Albert

Probeklausur 2024/2

Analysis und Stochastik I147

2. Quartal 2024

Name des Prüflings: **Matrikelnummer:** **Zenturie:**

Dauer: 90 min Seiten ohne Deckblatt 11 Datum: 9. Juni 2024

Hilfsmittel: Ein Nordakademie Taschenrechner, ausgeteilte I147 Formelsammlung, Stifte, aber kein roter Stabilo 88/40, Lineal.

Bemerkungen: Diese Klausur enthält 8 Aufgaben. Es können 0 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie 0 Punkte. **Überprüfen Sie zuerst** die Anzahl der Seiten. Liegen Ihnen 11 Seiten (ohne Titelseite) vor?

Trennen Sie nicht die Heftung. Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen zu den einzelnen Fragen in die darauf folgenden leeren Boxen. Falls Sie mit dem Platz nicht auskommen, verwenden Sie auch die Rückseiten oder die Zusatzseiten am Ende des Klausurheftes.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	Prozent:
Punktzahl:	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Erreicht:									

Note: ________ Prozentsatz: ________ Ergänzungsprüfung: ________

Datum: ________ Unterschrift: ________

Datum: ________ Unterschrift: ________

Aufgabe 1 (0 Punkte)

(1.1) (0 Punkte) Bestimmen Sie den Grenzwert.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-2x} + x^2 + 2x - 1}{x - \mathrm{e}^x}$$

Lösung:
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-2x} + x^2 + 2x - 1}{x - \mathrm{e}^x} = \frac{0}{-1} = 0$

(1.2) (0 Punkte) Prüfen Sie, ob die Reihe konvergent ist und bestimmen ggf. den Grenzwert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{n+2}}{e^n} \right)$$

Lösung:
Es handelt sich um eine geometrische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{n+2}}{e^n} \right) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{e} \right)^n = 4 \left(\cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{\mathrm{e}}} - 1 \right) = \frac{8}{\mathrm{e} - 2}$$

(1.3) (0 Punkte) Ist die folgende Funktion stetig?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+x^2} & f\ddot{u}r\ x < 1 \\ e^x & f\ddot{u}r\ x \geqslant 1 \end{cases}$$

Lösung:
Offensichtlich sind die beiden einseitigen Grenzwerte an der Stelle $x = 1$ verschieden, so dass die Funktion dort nicht stetig ist und die Funktion insgesamt auch nicht stetig ist.

Aufgabe 2 (0 Punkte)

Berechnen Sie das Integral per Substitution und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Taschenrechnerergebnis.

$$\int_0^1 \frac{6x+1}{\sqrt[4]{3x^2+x+1}}dx$$

(*Genauigkeit: 2 Dezimalstellen*)

Lösung:

Substitution: $u = 3x^2 + x + 1$ mit

$$\frac{du}{dx} = 6x + 1 \Leftrightarrow dx = \frac{du}{6x+1}$$

und

$$\int \frac{6x+1}{\sqrt[4]{3x^2+x+1}}dx = \int \frac{6x+1}{\sqrt[4]{u}} \frac{du}{6x+1} = \int u^{-1/4}du = \frac{4}{3}u^{3/4} + c = \frac{4}{3}\sqrt[4]{(3x^2+x+1)^3} + c$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_0^1 \frac{6x+1}{\sqrt[4]{3x^2+x+1}}dx = \frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{(3x^2+x+1)^3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}(3,343-1) = 3,124 \approx 3,12$$

TR: $3,1249 \approx 3,12$

Alternativ: gleich das bestimmte Integral mit Substitution berechnen:

$$\int_0^1 \frac{6x+1}{\sqrt[4]{3x^2+x+1}}dx = \int_1^5 \frac{6x+1}{\sqrt[4]{u}} \frac{du}{6x+1} = \int_1^5 u^{-1/4}du = \frac{4}{3}\left[u^{3/4}\right]_1^5 = \frac{4}{3}\left(5^{3/4} - 1^{3/4}\right) = 3,124$$

Aufgabe 3 (0 Punkte)
Sie zahlen in einen Sparplan über 20 Jahre einen konstanten Betrag von 1 000 EUR zum Jahresanfang ein. Dabei ist ein Zins von 5% vereinbart.

