Avdelningen för Matematik
och tillämpad matematik
Mälardalens högskola
Examinator: Mats Bodin

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Tentamen Flervariabelkalkyl
MAA152 - TEN2
Datum: 2016-05-31
Hjälpmedel: inga

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Alla svar skall motiveras. Avsluta varje lösning med ett tydligt angivet svar.

1a. Definiera vad som menas med ett divergensfritt (el. solenodialt) respektive ett rotationsfritt vektorfält $\mathbf{F}$ i området D. (2p)

b. Formulera Greens sats. Var noga med att inkludera alla förutsättningar. (2p)

2 Beräkna värdet på dubbelintegralen (5p)

$$\iint_D (2x + y)\, \mathrm{d}A,$$

där D är området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 2\}$. Inkludera en skiss av området D.

3 Beräkna volymen av den kropp som begränsas ovanifrån av paraboloiden $z = 8 - x^2 - y^2$ och underifrån av konen $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$. Inkludera en skiss av kroppen. (5p)

4a. Motivera varför vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$ är konservativt på $\mathbb{R}^3$ på något annat sätt än att bestämma en potential till $\mathbf{F}$. (2p)

b. Bestäm en potential ϕ till $\mathbf{F}$ och beräkna värdet på linjeintegralen

$$\int_{\mathcal{C}} (y + z)\, \mathrm{d}x + (z + x)\, \mathrm{d}y + (x + y)\, \mathrm{d}z$$

där $\mathcal{C}$ är den parametriska kurvan $\mathbf{r}(t) = (t, -2t, 3t^2)$ för $0 \leq t \leq 1$. (4p)

5 Beräkna flödet

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, \mathrm{d}S$$

där $\mathbf{F}$ är vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ och ytan $\mathcal{S}$ är sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ med det utåtriktade fältet av enhetsnormaler $\hat{\mathbf{N}}$. (5p)

Divsion of Mathematics and applied mathematics Mälardalen University Examiner: Mats Bodin	MÄLARDALENS HÖGSKOLA ESKILSTUNA VÄSTERÅS	Examination Flervariabelkalkyl MAA152 - TEN2 Date: May 31, 2016 Exam aids: not any

All solutions should be presented so that calculations and arguments are easy to follow. All answers should be motivated. Each solution should end with a clearly stated answer.

1a. Define what is meant by a divergence free (or solenodial) vector field, and what is meant by a irrotational vector field $\mathbf{F}$ in a domain D. (2p)

b. State Greens theorem. Be carfeul to include all premises. (2p)

2 Find the value of the double integral (5p)

$$\iint_D (2x+y)\ \mathrm{d}A,$$

where D is the region $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 2\}$. Include a sketch of the region D.

3 Find the volume of the region bounded from above by the paraboloid $z = 8 - x^2 - y^2$ and from below by the cone $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$. Include a sketch of the region. (5p)

4a. Motivate why the vector field $\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z)\mathbf{i} + (z+x)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ is conservative on $\mathbb{R}^3$ in some other way than finding a potential for $\mathbf{F}$. (2p)

b. Find a potential ϕ for $\mathbf{F}$ and evaluate line integral

$$\int_{\mathcal{C}} (y+z)\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z$$

where $\mathcal{C}$ is the parametric curve $\mathbf{r}(t) = (t, -2t, 3t^2)$, where $0 \leq t \leq 1$. (4p)

5 Find the flux

$$\oiint_S \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S$$

where $\mathbf{F}$ is the vector field $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, and the surface $\mathcal{S}$ is the sphere $x^2+y^2+z^2 = 4$, and $\hat{\mathbf{N}}$ is the unit exterior normal. (5p)

MAA152 Flervariabelkalkyl, VT16.

Assessment criterias for TEN2 2016-05-31

General assessment criteria

All solutions should be presented so that calculations and arguments are easy to follow. All answers should be motivated. Each solution should end with a clearly stated answer.

