MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Lars-Göran Larsson

TENTAMEN I MATEMATIK
MAA151 Envariabelkalkyl, TEN1
Datum: 2015-01-08 *Skrivtid:* 3 timmar
Hjälpmedel: Skrivdon

Denna tentamen är avsedd för examinationsmomentet TEN1. Provet består av åtta stycken om varannat SLUMPMÄSSIGT ORDNADE uppgifter som vardera kan ge maximalt 3 poäng. För GODKÄND-betygen 3, 4 och 5 krävs erhållna poängsummor om minst 11, 16 respektive 21 poäng. Om den erhållna poängen benämns S_1, och den vid tentamen TEN2 erhållna S_2, bestäms graden av sammanfattningsbetyg på en slutförd kurs enligt

$$\begin{array}{lcrcl} S_1 \geq 11,\ S_2 \geq 9 & \text{OCH} & S_1 + 2S_2 \leq 41 & \rightarrow & 3 \\ S_1 \geq 11,\ S_2 \geq 9 & \text{OCH} & 42 \leq S_1 + 2S_2 \leq 53 & \rightarrow & 4 \\ & & 54 \leq S_1 + 2S_2 & \rightarrow & 5 \end{array}$$

Lösningar förutsätts innefatta ordentliga motiveringar och tydliga svar. Samtliga lösningsblad skall vid inlämning vara sorterade i den ordning som uppgifterna är givna i.

1. Summan av två icke-negativa tal är 12. Vilka är talen om produkten av det första och kvadraten av det andra är maximal? Bevisa din slutsats!

2. Bestäm arean av det begränsade område som precis innesluts av de tre kurvorna

$$y = \ln(x), \quad y = 0 \quad \text{och} \quad x = e\,.$$

3. Bestäm inversen till funktionen f definierad enligt

$$f(x) = \frac{x+2}{x-5}.$$

Specificera särskilt inversens definitionsmängd och värdemängd.

4. För vilka a är serien

$$a + 4a^3 + 16a^5 + \ldots$$

konvergent? Bestäm seriens summa för dessa a.

5. Bestäm den funktion f som är en primitiv till tan (tangens) och som uppfyller $f(0) = 1$.

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $\sqrt{x}y' + \frac{1}{2}y = \sqrt{x}\,e^{-\sqrt{x}}$, $y(4) = 0\,$.

7. Avgör om

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{1-e^{3x}}$$

existerar eller ej. Om svaret är NEJ: Ge en förklaring till varför! Om svaret är JA: Ge en förklaring till varför och bestäm gränsvärdet!

8. Låt $f(t) = t + t^3$ och $g(t) = 4\arctan(t)$. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ i den punkt för vilken y-koordinaten är lika med π.

MAA151 / Lösningar till tentamen TEN1 2015-01-08

① Givet: $x, y \geq 0$, $x+y=12$. Bestäm x och y så xy^2 är maximal.

Def. $f(x) = xy^2\Big|_{\substack{y=12-x\\ x,y\geq 0}} = x(12-x)^2$ där $0 \leq x \leq 12$

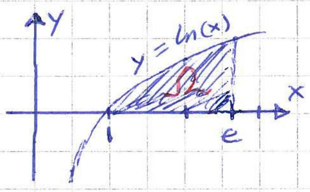
$$f'(x) = 1(12-x)^2 + x\,2(12-x)(-1) = (12-x)(12-x-2x) = 3(x-4)(x-12)$$

1:a-derivatatest

x	0		4		12
$f'(x)$		+	0	−	0
$f(x)$	lok. min.	↗	lok. max.	↘	lok. min

ger att $f_{max} = f(4) = 4 \cdot 8^2 = 256$ som antas för $x=4$ och $y=8$, dvs de sökta talen är 4 och 8.

②



$$A(\Omega) = \int_1^e \ln(x)\,dx = \Big[x\ln(x)\Big]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \Big[x(\ln(x)-1)\Big]_1^e = \Big[e(\ln(e)-1) - 1(\ln(1)-1)\Big] \text{ a.e.}$$

$$= \Big[e(1-1) - (0-1)\Big] \text{ a.e.} = 1 \text{ a.e.}$$

③ $f(x) = \dfrac{x+2}{x-5}$ Om inversen existerar (påstås indirekt i frågeställningen) så gäller att $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Vi har att $y = \dfrac{x+2}{x-5} \Leftrightarrow y(x-5) = x+2 \Leftrightarrow -5y-2 = (1-y)x$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5y+2}{y-1} \quad \text{i.e.} \quad f^{-1}(y) = \frac{5y+2}{y-1}$$

där $D_{f^{-1}} = R\setminus\{1\}$, $V_{f^{-1}} = D_f = R\setminus\{5\}$

④ $a + 4a^3 + 16a^5 + \ldots = a(1 + 4a^2 + 16a^4 + \ldots) = a\sum_{n=0}^{\infty}(4a^2)^n$

Serien är geometrisk och är konvergent omm $|4a^2| < 1$ dvs omm $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$. Seriens summa är för dessa a lika med $a \cdot \dfrac{1}{1-4a^2} = \dfrac{a}{1-4a^2}$

⑤ Bestäm f så att $f' = \tan$ och $f(0) = 1$

Vi får att $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \tan(t)\,dt$

dvs $f(x) = 1 + \int_0^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,dt = 1 + \Big[-\ln|\cos(t)|\Big]_0^x$

$$= 1 - \Big(\ln|\cos(x)| - \underbrace{\ln|\cos(0)|}_{\ln(1)=0}\Big) = 1 - \ln|\cos(x)|$$

dvs $f(x) = \ln\left(\dfrac{e}{\cos(x)}\right)$ (där abs. beloppet inte behövs för f eftersom "existensintervallet" är $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ utifrån att punkten 0 ingår)