(3.1) (0 Punkte) Wie hoch ist der angesparte Betrag zum Ende der 20 Jahre bei jährlicher Verzinsung?

(3.2) (0 Punkte) Wie ändert sich die Endwerte, wenn die Einzahlungen zum Jahresende statt zu Jahresbeginn erfolgen?

(Rechnung mit 2 Dezimalstellen)

Lösung:

(3.1) (0 Punkte) vorschüssig:

$$K_{20} = 1000(1.05 + 1.05^2 + ... + 1.05^{20})$$
$$= 1000 \cdot 1.05 \cdot (1 + 1.05 + \cdots + 1.05^{19}) = 1000 \cdot 1.05 \cdot \frac{1.05^{20}-1}{1.05-1} = 34\,719\,\text{EUR}$$

(3.2) (0 Punkte) Es wird um eine Periode weniger verzinst: $K_{20} = 1000 \cdot \frac{1{,}05^{20}-1}{1{,}05-1} = 33\,066$ EUR

Aufgabe 4 (0 Punkte)

Eine monopolistisches Unternehmen produziert ihren Output x (in ME_x) mit Hilfe eines einzigen variablen Produktionsfaktors (Input r in ME_r) nach folgender Produktionsvorschrift:

$$x(r) = 4\sqrt{r - 100} \qquad \text{mit } (r \geq 100)$$

Der Faktorpreis betrage 16 EUR/ME_r. Der Output x kann nach der Preis-Absatz-Beziehung $x(p) = 196 - 0,4p$ (p in EUR/ME_r) abgesetzt werden.

(4.1) (0 Punkte) Bei welchem Output operiert die Unternehmung im Betriebsoptimum?

(4.2) (0 Punkte) Ermitteln Sie die Gewinnschwellenpreise.

(4.3) (0 Punkte) Welchen Marktpreis muss die Unternehmung fordern, um maximalen Gewinn zu erzielen?

Genauigkeit: ME_x, ME_r mit 3 Dezimalstellen

Lösung:

(4.1) (0 Punkte) Betriebsoptimum = Minimum der Stückkostenfunktion. Die Kosten sind für den Faktorinput angegeben, d.h. müssen auf den Output x umgerechnet werden:
$x(r) = 4\sqrt{r - 100} \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} = r - 100 \Leftrightarrow r = 100 + \frac{x^2}{16}$ und daraus $16r = 1600 + x^2$.
Daraus folgt für die Stückkostenfunktion:
$\frac{K(x)}{x} = \frac{16 \cdot r}{x} = x + \frac{1600}{x}$
Ableitung $K'(x)$ bilden und Minimum ausrechnen ergibt: Betriebsoptimum bei 40 ME.

(4.2) (0 Punkte) Gewinnfunktion: $G(x) = x \cdot p(x) - x^2 - 1600 = 490x - 2,5x^2 - x^2 - 1600 = -3,5x^2 + 49x - 1600$ Gewinnschwellenpreise = Grenzen der Gewinnzone: $G(x) > 0$ für $x \in]x_u, x_o[$ und $G(x_u) = G(x_o) = 0$ Per TR: $3,345 \leq x \leq 136,655$, d.h. $p_u = 148,36$ EUR/ME_x und $p_o = 481,64$ EUR/ME_x.

(4.3) (0 Punkte) Maximaler Gewinn: Aus $G'(x) = -7x + 490$ und $G''(x) = -7$ ergibt sich das Maximum für $x = 70$ ME_x. Maximalgewinn = 15 550 EUR, $p = 315$ EUR/ME_x.

