Ecole Supérieure en Sciences et Technologies de l'Informatique et du Numérique

ESTIN

Module : RO1 **Niveau :** 1CS **Année :** 2023-2024

SÉRIE N° : 1

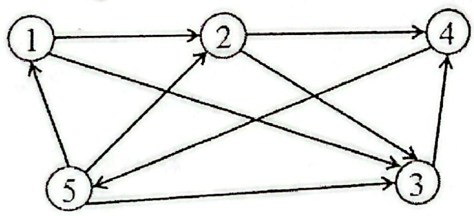
Exercice 1 Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. Montrer que :
1. $\sum_{x_i \in X} d^+(x_i) = \sum_{x_i \in X} d^-(x_i)$
2. $\sum_{x_i \in X} d(x_i) = 2card(U)$.
3. Dans un graphe, le nombre de sommets de degé impair est pair.

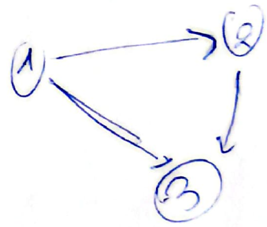
Exercice 2 1. Est-il possible de construire un graphe simple ayant 5 sommets et 11 arêtes ?
2. Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

Exercice 3 Pour chacune des suites indiquées ci-dessous, décider si elle représente la liste des degrés des sommets d'un graphe simple.

a) $7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$ b) $6, 6, 5, 4, 3, 3, 1$ c) $3, 3, 2, 1, 1$ d) $3, 3, 2, 2$
e) $5, 4, 3, 1, 1, 1, 1$ f) $4, 2, 1, 1, 1, 1$ g) $1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6$ h) $1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3$

Exercice 4 Condiérons le graphe ci-dessous.





1. Déterminer le sous-graphe engendré par $A = \{1, 2, 3\}$.
2. Déterminer le graphe partiel engendré par $V = \{(1, 2), (5, 1), (2, 4), (2, 3), (4, 5)\}$.
3. Déterminer le sous-graphe partiel engendré par A et V.

Exercice 5 Il existe quatre groupes sanguins :
- AB pour les personnes ayant des antigènes A et B,
- A pour les personnes ayant des antigènes A mais pas d'antigènes B,
- B pour les personnes ayant des antigènes B mais pas d'antigènes A,
- O pour les personnes n'ayant ni d'antigènes A ni d'antigènes B.

Il existe également deux rhésus sanguins :
- positif $(-)$,
- négatif (-).

On admet que les seuls interdits biologiques pour recevoir du sang sont les suivants :
- recevoir du sang possédant un antigène dont on est dépourvu,
- recevoir du sang ayant un rhésus positif si on est rhésus négatif.

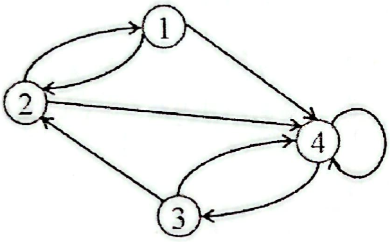
a) Tracer le graphe orienté dont $\{AB+, AB-, A+, A-, B+, B-, O+, O-\}$ est l'ensemble des sommets et dont les arcs désignent les possibilités de donner du sang sans violer les interdits biologiques.

b) Donner le demi-degré sortant (extérieur) d^+ et le demi-degré entrant (intérieur) d^- de chaque sommet du graphe.
c) Donner l'ensemble des successeurs $succ(x)$ et l'ensemble des prédécesseurs $pred(x)$ de chaque sommet x.
Exercice 6 Montrer que si $G = (X, U)$ est un graphe régulier de degré r, alors $card(U) = \frac{1}{2}r \times card(X)$.
Exercice 7 Considérons la matrice suivante

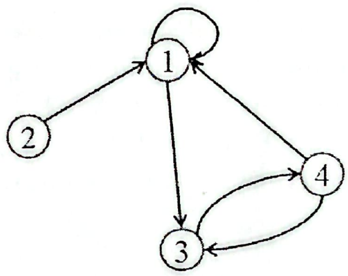
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe orienté G associé à la matrice d'adjacence A.
2. Donner la séquence des degrés de ce graphe.
3. Cette matrice est-elle une matrice d'incidence d'un graphe ?
5. Donner la matrice d'adjacence du graphe complémentaire $\bar{G} = (X, \bar{U})$, puis tracer le graphe $\bar{G}$.

