

الفصل الثالث

الرياضيات عند الإغريق

مع بداية توسُّع إمبراطورية الإغريق باتجاه آسيا الصغرى وبلاد ما بين النهرين وما بعدها، كان الإغريق أذكياء كفاية ليقبلوا ويتبنوا العناصر المفيدة من المجتمعات التي اجتاحتها. وقد تحقَّق هذا مع الرياضيات عندهم بالضبط كما تحقَّق مع أي شيء آخر، حيث تبَّنوا استخدام بعض العناصر الرياضية من البابليين والمصريين. ولكن سرعان ما قدَّموا إسهاماتهم الهامة، ولأول مرة يمكن أن تُنسب تلك الإسهامات لأشخاص محددين. وبطول العصر الهلنستي، كان الإغريق قد قدَّموا بالفعل ما يمكن اعتباره أكبر ثورة في مجال تطوُّر الرياضيات على مدار التاريخ حيث ساهم علماء الرياضيات في اليونان القديمة في العديد من مجالات التي أثرت في الفكر العالمي، فكانوا ماهرين في مجالات مختلفة، مثل الهندسة، وعلم الفلك، والتصميم، تأثراً بالمصريين في البداية، ثم واصلوا التقدم لتحقيق إنجازاتهم الخاصة، مثل نظرية فيثاغوس للمثلثات، كما قدمت حلولهم الأساسية للعديد من المشاكل الرياضية، والتي بنى عليها جميع علماء الرياضيات دراساتهم حتى وقتنا الحاضر.

بدايات الرياضيات عند الإغريق:

تزامنت بداية الحضارة الإغريقية مع وقت بناء الأهرامات في مصر، أي ٢٨٠٠ سنة قبل الميلاد، حيث استقر الإغريق في آسيا الصغرى، وتحديداً في منطقة اليونان الحديثة، بالإضافة إلى ذلك، ومنذ حوالي ٧٧٥ سنة قبل الميلاد بدأ الإغريق بتغيير الكتابة الهيروغليفية إلى الأبجدية الفينيقية، مما ساعدهم في تعلم القراءة والكتابة بشكل أكثر سهولة، وأصبحوا قادرين على التعبير عن أفكارهم النظرية.

بدأت العلوم الإغريقية بالظهور بعد أن ظهر التأثير المصري والبابلي في مدينة إيونيا في آسيا الصغرى، وكانت بداية الفلسفة والرياضيات، وقُسمت فترات العلوم الرياضية إلى فترتين رئيسيتين، وهما الفترة الكلاسيكية التي كانت من حوالي ٦٠٠ سنة قبل الميلاد، وامتدت حتى ٣٠٠ سنة قبل الميلاد، ثم بدأت الفترة الثانية والتي كانت من حوالي ٣٥٠ سنة قبل الميلاد، حين انتقل مركز العلوم الرياضية من أثينا إلى الإسكندرية في مصر، وهي المدينة التي بناها الإسكندر الأكبر.

الحساب عند الاغريق:

أُكتمل نظام الأرقام الإغريقية «اليونانية» والمعروف بالأرقام الهيرودية بحلول عام ٤٥٠ قبل الميلاد، وإن كان استخدامه بصورة منتظمة ربما يعود للقرن السابع قبل الميلاد.

Value	1	2	3	4	5	10	20	21	50	100	500	1,000
Greek Herodianic Numeral	I	II	III	IIII	V	X	XX	XXI	L	C	D	M

Example:
4,672 would be shown as: XXXXHHHHHHH^oΔΔII

وأعتمد النظام على الأساس ١٠ «النظام العشري» مماثلاً لنظيره المصري السابق «وإن كان أقرب للنظام الروماني»، حيث احتوى على رموز تُمَثِّل الأرقام ١، ٥، ١٠، ٥٠، ١٠٠، ٥٠٠، ١٠٠٠، يتم تكرارها بالعدد المناسب من المرات لتُعَبِّر عن العدد المطلوب.

