第十一章: 格与布尔代数

第一节：格的定义与性质

第二节：分配格、有补格与布尔代数

第一节：格的定义与性质

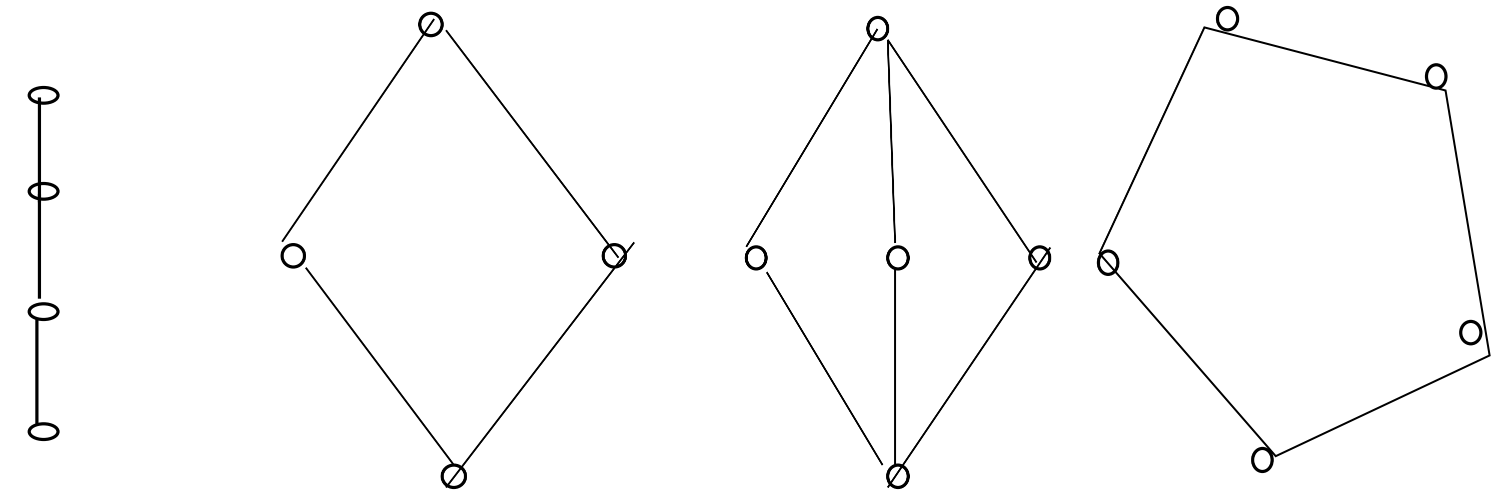
引言

- 格和布尔代数都是抽象的代数系统，与前面不同的是在于格和布尔代数中次序关系具有重要的意义
- 格首先在偏序集合的基础上进行讨论，然后将讨论代数系统格，对代数系统的格施加某些限制可得到布尔代数。布尔代数是一种特殊的代数系统，而且是一种特殊的格
- 格也是一类非常重要的代数结构

11.1 格的定义与性质

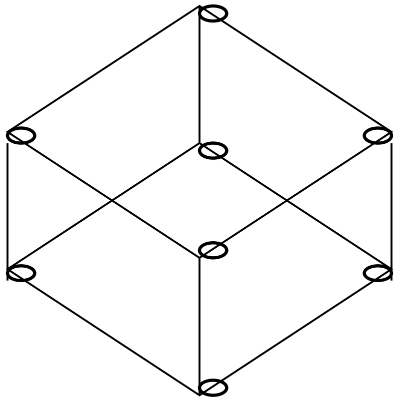
- **格**：偏序集合<L,≼ >，满足
  - **每一对元素a,b∈L都拥有一个最小上界和最大下界**
- **符号**：
  - **最大下界**：$\wedge$
  - **最小上界**：$\vee$

11.1 格的定义与性质

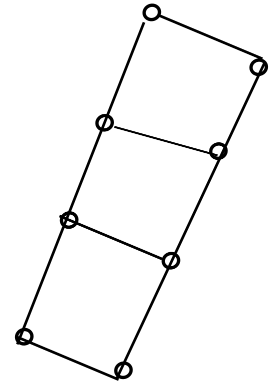


(a) (b) (c) (d)