Exercice 8 Soient $G_1 = (X, U)$ et $G_2 = (X, U')$ les deux graphes représentés ci-dessous.



G1



G2

1. Définir les fonctions successeur Γ_1 et Γ_2 des graphes G_1 et G_2 puis leurs matrices d'adjacence respectives M_1 et M_2.
2. Définir dans un tableau les fonctions $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ puis, $\Gamma_1 \bullet \Gamma_2$ applications de X dans l'ensemble des parties de X telles que :

$$(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)(x) = \Gamma_1(x) \cup \Gamma_2(x) \text{ et } (\Gamma_2 \bullet \Gamma_1)(x) = \Gamma_2(\Gamma_1(x))$$

Et donner la signification.
Ecrire la matrice d'adjacence des graphes $G = (X, \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ et $G' = (X, \Gamma_1 \bullet \Gamma_2)$.
3. Donner les matrices d'adjacence des graphes $G = (X, \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ et $G = (X, \Gamma_2 \bullet \Gamma_1)$.
4. Calculer les matrices booléennes $M_1 + M_2$ et $M_1 \bullet M_2$.
5. Conclure.
6. Représenter les grapges $G = (X, \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ et $G' = (X, \Gamma_1 \bullet \Gamma_2)$.

Exercice 9 Un étudiant distrait s'aperçoit qu'il doit passer, le lendemain matin, un examen. Peut être a-t-il la possibilité de préparer le module en révisant deux ou trois chapitres choisis au hasard dans les douze chapitres du programme ? Cependant, ces douze chapitres ne sont pas tout à fait indépendants (voir le tableau ci-dessous).

Le chapitre	Nécessite la compréhension des chapitres
2	1
3	1 et 2
4	1 et 2
5	1
10	8
11	8 et 10
12	8 et 10

Considérons la régle suivante :

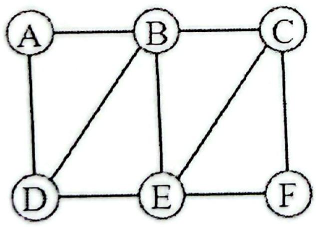
$$(x_i, x_j) \in U \iff \text{le chapitre } x_i \text{ necéssite la révision du chapitre } x_j.$$

1. Représenter cette situation à l'aide d'un graphe.
2. Quel est le type de ce graphe ? Donner ses propriétés.
3. Aider l'étudiant à déterminer les chapitres qu'il doit réviser sans devoir lire de chapitres préalables.

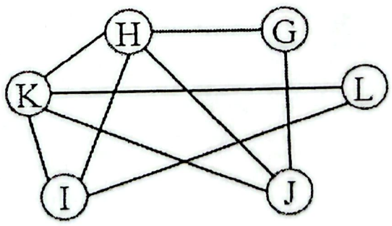
Exercice 10 1. Combien d'arêtes ont les graphes K_{14} et $K_{5,9}$?
2. Montrer que le nombre d'arêtes d'un graphe simple complet d'ordre n est C_n^2.

Exercice 11 Soit $G = (X, U)$ un graphe simple et biparti avec $card(X) = n$ et $card(U) = m$.
1. Montrer qu'il existe un sommet $x \in X$ tel que $d(x) \leq \frac{n}{2}$.
2. Montrer que $m \leq \frac{n^2}{4}$.

Exercice 12 1. Les graphes G_1 et G_2 sont-ils isomorphes ?

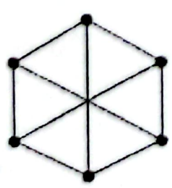


G_1

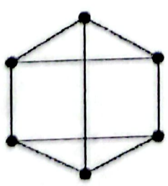


G_2

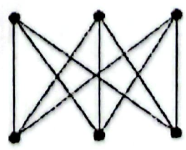
2. Quels graphes sont-ils isomorphes parmis ceux de la figure suivante ?



