TENTAMEN I MATEMATIK
MAA151 Envariabelkalkyl, TEN1
Datum: 2014-12-04 *Skrivtid:* 3 timmar
Hjälpmedel: Skrivdon

Denna tentamen är avsedd för examinationsmomentet TEN1. Provet består av åtta stycken om varannat SLUMPMÄSSIGT ORDNADE uppgifter som vardera kan ge maximalt 3 poäng. För GODKÄND-betygen 3, 4 och 5 krävs erhållna poängsummor om minst 11, 16 respektive 21 poäng. Om den erhållna poängen benämns S_1, och den vid tentamen TEN2 erhållna S_2, bestäms graden av sammanfattningsbetyg på en slutförd kurs enligt

$S_1 \geq 11,\ S_2 \geq 9$	OCH	$S_1 + 2S_2 \leq 41$	$\rightarrow$	3
$S_1 \geq 11,\ S_2 \geq 9$	OCH	$42 \leq S_1 + 2S_2 \leq 53$	$\rightarrow$	4
		$54 \leq S_1 + 2S_2$	$\rightarrow$	5

Lösningar förutsätts innefatta ordentliga motiveringar och tydliga svar. Samtliga lösningsblad skall vid inlämning vara sorterade i den ordning som uppgifterna är givna i.

1. Bestäm till differentialekvationen $y'' + 4y' + 4y = 0$ den lösning som satisfierar begynnelsevillkoren $y(0) = 0\,,\ y'(0) = 3$.

2. Låt $f(x) = \ln(x)$ och $g(x) = \sqrt{2x - e^2}$. Bestäm en ekvation för tangenten till funktionskurvan $y = (f \circ g)(x)$ i den punkt P vars x-koordinat är lika med e^2.

3. Avgör om

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - 3x + 8 - \frac{x^4 + 5x^2 + 7}{x^2 + 3x + 8}\right)$$

existerar eller ej. Om svaret är NEJ: Ge en förklaring till varför! Om svaret är JA: Ge en förklaring till varför och bestäm gränsvärdet!

4. Bestäm arean av det begränsade område som precis inneslutas av kurvorna

$$y = \frac{|x|}{2} \quad \text{och} \quad y = \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

5. Vilka av funktionerna f, g och h, definierade enligt

$$\begin{cases} f(x) = \sin(x), & D_f = [0, \pi], \\ g(x) = \cos(x), & D_g = [0, \pi], \\ h(x) = e^{2x-3}, & \end{cases}$$

är inverterbara? Förklara! Ange även för varje inverterbar funktion definitionsmängden och värdemängden för inversen.

6. Bestäm värdemängden för funktionen f definierad enligt

$$f(x) = 10 + 3x - x^3, \qquad D_f = [-\tfrac{3}{2}, 3\,].$$

7. Avgör om serien

$$\frac{e}{3} + \sqrt{\frac{e}{3}} + 1 + \ldots$$

är konvergent eller ej. Om svaret är NEJ: Ge en förklaring till varför! Om svaret är JA: Ge en förklaring till varför och bestäm seriens summa!

8. Bestäm den GENERELLA primitiva funktionen till $x \curvearrowright f(x) = (3x-1)\sin(x/2)\,.$

MAA151 / Lösningar till tentamen TEN1 2014-12-04

1 DE: $y''+4y'+4y=0$ BV: $y(0)=0$, $y'(0)=3$

KE: $0=r^2+4r+4=(r+2)^2 \iff r=-2$

Den allmänna lösningen till DE är $y=(A+Bx)e^{-2x}$

Derivering ger $y'=(B-2A-2Bx)e^{-2x}$

Anpassning till BV: $\begin{cases} 0=y(0)=(A+B\cdot 0)e^0=A \\ 3=y'(0)=(B-2A-2B\cdot 0)e^0=B-2A \end{cases}$

dvs $\begin{cases} A=0 \\ B=3 \end{cases}$ och därmed $y=3xe^{-2x}$ löser BVP:et

2 $\begin{cases} f(x)=\ln(x) \\ g(x)=\sqrt{2x-e^2} \end{cases}$ ger $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln(\sqrt{2x-e^2})$

och $(f\circ g)'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-e^2}}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{2x-e^2}}=\frac{1}{2x-e^2}$

Därmed $\begin{cases} (f\circ g)(e^2)=\ln(\sqrt{2e^2-e^2})=\ln(\sqrt{e^2})=\ln(e)=1 \\ (f\circ g)'(e^2)=\frac{1}{2e^2-e^2}=\frac{1}{e^2}=e^{-2} \end{cases}$

