

Denna tentamen TEN1 består av 6 uppgifter, med en sammanlagd poängsumma om 25 poäng. För betyget **3** krävs en erhållen poängsumma om minst 12 poäng, för betyget **4** krävs 16 poäng, och för betyget **5** krävs 20 poäng. Lösningar förutsätts innefatta ordentliga motiveringar och tydliga svar. Samtliga Lösningsblad skall vid inlämning vara sorterade i den ordning som uppgifterna är givna i.

1. a) Låt $z = \frac{1+i}{1-2i} \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right)$. Bestäm $\operatorname{Re} z$ och $\operatorname{Im} z$. (2p)

b) Bestäm inversen av matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (3p)

2. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x + 3y + 4z = 5, \\ 3x + 2y + 7z = 3, \\ 2x - y + z = -4. \end{cases}$ (4p)

3. Givet en ortonormerad bas $\underline{e} = [e_1, e_2, e_3]$ i rummet, bestäm vinkeln mellan vektorerna $u = e_1 - e_2$ och $v = -e_1 + 2e_2 + e_3$. (4p)

4. Planet π innehåller punkterna $P : (0, 2, 0)$, $Q : (1, 2, 1)$, $R : (2, 4, 0)$. Bestäm planets ekvation på normalform. Punkternas koordinater är givna med avseende på ett positivt orienterat ortonormerat koordinatsystem. (4p)

5. Lös ekvationen $z^4 = 7$. Skriv rötterna på cartesisk form (d v s formen $z = a + bi$). (4p)

6. Avbildningarna

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

är linjära. Ange deras matriser, och bestäm matrisen för den sammansatta avbildningen

$$GF : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

(4p)

This exam TEN2 consists of 6 problems, with a total score of 25 points. To obtain the grades **3**, **4** and **5**, scores of at least 12, 16 respectively 20 points are required.
All solutions are to include motivations and clear answers to the questions asked.

This is an English translation of the exam TEN1 from 3/10/2014, with minor adaptations in notation to suit the English version of the course. The original exam was given in Swedish only.

1. a) Let $z = \frac{1+i}{1-2i} \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right)$. Find $\operatorname{Re} z$ and $\operatorname{Im} z$. (2p)

b) Determine the inverse of the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (3p)

2. Solve the linear system $\begin{cases} x + 3y + 4z = 5, \\ 3x + 2y + 7z = 3, \\ 2x - y + z = -4. \end{cases}$ (4p)

3. Determine the angle between the vectors $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. (4p)

4. A plane π contains the points $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ and $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determine the equation of π (on normal form). (4p)

5. Solve the complex equation $z^4 = 7$. Write the roots on cartesian form (i.e., the form $z = a + bi$). (4p)

6. The maps

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

are linear. Find their matrices, and the matrix of the composed linear map

$$GF : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

(4p)

MAA150: Vektoralgebra

Lösningsförslag till tentamen TEN1 3/10 2014

$$1. a) \frac{1+i}{1-2i} = \frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{(1+i)(1+2i)}{5}$$

$$\left(1 + \frac{1}{i}\right) = 1 + \frac{i}{i^2} = 1 - i$$

$$\Rightarrow z = \frac{(1+i)(1+2i)(1-i)}{5} = \frac{2 \cdot (1+2i)}{5} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{Re} z = \frac{2}{5}}}, \quad \underline{\underline{\operatorname{Im} z = \frac{4}{5}}}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A | I_3) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (I_3 | A^{-1})$$

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

2) Systemet
$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 5 \\ 3x + 2y + 7z = 3 \\ 2x - y + z = -4 \end{cases}$$

har totalmatris

$$\begin{array}{l} \textcircled{-2} \textcircled{-3} \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} \textcircled{-1} \\ \downarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -12 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} \textcircled{-\frac{1}{2}} \\ \downarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

$$\sim \begin{array}{l} \textcircled{5} \\ \downarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} \textcircled{-\frac{1}{7}} \\ \downarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} \textcircled{-4} \\ \downarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \begin{array}{l} \textcircled{-3} \\ \downarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$3) \quad u = e_1 - e_2 \\ v = -e_1 + 2e_2 + e_3$$

