第十五章：欧拉图与哈密顿图

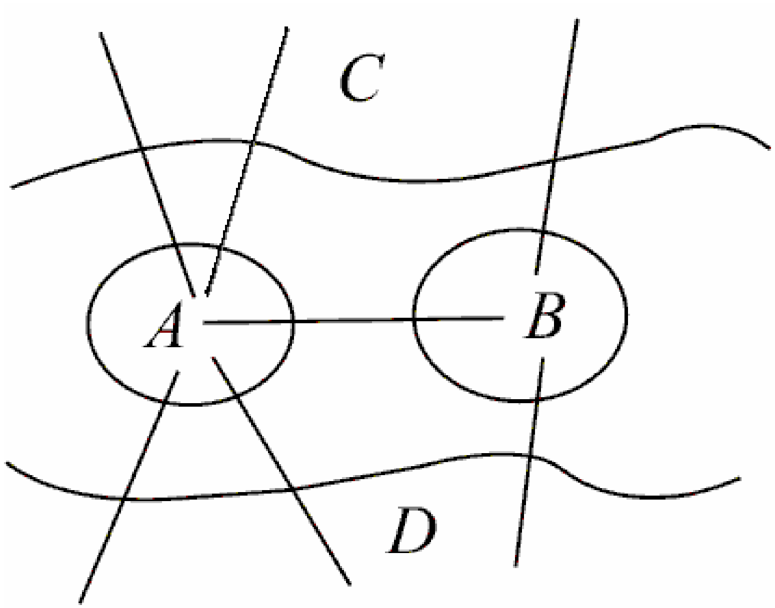
第一节：欧拉图

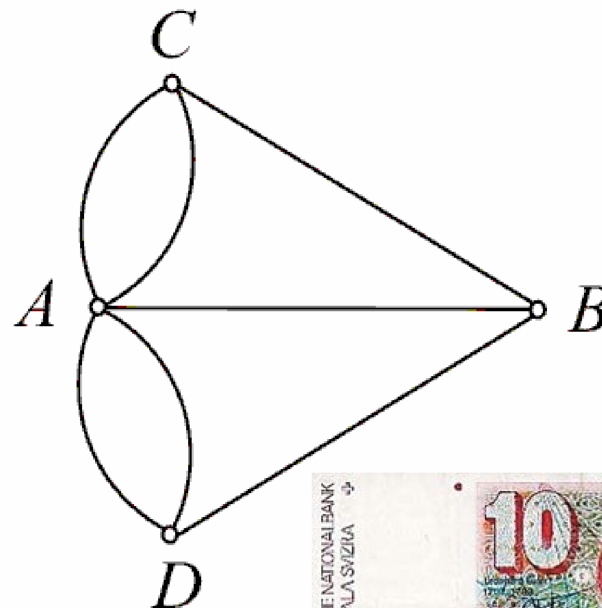
第二节：哈密顿图

第三节：带权图与货郎担问题

15.1 欧拉图

历史背景：哥尼斯堡七桥问题与欧拉图





欧拉图定义

定义15.1

(1) **欧拉通路**——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

(2) **欧拉回路**——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

(3) **欧拉图**——具有欧拉回路的图.

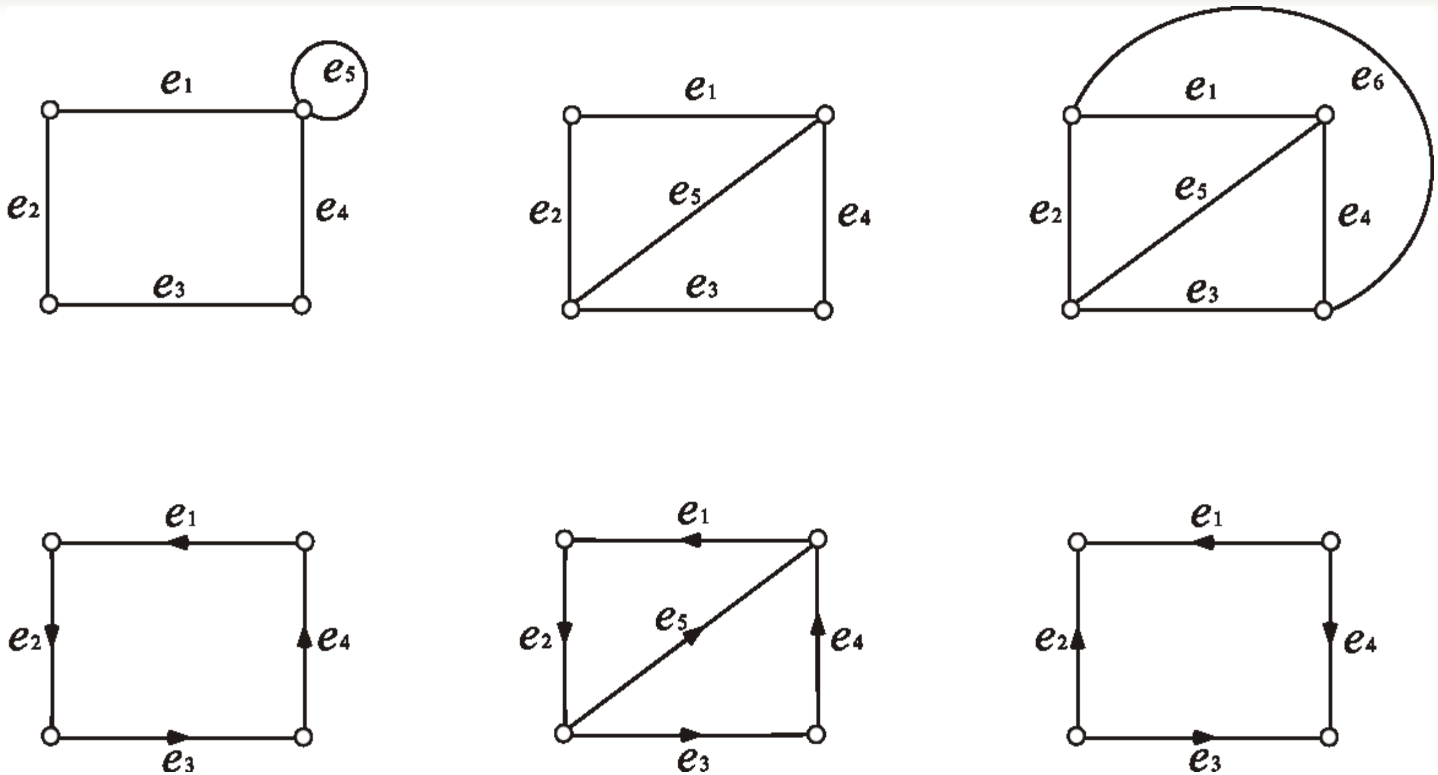
(4) **半欧拉图**——具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

几点说明:

规定平凡图为欧拉图.

环不影响图的欧拉性.

欧拉图实例



上图中，(1) ,(4) 为欧拉图，(2),(5)为半欧拉图，(3),(6)既不是欧拉图，也不是半欧拉图. 在(3),(6)中各至少加几条边才能成为欧拉图？

无向欧拉图的判别法

定理15.1 无向图G是欧拉图当且仅当G连通且无奇度数顶点.

证明： 若G为平凡图无问题. 下设G为 n 阶 m 条边的无向图.

必要性 设C为G中一条欧拉回路.

(1) G 连通显然.

