Albert

Probeklausur 2023/2

Analysis und Stochastik I147

2. Quartal 2023

Name des Prüflings: **Matrikelnummer:** **Zenturie:**

Dauer: 90 min   Seiten ohne Deckblatt 12   Datum: 28. Mai 2023

Hilfsmittel: Ein Nordakademie Taschenrechner, ausgeteilte I147 Formelsammlung, Stifte, aber kein roter Stabilo 88/40, Lineal.

Bemerkungen: Diese Klausur enthält 8 Aufgaben. Es können 0 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie 0 Punkte. **Überprüfen Sie zuerst** die Anzahl der Seiten. Liegen Ihnen 12 Seiten (ohne Titelseite) vor?

Trennen Sie nicht die Heftung. Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen zu den einzelnen Fragen in die darauf folgenden leeren Boxen. Falls Sie mit dem Platz nicht auskommen, verwenden Sie auch die Rückseiten oder die Zusatzseiten am Ende des Klausurheftes.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	Prozent:
Punktzahl:	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Erreicht:									

Note: ________   Prozentsatz: ________   Ergänzungsprüfung: ________

Datum: ________   Unterschrift: ________

Datum: ________   Unterschrift: ________

Aufgabe 1 (0 Punkte)

Bestimmen Sie bei (1.1) und (1.2) den Grenzwert und prüfen Sie bei (1.3), ob die Reihe konvergent ist.

(1.1) (0 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n^3 + 7n^2 - 1)(4n^3 + 25)}{5n^6 - 10n^2 + 17n + 2}$$

Lösung:

Polynome gleichen Grades: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n^3+7n^3-1)(4n^3+25)}{5n^6-10n^2+17n+2} = \frac{8}{5}$

(1.2) (0 Punkte)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x}{3x + 7e^x}$$

Lösung:

L'Hôspital: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2e^x}{3x+7e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2e^x}{3+7e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2e^x}{7e^x} = \frac{2}{7}$

(1.3) (0 Punkte)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3 \cdot 3^{n+1}}{4^n} \right)$$

Lösung:

Konvergenznachweis über Wurzelkriterium.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n^3 \cdot 3^{n+1}}{4^n} \right|} = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[n]{n^3} \cdot \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n} \right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} < 1$$

Aufgabe 2 (0 Punkte)

Berechnen Sie das Integral per partieller Integration und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Taschenrechnerergebnis.

$$\int_0^1 (2+x)e^{-x}dx$$

(*Genauigkeit: 2 Dezimalstellen*)

Lösung:

Zuordnung:

$f(x) := (2+x)$ und damit $f'(x) = 1$ sowie
$g'(x) = e^{-x}$ und damit $g(x) = -e^{-x}$

Damit folgt

$-(2+x)e^{-x} + c = \int (2+x)e^{-x}dx - \int e^{-x}dx$ und

$\int (2+x)e^{-x}dx = -(2+x)e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+3)$

Bestimmtes Integral:

$$\int_0^1 (2+x)e^{-x}dx = [-e^{-x}(x+3)]_0^1 = -4e^{-1} + 3 = 1,528 \approx 1,53$$

Aufgabe 3 (0 Punkte)

Eine Investition in eine neue Fertigungsmaschine erbringt 5 Jahre lang jährliche Überschüsse der Erträge über die Aufwendungen in Höhe von 2.500 EUR. Der Anschaffungswert der Maschine ist 15.000 EUR und der Restwert nach 5 Jahren 4.000 EUR. Lohnt sich die Investition bei einer angenommenen Verzinsung von 3%?

(Rechnung mit 2 Dezimalstellen)

Lösung:

Die Beträge sind auf ein und denselben Zeitpunkt zu beziehen und zu vergleichen. Beispiel: Barwertermittlung (alle Geldbeträge in EUR):

1. Barwert der Überschüsse:

$$B = \frac{2500}{1,03} + \frac{2500}{1,03^2} + \frac{2500}{1,03^3} + \frac{2500}{1,03^4} + \frac{2500}{1,03^5} = 11449.26797 \approx 11449,27$$

2. Barwert des Maschinenrestwertes:

$$\mathrm{B}_{\mathrm{Restwert}} = \frac{4000}{1,03^5} = 3450.435138 \approx 3450.44$$

3. Saldo:

$$\text{Saldo} = 11449.27 + 3450.44 - 15000 = -100,29$$

(Würde man erst am Schluss runden, was richtig wäre, erhielte man $-100,297 \approx -100,30$)

Rein nummerisch betrachtet lohnt sich die Investition nicht.

Alternative Rechnung: z.B. Vergleichzeitpunkt = in 5 Jahren

Aufgabe 4 (0 Punkte)

Ein Monopolist produziere mit folgender Kostenfunktion K:

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 98$$

und sehe sich der Nachfragefunktion p mit $p(x) = -10x + 120$ gegenüber (x Menge in ME und p Preis in GE).

