Матрицы

конспект от TheLostDesu

22 сентября 2021 г.

1 Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду

1. Найти первый ненулевой элемент в строке i - это «ведущий элемент».
2. Теперь для k - ой строки берем число $-\frac{A_{kj}}{A_{ij}}$. И с этим коэфицентом прибавляем i-ю строку к k-ой.
3. i-ю строку делим на значение ведущего элемента.(для улучшеного ступенчатого вида).
4. Выбираем новый элемент смещаясь в матрице на следующую строку.
5. Повторяем до того, как 4е действие сделать возможно.

Почему этот алгоритм всегда работает?
Так как матрица имеет конечные размеры, в частности конечное число столбцов, а за 1 шаг алгоритма в одном из столбцов на всех местах кроме i становятся нули(значит, что за шаг мы перемещаемся минимум на один столбец). Значит, что процесс закончится. Алгоритм называется «Методом Гаусса»

2 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Пусть есть несколько уравнений(не обязательно столько же, сколько переменных) вида: $a_1 * x_1 + a_2 * x_2 ... + a_n * x_n = b_1$. Назовем это координатной формой записи. Заметим, что система таких уравнений - произведение матрицы системы на матрицу с $x_1 ... x_n$.

Назовем расширеной матрицей системы матрицу вида

$$\begin{matrix} a_1 1 & a_1 2 & ... & a_1 n & b_1 \\ a_2 1 & a_2 2 & ... & a_2 n & b_2 \\ a_3 1 & a_3 2 & ... & a_3 n & b_3 \\ ... \end{matrix}$$

3 Определитель матрицы

Всякое расположение чисел от одного до n в любом порядке называют перестановкой.
Инверсия - случай, когда $\alpha_j > \alpha_i$, но, $i > j$ Знак перестановки $= (-1)^{-}sgn(\alpha)$
Транспозиция - преобразование, когда в перестановке меняются местами два элемента, остальные остаются на своих местах. Любая транспозиция меняет четность перестановки.
Подстановка. $\sigma = \begin{matrix} 1 & ... & n \\ \sigma(1) & ... & \sigma(n) \end{matrix}$ Т.е биекция чисел от одного до n в себя. Знаком подстановки называют знак перестановки в нижней строке. Есть несколько вариантов записи: например, последовательно записать вершины в циклах вот так: (134)(2).
Если σ - подстановка сама в себя, то мы называем ее тождественной. Обозначается за id.
На множесте подстановок можно ввести умножение: последовательное применение(композицию отображений).

Определитель(детерминант) квадратной матрицы.(det(A)) $= \sum\limits_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) * a_{1\sigma(1)} * a_{2\sigma(2)} ... * a_{n\sigma(n)}$.