Albert

NORDAKADEMIE HOCHSCHULE DER WIRTSCHAFT

Probeklausur 2024/1

Analysis und Stochastik I147

2. Quartal 2024

Name des Prüflings: **Matrikelnummer:** **Zenturie:**

Dauer: 90 min Seiten ohne Deckblatt 12 Datum: 09. Juni 2024

Hilfsmittel: Ein Nordakademie Taschenrechner, ausgeteilte I147 Formelsammlung, Stifte, aber kein roter Stabilo 88/40, Lineal.

Bemerkungen: Diese Klausur enthält 8 Aufgaben. Es können 0 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie 0 Punkte. **Überprüfen Sie zuerst** die Anzahl der Seiten. Liegen Ihnen 12 Seiten (ohne Titelseite) vor?

Trennen Sie nicht die Heftung. Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen zu den einzelnen Fragen in die darauf folgenden leeren Boxen. Falls Sie mit dem Platz nicht auskommen, verwenden Sie auch die Rückseiten oder die Zusatzseiten am Ende des Klausurheftes.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	Prozent:
Punktzahl:	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Erreicht:									

Note: ____ Prozentsatz: ____ Ergänzungsprüfung: ____

Datum: ____ Unterschrift: ____

Datum: ____ Unterschrift: ____

Aufgabe 1 (0 Punkte)

Bestimmen Sie bei (1.1) und (1.2) den Grenzwert und prüfen Sie bei (1.3), ob die Reihe konvergent ist.

(1.1) (0 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^5+7n^3-1)(n+25)}{3n^6-1200n^4+80n-30}$$

Lösung:

Polynome gleichen Grades: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n^5+7n^3-1)(n+25)}{3n^6-1200n^4+80n-30} = \frac{1}{3}$

(1.2) (0 Punkte)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + x\cdot \mathrm{e}^x - 2x - 1}{\sin(x) - \cos(x) - x + 1}$$

Lösung:

L'Hôspital: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+xe^x-2x}{\sin(x)-\cos(x)-x+1} \underline{\underline{0/0}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x+xe^x-2}{\cos(x)+\sin(x)-1} \underline{\underline{0/0}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{3e^x+xe^x}{-\sin(x)+\cos(x)} = 3$

(1.3) (0 Punkte)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^5 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{6^n} \right)$$

Lösung:

Konvergenznachweis über Wurzelkriterium.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n^5\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{6^n} \right|} = \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n^5} \cdot (1+\frac{1}{n}) \right) = \frac{1}{6} < 1$$

Aufgabe 2 (0 Punkte)

Berechnen Sie das Integral per Substitution und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Taschenrechnerergebnis.

$$\int_0^1 \frac{2x^5}{\sqrt[4]{x^6+2}}dx$$

(*Genauigkeit: 2 Dezimalstellen*)

Lösung:

Substitution: $u = x^6 + 2$ mit

$$\frac{du}{dx} = 6x^5 \Leftrightarrow dx = \frac{du}{6x^5}$$

und

$$\int \frac{2x^5}{\sqrt[4]{x^6+2}}dx = \int \frac{2x^5}{\sqrt[4]{u}} \frac{du}{6x^5} = \frac{1}{3}\int u^{-1/4}du = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}u^{3/4} + c = \frac{4}{9}\sqrt[4]{(x^6+2)^3} + c$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_0^1 \frac{2x^5}{\sqrt[4]{x^6+2}}dx = \frac{4}{9}\left[\sqrt[4]{(x^6+2)^3}\right]_0^1 = \frac{4}{9}(2,280 - 1,682) = 0,27$$

TR: $0,265 \approx 0,27$

Aufgabe 3 (0 Punkte)
Berechnen Sie *(Genauigkeit: 3 Dezimalstellen)*:

(3.1) (0 Punkte) Ermitteln Sie das Taylorpolynom 2.Grades $T_3(x)$ mit Entwicklungspunkt $a = 0$ für die Funktion

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1}.$$

Lösung:
Ableitungen:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sqrt[3]{x+1}$	1
1	$\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}$	$\frac{1}{3}$
2	$-\frac{2}{9}(x+1)^{-5/3}$	$-\frac{2}{9}$
3	$\frac{10}{27}(x+1)^{-8/3}$	

Talyorpolynom: $T_2(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$

(3.2) (0 Punkte) Berechnen Sie mit dem Taylorpolynom aus 3.1 eine Approximation für

$$f(0,3).$$

Lösung:
Als Approximation ergibt sich $T_2(0,3) = 1.0900$.