G_1



G_2



G_3

exo 1: TD1: ①

1. $\sum_{x_i \in X} d^+(x_i) = \sum_{x_i \in X} d^-(x_i)$

on a $d^+(x_i) = |\{x_j, (x_i, x_j) \in U\}|$

$\sum_{x_i \in X} d^+(x_i) = \sum_{x_i \in X} |\{x_j, (x_i, x_j) \in U\}|$

$= |U| = card(U)$

de même pour $\sum_{x_i \in X} d^-(x_i) = |U| = card(U)$

donc $\sum_{x_i \in X} d^+(x_i) = \sum_{x_i \in X} d^-(x_i)$.

2. $\sum_{x_i \in X} d(x_i) = 2card(U)$

$\sum_{x_i \in X} d^+(x_i) = \sum_{x_i \in X} d^-(x_i) = |U| = card(U)$

$\sum_{x_i \in X} d(x_i) = \sum_{x_i \in X} d^-(x_i) + \sum_{x_i \in X} d^+(x_i) = 2card(U)$

Alors que $\sum_{x_i \in X} d(x_i) = 2card(U)$.

3. le nombre de sommets de dégré impair est pair :

soit $X = I \cup P$ tel que :

P: l'ensemble de sommets de dégré pair

I : l'ensemble de sommets de degré impair

on a : $\sum_{x_i \in X} d(x_i) = 2\,card(U)$ ②

$= \sum_{x_i \in X} d^+(x_i) + \sum_{x_i \in X} d^-(x_i)$

comme $\sum_{x_i \in X} d(x_i) = 2\,card(U)$ donc $\sum_{x_i \in P} d(x_i)$. est pair et $\sum_{x_i \in I} d(x_i)$ est pair aussi. ou $d(x_i)$ est impaire pour tout $x_i \in I$. Donc card(I) est forcément paire. d'où le résultat.

exo 2 :

* graphe simple : pas de boucle, dont tout paire de sommets est reliée par au plus un arrête

1. le graphe existe $\Longrightarrow 2\,card(U) = \sum d(x_i)$

$2\,card(U) = 22$ et pour tous $x_i \in X$ $d(x_i) \leq 4$

$\sum_{x_i \in X} d(x_i) \leq 20 < 2\,card(U) = 22$

donc le graphe n'existe pas.

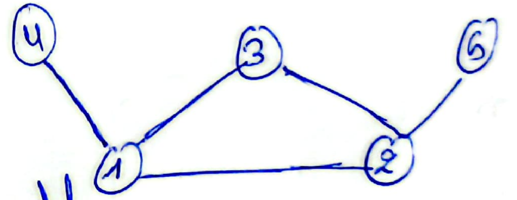
2. card(I) = 15. I = ensemble des sommets de degré impaire, et 15 n'est pas paire, alors le graphe n'existe pas.

exo3 : ③

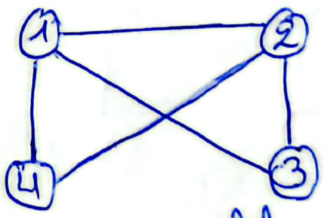
7.6.5.4.3.2.1 : impossible, puisque le graphe est d'ordre 7, alors le degré de chaque sommet au plus 6 et la séquence contient un sommet de degré 7.

6.6.5.4.3.3.1 : puisque il y a 2 sommets de degré 6, alors le degré de chaque sommet ≥ 2 mais dans la séquence $\exists$ un sommet de degré 1.