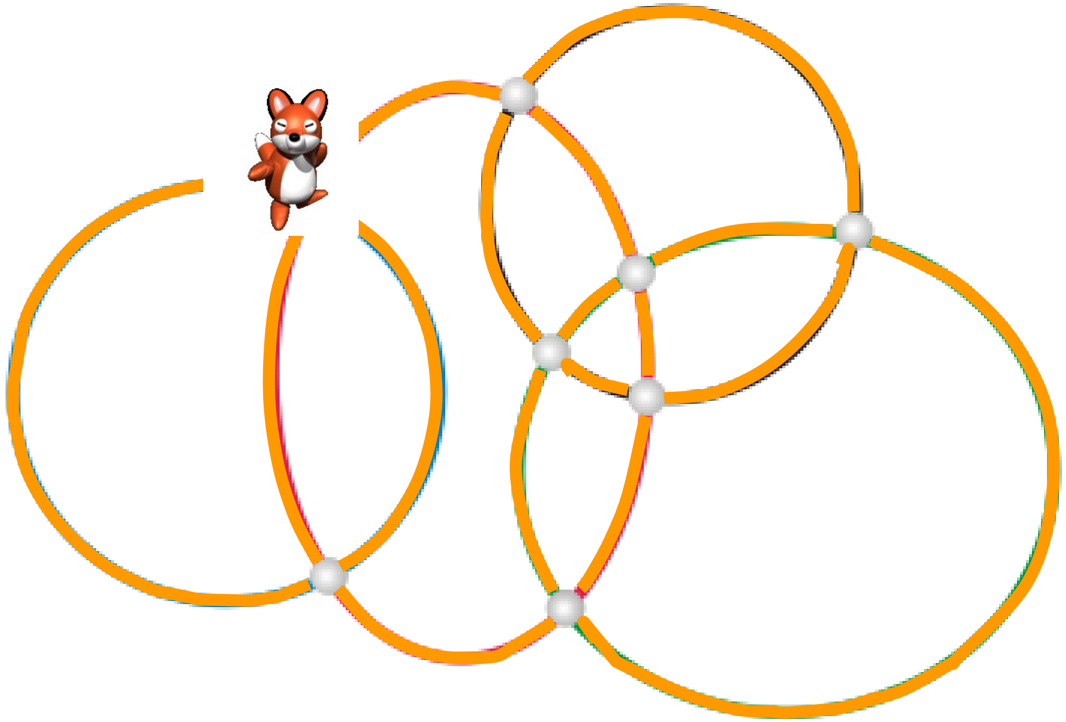
(2) $\forall v_i \in V(G)$，v_i在C上每出现一次获2度，所以v_i为偶度顶点.
由v_i的任意性，结论为真.

充分性 对边数m做归纳法（第二数学归纳法）.

(1) $m=1$时，G为一个环，则G为欧拉图.

(2) 设$m \le k$（$k \ge 1$）时结论为真，$m=k+1$时证明

从以上证明不难看出：欧拉图是若干个边不重的圈之并，见示意图.



欧拉图的判别法

定理15.2 无向图G是半欧拉图当且仅当G 连通且恰有两个奇度顶点.

证 必要性简单.

充分性（利用定理15.1）

设u,v为G 中的两个奇度顶点，令

$$G' = G \cup (u,v)$$

则G' 连通且无奇度顶点，由定理15.1知G'为欧拉图，因而存在欧拉回路C，令

$$\Gamma = C - (u,v)$$

则Γ为 G 中欧拉通路.

有向欧拉图的判别法

定理15.3 有向图D是欧拉图当且仅当D是强连通的且每个顶点的入度都等于出度.

本定理的证明类似于定理15.1.

定理15.4 有向图D是半欧拉图当且仅当D是单向连通的，且D中恰有两个奇度顶点，其中一个的入度比出度大1，另一个的出度比入度大1，而其余顶点的入度都等于出度.

本定理的证明类似于定理15.1.

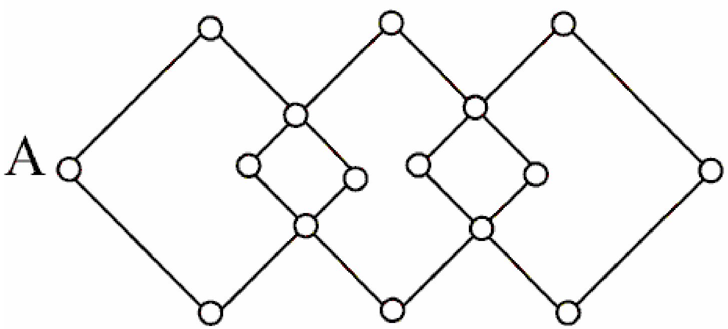
定理15.5 G是非平凡的欧拉图当且仅当G是连通的且为若干个边不重的圈之并.

可用归纳法证定理15.5.

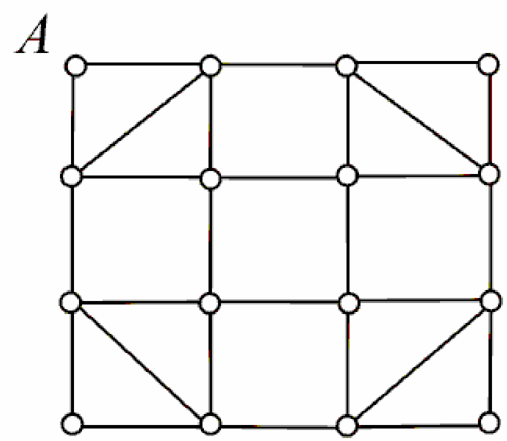
例题

例1 设G是欧拉图，但G不是平凡图，也不是一个环，则$\lambda(G) \geq 2$.

证 只需证明G中不可能有桥（如何证明？）



(1)



(2)

上图中，(1),(2)两图都是欧拉图，均从A点出发，如何一次成功地走出一条欧拉回路来？

Fleury算法

算法:

(1) 任取$v_0 \in V(G)$，令$P_0=v_0$.

(2) 设$P_i = v_0e_1v_1e_2\ldots e_iv_i$ 已经行遍，按下面方法从 $E(G)-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中选取$e_{i+1}$:

(a) e_{i+1}与v_i相关联;

(b) 除非无别的边可供行遍，否则e_{i+1}不应该为 $G_i = G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中的桥.

(3) 当 (2)不能再进行时，算法停止.

可以证明算法停止时所得简单通路 $P_m = v_0e_1v_1e_2\ldots e_mv_m$ ($v_m=v_0$)为G 中一条欧拉回路.

用Fleury算法走出上一页图(1),(2)从A出发（其实从任何一点出发都可以）的欧拉回路各一条.

回顾

(1) 欧拉通路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

(2) 欧拉回路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

(3) 欧拉图——具有欧拉回路的图.

(4) 半欧拉图——具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

回顾

定理15.1 无向图G是欧拉图当且仅当G连通且无奇度数顶点.

定理15.2 无向图G是半欧拉图当且仅当G 连通且恰有两个奇度顶点.

定理15.3 有向图D是欧拉图当且仅当D是强连通的且每个顶点的入度都等于出度.

定理15.4 有向图D是半欧拉图当且仅当D是单向连通的，且D中恰有两个奇度顶点，其中一个的入度比出度大1，另一个的出度比入度大1，而其余顶点的入度都等于出度.

第十五章 欧拉图与哈密顿图

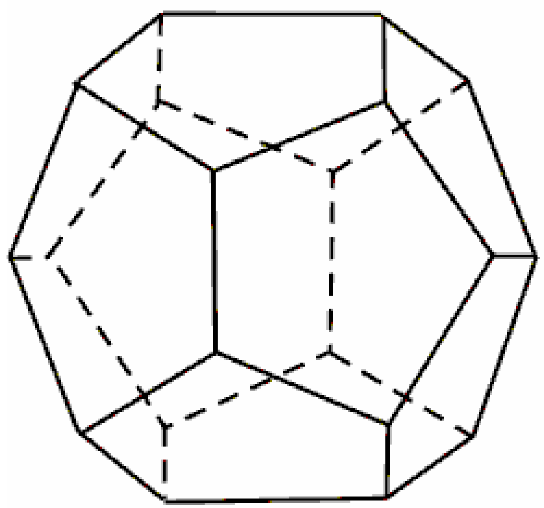
第一节：欧拉图

第二节：哈密顿图

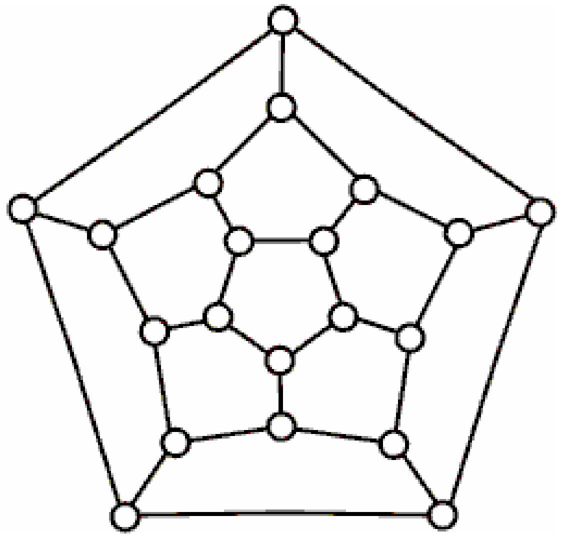
第三节：带权图与货郎担问题

15.2 哈密顿图

历史背景：哈密顿周游世界问题与哈密顿图



(1)



(2)

哈密顿图与半哈密顿图

定义15.2

(1) 哈密顿通路——经过图中所有顶点一次仅一次的通路.

(2) 哈密顿回路——经过图中所有顶点一次仅一次的回路.

(3) 哈密顿图——具有哈密顿回路的图.

(4) 半哈密顿图——具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图.

