第三章:命题逻辑的推理理论

❑主要内容

- 推理的形式结构
- 自然推理系统*P*

❑本章与其他各章的联系

- 本章是第五章的特殊情况和先行准备

第一节：推理的形式结构

3.1 推理形式结构

- 何为推理？何为证明？

  例子：

  （1）若$A\subseteq B$且$C\subseteq D$，则$A\cup C\subseteq B\cup D$

  （2）若今天是星期一，则明天是星期二

  （3）若$A\cup C\subseteq B\cup D$，则$A\subseteq B$且$C\subseteq D$

- *推理* (Inference) —— 从前提出发推出结论的思维过程

  上例中，（1），（2）是正确的推理，而（3）是错误的推理

- *证明* (Proof) —— 描述推理正确或错误的过程

3.1 推理形式结构

- 逻辑(语义)蕴涵(Logical Entailment)：给定 $A_1,\ldots,A_k$和B
  - 对任意赋值v:
    - 如果$v(A_i)$=T,则$v(B)$=T
    - 或者存在A_j, 使得$v(A_j)$=F
  - 称由前提$A_1,\ldots,A_k$ 推出结论B的推理是有效的
  - B为有效结论
  - 符号：$\{A_1,\ldots,A_k\} \vDash B$
- 讨论
  - 蕴涵跟蕴涵式的关系？
  - 注意: 推理正确不能保证结论一定正确

3.1 推理形式结构

- 例子
  - $\{p, p \to q\} \vDash q$
  - $\{p, q \to p\} \vDash q$

p	q	$p \wedge (p \to q)$	q	$p \wedge (q \to p)$	q
F	F	F	F	F	F
F	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	F
T	T	T	T	T	T

3.1 推理形式结构

- 定理：$\{A_1,\ldots,A_k\} \vDash B$ 当且仅当

  $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$ 为重言式

证明 必要性：任意v, 不会出现$A_1 \wedge \ldots \wedge A_k$为真且$B$为假的情况，所以$v(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B)=T$

充分性：任意v, $v(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B)=T$

则或者： $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k$和$B$同时为$T$

或者： $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k$为假

所以$\{A_1,\ldots,A_k\} \vDash B$

3.1 推理形式结构

- 蕴涵元符号：$\Rightarrow$
- $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$ 代表 $\{A_1,\ldots,A_k\} \vDash B$
- 推理的形式结构
  - 前提：$A_1,\ldots,A_k$
  - 结论：B
  - 推理的形式结构：$A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

回顾

- 逻辑(语义)蕴涵(Logical Entailment)：给定 $A_1,\ldots,A_k$ 和B
  - 对任意赋值 v:
    - 如果 $v(A_i)=T$,则 $v(B)=T$
    - 或者存在 A_j，使得 $v(A_j)=F$
  - 称由前提 $A_1,\ldots,A_k$ 推出结论B的推理是有效的
  - B为有效结论
  - 符号：$\{A_1,\ldots,A_k\} \vDash B$

- 定理：$\{A_1,\ldots,A_k\} \vDash B$ 当且仅当

  $A_1\wedge\ldots\wedge A_k \to B$ 为重言式

回顾

- 推理的形式结构
  - 前提：$A_1,\ldots,A_k$
  - 结论：B
  - 推理的形式结构：$A_1\wedge\ldots\wedge A_k\rightarrow B$

3.1 推理形式结构

- 判断推理是否正确方法
  - ① 真值表法
  - ② 等值演算法
  - ③ 主析取范式法

推理实例

例 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号，则明天是5号. 今天是1号. 所以, 明天是5号.

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号. 所以, 今天是1号.

解 设 p：今天是1号，q：明天是5号.

