代数：设$V_1=<A,o>$和$V_2=<B,*>$是同类型的代数系统，o和*为二元代数系统
  - $V=<A\times B,\bullet>$为V_1, V_2的积代数, •定义为
  - $<a_1,b_1>\bullet<a_2,b_2>=<a_1 o a_2, b_1 * b_2>$
  - V_1和V_2为V的因子代数

9.2 代数系统

- **定理：** 设$V_1=<A,\circ>$和$V_2=<B,*>$是同类型的代数系统，$V=<A\times B,\bullet>$为V_1和V_2的积代数
  - 如果$\circ$和$*$运算是可交换(可结合、幂等)的，那么运算$\bullet$也是可交换(可结合、幂等)的
  - 如果e_1和e_2(0_1,0_2)分别为$\circ$和$*$运算的单位元(零元)，那么$<e_1,e_2>$($<0_1,0_2>$)也是运算$\bullet$的单位元(零元)
  - 如果x和y分别为$\circ$和$*$运算的可逆元素，那么$<x,y>$也是运算$\bullet$的可逆元素，逆元为$<x^{-1},y^{-1}>$

9.2 代数系统

- 积代数也保留因子代数中的分配律和吸收律
- 消去律是一个例外

  例：$Z_n=\{0,1, \ldots,n-1\}$，其中n是正整数，$V_1=\langle Z_4, \otimes_4 \rangle$, $V_2=\langle Z_3, \otimes_3 \rangle$分别表示模4和模3乘法的代数系统

第三节：代数系统的同态与同构

9.3 同态和同构

- **动机：**
  - 不同代数系统可能类型相同
  - 更进一步，可能有共同的运算性质
  - 有些系统在结构上相似或相同
- **同态和同构**
  - 讨论代数系统的相似或相同的关系

9.3 同态和同构

- 例： 给 定 $V_1=<Z_3,\oplus_3>$， $V_2=<A,\ \oplus_6>$，$Z_3=\{0,1,2\}$，$A=\{0,2,4\}$，$\oplus_3$和$\oplus_6$分别是表示模3和模6加
  - 定义函数f：$Z_3\to A$
    - $f=\{<0,0>, <1,2>, <2,4>\}$
  - f是双射函数
  - 在f的映射下，Z_3和A有相同结构

9.3 同态和同构

- 同态映射(同态)f: $A \to B$

$V_1=<A, \circ>$, $V_2=<B, *>$是同类型代数系统

  - $f(x \circ y)=f(x)*f(y)$

- 同态映射分类
  - 单同态：f为单射
  - 满同态：f为满射$V_1 \sim V_2$
  - 同构：f为双射$V_1 \cong V_2$
- 自同态f: $A \to A$

9.3 同态和同构

- 例：设代数系统$G_1=\langle N,+\rangle$和$G_2=\langle N_n,\oplus_n\rangle$，$N_n=\{0,1,2,\ldots n-1\}$
  - $f: N\to N_n$, $f(x)=(x)\bmod n$
  - f是G_1到G_2的同态

  $\forall x,y\in N$有

  $f(x+y)=(x+y)\bmod n$

  $\qquad=(x)\bmod n \oplus_n (y)\bmod n$

  $\qquad=f(x)\oplus_n f(y)$

  由于f为满射，f为满同态

第九章 习题课

- 主要内容
- 代数系统的构成：非空集合、封闭的二元和一元运算、代数常数
- 二元运算性质和特异元素：交换律、结合律、幂等律、分配律、吸收律、单位元、零元、可逆元和逆元
- 同类型的与同种的代数系统
- 子代数的定义与实例
- 积代数的定义与性质
- 代数系统的同态与同构

基本要求

- 判断给定集合和运算能否构成代数系统
- 判断给定二元运算的性质
- 求二元运算的特异元素
- 了解同类型和同种代数系统的概念
- 了解子代数的基本概念
- 计算积代数
- 判断函数是否为同态映射和同构映射

练习1

1．设$\circ$运算为Q上的二元运算，

$$\forall x, y\in Q,\ x\circ y = x+y+2xy,$$

(1) 判断$\circ$运算是否满足交换律和结合律，并说明理由.

(2) 求出$\circ$运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元.

(1) $\circ$ 运算可交换，可结合.

任取 $x, y\in Q$,

$$x\circ y = x+y+2xy = y+x+2yx = y\circ x,$$

任取 $x, y, z\in Q$,

$$(x\circ y)\circ z = (x+y+2xy)+z+2(x+y+2xy)z$$

$$= x+y+z+2xy+2xz+2yz+4xyz$$

$$x\circ(y\circ z) = x+(y+z+2yz)+2x(y+z+2yz)$$

$$= x+y+z+2xy+2xz+2yz+4xyz$$

解答

(2) 设$\circ$运算的单位元和零元分别为 e 和 θ，则对于任意 x 有 $x \circ e = x$ 成立，即

$$x+e+2xe = x \Rightarrow e = 0$$

由于$\circ$运算可交换，所以 0 是幺元.

对于任意 x 有$x \circ \theta = \theta$成立，即

$$x+\theta+2x\theta=\theta \Rightarrow x+2x\theta = 0 \Rightarrow \theta = -1/2$$

给定 x，设 x 的逆元为 y, 则有 $x \circ y = 0$ 成立，即

$$x+y+2xy = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{1+2x} \quad (x \neq -1/2)$$

因此当$x \neq -1/2$时，$-\dfrac{x}{1+2x}$ 是x的逆元.

练习2

2． 下面是三个运算表

(1) 说明那些运算是可交换的、可结合的、幂等的.

(2) 求出每个运算的单位元、零元、所有可逆元素的逆元

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

解答

(1) * 满足交换律，满足结合律，不满足幂等律.

∘ 不满足交换律，满足结合律，满足幂等律.

• 满足交换律，满足结合律，不满足幂等律.

(2) * 的单位元为b，没有零元， $a^{-1}=c, b^{-1}=b, c^{-1}=a$

∘ 的单位元和零元都不存在，没有可逆元素.

• 的单位元为 a，零元为c，$a^{-1}=a$，b, c不是可逆元素.

说明：关于结合律的判断

需要针对运算元素的每种选择进行验证，若$|A|=n$，一般需要验证n^3个等式.

单位元和零元不必参与验证.

通过对具体运算性质的分析也可能简化验证的复杂性.

练习3

3. 设G为非0实数集R^*关于普通乘法构成的代数系统，判断下述函数是否为G的自同态？如果不是，说明理由. 如果是，判别它们是否为单同态、满同态、同构.

(1) $f(x) = |x| +1$

(2) $f(x) = |x|$

(3) $f(x) = 0$

(4) $f(x) = 2$

解答

解 (1) 不是同态, 因为 $f(2\times2)=f(4)=5$, $f(2)\times f(2)=3\times3=9$

(2) 是同态，不是单同态，也不是满同态，因为 $f(1)=f(-1)$, 且 $\text{ran}\, f$ 中没有负数.

(3) 不是G 的自同态，因为 f 不是 G 到 G 的函数

(4) 不是G 的自同态，因为 $f(2\times2)=2$, $f(2)\times f(2)=2\times2=4$

说明：判别或证明同态映射的方法

(1) 先判断（或证明）f 是G_1 到 G_2的映射 $f: G_1\to G_2$. 如果已知 $f: G_1\to G_2$，则这步判断可以省去.

(2) $\forall x, y \in G_1$, 验证 $f(x\times y)=f(x)\times f(y)$

(3) 判断同态性质只需判断函数的单射、满射、双射性即可.

作业

- 9
- 10
- 11
- 15
- 17