Distribución de Poisson

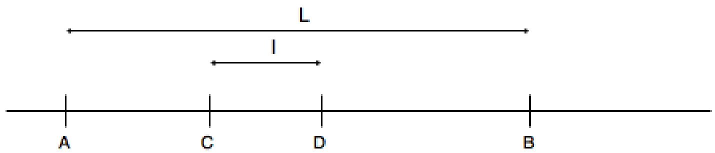
RAFAEL NOGALES VAQUERO
LOTHAR SOTO PALMA
Universidad de Granada
17 de diciembre de 2015

Índice

1. Deducción de función de densidad

La distribución de Poisson expresa a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierto periodo de tiempo. Se especializa en la probabilidad de ocurrencia de sucesos con probabilidades pequeñas. Es una distribución que sirve para modelar diferentes tipos de experimentos, como fenómenos en los que se espera que ocurra un suceso en específico como esperar el bus, o la llegada de clientes en deternimado servicio.

La distribución de Poisson es un caso particular del limite de la distribución binomial, podemos deducirlo de la siguiente representación geométrica:



Tomamos AB como el segmento de longitud L y CD el segmento de longitud l contenido en AB, la probabilidad de que un punto se encuentre en CD es l/L. Si tomamos n puntos aleatorios en AB la probabilidad de que exactamente x de ellos esten en CD viene dada por una distribución binomial:

$$B(x|\frac{l}{L}, n) = \frac{n!}{x!(n-x)!}(\frac{l}{L})^x(1-\frac{l}{L})^{n-x}$$

Ahora hacemos que n y L crezcan indefinidamente de tal manera que el número promedio de puntos por unidad de longitud es un número finito $k \neq 0$, $\frac{n}{L} \to k$.

$$B(x|\frac{l}{L}, n) = \frac{n(n-1)...(n-x+1)}{x!n^x}(\frac{nl}{L})^x(1-\frac{n}{L}\frac{l}{n})^{n-x}$$

asi que el limite de $B(x|\frac{l}{L}, n)$ cuando $n, L \to \infty$:

$$\lim_{n,L\to\infty} B(x|\frac{l}{L}, n) = \lim_{n,L\to\infty} \frac{1(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{x+1}{n})}{x!}(\frac{nl}{L})^x(1-\frac{n}{L}\frac{l}{n})^{n-x} = \frac{(kl)^x e^{-kl}}{x!}$$

Tomando que $kl = \theta$ obtenemos la expresión de la distribución de Poisson:

$$Poisson(\theta) = f(x|\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, \quad x = 0, 1...$$

Tiene un único parámetro θ se suele denominar parámetro de intensidad, y se aplica sobre una variable aleatoria X.

Es interesante conocer previamente el desarrollo en serie de Taylor para e^x, ya que este desarrollo se usará por ejemplo en el cálculo de la función generatriz de momentos o en ver la buena definición de la función de densidad, tenemos que es $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$.

La función de densidad está bien definida consideramos la suma de todos los experimentos x:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} = e^{-\theta}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\theta^x}{x!} = e^{-\theta}e^{\theta} = 1$$

2. Función generatriz de momentos

La función generatriz de momentos se define como sigue:

$$\phi(t) = E[e^{-tX}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-tx} \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} = e^{-\theta} \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{\theta^x}{x!} = e^{-\theta} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\theta e^t)^x}{x!} = e^{-\theta} e^{\theta e^t} = e^{\theta(e^t-1)}$$

2.1. Esperanza

Para el cálculo de la esperanza tan solo debemos derivar la función generatriz de momentos una vez y evaluarla con t=0:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \theta e^t e^{\theta(e^t-1)}$$

Evaluamos la expresión en t=0 y tenemos que:

$$E[X] = \theta$$

2.2. Varianza

La varianza se puede expresar como $\sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2$ por lo que es tan solo calcular el momento de orden 2 usando la función generatriz de momentos, por lo que volvemos a derivar la expresión anterior:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \theta e^t e^{\theta(e^t-1)} + \theta^2 e^{2t} e^{\theta(e^t-1)}$$

Evaluamos la expresión en t=0 y tenemos que:

$$E[X^2] = \theta + \theta^2$$

Y por lo tanto la expresión de la varianza es la siguiente:

$$\sigma^2 = \theta + \theta^2 - \theta^2 = \theta$$

3. Estimador máximo verosimil

Para una muestra de tamaño n, que denotamos por $x = (x_1, ..., x_n)$ definimos la función de verosimilitud como:

$$l(x_1, ..., x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\theta} \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!}$$