Auf jede produzierte und abgesetzte Mengeneinheit werde eine Mengensteuer in Höhe von $t = 24$ GE/ME erhoben, so dass sich die Gesamtkosten des Produzenten um die abzuführende Gesamtsteuer $T = t \cdot x$ erhöhen. Ermitteln Sie die gewinnmaximale Menge sowie die dann abzuführende Steuer und den Gesamtgewinn.

Genauigkeit: Mengen mit 4 Dezimalstellen, GE mit 2 Dezimalstellen.

Lösung:

Gewinnmax. Menge: $x_G = 4,1943$ ME; Steuern $T = 100,66$ GE; $G_{max} = 14,39$ GE.

Aufgabe 5 (0 Punkte)

Herr O. bittet seinen Nachbarn Herrn P., während seiner Abwesenheit sein geliebtes Basilikum zu giessen. Allerdings muss er davon ausgehen, dass Herr P. seine Pflanze mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ nicht gießt. Das Basilikum geht mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ ein, wenn es gegossen wird und mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{4}$, wenn es nicht gegossen wird.

Genauigkeit: 2 Dezimalstellen

(5.1) (0 Punkte) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Basilikum während der Abwesenheit von Herrn O. eingeht?

Lösung:

Ereignisse G = Gießen bzw. gegossen, E = Eingehen bzw. eingegangen
Wahrscheinlichkeiten: $P(\bar{G}) = \frac{1}{3}$, $P(E|G) = \frac{1}{2}$, $P(E|\bar{G}) = \frac{3}{4}$,
$P(E) = P(E|G) \cdot P(G) + P(E|\bar{G}) \cdot P(\bar{G}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{12} \approx 0,58$
Die Wahrscheinlichkeit, dass die eingegangene Pflanze eingehen wird, beträgt 58%.

(5.2) (0 Punkte) Das Basilikum geht während der Abwesenheit von Herrn O. tatsächlich ein! Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Herr P. die Pflanze nicht gegossen hat?

Lösung:

$$P(\bar{G}|E) = \frac{P(\bar{G}) \cdot P(E|\bar{G})}{P(E)} = \frac{1/3 \cdot 3/4}{7/12} = \frac{3}{7} \approx 0,43$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die eingegangene Pflanze nicht gegossen wurde, beträgt 43%.

Aufgabe 6 (0 Punkte)

(6.1) (0 Punkte) Gegeben sind die folgenden Wertepaare.

X	1	1	2	2	3	3
Y	1	3	2	4	3	5

a) Berechnen Sie ein lineares YX-Modell. (*Genauigkeit: 2 Dezimalstellen*)

Lösung:
$y = a + bx = 1 + x$

b) Beurteilen Sie die Güte des Modells.

Lösung:
$r^2 = 0,6324 \approx 0,63$
Die erklärte Varianz des Modells liegt bei ca. 63%. Mittlere Güte.

(6.2) (0 Punkte) Welche der folgenden Aussagen über eine Regressionsgerade $y = a + bx = 1 + 10,5x$, die nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet wurde, sind richtig?

a) Da die Regressionsgerade einen sehr starken Anstieg hat ($b = 10,5$), besteht ein enger (stark ausgeprägter) Zusammenhang zwischen den Merkmalen X und Y.

b) Es liegt ein Rechenfehler vor, denn für den Parameter b einer Regressionsfunktion gilt $-1 \leq b \leq 1$.

c) Wenn sich x um eine Einheit erhöht, erhöht sich y durchschnittlich um $10,5$ Einheiten.

d) Wenn sich x ume eine Einheit erhöht, erhöht sich y durchschnittlich um das $10,5$-fache.

e) Die Regressionsfunktion sagt nichts darüber aus, wie ausgeprägt der Zusammenhang zwischen X und Y ist.

Lösung:
Richtig sind c) und e)

Aufgabe 7 (0 Punkte)

(7.1) (0 Punkte) Bei einer Sportveranstaltung nehmen insgesamt 32 Mannschaften teil. Wieviele Möglichkeiten für die Belegung des Siegerpodestes (Plätze 1-3) gibt es, wenn

a) die Reihenfolge der Plätze eine Rolle spielt,

Lösung:
$\frac{32!}{(32-3)!} = 29760$ mögliche Podestverteilungen.

b) die Reihenfolge der Plätze keine Rolle spielt?

Lösung:
$\binom{32}{3} = 4960$ verschiedene Möglichkeiten.

(7.2) (0 Punkte) Ein Getränkemarkt bietet als Spezialangebot den „Münchner Meisterkasten" an. Dabei dürfen sich Kunden aus sechs Bieren von sechs Münchner Brauereien ein beliebiges Sortiment zusammenstellen. Ein Kasten fasst dabei 20 Flaschen.

a) Wie viele Kombinationsmöglichkeiten bei der Zusammenstellung eines Kastens gibt es insgesamt?

b) Ein Kunde möchte auf alle Fälle mindestens eine Flasche pro Brauerei in seinem Kasten haben. Wie viele Kombinationsmöglichkeiten für den Kasten gibt es jetzt?