En ekvation för tangenten till $y=(f\circ g)(x)$ i punkten $P:(e^2,1)$

är $y-1=\frac{1}{e^2}(x-e^2) \iff y=\frac{1}{e^2}x \iff x=e^2y$

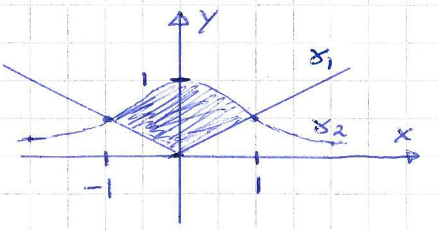
3 $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-3x+8-\frac{x^4+5x^2+7}{x^2+3x+8}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-3x+8)(x^2+3x+8)-(x^4+5x^2+7)}{x^2+3x+8}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+(3-3)x^3+(8-9+8)x^2+(-24+24)x+64-x^4-5x^2-7}{x^2+3x+8}$

produkt- och kvotreglerna för gränsvärden

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+57}{x^2+3x+8}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}\right)\frac{\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{57}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}=1\cdot\frac{2+0}{1+0+0}=2$

4



$\begin{cases} \gamma_1: \; y=\frac{1}{2}|x|=\begin{cases} -\frac{1}{2}x, & x<0 \\ \frac{1}{2}x, & x\geq 0 \end{cases} \\ \gamma_2: \; y=\frac{1}{1+x^2} \end{cases}$

Vi ser direkt genom prövning och uteslutningsmetoden att kurvorna γ_1 och γ_2 skär varandra i punkterna $P:(-1,1)$ och $Q:(1,1)$. Detta innebär att arean A av det inneslutna området är

$A=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{|x|}{2}\right)dx=2\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}x\right)dx=2\left[\arctan(x)-\frac{1}{4}x^2\right]_0^1$

$=2\left[\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\cdot 1^2\right)-(0-0)\right]=\frac{1}{2}(\pi-1)$ Svar $\frac{1}{2}(\pi-1)$ a.e.

⑤ $\begin{cases} f(x) = \sin(x) \\ D_f = [0, \pi] \end{cases}$ $\begin{cases} f \text{ är ej inverterbar ty } f \text{ är ej injektiv.} \\ \text{Vi har t.ex. att } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right). \end{cases}$

$\begin{cases} g(x) = \cos(x) \\ D_g = [0, \pi] \end{cases}$ $\begin{cases} g \text{ är inverterbar } \underline{\text{där}}\ g^{-1} = \arccos \\ D_{g^{-1}} = [-1, 1],\quad V_{g^{-1}} = [0, \pi] \end{cases}$

$\{ h(x) = e^{2x-3}$ $\begin{cases} h \text{ är inverterbar } \underline{\text{där}}\ h^{-1}(x) = \frac{1}{2}(3 + \ln(x)) \\ D_{h^{-1}} = (0, \infty),\quad V_{h^{-1}} = (-\infty, \infty) \end{cases}$

⑥ $f(x) = 10 + 3x - x^3$ $\quad D_f = \left[-\frac{3}{2}, 3\right]$

<u>Vi har att</u> $f'(x) = 3 - 3x^2 = -3(x^2 - 1) = -3(x+1)(x-1)$

<u>1:a derivattest</u>

x	$-\frac{3}{2}$		-1		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	lok max	$\searrow$	lok min	$\nearrow$	lok max	$\searrow$	lok min

<u>Vi ser att</u> $\begin{cases} f_{min} = \min\left(f(-1), f(3)\right) = \min(8, -8) = -8 \\ f_{max} = \max\left(f\left(-\frac{3}{2}\right), f(1)\right) = \max\left(8 + \frac{7}{8}, 12\right) = 12 \end{cases}$

f kontinuerlig på D_f ger att $\underline{V_f = [-8, 12]}$

⑦ $\frac{e}{3} + \sqrt{\frac{e}{3}} + 1 + \ldots = \underbrace{\frac{e}{3}\left(1 + \sqrt{\frac{3}{e}} + \frac{3}{e} + \ldots\right)}_{\text{geometrisk serie med kvoten } \sqrt{\frac{3}{e}}}$

I och med att serien är en geometrisk serie med $|\text{kvot}| = \sqrt{\frac{3}{e}} > 1$ (ty $e \approx 2{,}718$) så är serien <u>divergent</u>.