3.3.2.1.1 : possible



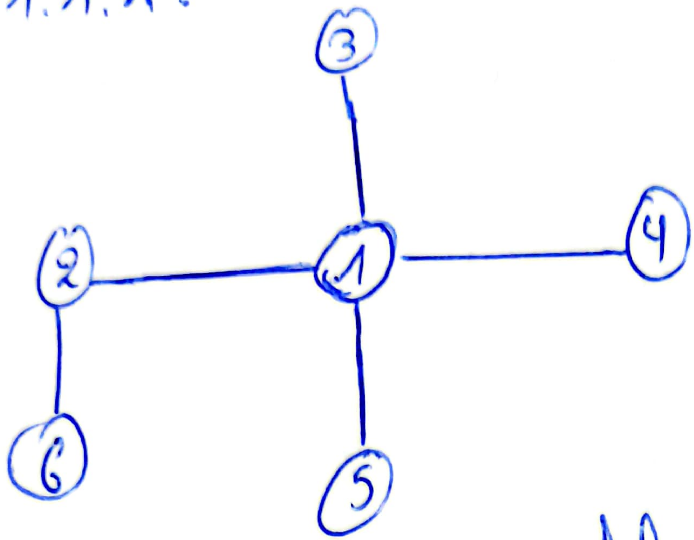
3.3.2.2 : possible



5.4.3.1.1.1.1 : impossible, $\sum d = 16 \Longrightarrow card(U) = 8$

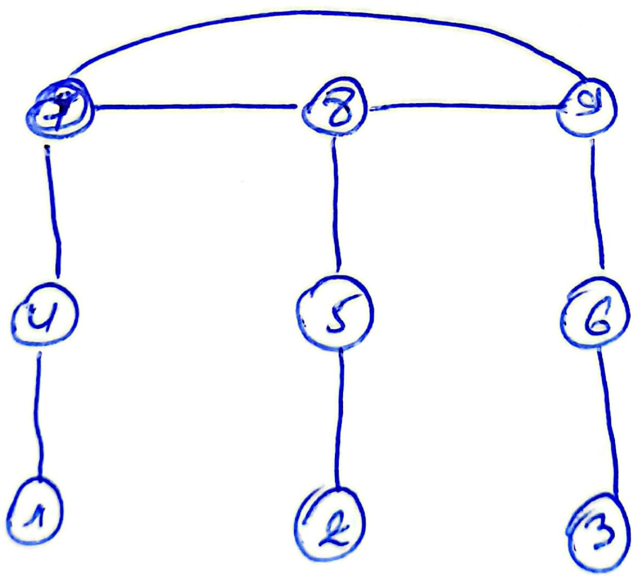
$\Longrightarrow$ le graphe possède 8 arcs, le graphe contient 4 sommets de degré 1, si on supprime ces sommets alors on supprimera 4 arcs. donc il nous reste 3 sommets et au minimum 4 arcs et le graphe d'ordre 3 avec 4 arcs n'est pas simple.

4. 2. 1. 1. 1. 1 :



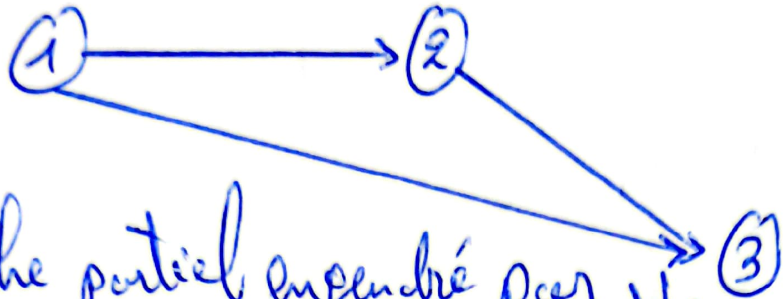
1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6 : impossible puisque le nombre de sommets de dégré impaire n'est pas paire.

1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 :

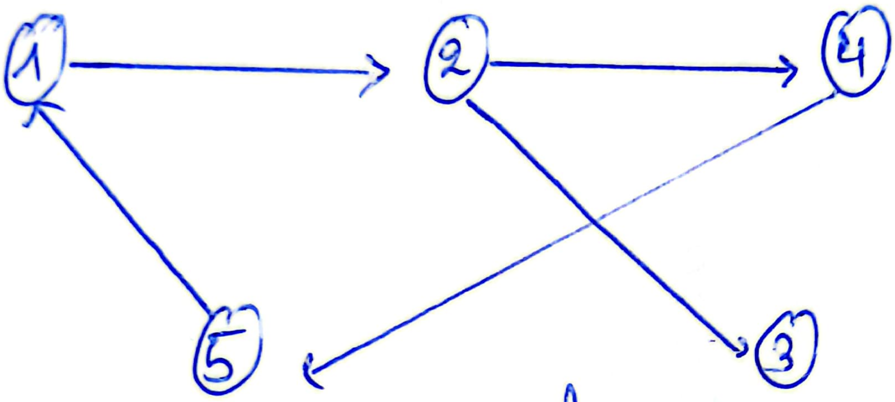


exo 4:

