Denna tentamen består av åtta om varannat SLUMPMÄSSIGT ORDNADE uppgifter som vardera kan ge maximalt 5 poäng. Den maximalt möjliga poängsumman är således 40. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 26 respektive 34 poäng. Lösningar förutsätts innefatta ordentliga motiveringar och tydliga svar. Samtliga lösningsblad skall vid inlämning vara sorterade i den ordning som uppgifterna är givna i. Undvik speciellt att skriva på baksidor av lösningsblad.

1. Låt $M = [(1,0,-1,1),(0,1,1,0),(1,2,0,1)]$ vara ett underrum till $\mathbb{E}^4$. Bestäm en ON-bas i M.

2. Den linjära operatorn $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras genom

$$(3,1,-1) \xrightarrow{F} (1,-1,2)\,, \quad (2,0,-1) \xrightarrow{F} (1,2,3)\,, \quad (0,-1,0) \xrightarrow{F} (3,1,-1)$$

Bestäm F:s matris i standardbasen. Är F bijektiv?

3. Skriv den kvadratiska formen $5x^2+8y^2+5z^2-4xy+8xz+4yz$ på diagonal form och förklara i detalj vad ekvationen $5x^2+8y^2+5z^2-4xy+8xz+4yz=1$ beskriver. Ange speciellt avståndet mellan ytan och origo. Koordinaterna (x,y,z) är givna i ett ON-system.

4. M_1, M_2 och M_3, definierade enligt $\begin{cases} M_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : 2x_1-3x_2-x_3=0\}, \\ M_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : 2x_1+2x_3-3x_4=0\}, \\ M_3 = [(2,5,-1,6),(3,-2,7,4)]\,, \end{cases}$

är alla underrum till $\mathbb{R}^4$. Bestäm om möjligt en bas i skärningen $M_1 \cap M_2 \cap M_3$.

5. Den linjära operatorn $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges i basen $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ av matrisen

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Visa att F är diagonaliserbar, dvs att det finns en bas av egenvektorer till F. Bestäm en sådan bas, ange F:s matris i den basen och visa hur relationen ser ut mellan F:s matriser i de två baserna.

6. Låt $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ vara en bas i det linjära rummet L, och definiera vektorerna $\tilde{\mathbf{e}}_1,\tilde{\mathbf{e}}_2,\tilde{\mathbf{e}}_3$ enligt

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{e}}_1 = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\,, \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3\,, \\ \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,. \end{cases}$$

Visa att $\tilde{\mathbf{e}}_1,\tilde{\mathbf{e}}_2,\tilde{\mathbf{e}}_3$ också är en bas, och ange koordinaterna för vektorn $5\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_3$ i denna andra bas.

7. Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har i en viss bas koordinaterna (x_1,x_2,x_3) respektive (y_1,y_2,y_3). Visa att funktionen g, definierad enligt

$$g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = x_1y_1 + 17x_2y_2 + ax_3y_3 + 4(x_1y_2+x_2y_1)$$
$$-\,5(x_1y_3+x_3y_1) - 17(x_2y_3+x_3y_2)$$

för vissa värden på a definierar en skalärprodukt i $\mathbb{R}^3$. Bestäm även dessa värden.

8. Konstruera en avbildningsmatris som definierar en linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som har nollrummet $[(2,-4,-3)]$ och värderummet $[(1,3,-1),(2,-3,1)]$.

