

Albert



Probeklausur 2023/3
Analysis und Stochastik I147
2. Quartal 2023

Name des Prüflings:

Matrikelnummer:

Zenturie:

Dauer: 90 min Seiten ohne Deckblatt 12 Datum: 28. Mai 2023

Hilfsmittel: Ein Nordakademie Taschenrechner, ausgeteilte I147 Formelsammlung, Stifte, aber kein roter Stabilo 88/40, Lineal.

Bemerkungen: Diese Klausur enthält 8 Aufgaben. Es können 0 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie 0 Punkte. **Überprüfen Sie zuerst** die Anzahl der Seiten. Liegen Ihnen 12 Seiten (ohne Titelseite) vor?

Trennen Sie nicht die Heftung. Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen zu den einzelnen Fragen in die darauf folgenden leeren Boxen. Falls Sie mit dem Platz nicht auskommen, verwenden Sie auch die Rückseiten oder die Zusatzseiten am Ende des Klausurheftes.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	Prozent:
Punktzahl:	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Erreicht:									

Note: _____ Prozentsatz: _____ Ergänzungsprüfung: _____

Datum: _____ Unterschrift: _____

Datum: _____ Unterschrift: _____

Aufgabe 1 (0 Punkte)

Bestimmen Sie bei (1.1) und (1.2) den Grenzwert und bestimmen Sie bei (1.3) den Reihenwert.

(1.1) (0 Punkte)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^4 + 7n^2 + 1)(16n^2 + 2n - 6)}{(5n^3 - 14n + 36)(3n^3 - 8)}$$

Lösung:

Polynome gleichen Grades: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^4 + 7n^2 + 1)(16n^2 + 2n - 6)}{(5n^3 - 14n + 36)(3n^3 - 8)} = \frac{32}{15}$

(1.2) (0 Punkte)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$$

Lösung:

L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{2x - 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

(1.3) (0 Punkte)

$$\sum_{k=-2}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3} \right)^{k-2} + 6 \left(\frac{1}{4} \right)^{k+1} \right)$$

Lösung:

Lösung per Aufteilung:

$$\sum_{k=-2}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3} \right)^{k-2} + 6 \left(\frac{1}{4} \right)^{k+1} \right) = \sum_{k=-2}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-2} + 6 \sum_{k=-2}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{k+1}$$

Für die einzelnen Summen erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{k=-2}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-2} &= \left(\frac{1}{3} \right)^{-4} + \left(\frac{1}{3} \right)^{-3} + \left(\frac{1}{3} \right)^{-2} + \left(\frac{1}{3} \right)^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-2} \\ &= 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^k = 120 + \frac{1}{1-1/3} = 120 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

und

$$6 \sum_{k=-2}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{k+1} = 6 \cdot \left(\left(\frac{1}{4} \right)^{-1} + \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{k+1} \right) = 6 \cdot \left(4 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^k \right) = 6 \cdot \left(4 + \frac{1}{1-1/4} \right) = 32$$

Insgesamt somit

$$\sum_{k=-2}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3} \right)^{k-2} + 6 \left(\frac{1}{4} \right)^{k+1} \right) = 153,5.$$

Aufgabe 2 (0 Punkte)

Berechnen Sie das Integral per Substitution und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Taschenrechnerergebnis.

$$\int_0^1 \frac{6x+1}{\sqrt[4]{3x^2+x+1}} dx$$

(Genauigkeit: 2 Dezimalstellen)

Lösung:

Substitution: $u = 3x^2 + x + 1$ mit

$$\frac{du}{dx} = 6x + 1 \Leftrightarrow dx = \frac{du}{6x + 1}$$

und

$$\int \frac{6x+1}{\sqrt[4]{3x^2+x+1}} dx = \int \frac{6x+1}{\sqrt[4]{u}} \frac{du}{6x+1} = \int u^{-1/4} du = \frac{4}{3} u^{3/4} + c = \frac{4}{3} \sqrt[4]{(3x^2+x+1)^3} + c$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_0^1 \frac{6x+1}{\sqrt[4]{3x^2+x+1}} dx = \frac{4}{3} \left[\sqrt[4]{(3x^2+x+1)^3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} (3,343 - 1) = 3,124 \approx 3,12$$