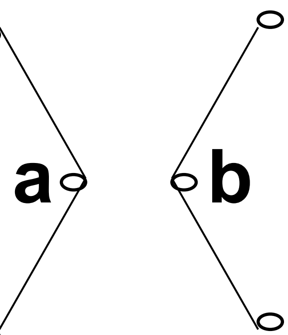
11.1 格的定义与性质



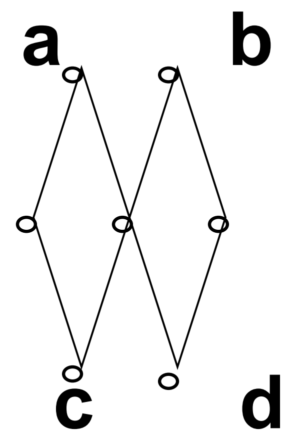
(f)



(g)



(h)



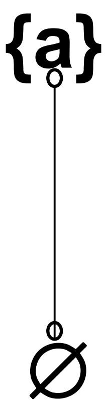
(i)

11.1 格的定义与性质

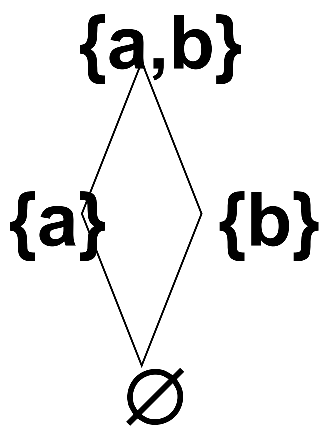
例: 设S是一集合,P(S)是S的幂集,则$\langle P(S),\subseteq\rangle$是一个偏序集,$\forall A,B\in P(S)$,易证明,

$A\wedge B=A\cap B\in P(S)$, $A\vee B=A\cup B\in P(S)$

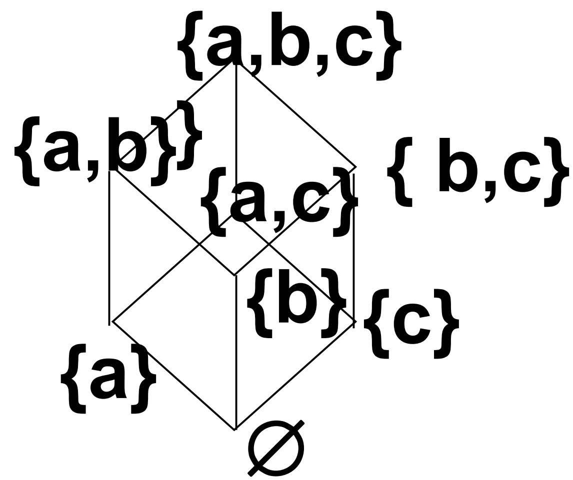
$\therefore\langle P(S),\subseteq\rangle$是一个格。



S={a}



S={a,b}



S={a,b,c}

11.1 格的定义与性质

例：I_+是正整数集合，D是整除关系，$<I_+, D>$是偏序集，$\forall a, b \in I_+$，

$a \wedge b$=最大公约数，$a \vee b$=最小公倍数

证明：若c是{a，b}的下界，则$c \leq a$，$c \leq b$，即c能整除a，能整除b，所以c是a，b的公约数。若c是{a，b}的最大下界，则c是a，b的最大公约数。反之，同样可证。

因此，$<I_+, D>$是格，因为$\forall a, b \in I_+$都有最大公约数和最小公倍数。

11.1 格的定义与性质

- **对偶式：** 格中元素用运算符$\wedge$,$\vee$连接起来的的一个表达式f，如将f中的$\wedge$换成$\vee$，将$\vee$换成$\wedge$，所形成的表达式称为f的对偶式记作f^*
- **对偶命题：** 两个表达式f,g用关系符$\leq$,$\geq$连接成为命题，将表达式f,g用f^*,g^*代替，$\leq$与$\geq$互换，形成的命题称为原命题的对偶命题
- 例：$f=(a\vee b)\wedge c\preccurlyeq c$,