⑧ $\int dx\, f(x) = \int dx\, (3x-1)\sin(x/2)$

$\downarrow$ partiell primitivtagning

$= (3x-1)\left(-2\cos(x/2)\right) - \int dx\ 3\left(-2\cos(x/2)\right)$

$= (3x-1)\left(-2\cos(x/2)\right) - 3\left(-4\sin(x/2)\right) + C$

$= 12\sin(x/2) - 2(3x-1)\cos(x/2) + C$

$\uparrow$ konstant

Tentamen TEN1 – 2014-12-04	POÄNGSPANN (maxpoäng) för olika delmoment i uppgifter
1. $y = 3xe^{-2x}$	**1p**: Korrekt funnit den ena av två linjärt oberoende lösningar till DE:en **1p**: Korrekt funnit den andra av två linjärt oberoende lösningar till DE:en **1p**: Korrekt anpassat den allmänna lösningen till BV:en, samt korrekt sammanfattat lösningen till BVP:et **Den** som felaktigt har angivit $y = Ae^{-2x} + Be^{-2x}$ som den allmänna lösningen till differentialekvationen, och som sedan inte har funnit en förklaring till de omöjliga villkor som har uppstått vid anpassningen till begynnelsevärdena, får totalt **0p** för sin lösning.
2. $x = e^2 y$	**1p**: Korrekt bestämt derivatan till den sammansatta funktionen, allt i syfte att bestämma riktningskoefficienten i punkten P **1p**: Korrekt i punkten e^2 bestämt den sammansatta funktionen och dess derivata **1p**: Korrekt bestämt en ekvation för tangenten till funktionskurvan i punkten P
3. 2	**1p**: Korrekt omskrivit funktionsuttrycket till ett med en gemensam nämnare, allt i syfte att kunna avgöra gränsövergången **1p**: Korrekt identifierat det som dominerar i täljaren respektive i nämnaren **1p**: Korrekt avgjort att gränsvärdet existerar och funnit detsamma
4. $\frac{1}{2}(\pi - 1)$ a.e.	**1p**: Korrekt fastställt hur det begränsade området ser ut, och korrekt bestämt skärningen av de två inneslutande kurvorna **1p**: Korrekt formulerat en integral för den sökta arean, samt korrekt bestämt en primitiv till integranden **1p**: Korrekt gjort insättningar av gränser, och korrekt utfört en avslutande summering
5. g och h är inverterbara $D_{g^{-1}} = [-1,1]$, $V_{g^{-1}} = [0,\pi]$ $D_{h^{-1}} = (0,\infty)$, $V_{h^{-1}} = (-\infty,\infty)$	**1p**: Korrekt funnit att f ej är inverterbar **1p**: Korrekt funnit att g är inverterbar, och korrekt angivit g^{-1}:s definitionsmänd respektive värdemängd **1p**: Korrekt funnit att h är inverterbar, och korrekt angivit h^{-1}:s definitionsmänd respektive värdemängd

6. $V_f = [-8,12]$

1p: Korrekt bestämt alla de fyra lokala extrempunkterna till funktionen f

1p: Korrekt med t.ex. ett 1:a-derivattest bestämt f :s minsta värde och f :s största värde

1p: Korrekt fastställt f :s värdemängd

Not: För att få full poäng så är det **inte nödvändigt** att explicit åberopa de satser som stöder ett korrekt svar (dvs bl.a. satsen om mellanliggande värden). Det räcker med ett korrekt genomfört 1:a-derivattest och korrekta slutsatser därav, eller alternativt att satsen om mellanliggande värden och den om ett största och ett minsta värde på ett kompakt intervall åtminstone har praktiserats på ett uttömmande sätt.

---

7. Serien är divergent eftersom serien är en geometrisk med en kvot som till absolutbeloppet **inte** är mindre än 1

1p: Korrekt fastställt seriens två första kvoter, och funnit att dessa är lika stora och att serien därmed är en geometrisk

2p: Korrekt noterat att absolutbeloppet av den geometriska seriens kvot **inte** är mindre än 1, och att serien därmed är divergent

Den som trots att kvoten i serien är större än 1 ändå angivit en summa till serien får totalt **1p** för sin lösning förutsatt att kvoten är korrekt bestämd.

---

8. $\int f(x)dx$

$$= 12\sin(\tfrac{1}{2}x) - 2(3x-1)\cos(\tfrac{1}{2}x) + C$$

1p: Korrekt hanterat faktorn $\sin(\frac{1}{2}x)$ i ett till formen korrekt första steg i en (vägvinnande) partiell primitivtagning, dvs skrivit en primitiv till $\sin(\frac{1}{2}x)$ i både den färdiga termen och i restprimitiven

1p: Korrekt hanterat faktorn $(3x-1)$ i ett till formen korrekt första steg i en (vägvinnande) partiell primitivtagning, dvs skrivit faktorn $(3x-1)$ i den färdiga termen och faktorn 3 i restprimitiven

1p: Korrekt i ett andra och avslutande steg i en partiell primitivtagning funnit funktionsuttrycket för den generella primitiva funktionen till f

Den som i ett första steg i en partiell primitivtagning felaktigt har angett $2\cos(\frac{1}{2}x)$ som en primitiv till $\sin(\frac{1}{2}x)$ kan som mest få totalt **2p** och då förutsatt att den påföljande primitivtagningen av $\cos(\frac{1}{2}x)$ är korrekt gjord.