MMA129 / kortfattade lösningar till tentamen 2013-08-14

(1) $M = [\underset{u_1}{(1,0,-1,1)}, \underset{u_2}{(0,1,1,0)}, \underset{u_3}{(1,2,0,1)}] \subset E^4$

Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod på u_1, u_2, u_3 ger

$$\begin{cases} f_1 = u_1 = (1,0,-1,1) \\ e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,1) \quad \text{ty } \|f_1\| = \sqrt{1+0+1+1} = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2 = u_2 - \langle u_2 | e_1 \rangle e_1 = (0,1,1,0) - \frac{1}{3}(0+0-1+0)(1,0,-1,1) \\ \quad = \frac{1}{3}[(0,3,3,0) + (1,0,-1,1)] = \frac{1}{3}(1,3,2,1) \\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1,3,2,1) \quad \text{ty } \|f_2\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+9+4+1} = \frac{1}{3}\sqrt{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_3 = u_3 - \langle u_3 | e_1 \rangle e_1 - \langle u_3 | e_2 \rangle e_2 \\ \quad = (1,2,0,1) - \frac{1}{3}(1+0+0+1)(1,0,-1,1) - \frac{1}{15}(1+6+0+1)(1,3,2,1) \\ \quad = \frac{1}{15}[(15,30,0,15) - (10,0,-10,10) - (8,24,16,8)] = \frac{1}{15}(-3,6,-6,-3) \\ \quad = \frac{1}{5}(-1,2,-2,-1) = -\frac{1}{5}(1,-2,2,1) \\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,-2,2,1) \quad \text{ty } \|f_3\| = \frac{1}{5}\sqrt{1+4+4+1} = \frac{1}{5}\sqrt{10} \end{cases}$$

Alltså: $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,1), \frac{1}{\sqrt{15}}(1,3,2,1), \frac{1}{\sqrt{10}}(1,-2,2,1)$ är ett exempel på en ON-bas i M

(2) $$\begin{cases} (3,1,-1) \xrightarrow{F} (1,-1,2) \\ (2,0,-1) \xrightarrow{F} (1,2,3) \\ (0,-1,0) \xrightarrow{F} (3,1,-1) \end{cases}$$ $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

F:s matris A i standardbasen ges således av relationen

$$A\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

dvs $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{(0+2+0)-(0+3+0)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -2 & -1 & -6 \\ -2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

där $$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = -25 \neq 0$$

dvs bägge matriserna i matrisprodukten för A är inverterbara, dvs A är inverterbar, dvs avbildningen F är bijektiv.

Forts. MMA129
2013-08-14

③ $(h(u)) \overset{\text{def}}{=} (5x^2+8y^2+5z^2-4xy+8xz+4yz) = (x\ y\ z)\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{G}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

← koordinaterna (x,y,z) är givna i en ON-bas

där G är matrisen till en symmetrisk avbildning (ty G är identifierad i en ON-bas).

Spektralsatsen ger att det finns en ON-bas av egenvektorer. Speciellt är avbildningen diagonaliserbar.

Egenvärden $0 = \det(G-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 8-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 9-\lambda & 0 & 9-\lambda \\ -2 & 8-\lambda & 2 \\ 0 & 18-2\lambda & 9-\lambda \end{pmatrix}$

$= (9-\lambda)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 8-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (9-\lambda)^2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8-\lambda & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda-9)^2$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0: \quad A-\lambda_1 I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 18 & 9 \\ 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad k_1 = t_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \lambda_{2,3} = 9: \quad A-\lambda_{2,3} I = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad k_{2,3} = t_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_3\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

där $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0 \vee t_3 \neq 0$

Vi får att

$h(u) = 0\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2 + 9\tilde{z}^2$ där $\underbrace{(\tilde{e}_1\ \tilde{e}_2\ \tilde{e}_3)}_{\text{ON-bas}} = \underbrace{(e_1\ e_2\ e_3)}_{\text{ON-bas}} \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{basbytesmatrisen (ortogonal)}}$

$1 = h(u)$ är således en cirkulär cylinder med radien $\frac{1}{3}$. Spec. gäller att AVST(yta, origo) $= 1/3$

④ $$\begin{cases} M_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^4 \\ M_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4 \\ M_3 = [(2,5,-1,6),(3,-2,7,4)] \subset \mathbb{R}^4 \end{cases}$$