  $f^*=(a\wedge b)\vee c\succcurlyeq c$

11.1 格的定义与性质

对偶原理: 设f是含有格中元素以及符号＝，≼，≽，∨，∧等的命题。若f对一切格为真，则f的对偶命题f^*也对一切格为真

- 例：如果对一切格L，$\forall a,b\in L,(a\vee b)\wedge c\preccurlyeq c$

  则$f^*=(a\wedge b)\vee c\succcurlyeq c$

11.1 格的定义与性质

- 定理：**设$<L, \preccurlyeq>$是一格，则对于所有的$a,b\in L$**
  $a\preccurlyeq b \Leftrightarrow a\wedge b=a \Leftrightarrow a\vee b=b$

- 定理：**设$<L, \preccurlyeq>$是一格，则对于所有的a,b，$c,d\in L$**
  - $a\preccurlyeq b$且$d\preccurlyeq c \Rightarrow (a\vee d)\preccurlyeq(b\vee c)$
  - $a\preccurlyeq b$且$d\preccurlyeq c \Rightarrow (a\wedge d)\preccurlyeq(b\wedge c)$

11.1 格的定义与性质

- **定理：** 设<L, ≤>是一格，则对于所有的a,b,c∈L有：
  (1) 交换律：$a \vee b=b \vee a$，$a \wedge b=b \wedge a$
  (2) 结合律：$(a \vee b) \vee c=a \vee (b \vee c)$
  $(a \wedge b) \wedge c=a \wedge (b \wedge c)$
  (3) 幂等律：$a \vee a=a$，$a \wedge a=a$
  (4) 吸收律：$a \vee (a \wedge b)=a$，$a \wedge (a \vee b)=a$

11.1 格的定义与性质

证明结合律： $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$

$(a\vee b)\vee c \geqslant a\vee b \geqslant a$

$(a\vee b)\vee c \geqslant a\vee b \geqslant b$

$(a\vee b)\vee c \geqslant c \therefore (a\vee b)\vee c \geqslant b\vee c$

$\therefore (a\vee b)\vee c \geqslant a\vee(b\vee c)$

同理 $a\vee(b\vee c) \geqslant (a\vee b)\vee c$

因为 $\geq$ 的反对称性，$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$

11.1 格的定义与性质

从现在开始讨论代数系统的格，把格看成是一个特殊类型的代数系统。

- 格的另一种定义：**设$<L,*,\oplus>$是一个代数系统，L是一非空集合，*和 $\oplus$ 是L上的二个二元运算。若*和 $\oplus$满足交换律，结合律，幂等律，吸收律，则称此代数系统为格**

为什么可以这么定义？

11.1 格的定义与性质

对应定理： 设<L,*, ⊕ >是一个代数系统格，则在L中一定存在一个偏序关系≼，并在≼的作用下，对任一a,b∈L，

$$a \oplus b = a \vee b, \quad a * b = a \wedge b$$

由上述定理可得以下结论：

（1）在<L,*, ⊕ >的代数系统格中，可以定义一个L上的偏序关系≼，即

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a * b = a \Leftrightarrow a \oplus b = b$$

（2）在格<L, ≼>中，可以定义二个运算*和⊕，有

$$a \oplus b = a \vee b, \quad a * b = a \wedge b$$

11.1 格的定义与性质

对应定理: 设<L,*, ⊕ >是一个代数系统格，则在L中一定存在一个偏序关系≼，并在≼的作用下，对任一a,b∈L，

$$a \oplus b = a \vee b,\quad a * b = a \wedge b$$

证明：定义二元关系≼：∀ a，b∈L

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$$

需要证明≼是L上的偏序, 且<L, ≼ >为格

11.1 格的定义与性质

证明$\preccurlyeq$是L上的偏序 $(a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \oplus b = b)$

自反性： 根据幂等律， $\forall\, a \in L$， $a \oplus a = a$，

故$a \preccurlyeq a$

反对称性： $\forall\, a, b \in L$

$a \preccurlyeq b$ 且 $b \preccurlyeq a \Leftrightarrow a \oplus b = b$ 且 $b \oplus a = a$

$\Rightarrow a = b \oplus a = a \oplus b = b$($\oplus$适合交换律)

传递性： $\forall\, a, b, c \in L$

$a \preccurlyeq b$ 且 $b \preccurlyeq c \Leftrightarrow a \oplus b = b$ 且 $b \oplus c = c$

$\Rightarrow a \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \Rightarrow a \oplus c = (a \oplus b) \oplus c$