几点说明:

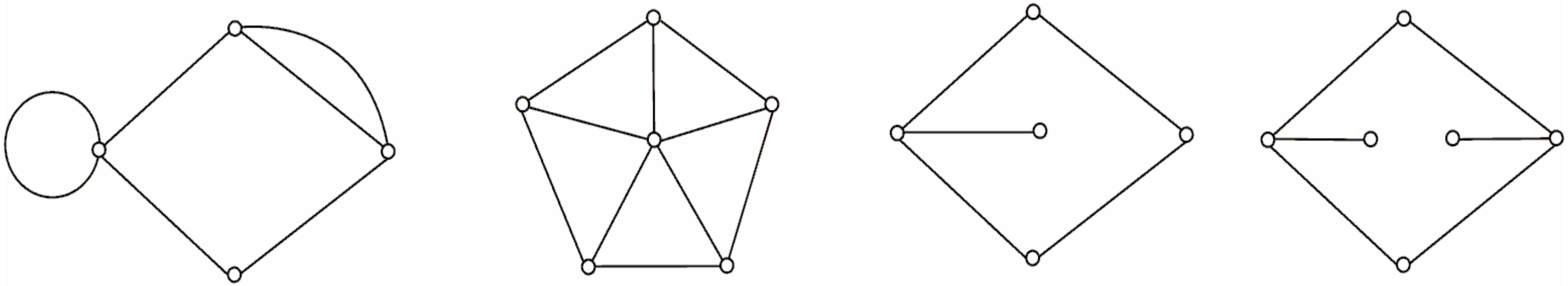
平凡图是哈密顿图.

哈密顿通路是初级通路，哈密顿回路是初级回路.

环与平行边不影响哈密顿性.

哈密顿图的实质是能将图中的所有顶点排在同一个圈上

实例



在上图中，

(1),(2) 是哈密顿图;

(3)是半哈密顿图;

(4)既不是哈密顿图，也不是半哈密顿图

无向哈密顿图的必要条件

定理15.6 设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图，对于任意$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$，均有

$$p(G-V_1) \leq |V_1|$$

推论 设无向图$G=<V,E>$是半哈密顿图，对于任意的$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$，均有

$$p(G-V_1) \leq |V_1|+1$$

几点说明

- 定理15.6中的条件是哈密顿图的必要条件，但不是充分条件（彼得松图）
- 由定理15.6立刻可知，$K_{r,s}$ 当$s \geq r+2$时不是哈密顿图. 易知$K_{r,r}$（$r \geq 2$）时都是哈密顿图，$K_{r,r+1}$都是半哈密顿图.
- 常利用定理15.6判断某些图不是哈密顿图.

例2 设G为n阶无向连通简单图，若G中有割点或桥，则G不是哈密顿图.

证 设v为割点，则 $p(G-v) \geq 2 > |\{v\}| = 1$.

K_2有桥，它显然不是哈密顿图. 除K_2外，其他有桥的图（连通的）均有割点.

其实，本例对非简单连通图也对.

无向哈密顿图的充分条件

定理15.7 设G是n阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1 \qquad (*)$$

则G 中存在哈密顿通路.

推论 设G为n $(n\geq 3)$ 阶无向简单图，若对于G中任意两个不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n \qquad （**）$$

则G中存在哈密顿回路，从而G为哈密顿图.

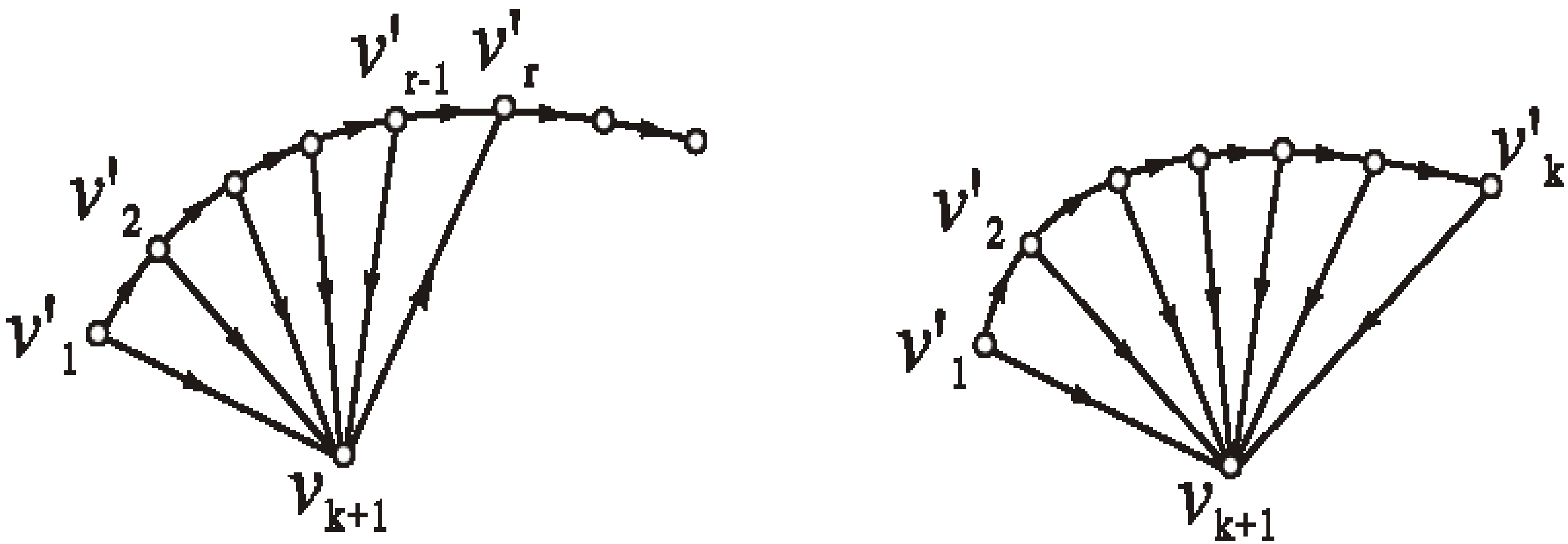
定理15.8 设u,v为n阶无向简单图G中两个不相邻的顶点，且$d(u)+d(v)\geq n$，则G为哈密顿图当且仅当$G\cup(u,v)$为哈密顿图.

无向哈密顿图的充分条件

n（$n\geq 2$）阶竞赛图中存在哈密顿通路

定理15.9 若D为n（$n\geq 2$）阶竞赛图，则D中具有哈密顿通路

证明思路：注意，竞赛图的基图是无向完全图. 对n（$n\geq 2$）做归纳. 只需观察下面两个图.



判断某图是否为哈密顿图方法

判断某图是否为哈密顿图至今还是一个难题.

总结判断某图是哈密顿图或不是哈密顿图的某些可行的方法.

1. 观察出哈密顿回路.

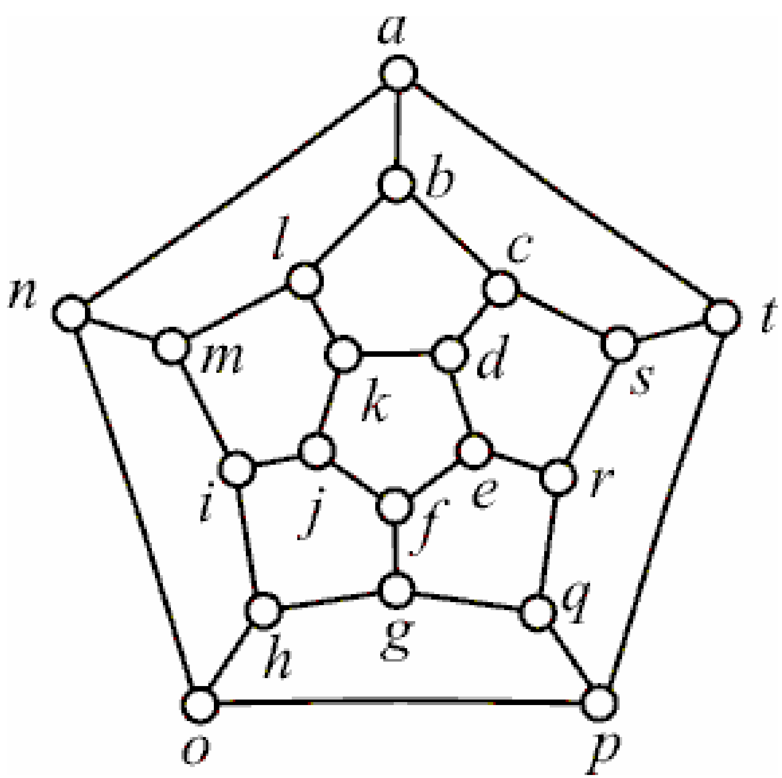
例3 下图(周游世界问题)

是哈密顿图

易知

a b c d e f g h i j k l m n p q r s t a

为图中的一条哈密顿回路.



