MÄLARDALENS HÖGSKOLA	**TENTAMEN I MATEMATIK**
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation	MMA129 Linjär algebra
Avdelningen för tillämpad matematik	*Datum:* 22 augusti 2014 *Skrivtid:* 5 timmar
Examinator: Lars-Göran Larsson	*Hjälpmedel:* Linjal

Denna tentamen består av åtta om varannat SLUMPMÄSSIGT ORDNADE uppgifter som vardera kan ge maximalt 5 poäng. Den maximalt möjliga poängsumman är således 40. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 26 respektive 34 poäng. Lösningar förutsätts innefatta ordentliga motiveringar och tydliga svar. Samtliga lösningsblad skall vid inlämning vara sorterade i den ordning som uppgifterna är givna i. Undvik speciellt att skriva på baksidor av lösningsblad.

1. Den linjära operatorn $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras av att den vrider vektorer kring, och med bibehållen vinkel till, vektorn $(1, 1, 1)$ på så vis att vektorn $(1, 0, 0)$ avbildas på $(0, 1, 0)$. Bestäm F:s matris i standardbasen.

2. Bestäm längden av den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ på vektorn $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ i det euklidiska rum E för vilket skalärprodukten är fixerad till

$$\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2 - 4x_2y_3 - 4x_3y_2 + 7x_3y_3\,,$$

där (x_1, x_2, x_3) och (y_1, y_2, y_3) är koordinaterna för $\mathbf{u}$ respektive $\mathbf{v}$ i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

3. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ har i standardbasen matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \\ 8 & 3 & 0 \\ -5 & -2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s nollrum och F:s värderum, och fastställ (med motivering) huruvida avbildningen är injektiv eller ej?

4. Visa att ekvationen $xy = 1 + z^2$ beskriver en tvåmantlad hyperboloid. Bestäm även avståndet mellan mantelytorna givet att (x, y, z) betecknar en punkts koordinater i ett ON-system.

5. Ett tänkt basbyte från $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ till $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ beskrivs genom sambanden

$$\begin{cases} x_1 = 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + 3\tilde{x}_3\,, \\ x_2 = 3\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3\,, \\ x_3 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3\,, \end{cases}$$

mellan koordinaterna (x_1, x_2, x_3) för en vektor $\mathbf{u}$ innan bytet och de $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ efter bytet. Visa att $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ verkligen är en bas, och ange koordinaterna för vektorn $-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ i denna nya bas.

6. Den linjära operatorn $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ matrisen

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

där $a \in \mathbb{R}$. Bestäm de värden på a för vilka operatorn är diagonaliserbar. Ange även för respektive av dessa värden en bas av egenvektorer till F.

7. Bestäm en ON-bas i underrummet $\{p \in \mathcal{P}_2 : p(-1) = p(1)\}$ till det linjära rummet $\mathcal{P}_2$ av (reellvärda) polynomfunktioner av grad högst 2, och utrustat med skalärprodukten $\langle p|q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$.

8. De fyra vektorerna $(-1, 2, 3, -5)$, $(2, -5, -8, 18)$, $(1, 0, 1, -11)$ och $(-1, 1, 1, 3)$ spänner upp ett underrum $\mathbb{U}$ till $\mathbb{R}^4$. Bestäm alla par av tal (r, s) för vilka vektorn $(r - 3, 1 - r, -3, 22 - 3r + s)$ tillhör $\mathbb{U}$. Bestäm även en bas i $\mathbb{U}$.

MMA129 / Lösningar till tentamen 2014-08-22

① $F: R^3 \to R^3$ där F vrider vektorer kring, och med bibehållen vinkel till, vektorn $(1,1,1)$ så att $F((1,0,0)) = (0,1,0)$. Det följer av symmetriskäl att $F((0,1,0)) = (0,0,1)$ och $F((0,0,1)) = (1,0,0)$, dvs F:s matris i standardbasen är lika med

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Speciellt gäller att $F((1,1,1)) = (1,1,1)$.

