第五章：等值演算与推理

- 本章的主要内容
  - 一阶逻辑等值式与基本的等值式
  - 置换规则、换名规则、代替规则
  - 前束范式
  - 一阶逻辑推理理论
- 本章与其他各章的关系
  - 本章的先行基础是前四章
  - 本章是集合论各章的先行基础

第一节：等值式与置换规则

5.1 等值式与置换规则

- 等值式(Equivalence)：公式*A*，*B*的等价式*A*↔*B*为永真式
  - 符号：*A*⇔*B*，也称*A*逻辑恒等于*B*

5.1 等值式与置换规则

- 第一类等值式：命题逻辑的重言式的代换实例
  - 理由：重言式的代换实例都是永真式
- 例
  - $\forall x\, F(x) \Leftrightarrow \neg\neg \forall x\, F(x)$ $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
  - $F(x) \rightarrow G(x) \Leftrightarrow \neg F(x) \vee G(x)$

$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

5.1 等值式与置换规则

- 第二类等值式:

1. 消去量词等值式

   给定有限个体域 D={a_1,a_2,…,a_n}

   $\forall x\, A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$

   $\exists x\, A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$

2. 量词否定等值式

   *x*在公式*A*(*x*)中自由出现

   $\neg\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

   $\neg\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

5.1 等值式与置换规则

- 例：设个体域为D＝{a, b, c}，将下面公式的量词消去

1. $\forall x\, F(x) \vee \exists y\, G(y)$

$\Leftrightarrow (F(a) \wedge F(b) \wedge F(c)) \vee (G(a) \vee G(b) \vee G(c))$

2. $\neg(\forall x\, F(x) \vee \exists y\, G(y))$

$\Leftrightarrow \exists x \neg F(x) \wedge \forall y \neg G(y)$

$\Leftrightarrow (\neg F(a) \vee \neg F(b) \vee \neg F(c)) \wedge$

$(\neg G(a) \wedge \neg G(b) \wedge \neg G(c))$

5.1 等值式与置换规则

- 第二类等值式：

3. 量词辖域收缩与扩张等值式

x在公式$A(x)$中自由出现，但不在B中自由出现

(1a) $\forall x\,(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x\,A(x) \vee B$

(1b) $\forall x\,(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x\,A(x) \wedge B$

(1c) $\forall x\,(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x\,A(x) \rightarrow B$

(1d) $\forall x\,(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x\,A(x)$

(2a) $\exists x\,(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x\,A(x) \vee B$

(2b) $\exists x\,(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x\,A(x) \wedge B$

(2c) $\exists x\,(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x\,A(x) \rightarrow B$

(2d) $\exists x\,(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x\,A(x)$

5.1 等值式与置换规则

第二类等值式:

4. 量词分配等值式

***x*在公式*A*(*x*)和*B*(*x*)中自由出现**

(1) $\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$

(2) $\exists x\,(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$

(3) $\exists x\,(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \rightarrow \exists x\, B(x)$

下列等值式不成立！

x在公式$A(x)$和$B(x)$中自由出现

(1) $\forall x\,(A(x) \lor B(x)) \Leftrightarrow \forall x\,A(x) \lor \forall x\,B(x)$

提示：任意实数，或者是有理数或者是无理数

或者任意实数是有理数，或者任意实数是无理数

(2) $\exists x\,(A(x) \land B(x)) \Leftrightarrow \exists x\,A(x) \land \exists x\,B(x)$

提示：存在实数，既是有理数又是无理数

存在实数是有理数，并且存在实数是无理数

5.1 等值式与置换规则

- 置换规则：给定$\phi(A)$
  - 若 $A \Leftrightarrow B$， 则$\phi(A) \Leftrightarrow \phi(B)$
- 换名规则：
  - $\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x'\, A(x')$，x′不在A中出现
  - $\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x'\, A(x')$，x′不在A中出现
- 代替规则
  - $A(x) \Leftrightarrow A(x')$，x′不在A中出现