En allmän vektor $u \in M_3$ kan med $r,s \in \mathbb{R}$ skrivas

$u = r(2,5,-1,6) + s(3,-2,7,4) = (2r+3s, 5r-2s, -r+7s, 6r+4s)$

För att u även ska tillhöra $M_1 \cap M_2$ krävs att

$$\begin{cases} 0 = 2(2r+3s) - 3(5r-2s) - (-r+7s) = -10r+5s = 5(-2r+s) \\ 0 = 2(2r+3s) + 2(-r+7s) - 3(6r+4s) = -16r+8s = 8(-2r+s) \end{cases}$$

dvs att $s = 2r$

Alltså Den mest allmänna vektorn som $M_1 \cap M_2 \cap M_3$ rymmer är $r(2,5,-1,6) + 2r(3,-2,7,4) = r(8,1,13,14)$

dvs $(8,1,13,14)$ är en bas i $M_1 \cap M_2 \cap M_3$

och $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = [(8,1,13,14)]$

Forts. MMA129
2013-08-14

5 $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges i basen e_1, e_2, e_3 av matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Egenvärden:</u> $0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & \lambda-2 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$= (\lambda-2)^2 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (\lambda-2)^2 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$$\begin{cases} \underline{\lambda_1 = 1}: \ A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ k_1 = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \underline{\lambda_{2,3} = 2}: \ A - \lambda_{2,3} I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ k_{2,3} = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

där $t_1 \neq 0$ och $t_1 \neq 0 \vee t_2 \neq 0$

I och med att egenrummet för dubbelegenvärdet 2 har dimensionen 2 så är F diagonaliserbar.
En bas av egenvektorer är t.ex. $e_1+e_2+e_3$, e_1+e_2, e_1+e_3.
F:s matris i en bas av egenvektorer är $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ om egenvektorerna tas i den ordning som numreringen innebär.
Vi har speciellt att $\tilde{A} = T^{-1}AT$ där basbytesmatrisen T här är vald till att vara lika med $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6 $\begin{cases} \tilde{e}_1 = 3e_1 + e_3 \\ \tilde{e}_2 = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ \tilde{e}_3 = e_2 + e_3 \end{cases}$ där e_1, e_2, e_3 är en bas i det linjära rummet L.

Vi har på matrisform att $(\tilde{e}_1\ \tilde{e}_2\ \tilde{e}_3) = (e_1\ e_2\ e_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{T}$

<u>där</u> $\det(T) = (6+2+0) - (0+9+0) = -1 \neq 0$

<u>dvs</u> T är inverterbar och är därmed en basbytesmatris, <u>dvs</u> även $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ är en bas i L.

<u>Utifrån att</u> $5e_1 + 0e_2 + 3e_3 = u = \tilde{x}_1\tilde{e}_1 + \tilde{x}_2\tilde{e}_2 + \tilde{x}_3\tilde{e}_3$

<u>fås på matrisform att</u> $(e_1\ e_2\ e_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{X_u} = (\tilde{e}_1\ \tilde{e}_2\ \tilde{e}_3) \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}}_{\tilde{X}_u}$.

<u>dvs</u> $eX_u = eT\tilde{X}_u$

I och med att e_1, e_2, e_3 är en bas så är de linj. ober.

<u>varför</u> $X_u = T\tilde{X}_u \iff \tilde{X}_u = T^{-1}X_u$

<u>dvs</u> $\tilde{X}_u = \dfrac{1}{(6+2+0)-(0+9+0)} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ <u>dvs</u> $\underline{\text{koord}_{\tilde{e}}(u) = (-1, 4, -8)}$

Forts. MMA129
2013-08-14

(7) $g(u,v) = x_1y_1 + 17x_2y_2 + a x_3y_3 + 4(x_1y_2 + x_2y_1) - 5(x_1y_3 + x_3y_1)$
$- 17(x_2y_3 + x_3y_2)$

