

الفصل الرابع

الرياضيات عند العرب

ان القرنان الثالث والرابع الهجريان / التاسع والعاشر الميلاديان القرنين الذهبيين لعلماء الرياضيات المسلمين، الذين يدين لهم العالم بالكثير، لحفظهم التراث العلمي القديم وتوسيعه ولابتكاراتهم الجديدة، في الوقت الذي كانت فيه أوروبا تفتقر إلى الإبداع العلمي في هذا الجانب، وتسعى للاستفادة من التقدم العلمي الذي سبقهم إليه العرب المسلمون أشواطاً كثيرة، وحتى الرياضيات الإغريقية لم تصل للعالم المعاصر إلا عن طريق العلماء العرب المسلمين، حيث اعتمدت الترجمات اللاتينية القديمة الإغريقية على مؤلفات إسلامية أكثر من اعتمادها على المؤلفات الإغريقية الأصلية، ونتيجة لهذا انتقل الحساب والفلك الإغريقيان إلى أوروبا بواسطة المسلمين، ولم تقتصر خدمة المسلمين لعلم الرياضيات على حفظ ونقل ما قامت به الأمم السابقة، بل كانت لهم إسهامات هائلة في دقائق وجزيئات هذا العلم.

أثبت العلماء العرب أن لهم مكانة مرموقة ومهمة في علم الرياضيات، الذي أثروه، وابتكروا فيه، وأضافوا إليه، وطوروه، فاستفاد العالم أجمع من الإرث الذي تركوه، والذي لولاه ما وصل الغرب إلى التقدم الملحوظ في هذا العلم. في بادئ الأمر جمع علماء العرب نتاج علماء الأمم السابقة في حقل الرياضيات، ثم ترجموه، ومنه انطلقوا في عوالم الاكتشاف والابتكار والإبداع، فقدموا للإنسانية جمعاء خدمات جليلة ومهمة يعترف بها الجميع، حيث اعتمدوا على الملاحظة والتجريب والقياس، ذلك لأنهم شككوا في الكثير من نظريات قدماء اليونان وعدلوا حين اكتشافهم أنها خاطئة، منتهجين طريقة علمية حديثة في التفكير والبحث للوصول إلى النظريات الرياضية الصحيحة، ذلك أن الرياضيات التي ورثها علماء القدماء عن علماء اليونان كانت معقدة إلى درجة كبيرة.

بدايات الرياضيات عند العرب:

قد أبدى العلماء العرب والمسلمون اهتماماً بالغاً بعلم الرياضيات بفروعه المختلفة، وركزوا في دراستهم لهذا العلم على اتجاهين: الأول: الناحية النظرية: وذلك باستيعاب الموضوع وفهمه، ومن ثم القيام بالعديد من الابتكارات الجديدة التي لم يسبقهم إليها أحد. الثاني: الناحية التطبيقية: حيث بدءوا بإجراء دراسات عملية مفيدة للغاية في العلوم الأخرى ذات الارتباط المباشر

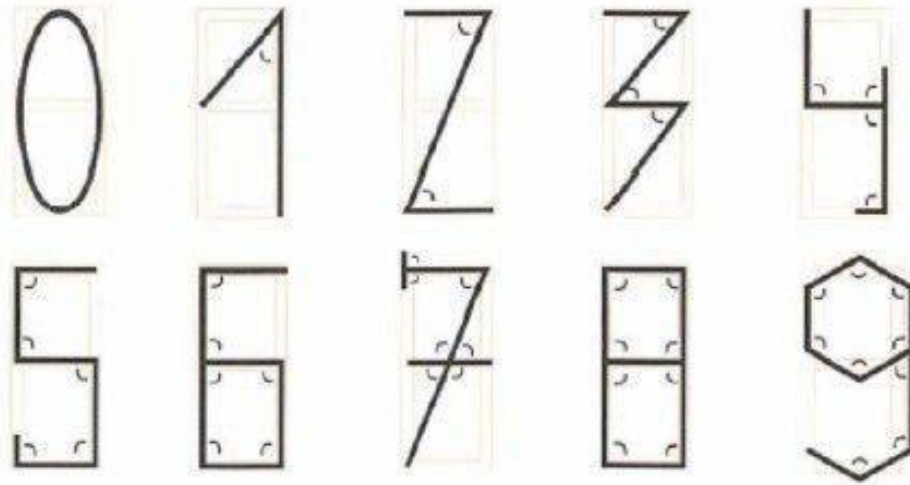
بعلم الرياضيات مثل علم الفلك والهندسة الميكانيكية والكهربائية والمعمارية، وعلم المواريث، والأعمال التجارية وغيرها من العلوم والأعمال التي تتطلب معرفة بعلم الرياضيات، وكان علم الرياضيات في بداياته شاملاً لكثير من الاختصاصات كالفيزياء وعلم الفلك والتنجيم، ويذكر أن أهم تطور في علم الرياضيات قد استند إلى أسس ثابتة منطقية منذ عصر إقليدس الذي أبدع في الحساب وعلم الهندسة وحتى وصوله إلى المرحلة التي وضعت فيها أسسه وقواعده وأطره، وفي هذه الدراسة يتم تناول كافة العلوم العلمية والنظرية التي كان للعلماء العرب والمسلمين بصمات واضحة فيها ذكرها التاريخ لهم

يُعد المسلمون أول من اشتغل في علم الجبر وأول من كتب فيه الخوارزمي، وهم الذين أطلقوا عليه اسم «الجبر»، ونتيجة الاهتمام الذي أولوه إليه، فقد كانوا أول من ألف فيه بطريقة علمية منظمة. كما توسعوا في حساب المثلثات وبحوث النسبة التي قسموها إلى ثلاثة أقسام: عددية وهندسية وتأليفية، وحلّوا بعض المعادلات الخطية بطريقة حساب الخطأين، والمعادلات التربيعية، وأحلّوا الجيوب محل الأوتار، وجاءوا بنظريات أساسية جديدة لحل مثلثات الأضلاع، وربطوا علم الجبر بالأشكال الهندسية، وإليهم يرجع الفضل في وضع علم المثلثات بشكل علمي منظم مستقل عن علم الفلك، ما دفع الكثيرين إلى اعتباره علماً عربياً خالصاً.

أما بالنسبة للأرقام العربية فقد قامت على النظام العشري الذي طوره المسلمون عن الهنود واستخدموه في حساباتهم ومعاملاتهم مبكراً، وباستخدام الأرقام والصفر صار حل المسائل الحسابية وتدوين الكسور العشرية والعادية وبناء المعادلات الرياضية من مختلف الدرجات سهلاً. ومن ناحية أخرى، توصل الرياضيون المسلمون إلى طرائق ميسرة لإجراء شتى العمليات الحسابية، فاستخدموا في القسمة والضرب طرائق عدة يكاد بعضها يطابق ما هو مستخدم اليوم. وعلى صعيد المتتاليات الحسابية والهندسية بأنواعها فقد عرفها العلماء المسلمون، فذكروا قوانين خاصة لجمعها، وبنوا قواعد لاستخراج الجذور ولجمع المربعات المتوالية والمكعبات، وبرهنوا على صحتها.

