Divsion of Mathematics
and applied mathematics
Mälardalen University
Examiner: Mats Bodin

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Examination Vector algebra
MAA150 - TEN2
Date: 2015-11-06
Exam aids: not any

All solutions should be presented so that calculations and arguments are easy to follow. All answers should be motivated. Each solution should end with a clearly stated answer.

1 Find the area of the triangle with vertices $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 0)$ and $C = (2, 2, 2)$. (6p)

2 Let $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be the linear transformation given by first a reflection in the line $y = -x$ and then a rotation $45°$ counter clockwise. Find the standard matrix $[T]$ of T. (6p)

3 Let W be the subspace of $\mathbb{R}^4$ that is given by $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

a. Find a basis for W. (3p)

b. Show that $V = \text{span}\{(1, -1, 1, -1), (-1, 1, 1, 3), (0, 0, 1, 1)\}$ is a subspace of W and find the dimension of V. (3p)

4 The matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

has eigenvalues $\lambda = 2$, $\lambda = 1$ och $\lambda = -1$.

a. Find the eigenvectors corresponding to the eigenvalues of the matrix A. (3p)

b. Explain why A is diagonalizable. (1p)

c. Construct a matrix P that diagonalizes A. Find the diagonalform D of the matrix A and state the algebraic relation between A, P and D. (3p)

Avdelningen för Matematik
och tillämpad matematik
Mälardalens högskola
Examinator: Mats Bodin

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Tentamen Vektoralgebra
MAA150 - TEN2
Datum: 2015-11-06
Hjälpmedel: inga

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Alla svar skall motiveras. Avsluta varje lösning med ett tydligt angivet svar!

1 Bestäm arean av triangeln med hörn i $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 0)$ och $C = (2, 2, 2)$. (6p)

2 Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som ges av först en spegling i linjen $y = -x$ och sedan en rotation $45°$ moturs. Bestäm T:s standardmatris $[T]$. (6p)

3 Låt W vara det underrum till $\mathbb{R}^4$ som ges av $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

a. Bestäm en bas till W. (3p)

b. Visa att $V = \text{span}\{(1, -1, 1, -1), (-1, 1, 1, 3), (0, 0, 1, 1)\}$ är ett underrum till W och bestäm V:s dimension. (3p)

4 Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

har egenvärden $\lambda = 2$, $\lambda = 1$ och $\lambda = -1$.

a. Bestäm tillhörande egenvektorer för egenvärdena till matrisen A. (3p)

b. Motivera varför A är diagonaliserbar. (1p)

c. Konstruera en matris P som diagonaliserar A. Ange A:s diagonalform D och sambandet mellan A, P och D. (3p)

Answers

1) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ area units.

2)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

3a) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is a basis for W

3b) $\dim(V) = 2$

4a) The eigenvectors for $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, and $\lambda_3 = -1$ are
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

4b) A is diagonalizable because A has three distinct eigenvalues.
4c) $A = PDP^{-1}$ where

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ and } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

MAA150 Vektoralgebra, ht-15.

Bedömningskriterier TEN2 2015-11-06

Allmän bedömningsgrund

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Alla svar skall motiveras. Avsluta varje lösning med ett tydligt angivet svar.

Bedömning uppgifter

1. Fullständigt löst uppgift ger 6 poäng. Ange en korrekt formel för arean av triangeln ger 1 poäng och bestämma relevanta vektorer ger 2 poäng. Beräkna kryssprodukt ger 2 poäng, och att beräkna norm ger 1 poäng.

2. Fullständigt löst uppgift ger 6 poäng. Reflektionen ger maximalt 2 poäng: Korrekt figur för reflektionsavbildning ger 1 poäng, tillhörande standardmatris ger 1 poäng. Rotationsavbildningen ger maximalt 2 poäng: standardmatrisen för en godtycklig vinkel ger 1 poäng, och korrekt bestämd för 45° ger 1 poäng. Bestämma standardmatrisen för sammansättning ger 2 poäng: korrekt sammansatt ger 1 poäng, och uträknad med matrismultiplikation ger 1 poäng.

3.
a. Fullständigt löst uppgift ger 3 poäng. Rätt lösningsmetod att ställa upp $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$ ger 1 poäng. Bestämma den allmänna lösningen ger 1 poäng. Ta ut basvektorerna från lösningen ger 1 poäng.

b. Fullständigt löst uppgift ger 3 poäng. Korrekt motivering till varför V är ett underrum till W ger 1 poäng. Att bestämma dimensionen för V ger 2 poäng.

