الموضوع: ________ التاريخ: / /

« integration by partial fractions »

« التكامل باستخدام الجذور الجزئية »

Polynomial in x is a function is a form :- مثال الدالة كثيرة الحدود

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

$a \Rightarrow$ constant $n \Rightarrow$ nonnegrative integer ✱ عدد صحيح موجب

$a_0 \neq 0$ ✱ عشان لما أقول ان المعادلة من الدرجة n لازم يبقى في x^n مينفعش تبقى ب zero

✱ لو عندي معادلتين كثيرات الحدود ومن نفس الدرجة ⇐ المعاملات المقابلة أو المناظرة متساوية

✱ يمكن التعبير عن كل كثيرة حدود ذات معاملات حقيقية [علي الأقل نظريا] على انها حاصل ضرب عوامل خطية حقيقية من الشكل $ax + b$

عوامل تربيعية حقيقية غير قابلة للإختزال من الشكل $ax^2 + bx + c$

✱ يقال عن كثيرات الحدود من الدرجة 2 أو أكثر غير قابلة للاختزال إذا لم يكن من الممكن تحليلها إلى كثيرات حدود من درجة أقل

✱ امتى تبقى غير قابلة للإختزال ؟ إذا كانت $b^2 - 4ac < 0$ ∴ جذور المعادلة ليست حقيقية

Ex1) $x^2 - x + 1$ if $b = -1$ $a = 1$ $c = 1$

$b^2 - 4ac < 0$ $(-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$ ∴ is irreducible

if $b = -1$ $a = 1$ $c = -1$

$(-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 > 0$ ∴ is not irreducible

دالة نسبية (كسرية)

$F(x) = f(x) / g(x)$

✱ لو البسط $(f(x))$ أكبر من المقام $(g(x))$ ⇐ $F(x)$ is called improper

كسر غير حقيقي

✱ لو البسط $f(x)$ اصغر من المقام $g(x)$ ⇐ $F(x)$ is called proper

كسر حقيقي

التاريخ: / /

الموضوع:

* يمكن التعبير عن الكسر النسبي غير الصحيح أو الغير حقيقي كمجموعة كثير حدود وكسر نسبي صحيح

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

يمكن التعبير عن الكسر الحقيقي بكسر ابسط اذا كان مقامه

1) معادلة خطية $(ax+b)$

2) معادلة خطية مكررة $(ax+b)^n$

3) معادلة تربيعية (ax^2+bx+c)

4) معادلة تربيعية مكررة $(ax^2+bx+c)^n$

Find $\int \frac{dx}{x^2-4}$

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

* بالضرب في $(x-2)(x+2)$

$1 = A(x+2) + B(x-2)$

AT $x=-2$ $\quad -4B=1 \Rightarrow B=\frac{-1}{4}$

AT $x=2$ $\quad 4A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{4}$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

Find $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx$

$$= \frac{x+1}{x(x^2+x-6)} = \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

بالضرب في $x(x-2)(x+3)$

$x+1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$

aT $x=0 \Rightarrow -6A=1 \Rightarrow A=\frac{-1}{6}$

aT $x=2 \Rightarrow 10B=3 \Rightarrow B=3/10$

aT $x=-3 \Rightarrow 15C=-2 \Rightarrow C=\frac{-2}{15}$

$$\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{-1}{6x} + \frac{3}{10(x-2)} + \frac{-2}{15(x+3)}$$

$$I = \frac{-1}{6}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{3}{10}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{2}{15}\int \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= \frac{-1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + C$$

الموضوع: ________ التاريخ: / /

Find $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$ $\qquad x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$ بالضرب في $(x+1)(x-1)^2$

$$3x+5=A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$$

* at $x=1 \Rightarrow 2C=8 \therefore C=4$
* at $x=-1 \quad 4A=2 \therefore A=\frac{1}{2}$
* at $x=0 \Rightarrow A-B+C=5 \Rightarrow \frac{1}{2}-B+4=5 \therefore B=\frac{-1}{2}$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx+4\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|x+1|-\ln|x-1|\right]-4(x-1)^{-1}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-4(x-1)^{-1}+C$$

Find $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$ $\qquad = x-\frac{x+1}{x^2(x-1)}$

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$$ بالضرب في $x^2(x-1)$

$$x+1=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$$

at $x=0 \quad -B=1 \therefore B=-1$

at $x=1 \quad C=2$

at $x=2 \quad 3=2A+B+4C$

$3=2A-1+8 \quad A=-2$

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+2\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$I=\int x-\int\frac{-2}{x}-\frac{1}{x^2}+2\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$=\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+C$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C$$

Find $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx$ $x^4+3x^2+2=(x^2+1)(x^2+2)$

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)}$$ بالضرب في $(x^2+1)(x^2+2)$.

$$\cancel{x}^3+x^2+x+2=(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1)$$
$$=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(2A+C)x+(2B+D)$$

$A+C=1$ $B+D=1$ $2A+C=1$ $2B+D=2$

$\Rightarrow$ $A=0$ $B=1$ $C=1$ $D=0$

$$\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx=\int\frac{1}{x^2+1}\,dx+\int\frac{x}{x^2+2}\,dx$$

$$=\tan^{-1}x+\tfrac{1}{2}\ln|x^2+2|+C$$

Solve The equation:-

$$\int\frac{x^2}{a^4-x^4}=\int k\,dt$$

solv

$$\frac{x^2}{a^4-x^4}=\frac{x^2}{(a^2-x^2)(a^2+x^2)}=\frac{x^2}{(a-x)(a+x)(a^2+x^2)}$$ بالضرب في $(a-x)(a+x)(a^2+x^2)$

$$=\frac{A}{a-x}+\frac{B}{a+x}+\frac{Cx+D}{a^2+x^2}$$

$$x^2=A(a+x)(a^2+x^2)+B(a-x)(a^2+x^2)+(Cx+D)(a-x)(a+x)$$

aT $x=a \Rightarrow A(2a)(2a^2)=a^2$ $A=\frac{a^2}{4a^3}=\frac{1}{4a}$

aT $x=-a \Rightarrow B(2a)(a^2+a^2) \Rightarrow 4a^3B=a^2 \Rightarrow B=\frac{1}{4a}$

aT $x=0 \Rightarrow a^3A+a^3B+a^2D=0 \Rightarrow a^2D=-\tfrac{1}{2}a^2 \Rightarrow D=-\tfrac{1}{2}$

aT $x=2a \Rightarrow (3a)(5a^2)A+(-a)(5a^2)B+(2aC+D)(-a)(3a) \Rightarrow C=0$

$$\int\frac{x^2\,dx}{a^4-x^4}=\frac{1}{4a}\int\frac{dx}{a-x}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{a+x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$=\frac{-1}{4a}\ln|a-x|+\frac{1}{4a}\ln|a+x|-\frac{1}{2a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$$

$$=\frac{1}{4a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right|-\frac{1}{2a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C=kt$$