Lösung:

a) Modell: Mit Zurücklegen, da sich der Kunde an allen Stellen des Kastens zwischen allen sechs Bieren entscheiden kann. Die Reihenfolge der Flaschen spielt keine Rolle. Daher

$$\text{Anzahl Möglichkeiten: } \binom{n+k-1}{k} = \binom{6+20-1}{20} = \binom{25}{20} = 53130$$

b) Sechs Plätze des Kastens sind schon belegt und für die übrigen 14 wird überlegt wie bei a):

$$\text{Anzahl Möglichkeiten: } \binom{n+k-1}{k} = \binom{6+14-1}{14} = \binom{19}{14} = 11628$$

(7.3) (0 Punkte) Ein Weinhändler beobachtet die Füllmenge eines grossen Weinfasses. Der Anteil X der Tankfüllung, der bis zum Ende des Monats verkauft sein wird, ist eine Zufallsvariable mit folgender Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases} \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die Dichtefunktion $f(x)$.

Lösung:

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = \begin{cases} 6(x - x^2) & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ der Tankfüllung verkauft? (*Genauigkeit: 2 Dezimalstellen*)

Lösung:

$$P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) = \int_{1/3}^{2/3} f(x)dx = F(2/3) - F(1/3) = 0,48149 \approx 0,48$$

c) Berechnen Sie die Varianz von X. *(Genauigkeit: 2 Dezimalstellen)*

Lösung:

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 6(x - x^2)dx = 0,5$$

Einfach über den Verschiebungssatz:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0,3 - 0,5^2 = 0,05$$

Aufgabe 8 (0 Punkte)
Ein bekannter Hersteller von Keksen verspricht zum 7. Geschäftsjubiläum seinen Kunden eine Extraüberraschung in jeder siebten Keksschachtel. Voller Freude kauft ein übereifriger Vater gleich 30 Schachteln.

(8.1) (0 Punkte) a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, unter den 30 Schachteln genau 5 Überraschungen zu finden?

Lösung:
Binomialverteilung: $P(X = 5) = f_B(X, n, p) = f_B(5|30, 1/7) = \binom{30}{5}\frac{1}{7}^5(1 - \frac{1}{7})^{25} = 0,1798$. Also ca. $17,98\%$.

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Überraschung zu bekommen?

Lösung:
Binomialverteilung: $P(X \geq 1) = 1 - B(X = 0) = 1 - f_B(0|30, 1/7) = 1 - 0,00980 = 0,9902$ Also ca. 99%.

c) Tatsächlich befinden sich in diesen 30 Schachteln genau 3 Überraschungen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in den 5 Schachteln, die des Vaters jüngster Sohn bekommt, zwei der drei Überraschungen verbergen?

Lösung:
Hypergeometrische Verteilung: $P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{27}{3}}{\binom{30}{5}} = 0,56598 \approx 0,5660$.
Also ca. $56,6\%$.

(8.2) (0 Punkte) Die Länge von Profilbrettern sei normalverteilt mit $\mu = 400\,\text{cm}$ und $\sigma = 5\,\text{cm}$.

1. Wie groß ist der Ausschussanteil, wenn die minimale Länge der Bretter 390 cm betragen soll?

Lösung:
kum. Normalverteilung:: $P(X < 390) = P(X \leq 390) = 0,02275 \approx 0,0228$. (TR)
Also ca. $2,28\%$.

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Brett nicht länger als $407,5$ cm ist?

Lösung:
kum. Normalverteilung:: $P(X < 407,5) = P(X \leq 407,5) = 0,93319 \approx 0,9332$. (TR)
Also ca. $93,32\%$.

3. Es wurden zwei Bretter hintereinander verlegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Gesamtlänge weniger als 793 cm beträgt?

Lösung:
Zwei Zufallsvariablen: $X - 1$ (erstes Brett) und X_2 (zweites Brett). es addieren sich die Varianzen:
$\sigma^2_{X_1+X_2} = \sigma^2_{X_1} + \sigma^2_{X_2}$, d.h. $\sigma_{X_1+X_2} = \sqrt{\sigma^2_{X_1} + \sigma^2_{X_2}} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$
Die Erwartungswerte addieren sich: $\mu_{X_1+X_2} = \mu_{X_1} + \mu_{X_2}$.
Verteilung: $X_1 + X_2 \sim N(\mu, \sigma^2) = N(800, 50)$
kum. Normalverteilung:: $P(X_1 + X_2 < 793) = P(X_1 + X_2 \leq 793) = 0,16109 \approx 0,1611$. (TR)
Also ca. $16,11\%$.

(Genauigkeit: 4 Dezimalstellen)

Leere Seite für Ihre Notizen Leere Seite für Ihre Notizen Leere Seite für Ihre Notizen

Viel Erfolg!