Série 1-Partie 2

1 Objectifs :

- Montrer qu'un énoncé est une tautologie
- Montrer la satisfiabilité (ou la non satisfiabilité) d'un énoncé ou d'un ensemble d'énoncés.
- Montrer qu'un énoncé est conséquence logique d'un autre énoncé (ou d'un ensemble d'énoncés) ou qui ne l'est pas.
- Utiliser le théorème de substitution et de remplacement.
- Montrer qu'un système de connecteurs est complet (ou non complet).
- Montrer une proposition par récurrence.

1. Montrer que les deux phrases suivantes veulent dire la même chose :

- S'il neige, les routes sont bloquées et s'il pleut les routes sont bloquées.
- Qu'il neige ou qu'il pleuve, les routes sont bloquées.

2. Montrer que les formules suivantes sont des tautologies :

a. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
b. $(P \vee Q) \leftrightarrow (\rceil P \rightarrow Q)$
c. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\rceil P \vee Q)$
d. $(P \vee Q) \leftrightarrow \rceil (\rceil P \wedge \rceil Q)$

3. Montrer les équivalences logiques suivantes :

a. $P \rightarrow (Q \wedge R) \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$
b. $P \rightarrow (Q \vee R) \equiv (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$
c. $(P \wedge Q) \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$
d. $(P \vee Q) \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

4. Montrer que :

— $P \rightarrow (Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots Q_n) \equiv (P \rightarrow Q_1) \wedge \ldots \wedge (P \rightarrow Q_n)$
— Si $P_1 \rightarrow Q_1$ et $P_2 \rightarrow Q_2$ et ….. et $P_n \rightarrow Q_n$ alors $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n$

5. Lesquelles des propositions suivantes sont valides ?

a. *Si* $\models \alpha \wedge \beta$ *alors* ($\models \alpha$ *et* $\models \beta$)
b. *Si* $\models \alpha \vee \beta$ *alors* ($\models \alpha$ *ou* $\models \beta$)
c. *Si* $\models \alpha \rightarrow \beta$ *alors* (*si* $\models \alpha$ *alors* $\models \beta$)
d. *Si* $\models \alpha \leftrightarrow \beta$ *alors* ($\models \alpha$ *si et seulement si* $\models \beta$)

6. Montrer que l'ensemble $\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\}$ est non satisfiable ssi les ensembles $\Gamma \cup \{\alpha\}$ et $\Gamma \cup \{\beta\}$ sont non satisfiables.

7. Vérifier les propositions suivantes :

a. $\alpha\to(\beta\to\gamma),\ \beta \models \alpha\to\gamma$

b. $\alpha\to(\beta\to\gamma),\ \alpha\to\beta \models \alpha\to(\alpha\to\gamma)$

c. $P\vee Q,\ \neg P\vee R,\ \neg P\vee Q \models Q\vee R$

d. Si $\alpha \models \beta$ et $\beta \models \alpha$ alors $\alpha\equiv\beta$.

8. Lesquelles des propositions suivantes sont valides ?

a. $\alpha\leftrightarrow\beta \models \alpha\wedge\beta$
b. $\neg(\alpha\leftrightarrow\beta),\ \alpha\to\beta \models \alpha\vee\beta$.
c. Si $\Gamma, \alpha \models \delta$ alors $\Gamma, \alpha\vee\beta \models \delta$.
d. Si $\Gamma, \alpha \models \delta$ alors $\Gamma, \alpha\wedge\beta \models \delta$.
e. Si $\Gamma, \alpha \models \delta$ alors $\Gamma, \neg\alpha \models \neg\delta$.
f. Si $\Gamma \models \beta$ alors $\Gamma, \alpha \models \beta$ quelle que soit α.
g. Si $\Gamma, \alpha \models \beta$ *alors* $\Gamma \models \beta$ quelle que soit α.

9. Montrer que : "*Si* $\Gamma \models \beta$ et *s*'il existe $\alpha\in\Gamma$ tel $\models\alpha$ *alors* $\Gamma - \{\alpha\}\models\beta$

10. Montrer que *si* $\models (\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\alpha$ *et* $\models (\alpha\vee\beta)\leftrightarrow\alpha$ *alors* $\models \alpha\leftrightarrow\beta$.

11. Montrer que la formule $(A\to B)\to((A\to(B\to C))\to(A\to C))$ est une tautologie. En déduire que $((P\to Q)\to B)\to(((P\to Q)\to(B\to C))\to((P\to Q)\to C))$ est aussi une tautologie.

12. Soit L un langage propositionnel comportant uniquement le connecteur $\uparrow$ dont la fonction de vérité est la fonction f8 du tableau 1.10

a. Montrer que le connecteur $\uparrow$ forme à lui seul un système complet.
b. Donner les formules atomiques et composées de L.

