MAA151 / Lösningar till övningstentamen TEN2, nr 1 (2)

1

$$\int_{-1}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}=\int_{-1}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{3^2-(x+1)^2}}=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{3}\right)^2}}\quad\left[\begin{array}{l}\frac{x+1}{3}=u\\ \frac{1}{3}dx=du\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\int_{0}^{1/2}\frac{3\,du}{\sqrt{1-u^2}}=\Big[\arcsin(u)\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right)-\arcsin(0)=\frac{\pi}{6}-0=\underline{\frac{\pi}{6}}$$

2

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}=1+\frac{3}{x^2-4}=1+\frac{3}{(x+2)(x-2)}$$

ger

$$\begin{cases} f'(x)=0+3\,\dfrac{-1}{(x^2-4)^2}\cdot 2x=-\dfrac{6x}{(x+2)^2(x-2)^2}\\[2ex] f''(x)=-6\,\dfrac{1(x^2-4)^2-x\,2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=\dfrac{-6}{(x^2-4)^3}(x^2-4-4x^2)=\dfrac{6(3x^2+4)}{(x+2)^3(x-2)^3}\end{cases}$$

Vi har att

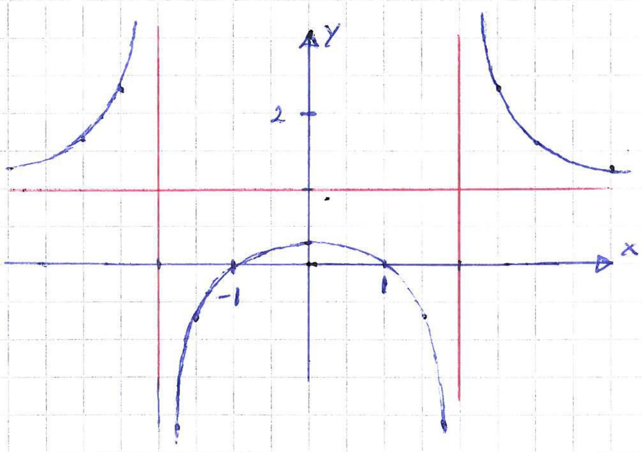
$$\begin{cases} x=-2 \text{ är en lodrät asymptot} & f(x)\xrightarrow{x\to -2^\pm}\mp\infty\\ x=2 \quad \text{———} \; '' \; \text{———} & f(x)\xrightarrow{x\to 2^\pm}\pm\infty\\ y=1 \text{ är en icke-lodrät asymptot} & f(x)\sim 1 \text{ för stora } |x| \end{cases}$$

x		-2		0		2	
$f'(x)$	$+$	Ej	$+$	0	$-$	Ej	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	Ej	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	Ej	$\searrow$

dvs 0 är en lok. maxpunkt till f $\left(f(0)=\frac{1}{4}\right)$.

x		-2		2	
$f''(x)$	$+$	Ej	$-$	Ej	$+$
$f(x)$	$\cup$	Ej	$\cap$	Ej	$\cup$

dvs f är konvex i $(-\infty,-2)$ och i $(2,\infty)$, samt konkav i $(-2,2)$. Kurvan $y=f(x)$ saknar inflektionspunkter.



3

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \quad \text{där} \quad a_n=\frac{n^2+2^n}{n^3\sqrt{n}+n}=\frac{2^n}{n^{7/2}}\left(\frac{1+n^2\,2^{-n}}{1+n^{-5/2}}\right)$$

Vi har att

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{7/2}}\left(\frac{1+(n+1)^2\,2^{-(n+1)}}{1+(n+1)^{-5/2}}\right)\frac{n^{7/2}}{2^n}\,\frac{1+n^{-5/2}}{1+n^2\,2^{-n}}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{7/2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+n^{-5/2}}{1+(n+1)^{-5/2}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+(n+1)^2\,2^{-(n+1)}}{1+n^2\,2^{-n}}\right)$$

$$=2\cdot 1^{7/2}\cdot\frac{1+0}{1+0}\cdot\frac{1+0}{1+0}=2>1$$

dvs kvottestet ger att serien $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ är divergent.

Forts. MAAL51
TEN2, Övn. ten. 1

(4) $\begin{cases} \text{DE:} & y''+5y' = 1-5x^2 \\ \text{BV:} & y(0)=1,\ y'(0) = \frac{3}{25} \end{cases}$ (linjär, inhomogen, DE av ordning 2)

Den allmänna lösningen till DE:en är $y_H + y_p$, där y_H löser den homogena DE:en $y''+5y'=0$, och där y_p är en partikulärlösning till DE:en $y''+5y' = 1-5x^2$. Den karakt. ekv:en för $y''+5y'=0$ är $r^2+5r=0 \Leftrightarrow r=0 \vee r=-5$ varför $y_H = A + Be^{-5x}$. En ansättning för y_p är $x^1(a_0+a_1x+a_2x^2)e^{0\cdot x}$ där multiplicitetsfaktorn x^1 är kommen av att koefficienten 0 i exponenten till $e^{0\cdot x}$ förekommer en gång bland de karakteristiska rötterna. Derivering ger $y_p' = a_0 + 2a_1x + 3a_2x^2$ och $y_p'' = 2a_1 + 6a_2x$.

Insättning av y_p i DE:en ger:

$(2a_1+6a_2x) + 5(a_0+2a_1x+3a_2x^2) = 1-5x^2$ (för alla x i ett intervall)

dvs $\begin{cases} 5a_0+2a_1 = 1 \\ 10a_1+6a_2 = 0 \\ 15a_2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 3/25 \\ a_1 = 1/5 \\ a_2 = -1/3 \end{cases}$

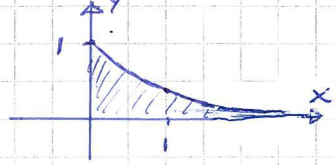
Den allmänna lösningen y till DE:en är således

$$y = y_H + y_p = A + Be^{-5x} + \frac{3}{25}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

BV:na innebär att $\begin{cases} 1 = y(0) = A+B+0+0+0 \\ \frac{3}{25} = y'(0) = -5B + \frac{3}{25} + 0 + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$

Alltså $y = 1 + \frac{3}{25}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{3}x^3$

(5)



$$V_y = \int_0^\infty 2\pi x(e^{-x}-0)\,dx = \lim_{X\to\infty} 2\pi \int_0^X xe^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{X\to\infty} 2\pi\left(\left[x(-e^{-x})\right]_0^X - \int_0^X 1\cdot(-e^{-x})\,dx\right)$$

$$= \lim_{X\to\infty} 2\pi\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^X$$

$$= 2\pi \lim_{X\to\infty}\left(-\frac{X+1}{e^X} + \frac{0+1}{1}\right) \text{ v.e.}$$

$$= 2\pi(-0+1) \text{ v.e.} = 2\pi \text{ v.e.}$$