注意，此图不满足定理15.7推论条件.

判断某图是否为哈密顿图方法

2．满足定理15.7推论的条件（**）.

例4 完全图K_n ($n\geq3$) 中任何两个顶点u,v，均有

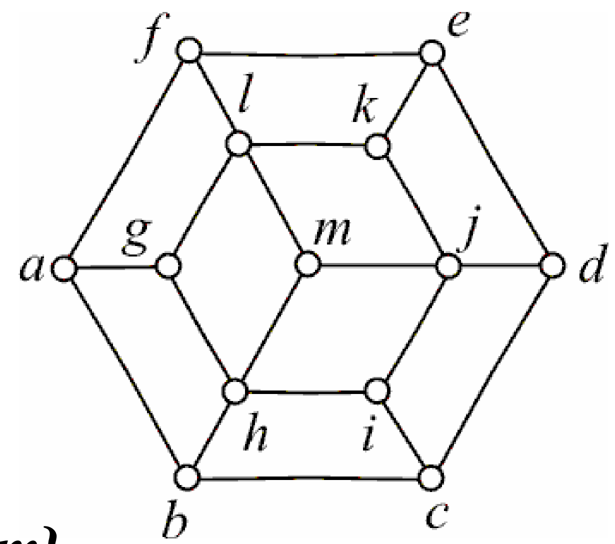
$$d(u)+d(v) = 2(n-1) \geq n \quad (n\geq3),$$

所以K_n为哈密顿图.

3．破坏定理15.6的条件的图不是哈密顿图.

练习 2

例5 证明下图不是哈密顿图. (破坏必要条件)



方法一. 利用定理15.6,

取 $V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}$, 则

$$p(G-V_1) = 7 > |V_1| = 6$$

方法二. G为二部图, 互补顶点子集

$V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}$, $V_2 = \{b, d, f, g, i, k, m\}$,

$|V_1| = 6 \neq 7 = |V_2|$.

练习 3

例6 某次国际会议8人参加，已知每人至少与其余7人中的4人有共同语言，问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座，使得每个人都与两边的人交谈?

解　图是描述事物之间关系的最好的手段之一.

做无向图$G=\langle V,E\rangle$, 其中

$V=\{v|\ v$为与会者$\}$,

$E=\{(u,v)\mid u,v\in V$且u与v有共同语言，且$u\neq v\}$.

易知G为简单图且$\forall v\in V$, $d(v)\geq 4$，于是，$\forall u,v\in V$, 有$d(u)+d(v)\geq 8$，由定理15.7 的推论可知G为哈密顿图. 服务员在G中找一条哈密顿回路C，按C中相邻关系安排座位即可.

由本题想到的：哈密顿回路的实质是能将图中所有的顶点排在同一个圈中.

第十五章 欧拉图与哈密顿图

- 第一节：欧拉图
- 第二节：哈密顿图
- 第三节：带权图与货郎担问题

15.3 最短路问题与货郎担问题

定义15.3 给定图$G=\langle V,E\rangle$，(G为无向图或有向图)，设$W:E\to \mathbb{R}$ (R为实数集)，对G中任意边$e=(v_i,v_j)$ (G为有向图时，$e=\langle v_i,v_j\rangle$)，设$W(e)=w_{ij}$，称实数w_{ij}为边e上的**权**，并将w_{ij}标注在边e上，称G为**带权图**，此时常将带权图G记作$\langle V,E,W\rangle$.

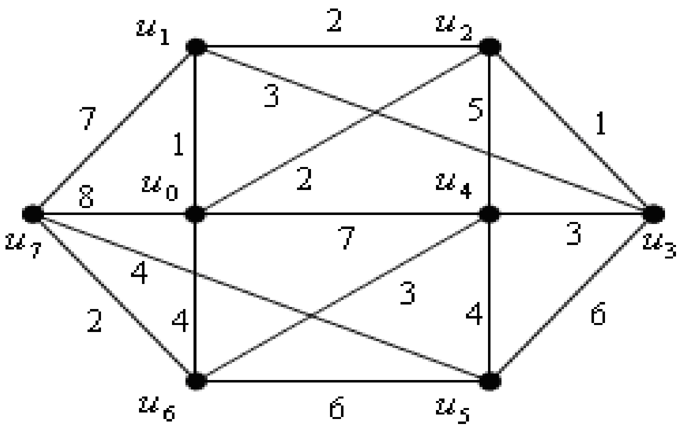
设$G'\subseteq G$，称 $\sum\limits_{e\in E(G')}W(e)$ 为G'的**长度**，并记作$W(G')$，即

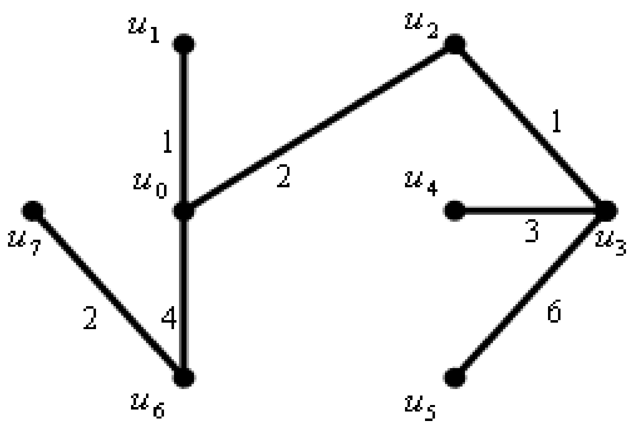
$$W(G')=\sum_{e\in E(G')}w(e)$$

最短路径

从某源点到其余各顶点之间的最短路径

求下面赋权图中顶点u_0到其余顶点的最短路





注： 最短路径并不一定是经过边数最少的路径

事实：最短路是一条路，且最短路的任一节也是最短路

Dijkstra算法

1) 置 $l(u_0)=0$ ，对 $v \neq u_0$，$l(v)=\infty$，$S_0=\{u_0\}$且 $i=0$.

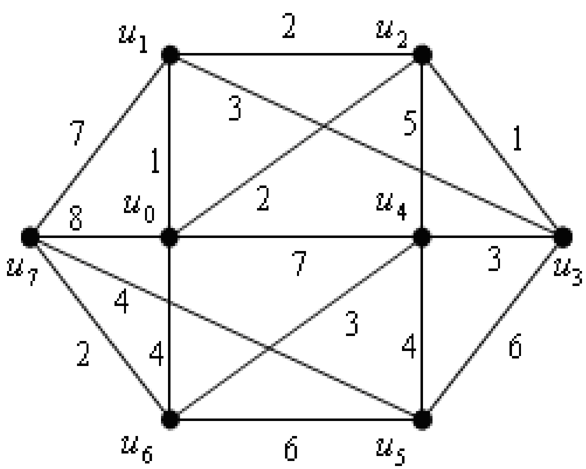
2) 对每个$v \in \overline{S_i}$，用 $\min\{l(v), l(u_i)+w(u_i,v)\}$

代替$l(v)$，计算 $\min\limits_{v \in \overline{S_i}}\{l(v)\}$，并把达到这个最小值的

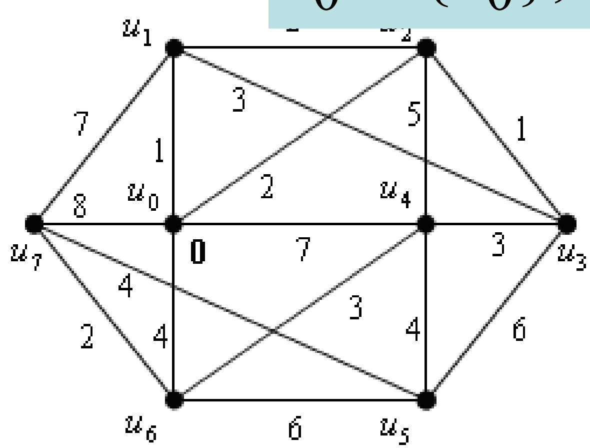
一个顶点记为 u_{i+1}，置 $S_{i+1}=S_i \cup \{u_{i+1}\}$.

3) 若$i=\nu-1$，则停止；若$i<\nu-1$，则用 $i+1$ 代替i，并转2).