TR: $3,1249 \approx 3,12$

Alternativ: gleich das bestimmte Integral mit Substitution berechnen:

$$\int_0^1 \frac{6x+1}{\sqrt[4]{3x^2+x+1}} dx = \int_1^5 \frac{6x+1}{\sqrt[4]{u}} \frac{du}{6x+1} = \int_1^5 u^{-1/4} du = \frac{4}{3} \left[u^{3/4} \right]_1^5 = \frac{4}{3} (5^{3/4} - 1^{3/4}) = 3,124$$

Aufgabe 3 (0 Punkte)

Sie zahlen in einen Sparplan über 20 Jahre einen konstanten Betrag von 1 000 EUR zum Jahresanfang ein. Dabei ist ein Zins von 5% vereinbart.

(3.1) (0 Punkte) Wie hoch ist der angesparte Betrag zum Ende der 20 Jahre bei jährlicher Verzinsung?

(3.2) (0 Punkte) Wie ändert sich die Endwerte, wenn die Einzahlungen zum Jahresende statt zu Jahresbeginn erfolgen?

(Rechnung mit 2 Dezimalstellen)

Lösung:

(3.1) (0 Punkte) vorschüssig:

$$\begin{aligned} K_{20} &= 1000(1.05 + 1.05^2 + \dots + 1.05^{20}) \\ &= 1000 \cdot 1.05 \cdot (1 + 1.05 + \dots + 1.05^{19}) = 1000 \cdot 1.05 \cdot \frac{1.05^{20} - 1}{1.05 - 1} = 34\,719 \text{ EUR} \end{aligned}$$

(3.2) (0 Punkte) Es wird um eine Periode weniger verzinst: $K_{20} = 1000 \cdot \frac{1.05^{20} - 1}{1.05 - 1} = 33\,066 \text{ EUR}$

Aufgabe 4 (0 Punkte)

Eine monopolistisches Unternehmen produziert ihren Output x (in ME_x) mit Hilfe eines einzigen variablen Produktionsfaktors (Input r in ME_r) nach folgender Produktionsvorschrift:

$$x(r) = 4 \sqrt{r - 100} \quad \text{mit } (r \geq 100)$$

Der Faktorpreis betrage 16 EUR/ ME_r . Der Output x kann nach der Preis-Absatz-Beziehung $x(p) = 196 - 0,4p$ (p in EUR/ ME_x) abgesetzt werden.

- (4.1) (0 Punkte) Bei welchem Output operiert die Unternehmung im Betriebsoptimum?
- (4.2) (0 Punkte) Ermitteln Sie die Gewinnschwellenpreise.
- (4.3) (0 Punkte) Welchen Marktpreis muss die Unternehmung fordern, um maximalen Gewinn zu erzielen?

Genauigkeit: ME_x, ME_r mit 3 Dezimalstellen

Lösung:

- (4.1) (0 Punkte) Betriebsoptimum = Minimum der Stückkostenfunktion. Die Kosten sind für den Faktorinput angegeben, d.h. müssen auf den Output x umgerechnet werden: $\frac{K(x)}{x} = \frac{16 \cdot r}{x} = x + \frac{1600}{x}$
 Ableitung $K'(x)$ bilden und Minimum ausrechnen ergibt: Betriebsoptimum bei 40 ME.
- (4.2) (0 Punkte) Gewinnfunktion: $G(x) = x \cdot p(x) - x^2 - 1600 = 490x - 2,5x^2 - 1600 = -3,5x^2 + 490x - 1600$ Gewinnschwellenpreise = Grenzen der Gewinnzone: $G(x) > 0$ für $x \in]x_u, x_o[$ und $G(x_u) = G(x_o) = 0$ Per TR: $3,345 \leq x \leq 136,655$, d.h. $p_u = 148,36$ EUR/ ME_x und $p_o = 481,64$ EUR/ ME_x .
- (4.3) (0 Punkte) Maximaler Gewinn: Aus $G'(x) = -7x + 490$ und $G''(x) = -7$ ergibt sich das Maximum für $x = 70 \text{ ME}_x$. Maximalgewinn = 15 550 EUR, $p = 315$ EUR/ ME_x .

