MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Erik Darpö

TENTAMEN I MATEMATIK
MAA150 Vektoralgebra TEN2
Datum: 20 augusti 2015 *Skrivtid:* 3 timmar
Hjälpmedel: Skrivdon

*Denna tentamen TEN2 består av 5 uppgifter, med en sammanlagd poängsumma om 25 poäng. För betyget **3** krävs en erhållen poängsumma om minst 12 poäng, för betyget **4** krävs 16 poäng, och för betyget **5** krävs 20 poäng. Samtliga lösningar förutsätts innefatta ordentliga motiveringar och tydliga svar.*

1. Låt $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $u_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ och $w = \begin{pmatrix}2\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

a) Verifiera att vektorerna u_1, u_2, u_3, u_4 utgör en bas i $\mathbb{R}^4$.

b) Bestäm koordinaterna för vektorn w i basen $\underline{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]$ från deluppgift *a)*.

(6 p)

2. Låt $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den ortogonala projektionen på linjen $L = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2$.
(D v s, P är den linjära avbildning som uppfyller att $P(x) = x$ om $x \in L$, och $P(x) = 0$ om x är ortogonal mot L.)

a) Bestäm P:s matris.

b) Bestäm en bas i nollrummet $\ker P$.

(5 p)

3. Låt $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$. Bestäm en ortonormal bas (d v s en ON-bas) i underrummet $U = \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^4$. *(4 p)*

4. a) Ge exempel på en ortogonal matris $A \in \mathbb{R}^2$, som *inte* är enhetsmatrisen $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

b) Ge exempel på en matris $B \in \mathbb{R}^2$ som *inte* är ortogonal.

c) Är matrisen AB ortogonal?
Här är förstås A och B de matriser du angav i deluppgift a) *respektive* b).

(5 p)

5. a) Bestäm alla egenvärden, och motsvarande egenvektorer, till matrisen $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$.

b) Är matrisen A ovan diagonaliserbar? Ifall det är det, bestäm en diagonalmatris D och en inverterbar matris S sådana att $D = S^{-1}AS$.

(5 p)

The exam is available in English overleaf!

MÄLARDALEN UNIVERSITY
School of Education, Culture and Communication
Division of Applied Mathematics
Examiner: Erik Darpö

EXAMINATION IN MATHEMATICS
MAA150 Vector algebra TEN2
Date: 20th August 2015 *Time:* 3 hours
Materials allowed: Writing material only

*This exam TEN2 consists of 5 problems, with a total score of 25 points. To obtain the grades **3**, **4** and **5**, scores of at least 12, 16 respectively 20 points are required. All solutions are to include motivations and clear answers to the questions asked.*

1. Let $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $u_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ and $w = \begin{pmatrix}2\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

a) Verify that the vectors u_1, u_2, u_3, u_4 constitute a basis of $\mathbb{R}^4$.

b) Determine the coordinates of the vector w in the basis $\underline{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]$ from problem *a)*.

(6 p)

2. Let $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be the orthogonal projection onto the line $L = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2$.
(I.e., P is the linear map satisfying $P(x) = x$ if $x \in L$, and $P(x) = 0$ if x is orthogonal to L.)

a) Determine the matrix of P.

b) Determine a basis in the kernel $\ker P$.

(5 p)

3. Let $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$. Determine an orthonormal basis of the subspace $U = \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^4$.

(4 p)

4. a) Give an example of an orthogonal matrix $A \in \mathbb{R}^2$, *other than* the identity matrix $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

b) Give an example of a matrix $B \in \mathbb{R}^2$ that is *not* orthogonal.

c) Is the matrix AB orthogonal?
Here, of course, A and B refer to the matrices you gave in problem a) *and* b)*, respectively.*

(5 p)

5. a) Determine all eigenvalues, and the corresponding eigenvectors, of the matrix $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$.

b) Is the matrix A above diagonalisable? If it is, then determine a diagonal matrix D and an invertible matrix S, such that $D = S^{-1}AS$.

(5 p)

Tentamen finns även på svenska på andra sidan!

MAA150 Vektoralgebra

Lösningsförslag till tentamen TEN2 2015-08-20

1. a) $\underline{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]$ är en bas

$$\Longleftrightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = 4$$

$$\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\det\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$\underline{u}$ är alltså en bas i $\mathbb{R}^4$.

b) w:s koordinater i $\underline{u}$ är de tal $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ som uppfyller att $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = w$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ Totalmatrisen för denna ekvation är

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Koordinaterna för w är alltså:

$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -1, \ \lambda_3 = 1, \ \lambda_4 = 0$

2)

Låt A vara P:s matris.

Då gäller att $A = \begin{pmatrix} | & | \\ P(e_1) & P(e_2) \\ | & | \end{pmatrix}$ (där $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$).