Assessment problems

1.
- a) Correct definition: divergencefri **(1p)**, irrotational **(1p)**
- b) Correct statement **(2p)**, partial point is possible for essentially correct premises

2.
- correct figure of D **(1p)**, correct integration region/limits in double integral (including handling absolute value correctly) **(2p)**, relevant integral with correct iteration method **(1p)**, correct answer **(1p)**

3.
- correct figure **(1p)**, cylindrical coordinates **(1p)**, correct iteration limits **(2p)**, evaluating the integral **(1p)**

4.
- a) showing that $\text{curl}(\mathbf{F}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ **(1p)**, motivation of why $\mathbf{F}$ is conservative **(1p)**
- b) correct method of finding ϕ **(2p)**, finding correct ϕ **(1p)**, computing the integral using ϕ **(1p)**

5.
- computing divergence **(1p)**, correct usage of the divergence theorem **(2p)**, evaluating the integral **(2p)**

MAA152 : TEN2 2016-05-31

(1)

$\overline{F} = F_1(x,y,z)\,\overline{i} + F_2(x,y,z)\,\overline{j} + F_3(x,y,z)\,\overline{k}$ är

a) Divergensfritt på D om $div(\overline{F}) = 0$ på D

dvs $div(\overline{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$

b) rotationsfritt på D om $curl(\overline{F}) = (0,0,0)$ på D

dvs $curl(\overline{F}) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\overline{k} =$

$= (0,0,0)$:

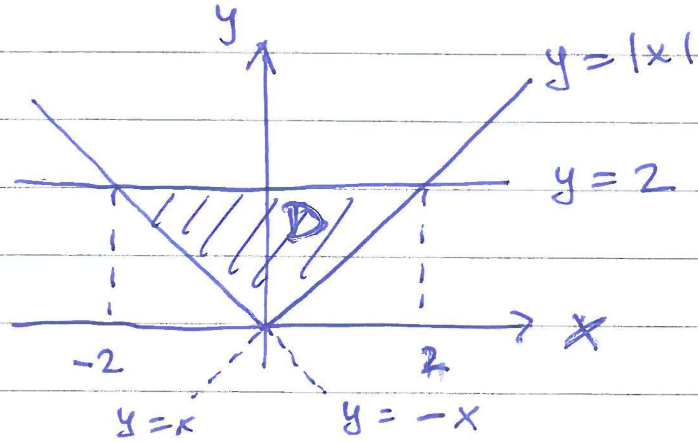
b) Green sats

Låt R vara ett reguljärt och slutet område i xy-planet, vars rand, $\mathcal{C}$, består av styckvis enkla släta slutna kurvor som är positivt orienterade med avseende på R. Om $\overline{F} = F_1\overline{i} + F_2\overline{j}$ är ett slätt (glatt) vektorfält på R gäller att

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

MAA152 : TEN 2 2016-05-31

(2)



x-enkel
styckvis y-enkel
så vi integrerar
lämpligen först
i y-riktning.

$$D = \{(x,y) : 0 \le y \le 2, -y \le x \le y\}$$

så

$$\iint_D (2x+y)\,dA = \int_0^2 dy \int_{-y}^{y} (2x+y)\,dx =$$

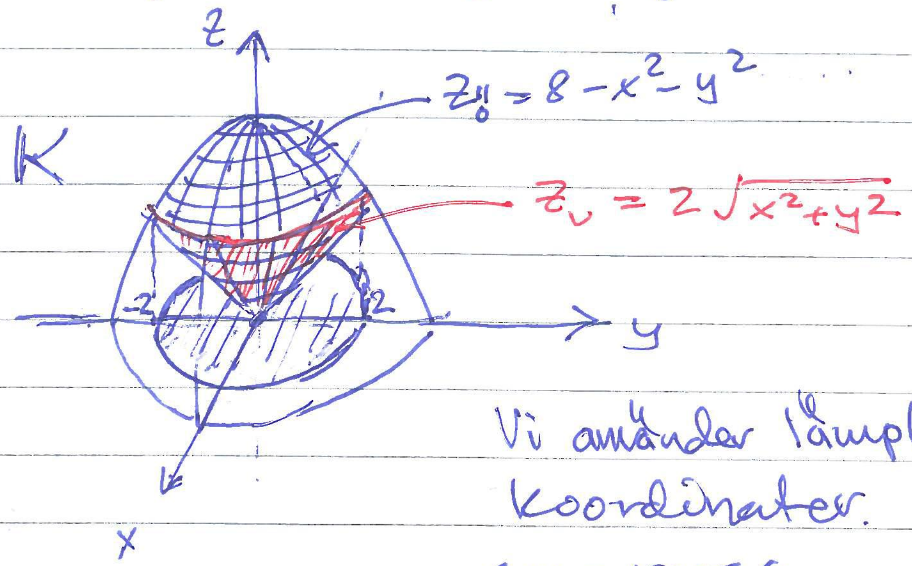
$$= \int_0^2 \left[x^2 + yx\right]_{-y}^{y} dy = \int_0^2 (y^2 + y^2 - y^2 + y^2)\,dy$$

$$= \int_0^2 2y^2\,dy = \left[\frac{2y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

