Technische Universität Dresden • Fachrichtung Mathematik

Ein Vergleich ausgewählter statistischer Tests auf stetige Gleichverteilung auf

Masterarbeit zur Erlangung des Hochschulgrades
Master of Science (M.Sc.)

vorgelegt von
Willi Sontopski
geboren am 16.08.1995 in Zittau

Tag der Einreichung:
19.05.2020

Betreut durch Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. Dietmar Ferger
Institut für Stochastik

Für Tine.

Der Zufall ist der einzig legitime
Herrscher des Universums.

Napoleon Bonaparte

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathfrak{C}(\mathbb{R})$	Menge aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$
$\hat{\mathfrak{C}}(\mathbb{R})$	Menge aller stetigen Funktionen mit eindeutiger Supremalstelle auf $\mathbb{R}$
$\mathfrak{D}[a,b]$	Skorokhod-Raum auf $[a,b]$
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	Borel'sche σ-Algebra von $\mathbb{R}$
$\mathfrak{P}(M)$	Potenzmenge der Menge M
$\#M$	Anzahl der Elemente der Menge M
$\mathbb{E}[X]$	Erwartungswert der Zufallsvariable X
$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$	Varianz der Zufallsvariable X
$\mathbb{C}\mathrm{ov}_X$	Kovarianzfunktion der Zufallsvariable X
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	Wahrscheinlichkeitsraum mit Grundmenge Ω, σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω und Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf Ω
$X \sim V$	Zufallsvariable X ist nach Verteilung V verteilt
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2
$\mathcal{U}[a,b]$	Gleichverteilung auf $[a,b]$
$\mathfrak{B}$	Brownsche Bewegung
$\mathfrak{B}_0$	Brownsche Brücke
$\mathfrak{B}_*$	reflektierte Brownsche Brücke
$(\mathcal{S}, \delta)$	Metrischer Raum S mit Metrik δ
$\mathscr{L}$	Lebesguemaß
$\mathfrak{S}(f)$	Menge der Supremalstellen der Funktion f
s	Skorokhod-Metrik
d	Supremums-Metrik
$\Vert\cdot\Vert$	Supremums-Norm
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Standardskalarprodukt
id_M	identische Abbildung auf M
$\mathbb{1}_M$	Indikatorfunktion der Menge M
$\wedge$	logisches Und (Konjunktion) bzw. Minimum
$\vee$	logisches Oder (Disjunktion) bzw. Maximum
π	Projektionsabbildung
$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$	X_n konvergiert gegen X in Verteilung
F_X	Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X
F_X^{-1}	Quantilfunktion der Zufallsvariable X (verallgemeinerte Inverse)
F_n	empirische Verteilungsfunktion
U_n	uniformer empirischer Prozess

Symbol	**Bedeutung**
$f(x+)$	rechtsseitiger Grenzwert von f im Punkt x
$f(x-)$	linksseitiger Grenzwert von f im Punkt x
H_0	Nullhypothese
H_1	Alternativhypothese
D_f	Menge der Unstetigkeitsstellen der Funktion f
$\mathcal{E}$	Erzeuger der σ-Algebra $\mathcal{A}$
$\mathscr{G}$	Gütefunktion
$\mathscr{F}$	Raum aller Verteilungsfunktion auf $[0,1]$
$v^\intercal$	transponierter Vektor zum Vektor v

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen herzlich bedanken, die mich bei dieser Masterarbeit unterstützt haben. Allen voran gebührt mein Dank Herrn Prof. Dr. Dietmar Ferger für die herausragende Betreuung während der Erstellung dieser Arbeit. Die vielen Stunden der gemeinsamen Zusammenarbeit und die regelmäßigen Konsultationen bei Herrn Prof. Ferger haben mich nicht nur fachlich enorm weitergebracht, sie haben auch meine Begeisterung für die Thematik geweckt und intensiviert. Diese Begeisterung half mir, an anstrengenden, arbeitsintensiven Stellen weiter zu arbeiten und nicht aufzugeben. Ebenfalls möchte ich mich bei meinen Kommilitonen Lukas Zenner, Alexander Christen, Robert Walter und Franka Rode bedanken, die mir stets mit viel Hilfsbereitschaft zur Seite standen.

Einleitung

Wie kann ich feststellen, ob gegebene Daten gleichverteilt sind?

Das ist die zentrale Frage, um die sich diese Masterarbeit dreht. Wir werden drei statistische Tests für dieses Testproblem zunächst herleiten und beweisen, dass sie asymptotische Niveau-α-Tests sind, d.h. dass sie ein vorgegebenes Signifikanzniveau $\alpha \in (0,1)$ im Grenzwert $n \to \infty$ einhalten, wobei n die Anzahl der gegebenen Daten ist. Diese Arbeit versucht beide Seiten des Testens auf Gleichverteilung - Theorie und Praxis - zu berücksichtigen. Neben dem sehr bekannten Kolmogorov-Smirnov-Test werden wir zwei durch Gewichtungen abgewandelte Varianten des Kolmogorov-Smirnov-Tests in dieser Arbeit sehen. Gerade der dritte Test, welcher das Herzstück dieser Arbeit darstellt, ist sehr neu und ist in dieser Form noch unveröffentlicht. Diesem Test liegt die Veröffentlichung *On the supremum of a Brownian bridge standardized by its maximizing point with applications to statistics* [Fer18] von Dietmar Ferger, erschienen in *Statistics & Probability Letters*, 2018, Volume 134, Seiten 63 - 69, zugrunde.

In Kapitel 1 werden wir zunächst ein paar theoretische Konzepte einführen, wie den *Skorokhod-Raum*, welchen wir für die Herleitung der Tests benötigen. Im Anhang finden sich viele Grundlagen aus der Stochastik und der Statistik wieder, die in dieser Arbeit benutzt werden. Ich habe mich sehr bemüht, die Arbeit derart ausführlich zu gestalten, dass ein Bachelor-Abschluss in Mathematik ausreicht, um alles in dieser Arbeit Geschriebene mit geringem Aufwand verstehen zu können. Aus diesem Grund finden sich auch viele grundlegende Resultate wie der *Satz von der majorisierten Konvergenz* aber auch weiterführende Sätze wie das *Continuous Mapping Theorem (CMT)* im Anhang.

In Kapitel 2 werden dann die drei Tests vorgestellt: Der Kolmogorov-Smirnov-Test, der V_n-Test und der neue Test, wir werden ihn in dieser Arbeit L_n-Test nennen. Dabei werden wir uns zuerst die zweiseitigen Varianten und danach die einseitigen Varianten der Tests ansehen. Der Fokus liegt dabei auf den zweiseitigen Tests, da diese in der Praxis häufiger angewendet werden.

Kapitel 3 stellt den praktischen Teil der Arbeit dar, in welchem wir die drei Tests mittels Monte-Carlo-Simulationen miteinander vergleichen. Dazu haben wir eine Simulationssoftware in der Programmiersprache Python (Version 3.8.2) erstellt. Die Software kann über das folgende Github-Repository heruntergeladen werden:
`https://github.com/LostInDarkMath/Hypothesentests`
Alternativ können Sie mir auch gern eine E-Mail[1] schreiben und ich sende Ihnen das Programm per E-Mail zu. Wie genau die Monte-Carlo-Simulationen aussehen und wie die

[1] `willi_sontopski@arcor.de`

Software zu benutzen ist, ist in Kapitel 3 erklärt. Am Ende ziehen wir ein Fazit, basierend auf den in den Simulationen gewonnenen Daten. Es wird sich tatsächlich herausstellen, dass der L_n-Test in bestimmten Anwendungsgebieten deutliche Vorteile gegenüber dem stark verbreiteten Kolmogorov-Smirnov-Test hat.

1. Theoretische Grundlagen

Seien in diesem Kapitel $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dieses Kapitel basiert auf dem Vorlesungsskript *Stochastische Prozesse mit Strukturbrüchen* [Fer09] von D. Ferger.

1.1. Der Skorokhod-Raum $\mathfrak{D}[a, b]$

Definition 1.1.1 (Càdlàg-Funktion)
Eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Càdlàg-Funktion**, falls

(i) f rechtsseitig stetig ist, d.h. es gilt

$$f(x+) = f(x) \qquad \forall x \in [a, b)$$

und

(ii) der linksseitige Grenzwert $f(x-)$ für alle $x \in (a, b]$ existiert und endlich ist.

Der Name Càdlàg ist hierbei ein französisches Akronym (französisch *continue à droite, limite à gauche* „rechtsseitig stetig, mit Grenzwerten links“).

Definition 1.1.2 (Skorokhod-Raum)
Der **Skorokhod-Raum** ist definiert als Menge aller Càdlàg-Funktionen, also

$$\mathfrak{D}[a, b] := \mathfrak{D}([a, b]) := \{f\colon [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Càdlàg-Funktion}\}.$$

Der Buchstabe $\mathfrak{D}$ ist durch *discontinuous* motiviert (analog zu C und *continuous*). Wir schreiben im Weiteren kurz $\mathfrak{D} := \mathfrak{D}[0, 1]$.

Lemma 1.1.3 (Eigenschaften von Càdlàg-Funktionen) Für alle $f \in \mathfrak{D}[a, b]$ gilt:

(i) f ist beschränkt, d.h.

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b] : M > |f(x)|.$$

(ii) f hat höchstens abzählbar viele Sprungstellen.

(iii) f lässt sich gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \varphi \in T[a, b] : \|f - \varphi\| < \varepsilon.$$

Hierbei ist $T[a, b]$ der Raum der Treppenfunktionen auf $[a, b]$.

(iv) $\sup\limits_{t\in[a,b]} f(t) = \sup\limits_{t\in[a,b]\cap\mathbb{Q}} f(t)$

Beweis. Sei $f \in \mathfrak{D}[a,b]$.
Zeige (iii):
Beweis siehe z.B. Königsberger, *Analysis 1*, Seite 191-192 [Kö92]. Dabei wird genutzt, dass jede Càdlàg-Funktion auch eine *Regelfunktion* ist.

Zeige (i):
Sei $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in T[a,b]$ eine Treppenfunktion mit $\|f - \varphi\| < \varepsilon$ (existiert wegen (iii)). Sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ die zu φ zugehörige Zerlegung und $c_i = \varphi(x)$ für alle $x \in (t_{i-1}, t_i)$ und alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Folglich ist

$$m := \max_{i\in\{1,\ldots,k\}} |c_i| < \infty$$

eine obere Schranke für $|\varphi|$ und somit wegen (iii) und

$$\|f\| = \|f - \varphi + \varphi\| \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{\|f - \varphi\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|\varphi\|}_{\leq m} \leq m + \varepsilon < \infty$$

eine obere Schrank für $|f|$.

Zeige (ii):
Siehe Falkenburg, *Auswertung der Skorokohmetrik*, [Fal16] Seite 14 unter Lemma 2.1.2.

Zeige (iv):
Angenommen es gilt

$$\sup_{t\in[a,b]} f(t) > \sup_{t\in[a,b]\cap\mathbb{Q}} f(t).$$

Dann ist

$$\sup_{t\in[a,b]} f(t) - \sup_{t\in[a,b]\cap\mathbb{Q}} f(t) =: c > 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\tau \in [a,b]$ eine Supremalstelle von f (siehe Definition 1.4.1). Da f eine Càdlàg-Funktion ist, gilt

$$\exists \delta > 0 : \forall y \in [a,b] : \Big(0 < y - \tau < \delta \implies \big|f(y) - f(\tau)\big| < \varepsilon\Big).$$

Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt, existiert ein $q \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$ mit $0 < q - \tau < \delta$. Also gilt insbesondere für $y \mathrel{\hat{=}} q$:

$$\big|f(q) - f(\tau)\big| < \varepsilon$$

Da ε beliebig gewählt war und $q \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$ ist dies ein Widerspruch zu $c > 0$. $\square$

Wir möchten im Folgenden den Skorokohod-Raum $\mathfrak{D}$ mit einer Metrik versehen. Zwar ist die Supremums-Metrik aus Definition A.2.7,

$$d(f,g) := \sup_{t\in[a,b]} \left|f(t) - g(t)\right| = \|f-g\| \qquad \forall f,g \in \mathfrak{D}(a,b),$$

wegen Lemma 1.1.3(i) definiert, aber ungeeignet, da $(\mathfrak{D}, d)$ <u>nicht</u> separabel ist und die Sigma-Algebra $\mathcal{B}_d(\mathfrak{D})$ zu groß ist. Es gibt eine schwächere Metrik, welche günstigere Eigenschaften besitzt, wie wir gleich sehen werden:

Definition 1.1.4 (Skorokhod-Metrik)
Die **Skorokhod-Metrik** ist definiert als

$$s(f,g) := \inf_{\lambda\in\Lambda} \max\Big\{\|f - g\circ\lambda\|, \Big\|\lambda - \mathrm{id}_{[a,b]}\Big\|\Big\} \qquad \forall f,g \in \mathfrak{D}[a,b], \text{ wobei}$$
$$\Lambda := \{\lambda\colon [a,b] \to [a,b] \mid \lambda(a) = a, \lambda(b) = b,\ \lambda \text{ stetig \& streng monoton wachsend}\}.$$

Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|$ die Supremumsnorm aus Definition A.2.7.

Bemerkung. (Alternative Definition der Skorokhod-Metrik)
Man kann die Skorokhod-Metrik auch durch

$$\hat{s}(f,g) := \inf_{\lambda\in\Lambda} \Big(\|f - g\circ\lambda\| + \Big\|\lambda - \mathrm{id}_{[a,b]}\Big\|\Big) \qquad \forall f,g \in \mathfrak{D}[a,b]$$

definieren. Dies ist zwar eine andere Metrik, aber diese hat genau die gleichen Eigenschaften wie die aus Definition 1.1.4.

Lemma 1.1.5 Die Skorokhod-Metrik s ist eine Metrik auf $\mathfrak{D}[a,b]$.
Wir schreiben $(\mathfrak{D}[a,b], s)$ für den metrischen Raum. Außerdem bildet $(\Lambda, \circ)$ eine Gruppe.

Beweis. Offenbar sind alle $\lambda \in \Lambda$ Bijektionen auf $[a,b]$ und es gilt

$$\lambda \in \Lambda \implies \lambda^{-1} \in \Lambda \qquad \text{und} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \implies \lambda_2 \circ \lambda_2 \in \Lambda. \tag{$*1$}$$

Da die Hintereinanderausführung $\circ$ assoziativ ist, bildet $(\Lambda, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element $\mathrm{id}_{[a,b]} \in \Lambda$.

Nun weisen wir nach, dass s alle Metrik-Axiome erfüllt: Nach Definition ist s nichtnegativ, endlich und reellwertig.

Zeige $s(f,g)=0 \iff f=g$: Die eine Richtung ist einfach:

$$s(f,f) \overset{\text{Def}}{=} \inf_{\lambda\in\Lambda} \max\Big\{\|f-f\circ\lambda\|, \Big\|\lambda - \mathrm{id}_{[a,b]}\Big\|\Big\} \overset{\mathrm{id}_{[a,b]}\in\Lambda}{\leq} \max\{0,0\}=0$$

Andere Richtung:

$$\begin{aligned} s(f,g)=0 &\iff \exists(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\Lambda : \max\Big\{\|f-g\circ\lambda_n\|, \Big\|\lambda_n-\mathrm{id}_{[a,b]}\Big\|\Big\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\iff \exists(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\Lambda : \|f-g\circ\lambda_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \wedge \Big\|\lambda_n-\mathrm{id}_{[a,b]}\Big\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\iff \exists(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\Lambda : g\circ\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \wedge \lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{id}_{[a,b]} \end{aligned}$$

Es gibt also eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\Lambda$ mit $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{id}_{[a,b]}$ für die $\Big|g\big(\lambda_n(t)\big)-f(t)\Big| < \varepsilon$ ist hinreichend große $n\in\mathbb{N}$ und alle $t\in[a,b]$. Folglich gilt

$$f(t)=g(t) \text{ oder } f(t)=g(t-) \qquad \forall t\in[a,b]. \tag{$*2$}$$

Wegen Lemma 1.1.3(ii) gibt es höchstens abzählbar viele Sprungstellen von f und g und außerhalb der Sprungstellen gilt wegen ($*2$) bereits $f\equiv g$. Insbesondere stimmen f und g zwischen je zwei Sprungstellen überein, da zwischen zwei Springstellen immer überabzählbar viele Punkte liegen. Somit müssen f und g auch an den Sprungstellen übereinstimmen wegen der Càdlàg-Eigenschaft. Also gilt

$$\forall f,g\in\mathfrak{D}[a,b] : \Big(\forall t\in[a,b] : f(t)=g(t) \text{ oder } f(t)=g(t-)\Big) \implies f\equiv g \tag{$*3$}$$

Zeige $s(f,g)=s(g,f)$:
Nachfolgend benötigen wir eine Hilfsaussage: Es gilt für alle $f,g\in\mathfrak{D}[a,b]$ und alle $\lambda\in\Lambda$:

$$\begin{aligned} \|f-g\circ\lambda\| &\overset{\text{Def } A.2.7}{=} \sup_{t\in[a,b]} \big|f(t)-g(\lambda(t))\big| \\ &\overset{\lambda^{-1}\text{ Bij.}}{=} \sup_{\lambda^{-1}(t)\in[a,b]} \big|f(\lambda^{-1}(t)) - \underbrace{g(\lambda(\lambda^{-1}(t)))}_{=g(t)}\big| \\ &\overset{\lambda^{-1}\text{ Bij.}}{=} \sup_{t\in[a,b]} \big|g(t)-f(\lambda^{-1}(t))\big| \\ &\overset{\text{Def } A.2.7}{=} \Big\|g-f\circ\lambda^{-1}\Big\| \end{aligned} \tag{$*4$}$$

Außerdem gilt aus denselben Gründen für alle $\lambda \in \Lambda$:

$$\begin{aligned}
\left\|\lambda - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\| &\overset{\text{Def }A.2.7}{=} \sup_{t\in[a,b]} |\lambda(t) - t| \qquad (*5)\\
&\overset{\lambda^{-1}\text{ Bij.}}{=} \sup_{\lambda^{-1}(t)\in[a,b]} |\underbrace{\lambda(\lambda^{-1}(t))}_{=t} - \lambda^{-1}(t)|\\
&\overset{\lambda^{-1}\text{ Bij.}}{=} \sup_{t\in[a,b]} |\lambda^{-1}(t) - t|\\
&\overset{\text{Def }A.2.7}{=} \left\|\lambda^{-1} - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|
\end{aligned}$$

Aus diesen zwei Hilfsaussagen folgt nun die Symmetrie von s:

$$\begin{aligned}
s(f,g) &\overset{\text{Def}}{=} \inf_{\lambda\in\Lambda} \max\left\{\|f - g\circ\lambda\|, \left\|\lambda - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|\right\}\\
&\overset{(*4)}{=} \inf_{\lambda\in\Lambda} \max\left\{\left\|g - f\circ\lambda^{-1}\right\|, \left\|\lambda - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|\right\}\\
&\overset{(*5)}{=} \inf_{\lambda\in\Lambda} \max\left\{\left\|g - f\circ\lambda^{-1}\right\|, \left\|\lambda^{-1} - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|\right\}\\
&\overset{(*1)}{=} \inf_{\lambda\in\Lambda} \max\left\{\|g - f\circ\lambda\|, \left\|\lambda - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|\right\}\\
&\overset{\text{Def}}{=} s(g,f)
\end{aligned}$$

<u>Zeige $s(f,h) \le s(f,g) + s(g,h)$:</u>

<u>Für die Dreiecksungleichung</u> benötigen wir weitere Hilfsaussagen. Da $\Lambda \subseteq \mathfrak{D}[a,b]$ gilt wegen $(*4)$ auch

$$\|\lambda_1 - \lambda_2\circ\lambda_3\| = \left\|\lambda_1\circ\lambda_3^{-1} - \lambda_2\right\| \qquad \forall \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \Lambda. \qquad (*6)$$

Daraus folgt mit $\lambda_1 \hat{=} \lambda_1\circ\lambda_2$, $\lambda_2 \hat{=} \lambda_2^{-1}$ und $\lambda_3 \hat{=} \lambda_2$: für beliebige $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$:

$$\begin{aligned}
\|\lambda_1\circ\lambda_2 - \underbrace{\mathrm{id}_{[a,b]}}_{=\lambda_2^{-1}\circ\lambda_2}\| &\overset{(*6)}{=} \|\lambda_1\circ\underbrace{\lambda_2\circ\lambda_2^{-1}}_{=\mathrm{id}_{[a,b]}} - \lambda_2^{-1}\| \qquad (*7)\\
&= \|\lambda_1 \underbrace{- \mathrm{id}_{[a,b]} + \mathrm{id}_{[a,b]}}_{=0} - \lambda_2^{-1}\|\\
&\overset{\text{DU}}{\le} \left\|\lambda_1 - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\| + \left\|\mathrm{id}_{[a,b]} - \lambda_2^{-1}\right\|\\
&\overset{(*5)}{=} \left\|\lambda_1 - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\| + \left\|\lambda_2 - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|
\end{aligned}$$

Außerdem erhalten wir noch die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|f - h \circ (\lambda_1 \circ \lambda_2)\| &\overset{(*4)}{=} \left\|f \circ \lambda_2^{-1} - h \circ \lambda_1\right\| \\
&= \|f \circ \lambda_2^{-1} \underbrace{-g + g}_{=0} - h \circ \lambda_1\| \\
&\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} \left\|f \circ \lambda_2^{-1} - g\right\| + \|g - h \circ \lambda_1\| \\
&\overset{(*4)}{=} \|f - g \circ \lambda_2\| + \|g - h \circ \lambda_1\|
\end{aligned} \tag{$*8$}$$

für alle $f, g, h \in \mathfrak{D}(a, b)$. Mit diesen Hilfsaussagen können wir nun die Dreiecksungleichung beweisen. Es gilt für alle $f, g, h \in \mathfrak{D}(a, b)$:

$$\begin{aligned}
&s(f, h) \\
&\overset{\text{Def}}{=} \inf_{\lambda \in \Lambda} \max\left\{\|f - h \circ \lambda\|, \left\|\lambda - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|\right\} \\
&= \inf_{\lambda_1 \circ \lambda_2 \in \Lambda} \max\left\{\|f - h \circ \lambda_1 \circ \lambda_2\|, \left\|\lambda_1 \circ \lambda_2 - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|\right\} \\
&\overset{(*7)+(*8)}{\leq} \inf_{\lambda_1 \circ \lambda_2 \in \Lambda} \max\left\{\|f - h \circ \lambda_2\| + \|g - h \circ \lambda_1\|, \left\|\lambda_1 - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\| + \left\|\lambda_2 - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|\right\} \\
&\leq \inf_{\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda} \left(\max\left\{\|f - h \circ \lambda_2\|, \left\|\lambda_1 - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|\right\} + \max\left\{\|g - h \circ \lambda_1\|, \left\|\lambda_2 - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|\right\}\right) \\
&= \inf_{\lambda \in \Lambda} \left(\max\left\{\|f - g \circ \lambda\|, \left\|\lambda - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|\right\} + \max\left\{\|g - h \circ \lambda\|, \left\|\lambda - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|\right\}\right) \\
&= \inf_{\lambda \in \Lambda} \max\left\{\|f - g \circ \lambda\|, \left\|\lambda - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|\right\} + \inf_{\lambda \in \Lambda} \max\left\{\|g - h \circ \lambda\|, \left\|\lambda - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|\right\} \\
&= s(f, g) + s(g, h)
\end{aligned}$$

□

Notation. Sei (M, δ) ein metrischer Raum, $m \in M$ und $(m_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$. Wir schreiben

$$m_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow}_\delta m :\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \delta(m_n, m) < \varepsilon.$$

Lemma 1.1.6 (Eigenschaften der Skorokohod-Metrik)
Seien $f, g, f_n, g_n \in \mathfrak{D}[a, b], n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(i) $f_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow}_d f \implies f_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow}_s f$

(ii) $f_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow}_s f \land f \in \mathfrak{C}(I) \implies f_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow}_d f$

(iii) Die Addition ist nur mit Einschränkung stetig, also

$$f_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow}_s f \land g_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow}_s g \land g \in \mathfrak{C}(I) \implies f_n + g_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow}_s f + g.$$

Für $g \notin \mathfrak{C}(I)$ muss die Implikation nicht gelten.

(iv) $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}_s f \iff \exists (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Lambda : \|f_n - f \circ \lambda_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $\left\|\lambda_n - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Beweis. Zeige (i): Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[a,b]} \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon \tag{$*1$}$$

Dann folgt aus

$$\begin{aligned} s(f, f_n) &\overset{\text{Def}}{=} \inf_{\lambda\in\Lambda} \max\Big\{\|f - f_n \circ \lambda\|, \left\|\lambda - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|\Big\} \\ &\overset{\lambda=\mathrm{id}_{[a,b]}}{\leq} \max\Big\{\left\|f - f_n \circ \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|, \left\|\mathrm{id}_{[a,b]} - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|\Big\} \\ &= \|f - f_n\| \\ &= d(f_n, f) \\ &\overset{(*1)}{<} \varepsilon \end{aligned}$$

die Behauptung $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}_s f$.

Zeige (ii): Sei wieder $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$s(f, f_n) \overset{\text{Def}}{=} \inf_{\lambda\in\Lambda} \max\Big\{\|f - f_n \circ \lambda\|, \left\|\lambda - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\|\Big\} < \varepsilon \tag{$*2$}$$

Insbesondere gilt für eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Lambda$ dann $\lim_{n\to\infty} \left\|\lambda_n - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\| = 0$, also $\left\|\lambda_n - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ für ein hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$. Da f nach Voraussetzung stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ist, ist f sogar gleichmäßig stetig und es gilt:

$$\exists \delta > 0 : \forall t, t_0 \in [a, b] : |t - t_0| < \delta \implies \left|f(t) - f(t_0)\right| < \varepsilon$$

Da jedes $\lambda \in \Lambda$ stetig ist, folgt für dieses $\delta > 0$:

$$\left\|\lambda_n - \mathrm{id}_{[a,b]}\right\| < \delta \implies \left\|f \circ \lambda_n - f \circ \mathrm{id}_{[a,b]}\right\| \leq \varepsilon \tag{$*3$}$$

Da $\lambda_n \in \Lambda$ eine Bijektion auf $[a, b]$ ist (vgl. Beweis von Lemma 1.1.5), folgt

$$\begin{aligned}
d(f_n, f) &= \|f_n - f\| \\
&\overset{\lambda_n \text{ Bij.}}{=} \|f_n \circ \lambda_n - f \circ \lambda_n\| \\
&= \|f_n \circ \lambda_n \underbrace{-f + f}_{=0} -f \circ \lambda_n\| \\
&\overset{\triangle\text{Ungl}}{\leq} \underbrace{\|f_n \circ \lambda_n - f\|}_{\overset{(*2)}{<} \varepsilon} + \underbrace{\|f - f \circ \lambda_n\|}_{\overset{(*3)}{<} \varepsilon} \\
&< 2 \cdot \varepsilon
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}_d f$.

<u>Zeige (iii)</u>: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$s(f_n, f) < \varepsilon_1 \qquad \text{und} \qquad s(g_n, g) < \varepsilon_2$$

Wegen (ii) ist

$$s(g_n, g) < \varepsilon_2 \wedge g \in C(I) \iff d(g_n, g) < \varepsilon_2$$

für alle $n \geq N$ ab einem gewissen $\tilde{N} \in \mathbb{N}$. Nach Definition der Skorokhod-Metrik s existiert eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Lambda$ mit $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{id}_{[a,b]}$ und

$$\begin{aligned}
\varepsilon :&= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon \\
&\geq \underbrace{\|f - f_n \circ \lambda_n\|}_{\leq \varepsilon_1} + \underbrace{\|g - g_n\|}_{<\varepsilon_2} + \underbrace{\|g \circ \mathrm{id} - g \circ \lambda_n\|}_{<\varepsilon_3,\text{ da } g \text{ stetig}} \\
&\overset{\lambda_n \text{ Bij}}{=} \|f - f_n \circ \lambda_n\| + \|g \circ \lambda_n - g_n \circ \lambda_n\| + \|g \circ \mathrm{id} - g \circ \lambda_n\| \\
&\overset{\triangle\text{ Ungl}}{\geq} \left\|f - f_n \circ \lambda_n + g \circ \lambda_n - g_n \circ \lambda_n + g \circ \mathrm{id}_{[a,b]} - g \circ \lambda_n\right\| \\
&= \left\|f - f_n \circ \lambda_n - g_n \circ \lambda_n + g \circ \mathrm{id}_{[a,b]}\right\| \\
&= \|f + g - f_n \circ \lambda_n - g_n \circ \lambda_n\| \\
&= \|f + g - (f_n + g_n)(\lambda_n)\|.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|f + g - (f_n + g_n)(\lambda_n)\| < \varepsilon.$$

Damit ist die Behauptung $f_n + g_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}_s f + g$ gezeigt.

Zeige (iv): Dies folgt aus Definition 1.1.4 und aus der Definition des Infimums:

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{n\to\infty}_s f &\overset{\text{Def}}{\iff} \inf_{\lambda\in\Lambda} \max\Big\{\|f_n - f\circ\lambda_n\|, \Big\|\lambda - \mathrm{id}_{[a,b]}\Big\|\Big\} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ &\iff \exists(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Lambda : \max\{\|f_n - f\circ\lambda_n\|, \|\lambda_n - \mathrm{id}\|\} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ &\iff \exists(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Lambda : \|f_n - f\circ\lambda_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ und } \Big\|\lambda_n - \mathrm{id}_{[a,b]}\Big\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

□

Definition 1.1.7 (Projektionen)

(i) Sei $t \in [a,b]$. Die Abbildung

$$\pi_t \colon \mathfrak{D}[a,b] \to \mathbb{R}, \qquad \pi_t(f) := f(t) \qquad \forall f \in \mathfrak{D}[a,b]$$

heißt **Projektion in** t.

(ii) Sei $T := \{t_1,\dots,t_k\} \subseteq [a,b], k \in \mathbb{N}$. Die Abbildung

$$\pi_T \colon \mathfrak{D}[a,b] \to \mathbb{R}^k, \qquad \pi_T(f) := (f(t_1),\dots,f(t_k)) =: (f(t))_{t\in T} \qquad \forall f \in \mathfrak{D}[a,b]$$

heißt **Projektion in** T.

Satz 1.1.8

$\mathcal{B}_s(\mathfrak{D}[a,b])$ ist die kleinste σ-Algebra derart, dass alle Projektionen π_t messbar sind, also:

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_s(\mathfrak{D}[a,b]) \\ &= \sigma(\pi_t : t \in I) := \sigma\Big(\Big\{\pi_t^{-1}(B) : t \in I, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\Big\}\Big) \\ &= \sigma(\pi_T \colon T \subseteq I, T \text{ endlich}) := \sigma\Big(\Big\{\pi_T^{-1}(B) : T \subseteq I, T \text{ endlich}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\#T})\Big\}\Big) \end{aligned}$$

Hierbei ist $I := [a,b]$.

Beweis. Siehe Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Seite 134, Theorem 12.5 (iii), [Bil99]. □

Korollar 1.1.9

Sei $X\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to \big(\mathfrak{D}[a,b], \mathcal{B}_s(\mathfrak{D}[a,b])\big)$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$X \text{ ist } \mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}_s(\mathfrak{D}[a,b])\text{-messbar} \iff \forall t \in [a,b] : X(t) \text{ ist } \mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{R})\text{-messbar}$$

Beweis. Zeige „$\Longrightarrow$“:
Sei $t \in [a,b]$. X ist nach Voraussetzung $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_s(\mathfrak{D}[a,b])$-messbar und π_t ist wegen Satz 1.1.8 $\mathcal{B}_s(\mathfrak{D}[a,b])$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Somit ist $X(t) = \pi_t \circ X$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar als Komposition von messbaren Abbildungen.

Zeige „$\Longleftarrow$“: Folgt aus Satz 1.1.8 und Satz 1.2.11 in Gänssler und Stute *Wahrscheinlichkeitstheorie* 1977 Seite 18 [GS77].

$\square$

Satz 1.1.10

(i) Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ auf $\mathcal{B}_s(\mathfrak{D}[a,b])$ gilt:

$$\mathbb{P}_1 \equiv \mathbb{P}_2 \iff \forall T \subseteq [a,b] \text{ endlich} : \mathbb{P}_1 \circ \pi_T^{-1} = \mathbb{P}_2 \circ \pi_T^{-1}$$

(ii) Für zwei Zufallsvariablen X, Y in $\big(\mathfrak{D}[a,b], s\big)$ gilt:

$$X \overset{\mathcal{L}}{=} Y \iff \forall T \subseteq [a,b] \text{ endlich} : \pi_T(X) \overset{\mathcal{L}}{=} \pi_T(Y)$$

Die Verteilung einer Zufallsvariablen in $\big(\mathfrak{D}[a,b], s\big)$ ist also eindeutig durch ihre endlich-dimensionalen Verteilungen festgelegt.

Beweis. Zeige (i): Nach Satz 1.1.8 ist

$$\mathcal{E} := \Big\{\pi_T^{-1}(B) : T \subseteq I, T \text{ endlich}, B \in \mathcal{B}\Big(\mathbb{R}^{\#T}\Big)\Big\}$$

ein Erzeuger von $\mathcal{B}_s(D[a,b])$. Aus der Voraussetzung

$$\mathbb{P}_1\Big(\pi_T^{-1}(B)\Big) = \mathbb{P}_2\Big(\pi_T^{-1}(B)\Big) \qquad \forall B \in \mathcal{B}\Big(\mathbb{R}^{\#T}\Big), \forall T \subseteq [a,b] \text{ endlich}$$

folgt, dass die Maße P, Q auf dem Erzeuger $\mathcal{E}$ übereinstimmen, also

$$\mathbb{P}_1|_{\mathcal{E}} \equiv \mathbb{P}_2|_{\mathcal{E}}.$$

$\mathcal{E}$ ist durchschnittstabil, denn seien $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
E_1 \cap E_2 &\overset{1.1.8}{=} \pi_{T_1}^{-1}(B_1) \cap \pi_{T_2}^{-1}(B_2) \text{ mit } T_1 = \{t_1, \dots, t_k\} \text{ und } T_2 = \{s_1, \dots, s_l\} \\
&= \{f \in \mathfrak{D}[a,b] : \pi_{T_1}(f) \in B_1\} \cap \{f \in \mathfrak{D}[a,b] : \pi_{T_1}(f) \in B_1\} \\
&= \{f \in \mathfrak{D}[a,b] : \pi_{T_1}(f) \in B_1 \text{ und } \pi_{T_2}(f) \in B_2\} \\
&= \{f \in \mathfrak{D}[a,b] : \big(\pi_{T_1}(f), \pi_{T_2}(f)\big) \in B_1 \times B_2\} \\
&= \{f \in \mathfrak{D}[a,b] : \big(\pi_{T_1}, \pi_{T_2}\big)(f) \in B_1 \times B_2\} \\
&= (\pi_{T_1}, \pi_{T_2})^{-1}(B_1 \times B_2) \\
&\cong \pi_{T_3}^{-1}(B_1 \times B_2) \qquad \text{mit} \qquad T_3 := \{t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_l\} \\
&\overset{1.1.8}{\in} \mathcal{E}
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus dem Maßeindeutigkeitssatz, Satz A.1.5.

Zeige (ii): Folgt direkt aus (i) via:

$$\begin{aligned}
X \overset{\mathcal{L}}{=} X &\overset{\text{Def}}{\iff} \mathbb{P} \circ X^{-1} = \mathbb{P} \circ Y^{-1} \\
&\overset{\text{(i)}}{\iff} \underbrace{\Big(\mathbb{P} \circ X^{-1}\Big) \circ \pi_T^{-1}}_{=\mathbb{P}\circ(\pi_T \circ X)^{-1}} = \underbrace{\Big(\mathbb{P} \circ Y^{-1}\Big) \circ \pi_T^{-1}}_{=\mathbb{P}\circ(\pi_T \circ Y)^{-1}} \qquad \forall T \subseteq [a,b] \text{ endlich} \\
&\iff \underbrace{\pi_T \circ X}_{=\pi_T(X)} \overset{\mathcal{L}}{=} \underbrace{\pi_T \circ Y}_{=\pi_T(Y)} \qquad \forall T \subseteq [a,b] \text{ endlich}
\end{aligned}$$

□

Jede Zufallsvariable $X\colon \Omega \to \mathfrak{D}[0,1]$ in $\mathfrak{D}[0,1]$ kann auch als stochastischer Prozess $X\colon \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit Pfaden in $\mathfrak{D}[0,1]$ aufgefasst werden und umgekehrt. Aufgrund dieser Eins-zu-Eins-Korrespondenz wird im Weiteren stillschweigend zwischen beiden Bedeutungen hin- und hergewechselt.

