Den sammanlagda poängsumman på tentan är 25 poäng. 12 poäng krävs för godkänt. För betyget **4** krävs 16 poäng och för betyget **5** krävs 20 poäng. Motivering ska anges på alla uppgifter om det inte explicit anges annat.

1. Beräkna gränsvärdet (4p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin(3x)}.$$

Lösning:

Vi använder standardgränsvärden och räknelagar på vanligt vis.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot 2x\frac{1}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3x}{\sin(3x)} =$$
$$1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Svar: $\frac{2}{3}$.

2. Beräkna gränsvärdet (4p)

$$\lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{x^3-2x}{2^{-x}+1}\right).$$

Lösning:

Vi undersöker först vad som händer med uttrycket innanför parentesen.

Vi kan konstatera att $\lim_{x\to\infty} x^3-2x = \infty$ och $\lim_{x\to\infty} 2^{-x}+1 = 1$. Alltså är

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x}{2^{-x}+1} = \infty.$$

Eftersom

$$\lim_{t\to\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}$$

så gäller att

$$\lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{x^3-2x}{2^{-x}+1}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

3. Beräkna derivatan av funktionen (4p)

$$f(x) = \sin(x+1) \cdot \cos\left(x^2 \cdot e^x\right) \cdot \ln(x).$$

Lösning: I denna uppgift måste vi kombinera produktregeln med kedjeregeln. De säger tillsammans att

$$f'(x) = \cos(x+1) \cdot \cos(x^2 e^x) \cdot \ln(x) - \sin(x+1) \cdot \sin(x^2 e^x) \cdot (2xe^x + x^2 e^x) \cdot \ln(x) + \\ + \sin(x+1) \cdot \cos\left(x^2 \cdot e^x\right) \cdot \frac{1}{x}$$

4. Anta att funktionen f uppfyller ekvationen (4p)

$$f(x)^2 + 2f(x)^3 - xf(x) = x+1$$

och att $f(1) = 1$. Beräkna $f'(1)$ med implicit derivering.

Lösning: En derivering ger att

$$2f(x)f'(x) + 6f(x)^2 f'(x) - f(x) - xf'(x) = 1.$$

Alltså är

$$f'(x)\left[2f(x) + 6f(x)^2 - x\right] = 1 + f(x) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1+f(x)}{2f(x)+6f(x)^2-x}$$

Vi får att

$$f'(1) = \frac{1+f(1)}{2f(1)+6f(1)^2-1} = \frac{1+1}{2+6-1} = \frac{2}{7}.$$

Svar: $f'(1) = \frac{2}{7}$.

5. Beräknan derivatan av funktionen (4p)

$$f(x) = \ln(\arccos(x) + e^{-\sin(x)}).$$

Lösning: Här får vi använda kedjeregeln flera gånger. Vi får att

$$f'(x) = \frac{1}{\arccos(x) + e^{-\sin(x)}} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - e^{-\sin(x)} \cdot \cos(x) \right) =$$
$$\frac{-1}{\arccos(x) + e^{-\sin(x)}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \cos(x) e^{-\sin(x)} \right)$$

6. Sätt (5p)

$$f(x) = \frac{x^2+2x+5}{x+1}.$$

Skissa grafen till f.

Lösning: Vi konstaterar först att definitionsmängden består av alla reella tal utom -1.

Vi räknar de ensida gränsvärdena vid -1.

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+2x+5}{x+1} = \text{“}\frac{4}{0^+}\text{”} = \infty.$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+2x+5}{x+1} = \text{“}\frac{4}{0^-}\text{”} = -\infty.$$

Vi räknar sedan gränsvärdena vid positiva och negativa oändligheten.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+2x+5}{x+1} = \infty.$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2x+5}{x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x} \cdot \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = -\infty.$$

En derivering ger att

$$f'(x) = \frac{(2x+2)\cdot(x+1) - (x^2+2x+5)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+2x+2-x^2-2x-5}{(x+1)^2} =$$
$$\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

Vi ser att det finns två stationära punkter till f, nämligen 1 och -3.

Vi ser också från faktorisering av derivatan att $f'(x) > 0$ om $x < -3$, att $f'(x) > 0$ om $x > 1$ och att $f'(x) < 0$ om $x \in]-3,-1[$ eller $x \in]-1,1[$.

Alltså är -3 en lokal maxpunkt och 1 en lokal minpunkt. Informationen vi fått fram används nu för att rita grafen. Endast en grov skiss krävs som vanligt.