

# Aula 1

## 1 Otimização

Apesar de o nome do curso ser Pesquisa Operacional, talvez seria mais descritivo se fosse chamado “Introdução à otimização”. Problemas de otimização são uma (grande) sub-área da Pesquisa Operacional. Matematicamente falando, um problema de otimização é um problema em que se busca achar o máximo ou o mínimo de uma função dentro de um determinado conjunto. Por exemplo:

- Quais são os valores máximo e mínimo da função  $f(x) = x^2$ ?
- E se o intervalo for limitado a  $[1, 5]$ ? Qual seu mínimo e máximo neste intervalo?

Chamamos o primeiro caso de um problema de otimização **irrestrita**, isto é, não há condições sendo impostas aos valores que a função pode ter. O segundo caso é conhecido como um problema de otimização **restrita** uma vez que restrições são impostas no conjunto possível de valores que  $x$  pode ter. Buscamos a **solução ótima**, isto é, o ponto onde a função atinge o valor máximo ou mínimo dentre os valores possíveis do conjunto.

A dificuldade de um problema de otimização pode estar na descrição da função, ou na compreensão do conjunto. Ou em ambos. Por exemplo:

- Qual o máximo da função  $f(x, y) = x^2/y^y$  se  $x$  e  $y$  estão entre -1 e 1?
- Qual o máximo da função  $f(x) = \sin(x)$  entre os números racionais?

Funções como as que descrevemos acima tipicamente necessitam do uso do cálculo para estudarmos seus pontos de máximo e mínimo.

### 1.1 Otimização neste curso

Neste curso, todavia, estamos interessados em duas sub-áreas da Pesquisa Operacional, chamadas **Programação Linear (PL)** e **Programação Inteira (PI)**. Ambas estas técnicas buscam reescrever matematicamente problemas do mundo real através de problemas de otimização restritos. Um termo mais amplo que engloba tanto PL quanto PI é a **Programação Matemática**, definido como a utilização de ferramentas matemáticas para a alocação ótima de recursos limitados quando planejamos (**programamos**) atividades.

Tanto em PL quanto PI, estamos interessados somente em otimizar **funções lineares**. Uma função  $f$  é linear se, para vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  e um número  $a$ ,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \quad \text{e} \quad f(a \cdot \mathbf{x}) = a \cdot f(\mathbf{x})$$

Por exemplo,

$$f(x) = 2x \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + 5x_3$$

são funções lineares, ao passo que

$$f(x) = x + 5 \quad f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3$$

não são.

**Exercício 1.** Prove esses fatos.

Otimizar uma função linear é a princípio uma tarefa simples. Por exemplo:

- Qual o máximo de  $f(x) = 2x$ ?
- Qual o máximo da mesma função no intervalo  $[-4, 10]$ ?

A dificuldade estará sempre na compreensão do conjunto onde a função está sendo definida, ou nas restrições que as variáveis da função devem satisfazer. Neste curso, essas restrições serão também sempre lineares, mas ainda assim veremos que os problemas podem ser bem difíceis.

## 2 Introdução à Programação linear

A primeira parte do curso trata apenas de Programação Linear (PL), o mais “simples” dos modelos de programação matemática. Há centenas de aplicações práticas de PL em uma vasta gama de áreas, incluindo problemas de logística na indústria, mercados financeiros, ciências sociais e naturais, e muitas outras. A teoria e suas aplicações começou por volta da Segunda Guerra Mundial, com Leonid Kantorovich utilizando-a para modelar a economia centralizada da União Soviética e George Dantzig utilizando-a para modelar problemas de logística decorrentes da guerra. Dantzig também desenvolveu o primeiro algoritmo efetivo para resolver problemas de PL - o chamado algoritmo **Simplex** - que ainda hoje é largamente utilizado em *solvers* comerciais e *open-source* de problemas de programação matemática. O enorme aumento de poder computacional nas últimas décadas permite hoje resolver eficientemente problemas de PL com centenas de milhares de variáveis.

