

① **Introduction:**  $\rightarrow$  cf. slides - persistance ~~WIKI~~ (pages 2 à 3).

② **Filtrations et modules de persistance:**

Soit  $T \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble d'indices.

**Def:** Une filtration sur  $T$  est une famille  $\mathcal{F} = (F_t)_{t \in T}$  d'espaces ~~WIKI~~ topologiques imbriqués :

$$\forall t \leq t' \in T, F_t \subseteq F_{t'}.$$

**Exemples:**

- sous-niveaux d'une fonction  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_t := f^{-1}((-\infty, t]).$$

- sur-niveaux d'une fonction  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_t := f^{-1}([t, +\infty)).$$

- offsets (= sous-niveaux de la fonction distance)

d'un compact  $P \subset \mathbb{R}^d$ :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, F_t := P^t := \bigcup_{p \in P} B(p, t).$$

l'horde euclidienne fermé

$\rightarrow$  **But:** résumer / encoder l'évolution de la topologie à travers la famille d'espaces topologiques pour t balayant l'ensemble  $T$  des indices du plus petit au plus grand.

$\hookrightarrow$  pour cela on utilise l'homologie et on obtient ~~ce que~~ un objet algébrique qu'on appelle un module de persistance.

Soit  $K$  un corps.

Def: Un module de persistance sur  $T$  est une famille  $\mathcal{W} = (V_t)_{t \in T}$  de  $K$ -espaces vectoriels reliés par des applications linéaires  $v_t^t': V_t \rightarrow V_{t'} \quad \forall t \leq t' \in T$ ,

$$\text{tg. : } \begin{cases} \forall t \in T, v_t^t = \text{id}_{V_t} \\ \forall t \leq t' \leq t'' \in T, v_{t''}^{t''} \circ v_{t'}^{t'} = v_t^{t''}. \end{cases}$$

conditions dites "de fonctorialité":

| le triangle commute et  
les boudes sont des identités

$$\begin{array}{ccc} V_t & \xrightarrow{\quad} & V_{t''} \\ & \searrow & \swarrow \\ & V_{t'} & \end{array}$$

Appel: l'homologie  
est fonctorielle.  
 $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$   
 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$   
 $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_X(X)}$

Exemple: (lien avec les filtrations)

Soit  $\tilde{F} = (F_t)_{t \in T}$  une filtration.

→ on appelle la fonction homologie  $H_*$ :

$$\bullet \forall t \in T, V_t := H_*(F_t; K)$$

•  $\forall t \leq t'$ ,  $v_t^{t'}$  est le morphisme induit

par l'inclusion canonique  $F_t \hookrightarrow F_{t'}$

(note: - c'est l'identité quand  $t=t'$   
- les triangles commutent en homologie  
car ils commutent déjà au niveau topologique.)

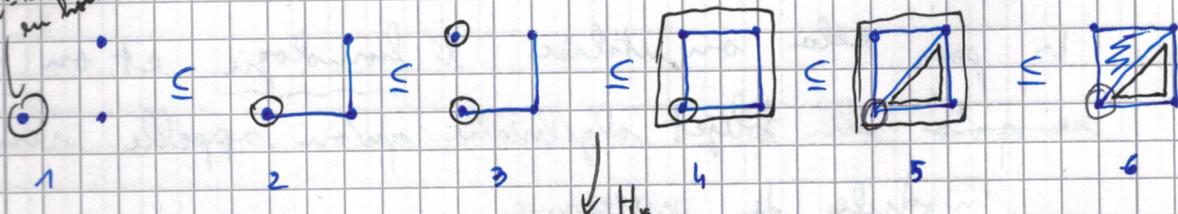
Exemple de l'exemple:

(une compacte: on prend l'espace le plus grand)



→ une étoile:

At. de base  
en homologie



$$K^3 \xrightarrow{(1 \ 1 \ 1)} K \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} K^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} K \oplus K \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} K \oplus K \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} K \oplus K$$

→ [But:] résumer / encoder la structure algébrique  
 [du module de persistance  $\mathbb{V}$  par un barcode.]

