MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Johan Richter

TENTAMEN I MATEMATIK
MAA141 Kalkyl, grundkurs TEN1
Datum: 3 maj 2019 *Skrivtid:* 3 timmar
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, passare

Den sammanlagda poängsumman på tentan är 25 poäng. 12 poäng krävs för godkänt. För betyget **4** krävs 16 poäng och för betyget **5** krävs 20 poäng. Motivering ska anges på alla uppgifter om det inte explicit anges annat.

1. Beräkna gränsvärdet (4p)

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x.$$

Lösning: En direkt insättning ger $\infty - \infty$ vilket är ett farligt fall så vi får göra en omskrivning. Vi förlänger med konjugatet som standardmetoden föreskriver.

$$\sqrt{x^2+x+1}-x = \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x} = \frac{x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}$$

Eftersom vi är intresserade av positiva värden av x kan vi ta $|x| = x$. Alltså är

$$\frac{x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x} = \frac{x+1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}.$$

Nu kan vi beräkna gränsvärdet.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2},$$

2. (a) Beräkna (2p)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

Tips: Variabelbytet $t = x-1$ kan vara bra.

Lösning: Variabelbytet $t = x+1$ ger $t \to 0$ då $x \to 1$. Vi får

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

(b) Beräkna (2p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan(x)}.$$

Tips: Variabelbytet $t = \arctan(x)$ kan vara bra.

Lösning: Variabelbyyte $t = \arctan(x)$ ger $x = \tan(t)$. Då $x \to 0$ så $t \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{\tan(t)}{t} == \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} \cdot \frac{1}{\cos(t)} = 1.$$

3. Beräkna derivatan av funktionerna.

(a) (2p)

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Lösning: Kedjeregeln ger

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Vi gör liknämningt.

$$\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} =$$
$$\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Svar:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(b) (2p)

$$g(x) = \cos^3(x^2+x+1).$$

Lösning: Kedjeregeln ger

$$g'(x) = 3\cos^2(x^2+x+1)\cdot\frac{d}{dx}(\cos(x^2+x+1)) =$$
$$3\cos^2(x^2+x+1)\cdot -\sin(x^2+x+1)\cdot(2x+1).$$

Svar:
$$g'(x) = -3\cos^2(x^2+x+1)\cdot\sin(x^2+x+1)\cdot(2x+1).$$

4. Derivera (4p)
$$f(x) = x\cdot\arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2}).$$

Lösning: Vi skriver först om

$$\ln(\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Produkt- och kedjereglerna ger sedan

$$f'(x) = \arctan(x) + x\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\frac{1}{1+x^2} =$$
$$\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \arctan(x).$$

Svar: $f'(x) = \arctan(x)$.

5. Bestäm ekvationen för tangenten i punkten $(1,1)$ till kurvan (4p)
$$x^2+xy+y^2 = 3.$$

Lösning:
Skriv $f(x)$ istället för y. Då får vi

$$2x + f(x) + xf'(x) + 2f(x)f'(x) = 0.$$

Omskrivning ger
$$f'(x)(x+2f(x)) = -2x - f(x)$$
eller
$$f'(x) = -\frac{2x+f(x)}{x+2f(x)}.$$

Vi vet att $f(1) = 1$ vilket ger

$$f'(1) = -\frac{3}{3} = -1.$$

Tangenten har alltså lutningen -1. En rät linje har ekvationen

$$y = kx + m.$$

Vi vet att $k = -1$ så ekvationen blir

$$y = -x + m.$$

Vi vet att punkten $(1,1)$ ska ligga på tangenten så

$$1 = -1 + m$$

vilket betyder att $m = 2$.

Svar: Tangentens ekvation är $y = -x + 2$.

6. Bestäm eventuella största och minsta värden till (5p)

$$f(x) = x^3 e^{-x}.$$

Skissa också grafen till f.

Lösning: Vi deriverar först.

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} + x^3 e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} x^3 (3 - x).$$

$f'(x) = 0$ endast om $x = 0$ eller $x = 3$. Vi gör nu en teckentabell. För enkelhetes skull återger jag endast tabellen i text här.

Om $x < 0$ är $f'(x) > 0$. Om $0 < x < 3$ är $f'(x) > 0$. Om $3 < x$ är $f'(x) < 0$. Så 0 är inte en extrempunkt, men 3 är en lokal maxpunkt. Ett ögonlbicks fundering visar att 3 också är en global maxpunkt.

Vi får $f(3) = 27e^{-3}$ vilket alltså blir största värdet.

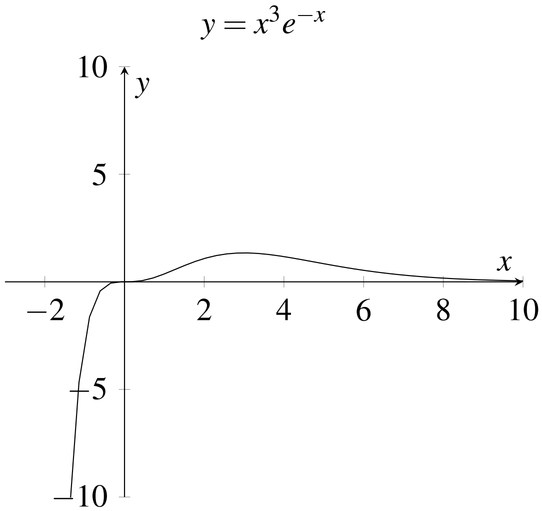
Vi ser att

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

och

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Vi kan nu skissa grafen.



Svar: Största värdet är $27e^{-3}$. Något minsta värde finns inte.