$u \cdot v = |u||v| \cos \vartheta$, där ϑ är vinkeln mellan u och v .

$$\Rightarrow \cos \vartheta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} \quad (\text{ty } |u|, |v| \neq 0)$$

$$u \cdot v = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = -3 \quad \text{eftersom } e \text{ är en ON-bas.}$$

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \cos \vartheta = \frac{-3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left. \vphantom{\frac{-3}{\sqrt{2}\sqrt{6}}} \right\} \Rightarrow \vartheta = \frac{5\pi}{6}$$

$\vartheta \in [0, \pi]$

Vinkeln mellan u och v är alltså $\frac{5\pi}{6}$

4) Eftersom P, Q och R ligger i planet så är vektorerna u och v , som representeras av de riktade sträckorna \overrightarrow{PQ} respektive \overrightarrow{PR} , parallella med π .

u och v har koordinaterna

$$[u]_{\underline{e}} = (1, 2, 1) - (0, 2, 0) = (1, 0, 1) \quad \text{och}$$

$$[v]_{\underline{e}} = (2, 4, 0) - (0, 2, 0) = (2, 2, 0).$$

Nu är vektorn $u \times v$ ortogonal mot π .

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0e_1 + 2e_2 + 2e_3 - 0e_3 - 2e_1 - 0e_2 \\ &= -2e_1 + 2e_2 + 2e_3. \end{aligned}$$

(Notera att u och v ej är parallella, eftersom $u \times v \neq 0$.)

$$\Rightarrow n = \frac{1}{2}(u \times v) = -e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{är en normalvektor till } \pi.$$

Låt $A: (x, y, z)$.

$A \in \pi \iff \overrightarrow{PA}$ är vinkelrät mot n

$$\iff (-1) \cdot x + 1 \cdot (y - 2) + 1 \cdot z = 0$$

$$\iff \underline{\underline{-x + y + z = 2}}$$

π :s ekvation är $-x + y + z = 2$

$$5) \quad z^4 = 7$$

$$\text{Sätt } z = re^{i\vartheta}, \quad r \geq 0$$

$$\Rightarrow z^4 = (re^{i\vartheta})^4 = r^4 e^{i4\vartheta}$$

$$7 = 7e^{i \cdot 0}$$

Ekvationen kan alltså skrivas som:

$$r^4 e^{i4\vartheta} = 7 \cdot e^{i \cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^4 = 7 \\ 4\vartheta = 2\pi n \end{cases}$$

där n är ett heltal.

$$r^4 = 7 \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{7}$$

$$4\vartheta = 2\pi n \Leftrightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2}n$$

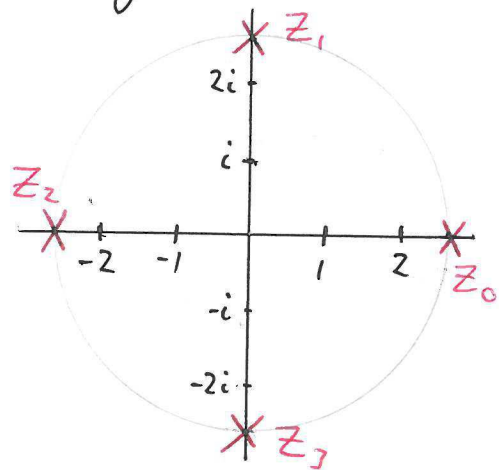
\Rightarrow Ekvationen har fyra lösningar ($n=0,1,2,3$)

$$z_0 = \sqrt[4]{7} e^{i \cdot 0} = \sqrt[4]{7}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{7} e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt[4]{7} i$$