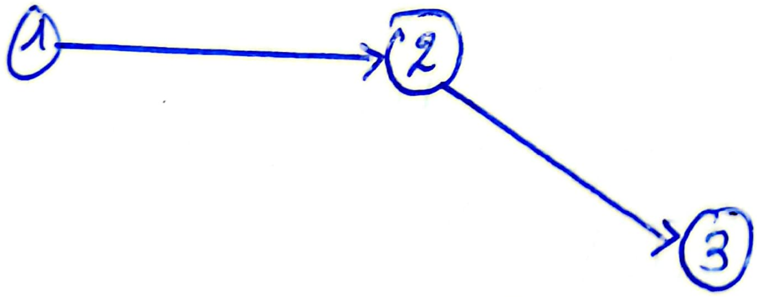
1. graphe engendré par $A = \{1, 2, 3\}$



2. graphe partiel engendré par V:

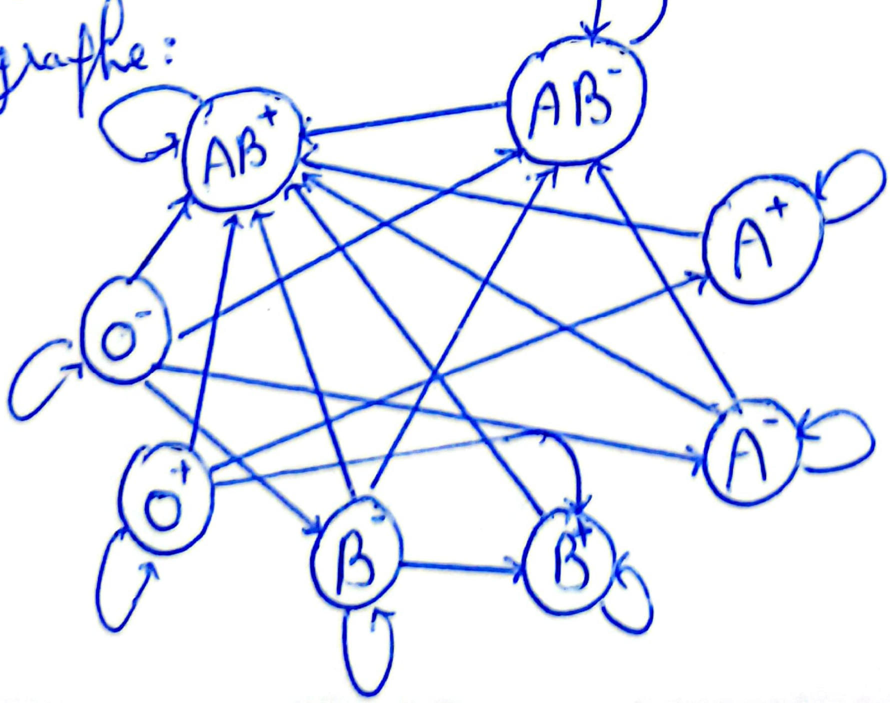


3. le sous graphe partiel engendré par A et V:



exo5:

le graphe:



b) les demi degré :

$d^+(O^+) = 4$, $d^-(O^+) = 2$

$d^+(O^-) = 8$, $d^-(O^-) = 1$

$d^+(AB^+) = 1$, $d^-(AB^+) = 8$

$d^+(AB^-) = 2$, $d^-(AB^-) = 4$

$d^+(A^+) = 2$, $d^-(A^+) = 4$

$d^+(A^-) = 4$, $d^-(A^-) = 2$

$d^+(B^+) = 2$, $d^-(B^+) = 4$

$d^+(B^-) = 4$, $d^-(B^-) = 2$.