回顾

- 两类基本等值式
- 命题逻辑的重言式的代换实例
- 与量词相关的等值式

1. 消去量词等值式

$$\forall x\, A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$$

$$\exists x\, A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$$

2. 量词否定等值式

$$\neg\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

回顾

- 第二类等值式：

3. 量词辖域收缩与扩张等值式

*x*在公式*A*(*x*)中自由出现，但不在*B*中自由出现

(1a) $\forall x\,(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \vee B$

(1b) $\forall x\,(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \wedge B$

(1c) $\forall x\,(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \rightarrow B$

(1d) $\forall x\,(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x\, A(x)$

(2a) $\exists x\,(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \vee B$

(2b) $\exists x\,(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \wedge B$

(2c) $\exists x\,(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \rightarrow B$

(2d) $\exists x\,(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x\, A(x)$

回顾

- 第二类等值式：

  4. 量词分配等值式

  *x*在公式*A*(*x*)和*B*(*x*)中自由出现

  (1) $\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$

  (2) $\exists x\,(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$

  (3) $\exists x\,(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \rightarrow \exists x\, B(x)$

回顾

- 置换规则
- 换名规则
- 代替规则

5.1 等值式与置换规则

- 例：消去既是约束出现又是自由出现的变项

1. $\forall x\, F(x,y,z) \rightarrow \exists y\, G(x,y,z)$

   $\Leftrightarrow \forall t\, F(t,y,z) \rightarrow \exists y\, G(x,y,z)$

   $\Leftrightarrow \forall t\, F(t,y,z) \rightarrow \exists w\, G(x,w,z)$

2. $\forall x\, (F(x,y) \rightarrow \exists y\, G(x,y,z))$

   $\Leftrightarrow \forall x\, (F(x,t) \rightarrow \exists y\, G(x,y,z))$

   $\Leftrightarrow \forall x\, (F(x,y) \rightarrow \exists t\, G(x,t,z))$

5.1 等值式与置换规则

- 给定D={a, b, c}, 消去下列公式的量词
  - $\forall x\,(F(x) \vee \exists y\, G(y))$

    $\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \vee \exists y\, G(y)$

    $\Leftrightarrow (F(a) \wedge F(b) \wedge F(c)) \vee (G(a) \vee G(b) \vee G(c))$
  - $\forall x\, \exists y\, F(x,y)$

    $\Leftrightarrow \forall x\,(F(x,a) \vee F(x,b) \vee F(x,c))$

    $\Leftrightarrow (F(a,a) \vee F(a,b) \vee F(a,c)) \wedge (F(b,a) \vee F(b,b) \vee F(b,c)) \wedge (F(c,a) \vee F(c,b) \vee F(c,c))$

5.1 等值式与置换规则

- 给定解释I如下：
  - $D=\{2, 3\}$
  - $a^* = 2$
  - $f^*(2) = 3, f^*(3) = 2$
  - $F^*(2) = F, F^*(3) = T$
  - $G^*(2,2)=G^*(2,3)=G^*(3,2)=T, G^*(3,3)=F$
  - $L^*(2,2)=L^*(3,3)=T, L^*(2,3)=L^*(3,2)=F$
- 求下列各式在I下的真值：
  - $\exists x\ (F(f(x)) \land G(x, f(x)))$
  - $\forall x \exists y L(x,y)$
  - $\exists y \forall x L(x,y)$