(1) 推理的形式结构：$(p\to q)\wedge p\to q$

用等值演算法

$$(p\to q)\wedge p\to q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee q \Leftrightarrow 1$$

由定理3.1可知推理正确

推理实例

(2) 推理的形式结构: $(p\rightarrow q)\wedge q\rightarrow p$

用主析取范式法

$$
\begin{aligned}
& (p\rightarrow q)\wedge q\rightarrow p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p\vee q)\wedge q\rightarrow p \\
\Leftrightarrow\ & \neg\ ((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p \\
\Leftrightarrow\ & \neg q\vee p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee\ (p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q) \\
\Leftrightarrow\ & m_0\vee m_2\vee m_3
\end{aligned}
$$

结果不含m_1, 故01是成假赋值，所以推理不正确

3.1 推理形式结构

- 推理定律
- 推理定律——重言蕴涵式
- 重要的推理定律：

  $A \Rightarrow (A \lor B)$ 附加律

  $(A \land B) \Rightarrow A$ 化简律

例1：

如果谁骄傲自满，那么他就要落后；小张骄傲自满，所以，小张必定要落后

$(A \to B) \land A \Rightarrow B$ 假言推理

例2：

如果谁得了肺炎，他就一定要发烧；小李没发烧，所以，小李没患肺炎

$(A \to B) \land \neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式

3.1 推理形式结构

- 例3：

  如果降落的物体不受外力的影响，那么，它不会改变降落的方向；这个物体受到了外力的影响，

  所以，它会改变降落的方向

- 例4：

  如果赵某是走私犯，那么，他应受法律制裁；经查明，赵某确实受到了法律制裁，

  所以，赵某是走私犯

- 例5：

  我要么选择汤要么选择色拉；我不选择汤。

  所以，我选择色拉

  $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$　　　析取三段论

- 例6：

  如果我不能起床，则我不能上班。

  如果我不能上班，则我不能得到报酬。

  所以，如果我不能起床，则我不能得到报酬

  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$　　　假言三段论

  $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$　　　等价三段论

3.1 推理形式结构

- 例7：

  东方朔偷饮了汉武帝求得的据说饮了能够不死的酒，汉武帝要杀他，他说：“如果这酒真能使人不死，那么你就杀不死我；如果这酒不能使人不死(你能杀得死我)，那么它就没有什么用处（不必杀我）；这酒或者能使人不死，或者不能使人不死；所以你或者杀不死我，或者不必杀我。”

$(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ 构造性二难

$(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$ 构造性二难（特殊形式）

- 例8：

If it rains, we will stay inside.

If it is sunny, we will go for a walk.

Either we will not stay inside, or we will not go for a walk.

Therefore, either it will not rain, or it will not be sunny.

$$(A \to B) \land (C \to D) \land (\neg B \lor \neg D) \Rightarrow (\neg A \lor \neg C)$$

破坏性二难

3.1 推理形式结构

- 普罗泰戈拉收了一名学生叫欧提勒士。普氏与他签订了这样一份合同：前者向后者传授辩论技巧，教他帮人打官司；后者入学时交一半学费，另一半学费则在他毕业后帮人打官司赢了之后再交。时光荏苒，欧氏从普氏那里毕业了。但他总不帮人打官司，普氏于是就总得不到那另一半学费。

普氏为了要那另一半学费，他去与欧氏打官司，并打着这样的如意算盘：

如果欧氏打赢了这场官司，按照合同的规定，他应该给我另一半学费。
如果欧氏打输了这场官司，按照法庭的裁决，他应该给我另一半学费。
欧氏或者打赢这场官司，或者打输这场官司。
总之，他应该付给我另一半学费。

但欧氏却对普氏说：

如果这场官司我打赢了，按照法庭的裁决，我不应该给您另一半学费。
如果这场官司我打输了，按照合同的规定，我不应该给您另一半学费。
我或者打赢这场官司，或者打输这场官司。
总之，我不应该付另一半学费

究竟谁的说法对呢？

3.1 推理形式结构

❑推理定律

$A \Rightarrow (A \vee B)$	附加
$(A \wedge B) \Rightarrow A$	化简律
$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$	假言推理
$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$	析取三段论
$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$	假言三段论
$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$	构造性二难
$(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$	构造性二难（特殊形式）
$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$	破坏性二难

