Метод математической индукции

конспект от TheLostDesu

4 сентября 2021 г.

1 Определение

Для того, чтобы доказать, что верны утверждения из набора $p_1, p_2, p_3, p_4 ... p_n$ достаточно доказать два факта:

1) p_1 - верное утверждение

2) из справедливости p_k следует справедливость p_{k+1}.

Например: Доказать, что $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1) При n = 1 $\quad 1^2 = 1(2)(3)/6 \quad 1 = 1$. Это верно.[1]

2) Пусть для k наша формула верна. Тогда вот что происходит для $k+1$:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + k^2 + (k+1)^2$

По предположению, что $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$

Вынесем за скобки $(k+1)$

$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1)(\frac{k(2k+1)}{6} + 1) = \frac{(k+1)(2k+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Что как раз является результатом подстановки $k+1$ в доказываемую формулу[2]

Формула верна для $n = 1$. Если формула верна для $n = k$, то она верна и для $n = k+1$, тогда утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$, что и требовалось доказать.

2 Неравенство Бернулли

Давайте докажем неравенство Бернулли методом математической индукции.

Оно гласит: при $n \in \mathbb{N}$ и $x \geq -1 \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$

Доказательство: 1) При $n = 1 \quad 1 + x \geq 1 + x \quad$ Это верно.

[1] Базис или база индукции

[2] Переход или шаг индукции

2) Пусть верно $(1+x)^k \geq 1+kx$
Из $x \geq -1 \quad 1+x \geq 0$
Домножим обе части неравенства на $x+1$
$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x)$
$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x+kx^2$. Так как $kx^2 \geq 0$
$1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$. А это значит, что
$(1+kx)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$.
Значит формула верна для $k+1$
Формула верна для $n=1$. Если формула верна для $n=k$, то она верна и для $n=k+1$, тогда утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$, что и требовалось доказать.

3 Биномиальный коэффицент

При $n \geq 0$, и $0 \geq k \geq n \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$[3]
Свойства C_n^k:
1) $C_n^0 = C_n^n = 1$
2) $C_n^k = C_n^{n-k}$
3) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

Так как п.3 не очевиден, докажем его.
$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right)$
Что при приведении выражения в скобках к общему знаменателю даёт
$\frac{n!(n+1)}{(k-1)!(n-k)!k(n+1-k)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k$
что и следовало доказать.

Теорема: $(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^k x^k + ... + C_n^n x^n$, что можно записать как

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Докажем это методом математической индукции.
1) При n = 1 1 + x = 1 + x. Это верно.
2) Пусть формула справедлива для $n = k$.
$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) = \left(1 + C_k^1 x + C_k^2 x^2 + ...C_k^k x^k\right)(1+x)$
Раскроем скобки.
$1 + C_k^1 x + C_k^2 x^2 + ...C_k^k x^k +$
$x + C_k^1 x^2 + C_k^2 x^3 + ...C_k^k x^{k+1}$

[3]! - знак факториала. n! = 1*2*3*...*n. 0! = 1

А из п.3 про C_n^k эта сумма равна: $1 + C_k^1 x + C_k^2 x^2 + ... C_{k+1}^{k+1} x^{k+1}$.[4]
Формула сходится с предполагаемой для k+1.
Формула верна для $n = 1$. Если формула верна для $n = k$, то она верна и для $n = k + 1$, тогда утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$, что и требовалось доказать.
А из этого следует, что:

$$(a+b)^n = b^n(1+\frac{a}{b})^n = b^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{a^k}{b^k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k * a^k * b^{n-k}$$

И аналогично, если вместо b за скобки выносить a

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k * a^{n-k} * b^k$$

[4]Последняя C_{k+1}^{k+1} появляется из того, что она равна еденице.