$\Rightarrow a \oplus c = b \oplus c = c \Rightarrow a \preccurlyeq c$

证明<L, $\preccurlyeq$ >为格 $(a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \oplus b = b)$

最小上界存在性： $\forall\, a，b \in L$

$a \oplus (a \oplus b) = (a \oplus a) \oplus b = a \oplus b$

$b \oplus (a \oplus b) = a \oplus (b \oplus b) = a \oplus b$

$\Rightarrow a \preccurlyeq a \oplus b$且$b \preccurlyeq a \oplus b$，故$a \oplus b$是$\{a,b\}$的上界

设c为$\{a,b\}$的上界，则$a \oplus c = c$且$b \oplus c = c$,故

$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a \oplus c = c$

$\Rightarrow a \oplus b \preccurlyeq c$，故 $a \oplus b$是$\{a,b\}$的最小上界

同理可证最大下界存在性

11.1 格的定义与性质

- 子格：设<L， ∧， ∨>是格，H是L的非空子集，如果在∧，∨运算下H是封闭的，称<H ，∧，∨>是<L， ∧，∨>的子格

H对于结合律，交换律，幂等律和吸收律仍然成立的，故只要求H对运算封闭,<H,*,⊕>就是格

第二节：分配格、有补格与布尔代数

11.2 分配格、有补格

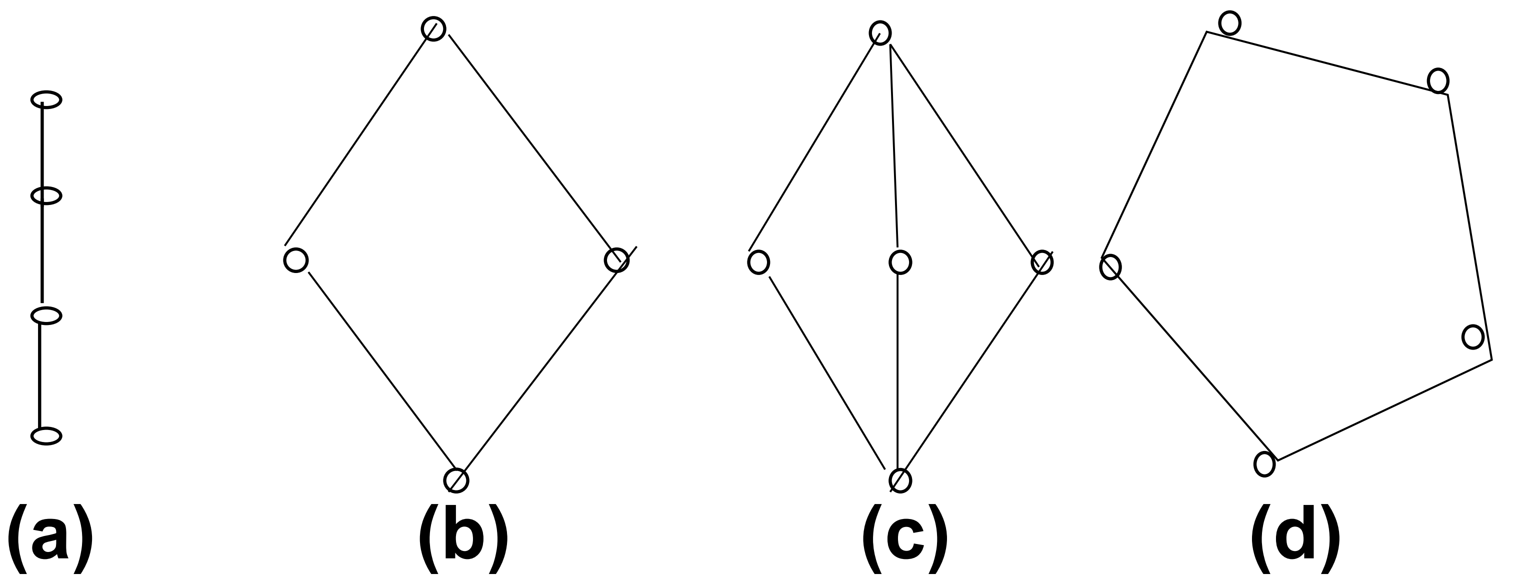
- **分配格：设<L, ∧, ∨>是格,且$\forall a,b,c \in L$**