② [Décompositions:] On fixe  $T$  et  $K$  et on va décomposer  $\mathbb{V}$ .  
 $(\mathbb{V} \cong V_1 \oplus \dots \oplus V_m)$ .

[Def:] Un intervalle de  $T$  est un ensemble  $I \subseteq T$   
 tq.  $\forall t \leq t' \leq t'' \in T, t, t'' \in I \Rightarrow t' \in I$ .

[Def:] Un module intervalle sur  $I \subseteq T$  est un module  
 de persistance  $\mathbb{V}$  défini par :

- ~~Def~~  $V_t = K$  si  $t \in I$  et  $V_t = 0$  sinon
- $\forall t \leq t' \in T, n_{t'}^t = \text{id}_K$  si  $t, t' \in I$  et  $n_t^t = 0$  sinon

→ notations:  $I = [b, d]$  (peut être ouvert, fermé, semi-ouvert, etc.)

$$\boxed{\mathbb{II}_{[b, d]} := 0 \xrightarrow{t < b} \dots \xrightarrow{t} 0 \xrightarrow{t \in [b, d]} K \xrightarrow{\text{id}} \dots \xrightarrow{t \in [b, d]} K \xrightarrow{t > d} 0 \xrightarrow{t} \dots \xrightarrow{t > d} 0}$$

[Exemple:]  $P := \bullet$

$$\tilde{P} := (P^t)_{t \geq 0}, \mathcal{T} = \mathbb{R}^+$$

~~$\mathbb{V} := \mathbb{II}_{\mathbb{R}^+} :=$~~   $\bullet \xrightarrow{t \geq 0} +\infty$

[Note:] les modules intervalles sont les briques de base  
 pour la décomposition des modules de persistance.

## Thm: (Décomposition)

Un module de persistance  $\mathbb{W} = (V_t)_{t \in T}$  se décompose en somme directe de modules intervalles:

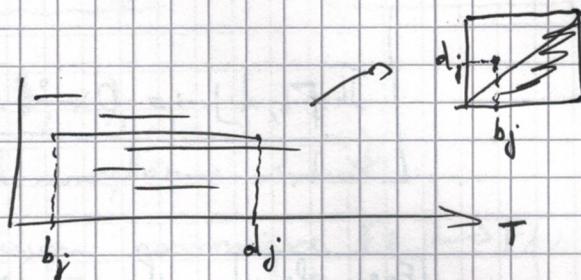
$$\rightarrow \mathbb{W} \cong \bigoplus_{j \in J} \mathbb{I}[b_j, d_j]$$

dans les cas suivants (suffisants, pas nécessaires):

- (i) quand  $T$  est fini, [Gabriel'72, Auslander'74]
- (ii) quand tous les espaces vectoriels  $V_t$  sont de dimension finie. [Webb'85, Crowley-Boeney'2012]

De plus, quand elle existe, la décomposition est unique à isomorphisme et réordonnancement près des termes [Aymouya'50].

Dans ce cas, le code-barre  $\{\mathbb{I}[b_j, d_j]\}$  est un descripteur complet de la structure de  $\mathbb{W}$ .



Note bibliographique: les résultats cités dans le théorème sont issus de la théorie des représentations.

↳ En gros:

- les modules de persistance sont des objets algébriques (composites) à part entière
- ils forment une catégorie dite "oblienne"  
(entre autres il existe un opérateur de somme directe)
- on essaie de les décomposer en éléments indécomposables dans cette catégorie (les modules intervalles)
- ils sont eux-mêmes des représentations de multigraphes, appelés des "carquois".

