

Denna tentamen TEN2 består av 6 uppgifter, med en sammanlagd poängsumma om 25 poäng. För betyget **3** krävs en erhållen poängsumma om minst 12 poäng, för betyget **4** krävs 16 poäng, och för betyget **5** krävs 20 poäng. Lösningar förutsätts innefatta ordentliga motiveringar och tydliga svar. Samtliga lösningsblad skall vid inlämning vara sorterade i den ordning som uppgifterna är givna i.

1. En linjär avbildning  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ges av

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en bas i  $\ker F$  och en bas i  $\operatorname{im} F$ . (5 p)

2. Vektorerna  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  och  $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  bildar en bas i underrummet  $U \subset \mathbb{R}^4$ .

- a) För vilket värde på talet  $b \in \mathbb{R}$  gäller att vektorn  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}$  ligger i  $U$ ?
- b) Givet  $b$  sådant att  $v \in U$ , bestäm koordinaterna för vektorn  $v$  i basen  $(u_1, u_2)$ .  
Vektorn  $v$  och underrummet  $U$  är alltså desamma som i a).

(5 p)

3. Avgör om matrisen  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{6} \end{pmatrix}$  är ortogonal eller ej. (3 p)

4. Ligger vektorn  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  i det ortogonala komplementet till underrummet

$$U = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3?$$

(2 p)

5. Bestäm samtliga egenvärden, och motsvarande egenvektorer, till den linjära avbildning

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ som ges av matrisen } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5 p)$$

6. Bestäm en ortonormerad (d v s ON-) bas i underrummet  $U = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$ . (5 p)

*The exam is available in English overleaf!*

This exam TEN2 consists of 6 problems, with a total score of 25 points. To obtain the grades **3**, **4** and **5**, scores of at least 12, 16 respectively 20 points are required.  
All solutions are to include motivations and clear answers to the questions asked.

1. A linear map  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  is given by

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

Determine a basis in  $\ker F$  and a basis in  $\operatorname{im} F$ . (5 p)

2. The vectors  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  and  $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  constitute a basis of the linear subspace  $U \subset \mathbb{R}^4$ .

- a) For which value of the number  $b \in \mathbb{R}$  does the vector  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}$  belong to  $U$ ?
- b) Given  $b$  such that  $v \in U$ , determine the coordinates of the vector  $v$  in the basis  $(u_1, u_2)$ .  
*The vector  $v$  and the subspace  $U$  are the same as in a).*

(5 p)

3. Determine whether or not the matrix  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{6} \end{pmatrix}$  is orthogonal. (3 p)

4. Does the vector  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  belong to the orthogonal complement of the subspace

$$U = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3?$$

(2 p)

5. Determine all eigenvalues, and the corresponding eigenvectors, of the linear map

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ that is given by the matrix } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5 p)$$

6. Determine an orthonormal basis of the subspace  $U = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$ . (5 p)

*Tentamen finns på svenska på andra sidan!*

# MAA150 Vektoralgebra

## Lösningsförslag till tentamen TEN2 26 mars 2015

1) F:s matris är  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Ekvationen  $F(x)=0$  har totalmatris

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \textcircled{2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{l} \textcircled{-1} \\ \textcircled{1} \textcircled{2} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{l} \textcircled{-1} \\ \downarrow \\ \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Sätt  $x_3 = t$ :  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

Detta betyder att vektorn  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  utgör en bas i  $\ker(F)$ .

1, forts  $\text{im}(F) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

Vill bestämma en linjärt oberoende delmängd av ovanstående fyra vektorer, som spänner upp  $\text{im}(F)$ .

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow F \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = 0$$

Detta system har totalmatris  $\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \end{array} \right)$

enligt tidigare beräkning.

Pivotelement finns i kolonn 1, 2 och 4, vilket innebär att vektorerna  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  utgör en bas i  $\text{im}(F)$ .

2)  $v \in U \iff$  det finns tal  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  sådana att  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = v$ .  
 Dessa tal kallas i så fall för v:s koordinater i basen  $(u_1, u_2)$ .

