Betygskriterier

1. a Korrekt beräknad 1a ordnings derivata (1p), 2a ordnings derivata (1p).

   b Korrekt beräkning $|r'(t)|$ (0.5p), korrekt uttryck för integralen som beskriver längden av kurvan (1p), korrekt lösning av integralen (0.5p).

2. a Korrekt beskrivit derivatan av z med avseende på s respektive t (2p).

   b Korrekta partiella derivator för x,y,f eller formel för $z(s,t)$ om svaret i a ej använts (1p), korrekt lösning och svar (1p)

3. a Korrekt formel för gradienten (1p), korrekt lösning och svar (1p).

   b Derivatan beräknad med hjälp av skalärprodukt mellan gradient och riktningsvektor (1p), fullständig lösning inklusive normalisering av riktningsvektor (1p).

   c (det går lika bra att använda punkten $(1,-1,\sqrt{5})$ som $(1,-1,2)$). Tolkning gradient som normal till ytan / korrekt formel för planet direkt (1p), fullständig och korrekt lösning (2p).

4.
   - Det var ett teckenfel i tentamen vilket gjorde att beräkning av extrempunkter på den cirkulära delen av kurvan blev svårare än det var tänkt, den extrempunkten behöver därmed inte beräknas för full poäng.
   - Hittat alla kritiska punkter och noterat att de inte tillhör D (2p).
   - Lokaliserat minimum när $(x,y) \to (0,0)$ (1p).
   - Automatiskt erhållna poäng (2p)

5. a Korrekt definition (1p), korrekt beskrivning (1p).

   b Korrekt definition (2p), korrekt beskrivning (1p).

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Christopher Engström
Hjälpmedel: -

TENTAMEN I MATEMATIK
MAA152 Flervariabelkalkyl
Datum: 4 Maj 2018
Skrivtid: 3 timmar

Tentamen består utav 5 uppgifter updelade i underupgifter. För varje underuppgift är det angivet hur många poäng uppgiften kan ge totalt. För att få högsta poäng på en uppgift krävs att ett korrekt och tydligt angivet svar och en klar beskrivning av hur lösningen är strukturerad. Uppgifterna är ungefärligt ordnade efter svårighetsgrad.
Betygsgränser: Betyg 3: 12 poäng, Betyg 4: 16 poäng, Betyg 5: 20 poäng, Maxpoäng: 25

1. Givet kurvan $r(t) = \sin(t)i + \cos(t)j + t^2k$.

a) Beräkna första och andra ordningens derivata av $r(t)$. (2 p)

b) Beräkna längden av kurvan för intervallet $t = 0$ till $t = 2$. (2 p)

Lösning: a)

$$r'(t) = \cos(t)i - \sin(t)j + 2tk$$
$$r''(t) = -\sin(t)i - \cos(t)j + 2k$$

b)

$$|r'(t)| = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t) + (2t)^2} = \sqrt{1 + 4t^2}$$
$$\int_0^2 \sqrt{1+4t^2}dt$$

Vi gör variabelbytet

$$2t = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x,\ dt = \frac{e^x + e^{-x}}{4}dx$$

vilket ger

$$\int_{t=0}^{t=2} \sqrt{1+4t^2} = \int_{t=0}^{t=2} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} \frac{e^x + e^{-x}}{4}dx$$
$$= \int_{t=0}^{t=2} \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} \frac{e^x + e^{-x}}{4}dx = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{8}\int_{t=0}^{t=2} e^{2x} + 2 + e^{-2x}dx = \frac{1}{8}\left[\frac{e^{2x} + 4x - e^{-2x}}{2}\right]_{t=0}^{t=2}$$

$t = 0$ ger $x = 0$, $t = 2$ ger $x = \sinh^{-1}(2) = ln(2 + \sqrt{2^2+1}) = ln(2+\sqrt{5})$ vilket ger

$$\frac{1}{16}\left[e^{2x} + 4x - e^{-2x}\right]_{x=0}^{x=ln(2+\sqrt{5})} = (2+\sqrt{5})^2 + 4ln(2+\sqrt{5}) - (2+\sqrt{5})^{-2}$$

Uppgiften går även att lösa med Eulersubstitution med t.ex. variabelbytet $\sqrt{1+4t^2} = \sqrt{4}t + u$.

2.

a) Låt $z(s,t) = f(x(s,t),y(s,t),s)$, skriv upp de partiella derivatorna av z med hjälp av de partiella derivatorna av f, x, y.
Du kan anta att alla derivator är kontinuerliga. (2 p)

b) Givet $f(x,y,s) = s^2e^{x+y}$, $x = s - t$, $y = st$ beräkna dz/ds i punkten $(-1, -2)$. (2 p)

Lösning: a) Derivering med hjälp av kedjeregeln ger

$$\frac{\partial z}{\partial s} = f_1(x,y,s)\frac{\partial x}{\partial s} + f_2(x,y,s)\frac{\partial y}{\partial s} + f_3(x,y,s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f_1(x,y,s)\frac{\partial x}{\partial t} + f_2(x,y,s)\frac{\partial y}{\partial t}$$

b)

$$f_1(x,y,s) = s^2e^{x+y},\ f_2(x,y,s) = s^2e^{x+y},\ f_3(x,y,s) + 2se^{x+y}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 1,\ \frac{\partial y}{\partial s} = t$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = s^2e^{x+y} + s^2te^{x+y} + 2se^{x+y}$$

$s = -1, t = -2, x = 1, y = 2$ ger:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = e^3 - 2e^3 - 2e^3 = -3e^3$$

3.

a) Givet $z = f(x,y) = \sqrt{x^2 - 2y + y^2}$, beräkna uttrycket för gradienten till f. (2 p)

b) Beräkna derivatan för f i punkten $(1, -1)$ i riktning $(2,1)$. (2 p)

c) Beräkna ekvationen till tangentplanet till ytan $z - \sqrt{x^2 - 2y + y^2} = 0$ i punkten $(1, -1, \sqrt{5})$. (3 p)

Lösning: a) Derivera med hjälp av kedjeregeln.