c) l'ensemble de succ et pred :

....

exo6:

dans un graphe régulier $\sum_{x_i \in X} d(x_i) = r.card(X)$

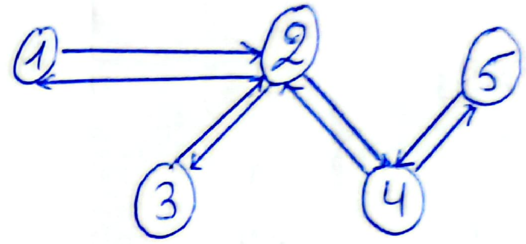
$\sum_{x_i \in X} d(x_i) = 2.card(U)$

$r.card(X) = 2.card(U)$

$card(U) = \frac{1}{2}.r.card(X)$

exo7:

1. le graphe:



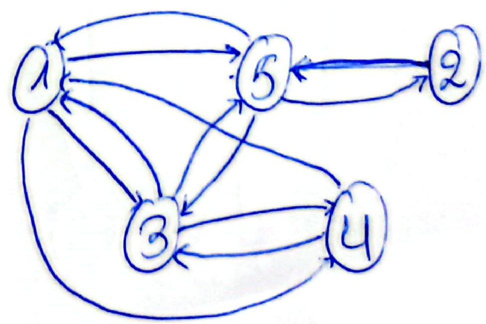
2. la séquence de degrés: 6, 4, 2, 2, 2

3. la matrice n'est pas d'incidence puisque la somme de chaque colomne n'est pas 2.

4. Matrice d'ajacence du graphe complimentaire:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le graphe



ex08:

1. fonctions successeur:

x	$\Gamma_1^+(x)$	$\Gamma_2^+(x)$
1	$\{2,4\}$	$\{1,3\}$
2	$\{1,4\}$	$\{1\}$
3	$\{2,4\}$	$\{4\}$
4	$\{3,4\}$	$\{1,3\}$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. fonctions $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$

x	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 (x)$	$\Gamma_2 \circ \Gamma_1 (x)$
1	$\{2,4,1,3\}$	$\{1,3\}$
2	$\{1,4\}$	$\{1,3\}$
3	$\{2,4\}$	$\{1,3\}$
4	$\{3,4,1\}$	$\{1,3,4\}$

- Matrice de $G = (X, \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$

$$M_1' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matrice de $G = (X, \Gamma_1 \circ \Gamma_2)$

$$M_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- calule $M_1 + M_2$

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

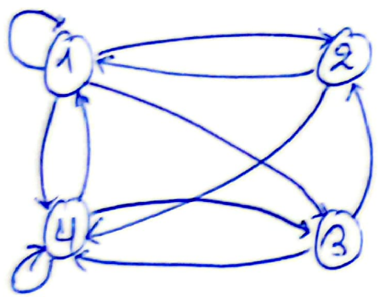
On remarque que $M_1' = M_1 + M_2$ et $M_2' = M_1 \cdot M_2$

Donc $M_1 + M_2$ est la matrice d'adjacende du G

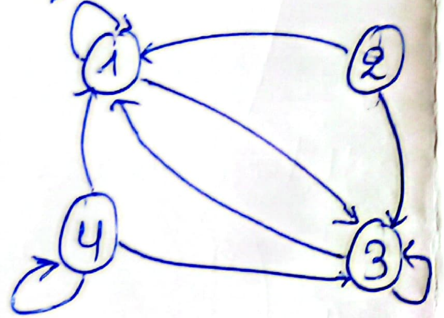
et $M_1 . M_2$ est la matrice d'adjacence du G'.