$S_0=\{u_0\}, l(u_j)=\infty, j=1,2,\ldots,7.$



(a)



(a)

$u_1 \in \overline{S_0}$

$l(u_1)=\min\{\infty, 0+1\}$

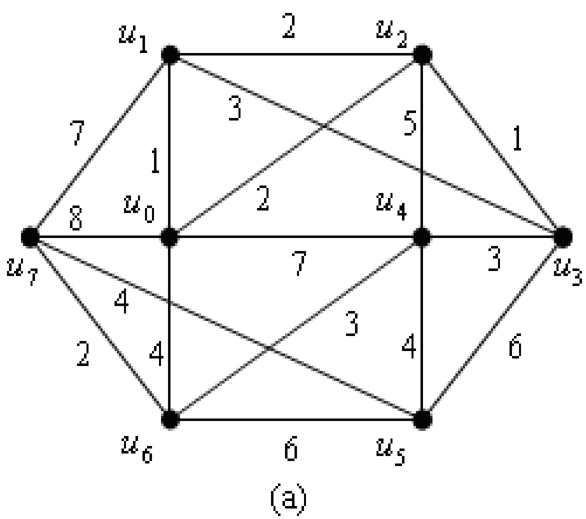
Dijkstra算法

1) 置 $l(u_0)=0$ ，对 $v \neq u_0$，$l(v)=\infty$，$S_0=\{u_0\}$ 且 $i=0$.

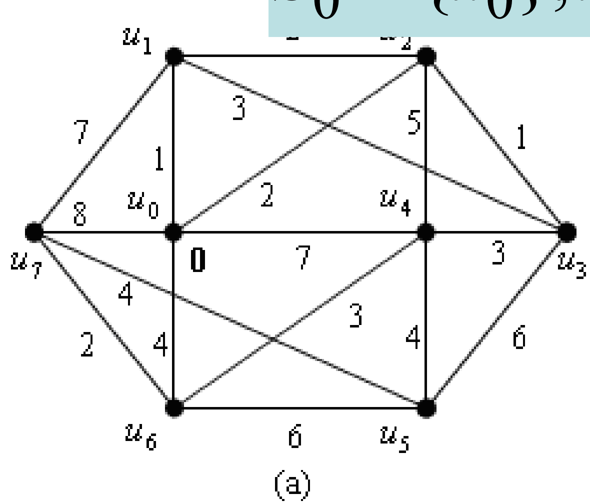
2) 对每个 $v \in \overline{S_i}$，用 $\min\{l(v), l(u_i)+w(u_i,v)\}$ 代替 $l(v)$，计算 $\min\limits_{v \in \overline{S_i}}\{l(v)\}$，并把达到这个最小值的一个顶点记为 u_{i+1}，置 $S_{i+1}=S_i \cup \{u_{i+1}\}$.

3) 若 $i=v-1$，则停止；若 $i<v-1$，则用 $i+1$ 代替 i，并转2).

$S_0=\{u_0\}, l(u_j)=\infty, j=1,2,\ldots,7.$



(a)



(a)

$u_2 \in \overline{S_0}$

$l(u_1)=1 \quad l(u_2)=2$

*Dijkstra*算法

1) 置 $l(u_0)=0$ ，对 $v\neq u_0$, $l(v)=\infty$, $S_0=\{u_0\}$ 且 $i=0$.

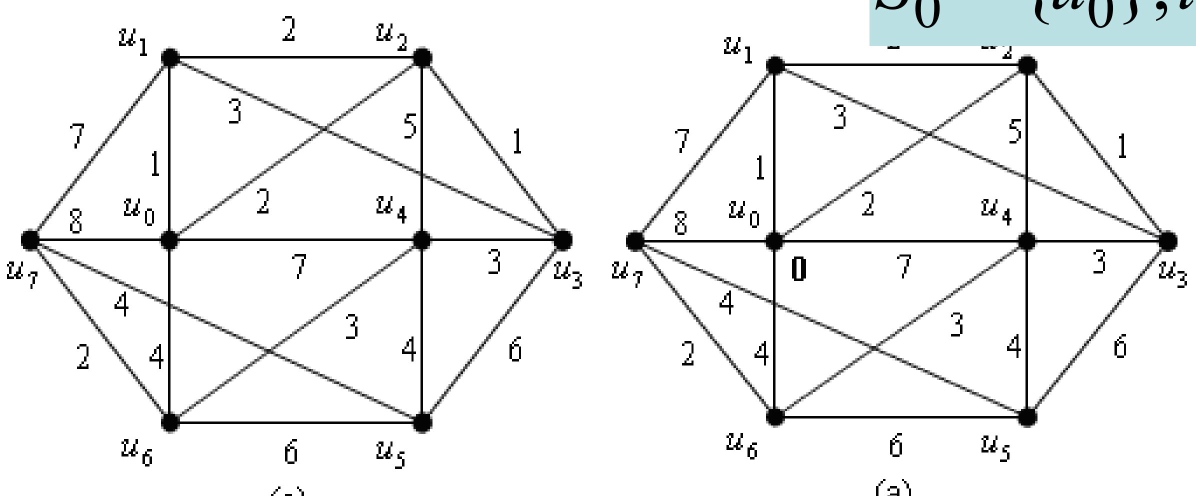
2) 对每个 $v\in\overline{S_i}$ ，用 $\min\{l(v),l(u_i)+w(u_i,v)\}$

代替 $l(v)$，计算 $\min\limits_{v\in\overline{S_i}}\{l(v)\}$，并把达到这个最小值的

一个顶点记为 u_{i+1} ，置 $S_{i+1}=S_i\bigcup\{u_{i+1}\}$.

3) 若 $i=v-1$，则停止；若 $i<v-1$ ，则用 *i+1* 代替 *i*，并转2).

$S_0=\{u_0\},l(u_j)=\infty, j=1,2,\ldots,7.$



(a) (a)

$u_3\in\overline{S_0}$

$l(u_1)=1$ $l(u_2)=2$

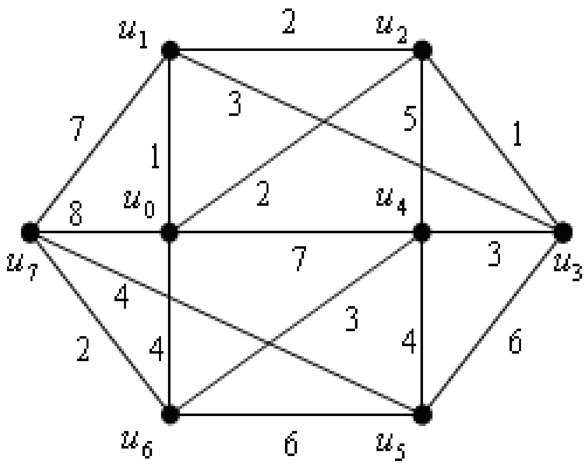
$l(u_3)=3$

Dijkstra算法

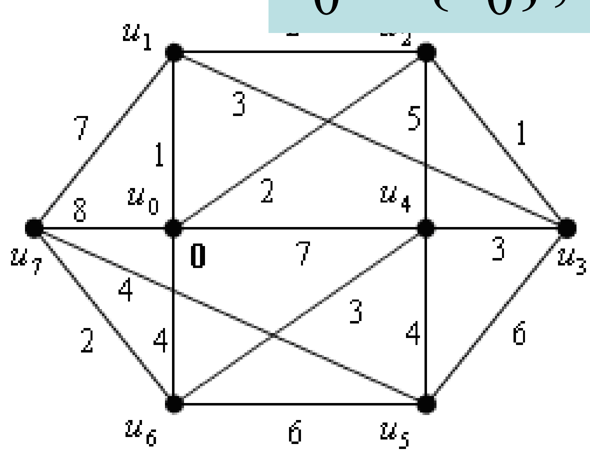
1) 置 $l(u_0)=0$ ，对 $v \neq u_0$, $l(v)=\infty$, $S_0=\{u_0\}$ 且 $i=0$.

2) 对每个 $v \in \overline{S_i}$ ，用 $\min\{l(v), l(u_i)+w(u_i,v)\}$ 代替 $l(v)$，计算 $\min\limits_{v \in \overline{S_i}}\{l(v)\}$，并把达到这个最小值的一个顶点记为 u_{i+1} ，置 $S_{i+1}=S_i \cup \{u_{i+1}\}$.

3) 若 $i=\nu-1$，则停止；若 $i<\nu-1$，则用 *i+1* 代替*i*，并转2).



(a)



(a)

$S_0=\{u_0\}, l(u_j)=\infty, j=1,2,\ldots,7.$

$u_4 \in \overline{S_0}$

$l(u_1)=1 \quad l(u_2)=2$

$l(u_3)=3 \quad l(u_4)=6$

Dijkstra算法

1) 置 $l(u_0)=0$ ，对 $v\neq u_0$，$l(v)=\infty$，$S_0=\{u_0\}$ 且 $i=0$.