I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M	⋈	↯	↰	↱	↲	↳
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1000	5000	10000	50000			

وتتم عملية الجمع بإضافة كل الرموز على جده «الأحاد والعشرات والمئات منفصلة»، بينما يُعتبر الضرب عملية مُعَقَّدة ومُرَهَقَة حيث يعتمد على المُضاعفة المتكررة وتتم القسمة بعكس العملية السابقة.

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ρ	ια	ιβ	ιγ	ιδ	ιε	ις	ιζ	ιη	ιθ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Ζ	Η	Θ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

وإذا حاولنا ان نزي كيف كان يحسب الاغريق تحديدا سنكتشف ان الاغريق كانوا يحسبون بطريقة عجيبة. فالإغريق كان الحساب عندهم يساوى الهندسة. ولم تكن ادواتهم في الحساب الورقة والقلم، بل المسطرة والفرجار. فهم كانوا يتخيلون الاعداد على انها خيط مرن او الزنبرك. فضرب عدد في ٢

يعنى عندهم استطالة هذا الزنبرك حتى يصبح ضعف طوله الأصلي. والقسمة على ٢ تعنى ضغط هذا الزنبرك حتى يصبح نصف طوله.

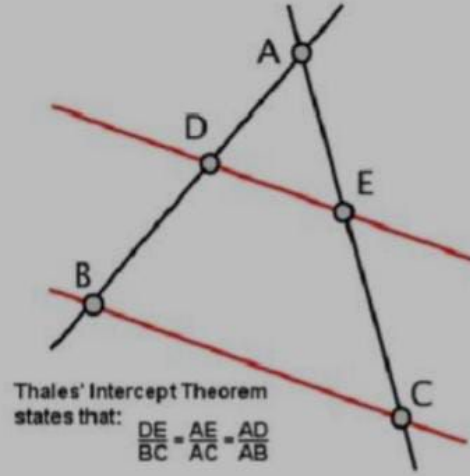
ولم يضع علماء الحساب اليونان رمزا للصفر رغم اخذهم عن البابليين في علم الفلك و التقويم و الجغرافيا النظام الستيني و الاثني عشر، و يرجع ذلك للتناقض مع قواعدهم المقررة للأعداد، اما الكسور فقد كانت تسبب لهم عناء كبيرا فهم لا يعرفون الا الكسور ذات البسط ١

ولقد كان اليونانيون يكتبون الارقام من اليسار الى اليمين. وكانوا ينظرون إليها نظرة تقديس ويرون أن لها خواص وأن لكل منها معنى. ووضعوا نظريات عن الأعداد وخصائصها وقسموها إلى زوجية وفردية وعرفوا شيئا من الأعداد التامة والناقصة والمتحابة وعرفوا كثيرا عن التناسب وكان بعض علمائهم يعتقدون أن لكل مسألة أو حقيقة في الحساب ما يقابلها في الهندسة، وأنه يمكن التعبير عنها وحلها هندسيا. لم يكن علم الجبر عند علماء الاغريق علما مستقلا كما هو الآن أو كما كان معروفا عند العرب، بل كانوا يعتبرونه جزاء من الحساب وبحثا من بحوثه. وقد عرفوا شيئا عن بعض المتطابقات في الجبر وبرهنوا عليها هندسيا. ونجد أيضا أن ديوفانتس قد أستعمل طرقا لجمع المساحات إلى الأطوال.

اشتهر ديوفانتس بكتابه علم الحساب الذي يعالج انماطا مختلفة من المسائل الجبرية ويحلها بطرق جبرية دون اللجوء الى الهندسة على غير عادة اليونانيين لكن دون ان يولي اهمية للقواعد العامة اذ يعطي حل محدد للمسألة المطروحة.

الهندسة عند الاغريق:

اشتغل اليونانيون بالهندسة فأقاموا لها البراهين العقلية والخطوات المنطقية فرتبوا نظرياتها وعملياتها أدخل الإغريق الاستنتاج المنطقي والبرهان، وأحرزوا بذلك تقدما مهما من أجل الوصول إلى بناء نظرية رياضية منظمة. ويرجع الفضل لتقدم الاغريق في الهندسة إلى طاليس.



