MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
*Examinator:* Erik Darpö

**TENTAMEN I MATEMATIK**
MAA150 Vektoralgebra TEN2
*Datum:* 11 juni 2015 *Skrivtid:* 3 timmar
*Hjälpmedel:* Skrivdon

*Denna tentamen TEN2 består av 6 uppgifter, med en sammanlagd poängsumma om 25 poäng. För betyget **3** krävs en erhållen poängsumma om minst 12 poäng, för betyget **4** krävs 16 poäng, och för betyget **5** krävs 20 poäng. Samtliga lösningar förutsätts innefatta ordentliga motiveringar och tydliga svar.*

**1.** En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ges av $F(x) = Ax$, där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Bestäm en bas i nollrummet $\ker F$. *(3p)*

**2.** Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, där $a$ är något reellt tal.

a) Bestäm en bas i $\operatorname{im} A$ för varje värde på $a \in \mathbb{R}$.

b) För vilka värden på talet $a$ gäller att $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^3$?

*(4p)*

**3.** Ange matrisen för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som uppfyller att
$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *(4p)*

**4.** Standardbasen i $\mathbb{R}^3$ består av vektorerna $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska:

a) De två vektorerna $e_1$, $e_1 + e_2$ är linjärt oberoende;

b) de tre vektorerna $e_2$, $e_3$, $e_1 \times e_2$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$.

*Glöm inte att motivera dina påståenden!* *(5p)*

**5.** Bestäm de värden (om sådana existerar) på talen $a, b \in \mathbb{R}$ för vilka följande vektorer bildar en ortonormerad bas (ON-bas) i $\mathbb{R}^3$:
$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2 + a^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{5 + b^2}}\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
*(4p)*

**6.** a) Visa att följande vektorer är egenvektorer till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, och ange motsvarande egenvärden:
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Är matrisen $A$ i (a)-uppgiften är diagonaliserbar?

*(5p)*

*The exam is available in English overleaf!*

MÄLARDALEN UNIVERSITY
School of Education, Culture and Communication
Division of Applied Mathematics
*Examiner:* Erik Darpö

**EXAMINATION IN MATHEMATICS**
MAA150 Vector algebra — TEN2
*Date:* 11th June 2015 — *Time:* 3 hours
*Materials allowed:* Writing material only

*This exam TEN2 consists of 6 problems, with a total score of 25 points. To obtain the grades **3**, **4** and **5**, scores of at least 12, 16 respectively 20 points are required. All solutions are to include motivations and clear answers to the questions asked.*

**1.** A linear map $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ is given by $F(x) = Ax$, where $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Determine a basis in the kernel $\ker F$. *(3p)*

**2.** Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, where $a$ is a real number.

a) Determine a basis of $\operatorname{im} A$ for all values of $a \in \mathbb{R}$.

b) For which values of $a$ is $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^3$?

*(4p)*

**3.** Determine the matrix of the linear map $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ that satisfies
$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ and $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *(4p)*

**4.** The standard basis in $\mathbb{R}^3$ consists of the vectors $e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ and $e_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Determine which of the following statements are true respectively false:

a) The two vectors $e_1$, $e_1 + e_2$ are linearly independent;

b) the three vectors $e_2$, $e_3$, $e_1 \times e_2$ constitute a basis of $\mathbb{R}^3$.

*Do not forget to give motivations to your answers!* *(5p)*

**5.** Determine all values (if such exist) of the numbers $a, b \in \mathbb{R}$ for which the following vectors constitute an orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2+a^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{5+b^2}}\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$ *(4p)*

**6.** a) Show that the following vectors are eigenvectors of the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, and give their corresponding eigenvalues: $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

b) Is the matrix $A$ in problem (a) diagonalisable?

*(5p)*

*Tentamen finns även på svenska på andra sidan!*

# MMA150 Vektoralgebra

## Lösningsförslag till tentamen TEN2 11 juni 2015

1) Låt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

$F(x) = 0 \iff Ax = 0$. Denna ekvation kan tolkas som ett linjärt ekvationssystem, med totalmatris

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Pivotelement

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Sätt $x_1 = r$, $x_4 = t$.

