MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Erik Darpö

TENTAMEN I MATEMATIK
MAA150 Vektoralgebra TEN1
Datum: 17 februari 2015 *Skrivtid:* 3 timmar
Hjälpmedel: Skrivdon

*Denna tentamen TEN1 består av 6 uppgifter, med en sammanlagd poängsumma om 25 poäng. För betyget **3** krävs en erhållen poängsumma om minst 12 poäng, för betyget **4** krävs 16 poäng, och för betyget **5** krävs 20 poäng. Samtliga lösningar förutsätts innefatta ordentliga motiveringar och tydliga svar.*

1. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Bestäm den radreducerade trappstegsformen av A.

b) Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ges av $F(x) = Ax$ för alla $x \in \mathbb{R}^4$. Bestäm alla vektorer $x \in \mathbb{R}^4$ som uppfyller att $F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(5p)

2. Bestäm alla eventuella skärningspunkter mellan linjen $\ell : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ och planet $\pi : -2x + 3y + z = 5$. *(3p)*

3. Låt $u, v \in \mathbb{R}^3$, och antag att att $\|u\| = 1$, $\|v\| = 3$ och att vinkeln mellan u och v är $2\pi/3$. Beräkna $\|2u + v\|$. *(4p)*

4. a) Skriv talet $4\sqrt{2} - \sqrt{32}\, i$ på polär form.

b) Lös ekvationen $z^2 = 4\sqrt{2} - \sqrt{32}\, i$. Ange explicit antalet lösningar till ekvationen.
Lösningarna till ekvationen kan skrivas på antingen polär eller cartesisk form.

(5p)

5. Visa att för varje komplext tal z gäller att $\bar{z} = -z$ om och endast om $\operatorname{Re} z = 0$. *(3p)*

6. En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av $T(x) = u \times x$, där $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestäm T:s matris.

(5p)

*This exam TEN1 consists of 6 problems, with a total score of 25 points. To obtain the grades **3**, **4** and **5**, scores of at least 12, 16 respectively 20 points are required. All solutions are to include motivations and clear answers to the questions asked.*

1. Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Determine the row-reduced echelon form of the matrix A.

b) The linear map $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ is given by $F(x) = Ax$ for all $x \in \mathbb{R}^4$. Determine all $x \in \mathbb{R}^4$ such that $F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(5p)

2. Determine all (if any) points at which the line $\ell : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ intersects the plane $\pi : -2x + 3y + z = 5$. *(3p)*

3. Let $u, v \in \mathbb{R}^3$, and assume that $\|u\| = 1$, $\|v\| = 3$ and that the angle between u and v is $2\pi/3$. Compute $\|2u + v\|$. *(4p)*

4. a) Write the number $4\sqrt{2} - \sqrt{32}\, i$ on polar form.

b) Solve the equation $z^2 = 4\sqrt{2} - \sqrt{32}\, i$. State explicitly the number of solutions.
The solutions to the equation may be written either on polar or cartesian form.

(5p)

5. Show that for every complex number z, the identity $\bar{z} = -z$ holds if and only if $\operatorname{Re} z = 0$. *(3p)*

6. A linear map $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is defined by $T(x) = u \times x$, where $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determine the matrix of T. *(5p)*

MAA150 Vector algebra

Solutions to exam TEN1 17/2/2015

1a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{\mathrm{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}}$

b) $F(x) = 0 \iff Ax = 0$

This is a linear system with augmented matrix $(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{by (a)}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ Setting $x_3 = s$, $x_4 = t$

gives $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2t \\ -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \underline{\underline{s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

2) Every point on the line can be written as

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ 1+2t \end{pmatrix} \quad \text{for some } t \in \mathbb{R}.$$

Inserting this expression into the equation of the plane gives

$$-2\cdot 1 + 3\cdot(1+t) + (1+2t) = 5$$

$$-2 + 3 + 3t + 1 + 2t = 5$$

$$5t = 3$$

$$t = \frac{3}{5}$$ – inserting this number into the equation of the line gives the intersection point between ℓ and π.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\frac{3}{5} \\ 1+2\cdot\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 8/5 \\ 11/5 \end{pmatrix}}}$$

The line ℓ intersects the plane π in one point: $\begin{pmatrix} 1 \\ 8/5 \\ 11/5 \end{pmatrix}$

3) $\|2u+v\|^2 = (2u+v)\cdot(2u+v) = 4u\cdot u + 2u\cdot v + v\cdot 2u + v\cdot v$

$$= 4\underbrace{u\cdot u}_{\|u\|^2=1^2} + 4u\cdot v + \underbrace{v\cdot v}_{\|v\|^2=3^2} = 4u\cdot v + 10$$

$$u\cdot v = \|u\|\|v\|\cos\frac{2\pi}{3} = 1\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

So $\|2u+v\|^2 = 4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + 10 = -6 + 10 = 4$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\|2u+v\| = \sqrt{4} = 2}}$$

(Note that since $\|2u+v\| \geq 0$, the solution $\|2u+v\| = -\sqrt{4}$ to the equation $\|2u+v\|^2 = 4$ is not possible.)