Thales' Intercept Theorem

ويُعتبر طاليس وهو أحد الحكماء الإغريق السبعة، والذي عاش في ساحل آسيا الصغرى في القرن السادس قبل الميلاد، والذي كان تاجراً، مما زاد من اتصاله مع التجار والعلماء البابليين حتى تعلم الهندسة، وكانت له بعض النظريات في الرياضيات وهو أول من وضع أساسيات القواعد الهندسية، ومع ذلك فإنَّ كُلَّ ما نعرفه من أعماله «مثل عمله على المثلثات متساوية الساقين والقائمة» يبدو لنا بدائياً.

وقد أسس طاليس ما يُعرف باسم نظرية طاليس وهي تنصُّ على أنَّ أي مثلث مرسوم بداخل دائرة بحيث يكون الضلع الأطول هو قطر الدائرة فإنَّ الزاوية المقابلة له هي بالضرورة زاوية قائمة بالإضافة إلى بعض الخصائص الأخرى المُشتقة من تلك القاعدة.

كذلك تُنسب لطاليس نظرية أخرى أيضاً يُطلق عليها نظرية طاليس أو نظرية التقاطع، وهي تختص بالنسب بين أطوال أقسام الخطين المتقاطعين في نقطة عندما يقطعهما خطين متوازيين ويمكن تمديد النظرية لتشمل المثلثات المشابهة.

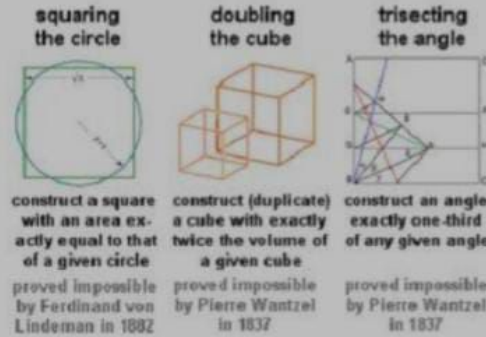
وأصبح أسطورة رياضيات القرن السادس قبل الميلاد فيثاغورث رمزًا للرياضيات الإغريقية. وبالتأكيد فهو أول من اخترع كلمة الفلسفة بمعنى حب الحكمة وكلمة الرياضيات بمعنى ما نتعلمه. وربما يكون فيثاغورث أول من أدرك أنه يمكن بناء نظام رياضي بالكامل، بحيث يمكن تمثيل العناصر الهندسية باستخدام الأرقام. وهو فيلسوف ورياضي إغريقي، عاش في القرن الـ ٦ ق.م، وإليه تنسب مبرهنة فيثاغورث وقد استفاد كثير من المهندسين في عصرنا هذا من تلك النظرية في عملية بناء الأراضي.

يقال ان فيثاغورث ولد في جزيرة ساموس على الساحل اليوناني، وفي مرحلة شبابه قام برحلة إلى بلاد ما بين النهرين، كما أقام في مصر، وبعد ٢٠ عاما من الترحال والدراسة تمكن من تعلم كل ما هو معروف في الرياضيات من مختلف حضارات ذلك الزمن، وفي حوالي ٥٢٣ ق.م، استقر في كرتوني بجنوب إيطاليا، وهناك تعرف على ميلان أحد أغنياء الجزيرة الذي كان مولعا بالفلسفة والرياضيات والرياضة، فساعد ميلان فيثاغورث، ومكنه من افتتاح مدرسة في جزء من بيته.

ومما يذكر عن فيثاغورث اهتمامه الكبير بالرياضيات، وخصوصا بالأرقام حيث قدس الرقم (١٠) لأنه يمثل بالنسبة إليه الكمال، كما اهتم بالموسيقى، ويعتقد فيثاغورث وتلاميذه أن كل شيء مرتبط بالرياضيات، وبالتالي يمكن التنبؤ بكل شيء وقياسه بشكل حلقات إيقاعية.



