MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Erik Darpö

TENTAMEN I MATEMATIK
MAA150 Vektoralgebra — TEN1
Datum: 14 augusti 2015 — *Skrivtid:* 3 timmar
Hjälpmedel: Skrivdon

*Denna tentamen TEN1 består av 5 uppgifter, med en sammanlagd poängsumma om 25 poäng. För betyget **3** krävs en erhållen poängsumma om minst 12 poäng, för betyget **4** krävs 16 poäng, och för betyget **5** krävs 20 poäng. Samtliga lösningar förutsätts innefatta ordentliga motiveringar och tydliga svar.*

1. a) Lös det linjära ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1\,, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1\,, \\ x_2 + x_3 = 1\,, \\ x_2 + 2x_3 = 0\,. \end{cases}$$

b) Bestäm den radreducerade trappstegsformen av matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(5 p)

2. Låt $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $v = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

a) Bestäm längderna av vektorerna u och v, och vinkeln emellan dem.

b) Bestäm vektorprodukten $u \times v$.

c) Ge ett exempel på en nollskild vektor som är vinkelrät mot vektorn $u \times v$.

Glöm inte att motivera dina lösningar. *(6 p)*

3. Låt $z = 1 - i$ och $w = \sqrt{3} + i$.

a) Bestäm $|z|$, $|w|$ och $|zw|$.

b) Skriv talen z och w på polär form.

c) Skriv talet zw på polär form.

(5 p)

4. Planet π i $\mathbb{R}^3$ innehåller punkten $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, och är vinkelrätt mot vektorn $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Bestäm ekvationen till planet π (på normalform).

b) Ange två punkter, utöver A, som ligger i planet π.

(4 p)

5. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av $F(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 + 3x_3 \\ x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}$.

a) Bestäm matrisen till F.

b) Är F inverterbar? Bestäm i så fall matrisen till den inversa avbildningen F^{-1}.

(5 p)

The exam is available in English overleaf!

MÄLARDALEN UNIVERSITY
School of Education, Culture and Communication
Division of Applied Mathematics
Examiner: Erik Darpö

EXAMINATION IN MATHEMATICS
MAA150 Vector algebra TEN1
Date: 14th August 2015 *Time:* 3 hours
Materials allowed: Writing material only

*This exam TEN1 consists of 5 problems, with a total score of 25 points. To obtain the grades **3**, **4** and **5**, scores of at least 12, 16 respectively 20 points are required. All solutions are to include motivations and clear answers to the questions asked.*

1. a) Solve the linear system of equations $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1\,, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1\,, \\ x_2 + x_3 = 1\,, \\ x_2 + 2x_3 = 0\,. \end{cases}$

b) Determine the row-reduced echelon form of the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(5 p)

2. Let $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ and $v = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

a) Determine the lengths of the vectors u and v, and the angle between them.

b) Determine the vector product $u \times v$.

c) Give an example of a non-zero vector that is perpendicular to the vector $u \times v$.

Remember to give motivations to your answers. *(6 p)*

3. Let $z = 1 - i$ and $w = \sqrt{3} + i$.

a) Determine $|z|$, $|w|$ and $|zw|$.

b) Write the numbers z and w on polar form.

c) Write the number zw on polar form.

(5 p)

4. The plane π in $\mathbb{R}^3$ contains the point $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ and is perpendicular to the vector $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Determine the equation of the plane π (on normal form).

b) Specify two points, other than A, that are contained in the plane π.

(4 p)

5. A linear map $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is given by $F(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 + 3x_3 \\ x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}$.

a) Determine the matrix of F.

b) Is F invertible? If so, determine the matrix of the inverse map F^{-1}.

(5 p)

Tentamen finns på svenska på andra sidan!

MAA150 Vektoralgebra

Lösningsförslag till tentamen 14 augusti 2015

1a) Systemet har totalmatris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Systemet har alltså entydig lösning:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

b) Matrisen A är den vänstra delen av totalmatrisen till ekvationssystemet i föregående deluppgift.

Av uträkningen ovan framgår att $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Den radreducerade trappstegsformen av A är alltså $\mathrm{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

a) $\|u\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\|v\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3+2+3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Låt ϑ beteckna vinkeln mellan u och v.

