1 Bestäm tangenten till kurvan $y = \underbrace{f\left(\frac{4}{x+5}\right)}_{g(x)}$ i punkten $P: (-3, g(-3))$.

Vi har utifrån den givna värdetabellen för f att

$$\begin{cases} g(-3) = f\left(\frac{4}{-3+5}\right) = f(2) = 8 \\ g'(x) = \frac{d}{dx} f\left(\frac{4}{x+5}\right) = f'\left(\frac{4}{x+5}\right)\cdot\left(-\frac{4}{(x+5)^2}\right) \\ g'(-3) = f'(2)\cdot\frac{-4}{2^2} = 4(-1) = -4 \end{cases}$$

och därmed att en ekvation för tangenten i P är

$$y - g(-3) = g'(-3)\,[x-(-3)]$$

$$\Leftrightarrow\ y - 8 = -4(x+3) \Leftrightarrow \underline{y = -4(x+1)}$$

2 Den generella primitiven till f ges av

$$\int dx\, f(x) = \int dx\, x e^{-x/5} = x\left(-5e^{-x/5}\right) - \int dx\, 1\left(-5e^{-x/5}\right)$$

$$= -5xe^{-x/5} - 25e^{-x/5} + C = C - 5(x+5)e^{-x/5}$$

Om C väljes så att $1 = C - 5(-5+5)e^{-(-5)/5}$, dvs så att $C = 1$, fås $F(x)$ dvs $\underline{F(x) = 1 - 5(x+5)e^{-x/5}}$

3

$$x \longrightarrow \frac{(e^x - x - 1)\,x}{x - \sin(x)} \overset{\text{def.}}{=} f(x)$$

Vi har att

$$f(x) = \frac{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) - x - 1\right)x}{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right)x}{\frac{x^3}{6} + O(x^5)} = \frac{x^3\left(\frac{1}{2} + O(x)\right)}{x^3\left(\frac{1}{6} + O(x^2)\right)}$$

i en punkterad omgivning till punkten 0, och därmed att

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3}\,\frac{\frac{1}{2}+O(x)}{\frac{1}{6}+O(x^2)} = 1\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+O(x)\right)}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}+O(x^2)\right)} = \frac{\frac{1}{2}+0}{\frac{1}{6}+0}$$

$$= \underline{3}$$

Forts. MAA151
TEN1, Övn.ten 1

4) $x^2y' + 3xy = 4$ för $x > 0$ och med $y(2) = 2$

Mult. med x (som är $\neq 0$ då $x > 0$) ger att det nya VL:et är en total derivata ty $x^3y' + 3x^2y = \frac{d}{dx}(x^3y)$.
Vi har därmed att $(x^3y)' = 4x$. Primitivtagning ger att $x^3y = 2x^2 + C$ varför $y = \frac{2}{x} + \frac{C}{x^3}$
där $2 = y(2) = \frac{2}{2} + \frac{C}{2^3}$ dvs $C = 8$

Summering BVP:et löses av $y = \frac{2}{x} + \left(\frac{2}{x}\right)^3$

5) $$\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \dots = \frac{2}{\sqrt{x}}\left[1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4x} - \dots\right]$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x}} \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} = \frac{4}{2\sqrt{x}+1} \quad \text{för } x > \frac{1}{4}$$
(omm $\left|-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right| < 1 \iff \frac{1}{2} < \sqrt{x} \iff x > \frac{1}{4}$)

6) $f(x) = 6x^2 - x^3$, $D_f = [1, 2]$

Vi har att $f'(x) = 12x - 3x^2 = -3x(x-4) > 0$ (för $x \in D_f$)
dvs f är strängt växande i hela D_f

1:a-der. test

x	1		2
$f'(x)$		+	
$f(x)$	lok min	↗	lok max

f kontinuerlig på D_f (som är sluten och begränsad) varför f antar alla värden mellan f_{min} och f_{max}

$$\begin{cases} f_{min} = f(1) = 6 - 1 = 5 \\ f_{max} = f(2) = 6 \cdot 4 - 8 = 16 \end{cases}$$

7) $$\int_0^{\pi/2} |\cos(x) - \sin(x)|\,dx = \int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \sin(x))\,dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos(x) - \sin(x))\,dx$$
$$= \left[\sin(x) + \cos(x)\right]_0^{\pi/4} - \left[\sin(x) + \cos(x)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0+1) - \left[(1+0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$
$$= 4\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

8) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{2 - e^x} \\ g(x) = \ln(x) \end{cases}$ ger $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln(x))$
$= \sqrt{2 - e^{\ln(x)}} = \sqrt{2 - x}$

där $D_{f \circ g} = \{x : x > 0 \wedge x \leq 2\} = (0, 2]$ och $V_{f \circ g} = [0, \sqrt{2})$

Vidare $\begin{cases} y = (f \circ g)(x) \\ y = \sqrt{2 - x},\ 0 < x \leq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = (f \circ g)^{-1}(y) \\ x = 2 - y^2,\ y \geq 0 \end{cases}$

dvs $(f \circ g)^{-1}(x) = 2 - x^2$, $D_{(f \circ g)^{-1}} = V_{f \circ g} = [0, \sqrt{2})$, $V_{(f \circ g)^{-1}} = D_{f \circ g} = (0, 2]$