(6) $\begin{cases} DE: \sqrt{x}\, y' + \frac{1}{2} y = \sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}} \\ BV: \ y(4) = 0 \end{cases}$ (linjär, inhomogen DE av 1:a ordningen)

DE:en kan för $x > 0$ skrivas som $y' + \frac{1}{2\sqrt{x}} y = e^{-\sqrt{x}}$ varav framgår att en integrerande faktor är $e^{\sqrt{x}}$, dvs vi har att

$$e^{\sqrt{x}} \cdot y' + \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \cdot y = e^{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \quad \text{dvs} \quad \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}} y\right) = 1.$$

Primitivtagning ger $e^{\sqrt{x}} y = x + C$ varför $y = (x+C)e^{-\sqrt{x}}$

BV:et ger $0 = y(4) = (4+C)e^{-\sqrt{4}}$ dvs $C = -4$

och därmed $y = (x-4)e^{-\sqrt{x}}$

(7) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{1-e^{3x}} \overset{\text{(formering av standardgränsvärden)}}{=} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1+2x)}{2x}\right) \frac{2x}{-3x} \frac{1}{\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)}$$

(produktregeln för gränsvärden) $$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \lim_{x\to 0}\left(-\frac{2x}{3x}\right) \cdot \frac{1}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)}$$

(substitutioner) $$= \lim_{a\to 0} \frac{\ln(1+a)}{a} \cdot \left(-\frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{x}{x}\right) \cdot \frac{1}{\lim_{b\to 0}\left(\frac{e^{b}-1}{b}\right)}$$

$$= 1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{1} = -\frac{2}{3}$$

(8) $\begin{cases} f(t) = t + t^3 \\ g(t) = 4\arctan(t) \end{cases}$ $\quad \gamma : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

Vi har att $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{\left(\frac{4}{1+t^2}\right)}{1+3t^2}$$

$$= \frac{4}{(1+t^2)(1+3t^2)}$$

För den punkt P där y-koordinaten är lika med π fås att parametervärdet t_P ges av ekv:en $\pi = g(t_P) = 4\arctan(t_P)$, dvs $t_P = 1$.

En ekvation för tangenten till kurvan γ i punkten P är

$$y - \pi = \frac{4}{(1+1^2)(1+3\cdot 1^2)}\left(x - (1+1^3)\right)$$

$$= \frac{4}{2\cdot 4}(x-2)$$

dvs $y = \frac{1}{2}x + (\pi - 1)$

Tentamen TEN1 – 2015-01-08	POÄNGSPANN (maxpoäng) för olika delmoment i uppgifter
1. 4 respektive 8	**1p**: Korrekt för det ställda optimeringsproblemet formulerat en funktion f av en variabel, samt bestämt derivatan f' **2p**: Korrekt bestämt f:s stationära punkter, och med t.ex. ett 1:a-derivattest bestämt den punkt i vilken f:s största värde antas, samt slutligen besvarat det ställda spörsmålet
2. 1 a.e.	**1p**: Korrekt fastställt hur det begränsade området ser ut, och korrekt formulerat en integral för den sökta arean **1p**: Korrekt bestämt en primitiv till integranden **1p**: Korrekt gjort insättningar av gränser, och korrekt utfört en avslutande summering
3. $f^{-1}(x)=\dfrac{5x+2}{x-1}$ $D_{f^{-1}}=R\setminus\{1\},\ V_{f^{-1}}=R\setminus\{5\}$	**1p**: Korrekt bestämt funktionsuttrycket för inversen till f **1p**: Korrekt bestämt definitionsmängden för inversen **1p**: Korrekt specificerat värdemängden för inversen
4. Serien är konvergent omm $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ Seriens summa är för dessa a lika med $\dfrac{a}{1-4a^2}$	**1p**: Korrekt fastställt att serien är geometrisk och vad dess kvot är lika med **1p**: Korrekt bestämt för vilka a som serien är konvergent **1p**: Korrekt bestämt seriens summa för de a för vilka serien är konvergent
5. $f(x)=1-\ln(\cos(x))$	**2p**: Korrekt funnit den allmänna primitiva funktionen till tan **1p**: Korrekt anpassat den primitiva funktionen till BV:et, och korrekt sammanfattat lösningen (till BVP:et)
6. $y=(x-4)e^{-\sqrt{x}}$	**1p**: Korrekt skrivit DE:en på standardform, korrekt bestämt en integrerande faktor, samt korrekt paketerat y-termerna som en exakt derivata **1p**: Korrekt primitivtagit i DE:en och korrekt löst ut y **1p**: Korrekt anpassat den lösningen till BV:et, och korrekt sammanfattat lösningen till BVP:et
7. Gränsvärdet existerar och är lika med $-\dfrac{2}{3}$	**1p**: Korrekt förlängt med $2x$ för att sedan genom en substitution kunna utnyttja standardgränsvärdet $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$ **1p**: Korrekt förlängt med $-3x$ för att sedan genom en substitution kunna utnyttja standardgränsvärdet $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{u}=1$ **1p**: Korrekt avgjort att gränsvärdet existerar och funnit dito
8. $y=\frac{1}{2}x+(\pi-1)$	**1p**: Korrekt bestämt dels det värde på t för vilket y-koordinaten är lika med π och dels motsvarande x-koordinat **1p**: Korrekt bestämt derivatan till den av kurvan implicit givna funktionen i en omgivning till tangeringspunkten **1p**: Korrekt bestämt en ekvation för tangenten till kurvan i den punkt för vilken y-koordinaten är lika med π