كان للعالم فيثاغورس وأعضاء مدرسته مقتنعون أن الكون يمكن وصفه بالأعداد الصحيحة، مثل ١، ٢، ٣، ٤ وهكذا، وذلك استناداً إلى المثل المعروف لدى المصريين، كما توصل فيثاغورس إلى نظرية رياضية تحمل اسمه، والتي كانت تنص على إذا تم جمع تربيع الضلعين الصغيرين الموجودين في مثلث القائم الزاوية، فستكون تساوي مساحة الضلع الأطول، أو الضلع المقابل للزاوية القائمة (الوتر) وتُعتبر نظرية فيثاغورث أحد أشهر النظريات الرياضيّة. ولكن تبقى نظرية فيثاغورث مثيرة للجدل. كذلك كانت دراسات الفيثاغوريين للقطع المكافئ، والقطع الزائد، والقطع الناقص هي التي مهدت السبيل إلى مؤلف أبولونيوس البرجي في القطاعات المخروطية، وهو المؤلف الذي كان عظيم الشأن في تاريخ العلوم الرياضية (٢). وفي عام ٤٤٠ ق.م. نشر أبقراط الطشيوزي (وهو غير أبقراط الطبيب) أول كتاب معروف في الهندسة النظرية وحل مشكلة تربيع المساحة الكائنة بين قوسين متقاطعين. وفي عام ٤٢٠ ق.م. أفلق هيبباس الإلياني في تقسيم الزاوية ثلاثة أقسام متساوية بالاستعانة بالمنحني.



The Three Classical Problems

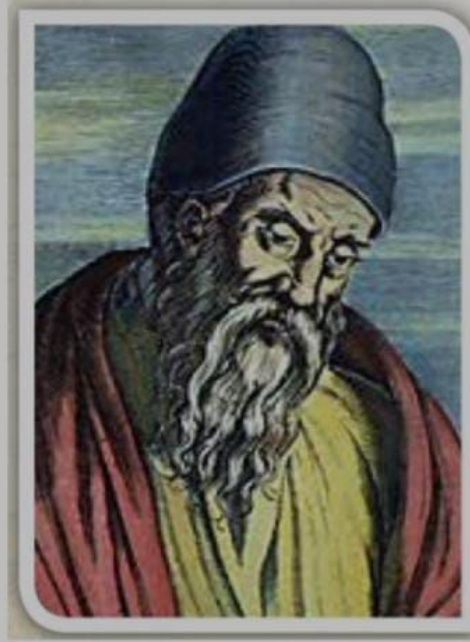
الثلاث مسائل الكلاسيكية

وتعود ثلاث مسائل هندسيّة «يُطلق عليها عادةً الثلاث مسائل الكلاسيكيّة»، والتي يُفترض حلها هندسيّاً باستخدام أداة مستقيمة وفرجار، إلى بدايات الهندسة الإغريقيّة، وتلك المسائل هي: تربيع دائرة «رسم مربع أو مضلع يمتلك نفس مساحة الدائرة المطلوبة بالضبط»، ومضاعفة مكعب «إنشاء مكعب له ضعف حجم المكعب الأصلي»، وتقسيم أي زاوية إلى ثلاثة زوايا متساوية.

وقد كانت تلك المسائل المستعصية عاملاً مؤثراً في الهندسة المستقبلية، كما أنها قادت للعديد من الاكتشافات الهامة، وذلك على الرغم من أن تلك المسائل لم تحصل على حل «أو بمعنى أدق إثبات استحالة الوصول لحل» حتى القرن التاسع عشر.

وكان هيبوقريطس الخيوسي، ويجب التفرقة بينه وبين هيبوقريطس كوس، أحد الرياضيين الإغريق والذي وهب نفسه ليحل تلك المسائل في القرن الخامس قبل الميلاد وتُعرف مساهماته في حل مشكلة تربيع الدائرة باسم هلال هيبوقريطس.