Aufgabe 5 (0 Punkte)

Falls Sie am Sontagvormittag das Radio bei einem zufällig gewählten Sender einstellen, erklingt mit 20 Prozent Wahrscheinlichkeit Orgelmusik, an anderen Vormittagen nur mit 2 Prozent Wahrscheinlichkeit. Nun hatten Sie im Urlaub ein etwas unstrukturiertes Leben, die Tage der Woche waren alle gleichberechtigt. An irgendeinem Vormittag wachten Sie auf und beim Radio-Einschalten - der Sender wurde zufällig gewählt - erklang Orgelmusik.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit war das ein Sonntag?

Genauigkeit: 2 Dezimalstellen

Lösung:

Ereignisse: O = Orgelmusik, S = Sonntag.
gegebene Wahrscheinlichkeiten: $P(O|S) = 0,20$ und $P(O|\bar{S}) = 0,02)$
Außerdem wissen Sie: $P(S) = \frac{1}{7}$.

$$P(S|O) = \frac{P(S) \cdot P(O|S)}{P(O)} = \frac{(1/7) \cdot 0,20}{(1/7) \cdot 0,20 + (6/7) \cdot 0,02} = \frac{5}{8} \approx 0,63$$

Mit ca 63% Wahrscheinlichkeit war das ein Sonntag.

Aufgabe 6 (0 Punkte)

(6.1) (0 Punkte) Gegeben sind die folgenden Wertepaare.

X	12	23	34	30	40	50
Y	60	40	30	55	68	113

a) (0P) Berechnen Sie ein lineares YX-Modell. (*Genauigkeit: 2 Dezimalstellen*)

Lösung:
$y = a + bx = 19,59 + 1,31 \cdot x \qquad (a = 19,5877, b = 1,3147)$

b) (0P) Beurteilen Sie die Güte des Modells.

Lösung:
$r = 0,600$, d.h. $B = r^2 = 0,36$
Die erklärte Varianz des Modells liegt bei ca. 36%. Geringe Güte.

(6.2) (0 Punkte) a) (0P) Berechnen Sie ein quadratisches YX-Modell. (*Genauigkeit: 2 Dezimalstellen*)

Lösung:
$y = a + bx + cx^2 = 118,9394 - 6,28328x + 0,12229x^2 \approx 118,94 - 6,28x + 0,12x^2$

b) (0P) Beurteilen Sie die Güte des Modells.

Lösung:
$B = \frac{3678,570}{4192,000} \approx 0,877 \approx 0,88$
Die erklärte Varianz des Modells liegt bei ca. 88%. Hohe Güte.

(6.3) (0 Punkte) Was bedeuten die Koeffizienten a und b beim linearen Modell in 6.1?

Lösung:
b: Wenn die unabhängige Variable sich um eine Einheit ändert, dann ändert sich die abhängige Variable um b Einheiten.

Aufgabe 7 (0 Punkte)

(7.1) (0 Punkte) Eine Lieferung besteht aus 50 Lampen. Aus der Lieferung werden 5 Lampen zufällig und ohne Zurücklegen entnommen.

a) Wieviele Stichproben sind möglich?

Lösung:
Anzahl möglicher Stichproben: $\binom{50}{5}$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe genau zwei defekte Glühbirnen enthalten sind, wenn von den 50 Glühbirnen genau 10 defekt sind?

Lösung:
hypergeometrische Verteilung,

$$\text{Wahrscheinlichkeit } = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{40}{3}}{\binom{50}{5}} = 0,2098$$

Somit ca. $20,98\%$

(7.2) (0 Punkte) Bei Blutspenden wird jede Blutspende daraufhin untersucht, ob sie zur Aufbereitung zu einer Blutkonserve geeignet ist oder nicht. Erfahrungsgemäß sind 5% der Blutspenden für eine Aufbereitung nicht verwendbar. - Eine Aufbereitungsfirma führt stets fünf miteinander verträgliche Blutspenden zu einem Pool zusammen und führt für diesen Pool die Untersuchung durch.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass drei gute Blutspenden mit zwei schlechten Blutspenden vermengt werden?