För varje vektor $x \in \mathbb{R}^2$ gäller att

$$P(x) = \frac{x \cdot z}{z \cdot z} z, \quad \text{där } z = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad (L = \text{span}\{z\}).$$

$$z \cdot z = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$e_1 \cdot z = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1 \Rightarrow P(e_1) = \frac{e_1 \cdot z}{z \cdot z} z = \frac{1}{2} z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$e_2 \cdot z = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1 \Rightarrow P(e_2) = \frac{e_2 \cdot z}{z \cdot z} z = \frac{1}{2} z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Det följer att $\underline{A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}}$

b) $x \in \ker P \Leftrightarrow Ax = 0$

Totalmatris: $(A|0) = \begin{array}{c} ② \\ ② \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} (-1) \\ \leftarrow \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x_1 + x_2 = 0$

$x_1 = -x_2$ — låt $x_2 = t$. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t\\t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\ker P = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \begin{pmatrix}-t\\t\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Vektorn $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ bildar en bas i $\ker P \subset \mathbb{R}^2$

3) Tillämpa Gram-Schmidts algoritm på vektorerna u_1, u_2, u_3. Eftersom $U = \text{span}\{u_1, u_2, u_3\}$ så kommer detta att ge en ON-bas i U.

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}. \quad f_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}. \quad v_2 = u_2 - (u_2 \cdot f_1) f_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\cdot 6 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3/2\\3/2\\3/2\\3/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/2\\-1/2\\1/2\\3/2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$f_2 = \frac{1}{\|v_2\|}v_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{(-3^2)+(-1)^2+1^2+3^2}}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix}}}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}. \quad v_3 = u_3 - (u_3 \cdot f_1) f_1 - (u_3 \cdot f_2) f_2$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{20}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix}}_{=0}\right)\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\cdot 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$f_3 = \frac{1}{\|v_3\|}v_3 = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2+1^2}}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}}}$$

Vektorerna $f_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $f_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$, $f_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$ bildar en ON-bas i U.

4a) Exempelvis $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Kolonnerna i A bildar en ON-bas i $\mathbb{R}^2$:

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = 1, \quad \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = 1, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

b) Exempelvis $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Kolonnerna i B bildar <u>inte</u> en ON-bas, eftersom $\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = 2 \neq 1$.

c) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Denna matris är inte ortogonal, eftersom $\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = 2 \neq 1$.

I allmänhet gäller att en matris $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är ortogonal om och endast om $C^T C = I_n$. Så om A är ortogonal och B ej är ortogonal, så gäller att

$$(AB)^T AB = B^T \underbrace{A^T A}_{I_2} B = B^T B \neq I_2,$$

dvs, AB är inte ortogonal, oavsett vilka matriser A och B man väljer.

5a) Talet $\lambda \in \mathbb{R}$ är ett egenvärde till A om och endast om det finns en vektor $x \in \mathbb{R}^2$ sådan att $x \neq 0$ och $Ax = \lambda x$.

Detta är ekvivalent med att $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

$$\det(A-\lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(2-\lambda) - (-1)\cdot 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Så $\lambda \in \mathbb{R}$ är ett egenvärde $\Longleftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow \underline{\underline{\lambda = 1}}$.

Egenvektorer till λ är de vektorer $x \neq 0$ som uppfyller $Ax = \lambda x$, dvs alla nollskilda vektorer i $\ker(A - \lambda I_2)$.

$\lambda = 1$: Ekvationen $(A - I_2)x = 0$ har totalmatris

$$(A - I_2 \mid 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 = x_2$ Sätt $x_2 = t$: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

Egenvektorer är alla vektorer på formen $x = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $t \neq 0$.

Samtliga egenvektorer har egenvärde 1.

b) Matrisen A är diagonaliserbar om och endast om det finns en bas i $\mathbb{R}^2$ bestående av egenvektorer till A. Eftersom alla egenvektorer är på formen $t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, så följer att varje par av egenvektorer är linjärt beroende, och därför kan de inte bilda en bas i $\mathbb{R}^2$.

Matrisen A är alltså inte diagonaliserbar.

MAA150 Vektoralgebra, vt-15.

Bedömningskriterier för tentamen TEN2 2015-08-20

För full poäng på en uppgift krävs fullständig lösning och tydligt svar. Var och en av de fem uppgifterna bedöms som en helhet; lösningarna på de olika deluppgifterna sammanvägs till sammanfattande poäng för hela uppgiften.

1. I princip tre poäng vardera för deluppgift *a)* respektive *b)*. På vardera deluppgift gäller att en konstruktiv ansats kan ge en poäng och en väsentligt korrekt lösning med mindre brister kan ge två poäng.

2. Tre poäng för deluppgift *a)*, två poäng för *b)*. På *a)* ger korrekt uppställning av formeln för ortogonal projektion av en vektor ger en poäng, och väsentligen korrekt lösning med mindre brister två poäng.

3. Att korrekt bestämma den första basvektorn ger en poäng. Därutöver ges ytterligare två poäng för förståelse för den allmänna metoden, och ett sista poäng för fullständig och korrekt lösning.

4. Två poäng vardera för deluppgift *a)* och *b)*, en poäng för *c)*.

5. Tre poäng för uppgift *a)*, två poäng för uppgift *b)*. För två eller fler poäng på deluppgift *a)* krävs visad förståelse både för metoden för att bestämma egenvärden och metoden för att bestämma egenvektorerna till ett givet egenvärde. Visad förståelse för endast en av metoderna kan maximalt ge en poäng på deluppgift *a)*.