وكانت البلدان الإسلامية تستخدم في القرن العاشر ثلاثة أنماط من الحساب هي: النظام الأصبعي، والنظام الستيني، والنظام العشري، وعند نهاية القرن كان مؤلفون مثل عبد القاهر البغدادي يكتبون نصوصاً في مقارنة هذه الأنماط. جاء النظام الأصبعي من استخدام أعداد مكتوبة كلها بالكلمات وكان إحصاؤها على الأصابع شائعاً في مجتمع الأعمال، وكتب علماء الرياضيات من أمثال أبي الوفاء البوزجاني في بغداد في القرن العاشر مقالات استعملوا فيها هذا النظام. كان أبو الوفاء

خبيراً في الأعداد العربية ولكنه قال: «...إنها لم تطبق في دوائر الأعمال ولا عند سكان الخلافة الشرقية مدة طويلة من الزمن». أما النظام الستيني فكان يستخدم أعداداً يدل عليها بالأبجدية العربية، وجاءت أساساً من البابليين، واستخدمها علماء الرياضيات العرب في العمل الفلكي. وتطور حساب الأعداد العربية مع ظهور النظام العشري؛ إذ واثم المسلمون الأرقام الهندية من ١ إلى ٩، وطوروها إلى الأرقام الحديثة التي تُستخدم اليوم في الغرب، وهي تتميز بأنها بُنيت على عدد الزوايا التي يحملها كل رقم، ولكن الرقم سبعة ٧ يخالف القاعدة لأن الشارحة التي تقطع الخط العمودي من الوسط يرجع تطورها إلى القرن التاسع عشر. ولقد أصبحت تستخدم هذه الأعداد اليوم في أوروبا وشمال أفريقيا تمييزاً لها عن الأعداد الهندية التي ما زالت تستخدم في بعض البلدان الشرقية من العالم الإسلامي. في العدد ١ مثلاً زاوية واحدة، وفي العدد ٢ زاويتان، وفي العدد ٣ ثلاث زوايا، وبوصول هذه الأعداد إلى أوروبا انتهت المشكلات التي كانت تواجهها الأعداد اللاتينية المستخدمة حينذاك. وكان يشار إلى الأعداد العربية بالأعداد الغبارية (ghubari) لأن المسلمين كانوا يستخدمون الألواح الغبارية في حسابهم بدلاً من المعداد.

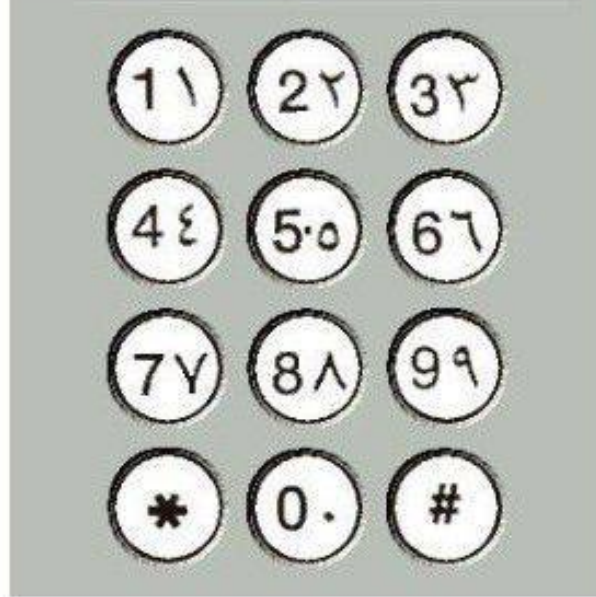


امتد الأرقام العربية على مبدأ الزوايا؛ ففي العدد ١ زاوية واحدة، وفي العدد ٢ زاويتان، وفي العدد ٣ ثلاث زوايا، وهكذا.

تطوير علم الحساب:

إن أول الإنجازات الإسلامية تتمثل في تطوير النظام الحسابي العشري، ويُشير مؤلف الإقليدسي جزئياً إلى أولى المحاولات التي بُذلت في هذا المجال: استبدال اللوحة الحسابية (الغبارية) بالورق والحبر مما يسمح بحفظ مختلف مراحل العملية الحسابية وذلك للتمكن من مراجعتها. وقد يبدو لنا هذا التطور سهلاً،

ولكنه لم يكن كذلك في الواقع؛ فقد لعب البطء في الاتصالات بين البشر كما لعبت العقليات المحافظة لدى من تأصل لديهم استخدام لوحات الغبار، دوراً أساسياً في تأخير هذا التبدل أجيالاً بأكملها.



لوحة هاتف تظهر الأرقام الهندية-العربية التي كانت تُستخدم في البلاد الإسلامية الشرقية، والأرقام العربية التي كانت تُستخدم في البلاد الإسلامية الغربية، ومنها انتقلت إلى أوروبا.

ولقد بدأ هذا التبدل، حسب الإقليدسي، في دمشق في القرن العاشر، من دون أن يكون معروفاً في بغداد. وفي القرن الثالث عشر نجد تلميحات إلى استعمال اللوحة الغبارية في كتابات ابن البناء المراكشي (١٢٥٦-١٣٢١م). وبابتعاد قليل شرقاً، إلى مراغة نجد الرياضي نصير الدين الطوسي المتوفى عام ١٢٧٤م، يُكرّس مؤلفاً بأكمله حول استعمال اللوحات الغبارية. ومن قبله بنصف قرن تقريباً، قام سلفه شرف الدين الطوسي بمجهود كبير لحل معادلات الدرجة الثالثة بواسطة حساب اللوحات الغبارية. لكن نظام اللوحات هذا انتهى إلى الزوال، ولم يبق من هذا النظام سوى العمليات الحسابية التي تُدرّس في المدارس، التي لم يطوها النسيان بعد، على الرغم من استعمال الحاسبات الإلكترونية. إن أهمية تحرير النظام الحسابي الهندي من اللوحات الغبارية لا تقل عن أهمية تفضيل المسلمين هذا النظام وتبنيهم له على حساب النظام الأصبعي، الذي استمر طويلاً عبر المفهوم العربي للكسور.

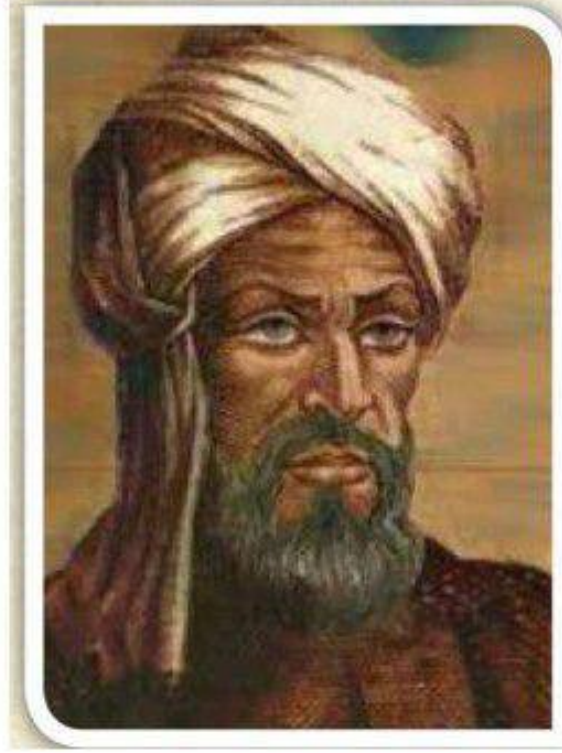
ومن التعديلات العظيمة التي أدخلها علماء الرياضيات المسلمون على النظام الهندي التعريف والتطبيق الواسع للصفر؛ إذ أعطوه خاصية رياضية تنص على أنه إذا ضرب بأي عدد آخر كانت النتيجة

صفرًا. وكان يُحدد له في السابق فراغ أو «لا شيء»، واستخدموه كذلك لتطبيق النظام العشري، ومن ثم أصبح ممكناً معرفة ما إذا كانت كتابة ٢٣ مثلاً تعني ٢٣٠ أو ٢٣ أو ٢٣٠٠ .