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

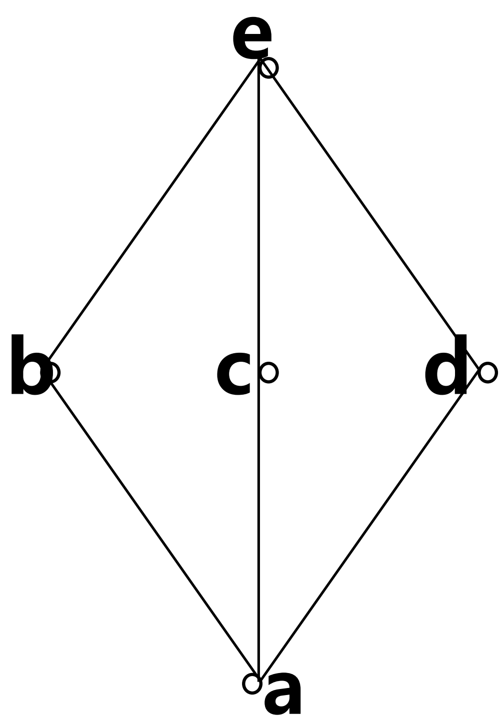
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

11.2 分配格、有补格

- 例:如图两个格是不是分配格?

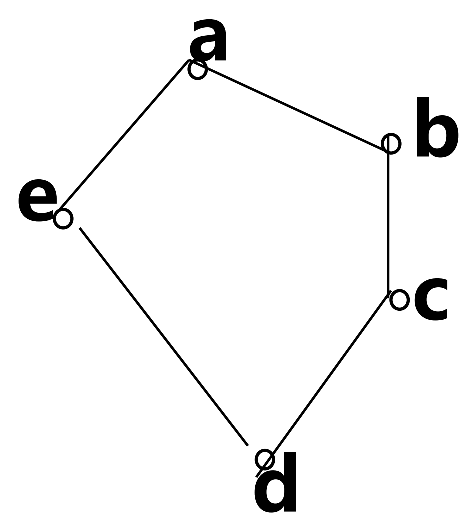


11.2 分配格、有补格



钻石格

如$b*(c\oplus d)$和$(b*c)\oplus(b*d)$



五角格

如$c\oplus(e*b)$和$(c\oplus e)*(c\oplus b)$

11.2 分配格、有补格

- 分配格的充分必要条件定理：**设L是格，则L是分配格当且仅当L中不含与钻石格或五角格同构的子格**

- **推论:**
  - **小于五元的格都是分配格**
  - **任何一条链都是分配格**

11.2 分配格、有补格

- **全上（下）界a：**给定格<L, ≼>，对于任何元素b，都有b≼a(a≼b)

- **一个格的全下界（全上界）是*唯一*的**
  - **分别记为0（1）**

11.2 分配格、有补格

- **有界格$<L,\preccurlyeq>$：** $<L,\preccurlyeq>$ 为格，L中有全上界(记为1)和全下界(记为0)
  - 记作$<L,\wedge,\vee,1,0>$

- 例:$<P(S),\cap,\cup>$，P(S)是集合S的幂集
  - 全上界是全集S,全下界是$\varnothing$

- 例:$< Z_+, \leq>$
  不是有界格,因其不存在全上界,(全下界是存在的,是整数1)

11.2 分配格、有补格

- **有界格的性质:在有界格中成立,$\forall a\in L$**
  - 同一律：$a\oplus 0=a, a*1=a$
  - 零律：$a*0=0, a\oplus 1=1$

证明: 因0是全下界,$\forall a\in L, 0\le a$

$a*0=0 \quad a\oplus 0=a$

1是全上界, $\forall a\in L$，$a\le 1$

$a*1=a, a\oplus 1=1$

11.2 分配格、有补格

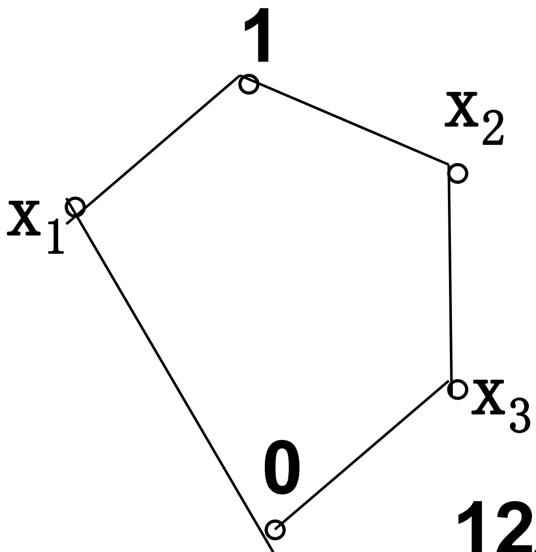
- **补元:** 设< L，∧，∨，0，1>是有界格, $a \in L$, 如果存在元素 $b \in L$ 使得