3.1 推理形式结构

证明：$(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$

$$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$$

$$\Leftrightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \to (A \to C)$$

$$\Leftrightarrow \neg ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \vee (A \to C)$$

$$\Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C)) \vee (A \to C)$$

$$\Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C)) \vee (\neg A \vee C)$$

$$\Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee \neg A) \vee ((B \wedge \neg C) \vee C)$$

$$\Leftrightarrow (\neg B \vee \neg A) \vee (B \vee C)$$

$$\Leftrightarrow 1$$

第二节：自然推理系统P

3.2 自然推理系统P

- *自然演绎推理*：从一组已知为真的事实出发，直接运用经典逻辑推理规则推出结论的过程
- 为什么要自然演绎(**Natural Deduction**)？

给出验证 $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

的推理过程

- 需要引入证明的概念

  一个描述推理过程的命题公式序列，其中的每个公式或者是已知前提，或者是由前面的公式应用到推理规则得到的结论

- 自然演绎模拟人类的推理

3.2 自然推理系统*P*

定义3.2 一个形式系统 I (Formal System) 由下面四个部分组成:

(1) 非空的字母表，记作 $A(I)$.

(2) $A(I)$ 中符号构造的合式公式集，记作 $E(I)$.

(3) $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集，记作 $A_X(I)$.

(4) 推理规则集，记作 $R(I)$.

记$I=<A(I),E(I),A_X(I),R(I)>$, 其中$<A(I),E(I)>$是 I 的形式语言系统, $<A_X(I),R(I)>$ 是 I 的形式演算系统.

自然推理系统: 无公理, 即$A_X(I)=\varnothing$

公理推理系统 推出的结论是系统中的重言式, 称作定理

自然推理系统*P*

定义3.3 自然推理系统 *P* (Natural Deduction System)定义如下：

1. 字母表

(1) 命题变项符号：$p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots$

(2) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(3) 括号与逗号：(,), ,

2. 合式公式（同定义1.6）

3. 推理规则

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

3.2 自然推理系统P

- 假言推理规则

$$(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$$

$$\begin{array}{r} A \to B \\ A \\ \hline \text{结论：} B \end{array}$$

All men are mortal

~~Socrates is a man~~

Therefore Socrates is mortal

- 附加规则

$$A \Rightarrow (A \vee B)$$

$$\frac{A}{\text{结论：}A \vee B}$$

3.2 自然推理系统P

- 化简规则

$$(A \wedge B) \Rightarrow A$$

$$\frac{A \wedge B}{\text{结论：} A}$$

- 合取引入规则

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{\text{结论：} A \wedge B}$$

3.2 自然推理系统P

- 证明: $p, q, p \wedge q \to r \vDash r$

3.2 自然推理系统P

- 证明: $p, q, p \wedge q \to r \vDash r$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}}{p \wedge q} \quad p \wedge q \to r}{r}$$

推理过程可以写成证明树

3.2 自然推理系统P

- 拒取式规则

$$(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$$

$$\begin{array}{r} A \to B \\ \neg B \\ \hline \end{array}$$

结论：$\neg A$

- 假言三段式规则 $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$

$$\begin{array}{r} A \to B \\ B \to C \\ \hline \end{array}$$

结论：$A \to C$

3.2 自然推理系统P

- 析取三段式规则

$$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$$

$$\begin{array}{r} A \vee B \\ \neg B \\ \hline \text{结论：} \quad A \end{array}$$

- 构造二难推理规则 $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$

$$\begin{array}{r} A \to B \\ C \to D \\ A \vee C \\ \hline \text{结论：} \quad B \vee D \end{array}$$

- 破坏性二难推理规则

$$(A \to B) \land (C \to D) \land (\neg B \lor \neg D) \Rightarrow (\neg A \lor \neg C)$$

$$\begin{array}{r} A \to B \\ C \to D \\ \neg B \lor \neg D \\ \hline \text{结论：} \neg A \lor \neg C \end{array}$$