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2y + y^2}}(2x,\ 2y - 2) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2y + y^2}}(x,\ y - 1)$$

b) Börja med at normalisera riktningsvektorn $|(2,1)| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $u = (2,1)/\sqrt{5}$.

$$\nabla f(1, -1) = \frac{1}{\sqrt{4}}(1,\ -2) = \frac{1}{2}(1, -2)$$

Riktningsderivatan fås av

$$\nabla f(x,y) \cdot u = \frac{1}{2}(1, -2) \cdot (2,1)/\sqrt{5} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(2 - 2) = 0$$

c) Ekvationen för tangentplanet fås av

$$z = f_1(1,-1)(x-1) + f_2(1,-1)(y+1) + f(1,-1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x-1) - (y+1) + 2 - z = 0$$

$$\Rightarrow x - 2y - 2z + 2 = 0$$

+ Det går även att lösa uppgiften genom att använda att gradienten är normal till tangentplanet.

4.

a) Hitta det största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = x^2 - y^2 + x + 2y$ i regionen $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2, x > 0, y > 0\}$ (5 p)

Lösning: Vi börjar med att hitta kritiska punkter genom att sätta gradienten till noll.

$$\nabla f(x,y) = (2x+1)i - (2y-2)j = 0$$

Detta ger kritisk punkt $(-1/2,1)$ vilken dock ligger utanför området D.
D är alla punkter inom en kvarts cirkel med radie $\sqrt{2}$ i det positiva x,y planet, vi sluter definitionsmängden och noterar att skulle max/min ligga på den öppna delen av randen så har vi inget max/min värde, men vi kan komma godtyckligt nära motsvarande värde på randen. $D' = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$ Längs $x-$axeln får vi $f(x,0) = x^2 + x$, $f'(x,0) = 2x + 1 > 0$, $0 \leq x \leq \sqrt{2}$.
Längs $y-$axeln får vi $f(0,y) = -y^2 + 2y$, sätter $f'(0,y) = -2y + 2 = 0$ vilket ger $y = 1$ och lokalt maximum $f(0,1) = 1$.

Det skulle också gå bra att påpeka att för $x > 0$, $0 < y < 2$ så är funktionen monotont växande x riktningen, vilket ger att maximum måste ligga någonstans på den cirkulära delen av området och minimum någonstans längs randen där $x \to 0$.
Användning av Lagrangemultiplikator för den cirkulära delen av randen ger:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 + x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

Vi söker x,y,λ för gradienten är 0.

$$L_x(x,y,\lambda) = 2x + 1 + 2\lambda x = 0$$

$$L_y(x,y,\lambda) = -2y - 2 + 2\lambda y = 0$$

$$L_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

1) ger $\lambda = -(2x+1)/2x$ vilket insatt i 2) ger $y = -1/(\lambda - 1) = 2x/(4x+1)$
Insättning i 3) ger

$$x^2 + \frac{(2x)^2}{(4x+1)^2} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(4x+1)^2 + 4x^2 - 2(4x+1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow 16x^4 + 8x^3 - 27x^2 - 16x - 2 = 0$$

Samma polynom fås om uppgiften istället löses med hjälp av variabelbyte ($x = t$ eller med hjälp av polära koordinater). Detta polynom har en rot $x \approx 1.350$ i intervallet vilket ger punkten $(1.350, 0.422)$.
Punkter att kontrollera inklusive ändpunkter för rand segmenten är därmed
$(0{,}0), (\sqrt(2){,}0), (0{,}\sqrt(2)), (1.350, 0.422)$.
$f(0{,}0) = 0$ (min), $f(\sqrt{2}{,}0) = 2 + \sqrt(2)$, $f(0{,}\sqrt{2}) = 2(\sqrt(2) - 1)$, $f(1.350{,}0.422) \approx 3.84$ (max).

5. Förklara i ord och definera vad som menas med att en funktion $f(x{,}y)$ i punkten $(a{,}b)$ är:

a) Kontinuerlig. (2 p)

b) Differentierbar. (3 p)

Lösning: För full poäng krävs både en korrekt definition (se kursboken) samt en kort förklaring vad de två egenskaperna innebär.

- Kontinuitet: Tolkning t.ex. som en generalisering av kontinuitet i flera dimensioner, att ytan inte får göra något "hopp" i punkten oavsett vilken kurva vi närmar oss punkten längs med.

- Differentierbarhet: Tolkning t.ex. som en generalisering av deriverbarhet i flera dimensioner eller att ytan runt en punkt kan approximeras väl med ett plan (linjarisering) om området är tillräckligt litet.