# 15-16-3高等数学 A 期中试卷参考答案

## 一、 填空题（本题共8小题，每小题4分，满分32分）

1. $\underline{4x+2y+z=8}$；2. $\underline{2\sqrt{6}}$；3. $\underline{\dfrac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{1+(xy)^2}}$；4. $\underline{\dfrac{1}{2}\ln 2+i(\dfrac{3}{4}\pi+2k\pi)}$；

5. $\underline{\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{3}} \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\sqrt{3}}^2 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y}$；

6. $\underline{8\pi}$；7. $\underline{\dfrac{-\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^3}}$. 8. $\underline{\dfrac{\pi}{4}}$；

## 二、 计算下列各题（本题共4小题，每小题8分，满分32分）

1. $z_x=f_1+f_2+yf_3$，$z_{xy}=-2f_{12}+xf_{13}-2f_{22}+(x-2y)f_{23}+xyf_{33}+f_3$.

2. 原式$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \dfrac{y}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$.

3. $\begin{cases} x+3z-10=0 \\ y+3z-10=0 \end{cases}$ 或$\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-3}{1}$

4. $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=y-\mathrm{e}^{-y}\sin x$,所以$v=\dfrac{y^2}{2}+\mathrm{e}^{-y}\sin x+\varphi(x)$,，而
$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^{-y}\cos x+\varphi'(x)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-x+\mathrm{e}^{-y}\cos x$,
所以$\varphi'(x)=-x,\varphi(x)=-\dfrac{x^2}{2}+C$ ,$f(z)=xy+\mathrm{e}^{-y}\cos x+i(\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{e}^{-y}\sin x+C)=\mathrm{e}^{iz}-i\dfrac{z^2}{2}+Ci,f'(i)=i\mathrm{e}^{-1}+1$

## 三、 （本题满分10分）

原式$=2\sqrt{3}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2x}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=4\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^3\mathrm{d}\rho$

$=16\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi=3\sqrt{3}\pi$.

## 四、 （本题满分10分）

$$m=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v+\pi\int_1^2 z^2(2z-z^2)\mathrm{d}z=\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2z-z^2}}\rho^3\mathrm{d}\rho+\frac{13}{10}\pi$$

$= \frac{\pi}{2}\int_1^2 (2z-z^2)^2 \mathrm{d}z + \frac{13}{10}\pi = \left(\frac{4}{15}+\frac{13}{10}\right)\pi = \frac{47}{30}\pi.$

或 $m = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta} r^4 \sin\theta \mathrm{d}r = \frac{47}{30}\pi.$

**五、（本题满分8分）**

判断曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y - 2z - 2 = 0$ 不相交;

$$L = \frac{(x+y-2z-2)^2}{6} + \lambda(x^2+y^2-z), \begin{cases} L_x = \dfrac{x+y-2z-2}{3} + 2\lambda x \\ L_y = \dfrac{x+y-2z-2}{3} + 2\lambda y \\ L_z = \dfrac{-2(x+y-2z-2)}{3} - \lambda \\ x^2+y^2 = z \end{cases}$$

解得$M(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8})$，由问题的实际意义知，最短距离为$d_{min} = \frac{7\sqrt{6}}{24}$

**六、（本题满分8分）** $f_x(x,y) = ((y+1)^2+x)\mathrm{e}^x$，

$f(x,y) = ((y+1)^2+x-1)\mathrm{e}^x, f_y(x,y) = 2(y+1)\mathrm{e}^x$，得唯一驻点 $(0,-1)$，

$f_{xx}(0,-1) = ((y+1)^2+x+1)\mathrm{e}^x|_{(0,-1)} = 1, f_{yy}(0,-1) = 2\mathrm{e}^x|_{(0,-1)} = 2$，

$f_{xy}(0,-1) = 2(y+1)\mathrm{e}^x|_{(0,-1)} = 0, (0,-1)$ 是极小值点，极小值 $f(0,-1) = -1.$