3.2 自然推理系统P

- 形式推演(语法蕴涵)(Formal Deduction)：给定$A_1,\ldots,A_k$和B
  - 符号：$\{A_1,\ldots,A_k\} \vdash B$
  - 存在公式序列$C_1, C_2,\ldots,C_n$，对每个$i(i=1,\ldots,n)$,
    - C_i是某个A_j或者
    - C_i是由序列中前面的公式应用推理规则得到
    - C_n=B
  - 称$C_1,\ldots,C_n$是由$A_1,\ldots,A_k$推B的证明

3.2 自然推理系统P

- **例：** 考虑下述论证
  - 如果这里有球赛，则通行是困难的
  - 如果他们按时到达，则通行是不困难的
  - 他们按时到达了

  问：得到什么结论？

3.2 自然推理系统P

- 例：考虑下述论证
  - 如果这里有球赛，则通行是困难的
  - 如果他们按时到达，则通行是不困难的
  - 他们按时到达了

  问：得到什么结论？

设 p:这里有球赛 q:通行是困难的 r:他们按时到达

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to \neg q \\ \hline \quad\quad r \\ \therefore \quad \neg p \end{array}$$

- 证明
  - 前提：$p \to q$，$r \to \neg q$，r
  - 结论：$\neg p$

解：

①	r	前提引入
②	$r \to \neg q$	前提引入
③	$\neg q$	假言推理
④	$p \to q$	前提引入
⑤	$\neg p$	拒取式

3.2 自然推理系统P

- 证明 $c \vee d, c \rightarrow r, d \rightarrow s \vdash r \vee s$

解：

①	$c \vee d$	前提引入
②	$\neg c \rightarrow d$	置换规则
③	$d \rightarrow s$	前提引入
④	$\neg c \rightarrow s$	假言三段论
⑤	$c \rightarrow r$	前提引入
⑥	$\neg r \rightarrow \neg c$	置换规则
⑦	$\neg r \rightarrow s$	假言三段论
⑧	$r \vee s$	置换规则

3.2 自然推理系统P

- 构造证明的方法
  - 附加前提证明法
  - 归谬法

3.2 自然推理系统P

- 附加前提证明法
  - 对形如 $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k) \to (A \to B)$的证明

转化为：　$A_1, \ldots, A_k, A \vdash B$

3.2 自然推理系统P

- 证明 $((p\to(q\to s))\wedge(\neg r\vee p)\wedge q)\to(r\to s)$

- 证明 $((p\rightarrow(q\rightarrow s))\wedge(\neg r\vee p)\wedge q)\rightarrow(r\rightarrow s)$

解：

①	r	前提引入
②	$\neg r\vee p$	前提引入
③	$r\rightarrow p$	置换规则
④	p	假言推理
⑤	$p\rightarrow(q\rightarrow s)$	前提引入
⑥	$q\rightarrow s$	假言推理
⑦	q	前提引入
⑧	s	假言推理

3.2 自然推理系统P

- 归谬法
  - 对形如 $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$ 的证明

转化为： $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B$ 为矛盾式

3.2 自然推理系统P

- 证明

  $((r\to\neg q)\wedge(r\vee s)\wedge(s\to\neg q)\wedge(p\to q))\to\neg p$

3.2 自然推理系统P

- 证明

$((r\to\neg q)\wedge(r\vee s)\wedge(s\to\neg q)\wedge(p\to q))\to\neg p$

解:

① p
② $p\to q$
③ q
④ $s\to\neg q$
⑤ $q\to\neg s$
⑥ $\neg s$
⑦ $r\vee s$
⑧ r
⑨ $r\to\neg q$
⑩ $\neg q$

第三章 习题课

主要内容

- 推理的形式结构
- 判断推理是否正确的方法

  真值表法

  等值演算法

  主析取范式法
- 推理定律
- 自然推理系统*P*
- 构造推理证明的方法

  直接证明法

  附加前提证明法

  归谬法(反证法)