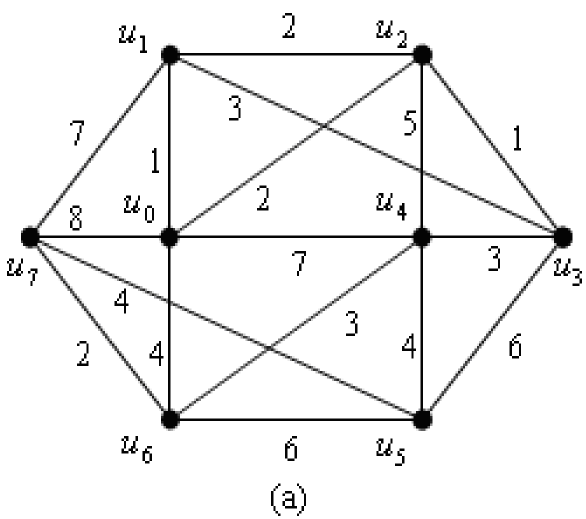
2) 对每个 $v\in\overline{S_i}$ ，用 $\min\{l(v),l(u_i)+w(u_i,v)\}$

代替 $l(v)$，计算 $\min\limits_{v\in\overline{S_i}}\{l(v)\}$，并把达到这个最小值的

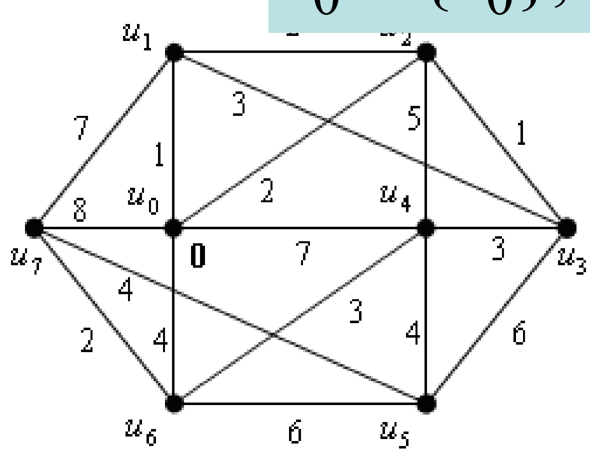
一个顶点记为 u_{i+1} ，置 $S_{i+1}=S_i\bigcup\{u_{i+1}\}$.

3) 若 $i=\nu-1$，则停止；若 $i<\nu-1$ ，则用 $i+1$ 代替 i，并转2).

$S_0=\{u_0\},l(u_j)=\infty, j=1,2,\ldots,7.$



(a)



(a)

$u_6\in\overline{S_0}$

$l(u_1)=1$ $l(u_2)=2$

$l(u_3)=3$ $l(u_4)=6$

$l(u_6)=4$

Dijkstra算法

1) 置 $l(u_0)=0$ ，对 $v \neq u_0$, $l(v)=\infty$, $S_0=\{u_0\}$ 且 $i=0$.

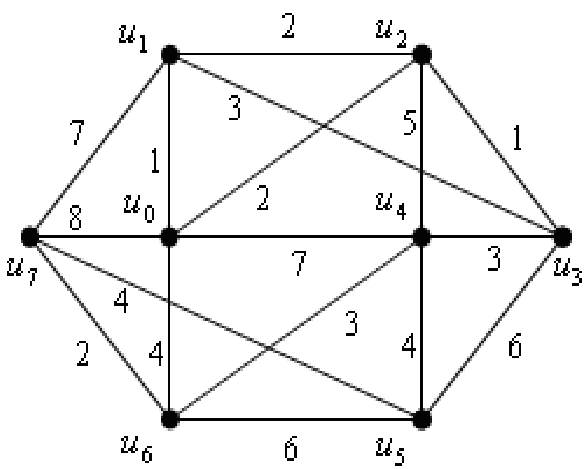
2) 对每个 $v \in \overline{S_i}$ ，用 $\min\{l(v),l(u_i)+w(u_i,v)\}$

代替 $l(v)$，计算 $\min\limits_{v\in\overline{S_i}}\{l(v)\}$，并把达到这个最小值的

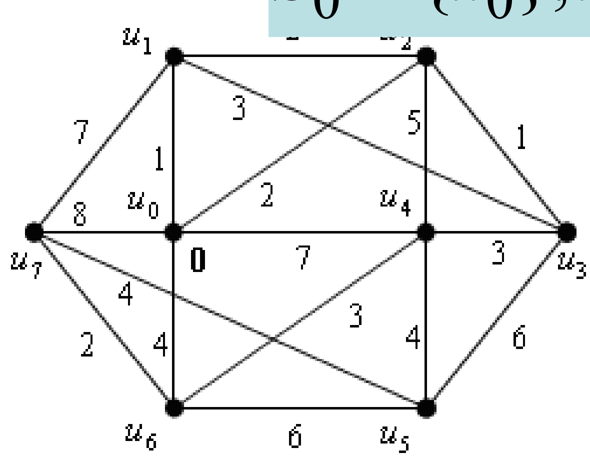
一个顶点记为 u_{i+1} ，置 $S_{i+1}=S_i \cup \{u_{i+1}\}$.

3) 若 $i=\nu-1$，则停止；若 $i<\nu-1$ ，则用 $i+1$ 代替 i，并转2).

$S_0=\{u_0\}, l(u_j)=\infty, j=1,2,\ldots,7.$



(a)



(a)

$u_7 \in \overline{S_0}$

$l(u_1)=1 \quad l(u_2)=2$

$l(u_3)=3 \quad l(u_6)=4$

$l(u_4)=6 \quad l(u_7)=6$

*Dijkstra*算法

1) 置 $l(u_0)=0$ ，对 $v \neq u_0$, $l(v)=\infty$, $S_0=\{u_0\}$ 且 $i=0$.

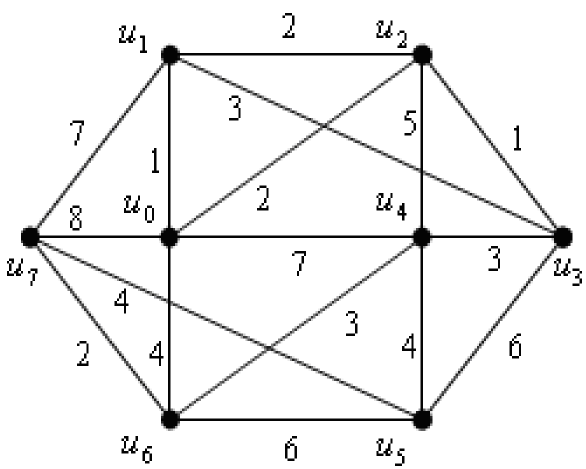
2) 对每个 $v \in \overline{S_i}$ ，用 $\min\{l(v), l(u_i)+w(u_i,v)\}$

代替 $l(v)$，计算 $\min\limits_{v \in \overline{S_i}}\{l(v)\}$，并把达到这个最小值的

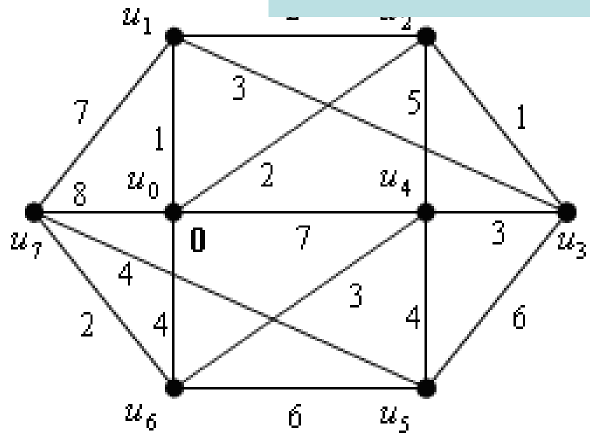
一个顶点记为 u_{i+1} ，置 $S_{i+1}=S_i \cup \{u_{i+1}\}$.

3) 若 $i=\nu-1$，则停止；若 $i<\nu-1$ ，则用 *i+1* 代替*i*，并转2).

