Логика

конспект от TheLostDesu

11 сентября 2021 г.

1 Основы логики

Существуют повествователные предложения. Они бывают истиными и ложными
Так, например, «2=3» - ложь, а «Сегодня суббота» - правда[1]. Однако, это не всегда суббота, поэтому это высказывание не всегда справедливо, и зависит от некоторого «сегодня»
«Существует нечетное совершенное число» - сейчас нет доказательства того, что их не существует, но и нет найденных совершенных чисел - поэтому об этом высказывании говорить нет смысла. Рассмотрим еще один пример. «Это предложение истинно» - Это высказывание может быть и истинным, так и ложным, так как оно описывает действительность в самом предложении.
Также, есть и пародоксальный пример «Это предложение ложно» - не может быть истинно и не может быть ложно[2].

Однако, в математике используются «высказывания» - это некотарая модель повествовательного предложения, которое всегда либо истинно, либо ложно, но никогда не истинно и ложно одновременно.

2 Составные высказывания

«2=3 или 7=5» - составное высказывание. Его можно разбить на 2 более простых высказывания.
Есть множество способов построить составное высказывание. Разобъем их на 2 группы:

[1] лекция проходит в субботу

[2] Читатель может проверить, что происходит, когда это истино или ложно

I) A или B; A и B; если A, то B; либо A, либо B; не A; A равносильно B...
II) Мне нравится, что A, Все студенты знают, что A[3]

В первой группе результат высказывания можно однозначно определить, зная справедливость простых высказываний. Истиность II группы высказываний сложно зависит от A, а не только от его истинности. Высказывания из II группы не будут рассматриватся.

2.1 Логичесие связки

Это способ образования новых высказываний, такой что истинность целого полностью определяется истинностью его частей.

A	B	A и B	не A	A или B	если A, то B
0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1

В математике часто используют разные символические сокращения.
И: $\wedge$ - коньюнкция[4]
Или: $\vee$ - дизъюнкция[5]
Отрицание: $\urcorner$[6]
Следование: $\leftarrow$ - импликация[7]
Равносильность: $\Leftrightarrow$[8]

Левая часть импликации называют посылкой; правую - заключением.

Стоит отметить, что когда высказывание A истинно - следует писать [A] = 1, а не A = 1. Это позволяет убрать недопонимание во время приравнивания высказываний.[9]

2.2 Тавтология

Назовем F(A_1, A_2, A_3,...,A_n) - высказывание зависящее от A_1, A_2, A_3, ..., A_n.

Тавтология - Если F(A_1, A_2, A_3,..., A_n) истинно при любых A_1, A_2, A_3,...,A_n.

[3]Далее ВСЗЧА
[4]Для латеха wedge
[5]Для латеха - vee
[6]Для латеха - urcorner
[7]Для латеха - leftarrow
[8]Для латеха - Leftrightarrow
[9]Например, если записать, что Великая Теорема Ферма истина, как «ВТФ» = 1, и «0=0» = 1, то можно будет сказать, что 0=0 = ВТФ, что не совсем верно.

Есть несколько способов проверки на тавтологию:
1. Перебрать все возможные варианты входных данных и построить таблицу истинности.
2. Подставить в значение 0, и попробовать подобрать значения входных данных, для которых 0 - значение.
3. Построить таблицу. В правую часть записывать то, что должно быть истинным, в левую - то, что должно быть ложным, для того, чтобы значение стало 0. Тогда, если в обоих столбцах записано одно значение, то тогда высказывание - тавтология.

2.3 Эквивалентность

Некоторые высказывания приобретают одинаковые значения, их называют эквивалентными. Этим можно пользоваться при упрощении выражений по некоторым формулам.
1) $A \vee A \Leftrightarrow A \wedge A \Leftrightarrow A$
2) $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$ 3) $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$ 4) $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$
5) $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$
6) $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
7) $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
8) $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$
9) $A \to (B \to C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \to C$
10) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
11) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
Этим способом можно находить тавтологии. Просто следует упростить выражение до его минимальной длины. Тогда станет возможно легко проверить это даже глазами.