لقد حقق علماء الرياضيات المسلمون معظم التقدم الذي حصل في الأساليب العددية بفضل هذا النظام من الحساب بالأعداد العربية؛ فتمكن بعضهم كأبي الوفاء وعمر الخيام من استخراج الجذور. إن اكتشاف الكرجي لنظرية ذات الحدين للأسس الصحيحة كان عاملاً كبيراً في تطور التحليل العددي القائم على النظام العشري. ورفد غياث الدين الكاشي في القرن الرابع عشر تطور الكسور العشرية، ليس فقط من أجل تقريب الأعداد الجبرية بل من أجل تقريب الأعداد الحقيقية كالنسبة الثابتة π ، وقد جاء رفده للكسور العشرية مهماً جداً وعده بعضهم ولسنوات هو مخترعها. ومع أن الكاشي لم يكن أول من فعل ذلك، إلا أنه قدّم نظام عددٍ عشري عربي لحساب الجذور القصوى بالإنجليزية (nth root) تُعد حالة خاصة من الأساليب التي قدمها بعد قرون من الزمن كل من روفيني الإيطالي، وهورنر الإنجليزي، وكلاهما من القرن التاسع عشر.

علم الجبر:

نشأ علم الجبر في الرياضيات مع عمل العالم المسلم محمد بن موسى الخوارزمي الذي اقترن علم الجبر بكتابه الجبر والمقابلة . وهو أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي القرطبي، وحسب بعض الروايات فقد انتقلت عائلته من مدينة خوارزم في أوزبكستان – حالياً إلى بغداد، ويعتبر الخوارزمي من أوائل علماء الرياضيات المسلمين، وهو مؤسس علم الجبر الذي يتقاسم لقبه مع ديوفانتوس. أسهمت أعماله كثيراً في تقدم الرياضيات خلال العصر الذي عاش فيه، وهو الذي عمل في بيت الحكمة في بغداد، وقد كلفه المأمون به برسم خارطة للأرض عمل فيها أكثر ٧٠ جغرافياً كما عينه أيضاً على رأس خزانة كتبه، وطلب منه جمع الكتب اليونانية وترجمتها، فاستفاد الخوارزمي من الكتب التي كانت متوافرة في مكتبة الخليفة، إذ درس الرياضيات والجغرافية والفلك والتاريخ، كما كان محيطاً بالمعارف اليونانية والهندية، ونشر كل أعماله بالعربية التي كانت لغة العلم آنذاك، وقد ترك الخوارزمي بعد وفاته العديد من المؤلفات في علوم الفلك والجغرافيا.



كان ظهور هذا العلم تحولاً ثورياً عن المفهوم الإغريقي للرياضيات الذي قام أساساً على علم الهندسة . جاء علم الجبر بوصفه نظرية توحيدية أتاحت لنا أن نعامل الأرقام الطبيعية والأرقام الصماء والأحجام الهندسية كلها على أنها «كميات جبرية»، ووفّر الجبر للرياضيات بعداً جديداً ومسارَ تطورٍ جديداً أوسع مفهوماً بكثير من ذي قبل، كما فتح الباب لتطور مستقبلي. ومن المظاهر المهمة الأخرى لإدخال الوسائل الجبرية أنها أتاحت لعلم الرياضيات أن يُطبّق بطريقة لم تكن ممكنة سابقاً .

كان ظهور كتاب الخوارزمي في بداية القرن التاسع - ما بين ٨١٣ و ٨٣٠م - حدثاً مميزاً في تاريخ الرياضيات. فللمرة الأولى تظهر كلمة «الجبر» في عنوان، وذلك للدلالة على مادة رياضية متميزة تمتلك تعابيرها التقنية الخاصة. عن هذا الكتاب يقول المؤلف نفسه، محمد بن موسى الخوارزمي، الرياضي والفلكي والعضو المرموق من أعضاء بيت الحكمة في بغداد: ألفت من حساب الجبر والمقابلة كتاباً مختصراً حاصراً للطيف الحساب وجليله.



الصفحة الأولى من كتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة، للخوارزمي.

إنه لحدث عظيم باعتراف مؤرخي الرياضيات، القدامى منهم والمحدثون، ولم تخف أهمية هذا الحدث على رياضيي ذلك القرن أو القرون التي تلتها. وما انفك كتاب الخوارزمي هذا يشكل مصدر إلهام، لا للرياضيين بالعربية والفارسية فحسب، إنما أيضاً باللغة اللاتينية وبلغات أوروبا الغربية، حتى القرن الثامن عشر للميلاد.

كان هدف الخوارزمي واضحاً، ويتلخص هذا الهدف بإنشاء نظرية معادلات قابلة للحل بواسطة الجذور، يمكن أن تُرجع إليها مسائل علمي الحساب والهندسة على السواء، وبالتالي يمكن استخدامها في مسائل الاحتسابات والتبادلات التجارية ومسائل الإرث ومسح الأراضي... إلخ. يستهل الخوارزمي القسم الأول من كتابه بتحديد ما نسميه اليوم «التعابير الأولية» لنظريته؛ هذه النظرية اقتصرت على معالجة المعادلات من الدرجة الأولى والثانية وذلك انسجماً مع متطلبات الحل بواسطة الجذور ومع مستوى معارفه في هذا المجال. وهذه التعابير الأولية كانت: المجهول الذي سماه «الجذر» أو «الشيء» ومربع المجهول والأعداد العقلانية (المنطقية) الموجبة والقوانين الحسابية (جمع وطرح وضرب وقسمة وجذر تربيعي وعلاقة المساواة). ومن ثم أدخل الخوارزمي مفاهيم: معادلة الدرجة الأولى، ومعادلة الدرجة الثانية وثنائيات الحدود وثلاثياتها الملازمة لهذه المعادلات والشكل المنتظم للمعادلة والحلول الطرائقية (الخوارزميات) (التي اشتق اسمها بالإنجليزية «Algorithms» من اسم الخوارزمي) وبرهان صيغة الحل. ويظهر مفهوم المعادلة في كتاب الخوارزمي للدلالة على فئة لا نهائية من المسائل، لا كما يظهر مثلاً عند البابليين في مجرى حل هذه أو تلك من المسائل. كانت

لإسهامات الخوارزمي تأثيرها على اللغة، فدخل مصطلح الجبر واللوغاريتمات والـ (ziro) كل اللغات، والمثبت أنه في القرن الـ ١٢ الميلادي انتشرت أعمال الخوارزمي في أوروبا من خلال الترجمات اللاتينية التي كان لها تأثير كبير على تقدم الرياضيات فيها. وظهرت عبقرية "الخوارزمي" في "الزيج" أو الجدول الفلكي الذي صنعه وأطلق عليه اسم "السند هند الصغير"، وقد جامع فيه بين مذهب الهند، ومذهب الفرس، ومذهب بطليموس (مصر)، فاستحسنه أهل زمانه ذلك وانتفعوا به مدة طويلة فذاعت شهرته وصار لهذا الزيج أثر كبير في الشرق والغرب. وقد نقل الغرب العلوم الرياضية عن العرب وطوروها. وعرف حساب أباكوس. Abacus: أو أباكس. (لوحة العد). وهي عبارة عن أطار وضعت به كرات للعد اليدوي. وكانت هذه اللوحة يستعملها الأغريق والمصريون والرومان وبعض البلدان الأوربية قبل وصول الحساب العربي إلى أوروبا في القرن الثالث عشر. وكان يجري من خلال لوحة العد الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة. كما كان ابن الهيثم هو أول من استخرج الصيغة العامة لمجموع المتوالية الحسابية من الدرجة (رياضيات) الرابعة في علم الرياضيات.

