Семинар по пределам

конспект от TheLostDesu

17 сентября 2021 г.

Вспомним, что предел $\lim\limits_{n \to \inf} = a$, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Последовательность раходится тогда, когда не существует a, такого, что a - предел этой последовательности. $\forall a \exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N \Rightarrow |x_n - a| \geq \varepsilon$

Например $\lim\limits_{n \to \inf} \dfrac{2n-1}{2n+1} = 1$. Докажем это по определению:
Пусть есть $\varepsilon > 0$. Тогда, возьмем N = $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогда для любого $n > N$: $x_n - 1 \leq \varepsilon$. Следовательно предел действительно равен единице.

Пусть у нас есть $a \in R$, $k \in N$. Доказать, что $\lim\limits_{n \to inf} \dfrac{a}{\sqrt[k]{n}} = 0$. Если $|\dfrac{a}{\sqrt[5]{n}}| < \varepsilon$, то $\dfrac{a^k}{n} < \varepsilon^k$. Но тогда $n > \dfrac{|a|^k}{\varepsilon^k}$. Возьмем следующее целое за этим число. Оно и будет N. Значит, по определению предел равен 0. Ч.Т.Д.

Вычисление пределов. Свойства

Пусть есть две последовательности x_n и y_n. А также известно, что предел первой последовательности равен a, а второй - b.
$\lim\limits_{n \to \inf} \alpha * x_n = a * \alpha$
$\lim\limits_{n \to \inf} (x_n + y_n) = a + b$
$\lim\limits_{n \to \inf} (x_n * y_n) = a * b$
$\lim\limits_{n \to \inf} (x_n / y_n) = a/b$, если b не равно 0.

Если есть три последовательности $x_n y_n z_n$, и $x_n \leq y_n \leq z_n$, то последовательность y_n называется «зажатой». Если при этом $x_n z_n$ стремятся к одному числу, то и y_n стремится к этому числу.

При нахождении предела частного обычно стоит выносить самое «быстрорастущее» слагаемое за скобки в числителе и знаменателе. Тогда получится пределы вида $\dfrac{n^k(const)}{n^j(const)}$.