MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Erik Darpö

TENTAMEN I MATEMATIK
MAA150 Vektoralgebra TEN2
Datum: 7 november 2014 *Skrivtid:* 3 timmar
Hjälpmedel: Skrivdon

*Denna tentamen TEN2 består av 6 uppgifter, med en sammanlagd poängsumma om 25 poäng. För betyget **3** krävs en erhållen poängsumma om minst 12 poäng, för betyget **4** krävs 16 poäng, och för betyget **5** krävs 20 poäng. Lösningar förutsätts innefatta ordentliga motiveringar och tydliga svar. Samtliga lösningsblad skall vid inlämning vara sorterade i den ordning som uppgifterna är givna i.*

1. Bestäm en bas i nollrummet $\ker(T)$ och en bas i värderummet $\operatorname{im}(T)$, där $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ är den linjära avbildning som ges av $T(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -2x_1 + 4x_3 \end{pmatrix}$. *(4p)*

2. Bestäm en bas i det ortogonala komplementet $U^\perp$ till underrummet
$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$. *(4p)*

3. a) Visa att vektorerna $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$.

b) Bestäm koordinaterna för vektorn $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i denna bas.

(4p)

4. Givet vektorerna

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

använd Gram-Schmidts metod för att konstruera en ortonormal bas b_1, b_2, b_3 i $\mathbb{R}^3$, där b_1 är parallell med u_1. *(4p)*

5. Bestäm alla värden på konstanten $t \in \mathbb{R}$ för vilka matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & t \\ 4 & 9 & t^2 \end{pmatrix}$ är inverterbar.

(4p)

6. a) Visa att $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, och $u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är egenvektorer till den linjär avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x) = Ax$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Avgör om T är diagonaliserbar, och ange i så fall en inverterbar matris S och en diagonalmatris D sådana att $D = S^{-1}AS$.

(5p)

MÄLARDALEN UNIVERSITY
School of Education, Culture and Communication
Division of Applied Mathematics
Examiner: Erik Darpö

EXAMINATION IN MATHEMATICS
MAA150 Vector algebra TEN2
Date: 7th November 2014 *Time:* 3 hours
Materials allowed: Writing material only

*This exam TEN2 consists of 6 problems, with a total score of 25 points. To obtain the grades **3**, **4** and **5**, scores of at least 12, 16 respectively 20 points are required.*
All solutions are to include motivations and clear answers to the questions asked.

This is a translation of the exam TEN2 that was given on 7th November 2014. The original exam was given in Swedish only.

1. Find a basis in the kernel $\ker(T)$ and a basis in the image $\mathrm{im}(T)$, where $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ is the linear map given by $T(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -2x_1 + 4x_3 \end{pmatrix}$. *(4p)*

2. Determine a basis of the orthogonal complement $U^\perp$ of the subspace $U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$. *(4p)*

3. a) Show that the vectors $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ constitute a basis of $\mathbb{R}^3$.

b) Determine the coordinates of the vector $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in this basis.

(4p)

4. Given the vectors
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$
construct, using the Gram-Schmidt algorithm, an orthonormal basis b_1, b_2, b_3 of $\mathbb{R}^3$, with b_1 being parallel to u_1. *(4p)*

5. Determine all values of the constant $t \in \mathbb{R}$ for which the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & t \\ 4 & 9 & t^2 \end{pmatrix}$ is invertible. *(4p)*

6. a) Show that $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, and $u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ are eigenvectors of the linear map $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x) = Ax$, where
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Determine whether or not T is diagonalisable and, if it is, find an invertible matrix S and a diagonal matrix D such that $D = S^{-1}AS$.

(5p)

MAA150 Vektoralgebra

Lösningsförslag till tentamen TEN2 11 nov 2014

1) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -2x_1 + 4x_3 \end{pmatrix}$

T:s matris är $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

pivotelement

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$Ax = 0 \iff \begin{cases} x_1 \phantom{+\tfrac{1}{2}x_2} - 2x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ där } t \in \mathbb{R}$$

Så $\ker T = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

och vektorn $\begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bildar en bas i $\ker T$.

Eftersom den radreducerade trappstegsformen av matrisen A har pivotelement i första och andra kolonnen, så gäller att $Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $Ae_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ bildar en bas i $\text{im}(T)$.

Alternativt: Enligt dimensionssatsen gäller att

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{=3} = \underbrace{\dim(\ker(T))}_{=1} + \dim(\text{im}(T)), \text{ alltså } \dim(\text{im}(T)) = 2$$

och därför $\text{im}(T) = \mathbb{R}^2$.

Vektorerna e_1, e_2 bildar en bas i $\mathbb{R}^2$, och därmed i $\text{im}(T)$.

2) $U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

Låt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. $x \in U^\perp \Leftrightarrow x \cdot u$ för alla $u \in U$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem, med totalmatris $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$$\begin{array}{c} -2 \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ 2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ -2 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.v.s., $U^\perp = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ och därmed bildar vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en bas i $U^\perp$.

3. a) u_1, u_2, u_3 är linjärt oberoende om och endast om ekvationen $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ enbart har lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ har totalmatris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Vektorerna u_1, u_2, u_3 är alltså linjärt oberoende.
Eftersom $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ så gäller därmed även att $\operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\} = \mathbb{R}^3$, så u_1, u_2, u_3 bildar en bas i $\mathbb{R}^3$.

b) Vi söker reella tal $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ så att $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = x$
Detta är ett linjärt ekvationssystem med totalmatris

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$. Gausselimination (samma radoperationer som i deluppgift a) ger $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

d.v.s. $\begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$.