Då är $u \bullet v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\vartheta$, dvs $\cos\vartheta = \dfrac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}$

$u \bullet v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = 1 \cdot \sqrt{3} + 0 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\cos\vartheta = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Eftersom $0 \leq \vartheta \leq \pi$ så gäller att $\vartheta = \dfrac{\pi}{6}$

$\underline{\|u\| = \sqrt{2} \ , \ \|v\| = 2\sqrt{2} \ , \ \angle(u,v) = \vartheta = \dfrac{\pi}{6}}$

b) $u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{3} \cdot 0 \cdot e_1 + 1 \cdot \sqrt{3}\, e_2 + 1 \cdot \sqrt{2} \cdot e_3$

$- \sqrt{2} \cdot 1 \cdot e_1 - \sqrt{2} \cdot 1 \cdot e_1 - \sqrt{3} \cdot 1 \cdot e_2$

$= -\sqrt{2}\, e_1 + \sqrt{2}\, e_2 = \underline{\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}}$

c) Exempelvis är u vinkelrät mot $u \times v$ (enligt definitionen av vektorprodukten).

Ett annat exempel är vektorn $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, eftersom

$w \bullet (u \times v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = 0 \cdot (-\sqrt{2}) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \sqrt{2} = 0$.

3a) $|z| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

$|w| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$

$|zw| = |z|\cdot|w| = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$

b) $z = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \underline{\underline{\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}}$

$w = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \underline{\underline{2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}}$

c) $zw = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

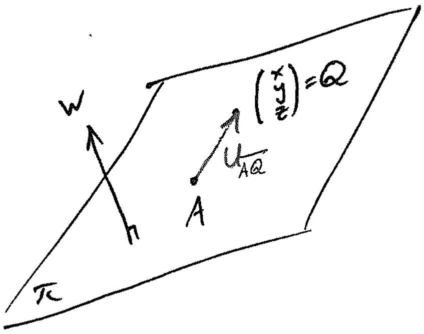
$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6} = -\frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi}{12} = -\frac{\pi}{12}\right]$

$\Rightarrow zw = \underline{\underline{2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)}}$

4) Låt $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Eftersom w är vinkelrät mot planet π så gäller att $Q \in \pi$ om och endast om vektorn $u_{\overline{AQ}}$ är vinkelrät mot w.



$$u_{\overline{AQ}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}$$

$$w \perp u_{\overline{AQ}} \iff w \bullet u_{\overline{AQ}} = 0$$

$$w \bullet u_{\overline{AQ}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot (x-1) + (-1) \cdot (y-2) + (-1) \cdot z$$

$$= x - 1 - y + 2 - z = x - y - z + 1$$

$$w \bullet u_{\overline{AQ}} = 0 \iff x - y - z + 1 = 0$$

$$\underline{\underline{x - y - z = -1}}$$

planets ekvation

b) Exempelvis $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, och $\underline{\underline{C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$ ligger i planet, eftersom

$(-1) - 0 - 0 = -1$ $\quad (\Rightarrow B \in \pi)$ och

$0 - 1 - 0 = -1$ $\quad (\Rightarrow C \in \pi)$

5) $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 + 3x_3 \\ x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}$

a) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^3$. Då är

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 + 3x_3 \\ x_1 - 2x_3 \end{pmatrix} = F(x),$$

dvs, A är F:s matris.

b) Avbildningen F är inverterbar om och endast om dess matris har full rang, dvs $\operatorname{rank} A = 3$.

För att bestämma rangen av A söker vi finna den radreducerade trappstegsformen av A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Här ser vi att rref(A) kan ha maximalt två nollskilda rader, alltså är $\operatorname{rank}(A) \leq 2$.

Matrisen A är alltså inte inverterbar.

MAA150 Vektoralgebra, vt-15.

Bedömningskriterier för tentamen TEN1 2015-08-14

För full poäng på en uppgift krävs fullständig lösning och tydligt svar. Var och en av de fem uppgifterna bedöms som en helhet; lösningarna på de olika deluppgifterna sammanvägs till sammanfattande poäng för hela uppgiften.

Generella principer för bedömingen av deluppgifter:

För alla deluppgifter: För full poäng krävs fullständig och väl motiverad lösning.
Deluppgifter med maximalpoäng 2: En poäng kan ges för visad förståelse för lösningsmetoden, och viss färdighet att tillämpa den.
Deluppgifter med maximalpoäng 3: En poäng kan ges för en konstruktiv ansats som leder mot lösningen. För två poäng krävs en väsentligen korrekt lösning, med mindre brister eller att något mindre steg fattas/är felaktigt.