$$a \wedge b = 0, \quad a \vee b = 1$$

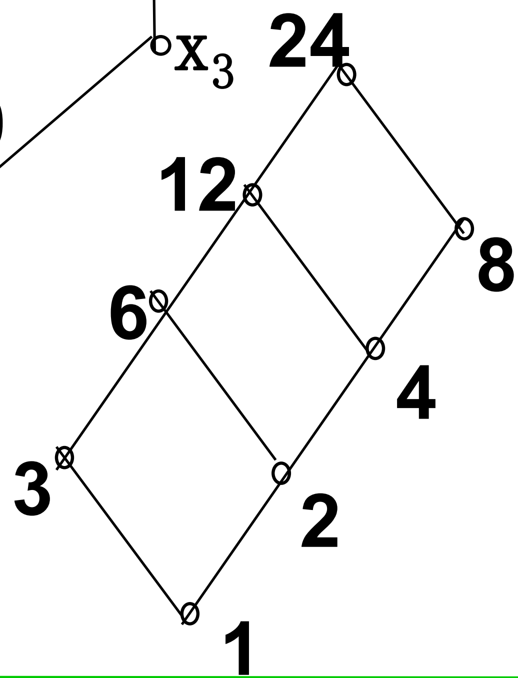
则称b为元素a的补元，记为a'

在有界格中有的元素存在补元,也可能有的元素不存在补元，也可能有的元素存在两个或两个以上补元

11.2 分配格、有补格



x_1的**补**元有**两个**x_2,x_3,
x_3 的**补**元只有一**个**是x_1,
0和1是互**为补**元。



在<S24,D>中,全上界为24,全下界为1,
1和24互为补元,
3 和 8 互 为 补 元， 因 3*8=1,
3+8=24,
2,4,6,12的补元是什么？

11.2 分配格、有补格

- **补元唯一性定理:**在**有界分配格**中，如果元素 $a \in L$ 有一个补元，则此补元是唯一的

证明： 假定b和c都是a的补元，则

$$a*b=0=a*c \qquad a\oplus b=1=a\oplus c$$

由分配格的性质，得 $b=c$

- **有补格:**如果在一个有界格中，每个元素都**至少**有一个补元素，则称此格为有补格。

回顾

- **格：** 偏序集合<L,≼ >，满足
  - 每一对元素a,b∈L都拥有一个最小上界和最大下界
- **对偶原理：** 设f是含有格中元素以及符号=，≼，≽，∨，∧等的命题。若f对一切格为真，则f的对偶命题f*也对一切格为真

回顾

- 格的两种定义：
- ◆偏序集合<L,≼ >，满足每一对元素a,b∈L都拥有一个最小上界和最大下界
- ◆代数系统<L,*, ⊕ >，*和⊕是L上的两个二元运算，*和⊕满足交换律，结合律，幂等律，吸收律
- ◆**对应定理：**设<L,*, ⊕ >是一个代数系统格，则在L中一定存在一个偏序关系≼，并在≼的作用下，对任一a,b∈L，