1.2. Brownsche Bewegung und Brownsche Brücke

Definition 1.2.1 (Brownsche Bewegung)
Sei $I := [0,b]$ mit $b > 0$ und $\mathfrak{B}\colon I \times \Omega \to \mathbb{R}$ ein stochastischer Prozess über $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit den Eigenschaften:

(i) fast alle Pfade von $\mathfrak{B}$ starten in 0, d.h.

$$\mathfrak{B}(0,\omega) = 0 \ \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

(ii) $\mathfrak{B}$ hat **unabhängige Zuwächse**, d.h. die Zuwächse

$$\mathfrak{B}(t_1,\cdot) - \mathfrak{B}(t_0,\cdot), \mathfrak{B}(t_2,\cdot) - \mathfrak{B}(t_1,\cdot), \dots, \mathfrak{B}(t_r,\cdot) - \mathfrak{B}(t_{r-1},\cdot)$$

sind unabhängig für alle $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r \leq b$.

(iii) Die Zuwächse von $\mathfrak{B}$ sind stationär und normalverteilt, genauer:

$$\mathfrak{B}(t,\cdot) - \mathfrak{B}(s,\cdot) \sim \mathcal{N}(0, t-s) \qquad \forall 0 \leq s < t \leq b$$

(iv) Die Pfade von $\mathfrak{B}$ sind fast sicher stetig, d.h.

$$t \mapsto \mathfrak{B}(t,\omega) \text{ ist stetig } \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Dann heißt $\mathfrak{B}$ **Brownsche Bewegung**.

Satz 1.2.2: Existenzsatz

Eine Brownsche Bewegung $\mathfrak{B}$ existiert.

Beweis. Es gibt mehrere sehenswerte Konstruktionsmöglichkeiten, die alle im Buch *Brownian Motion: An Introduction to Stochastic Processes* von René L. Schilling und Lothar Partzsch [SP14] nachgelesen werden können:

- Die Lévy-Ciesielski-Konstruktion: Siehe [SP14] Abschnitt 3.1, Seite 21
- Die Konstruktion von Lévy: Siehe [SP14] Abschnitt 3.1, Seite 28
- Die Konstruktion von Wiener: [SP14] Abschnitt 3.1, Seite 33

□

Lemma 1.2.3 (Eigenschaften der Brownschen Bewegung)

(i) $\mathbb{E}[\mathfrak{B}(t)] \sim \mathcal{N}(0,t) \qquad \forall t \in [0,b]$

(ii) $\mathfrak{B}$ hat die Kovarianzfunktion

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\mathfrak{B}} \colon [0,b] \times [0,b] \to \mathbb{R}, \qquad (s,t) \mapsto \mathbb{C}\mathrm{ov}(s,t) = \min\{s,t\}. \tag{1.1}$$

Beweis. Zeige (i):
Folgt direkt aus der Definition 1.2.1(iii) mit $s = 0$.

Zeige (ii):
Sei o.B.d.A. $0 \leq s < t \leq b$. Mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(t) &= \mathfrak{B}(s) + \big(\mathfrak{B}(s) - \mathfrak{B}(t)\big) \\ \Longrightarrow \mathfrak{B}(s)\cdot\mathfrak{B}(t) &= \big(\mathfrak{B}(s)\big)^2 + \mathfrak{B}(s)\cdot\big(\mathfrak{B}(s) - \mathfrak{B}(t)\big) \qquad (*) \end{aligned}$$

gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\mathfrak{B}}(s,t) &\overset{\text{Def}}{=} \mathbb{E}\Big[\big(\mathfrak{B}(s) - \mathbb{E}[\mathfrak{B}(s)]\big) \cdot \big(\mathfrak{B}(t) - \mathbb{E}[\mathfrak{B}(t)]\big)\Big] \\
&\overset{\text{(i)}}{=} \mathbb{E}\Big[\mathfrak{B}(s) \cdot \mathfrak{B}(t)\Big] \\
&\overset{(*)}{=} \mathbb{E}\Big[\big(\mathfrak{B}(s)\big)^2 + \mathfrak{B}(s) \cdot \big(\mathfrak{B}(t) - \mathfrak{B}(s)\big)\Big] \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \mathbb{E}\Big[\big(\mathfrak{B}(s)\big)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\mathfrak{B}(s) \cdot \big(\mathfrak{B}(t) - \mathfrak{B}(s)\big)\Big]
\end{aligned}$$

Zum einen gilt

$$\mathbb{E}\Big[\big(\mathfrak{B}(s)\big)^2\Big] = \mathbb{V}\mathrm{ar}\big(\mathfrak{B}(s)\big) \overset{\text{(i)}}{=} s$$

und zum anderen gilt

$$\mathbb{E}\Big[\mathfrak{B}(s) \cdot \big(\mathfrak{B}(t) - \mathfrak{B}(s)\big)\Big] \overset{\text{unabh}}{=} \mathbb{E}\big[\mathfrak{B}(s)\big] \cdot \mathbb{E}\big[\mathfrak{B}(t) - \mathfrak{B}(s)\big] \overset{\text{(i)}}{=} 0 \cdot 0 = 0,$$

denn $\mathfrak{B}(s)$ ist unabhängig von $\mathfrak{B}(t) - \mathfrak{B}(s)$ wegen 1.2.1(ii). Also erhalten wir insgesamt

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\mathfrak{B}}(s,t) = \min\{s,t\},$$

denn für $0 \leq t < s \leq b$ erhalten wir mit obiger Argumentation $\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\mathfrak{B}}(s,t) = t$. □

Definition 1.2.4 (Brownsche Brücke)
Sei $\mathfrak{B}$ eine Brownsche Bewegung auf $[0,1]$. Der stochastische Prozess

$$\mathfrak{B}_0 \colon [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \mathfrak{B}_0(t,\omega) := \mathfrak{B}(t,\omega) - t \cdot \mathfrak{B}(1,\omega) \qquad \forall t \in [0,1], \forall \omega \in \Omega$$

heißt **Brownsche Brücke**.

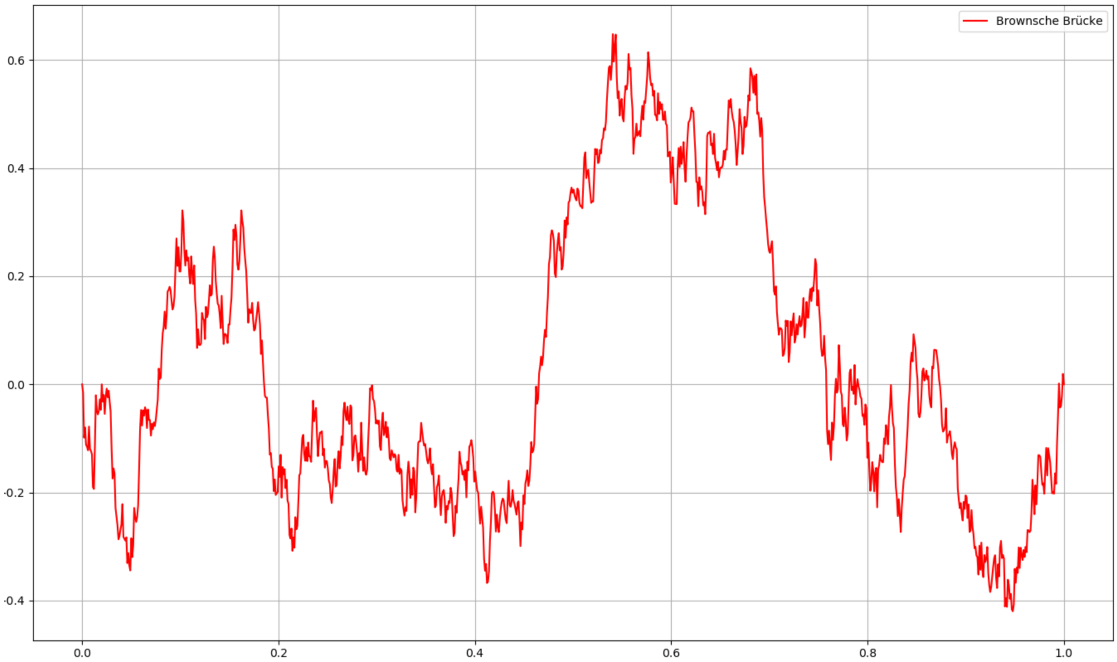

Abbildung 1.1.: Plot einer Brownschen Brücke

Lemma 1.2.5 (Eigenschaften der Brownschen Brücke)

(i) $\mathfrak{B}_0(\cdot, \omega)$ ist stetig $\mathbb{P}$-f.s.

(ii) $\mathfrak{B}_0(0, \omega) = \mathfrak{B}_0(1, \omega) = 0$ $\mathbb{P}$-f.s.

(iii) $\mathfrak{B}_0$ ist zentrierter Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\mathfrak{B}_0} \colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad (s,t) \mapsto \mathbb{C}\mathrm{ov}(s,t) = \min\{s,t\} - s \cdot t. \tag{1.2}$$

Beweis. Zeige (i): Da nach Definition die Brownsche Bewegung fast sicher stetige Pfade besitzt (siehe 1.2.1(iv)), sind auch die Pfade der Brownschen Brücke als Verknüpfung fast sicher stetiger Funktionen fast sicher stetig.

Zeige (ii): Es gilt $\mathbb{P}$-f.s.:

$$\mathfrak{B}_0(0,\omega) \overset{\text{Def}}{=} \mathfrak{B}(0,\omega) - 0 \overset{1.2.1(\text{i})}{=} 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_0(1,\omega) \overset{\text{Def}}{=} \mathfrak{B}(1,\omega) - 1 \cdot \mathfrak{B}(1,\omega) = 0$$

Zeige (iii):

$$\mathbb{E}[\mathfrak{B}_0(t)] \overset{\text{Def}}{=} \mathbb{E}[\mathfrak{B}(t) - t \cdot \mathfrak{B}(1)] = \mathbb{E}[\mathfrak{B}(t)] - t \cdot \mathbb{E}[\mathfrak{B}(1)] \overset{\text{(i)}}{=} t - t \cdot 1 = 0 \qquad \forall t \in [0,1] \tag{H1}$$

Wir rechnen die Kovarianzfunktion aus:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\mathrm{ov}(s,t) &\overset{\text{Def}}{=} \mathbb{E}\Big[\big(\mathfrak{B}_0(s) - \mathbb{E}[\mathfrak{B}_0(s)]\big)\big(\mathfrak{B}_0(s) - \mathbb{E}[\mathfrak{B}_0(s)]\big) \cdot \big(\mathfrak{B}_0(t) - \mathbb{E}[\mathfrak{B}_0(t)]\big)\Big] \\
&\overset{\text{(H1)}}{=} \mathbb{E}\Big[\mathfrak{B}_0(s) \cdot \mathfrak{B}_0(t)\Big] \\
&\overset{\text{Def}}{=} \mathbb{E}\Big[\big(\mathfrak{B}(s) - s \cdot \mathfrak{B}(1)\big) \cdot \big(\mathfrak{B}(t) - t \cdot \mathfrak{B}(1)\big)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathfrak{B}(s) \cdot \mathfrak{B}(t) - t \cdot \mathfrak{B}(s) \cdot \mathfrak{B}(1) - s \cdot \mathfrak{B}(t) \cdot \mathfrak{B}(1) + s \cdot t \cdot \mathfrak{B}(1)\Big] \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \mathbb{E}\Big[\mathfrak{B}(s) \cdot \mathfrak{B}(t)\Big] - t \cdot \mathbb{E}\Big[\mathfrak{B}(s) \cdot \mathfrak{B}(1)\Big] - s \cdot \mathbb{E}\Big[\mathfrak{B}(t) \cdot \mathfrak{B}(1)\Big] + t \cdot s \cdot \mathbb{E}[\mathfrak{B}(1)] \\
&\overset{\text{1.2.3(ii)}}{=} \min\{s,t\} - t \cdot \min\{s,1\} - s \cdot \min\{t,1\} + t \cdot s \cdot 1 \\
&= \min\{s,t\} - t \cdot s - s \cdot t + t \cdot s \\
&= \min\{s,t\} - s \cdot t
\end{aligned}$$

□

Definition 1.2.6 (Reflektierte Brownsche Brücke)
Die **reflektierte Brownsche Brücke** ist definiert als

$$\mathfrak{B}_*\colon [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \mathfrak{B}_*(t,\omega) := \big|\mathfrak{B}_0(t,\omega)\big| \qquad \forall t \in [0,1], \forall \omega \in \Omega.$$

Genau wie die Brownsche Brücke besitzt auch die reflektierte Brownsche Brücke fast sicher stetige Pfade.

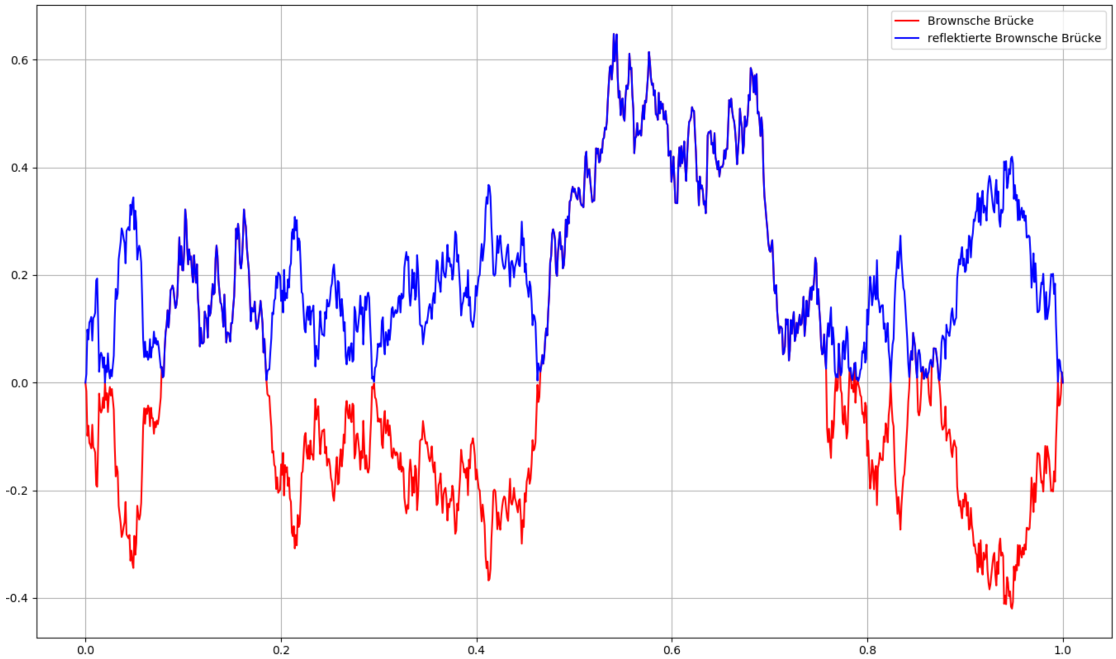

Abbildung 1.2.: Plot einer reflektierten Brownschen Brücke, vgl. Abbildung 1.1

Satz 1.2.7: $\mathfrak{B}_*$ hat fast sicher ein eindeutiges Maximum

Das Maximum

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|\mathfrak{B}_0(t)\right|$$

wird mit Wahrscheinlichkeit eins in genau einem Punkt angenommen, d.h.

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega : \#\mathfrak{S}\big(\mathfrak{B}_*(\cdot,\omega)\big)\Big\} = 1\Big) = 1.$$

Hier bezeichnet $\mathfrak{S}(f)$ die Menge der Supremalstellen der Funktion f, siehe Defintion 1.4.1 im Abschnitt 1.4.

Beweis. Siehe Ferger 1999, *On the uniqueness of maximizers of Markov-Gaussian processes*, Seite 72-76, [Fer99]. Dort wird in Example 1.2 mithilfe von Theorem 1.1 gezeigt, dass $\mathfrak{B}_0$ unimodal ist, d.h. dass $\mathfrak{B}_0$ ein fast sicher eindeutiges Maximum besitzt. Und die Unimodalität der Brownschen Brücke überträgt sich dann mithilfe von Theorem 2.4 auf die reflektierte Brownsche Brücke, da die Menge

$$\{t \in [0,1] : \mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathfrak{B}_0)(t) = 0\} \overset{1.2.5(\mathrm{iii})}{=} \{t \in [0,1] : t - t^2 = 0\} = \{0; 1\}$$

Lebesgue-Maß 0 hat. □

1.3. Verteilungskonvergenz in $\mathfrak{D}[a, b]$

Ziel dieses Kapitels ist die Bereitstellung von Kriterien für die Verteilungskonvergenz in $\mathfrak{D}[a, b]$.

Satz 1.3.1: Momentenkriterium

Seien $X, X_n, n \in \mathbb{N}_+$ Zufallsvariablen in $(\mathfrak{D}[a, b], s)$ mit

$$\pi_T(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \pi_T(X) \qquad \forall T \subseteq [0, 1] \text{ endlich} \tag{1.3}$$

und

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega : X(b-, \omega) \neq X(b, \omega)\}\Big) = 0. \tag{1.4}$$

Falls eine stetige, monoton wachsende Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ und $\alpha \geq 0, \beta > 1$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n(t_1) - X_n(t)|^\alpha \cdot |X_n(t) - X_n(t_2)|^\alpha] &\leq (F(t_2) - F(t_1))^\beta \\ &\forall a \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq b, \forall n \geq 1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

existiert, so gilt

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \text{ in } (\mathfrak{D}[a, b], s)).$$

Beweis. Siehe Billingsley 1999, *Convergence of probability measures*, Seite 142-143, Theorem 13.4, [Bil99] □

Definition 1.3.2 (Uniformer empirischer Prozess)
Der **uniforme empirische Prozess** $U_n\colon [0, 1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\begin{aligned} U_n(t, \omega) &:= \sqrt{n} \cdot (F_n(t, \omega) - t) \\ &\overset{(A.2)}{=} \sqrt{n} \cdot \left(\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i(\omega) < t}\right) - t\right) \\ &= \sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i(\omega) < t}\right) - n \cdot t\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Big(\mathbb{1}_{(X_i(\omega) \leq t)} - t\Big) \qquad \forall t \in [0, 1], \forall \omega \in \Omega \end{aligned} \tag{1.6}$$

wobei $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{U}(0,1)$. Hierbei ist $\mathcal{U}(0,1)$ die Gleichverteilung auf $[0,1]$ und F_n ist die empirische Verteilungsfunktion, siehe Definition A.2.2. Zwei beispielhafte Plots von uniformen empirischen Prozessen finden sich in Abbildung 2.1 und Abbildung 2.2.

Satz 1.3.3: Invarianzprinzip von Donsker

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathfrak{B}_0 \text{ in } \mathfrak{D}[0,1]$$

Beweis. Wir wollen das Momentenkriterium (Satz 1.3.1) anwenden und zeigen, dass die Voraussetzungen dafür erfüllt sind.

Schritt 1: Zuerst zeigen wir die Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen, also Gleichung (1.3): Seien $k \in \mathbb{N}$ und $T = \{t_1, \dots, t_k\} \subset I$ mit $0 < t_1 < \dots < t_k < 1$. Es gilt

$$\Big(U_n(t_1), \dots, U_n(t_k)\Big)^\intercal \overset{(1.6)}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

mit

$$\xi_i \colon \Omega \to \mathbb{R}^k, \quad \xi_i(\omega) := \Big(\mathbb{1}_{(X_i(\omega) \le t_1)} - t_1, \dots, \mathbb{1}_{(X_i(\omega)\le t_k)} - t_k,\Big)^\intercal \text{i.i.d.} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Diese bezeichnen wir der Kürze halber mit

$$\xi_{i,j}(\omega) := \mathbb{1}_{X_i(\omega) \le t_j} - t_j \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k\}, \omega \in \Omega$$

für die j-te Komponente von ξ_i. Nach Konstruktion sind die $\xi_1, \dots, \xi_n$ selbst wieder i.i.d.. Da X_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$ gleichverteilt auf $[0,1]$ ist, gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{(X_i \le t)}\Big] &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{(X_i(\omega)\le t)} \, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_{\{\omega\in\Omega : X_i(\omega)\le t\}} 1 \, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \le t\}) \\
&\overset{\text{Def}}{=} F_{X_i}(t) \\
&\overset{A.2.4}{=} t \qquad \forall t \in [0,1]
\end{aligned} \tag{H1}$$

Die $\xi_1, \dots, \xi_k$ sind zentrierte Zufallsvariablen in $\mathbb{R}^k$, denn

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\xi_{i,j}] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{X_i \le t_j} - t_j\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{X_i \le t_j}\Big] - t_j \overset{\text{(H1)}}{=} t_j - t_j = 0 \qquad \begin{array}{l}\forall j \in \{1,\dots,k\}\\ \forall i \in \{1,\dots,n\}\end{array}\\
&\qquad \Longrightarrow \mathbb{E}[\xi_i] = (0,\dots,0) \in \mathbb{R}^k \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Für die Kovarianzmatrix von ξ_i mit festem $i \in \{1,\dots,n\}$ gilt wegen

$$\begin{aligned}
&\mathbb{C}\mathrm{ov}(\xi_{i,r}, \xi_{i,s})\\
&\overset{A.4.2}{=} \mathbb{E}\Big[\Big(\xi_{i,r} - \underbrace{\mathbb{E}[\xi_{i,r}]}_{\overset{(*)}{=}0}\Big) \cdot \Big(\xi_{i,s} - \underbrace{\mathbb{E}[\xi_{i,s}]}_{\overset{(*)}{=}0}\Big)\Big]\\
&\overset{(*)}{=} \mathbb{E}\Big[\xi_{i,r} \cdot \xi_{i,s}\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\mathbb{1}_{(X_i \le t_r)} - t_r\Big) \cdot \Big(\mathbb{1}_{(X_i \le t_s)} - t_s\Big)\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{(X_i \le t_r)} \cdot \mathbb{1}_{(X_i \le t_s)}\Big] + \mathbb{E}\Big[-\mathbb{1}_{(X_i \le t_r)} \cdot t_s\Big] + \mathbb{E}\Big[-t_r \cdot \mathbb{1}_{(X_i \le t_s)}\Big] + \mathbb{E}[t_r \cdot t_s]\\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{(X_i \le \min\{t_r, t_s)\}}\Big] - t_s \cdot \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{(X_i \le t_r)}\Big] - t_r \cdot \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{(X_i \le t_s)}\Big] + t_r \cdot t_s\\
&\overset{\text{(H1)}}{=} \min\{t_r, t_s\} - t_s \cdot t_r - t_r \cdot t_s + t_r \cdot t_s\\
&= \min\{t_r, t_s\} - t_r \cdot t_s \qquad \forall r, s \in \{1,\dots,k\}
\end{aligned}$$

dann

$$\Gamma := \Gamma_k := \mathbb{V}\mathrm{ar}(\xi_1) \overset{A.4.2}{=} \left(\mathbb{C}\mathrm{ov}(\xi_{i,r}, \xi_{i,s})\right)_{\substack{1 \le r \le k\\ 1 \le s \le k}} \overset{\text{oben}}{=} \Big(\min\{t_r, t_s\} - t_r \cdot t_s\Big)_{\substack{1 \le r \le k\\ 1 \le s \le k}} \in \mathbb{R}^{k \times k}.$$

Offenbar ist Γ symmetrisch. Somit können wir den mehrdimensionalen zentralen Grenzwertsatz A.3.5 anwenden und erhalten:

$$\Big(U_n(t_1), \dots, U_n(t_k)\Big)^{\mathsf{T}} \overset{(1.6)}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0, \Gamma)$$

Da nach Lemma 1.2.5(iii)

$$\Big(\mathfrak{B}_0(t_1), \dots, \mathfrak{B}_0(t_k)\Big) \sim \mathcal{N}_k(0, \Gamma)$$

gilt, folgt die Konvergenz der endlichen-dimensionalen Verteilungen (1.3) aus

$$\Big(U_n(t_1), \dots, U_n(t_k)\Big)^{\mathsf{T}} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \Big(\mathfrak{B}_0(t_1), \dots, \mathfrak{B}_0(t_k)\Big) \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}_d(0, \Gamma),$$

denn es gibt Konvergenz in Verteilung für alle Projektionen π_T.

<u>Schritt 2:</u> Wir zeigen nun Voraussetzung (1.4): Nach Lemma 1.2.5(i) ist die Brownsche

Brücke fast sicher stetig, weshalb für das Gegenereignis gilt:

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega : \mathfrak{B}_0(b-,\omega) \neq \mathfrak{B}_0(b,\omega)\}\Big) = 0$$

<u>Schritt 3:</u> Wir wollen nun Voraussetzung (1.5) zeigen. Dazu seien $t, t_1, t_2 \in [0,1]$ mit $t_1 < t < t_2$. Bezeichne $\mathscr{L}(M)$ das Lebesguemaß einer Menge M. Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
&M_n(t_1,t,t_2)\\
:=&\mathbb{E}\Big[|U_n(t_1)-U_n(t)|^2\cdot|U_n(t_2)-U_n(t)|^2\Big]\\
=&\,\mathbb{E}\Big[|U_n(t)-U_n(t_1)|^2\cdot|U_n(t_2)-U_n(t)|^2\Big]\\
\overset{(1.6)}{=}&\,\mathbb{E}\Bigg[\bigg(\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{i=1}^n\Big(\mathbb{1}_{(U_i\le t)}-t\Big)-\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{i=1}^n\Big(\mathbb{1}_{(U_i\le t_1)}-t_1\Big)\bigg)^2\\
&\cdot\bigg(\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{i=1}^n\Big(\mathbb{1}_{(U_i\le t_2)}-t_2\Big)-\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{i=1}^n\Big(\mathbb{1}_{(U_i\le t)}-t\Big)\bigg)^2\Bigg]\\
=&\,\mathbb{E}\Bigg[\bigg(\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{i=1}^n\Big(\mathbb{1}_{(U_i\le t)}-\mathbb{1}_{(U_i\le t_1)}-t+t_1\Big)\bigg)^2\\
&\cdot\bigg(\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{i=1}^n\Big(\mathbb{1}_{(U_i\le t_2)}-\mathbb{1}_{(U_i\le t)}-t_2+t\Big)\bigg)^2\Bigg]\\
=&\,n^{-2}\cdot\mathbb{E}\Bigg[\bigg(\sum_{i=1}^n\Big(\mathbb{1}_{\underbrace{(t_1,t]}_{=:A}}(X_i)-\underbrace{(t-t_1)}_{=\mathscr{L}(A)}\Big)\bigg)^2\cdot\bigg(\sum_{i=1}^n\Big(\mathbb{1}_{\underbrace{(t,t_2]}_{:=B}}(X_i)-\underbrace{(t_2-t)}_{=\mathscr{L}(B)}\Big)\bigg)^2\Bigg]\\
=&\,n^{-2}\cdot\mathbb{E}\Bigg[\bigg(\sum_{i,j=1}^n(\mathbb{1}_A(X_i)-\mathscr{L}(A))\cdot(\mathbb{1}_A(X_j)-\mathscr{L}(A))\bigg)\\
&\cdot\bigg(\sum_{k,l=1}^n(\mathbb{1}_B(X_k)-\mathscr{L}(B))\cdot(\mathbb{1}_B(X_l)-\mathscr{L}(B))\bigg)\Bigg]\\
=&\,n^{-2}\cdot\mathbb{E}\Bigg[\sum_{i,j,k,l=1}^n(\mathbb{1}_A(X_i)-\mathscr{L}(A))\cdot(\mathbb{1}_A(X_j)-\mathscr{L}(A))\\
&\cdot(\mathbb{1}_B(X_k)-\mathscr{L}(B))\cdot(\mathbb{1}_B(X_l)-\mathscr{L}(B))\Bigg]\\
=&\,n^{-2}\cdot\sum_{i,j,k,l=1}^n\mathbb{E}\Big[(\mathbb{1}_A(X_i)-\mathscr{L}(A))\cdot(\mathbb{1}_A(X_j)-\mathscr{L}(A))\\
&\cdot(\mathbb{1}_B(X_k)-\mathscr{L}(B))\cdot(\mathbb{1}_B(X_l)-\mathscr{L}(B))\Big]\\
=:&\,n^{-2}\cdot\sum_{i,j,k,l=1}^n\mu_{i,j,k,l}
\end{aligned}
$$

Nun ist das ganze etwas zu komplex, um es direkt auszurechnen. Daher stellen wir uns die Frage, für welche Indizes $\mu_{i,j,k,l}=0$ ist. Wir wissen, dass $X_1,\dots,X_n\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\mathcal{U}(0,1)$ und somit $\mathbb{E}[X_i] = 0 \; \forall i \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Folglich gilt für jede Borelmenge $C \in \mathcal{B}([0,1])$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{1}_C(X_i)] &= \int_\Omega \mathbb{1}_C(X_i(\omega)) \, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \\ &\overset{\text{(Trafo)}}{=} \int_\mathbb{R} \mathbb{1}_C(x) \cdot \underbrace{p_{X_i}(x)}_{\overset{\text{(A.3)}}{=} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)} \, \mathrm{d}x \\ &\overset{C \subseteq [0,1]}{=} \int_C 1 \, \mathrm{d}x \\ &= \mathscr{L}(C)\end{aligned} \tag{H2}$$

und damit auch

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_C(X_i) - \mathscr{L}(C)] \overset{\text{(H2)}}{=} \mathscr{L}(C) - \mathscr{L}(C) = 0. \tag{H3}$$

Hierbei ist p_{X_i} die Dichtefunktion von X_i. Das bedeutet, dass sobald wir $\mu_{i,j,k,l}$ in ein Produkt von zwei oder mehr Erwartungswerten aufspalten können, der Summand $\mu_{i,j,k,l}$ schon gleich Null ist, da $A, B \in \mathcal{B}([0,1])$. Bleibt die Frage, in welchen Fällen wir $\mu_{i,j,k,l}$ als Produkt von Erwartungswerten schreiben können. Die Antwort liefert uns die Unabhängigkeit von $X_1, \dots, X_n$: Sobald einer der vier Indizes von $\mu_{i,j,k,l}$ von den drei anderen verschieden ist, ist $\mu_{i,j,k,l} = 0$. Wir überlegen uns also:

$$\begin{aligned}\mu_{i,j,k,l} = 0 &\overset{\text{(H3)}}{\iff} \mu_{i,j,k,l} \text{ sich als Produkt von Erwartungswerten schreiben lässt} \\ &\overset{\text{unabh.}}{\iff} \exists \text{ Index, der von allen anderen verschieden ist} \\ \mu_{i,j,k,l} \neq 0 &\iff \text{Jeder Index stimmt mit mindestens einem anderen Index überein.}\end{aligned}$$

Aus dieser Überlegung heraus erhalten wir:

$$\sum_{i,j,k,l} \mu_{i,j,k,l} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \mu_{i,i,i,i}}_{\text{alle Indizes gleich}} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (\mu_{i,i,j,j} + \mu_{i,j,i,j} + \mu_{i,j,j,i} + \mu_{j,j,i,i} + \mu_{j,i,j,i} + \mu_{j,i,i,j})}_{\text{jeweils zwei Indizes gleich}}$$

Nun sind nur noch wenige Summanden übrig, die wir nun ausrechnen können - auch wenn das immer noch relativ aufwendig ist. Damit:

$$
\begin{aligned}
&\mu_{i,i,i,i}\\
&= \mathbb{E}\Big[\big(\mathbb{1}_A(X_i) - \mathscr{L}(A)\big)^2 \cdot \big(\mathbb{1}_B(X_i) - \mathscr{L}(B)\big)^2\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\mathbb{1}_A(X_i) - 2 \cdot \mathscr{L}(A) \cdot \mathbb{1}_A(X_i) + (\mathscr{L}(A))^2\Big)\\
&\quad \cdot \Big(\mathbb{1}_B(X_i) - 2 \cdot \mathscr{L}(B) \cdot \mathbb{1}_B(X_i) + (\mathscr{L}(B))^2\Big)\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\mathbb{1}_A(X_i) \cdot (1 - 2 \cdot \mathscr{L}(A)) + (\mathscr{L}(A))^2\Big)\\
&\quad \cdot \Big(\mathbb{1}_B(X_i) \cdot (1 - 2 \cdot \mathscr{L}(B)) + (\mathscr{L}(B))^2\Big)\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\underbrace{\mathbb{1}_A(X_i) \cdot \mathbb{1}_B(X_i)}_{\overset{A\cap B=\emptyset}{=}0} \cdot (1 - 2 \cdot \mathscr{L}(A) \cdot (1 - 2 \cdot \mathscr{L}(B))\\
&\quad + \mathbb{1}_A(X_i) \cdot (1 - 2 \cdot \mathscr{L}(A)) \cdot (\mathscr{L}(B))^2\\
&\quad + \mathbb{1}_B(X_i) \cdot (1 - 2 \cdot \mathscr{L}(B)) \cdot (\mathscr{L}(A))^2\\
&\quad + (\mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B))^2\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_A(X_i) \cdot (1 - 2 \cdot \mathscr{L}(A)) \cdot (\mathscr{L}(B))^2\Big]\\
&\quad + \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_B(X_i) \cdot (1 - 2 \cdot \mathscr{L}(B)) \cdot (\mathscr{L}(A))^2\Big]\\
&\quad + \mathbb{E}\Big[(\mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B))^2\Big]\\
&\overset{\text{(H2)}}{=} \mathscr{L}(A) \cdot (1 - 2 \cdot \mathscr{L}(A)) \cdot (\mathscr{L}(B))^2\\
&\quad + \mathscr{L}(B) \cdot (1 - 2 \cdot \mathscr{L}(B)) \cdot (\mathscr{L}(A))^2\\
&\quad + (\mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B))^2\\
&= \mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B) \cdot \Big((1 - 2 \cdot \mathscr{L}(A)) \cdot \mathscr{L}(B) + (1 - 2 \cdot \mathscr{L}(B)) \cdot \mathscr{L}(A) + \mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B)\Big)\\
&= \mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B) \cdot \Big(\mathscr{L}(B) - 2 \cdot \mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B)\\
&\quad + \mathscr{L}(A) - 2 \cdot \mathscr{L}(B) \cdot \mathscr{L}(A) + \mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B)\Big)\\
&= \mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B) \cdot \Big(\underbrace{\underbrace{\mathscr{L}(A)}_{\leq 1} + \underbrace{\mathscr{L}(B)}_{\leq 1} - \underbrace{3 \cdot \mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B)}_{\geq 0}}_{\leq 2}\Big)\\
&\leq \mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B) \cdot 2\\
&\overset{\text{Def}}{=} 2 \cdot (t - t_1) \cdot (t_2 - t)
\end{aligned}
$$