(3.3) (0 Punkte) Wie lautet das zugehörige Restglied $R_2(x)$ des Taylorpolynoms aus 3.1?

Lösung:
Restglied: $R_2(x) = \frac{1}{3!} \cdot \frac{10}{27}(c+1)^{-8/3}x^3 = \frac{5}{81(c+1)^{8/3}}x^3.$

(3.4) (0 Punkte) Wie gross kann der absolute Fehler in 3.2 höchstens sein (Abschätzung mit dem Restglied)? Wie groß ist der Fehler tatsächlich laut Taschenrechner?

Lösung:

Abschätzung:
Es soll der Wert $f(0,3)$ berechnet werden, d.h. $x = 0,3$. Damit gilt $c \in [0; 0,3]$, d.h. c liegt im Intervall von 0 bis $0,3$. Die dritte Ableitung ist streng monoton fallend, so dass $c = 0$ genommen werden kann, um die Ableitung nach oben abzuschätzen.
$|R_2(0,3)| = |\frac{5}{81(c+1)^{8/3}}0,3^3| \leq |\frac{5}{81}0,3^3| = |\frac{1}{600}| \approx 0,001\bar{6} \approx 0,002.$

Der maximale absolute Fehler ist somit kleiner als $0,002$.

Tatsächlicher Fehler:

$f(0,3)$	1.0914
$T_2(0,3)$	1.0900
Differenz	$0,0014 \approx 0,001$ (Liegt innerhalb der Fehlerschätzung.)

Aufgabe 4 (0 Punkte)

(4.1) (0 Punkte) Die Differenz zwischen monatlicher und halbjährlicher Verzinsung eines Kapitals beträgt 500 EUR bei 6% und einer Laufzeit von 10 Jahren. Ermitteln Sie das Kapital.

Lösung:
Verzinsung eines Kapitals K_0 bei einer Laufzeit von n Jahren und einem Zinssatz von $i\%$ bei m Zinsperioden pro Jahr:

$$K_n = K_0\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Es ergibt sich:

$$500 = K_0\left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{120} - K_0\left(1 + \frac{0,06}{2}\right)^{20}$$

$$\Leftrightarrow K_0 = \frac{500}{1,005^{120} - 1,030^{20}} = 37\,635,02\,\text{EUR}$$

Das Anfangskapital betrug 37 635, 02 EUR.

(4.2) (0 Punkte) Angenommen, Sie haben einen Betrag von 100 000 EUR zur Verfügung und möchten das Geld so anlegen, dass Sie am Anfang jedes Quartals einen festen Betrag abheben können, ohne dass sich das Kapital verzehrt (ewige Rente). Wieviel können Sie bei einem jährlichen Zinssatz von 6% mit vierteljährlicher Verzinsung jedes Quartal abheben?

Lösung:

$$(100\,000 - x) \cdot \left(1 + \frac{0,06}{4}\right) = 100\,000$$

$$x = 100000 - \frac{100000}{1,015} = 1\,477,83\,\text{EUR}$$

Aufgabe 5 (0 Punkte)
Der Preis $p(x)$ eines Produktes hänge von der Absatzmenge x folgendermaßen ab:

$$p(x) = 200 - 1,5x.$$

Die Produktionskosten seien durch die Funktion

$$K(x) = 0,003x^3 - 3,565x^2 + 413,300x - 112,570$$

beschrieben, wobei x die hergestellte Menge in Stück ist.