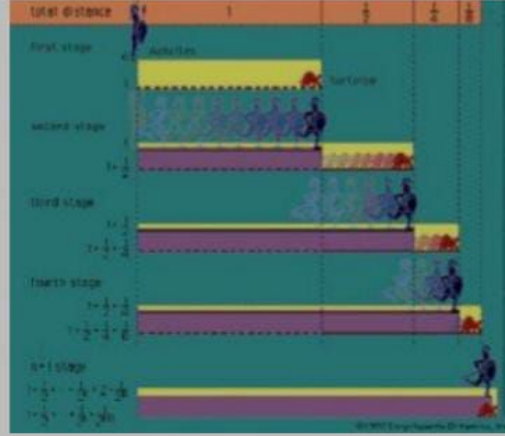
ولد إقليدس عام ٣٠٠ ق.م. وهو عالم رياضيات يوناني اشتهر بلقب أبي الهندسة، بدأ مشواره العلمي في الإسكندرية أيام حكم بطليموس الأول. ويعتبر العالم إقليدس اليوناني هو أحد علماء الرياضيات الذين عاشوا في الإسكندرية، وهو مؤلف الكتاب المعروف باسم العناصر أو The Elements، والذي جمع فيه جميع الأعمال الرياضية التي كانت موجودة سابقاً في اليونان، ونظمها بكتاب واحد، وكان يحتوي على العديد من التعريفات لأساسيات الهندسة، مثل أطراف الخط هي نقاط، وأن الخط له طول وليس له عرض، وكان ذلك الكتاب تحفة من التراث الفكري الإغريقي. كما يُعتبر كتابه العناصر - The Elements، والذي يعود لعام ٤٤٠ قبل الميلاد تقريباً، أول تجميع للعناصر الهندسية، ويُعتبر عمله مصدراً هاماً لأعمال إقليدس ومن بعده. ويضم الكتاب مبادئ الهندسة الإقليدية التي تتكون من مجموعة من البديهيات. وعلى الرغم من شهرة الكتاب في مجال الهندسة الرياضية، إلا أنه يتحدث عن نظرية الأعداد، واضعاً بعين الاعتبار العلاقة بين الأعداد المثلثة وأعداد ميرسين، واللاتناهي في الأعداد الأولية، وقد أنشأ إقليدس بعض المصنفات في عدة حقول مثل المنظور، القطع المخروطي، الهندسة الكروية، نظرية الأعداد، وغيرها.



ويُعتبر الإغريق أول من تحدّثوا عن فكرة اللانهاية، كما تمّ وصفها في المعضلة الشهيرة والتي تُنسب للفيلسوف زينو من اليا في القرن الخامس قبل الميلاد. اشتهر العالم زينومن اليا بحججه ومفارقاته التي كانت تتحدث عن الانهائية، ومتناهي الصغر، والتي كانت لها أثر في تحفيز الفلاسفة لآلاف السنين، كما استمرت حتى القرن الثامن عشر، حيث بدأ نظرية التفاضل والتكامل.

وتُعتبر معضلة أخيل والسلحفاة أشهر معضلة له، وهي تشرح سابقاً افتراضياً بين أخيل وسلحفاة. يمنح أخيل السلحفاة البطيئة مهلةً لتبدأ قبله، ولكن عندما يصل أخيل للنقطة التي كانت بها السلحفاة عندما تحرّك هو تكون السلحفاة تحرّكت بالفعل لنقطة أخرى، وعندما يصل أخيل إلى تلك النقطة تكون السلحفاة تحرّكت بالفعل لنقطة جديدة وهكذا، ولذلك فإنّ أخيل السريع لن يلحق أبداً بالسلحفاة البطيئة.

وتعتمد معضلة زينو وما يُشبهها، والتي يُطلق عليها معضلة ديكوتومية، على تقسيم المسافات والوقت إلى أجزاء لا نهائية، كذلك تعتمد على فكرة أنّ النصف مضافاً إليه الربع والثلث وجزء من الـ ١٦ إلى ما لا نهاية لا يمكن أن ينتج عنها واحد صحيح. وتنشأ المعضلة من المغالطة أنّه لا يمكن أن تُكمل عدداً لا نهائياً من الحركات المنفصلة في وقت محدد، ولكن من الصعب جداً إثبات خطأ تلك المغالطة.