基本要求

- 理解并记住推理形式结构的两种形式：

  1. $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$
  2. 前提：$A_1, A_2, \ldots , A_k$

     结论：B

- 熟练掌握判断推理是否正确的不同方法（如真值表法、等值演算法、主析取范式法等）
- 牢记 P 系统中各条推理规则
- 熟练掌握构造证明的直接证明法、附加前提证明法和归谬法
- 会解决实际中的简单推理问题

练习1：判断推理是否正确

1. 判断下面推理是否正确:

(1) 前提：$\neg p \to q$，$\neg q$

结论：$\neg p$

解　推理的形式结构：$(\neg p \to q) \land \neg q \to \neg p$

方法一：等值演算法

$$
\begin{aligned}
& (\neg p \to q) \land \neg q \to \neg p \\
\Leftrightarrow\ & \neg((p \lor q) \land \neg q) \lor \neg p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \land \neg q) \lor q \lor \neg p \\
\Leftrightarrow\ & ((\neg p \lor q) \land (\neg q \lor q)) \lor \neg p \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \lor q
\end{aligned}
$$

易知10是成假赋值，不是重言式，所以推理不正确.

练习1解答

方法二：主析取范式法，

$$(\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$$
$$\Leftrightarrow \neg((p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p$$
$$\Leftrightarrow \neg p \vee q$$
$$\Leftrightarrow M_2$$
$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$$

未含m_2, 不是重言式, 推理不正确.

练习1解答

方法三　真值表法

p	q	$\neg p \to q$	$(\neg p \to q) \wedge \neg q$	$(\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	0	1

不是重言式, 推理不正确

方法四　直接观察出10是成假赋值

练习1：判断推理是否正确

(2) 前提：$q \to r$，$p \to \neg r$

结论：$q \to \neg p$

练习1解答

(2) 前提：$q \to r$，$p \to \neg r$

结论：$q \to \neg p$

解 推理的形式结构： $(q \to r) \wedge (p \to \neg r) \to (q \to \neg p)$

用等值演算法

$(q \to r) \wedge (p \to \neg r) \to (q \to \neg p)$

$\Leftrightarrow ((\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r)) \to (\neg q \vee \neg p)$

$\Leftrightarrow \neg((q \wedge \neg r) \vee (p \wedge r)) \to (\neg q \vee \neg p)$

$\Leftrightarrow \neg((q \vee p) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg r \vee p)) \to (\neg q \vee \neg p)$

$\Leftrightarrow ((q \vee p) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg r \vee p)) \vee (\neg q \vee \neg p)$

$\Leftrightarrow 1$

推理正确

练习2：构造证明

(1) 前提：$p \to q$

结论：$p \to (p \land q)$

(2)前提：$p \to (q \to r)$, $s \to p$, q

结论：$s \to r$

(3)前提：$p \to \neg q$, $\neg r \lor q$, $r \land \neg s$

结论：$\neg p$

练习3：实际问题

3. 在系统P中构造下面推理的证明：

如果今天是周六，我们就到颐和园或圆明园玩. 如果颐和园游人太多，就不去颐和园. 今天是周六，并且颐和园游人太多. 所以, 我们去圆明园或动物园玩.

证明：

(1) 设 p：今天是周六，q：到颐和园玩，

r：到圆明园玩，s：颐和园游人太多

t：到动物园玩

(2) 前提：$p \rightarrow (q \vee r)$，$s \rightarrow \neg q$，p，s

结论：$r \vee t$

练习3解答

(3) 证明：

① $p \to (q \vee r)$	前提引入
② p	前提引入
③ $q \vee r$	①②假言推理
④ $s \to \neg q$	前提引入
⑤ s	前提引入
⑥ $\neg q$	④⑤假言推理
⑦ r	③⑥析取三段论
⑧ $r \vee t$	⑦附加

作业

- 14
- 15
- 16
- 17
- 18（2）