MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Lars-Göran Larsson

TENTAMEN I MATEMATIK
MAA151 Envariabelkalkyl, TEN2
Datum: 2015-01-15 *Skrivtid:* 3 timmar
Hjälpmedel: Skrivdon

Denna tentamen är avsedd för examinationsmomentet TEN2. Provet består av fem stycken om varannat SLUMPMÄSSIGT ORDNADE uppgifter som vardera kan ge maximalt 4 poäng. För GODKÄND-betygen 3, 4 och 5 krävs erhållna poängsummor om minst 9, 13 respektive 17 poäng. Om den erhållna poängen benämns S_2, och den vid tentamen TEN1 erhållna S_1, bestäms graden av sammanfattningsbetyg på en slutförd kurs enligt

$S_1 \geq 11,\ S_2 \geq 9$	OCH	$S_1 + 2S_2 \leq 41$	$\rightarrow$	3
$S_1 \geq 11,\ S_2 \geq 9$	OCH	$42 \leq S_1 + 2S_2 \leq 53$	$\rightarrow$	4
		$54 \leq S_1 + 2S_2$	$\rightarrow$	5

Lösningar förutsätts innefatta ordentliga motiveringar och tydliga svar. Samtliga lösningsblad skall vid inlämning vara sorterade i den ordning som uppgifterna är givna i.

1. Är serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\sqrt{n} + 3n + 10}{(n^2 + n + 5)^2}$ konvergent eller divergent? Förklara!

2. Bestäm volymen av den kropp som genereras genom att kring x-axeln rotera det begränsade område som precis innesluts av kurvorna $y = x^3$ och $y = \sqrt{x}$.

3. Skissa grafen till funktionen f, definierad enligt

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3}\,,$$

allt genom att använda den vägledning som fås från asymptoter, lokala extrempunkter och inflektionspunkter.

4. Bestäm den funktion F som uppfyller de två villkoren

$$F'(x) = (x + 3)\ln^2(x + 3)$$

och $F(-2) = 0$.

5. Visa att 1 är en stationär punkt till den funktion f vars funktionskurva $y = f(x)$ med $f(1) = 1$ är en implicit lösning till ekvationen

$$x\sin(xy - y^2) = \tfrac{1}{2}(x^2 - 1)$$

i en omgivning till $P : (1, 1)$. Avgör även om den stationära punkten möjligen är en lokal maximipunkt eller en lokal minimipunkt.

MAA151 / Lösningar till tentamen TEN2 2015-01-15

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ där $a_n = \dfrac{n^2\sqrt{n}+3n+10}{(n^2+n+5)^2} = \dfrac{n^{5/2}\left(1+3n^{-3/2}+10n^{-5/2}\right)}{n^4\left(1+n^{-1}+5n^{-2}\right)^2}$

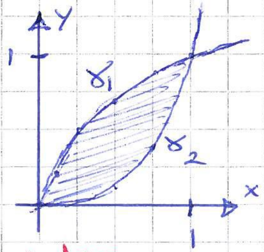
$= \dfrac{1}{n^{3/2}}B(n)$ där $\lim_{n\to\infty} B(n) = 1$

Vi har att $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)} = \lim_{n\to\infty} B(n) = 1 > 0$

där $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ är konvergent enligt integralkriteriet.

Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform ger därmed att även serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent.

2.



$\gamma_1 : y = \sqrt{x}$, $\gamma_2 : y = x^3$

$\gamma_1 \cap \gamma_2 : (x,y) = (0,0) \lor (x,y) = (1,1)$

Rotationsvolymen m.a.p. x-axeln är

Skivmetoden

$$V_x = \int_0^1 \pi\left[(\sqrt{x})^2 - (x^3)^2\right]dx = \pi\int_0^1 (x - x^6)\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{5\pi}{14} \text{ v.e.}$$

Cylindriska skal-metoden

$$V_x = \int_0^1 2\pi y\left(\sqrt[3]{y} - y^2\right)dy = 2\pi\int_0^1 \left(y^{\frac{4}{3}} - y^3\right)dy = 2\pi\left[\frac{3}{7}y^{7/3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5\pi}{14} \text{ v.e.}$$

3. $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{x^3} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0$ och $f(x) \xrightarrow{x\to 0^{\pm}} \mp\infty$

dvs $y=0$ är en dubbelsidig, icke-lodrät asymptot
$x=0$ är en dubbelsidig, lodrät asymptot