Zeno's Paradox of Achilles and the Tortoise معضلة زينو عن أخيل والسحفاة

وقد كان أرسطو الفيلسوف الإغريقي أول من حاول إثبات خطأ تلك المعضلة، ويرجع ذلك لإيمانه القوي بأن المالا نهائية هي قيمة غير حقيقية.

ويُعدُّ ديموقريطوس، والمشهور بفكرته التي تنبأ فيها بأنَّ كلَّ المواد تتكوَّن من ذرات صغيرة، أحد رواد الرياضيات والهندسة في القرنين الرابع والخامس قبل الميلاد، كما أنَّه قدَّم بعض الأعمال وكانت عناوينها مثلاً عن الأرقام وعن الهندسة وعن التماس وعن اللامنطق، ولكن لم ينجو أيٌّ من تلك الأعمال. ولكننا نعرف أنَّه كان من أول من أدركوا أنَّ حجم المخروط «أو الهرم» يُعادل ثلث حجم الأسطوانة «أو المنشور» عند تساوي مساحة القاعدة والارتفاع، كما أنَّه كان أول من فكر جدياً في إمكانية تقسيم الأجسام إلى عدد لا نهائي من المقاطع العرضية.

وبالتأكيد كان فيثاغورث صاحب تأثير كبير على من تبعه، ومن ضمنهم أفلاطون، والذي أنشأ أكاديميته الشهيرة في أثينا عام ٣٨٧ قبل الميلاد، وتلميذه أرسطو، والذي اعتبرت أعماله شاملة لعلم المنطق بالكامل لأكثر من ألفي عام. ولكن كرياضي، عُرف أفلاطون بسبب تعريفه ووصفه للمجسمات الأفلاطونية الخمسة، ولكن قيمة عمله كمعلم وناشر للرياضيات لا يمكن أن يُستهان بها.

وعادةً ما يُنسب لتلميذ أفلاطون إيدوكسوس من كنيديوس التنفيذ الأول لـ طريقة الاستنفاد والتي طوّرها أرخميدس لاحقاً، وهي طريقة قديمة للتكامل بالتقريب المتوالي والتي استخدمها في حساب حجم الهرم والمخروط. كما طوّر النظرية العامة للنسب والتي كانت تنطبق على القيم التي لا يمكن التعبير عنها كنسبة بين رقمين صحيحين، كما تنطبق على تلك التي يمكن التعبير عنها كنسبة بين رقمين صحيحين، مُكملاً بذلك أفكار فيثاغورث حول ذلك الموضوع.

أرخميدس هو عالم طبيعة ورياضيات، وأحد أهم مفكري العصر القديم، ولد لأب فلكي شهير عام ٢٨٧ ق.م. في سرقوسة بجزيرة صقلية، سافر إلى الإسكندرية وبعدها إلى اليونان طلباً للعلم. وصفه مؤرخو الرياضيات والعلوم أنه واحد من أعظم علماء الرياضيات، حيث قال العالم الرياضي جاسوس: (إنه واحد من أعظم ثلاثة في العلوم الرياضية، وإلى جانبه نيوتن، وإيسنسطن). ومن أشهر اكتشافات أرخميدس طرائق حساب المساحات والأحجام والمساحات الجانبية للأجسام، وإثباته القدرة على حساب تقريبي دقيق للجذور التربيعية، واختراعه طريقة لكتابة الأرقام الكبيرة، وتحديد قيمة (π) (باي) $(\pi=3.14)$ وهي العلاقة بين محيط الدائرة وقطرها بدقة عالية، كما اكتشف أرخميدس النظريات الأساسية لمركز الثقل للأسطح المستوية والأجسام الصلبة واستخدام الروافع، وهو مخترع قلاووظ أرخميدس، لكن من أبرز القوانين التي اكتشفها أرخميدس قانون طفو الأجسام داخل المياه أو ما بات يعرف بـ (قانون أرخميدس).