Note pour les algébristes :

Le cas "T fini et les V<sub>t</sub> sont tous de dim. finie (pf)" se prouve simplement avec le théorème de décomposition des modules de type fini sur un anneau principal:

- Tout module de persistence sur T fini s'écrit :

$$V_0 \xrightarrow{w_0^n} V_1 \xrightarrow{w_1^m} \dots \xrightarrow{w_{n-1}^m} V_n$$

- Il s'étend naturellement sur N :

$$V_0 \xrightarrow{w_0^n} V_1 \xrightarrow{w_1^m} \dots \xrightarrow{w_{n-1}^m} V_n \xrightarrow{0} 0 \rightarrow \dots$$

- Il admet une structure de module sur l'anneau  $\mathbb{A}[t]$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i \text{ muni de la multiplication par } t : \\ \\ \mathbb{A} \cdot (x_0, x_1, \dots) = (0, w_0^n(x_0), w_1^m(x_1), \dots). \end{array} \right.$$

- Comme  $\mathbb{A}[t]$  est un anneau principal, le théorème de décomposition (version pour modules gradués) donne :

$$N \cong \bigoplus_{j \in J} \underbrace{t^{b_j} \cdot \mathbb{A}[t]}_{\text{partie libre}} \oplus \bigoplus_{l \in L} \underbrace{\frac{t^{bl} \cdot \mathbb{A}[t]}{t^{rl} \cdot \mathbb{A}[t]}}_{\text{torsion}}$$

→ les  $[b_j, +\infty)$  et les  $[bl, bl+rl]$  forment des intervalles du code-barres.

Note: la preuve est la même que pour les groupes abéliens.

La structure graduée de N donne la forme particulière des commandes :  $t^{b_j} \cdot \mathbb{A}[t]$  et  $\frac{t^{bl} \cdot \mathbb{A}[t]}{t^{rl} \cdot \mathbb{A}[t]}$ .

Ceci apparaît lors de la mise en forme normale de Smith de la matrice des morphismes  $(\mathbb{A}[t])^{n \times n}$  (relations)  $\xrightarrow{\sim} (\mathbb{A}[t])^g$ .

module libre → module libre des générateurs correspondant aux relations.



le théorème n'est pas suffisant pour nos besoins :

$$\bullet \dots \bullet \quad i \quad P := \{0\} \cup \bigcup_{m \geq 1} \left\{ \frac{1}{m} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

~~$$Ft = \bigcup_{m \geq 1} \left[ \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m} \right]$$~~

$$Ft = [-t, t] \cup \bigcup_{m \geq 1} \left[ \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m} + t \right].$$

$$Vt = *H_0(Ft) \cong \mathbb{R}^{nt}$$

~~où  $nt = \text{Card } \{ m \in \mathbb{N}^* \mid \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} + t \}$ .~~

$\Rightarrow N$  est de dimension infinie

$Vt$  ————— finie  $\forall t > 0$ .

$$T = \mathbb{R}^+$$

$\Rightarrow$  ni (i) ni (ii) n'est vérifiée.

Pourtant,  $N$  est décomposable en modules intervalles:

$$N \cong \mathbb{I}[0, +\infty) \oplus \bigoplus_{m \geq 1} \mathbb{I}[0, \frac{1}{m(m+1)}).$$

Thm: [Chazal, Cohen-Steiner, Glisse, Guibas, 0. 2009]

Un module de persistance  $W = (Vt)_{t \in T}$  admet un barcode / diagramme de persistance bien défini,

même si  $W$  n'est pas décomposable, dès que  $W$  est q-tame:  $\forall t < t' \in T$ ,  $\dim Vt' \leq +\infty$ .

Exemples:  $\rightarrow$  cf. slides - persistance, pages 3 à 4.