(5.1) (0 Punkte) Wie lautet die Gewinnfunktion?

(5.2) (0 Punkte) Wie hoch ist die gewinnmaximale Produktionsmenge?

(5.3) (0 Punkte) Welchen maximalen Gewinn erzielt der Unternehmer?

(5.4) (0 Punkte) Für weöche Produktionsmengen erzeilt man einen Gewinn?

Es sei angenommen: Absatzmenge = Produktionsmenge.

Lösung:

Lösung:

Die Gewinnfunktion ist $g(x) = x \cdot p(x) - K(x)$,
somit $g(x) = -0.003x^3 + 2,065x^2 - 213,300x + 112,57$
Stationäre Stellen:
$g'(x) = -0,009x^2 + 4,130x - 213,300$
mit $g'(x) = 0$ für $x_1 = 59.31286864$ und $x_2 = 399.5760203$
$g''(x) = -0.018x + 4.130$
mit $g''(x_1) > 0$ und $g''(x_2) < 0$, d.h. Maximum an x_2.
Der maximale Gewinn (in Euro) ergibt sich für $x = 400$:

$$g(400) = 53192.570$$
$$g(399) = 53192.338$$

Gewinnzone: Mindestens 126 Stück und maximal 561 Stück (TR).

Aufgabe 6 (0 Punkte)

Eine Familie hat Zwillinge, 2 Söhne, die von Außenstehenden kaum zu unterscheiden sind. Die Mutter hat allerdings im Laufe der Zeit einige Unterschiede bei ihren Söhnen in Bezug auf die von ihnen ausgeheckten Streiche festgestellt.

Wenn die beiden etwas angestellt habe, ist Frederik in 40% und Benedikt in 60% der Fälle der Anstifter gewesen.

Die Nachbarn haben eine Katze, die es den beiden Knaben besonders angetan hat. In 80% der Fälle, in denen Frederik der Anstifter ist, ist die Katze das Opfer, bei Benedikt in 20% der Fälle.

Eines Tages kommt der Nachbar wütend herein, die Katze mit am Schwanz festgebundenen Blechdosen auf dem Arm. Die Mutter gibt ihrem gerade dabei stehenden Sohn Frederik eine Woche Hausarrest.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Sie den tatsächlich Verantwortlichen bestraft?

Lösung:

Ereignisse: $P(F) = 0,4$, $P(B) = 0,6$, $P(K|F) = 0,8$, $P(K|B) = 0,2$

$P(K) = P(K|F) \cdot P(F) + P(K|B) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,44$

$P(F|K) = \frac{P(K|F) \cdot P(F)}{P(K)} = \frac{0,8 \cdot 0,4}{0,44} = \frac{8}{11} \approx 0,73$

$P(B|K) = \frac{P(K|B) \cdot P(B)}{P(K)} = \frac{0,2 \cdot 0,6}{0,44} = \frac{3}{11} \approx 0,27$

Der tatsächlich Verantwortliche laut Rechnung ist Frederik, und zwar mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 73%

Aufgabe 7 (0 Punkte)
Die folgende Tabelle gibt die Jahresumsätze X (in Mio. Euro) und den jährlichen Materialaufwand Y (in 10^5 Euro) für 5 vergleichbare Firmen einer Branche vor.

X	10	12	14	20	25
Y	8	9	10	22	40

(7.1) (0 Punkte) Berechnen Sie ein lineares Modell. (*Genauigkeit: 4 Dezimalstellen*)

Lösung:
$y = A + B \cdot x \quad A = -16,7840 \quad B = 2,1348 \quad r = 0,9669 \quad r^2 = 0,9350$

(7.2) (0 Punkte) Berechnen Sie ein quadratisches Modell. (*Genauigkeit: 4 Dezimalstellen*)

(7.3) (0 Punkte) **Lösung:**
$y = A + B \cdot x + C \cdot x^2 \quad A = 23,7415 \quad B = -3,0253 \quad C = 0,1470$