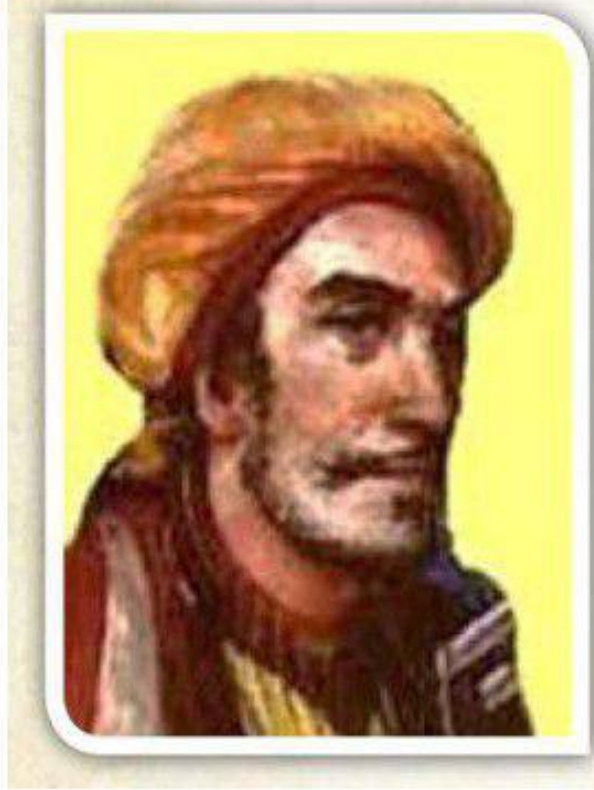
من ناحية ثانية توصل الرياضيون العرب إلى طرائق ميسره لإجراء شتى العمليات الحسابية، فاستخدموا في القسمة والضرب طرائق عدة يكاد بعضها يطابق ما هو مستخدم اليوم، وفي الضرب ابتكروا طرائق مختلفة تشوب بعضها الطرافة، أطلقوا عليها اسم رياضيات التسلية عند العرب ومعظم كتب الحساب التطبيقية زاخرة بالأمثلة والتمارين الرياضية التي كانت تتناول مسائل واقعية كان معمولاً بها آنذاك.

وقد تفوق علماء الرياضيات المسلمون في القرن العاشر بحقل آخر، فكان ابن الهيثم أول من حاول تصنيف الأعداد الزوجية الكاملة (وهي الأعداد المساوية لمجموع قواسمها)، مثل ٢ ص حيث إن ٢ ص هو عدد أولي لا يقبل القسمة من غير باقي إلا على نفسه. كما كان ابن الهيثم أول من بسط وصاغ ما سمي بمبرهنة ويلسون، وهي أنه إذا كان "ق" عدداً أولياً فإن المتعدد الحدود ١ + (ق-١)! ينقسم على ق، ولم يُعرف بوضوح فيما إذا كان يعرف كيف يبرهن على هذه النتيجة. وسميت مبرهنة ويلسون نسبة إلى جون ويلسون، عالم الرياضيات من جامعة كامبريدج الذي وضعها عام ١٧٧٠م، وهنا أيضاً لا ندري إن كان ويلسون قد استطاع البرهنة عليها، أم كانت لديه مجرد تخمين. وبعد سنة وضع عالم رياضي يدعى جوزيف لوي لاغرانج أول برهان لهذه النظرية، وذلك بعد سبع مائة وخمسين سنة من اكتشافها الأول.

وعلى صعيد المتواليات الحسابية والهندسية بأنواعها فقد عرفها العلماء العرب، فذكروا قوانين خاصة لجمعها، وبنوا قواعد لاستخراج الجذور ولجمع المربعات المتوالية والمكعبات، وبرهنوا على صحتها.

حاول الجبريون "الحسابيون" حل المعادلات بواسطة الجذور وأرادوا تبرير خوارزميات حلولهم، وقد نجد أحياناً عند بعضهم (مثل أبي كامل) تبريرين، أحدهما هندسي والآخر جبري. وفيما يتعلق بالمعادلة التكعيبية، لم يكن ينقصهم الحل بواسطة الجذور فحسب، إنما أيضاً تبرير الخوارزمية المتبعة، وذلك لتعذر بناء الحل بواسطة المسطرة والفرجار. ولقد وعى رياضيو ذلك التقليد تماماً هذا الواقع، فكتب أحدهم في العام ١١٨٥م وذلك لأن المجهول الذي يُحتاج إلى استخراجه ومعرفته في كل واحد من هذه المقترنات هو ضلع المكعب المذكور فيها ويؤدي تحليله إلى إضافة مجسم متوازي السطوح معلوم إلى خط معلوم يزيد على تمامه أو ينقص مكعباً ولا يتركب ذلك إلا باستعمال القطوع المخروطية.

واللجوء الصريح إلى القطوع المخروطية، بهدف حل المعادلات التكعيبية، قد تبع، من دون إبطاء، الترجمات الجبرية الأولى للمسائل المجسمة. ولم تتأخر بعد ذلك كتابة المسائل المجسمة الأخرى، مثل تثليث الزاوية ومسألة المتوسطين، وخاصة مسألة المسبع المنتظم، بواسطة تعابير جبرية. لكن الصعوبات التي تقدم ذكرها بما فيها حل معادلة الدرجة الثالثة بواسطة الجذور، حذت بالرياضيين من أمثال أبي جعفر الخازن، وهو أول عالم حل المعادلات التكعيبية هندسياً بواسطة قطوع المخروط، وأنه بحث في المثلثات على أنواعها فسبق بذلك بيكر وديكارت في كتابه (شكل القطوع)، ودرس في الحساب مسائل العدد، كما ألف كتاباً في (حساب المثلثات)، وحل بعض المسائل الخاصة بحساب المتوازيات، وللخازن العديد من المؤلفات غير تلك التي ذكرناها، من بينها (المسائل العددية)، (الآلات العجيبة الرصدية)، (شكل القطوع)، (السما والارض)، (زيج الصفائح)، (الأبعاد والأجرام)، (شرح كتاب تفسير المجسطي)، (شرح المقالة العاشرة من كتاب الأصول لإقليدس).



وكذلك منصور بن عراق الذي عمد إلى ترجمة حل المعادلات التكعيبية إلى لغة الهندسة، فإذا بها تتحول إلى مسألة يستطيع أن يطبق في دراستها تقنية درج استخدامها في عصره في معالجة المسائل المجسمة وهي تقنية القطوع المخروطية. وهنا بالتحديد يكمن السبب الأساسي فيما نسميه "هندسة" نظرية المعادلات الجبرية (أي تحويلها إلى مسائل هندسية).