$S_0=\{u_0\}, l(u_j)=\infty, j=1,2,\ldots,7.$



(a)



(a)

$u_5 \in \overline{S_0}$

$l(u_1)=1$ $\quad l(u_2)=2$

$l(u_3)=3$ $\quad l(u_6)=4$

$l(u_4)=6$ $\quad l(u_7)=6$

$l(u_5)=9$

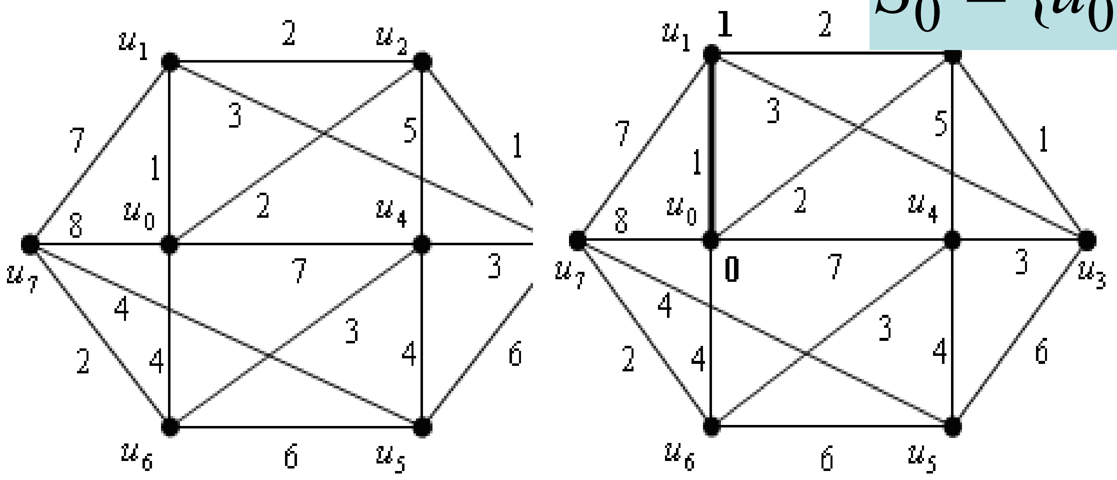
*Dijkstra*算法

1) 置 $l(u_0)=0$ ，对 $v\neq u_0$, $l(v)=\infty$, $S_0=\{u_0\}$ 且 $i=0$.

2) 对每个 $v\in\overline{S_i}$ ，用 $\min\{l(v),l(u_i)+w(u_i,v)\}$ 代替 $l(v)$，计算 $\min\limits_{v\in\overline{S_i}}\{l(v)\}$，并把达到这个最小值的一个顶点记为 u_{i+1} ，置 $S_{i+1}=S_i\bigcup\{u_{i+1}\}$.

3) 若 $i=\nu-1$，则停止；若 $i<\nu-1$ ，则用 $i+1$ 代替 i，并转2).

$S_0=\{u_0\},l(u_j)=\infty, j=1,2,\ldots,7.$



(a) (b)

$l(u_1)=1$ $l(u_2)=2$

$l(u_3)=3$ $l(u_4)=6$

$l(u_5)=9$ $l(u_6)=4$

$l(u_7)=8$

$\min\limits_{v\in\overline{S_0}}\{l(v)\}=l(u_1)$

Dijkstra算法

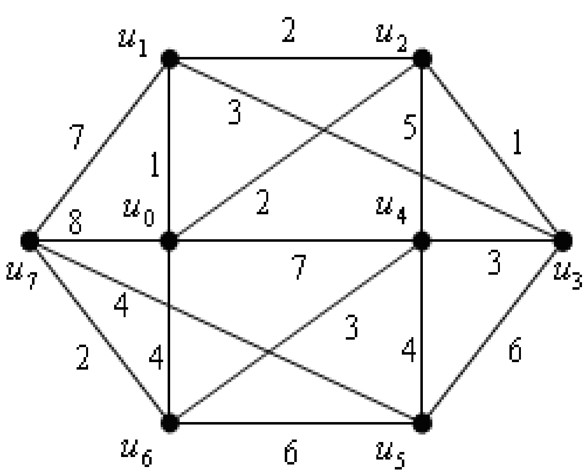
1) 置 $l(u_0)=0$ ，对 $v\neq u_0$, $l(v)=\infty$, $S_0=\{u_0\}$ 且 $i=0$.

2) 对每个 $v\in\overline{S_i}$ ，用 $\min\{l(v),l(u_i)+w(u_i,v)\}$

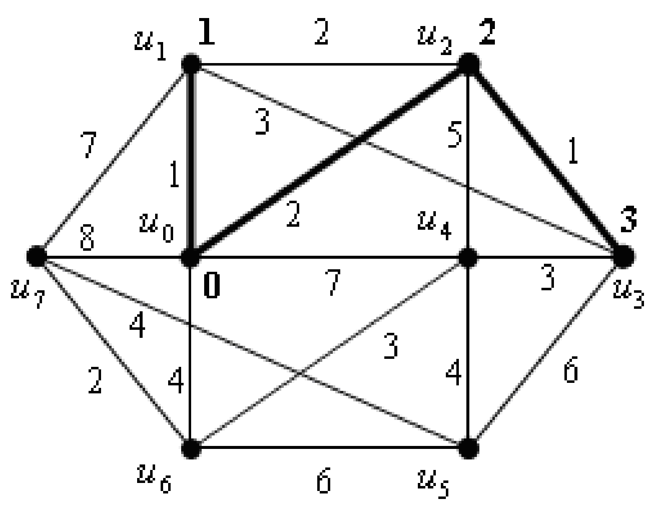
代替 $l(v)$，计算 $\min\limits_{v\in\overline{S_i}}\{l(v)\}$，并把达到这个最小值的

一个顶点记为 u_{i+1} ，置 $S_{i+1}=S_i\bigcup\{u_{i+1}\}$.

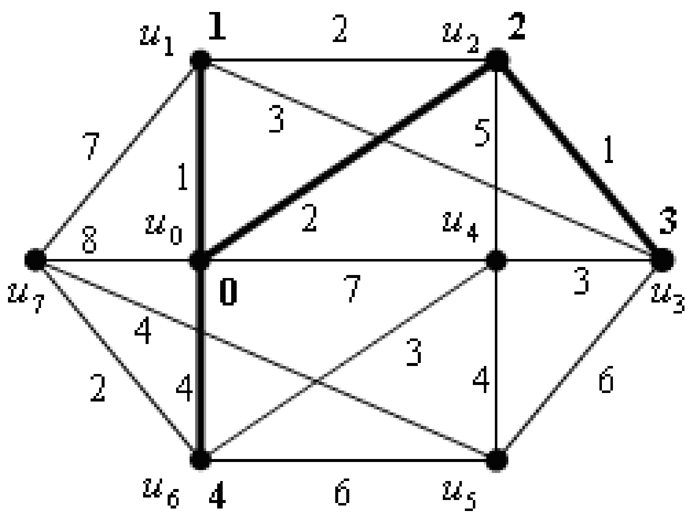
3) 若 $i=\nu-1$，则停止；若 $i<\nu-1$ ，则用 $i+1$ 代替 i，并转2).



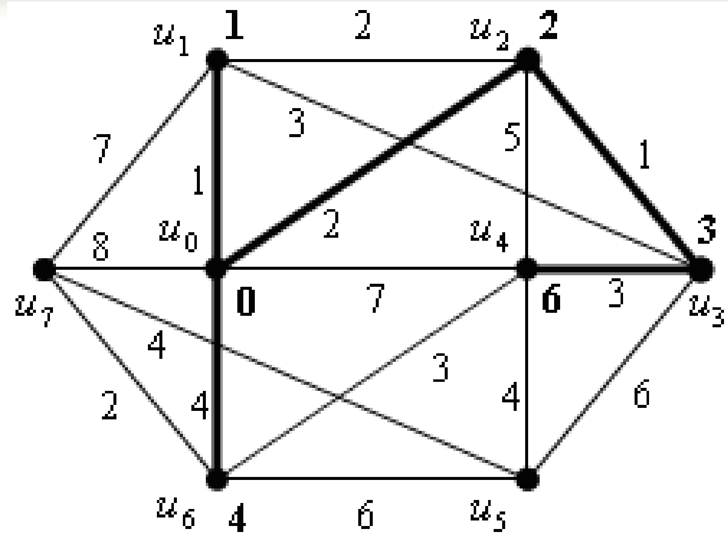
(a)