I. g är symmetrisk, dvs $g(u,v) = g(v,u)$ visas enkelt

II. g är linjär i det andra argumentet (och i det första)
dvs $g(u, \lambda v + \mu w) = \lambda g(u,v) + \mu g(u,w)$ visas enkelt

III.
$$\begin{aligned} g(u,u) &= x_1^2 + 17x_2^2 + a x_3^2 + 8x_1x_2 - 10x_1x_3 - 34x_2x_3 \\ &= (x_1 + 4x_2 - 5x_3)^2 + x_2^2 + 6x_2x_3 + (a-25)x_3^2 \\ &= (x_1 + 4x_2 - 5x_3)^2 + (x_2 + 3x_3)^2 + (a-34)x_3^2 \end{aligned}$$

där $\begin{cases} g(u,u) \geq 0 \text{ för alla } u \in L \text{ kräver att } a \geq 34 \\ g(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ kräver att } a > 34 \end{cases}$

Alltså: g är en skalärprodukt i $\mathbb{R}^3$ om och endast om $a > 34$

(8) $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har nollrummet $[(2,-4,-3)]$
och värderummet $[(1,3,-1),(2,-3,1)]$

F kan inte definieras entydigt utifrån det givna, men exempelvis följande matris avbildningsmatris A representerar en avbildning F med de givna specifikationerna:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -3 & b \\ -1 & 1 & c \end{pmatrix} \quad \text{där} \quad A\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 8 - 3a = 0 \\ 6 + 12 - 3b = 0 \\ -2 - 4 - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 6 \\ c = -2 \end{cases}$$

dvs matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ definierar en av oändligt många avbildningar som har de angivna noll- och värderummen.

Tentamen 2013-08-14 — POÄNGSPANN (maxpoäng) för olika delmoment i uppgifter

1. En ON-bas i M är t.ex.

$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,1)$,
$\frac{1}{\sqrt{15}}(1,3,2,1)$,
$\frac{1}{\sqrt{10}}(1,-2,2,1)$

1p: Korrekt från M valt ut en vektor $\mathbf{u}_1$ och korrekt normerat den till $\mathbf{e}_1$
1p: Korrekt från M valt ut en andra vektor $\mathbf{u}_2$ och korrekt till formen definierat och bestämt en vektor $\mathbf{f}_2$ som tillhör M, som är skild från nollvektorn, och som är ortogonal mot den först valda vektorn, dvs definierat och bestämt t.ex. $\mathbf{f}_2 = \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1$
1p: Korrekt normerat $\mathbf{f}_2$ till $\mathbf{e}_2$
1p: Korrekt från M valt ut en tredje vektor $\mathbf{u}_3$ och korrekt till formen definierat och bestämt en vektor $\mathbf{f}_3$ som tillhör M, som är skild från nollvektorn, och som är ortogonal mot de två först valda vektorerna, dvs definierat och bestämt t.ex. $\mathbf{f}_3 = \mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3 | \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{u}_3 | \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2$
1p: Korrekt normerat $\mathbf{f}_3$ till $\mathbf{e}_3$

---

2. F:s matris i standardbasen är lika med

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -2 & -1 & -6 \\ -2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Avbildningen F är bijektiv

2p: Korrekt, från det givna om avbildningen F i standardbasen, sammanställt sambandet $\mathsf{AB} = \mathsf{C}$, där A är F:s avbildningsmatris i standardbasen och

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1p: Korrekt löst ut och bestämt avbildningsmatrisen A från det funna sambandet, dvs bestämt

$$\mathsf{A} = \mathsf{C}\mathsf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2p: Korrekt visat att avbildningen F är bijektiv, detta genom att visa att även matrisen C är inverterbar