- L'exemple ci-dessus:  $\forall t < t' \in \mathbb{R}^+$ ,  $\dim Vt' \leq \dim Vt \leq +\infty$ .
- plus généralement, la distance à n'importe quel compact de  $\mathbb{R}^d$ .
- toutes les fonctions de Morse ou de type Morse (cf. dernière slide).
- $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  continue avec  $X$  triangulable
- $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  continue, bornée inférieurement et propre (i.e. l'image inverse d'un compact est compact) avec  $X$  localement triangulable

(3)

### Calcul des diagrammes de persistance:

Input: filtration simpliciale  $\mathcal{K}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \{0, 1, \dots, m\} \leftarrow \text{fini} \Rightarrow \text{module décomposable} \\ K_0 = \emptyset, K_m = K \end{array} \right. \Rightarrow \text{décomposition} \Rightarrow \text{diagramme}$$

$\forall t, K_t$  complexe simplicial, sous-complexe de  $K_{t+1}$

Condition technique (simplificative, facile à satisfaire):

$$\left( \forall t, |K_t| / |K_{t-1}| = \{0, 1\} \right) \quad (\text{un seul simplexe inséré à la fois})$$

↳ engendre un ordre total sur les simplexes de  $K$

↳ met les simplexes en bijection avec  $\{1, \dots, m\}$ .

note: l'ordre est compatible avec les relations d'incidence.

$$(\sigma_i \leq \sigma_j \Rightarrow i \leq j)$$

Algo:  $\rightarrow$  (m chose que pour l'homologie, avec le nouvel ordre sur les simplexes:

① matrice de l'opérateur de bord:

$$M = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_1 & \dots & \sigma_m \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ t \text{ croissant} \end{array}$$

$M_{ij} \neq 0$ ssi  $\sigma_i$  facette de  $\sigma_j$

$$\begin{aligned} \text{② } \text{low}(j) &= \left\{ \max \{i \mid M_{ij} \neq 0\} \right. \\ &\left. 0 \text{ si } M_{ij} = 0 \forall i \right\} \end{aligned}$$

③ réduction par colonnes de gauche à droite:

Pour  $j=1$  à m faire:

Tant que  $\exists l < j$  tq.  $\text{low}(l) = \text{low}(j) \neq 0$  faire:

changer la colonne  $e_j$  en  $(e_j - \frac{M_{low(j)} e_l}{M_{low(l)} e_l})$ .

#### ④ Interprétation :

- toute colonne  $i \neq 0$  génère un cycle indépendant  $\delta_i$
- toute colonne  $j \neq 0$  génère un bord qui trivialise le cycle  $i = \text{low}(j)$  correspondant  $\rightarrow$  appariement  $(i, j)$

$$\begin{matrix} & \delta_1 & \dots & \delta_j & \dots & \delta_m \\ \begin{matrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \\ \delta_m \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} \delta_1 & \dots & \delta_j & \dots & \delta_m \\ 0 & & * & & 0 \\ \vdots & & \boxed{*} & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Donc : les sommades dans la décomposition du module  $H_*(X)$  sont en bijection avec les colonnes à 0 :

~~sommade II[i, ?]~~

$$\partial \delta_i = 0 \iff \text{sommade } \text{II}[i, ?]$$

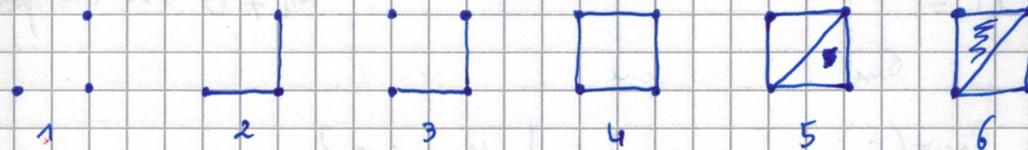
- les sommades finies sont les  $\text{II}[i, j]$  avec  $i = \text{low}(j)$
- les sommades infinies sont les  $\text{II}[i, +\infty)$  avec la ligne  $i$  non appariée.

Théorème : [de Silva, Morozov, Veghemo-Johansson 2001]

Cette interprétation est correcte.

Note : des rfs plus anciennes existent mais le traitement dans celle-ci est le meilleur.