Um problema de PL é descrito por três componentes importantes:

- **Variáveis de decisão**, que representam efetivamente a decisão que deve ser tomada no problema modelado,
- **Função objetivo**, que representa em um valor numérico o benefício ou custo associado às decisões que devem ser tomadas. É a função que deve ser maximizada ou minimizada.
- **Restrições**, que representam a limitação dos recursos do mundo real. As restrições impõem que a solução deve obedecer certas regras.

Em um problema de PL, a função objetivo e as restrições são sempre lineares e as variáveis de decisão são sempre variáveis reais (possivelmente dentro de um intervalo).

## 2.1 Exemplo numérico

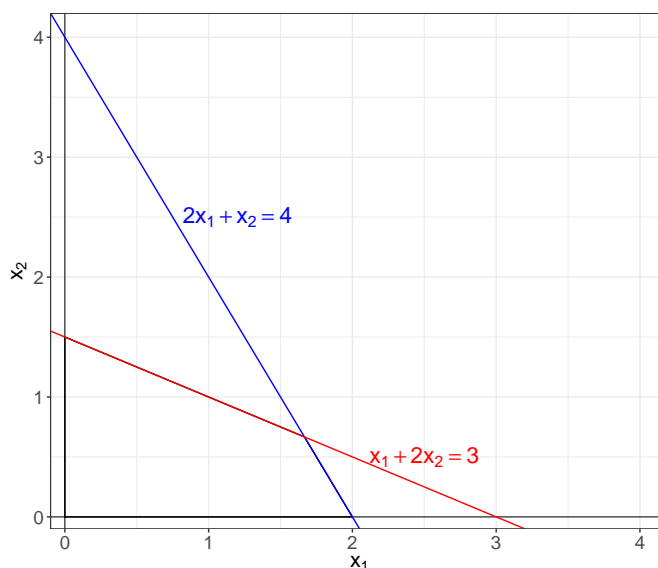
Ache o máximo da função  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  supondo que  $x_1$  e  $x_2$  satisfazem

$$x_1 \geq 0 \quad ; \quad x_2 \geq 0 \quad ; \quad 2x_1 + x_2 \leq 4 \quad ; \quad x_1 + 2x_2 \leq 3.$$

No caso, as variáveis de decisão são dadas por  $x_1$  e  $x_2$  e a função objetivo é maximizar  $x_1 + x_2$ . Abaixo, reescrevemos este PL utilizando a notação mais comum:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ao desenhar estas desigualdades no gráfico, a região delimitada é dada por:

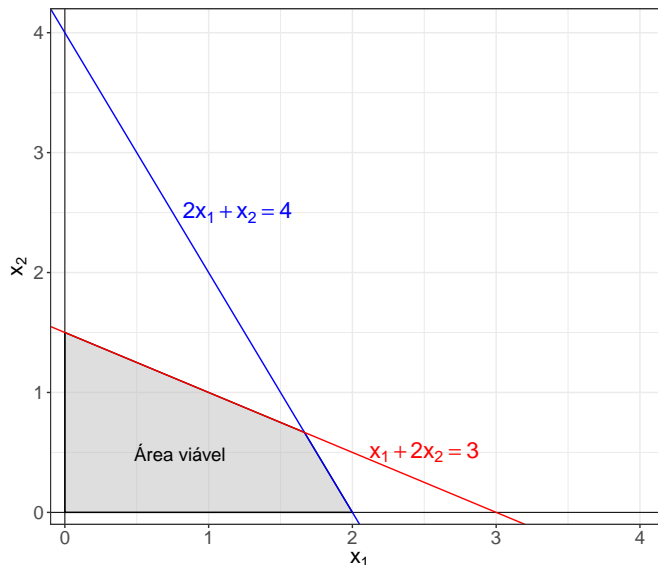


Observe que qualquer ponto à direita da reta azul torna a desigualdade  $2x_1 + x_2 \leq 4$  inválida. Por exemplo, considere o ponto  $(2, 2)$  - neste caso temos que  $6 \not\leq 4$  e diz-se que a desigualdade foi **violada**. Já para qualquer ponto a esquerda da reta azul o oposto ocorre. Por exemplo, ao substituirmos o ponto  $(1, 1)$  na desigualdade obtemos  $3 \leq 4$ .