Vi har alltså $x = -2u_1 + 1u_2 + 1u_3$, d.v.s.,

x:s koordinater i basen u_1, u_2, u_3 är $-2, 1, 1$.

4) $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$b_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} \quad \text{(parallell med } u_1\text{).}$$

$$f_2 = u_2 - (u_2 \cdot b_1)\,b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{3}(1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot 1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

(Vektorn f_2 är ortogonal mot b_1, men har ej längd ett.)

$$b_2 = \frac{1}{\|f_2\|}f_2 = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}}$$

$$f_3 = u_3 - (u_3 \cdot b_1)b_1 - (u_3 \cdot b_2)b_2$$

$$u_3 \cdot b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1^2 + 1.0 + 1.0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$u_3 \cdot b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$f_3 = u_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\-1/3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$b_3 = \frac{1}{\|f_3\|}f_3 = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}}$$

Alltså: Vektorerna $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ bildar en ON-bas i $\mathbb{R}^3$, och $b_1 \parallel u_1$.

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & t \\ 4 & 9 & t^2 \end{pmatrix}$ är inverterbar $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & t \\ 4 & 9 & t^2 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot t^2 + 1\cdot t\cdot 4 + 1\cdot 2\cdot 9 - 4\cdot 3\cdot 1 - 9\cdot t\cdot 1 - t^2\cdot 2\cdot 1$$

$$= t^2 - 5t + 6 = \left(t - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(t - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{24}{4}$$

$$= \left(t - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(t - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(t - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= (t-3)(t-2)$$

Så $\det A \neq 0 \Longleftrightarrow t \neq 2, 3$

<u>Matrisen A är alltså inverterbar för alla $t \in \mathbb{R}$ utom $t = 2$ och $t = 3$.</u>

6) <u>NOT</u>: I b-uppgiften skall det stå:
"Avgör om $\underline{\underline{F}}$ är diagonaliserbar"

a) $F(u_1) = Au_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -1+1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)\cdot u_1$

så $\underline{u_1}$ är en <u>egenvektor</u> med <u>egenvärde -1</u>.

$F(u_2) = Au_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3-2 \\ -1+6+1 \\ 0+3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u_2$

så $\underline{u_2}$ är en <u>egenvektor</u> med <u>egenvärde 2</u>.

$F(u_3) = Au_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2-2 \\ -3+4+1 \\ 0+2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\cdot u_3$

så $\underline{u_3}$ är en <u>egenvektor</u> med <u>egenvärde 1</u>.

b) En avbildning (eller matris) är diagonaliserbar om och endast om det existerar en bas bestående av egenvektorer.
Eftersom egenvektorerna u_1, u_2 och u_3 har skilda egenvärden så följer det att de är linjärt oberoende, och därmed en bas i $\mathbb{R}^3$. <u>Alltså är F diagonaliserbar.</u>

Basbytesmatris: $\underline{S} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

Diagonalmatris: $\underline{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Då är $\underline{D = S^{-1}AS}$

Svar till tentamen TEN2 i MAA150 Vektoralgebra 7 november 2014

1. $\ker(T) = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$, $\mathrm{im}(T) = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$ $(= \mathbb{R}^2)$.

2. $U^\perp$ spänns upp av den enda basvektorn $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. $[x]_{\underline{u}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d v s $x = (-2) \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3$.

4. $b_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Matrisen är inverterbar för alla $t \neq 2, 3$.

6. Ja, T är diagonaliserbar. Avbildningens matris i basen $\underline{u} = [u_1, u_2, u_3]$ är $D = [T]_{\underline{u}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, basbytesmatrisen $S = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Answers to examination TEN2 in MAA150 Vector algebra 7th November 2014

1. $\ker(T) = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$, $\operatorname{im}(T) = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ $(= \mathbb{R}^2)$.

2. $U^\perp$ is spanned by the single basis vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. $[x]_{\underline{u}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d v s $x = (-2) \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3$.

4. $b_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. The matrix is invertible for all $t \neq 2, 3$.

6. The linear map T is diagonalisable. The matrix of T in the basis $\underline{u} = [u_1, u_2, u_3]$ is $D = [T]_{\underline{u}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, and the change-of-basis matrix $S = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

MAA150 Vektoralgebra höstterminen 2014

Bedömningskriterier för TEN2 2014-11-07

---

1. Två poäng vardera för nollrum och värderum. För att full poäng skall ges på någondera del krävs fullständig och korrekt lösning av denna del. En ofullständig eller delvis felaktig lösning kan ge en poäng.

2. En poäng för uppställning av linjärt ekvationssystem, en poäng för lösning av systemet, två poäng för korrekt tolkning. Alternativt kan två poäng ges till den som resonerar sig fram till ekvationssystemet utifrån definitionen av det ortogonala komplementet, i det fallet ges enbart en poäng för korrekt tolkning av lösningen.

3. Två poäng för vardera deluppgift, enligt samma kriterier som på uppgift 1.

4. En poäng för att bestämma b_1, ytterligare en poäng för b_2, en poäng för att korrekt ställa upp formeln för b_3, och en poäng för att korrekt bestämma b_3. Den som anger korrekta formler för alla tre basvektorerna, men inte förmår att tillämpa dem på riktigt sätt (exempelvis genom att inte kunna räkna ut skalärprodukten), kan som mest få två poäng på uppgiften.

5. Två poäng för *a)*-uppgiften, tre för *b)*. På del *b)* ges i princip en poäng vardera för korrekt (och motiverad) slutsats om diagonaliserbarhet, uppställning av matrisen S samt uppställning matrisen D.