② I det euklidiska rummet E är skalärprodukten $\langle u|v \rangle$ fixerad enligt

$$\langle u|v \rangle = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2 - 4x_2y_3 - 4x_3y_2 + 7x_3y_3$$

$$= X^T \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} Y$$

Ingen beteckningsskillnad görs mellan en skalär och en 1×1-matris

där (x_1, x_2, x_3) och (y_1, y_2, y_3) är koordina för u resp. v i basen e_1, e_2, e_3, och där $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ och $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ är motsv. kolonnmatriser.

Den ortogonala projektionen av $e_1+e_2+e_3$ på e_1-e_3 är

$$(e_1+e_2+e_3)_{e_1-e_3} = \frac{\langle e_1+e_2+e_3 | e_1-e_3 \rangle}{\|e_1-e_3\|^2}(e_1-e_3)$$

$$= \frac{(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{(1\ 0\ -1)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}(e_1-e_3) = \frac{(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}}{(1\ 0\ -1)\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}}(e_1-e_3)$$

$$= \frac{2}{10}(e_1-e_3) = \frac{1}{5}(e_1-e_3)$$

Därmed fås att

$$\|(e_1+e_2+e_3)_{e_1-e_3}\| = \frac{1}{5}\|e_1-e_3\| = \frac{1}{5}\sqrt{10}\ \text{l.e.} = \sqrt{\frac{2}{5}}\ \text{l.e.}$$

Forts. MMA129
2014-08-22

(3) $F: R^3 \to R^4$ har i berörda standardbaser matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \\ 8 & 3 & 0 \\ -5 & -2 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 1 & 8 & -2 \\ 0 & 19 & -28 \\ -1 & -10 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & -20 & 11 \\ 0 & 19 & -28 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dvs $N(F) = \{(0,0,0)\}$ och $V(F) = [(2,3,8,-5), (-4,4,3,-2), (7,5,0,-10)]$

Antag att $F(u_1) = F(u_2)$, dvs $F(u_1) - F(u_2) = 0$.
F linjär ger sedan att $F(u_1 - u_2) = 0$, varför $u_1 - u_2$ måste vara lika med nollvektorn i R^3. Det senare eftersom F:s nollrum (det enda som avbildas på nollvektorn i R^4) endast innehåller just nollvektorn i R^3.
Vi har alltså att $F(u_1) = F(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$, dvs F är injektiv.

(4) $1 = xy - z^2 = \frac{1}{4}[2xy - (-2xy)] - z^2 = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x+y)^2 - z^2$

$= x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ där $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

där $\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0$ dvs M beskriver ett basbyte (där den s.k. basbytesmatrisen är lika med M^{-1}).

I och med att VL:et i $1 = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ är positivt och att den kvadratiska formen i HL:et har signaturen $(1,-1,-1)$ så följer att ekv. i fråga beskriver en tvåmantlad hyperboloid. v.s.v.

$$1 = xy - z^2 = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X^T G X$$

där G är matrisen till en symmetrisk avbildning Γ (ty G är symmetrisk i en ON-bas). Spektralsatsen ger att avbildningen är diagonaliserbar i en ON-bas av egenvektorer.

Egenvärden: $0 = \det(G - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda^2 - \frac{1}{4})$

$= -(\lambda+1)(\lambda+\frac{1}{2})(\lambda-\frac{1}{2})$

forts.

Forts. MMA129
2014-08-22

Forts. 4

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1: & G-\lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dvs } k_1 = t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t_1 \neq 0 \\ \lambda_2 = -\frac12: & G-\lambda_2 E = \begin{pmatrix} \frac12 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dvs } k_2 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t_2 \neq 0 \\ \lambda_3 = \frac12: & G-\lambda_3 E = \begin{pmatrix} -\frac12 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & -\frac12 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dvs } k_3 = t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t_3 \neq 0 \end{cases}$$

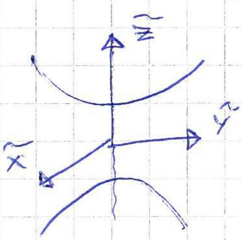
Välj $S = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 \\ 0 & -1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Då är kolonnvektorerna en ON-bas av egenvektorer varför S är ortogonal (dvs $S^T = S^{-1}$).