Nun zum nächsten Summanden:

$$
\begin{aligned}
\mu_{i,i,j,j} &\overset{\text{Def}}{=} \mathbb{E}\Big[\big(\mathbb{1}_A(X_i) - \mathscr{L}(A)\big)^2 \cdot \big(\mathbb{1}_B(X_j) - \mathscr{L}(B)\big)^2\Big] \\
&\overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{E}\Big[\big(\mathbb{1}_A(X_i) - \mathscr{L}(A)\big)^2\Big] \cdot \mathbb{E}\Big[\big(\mathbb{1}_B(X_j) - \mathscr{L}(B)\big)^2\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_A(X_i) - 2 \cdot \mathscr{L}(A) \cdot \mathbb{1}_A(X_i) + (\mathscr{L}(A))^2\Big] \\
&\quad \cdot \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_B(X_j) - 2 \cdot \mathscr{L}(B) \cdot \mathbb{1}_B(X_j) + (\mathscr{L}(B))^2\Big] \\
&\overset{\text{(H2)}}{=} \Big(\mathscr{L}(A) - 2 \cdot (\mathscr{L}(A))^2 + (\mathscr{L}(A))^2\Big) \cdot \Big(\mathscr{L}(B) - 2 \cdot (\mathscr{L}(B))^2 + (\mathscr{L}(B))^2\Big) \\
&= \Big(\mathscr{L}(A) - (\mathscr{L}(A))^2\Big) \cdot \Big(\mathscr{L}(B) - (\mathscr{L}(B))^2\Big) \\
&= \mathscr{L}(A) \cdot \underbrace{(1 - \underbrace{\mathscr{L}(A)}_{\geq 0})}_{\leq 1} \cdot \mathscr{L}(B) \cdot \underbrace{(1 - \underbrace{\mathscr{L}(B)}_{\geq 0})}_{\leq 1} \\
&\leq \mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B) \\
&\overset{\text{Def}}{=} (t - t_1) \cdot (t_2 - t)
\end{aligned}
$$

Auf zum nächsten Summanden:

$$
\begin{aligned}
\mu_{i,j,i,j} &\overset{\text{Def}}{=} \mathbb{E}\Big[\big(\mathbb{1}_A(X_i) - \mathscr{L}(A)\big) \cdot \big(\mathbb{1}_A(X_j) - \mathscr{L}(A)\big) \\
&\quad \cdot \big(\mathbb{1}_B(X_i) - \mathscr{L}(B)\big) \cdot \big(\mathbb{1}_B(X_j) - \mathscr{L}(B)\big)\Big] \\
&\overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{E}\big[\big(\mathbb{1}_A(X_i) - \mathscr{L}(A)\big) \cdot \big(\mathbb{1}_B(X_i) - \mathscr{L}(B)\big)\big] \\
&\quad \cdot \mathbb{E}\big[\big(\mathbb{1}_A(X_j) - \mathscr{L}(A)\big) \cdot \big(\mathbb{1}_B(X_j) - \mathscr{L}(B)\big)\big] \\
&\overset{U_i \overset{\mathcal{L}}{=} U_j}{=} \mathbb{E}\big[\big(\mathbb{1}_A(X_i) - \mathscr{L}(A)\big) \cdot \big(\mathbb{1}_B(X_i) - \mathscr{L}(B)\big)\big]^2 \\
&= \mathbb{E}\Big[\underbrace{\mathbb{1}_A(X_i) \cdot \mathbb{1}_B(X_i)}_{\overset{A \cap B = \emptyset}{=} 0} - \mathbb{1}_A(X_i) \cdot \mathscr{L}(B) - \mathbb{1}_B(X_i) \cdot \mathscr{L}(A) + \mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B)\Big]^2 \\
&= \Big(\mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B) - \mathscr{L}(B) \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X_i)] - \mathscr{L}(A) \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_B(X_i)]\Big)^2 \\
&\overset{\text{(H2)}}{=} \Big(\mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B) - \mathscr{L}(B) \cdot \mathscr{L}(A) - \mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B)\Big)^2 \\
&= (\underbrace{\mathscr{L}(A)}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\mathscr{L}(B)}_{\leq 1})^2 \\
&\leq \mathscr{L}(A) \cdot \mathscr{L}(B) \\
&\overset{\text{Def}}{=} (t - t_1) \cdot (t_2 - t)
\end{aligned}
$$

Für die restlichen Summanden gilt wegen Umbenennung der Indizes:

$$\mu_{j,j,i,i} = \mu_{i,j,i,j} \qquad \text{und} \qquad \mu_{i,j,i,j} = \mu_{j,i,j,i} \qquad \text{und} \qquad \mu_{i,j,j,i} = \mu_{j,i,i,j}$$

Außerdem erhält man

$$\mu_{i,j,i,j} = \mu_{i,j,j,i},$$

denn aus der Kommutativität der Multiplikation folgt:

$$\begin{aligned}
\mu_{i,j,j,i} &\overset{\text{Def}}{=} \mathbb{E}\Big[\big(\mathbb{1}_A(X_i) - \mathscr{L}(A)\big) \cdot \big(\mathbb{1}_A(X_j) - \mathscr{L}(A)\big) \\
&\qquad \cdot \big(\mathbb{1}_B(X_j) - \mathscr{L}(B)\big) \cdot \big(\mathbb{1}_B(X_i) - \mathscr{L}(B)\big)\Big] \\
&\overset{\text{kommutativ}}{=} \mathbb{E}\Big[\big(\mathbb{1}_A(X_i) - \mathscr{L}(A)\big) \cdot \big(\mathbb{1}_A(X_j) - \mathscr{L}(A)\big) \\
&\qquad \cdot \big(\mathbb{1}_B(X_i) - \mathscr{L}(B)\big) \cdot \big(\mathbb{1}_B(X_j) - \mathscr{L}(B)\big)\Big] \\
&\overset{\text{Def}}{=} \mu_{i,j,i,j}
\end{aligned}$$

Es folgt also insgesamt:

$$\begin{aligned}
&M_n(t_1, t, t_2) \\
&= n^{-2} \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \mu_{i,j,k,l} \\
&= n^{-2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_{i,i,i,i} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} (\mu_{i,i,j,j} + \mu_{i,j,i,j} + \mu_{i,j,j,i} + \mu_{j,j,i,i} + \mu_{j,i,j,i} + \mu_{j,i,i,j}) \right) \\
&\leq n^{-2} \cdot \Big(2 \cdot n \cdot (t - t_1) \cdot (t_2 - t) + 6 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (t - t_1) \cdot (t_2 - t) \Big) \\
&= (t - t_1) \cdot (t_2 - t_1) \cdot n^{-2} \cdot \Big(2 \cdot n + 6 \cdot n \cdot (n-1) \Big) \\
&= \underbrace{(t - t_1)}_{\overset{t \leq t_2}{\leq} (t_2 - t_1)} \cdot \underbrace{(t_2 - t)}_{\overset{t_1 \leq t}{\leq} (t_2 - t_1)} \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{n} + 6 - \frac{6}{n} \right)}_{\leq 6} \\
&\leq 6 \cdot (t_2 - t_1)^2
\end{aligned}$$

Also ist schließlich die Voraussetzung (1.5) in Satz 1.3.1 erfüllt für

$$F\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto F(t) := \sqrt{6} \cdot t \qquad \text{und} \qquad \alpha = 2 \qquad \text{und} \qquad \beta = 2$$

Somit liefert Satz 1.3.1 die Behauptung. $\square$

1.4. Stetigkeitssatz für das argmax-Funktional

Definition 1.4.1 (Supremalstelle)
Sei $f \in \mathfrak{D}$ eine Funktion. Dann ist die Menge der **Supremalstellen** von f definiert als

$$\mathfrak{S}(f) := \left\{ t \in [0,1] : \max\{f(t-), f(t)\} = \sup_{r \in [0,1]} f(r) \right\}.$$

Hierbei setzen wir $f(0-) := f(0)$, da der linksseitige Grenzwert in 0 nicht existiert.

Bemerkung 1.4.2 Falls $f \in \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D}$, so ist

$$\mathfrak{S}(f) = \arg\max_{t \in [0,1]} f(t),$$

also gerade die Menge der Maximalstellen von f.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}(f) &\overset{\text{Def}}{=} \left\{ t \in [0,1] : \max\{f(t-), f(t)\} = \sup_{r \in [0,1]} f(r) \right\} \\
&\overset{f \in \mathfrak{C}}{=} \left\{ t \in [0,1] : f(t) = \sup_{r \in [0,1]} f(r) \right\} \\
&\overset{[0,1] \text{ kompakt}}{=} \left\{ t \in [0,1] : f(t) = \max_{r \in [0,1]} f(r) \right\} \\
&\overset{\text{Def}}{=} \arg\max_{t \in [0,1]} f(t)
\end{aligned}$$

□

Satz 1.4.3

Für alle $f \in \mathfrak{D}$ ist die Menge der Supremalstellen $\mathfrak{S}(f)$ nichtleer, abgeschlossen und damit insbesondere kompakt.

Beweis. Siehe Ferger (2001), Lemma 6.1(i), [F+01]. □

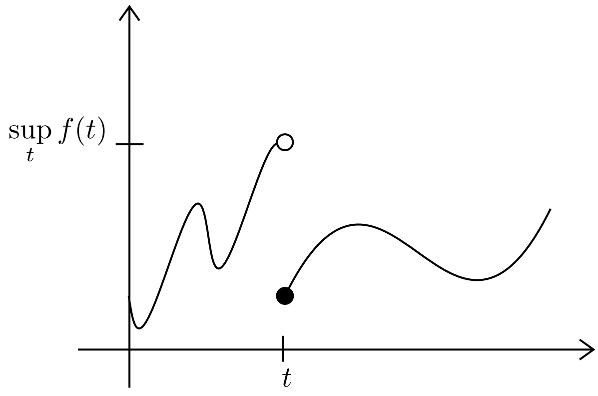

Abbildung 1.3.: Beispiel einer Supremalstelle: $\mathfrak{S}(f) = \{t\}$, aber $\arg\max f = \emptyset$

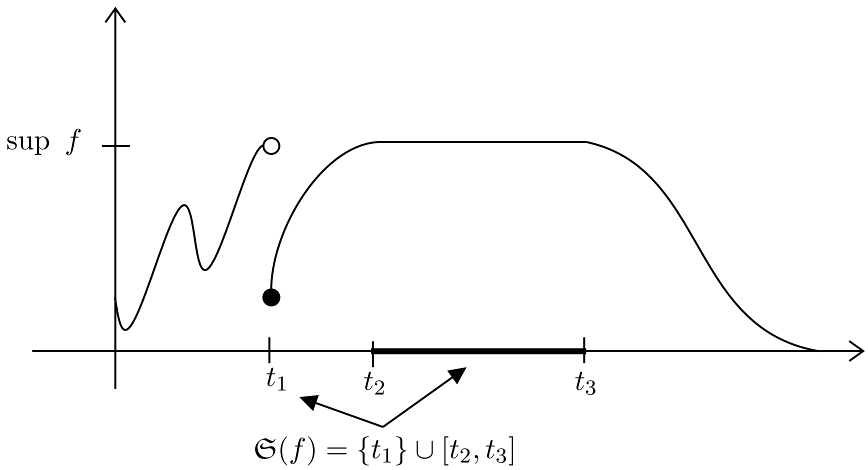

Abbildung 1.4.: Beispiel einer nichtzusammenhängenden Supremalstellenmenge $\mathfrak{S}(f)$

Definition 1.4.4 Sei $f \in \mathfrak{D}$ und sei $\tau_f \in \mathfrak{S}(f)$. Dann setze

$$\xi_f(\tau_f, \varepsilon) := \sup\Big\{ f(t) : t \in [0,1] \text{ und } |t - \tau_f| > \varepsilon \Big\} \qquad \forall \varepsilon \geq 0.$$

Lemma 1.4.5 Sei $f \in \mathfrak{D}[0,1]$, sei $\tau_f \in \mathfrak{S}(f)$ und sei $\varepsilon > 0$ mit

$$\sup_{t \in [0,1]} f(t) > \xi_f(\tau_f, \varepsilon) \overset{\text{Def}}{=} \sup\{f(t) : t \in [0,1] \text{ und } |t - \tau_f| > \varepsilon\}. \tag{1.7}$$

Dann gilt für alle $g \in \mathfrak{D}[0,1]$ mit Maximalstelle τ_g:

$$\|f-g\| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\sup_{t\in[0,1]} f(t) - \xi_f(\tau_f, \varepsilon) \right) \implies |\tau_f - \tau_g| \leq \varepsilon$$

Bemerkung 1.4.6 Für großes $\varepsilon > 0$ (z.B. $\varepsilon > 1$) ist die Aussage trivial, da wir nur das Einheitsintervall $[0,1]$ betrachten, siehe Fall 1 im Beweis. Die Aussage ist nur für sehr kleine $\varepsilon > 0$ relevant. Man beachte auch, dass für τ_f keine Eindeutigkeit gefordert wird.

Beweis. Wir setzen der Kürze halber

$$b(\varepsilon) := \frac{1}{3} \cdot \left(\sup_{t\in[0,1]} f(t) - \xi_f(\tau_f, \varepsilon) \right) \overset{\text{Vor}}{>} 0.$$

Es gilt die Hilfsaussage:

$$|b-a| \leq c \iff |a-b| \leq c \iff a \in [b-c, b+c] \qquad \forall a,b,c \in \mathbb{R} \tag{H1}$$

<u>Fall 1:</u> $\nexists t \in [0,1] : |t-\tau_f| > \varepsilon$
In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned} \nexists t \in [0,1] : |t-\tau_f| > \varepsilon &\iff \forall t \in [0,1] : |t-\tau_f| \leq \varepsilon \\ &\overset{(H1)}{\iff} \forall t \in [0,1] : t \in [\tau_f - \varepsilon, \tau_f + \varepsilon] \\ &\iff [0,1] \subseteq [\tau_f - \varepsilon, \tau_f + \varepsilon] \end{aligned}$$

Da $g \in \mathfrak{D}[0,1]$ ist auch $\tau_g \in [0,1] \subseteq [\tau_f - \varepsilon, \tau_f + \varepsilon]$. Also folgt aus Gleichung (H1) $|\tau_f - \tau_g| \leq \varepsilon$.

<u>Fall 2:</u> $\exists t \in [0,1] : |t-\tau_f| > \varepsilon$
Wegen Gleichung (H1) ist dies äquivalent zu $t \notin [\tau_f - \varepsilon, \tau_f + \varepsilon]$. Da nach Voraussetzung $f, g \in \mathfrak{D}$ gilt

$$\sup_{t\in[0,1]} f(t) \in \{f(\tau_f), f(\tau_f -)\} \qquad \text{und} \qquad \sup_{t\in[0,1]} g(t) \in \{g(\tau_g), g(\tau_g -)\}.$$

Wegen

$$-a \leq b < a \iff |b| < a \qquad \forall b \in \mathbb{R}, a > 0 \tag{H2}$$

gilt

$$\begin{aligned} -b(\varepsilon) \leq g(s) - f(s) \leq b(\varepsilon) \qquad \forall s \in [0,1] &\overset{(H2)}{\iff} |g(s) - f(s)| \leq b(\varepsilon) \qquad \forall s \in [0,1] \\ &\iff \|f-g\| \leq b(\varepsilon). \end{aligned} \tag{H3}$$

Mit der Voraussetzung $\|f - g\| \leq b(\varepsilon)$ folgt aus Gleichung (H3):

$$\begin{aligned} g(\tau_f) - f(\tau_f) &\geq -b(\varepsilon) \\ g(\tau_f-)) - f(\tau_f-) &\geq -b(\varepsilon) \\ g(t) \leq f(t) + b(\varepsilon) &\overset{t \notin [\tau_f - \varepsilon, \tau_f + \varepsilon]}{\leq} \xi_f(\tau_f, \varepsilon) + b(\varepsilon) \end{aligned}$$

Daraus folgt direkt

$$\begin{aligned} g(\tau_f) &\geq f(\tau_f) - b(\varepsilon) \\ g(\tau_f-) &\geq f(\tau_f-) - b(\varepsilon) \\ g(t) &\leq \xi_f(\tau_f, \varepsilon) + b(\varepsilon) \end{aligned}$$

und daraus wiederum durch Addition der Ungleichungen:

$$\begin{aligned} g(\tau_f) + \xi_f(\tau_f, \varepsilon) + b(\varepsilon) &\geq f(\tau_f) - b(\varepsilon) + g(t) \\ g(\tau_f) + \xi_f(\tau_f, \varepsilon) + b(\varepsilon) &\geq f(\tau_f-) - b(\varepsilon) + g(t). \end{aligned}$$

Durch Umstellen bekommen wir

$$\begin{aligned} g(\tau_f) - g(t) &\geq f(\tau_f) - 2 \cdot b(\varepsilon) - \xi_f(\tau_f, \varepsilon) \\ g(\tau_f-) - g(t) &\geq f(\tau_f-) - 2 \cdot b(\varepsilon) - \xi_f(\tau_f, \varepsilon). \end{aligned}$$

Aus

$$\left.\begin{array}{l} a \geq b \\ c \geq d \end{array}\right\} \implies \max\{b, d\} \leq \max\{a, c\} \qquad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

folgt

$$\begin{aligned} &\max\Big\{g(\tau_f) - g(t), g(\tau_f-) - g(t)\Big\} \\ &= \max\Big\{g(\tau_f), g(\tau_f-)\Big\} - g(t) \\ &\geq \max\Big\{f(\tau_f) - 2 \cdot b(\varepsilon) - \xi_f(\tau_f, \varepsilon), f(\tau_f-) - 2 \cdot b(\varepsilon) - \xi_f(\tau_f, \varepsilon)\Big\} \\ &= \max\{f(\tau_f), f(\tau_f-)\} - 2 \cdot b(\varepsilon) - \xi_f(\tau_f, \varepsilon) \\ &= \underbrace{\sup_{t \in [0,1]} f(t) - \xi_f(\tau_f, \varepsilon)}_{\overset{\text{Def } b}{=} 3 \cdot b(\varepsilon)} - 2 \cdot b(\varepsilon) \\ &= b(\varepsilon) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten insgesamt

$$\max\{g(\tau_f), g(\tau_f-)\} \geq g(t) + b(\varepsilon) \qquad \forall t \notin [\tau_f - \varepsilon, \tau_f + \varepsilon].$$

Der Grenzübergang $s \uparrow t$ liefert nun auch

$$\max\{g(\tau_f), g(\tau_f-)\} \geq g(t-) + b(\varepsilon) \qquad \forall t \notin [\tau_f - \varepsilon, \tau_f + \varepsilon]$$

und somit zusammengenommen

$$\max\{g(\tau_f), g(\tau_f-)\} \geq \max\{g(t), g(t-)\} + b(\varepsilon) \qquad \forall t \notin [\tau_f - \varepsilon, \tau_f + \varepsilon].$$

Da $b(\varepsilon) > 0$ ist, erhalten wir insgesamt

$$\max\{g(\tau_f), g(\tau_f-)\} > \max\{g(t), g(t-)\} \qquad \forall t \notin [\tau_f - \varepsilon, \tau_f + \varepsilon]. \tag{H4}$$

Angenommen $|\tau_f - \tau_g| > \varepsilon$, also $\tau_g \overset{\text{(H1)}}{\notin} [\tau_f - \varepsilon, \tau_f + \varepsilon]$. Dann folgt aus (H4) mit $t \hat{=} \tau_g$:

$$\sup_{s\in[0,1]} g(s) \overset{g\in\mathfrak{D}}{=} \max\{g(\tau_g), g(\tau_g-)\} \overset{\text{(H4)}}{<} \max\{g(\tau_f), g(\tau_f-)\} \leq \sup_{s\in[0,1]} g(s)$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $|\tau_f - \tau_g| > \varepsilon$, weshalb folglich $|\tau_f - \tau_g| \leq \varepsilon$ gelten muss. $\square$

Definition 1.4.7 (Wohlsepariertheit)
Sei $f \in \mathfrak{D}[0,1]$ und $\tau \in \mathfrak{S}(f)$. Dann heißt τ **wohlsepariert**

$$:\Longleftrightarrow \sup_{t\in[0,1]} f(t) > \xi_f(\tau, \varepsilon) \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}. \tag{1.8}$$

Bemerkung 1.4.8 Sei $f \in \mathfrak{D}[0,1]$ und $\tau \in \mathfrak{S}(f)$. Dann ist $\mathfrak{S}(f) = \{\tau\}$, d.h. Wohlsepariertheit impliziert Eindeutigkeit.

Beweis. Angenommen f hätte eine weitere Supremalstelle $\tilde{\tau} \in \mathfrak{S}(f)$ mit $\tau \neq \tilde{\tau}$. Dann existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ so, dass $|\tilde{\tau} - \tau| > \varepsilon$. Somit haben wir mit

$$\max\{f(\tilde{\tau}), f(\tilde{\tau}-)\} \overset{\tilde{\tau}\in\mathfrak{S}(f)}{=} \sup_{t\in[0,1]} f(t) \overset{(1.8)}{>} \xi_f(\tau, \varepsilon) \overset{|\tilde{\tau}-\tau|>\varepsilon}{=} \max\{f(\tilde{\tau}), f(\tilde{\tau}-)\}$$

einen Widerspruch. $\square$

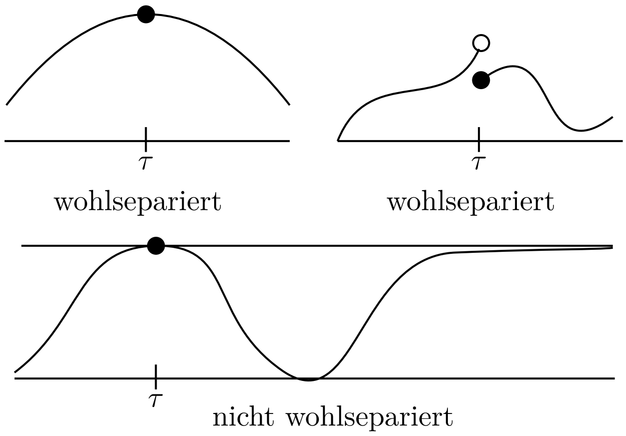

Abbildung 1.5.: Beispiel für wohlseparierte und nichtwohlseparierte Supremalstellen

Korollar 1.4.9

Sei $f \in \mathfrak{D}[0,1]$ und $\tau \in \mathfrak{S}(f)$ wohlsepariert. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{D}$ und $\tau_n \in \mathfrak{S}(f_n) \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\|f_n - f\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies \tau_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tau$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig mit $\varepsilon \in \mathbb{Q}$. Da $\tau_f \in [0,1]$ nach Voraussetzung wohlsepariert ist, ist Voraussetzung (1.7) in Lemma 1.4.5 erfüllt. Wir setzen wieder

$$b(\varepsilon) := \frac{1}{3} \cdot \left(\sup_{t\in[0,1]} f(t) - \xi_f(\tau, \varepsilon) \right) \overset{\text{wohlsep}}{>} 0$$

wie im Beweis von Lemma 1.4.5. Nach Voraussetzung existiert ein $\tilde{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq \tilde{N}(\varepsilon)$ gilt:

$$\|f_n - f\| \leq \varepsilon$$

Da für $\varepsilon \to 0$ auch $b(\varepsilon) \longrightarrow 0$ geht, existiert ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt:

$$\|f_n - f\| \leq b(\varepsilon)$$

Nun wenden wir Lemma 1.4.5 für jedes $n \geq N(\varepsilon)$ und ε an und erhalten die gewünschte Konvergenz

$$|\tau_n - \tau| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq N(\varepsilon).$$

□

In Anwendungen ist f oft stetig und die Wohlsepariertheit ist durch Kompaktheits- und Monotonieargumente nachweisbar. Beispielsweise in folgendem Resultat:

Korollar 1.4.10

Sei $f \in \mathfrak{C}$ mit eindeutiger Supremalstelle $\tau \in \mathfrak{S}(f)$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{D}[0,1]$ mit $\tau_n \in \mathfrak{S}(f_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}_d f \implies \tau_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tau \text{ in } \mathbb{R} \tag{1.9}$$

Beweis. Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ beliebig. Angenommen es gilt

$$f(\tau) = \xi_f(\tau, \varepsilon).$$

Dann folgt

$$f(\tau) = \xi_f(\tau_f, \varepsilon) \overset{\text{Def}}{=} \sup_{\substack{t\in[0,1] \\ |t-\tau|>\varepsilon}} f(t) = \sup_{t\in[0,\tau-\varepsilon)\dot\cup(\tau+\varepsilon,1]} f(t) \overset{f\in\mathfrak{C}}{=} \sup_{t\in[0,\tau-\varepsilon]\dot\cup[\tau+\varepsilon,1]} f(t) = f(\tilde\tau)$$

für ein $\tilde\tau \in [0, \tau-\varepsilon]\dot\cup[\tau+\varepsilon, 1]$, da stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Supremum annehmen. Offenbar ist aber $\tau \neq \tilde\tau$, da $\tau \notin [0, \tau-\varepsilon]\dot\cup[\tau+\varepsilon, 1]$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme $\mathfrak{S}(f) = \{\tau\}$, also zur Eindeutigkeit. Somit folgt aus dem Widerspruch die Wohldefiniertheit:

$$f(\tau) > \xi_f(\tau, \varepsilon) \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}.$$

□

Satz 1.4.11: Continuous Mapping Theorem (CMT)

Seien $M, M_n, n \in \mathbb{N}$ stochastische Prozesse über $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Pfaden in $\mathfrak{D}$ und

(i) $\tau(\omega) \in \mathfrak{S}(M(\omega, \cdot))$ $\mathbb{P}$-f.s.

(ii) $\sup_{t\in[0,1]} M(\omega, t) > \sup\{M(\omega, t) : |t-\tau(\omega)| > \varepsilon\}$ $\mathbb{P}$-f.s. $\qquad \forall \varepsilon > 0$

(iii) $\mathfrak{S}(M_n(\omega, \cdot)) \neq \emptyset$ $\mathbb{P}$-f.s. $\qquad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $\|M_n(\omega, \cdot) - M(\omega, \cdot)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $\mathbb{P}$-f.s.

Dann gilt für jede messbare Auswahl $\tau_n(\omega) \in \mathfrak{S}(M_n(\omega, \cdot))$:

$$\tau_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tau(\omega) \text{ } \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis. Setze

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &:= \Big\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \in \mathfrak{S}\big(M(\omega, \cdot)\big)\Big\} \\
\Omega_2(\varepsilon) &:= \left\{\omega \in \Omega : \sup_{t \in [0,1]} M(\omega, t) > \sup\big\{M(\omega, t) : |t - \tau(\omega)| > \varepsilon\big\}\right\} \\
\Omega_3(n) &:= \{\omega \in \Omega : \mathfrak{S}(M_n(\omega, \cdot)) \neq \emptyset\} \\
\Omega_4 &:= \Big\{\omega \in \Omega : \|M_n(\omega, \cdot) - M(\omega, \cdot)\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\Big\} \\
\Omega_0 &:= \Omega_1 \cap \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}} (\Omega_2(\varepsilon)) \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} ((\Omega_3(n)) \cap \Omega_4.
\end{aligned}$$

Dann gilt wegen Lemma A.1.1

$$\mathbb{P}(\Omega_0) = 1.$$

Sei $\omega_0 \in \Omega_0$ beliebig. Dann folgt aus Korollar 1.4.9

$$\tau_n(\omega_0) \to \tau(\omega_0).$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$\Omega_0 \subseteq \Big\{\omega \in \Omega : \tau_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tau\Big\}$$

und wegen $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ schließlich

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega : \tau_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tau\Big\}\Big) = 1.$$

□

2. Statische Tests für Gleichverteilung auf $[0, 1]$

2.1. Das Testproblem

Sei $n \in \mathbb{N}$, $F\colon [0,1] \to [0,1]$ eine unbekannte Verteilungsfunktion und seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen mit Werten in $[0, 1]$, die i.i.d. nach F verteilt sind. Sei F_0 die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung $\mathcal{U}(0, 1)$ auf $[0, 1]$, siehe Abbildung A.2.

Unsere zentrale Fragestellung ist: Sind die X_i $(i \in \{1 \ldots, n\})$ gleichverteilt? Um das herauszufinden, formulieren wir unsere Fragestellung als Testproblem:

$$H_0\colon F = F_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1\colon F \neq F_0 \tag{TP}$$

Im folgenden Abschnitt 2.2 werden wir uns drei Hypothesentests für dieses Testproblem ansehen.

Wenn man den Fall $F \leq F_0$ von vorn herein ausschließen kann, dann kann auch die Betrachtung des **einseitigen** Testproblems

$$H_0\colon F = F_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1\colon F > F_0$$

sinnvoll sein. Hierbei ist $F > F_0$ eine Kurzschreibweise mit folgender Bedeutung:

$$F > F_0 :\Longleftrightarrow \Big(\forall x \in [0, 1] : F(x) \geq F_0(x)\Big) \wedge \Big(\exists x_0 \in [0, 1] : F(x_0) > F_0(x_0)\Big)$$

Für diese Situation finden sich in Abschnitt 2.3 drei Tests, die Abwandlungen von den drei zweiseitigen Tests aus Abschnitt 2.2 sind.

2.2. Zweiseitige Tests

2.2.1. Der Kolmogorov-Smirnov-Test

Wir betrachten die empirische Verteilungsfunktion F_n von $X_1, \ldots, X_n$, siehe Definition A.2.2. Mit dem Satz von Glivenko-Cantelli A.2.9 erhalten wir folgende Konvergenz in der Supremumsnorm (siehe Definition A.2.7):

Lemma 2.2.1 Es gilt:

$$\|F_n - F_0\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|F - F_0\| \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis. Aus dem Satz von Glivenko-Cantelli A.2.9 folgt:

$$\big|\|F_n - F_0\| - \|F - F_0\|\big| \overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} \|F_n - F_0 - (F - F_0)\| = \|F_n - F\| \underset{A.2.9}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad (*)$$

Damit erhalten wir wegen

$$\begin{aligned}\Big\{\omega \in \Omega : \|F_n(\omega) - F\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\Big\} &\overset{(*)}{\subseteq} \Big\{\omega \in \Omega : \big|\|F_n(\omega) - F_0\| - \|F - F_0\|\big| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\Big\} \\ &= \Big\{\omega \in \Omega : \|F_n(\omega) - F_0\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|F - F_0\|\Big\}\end{aligned}$$

schließlich

$$\begin{aligned}1 &\overset{(*)}{=} \mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega : \|F_n(\omega) - F\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\Big\}\Big) \\ &\leq \mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega : \|F_n(\omega) - F_0\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|F - F_0\|\Big\}\Big) \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

□

Korollar 2.2.2

Aus Gleichung (TP) und Lemma 2.2.1 folgt

$$H_0 \overset{(TP)}{\Longleftrightarrow} F = F_0 \overset{2.2.1}{\Longleftrightarrow} \|F_n - F_0\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis. Zeige „$\Longrightarrow$“: Das folgt direkt: $F = F_0 \overset{2.2.1}{\Longrightarrow} \|F_n - F_0\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $\mathbb{P}$-f.s.

Zeige „$\Longleftarrow$“:

$$\begin{aligned}&\left\{\begin{array}{r}\mathbb{P}\Big(\overbrace{\Big\{\omega \in \Omega : \|F_n(\omega) - F_0\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\Big\}}^{=:A}\Big) \overset{\text{Vor}}{=} 1 \\ \mathbb{P}\Big(\underbrace{\Big\{\omega \in \Omega : \|F_n(\omega) - F_0\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|F - F_0\|\Big\}}_{=:B}\Big) \overset{2.2.1}{=} 1\end{array}\right. \\ &\overset{A.1.1}{\Longrightarrow} 1 \overset{A.1.1}{=} \mathbb{P}(A \cap B) \\ &\qquad = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\Big\{\omega \in \Omega : \|F_n(\omega) - F_0\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \wedge \|F_n(\omega) - F_0\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|F - F_0\|\Big\}}_{\subseteq\{\omega\in\Omega:\|F-F_0\|=0\},\text{ da reeller Grenzwert eindeutig}}\Big) \\ &\qquad \overset{\substack{\leq 1 \\ \geq 1}}{=} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \|F - F_0\| = 0\}) \\ &\Longrightarrow \|F - F_0\| = 0 \Longrightarrow F = F_0\end{aligned}$$

□

Wir analysieren Korollar 2.2.2 in den beiden Fällen des Testproblems (TP):
1. Fall: Falls H_0 gilt, so ist dies wegen Korollar 2.2.2 äquivalent zu

$$\|F_n - F_0\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Dies bedeutet für unser Testproblem, dass „kleine“ Werte von $\|F_n - F_0\|$ für ein Vorliegen von H_0 sprechen.
2. Fall: Falls H_0 hingegen nicht gilt, so konvergiert $\|F_n - F_0\|$ nicht gegen 0, allerdings konvergiert es wegen Lemma 2.2.1 gegen $\|F - F_0\|$, was folglich größer Null sein muss.

$$H_1 \iff \exists \varepsilon > 0 : \|F_n - F_0\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varepsilon \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \iff \|F - F_0\| > 0$$

Also sprechen „große“ Werte von $\|F_n - F_0\|$ für H_1. Somit scheint folgender Test sinnvoll für unserer Testproblem (TP) zu sein:

$$H_0 \text{ verwerfen} :\iff \|F_n - F_0\| > k_{n,\alpha} \tag{2.1}$$

Hierbei ist $k_{n,\alpha} \in \mathbb{R}^+$ ein Schwellwert, den es noch zu bestimmen gilt und der von n und $\alpha \in (0,1)$ abhängt. Unser Ziel ist die Bestimmung dieses Schwellwertes $k_{n,\alpha}$ derart, dass der Test (2.1) ein **asymptotischer Niveau-α-Test** ist, d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}\Big(H_0 \text{ verwerfen}\Big) = \alpha.$$

Definition 2.2.3 (Uniformer empirischer Prozess)
Wir definieren den **uniformen empirischen Prozess** $U_n \colon [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$U_n(t,\omega) := \sqrt{n} \cdot \big(F_n(t,\omega) - F_0(t)\big) \overset{F_0(t)=\mathrm{id}_{[0,1]}}{=} \sqrt{n} \cdot \big(F_n(t,\omega) - t\big) \qquad \forall t \in [0,1] \tag{2.2}$$

wobei die $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d.$\sim \mathcal{U}(0,1)$, wie überall in diesem Kapitel unter H_0.