13. Soit le connecteur $\nearrow$ tel que : $P \nearrow Q = \neg(P\to Q)$ et dont la fonction de vérité est la fonction f_{12} du tableau 1.10

- Est-ce que ce connecteur forme un système complet ? Justifier.

14. Montrer la proposition suivante :

$$(\alpha_1\to\beta)\wedge(\alpha_2\to\beta)\ \ldots\wedge(\alpha_n\to\beta) \models (\alpha_1\vee\alpha_2\vee\cdots\vee\alpha_n)\to\beta$$

15. Montrer que :

si $\Delta\models\beta$ et que si quelque soit $\delta\in\Delta$, $\Gamma\models\delta$ alors $\Gamma\models\beta$.

-En déduire que :

si $\Gamma\models\beta_1$ et $\Gamma,\beta_1\models\beta_2$ et $\Gamma,\beta_1,\beta_2\models\beta_3$, et ……et $\Gamma,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\models\beta_n$ alors $\Gamma\models\beta_n$.

16. Montrer que :

Si $\alpha\models\beta$ alors $(\gamma_1\to(\gamma_2\to\cdots\to(\gamma_n\to\alpha))\cdots) \models (\gamma_1\to(\gamma_2\to\cdots\to(\gamma_n\to\beta))\cdots)$ $\quad(n\geq 1)$

17. On considère Γ et Γ' deux ensembles satisfiables de formules. On définit l'ensemble $\Delta = \{\alpha \mid \Gamma \models \alpha\}$ et l'ensemble $\Delta' = \{\alpha \mid \Gamma' \models \alpha\}$.
- Montrer que Δ (resp Δ') est satisfiable.
- Montrer que $\Delta \cap \Delta'$ est satisfiable.
- Montrer que *si* $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$ *alors* $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$.
- La proposition : *si* $\Delta \cap \Delta' \# \emptyset$ *alors* $\Gamma \cap \Gamma' \# \emptyset$ est-elle valide ?

18. On considère le langage $L(\neg, \wedge, \vee)$. A toute formule α de L, on fait correspondre la formule duale α^* définie comme suit :

$P^* = P$ (pour toute variable propositionnelle P)

$(\alpha \wedge \beta)^* = \alpha^* \vee \beta^*$

$(\alpha \vee \beta)^* = \alpha^* \wedge \beta^*$

$(\neg \alpha)^* = \neg \alpha^*$

a. Donner l'ensemble des formules de L.
b. Montrer que : $\models \alpha$ *si et seulement si* $\models \neg \alpha^*$.
c. Montrer que : $\models \alpha \leftrightarrow \beta$ *si et seulement si* $\models \alpha^* \leftrightarrow \beta^*$.
d. Nous considérons ici, que $P^* = \neg P$. Montrer dans ce cas que : $\models \alpha^* \leftrightarrow \neg \alpha$.

19. Mettre sous forme normale conjonctive et disjonctive les formules suivantes
a. $(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)$
b. $(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

20. Arezki demande à Ali et à Saïd de quelle couleur est la boule qu'il tient dans sa main.
Ali répond : « *si elle est noire ou si elle est blanche, alors elle est noire* ».
Saïd répond : « *si elle n'est pas noire, alors soit elle n'est pas blanche soit elle est noire.* »
i. Montrer que Ali et Saïd disent la même chose.
ii. Sachant qu'Ali et Saïd disent tous deux la vérité et qu'une boule est soit blanche soit noire, de quelle couleur est la boule que tient Arezki dans sa main ?

21. Le policier interroge Ali, Omar et Idir sur les circonstances d'un vol de bijoux :

Ali : «*Le voleur est rentré par la porte ou par la fenêtre.*»

Omar : «*La fenêtre est fermée et la porte condamnée.*»

Idir : « *Si la fenêtre est fermée, alors le voleur est rentré par la porte.* »

Le détecteur de mensonges révèle que Ali, Omar et Idir mentent.

Question1. La porte et la fenêtre étaient-elles ouvertes ?

Le policier exige davantage de détails :

Ali ajouta : «*La porte n'est pas condamnée ou la fenêtre n'est pas fermée.*»

Omar : « *Il fait chaud et la fenêtre n'est pas fermée.* »

Idir : « *Il fait chaud et la porte n'est pas condamnée.* »

Doutant de la sincérité des trois personnes, le policier les fit passer de nouveau au détecteur de mensonges. Sa conclusion fut :

« Le voleur est celui qui ment alors que les autres disent la vérité »

Question 2. Qui est le voleur ?