Para el cálculo del estimador máximo verosimil de la ley de Poisson vamos a maximizar la función $log(l(x_1, ..., x_n|\theta))$ puesto que el logaritmo es creciente conserva los máximos:

$$L(x_1, ..., x_n|\theta) = log(l(x_1, ..., x_n|\theta)) = -n\theta + \sum_{i=1}^{n} log(\frac{\theta^{x_i}}{x_i!}) = -n\theta + \sum_{i=1}^{n} (x_i log(\theta) - log(x_i!))$$

Ahora calculamos la derivada para maximizar el logaritmo de la función de verosimilitud:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -n + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta} = -n + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Encontramos el extremo igualando a 0:

$$-n + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i = n \Leftrightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Para verificar que hemos encontrado un máximo calculamos la segunda derivada y evaluamos en $\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}) < 0$$

Se tiene que la segunda derivada es negativa ya que la suma de variables x_i es siempre positiva y θ está elevado al cuadrado por lo que siempre es positiva, por lo que no hay ningún valor que haga positiva la segunda derivada y por tanto $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ es un estimador máximo verosimil para la ley de Poisson.

3.1. Insesgadez

Definición 1: Se denomina sesgo de un estimador a la diferencia entre la esperanza del estimador y el verdadero valor del parámetro a estimar. Un estimador es insesgado si su sesgo es nulo por ser su esperanza igual al parámetro que se desea estimar.

Sean n experimentos $x = (x_1, ...x_n)$ independientes que siguen una distribución de Poisson de parámetro θ, para que el estimador $\hat{\theta}$ sea insesgado tenemos que probar que:

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

Demostración:

$$E[\hat{\theta}] = E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[x_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta = \frac{n\theta}{n} = \theta$$

3.2. Eficiencia

Definición 2: Un estimador $\hat{\theta}_1$ se dice que es más eficiente que otro estimador $\hat{\theta}_2$, si la varianza del primero es menor que la del segundo $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$.

Sean n experimentos $x = (x_1, ...x_n)$ independientes que siguen una distribución de Poisson de parámetro θ, para que el estimador $\hat{\theta}$ sea eficiente tenemos que probar que:

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{1}{nI(\theta)}$$

Se verifica que la varianza del estimador alcanza la cota de Cramér-Rao.
Demostración: Calculamos la función información de Fisher para ello en primer lugar veamos cual es el valor del logaritmo de la función de densidad:

$$log(f(x|\theta)) = -\theta + xlog(\theta) - log(x!)$$

Derivamos y elevamos al cuadrado previamente para el cálculo de la información de Fisher:

$$(\frac{\partial}{\partial\theta}log(f(x|\theta)))^2 = (\frac{x-\theta}{\theta})^2$$

Calculamos la esperanza de lo anterior:

$$I(\theta) = E[(\frac{\partial}{\partial\theta}log(f(x|\theta)))^2] = E[(\frac{x-\theta}{\theta})^2] = \frac{1}{\theta^2}E[(x-\theta)^2] = \frac{1}{\theta^2}Var(x) = \frac{\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\theta}$$

Puesto que tenemos n experimentos:

$$nI(\theta) = \frac{n}{\theta}$$

Calculamos la varianza del estimador para ver si coincide con la información de Fisher:

$$Var(\hat{\theta}) = Var(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}) = \frac{1}{n^2}Var(\sum_{i=1}^n x_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Var(x_i) = \frac{n\theta}{n^2} = \frac{\theta}{n}$$

Por lo que se verifica la condición de de eficiencia y el estimador es eficiente.

3.3. Consistencia

Teorema 1: Una condición suficiente para que $\hat{\theta}$ sea un estimador consistente es que dicho estimador tiene que verificar:

$$E[\hat{\theta}] \to \theta$$
$$Var(\hat{\theta}) \to 0$$

Con $n \to \infty$.