علم المثلثات عند العرب:

عرف علم المثلثات عند العرب باسم علم الأنساب، وقد أطلق عليه هذا الاسم لأنه يقوم على استخراج الأوجه المتعددة الناشئة عن النسبة بين أضلاع المثلث، ويعد هذا الفرع من الرياضيات علما عربيا مثل الجبر، حيث يعود الفضل للعرب في وضعه مستقلاً عن الفلك، ولعل من أبرز ما أضافه الرياضيون العرب والمسلمون إلى علم المثلثات؛ استعمالهم الجيب بدلا من وتر ضعف القوس في قياس الزوايا، الأمر الذي أدى إلى تسهيل حل الكثير من المسائل الرياضية، كما استنبط الرياضيون العرب الظل في قياس الزاوية المفروضة بالضلع المقابل لها مقسوم على الضلع المجاور.



رسم تخيلي للبيروني على طابع للاتحاد السوفيتي من عام ١٩٧٣م.

تكمّن ولادة علم المثلثات ضمن علم الفلك، الذي يعد واحداً من العلوم التي درسها المسلمون باهتمام بالغ لصلته بتحديد أوقات الصلاة والشعائر الدينية. ولكن علماء الفلك الإغريق كانوا قبل المسلمين يحسبون أضلاع مثلث ما وزواياه المجهولة بافتراض معرفة قيمة الأضلاع والزوايا الأخرى، وذلك من أجل معرفة حركة الشمس والقمر والكواكب الخمسة المعروفة حينذاك. اعتمد الفلكيون الأقدمون لحل مسائل علم المثلثات المستوية كلها على جدول موحد في كتاب بطليموس (المجسطي أو الأعظم) اسمه "جدول الأوتار في الدائرة"، أما الأقواس التي تحصر الزوايا بزيادات من نصف درجة حتى ١٨٠ درجة، فإن الجدول يفيد في إعطائها أطوال الأوتار المقابلة لها في دائرة نصف قطرها ستون وحدة .

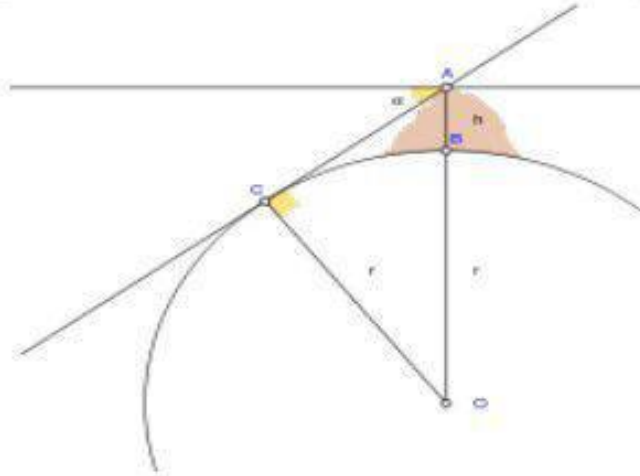


مخطوطة "سلم السماء" لغياث الدين الكاشي باللغة العربية، وهي تبحث فيما يتعلق بأبعاد الأجرام اعتماداً على علم المثلثات.

يشرح الطوسي، من علماء القرن الثالث عشر، في كتابه "شكل القطاع"، كيف استُخدمت قائمة أطوال الأوتار هذه لحل المسائل المتعلقة بالمثلثات قائمة الزاوية،



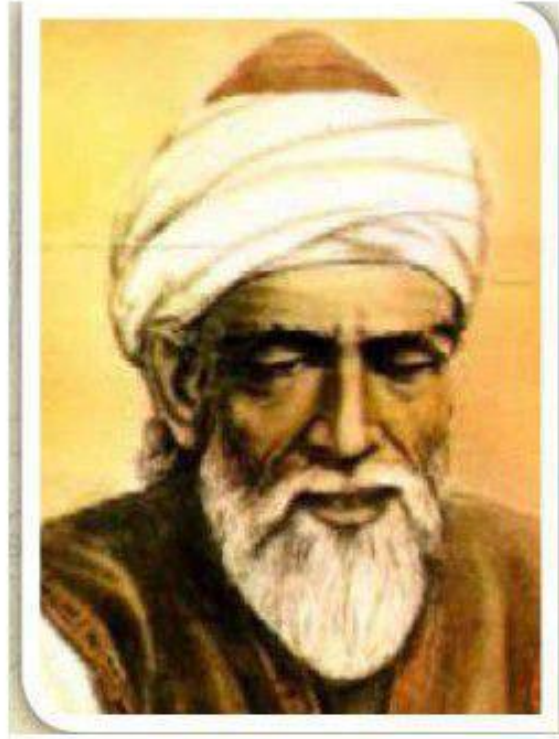
وقد أبدى الطوسي ملاحظة حاسمة، وطدت الرابطة بين المثلثات وأقواس الدوائر، وهي: كل مثلث يمكن أن يحصر بدائرة؛ ولذلك فإنه ينظر إلى أضلاعه بوصفها أوتاراً تقابل أقواساً مقابلة لزوايا المثلث. لكنَّ عيبين ظهرا في الاعتماد على هذه الجداول: العيب الأول أن جل التحويلات التي يمكن أن تنشأ عند حل أطوال مجهولة أو زوايا مثلث قائم الزاوية، تتطلب معالجات كثيرة للجداول وخطوات وسيطة متعددة؛ وهذا مناقض لاستخدام الدلالات المثلثاتية المألوفة الست، وهي: الجيب، والتجيب جيب التمام، والزوايا المتبادلة، وقاطع الزاوية وقاطع تمام الزاوية - والظل وظل التمام - المميزة للتقنيات الحديثة التي ابتكرها ورتبها بطريقة منتظمة أول مرة علماء الرياضيات المسلمون. وأما العيب الثاني لجداول أطوال أوتار الدائرة فهو أنه لا بدَّ من مضاعفة الزوايا في غالب الأحيان لحساب طول قوس ما. ترك الطوسي عدة مؤلفات من بينها (الجبر والمقابلة)، (رسالة في الخطين الذين يقربان ولا يلتقيان)، (المعادلات).



حساب أبي الريحان البيروني لمحيط الأرض.

والواقع أن سلسلة من العلماء المسلمين كانوا قد أرسوا قواعد علم المثلثات قبل القرن العاشر، ممهدين بذلك الطريق للطوسي كي يجمع إسهاماتهم وينظمها ويفصل فيها. ومن أبرز هؤلاء الأعلام وأكثرهم تأثيراً محمد بن جابر بن سنان البتاني المولود في حرّان شمال شرق سورية اليوم، والمتوفى في سامراء بالعراق عام ٩٢٩م، ويعد واحداً من أعظم علماء الفلك والرياضيات المسلمين، ومما حفزه على ريادة دراسة علم المثلثات مراقبته حركات الكواكب. والمسألة الأهم هي أن البتاني شرح عملياته الرياضية، وحث الآخرين على متابعة المراقبة والبحث من أجل إتمام عمله وتوسيعه، كما طور هو وأبو الوفاء البوزجاني، وابن يونس المصري، وابن الهيثم، علم المثلثات الكروي وطبقوه على حل المسائل الفلكية. وكان البتاني أول من استخدم مصطلحي "جيب" و"جيب التمام" معرّفاً إياهما بوصفهما أطوالاً بدلاً من نسب كما نعرفهما اليوم، أما الظل فقد أشار إليه البتاني بعبارة "الظل الممدود"، أي ظل قضيب أفقي وهمي مركب على جدار. وفي القرن الحادي عشر عرّف البيروني الدالات المثلثاتية للظل وظل التمام التي ورثها عن الهنود بصورة تجريبية. ومن الجدير بالذكر أن كلمة "جيب الزاوية" العربية (وهي نسبة الضلع المقابل للزاوية القائمة مقسوماً على وتر المثلث قائم الزاوية) تعني بالعربية أيضاً "فجوة" أو "تجويف" أو "جيب" (بالمعنى التشريحي) ووجد هذا المصطلح طريقه إلى اللاتينية (Sinus) وإلى الإنجليزية (Sine). كان الخوارزمي المولود عام ٧٨٠م قد طور الجيب وجيب التمام والجداول المثلثاتية، والتي ترجمت فيما بعد إلى اللغات الأوروبية. أما العالم الفذ البيروني المولود عام ٩٧٣م، فكان من بين أولئك الذين أرسوا أسس علم المثلثات الحديث.