Svar: $\iint_D (2x+y)\,dA = \frac{16}{3}$

MAA152:TEN2 2016-05-31

(3) $z_ö = 8 - x^2 - y^2 \qquad z_u = 2\sqrt{x^2+y^2}$



Vi använder lämpligen cylindriska koordinater.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$

$z_ö = 8 - r^2$ och $z_u = 2r$

Skärningspunkter: $8 - r^2 = 2r \Rightarrow r = -1 \underset{(-)}{+} 3 = 2$

$$\mathrm{Vol}(K) = \iiint_K dV = \int_0^2 r\,dr \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{=2\pi} \int_{2r}^{8-r^2} dz =$$

$$= 2\pi \int_0^2 r(8 - r^2 - 2r)\,dr = 2\pi \left[4r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{2r^3}{3}\right]_0^2$$

$$= 2\pi\left(16 - 4 - \frac{16}{3}\right) = \frac{40\pi}{3}$$

Svar: $\frac{40\pi}{3}$ v.e.

(4.) $\bar{F}(x,y,z) = (y+z)i + (z+x)j + (x+y)k$

a) Då $\mathbb{R}^3$ är enkelt sammanhängande område är $\bar{F}$ konservativt om $\bar{F}$ är rotationsfritt dvs, $\text{curl}(\bar{F}) = \bar{0}$

$$\text{curl}(\bar{F}) = \nabla \times \bar{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y+z \\ z+x \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(z+x) \\ -\left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(y+z)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}(z+x) - \frac{\partial}{\partial y}(y+z) \end{bmatrix}$$

$$= (1-1, 1-1, 1-1) = (0,0,0).$$

b) Om ϕ är en potential till $\bar{F}$ gäller $\nabla\phi = \bar{F}$ dvs

① $\frac{\partial\phi}{\partial x} = y+z$ ② $\frac{\partial\phi}{\partial y} = z+x$ ③ $\frac{\partial\phi}{\partial z} = x+y$

① $\frac{\partial\phi}{\partial x} = y+z \Rightarrow \phi(x,y,z) = yx + zx + g(y,z)$ (*)

②+(*) ger $\frac{\partial\phi}{\partial y} = x + g_1(y,z) \overset{②}{=} z + x \Rightarrow g_1(y,z) = z \Rightarrow$

$\Rightarrow g(y,z) = z\cdot y + h(z)$

så $\phi(x,y,z) = yx + zx + zy + h(z)$ (**)

③+(**) ger

$\frac{\partial\phi}{\partial z} = x + y + h'(z) \overset{③}{=} x + y \Rightarrow h'(z) = 0$

$\Rightarrow h(z) = C$ där C är en konstant.

(4) Vi väljer $C=0$ varpå

$\phi(x,y,z) = yx + zx + zy$ är en potential till $\bar{F}$ på $\mathbb{R}^3$.

Då $\bar{F}$ är konservativt är linjeintegralen oberoende av väg, varpå

$$\int_C (y+x)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz =$$

$$= \phi(\bar{r}(1)) - \phi(\bar{r}(0)) = \phi(1,-2,3) - \phi(0,0,0) =$$

$$= -2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 3\cdot(-2) = -5$$

Svar: -5

MAA152 : TEN 2 2016-05-31

(5) $\bar{F} = 2x\,i + xy\,j + xz\,k$

Vi använder divergenssatsen...

Då $\mathrm{div}(\bar{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) =$

$= 2 + x + x = 2 + x$

följer att flödet blir

$$\oiint_S F \cdot \hat{N}\, dS = \iiint_B \mathrm{div}(\bar{F})\, dV = \iiint_B (2+2x)\, dV$$

där B är klotet $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4\}$.

Då $2x$ är en udda funktion följer att

$$\iiint_B (2+2x)\, dV = \iiint_B 2\, dV + \underbrace{\iiint_B 2x\, dV}_{=0} =$$

$$= 2\iiint_B dV \underset{\text{sfäriska koord.}}{=} 2 \cdot \int_0^2 dR \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{2\pi} R^2 \sin\phi\, d\theta =$$

$$= 2 \cdot 2\pi \int_0^2 R^2\, dR \int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi = 4\pi \left[\frac{R^3}{3}\right]_0^2 \cdot \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi} =$$

$$= 4\pi \cdot \frac{2^3}{3} \cdot 2 = \frac{4^3\pi}{3} = \frac{64\pi}{3}$$

Svar: Flödet är $\frac{64\pi}{3}$.