MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Christopher Engström
Hjälpmedel: -

TENTAMEN I MATEMATIK
MAA152 Flervariabelkalkyl
Datum: 14 Augusti 2018
Skrivtid: 3 timmar

Tentamen består utav 5 uppgifter updelade i underupgifter. För varje underuppgift är det angivet hur många poäng uppgiften kan ge totalt. För att få högsta poäng på en uppgift krävs att ett korrekt och tydligt angivet svar och en klar beskrivning av hur lösningen är strukturerad. Uppgifterna är ungefärligt ordnade efter svårighetsgrad.
Betygsgränser: Betyg 3: 12 poäng, Betyg 4: 16 poäng, Betyg 5: 20 poäng, Maxpoäng: 25

1. Givet kurvan $\mathbf{r}(t) = 2\cos(t)\mathbf{i} - 2\sin(t)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

a) Beräkna första och andra ordningens derivata av $r(t)$. (2 p)

b) Beräkna längden av kurvan för intervallet $t = 0$ till $t = 3$. (2 p)

2. Givet funktionen $f(x,y) = \frac{x^2}{xy+y^2}$.

a) Beräkna domänet till $f(x,y)$ och markera de punkter i $xy-$planet där f inte är definerad. (2 p)

b) Visa att $f(x,y)$ saknar gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$. (3 p)

3. Låt $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

a) Beräkna de partiella derivatorna $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$. (2 p)

b) En funktion $f(x,y)$ i två variabler sägs vara harmonisk om $f_{11} + f_{22} = 0$. Undersök om f är harmonisk. (2 p)

4.

a) Givet $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2y - 2xy}$, beräkna uttrycket för gradienten till f. (2 p)

b) Beräkna riktningsderivatan för f i punkten (3,2) i riktning (1,2). (2 p)

c) Beräkna ekvationen för tangentplanet till ytan $z = \sqrt{x^2 + 2y - 2xy}$ i punkten $x = 1, y = -1$. (3 p)

5.

a) Hitta det största och minsta värdet till funktionen $f(x,y) = (x + y)e^{-x^2-y^2}$ i regionen beskriven av $D = \{(x,y) : |x| \leq 1, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ (5 p)

Lycka Till!

Lösningar

1

a)

$$\mathbf{v}(t) = -2\sin(t)\mathbf{i} - 2\cos(t)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}(t) = -2\cos(t)\mathbf{i} + 2\sin(t)\mathbf{j}$$

b)

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)} = 2$$
$$\int_0^3 (2)dt = [2t]_0^3 = 6$$

2

a) f är definerad i alla punkter förutom där vi får division med noll, vilket händer när $xy = y^2 \Rightarrow x = -y,\ y = 0$. Domänet är alltså hela R^2 planet förutom alla punkter längs de två linjerna $x = y$ och $y = 0$.
b) Om vi beräknar gränsvärdet från 2 olika riktningar och de visar sig ge olika värden har vi visat att punkten inte har något gränsvärde, t.ex.

$$\lim_{(y,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{2y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

3

a) Vi sätter $f(x,y,z) = x/z$, $z(x,y) = x^2 + y^2$ vilket med kedjeregeln ger:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{z},\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-x}{z^2},\ \frac{\partial z}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{z} - \frac{2x^2}{z^2} = \frac{-x^2 + y^2}{z^2}$$
$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2xy}{z^2}$$
$$f_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{z^2} + \frac{(2x^2 - 2y^2)2x}{z^3} = \frac{-2x(x^2 + y^2) + 4x^3 - 4xy^2}{z^3} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}$$
$$f_{21} = f_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{z^2} + \frac{(2x^2 - 2y^2)2y}{z^3} = \frac{2y(x^2 + y^2) + 4x^2y - 4y^3}{z^3} = \frac{6x^2y + 2y^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$f_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2x}{z^2} + \frac{(4xy)2y}{z^3} = \frac{-2x(x^2+y^2)+8xy^2}{z^3} = \frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

b)

$$f_{11} + f_{22} = \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3} + \frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3} = 0$$

4

a) Derivera med hjälp av kedjeregeln.