Desta forma, temos que:

- Apenas pontos à esquerda da reta azul respeitam a desigualdade  $2x_1 + x_2 \leq 4$ ,
- Apenas pontos à esquerda da reta vermelha respeitam a desigualdade  $x_1 + 2x_2 \leq 3$ ,
- Apenas pontos à direita do eixo  $x_2$  respeitam a desigualdade  $x_1 \geq 0$  e
- Apenas pontos acima do eixo  $x_1$  respeitam a desigualdade  $x_2 \geq 0$ .

A união destes conjuntos é chamada de **área viável** e pode ser vista no gráfico abaixo:



Todos os pontos da área viável são soluções válidas para o problema. A principal questão de um problema de PL é encontrar, dentre todos os pontos válidos, qual é aquele que maximiza ou minimiza a função objetivo desejada.

**Exercício 2.** Dentro da área viável acima, qual par de pontos  $(x_1, x_2)$  maximiza  $x_1 + x_2$ ? E  $3x_1 + x_2$ ? E  $x_1 - x_2$ ? E minimizar?

Três comentários importantes:

- (i) Se você prestou atenção, o máximo ou mínimo sempre acabou sendo um dos vértices. Isto nem sempre é o caso, por exemplo, se quiséssemos o máximo de  $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$  ou o mínimo de  $f(x_1, x_2) = x_1$ . Mas sempre será o caso de que o máximo ocorrerá num ponto de fronteira entre o conjunto e o seu complemento.
- (ii) Nem sempre problemas deste tipo terão solução, mas isto sempre dependerá do conjunto em que estamos otimizando, nunca da função. Por exemplo, qual o máximo de  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  no conjunto

$$x_1 \geq 0 \quad ; \quad x_2 \geq 0 \quad ; \quad x_1 - x_2 \leq 2 \quad ?$$

E em

$$x_1 \geq 0 \quad ; \quad x_2 \geq 0 \quad ; \quad x_1 + x_2 \leq -2 \quad ?$$

- (iii) Problemas deste tipo possuem grande aplicabilidade prática. Veremos logo mais um exemplo. Infelizmente, a grande parte dos problemas ocorre com muitas variáveis, ou seja, é impossível termos uma visualização gráfica fiel ao problema. Entretanto, procure manter sempre uma intuição geométrica: dentro de um conjunto limitado por retas, ou planos, ou hiperplanos, você estará procurando o canto onde um plano, ou hiperplano, atinge seu máximo ou mínimo.

## 2.2 Exemplo prático

Suponha uma empresa que produza 4 tipos de produto. A empresa possui duas máquinas diferentes e a produção de cada produto requer horas em ambas as máquinas, além de horas operacionais e horas em um processo de controle de qualidade. A tabela abaixo especifica, para cada produto, quantas horas são necessárias em cada máquina/atividade. A tabela inclui também o preço de venda (assuma demanda infinita):

Produto	Máquina 1	Máquina 2	Operacional	Qualidade	Preço de venda
1	11	4	8	7	300
2	7	6	5	8	260
3	6	5	5	7	220
4	5	4	6	4	180

Por mês, a máquina 1 pode funcionar no máximo 700 horas, e a 2 por no máximo 500 horas. A empresa pode comprar no máximo 600 horas de trabalho operacional ao custo de 8 reais a hora, e 650 horas de controle de qualidade ao custo de 6 reais a hora. Quantos itens de cada produto a empresa deve produzir de forma a maximizar seu lucro?

Vamos formular esse problema como uma PL.

