

Числовые последовательности

конспект от TheLostDesu

11 сентября 2021 г.

1 Числовая последовательность

Задана числовая последовательность $\{a_n\}$, если каждому натуральному числу поставлено в соответствие вещественное число a_n

1.1 Способы задания числовой последовательности

- 1) Формула. Например $a_n = n^2 + 1$. Тогда $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 10$
- 2) С помощью рекуррентных соотношений. Например последовательность Фибоначчи. $a_1 = 1, a_2 = 1$, для $n \geq 3 : a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
- 3) Описание последовательности(словами). Например a_n - пное простое число.

1.2 Предел числовой последовательности

Рассмотрим последовательность a_n член которой равен $\frac{1}{n}$. Тогда при n стремящемся к бесконечности a_n стремится к нулю.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, если для любого $\epsilon > 0$ найдется некоторый номер N , что все числа последовательности отличаются от a не больше чем на ϵ .

\forall - квантор общности. Читается как «Для всех»

\exists - квантор существования. Читается как «Существует»

Тогда в кванторах определение предела выглядит, как

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon.$$

Утверждение 1.

Если предел x_n равен a при $n \Rightarrow \inf$, то на всем $\{x_n\}$ найдется конечное число точек не принадлежащих окрестности a .

Утверждение 2.

У одной последовательности может быть только один предел¹.

¹Или не существовать ни одного

Доказательство: Пусть есть два предела: a_1, a_2 . Тогда, без потерь общности $a_1 > a_2$. Если $a_1 > a_2$, то $a_1 - a_2$ - положительное число. Тогда пусть $\epsilon = \frac{a_1 - a_2}{3}$. Тогда, окрестности не пересекаются. Но начиная с некоторого номера элементы должны начать попадать в обе окрестности, что невозможно. Следовательно у последовательности всего один предел.

1.3 Ограниченная последовательность

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, если $\exists m, M, \forall n \Rightarrow M \geq x_n \geq m$.

Если у последовательности есть конечный предел при $n \rightarrow \infty$, то она ограничена.

Тогда, возьмем $\epsilon = 1$. А значит, что существует n , такое что $a - 1 \leq x_n \leq a + 1$. Тогда $M = \max(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, a + 1)$, а $m = \min(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, a - 1)$

И последовательность ограничена.