Aufgabe 5 (0 Punkte)

Falls Sie am Sonntagvormittag das Radio bei einem zufällig gewählten Sender einstellen, erklingt mit 20 Prozent Wahrscheinlichkeit Orgelmusik, an anderen Vormittagen nur mit 2 Prozent Wahrscheinlichkeit. Nun hatten Sie im Urlaub ein etwas unstrukturiertes Leben, die Tage der Woche waren alle gleichberechtigt. An irgendeinem Vormittag wachten Sie auf und beim Radio-Einschalten - der Sender wurde zufällig gewählt - erklang Orgelmusik. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war das ein Sonntag?

Genauigkeit: 2 Dezimalstellen

Lösung:

Ereignisse: O = Orgelmusik, S = Sonntag.

gegebene Wahrscheinlichkeiten: $P(O|S) = 0,20$ und $P(O|\bar{S}) = 0,02$

Außerdem wissen Sie: $P(S) = \frac{1}{7}$.

$$P(S|O) = \frac{P(S) \cdot P(O|S)}{P(O)} = \frac{(1/7) \cdot 0,20}{(1/7) \cdot 0,20 + (6/7) \cdot 0,02} = \frac{5}{8} \approx 0,63$$

Mit ca 63% Wahrscheinlichkeit war das ein Sonntag.

Aufgabe 6 (0 Punkte)

(6.1) (0 Punkte) Gegeben sind die folgenden Wertepaare.

X	1	2	3	3	4	5
Y	6	4	3	5	6	10

a) Berechnen Sie ein lineares YX-Modell. (Genauigkeit: 2 Dezimalstellen)

Lösung:

$$y = a + bx = 2,67 + x \quad (a = 2,6\bar{6}, b = 1)$$

b) Beurteilen Sie die Güte des Modells.

Lösung:

$$r = 0,583, \text{ d.h. } B = r^2 = 0,34$$

Die erklärte Varianz des Modells liegt bei ca. 34%. Geringe Güte.

(6.2) (0 Punkte) a) Berechnen Sie ein quadratisches YX-Modell. (Genauigkeit: 2 Dezimalstellen)

Lösung:

$$y = a + bx + cx^2 = 10 - 5x + x^2$$

b) Beurteilen Sie die Güte des Modells.

Lösung:

$$B = \frac{27,333}{29,333} \approx 0,93$$

Die erklärte Varianz des Modells liegt bei ca. 93%. Hohe Güte.

(6.3) (0 Punkte) Ggf. könnten hier noch ein zwei Fragen zum Regressionsverständnis kommen.

Lösung:

Aufgabe 7 (0 Punkte)

(7.1) (0 Punkte) Eine Lieferung besteht aus 50 Lampen. Aus der Lieferung werden 5 Lampen zufällig und ohne Zurücklegen entnommen.

a) Wieviele Stichproben sind möglich?

Lösung:

Anzahl möglicher Stichproben: $\binom{50}{5}$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe genau zwei defekte Glühlampen enthalten sind, wenn von den 50 Glühlampen genau 10 defekt sind?

Lösung:

hypergeometrische Verteilung,

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{40}{3}}{\binom{50}{5}} = 0,2098$$

Somit ca. 20,98%

(7.2) (0 Punkte) Bei Blutspenden wird jede Blutspende daraufhin untersucht, ob sie zur Aufbereitung zu einer Blutkonserve geeignet ist oder nicht. Erfahrungsgemäß sind 5% der Blutspenden für eine Aufbereitung nicht verwendbar. - Eine Aufbereitungsfirma führt stets fünf miteinander verträgliche Blutspenden zu einem Pool zusammen und führt für diesen Pool die Untersuchung durch.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass drei gute Blutspenden mit zwei schlechten Blutspenden vermengt werden?

Lösung:

Binomialverteilung; X sei die Anzahl der guten Blutspenden, Erfolgswahrscheinlichkeit = 0,95. Dann gilt

$$P(X = 3) = f_B(3|5, 0.95) = 0,0214 \text{ (TR)}$$

Aufgabe 8 (0 Punkte)

(8.1) (0 Punkte) Der Student Jan hat in seinem Kühlschrank acht Eier gelagert. Zwei Eier sind, ohne dass er es weiß, faul. Für Rühreier greift er zufällig drei Eier.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Rühreier ungenießbar sind (d.h. mind ein gegriffenes Ei ist faul)?