Lösung:
Binomialverteilung; X sei die Anzahl der guten Blutspenden, Erfolgswahrscheinlichkeit = 0,95. Dann gilt
$P(X = 3) = f_B(3|5, 0.95) = 0,0214$ (TR)

Aufgabe 8 (0 Punkte)

(8.1) (0 Punkte) Auf eine Kreuzung münden vier Straßen, aus denen im Durchschnitt in einer Stunde 27,23,35 und 15 Kraftfahrzeuge auf die Kreuzung kommen.
Die Ankünfte der Kraftfahrzeuge sind jeweils poissonverteilt und paarweise stochastisch unabhängig.

a) Bestimmen Sie für die Gesamtzahl Y der die Kreuzung passierenden Kraftfahrzeuge Erwartungswert und Varianz.

Lösung:
Poissonverteilung:
$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 27 + 23 + 35 + 15 = 100.$
$Var(Y) = E(Y) = 100.$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens 90 und höchstens 110 Fahrzeuge die Kreuzung in einer Stunde passieren?

Lösung:
Poissonverteilung $P(90 \geq X \leq 110) = P(X \leq 110) - P(X \leq 89) = 0,85286 - 0,14634 = 0,70652 \approx 0,7065.$ (TR)
Also ca. $70,65\%$.

(8.2) (0 Punkte) Bei einer Klausur mit einer maximalen Punktzahl von 100 seien die Ergebnisse näherungsweise normalverteilt mit $\mu = 60$ und $\sigma = 10$.

a) Bestimmen Sie den Anteil der Studierenden, die durchgefallen sind, wenn zum Bestehen der Klausur mindestens 50 Punkte erforderlich sind.

Lösung:
Normalverteilung (im TR): $P(X < 50) = 0,15865$, d.h rund $15,7\%$. (TR)

b) Bestimmen Sie den Anteil der Studierenden, die die Note „gut“ erhalten, wenn diese für Punktzahlen von 80 bis 95 vergeben wird.

Lösung:
$P(80 \leq X \leq 95) = 0,02251$, d.h rund $2,3\%$. (TR)

c) Auf welchen Wert muss die zum Bestehen nötige Mindestpunktzahl festgelegt werden, wenn nicht mehr als 10% der Studierenden durchfallen sollen?

Lösung:
TR: Inverse Normal: $0,1 = P(X < x) \Leftrightarrow P^{-1}(0,1) = 47,1844$, d.h die Mindestpunktzahl x muss auf 47 gesetzt werden.

(8.3) (0 Punkte) Die Lebensdauer von Schläuchen einer Hydraulikanalage ist annähernd normalverteilt mit einer Standardabweichung von $\sigma = 600$ Stunden. Eine Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 36$ ergibt eine durchschnittliche Lebensdauer von 3000 Stunden. Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den unbekannten Parameter μ der Normalverteilung und interpretieren Sie das berechnete Intervall.

Lösung:
Formelsammlung Konfidenzintervall: $KI_{1-\alpha} = \left[\overline{X} - c \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \overline{X} + c \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$
Zusätzlich ist die Varianz bekannt, d.h. $c = u_{1-\frac{\alpha}{2}} = (1 - \frac{\alpha}{2})$-Quantil der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$.
TR (inverse Normal): $c = 1,9600$ und $\hat{\sigma} = 600$ und damit

$$KI_{0,95} = \left[3000 - 1,96 \cdot \frac{600}{\sqrt{36}}, 3000 + 1,96 \cdot \frac{600}{\sqrt{36}}\right] = [3000 + 196, 3000 - 196] = [2804, 3196]$$

Interpretation: Bei 100 Stichproben mit daraus berechneten Konfidenzintervallen enthalten 95% dieser Intervalle den wahren Wert μ der Grundgesamtheit.

(Genauigkeit: 4 Dezimalstellen)

Leere Seite für Ihre Notizen Leere Seite für Ihre Notizen Leere Seite für Ihre Notizen

Viel Erfolg!