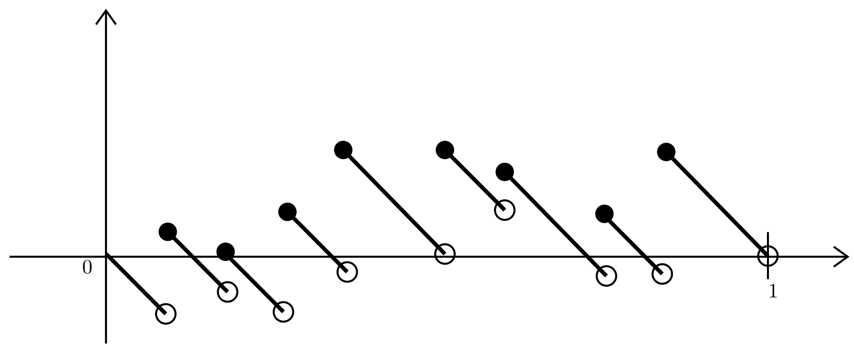

Abbildung 2.1.: Beispielhafte Darstellung eines uniformen empirischen Prozesses U_n

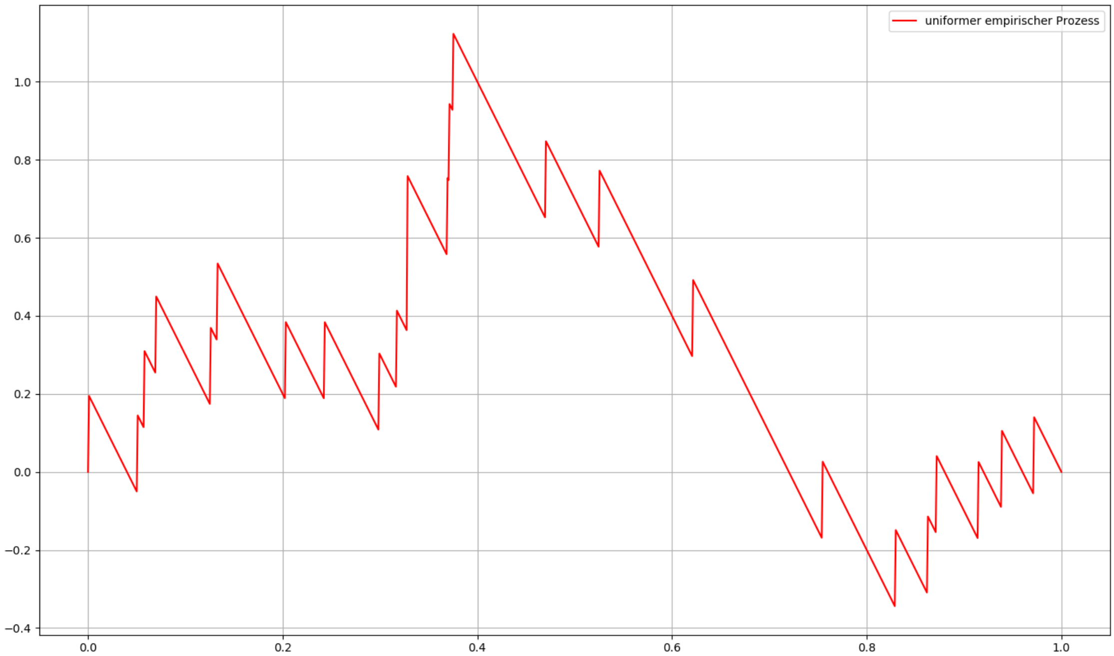

Abbildung 2.2.: Plot eines uniformen empirischen Prozesses mit Python

Die empirische Verteilungsfunktion $F_n\colon [0,1] \times \Omega \to [0,1]$ ist ein stochastischer Prozess mit Trajektorien (Pfaden) im Skorokhod-Raum $\mathfrak{D}$. Analog dazu liegen auch die Trajektorien des stochastischen Prozesses $U_n\colon [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ (siehe (2.2)) in $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(0,1) \supseteq \mathfrak{C}[0,1]$. U_n kann man also auch als Zufallsvariable $U_n\colon \Omega \to ([0,1] \to \mathbb{R})$ bzw. $U_n\colon \Omega \to (\mathfrak{D}, s)$ auffassen.
Aus dem Invarianzprinzip von Donsker 1.3.3 folgt:

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathfrak{B}_0 \text{ in } (\mathfrak{D}[0,1], s) \tag{2.3}$$

Wir betrachten nun die Zufallsvariable

$$T_n\colon \Omega \to \mathfrak{D}, \qquad T_n(\omega) := \|U_n(\omega)\| = \sup_{t\in[0,1]} \big|U_n(t,\omega)\big| \qquad \forall \omega \in \Omega. \tag{2.4}$$

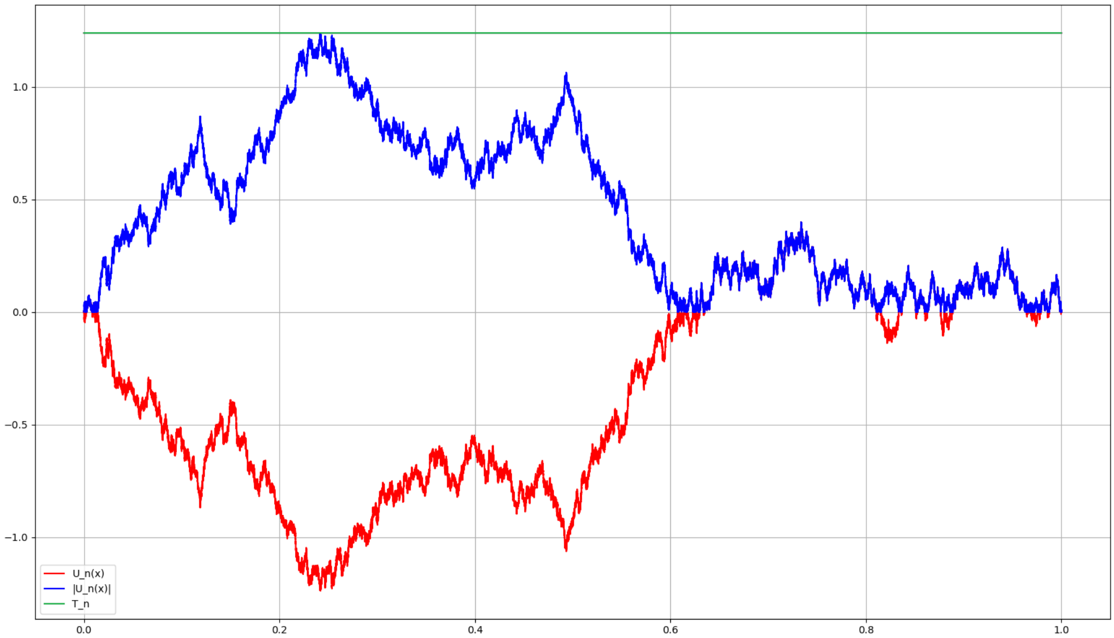

Abbildung 2.3.: Plot von T_n (oben), $|U_n|$ (mitte) und U_n (unten)

Mit dieser lautet unser Test nun

$$H_0 \text{ verwerfen } \overset{(2.1)}{\iff} \|F_n - F_0\| > k_{n,\alpha} \overset{(2.4)}{\iff} T_n \overset{(2.2)}{=} \sqrt{n} \cdot \|F_n - F_0\| > \sqrt{n} \cdot k_{n,\alpha} =: c_{n,\alpha}. \tag{2.5}$$

Lemma 2.2.4 (Norm ist stetig und messbar)
Die Abbildung

$$h\colon (\mathfrak{D}[0,1], s) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto h(f) := \|f\|$$

ist stetig in jedem $f \in \mathfrak{C}[0,1]$ und $\mathcal{B}(\mathfrak{D})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Man beachte, dass h nicht auf ganz $\mathfrak{D}[0,1]$ stetig ist, sondern nur in stetigen Abbildungen.

Beweis. Zeige Stetigkeit:
Sei $f \in \mathfrak{C}[0,1]$, also $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{D}(0,1)$ mit $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}_s f$. Es

folgt aus Lemma 1.1.6(ii) $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}_d 0$. Damit:

$$\begin{aligned}\big|h(f_n) - h(f)\big| &\overset{\text{Def}}{=} \left|\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)| - \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|\right| \\ &\overset{(\triangle\text{-Ungl})}{\leq} \sup_{t\in[0,1]} \big|f_n(t) - f(t)\big| \\ &\overset{\text{Def}}{=} d(f_n, f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Damit ist die Stetigkeit von h gezeigt.

Zeige $\mathcal{B}(\mathfrak{D})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-Messbarkeit:
Sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine Borelmenge und o.B.d.A. $B = (-\infty, a]$ mit $a \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $h^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathfrak{D})$ mithilfe von Satz 1.1.8:

$$\begin{aligned}h^{-1}(B) &= h^{-1}\big((-\infty, a]\big) \\ &= \big\{f \in \mathfrak{D} : h(f) \in (-\infty, a]\big\} \\ &= \big\{f \in \mathfrak{D} : h(f) \leq a\big\} \\ &\overset{\text{Def } h}{=} \left\{f \in \mathfrak{D} : \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \leq a\right\} \\ &\overset{1.1.3(\text{iv})}{=} \left\{f \in \mathfrak{D} : \sup_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} |f(t)| \leq a\right\} \\ &= \bigcap_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} \Big\{f \in \mathfrak{D} : |f(t)| \leq a\Big\} \\ &= \bigcap_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} \Big\{f \in \mathfrak{D} : f(t) \in [-a, a]\Big\} \\ &\overset{\text{Def } \pi_t}{=} \bigcap_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} \Big\{f \in \mathfrak{D} : \pi_t(f) \in [-a, a]\Big\} \\ &= \bigcap_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} \pi_t^{-1}\big(\underbrace{[-a, a]}_{\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}\big) \overset{1.1.8}{\in} \mathcal{B}_s(\mathfrak{D})\end{aligned}$$

$\square$

Wir betrachten nun die Norm der Brownschen Brücke:

$$M\colon \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad \omega \mapsto M(\omega) := \|\mathfrak{B}_0(\omega)\| = \sup_{x\in[0,1]} \big|\mathfrak{B}_0(x, \omega)\big|$$

Korollar 2.2.5

Es folgt

$$T_n \overset{\text{Def}}{=} \|U_n\| \overset{\text{Def}}{=} h(U_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} h(\mathfrak{B}_0) \overset{\text{Def}}{=} \|\mathfrak{B}_0\| \overset{\text{Def}}{=} M$$

Beweis. Folgt direkt aus Gleichung (2.3) und dem Continuous Mapping Theorem (CMT) A.3.4(ii), denn h ist wegen Lemma 2.2.4 stetig auf $\mathfrak{C}$ und $\mathcal{B}(\mathfrak{D})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Somit gilt:

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega : \underbrace{\mathfrak{B}_0(\cdot,\omega)}_{\text{stetig wegen } 1.2.5(i)} \in \{f \in D : h \text{ ist } \underline{\text{nicht}} \text{ stetig in } f\}\Big\}\Big) \overset{2.2.4}{=} \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

□

Satz 2.2.6: Verteilungsfunktion von M

Die Verteilungsfunktion von M ist

$$\begin{aligned} F_M(x) &\overset{\text{Def}}{=} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : M(\omega) \leq x\}) \\ &\overset{\text{Def}}{=} \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \sup_{x\in[0,1]} |\mathfrak{B}_0(x,\omega)| \leq x\right\}\right) \\ &= \begin{cases} 1 - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \exp(-2 \cdot k^2 \cdot x^2), & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Außerdem ist F_M stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.

Beweis. Siehe Shorack und Wellner 1986, *Empirical processes with applications to statistics*, ab Seite 34 Gleichung (12), [SW86].

Bleibt noch die Stetigkeit von F_M auf $\mathbb{R}_{>0}$ zu beweisen. Dass F_M rechtsseitig stetig ist, folgt aus der Tatsache, dass F_M eine Verteilungsfunktion ist.

Wir zeigen also im Folgenden die linksseitige Stetigkeit von F_M: Zuerst zeigen wir, dass die Reihe

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \exp\Big(-2 \cdot k^2 \cdot x^2\Big)$$

für alle $x > 0$ absolut konvergiert. Dafür genügt es zu zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp\Big(-2 \cdot k^2 \cdot x^2\Big)$$

für alle $x > 0$ konvergiert. Dies ist der Fall, da diese Reihe eine spezielle geometrische Reihe ist:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \exp\Big(-2 \cdot k^2 \cdot x^2\Big) &= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\exp(x^2)}\right)^{2 \cdot k^2}}_{\geq 0} \\
&< \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\exp(x^2)}\right)^{k}}_{<1, \text{ für } x \neq 0} \\
&\overset{\text{Geo-Reihe}}{=} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{\exp(x^2)}\right)^k} \\
&= \frac{\exp(x^2)}{\exp(x^2) - 1} \\
&\overset{x \neq 0}{<} \infty
\end{aligned}$$

Folglich konvergiert $f(x)$ absolut für jedes $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Gemäß Lemma A.1.4 ist nun die Funktion

$$a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}, \qquad a(k) := (-1)^{k+1} \cdot \exp\Big(-2 \cdot k^2 \cdot x^2\Big) \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

integrierbar bzgl. des Zählmaßes μ auf $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ für jedes feste $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und es gilt

$$f(x) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^{k+1} \cdot \exp\Big(-2 \cdot k^2 \cdot x^2\Big) \overset{A.1.4}{=} \int_N (-1)^{k+1} \cdot \exp\Big(-2 \cdot k^2 \cdot x^2\Big) \, \mathrm{d}\mu(k) \qquad (*)$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Bevor wir die Stetigkeit von F_M zeigen, benötigen wir den Satz von der majorisierten Konvergenz, Satz A.1.3. Als Majorante wählen wir

$$g_x(k) := \exp\Big(-2 \cdot k^2 \cdot x^2\Big) \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

für jedes feste $x > 0$. Wir haben bereits oben gezeigt, dass die Reihe

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} g_x(k)$$

konvergiert für alle $x > 0$. Die Reihe konvergiert sogar absolut. Folglich ist die Funktion g nach Lemma A.1.4 auch μ-integrierbar. Jetzt sind alle Hilfsmittel beisammen um die Stetigkeit von F_M zu beweisen. Sei $x > 0$ beliebig und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ eine Folge mit

$x_n \uparrow x$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F_M(x_n) &\overset{\text{Def}}{=} 1 - 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^{k+1} \cdot \exp\Big(-2 \cdot k^2 \cdot x_n^2\Big) \\
&\overset{(*)}{=} 1 - 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{N}} (-1)^{k+1} \cdot \exp\Big(-2 \cdot k^2 \cdot x_n^2\Big) \, \mathrm{d}\mu(k) \\
&\overset{A.1.3}{=} 1 - 2 \cdot \int\limits_{\mathbb{N}} (-1)^{k+1} \cdot \exp\Big(-2 \cdot k^2 \cdot x^2\Big) \, \mathrm{d}\mu(k) \\
&\overset{(*)}{=} 1 - 2 \cdot \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^{k+1} \cdot \exp\Big(-2 \cdot k^2 \cdot x^2\Big) \\
&\overset{\text{Def}}{=} F_M(x)
\end{aligned}
$$

Der Satz von der majorisierten Konvergenz, Satz A.1.3, ist hierbei anwendbar, da

$$
x \mapsto (-1)^{k+1} \cdot \exp\Big(-2 \cdot k^2 \cdot x^2\Big)
$$

stetig ist und

$$
\begin{aligned}
\Big|(-1)^{k+1} \cdot \exp\Big(-2 \cdot k^2 \cdot x_n^2\Big)\Big| &= \exp\Big(-2 \cdot k^2 \cdot x_n^2\Big) \\
&\leq \exp\Big(-2 \cdot k^2 \cdot (x-\varepsilon)^2\Big) \\
&\leq g_{x-\varepsilon}(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Hierbei ist $0 < \varepsilon < x$ gewählt und wegen $x_n \uparrow x$ existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq x - \varepsilon$ für alle $n \geq N_0$. Damit ist nun auch die linksseitige Stetigkeit gezeigt. $\square$

Definition 2.2.7 (Kolmogorov-Smirnov-Verteilung)
Die Verteilungsfunktion F_M von M aus Satz 2.2.6 heißt
Kolmogorov-Smirnov-Verteilung.

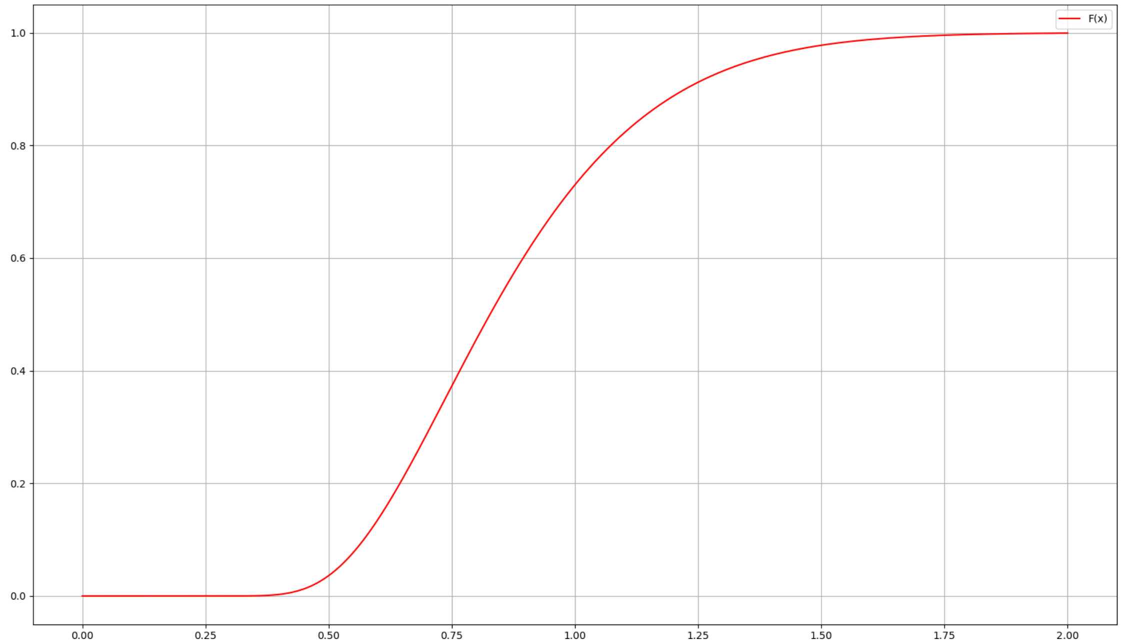

Abbildung 2.4.: Verteilungsfunktion F_M der Kolmogorov-Smirnov-Verteilung

Folglich wählen wir

$$c_\alpha := F_M^{-1}(1-\alpha), \tag{2.6}$$

wobei $F_M^{-1}(1-\alpha)$ das $(1-\alpha)$-Quantil der Kolmogorov-Smirnov-Verteilung ist. Eine Quantiltabelle der Verteilungsfunktion F_M befindet sich im Anhang.

Ergebnis

Wir erhalten also insgesamt aus Gleichung (2.5) den **Kolmogorov-Smirnov-Test** für unser Testproblem (TP)

$$H_0 \text{ verwerfen} \iff \sqrt{n} \cdot \|F_n - F_0\| > F_M^{-1}(1-\alpha), \tag{2.7}$$

welcher ein asymptotischen Niveau-α-Test ist, denn:

Beweis. Wegen Korollar 2.2.5 gilt

$$T_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} M.$$

Dies ist wegen Lemma A.3.3 äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : T_n(\omega) \le x\}\big) = F_M(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{$*$}$$

denn $\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : T_n(\omega) \le x\}\big)$ ist nach Definition die Verteilungsfunktion von T_n und die Verteilungsfunktion F_M von M ist stetig auf $\mathbb{R}^+$ nach Satz 2.2.6. Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}\Big(\{\omega \in \Omega : H_0 \text{ verwerfen}\}\Big) &\overset{(2.1)}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}\Big(\{\omega \in \Omega : \|F_n - F\| > k_{n,\alpha}\}\Big) \\
&\overset{(2.5)}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}\Big(\{\omega \in \Omega : T_n > c_\alpha\}\Big) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}\Big(\{\omega \in \Omega : T_n \le c_\alpha\}\Big) \\
&\overset{(*)}{=} 1 - F_M(c_\alpha) \\
&= 1 - F_M\Big(F_M^{-1}(1-\alpha)\Big) \\
&\overset{A.2.6+2.2.6}{=} 1 - (1-\alpha) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

□

2.2.2. Der V_n-Test

Im letzten Abschnitt 2.2.1 haben wir den Kolmogorov-Smirnov-Test

$$H_0 \text{ verwerfen} \iff \sup_{t\in[0,1]} \big|U_n(t)\big| > F_M^{-1}(1-\alpha)$$

hergeleitet und gezeigt, dass dies ein asymptotischer Niveau-α-Test für unser Testproblem (TP) ist. Wir werden nun eine erste Alternative dafür angeben, welche letztlich nur eine gewichtete Variante des gerade genannten Tests ist. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned}
V_n &:= \sup_{t\in(0,1)} \frac{|U_n(t)|}{\sqrt{t\cdot(1-t)}} && \forall n \in \mathbb{N} \\
V_n^+ &:= \sup_{t\in(0,1)} \frac{U_n(t)}{\sqrt{t\cdot(1-t)}} && \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

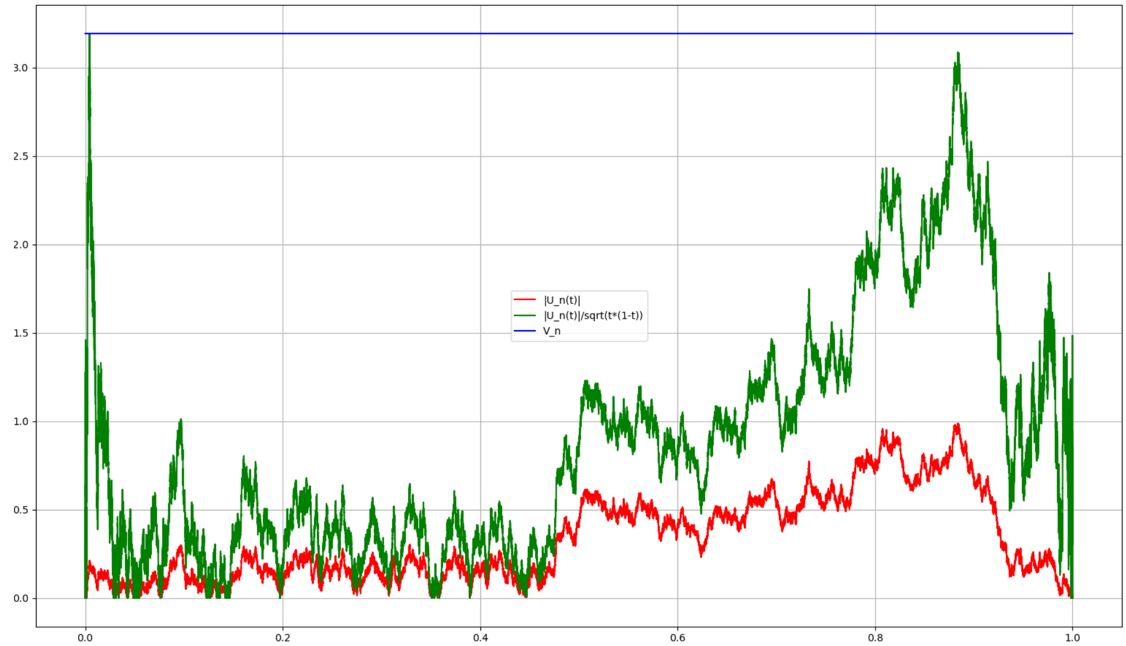

Abbildung 2.5.: Veranschaulichung von V_n im Verhältnis zu $|U_n|$ und des Einflusses der Gewichtsfunktion $t \mapsto \sqrt{t \cdot (1-t)}$ auf $|U_n|$

Wir erhalten also einen neuen Test

$$H_0 \text{ verwerfen} :\Longleftrightarrow V_n > d_{n,\alpha}, \tag{2.8}$$

indem wir in obigem Test einfach $\|U_n\|$ durch V_n ersetzen. Diesen Test nennen wir **V_n-Test**. Auch hier ist $\alpha \in (0,1)$ und wir müssen $d_{n,\alpha}$ noch derart bestimmen, dass (2.8) ein Niveau-α-Test ist, d.h., dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}(V_n > d_{n,\alpha}) = \alpha \tag{2.9}$$

gilt.
Unser nächster Schritt besteht darin, das $d_{n,\alpha}$ zu bestimmen.

Definition 2.2.8 (Gumbel-Verteilung)
Eine Zufallsgröße X genügt der **Gumbel-Verteilung** mit den Parametern $\beta > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$, wenn sie die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(x) = \frac{1}{\beta} \cdot \exp\Big(-\frac{1}{\beta} \cdot (x-\mu)\Big) \cdot \exp\Big(-\exp\Big(-\frac{1}{\beta} \cdot (x-\mu)\Big)\Big) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

und damit die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \exp\Big(-\exp\Big(-\frac{1}{\beta}\cdot(x-\mu)\Big)\Big) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

besitzt.

Satz 2.2.9: Jaeschke, 1979

Setze

$$A_n := \sqrt{2\cdot\log(\log(n))}$$
$$D_n := 2\cdot\log(\log(n)) + \frac{1}{2}\cdot\log\Big(\log(\log(n))\Big) - \frac{1}{2}\cdot\log(\pi)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit dieser Bezeichnung gilt:

(i) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}\Big(V_n \le \frac{t+D_n}{A_n}\Big) = \exp(-2\cdot\exp(-t)) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}\Big(V_n^+ \le \frac{t+D_n}{A_n}\Big) = \exp(-\exp(-t)) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

Die Grenzverteilung ist also die Gumbel-Verteilung.

Beweis. Wir benutzen ein Resultat von Jaeschke 1979, aus *The Asymptotic Distribution of the Supremum of the Standardized Empirical Distribution Function on Subintervals*, [Jae79]. So ist zum Beispiel Gleichung (ii) genau „Example 1“ auf Seite 110 im Artikel von Jaeschke. Es folgen beide Aussagen aus dem Theorem auf Seite 109.

□

Für ein gegebenes Signifikanzniveau $\alpha \in (0,1)$ erfüllt

$$d_{n,\alpha} := \frac{D_n - \log\Big(-\frac{1}{2}\cdot\log(1-\alpha)\Big)}{A_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.10}$$

die Gleichung (2.9), denn:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(V_n > d_{n,\alpha}) &= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(V_n \leq d_{n,\alpha}) \\
&\overset{\text{Def}}{=} 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(V_n \leq \frac{D_n - \log\left(-\frac{1}{2} \cdot \log(1-\alpha)\right)}{A_n} \right) \\
&\overset{2.2.9(i)}{=} 1 - \exp\left(-2 \cdot \exp\left(-\left(-\log\left(-\frac{1}{2} \cdot \log(1-\alpha)\right)\right)\right)\right) \\
&= 1 - (1-\alpha) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

Folglich ist der V_n-Test (2.8) ein asymptotischer Niveau-α-Test.

2.2.3. Der L_n-Test

Alle Ideen in diesem Abschnitt stammen aus dem 2018 veröffentlichen Artikel [Fer18] von Prof. Dr. Dietmar Ferger. Er hatte die Idee, den Kolmogorov-Smirnov-Test anders zu gewichten, als wir es in Abschnitt 2.2.2 mit dem V_n-Test gesehen haben. Dazu betrachten wir die Funktion

$$\psi\colon \mathfrak{D} \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \psi(f) := \min \mathfrak{S}(f),$$

welche jede Càdlàg-Funktion auf ihre kleinste Supremalstelle abbildet. Diese Funktion ψ ist wohldefiniert, da $\mathfrak{S}(f) \neq \emptyset$ und $\mathfrak{S}(f)$ ein eindeutiges Minimum hat, was nach Satz 1.4.3 auch existiert, da $\mathfrak{S}(f)$ für alle $f \in \mathfrak{D}$ kompakt ist.

Definition 2.2.10 Wir betrachten die Menge

$$\hat{\mathfrak{C}} := \hat{\mathfrak{C}}[0,1] := \{f \in \mathfrak{C}[0,1] : \#\mathfrak{S}(f) = 1\},$$

also die Menge aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$, die eine eindeutige Supremalstelle besitzen.

Lemma 2.2.11 Die Funktion $\psi\colon \mathfrak{D} \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $\hat{\mathfrak{C}}$ und $\mathcal{B}(\mathfrak{D})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar.

Beweis. Zeige Stetigkeit:
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{D}$ und sei $f \in \hat{\mathfrak{C}}$ mit $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}_s f$. Also ist $f \in \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{S}(f) = \{\tau\}$. Aus Lemma 1.1.6(i) folgt

$$f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}_d f,$$

weil f nach Voraussetzung stetig ist. Die Behauptung

$$\psi(f_n) = \tau_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi(f) = \tau \qquad \text{in } \mathbb{R}$$

folgt nun direkt aus Satz 1.4.10.

Zeige $\mathcal{B}(\mathfrak{D})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-Messbarkeit:
Siehe Kallenberg, *Foundations of Modern Probability* 1997, [Kal97], Lemma 12.12 auf Seite 226. □

Lemma 2.2.12 (Supremum ist stetig und messbar) Die Funktion

$$M\colon \mathfrak{D} \to \mathbb{R}, \qquad M(f) := \sup_{t\in[0,1]} f(t) \qquad \forall f \in \mathfrak{D}$$

ist stetig auf $\mathfrak{C}$ und $\mathcal{B}(\mathfrak{D})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar.

Beweis. Zeige Stetigkeit:
Sei $f \in \mathfrak{C}[0,1]$, also $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{D}(0,1)$ mit $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}_s f$. Es folgt aus Lemma 1.1.6(ii) $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}_d 0$. Sei τ_f eine Supremalstelle von f und τ_n eine Supremalstelle von f_n für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese existieren nach Satz 1.4.3. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathbb{R}}(M(f), M(f_n)) &= \left|M(f_n) - M(f)\right| \\
&\overset{\text{Def}}{=} \left|\sup_{t\in[0,1]} f_n(t) - \sup_{t\in[0,1]} f(t)\right| \\
&\overset{1.4.1, f\in\mathfrak{C}}{=} \left|f(\tau_f) - \max\{f_n(\tau_n), f_n(\tau_n-)\}\right| \\
&\le \begin{cases} \left|f(\tau_f) - f_n(\tau_f)\right|, & \text{falls } f(\tau_f) \ge \max\{f_n(\tau_n), f_n(\tau_n-)\} \\ \left|f_n(\tau_n) - f(\tau_n)\right|, & \text{falls } f(\tau_f), f_n(\tau_n-) \le f_n(\tau_n) \\ \left|f_n(\tau_n-) - f(\tau_n)\right|, & \text{falls } f(\tau_f), f_n(\tau_n) \le f_n(\tau_n-) \end{cases} \\
&\overset{(*)}{\le} \sup_{t\in[0,1]} \left|f_n(t) - f(t)\right| \\
&\overset{\text{Def}}{=} d(f_n, f) \underset{\text{Vor}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0,
\end{aligned}$$

denn

$$\left|f_n(\tau_n-) - f(\tau_n)\right| = \lim_{\theta\uparrow\tau_n} \left|f_n(\theta) - f(\tau_n)\right| \overset{f\in\mathfrak{C}}{=} \lim_{\theta\uparrow\tau_n} \left|f_n(\theta) - f(\theta)\right| \le \sup_{t\in[0,1]} \left|f_n(t) - f(t)\right|. \tag{$*$}$$

Damit ist die Stetigkeit von M auf $\mathfrak{C}$ gezeigt.

Zeige Messbarkeit:

Sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine Borelmenge und o.B.d.A. $B = (-\infty, a]$ mit $a \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $M^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathfrak{D})$ mithilfe von Satz 1.1.8:

$$\begin{aligned}
M^{-1}(B) &= M^{-1}\big((-\infty, a]\big) \\
&= \big\{f \in \mathfrak{D} : M(f) \in (-\infty, a]\big\} \\
&= \big\{f \in \mathfrak{D} : M(f) \leq a\big\} \\
&\overset{\text{Def } M}{=} \left\{f \in \mathfrak{D} : \sup_{t \in [0,1]} f(t) \leq a\right\} \\
&\overset{1.1.3(\text{iv})}{=} \left\{f \in \mathfrak{D} : \sup_{t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} f(t) \leq a\right\} \\
&= \bigcap_{t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \Big\{f \in \mathfrak{D} : f(t) \leq a\Big\} \\
&\overset{\text{Def } \pi_t}{=} \bigcap_{t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \Big\{f \in \mathfrak{D} : \pi_t(f) \in (-\infty, a)\Big\} \\
&= \bigcap_{t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \pi_t^{-1}(B) \overset{1.1.8}{\in} \mathcal{B}_s(\mathfrak{D})
\end{aligned}$$

□

Im vorhergehenden Test (2.8) gewichteten wir den ursprünglichen Kolmogorov-Smirnov-Test (2.7) durch die Gewichtsfunktion

$$t \mapsto \sqrt{t \cdot (1 - t)}.$$

Stattdessen gewichten wir nun mit dem konstanten Faktor

$$\sqrt{\tau_n \cdot (1 - \tau_n)},$$

wobei

$$\tau_n := \psi\big(|U_n|\big) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

die kleinste Supremalstelle des empirischen uniformen Prozesses ist. Damit erhalten wir die Teststatistik

$$L_n := \frac{\|U_n\|}{\sqrt{\tau_n \cdot (1 - \tau_n)}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

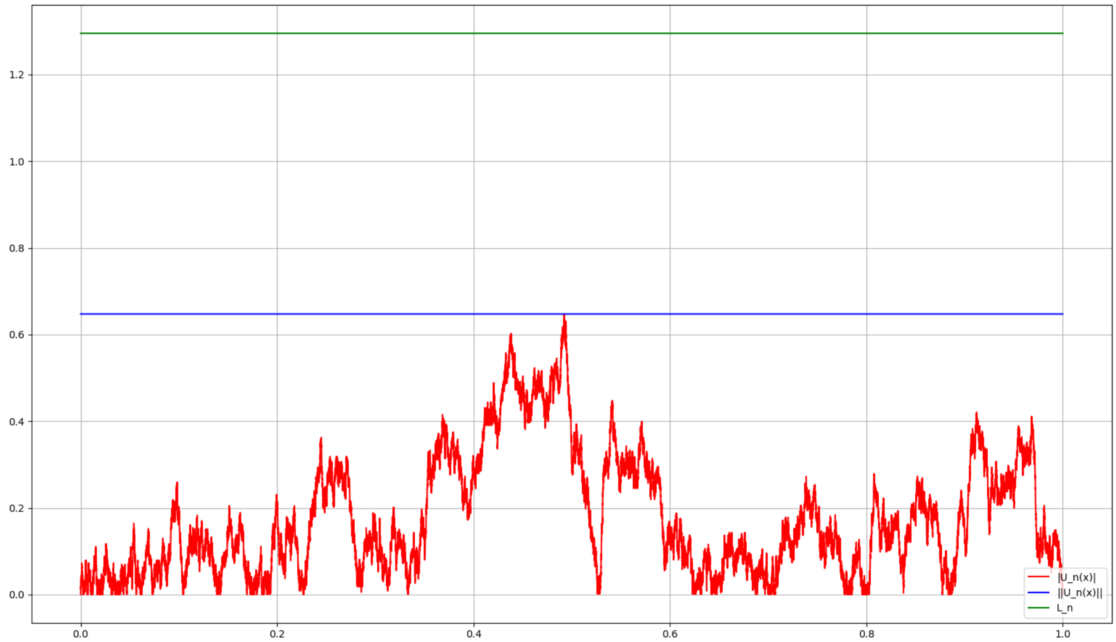

Abbildung 2.6.: Veranschaulichung von L_n im Verhältnis zu $|U_n(x)|$ und $\|U_n\|$

Wir betrachten die Abbildung

$$A\colon \mathfrak{D} \to \mathbb{R}^2, \qquad A(f) := \big(M(f), \psi(f)\big) \qquad \forall f \in \mathfrak{D}.$$

Satz 2.2.13: Ferger, 2018

Es gilt

$$A(|U_n|) = (\|U_n\|, \tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \Big(\|\mathfrak{B}_0\|, \psi(|\mathfrak{B}_0|)\Big).$$

Beweis. Die Gleichheit folgt direkt aus der Definition via

$$A(|U_n|) \overset{\text{Def}}{=} \left(\sup_{t\in[0,1]} |U_n|, \psi(|U_n|)\right) \overset{\text{Def}}{=} (\|U_n\|, \tau_n).$$

A ist stetig auf $\hat{\mathfrak{C}}$, da nach Lemma 2.2.11 ψ stetig auf $\hat{\mathfrak{C}}$ und nach Lemma 2.2.12 M stetig auf $\mathfrak{C}$ sind. Wir haben in Satz 1.3.3

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathfrak{B}_0 \quad \text{in } \mathfrak{D}[0,1]$$

gezeigt. Aus dem CMT A.3.4 und der Stetigkeit sowie der $\mathcal{B}(\mathfrak{D})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-Messbarkeit der

Betragsfunktion folgt nun

$$|U_n| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} |\mathfrak{B}_0| = \mathfrak{B}_* \quad \text{in } \mathfrak{D}[0,1].$$

Wir wollen nun das CMT A.3.4(ii) auf A anwenden. Dazu sei $D_A \subseteq \mathfrak{D}[0,1]$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von A. Wir zeigen nun die Voraussetzung

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |\mathfrak{B}_0(\omega)| \in D_A\}) = 0$$

des CMTs. Nach Lemma 1.2.5(i) und wegen der Stetigkeit des Betrages ist

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega : |\mathfrak{B}_0(\omega)| \in \mathfrak{C}\Big\}\Big) = 1.$$

Außerdem gilt nach Satz 1.2.7 auch

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega : \#\mathfrak{S}(|\mathfrak{B}_0(\omega)|) = 1\Big\}\Big) = 1.$$

Da nach Lemma A.1.1 Schnitte von Einsmengen wieder Einsmengen sind, folgt

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega : |\mathfrak{B}_0(\omega)| \in \hat{\mathfrak{C}}\Big\}\Big) = 1.$$

Weil A stetig auf $\hat{\mathfrak{C}}$ ist, folgt mit

$$\begin{aligned} |\mathfrak{B}_0(\omega)| \in \hat{\mathfrak{C}} &\implies A \text{ stetig in } |\mathfrak{B}_0(\omega)| \\ &\implies |\mathfrak{B}_0(\omega)| \notin D_A \end{aligned}$$

schon

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega : |\mathfrak{B}_0(\omega)| \notin D_A\Big\}\Big) = 1.$$

und damit über das Gegenereignis

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega : |\mathfrak{B}_0(\omega)| \in D_A\Big\}\Big) = 0.$$

Jetzt zeigen wir, dass A $\mathcal{B}(\mathfrak{D})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-messbar ist. Sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ eine Borelmenge und o.B.d.A. $B = (-\infty, a] \times (-\infty, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $A^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathfrak{D})$ mithilfe von Satz 1.1.8. Wir haben in Lemma 2.2.11 bereits gezeigt, dass ψ $\mathcal{B}(\mathfrak{D})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist, d.h. es gilt

$$\big\{f \in \mathfrak{D} : \psi(f) \in B\big\} \in \mathcal{B}_s(\mathfrak{D}) \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{$*$}$$

Damit folgt die Messbarkeit von A:

$$\begin{aligned}
A^{-1}(B) &= \{f \in \mathfrak{D} : A(f) \in B\} \\
&\overset{\text{Def } A}{=} \left\{ f \in \mathfrak{D} : \left(\sup_{t\in[0,1]} f(t), \psi(f) \right) \in (-\infty, a] \times (-\infty, b] \right\} \\
&= \left\{ f \in \mathfrak{D} : \sup_{t\in[0,1]} f(t) \le a \text{ und } \psi(f) \le b \right\} \\
&\overset{1.1.3(\text{iv})}{=} \left\{ f \in \mathfrak{D} : \sup_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} f(t) \le a \text{ und } \psi(f) \le b \right\} \\
&= \left\{ f \in \mathfrak{D} : \psi(f) \le b \right\} \cap \bigcap_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} \left\{ f \in \mathfrak{D} : f(t) \le a \right\} \\
&\overset{\text{Def } \pi_t}{=} \left\{ f \in \mathfrak{D} : \psi(f) \in (-\infty, b] \right\} \cap \bigcap_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} \left\{ f \in \mathfrak{D} : \pi_t(f) \in (-\infty, a) \right\} \\
&= \underbrace{\left\{ f \in \mathfrak{D} : \psi(f) \in (-\infty, b] \right\}}_{\overset{(*)}{\in} \mathcal{B}_s(\mathfrak{D})} \cap \bigcap_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} \pi_t^{-1}(B) \overset{1.1.8}{\in} \mathcal{B}_s(\mathfrak{D})
\end{aligned}$$

Somit können wir jetzt das CMT A.3.4 auf A anwenden und erhalten die Behauptung

$$(\|U_n\|, \tau_n) \overset{\text{Def}}{=} A(|U_n|) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} = A(|\mathfrak{B}_0|) \overset{\text{Def}}{=} \Big(\|\mathfrak{B}_0\|, \psi(|\mathfrak{B}_0|) \Big).$$

□

Korollar 2.2.14: Ferger, 2018

$$L_n \overset{\text{Def}}{=} \frac{\|U_n\|}{\sqrt{\tau_n \cdot (1-\tau_n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \frac{\|\mathfrak{B}_0\|}{\sqrt{\psi(|\mathfrak{B}_0|) \cdot (1 - \psi(|\mathfrak{B}_0|))}} =: R$$

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$h\colon \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad h(x,y) := \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{y\cdot(1-y)}}, & \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times (0,1) \\ 42, & \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \{0;1\} \end{cases}.$$

h ist wohldefiniert, da $y \cdot (1-y) > 0$ für alle $0 < y < 1$. Es ist

$$\psi(|\mathfrak{B}_0|(\omega)) \in (0,1) \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}, \tag{$*$}$$

denn nach Lemma 1.2.5(ii) ist $\mathfrak{B}_0(0) = \mathfrak{B}_0(1) = 0$ $\mathbb{P}$-f.s. Wäre $\psi(|\mathfrak{B}_0|(\omega)) \in \{0;1\}$, so wäre $|\mathfrak{B}_0| \equiv 0$ $\mathbb{P}$-f.s. und folglich $\mathfrak{B}_0 \equiv 0$ $\mathbb{P}$-f.s.