---

3. Den kvadratiska formen $h(\mathbf{u})$ kan uttryckas på den diagonala formen $0\tilde{x}_1^{\,2} + 9\tilde{x}_2^{\,2} + 9\tilde{x}_3^{\,2}$, där relationen mellan den nya basen $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ och den ursprungliga $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_1 & \tilde{\mathbf{e}}_2 & \tilde{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 = h(\mathbf{u})$ är ekvationen för en cirkulär cylinder. Avståndet mellan ytan och origo är lika med $1/3$

1p: Korrekt funnit egenvärdena till den kvadratiska formen
1p: Korrekt funnit egenummen till den kvadratiska formen och geometriskt korrekt tolkat dessa
1p: Korrekt identifierat den diagonala formen för den kvadratiska formen
1p: Korrekt noterat vad ekvationen $1 = h(\mathbf{u})$ geometriskt betyder
1p: Korrekt (med förklaring) funnit avståndet mellan ytan och origo

4. En bas i $M_1 \cap M_2 \cap M_3$ är t.ex. (8,1,13,14)

---------------------------- **Lösningsvariant** --

1p: Korrekt framställt en allmän vektor i M_3

1p: Korrekt formulerat det ekvationssystem som innebär att en vektor i M_3 också tillhör $M_1 \cap M_2$

1p: Korrekt funnit lösningen till ekvationssystemet

2p: Korrekt funnit en bas i $M_1 \cap M_2 \cap M_3$

---

5. En bas av egenvektorer $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ till den linjära operatorn F är exempelvis

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

F :s matris i basen $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$, dvs $\tilde{\mathsf{A}}$, är lika med

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

och relationen till matrisen A i den ursprungliga basen är $\tilde{\mathsf{A}} = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{T}$

1p: Korrekt funnit egenvärdena till F

1p: Korrekt funnit det endimensionella egenrummet

1p: Korrekt funnit det tvådimensionella egenrummet

1p: Korrekt angivit F :s matris i basen av egenvektorer

1p: Korrekt angivit relationen mellan F :s matriser i de två baserna

---

6. Vektorerna $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ är en bas, detta ty matrisen T i matrisrelationen $\tilde{\mathsf{e}} = \mathsf{e}\mathsf{T}$ är inverterbar.

$$koord_{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3}(5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3) = (-1, 4, -8)$$

2p: Korrekt utifrån matrisrelationen $\tilde{\mathsf{e}} = \mathsf{e}\mathsf{T}$, där e och $\tilde{\mathsf{e}}$ är radmatriserna med vektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ resp. $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ som matriselement, identifierat och verifierat basbytes-matrisen T

1p: Korrekt noterat att koordinaterna för $5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3$ i basen $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ ges av koordinatmatrisen $\mathsf{T}^{-1}\mathsf{X}$, där X är lika med koordinatmatrisen $(5 \;\; 0 \;\; 3)^T$

1p: Korrekt bestämt inversen T^{-1} till basbytesmatrisen T

1p: Korrekt funnit koord:na för $5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3$ i basen $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$

---

7. g är en skalärprodukt i R^3 om och endast om $a > 34$

1p: Korrekt visat att $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, dvs att g är symmetrisk

1p: Korrekt visat att g är linjär i respektive av argumenten, dvs exempelvis att $g(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu g(\mathbf{u}, \mathbf{w})$

1p: Korrekt kvadratkompletterat i x_1

1p: Korrekt kvadratkompletterat i x_2 och i x_3

1p: Korrekt visat att g är positivt definit om och endast om $a > 34$

---

8. Exempelvis

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2p: Korrekt (med åtminstone ett minimum av förklaringar) funnit att två av avbildningsmatrisens kolonnvektorer ska vara två linjärt oberoende linjärkombinationer av de vektorer som spänner upp värderummet

1p: Korrekt tolkat nollrummet som rymmande de kolonn-vektorer vilka avbildas på nollvektorn, dvs att matris-sambandet $\mathsf{A}(2 \;\; -4 \;\; -3)^T = \mathsf{0}$ gäller

2p: Korrekt bestämt den tredje kolonnen så att nollrummet korrekt gestaltas

---