Ekvationen har totalmatris

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ b \\ b+1/2 \end{pmatrix}$$

Ekvationen är lösbar om och endast om  $b + \frac{1}{2} = 0$

$$\iff \underline{b = -\frac{1}{2}}.$$

I så fall är lösningen  $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$

a)  $v \in U$  om och endast om  $b = -\frac{1}{2}$ .

b) v:s koordinater är  $1, \frac{3}{2}$  ( $[v]_{(u_1, u_2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ ).

$$3) \quad A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{u_1} & \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{u_2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$

$A$  är ortogonal om och endast om  $u_1, u_2$  bildar en ON-bas i  $\mathbb{R}^2$ .

$$u_1 \cdot u_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 0 \quad \text{OK}$$

$$\|u_1\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 1 \quad \text{OK}$$

$$\|u_2\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{2}^2 + (-\sqrt{6})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2+6} = \frac{1}{2} \sqrt{8} = \sqrt{2} \neq 1 \quad \text{NEJ.}$$

$u_1, u_2$  bildar inte en ON-bas i  $\mathbb{R}^2$  (eftersom  $\|u_2\| \neq 1$ )  
 så  $A$  är inte ortogonal.

---

$$4) \quad v \in \mathcal{U}^\perp \iff v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{och} \quad v \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\text{Men} \quad v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1^2 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 0 = -1 \neq 0$$

så  $v \notin \mathcal{U}^\perp$ .

5) Egenvärdena till  $T$  är lösningarna till sekulärekvationen  $\det(A - \lambda I_3) = 0$

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^3 - 1 \cdot (-1) \cdot (1-\lambda) = (1-\lambda)^3 + (1-\lambda) = (1-\lambda) \underbrace{((1-\lambda)^2 + 1)}_{\geq 1 \text{ för alla } \lambda \in \mathbb{R}}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

$\lambda = 1$  är det enda egenvärdet till  $T$ .

Egenvektorer med egenvärde 1 är alla vektorer  $x \neq 0$  som uppfyller  $T(x) = x$ , d.v.s.  $(A - I_3)x = 0$ , eller  $x \in \ker(A - I_3)$ .

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekv.  $(A - I_3)x = 0$  är ekvivalent med  $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ .

$$\text{Sätt } x_2 = t: \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Egenvektorer till  $T$  är alla vektorer på formen

$$x = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ där } t \neq 0.$$

De har egenvärde 1, vilket är det enda egenvärdet till  $T$ .

$$6) \mathcal{U} = \text{span}\{u_1, u_2\}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gör Gram-Schmidts algoritmen på  $u_1, u_2$ , för att få fram en ON-bas i  $\mathcal{U}$ :

$$f_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$v_2 = u_2 - (u_2 \cdot f_1) f_1$$

$$u_2 \cdot f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1^2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v_2 = u_2 - (u_2 \cdot f_1) f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 0^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Vektorerna  $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  och  $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  utgör

tillsammans en ON-bas i  $\mathcal{U}$ .

---



# MAA150 Vektoralgebra, vt-15.

## Bedömningskriterier för tentamen TEN2 2015-03-26

---

För full poäng på en uppgift krävs fullständig lösning och tydligt svar.

1. En poäng för korrekt uppställd totalmatris och ytterligare en genomförd Gausselimination. Därutöver en poäng för korrekt slutsats om värderummet, och två poäng för bestämning nollrummet.
2. En poäng vardera för följande:
  1. uppställning av ekvationen  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = v$ ;
  2. korrekt uppställd totalmatris;
  3. bestämning av den radreducerade trappstegsformen;
  4. korrekt slutsats om värdet på  $b$ ;
  5. bestämning av koordinaterna.
3. Korrekt löst uppgift ger full poäng, oavsett metod. Enstaka poäng kan ges för en korrekt ansats som gått fel efter vägen, exempelvis på grund av felräkning.
4. En poäng för korrekt ansats, ytterligare en poäng för korrekt lösning.
5. Tre poäng för beräkning av egenvärden, två poäng för egenvektorerna. I båda fallen ger en korrekt ansats en poäng. Vid beräkning av egenvärdena kan två poäng ges om determinanten är korrekt uppställd och utvecklad, men nollställena ej (eller felaktigt) bestämda.
6. Bestämning av den första basvektorn ger en poäng, bestämning en vektor som är vinkelrät mot den första ger ytterligare tre, och normering av den andra vektorn ytterligare en poäng. Felräkningar medför poängavdrag.