Пределы, непрерывность функций

конспект от TheLostDesu

25 сентября 2021 г.

1 Пределы

Если последовательность не убывает и ограниченна сверху, то у нее есть предел.
Например последовательность $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ имеет предел. Он обозначается за e[1]. Доказательство:
1. $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})...(1 - \frac{k-1}{n}) * \frac{1}{k!}$
Все скобки меньше еденицы, значит это меньше, чем $1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$. Что меньше, чем $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$
Заметим, что это является геометрической прогрессией. Сложим их по сумме, получим результат меньший, чем $1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3$ 2. Теперь надо доказать, что последовательность возрастает. Для этого возьмем n+1й член последовательности, и n-ый.
$1 + \sum\limits_{k=1}^{n}(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}...(1 - \frac{k-1}{n+1} * \frac{1}{k!}$ Каждый член этой суммы больше, чем $1 + \sum\limits_{k=1}^{n+1}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}...(1 - \frac{k-1}{n} * \frac{1}{k!}$. Значит, что последовательность возрастает.

[1] число Эйлера

2 Непрерывность функций

Назовем дельта-окрестностью точки a $O\delta(a) = \{x|x - a| < \delta\}$ Также есть проколотая δ окрестность точки. Она возникает тогда, когда сама точка не входит в окрестность. Точка a является предельной для множества X $\Leftrightarrow \exists x_n \in X, x_n \neq a : lim_{n \to \inf} x_n = a$