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2y-2xy}}(2x-2y,\, 2-2x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2y-2xy}}(x-y,\, 1-x)$$

b) Börja med at normalisera riktningsvektorn $|(1,2)| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$, $u = (1,2)/\sqrt{5}$.

$$\nabla f(3,2) = \frac{1}{\sqrt{9+4-12}}(1,\ -2) = (1,-2)$$

Riktningsderivatan fås av

$$\nabla f(x,y) \cdot u = (1,-2)\cdot(1,2)/\sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-4) = \frac{-3}{\sqrt{5}}$$

c) Ekvationen för tangentplanet fås av

$$z = f_1(1,-1)(x-1) + f_2(1,-1)(y+1) + f(1,-1)$$

$$\Rightarrow 2(x-1) - 0(y+1) + 1 - z = 0$$

$$\Rightarrow 2x - z - 1 = 0$$

5

a) Vi undersöker först om det finns några kritiska punkter:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = (1-2x(x+y))e^{-x^2-y^2}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = (1-2y(x+y))e^{-x^2-y^2}$$

Detta ger $2x(x+y) = 2y(x+y) = 1 \Rightarrow x = y$, vilket ger $4x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1/2$. Av de två kritiska punkterna $(1/2,1/2)$, $(-1/2,-1/2)$ ligger endast den första i regionen
Vi delar upp randen i två segment, halvcirkeln och linjen längs x-axeln från $x=-1$ till $x=1$.
Halvcirkeln: parametriserar med $x = \cos(t), y = \sin(t), -\pi/2 \le t \le \pi/2$, detta ger

$$f = (\cos(t)+\sin(t))e^{-1} = g(t), -\pi/2 \le t \le \pi/2$$

$$0 = g'(t) = (-\sin(t) + \cos(t))e^{-1} \Rightarrow t = \pi/4$$

Längs $x-$axeln får vi

$$f(x{,}0) = xe^{-x^2}$$

$$0 = f'(x{,}0) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2} \Rightarrow x = 1/\sqrt(2) > 1$$

Vi har alltså ingen kritisk punkt längs x-axeln.
Alla punkter att undersöka är därmed

$$(1/2{,}1/2), (\cos(\pi/4), \sin(\pi/4))), (-1{,}0), (1{,}0)$$

Där de sista två är ändpunkterna till de två rand segmenten.

$$f(1/2{,}1/2) = e^{-1/2}, f(\cos(\pi/4), \sin(\pi/4)) = \sqrt(2)e^{-1}, f(-1{,}0) = -e^{-1}, f(1{,}0) = e^{-1}$$

max: $f(1/2{,}1/2) = e^{-1/2}$, min: $f(-1{,}0) = -e^{-1}$.

Betygskriterier

1. a Korrekt beräknad 1a ordnings derivata (1p), 2a ordnings derivata (1p).

   b Korrekt beräkning $|v(t)|$ (1p), korrekt uppställd och löst integral (1p).

2. a Lokaliserat de linjer där f ej är definerad (1p). Korrekt domän och figur (1p).

   b Korrekt metod (2p), fullständigt och korrekt bevis (1p).

3. a Korrekt användning av kedjeregeln vid derivering samt uttryck för eller beräknade första derivator (1p), korrekt uträkning av andra derivator (1p).

   b Korrekt svar utifrån lösning i a) (1p), Korrekt lösning (1p).

4. a Korrekt formel för gradienten (1p), korrekt lösning och svar (1p).

   b Derivatan beräknad med hjälp av skalärprodukt mellan gradient och riktningsvektor (1p), fullständig lösning inklusive normalisering av riktningsvektor (1p).

   c Tolkning gradient som normal till ytan / korrekt formel för planet direkt (1p), fullständig och korrekt lösning (2p).

5.
   - Hittat alla kritiska punkter och notera de som tillhör D (2p).
   - Hittat alla kritiska punkter på randen (2p).
   - Beräknat funktionsvärde i relevanta punkter samt rätt max/min (1p).