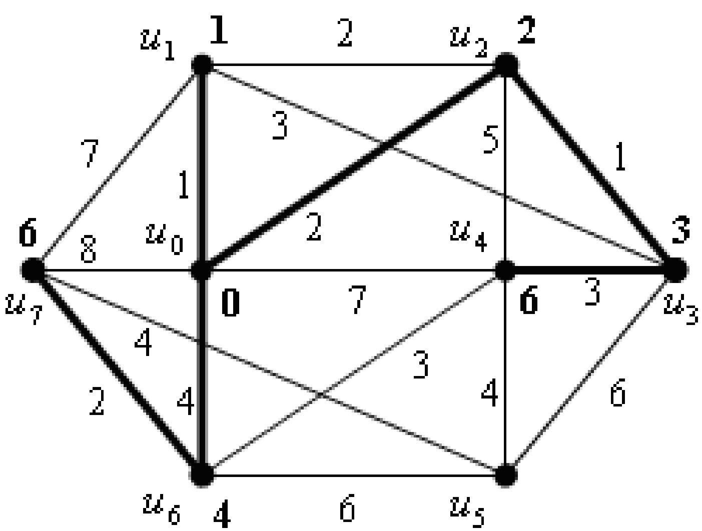
(d)


u_1 1
2
u_2 2
7
3
5
1
1
u_0
2
u_4
3
8
u_7
0
7
3
u_3
4
3
2
4
4
6
u_6 4
6
u_5

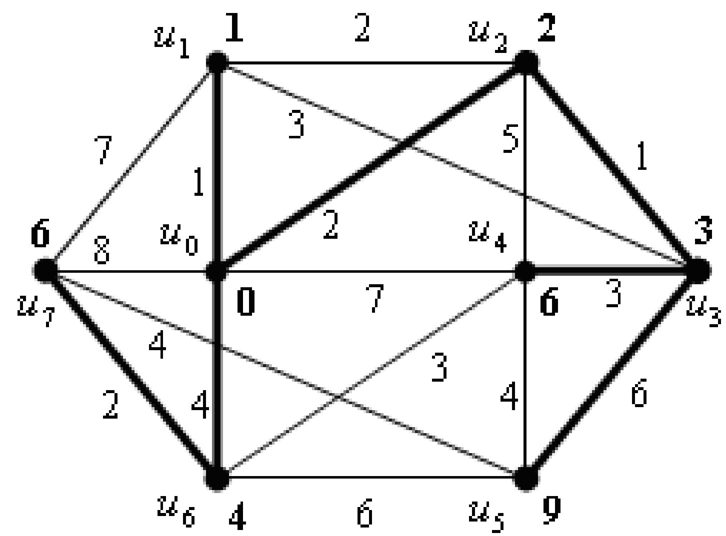
(e)


u_1 1
2
u_2 2
7
3
5
1
1
u_0
2
u_4
3
8
u_7
0
7
6
3
u_3
4
3
2
4
4
6
u_6 4
6
u_5

(f)


u_1 1
2
u_2 2
7
3
5
1
1
6
u_0
2
u_4
3
8
u_7
0
7
6
3
u_3
4
3
2
4
4
6
u_6 4
6
u_5

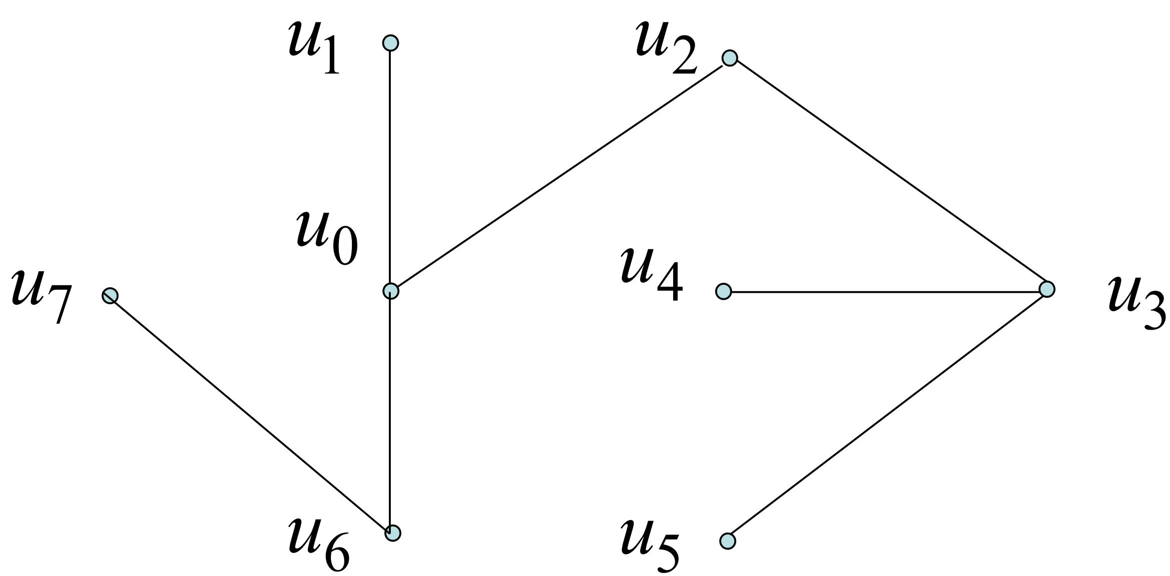
(g)


u_1 1
2
u_2 2
7
3
5
1
1
6
u_0
2
u_4
3
8
u_7
0
7
6
3
u_3
4
3
2
4
4
6
u_6 4
6
u_5 9

(h)

迭代次数	$l(u_i)$							
	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
1	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2		$\boxed{1}$	2	∞	7	∞	4	8
3			$\boxed{2}$	4	7	∞	4	8
4				$\boxed{3}$	7	∞	4	8
5					6	9	$\boxed{4}$	8
6					$\boxed{6}$	9		6
7						9		$\boxed{6}$
8						$\boxed{9}$		
最后标记								
$l(v)$	0	1	2	3	6	9	4	6
$z(v)$	u_0	u_0	u_0	u_2	u_3	u_3	u_0	u_6

迭代次数	$l(u_i)$							
	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
最后标记 $l(v)$	0	1	2	3	6	9	4	6
$z(v)$	u_0	u_0	u_0	u_2	u_3	u_3	u_0	u_6



货郎担问题

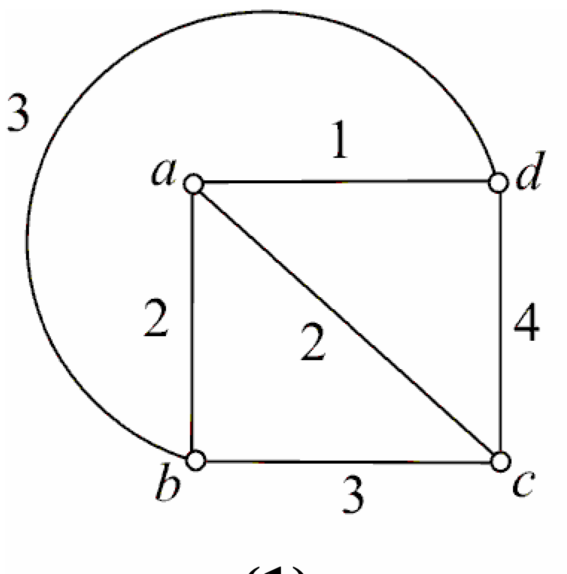
设$G=<V,E,W>$为一个n阶完全带权图K_n，各边的权非负，且有的边的权可能为∞. 求G中的一条最短的哈密顿回路，这就是货郎担问题的数学模型.

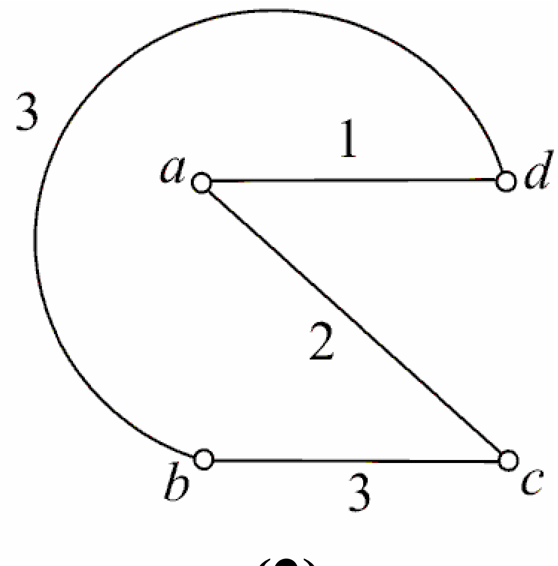
完全带权图K_n（$n≥3$）中不同的哈密顿回路数

(1) 完全带权图中有$(n-1)!$条不同的哈密顿回路

(2) 用穷举法解货郎担问题算法的复杂度为$(n-1)!$，当n较大时，计算量惊人地大

例6 求图中(1) 所示带权图K_4中最短哈密顿回路.





解 $C_1 = a\ b\ c\ d\ a$, $W(C_1)=10$

$C_2 = a\ b\ d\ c\ a$, $W(C_2)=11$

$C_3 = a\ c\ b\ d\ a$, $W(C_3)=9$

可见C_3 (见图中(2)) 是最短的，其权为9.

作业

- 1
- 2
- 11
- 14
- 21