Exemple :  $K = \mathbb{Z}_2$



$\rightarrow$  on complète l'ordre partiel sur les simplices en un ordre total, par exemple :



$\rightarrow$  matrice de bord :

$$\begin{matrix} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1,1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1,2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2,1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2,2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4,1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5,1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{\text{réduction}} \begin{matrix} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1,1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1,2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2,1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4,1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5,1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\text{dinsi, } \begin{cases} H_0(\omega) \cong \mathbb{II}[1, +\infty) \oplus \mathbb{II}[1, 1, 2] \oplus \mathbb{II}[1, 2, 2, 1] \oplus \mathbb{II}[3, 4] \\ H_1(\omega) \cong \mathbb{II}[4, 1, +\infty) \oplus \mathbb{II}[5, 6] \end{cases}$$

→ recalé sur la filtration de départ: (les commandes right-mères disparaissent)

$$\begin{aligned} H_0(\text{JG}) &\cong \mathbb{II}[1, +\infty) \oplus \mathbb{II}[1, 2) \oplus \mathbb{II}[1, 2) \oplus \mathbb{II}[3, 4) \\ H_1(\text{JG}) &\cong \mathbb{II}[4, +\infty) \oplus \mathbb{II}[5, 6). \end{aligned}$$

[Note] Pour le calcul à la main, on fait comme pour l'homologie :

- \* on fixe un ordre total sur les simplexes compatible avec la filtration et avec les relations d'incidence
- \* on considère chaque simplexe  $\sigma_i$  dans l'ordre :
  - soit il n'est pas dans une <sup>réduite</sup> chaîne ("positif", colonne nulle)
  - $\Rightarrow$  née une sommande  $\mathbb{I}[\sigma_i, ?]$
  - soit il est dans une chaîne et donc n'a pas d'ordre ("négatif",  
 $\text{low}(i) = k \rightarrow$  complète la sommande  $\mathbb{I}[k, ?]$  en  $\mathbb{I}[k, i]$ ).

## 4 Stabilité :

En un operatore  $Dg: f \mapsto Dg(f)$ .  
 (funzione) (diagramma)

→ on veut montrer que cet opérateur est lipschitzien.

- Métrique sur les fonctions : métrique sup :  $\|f - g\|_\infty$  pour  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$
  - Métrique sur les diagrammes de persistance : distance bottleneck.

→ cf. slides, page 5

Def: Un matching partiel  $A \hookrightarrow B$  est un ensemble

$\text{MC } A \times B$  1<sub>g</sub> .;

$\forall a \in A$ , il existe au plus un  $b \in B$  tq.  $(a, b) \in N$

$\forall b \in A$  if exists an element  $a \in A$  for  $(a, b) \in M$

[Def:] Soient  $A, B \in \Delta^+$  (demi-plan au-dessus de la diagonale).  
Le contr d'un matching partiel  $M: A \leftrightarrow B$  est :

$$c(M) = \max_{(a,b) \in M} \left\{ \sup_{\|a - b\|_\infty}, \sup_{\substack{s \text{ non} \\ s \in A \cup B}} \|s - \bar{s}\|_\infty \right\}$$

t project  
orthogonal des  
sur la diagonale

[Def:] Soient  $A, B \in \Delta^+$ . La distance bottleneck est :

$$d_B^\infty(A, B) = \inf_{M: A \leftrightarrow B} c(M).$$

[Théorème:] [Cohen-Steiner, Edelsbrunner, Harer 2005,  
Chazal, Cohen-Steiner, Glisse, Guibas, O. 2005]

Pour toutes fonctions q-tame  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $d_B^\infty(Dg f, Dg g) \leq \|f - g\|_\infty$ . (ie leurs modules induits)  
(en homologie sont q-tame)

$\Rightarrow$  l'opérateur  $f \mapsto Dg f$  est 1-lipschitzien.

