MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Johan Richter

TENTAMEN I MATEMATIK
MAA141 Kalkyl, grundkurs TEN2
Datum: 29 mars 2019 *Skrivtid:* 3 timmar
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, passare

Den sammanlagda poängsumman på tentan är 25 poäng. 12 poäng krävs för godkänt. För betyget **4** krävs 16 poäng och för betyget **5** krävs 20 poäng. Motivering ska anges på alla uppgifter om det inte explicit anges annat.

1. Beräkna integralen (4p)

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lösning:
Det är en typisk uppgift för partialintegration så vi använder det.

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\cos(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -2x\cos(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$\pi^2 + \int_0^{\pi} 2x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \pi^2 + [2x\sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\sin(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$\pi^2 + 0 - \int_0^{\pi} 2\sin(x)\,\mathrm{d}x = \pi^2 - [-2\cos(x)]_0^{\pi} = \pi^2 - (2+2) = \pi^2 - 4.$$

Svar: $\pi^2 - 4$.

2. Avgör om den generaliserade integralen är konvergent. (4p)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x^2)}{e^x}\,\mathrm{dx}.$$

Lösning: Vid en första anblick verkar den vara konvergent eftersom täljaren är begränsad och nämnaren växer så fort. Så vi försöker bevisa det.

Det räcker att visat att integralen

$$\int_0^{\infty} \left|\frac{\cos(x^2)}{e^x}\right|\,\mathrm{d}x$$

är konvergent. Eftersom

$$0 \leq \left| \frac{\cos(x^2)}{e^x} \right| \leq \frac{1}{e^x}$$

räcker det i sin tur att visa att

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x}\,\mathrm{d}x$$

är konvergent. Men att den är det vet vi. (Eller så kan vi snabbt visa att den är konvergent med hjälp av definitionen.)

Svar: Integralen är konvergent.

3. Beräkna integralen (4p)

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Tips: Variabelbytet $u = \arctan(x)$ kan vara bra.

Lösning: Vi använder det föreslagna variabelbytet.

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = /u = \arctan(x), du = \frac{1}{1+x^2}dx, u(0) = 0, u(1) = \frac{\pi}{4}/ =$$
$$\int_0^{\pi/4} u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{32}.$$

Svar: $\frac{\pi^2}{32}$.

4. Beräkna integralen (4p)

$$\int \frac{x^3+4x^2+2x-5}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi börjar med en polynomdivision. Jag skippar uträkningen i detta facit men den visar att

$$\frac{x^3+4x^2+2x-5}{x^2+4x+3} = x - \frac{x+5}{x^2+4x+3}.$$

Vi faktoriserar nu nämnaren.

$$x^2+4x+3 = (x+2)^2-4+3 = (x+2)^2-1 = (x+3)(x+1).$$

Vi gör nu en partialbråksuppdelning.

$$\frac{x+5}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1}$$

för några konstanter A och B. Alltså är

$$x+5 = A(x+1) + B(x+3).$$

Insättning av $x=-1$ ger $4=2B$ och insättning av $x=-3$ ger $2=-2A$. Alltså är $A=-1$ och $B=2$.

Vi kan nu räkna integralen.

$$\int \frac{x^3+4x^2+2x-5}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x = \int x - \frac{x+5}{(x+1)(x+3)}\,\mathrm{d}x = \int x + \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$\frac{x^2}{2} + \ln(|x+3|) - 2\ln(|x+1|) + C.$$

Svar : Se ovan.

5. Beräkna arean mellan kurvorna (4p)

$$y = x, \;\; 0 \leq x \leq 2$$

och

$$y = \frac{2}{x+1}, \;\; 0 \leq x \leq 2.$$

Lösning:

Vi börjar med att avgöra om kurvorna skär varandra.

$$x = \frac{2}{x+1} \Rightarrow x^2 + x = 2.$$

Lösningarna till denna ekvation är $x=1$ och $x=-2$. Endast 1 ligger i det relevanta intervallet.

Vi ser att in intervallet $[0,1]$ är $y=\frac{2}{x+1}$ den översta kurvan. I intervallet $[1,2]$ är $x \geq \frac{2}{x+1}$.

Arean vi söker är alltså

$$\int_0^1 \frac{2}{x+1} - x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x - \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[2\ln(x+1) - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - 2\ln(x+1)\right]_1^2 =$$

$$= 2\ln(2) - \frac{1}{2} - 0 + 2 - 2\ln(3) - \left(\frac{1}{2} - 2\ln(2)\right) = 2\ln(2) - \frac{1}{2} + 2 - 2\ln(3) - \frac{1}{2} + 2\ln(2) =$$

$$= 4\ln(2) + 1 - 2\ln(3).$$

Svar Arean är $4\ln(2) + 1 - 2\ln(3)$.

6. Beräkna derivatorna av de angivnga funktioner. I deluppgift a krävs det ingen motivering men ingen poäng ges på denna deluppgift om inte alla svaren är helt rätt.

(a) (2p)

$$F_1(x) = \int_3^x \frac{\cos(t^2)}{t^3+1}\,dt.$$

$$F_2(x) = \int_0^x \arcsin(t) \cdot e^t\,dt$$

$$F_3(x) = \int_1^x \cos(\ln(t + \arctan(t)))\,dt$$

(b) (3p)

$$F_4(x) = \int_{2x}^{e^x} \arctan(t^2 + t)\,dt.$$

Lösning:

(a)

$$F_1'(x) = \frac{\cos(x^2)}{x^3+1}.$$

$$F_2'(x) = \arcsin(x) \cdot e^x.$$

$$F_3'(x) = \cos(\ln(x + \arctan(x))).$$

(b) Vi skriver först om.

$$F_4(x) = \int_0^{e^x} \arctan(t^2+t)\,dt + \int_{2x}^0 \arctan(t^2+t)\,dt =$$

$$= \int_0^{e^x} \arctan(t^2+t)\,dt - \int_0^{2x} \arctan(t^2+t)\,dt.$$

Sätt sedan

$$G(x) = \int_0^x \arctan(t^2+t)\,dt.$$

Då gäller dels att

$$G'(x) = arctan(x^2 + x)$$

och dels att

$$F_4(x) = G(e^x) - G(2x).$$

Alltså är

$$F_4'(x) = G'(e^x)e^x - G'(2x)2 = e^x \arctan(e^{2x} + e^x) - 2\arctan(4x^2 + 2x).$$

Svar: Se ovan.