Aus (∗) und der Tatsache, dass h stetig auf $\mathbb{R} \times (0,1)$ und damit auch Borel-Messbar ist, folgt, dass $h(x,\cdot)$ $\mathbb{P}$-f.s. stetig in $\psi(|\mathfrak{B}_0|)$ ist, woraus

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega : \Big(\|\mathfrak{B}_0(\omega)\|, \psi(|\mathfrak{B}_0|(\omega))\Big) \in D_h\Big\}\Big) = 0$$

folgt. Somit können wir das CMT A.3.4(ii) auf Satz 2.2.13 anwenden und erhalten

$$L_n \stackrel{\text{Def}}{=} h(\|U_n\|, \tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} h\Big(\|\mathfrak{B}_0\|, \psi(|\mathfrak{B}_0|)\Big) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\|\mathfrak{B}_0\|}{\sqrt{\psi(|\mathfrak{B}_0|)\cdot(1-\psi(|\mathfrak{B}_0|))}}.$$

□

Mit diesen Resultaten können wir nun zeigen, dass für $\alpha \in (0,1)$ der Test

$$H_0 \text{ verwerfen} :\Longleftrightarrow L_n > c_{n,\alpha} \tag{2.11}$$

ein asymptotischer Niveau-α-Test für unser Testproblem (TP) ist. Wir nennen diesen Test **L_n-Test**. Bleibt wieder $c_{n,\alpha}$ zu bestimmen. Dafür benötigen wir die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable R, welche ein spezielles Funktional der Brownschen Brücke ist. Diese ist auch bereits bekannt:

Satz 2.2.15: Ferger, 2018

Setze $\alpha_j := 2\cdot j + 1$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Die Dichte der Zufallsvariable R aus Korollar 2.2.14 ist

$$\begin{aligned} f_R(u) = {} & \frac{16}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \sum_{0\le j<l<\infty} (-1)^{j+1} \cdot \frac{\alpha_j\cdot\alpha_l}{\alpha_l^2-\alpha_j^2} \\ & \cdot \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\alpha_j^2\cdot u^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\alpha_l^2\cdot u^2\right)\right) \\ & + \frac{4}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\alpha_j^2\cdot u^2\right) \qquad \forall u > 0 \end{aligned}$$

und ihre Verteilungsfunktion ist

$$\begin{aligned} F_R(x) = 16 \cdot & \sum_{0\le j<l<\infty} (-1)^{j+l} \cdot \frac{\alpha_j\cdot\alpha_l}{\alpha_l^2-\alpha_j^2} \cdot \left(\frac{\Phi(\alpha_j\cdot x)-\frac{1}{2}}{\alpha_j} - \frac{\Phi(\alpha_l\cdot x)-\frac{1}{2}}{\alpha_l}\right) \\ & + 4\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\Phi(\alpha_j\cdot x)-\frac{1}{2}}{\alpha_j} - x\cdot\varphi(\alpha_j\cdot x)\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\alpha_j := 2 \cdot j + 1$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$,

$$\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung und

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

die Dichte der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$.

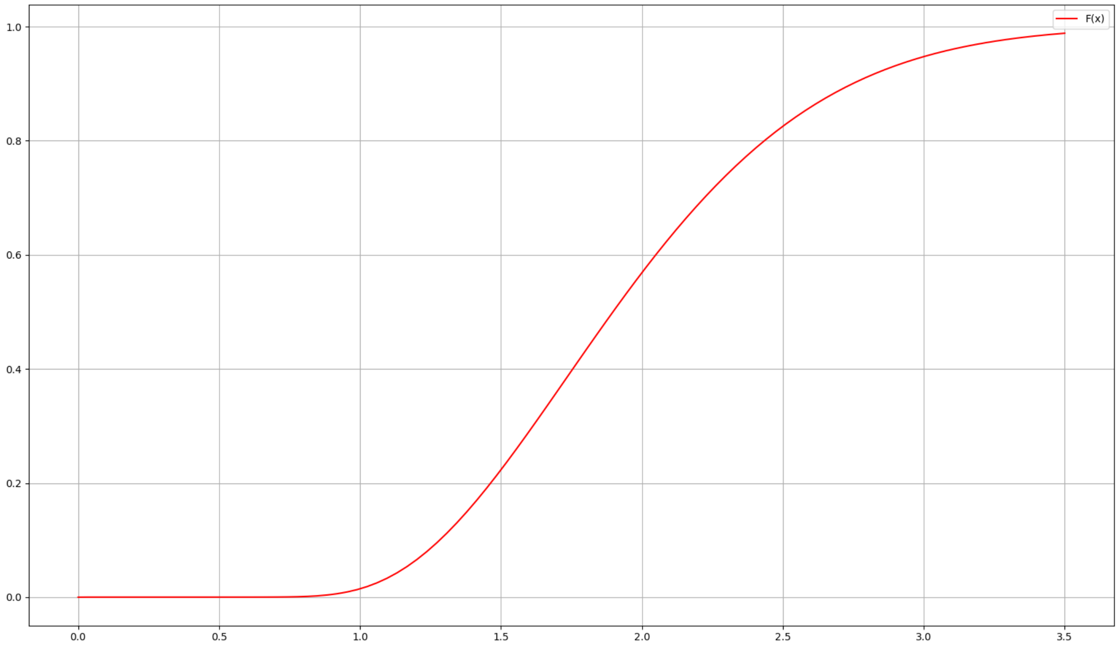

Abbildung 2.7.: Plot der Verteilungsfunktion F_R mit einer Summation bis 2000

Beweis. Siehe Ferger, *On the supremum of a Brownian bridge standardized by its maximizing point with applications to statistics* 2018, Seite 64, Theorem 1.1, [Fer18]. □

Folglich können wir wieder einfach

$$c_{n,\alpha} := F_R^{-1}(1 - \alpha) \tag{2.12}$$

wählen. Eine Quantiltabelle der Verteilungsfunktion F_R befindet sich im Anhang.

Satz 2.2.16

Der L_n-Test (2.11) ist ein asymptotischer Niveau-α-Test.

Beweis. Mithilfe von Lemma A.3.3 folgt aus Korollar 2.2.14

$$\lim_{n\to\infty} F_{L_n}(x) \overset{\text{Def}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega : L_n(\omega) \le x\}\Big) \overset{A.3.3}{=} F_R(x) \qquad \forall x \in D_{F_R} \tag{$*$}$$

Hierbei ist $D_{F_R} = \mathbb{R}$ die Menge der Stetigkeitsstellen der Verteilungsfunktion von R, denn die Verteilungsfunktion F_R ist sogar absolut-stetig, da F_R eine Dichte hat gemäß Satz 2.2.15. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}\Big(\{\omega \in \Omega : H_0 \text{ verwerfen}\}\Big) &\overset{(2.11)}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}\Big(\{\omega \in \Omega : L_n(\omega) > c_{n,\alpha}\}\Big) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}\Big(\{\omega \in \Omega : L_n(\omega) \le c_{n,\alpha}\}\Big) \\
&\overset{(*)}{=} 1 - F_R(c_\alpha) \\
&\overset{(2.12)}{=} 1 - F_R\Big(F_R^{-1}(1-\alpha)\Big) \\
&\overset{A.2.6+2.2.15}{=} 1 - (1-\alpha) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

□

2.3. Einseitige Tests

Anstelle des zweiseitigen Testproblems

$$H_0\colon F = F_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1\colon F \neq F_0$$

aus Abschnitt 2.2 betrachten wir jetzt das einseitige Testproblem

$$H_0\colon F = F_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1\colon F > F_0. \tag{ETP}$$

Wir werden uns im Folgenden kurz mit den einseitigen Tests der drei bereits vorgestellten Tests beschäftigen.

2.3.1. Der einseitige Kolmogorov-Smirnov-Test

Bezeichne auch hier wieder F_n die empirische Verteilungsfunktion von den i.i.d. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$. Analog zu Lemma 2.2.1 erhalten wir aus dem Satz von Glivenko-Cantelli A.2.9:

Lemma 2.3.1

$$\sup_{t\in[0,1]}\big(F_n(t)-F_0(t)\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup_{t\in[0,1]}\big(F(t)-F_0(t)\big) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis. Es gilt

$$\left|\sup_{t\in[0,1]} f(t) - \sup_{t\in[0,1]} g(t)\right| \leq \sup_{t\in[0,1]}\big|f(t)-g(t)\big| \qquad \forall f,g\colon [0,1]\to\mathbb{R}, \tag{2.13}$$

denn für beliebiges $x\in[0,1]$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{f(x)-g(x)}_{\leq \sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|} + \underbrace{g(x)}_{\leq \sup_{t\in[0,1]} g(t)} \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]}\big|f(t)-g(t)\big| + \sup_{t\in[0,1]} g(t) \end{aligned}$$

Da dies für alle $x\in[0,1]$ gilt, gilt es folglich auch für das Supremum:

$$\sup_{t\in[0,1]} f(t) \leq \sup_{t\in[0,1]}\big|f(t)-g(t)\big| + \sup_{t\in[0,1]} g(t)$$

Durch Subtrahieren von $\sup_t g(t)$ erhalten wir

$$\sup_{t\in[0,1]} f(t) - \sup_{t\in[0,1]} g(t) \leq \sup_{t\in[0,1]}\big|f(t)-g(t)\big|$$

und vertauschen von f und g liefert uns noch

$$\sup_{t\in[0,1]} g(t) - \sup_{t\in[0,1]} f(t) \leq \sup_{t\in[0,1]}\big|g(t)-f(t)\big|.$$

Also erhalten wir insgesamt Gleichung (2.13), mit deren Hilfe wir nun die Aussage beweisen können:

$$\begin{aligned} &\left|\sup_{t\in[0,1]}\big(F_n(t)-F_0(t)\big) - \sup_{t\in[0,1]}\big(F(t)-F_0(t)\big)\right| \\ &\overset{(2.13)}{\leq} \sup_{t\in[0,1]}\Big|\big(F_n(t)-F_0(t)\big)-\big(F(t)-F_0(t)\big)\Big| \\ &= \sup_{t\in[0,1]}\big|F_n(t)-F(t)\big| \\ &\underset{A.2.9}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0 \end{aligned}$$

□

Ähnlich zur Analyse unterhalb von Korollar 2.2.2 erhalten wir nun

$$
\begin{aligned}
H_0 &\overset{\text{Def}}{\iff} F = F_0 &&\overset{2.3.1}{\iff} \sup_{x\in[0,1]} \big(F_n(x) - F_0(x)\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \\
H_1 &\overset{\text{Def}}{\iff} F > F_0 &&\overset{2.3.1}{\iff} \sup_{x\in[0,1]} \big(F_n(x) - F_0(x)\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup_{x\in[0,1]} \big(F(x) - F_0(x)\big) > 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}
\end{aligned}
$$

Somit scheint der Test

$$H_0 \text{ verwerfen} :\iff \sqrt{n} \cdot \sup_{x\in[0,1]} \big(F_n(x) - F(x)\big) \geq c_\alpha^+ \tag{2.14}$$

sinnvoll für das einseitige Testproblem (ETP) zu sein. Dieser heißt
einseitiger Kolmogorov-Smirnov-Test. Bleibt also wieder den Schwellwert c_α^+ so zu bestimmen, dass der Test (2.14) ein asymptotischer Niveau-α-Test ist. Aus dem Invarianzprinzip von Donsker 1.3.3 erhalten wir wie gehabt, dass der uniforme empirische Prozess U_n gegen die Brownsche Brücke $\mathfrak{B}_0$ in Verteilung konvergiert:

$$U_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathfrak{B}_0 \text{ in } (\mathfrak{D}[0,1], s) \tag{2.15}$$

Wir betrachten nun die Zufallsvariable

$$T_n^+ \colon \Omega \to \mathfrak{D}, \qquad T_n^+(\omega) := \sup_{x\in[0,1]} U_n(x,\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega. \tag{2.16}$$

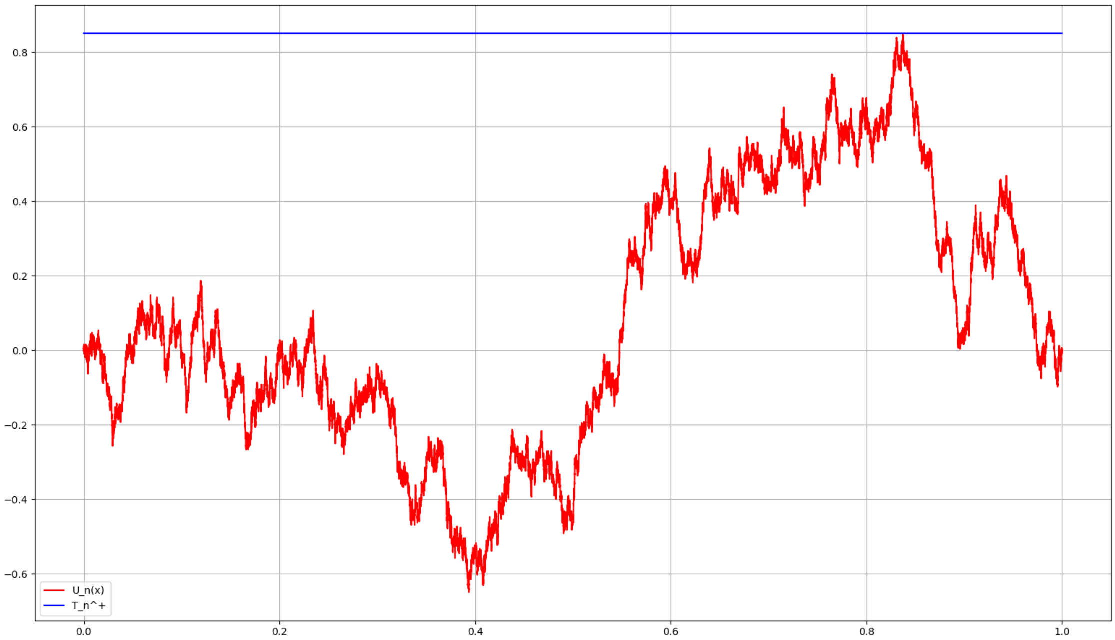

Abbildung 2.8.: Veranschaulichung von T_n^+ im Verhältnis zu U_n

Mit dieser lautet unser Test nun

$$H_0 \text{ verwerfen} \iff T_n^+ \overset{(2.2)}{=} \sqrt{n} \cdot \sup_{x \in [0,1]} \left(F_n(x) - F_0(x)\right) > c_\alpha^+. \tag{2.17}$$

Analog zu Korollar 2.2.5 gilt auch hier folgendes Resultat:

Lemma 2.3.2

$$T_n^+ \overset{\text{Def}}{=} \sup_{x \in [0,1]} U_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \sup_{x \in [0,1]} \mathfrak{B}_0(x) =: M^+$$

Beweis. Folgt direkt aus Gleichung (2.15) und dem Continuous Mapping Theorem (CMT) A.3.4(ii), denn M ist wegen Lemma 2.2.12 stetig auf $\mathfrak{C}$ und $\mathcal{B}(\mathfrak{D})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Somit gilt:

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega : \underbrace{\mathfrak{B}_0(\cdot, \omega)}_{\text{stetig wegen } 1.2.5(i)} \in \{f \in D : M \text{ ist } \underline{\text{nicht}} \text{ stetig in } f\}\Big\}\Big) \overset{2.2.12}{=} \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

□

Satz 2.3.3: Verteilungsfunktion von M^+

Die Verteilungsfunktion von M^+ ist

$$
\begin{aligned}
F_{M^+}(x) &\overset{\text{Def}}{=} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : M(\omega) \leq x\}) \\
&\overset{\text{Def}}{=} \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \sup_{x \in [0,1]} \mathfrak{B}_0(x, \omega) \leq x\right\}\right) \\
&= \begin{cases} 1 - \exp(-2 \cdot x^2), & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Offenbar ist F_{M^+} stetig auf $\mathbb{R}$.

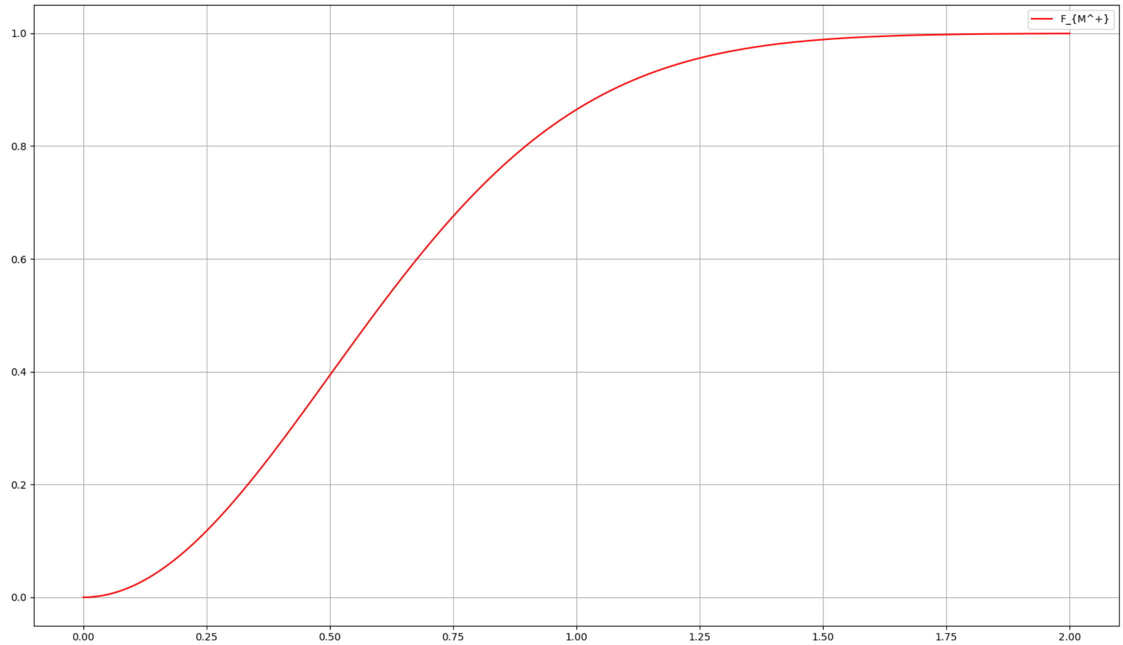

Abbildung 2.9.: Plot der Verteilungsfunktion F_{M^+}

Beweis. Siehe Shorack und Wellner 1986, *Empirical processes with applications to statistics*, ab Seite 34 Gleichung (11), [SW86]. □

Wir wählen

$$
c_\alpha^+ := F_{M^+}^{-1}(1 - \alpha) = \sqrt{-\frac{1}{2} \cdot \log(\alpha)} \qquad \forall \alpha \in (0, 1). \tag{2.18}
$$

Eine Quantiltabelle der Verteilungsfunktion F_{M^+} befindet sich im Anhang.

Satz 2.3.4

Der einseitige Kolmogorov-Smirnov-Test für das Testproblem (ETP)

$$H_0 \text{ verwerfen} \iff T_n^+ \overset{(2.2)}{=} \sqrt{n} \cdot \sup_{x \in [0,1]} \left(F_n(x) - F_0(x)\right) > c_\alpha^+$$

ist ein asymptotischer Niveau-α-Test.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}\Big(\{\omega \in \Omega : H_0 \text{ verwerfen}\}\Big) &\overset{(2.17)}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}\Big(\{\omega \in \Omega : T_n^+ > c_\alpha^+\}\Big) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}\Big(\{\omega \in \Omega : T_n^+ \leq c_\alpha^+\}\Big) \\
&= 1 - F_{M^+}(c_\alpha^+) \\
&= 1 - F_{M^+}\Big(F_{M^+}^{-1}(1-\alpha)\Big) \\
&\overset{A.2.6+2.3.3}{=} 1 - (1-\alpha) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

□

2.3.2. Der einseitige V_n-Test

Mit der Teststatistik

$$V_n^+ := \sup_{t \in (0,1)} \frac{U_n(t)}{\sqrt{t \cdot (1-t)}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

aus Abschnitt 2.2.2 können wir direkt den **einseitigen V_n-Test** angeben:

$$H_0 \text{ verwerfen} :\iff V_n^+ > d_{n,\alpha}^+ \tag{2.19}$$

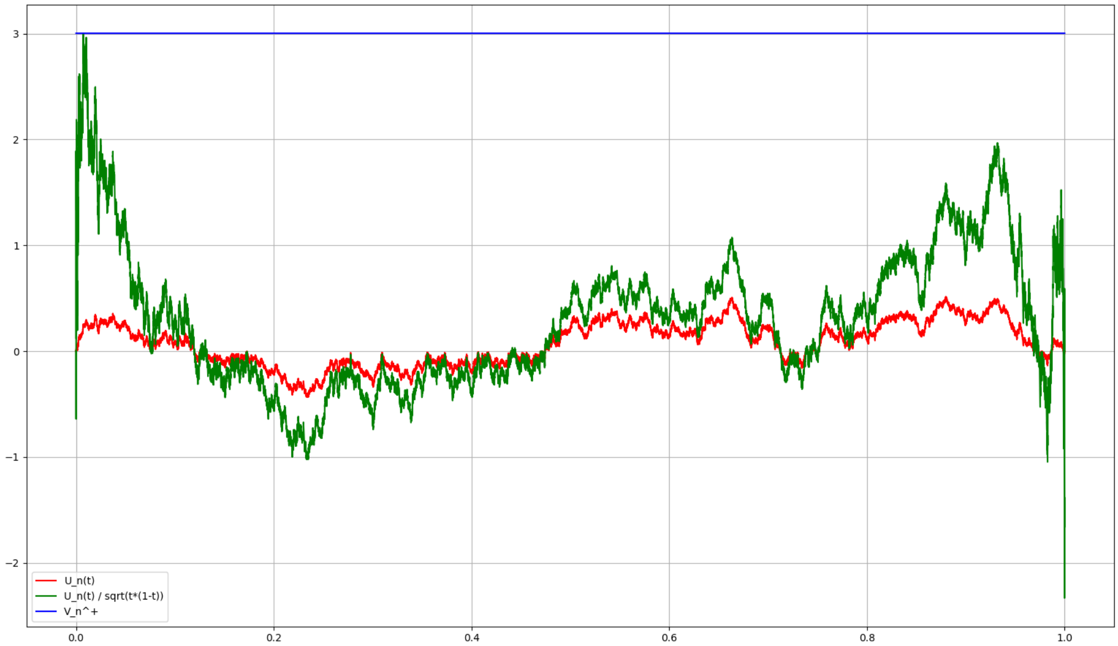

Abbildung 2.10.: Veranschaulichung von V_n^+ im Verhältnis zu U_n und des Einflusses der Gewichtsfunktion $t \mapsto \sqrt{t \cdot (1-t)}$ auf U_n

Die Wahl von $d_{n,\alpha}^+$ liegt dank Satz 2.2.9 auf der Hand:

$$d_{n,\alpha}^+ := \frac{D_n - \log(-\log(1-\alpha))}{A_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.20}$$

Hierbei sind A_n und D_n wieder wie in Satz 2.2.9 definiert.
Somit können wir schließen:

Satz 2.3.5

Der einseitige V_n-Test für das einseitige Testproblem (ETP) lautet

$$H_0 \text{ verwerfen} \iff V_n^+ = \sup_{x \in (0,1)} \frac{\sqrt{n} \cdot (F_n(x) - F_0(x))}{\sqrt{x \cdot (1-x)}} > d_{n,\alpha}^+$$

und ist ein asymptotischer Niveau-α-Test.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(V_n^+ > d_{n,\alpha}^+) &= \lim_{n\to\infty} 1 - \mathbb{P}(V_n^+ \le d_{n,\alpha}^+) \\
&\overset{\text{Def}}{=} 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(V_n^+ \le \frac{D_n - \log(-\log(1-\alpha))}{A_n}\right) \\
&\overset{2.2.9(\text{ii})}{=} 1 - \exp(-\exp(-(-\log(-\log(1-\alpha))))) \\
&= 1 - (1-\alpha) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

□

2.3.3. Der einseitige L_n-Test

Wir erinnern uns an die Abbildung

$$\psi\colon \mathfrak{D} \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \psi(f) := \min \mathfrak{S}(f),$$

welche jeder Abbildung in $\mathfrak{D}$ ihre kleinste Supremalstelle zuordnet. Setze

$$\tau_n^+ := \psi(U_n).$$

Damit betrachten wir die Teststatistik

$$L_n^+ := \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]} U_n(t)}{\sqrt{\tau_n^+ \cdot \left(1 - \tau_n^+\right)}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

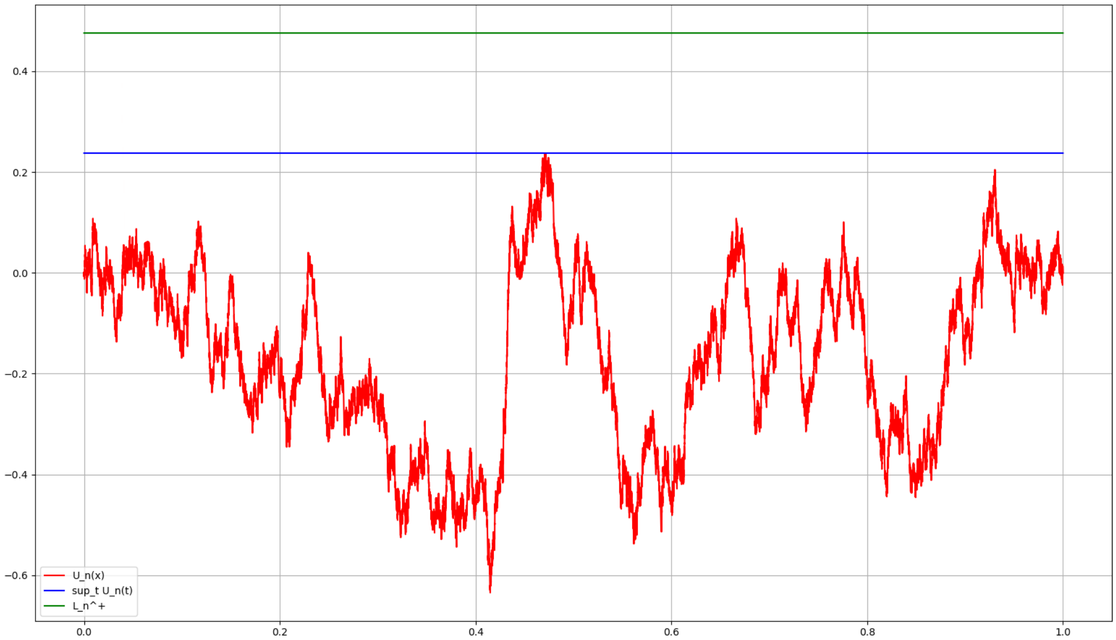

Abbildung 2.11.: Veranschaulichung von L_n^+ im Verhältnis zu $U_n(t)$ und $\sup_t U_n(t)$

Analog zu Korollar 2.2.14 gilt im einseitigen Fall das folgende Resultat:

Satz 2.3.6: Ferger, 2018

$$L_n^+ \overset{\text{Def}}{=} \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]} U_n(t)}{\sqrt{\tau_n^+ \cdot \left(1-\tau_n^+\right)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]} \mathfrak{B}_0(t)}{\sqrt{\psi(\mathfrak{B}_0)\cdot(1-\psi(\mathfrak{B}_0))}} =: R^+$$

Beweis. Der Beweis läuft Analog zum Beweis von Korollar 2.2.14. Wir nutzen dieselbe Abbildung $h\colon R\times[0,1]\to\mathbb{R}$ aus dem Beweis. Für diese haben wir bereits Wohldefiniertheit und Stetigkeit gezeigt. Aus dem Satz von Donsker 1.3.3 und der Tatsache, dass das Supremum wegen Lemma 2.2.12 stetig ist, folgt aus dem CMT A.3.4(ii)

$$\sup_{t\in[0,1]} U_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \sup_{t\in[0,1]} \mathfrak{B}_0(t). \tag{$*$}$$

Analog erhalten wir mit dem Satz von Donsker 1.3.3, der Stetigkeit von ψ auf $\hat{\mathfrak{C}}$ sowie der $\mathcal{B}(\mathfrak{D})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-Messbarkeit von ψ (siehe beides Lemma 2.2.11) und dem CMT A.3.4(ii)

$$\tau_n^+ \overset{\text{Def}}{=} \psi(U_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \psi(\mathfrak{B}_0). \tag{$**$}$$

Somit können wir das CMT A.3.4(ii) anwenden und erhalten insgesamt

$$L_n^+ \overset{\text{Def}}{=} h\left(\sup_{t\in[0,1]} U_n(t), \tau_n^+\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} h\left(\sup_{t\in[0,1]} \mathfrak{B}_0(t), \psi(\mathfrak{B}_0)\right) \overset{\text{Def}}{=} \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]} \mathfrak{B}_0(t)}{\sqrt{\psi(\mathfrak{B}_0)\cdot(1-\psi(\mathfrak{B}_0))}}.$$

□

Der **einseitige L_n-Test** ist

$$H_0 \text{ verwerfen} :\Longleftrightarrow L_n^+ \overset{\text{Def}}{=} \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]} U_n(t)}{\sqrt{\tau_n^+\cdot\left(1-\tau_n^+\right)}} > e_\alpha^+. \tag{2.21}$$

Mithilfe des folgenden Satzes lässt sich e_α für $\alpha \in (0,1)$ sehr leicht bestimmen:

Satz 2.3.7: Ferger, 2018

Die Dichte der Zufallsvariable $R+$ aus Satz 2.3.6 ist

$$f_{R^+}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot u^2\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot u^2\right) \qquad \forall u\in\mathbb{R}$$

und ihre Verteilungsfunktion ist

$$F_{R+}(x) = 2\cdot\Phi(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot x\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot x^2\right) - 1 \qquad \forall x\geq 0.$$

Hierbei ist

$$\Phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,\mathrm{d}t \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung.

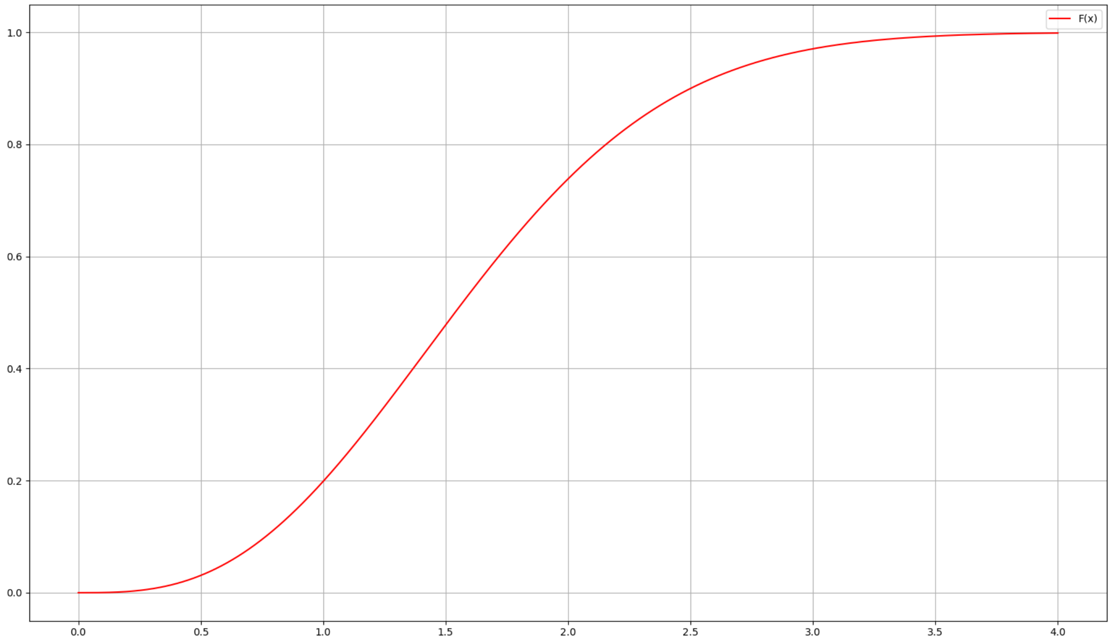

Abbildung 2.12.: Plot der Verteilungsfunktion F_{R^+}

Beweis. Siehe Ferger, *On the supremum of a Brownian bridge standardized by its maximizing point with applications to statistics* 2018, Seite 64, Theorem 1.1, [Fer18]. □

Wir setzen also

$$e_\alpha^+ := F_{R^+}^{-1}(1-\alpha) \qquad \forall \alpha \in (0,1).$$

Eine Quantiltabelle der Verteilungsfunktion F_{R^+} befindet sich im Anhang.