5.1 等值式与置换规则

- 求下列各式在I下的真值：
  - $\exists x\,(F(f(x)) \wedge G(x, f(x)))$

    $\Leftrightarrow (F(f(2)) \wedge G(2, f(2))) \vee (F(f(3)) \wedge G(3, f(3)))$

    $\Leftrightarrow (F(3) \wedge G(2, 3)) \vee (F(2) \wedge G(3, 2))$

    $\Leftrightarrow (T \wedge T) \vee (F \wedge T)$

    $\Leftrightarrow T$
  - $\forall x \exists y L(x,y)$

    $\Leftrightarrow T$
  - $\exists y \forall x L(x,y)$

    $\Leftrightarrow F$

第二节：前束范式

5.2 前束范式

- 前束范式(Prenex Normal)：一阶逻辑公式满足
  - 量词都出现在公式最前面
  - 量词的辖域一直延伸到公式末
  - 形如$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_k\ B$
  - Q为∀或∃，B不含量词
- 例：下列哪个为前束范式？
  - $\exists x\ \exists y\ (F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x,y))$
  - $\exists x\ (F(x) \wedge \exists y\ (G(y) \wedge \neg H(x,y)))$

5.1 等值式与置换规则

- 前束范式存在定理：一阶逻辑任何公式都存在等值的前束范式
  1. 将公式中的联接词→、↔换为¬、∨、∧
  2. 利用量词否定等值式把¬深入到原子公式前
  3. 利用换名规则或代替规则
  4. 利用量词辖域的扩张收缩律把量词移到全式的最前面

5.1 等值式与置换规则

- 例：求下面公式的前束范式
  - $\forall x\, F(x) \wedge \neg \exists x\, G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \wedge \neg \exists y\, G(y)$

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \wedge \forall y \neg G(y)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y\, (F(x) \wedge \neg G(y))$

或者

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \wedge \forall x \neg G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x\, (F(x) \wedge \neg G(x))$

5.1 等值式与置换规则

- 例：求下面公式的前束范式
  - $\forall x\, F(x) \vee \neg \exists x\, G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \vee \forall x \neg G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \vee \forall y \neg G(y)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y\, (F(x) \vee \neg G(y))$

5.1 等值式与置换规则

- 例：求下面公式的前束范式

$$\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$$

使用换名规则:

$$\begin{aligned}
&\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))\\
\Leftrightarrow\ &\forall zF(z)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))\\
\Leftrightarrow\ &\exists z(F(z)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))\\
\Leftrightarrow\ &\exists z\exists y(F(z)\rightarrow(G(x,y)\wedge H(x,y)))
\end{aligned}$$

5.1 等值式与置换规则

- 使用代替规则:

$$\forall x F(x) \to \exists y (G(x,y) \land H(x,y))$$
$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \to \exists y (G(z,y) \land H(z,y))$$
$$\Leftrightarrow \exists x (F(x) \to \exists y (G(z,y) \land H(z,y))$$
$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \to (G(z,y) \land H(z,y)))$$

第三节：推理理论

5.3 推理理论

- 逻辑(语义)蕴涵：给定$A_1,\ldots,A_k$和B
  - 符号：$\{A_1,\ldots,A_k\} \vDash B$
  - 对任意赋值v:
    - 如果$v(A_i)=T$,则$v(B)=T$
    - 或者存在A_i, 使得$v(A_i)=F$
  - 称由前提$A_1,\ldots,A_k$推出结论B的推理是有效的
  - B为有效结论
- 定理：$\{A_1,\ldots,A_k\} \vDash B$ 当且仅当

  $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$ 为重言式

5.3 推理理论

- 例：证明 $\exists x \neg A(x) \vDash \neg \forall x A(x)$

证明（反证法）：设 $\exists x \neg A(x) \nvDash \neg \forall x A(x)$

存在个体域D的赋值I，

$I(\exists x \neg A(x))=T$，$I(\neg \forall x A(x))=F$

由于 $I(\exists x \neg A(x))=T$，存在 $a \in D$，$\neg A(a)=T$

故存在 $a \in D$，$A(a)=F$

由于 $I(\neg \forall x A(x))=F$，$I(\forall x A(x))=T$

矛盾！

复习

- 公式A和B等值：$A \leftrightarrow B$为永真式
- 两类基本等值式：
  1. 命题逻辑的重言式的代换实例
  2. 关于量词的等值式
- 三条规则：
  1. 置换规则
  2. 换名规则
  3. 代替规则
- 前束范式
- 推理正确：$\{A_1,\ldots,A_k\} \vDash B$ 当且仅当 $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$ 为重言式