6) Représentation des graphes:

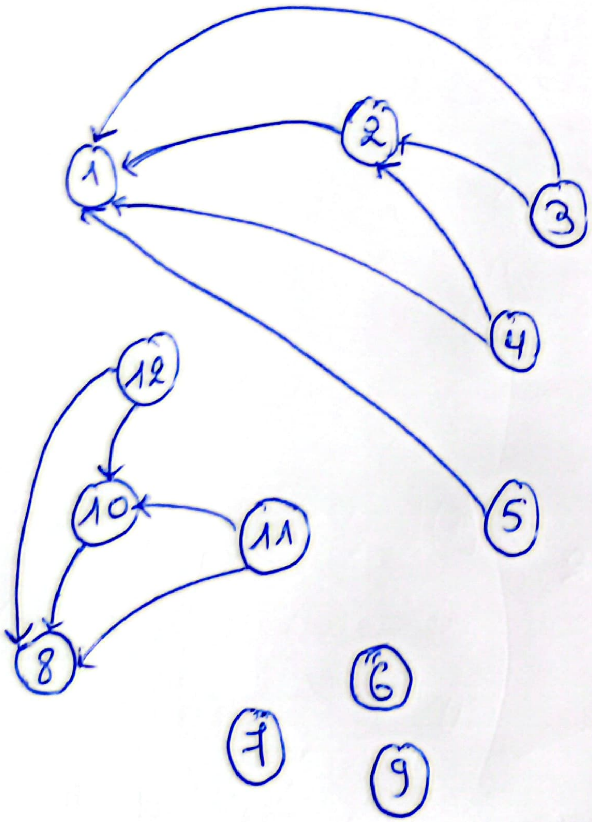
$M_1 + M_2$:



$M_1 \cdot M_2$:



Exo 9:



2) le type de graphe est transitif.

3) l'étudiant peut choisir 3 chapitres parmi 1,8,6,7,9.

Exo 10:

$K_{p,q}$: graphe simple biparti complet.

K_n : graphe simple et complet d'ordre n.

1) les arêtes:

$K_{14} = 13 + 12 + \dots + 1 = 91$

$K_{5,9} = 5 \times 9 = 45$

2) le nombre d'arêtes d'un graphe simple complet d'ordre n est C_n^2.

démonstration:

exo 11 :

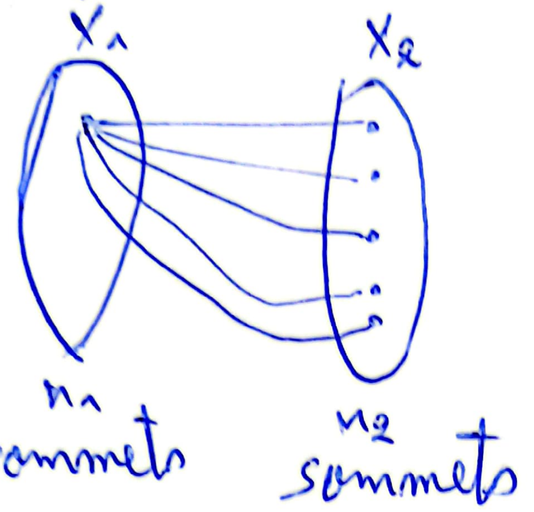
1. Montrons que $\exists$ sommet $x \in X$ tq $d(x) \leq \frac{n}{2}$.

on pose $X = X_1 \cup X_2$ avec $|X_1| = n_1$, $|X_2| = n_2$ et

$n = n_1 + n_2$.

On a $\forall x \in X_1, d(x) \leq n_2$

$\forall x \in X_2, d(x) \geq n_1$



Si $n_1 \leq n_2$ alors $n_1 + n_1 \leq n$

$2n_1 \leq n$ ... (1)

$\forall x \in X_2$, $2d(x) \leq 2n_2$ .... (2)

de (1) et (2)

si $n_1 \leq n_2$; $\forall x \in X_2$ $d(x) \leq \frac{n}{2}$ ... (*)

si $n_2 \leq n_1$ alors $2n_2 \leq n$ .... (3)

et $x \in X_1$, $d(x) \leq \frac{n}{2}$ .... (4)

de (3) et (4) si $n_2 \leq n_1$ alors

$\forall x \in X_1$, $d(x) \leq \frac{n}{2}$ ... (**)

de (*) et (**) $\exists x \in X$, $d(x) \leq \frac{n}{2}$.