Satz 2.3.8

Der einseitige L_n-Test für das Testproblem (ETP)

$$H_0 \text{ verwerfen } \iff L_n^+ \overset{\text{Def}}{=} \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]} U_n(t)}{\sqrt{\tau_n^+ \cdot \left(1-\tau_n^+\right)}} > e_\alpha^+$$

ist ein asymptotischer Niveau-α-Test.

Beweis. Mithilfe von Lemma A.3.3 folgt aus Korollar 2.3.6

$$\lim_{n\to\infty} F_{L_n^+}(x) \overset{\text{Def}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\{\omega\in\Omega : L_n^+(\omega) \le x\}\Big) \overset{A.3.3}{=} F_{R^+}(x) \qquad \forall x \in D_{F_{R^+}}. \qquad (*)$$

Hierbei ist $D_{F_{R^+}} = \mathbb{R}$ die Menge der Stetigkeitsstellen der Verteilungsfunktion von R, denn die Verteilungsfunktion F_{R^+} ist sogar absolut-stetig, da F_{R^+} eine Dichte hat gemäß Satz 2.3.7. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}\Big(\{\omega \in \Omega : H_0 \text{ verwerfen}\}\Big) &\overset{\text{Def}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}\Big(\{\omega \in \Omega : L_n(\omega) > e^+_{n,\alpha}\}\Big) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{H_0}\Big(\{\omega \in \Omega : L^+_n(\omega) \leq e_{n,\alpha}\}\Big) \\
&\overset{(*)}{=} 1 - F_{R^+}(e_\alpha) \\
&\overset{\text{Def}}{=} 1 - F_{R^+}\Big(F^{-1}_{R^+}(1-\alpha)\Big) \\
&\overset{A.2.6+2.3.7}{=} 1 - (1-\alpha) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

□

3. Vergleich der drei Tests für Gleichverteilung

Jetzt haben wir für unser Testproblem

$$H_0 \colon F = F_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 \colon F \neq F_0 \tag{3.1}$$

aus Kapitel 2 drei verschiedene asymptotische Niveau-α-Tests gesehen. Die Frage, die sich nun in der Praxis stellt, lautet: „Welcher Test ist am besten geeignet?“ Um diese Frage zu beantworten, müssen wir zunächst klären, was „gut geeignet“ in diesem Kontext bedeutet. Dafür führen wir später den Begriff der *Gütefunktion* ein. Zuvor schauen wir uns noch an, wie wir Zufallswerte erzeugen können, die einer vorgegebenen Verteilung folgen. Dies brauchen wir im Folgenden für die Monte-Carlo-Simulationen.

3.1. Erzeugung von Zufallswerten mit der Inversionsmethode

Um Zufallszahlen zu erzeugen, welche einer beliebigen festgelegten Wahrscheinlichkeitsverteilung gehorchen, benutzen wir die sogenannte Inversionsmethode:

Satz 3.1.1: Inversionsmthode

Sei $U \colon \Omega \to [0,1]$ eine reelle Zufallsvariable mit $U \sim \mathcal{U}[0,1]$. Sei $F \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion und F^{-1} die zugehörige Quantilfunktion von F. Dann ist

$$X \colon \Omega \to \mathbb{R}, \qquad X(\omega) := F^{-1}\big(U(\omega)\big) \qquad \forall \omega \in \Omega$$

eine Zufallsvariable mit $X \sim F$.

Beweis. Sei F_U die Verteilungsfunktion von $\mathcal{U}[0,1]$, also $F_U \equiv \mathrm{id}_{[0,1]}$. Wir zeigen zunächst die Aussage

$$y \leq F(x) \iff F^{-1}(y) \leq x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in (0,1). \tag{$*$}$$

Zeige „$\Longrightarrow$“:
Dies folgt direkt aus der Definition des Infimums via

$$y \leq F(x) \implies x \in \{u \in \mathbb{R} : F(u) \geq x\} \implies F^{-1} \overset{\text{Def}}{=} \inf\{u \in \mathbb{R} : F(u) \geq x\} \leq x.$$

Zeige „$\Longleftarrow$“:

Folgt aus Lemma A.2.6 wegen

$$\begin{aligned} F^{-1}(y) \leq x &\overset{F \text{ monoton wachsend}}{\Longrightarrow} F\Big(F^{-1}(y)\Big) \leq F(x) \\ &\overset{\text{A.2.6}}{\Longrightarrow} y \leq F\Big(F^{-1}(y)\Big) \leq F(x) \\ &\Longrightarrow y \leq F(x). \end{aligned}$$

Mit dieser Zwischenbehauptung erhalten wir

$$\begin{aligned} F(x) &\overset{F_U = \text{id}}{=} F_U(F(x)) \\ &\overset{\text{Def}}{=} \mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega : U(\omega) \leq F(x)\}\Big) \\ &\overset{(*)}{=} \mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega : F^{-1}(U(\omega)) \leq x\}\Big) \\ &\overset{\text{Def}}{=} \mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}\Big), \end{aligned}$$

woraus $X \sim F$ folgt. □

Um Werte x der Zufallsvariablen X mit der Verteilungsfunktion F durch die Inversionsmethode zu erzeugen, sind die zwei Schritte vorzunehmen:

(1) Eine gleichverteilte Zufallszahl $u = U(\omega_*) \in [0, 1]$ generieren.

(2) Den Wert $x \in \mathbb{R}$ mit $x = F^{-1}(u)$ berechnen.

Es ist klar, dass man mit der Inversionsmethode n unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ bekommt, wenn man diese jeweils aus n unabhängigen Zufallsvariablen $U_1, \ldots, U_n$ erzeugt.

3.2. Gütefunktionen

Wir interessieren uns für den **Fehler 1. Art**, also die Fehlentscheidung, dass unser Test die Nullhypothese verwirft, obwohl diese korrekt ist. Im Kontext unseres Testproblems (3.1) gibt uns der Fehler 1. Art die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Test die gegebenen Daten als nicht-gleichverteilt erkennt, obwohl diese gleichverteilt sind. Wir wollen also mithilfe der Inversionsmethode Zufallsdaten erzeugen, die nur „fast“ gleichverteilt auf $[0, 1]$ sind. Also Zufallswerte zwischen 0 und 1, die nicht exakt der Gleichverteilung

$$F_0 \colon [0, 1] \to [0, 1], \qquad x \mapsto x$$

gehorchen, sondern eher einer leicht „gestörten“ Verteilungsfunktion wie zum Beispiel der Verteilungsfunktion

$$F_{\varepsilon,p} \colon [0, 1] \to [0, 1], \qquad x \mapsto \begin{cases} \Big(1 + \frac{\varepsilon}{p}\Big) \cdot x, & \text{falls } 0 \leq x \leq p \\ \frac{1-p-\varepsilon}{1-p} \cdot (x - p) + p + \varepsilon, & \text{falls } p \leq x \leq 1 \end{cases},$$

wobei $p \in [0, 1]$ und $\varepsilon \in [-p, 1-p]$ sind.

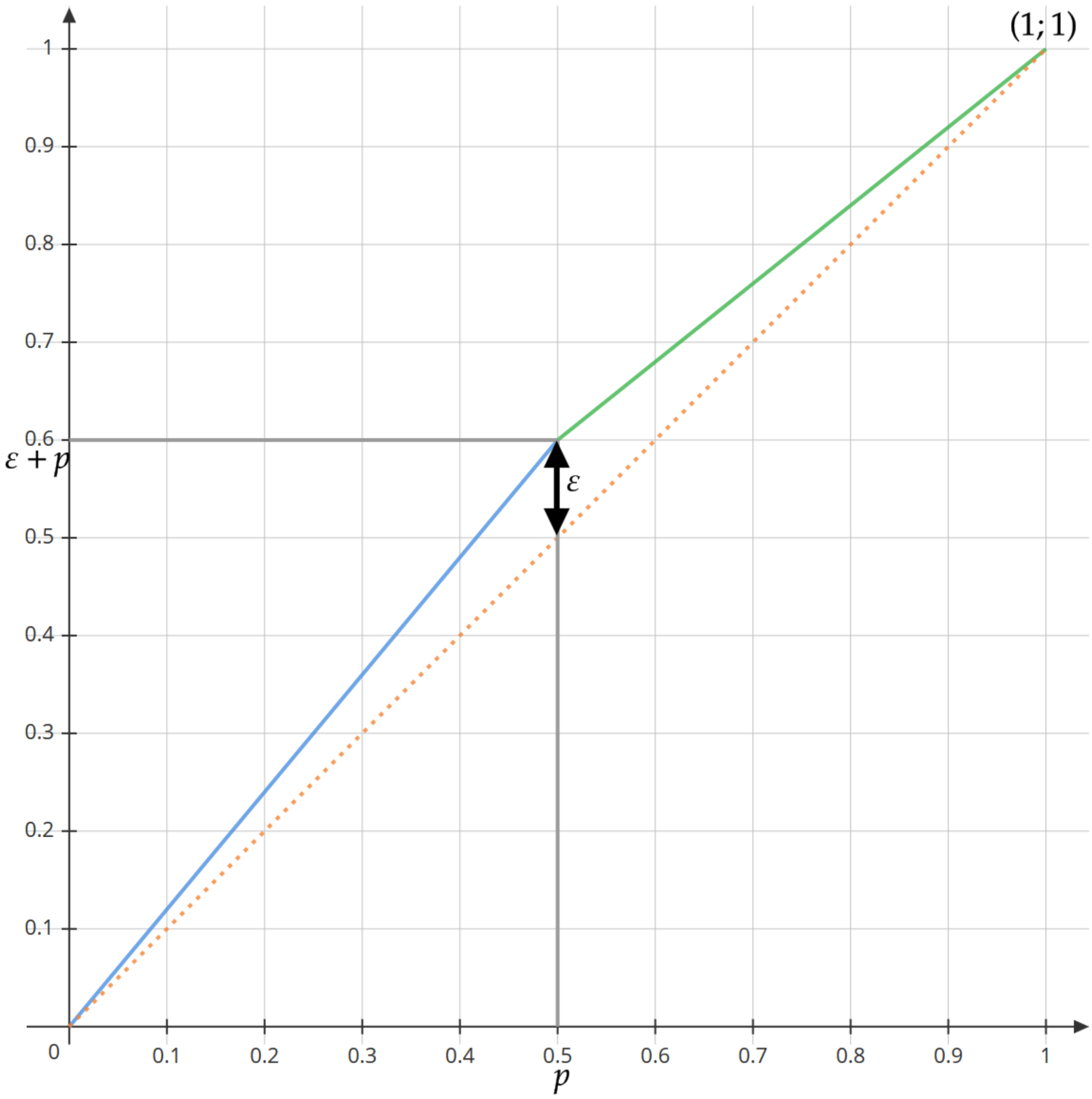

Abbildung 3.1.: Plot von $F_{\varepsilon,p}$ für $p = \frac{1}{2}$ und $\varepsilon = 0,1$

Es hat sich im Laufe der Simulation als zweckmäßig erwiesen, diese Verteilungsfunktion mit einem weiteren Parameter $\delta \in (0,1]$ zu parametrisieren:

$$F_{\varepsilon,\delta,p} \colon [0,1] \to [0,1],$$
$$x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq p - \delta \vee 0 \text{ oder } x \geq (p+\delta) \wedge 1 \\ \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta \wedge p}\right) \cdot (x-p) + p + \varepsilon, & \text{falls } (p-\delta) \vee 0 \leq x \leq p \\ \left(1 - \frac{\varepsilon}{\delta \wedge (1-p)}\right) \cdot (x-p) + p + \varepsilon, & \text{falls } p \leq x \leq (p+\delta) \wedge 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

für $p \in [0,1]$, $\varepsilon \in [-p, 1-p]$.

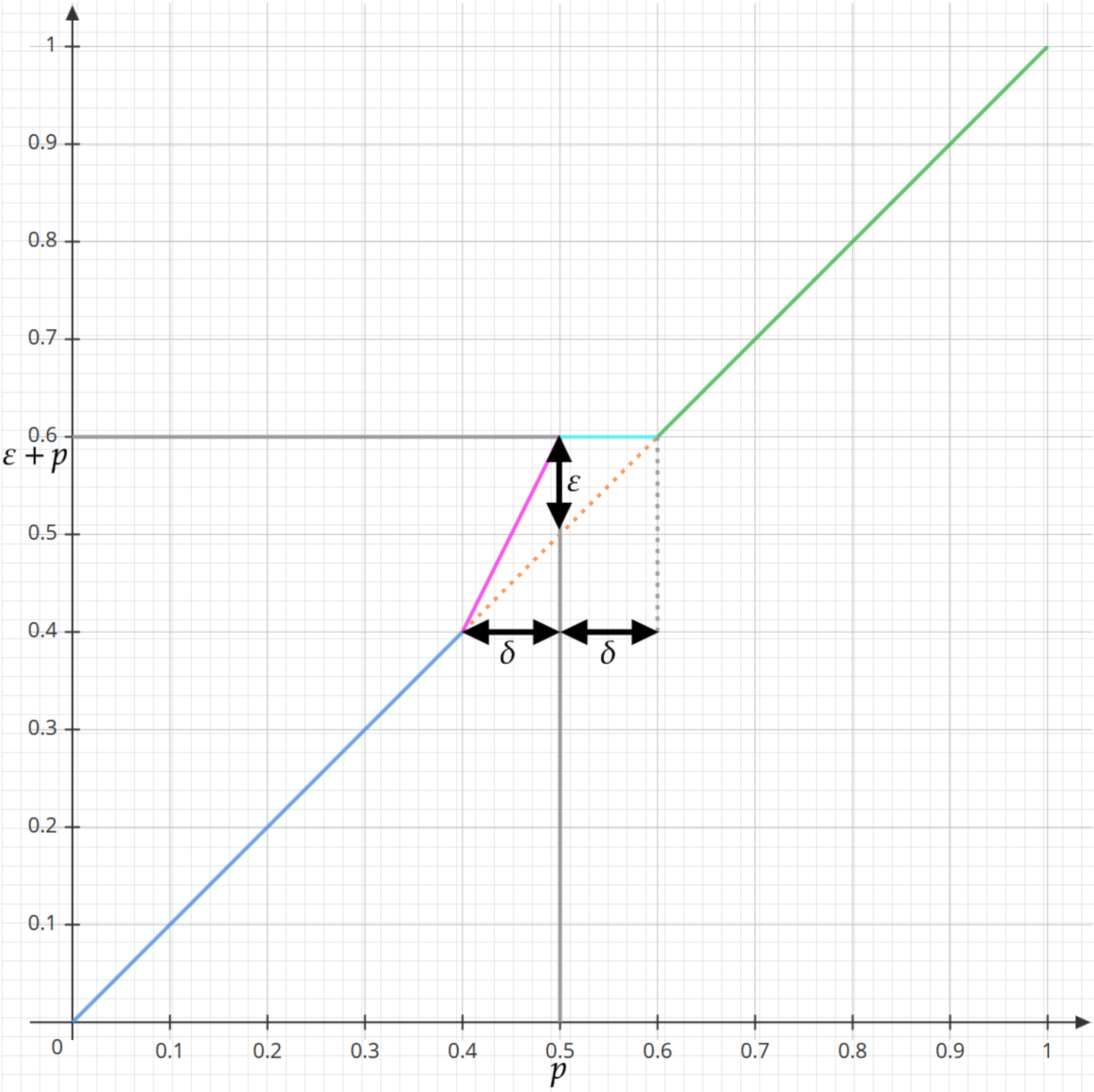

Abbildung 3.2.: Plot von $F_{\delta,\varepsilon,p}$ für $p = \frac{1}{2}$ und $\delta = \varepsilon = 0,1$

Lemma 3.2.1 (Eigenschaften der gestörten Verteilungsfunktion) Es gilt:

(i) $F_{1,\varepsilon,p} \equiv F_{\varepsilon,p}$

(ii) $F_{\delta,0,p} \equiv F_{0,p} \equiv F_0 \equiv \mathrm{id}_{[0,1]}$

(iii) $F_{\delta,\varepsilon,p}$ ist genau dann streng monoton wachsend, wenn $\delta > |\varepsilon|$.

(iv) Die Funktion $F_{\delta,\varepsilon,p}$ ist invertierbar, falls $\delta > |\varepsilon|$ und $\varepsilon \in [-p \vee -(1-p), p \wedge (1-p)]$.

In diesem Fall ist die Inverse gegeben durch

$$F_{\delta,\varepsilon,p}^{-1} \colon [0,1] \to [0,1],$$
$$x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq p-\delta \vee 0 \text{ oder } x \geq p+\delta \wedge 1 \\ \frac{x-p-\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon}{\delta \wedge p}} + p, & \text{falls } p-\delta \vee 0 \leq x \leq p+\varepsilon \\ \frac{x-p-\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{\delta \wedge (1-p)}} + p & \text{falls } p+\varepsilon \leq x \leq p+\delta \wedge 1 \end{cases} . \tag{3.3}$$

Beweis. Zeige (i):

$$F_{1,\varepsilon,p} \overset{\text{Def}}{=} \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \{0;1\} \\ \frac{p+\varepsilon}{p} \cdot (x-p) + p + \varepsilon, & \text{falls } 0 \leq x \leq p \\ \frac{1-p-\varepsilon}{1-p} \cdot (x-p) + p + \varepsilon, & \text{falls } p \leq x \leq 1 \end{cases} \overset{\text{Def}}{=} F_{\varepsilon,p},$$

denn

$$\frac{p+\varepsilon}{p} \cdot (x-p) + p + \varepsilon = \left(1 + \frac{\varepsilon}{p}\right) \cdot x - (p+\varepsilon) + p + \varepsilon = \left(1 + \frac{\varepsilon}{p}\right) \cdot x.$$

Zeige (ii):
Das folgt direkt aus der Definition.

Zeige (iii):
Mithilfe der Skizze 3.2 und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $\varepsilon < 0$ zulässig ist, sieht man, dass $F_{\delta,\varepsilon,p}$ genau dann streng monoton wachsend ist, wenn

$$p - \delta < p + \varepsilon < p + \delta.$$

Dies ist äquivalent zu $\delta > |\varepsilon|$.

Zeige (iv):
Da $\delta > |\varepsilon|$, ist $F_{\delta,\varepsilon,p}$ wegen (iii) streng monoton wachsend und damit bijektiv. Damit die Inverse wohldefiniert ist, muss zusätzlich zu $\varepsilon \in [-p, 1-p]$ noch $-\varepsilon \in [-p, 1-p]$ gelten. Dies wird durch die Bedingung $\varepsilon \in \big[-p \vee -(1-p), p \wedge 1-p\big]$ sichergestellt, denn es gilt

$$[-p, 1-p] \cap \big[-(1-p), p\big] = \big[-p \vee -(1-p), p \wedge 1-p\big].$$

Die Gleichung für die Inverse erhält man durch Umstellen der einzelnen Abschnitte der stückweise definierten Funktion nach x und unter Ersetzen der alten Grenze p durch $p+\varepsilon$. □

Definition 3.2.2 (Gütefunktion)

Die **Gütefunktion** eines Hypothesentests ist definiert als

$$\mathscr{G} \colon \mathscr{F} \to [0,1], \qquad F \mapsto \mathbb{P}_F(H_0 \text{ verwerfen}),$$

wobei $\mathscr{F}$ die Menge aller Verteilungsfunktionen auf $[0,1]$ bezeichnet. Da wir in den Simulationen nicht alle möglichen Verteilungsfunktionen prüfen können, beschränken wir uns auf den Raum

$$\mathscr{F}_{\delta,\varepsilon,p} := \Big\{ F_{\delta,\varepsilon,p} : \delta \in (0,1], p \in [0,1], \varepsilon \in [-p, 1-p] \Big\} \subseteq \mathscr{F}.$$

Anstelle von

$$\mathscr{G} \colon \mathscr{F}_{\delta,\varepsilon,p} \to [0,1], \qquad F_{\delta,\varepsilon,p} \mapsto \mathbb{P}_{F_{\delta,\varepsilon,p}}(H_0 \text{ verwerfen})$$

betrachten wir jetzt eine konkretere Gütefunktion

$$\hat{\mathscr{G}} : (\delta, \varepsilon, p) \mapsto \mathbb{P}_{F_{\delta,\varepsilon,p}}(H_0 \text{ verwerfen}).$$

Somit ist, in Worten formuliert,

- $\hat{\mathscr{G}}(\delta, 0, p) = \mathscr{G}(F_0)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test die Nullhypothese H_0 verwirft, obwohl $F = F_0$ gilt und
- $\hat{\mathscr{G}}(\delta, \varepsilon, p) = \mathscr{G}(F_{\delta,\varepsilon,p})$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test die Nullhypothese H_0 korrekterweise verwirft (mit $\varepsilon > 0$).

Es bleibt die Frage, wie wir $\hat{\mathscr{G}}$ für konkrete Werte von δ, ε, p berechnen können. Exakt ist das nicht möglich, aber mithilfe von Monte-Carlo-Simulationen können wir die Werte sehr gut annähern.

3.3. Monte-Carlo-Simulationen

Um die Gütefunktionen der drei Tests anzunähern, führen wir eine Monte-Carlo-Simulation wie folgt durch:

(1) Wir wählen Simulationsparameter (für eine Erklärung der Defintionsbereiche, siehe Lemma 3.2.1):
  - $m \in \mathbb{N}$: die Anzahl der Monte-Carlo-Iterationen
  - $n \in \mathbb{N}$: die Anzahl der Zufallsdaten pro Monte-Carlo-Iteration
  - $\alpha \in (0,1)$: das Signifikanzniveau, meist $\alpha = 0{,}1$
  - $p \in [0,1]$: der x-Wert, an welchen die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung gestört wird
  - $\varepsilon_{\max} \in \big[-p \vee -(1-p), p \wedge (1-p)\big]$: der maximale Störwert, mit dem die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung gestört wird.

- $\delta > |\varepsilon_{\max}|$: Breite der Störung

(2) Sei $F_{\delta,\varepsilon,p}$ die gestörte Verteilungsfunktion für jedes $\varepsilon \in [0, \varepsilon_{\max}]$ (siehe (3.2)). Wir berechnen mit der Inversionsmethode aus Abschnitt 3.1 unter Benutzung der Inversen $F^{-1}_{\delta,\varepsilon,p}$ (siehe (3.3)) n unabhängige Zufallsgröße $X_1, \dots, X_n$, die nach $F_{\delta,\varepsilon,p}$ verteilt sind.

(3) Wir wenden die drei Test (2.7), (2.8) und (2.11) auf die erzeugten Daten $X_1, \dots, X_n$ an und zählen mit, bei wie vielen der m Monte-Carlo-Iterationen der jeweilige Test die Nullhypothese H_0 verwirft.

(4) Wir wiederholen Schritt (2) und (3) m mal und das für jedes $\varepsilon \in [0, \varepsilon_{\max}]$ unabhängig voneinander. Damit erhalten wir für jeden Test die Zahl

$$G_{\delta,\varepsilon,p} := \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{\{H_0 \text{ verwerfen}\}} \in [0,1],$$

welche aufgrund des starken Gesetzes der Großen Zahlen von Etemadi A.1.7 eine gute Näherung der Gütefunktion $\mathscr{G}(\delta, \varepsilon, p)$ für großes $m \in \mathbb{N}$ ist, denn:

$$\begin{aligned} G_{\delta,\varepsilon,p} \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{\{H_0 \text{ verwerfen}\}} \xrightarrow[m\to\infty]{\text{A.1.7}} \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{H_0 \text{ verwerfen}\}}\Big] &= \mathbb{P}_{F_{\delta,\varepsilon,p}}(H_0 \text{ verwerfen}) \\ &\overset{\text{Def}}{=} \mathscr{G}(\delta, \varepsilon, p) \end{aligned}$$

Mit dieser konkreten Monte-Carlo-Simulation erhält man am Ende für jeden der drei Tests eine Abbildung

$$(\delta, \varepsilon, p) \mapsto G_{\delta,\varepsilon,p} \approx \mathscr{G}(\delta, \varepsilon, p).$$

Die Simulationsergebnisse in Abschnitt 3.5 zeigen Plots der Abbildung $\varepsilon \mapsto G_{\delta,\varepsilon,p}$ für ausgewählte Werte von $\delta \in [0,1]$ und $p \in [0,1]$. Doch zunächst werfen wir einen kurzen Blick auf die Simulationssoftware, die ich geschrieben habe, um die Monte-Carlo-Situation durchzuführen.

3.4. Die Simulationssoftware im Überblick

Ich habe mich dazu entschieden, den Quellcode in englischer Sprache zu verfassen, d.h. alle Dateinamen, Klassennamen, Variablennamen und Kommentare sind englisch. Eine Ausnahme habe ich bei der Datei `main.py` gemacht, da diese der Einstiegspunkt in das Programm ist, welche die Monte-Carlo-Simulation startet. Die Software habe ich mit Python (Version 3.8.2) erstellt und sie kann hier heruntergeladen werden:
`https://github.com/LostInDarkMath/Hypothesentests`
Ich möchte kurz einen groben Überblick über die einzelnen Komponenten geben. Für ausführliche Details bitte direkt den Quellcode betrachten. Ich habe mich sehr bemüht, den Quellcode nach den state-of-the-art Software-Coding-Style-Richtlinien zu formatieren,

um die Lesbarkeit zu maximieren. Das Softwarepaket besteht aus folgenden Einzelbausteinen:

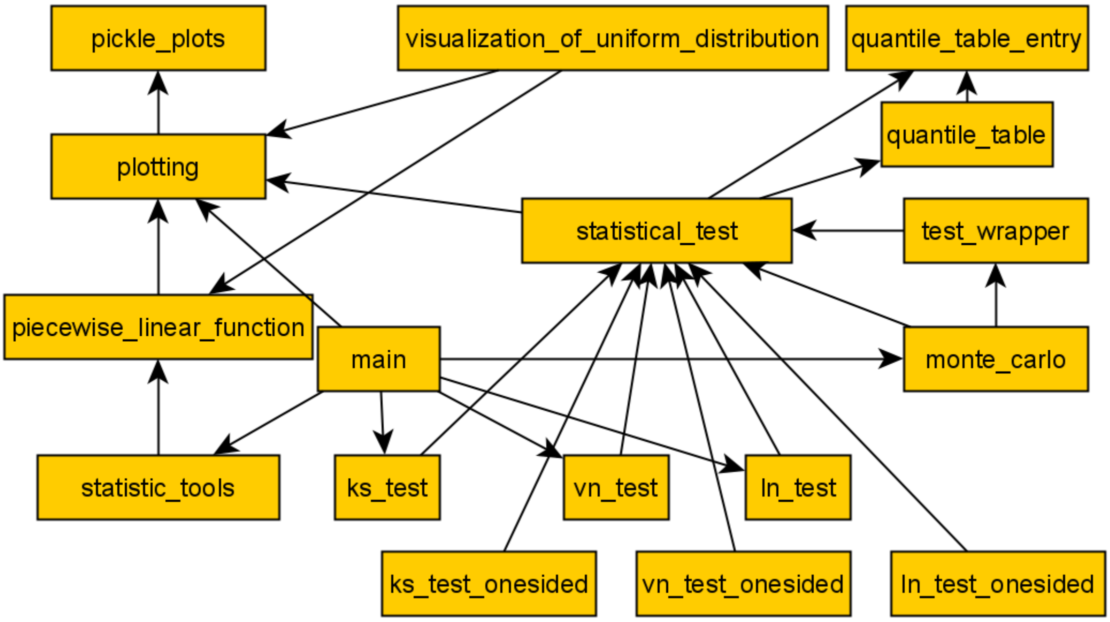

Abbildung 3.3.: Übersicht über die einzelnen Python-Quellcode-Dateien und wie sie zusammenhängen. $A \rightarrow B$ bedeutet hierbei „A benutzt die Komponente B“

Das Modul `pickle_plots.py` enthält Methoden, die Plots als Dateien auf der Festplatte speichern und wieder öffnen kann. Dabei wird ein Plot nicht als Bild, sondern als interaktives Element gespeichert, d.h. alle Funktionalitäten, die beim Anzeigen des Plots zur Verfügung stehen (wie z.B. Zoomen), stehen auch nach dem Speichern und Öffnen des Plots wieder zur Verfügung.
Die Datei `plotting.py` enthält die eine sehr mächtige `plot`-Funktion, die Abbildungen grafisch darstellen und / oder speichern kann. Die Klasse `PiecewiseLinearFunction` in der Datei `piecewise_linear_function.py` repräsentiert eine stückweise lineare Funktion, welche alleine durch eine Liste von Punkten im $[0, 1]^2$ wird automatisch erzeugt werden kann. Die Inverse wird automatisch erzeugt, denn die Klasse repräsentiert gestörte Verteilungsfunktionen 3.2. Das Modul `statistic_tools.py` enthält unter anderem die Inversionsmethode aus Abschnitt 3.1. Auch Funktionen um die empirische Verteilungsfunktion (siehe A.2.2) und den uniformen empirischen Prozess (siehe 1.3.2) zu berechnen, sind hierin enthalten. Die Dateien `quantile_table.py` und `quantile_table_entry.py` verwalten die Quantiltabellen (siehe Abschnitt A.6). Sie speichern die Tabellen ab und lesen sie ein, damit die Quantile nicht bei jedem Programmstart neu berechnet werden müssen. Die Dateien mit „test“ im Namen repräsentieren jeweils die Hypothesentests aus dem Theorieteil, wobei alle Tests von der Klasse `StatisticalTest` erben:

- `ks_test.py` ist der zweiseitige Kolmogorov-Smirnov-Test (2.7)
- `ks_test_onesided.py` ist der einseitige Kolmogorov-Smirnov-Test (2.14)
- `vn_test.py` ist der zweiseitige V_n-Test (2.8)
- `vn_test_onesided.py` ist der einseitige V_n-Test (2.19)
- `ln_test.py` ist der zweiseitige L_n-Test (2.11)
- `ln_test_onesided.py` ist der einseitige L_n-Test (2.21)

Die Klasse `StatisticalTest` erhält auch Methoden, um das Maximum von Funktionalen vom uniformen empirischen Prozess U_n numerisch zu berechnen. Zum Beispiel benötigt der Kolmogorov-Smirnov-Test

$$T_n \stackrel{\text{Def}}{=} \sup_{t \in [0,1]} |U_n(t)|$$

und der V_n-Test

$$V_n \stackrel{\text{Def}}{=} \sup_{t \in [0,1]} \frac{|U_n(t)|}{\sqrt{t \cdot (1-t)}}.$$

Da das Berechnen des Maximums von nichtdifferenzierbaren Funktionen numerisch sehr aufwendig ist, gibt es für diese Fälle auch analytische Resultate, wie z.B. Satz A.5.2 und A.5.3 im Abschnitt A.5. Letztlich kann man aus beiden Resultaten ableiten, dass das Maximum in beiden Fällen nur an den Stellen der Ordnungsstatistik $X_{i:n}$ auftreten kann, bzw. „direkt daneben“. So gilt z.B.:

$$\exists i \in \{1, \ldots, n\} : \max\Big\{U_n(X_{i:n}), U_n(X_{i:n}-)\Big\} = \sup_{t \in [0,1]} |U_n(t)| = T_n$$

Aus diesem Grund genügt es, einfach nur an den Stellen $X_{i:n}$ nach dem Maximum zu suchen. Selbst im Falle von V_n bei Division durch die Gewichtungsfunktion $t \mapsto \sqrt{t \mapsto (1-t)}$ ist das Maximum nur in den Stellen $X_{i:n}$ zu finden.
Die Datei `monte_carlo.py` enthält dann die eigentliche Monte-Carlo-Simulation. Zusätzlich zu den Parametern der Monte-Carlo-Simulation aus Abschnitt 3.3 gibt es hier numerisch bedingt noch einen weiteren Parameter `aufloesung`, der angibt, wie viele ε_i zwischen 0 und $\varepsilon_{\max}$ ausgewertet werden. Dabei werden die $0 = \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots < \varepsilon_{\texttt{aufloesung}} = \varepsilon_{\max}$ äquidistant gewählt.

3.5. Simulationsergebnisse

Nachdem wir uns in Abschnitt 3.3 angesehen haben, wie die Monte-Carlo-Simulation theoretisch abläuft, schauen wir uns nun die konkreten Ergebnisse der Simulation an. Die folgenden Simulationsergebnisse wurden mit diesen Parametern durchgeführt:

- $m = 10.000$
- $n = 200$
- $\alpha = 0,1$
- $\varepsilon_{\max} = 0,1$
- $\delta = 1$ oder $\delta = 0,11$
- $p = 0,1$ oder $p = 0.5$ oder $p = 0.89$
- `aufloesung` $= 30$

Wir interessieren uns also vor allem dafür, wie sich die Gütefunktion verhält, wenn wir p mittig, sehr klein oder sehr groß wählen. Außerdem wollen wir testen, wie groß der Einfluss des Paramaters δ ist, weshalb wir einmal mit sehr kleinem und einmal mit sehr großem δ testen. Wir führen also insgesamt 6 Simulationen durch, deren Ergebnisse und Verteilungsfunktionen $F_{\delta,\varepsilon,p}$ auf den folgenden sechs Seiten dargestellt werden.