Lösung:

Hypergeometrische Verteilung $P(X \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - f_H(0|3, 8, 3) = 1 - \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{14}$
 Also ca. 35,71%.

(8.2) (0 Punkte) Auf eine Kreuzung münden vier Straßen, aus denen im Durchschnitt in einer Stunde 27, 23, 35 und 15 Kraftfahrzeuge auf die Kreuzung kommen.

Die Ankünfte der Kraftfahrzeuge sind jeweils poissonverteilt und paarweise stochastisch unabhängig.

a) Bestimmen Sie für die Gesamtzahl Y der die Kreuzung passierenden Kraftfahrzeuge Erwartungswert und Varianz.

Lösung:

Poissonverteilung:

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 27 + 23 + 35 + 15 = 100.$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y) = 100.$$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens 90 und höchstens 110 Fahrzeuge die Kreuzung in einer Stunde passieren?

Lösung:

$$\text{Poissonverteilung } P(90 \leq X \leq 110) = P(X \leq 110) - P(X < 90) = 0,85286 - 0,17138 = 0,68144 \approx 0,6814. \text{ (TR)}$$

Also ca. 68,14%.

(8.3) (0 Punkte) Bei einer Klausur mit einer maximalen Punktzahl von 100 seien die Ergebnisse näherungsweise normalverteilt mit $\mu = 60$ und $\sigma = 10$.

a) Bestimmen Sie den Anteil der Studierenden, die durchgefallen sind, wenn zum Bestehen der Klausur mindestens 50 Punkte erforderlich sind.

Lösung:

Normalverteilung (hier mit Z-Transformation gerechnet, geht auch direkt im TR, zusätzlich Stetigkeitskorrektur notwendig): $P(X < 49,5) = P(Z < \frac{49,5-60}{10} = -1,05) = 0,14686$, d.h. rund 14,7%.

b) Bestimmen Sie den Anteil der Studierenden, die die Note „gut“ erhalten, wenn diese für Punktzahlen von 80 bis 95 vergeben wird.

Lösung:

$$P(79,5 < X < 95,5) = P(1,95 < Z < 3,55) = 0,99981 - 0,97441 = 0,0254, \text{ d.h. rund } 2,5\%.$$

- c) Auf welchen Wert muss die zum Bestehen nötige Mindestpunktzahl festgelegt werden, wenn nicht mehr als 10% der Studierenden durchfallen sollen?

Lösung:

TR: Inverse Normal: $0,1 = P(X < x) \Leftrightarrow \Phi^{-1}(0,1) = -2,33$, d.h. die Mindestpunktzahl x muss auf 47 gesetzt werden.

- (8.4) (0 Punkte) Die Lebensdauer von Schläuchen einer Hydraulikanalage ist annähernd normalverteilt mit einer Standardabweichung von $\sigma = 600$ Stunden. Eine Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 36$ ergibt eine durchschnittliche Lebensdauer von 3000 Stunden. Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den unbekannten Parameter μ der Normalverteilung und interpretieren Sie das berechnete Intervall.

Lösung:

Formelsammlung Konfidenzintervall: $KI_{1-\alpha} = \left[\bar{X} - c \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + c \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]$

Zusätzlich ist die Varianz bekannt, d.h. $c = u_{1-\frac{\alpha}{2}} = (1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Standardnormalverteilung $N(0,1)$.

TR (inverse Normal): $c = 1,9600$ und $\hat{\sigma} = 600$ und damit

$$KI_{0,95} = \left[3000 - 1,96 \cdot \frac{600}{\sqrt{36}}, 3000 + 1,96 \cdot \frac{600}{\sqrt{36}} \right] = [3000 - 196, 3000 + 196] = [2804, 3196]$$

Interpretation: Bei 100 Stichproben mit daraus berechneten Konfidenzintervallen enthalten 95% dieser Intervalle den wahren Wert μ der Grundgesamtheit.

(Genauigkeit: 4 Dezimalstellen)

Leere Seite für Ihre Notizen Leere Seite für Ihre Notizen Leere Seite für Ihre Notizen

Viel Erfolg!