MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Erik Darpö

TENTAMEN I MATEMATIK
MAA150 Vektoralgebra TEN1
Datum: 9 juni 2015 *Skrivtid:* 3 timmar
Hjälpmedel: Skrivdon

Denna tentamen TEN1 består av 6 uppgifter, med en sammanlagd poängsumma om 25 poäng. För betyget ***3*** *krävs en erhållen poängsumma om minst 12 poäng, för betyget* ***4*** *krävs 16 poäng, och för betyget* ***5*** *krävs 20 poäng. Samtliga lösningar förutsätts innefatta ordentliga motiveringar och tydliga svar.*

1. Lös det linjära ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1\,, \\ \phantom{x_1 +{}} 2x_2 + 2x_3 = 2\,, \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4\,. \end{cases}$ *(3p)*

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Vilka av matriserna A och B är på radreducerad trappstegsform?

b) Bestäm alla vektorer $x \in \mathbb{R}^4$ sådana att $Ax = 0$.

c) Bestäm alla vektorer $y \in \mathbb{R}^2$ sådana att $By = 0$.

Enbart svar krävs till problem 2(a). *(5p)*

3. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$. *(3p)*

4. Låt ℓ vara den linje i $\mathbb{R}^3$ som går igenom origo och punkten $x = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \end{pmatrix}$, där t är något givet reellt tal. Bestäm värdet på $t \in \mathbb{R}$ så att linjen ℓ är parallell med planet $\pi\ :\ x - y + \frac{3}{2}z = 1$. *(4p)*

5. Lös ekvationen $z^4 = -4$ (där z är ett komplext tal). Ange lösningarna både på polär och cartesisk form.
Med cartesisk form avses formen $z = a + bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$. *(4p)*

6. Låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$, och $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $G(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

a) Visa att F och G är linjära avbildningar, och ange deras matriser.

b) Bestäm matrisen till avbildningen G^{-1}.

c) Bestäm matrisen till den sammansatta avbildningen $FG : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

(6p)

MÄLARDALEN UNIVERSITY
School of Education, Culture and Communication
Division of Applied Mathematics
Examiner: Erik Darpö

EXAMINATION IN MATHEMATICS
MAA150 Vector algebra TEN1
Date: 9th June 2015 *Time:* 3 hours
Materials allowed: Writing material only

*This exam TEN1 consists of 6 problems, with a total score of 25 points. To obtain the grades **3**, **4** and **5**, scores of at least 12, 16 respectively 20 points are required. All solutions are to include motivations and clear answers to the questions asked.*

1. Solve the linear system of equations $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1\,, \\ \phantom{x_1 +{}} 2x_2 + 2x_3 = 2\,, \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4\,. \end{cases}$ *(3p)*

2. Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Which of the matrices A and B are on row-reduced echelon form?

b) Determine all vectors $x \in \mathbb{R}^4$ such that $Ax = 0$.

c) Determine all vectors $y \in \mathbb{R}^2$ such that $By = 0$.

Only answer is required to problem 2(a). *(5p)*

3. Determine the angle between the vectors $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ and $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$. *(3p)*

4. Let ℓ be the line in $\mathbb{R}^3$ that contains the origin and the point $x = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \end{pmatrix}$, where t is some given real number. Determine the value of $t \in \mathbb{R}$ for which the line ℓ is parallel with the plane $\pi \,:\, x - y + \frac{3}{2}z = 1$. *(4p)*

5. Solve the equation $z^4 = -4$ (where z is a complex number). Give the solutions on both polar form and cartesian form.
By cartesian form is meant the form $z = a + bi$, where $a, b \in \mathbb{R}$. *(4p)*

6. Let $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$, and $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $G(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

a) Show that F and G are linear maps, and write down their matrices.

b) Determine the matrix of the linear map G^{-1}.

c) Determine the matrix of the composed map $FG : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

(6p)

MAA150 Vektoralgebra

Lösningsförslag till tentamen TEN1 2015-06-09

1) Ekvationssystemet har totalmatrisen

$$\begin{array}{c} 2 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ -1 \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ 1/2 \\ 1/8 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ -3 \quad -1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ -2 \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

Systemet har lösningen $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

2. a) Matrisen A är på radreducerad trappstegsform, B är det inte.

b) Ekvationen $Ax = 0$ har totalmatris

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Alltså är $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ Sätt $x_3 = r$, $x_4 = t$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ r \\ t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, t \in \mathbb{R}$$

c) Totalmatrisen är $(B|0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Alltså är $\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$.