4a) Set $w = 4\sqrt{2} - \sqrt{32}\, i$

$$|w| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{32})^2} = \sqrt{16 \cdot 2 + 32} = \sqrt{64} = 8$$

$$w = 8\left(\frac{4\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{32}}{8} i\right) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$$

$$= 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$ – the polar form of w

b) Set $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, where $r \geq 0$, $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Then the equation $z^2 = w$ becomes

$$\left(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right)^2 = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$r^2(\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)) = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\begin{cases} r^2 = 8 \\ 2\alpha = -\frac{\pi}{4} + 2\pi l \end{cases}$$ for some $l \in \mathbb{Z}$

$$r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$\alpha = -\frac{\pi}{8} + 2\pi l$. Inserting $l = 1$ and $l = 2$ gives, respectively, $\alpha_1 = \frac{7\pi}{8}$ and $\alpha_2 = \frac{15\pi}{8}$.

The roots of the equation are:

$$\begin{cases} z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right) \\ z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}\right) \end{cases}$$

4b), alternative solution:

Set $z = a+bi$, $a,b \in \mathbb{R}$.

Then $z^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

$$z^2 = 4\sqrt{2} - \sqrt{32}\,i \iff \boxed{\begin{cases} a^2 - b^2 = 4\sqrt{2} & (1) \\ 2ab = -\sqrt{32} & (2) \end{cases}}$$

Moreover, $|z^2| = |4\sqrt{2} - \sqrt{32}i|$ gives that

$$|z^2| = |z|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2+b^2$$

must be equal to

$$|4\sqrt{2} - \sqrt{32}i| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{32})^2} = \sqrt{16 \cdot 2 + 32} = \sqrt{64} = 8,$$

that is, $\underline{a^2+b^2 = 8}$ (3).

$(1)+(3)$: $2a^2 = 8 + 4\sqrt{2}$

$$a^2 = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$a = \pm\sqrt{4+2\sqrt{2}} \qquad \text{insert into (2):}$$

If $a = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$: $\quad b = \dfrac{-\sqrt{32}}{2\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \dfrac{-2\sqrt{8}}{2\sqrt{4+\sqrt{8}}} = -\sqrt{\dfrac{8}{4+\sqrt{8}}}$

If $a = -\sqrt{4+2\sqrt{2}}$: $\quad b = \dfrac{-\sqrt{32}}{-2\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\dfrac{8}{4+\sqrt{8}}}$

The solutions are
$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{4+\sqrt{8}} - \sqrt{\dfrac{8}{4+\sqrt{8}}}\,i \quad \text{and} \\ z_2 = -\sqrt{4+\sqrt{8}} + \sqrt{\dfrac{8}{4+\sqrt{8}}}\,i \end{cases}$$

5) Set $z = a+bi$. Thus $\mathrm{Re}\, z = a$ and $\mathrm{Im}\, z = b$.

$\bar{z} = a - bi$

$$\begin{aligned} \bar{z} = -z &\iff a - bi = -(a+bi) \\ &\iff a - bi = -a - bi \\ &\iff a = -a \\ &\iff 2a = 0 \\ &\iff a = 0 \end{aligned}$$

Since $a = \mathrm{Re}\, z$, this means that $\bar{z} = -z$ if and only if $\mathrm{Re}\, z = 0$.

6) The matrix of T is

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

$$T(e_1) = u \times e_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = u \times e_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(e_3) = u \times e_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

So the matrix of T is $\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}}$

MAA150 Vektoralgebra, vt-15.

Bedömningskriterier för tentamen TEN1 2015-02-17

För full poäng på en uppgift krävs fullständig lösning och tydligt svar.

1. (a): 3 poäng. En poäng ges för påbörjade korrekta och meningsfulla radoperationer, två för väsentligen löst uppgift, och tre för fullständig lösning med tydligt svar.
(b): 2 poäng. Ofullständig lösning kan ge ett poäng, om meningsfulla steg mot en lösning tagits.

2. En poäng vardera för: 1. insättning av linjens ekvation i planet; 2. bestämning av t; 3. bestämning av punkten.

3. I princip två poäng vardera för: 1. Utveckling av $\|2u+v\|^2$ och insättning av $\|u\|$ och $\|v\|$; 2. Bestämning av $u \bullet v$.

4. (a): 2 poäng. I princip ett poäng vardera för bestämning av belopp och argument.
(b): 3 poäng.
Lösning som binomisk ekvation: Uppställning av ekvationen $r^2e^{2\theta i} = 4\sqrt{2} - \sqrt{32}i$ ger en poäng. För två poäng krävs att uppgiften är väsentligen korrekt löst, för tre poäng krävs fullständig lösning.
Lösning på cartesisk form: En poäng ges för korrekt uppställt reellt ekvationssystem, ytterligare en poäng för att lösa detta. Tre poäng för fullständig och korrekt lösning.

5. En poäng för att visa endera riktningen i ekvivalensen, tre för att visa båda. Lösning som väsentligen innehåller bevis av båda riktningarna, men utan klar redovisning av detta, kan ge två poäng.

6. I princip: Två poäng för att korrekt beräkning av vektorprodukter, två poäng för att ta bestämma avbildningens matris baserat på formel eller bilderna av basvektorerna, och den sista poängen för att pussla ihop allt till en sammanhängande lösning.