Då är $\begin{cases} x_2 = -t \\ x_3 = -t \end{cases}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ utgör en bas för $\ker F$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}}_{\tilde{A}}$

Om $a \neq -1$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pivotelement

Detta innebär att kolonn 1, 2 och 3 i matrisen A bildar en bas i im A: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Om $a = -1$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pivotelement. Alltså är kolonn 1 och 2 i matrisen A en bas i im A: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^3 \iff \dim(\operatorname{im} A) = 3$.

$\dim(\operatorname{im} A)$ = antalet basvektorer i im A.

Alltså är $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^3$ om och endast om $a \neq -1$

3) Låt $A$ vara matrisen till avbildningen $T$.

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Sätt $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}\\ A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\c-d\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}$$

Alltså måste $\begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a-b\\c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Tolka ovanstående som ett linjärt ekvationssystem:

$$\begin{cases} a+b \phantom{+c+d} = 2\\ a-b \phantom{+c+d} = -1\\ \phantom{a+b+} c+d = 2\\ \phantom{a+b+} c-d = 1\end{cases}$$

Totalmatris:

$$\begin{array}{c} (-1)\\ \\ (-1)\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{2}\\ \\ -\frac{1}{2}\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1\end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ (-1)\\ \\ (-1)\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2\end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{3}{2}\\ c=\frac{3}{2}\\ d=\frac{1}{2}\end{cases} \qquad \underline{\underline{A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}} \leftarrow \text{T:s matris}$$

3, alternativ lösning)

Vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ är egenvektorer till avbildningen $F$, med egenvärden 2 respektive $-1$.

Sätt $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, och låt $A$ vara matrisen till avbildningen $F$.

Då är $D = S^{-1}AS$

$$SD = AS$$

$$\underline{SDS^{-1} = A}$$

Beräkna $S^{-1}$: $(S \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = (I_2 \mid S^{-1})$

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$SDS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$F$:s matris är $A = SDS^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}}$

4a) $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_1 + e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ är linjärt oberoende om och endast om

ekvationen $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$ endast har den triviala lösningen $\begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = 0\end{cases}$

Ovanstående system har totalmatris $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

d.v.s. $\begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = 0\end{cases}$. Vektorerna är alltså linjärt oberoende.

b) $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$$e_1 \times e_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Frågan är alltså om vektorerna $e_2, e_3, e_3$ bildar en bas i $\mathbb{R}^3$. Detta är inte sant, eftersom de inte är linjärt oberoende: $0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 + (-1) e_3 = 0$

5) Vektorerna bildar en ON-bas om och endast om följande villkor är uppfyllda:

i) de är ortogonala mot varandra: $\begin{cases} u_1 \cdot u_2 = 0, \\ u_1 \cdot u_3 = 0, \\ u_2 \cdot u_3 = 0, \end{cases}$

ii) de har längd ett: $\begin{cases} \|u_1\| = 1, \\ \|u_2\| = 1, \\ \|u_3\| = 1. \end{cases}$

$$u_1 \cdot u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+a^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+a^2}} \left( 1^2 + 1 \cdot a + 0 \cdot 1 \right) = \frac{1+a}{\sqrt{2}\sqrt{2+a^2}}$$

$$u_1 \cdot u_2 = 0 \iff \underline{a = -1} \implies \underline{u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$u_1 \cdot u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5+b^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5+b^2}} \left( 1 \cdot b + 1^2 + 0 \cdot 2 \right) = \frac{1+b}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5+b^2}}$$

$u_1 \cdot u_3 = 0 \iff \underline{b = -1}$. Alltså är $\underline{u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

$$u_2 \cdot u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{6}} \left( 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \right) = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{6}} \cdot 0 = 0$$

OK.

$$\|u_1\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$$ ok

$$\|u_2\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 1$$ ok

$$\|u_3\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{6} = 1$$ ok.