Basbyte $e \to \tilde{e}$: $eS = \tilde{e}$ (där både e och $\tilde{e}$ är ON-baser)

Vi får att $1 = xy - z^2 = X^T G X = (S\tilde{X})^T (S\tilde{G}S^{-1})(S\tilde{X})$

$$= \tilde{X}^T \underbrace{S^T}_{S^{-1}} S \tilde{G} \underbrace{S^{-1} S}_{E} \tilde{X} = \tilde{X}^T S^{-1} S \tilde{G} \tilde{X} = \tilde{X}^T \tilde{G} \tilde{X}$$

$$= (\tilde{x}\ \tilde{y}\ \tilde{z}) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = -\tilde{x}^2 - \frac12 \tilde{y}^2 + \frac12 \tilde{z}^2$$



Om $\tilde{x} = \tilde{y} = 0$ så $\tilde{z}^2 = 2$

Avståndet mellan de två mantelytorna är

$\text{AVST}((0,0,\sqrt2),(0,0,-\sqrt2)) = 2\sqrt2$ l.e.

5

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{S} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} \quad \text{där} \quad \det(S) = \det\begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 0 + 0 + 1(-1)^{3+1}(-15+14) = -1 \neq 0$$

dvs S har full rang och är därmed en basbytesmatris (i bytet från e till $\tilde{e} = eS$).

V.S.V.

Vi har vidare att $-e_1 + 2e_2 + e_3 = (e_1\ e_2\ e_3)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = eX_\alpha$

vilket ger att $\tilde{X}_\alpha = S^{-1} X_\alpha = \dfrac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & -7 & 11 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= -\begin{pmatrix} 1+2-2 \\ -5-14+11 \\ -2-6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dvs $-e_1 + 2e_2 + e_3 = -\tilde{e}_1 + 8\tilde{e}_2 + 3\tilde{e}_3$

dvs $\text{koord}_{\tilde{e}}(-e_1 + 2e_2 + e_3) = (-1, 8, 3)$

Forts. MMA129
2014-08-22

6 Den linjära operatorn $F: R^3 \to R^3$ har i basen e_1, e_2, e_3 matrisen $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = A$.

Egenvärden: $0 = \det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 1 \\ -4 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-a)(\lambda-7)$

$a=3$: $\lambda_{1,2} = 3$, $A - \lambda_{1,2}E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

dvs dim(egenrummet för $\lambda = 3$) < multipliciteten($\lambda = 3$)

dvs F är ej diag. bar

$a=7$: $\lambda_{2,3} = 7$, $A - \lambda_{2,3}E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

dvs dim(egenrummet för $\lambda = 7$) < multipliciteten ($\lambda = 7$)

dvs F är ej diag. bar

$a \neq 3, 7$:

$\lambda_1 = 3$, $A - 3E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-3 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a-3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $k_1 = t_1 \begin{pmatrix} 3-a \\ 1 \\ 3-a \end{pmatrix}$, $t_1 \neq 0$

$\lambda_2 = 7$, $A - 7E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & a-7 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $k_2 = t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7-a \end{pmatrix}$, $t_2 \neq 0$

$\lambda_3 = a$, $A - aE = \begin{pmatrix} 3-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 7-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $k_3 = t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t_3 \neq 0$

Alltså F är diagonaliserbar för $a \neq 3, 7$.

En bas av egenvektorer är för $a \neq 3, 7$
$(3-a, 1, 3-a), (0, 1, 7-a), (0, 1, 0)$.

Forts. MMA129
2014-08-22

7 $U = \{p \in P_2 : p(-1) = p(1)\}$ där P_2 är utrustat med skalärprodukten $\langle p|q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\,q(x)\,dx$.

Låt $p \in P_2$, dvs $p(x) = a + bx + cx^2$ där a, b, c är konstanter

Villkoret $p(-1) = p(1) \Leftrightarrow a - b + c = a + b + c \Leftrightarrow b = 0$

dvs underrummet U kan skrivas som spannet $[p_0, p_2]$.