Für welches Modell würden Sie sich entscheiden? Begründen Sie Ihre Antwort mittels eines geeigneten Maßes.
(*Genauigkeit: 4 Dezimalstellen*)

Lösung:
Ein geeignetes Maß zur Beurteilung ist das Bestimmtheitsmaß B, was im linearen Modell durch r^2 schon gegeben ist.
Für das lineare Model ergibt sich $B = r^2 = 0,96694^2 = 0,93498 = 0,9350$.
Für das quadratische Modell muss es berechnet werden, und zwar gilt
$B = \frac{SSQ_{Regression}}{SSQ_{Total}} = 1 - \frac{SSQ_{Residuen}}{SSQ_{Total}}$.

Rechnung für quadratisches Modell (einfacher mit Taschenrechner!):
Die Rechnung kann direkt mit dem Taschenrechner erfolgen.
Es ergibt sich: $SSQ_{Regression} = 744,567962$ und
$SSQ_{Total} = 744,8000$, so dass folgt
$B = 0,99968 \approx 0,9997$,
eine fast perfekte Korrelation.
Wäre das Bestimmtheitsmaß das einzige Kriterium, wäre die quadratische Regression vorzuziehen.

Aufgabe 8 (0 Punkte)
Eine Agentur betreut 160 Ferienwohnungen und bietet u.a. eine Frühstücksservice an. Man kann davon ausgehen, dass täglich in jeder Wohnung der Frühstücksservice mit einer 25 %igen Wahrscheinlichkeit gebucht wird.

(8.1) (0 Punkte) Erläutern Sie, welche Verteilung Sie heranziehen sollten, um zu berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Anzahl von Buchungen des Frühstücksservice an einem gegebenen Tag vorgenommen wird?

Lösung:
Binomialverteilung (Urnenmodell mit Zurücklegen und $p = 0,25$).

(8.2) (0 Punkte) Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Frühstücksservice an einem gegebenen Tag

a) genau 40-mal gebucht wird,
b) mindestens 35-mal gebucht wird.

(Genauigkeit: 3 Dezimalstellen)

Lösung:
X sei die Anzahl der Buchungen des Frühstücksservice an dem geg. Tag.
$X \sim B(n, p) = B(n; 0.25)$ und

a) $P(X = 40) = f_B(40|160, 0.25) = \binom{160}{40} \cdot 0.25^{40} \cdot 0.75^{120} = 0.07267 \approx 0.073.$
Die Wahrsch. beträgt rund $7,3\,\%$.

b)

$$\begin{aligned} PX \geqslant 35) &= 1 - P(X \leqslant 34) = 1 - F_B(34|160, 0.25) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{34} \binom{160}{k} \cdot 0.25^k \cdot 0.75^{160-k} \\ &= 1 - 0.1575 \approx 0.842 \quad (0.843) \end{aligned}$$

Die Wahrsch. beträgt rund $84,2\,\%$.

(Genauigkeit: 4 Dezimalstellen)

(8.3) (0 Punkte) Zusätzlich zum Frühstücksservice betreibt die Agentur einen kleinen Lebensmittelladen. Es hat sich herausgestellt, dass in den frühen Abendstunden durchschnittlich 30 Kunden das Geschäft betreten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 30 und 35 Kunden in den frühen Abendstunden das Geschäft betreten.
(Genauigkeit: 4 Dezimalstellen)

Lösung:

Hier ist die Poissonverteilung anzuwenden.
Sei X die Anzahl der Kunden, die in den frühen Abendstunden das Geschäft betreten. Dann gilt $X \sim Po(30)$ und mit dem TR ergibt sich:

$$P(30 \leq X \leq 35) = P(X \leq 35) - P(X \leq 29) = 0,8426 - 0,4757 = 0,3669.$$

Hinweis: Beim Taschenrechner entspricht λ dem Parameter μ aus den Folien.

Leere Seite für Ihre Notizen Leere Seite für Ihre Notizen Leere Seite für Ihre Notizen

Viel Erfolg!