MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Christopher Engström
Hjälpmedel: -

TENTAMEN I MATEMATIK
MAA152 Flervariabelkalkyl
Datum: 1 Juni 2018
Skrivtid: 3 timmar

Tentamen består utav 5 uppgifter updelade i underupgifter. För varje underuppgift är det angivet hur många poäng uppgiften kan ge totalt. För att få högsta poäng på en uppgift krävs att ett korrekt och tydligt angivet svar och en klar beskrivning av hur lösningen är strukturerad. Uppgifterna är ungefärligt ordnade efter svårighetsgrad.
Betygsgränser: Betyg 3: 12 poäng, Betyg 4: 16 poäng, Betyg 5: 20 poäng, Maxpoäng: 25

1. Givet dubbelintegralen

$$\iint_D (x^2 - y) dA$$

där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x \leq 1$.

a) Skissa området D. (1 p)

b) Beräkna värdet av dubbelintegralen. (4 p)

Lösning: b)

$$\int_0^1 dx \int_{-x}^{x} (x^2 - y) = \int_0^1 dx \left[x^2 y - \frac{y^2}{2} \right]_{-x}^{x} = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}$$

2.

a) Skissa ett exempel på två vektorfält, ett som är divergensfritt men inte rotationsfritt samt ett som är rotationsfritt men inte divergensfritt. Motivera ditt svar! (2 p)

b) Använd Greens sats för att beräkna integralen

$$\oint_C (2x-1)y \ dx + (x^2 - y) \ dy,$$

för den slutna kurvan C beskriven av randen till rektangeln med hörn $(1,1), (5,1), (1,4), (5,4)$ positivt orienterad ($\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$). (2 p)

Lösning: a) För att vara rotationsfritt kräver vi att curl är noll, vilket syns i skissen i att det inte ska finnas någon rotation kring någon punkt.
För att vara divergensfritt krävs att divergensen är noll, vilket syns i skissen i att det inte finns någon "produktion" i någon punkt, alltså att alla pilar har samma längd.
b) Greens sats get:

$$\oint_C (2x-1)y \ dx + (x^2 - y) \ dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

$$= \iint_R 2x - (2x-1) dA = \iint_R dA = 12$$

Värdet på integralen är arean av rektangeln R med sidor med längd $3 \cdot 4 = 12$.

3.

a) Skissa volymen till kroppen som begränsas ovanifrån av $x^2+y^2+\frac{z^2}{4} \leq 4$ och underifrån av $x^2+y^2+z^2 \leq 7$, ovanför xy-planet. (1 p)

b) Beräkna volymen av kroppen beskriven ovan. (4 p)

Lösning:
b) Beräknar först skärningspunkten mellan ytorna:

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}-4 = x^2+y^2+z^2-7$$

$$\Rightarrow \frac{3z^2}{4} = 3 \Rightarrow z = 2$$

De skär alltså varandra längs en cirkel parallell med xy-planet med radie $\sqrt{3}$ centrerad i (0,0,2). Vi nvänder cylindriska koordianter $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, $dxdydz = rdrd\theta dz$ och löser ut z i respektive ekvation ovan:

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} rdr \int_{\sqrt{7-x^2-y^2}}^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} (2\sqrt{4-x^2-y^2} - \sqrt{7-x^2-y^2})rdr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} (2\sqrt{4-r^2} - \sqrt{7-r^2})rdr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \left[(4-r^2)^{3/2}\frac{-2}{3} - (7-r^2)^{3/2}\frac{-2}{3}\frac{1}{2} \right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-2}{3} + \frac{4^{3/2}}{3} + 2\frac{4^{3/2}}{3} - \frac{7^{3/2}}{3} \right) d\theta = 2\pi \left(\frac{22-7^{3/2}}{3} \right)$$

4.

a) Visa att vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xe^y)\mathbf{i} + (x^2e^y - z^2)\mathbf{j} - 2yz\mathbf{k}$ är konservativt på $\mathbb{R}^3$ och bestäm dess potential. (3 p)

b) Beräkna värdet på linjeintegralen

$$\int_C 2xe^y \, dx + (x^2e^y - z^2) \, dy - 2yz \, dz$$

Där C är kurvan beskriven av $\mathbf{r}(t) = (t, \sin(\pi t), t^3)$, $\quad 0 \leq t \leq 1$. (3 p)

Lösning:
a) Vi beräknar potentialen om den finns, om vi kan hitta den har vi också bevisat att fältet är konservativt. Låt ϕ vara potentialen till fältet:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xe^y \tag{1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2e^y - z^2 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -2yz \tag{3}$$

1) ger $\phi = x^2e^y + C(y,z)$
2) ger $\phi = x^2e^y - z^2y + C(z)$
3) ger $\phi = x^2e^y - z^2y + C$
b) Eftersom vi har beräknat potentialen till fältet kan vi direkt använda denna för att beräkna värdet på linjeintegralen då kurvan börjar i (0,0,0) och slutar i (1,0,1):

$$\int_C 2xe^y\ dx + (x^2e^y - z^2)\ dy - 2yz\ dz = \phi(1,0,1) - \phi(0,0,0)$$

$$= 1$$

5. Beräkna flödet

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\ dS$$

Där ytan S beskrivs av konen $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ och vektor fältet $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{j} - z\mathbf{k}$. (5 p)

Lösning:
Låt S_1 vara konens yta och S_2 vara basen i xy-planet, där vi beräknar flydet ut ur varje del för sig.
På S_1 får vi:

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathbf{k}\right),\ dS = \sqrt{2}dx\ dy$$

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\ dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - z\right) dx\ dy = \iint_{S_1} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 + \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\ dy$$

$$0 + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (-r + r^2) dr$$

(där vi får att den första delen av integralen blir noll på grund av symmetri).

$$= 2\pi \left[\frac{-r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \right]_0^1 = -\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{-\pi}{3}$$

På S_2 får vi: $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{k}$ och $z = 0$ vilket get $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$ och det totala flödet är därmed flödet ut ur konen:

$$\frac{-\pi}{3}$$