Vi har att en ON-bas e_1, e_2 i U kan fås enligt följande

$$e_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2 dx}}\, p_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} p_0$$

$$f_2 = u_2 - \langle u_2 | e_1 \rangle e_1 = p_2 - \left(\int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{\sqrt{2}} dx\right) \frac{1}{\sqrt{2}} p_0 = p_2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} p_0$$

$$\|f_2\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \tfrac{1}{3}\right)^2 dx = 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{9}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) = 2\,\frac{9-5}{5 \cdot 9} = \frac{8}{45}$$

$$e_2 = \frac{1}{\|f_2\|} f_2 = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(p_2 - \frac{1}{3} p_0\right) = \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3p_2 - p_0)$$

dvs en ON-bas i U är $\frac{1}{\sqrt{2}} p_0,\ \sqrt{\frac{5}{8}}(3p_2 - p_0)$

8 $R^4 \supset U = [\overset{u_1}{(-1,2,3,-5)}, \overset{u_2}{(2,-5,-8,18)}, \overset{u_3}{(1,0,1,-11)}, \overset{u_4}{(-1,1,1,3)}]$

Finn (r,s) så att $\overset{w_{r,s}}{(r-3, 1-r, -3, 22-3r+s)} \in U$

dvs finn $\lambda_1, .., \lambda_4$ och (r,s) så att $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_4 u_4 = w_{r,s}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & r-3 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 1-r \\ 3 & -8 & 1 & 1 & -3 \\ -5 & 18 & -11 & 3 & 22-3r+s \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & r-3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & r-5 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 3r-12 \\ 0 & 8 & -16 & 8 & 37-8r+s \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 5 & -3 & 3r-13 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & r-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3+s \end{array}\right)$$

dvs Ok om $r = 2$ och $s = 3$

Alltså: $w_{r,s}$ tillhör U om och endast om $(r,s) = (2,3)$.
En bas i U är t.ex. u_1, u_2.

Tentamen 2014-08-22	POÄNGSPANN (maxpoäng) för olika delmoment i uppgifter
1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	**2p**: I analogi med det givna korrekt noterat att vektorn $(0,1,0)$ avbildas på $(0,0,1)$, och att vektorn $(0,0,1)$ avbildas på $(1,0,0)$ **1p**: Korrekt fastställt den första kolonnen i F:s matris **1p**: Korrekt fastställt den andra kolonnen i F:s matris **1p**: Korrekt fastställt den tredje kolonnen i F:s matris
2. $\left\| (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)_{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3} \right\| = \sqrt{2/5}$	**1p**: Korrekt skrivit ned uttrycket för den ortogonala projektionen av $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ på $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ **1p**: Korrekt tolkat hur den givna skalärprodukten tillämpas **1p**: Korrekt bestämt skalärprodukten av vektorerna $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ och $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ **1p**: Korrekt bestämt längden av vektorn $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ **1p**: Korrekt bestämt längden av den ortogonala projektionen
3. F:s nollrum är lika med mängden $\{(0,0,0)\}$ F:s värderum är lika med det linjära höljet $[(2,3,8,-5),(-4,4,3,-2),(7,5,0,-10)]$ F är injektiv eftersom nollrummet endast innehåller nollvektorn	**1p**: Korrekt funnit en trappstegsmatris som är radekvivalent med den linjära operatorns avbildningsmatris **1p**: Korrekt bestämt F:s värderum **1p**: Korrekt bestämt F:s nollrum **2p**: Korrekt förklarat varför är F injektiv
4. Den kvadratiska formen i högerledet av ekvationen $1 = xy - z^2$ har signaturen $(1,-1,-1)$ vilket betyder att ekvationen beskriver en tvåmantlad hyperboloid. Avståndet mellan de två mantelytorna är lika med $2\sqrt{2}$ l.e.	**2p**: Korrekt funnit den kvadratiska formen $xy - z^2$ har signaturen $(1,-1,-1)$ och därmed att ekvationen geometriskt betyder en tvåmantlad hyperboloid **2p**: Korrekt bestämt en ortogonal basbytesmatris som diagonaliserar den kvadratiska formen $xy - z^2$ till $-\tilde{x}^2 - \frac{1}{2}\tilde{y}^2 + \frac{1}{2}\tilde{z}^2$, där $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ betecknar en punkts koordinater i ett nytt ON-system **1p**: Korrekt bestämt avståndet mellan de två mantelytorna