5.3 推理理论

- 第一组　命题逻辑推理定律代换实例

  例如：$\forall xF(x)\wedge\exists yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$

  为化简律代换实例

- 第二组　由基本等值式生成

  例如：由 $\neg\forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$ 生成

  $\neg\forall xA(x) \Rightarrow \exists x\neg A(x)$ 与 $\exists x\neg A(x) \Rightarrow \neg\forall xA(x)$

- 第三组　常用的推理定律

  例如：（1）$\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

  （2）$\exists x(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

  注意：反向蕴涵式不成立

5.3 推理理论

- 证明：

  1. $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \models \forall x(A(x)\vee B(x))$
  2. $\forall x(A(x)\vee B(x)) \not\models \forall xA(x)\vee\forall xB(x)$

5.3 推理理论

- 全称量词消去规则(UI)

$$\frac{\forall x\, A(x)}{\text{结论：}A(y)} \qquad \frac{\forall x\, A(x)}{\text{结论：}A(c)}$$

- 条件
  - x不在$\forall y$和$\exists y$的辖域内自由出现
  - $A(y)$指由$A(x)$把y代入x得到

UI条件

❑ 设真命题 $\forall x \exists y(x > y)$

推导如下：

1. $\exists y(y > y)$ 使用UI规则

该结论是错误的！！！

取解释I：个体域为实数域，$F(x, y): x > y$

原因在于：***x*在∃*y*的辖域内自由出现**

5.3 推理理论

- 全称量词引入规则(UG)，给定前提 $\Gamma=\{A_1,\ldots,A_n\}$

$$\frac{A(x)}{\text{结论：}\forall x\, A(x)}$$

- 条件：
  - x不在Γ中任何公式自由出现

UG条件

- 前提：F(x), F(x)→G(x)
  结论：∀x G(x)
  推导如下：
  1. F(x)→G(x)　　　　前提引入
  2. F(x)　　　　　　　前提引入
  3. G(x)　　　　　　　假言推理
  4. ∀x G(x)　　　　　使用UG规则

  该结论是错误的！！！

  取解释*I*：个体域为整数域*Z*，*F*(*x*)：*x*是偶数，*G*(*x*)：*x*被2整除

原因在于：*x*在Γ中的公式自由出现

5.3 推理理论

- 存在量词消去规则(EI)，给定前提

  $\Gamma=\{A_1,\ldots,A_n\}$

  $$\frac{\exists x\, A(x)}{}$$

  结论：$A(c)$

- 条件：
  - c不在Γ的任何公式出现
- 例：要证明如果行列式有两行或两列成比例，则行列式为零，只须取行列式的任意两行或两列，设它们成比例，证明行列式为零

EI规则

- 设真命题 $\exists x(c<x)$

  推导如下：

  1. $c<c$ 使用EI规则

  该结论是错误的！！！

  取解释I：个体域为实数域

  原因在于：c在Γ中的公式自由出现

5.3 推理理论

- 存在量词引入规则(EG)

$$\frac{A(y)}{\text{结论：}\ \exists x\, A(x)} \qquad \frac{A(c)}{\text{结论：}\ \exists x\, A(x)}$$

- 条件：
  - y和c分别不在$\exists x$和$\forall x$的辖域内自由出现

EG规则

- 设个体域是实数域，真命题 $\exists x(x>0)$

  推导如下：

  1. $\exists x\exists x(x>x)$　　使用EG规则

  该结论是错误的！！！

  原因在于：c在$\exists x$的辖域内自由出现

5.3 推理理论

- 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$
  - ① 字母表
  - ② 合式公式
  - ③ 推理规则集
  - ④ 关于量词的规则集