Sean n experimentos $x = (x_1, ...x_n)$ independientes que siguen una distribución de Poisson de parámetro θ, el estimador $\hat{\theta}$ es consistente ya que sabemos que dicho estimador es insesgado, y conocemos al valor de la varianza del mismo:

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{\theta}{n} \to_{P_\theta} 0, \quad n \to \infty$$

3.4. Suficiencia

Teorema 2: Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias independientes con una función distribución de distribución conjunta $f(x_1, x_2, ..., x_n|\theta)$ que depende del parámetro θ.
Entonces se dice que el estadístico $u(x_1, ..., x_n)$ es suficiente para θ si y solamente si $f(x_1, x_2, ..., x_n|\theta)$ se puede factorizar de la siguiente forma:

$$f(x_1, ..., x_n|\theta) = \Phi(u(x_1, ..., x_n)|\theta) \cdot h(x_1, ..., x_n)$$

Veamos ahora que el estadístico $T(X) = \sum_{i=1}^n x_i$ es un estadístico suficiente para el parámetro θ de la distribución de Poisson:
Consideremos en primer lugar la probabilidad conjunta de la distribución:

$$P(X = x) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n)$$

Teniendo en cuenta que en nuestra distribución de Poisson se tiene que: $P(X=k)=\frac{e^{-\theta}\theta^{k}}{k!}$ y que las observaciones son independientes podemos reescribirlo como:

$$P(X=x)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=\frac{e^{-\theta}\theta^{x_1}}{x_1!}\cdot\frac{e^{-\theta}\theta^{x_2}}{x_2!}\cdot...\cdot\frac{e^{-\theta}\theta^{x_n}}{x_n!}$$

Simplificando tenemos:

$$f(x_1...x_n|\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

Donde vemos que hemos conseguido factorizar $f(x_1...x_n|\theta)$ como en el teorema; en nuestro caso $u(X)=T(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i$ y $h(X)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$
Para finalizar conviene resaltar que hemos probado que el estadístico $T(X)$ es suficiente para θ, pero nosotros lo que queremos es ver que $\hat{\theta}$ es suficiente para θ.
Pero esto es trivial ya que $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{n}T(X)$ y podemos encontrar una nueva función $\hat{u}(x_1,...,x_n)$ tal que:

$$f(x_1...x_n|\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=e^{-n\theta}\theta^{n\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

Que cumple el esquema:

$$f(x_1,...,x_n|\theta)=\Phi(u(\hat{\theta})|\theta)\cdot h(x_1,...,x_n)$$

Donde: $\Phi(u(\hat{\theta})|\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=e^{-n\theta}\theta^{n\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}}$
Y $h(x_1,...,x_n)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$

4. Ejemplos

Calcular el número de particulas α emitidas en una fuente radiactiva:
Experimentalmente se obtiene que el numero medio de particulas α emitidas en dos minutos es 3.
¿Cual es la probabilidad de que en los próximos dos minutos el número de partículas α sea 0, 1, 2, 3 ó 4?
¿Y de que sea mayor o igual que cinco?
Solución:
La probabilidad de que x partículas se emitan en un periodo de dos minutos se puede modelar mediante una función de distribución de Poisson:

$$P_{\mu}(x)=\frac{\mu^{x}}{x!}e^{-\mu}$$

Donde μ es el valor promedio de particulas emitido en dos minutos.
En nuestro caso $\mu=1.5\cdot 2=3$ Calculemos ahora $P_{\mu}(i)$ para $i=0,1,2,3,4$

$$P_{\mu}(0)=\frac{3^0}{0!}e^{-3}=e^{-3}=0.05$$

$$P_{\mu}(1)=\frac{3^1}{1!}e^{-3}=3e^{-3}=0.15$$

$$P_\mu(2) = \frac{3^2}{2!}e^{-3} = \frac{9}{2}e^{-3} = 0.22$$

$$P_\mu(3) = \frac{3^3}{3!}e^{-3} = \frac{9}{2}e^{-3} = 0.22$$

$$P_\mu(4) = \frac{3^4}{4!}e^{-3} = \frac{9}{2}e^{-3} = 0.17$$

$$\sum_{i=5}^{+\infty} P_\mu(i) = \sum_{i=5}^{+\infty} \frac{3^i}{i!}e^{-3} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{3^i}{i!}e^{-3} - \sum_{i=0}^{5} \frac{3^i}{i!}e^{-3} = e^3 e^{-3} - \sum_{i=0}^{5} \frac{3^i}{i!}e^{-3} = 1 - 0.05 - 0.15 - 0.22 - 0.22 - 0.17 = 0.19$$