4.
a. Fullständigt löst uppgift ger maximalt 3 poäng. 1 poäng per egenvektor. Delpoäng för korrekt ekvationssystem $(A - \lambda I)\overline{v} = \overline{0}$ för någon av egenvärdena.

b. Korrekt motivering ger 1 poäng.

c. Fullständigt löst uppgift ger 3 poäng. Att ange korrekt P ger 1 poäng, och tillhörande D ger 1 poäng. Sambandet $A = PDP^{-1}$ eller ekvivalent samband ger 1 poäng.

Solutions

Exam Vector algebra - TEN2 2015-11-06

1a $A=(0,0,1)$, $B=(1,1,0)$, $C=(2,2,2)$

$\vec{AB}=(1,1,0)-(0,0,1)=(1,1,-1)$

$\vec{AC}=(2,2,2)-(0,0,1)=(2,2,1)$

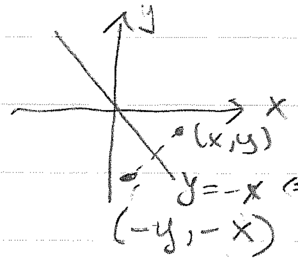
Då $\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-3\\0\end{bmatrix}$

$$\text{Area}=\frac{\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|}{2}=\frac{\|(3,-3,0)\|}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3^2+(-3)^2+0^2}}{2}=\frac{\sqrt{18}}{2}=\frac{\sqrt{9\cdot 2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Answer: $\frac{3}{\sqrt{2}}$ a.e

2 T_1:



$T_1(x,y)=(-y,-x)$

$T_1(1,0)=(0,-1)$

$T_1(0,1)=(-1,0)$

$$[T_1]=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$[T_{45^\circ}]=\begin{bmatrix}\cos45^\circ&-\sin45^\circ\\\sin45^\circ&\cos45^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$T=T_{45^\circ}\circ T_1\Rightarrow[T]=[T_{45^\circ}][T_1]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}.$$

Answer: $T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

TEN 2 2015-11-06

3a W is the nullspace to the matrix $A = [1\ -1\ -1\ 1]$

Solve $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$. Set free variables $x_2 = s$, $x_3 = t$, $x_4 = u \Rightarrow x_1 = x_2 + x_3 - x_4 = s + t - u$ which gives the general solution

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} s+t-u \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Answer 3a: $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is a basis to W

3b V is a subspace of W if

$\bar{v}_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\bar{v}_2 = (-1, 1, 1, 3)$ and $\bar{v}_3 = (0, 0, 1, 1)$ belongs to W

Checking that they satisfy $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$

$\bar{v}_1 : 1 - (-1) - 1 + (-1) = 0$ ok!

$\bar{v}_2 : -1 - 1 - 1 + 3 = 0$ ok!

$\bar{v}_3 : 0 - 0 - 1 + 1 = 0$ ok!

Hence span$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ is a subspace of W

dim(V) is given by the number of leding 1:s in the row-reduced matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \end{array}$$

2 leading 1:s so $\{\bar{r}_1, \bar{r}_2\}$ is a basis of V

Answer : $\dim(V) = 2$

4a $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$ are solutions to $\det(A - \lambda I) = 0$

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ $(A - 2\cdot I)\bar{v} = \bar{0} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (-1) \sim$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \times\left(-\frac{1}{3}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $v_3 = t \Rightarrow v_2 = t$ and $v_1 = 4t - 3t = t$

so $\bar{v}_1 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. With $t = 1$, $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ is an eigenvector for $\lambda_1 = 2$.

$\boxed{\lambda_2 = 1}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] (-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$v_3 = t \Rightarrow v_2 = t,\ v_1 = 0$ so $\bar{v}_2 = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Let $t = 1$

$\Rightarrow \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ is an eigenvector for $\lambda_2 = 1$

$\boxed{\lambda_3 = -1}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $v_3 = 3t \Rightarrow v_2 = t$ och $v_1 = 0$

$\bar{v}_3 = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ so with $t = 1 \Rightarrow \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ eigenvector for $\lambda_3 = -1$

4b A is digonalizable since A has 3 distinct eigenvalues.

4c $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ and $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

and $A = PDP^{-1}$.