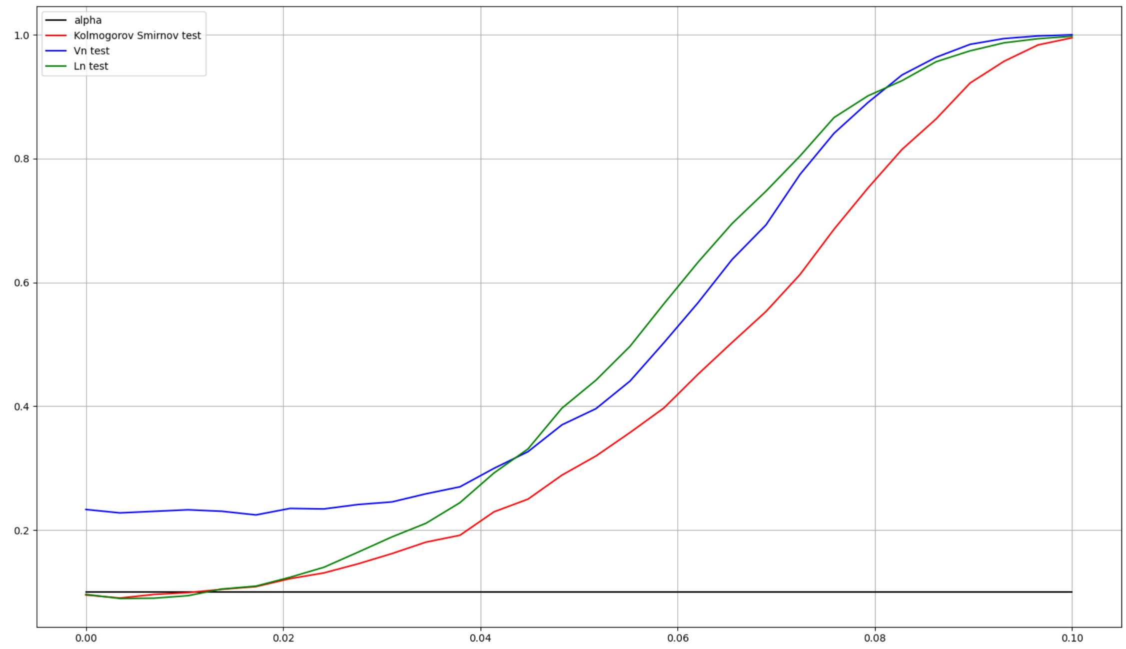

Abbildung 3.4.: Simulation mit $n = 200$; $m = 10.000$; $\alpha = 0,1$; $\varepsilon = 0,1$; $\delta = 1$ und $p = 0,89$ (zugrundeliegende Verteilungsfunktion siehe Abbildung 3.5)

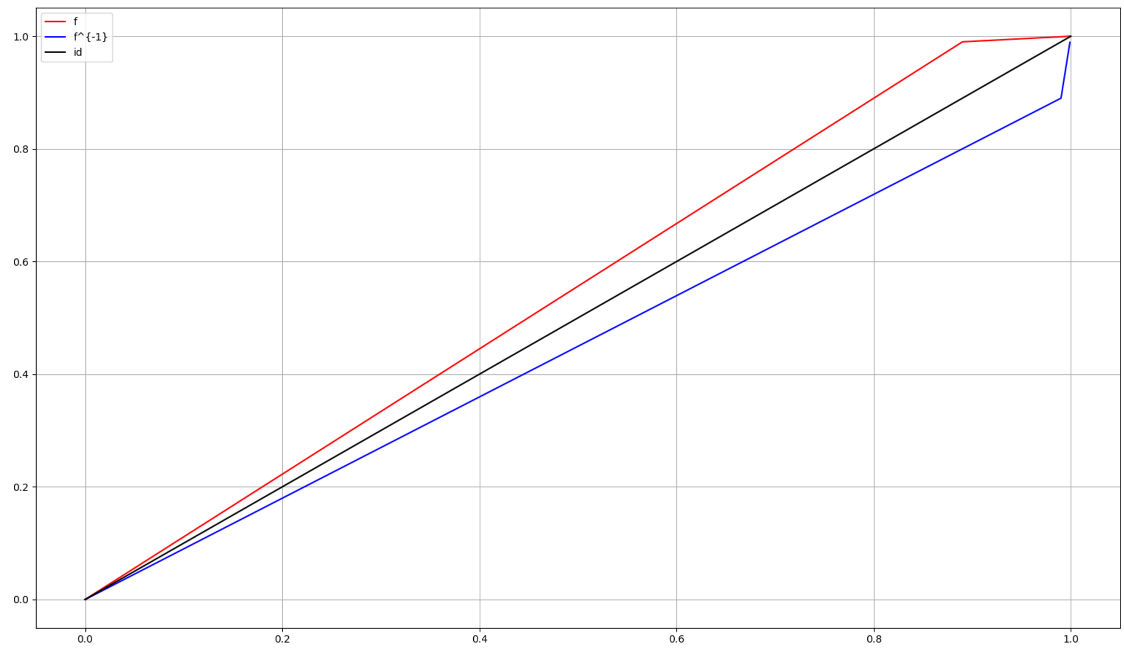

Abbildung 3.5.: Plot von $F_{1;\ 0,1;\ 0,89}$ und der zugehörigen Inversen

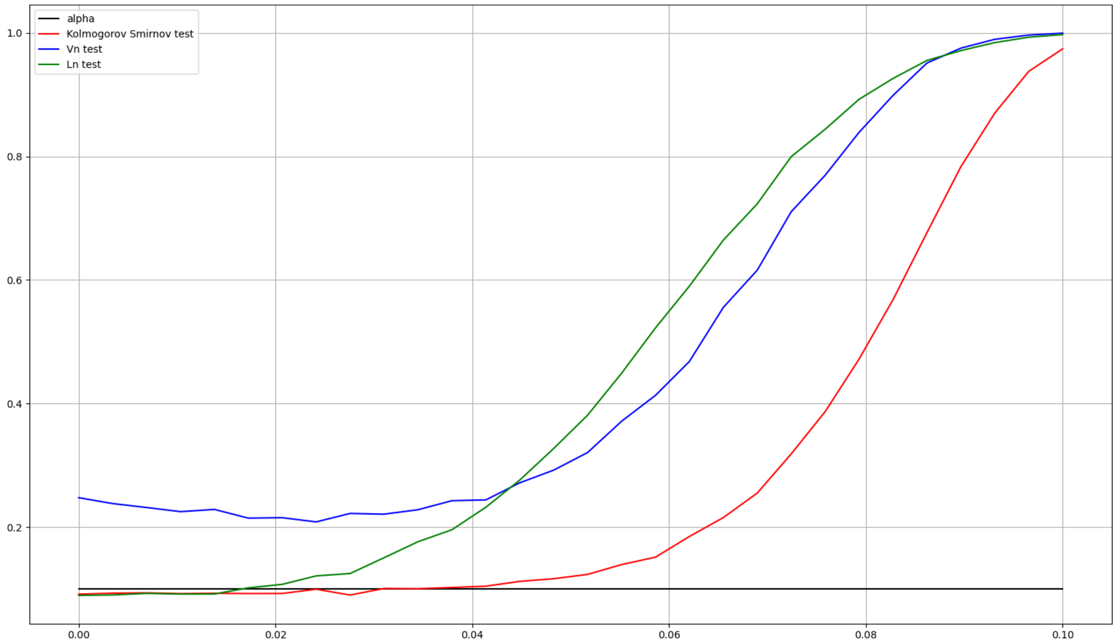

Abbildung 3.6.: Simulation mit $n = 200$; $m = 10.000$; $\alpha = 0,1$; $\varepsilon = 0,1$; $\delta = 0,11$ und $p = 0,89$ (zugrundeliegende Verteilungsfunktion siehe Abbildung 3.7)

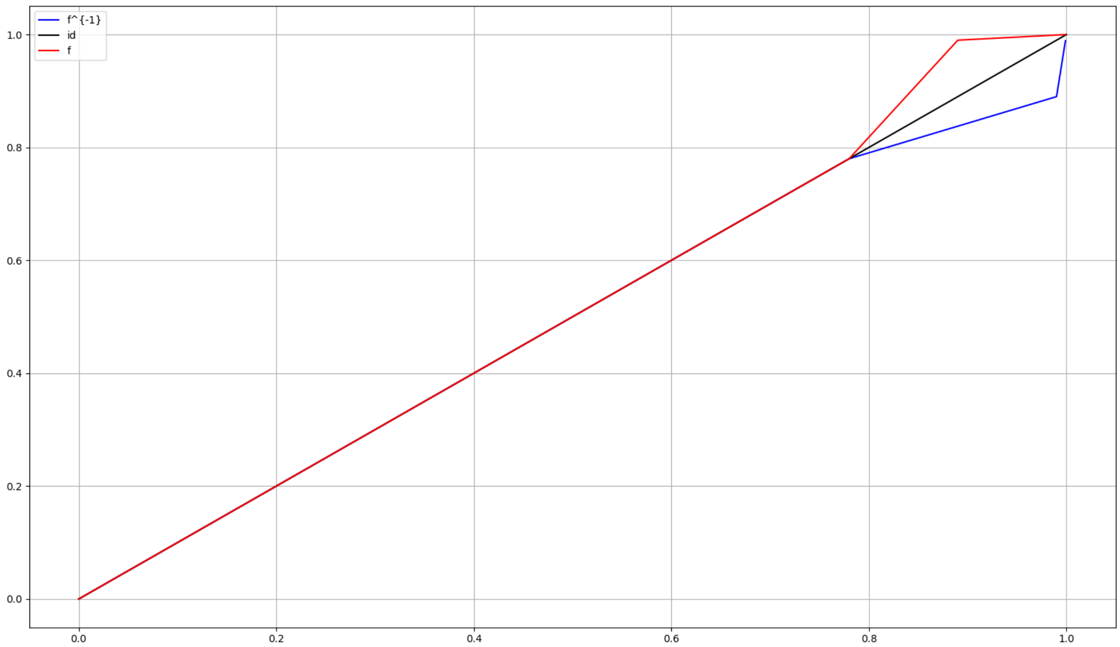

Abbildung 3.7.: Plot von $F_{0,11;\ 0,1;\ 0,89}$ und der zugehörigen Inversen

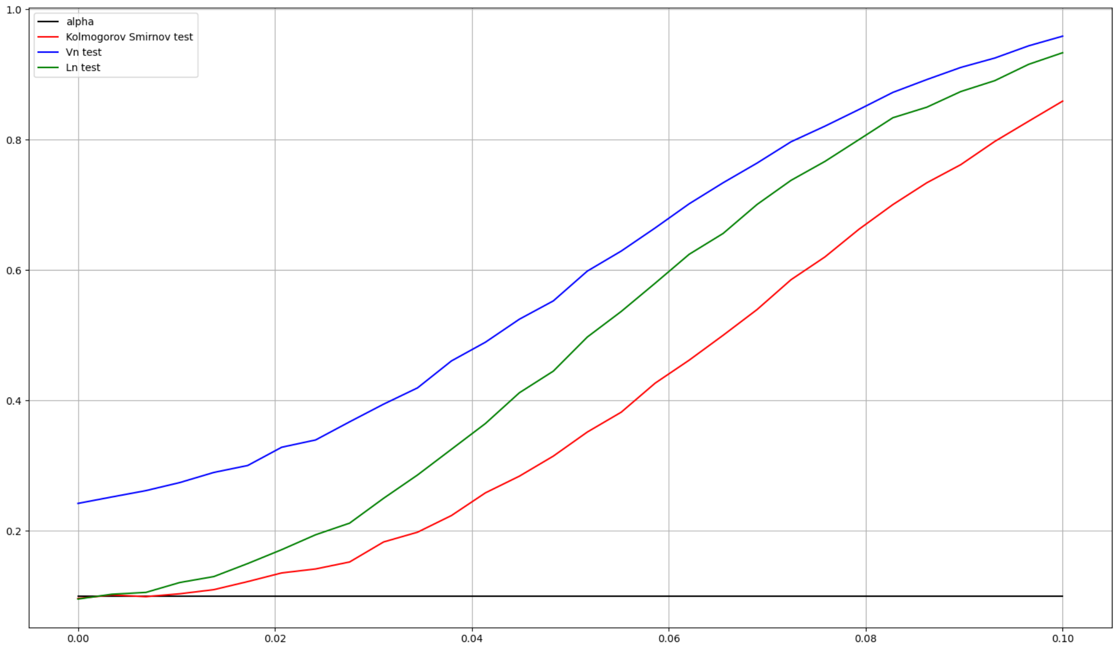

Abbildung 3.8.: Simulation mit $n = 200$; $m = 10.000$; $\alpha = 0,1$; $\varepsilon = 0,1$; $\delta = 1$ und $p = 0,1$ (zugrundeliegende Verteilungsfunktion siehe Abbildung 3.9)

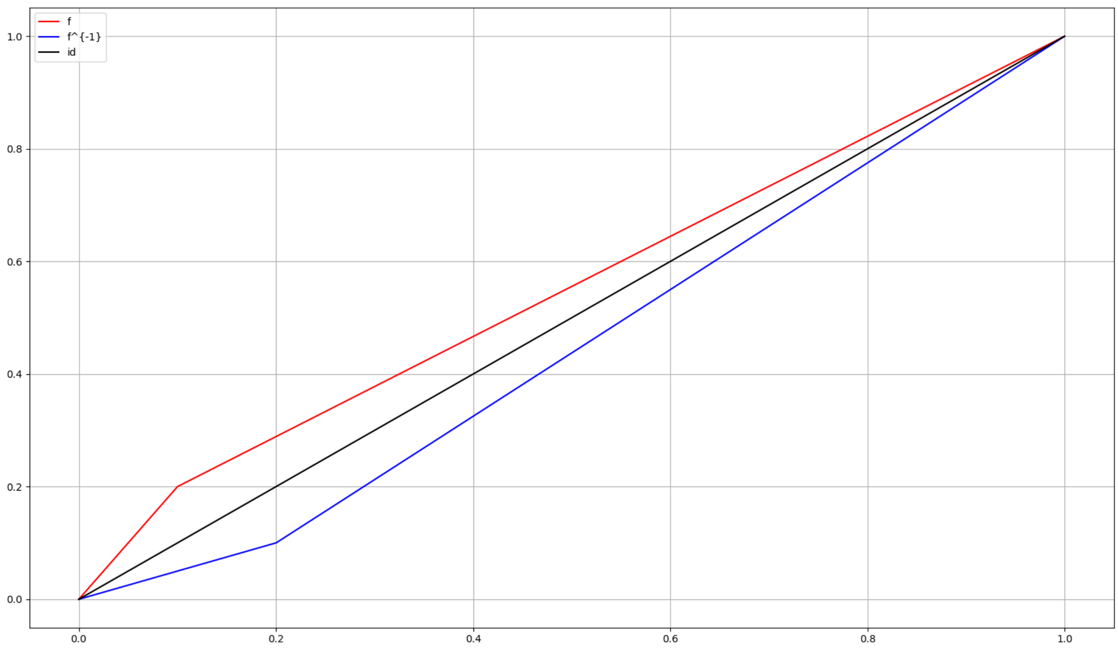

Abbildung 3.9.: Plot von $F_{1;\ 0,1;\ 0,1}$ und der zugehörigen Inversen

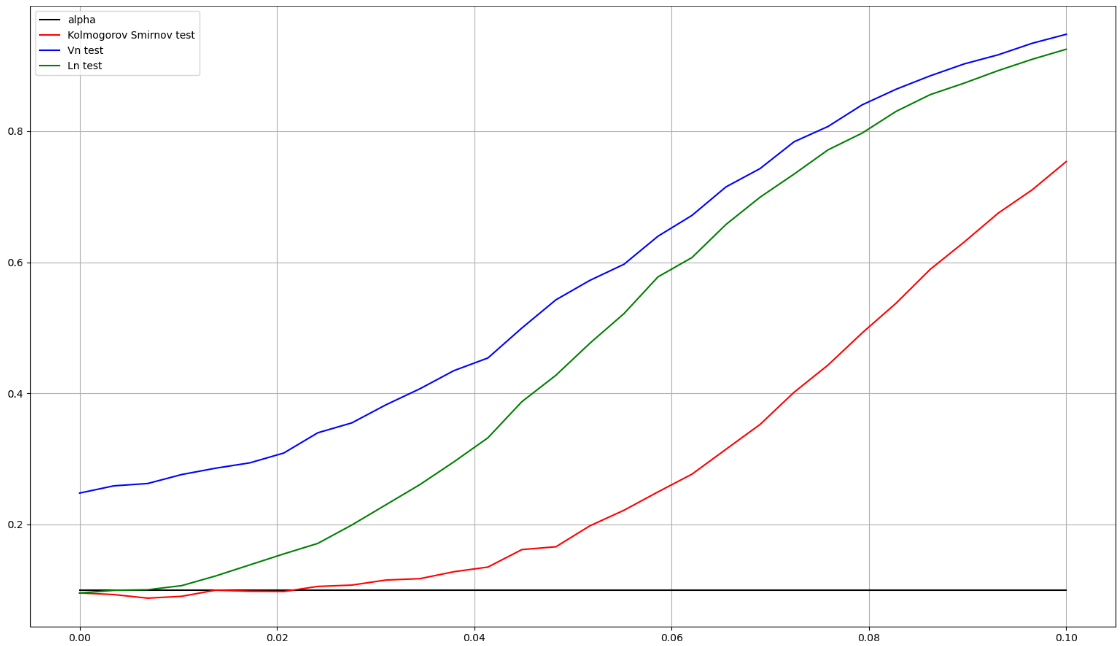

Abbildung 3.10.: Simulation mit $n = 200$; $m = 10.000$; $\alpha = 0,1$; $\varepsilon = 0,1$; $\delta = 0,11$ und $p = 0,1$ (zugrundeliegende Verteilungsfunktion siehe Abbildung 3.11)

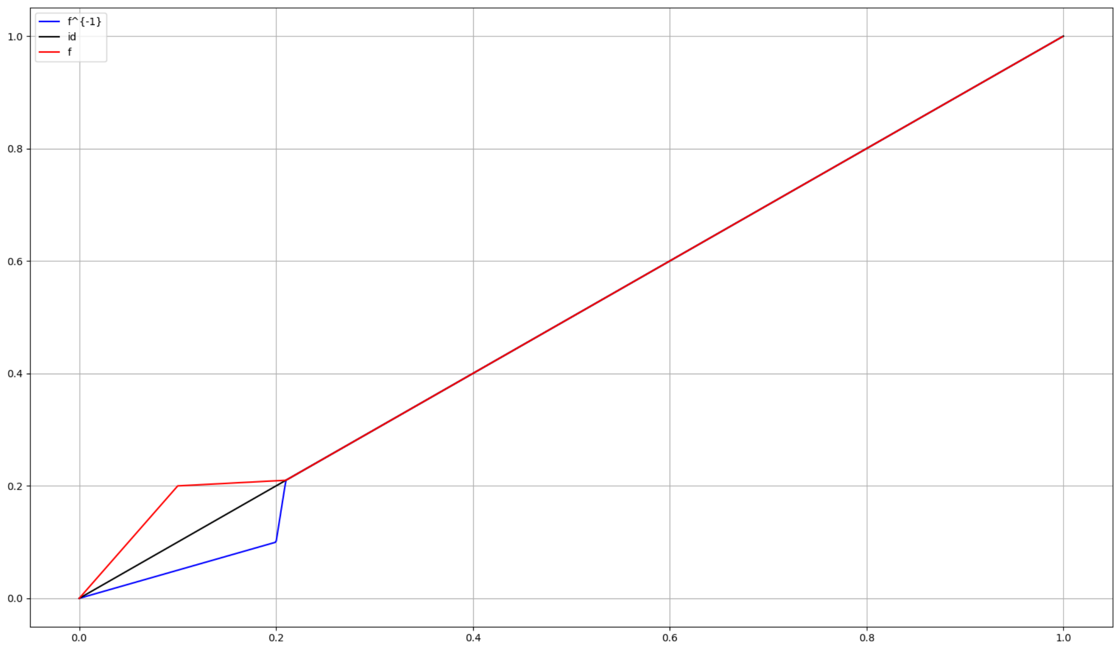

Abbildung 3.11.: Plot von $F_{0,11;\ 0,1;\ 0,1}$ und der zugehörigen Inversen

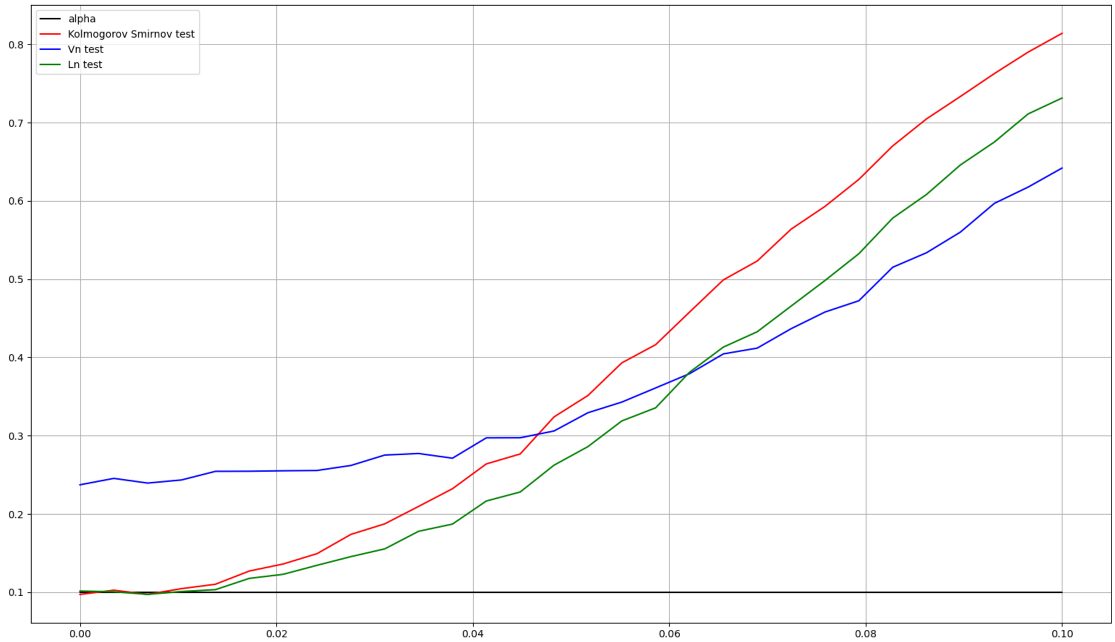

Abbildung 3.12.: Simulation mit $n = 200$; $m = 10.000$; $\alpha = 0,1$; $\varepsilon = 0,1$; $\delta = 1$ und $p = 0,5$ (zugrundeliegende Verteilungsfunktion siehe Abbildung 3.13)

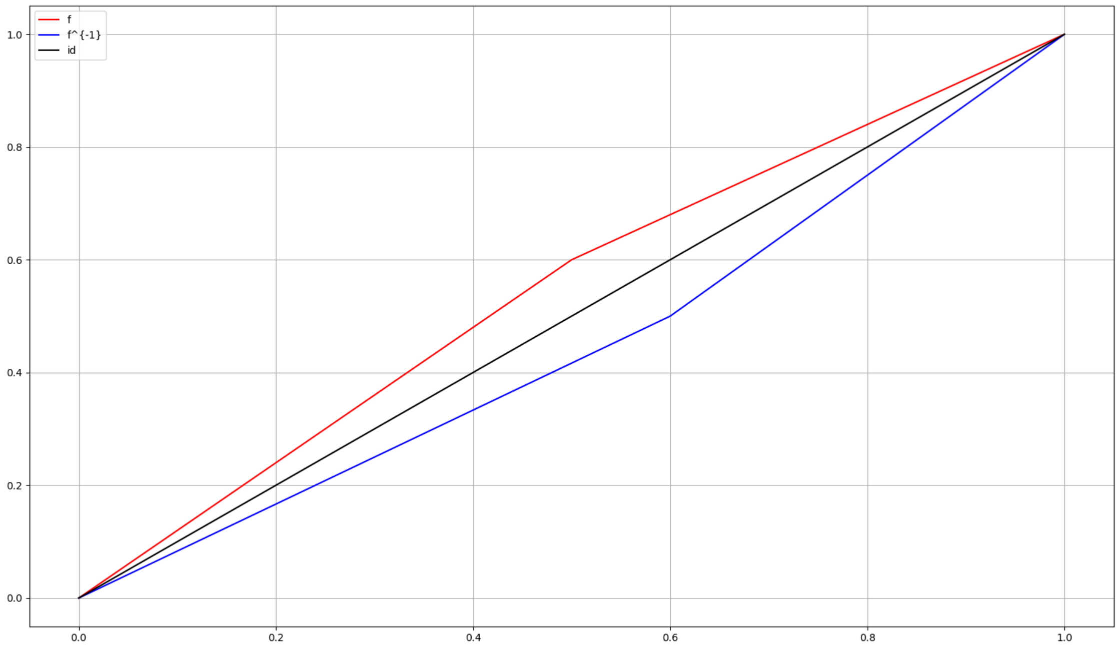

Abbildung 3.13.: Plot von $F_{1;\ 0{,}1;\ 0{,}5}$ und der zugehörigen Inversen

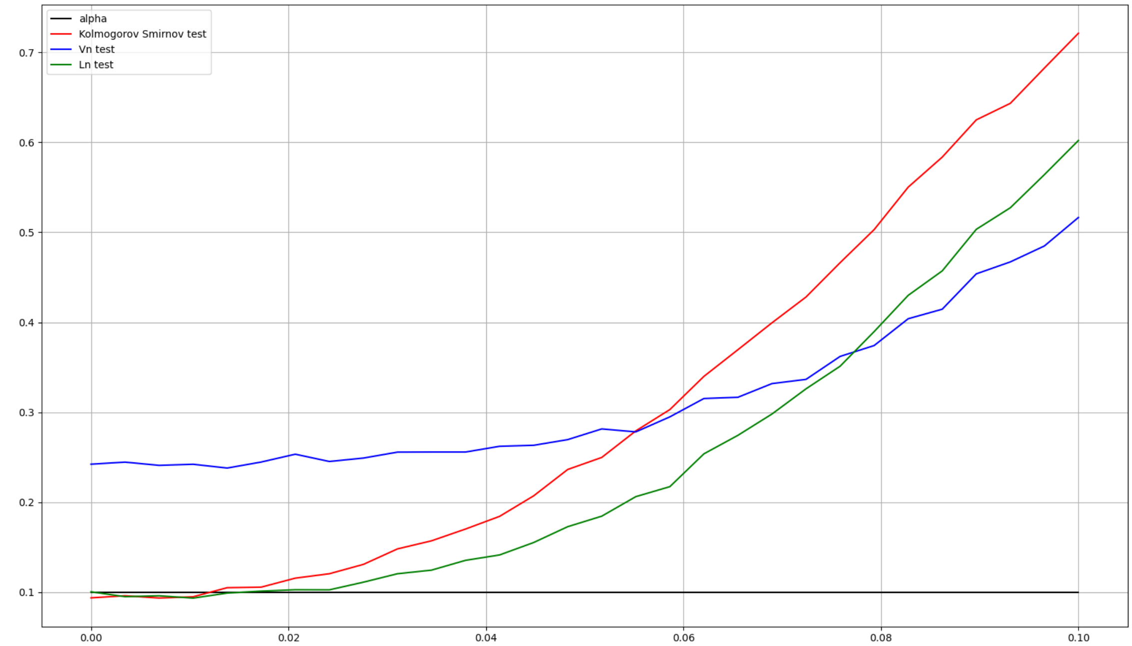

Abbildung 3.14.: Simulation mit $n = 200$; $m = 10.000$; $\alpha = 0,1$; $\varepsilon = 0,1$; $\delta = 0,11$ und $p = 0,5$ (zugrundeliegende Verteilungsfunktion siehe Abbildung 3.15)

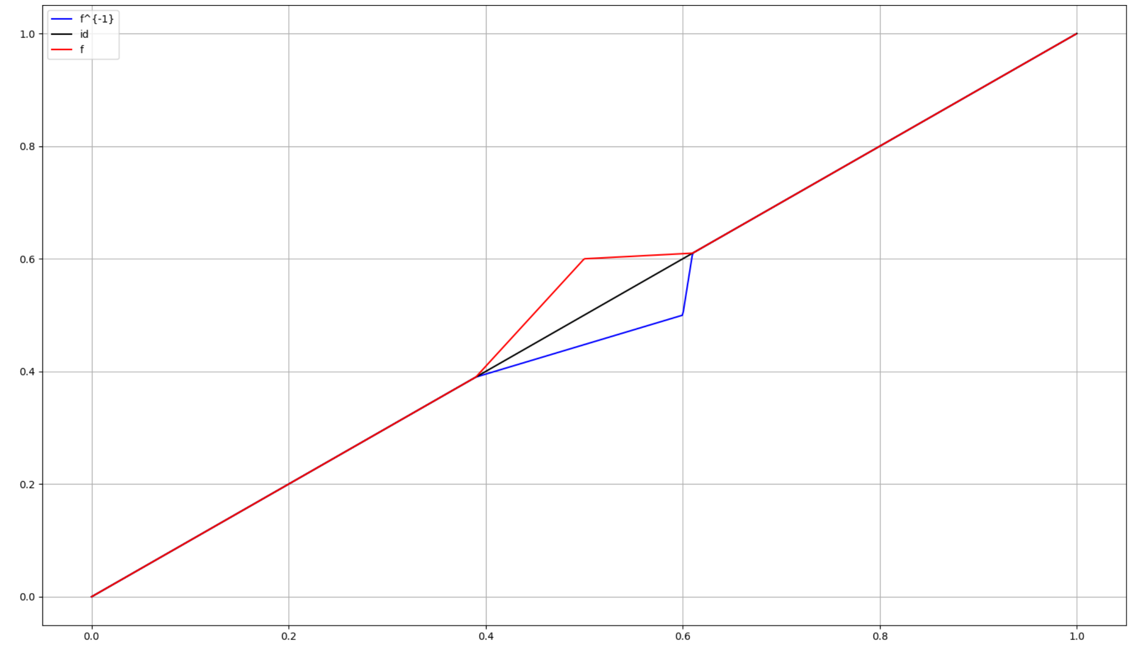

Abbildung 3.15.: Plot von $F_{0,11;\ 0,1;\ 0,5}$ und der zugehörigen Inversen

3.6. Schlussfolgerungen aus den Simulationen und Fazit

Aus den Simulationsergebnissen ergeben sich folgende Beobachtungen:

(1) Der V_n-Test hält das vorgegebene Signifikanzniveau $\alpha = 0,1$ nicht ein. Also selbst für gleichverteilte Daten lehnt der Test die Nullhypothese H_0 häufiger ab, als er sollte. Ein Grund dafür kann sein, dass $n = 200$ einfach deutlich zu klein gewählt war. Wir haben ja in Gleichung (2.9) gesehen, dass der Test ein asymptotischer Niveau-α-Test ist. Das heißt, das Signifikanzniveau $\alpha \in (0, 1)$ wird erst bei $n \to \infty$ erreicht. Dies ist bei den anderen beiden Tests zwar theoretisch auch der Fall, jedoch konvergieren diese offenbar einfach deutlich schneller gegen das vorgegebene Signifikanzniveau.

(2) Der L_n-Test reagiert deutlich schneller als der Kolmogorov-Smirnov-Test auf Abweichungen von der Gleichverteilung, wenn diese am Rand liegen, vgl. z.B. Abbildung 3.6. Im Falle der Abweichung am Rand spielt der Parameter δ auch eine Rolle: Je kleiner δ ist, desto größer sind die Unterschiede.

(3) Liegen die Abweichungen hingegen in der Mitte ($p = 0,5$), dann reagiert der Kolmogorov-Smirnov-Test schneller auf diese Abweichungen als der L_n-Test. Der Parameter δ spielt dabei scheinbar keine so große Rolle.

Basierend auf diesen Beobachtungen können wir schlussfolgern, dass der V_n-Test in der praktischen Anwendung nicht zu empfehlen ist, da dieser (zumindest für $n \leq 200$) das vorgegebene Signifikanzniveau $\alpha \in (0, 1)$ deutlich verfehlt. Der Kolmogorov-Smirnov-Test und der L_n-Test hingegen halten das vorgegebene Signifikanzniveau ein. Was den Vergleich zwischen Kolmogorov-Smirnov-Test und L_n-Test betrifft, fällt es nicht so leicht, eine allgemeingültige Aussage zu treffen. Der L_n-Test erkennt besser Störungen am Rand und der Kolmogorov-Smirnov-Test Störungen in der Mitte. Wenn ich mich für einen der beiden entscheiden müsste, würde ich dem L_n-Test den Vorzug geben, da er bei der Erkennung mittiger Störungen nur knapp hinter dem Kolmogorov-Smirnov-Test liegt, dafür diesem aber bei der Erkennung von Störungen am Rand deutlich voraus ist.

A. Anhang

A.1. Grundlagen aus der Stochastik-Grundvorlesung

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Begriffe der Stochastik noch einmal kurz erklärt.

- Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ Messräume. Eine Funktion $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt **$\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-messbar**

$$:\Longleftrightarrow \forall A_2 \in \mathcal{A}_2 : f^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1.$$

- Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **Borel-messbar**

$$:\Longleftrightarrow \forall M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(M) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

- Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum und $(S, \mathcal{B})$ ein Messraum. Eine **Zufallsvariable** X ist eine $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbare Abbildung $X\colon \Omega \to S$.

- Die **Verteilung** einer Zufallsgröße X ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}$, nämlich

$$\begin{aligned}
&\mu_X\colon \mathcal{B} \to [0,1],\\
&\mu_X(B) := \mathbb{P}[X \in B] := \mathbb{P}\Big(X^{-1}(B)\Big) = \mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}\Big) \qquad \forall B \in \mathcal{B}.
\end{aligned}$$

- Die **Dichte** p_X einer Zufallsgröße X ist die Abbildung $p_X\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ mit der Eigenschaft

$$\mu_X(B) = \int\limits_B p_X(x)\ \mathrm{d}x \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

- Die **Verteilungsfunktion** einer Zufallsgröße X ist

$$F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1], \qquad F_X(x) = \mathbb{P}[X \le x] = \mu_X((-\infty, x]) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\ \mathrm{d}t$$

  mit der Eigenschaft

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = p(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{fast überall.}$$

- Zwei Zufallsvariablen $X_1 : \Omega \to S_1$ und $X_2 : \Omega \to S_2$ heißen **unabhängig**

$$\begin{aligned}
:\Longleftrightarrow\ & \forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \forall B_2 \in \mathcal{B}_2 : \\
& \mathbb{P}[X_1 \in B_1] \cdot \mathbb{P}[X_2 \in B_2] = \mathbb{P}[X_1 \in B_1, X_2 \in B_2] \\
& \qquad := \mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \in B_1 \wedge X_2(\omega) \in B_2\Big\}\Big).
\end{aligned}$$

- Sei X eine $\mathbb{P}$-integrierbare oder nichtnegative Zufallsgröße. Dann ist der **Erwartungswert** von X definiert als

$$\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X(\omega)\ \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \overset{\text{(Trafo)}}{=} \int_\mathbb{R} x\ \mathrm{d}\mu_X(x) = \int_\mathbb{R} x \cdot p_X(x)\ \mathrm{d}x$$

  und hat folgende Eigenschaften (X, Y seien Zufallsgrößen):

  (i) Linearität: $\forall a, b \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[a \cdot X + b \cdot Y] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b \cdot \mathbb{E}[Y]$

  (ii) $X = c \in \mathbb{R}$ fast sicher konstant $\Longrightarrow \mathbb{E}[X] = c$

  (iii) $a \leq X \leq b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ fast sicher konstant $\Longrightarrow a \leq \mathbb{E}[X] \leq b$

  (iv) Dreiecksungleichung: $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$

  (v) $X \geq 0$ fast sicher und $\mathbb{E}[X] = 0 \implies X = 0$ fast sicher

  (vi) X, Y sind unabhängig $\Longrightarrow \mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot E[Y]$

- Zwei Zufallsvariablen X, Y heißen **unkorreliert**

$$:\Longleftrightarrow \mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

- Für $X \in L^2(\mathbb{P})$ ist die **Varianz** definiert als

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) := \mathbb{E}\Big[(-\mathbb{E}[X])^2\Big] = \int_\Omega (X - \mathbb{E}[X])^2\ \mathrm{d}\mathbb{P} = E\Big[X^2\Big] - (\mathbb{E}[X])^2$$

  und hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}(a \cdot X + b) &= a^2 \cdot \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 0 &\Longleftrightarrow X \text{ ist konstant fast sicher} \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}(X + Y) &= \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) + \underbrace{2 \cdot \mathbb{E}\Big[((X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])\Big]}_{=0,\text{ falls } X, Y \text{ unkorreliert}}
\end{aligned}$$

- Sei X ein d-dimensionaler Zufallsvektor und μ_X die Verteilung von X. Die **cha-**

rakteristische Funktion von X ist

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &:= \mathbb{E}\Big[\exp\left(\mathrm{i}\cdot\langle t, X\rangle\right)\Big] \\
&= \int\limits_{\Omega} \exp\left(\mathrm{i}\cdot\langle t, X(\omega)\rangle\right)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \\
&\overset{\text{Trafo}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp(\mathrm{i}\cdot\langle t, x\rangle)\,\mathrm{d}\mu_X(x) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\mathrm{i}\cdot\langle t, x\rangle\right)\cdot p_X(x)\,\mathrm{d}\mathscr{L}(x) \qquad \forall t\in\mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, falls p_X die Dichte von x ist. $\mathscr{L}$ bezeichnet hier das Lebesguemaß.