وينبغي ذكر بعض الإنجازات المميزة الأخرى التي حققها العلماء المسلمون في حقل علم المثلثات وكذلك تطبيقات البيروني في قياس محيط الأرض، ومما يُذكر أن الطوسي وضع قانون الجيب معتمداً على أفكار هندسية بدائية واستخدمها بذكاء، ثم تابع ليطبق القانون في حل أنواع المسائل كلها بطريقة منتظمة.



أما أبو الوفاء البوزجاني فقد برهن على نظرية الإضافة المألوفة للجيب التي تعد أكثر كفاءة ودقة إذا ما قورنت بنظرية أطوال الأوتار في كتاب "المجسطي". "كان من المهم قبل ظهور الحواسيب وضع جداول دقيقة للدالات الأساسية للقيم المتباعدة بانتظام لإراحة الزاوية للدالات؛ فقد كان مطلوباً: أولاً، أن تتوفر طريقة موجزة جداً لحساب جيب درجة واحدة، وأن تتوفر ثانياً قوانين استكمال مبنية على الجداول. كانت هاتان القضيتان موضع تدقيق نقدي عند عدد من العلماء المسلمين أمثال البيروني وابن يونس والكاشي، وهذا الأخير استخدم لكي يحصل على تقريب جيب الدرجة الواحدة إجراء يُعرف باللغة الحديثة بالأسلوب التكراري. إن ظهور الدالات المثلثاتية واستخدامها في الرياضيات أدى إلى تنوير العلوم الرياضية، وأصبح بالإمكان الآن إضافة علم المثلثات إلى قائمة حقول المعرفة الأساسية التي أتقنها المسلمون ومن ثم أوصلوها إلى أوروبا بطرق شتى.

اخترع العرب حساب الأقواس التي كان من فوائدها تسهيل قوانين التقويم، والتخفيف من استخراج الجذور المربعة، كما كشفوا بعض العلاقات الكائنة بين الجيب والمماس والقاطع ونظائرها، وتوصلوا أيضاً إلى معرفة القاعدة الأساسية لمساحة المثلثات الكروية، والمثلثات الكروية المائلة الزاوية، ويعتبر استعمال العرب المماسات والقاطعات ونظائرها في قياس الزوايا والمثلثات نقلة هائلة في تطور العلوم، لأنه سهل كثيراً من المسائل الرياضية المعقدة.

الهندسة الرياضية:

أصل المصطلح فارسي (أندازة) ثم تم تعريبه إلى هندسة، والمعروف أن العرب اهتموا بهذا العلم، وبنوا فيه على ما نقلوه من اليونان، حيث كان أهم مرجع لديهم كتاب إقليدس الذي ترجم ثلاث مرات على يد كل من حنين بن إسحاق، وثابت بن قره، ويوسف بن الحجاج تحت عنوان (الأصول ف وكتاب إقليدس)، ثم اختصره عدة علماء من بينهم ابن سينا وابن الصلت، وفي مرحلة أخرى ألف العرب على نسقه، وأضافوا عليه كما فعل ابن الهيثم والكندي ومحمد البغدادي.

تعود الآثار الهندسية الأولى المكتوبة بالعربية إلى أواخر القرن الثامن وأوائل القرن التاسع للميلاد؛ واللغة العربية التي اعتمدها، بشكل عام، علماء البلاد الإسلامية منذ انطلاق نشاطاتهم، كانت أداة التعبير في علم الهندسة. وهذه الكتابات تؤكد بشكل مقنع أن التقاليد القديمة: التقليد الإغريقي والهلينستي والتقليد الهندي - الذي أتبع أيضاً وجزئياً التقليد الإغريقي - أثرت بشكل هام في الهندسة وفي فروع رياضية أخرى كما في العلوم الدقيقة بشكل عام.

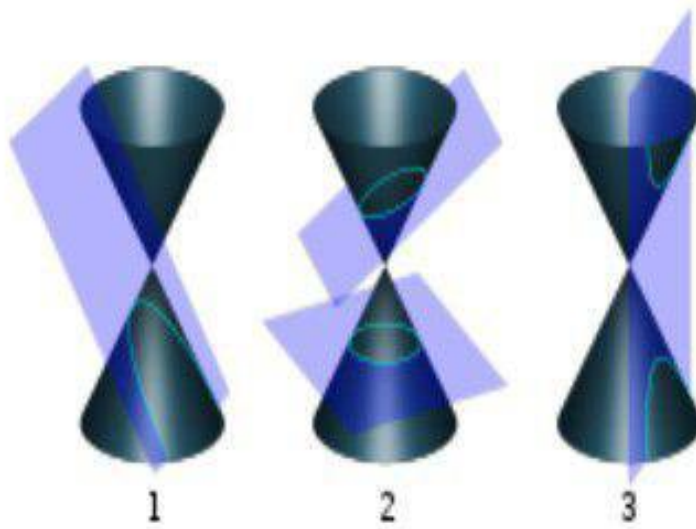
وعلى الرغم من أهمية هذا التأثير فإن الهندسة الإسلامية اكتسبت، ومنذ المراحل الأولى لنموها، خصائصها المميزة التي تتعلق بموقعها في نظام العلوم الرياضية، وبتربطها مع سائر فروع الرياضيات - على الأخص مع الجبر - وبتفسيرها للمسائل المعروفة وبطرحها للمسائل الجديدة كلياً. فبدمجهم لعناصر الإرث الإغريقي وباستيعابهم لمعارف أمم أخرى أرسى العلماء المسلمون أسس توجهات جديدة للأفكار الهندسية وأغنوا بفكرهم الخاص المفاهيم التي اعتمدوا، فإذا بهم يخلقون نوعاً جديداً من الهندسة ومن الرياضيات عامة.

وبما أن العرب حينذاك كانوا يميلون إلى الجانب التطبيقي في تناولهم المعارف أكثر من الجانب النظري، فقد خرجوا بالهندسة النظرية اليونانية إلى المجال العملي التطبيقي، وقسموا الهندسة إلى قسمين: عقلية وحسية؛ فالعقلية هي النظرية التي أحقوها بالفلسفة، والتي لا يعمل بها إلا الحكماء الراسخون في الرياضيات البحتة، وأبدع فيها علماء اليونان، في حين برع العرب في الهندسة الحسية التطبيقية التي ظهرت إبداعاتهم فيها من خلال فن العمارة.