Ekvationen har unik lösning $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3) Låt α beteckna vinkeln mellan vektorerna u och v.
Då gäller $u \bullet v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha$.

$$u \bullet v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) = -3$$

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|v\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \cos\alpha = \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{-3}{3 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\overset{(\alpha \in [0,\pi])}{\Longrightarrow} \quad \underline{\underline{\alpha = \frac{3\pi}{4}}}$$

---

4) Linjen ℓ har riktningsvektor $u_{\overline{ox}} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \end{pmatrix}$.
Planet π har normalvektor $n = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

Linjen ℓ är parallell med planet π om och endast om $u_{\overline{ox}}$ är vinkelrät mot n, dvs om och endast om $u_{\overline{ox}} \bullet n = 0$

$$u_{\overline{ox}} \bullet n = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + t \cdot (-1) + 2t \cdot \frac{3}{2} = 1 - t + 3t = 1 + 2t$$

$$u_{\overline{ox}} \bullet n = 0 \iff 1 + 2t = 0 \iff \underline{\underline{t = -\frac{1}{2}}}$$

5) $z^4 = -4$

Sätt $z = re^{i\vartheta}$, där $r \geq 0 \Rightarrow z^4 = r^4 \cdot e^{i4\vartheta}$

$$-4 = 4\cdot(-1+0i) = 4\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = 4e^{i\pi}$$

$$z^4 = -4 \iff r^4 e^{i4\vartheta} = 4\cdot e^{i\pi}$$

$$\iff \begin{cases} r^4 = 4 \\ 4\vartheta = \pi + 2\pi k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} r = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \\ \vartheta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \end{cases}$$

$$\iff z = \sqrt{2}\cdot e^{i\vartheta_k}, \quad \text{där } \vartheta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$$

Detta ger fyra skilda lösningar, för $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i \\ z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + i \\ z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -1 - i \\ z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 1 - i \end{cases}$$

6.a) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Då är $Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = F(x)$

$$Bx = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = G(x)$$

Eftersom avbildningarna F och G ges av multiplikation med matriserna A och B, så är F och G linjära avbildningar.

Matrisen till F är A, och matrisen till G är B

b) Matrisen till avbildningen G^{-1} är B^{-1}

Bestämning av B^{-1}:

$$(B|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = (I_2 | B^{-1}) \implies \underline{\underline{B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

c) Matrisen till avbildningen FG är AB

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}}$$

MAA150 Vektoralgebra, vt-15.

Bedömningskriterier för tentamen TEN1 2015-06-09

För full poäng på en uppgift krävs fullständig lösning och tydligt svar (undantaget uppgift 2a, där enbart svar krävs).

1. Enstaka operationer som leder mot en lösning, men utan systematik – 1p;
Väsentligen korrekt lösning, men med vissa fel – 2p;
Fullständig och korrekt lösning – 3p.

2. 1 poäng för uppgift (a), två vardera för uppgift (b) och (c). För poäng på deluppgift (a) krävs korrekt svar. För full poäng på deluppgifterna (b) och (c) krävs korrekt och välmotiverad lösning.

3. Korrekt beräkning av $u \bullet v$ och korrekt formel $u \bullet v = \|u\|\|v\| \cos\alpha$ *alternativt* korrekt beräkning av $u \bullet v$ och $\|u\|$ och $\|v\|$ – 1p;
Beräkning av $\cos\alpha$ – 2p;
Fullständig och korrekt lösning – 3p.

4. Korrekta beräkningar, men utan motivering och/eller förklaring ger maximalt två poäng. För att poäng alls skall ges krävs konkreta steg som leder närmare en lösning av problemet. Mindre misstag kan ge avdrag om ett eller flera poäng.

5. Reduktion av problemet till ekvationer för r och θ ger maximalt två poäng. Korrekt lösning av ekvationen på polär form ger tre poäng, ytterligare en poäng ger för att skriva lösningen på cartesisk form. Mindre fel kan ge enstaka poängavdrag.

6. Två poäng per deluppgift. Enbart angivande av matriserna i deluppgift (a), utan bevis av lineariteten, ger en poäng.