Derivering ger

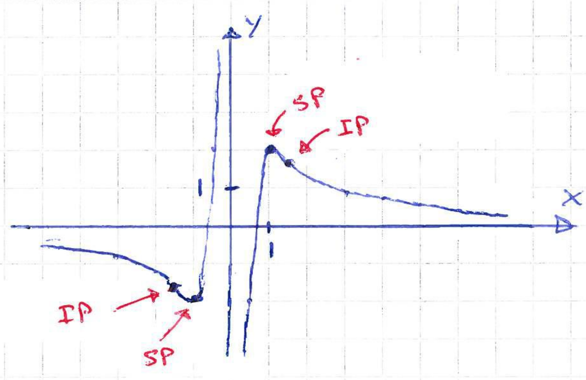
$$\begin{cases} f'(x) = -\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{3}{x^4} = -3\,\dfrac{x^2-1}{x^4} = -\dfrac{3(x+1)(x-1)}{x^4} \\[2ex] f''(x) = \dfrac{6}{x^3} - \dfrac{12}{x^5} = 6\,\dfrac{x^2-2}{x^5} = 6\,\dfrac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x^5} \end{cases}$$

		SP		Asymp.		SP	
x		-1		0		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	Ej	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok min	$\nearrow$	Ej	$\nearrow$	lok max	$\searrow$

				Asymp.			
x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	Ej	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	IP	$\cup$	Ej	$\cap$	IP	$\cup$

dvs f har en lokal minimipunkt i -1, och en lokal maximipunkt i 1, $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$.

Punkterna $\left(-\sqrt{2}, -\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)$ och $\left(\sqrt{2}, \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)$ är inflektionspunkter till kurvan $y = f(x)$



Forts. MAA151
2015-01-15

4 $F'(x) = (x+3)\ln^2(x+3)$ och $F(-2)=0$

Vi har att

$$F(x) = \int dx\,(x+3)\ln^2(x+3) \quad \begin{bmatrix} \ln(x+3) = u \\ x+3 = e^u \\ dx = e^u du \end{bmatrix} = \int e^u du\, e^u u^2$$

$$= \int du\, u^2 e^{2u} = (u^2)\left(\tfrac{1}{2}e^{2u}\right) - (2u)\left(\tfrac{1}{4}e^{2u}\right) + (2)\left(\tfrac{1}{8}e^{2u}\right) + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(u^2 - u + \tfrac{1}{2}\right)e^{2u} + C = \tfrac{1}{2}\left[\ln^2(x+3) - \ln(x+3) + \tfrac{1}{2}\right](x+3)^2 + C$$

där $0 = F(-2) = \frac{1}{2}\left[\ln^2(1) - \ln(1) + \frac{1}{2}\right]\cdot 1^2 + C = \frac{1}{2}\left(0^2 - 0 + \frac{1}{2}\right) + C$

dvs $C = -\frac{1}{4}$

Därmed $F(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2\ln(x+3)\left(\ln(x+3) - 1\right) + \frac{1}{4}\left[(x+3)^2 - 1\right]$

5 γ: $x\sin(xy - y^2) = \frac{1}{2}(x^2-1)$ satisfieras av $y = f(x)$ kring $P:(1,1)$.

Vi noterar inledningsvis att $P \subset \gamma$ ty $\underbrace{1\cdot\sin(1\cdot1-1^2)}_{=0} = \underbrace{\tfrac{1}{2}(1^2-1)}_{=0}$

Implicit derivering m.a.p. x ger

$$1\cdot\sin(xy-y^2) + x\cdot\cos(xy-y^2)\cdot(1\cdot y + xy' - 2yy') = \tfrac{1}{2}(2x - 0)$$

dvs $\left[\sin(xy-y^2) + xy\cos(xy-y^2) - x\right] + y'\cdot(x^2 - 2xy)\cos(xy-y^2) = 0$

Insättning av $x=y=1$ ger $\left[\sin(0) + 1\cdot\cos(0) - 1\right] + f'(1)\cdot(1-2)\cdot\cos(0) = 0$

dvs $(0 + 1 - 1) + f'(1)(-1)\cdot 1 = 0$ dvs $f'(1) = 0$

dvs 1 är en stationär punkt till f v.s.v.