اشتهر المسلمون بالتصاميم الهندسية المعقدة والأنيقة، كانوا يزينون بها مبانيهم التاريخية، وما كان لهذه التصاميم العجيبة أن تظهر لولا القفزات التي حققوها في علم الهندسة وفي قياس النقاط والخطوط والزوايا والأشكال ذات البعدين وذات الأبعاد الثلاثة بخصائصها وعلاقاتها. ورث العلماء المسلمون الهندسة عن الإغريق الذين أولوها اهتماماً كبيراً فطوروها ووسعوها، ولقد عرض إقليدس علم الهندسة على نحو موسع جداً في كتابه "الأصول"، وعلماء الرياضيات يعدون هذا العلم قد نشأ من كتاب إقليدس. وقد اعتمدت أبحاث المسلمين الهندسية، في ما اعتمدت، على ثلاثة مصادر إغريقية مهمة: الأول كتاب "الأصول" لإقليدس الذي ترجم في بيت الحكمة ببغداد، والثاني "الكرة والأسطوانة" و"المستع في الدائرة"، وهما لأرخميدس، وقد وصلا إلينا عن العربية بترجمة ثابت بن قرة، إذ ضاعت النسخة الإغريقية. أما المصدر الثالث فكتاب أبلونيوس البرغاوي "المخروطات" الذي ظهر في ثمانية كتب عام ٢٠٠ ق.م تقريباً، بقي منها باللغة الإغريقية أربعة، في حين وصلنا منها سبعة بالعربية.

ومن الأمور التي عرفها الرياضيون العرب كذلك علم تسطيح الكرة الذي مكنهم من نقل الخرائط من سطح الكرة إلى السطح المستوي، ومن السطح المستوي إلى السطح الكروي، وللعرب مصنفات في هذا الفرع من الهندسة، مثل كتاب (تسطيح الكرة) لبطليموس، و(الكامل)، و(الاستيعاب)، و(دستور الترجيح في قواعد التسطيح). كما ألف العرب مصنفات كثيرة في المسائل الهندسية، وفي التحليل والتركيب الهندسي، وفي موضوعات متصلة بذلك مثل تقسيم الزاوية، ورسم المضلعات المنتظمة وربطها بمعادلات جبرية، أما المساحات فقد تناولوها في ثلث المصنفات الرياضية باعتبارها فرعاً من الهندسة.

دراسة القطوع المخروطية عند العرب :



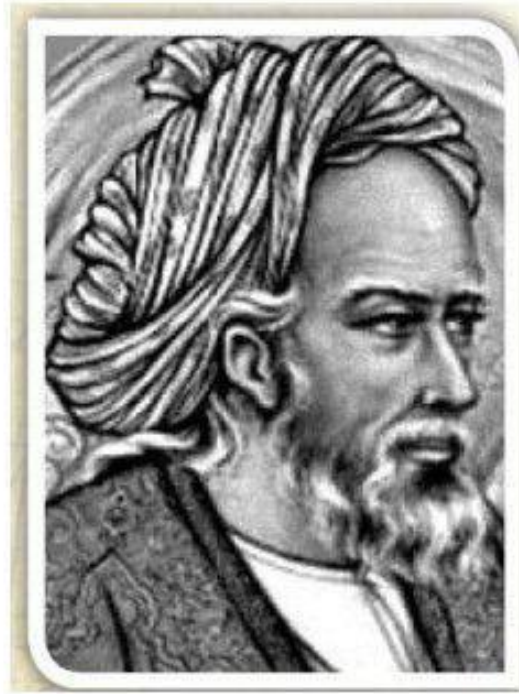
أنواع القطوع المخروطية (بالترتيب): القطع المكافئ، والقطع الناقص، والقطع الزائد.

لقد اندمجت أغلب الهندسات الإغريقية والإسلامية فكونت نظرية القطوع المخروطية التي استُخدمت في المنشآت الهندسية وتصاميم المرايا لتركيز الضوء وفق نظرية الساعات الشمسية. يتشكل سطح المخروط الصلب المزدوج بسبب خطوط مستقيمة (مولدات) تنتشعب من محيط الدائرة التي تسمى القاعدة وتمر في نقطة ثابتة تدل على الذروة (رأس المخروط) التي لا تقع في مستوى القاعدة، وتولد القطوع المخروطية من قطع المخروط المزدوج بمستويات تقطع المولدات، أما شكل القطع المستوي الذي يبقى فيتحدد بالزاوية التي تتشكل بين المستوي والمولدات. قال أبلونيوس: يمكن توليد ثلاثة قطوع مخروطية، ما خلا الدائرة، وهي: القطع الناقص والقطع المكافئ والقطع الزائد.

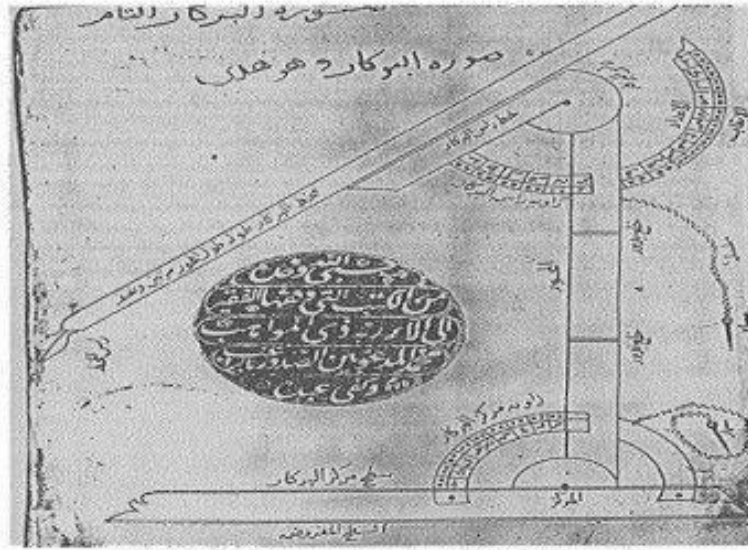


مخطوطة عربية تعود إلى القرن التاسع الميلادي، وهي ترجمة لكتاب أبلونيوس "المخروطات".

استخدم أبو سهل القوهي) نسبة إلى قوه في جبال طبرستان، توفي عام ١٠١٤م) نظرية القطوع المخروطية لتطوير إجراء مشهور لإنشاء مضلع منتظم ذي سبعة أضلاع هو المُسَبَّع (الشكل السباعي). كان أبو سهل القوهي واحداً من مجموعة علماء موهوبين اجتمعوا من مختلف أنحاء القطاع الشرقي للعالم الإسلامي برعاية أعيان الأسرة البويهية صاحبة النفوذ في بغداد .



جاء أبو سهل من المنطقة الجبلية جنوب بحر قزوين لتسليّة الناس في سوق بغداد بلعبة القوارير الزجاجية، ثم تحول إلى دراسة العلوم، فاهتم بأعمال أرخميدس، وكتب تعليقاً على الكتاب الثاني لـ"الكرة والأسطوانة"، وتركز اهتمامه الأساسي على القطوع المخروطية واستخداماتها في حل المسائل المتعلقة بإنشاء موضوعات هندسية معقدة، فبيّن، على سبيل المثال، كيف يمكن بواسطة القطوع المخروطية، إنشاء كرة ذات قطاع مماثل لقطاع دائرة معينة له مساحة سطح تساوي قطاع دائرة أخرى، كما شرح بالتفصيل كيف يمكن استخدام أداة لرسم قطوع مخروطية تُعرف باسم "الفرجار الكامل".