5.3 推理理论

- 形式推演(语法蕴涵)：给定$A_1,\ldots,A_k$和B
  - 符号：$\{A_1,\ldots,A_k\} \vdash B$
  - 存在公式序列$C_1, C_2,\ldots,C_n$，对每个$i(i=1,\ldots,n)$,
    - C_i是某个A_j, 或者
    - C_i是由序列中前面的公式应用推理规则得到
    - $C_n=B$
  - 称$C_1,\ldots,C_n$是有$A_1,\ldots,A_k$推B的证明

5.3 推理理论

- 证明苏格拉底论证
  - 凡是人都要死, 苏格拉底是人, 推出：苏格拉底要死
  - $M(x)$：x是人, $D(x)$：x是要死的, s：苏格拉底
  - 前提：$\forall x(M(x)\rightarrow D(x))$, $M(s)$
  - 结论：$D(s)$

证明:

①	$M(s)$	前提引入
②	$\forall x(M(x)\rightarrow D(x))$	前提引入
③	$M(s)\rightarrow D(s)$	$\forall$-
④	$D(s)$	假言推理

5.3 推理理论

- 构造下面推理的证明
  - 前提： $\forall x(F(x)\rightarrow G(x)), \forall x(G(x)\rightarrow H(x))$
  - 结论： $\forall xF(x)\rightarrow\forall xH(x)$

证明：

① $\forall xF(x)$	附加前提引入
② $F(x)$	①$\forall-$
③ $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
④ $F(x)\rightarrow G(x)$	③$\forall-$
⑤ $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$	前提引入
⑥ $G(x)\rightarrow H(x)$	⑤$\forall-$
⑦ $F(x)\rightarrow H(x)$	④⑥假言三段论
⑧ $H(x)$	②⑦假言推理
⑨ $\forall xH(x)$	⑧$\forall+$

- 构造下面推理的证明

  前提：$\exists xF(x)\to\forall xG(x)$

  结论：$\forall x(F(x)\to G(x))$

证明：

① $\exists xF(x)\to\forall xG(x)$	前提引入
② $\forall x\forall y(F(x)\to G(y))$	①置换
③ $\forall x(F(x)\to G(z))$	②$\forall-$
④ $F(z)\to G(z)$	③$\forall-$
⑤ $\forall x(F(x)\to G(x))$	④$\forall+$

5.3 推理理论

- 构造下面推理的证明
  - 前提： $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$，$\neg Q(a)$
  - 结论： $\forall x \neg P(x)$?

证明：

① $\neg Q(a)$

② $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$

③ $P(a)\rightarrow Q(a)$

④ $\neg P(a)$

⑤ $\forall x \neg P(x)$?

5.3 推理理论

- 在自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$中，构造推理的证明：

  人都喜欢吃蔬菜。但不是所有的人都喜欢吃鱼。所以, 存在喜欢吃蔬菜而不喜欢吃鱼的人。

解：

令$F(x)$: x为人，$G(x)$: x喜欢吃蔬菜，

$H(x)$: x喜欢吃鱼.

- 前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)), \neg\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$
- 结论：$\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$

5.3 推理理论

- 证明：用归谬法

(1) $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$	结论否定引入
(2) $\forall x\neg(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$	(1)置换
(3) $\neg(F(y)\wedge G(y)\wedge\neg H(y))$	(2)$\forall-$
(4) $G(y)\rightarrow\neg F(y)\vee H(y)$	(3)置换
(5) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
(6) $F(y)\rightarrow G(y)$	(5)$\forall-$
(7) $F(y)\rightarrow\neg F(y)\vee H(y)$	(4)(6)假言三段论
(8) $F(y)\rightarrow H(y)$	(7)置换
(9) $\forall y(F(y)\rightarrow H(y))$	(8)$\forall+$
(10) $\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$	(9)置换
(11) $\neg\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$	前提引入
(12) 0	(10)(11)合取

作业

- 5
- 12
- 13