$$a \oplus b = a \vee b,\quad a * b = a \wedge b$$

回顾

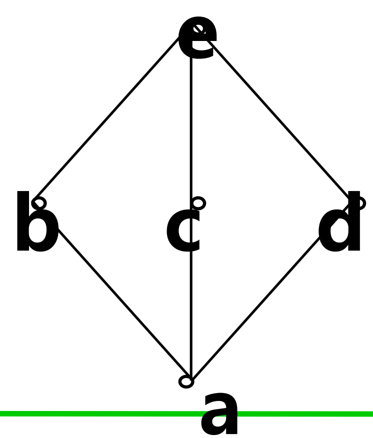
- 特殊的格：

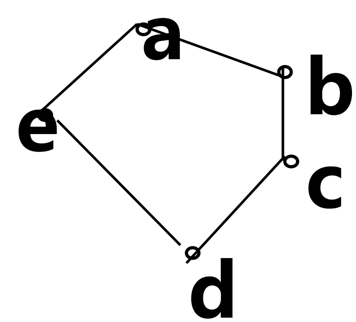
◆分配格：设<L， ∧， ∨>是格,且∀a,b,c∈L

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

充要条件：L是分配格当且仅当L中不含与钻石格或五角格同构的子格





回顾

- 有界格：<L,≼> 为格，L中有全上界(记为1)和全下界(记为0)
  - 记作< L， ∧， ∨ ， 1， 0>
  - 同一律和零律：$a\oplus 0=a, a*1=a$;
    $a*0=0, a\oplus 1=1$
- 有补格：在一个有界格中，每个元素都至少有一个补元素
  - 补元：有界格,$a\in L$,如果存在元素$b\in L$，使得

    $$a\wedge b=0,\ a\vee b=1$$

    则称b为元素a的补元，记为a'
  - 唯一性定理：在**有界分配格**中，如果元素$a\in L$有一个补元，则此补元是唯一的

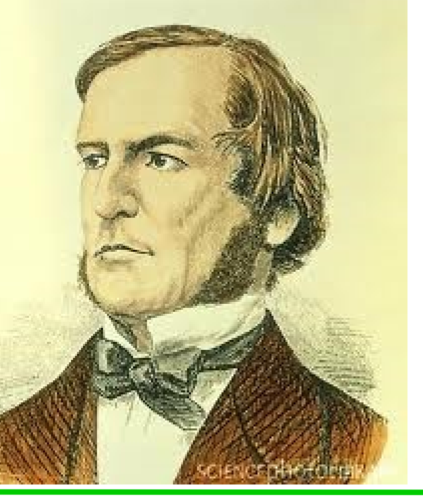
第十一章: 格与布尔代数

- 第一节：格的定义与性质

- 第二节：分配格、有补格与布尔代数

布尔代数简介

- **1854年由George Boole在他的著作:*The Laws of Thought*中提出**
- **在电子工程和计算机科学中有很多实践应用**
  - **电子工程领域专门化了的布尔代数也叫做逻辑代数**
  - **计算机科学领域专门化了的布尔代数也叫做布尔逻辑**