$u_1, u_2, u_3$ är en ON-bas i $\mathbb{R}^3 \iff a = b = -1$

6a) • $Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1$

$\Longrightarrow$ $v_1$ är en egenvektor, med egenvärde $\underline{\underline{1}}$.

• $Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2v_2$

$\Longrightarrow$ $v_2$ är en egenvektor med egenvärde $\underline{\underline{2}}$.

• $Av_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_3$

$\Longrightarrow$ $v_3$ är en egenvektor med egenvärde $\underline{\underline{0}}$.

• $Av_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2v_4$

$\Longrightarrow$ $v_4$ är en egenvektor med egenvärde $\underline{\underline{2}}$.

b) $A$ är diagonaliserbar om och endast om det finns en bas i $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer till $A$.

Vektorerna $v_1, v_2, v_3, v_4$ är egenvektorer, och de bildar en bas i $\mathbb{R}^4$, eftersom:

i) de är rätt antal (4 st, och $\dim \mathbb{R}^4 = 4$).

ii) de är linjärt oberoende:

Vektorer med olika egenvärden är linjärt oberoende.
Därför räcker det att kontrollera att $v_2, v_4$ är linjärt oberoende.
Detta är sant eftersom $\lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$,

$\lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_4 = 0 \iff \underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}$.

# MAA150 Vektoralgebra, vt-15.

### Bedömningskriterier för tentamen TEN2 2015-06-11

---

För full poäng på en uppgift krävs fullständig lösning och tydligt svar.

**1.** En poäng för radreduktion av systemet $Ax = 0$ till övertriangulär form, ett poäng för lösning av systemet, ett poäng för korrekt tolkning och svar på frågan.

**2.** Tre poäng ges för deluppgift (a), ett poäng för (b). På första deluppgiften ges ett poäng för visad grundläggande förståelse av tillvägagångssättet: att bestämma vilka av kolonnerna i matrisen $A$ som är linjärt oberoende. Därutöver ges ett poäng för korrekt falluppdelning och ett poäng för lösning av de två fallen. Lösning av enbart det allmänna fallet kan ge två poäng, förutsatt att nödvändiga antaganden om värdet på konstanten $a$ är utskrivna, i annat fall ges maximalt ett poäng på denna deluppgift.

**3.** *För lösningsmetoden med ansats av okänd matris $A$:*
Korrekt ansats av okänd matris $A$ ger ett poäng, uppställning av matris/vektorekvationerna $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ och $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ ger ytterligare en poäng. Tolkning av matris/vektorekvationerna som ett linjärt ekvationssystem samt påbörjad (möjligtvis ofullständig) lösning av detta ger en poäng. För full poäng krävs fullständig lösning.

**4.** Två poäng för deluppgift (a), tre poäng för (b). På vardera deluppgift ges en poäng för visad förståelse av begreppen *linjärt oberoende* respektive *bas*. På deluppgift (b) ges en poäng för korrekt beräkning av vektorprodukten $e_1 \times e_2$.

**5.** Visad förståelse av begreppet *ON-bas* ger en poäng. Därutöver ges en poäng vardera för bestämning av talen $a$ och $b$, och ytterligare en poäng för att verifiera att vektorerna $u_1, \dots, u_4$ verkligen utgör en ON-bas för de beräknade värdena på $a$ och $b$.

**6.** Tre poäng för deluppgift (a), två poäng för (b). På (a)-uppgiften ger visad förståelse av begreppet *egenvektor* en poäng. Två poäng kan ges för en väsentligen riktig verifikation med mindre brister, eller om egenvärdena inte har angivits.
På (b)-uppgiften ges kan en poäng ges för korrekt svar med någon (men otillräcklig) relevant motivering (enbart korrekt svar utan motivering ger inga poäng). För full poäng på denna deluppgift krävs att frågan om linjärt oberoende har utretts.