- (i) Variáveis de decisão: Temos que decidir quantas unidades de cada produto serão produzidas. Para isso, vamos criar variáveis  $x_1, x_2, x_3, x_4$  representando estes valores. Ou seja,  $x_1$  é uma variável ainda desconhecida cujo valor é o número de unidades que devem ser produzidas do produto 1.

Como queremos maximizar o lucro, devemos também levar em consideração que parte do lucro será consumido com os custos associados às horas de trabalho operacional e controle de qualidade. Como a quantidade de horas a ser contratada é incerta, criaremos também variáveis  $y_1$  e  $y_2$  para indicar quantas horas de cada tipo de trabalho serão compradas. Estas são as únicas incertezas a respeito deste problema.

- (ii) Função objetivo: A empresa busca maximizar o lucro. A função matemática que representa o lucro é dada por (onde os custos associados à contratação de horas são descontados):

$$300x_1 + 260x_2 + 220x_3 + 180x_4 - 8y_1 - 6y_2.$$

- (iii) Restrições:

Podemos utilizar no máximo 700 horas da máquina 1:

$$11x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 700.$$

E no máximo 500 horas na máquina 2:

$$4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 500.$$

Trabalho operacional:

$$8x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq y_1$$

Controle de qualidade:

$$7x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 \leq y_2.$$

As limitações na quantidade de horas que podem ser contratadas:

$$y_1 \leq 600 \quad \text{e} \quad y_2 \leq 650.$$

Não faz sentido que as variáveis possam ter valores negativos, logo:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 \geq 0.$$

Estas últimas restrições são geralmente chamadas de restrições de **não-negatividade**.

**Exercício 3.** Resolva esta PL.

## Aulas 2 e 3

### 3 Programação linear - formalização

Uma programação linear (PL) é definida como um problema de maximizar ou minimizar uma função linear sujeita a um número finito de restrições lineares. Considerando o exemplo:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \leq 9 \\ & x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

estamos **maximizando** a **função objetivo**  $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 - x_3$  sujeito às **restrições**  $x_1 + x_2 \leq 9$ ,  $x_3 \leq 3$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ .

**Importante:** uma restrição linear é sempre uma inequação da forma

$$f(X) \leq \beta, \quad f(X) \geq \beta, \quad f(X) = \beta,$$

onde  $X$  é um vetor de variáveis e  $\beta$  é um escalar. Note que

$$3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 < 5$$

**não** é uma restrição linear, já que a desigualdade é estrita.

Uma **solução** para a formulação (1) é uma atribuição de valores às variáveis  $(x_1, x_2, x_3)$ . Uma solução é **viável** se possui a propriedade de que todas as restrições são satisfeitas. Uma solução é **ótima** se é viável e maximiza (ou minimiza se o problema for de minimização) a função objetivo.

### 4 Modelagem

Como dito anteriormente, a PL modela diversos problemas da vida real. Nesta seção, incluímos alguns exercícios e exemplos de aplicações.

**Exemplo 1.** Considere o seguinte problema de demanda, armazenamento e distribuição. Uma companhia local, Pompéu Insumos, de revenda de insumos agrícolas prevê que nos próximos meses, a demanda por seu principal insumo seja a seguinte:

mês	1	2	3	4
demanda em litros	5000	8000	9000	6000

No começo de cada mês, esta empresa pode comprar este insumo de um distribuidor regional pelos seguintes valores:

mês	1	2	3	4
custo por litro	0.75	0.72	0.92	0.90

A Pompéu Insumos possui um tanque de armazenamento de 4000 litros, que atualmente já contém 2000 litros. A empresa deseja saber quantos litros de insumo deve comprar no começo de cada mês para suprir a demanda e ao mesmo tempo minimizar seus custos. Note que se o insumo é comprado e revendido imediatamente, não é preciso armazená-lo no tanque. Somente o excedente para o mês seguinte é armazenado. Para simplificar, assumimos que o custo de armazenamento é zero (o que pode não ser verdade na prática).

