MAA151 / Lösningar till övningstentamen TEN2, nr 2 (2)

1
$$\gamma: \begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases} \quad t \geq 0 \quad \underline{\text{där}} \quad \begin{cases} f(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ g(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Vi har att
$$\begin{cases} f'(t) = \dfrac{-2t(\cancel{1}+t^2)-(\cancel{1}-t^2)2t}{(1+t^2)^2} = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2} = 2\cdot\dfrac{-2t}{(1+t^2)^2} \\ g'(t) = 2\,\dfrac{1(1+t^2)-t\cdot 2t}{(1+t^2)^2} = 2\cdot\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

och därmed att
$$L(\gamma) = \int_0^\infty \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt = \int_0^\infty 2\,\frac{\sqrt{4t^2+(1-t^2)^2}}{(1+t^2)^2}\,dt = 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{(1+t^2)^2}}{(1+t^2)^2}\,dt$$
$$= 2\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = 2\left[\arctan(t)\right]_0^\infty = 2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \text{ l.e.} = \underline{\pi \text{ l.e.}}$$

2 $y = f(x)$ satisfierar $\frac{x}{y} + 2e\ln(xy) = 3x$ i en omgivning till $P:(e,1)$ och med $f(e) = 1$.

Ekv:en kan i omgivningen ifråga skrivas som $x + 2ey\ln(xy) = 3xy$.

Derivering m.a.p. x ger $1 + 2e\,y'\ln(xy) + 2ey\frac{1}{xy}(1\cdot y + xy') = 3(1\cdot y + xy')$

dvs. $1 + 2e\frac{y}{x} - 3y = y'(3x - 2e - 2e\ln(xy))$

Ins. av $(x,y) = (e,1)$ ger $1 + 2e\frac{1}{e} - 3\cdot 1 = f'(e)(3e - 2e - 2e\ln(e))$

dvs $f'(e) = \dfrac{1+2-3}{(3-2-2)e} = 0$

Ytterligare en derivering ger $0 + 2e\dfrac{y'\cdot x - y\cdot 1}{x^2} - 3y' = y''(\quad) + y'(3 - 0 - \dots)$

Ins. av $(x,y) = (e,1)$ ger $2e\dfrac{0\cdot e - 1}{e^2} - 3\cdot 0 = f''(e)(3e - 2e - 2e\ln(e)) + 0\cdot(\dots)$

dvs $-\frac{2}{e} = f''(e)(-e)$ dvs $f''(e) = \frac{2}{e^2}$

Taylorpolynomet $p_2(x)$ av ordning 2 kring e till f
$$p_2(x) = f(e) + f'(e)(x-e) + \tfrac{1}{2}f''(e)(x-e)^2 = \underline{1 + \tfrac{1}{e^2}(x-e)^2}$$

3
$$f(x) = \sin^2(x)\sin(2x)\,e^{\sin^2(x)} = 2\sin^3(x)\cos(x)\,e^{\sin^2(x)}$$
$$\int dx\, f(x) = \int dx\, 2\sin(x)\cos(x)\sin^2(x)\,e^{\sin^2(x)} \quad \left[\begin{array}{l} \sin^2(x) = u \\ 2\sin(x)\cos(x)\,dx = du \end{array}\right]$$
$$= \int du\, u e^u = ue^u - \int 1 e^u\,du = ue^u - e^u + C$$
$$= \underline{(\sin^2(x) - 1)\,e^{\sin^2(x)} + C}$$

Forts. MAA151
TEN2, Övn ten 2

④ $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1} + 2\arctan(x) \xrightarrow{x \to \pm\infty} 0 + 2\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm\pi$

Vi har att $f'(x) = \dfrac{1(x^2+1) - (x+2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} + \dfrac{2}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-\cancel{2x^2}-4x+2(\cancel{x^2}+1)}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{x^2-4x+3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x^2+1)^2}$

1:a-derivattest

x		1		3	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	lok max	↘	lok min	↗

$\begin{cases} f(1) = \frac{3}{2} + 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3+\pi}{2} \\ f(3) = \frac{5}{10} + 2\arctan(3) \end{cases}$

I och med att $f(1) = \frac{3+\pi}{2} < \frac{\pi+\pi}{2} = \pi$ och att $y=\pi$ är en asymptot, finns inget absolut maximivärde.
I och med att $f(3) = \frac{1}{2} + 2\arctan(3) > \frac{1}{2} + 2\arctan(1) = \frac{1}{2} + 2\frac{\pi}{4} = \frac{1+\pi}{2} > 1$ och att $y = -\pi$ är en asymptot, finns inget absolut minimivärde.

Svar $\begin{cases} f(1) \text{ är ett lokalt maximivärde för } f \\ f(3) \text{ —— // —— minimivärde för } f \\ \text{ett absolut maximi- resp. minimi-värde saknas} \end{cases}$

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ där $a_n = \dfrac{(1-e^{-2})^n}{n} > 0$

Vi har att $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(1-e^{-2})^{n+1}}{n+1} \dfrac{n}{(1-e^{-2})^n}$

$= (1-e^{-2}) \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = (1-e^{-2})\cdot 1 < 1$

varför kvottestet ger att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent.

Seriens summa kan fås genom en identifiering med Maclaurinserien för $\ln(1+x)$, en serie som är lika med $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ och konvergent för $-1 < x \le 1$. Vi har att

ordna en teckenväxlare

justera teckenväxlaren ett steg så att den första termens är pos.

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1-e^{-2})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (e^{-2}-1)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(e^{-2}-1)^n}{n}$

$= -\ln(1 + (e^{-2}-1)) = -\ln(e^{-2}) = -(-2) = 2$

$-1 < e^{-2} - 1 < 0$