Ytterligare en implicit derivering m.a.p. x ger

$$\cos(xy-y^2)\cdot(y + xy' - 2yy') + (y + xy')\cos(xy-y^2) + xy\left[-\sin(xy-y^2)\right](y + xy' - 2yy')$$
$$-1 + y''(x^2 - 2xy) + y'\cdot[\,\ldots\ldots\,] = 0$$

Insättning av $x=y=1$ och $y'=0$ ger

$$\cos(0)(1+0-0) + (1+0)\cos(0) + 1\left[-\sin(0)\right](1+0-0)$$
$$-1 + f''(1)\cdot(1-2) + 0\cdot[\,\ldots\ldots\,] = 0$$

dvs $1 + 1 + 0 - 1 - f''(1) + 0 = 0$ dvs $f''(1) = 1$

I och med att $f'(1) = 0$ och $f''(1) > 0$

så är den stationära punkten 1 en lokal minimipunkt till f.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Lars-Göran Larsson

TENTAMEN I MATEMATIK
MAA151 Envariabelkalkyl
BEDÖMNINGSPRINCIPER med POÄNGSPANN
Läsår: 2014/15

Tentamen TEN2 – 2015-01-15 — POÄNGSPANN (maxpoäng) för olika delmoment i uppgifter

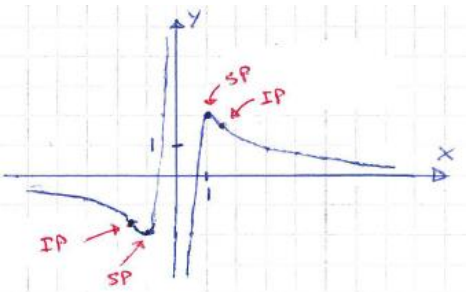
1. Serien är konvergent

1p: Korrekt identifierat att seriens termer a_n har egenskapen av att vara lika med $n^{-3/2}B(n)$, där $B(n) \to 1$ då $n \to \infty$
1p: Korrekt noterat att man kan använda jämförelsekriteriet och då jämföra med serien $\Sigma n^{-3/2}$
1p: Korrekt påpekat att jämförelseserien $\Sigma n^{-3/2}$ är konvergent (enligt integralkriteriet)
1p: Korrekt slutfört t.ex. jämförelsekriteriet på gränsvärdesform med slutsatsen att serien Σa_n är konvergent

2. $\dfrac{5\pi}{14}$ v.e.

1p: Korrekt fastställt hur det begränsade området ser ut och korrekt bestämt skärningen av de två inneslutande kurvorna och därmed också integrationsintervallet (oavsett om integrering har gjorts i x-led eller y-led)
2p: Korrekt formulerat en integral för rotationsvolymen
1p: Korrekt beräknat den formulerade integralen

3. Asymptoter: $x = 0$ och $y = 0$
Lokal minimum i $(-1, -2)$
Lokal maximum i $(1, 2)$



1p: Korrekt bestämt den lodräta asymptoten till grafen, samt hur grafen förhåller sig till asymptoten på dess två sidor
1p: Korrekt bestämt den horisontella asymptoten till grafen, samt hur grafen förhåller sig till denna asymptot då $x \to -\infty$ respektive då $x \to \infty$
1p: Korrekt bestämt och kategoriserat alla lokala extrempunkter till funktionen
1p: Korrekt bestämt de två inflektionspunkterna och korrekt (slut-)skissat grafen

4. $$F(x) = \tfrac{1}{2}(x+3)^2 \ln(x+3)\big(\ln(x+3) - 1\big) + \tfrac{1}{4}\big((x+3)^2 - 1\big)$$

1p: Korrekt gjort en första (vägvinnande) partiell primitivtagning (oavsett om en substitution har gjorts eller ej)
1p: Korrekt gjort en andra (vägvinnande) partiell primitivtagning
1p: Korrekt gjort den tredje och avslutande primitivtagningen
1p: Korrekt anpassat primitiven till begynnelsevillkoret, och korrekt skrivit ut funktionsuttrycket för F

Den som har gjort teckenfel i hanteringen av de termer som uppstått allteftersom det partiella primitivtagandet har utförts kan som mest få totalt **3p** och då förutsatt att de enskilda primitivtagningarna är korrekt gjorda.

5. $f'(1) = 0$ och $f''(1) = 1 > 0$,
dvs 1 är en lokal minimipunkt till f

1p: Korrekt deriverat implicit m.a.p. x i den givna ekvationen, allt i syfte att bestämma $f'(1)$
1p: Korrekt bestämt $f'(1)$
1p: Korrekt deriverat implicit m.a.p. x i den sedan tidigare deriverade ekvationen, allt i syfte att bestämma $f''(1)$
1p: Korrekt bestämt $f''(1)$ och korrekt dragit slutsatsen att punkten 1 är en lokal minimipunkt till funktionen f