MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Christopher Engström
Hjälpmedel: Formelblad bifogad tentamen.

TENTAMEN I MATEMATIK
MAA152 Flervariabelkalkyl
Datum: 16 Augusti 2018
Skrivtid: 3 timmar

Tentamen består utav 5 uppgifter updelade i underupgifter. För varje underuppgift är det angivet hur många poäng uppgiften kan ge totalt. För att få högsta poäng på en uppgift krävs att ett korrekt och tydligt angivet svar och en klar beskrivning av hur lösningen är strukturerad. Uppgifterna är ungefärligt ordnade efter svårighetsgrad.
Betygsgränser: Betyg 3: 12 poäng, Betyg 4: 16 poäng, Betyg 5: 20 poäng, Maxpoäng: 25

1. Givet dubbelintegralen

$$\iint_D (x+y)\ dA$$

där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| + |x| \leq 1\}$.

a) Skissa området D. (1 p)

b) Beräkna värdet av dubbelintegralen. (4 p)
Tips: Dela upp integralen i två för att bli av med absolutbeloppen.

2.

a) Beskriv vad som krävs för att en region ska vara reguljär och sluten. (2 p)

b) Definera eller beskriv Greens sats och motivera varför regionen i satsen måste vara reguljär för att satsen ska hålla. (2 p)

3.

a) Skissa volymen till kroppen som begränsas ovanifrån av $3 - 2y - z = 0$ och underifrån av $x^2 + y^2 - 2 = z$. (1 p)

b) Beräkna volymen av kroppen beskriven ovan. (4 p)

4.

a) Visa att vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = y^2\mathbf{i} + (e^z\cos(y) + 2xy)\mathbf{j} + (e^z\sin(y) + 1)\mathbf{k}$ är konservativt på $\mathbb{R}^3$ och bestäm dess potential. (3 p)

b) Beräkna värdet på linjeintegralen

$$\int_C y^2\ dx + (e^z\cos(y) + 2xy)\ dy + (e^z\sin(y) + 1)\ dz.$$

Där C är kurvan beskriven av $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3), \quad 0 \leq t \leq 1$. (3 p)

Fortsätter på nästa sida, var god vänd→

5. Beräkna flödet

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

Där ytan S beskrivs av cylindern $x^2 + y^2 \leq 4,\ 1 \leq z \leq 5$ och vektor fältet av $\mathbf{F}(x,y,z) = 3x\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. (5 p)

Lycka Till!

Lösningar

1

a) Området är en kvadrat med hörn $(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)$. b)

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-1+|x|}^{1-|x|} (x+y) = \int_0^1 dx \int_{-1+x}^{1-x} (x+y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-1-x}^{1+x} (x+y)dy$$

$$= \int_0^1 dx \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{-1+x}^{1-x} + \int_{-1}^{0} dx \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{-1-x}^{1+x}$$

$$= \int_0^1 2x - 2x^2 + \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(-1+x)^2}{2} dx + \int_{-1}^{0} 2x + 2x^2 + \frac{(1+x)^2}{2} - \frac{(-1-x)^2}{2} dx$$

$$= \int_0^1 2x - 2x^2 dx + \int_{-1}^{0} 2x + 2x^2 dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x^2 + \frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = 1 - 2/3 - 1 + 2/3 = 0$$

Det går även att komma fram till samma svar genom att använda symmetrin i uppgiften.

2

a) För att vara sluten kräver vi att randen tillhör regionen. För att vara reguljär kräver vi att regionen kan delas upp i ändligt många delregioner som alla är $x-$ och $y-$simpla.
b) Se sats i kursboken. Vore regionen ej reguljär så skulle det innebära att vi ej skulle kunna dela upp regionen i delregioner som är $x-$ och $y-$simpla. Det skulle t.ex. kunna vara en region med ett oändligt antal punkter i regionen som ej tillhör det vi vill integrera över något vi inte kan integrera över med vanliga Riemann integraler. Det går också bra att påpeka varför en reguljär region krävs för att något av de andra villkoren ska gälla.

