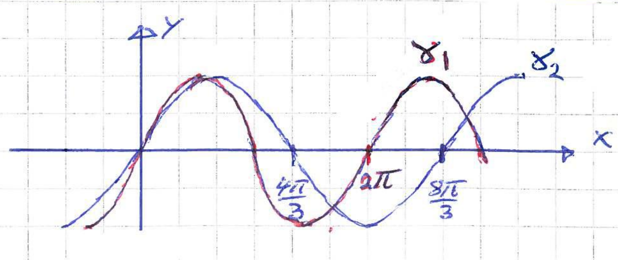
MAA151 / Lösningar till övningstentamen TEN1, nr 2(2)

1

$f(x) = \sin(x)$

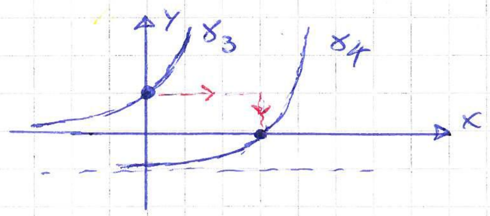
$\begin{cases} \gamma_1: & y = \sin(x) \\ \gamma_2: & y = \sin\left(\frac{3x}{4}\right) \end{cases}$



där vinkelfrekvensen $\omega_2 = \frac{3}{4}$ och perioden $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{8\pi}{3}$

$g(x) = e^x$

$\begin{cases} \gamma_3: & y = e^x \\ \gamma_4: & y+1 = e^{x-3} \end{cases}$



där γ_4 är γ_1 parallellförflyttad $+3$ steg i x-led och -1 steg i y-led

2

$$\lim_{x\to\infty} e^{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{u} \\ x\to\infty \text{ motsv. } u\to 0^+ \end{array}\right]$$

ty exponentialfunktion är kontinuerlig

$$= e^{\lim_{u\to 0^+} \frac{1}{u}\sin(u)} = e^1 = e$$

standardgränsvärde

3

$$f(x) = \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n x^n}_{\text{potensserie i } x}$$

omm $\left|-\frac{x}{2}\right| < 1$

Konvergensintervallet $= \{x : |x| < 2\} = (-2, 2)$

4

$\begin{cases} f(t) = \arcsin(2t) \\ g(t) = \sqrt{1-4t^2} \end{cases} \qquad \gamma: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

Vi har att riktningskoefficienten för tangenten i en punkt (x, y) på kurvan γ är lika med

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\left(dy/dt\right)}{\left(dx/dt\right)} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{-8t}{\sqrt{1-4t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-(2t)^2}}\cdot 2} \overset{\text{för } |t|<\frac{1}{2}}{=} -2t$$

En ekv. för tangenten i punkten som motsv. $t = 1/4$ är

$$y - g\left(\tfrac{1}{4}\right) = -2\cdot\tfrac{1}{4}\left(x - f\left(\tfrac{1}{4}\right)\right) \iff y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

(Forts. MAA151 TEN1, Övn.ten. 2)

5

Givet $x, y \geq 0$ och $x+y=8$

Sök x och y så att x^3+y^2 är minimal.

Vi har att minimera funktionen $x \xrightarrow{f} x^3+(8-x)^2$ vars definitionsmängd är intervallet $[0,8]$. Deriv. ger

$$f'(x) = 3x^2+2(8-x)(-1) = 3x^2+2x-16 = 3\left(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{16}{3}\right)$$
$$= 3\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}-\frac{48}{9}\right] = 3\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{7}{3}\right)^2\right] = 3\left(x+\frac{1}{3}+\frac{7}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}-\frac{7}{3}\right)$$
$$= 3\left(x+\frac{8}{3}\right)(x-2)$$

1:a-derivattest

	ÄP	SP	ÄP
x	0	2	8
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	lok max $\searrow$	lok min	$\nearrow$ lok max

(SP = Stationär punkt, ÄP = Ändpunkt)

Av testet framgår att $f_{min} = f(2) = 44$ och att detta minimum uppnås om de sökta talen x och y är lika med 2 resp. 6.

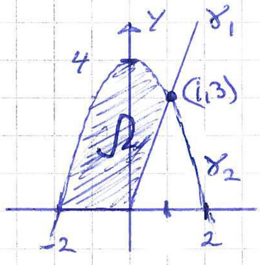
6

$$\int dx\, \ln(2x+3) = x\ln(2x+3) - \int x \frac{1}{2x+3}\, 2\, dx$$

(lägg till och dra ifrån)

$$= x\ln(2x+3) - \int \frac{2x+3-3}{2x+3}\, dx = x\ln(2x+3) - x + \frac{3}{2}\ln(2x+3) + C$$
$$= \left(x+\frac{3}{2}\right)\ln(2x+3) - \left(x+\frac{3}{2}\right) + \underbrace{\left(C+\frac{3}{2}\right)}_{\tilde{C}} = \frac{1}{2}(2x+3)\left[\ln(2x+3)-1\right] + \tilde{C}$$

7



$$\begin{cases} \gamma_1: \; y = \frac{3}{2}(x+|x|) = \frac{3}{2}\begin{cases} x-x, & x<0 \\ x+x, & x\geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 3x, & x\geq 0 \end{cases} \\ \gamma_2: \; y = 4-x^2 \end{cases}$$

$$A(\Omega) = \int_{-2}^{1} \left(f_2(x)-f_1(x)\right) dx = \int_{-2}^{1} f_2(x)\,dx - \int_{0}^{1} f_1(x)\,dx$$

$$= \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} - \underbrace{\frac{1\cdot 3}{2}}_{\text{arean av en triangelskiva}} = \left[\left(4-\frac{1}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)\right] - \frac{3}{2} = 12-\frac{9}{3}-\frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

Svar: $\frac{15}{2}$ a.e.

8

DE: $y''+2y'+2y=0$, BV: $y(0)=2$, $y'(0)=1$

DE:s KE är $0 = r^2+2r+2 = (r+1)^2+1 = (r+1)^2-i^2 = (r+1+i)(r+1-i)$

dvs de karakt. rötterna är $-1+i$ och $-1-i$.

Den allmänna lösningen till DE:en är därför $y = e^{-x}(A\cos(x)+B\sin(x))$

Deriv. ger: $y' = -e^{-x}(A\cos(x)+B\sin(x)) + e^{-x}(-A\sin(x)+B\cos(x))$

Anpassning till BV ger: $\begin{cases} 2 = y(0) = 1\cdot(A\cdot 1+B\cdot 0) \\ 1 = y'(0) = -1\cdot(A\cdot 1+B\cdot 0)+1(-A\cdot 0+B\cdot 1) \end{cases}$ dvs $\begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases}$

Det som löser DE och BV är $y = e^{-x}(2\cos(x)+3\sin(x))$