5. Vektorerna $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ är en bas, detta ty matrisen S i matrisrelationen $\mathsf{X} = \mathsf{S}\tilde{\mathsf{X}}$ $\tilde{\mathsf{e}} = \mathsf{eS}$ är inverterbar.

$koord_{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3}(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = (-1, 8, 3)$

1p: Korrekt utifrån de givna sambanden på formen $\mathsf{X} = \mathsf{S}\tilde{\mathsf{X}}$ identifierat matrisen S, och sedan noterat att, om de givna sambanden verkligen motsvarar koordinater för en vektor i två olika baser, matrisen S i så fall är lika med basbytesmatrisen i ett basbyte från $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ till $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ (det som påmatrisform skrivs som $\tilde{\mathsf{e}} = \mathsf{eS}$)

1p: Korrekt verifierat att matrisen S uppfyller kravet på att vara en basbytesmatris

1p: Korrekt noterat att koordinaterna för $-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ i basen $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ ges av koordinatmatrisen $\mathsf{S}^{-1}\mathsf{X}$, där X är lika med koordinatmatrisen $(-1\ \ 2\ \ 1)^T$

1p: Korrekt bestämt inversen S^{-1} till basbytesmatrisen S

1p: Korrekt funnit koordinaterna för $-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ i basen $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$

---

6. Avbildningen är diagonaliserbar endast för $a \neq 3, 7$. En bas av egenvektorer är för dessa a t.ex.

$(3-a, 1, 3-a)$, $(0,1,0)$, $(0, 1, 7-a)$

1p: Korrekt avgjort vad som gäller i fallet $a = 3$

1p: Korrekt avgjort vad som gäller i fallet $a = 7$

1p: Korrekt avgjort vad som gäller i fallet $a \neq 3, 7$

2p: Korrekt i fallet $a \neq 3, 7$ funnit en bas av egenvektorer

---

7. En ON-bas i underrummet är t.ex

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}} p_0,\ \sqrt{\tfrac{5}{8}}(3p_2 - p_0)$$

där

$$p_0(x) = 1 \quad \text{och} \quad p_n(x) = x^n,\ n \in Z_+$$

1p: Korrekt funnit att underrummet spänns upp av polynomfunktionerna p_0 och p_2, här som följer betecknade med u_1 resp. u_2

1p: Korrekt normerat u_1 till e_1

1p: Korrekt formulerat en polynomfunktion f_2 som a) tillhör underrummet, som b) inte är lika med nollfunktionen och som c) är ortogonal mot u_1, dvs formulerat polynomfunktionen $u_2 - \langle u_2 | e_1 \rangle e_1$, samt korrekt bestämt skalärprodukten $\langle u_2 | e_1 \rangle$

1p: Korrekt bestämt skalärprodukten $\langle u_2 | e_1 \rangle$, och korrekt sammanställt f_2

1p: Korrekt normerat f_2 till e_2, och korrekt angivit e_1, e_2 som en ON-bas i det aktuella underrummet

---

8. Vektorn $(r-3, 1-r, -3, 22-3r+s)$ tillhör underrummet U om och endast om $(r, s) = (2, 3)$.

En bas i U är t.ex.

$(-1, 2, 3, -5)$, $(2, -5, -8, 18)$

2p: Korrekt tillsammans med den femte vektorn iscensatt en undersökning av vektorerna i spannet för underummet U, och korrekt funnit den till vektorernas (utökade) koefficientmatris radekvivalenta trappstegsmatris

1p: Korrekt från trappstegsmatrisen identifierat dimensionen på U och en bas i U

2p: Korrekt från trappstegsmatrisen identifierat vilka värden på r och s som gör att den femte vektorn ligger i underrummet U