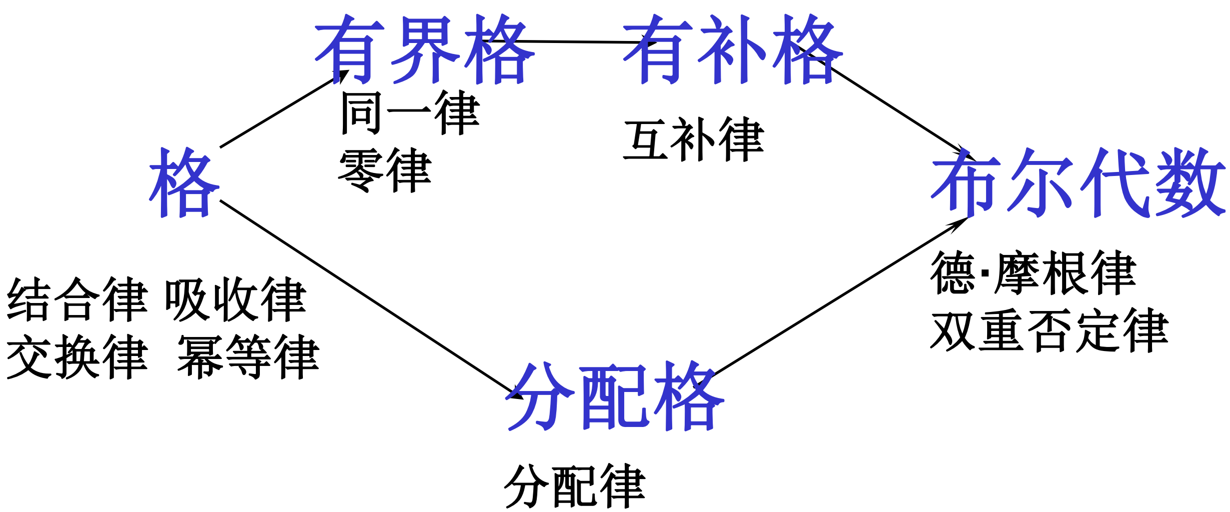


11.2 布尔代数

- **布尔代数:**又称有补分配格，既是有补格，又是分配格

布尔代数是有界格,存在全下界记为0,存在全上界记为1,由于是有补格,每个元素均存在补元,由于是有补分配格,每个元素均存在且有唯一的补元,因而求补元可以看作是一个运算,可以把a的补元记为a’,今后用<B，∧，∨，′，0，1>来表示一个布尔代数。

11.2 布尔代数



11.2 布尔代数

- **常见的布尔代数:**
  - $<P(A),\cup,\cap,\sim,\varnothing,A>$是个布尔代数,称此为**集合代数**,其中,补运算~,全下界∅,全上界A
  - S是命题公式的全体,则$<S,\vee,\wedge,\neg,0,1>$是一个布尔代数,称之为**命题代数**

11.2 布尔代数

- **定理：** 给定布尔代数<B，∧，∨，′，0，1>
  - ① 对于每一个$a\in B$，都有$(a')'=a$
  - ② 对任意元素$a,b\in B$,a和b有补元素a',b',则$(a\wedge b)'=a'\vee b'$,$(a\vee b)'=a'\wedge b'$

证明： ①显然成立，证明②

$$(a\wedge b)\vee(a'\vee b')=(a\vee a'\vee b)\wedge(b\vee a'\vee b')$$

$$=1$$

类似可以证明：$(a\wedge b)\wedge(a'\vee b')=0$

所以$(a\wedge b)'=a'\vee b'$

同理可以证$(a\vee b)'=a'\wedge b'$

11.2 布尔代数

- **等价定义：** 设$\langle B, *, \oplus \rangle$是代数系统,如果 $\forall a,b,c \in B$,满足如下：

H1:$a*b=b*a, a\oplus b=b\oplus a$ (交换律)

H2:$a*(b\oplus c)=(a*b)\oplus(a*c)$,

$a\oplus(b*c)=(a\oplus b)*(a\oplus c)$ (分配律)

H3:B中有元素0和1,

对$\forall a\in B, a*1=a, a\oplus 0=a$ (同一律)

H4:$\forall a\in B$,有一$\bar{a}\in B$,使

$a\oplus\bar{a}=1, a*\bar{a}=0$ (互补律)

则$\langle B,*,\oplus,\bar{\ },0,1\rangle$是布尔代数

11.2 布尔代数

例：设S_{110}={1,2,5,10,11,22,55,110}是110的所有因数的集合,令glb,lub是最大公约数和最小公倍数运算。下面简记为glb—*,lub—⊕

证明: <S_{110},*,⊕>是一个布尔代数。

证明:

110=1×2×5×11质因子分解式中因子是不重复的。记(x)为x分解的质因数的集合,例(55)={1,5,11}。

容易验证,交换律显然成立。

11.2 布尔代数

$\forall x,y,z \in S_{110}$,

$x*(y\oplus z)=(x)\cap((y)\cup(z))$

$=((x)\cap(y))\cup((x)\cap(z))=(x*y)\oplus(x*z)$

同理$x\oplus(y*z) = (x\oplus y)*(x\oplus z)$

分配律成立。

显然1是S_{110}的全下界,110是S_{110}的全上界。

$x*110=x, x\oplus 1=x$,同一律成立。

11.2 布尔代数

记$\neg x=110/x$,

因110中质因数分解中质因数不重复。

故$\neg x$与x的质因数没有重复的。

$\therefore\ \neg x*x=1,\ \neg x\oplus x=(\neg x)\cup(x)=110$

互补律是成立,

$\therefore <S_{110},*,\oplus,\neg,1,110>$是布尔代数。

小结

- 格：定义，基本性质。
- 从代数系统角度看格：格代数系统定义，子格，格同态，积代数。
- 特殊的格：分配格，有界格，有补格，有补分配格。
- 布尔代数：定义，性质，子布尔代数，布尔同态，有限布尔代数的原子表示。

作业

- 1
- 9
- 10
- 12
- 16
- 17