3

a) Kroppen är run undertill som beskrivet av parabolan och begränsad ovanifrån av ett lutande plan.
b) Ytorna korsar varandra när $3 - 2y = x^2 + y^2 - 2 \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 6$ vilket är en cirkel centrerad i punkten $(0, -1)$. Vi integrerar över disken beskriven av denna cirkel. I varje punkt får vi höjden i z som skillnaden mellan de två ytorna: $3 - 2y - (x^2 + y^2 - 2) = 6 - x^2 - (y+1)^2$. Parametriseringen $x = r\sin(t)$, $y + 1 = r\cos(t)$ ger

$$V = \int_0^{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} (6 - x^2 - (y+1)^2) r dt\ dr = \int_0^{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} (6 - r^2\sin^2(t) - r^2\cos^2(t)) r dt\ dr$$

$$= \int_0^{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} 6r - r^3 dt\ dr = 2\pi \left[\frac{6r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{6}} = 2\pi(18 - 9) = 18\pi$$

4

a) Vi beräknar potentialen om den finns, om vi kan hitta den har vi också bevisat att fältet är konservativt. Låt ϕ vara potentialen till fältet:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xy + e^z\cos(y) \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = e^z\sin(y) + 1 \tag{3}$$

1) ger $\phi = xy^2 + C(y,z)$
2) ger $\phi = xy^2 + e^z\sin(y) + C(z)$
3) ger $\phi = xy^2 + e^z\sin(y) + z + C$
b) Eftersom vi har beräknat potentialen till fältet kan vi direkt använda denna för att beräkna värdet på linjeintegralen då kurvan börjar i (0,0,0) och slutar i (1,1,1):

$$\int_C y^2\ dx + (e^z\cos(y) + 2xy)\ dy + (e^z\sin(y) + 1)\ dz = \phi(1,1,1) - \phi(0,0,0)$$

$$= e\sin(1) + 2$$

5

Eftersom en cylindern är en sluten reguljär yta kan vi använda divergens satsen.

$$div\ \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial dx} + \frac{\partial F_2}{\partial dy} + \frac{\partial F_3}{\partial dz} = 3 - z + 2z = 3 + z$$

Divergens satsen ger:

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\ dS = \iiint_D div\ \mathbf{F} dV$$

där D är kroppen beskriven av cylindern.

$$\iiint_D div\ \mathbf{F} dV = \iiint_D 3 + z dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_1^5 (3+z) r dz\ dr\ d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^2 r[3z + z^2/2]_1^5 = 2\pi \int_0^2 r(15 + 12.5 - 3 - 0.5) = 48\pi \int_0^2 r$$

$$= 48\pi [r^2/2]_0^2 = 96\pi$$

Betygskriterier

1. a Korrekt och tydlig skiss av området (1p)

   b Korrekt uppställda integrationsgränser (1p), korrekt hantering av absolutbeloppet (1p), Korrekt lösning och svar (2p). Om symmetrin används ska det motiveras väl varför integralens värde blir noll för full poäng.

2. a Korrekt definition reguljär (1p), korrekt definition sluten (1p).

   b Korrekt beskrivning av satsen (1p), korrekt motivering (1p).

3. a Korrekt och tydlig skiss av kroppen (1p).

   b Korrekt skärning mellan ytorn (1p), identifiering av skärningen som en cirkel, samt korrekt parametrisering (2p), korrekt lösning av integralen (1p)

4. a Korrekt metod för att finna potentialen (1p), korrekt potential (1p), korrekt motivering till varför fältet är konservativt (1p).

   b Användning av att fältet är konservativt till att byta till enklare kurva eller notera att potentialen kan användas (1p). Korrekt lösning och svar (2p).

5. a Korrekt beräkning av $div\mathbf{F}$ eller $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}$ om divergenssatsen ej används (1p). Korrekt metod antingen för lösning av integralen eller med hjälp av divergenssatsen (2p). Korrekt lösning och svar (2p).