Математическая индукция

конспект от TheLostDesu

18 сентября 2021 г.

1 Индукция

Рассмотрим множество натуральных чисел. Договоримся, что 0 - также натуральное число. На нем можно использовать мат.индукцию.
Пусть $\phi(x)$ - предикат на $\mathbb{N}$. Тогда $(\phi(0) \wedge \forall n(\phi(n) \rightarrow \phi(n+1) \forall n \phi(n)$.

Как интуитивно доказать, например, что мат. индукция работает для натуральных чисел? Рассмотрим, например $\phi(5)$. Для любого $\phi(n) \rightarrow \phi(n+1)$. Тогда, так как верно $\phi(0)$, то верно $\phi(1)$. Из верности $\phi(1)$ следует верность $\phi(2)$. И так далее. Тогда, можно заметить, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $\phi(n)$.
Пример: Пусть все кванторы по натуральным числам. Доказать, что $\forall n(n \geq 3 \rightarrow \exists a_1, a_2 ... a_n > 0, 1 = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}$ при этом все a_i попарно различны.
Для нуля получается правда(посылка ложна -> вся импликация истинна).
Теперь надо рассмотреть случаи. Если $n = 0$, 1, то для $n + 1$ высказывание верно[1]. Если $n = 2$, то для $n + 1$ можно подобрать пример, например $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}$. Пусть верно для n. Докажем для $n + 1$. Рассмотрим сумму для n. Она имеет вид $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}$. Рассмотрим сумму $\dfrac{1}{2a_1} + \dfrac{1}{2a_2} + ... + \dfrac{1}{2a_n}$. Она равна $\dfrac{1}{2}$. Также стоит отметить, что все числа различны(если $a_1 \neq a_2$, то и $2a_1 \neq 2a_2$). Алсо, ни одно из чисел не равно $/frac12$ по построению этих чисел. Просто добавим к нему $\dfrac{1}{2}$, сумма станет равна 1. А значит, изначальное высказывание верно.

[1] См случай для нуля

2 Принципы

Идея заключается в том, что для вывода $\phi(n+1)$ разрешить использовать верность $\phi(n), \phi(n-1), ..., phi(0)$
$\forall n(\forall m < n\phi(m) \to \phi(n)) \to \forall n\phi(n)$. prog(n)[2]

Принцип наименьшего числа. Если свойству ϕ удвлетворяет какое-то число, значит есть наименьшее число со свойством ϕ.

[2]Прогрессивность n