[Exercice:] Montrez que la borne est fine, i.e. atteinte  
pour certains choix de fonctions  $f, g$ .

→ preuve:  
/- af. slides, page 6  
/- af. line, chapitre 3, sections 2.1 et 2.2

[Note:] La preuve utilise uniquement l'entrelacement suivant:

$$\dots \subseteq F_{(2m-2)\varepsilon} \subseteq F_{2m\varepsilon} \subseteq F_{(2m+2)\varepsilon} \subseteq \dots$$

$$\dots \subseteq G_{(2m-1)\varepsilon} \subseteq G_{(2m+1)\varepsilon} \subseteq \dots$$

qui se traduit en homologie par :

$$\dots \rightarrow H_*(F_{(2m-2)\varepsilon}) \rightarrow H_*(F_{2m\varepsilon}) \rightarrow H_*(F_{(2m+2)\varepsilon}) \rightarrow \dots$$

① ensuite la preuve est purement algébrique

$$\dots \rightarrow H_*(G_{(2m-1)\varepsilon}) \rightarrow H_*(G_{(2m+1)\varepsilon}) \rightarrow \dots$$

(\*)

→ énoncé au niveau algébrique directement :

[Def:] Soient  $V = \{V_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  et  $W = \{W_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  deux modules de persistance sur  $\mathbb{R}$ .

$V$  et  $W$  sont  $\epsilon$ -entrelacés si  $\exists \gamma = (\gamma_t)_{t \in \mathbb{R}}$  et  $(\eta_t)_{t \in \mathbb{R}}$  avec  $\gamma_t: V_t \rightarrow W_{t+\epsilon}$  et  $\eta_t: W_t \rightarrow V_{t+\epsilon}$  telles que :

¶ les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} V_t & \xrightarrow{\eta_t} & V_{t'} \\ \downarrow \gamma_t & \nearrow \eta_{t+\epsilon} & \downarrow \gamma_{t'} \\ W_{t+\epsilon} & \xrightarrow{\gamma_{t+\epsilon}} & W_{t'+\epsilon} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V_t & \xrightarrow{\gamma_t} & V_{t+\epsilon} \\ \downarrow \eta_t & \nearrow \gamma_{t'} & \downarrow \eta_{t'} \\ W_t & \xrightarrow{\eta_t} & W_{t'} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V_t & \longrightarrow & V_{t+2\epsilon} \\ \downarrow \gamma_t & \nearrow \eta_{t+\epsilon} & \downarrow \gamma_{t+2\epsilon} \\ W_{t+\epsilon} & \xrightarrow{\gamma_{t+\epsilon}} & W_{t+2\epsilon} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V_{t+\epsilon} & & \\ \downarrow \gamma_t & \nearrow \gamma_{t+\epsilon} & \\ W_t & \longrightarrow & W_{t+2\epsilon} \end{array}$$

Note : l' $\epsilon$ -entrelacement est faible si seuls les diagrammes (\*) commutent.

[Théorème] [Chazal; Cohen-Steiner, Glisse, Mérigot, 0. 2009]

Si  $V, W$  sont  $\epsilon$ -entrelacés, alors  $d_B^{\infty}(DgV, DgW) \leq \epsilon$ .

[Corollaire] Soit  $di(V, W) = \inf \{ \epsilon \geq 0 \mid V, W \text{ sont } \epsilon\text{-entrelacés} \} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ .

Alors, pour tous modules g-tome  $V, W$ ,  
 $d_B^{\infty}(DgV, DgW) \leq di(V, W)$ .  $\Rightarrow$  ophtalm lipscitzien

En fait [Lesnick 2011] :  $d_B^{\infty}(DgV, DgW) = di(V, W)$

$\Rightarrow$  l'ophtalm est une isométrie

Ainsi, non seulement les diagrammes de persistance sont des invariants complets pour les modules décomposables, mais en plus leur métrique est naturelle par rapport à celle entre les modules.