Kutub al-Qadim al-Andalus, MS Istanbul, Raghibi Pasha 569, fol. 235v.

نقش لبوصلة أبي سهل القوهي المثالية لرسم القطوع المخروطية.

بيد أن أبا سهل القوهي وضع نصب عينيه طموحات أعظم؛ فقدّم تعليمات مفصلة لإنشاء الشكل السباعي المنتظم. كان أرخميدس قد قدّم برهاناً يتعلق بالمسبّع المنتظم الموضوع داخل دائرة ويوحى برهانه بإمكان إنشاء الشكل السباعي، إلا أنه لم يُقدّم الإجراء الفعلي. كان ذلك شائعاً في عالم الرياضيات المجردة، ومن الصعب اشتقاق إجراء تدريجي بين الفينة والأخرى لإنشاء موضوعات رياضية معينة. وفي مثل تلك الحالات، كان العلماء يشغلون أنفسهم بالتأكيد - ولو قليلاً - على وجود إجراء كهذا، تاركين اكتشاف الإجراء التفصيلي للآخرين. وعلى الرغم من أن أرخميدس برهن على وجود المسبّع، فإن كبار علماء الرياضيات الإغريق والمسلمين لم يستطيعوا إنشاءه فعلياً حتى قال أبو الجود، أحد علماء المسلمين في القرن العاشر: «ربما كان تنفيذ إنشائه أكثر صعوبة، وبرهانه أبعد من أن يكون مقدمة لذلك»، فكانت تلك الملاحظة تحدياً لأبي سهل القوهي الذي استطاع بفضل معالجة رشيقة أن يقلّص المسألة إلى ثلاث خطوات، ويبيّن أنها إذا عكست أدت إلى إنشاء الشكل السباعي. بدأ أولاً بإنشاء قطع مخروطي على طول ضلع المسبّع، ثم ولّد قطاعاً خطياً مقطوعاً وفق نسب معينة، ومن هذا القطاع، أنشأ مثلثاً ذا خصائص معينة، وأخيراً أنتج المسبّع من المثلث المنشأ. واشتهر أبو سهل القوهي أيضاً باكتشافه لأسلوب تقسيم زاوية معينة إلى ثلاثة أقسام متساوية. عالم معاصر له هو عبد الجليل السجزي أشار إلى هذا الاكتشاف، ووصفه بقوله: "قضية أبي سهل القوهي المساعدة" واستخدمها في إنشاء مضلع ذي تسعة أضلاع، أي "التساعي".

ومن المؤلفات التي تركها القوهي (مراكز الأكر)، (الأصول على تحريكات إقليدس)، (صناعة الإسطرلاب بالبراهين)، (الزيادات على أرشميدس في المقالة الثانية)، (إخراج الخطين من نقطة على زاوية معلومة)، (تثليث الزاوية وعمل المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة)، غير أن معظم مؤلفات هذا العالم لم يعرف عنها إلا القليل من بعض الإشارات في المراجع اللاتينية.

كان صانعو الأدوات بحاجة إلى القطوع المخروطية لحفرها على سطوح الساعات الشمسية، وكان الإغريق يعلمون «أن الشمس تسير في مسارها الدائري عبر السماء في أثناء النهار، فتمر إشعاعاتها فوق رأس قضيب شاقولي مغروز في الأرض، فتشكل مخروطاً مزدوجاً، وبما أن مستوى الأفق يقطع جزئي المخروط فإن مقطع المخروط مع مستوى الأفق لا بد أن يكون قطعاً زائداً»، فحفز ذلك ميول إبراهيم بن سنان، حفيد ثابت بن قرة، فأجرى دراسة للموضوع، لكن حياته انتهت مبكراً بسبب ورم في كبده أدى إلى وفاته عام ٩٤٦م وهو في السابعة والثلاثين من عمره، ومع ذلك فقد «أكدت أعماله الباقية شهرته ليكون شخصية مهمة في تاريخ الرياضيات» كما يقول مؤرخ العلوم المعاصر ج. ل. بيرجرين الذي لخص إنجازات إبراهيم بن سنان على النحو الآتي:

إن معالجته لمساحة قطاع من القطع الزائد أبسط من كل ما جاءنا منذ ما قبل عصر النهضة، ففي عمله المتعلق بالساعات الشمسية يعالج تصميم أنواع المزاوِل (الساعات الشمسية) المحتملة وفق إجراء واحد موحد، يمثل هجوماً على الإشكالات التي لم ينجح بها أسلافه في غالب الأحيان. ولابن سنان كتاب في حركة الشمس، ومقالات ورسائل في الفلك، ومؤلفات في الرياضيات من أهمها: (رسالة في الهندسة والنجوم)، (رسالة في المعاني المستخرجة من علم الهندسة وعلم النجوم)، (أصول الهندسة)، (مساحة القطع المكافئ).

كان المهندسون المسلمون مهتمين بإبراز الأهلية في مهنة الفنانين واستكشاف فنهم بما يقومون به من تصاميم هندسية قد تزين المرافق العامة كالمساجد والقصور ودور الكتب؛ فأبو نصر الفارابي (المتوفى عام ٩٥٠م) المشهور بالفلسفة والموسيقى وتعليقاته على أرسطو، كتب مقالة في الإنشاءات الهندسية من وسائل ذات قيود متنوعة ووضع له عنواناً غريباً نوعاً ما هو "الأسرار الطبيعية في دقائق الأشكال الهندسية"، وعندما توفي أدخل أبو الوفاء البوزجاني مقالة الفارابي في كتابه "كتاب فيما يحتاج إليه الصناع في أعمال الهندسة" وقدم تفاصيل إنشائية وتعليقات كاملة. إن المسائل التي ركز أبو الوفاء اهتمامه بها شملت مسألة إنشاء عمود على قطاع مفترض وعلى طرفيه؛ مُقسماً القطاع الخطي

إلى أي عدد من الأقسام المتساوية، وإنشاء مربع ضمن دائرة معينة ومضلعات منتظمة متنوعة (ذات ٣، ٤، ٥، ٦، ٨، ١٠ أضلاع)، وكانت هذه الإنشاءات كلها تتم فقط بحافة مستقيمة وفرجار ذي فتحة مثبتة واحدة .

تأليف فلسفة وتاريخ الرياضيات

« علم المنصة »

١١ ما المقصود بعلم الرياضيات ؟

١٢ أذكر الفرعين الرئيسيين في الرياضيات وما أهميتهما ؟

١٣ كيف نشأ علم الرياضيات ؟

١٤ أذكر أعظم وانجاز قادم به البابليون في مجال الرياضيات ؟

١٥ ما هو النظام الذي استخدمه المصريون القدماء في مجال الرياضيات ؟

١٦ أكتب الأعداد الآتية بالطريقة الفرعونية
« 15 ، 231 ، 4622 » ؟

١٧ اوجد حاصل الضرب بالطريقة الفرعونية « 18×13 » ؟

١٨ ما هي اسهامات علماء الأفريق في مجال الرياضيات أذكر خمس علماء منهم واسهاماتهم ؟

١٩١ اذكر اسهامات العرب في فروع الرياضيات الآتية :

- ① حساب المثلثات
 - ② الجبر
 - ③ القطوع الفلجية
- ← مع ذكر علماء هذه المجالات