Доказательство равеносильности ПМИ, ПНЧ и ПСИ

конспект от TheLostDesu

25 сентября 2021 г.

Следующие утверждения равносильны:
(1) ПСИ
(2) ПНЧ
(3) ПМИ
Докажем то, что из 1го следует 2е. Дано: ПСИ. $(\forall\phi(prog(\phi) \to \forall n\phi(n))$. Доказать, что $\exists(\phi(n) \land \forall m < n\neg\phi(m)$.
Пусть $\neg\exists(\phi(n) \land \forall m < n\neg\phi(m)$. Тогда $\forall n(\neg\phi(n)\lor\neg\forall m < n\neg\phi(n))$. Тогда, заменив дизъюнкцию на импликацию, $\forall n(\forall m < n\neg\phi(m) \to\neg\phi(n))$. Но из ПСИ можно сказать, что все натуральные числа имеют свойство не ϕ. Но мы договаривались, что для какого-то натурального числа ϕ выполняется. Так не бывает, получили противоречие. Значит ПНЧ выводится из ПСИ.
Докажем то, что из 2го следует 3е. Дано ПНЧ$(\exists(\phi(n) \land \forall m < n\neg\phi(m))$. Докажем ПМИ. ($\phi, \phi(0), \forall n(\phi(n) \to \phi(n+1))$, значит $\forall n\phi(n)))$
Пусть $\neg\forall n\phi(n)$. $\Rightarrow \exists m\neg\phi(m)$. По ПНЧ $\exists n(\neg\phi(n)\land\forall m < n\phi(m)$. Воспользуемся тем, что натуральное число - либо 0, либо число вида «натуральное число» + 1.
Если n = 0: так не бывает, так как $\phi(n)$ выполняется из посылок.
Но и если n $\neq$ 0, то n = m + 1. А по ПНЧ для всех m < n ϕ выполняется. И из дано $\phi(n)$ - выполняется. А мы предположили, что нет. Противоречие. Значит из ПНЧ следует ПМИ.
Докажем то, что из 3го следует 1е. Дано ПМИ($\forall\phi(\phi(0) \land \forall n(\phi(n) \to \phi(n+1)) \to \phi)$. и prog(n). Доказать, что $\forall n\phi(n)$.
Введем свойство $\psi(n) = \forall m < n\phi(m)$.
$\psi(0) = 1(\forall m < 0\phi(m))$.
$\forall n(\psi(n) \to \psi(n+1))$. А это есть база и шаг мат. индукции. Значит $\psi(n)$ верно. Значит, что ПСИ верен. ЧТД.
Значит, что из ПСИ следует ПНЧ, а из него следует ПМИ, из него сле-

дует ПСИ, значит, что они равносильны.