$$z_2 = \sqrt[4]{7} e^{i\pi} = -\sqrt[4]{7}$$

$$z_3 = \sqrt[4]{7} e^{i\frac{3\pi}{2}} = -\sqrt[4]{7} i$$



Ekvationen har lösningarna

$$z_{0,2} = \pm \sqrt[4]{7} \quad \text{och} \quad z_{1,3} = \pm \sqrt[4]{7} i$$

5, alternativ lösning)

$$z^4 = 7$$

$$\text{Sätt } w = z^2 : w^2 = 7$$

$$w^2 - 7 = 0$$

$$(w + \sqrt{7})(w - \sqrt{7}) = 0$$

$$w = \sqrt{7} \quad \text{eller} \quad w = -\sqrt{7}$$

$$\text{Fall 1: } z^2 = w = \sqrt{7} :$$

$$z^2 = \sqrt{7} \Leftrightarrow z^2 - \sqrt{7} = 0 \Leftrightarrow (z - \sqrt[4]{7})(z + \sqrt[4]{7}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{z = \pm \sqrt[4]{7}}}$$

$$\text{Fall 2: } z^2 = w = -\sqrt{7} :$$

$$z^2 = -\sqrt{7} \Leftrightarrow z^2 + \sqrt{7} = 0 \Leftrightarrow (z + \sqrt[4]{7}i)(z - \sqrt[4]{7}i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{z = \pm \sqrt[4]{7}i}}$$

Ekvationen har lösningarna

$$z = \sqrt[4]{7}, -\sqrt[4]{7}, \sqrt[4]{7}i, -\sqrt[4]{7}i$$

$$6) F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Matrisen av F är $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

Matrisen av G är $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$

Matrisen av GF är då BA :

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriserna av de linjära avbildningarna F , G och GF är: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ resp. $BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Answers:

1) a) $\operatorname{Re} z = 2/5$, $\operatorname{Im} z = 4/5$; b) $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2) Unique solution $(x, y, z) = (-2, 1, 1)$.

3) The angle is $5\pi/6$.

4) $\pi : x - y - z = -2$

5) $z = \pm\sqrt[4]{7}$ or $z = \pm\sqrt[4]{7}i$

6) The matrix of F is $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, the matrix of G is $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, and the matrix of

$$GF \text{ is } BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

MAA150 Vektoralgebra höstterminen 2014

Bedömningskriterier för TEN1 2014-10-03

1. a) Ett poäng för beräkning av z på formen $z = a + bi$, ett poäng för att korrekt identifiera real- och imaginärdel.
b) En poäng för uppställning av korrekt ekvationssystem/totalmatris, två poäng för lösningen av systemet och korrekt slutsats därav.
2. En poäng för korrekt uppställt system och påbörjad Gausselimination, tre poäng totalt för korrekt lösning av uppställt system. Felräkningar av principiell/metodmässig karaktär ger avdrag på mellan ett och tre poäng.
3. En poäng för att uttrycka cosinus för vinkeln i termer av skalärprodukt och/eller längder ($\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$), en poäng för beräkning av $u \cdot v$, $|u|$ och $|v|$, en poäng för beräkning av det numeriska värdet av $\cos \theta$, ytterligare ett poäng för fullständig och korrekt lösning av uppgiften.
4. Bestäm koordinaterna för två (icke-parallella) vektorer som är parallella med planet: *1p*.
Bestäm en normalvektor till planet: *2p*.
Utifrån ovanstående bestäm planets ekvation: *1p*.
5. Korrekt ansats: skriva VL och HL på polär (eller exponential-) form: *1p*.
Korrekt identifiera belopp och argument: *1p*.
Därutöver fullständigt lösa uppgiften: *2p*.
Den som vid bestämning av argumentet endast angett ett värde, utan att ta hänsyn till de trigonometriska funktionernas periodicitet, kan som mest få två poäng på denna uppgift.
6. Korrekt ange matriserna till avbildningarna F och G : *2p*.
Bestäm matrisen till den sammansatta avbildningen GF : *2p*.