Lemma A.1.1 (Schnitte von Einsmengen sind Einsmengen)
Eine Menge $M\subseteq\Omega$ mit $\mathbb{P}(M)=1$ heißt **Einsmenge**. Sei $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{P}(A_n)=1$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)=1.$$

Beweis. Mit $\mathbb{P}(A)=1-\mathbb{P}\Big(A^{\mathrm{C}}\Big)$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^{\mathrm{C}}\right) \overset{\text{De Morgan}}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} {A_n}^{\mathrm{C}}\right) \overset{\sigma\text{-Add}}{\leq} \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mathbb{P}\Big({A_n}^{\mathrm{C}}\Big)}_{\overset{\text{Vor}}{=}0} = 0$$

$$\implies \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)=1$$

$\square$

Satz A.1.2: Transformationssatz

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ ein Messraum.
Sei $g\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion und $X\colon \Omega \to S$ eine Zufallsvariable. Dann gilt:

$$\int\limits_{\Omega} g(X(\omega))\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int\limits_{S} g(s)\ \mathbb{P}_X(\mathrm{d}s) \tag{Trafo}$$

Hierbei ist $\mathbb{P}_X = \mu_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ die Verteilung von X. Für den Fall reeller Zahlen ergibt sich mit p_X als Dichte von X:

$$\int\limits_{\Omega} g(X(\omega))\ \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\ \mathbb{P}_X(\mathrm{d}x) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) \cdot p_X(x)\ \mathrm{d}x \tag{Trafo}$$

Satz A.1.3: Majorisierte Konvergenz

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen $f_n\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere μ-fast überall gegen eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion f. Ferner werde die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von einer μ-integrierbaren Funktion g auf Ω majorisiert, d.h.

$$\mu\Big(\Big\{\omega \in \Omega : \big|f_n(\omega)\big| \leq g(\omega)\Big\}\Big) = 1.$$

Dann sind f und f_n μ-integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \big|f_n(\omega) - f(\omega)\big|\ \mathrm{d}\mu(\omega) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

und damit insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_n(\omega)\ \mathrm{d}\mu(\omega) = \int\limits_{\Omega} f(\omega)\ \mathrm{d}\mu(\omega).$$

Lemma A.1.4 (Zusammenhang zwischen Reihen und Lebesgueintegral)
Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $\mu\colon \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ das Zählmaß auf $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$. Dann ist f genau dann integrierbar bzgl. μ auf $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

absolut konvergiert. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f(n)\ \mathrm{d}\mu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Satz A.1.5: Maßeindeutigkeitssatz

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und seien $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}$, d.h. $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ und sei darüber hinaus $\mathcal{E}$ durchschnittstabil, d.h.

$$E_1, E_2 \in \mathcal{E} \implies E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E}.$$

Dann gilt

$$\mathbb{P}_1 \equiv \mathbb{P}_2 \iff \forall E \in \mathcal{E} : \mathbb{P}_1(E) = \mathbb{P}_2(E).$$

Beweis. Siehe z.B. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Lemma 1.42 Seite 19, [Kle13]. □

Definition A.1.6 (Starkes Gesetz der großen Zahlen)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen. Man sagt, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **genügt dem starken Gesetz der großen Zahlen (SGGZ)**

$$:\iff \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}[X_i]) = 0\right) = 1$$

$$\overset{X_i \text{ i.i.d.}}{\iff} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X_1] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Satz A.1.7: Starkes Gesetz der großen Zahlen von Etemadi, 1981

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen X_n mit

$$\mathbb{E}\big[|X_n|\big] < \infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann genügt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem starken Gesetz der großen Zahlen, d.h. es gilt nach Definition A.1.6

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[X_1] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis. Siehe z.B. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Satz 5.17 Seite 114 - 116, [Kle13]. □

A.2. Verteilungsfunktionen und Quantilfunktion

Notation. Für den rechtsseitigen bzw. linksseiten Grenzwert einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$f(x_0+) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x_0-) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x). \quad \text{(A.1)}$$

Definition A.2.1 (Verteilungsfunktion)
Eine Funktion $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ heißt **Verteilungsfunktion**, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

(i) F ist **monoton steigend**, d.h.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \implies F(x) \leq F(y).$$

(ii) F ist **rechtsseitig stetig**, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x+) = F(x)$$

(iii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$

Definition A.2.2 (Empirische Verteilungsfunktion)
Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) Beobachtungen. Die **empirische Verteilungsfunktion** von $x_1, \ldots, x_n$ ist definiert als

$$F_n\colon \mathbb{R} \to [0,1], \qquad F_n(x) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{x_i \leq x} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{(A.2)}$$

wobei

$$\mathbb{1}_{X_i \leq x} := \mathbb{1}_{\{x \in \mathbb{R} : x_i \leq x\}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq x_i \\ 0, & \text{falls } x < x_i \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Allgemeiner kann man für eine beliebige Aussageform $A(x)$ schreiben:

$$\mathbb{1}_{A(x)} := \mathbb{1}_{\{x : A(x)\}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } A(x) \\ 0, & \text{falls } \neg A(x) \end{cases} \qquad \forall x.$$

Für reellwertige Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist die empirische Verteilungsfunktion

$$F_n(x,\omega) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i(\omega)<x} \qquad \forall \omega \in \Omega, \forall x \in \mathbb{R}$$

ein stochastischer Prozess $F\colon \mathbb{R} \times \Omega \to [0,1]$.

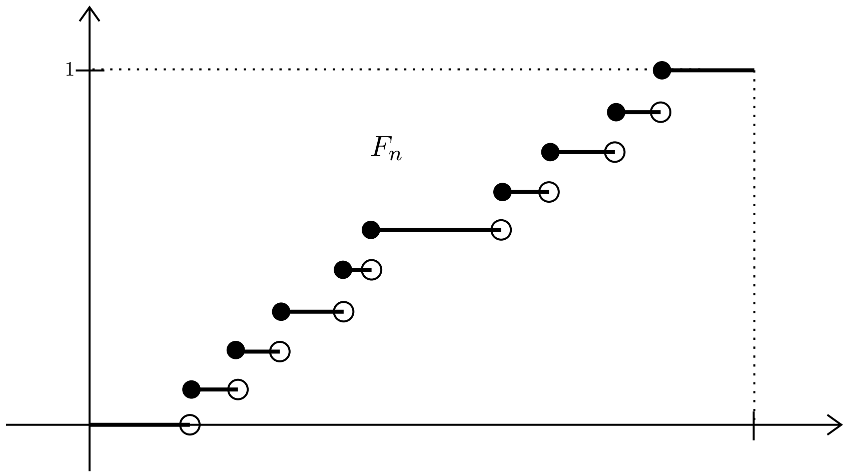

Abbildung A.1.: Skizze einer empirischen Verteilungsfunktion

Lemma A.2.3 Die Empirische Verteilungsfunktion F_n ist eine Verteilungsfunktion.

Definition A.2.4 (Gleichverteilung)
Eine reellwertige Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **gleichverteilt** auf dem Intervall $[a,b]$, in Zeichen $X \sim \mathcal{U}(a,b)$, falls

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } y \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{falls } a < x < b \\ 1, & \text{falls } x \geq b \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

die Verteilungsfunktion von X ist. Eine gleichverteilte Zufallsvariable X besitzt die Dichtefunktion

$$p_X(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{A.3}$$

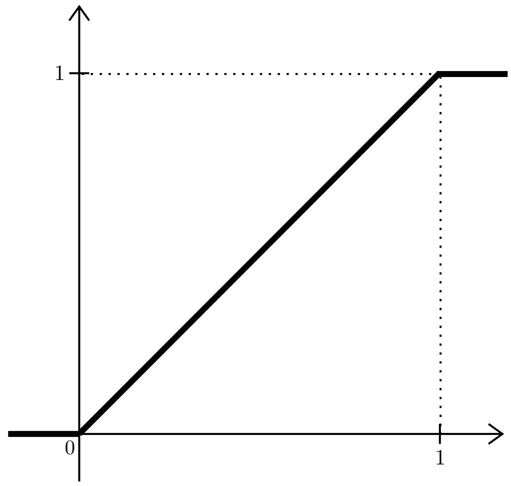

Abbildung A.2.: Verteilungsfunktion der Gleichverteilung $\mathcal{U}$ auf $[0,1]$

Definition A.2.5 (Quantilfunktion)
Sei $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion (nach Definition A.2.1). Dann ist die **Quantilfunktion / verallgemeinerte inverse Verteilungsfunktion** von F definiert als

$$F^{-1}\colon (0,1) \to \mathbb{R}, \qquad F^{-1}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\} \qquad \forall u \in (0,1).$$

Lemma A.2.6 Für jede Verteilungsfunktion F mit zugehöriger Quantilfunktion F^{-1} gilt:

$$F \circ F^{-1}(t) \geq t \qquad \forall t \in (0,1)$$

Es gilt sogar Gleichheit, wenn F stetig ist.

Beweis. Siehe Shorack & Wellner, *Empirical processes with applications to statistics* 1986, Seite 5 Proposition 1, [SW86]. □

Definition A.2.7 (Supremumsnorm)
Die **Supremumsnorm**

$$\|f\| := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \qquad \forall f \in B$$

ist eine Norm auf dem beschränkten Funktionenraum $B := \{f\colon \mathbb{R} \to [0,1]\}$, welcher auch alle Verteilungsfunktionen beinhaltet.

Lemma A.2.8 (Dreiecksungleichung)
In jedem normierten Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ gilt die **umgekehrte Dreiecksungleichung**

$$\Big| \|x\|_X - \|y\|_X \Big| \leq \|x - y\|_X \qquad \forall x, y \in X. \tag{$\triangle$-Ungl}$$

Satz A.2.9: Glivenko-Cantelli, 1933

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger i.i.d. Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big| F_n(x,\omega) - F(x) \Big| = 0\right\}\right) \\ \overset{A.2.7}{=} \ &\mathbb{P}\Big(\big\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \|F_n(\omega) - F\| = 0\big\}\Big) = 1 \end{aligned}$$

Das Supremum der Abstände konvergiert also $\mathbb{P}$-f.s. gegen 0.

Beweis. Siehe z.B. Van der Vaart, *Asymptotic statistics* [VdV00], Seite 266. □

Definition A.2.10 (endlich-dimensionale Randverteilungen)
Sei $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$ und sei $X = (X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess $X\colon (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \big((\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S})\big)$. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $T := \{t_1, \ldots, t_k\} \subseteq \mathcal{T}$. Die Abbildung

$$\pi_T\colon (\mathcal{T} \to \mathcal{S}) \to \mathcal{S}^k, \qquad \pi_T(X) := \big(X(t_1), \ldots, X(t_k)\big)$$

heißt **Projektion** auf $\mathcal{T}$. Genauer gesagt ist

$$\pi_T \circ X\colon \Omega \to \mathcal{S}^k, \qquad \omega \mapsto \big(X(t_1, \omega), \ldots, X(t_k, \omega)\big)$$

ein k-dimensionaler Zufallsvektor im Produktmessraum $(\mathcal{S}^n, \mathcal{B}^n(\mathcal{S}))$ und besitzt folglich eine Verteilung

$$\mathbb{P} \circ (\pi_T \circ X)^{-1}\colon \mathcal{B}(\mathcal{S})^k \to [0,1], \quad B \mapsto \mathbb{P}\Big(\big\{\omega \in \Omega : (\pi_T \circ X)(\omega) \in B)\big\}\Big) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{S})^k.$$

Verteilungen dieser Form heißen **endlich-dimensionale Randverteilungen** / **fidis** (finite-dimensional distributions) von X.

Definition A.2.11 (Gaußsche Zufallsvariablen)
Ein k-dimensionaler Zufallsvektor Y heißt **Gauß'sch** / **normalverteilt**, wenn seine

charakteristische Funktion φ_Y die Form

$$\varphi_Y(t) = \exp\Big(\mathrm{i} \cdot \langle \mu, t\rangle - \frac{1}{2} \cdot \langle C \cdot t, t\rangle\Big) \qquad \forall t \in \mathbb{R}^k$$

hat, wobei $\mu \in \mathbb{R}^k$ und $C \in \mathbb{C}^{k\times k}$ positiv semidefinit ist.
Schreibweise: $Y \sim \mathcal{N}_k(\mu, C)$
Es gilt $\mathbb{E}[Y] = \mu$ und $C = \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y)$.
Ein stochastischer Prozess X heißt **Gauß'sch**, wenn alle endlich-dimensionalen Randverteilungen gauß'sch sind.

A.3. Verteilungskonvergenz, Continuous Mapping Theorem & Zentraler Grenzwertsatz

Definition A.3.1 (Konvergenz in Verteilung)
Seien $X, X_n, n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen im metrischen Raum $(\mathcal{S}, d)$ über $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

(i) Seien $P, P_n, n \in \mathbb{N}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(S))$. Dann **konvergiert** P_n **schwach gegen** P, in Zeichen:

$$P_n \underset{\mathrm{w}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} P :\Longleftrightarrow \int\limits_{\mathcal{S}} f \;\mathrm{d}P_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\mathcal{S}} f \;\mathrm{d}P \qquad \forall f \in \mathfrak{C}^b(\mathcal{S})$$

Hierbei ist $\mathfrak{C}^b(\mathcal{S}) := \{f \in \mathfrak{C}(\mathcal{S}, \mathbb{R}) : f \text{ beschränkt}\}$.

(ii) Man sagt, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert in Verteilung** gegen X im Raum $(\mathcal{S}, d)$, in Zeichen:

$$X_n \overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} X \text{ in } (\mathcal{S}, d) :\Longleftrightarrow \mathbb{P} \circ X_n^{-1} \underset{\mathrm{w}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \mathbb{P} \circ X^{-1}$$

Da diese Definition etwas unhandlich ist, liefert das sogenannte Portmanteau-Theorem einige äquivalente Charakterisierungen:

Satz A.3.2: Portmanteau

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ in $(\mathcal{S}, d)$

(ii) $\mathbb{E}[f(X_n)] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)]$ $\forall f \in \mathfrak{C}^b(\mathcal{S})$ gleichmäßig stetig

(iii) $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$ $\forall F \in \mathcal{F}$

(iv) $\liminf\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in G) \geq \mathbb{P}(X \in G)$ $\forall G \in \mathcal{G}$

(v) $\mathbb{P}(X_n \in B) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X \in B)$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ mit $\mathbb{P}(X \in \partial B) = 0$

Hier sind $\mathcal{G} := \{G \in \mathfrak{P}(\mathcal{S}) : G \text{ abgeschlossen}\}$ und $\mathcal{F} := \{F \in \mathfrak{P}(\mathcal{S}) : F \text{ offen}\}$.

Beweis. Siehe Billingsley *convergence of probability measure*, [Bil99], Seite 26. □

Außerdem gibt es noch eine weitere Äquivalenz:

Lemma A.3.3 (Verteilungskonvergenz)
Seien $X_n, X, n \in \mathbb{N}$ reelle Zufallsvariablen über $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sei F_n die Verteilungsfunktion von X_n und F die Verteilungsfunktion von X und sei D_F die Menge der Stetigkeitsstellen von F. Dann gilt:

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \iff F_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x) \qquad \forall x \in D_F$$

Beweis. Siehe Vorlesung *Mathematische Statistik* von Prof. Ferger, Bemerkung nach Korollar 4.5, [FerXX]. □

Satz A.3.4: Continuous Mapping Theorem (CMT)

Seien $(\mathcal{S}, d)$ und $(\mathcal{S}', d')$ zwei metrische Räume und sei $h\colon (\mathcal{S}, d) \to (\mathcal{S}', d')$ $\mathcal{B}(\mathcal{S})$-$\mathcal{B}(\mathcal{S}')$-messbar. Dann gilt:

(i) $\mathbb{P}_n \xrightarrow[\text{w}]{n\to\infty} \mathbb{P} \wedge \mathbb{P}(D_h) = 0 \implies \mathbb{P}_n \circ h^{-1} \xrightarrow[\text{w}]{n\to\infty} \mathbb{P} \circ h^{-1}$

(ii) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ in $(\mathcal{S}, d) \wedge \mathbb{P}(X \in D_h) = 0 \implies h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} h(X)$ in $(\mathcal{S}', d')$

(iii) Sei h stetig. Dann gilt: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ in $(\mathcal{S}, d) \implies h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} h(X)$ in $(\mathcal{S}', d')$

Hierbei ist $D_h := \{s \in \mathcal{S} : h \text{ ist } \underline{\text{nicht}} \text{ stetig in } x\}$.

Beweis. Siehe Billingsley *covergence of probability measure*, [Bil99], Seite 20 Gleichung (2.5) und Seite 26. □

Satz A.3.5: Multivariater Zentraler Grenzwertsatz

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen X_i im $\mathbb{R}^d$ mit $\mathbb{E}[X_1] = 0 \in \mathbb{R}^d$ und Kovarianzmatrix $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = C \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Dann gilt existiert eine Zufallsvariable X im $\mathbb{R}^d$ mit

$$S_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}_d(0, C).$$

Beweis. Der multivariate Grenzwertsatz lässt sich auf den eindimensionalen Fall zurückführen. Siehe z.B. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Satz 15.57 Seite 336, [Kle13]. □

A.4. Kovarianzfunktion und Kovarianzmatrix

Definition A.4.1 (Kovarianzfunktion)
Sei $X : T \times \Omega \to \mathbb{C}$ ein stochastischer Prozess mit $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X(t)) < \infty\ \forall t \in T$. Dann ist die **Kovarianzfunktion** von X definiert als

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}_X : T \times T \to \mathbb{C}, \qquad \mathbb{C}\mathrm{ov}_X(s,t) := \mathbb{E}\Big[\big(X(s) - M(s)\big) \cdot \overline{\big(X(s) \cdot X(t)\big)}\Big] \qquad \forall s, t \in T$$

wobei

$$M_X(t) := \mathbb{E}[X(t)] \qquad \forall t \in\ T$$

der Mittelwert des Prozesses X ist.

Definition A.4.2 (Erwartungswert und Kovarianzmatrix von Zufallsvektoren)

(i) Sei $Z := (Z_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M(m \times n)$ mit integrierbaren Komponenten $Z_{i,j}$, welche reelle Zufallsvariablen sind. Dann definiere

$$\mathbb{E}[Z] := \Big(\mathbb{E}[Z_{i,j}]\Big)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}.$$

Speziell für

$$Z = (Z_1, \dots, Z_m)^\intercal$$

ist

$$\mathbb{E}[Z] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[Z_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[Z_n] \end{pmatrix} = \Big(\mathbb{E}[Z_1], \dots, \mathbb{E}[Z_n]\Big)^\intercal.$$

(ii) Seien

$$Z = (Z_1, \dots, Z_m)^\intercal, \qquad Y = (Y_1, \dots, Y_n)^\intercal.$$

Dann, falls existent:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y, Z) &:= \mathbb{E}\Big[(Y - \mathbb{E}[Y]) \cdot (Z - \mathbb{E}[Z])^\intercal\Big] \\ &\overset{\text{(i)}}{=} \Big(\mathbb{E}\Big[(Y_i - \mathbb{E}[Y_i]) \cdot (Z_j - \mathbb{E}[Z_j])\Big]\Big)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \\ &= \Big(\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_i, Z_j)\Big)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\end{aligned}$$

Speziell ist

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) := \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y, Y) = \Big(\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_i, Y_j)\Big)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M(n \times n)$$

die **Kovarianzmatrix** von Y.

A.5. Hilfssätze zur Bestimmung von $\|U_n\|, V_n$ und τ_n

Definition A.5.1 (Ordnungsstatistik)
Seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen. Für jedes $\omega \in \Omega$ und jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ bezeichnet $X_{i:n}(\omega)$ den i-kleinsten Wert der $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$, d.h.

$$X_{1:n}(\omega) \le X_{2:n}(\omega) \le \dots \le X_{n:n}(\omega).$$

Die Zufallsvariablen $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$ werden als **Ordnungsstatistiken** der Zufallsstichprobe $X_1, \dots, X_n$ bezeichnet. $X_{i:n}$ heißt **i-te Ordnungsgröße.**

Satz A.5.2

Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F und G eine weitere stetige Verteilungsfunktion. F_n bezeichne die empirische Verteilungsfunktion zu $X_1, \dots, X_n$. Dann gilt

$$\|F_n - G\| \overset{\text{Def}}{=} \sup_{t\in\mathbb{R}} \big|F_n(t) - G(t)\big| = \max_{1\le i\le n} \left\{ \max\left\{ \frac{i}{n} - G(X_{i:n}), G(X_{i:n}) - \frac{i-1}{n} \right\} \right\},$$

wobei $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$ die Ordnungsstatistiken von $X_1, \dots, X_n$ sind.

Beweis. Vergleiche z.B. [Sch11], Seite 12, Lemma 1.3.1. □

Mit diesem Satz können wir $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ einfach berechnen:

$$T_n \overset{A.5.2}{=} \sqrt{n} \cdot \max_{1 \le i \le n} \left\{ \max\left\{ \frac{i}{n} - X_{i:n}, X_{i:n} - \frac{i-1}{n} \right\} \right\}$$

Folgendes Resultat hilft uns dabei, das Supremum für die Teststatistik

$$V_n := \sup_{t \in (0,1)} \frac{|U_n(t)|}{\sqrt{t \cdot (1-t)}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

des V_n-Tests 2.2.2 zu bestimmen. Wir setzen der Kürze halber

$$G_n(t) := \frac{|U_n(t)|}{\sqrt{t \cdot (1-t)}} \qquad \forall t \in (0,1), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Satz A.5.3

Setze

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_n &:= \operatorname*{arg\,sup}_{t \in (0,1)} G_n(t) && \forall n \in \mathbb{N} \\ \mu_n(i) &:= \max\left\{ \frac{i^2}{X_{i:n}} + \frac{(n-i)^2}{1 - X_{i:n}}, \frac{(i-1)^2}{X_{i:n}} + \frac{(n-i+1)^2}{1 - X_{i:n}} \right\} && \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ r_n &:= \operatorname*{arg\,max}_{i \in \{1,\dots,n\}} \mu_n(i). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} V_n &= \max\left\{ G_n(\hat{\tau}_n), G_n(\hat{\tau}_n-) \right\} && \text{mit} \\ G_n(\hat{\tau}_n) &= \frac{\sqrt{n} \cdot \left| \frac{r}{n} - X_{r:n} \right|}{\sqrt{X_{r:n} \cdot (1 - X_{r:n})}} && \text{und} \\ G_n(\hat{\tau}_n-) &= \frac{\sqrt{n} \cdot \left| \frac{r-1}{n} - X_{r:n} \right|}{\sqrt{X_{r:n} \cdot (1 - X_{r:n})}}. \end{aligned}$$

Hierbei geht

$$F_n(X_{i:n}) = \frac{i}{n} \qquad \text{und} \qquad F_n(X_{i:n}-) = \frac{i-1}{n} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

ein.

Beweis. Unveröffentlichtes Manuskript von Ferger, [FerXX]. □

A.6. Quantiltabellen

Die folgenden Quantiltabellen wurden allesamt mit der in Python (Version 3.8.2) selbst programmierten Simulationssoftware erstellt, siehe
`https://github.com/LostInDarkMath/Hypothesentests`

A.6.1. Quantile der Kolmogorov-Smirnov-Verteilung

Die Summation der Reihe wurde bei 5000 abgebrochen.

α	α-Quantil	α	α-Quantil	α	α-Quantil
0.01	0.4410276985	0.34	0.7305256433	0.67	0.9479572574
0.02	0.4699490981	0.35	0.7364542888	0.68	0.9561448379
0.03	0.4899699841	0.36	0.7423835979	0.69	0.9645094948
0.04	0.5059667392	0.37	0.748317553	0.7	0.9730633753
0.05	0.5196103792	0.38	0.7542600237	0.71	0.9818197532
0.06	0.5316925315	0.39	0.7602147885	0.72	0.9907931848
0.07	0.5426564257	0.4	0.7661855556	0.73	0.9999996937
0.08	0.5527775509	0.41	0.7721759809	0.74	1.009456988
0.09	0.5622399473	0.42	0.7781896863	0.75	1.0191847203
0.1	0.5711732651	0.43	0.7842302765	0.76	1.0292047983
0.11	0.5796726448	0.44	0.7903013544	0.77	1.0395417611
0.12	0.5878102072	0.45	0.7964065373	0.78	1.050223236
0.13	0.5956420926	0.46	0.8025494721	0.79	1.0612805001
0.14	0.6032129795	0.47	0.8087338503	0.8	1.0727491749
0.15	0.6105590999	0.48	0.8149634235	0.81	1.0846700961
0.16	0.6177103174	0.49	0.8212420189	0.82	1.0970904124
0.17	0.6246915985	0.5	0.8275735552	0.83	1.1100649927
0.18	0.6315240812	0.51	0.8339620592	0.84	1.1236582501
0.19	0.6382258646	0.52	0.8404116833	0.85	1.1379465425
0.2	0.6448126062	0.53	0.8469267233	0.86	1.1530213842
0.21	0.6512979783	0.54	0.8535116386	0.87	1.1689938238
0.22	0.6576940241	0.55	0.8601710726	0.88	1.1860005382
0.23	0.6640114373	0.56	0.8669098753	0.89	1.2042125273
0.24	0.6702597857	0.57	0.8737331282	0.9	1.2238478702
0.25	0.6764476915	0.58	0.8806461709	0.91	1.2451910767
0.26	0.6825829781	0.59	0.8876546307	0.92	1.2686236263
0.27	0.6886727906	0.6	0.894764455	0.93	1.2946745414
0.28	0.6947236959	0.61	0.9019819481	0.94	1.3241093034
0.29	0.7007417667	0.62	0.9093138112	0.95	1.3580986393
0.3	0.7067326523	0.63	0.9167671881	0.96	1.3985733812
0.31	0.7127016385	0.64	0.9243497162	0.97	1.4490862126
0.32	0.7186536993	0.65	0.9320695842	0.98	1.5174269646
0.33	0.7245935414	0.66	0.9399355985	0.99	1.6276236115

A.6.2. Quantile der einseitigen Kolmogorov-Smirnov-Verteilung

α	α-Quantil	α	α-Quantil	α	α-Quantil
0.01	0.0708884191	0.34	0.4558044778	0.67	0.7445342922
0.02	0.1005054909	0.35	0.4641028528	0.68	0.7547960928
0.03	0.1234082808	0.36	0.472380727	0.69	0.765239499
0.04	0.1428670616	0.37	0.4806430378	0.7	0.7758778269
0.05	0.1601457061	0.38	0.4888945699	0.71	0.7867256053
0.06	0.1758911647	0.39	0.4971399812	0.72	0.7977987453
0.07	0.1904871292	0.4	0.5053838263	0.73	0.8091147385
0.08	0.2041832619	0.41	0.5136305784	0.74	0.8206928926
0.09	0.2171528027	0.42	0.5218846499	0.75	0.8325546112
0.1	0.2295218025	0.43	0.5301504118	0.76	0.8447237287
0.11	0.2413853933	0.44	0.5384322127	0.77	0.8572269158
0.12	0.2528174949	0.45	0.5467343966	0.78	0.8700941711
0.13	0.2638769289	0.46	0.5550613207	0.79	0.8833594253
0.14	0.2746114434	0.47	0.5634173731	0.8	0.8970612891
0.15	0.285060458	0.48	0.5718069899	0.81	0.9112439869
0.16	0.2952569958	0.49	0.5802346738	0.82	0.9259585381
0.17	0.3052290764	0.5	0.5887050113	0.83	0.9412642672
0.18	0.315000745	0.51	0.597222692	0.84	0.9572307619
0.19	0.324592846	0.52	0.6057925284	0.85	0.9739404459
0.2	0.3340236154	0.53	0.6144194757	0.86	0.9914920212
0.21	0.3433091416	0.54	0.623108654	0.87	1.0100051554
0.22	0.3524637282	0.55	0.6318653719	0.88	1.0296270042
0.23	0.3615001827	0.56	0.6406951507	0.89	1.0505415062
0.24	0.3704300512	0.57	0.6496037524	0.9	1.072983013
0.25	0.3792638082	0.58	0.6585972091	0.91	1.0972569452
0.26	0.3880110133	0.59	0.6676818551	0.92	1.123772362
0.27	0.3966804412	0.6	0.6768643631	0.93	1.1530958407
0.28	0.4052801914	0.61	0.6861517835	0.94	1.1860461027
0.29	0.4138177794	0.62	0.6955515891	0.95	1.223873415
0.3	0.4223002154	0.63	0.7050717245	0.96	1.2686362408
0.31	0.4307340719	0.64	0.7147206614	0.97	1.324114401
0.32	0.4391255406	0.65	0.7245074618	0.98	1.3985748104
0.33	0.4474804837	0.66	0.7344418498	0.99	1.5174271278

A.6.3. Quantile der Verteilung des L_n-Tests

Die Summation der Reihe wurde bei 5000 abgebrochen.

α	α-Quantil	α	α-Quantil	α	α-Quantil
0.01	0.9640110683	0.34	1.6708749538	0.67	2.1674086646
0.02	1.0344366765	0.35	1.6849776523	0.68	2.1853176118
0.03	1.0833921363	0.36	1.6990515526	0.69	2.2035624288
0.04	1.1226185953	0.37	1.7131056604	0.7	2.2221673054
0.05	1.1561399812	0.38	1.7271486741	0.71	2.2411586765
0.06	1.1858643568	0.39	1.7411890359	0.72	2.2605654801
0.07	1.2128610938	0.4	1.7552349798	0.73	2.2804195503
0.08	1.2377954436	0.41	1.7692945745	0.74	2.3007560724
0.09	1.2611121906	0.42	1.7833757643	0.75	2.3216140416
0.1	1.2831248597	0.43	1.7974864069	0.76	2.3430369151
0.11	1.30406362	0.44	1.81163431	0.77	2.3650733441
0.12	1.3241030122	0.45	1.8258272656	0.78	2.3877780757
0.13	1.3433789316	0.46	1.8400730841	0.79	2.4112130602
0.14	1.3619995079	0.47	1.8543796277	0.8	2.435448832
0.15	1.3800524108	0.48	1.8687548433	0.81	2.4605661815
0.16	1.3976098976	0.49	1.883206796	0.82	2.4866583906
0.17	1.4147323265	0.5	1.8977437031	0.83	2.5138339327
0.18	1.431470739	0.51	1.9123739686	0.84	2.5422201023
0.19	1.4478688207	0.52	1.9271062305	0.85	2.571967724
0.2	1.4639643073	0.53	1.9419493584	0.86	2.6032574635
0.21	1.4797901154	0.54	1.9569125511	0.87	2.6363084375
0.22	1.4953751537	0.55	1.9720053428	0.88	2.6713901477
0.23	1.510745083	0.56	1.9872376581	0.89	2.7088395262
0.24	1.5259227676	0.57	2.0026198729	0.9	2.7490859401
0.25	1.5409288028	0.58	2.0181628268	0.91	2.7926890549
0.26	1.5557817866	0.59	2.0338779416	0.92	2.8403984407
0.27	1.5704986545	0.6	2.0497772601	0.93	2.8932522585
0.28	1.5850949475	0.61	2.0658734901	0.94	2.9527502986
0.29	1.5995849496	0.62	2.0821801372	0.95	3.0211817071
0.3	1.6139819066	0.63	2.0987115736	0.96	3.1023116217
0.31	1.6282981476	0.64	2.1154831093	0.97	3.2030406872
0.32	1.6425452511	0.65	2.1325111599	0.98	3.338403066
0.33	1.6567340865	0.66	2.1498133591	0.99	3.5541429541

A.6.4. Quantile der Verteilung des einseitigen L_n-Tests

α	α-Quantil	α	α-Quantil	α	α-Quantil
0.01	0.3388684138	0.34	1.263847149	0.67	1.851934575
0.02	0.4299207125	0.35	1.2812398678	0.68	1.8724001591
0.03	0.4950744476	0.36	1.2985483423	0.69	1.8932082905
0.04	0.5478607659	0.37	1.3157847037	0.7	1.9143852233
0.05	0.5931663491	0.38	1.3329605831	0.71	1.9359595581
0.06	0.6333824737	0.39	1.3500871821	0.72	1.9579625719
0.07	0.669879617	0.4	1.3671753375	0.73	1.980428606
0.08	0.7035250967	0.41	1.3842355798	0.74	2.0033955248
0.09	0.734906792	0.42	1.4012781879	0.75	2.0269052606
0.1	0.7644438332	0.43	1.4183132392	0.76	2.0510044681
0.11	0.792446891	0.44	1.4353506572	0.77	2.0757453125
0.12	0.819153475	0.45	1.452400257	0.78	2.1011864287
0.13	0.8447498019	0.46	1.4694717878	0.79	2.1273940982
0.14	0.8693849737	0.47	1.4865749757	0.8	2.1544437046
0.15	0.8931805216	0.48	1.5037195646	0.81	2.1824215536
0.16	0.9162370346	0.49	1.5209153568	0.82	2.2114271736
0.17	0.9386388886	0.5	1.5381722545	0.83	2.2415762563
0.18	0.9604576998	0.51	1.555500301	0.84	2.273004469
0.19	0.9817548963	0.52	1.5729097237	0.85	2.3058724677
0.2	1.0025836689	0.53	1.5904109781	0.86	2.3403725995
0.21	1.0229904731	0.54	1.608014794	0.87	2.376738032
0.22	1.0430162031	0.55	1.6257322242	0.88	2.4152554551
0.23	1.0626971205	0.56	1.6435746966	0.89	2.4562831851
0.24	1.0820655974	0.57	1.6615540696	0.9	2.5002777108
0.25	1.1011507177	0.58	1.6796826927	0.91	2.5478339263
0.26	1.1199787686	0.59	1.6979734719	0.92	2.5997485686
0.27	1.138573645	0.6	1.7164399416	0.93	2.6571251698
0.28	1.1569571865	0.61	1.7350963437	0.94	2.721558385
0.29	1.1751494587	0.62	1.753957716	0.95	2.7954834829
0.3	1.1931689918	0.63	1.7730399897	0.96	2.8829101462
0.31	1.2110329827	0.64	1.7923600999	0.97	2.9912016814
0.32	1.2287574684	0.65	1.8119361091	0.98	3.1364644604
0.33	1.2463574753	0.66	1.831787348	0.99	3.3682141752

Index

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

[Bil99] Patrick Billingsley. Convergence of probability measures. 1999. 1.1, 1.3, A.3, A.3

[F$^+$01] Dietmar Ferger et al. Analysis of change-point estimators under the null hypothesis. *Bernoulli*, 7(3):487–506, 2001. 1.4

[Fal16] Oliver Falkenburg. *Auswertung der Skorokhodmetrik*. PhD thesis, Universität Mannheim, 9 2016. 1.1

[Fer99] Dietmar Ferger. On the uniqueness of maximizers of markov–gaussian processes. *Statistics & probability letters*, 45(1):71–77, 1999. 1.2

[Fer09] Dietmar Ferger. *Stochastische Prozesse mit Strukturbrüchen Vorlesungsskript*. Techn. Univ., Inst. für Mathematische Stochastik, Dresden, 2009. 1

[Fer18] Dietmar Ferger. On the supremum of a brownian bridge standardized by its maximizing point with applications to statistics. *Statistics & Probability Letters*, 134:63–69, 2018. (document), 2.2.3, 2.2.3, 2.3.3

[FerXX] Dietmar Ferger. Unveröffentlichtes Manuskript. unpublished, XXXX. A.3, A.5

[GS77] Peter Gänssler and Winfried Stute. Gesetze der großen Zahlen. In *Wahrscheinlichkeitstheorie*, pages 118–133. Springer, 1977. 1.1

[Jae79] Dankwart Jaeschke. The asymptotic distribution of the supremum of the standardized empirical distribution function on subintervals. *The Annals of Statistics*, pages 108–115, 1979. 2.2.2

[Kö92] Konrad Königsberger. *Analysis 1*. Springer, Berlin, 2. korr. Aufl. edition, 1992. 1.1

[Kal97] Olav Kallenberg. *Foundations of modern probability*. Springer, New York, 1997. 2.2.3

[Kle13] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*, volume 3. Springer, 2013. A.1, A.1, A.3

[Sch11] Jasmin Schnelling. Einige Beiträge zur Minimum-Distanz-Schätzung. Diplomarbeit, 2011. A.5

[SP14] René L Schilling and Lothar Partzsch. *Brownian motion: an introduction to stochastic processes*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2014. 1.2

[SW86] Galen R Shorack and Jon A Wellner. *Empirical processes with applications to statistics*. John Wiley & Sons, 1986. 2.2.1, 2.3.1, A.2

[VdV00] Aad W Van der Vaart. *Asymptotic statistics*, volume 3. Cambridge university press, 2000. A.2

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die am 19.05.2020 eingereichte Masterarbeit zum Thema *Ein Vergleich ausgewählter statistischer Tests auf stetige Gleichverteilung auf* unter Betreuung von Herr Prof. Dr. Dietmar Ferger selbstständig erarbeitet, verfasst und Zitate kenntlich gemacht habe. Andere als die angegebenen Hilfsmittel wurden von mir nicht benutzt.

Dresden, 19.05.2020 Unterschrift