- Variáveis de decisão: Cada mês, Pompéu Insumos precisa determinar (1) quantos litros comprar e (2) quantos armazenar do insumo. Estes valores são incertos e devem ser decididos pela empresa: são os candidatos ideais para as variáveis de decisão.

Introduzimos então 8 variáveis:  $p_1, \dots, p_4$  referentes a quanto comprar, e  $t_1, \dots, t_4$  referentes à capacidade ocupada do tanque. Note que já fomos informados que  $t_1 = 2000$ .

- Função objetivo: Como informado, a Pompéu Insumos deseja minimizar o custo de compra dos insumos. Então a função objetivo é

$$\min 0.75p_1 + 0.72p_2 + 0.92p_3 + 0.90p_4.$$

- Restrições: No começo do primeiro mês, a quantidade de insumos comprada, acrescida da quantidade que já havia no tanque, deve ser igual ou exceder a demanda do primeiro mês, e este excedente corresponde exatamente ao que é armazenado para o segundo mês. Portanto

$$p_1 + t_1 = 5000 + t_2.$$

A restrição acima impõe a **consistência** dos valores envolvidos. Igualmente

$$p_2 + t_2 = 8000 + t_3, \quad p_3 + t_3 = 9000 + t_4, \quad p_4 + t_4 \geq 6000.$$

**Exercício 4.** Termine de formular esta PL, incluindo condições iniciais e demais restrições, e escreva no formato de (1). Qual você acredita ser a solução ótima para o problema? Como o problema seria alterado se o custo de armazenamento fosse 0.10 por litro de insumo por mês?

**Exercício 5.** Considere a seguinte tabela nutricional de alguns tipos de comida:

Comida	preço / porção	calorias / p.	gordura / p.	proteína / p.	carbs / p.
Cenoura	0.14	23	0.1	0.6	6
Batata	0.12	171	0.2	3.7	30
Pão integral	0.20	65	0.0	2.2	13
Queijo	0.75	112	9.3	7.0	0
Amendoim	0.15	188	16.0	7.7	2

Uma nutricionista deseja montar um cardápio que minimize os custos diários, ao mesmo tempo que as seguintes demandas nutricionais são satisfeitas:



- pelo menos 2000 calorias
- pelo menos 50g de gordura
- pelo menos 100g de proteína
- pelo menos 250g de carboidratos.

Modele este problema com uma PL (é possível fracionar porções).

**Exercício 6.** Uma refinaria processa três tipos diferentes de petróleo. Cada tipo de petróleo possui uma planilha de custos diferente, expressando condições de transporte e preços na origem. A planilha de custos e quantidade máxima disponível é dada abaixo:

Tipo de petróleo	Quantidade máxima disponível (barril/dia)	Custo por barril/dia
1	3500	19
2	2200	24
3	4200	20

Por outro lado, cada tipo de petróleo é mais ou menos apropriado para a produção de três tipos de gasolina diferentes: amarela, azul e superazul. As especificações de cada tipo de gasolina são dadas abaixo:

Tipo de gasolina	Especificação	preço de venda R\$/barril
Amarela	não mais que 70% de 1	22
Azul	não mais que 30% de 1 não menos que 10% de 2	28
Superazul	não mais que 30% de 1 não menos que 40% de 2 não mais que 50% de 3	35

Quanto de cada gasolina a empresa deve produzir, e quais tipos de petróleo deve utilizar em cada de forma a maximizar seus lucros? Suponha que não há perda volumétrica no processo da refinaria.

DICA: use 9 variáveis. Cada variável correspondendo a quanto de cada tipo de petróleo será usado em cada tipo de gasolina.

**Exercício 7.** Você administra uma empreiteira, e projeta construir uma casa. As seguintes atividades devem ser feitas

- B - escavar e fazer a fundação.
- F - subir as paredes
- E - parte elétrica
- P - encanamento

- D - acabamento das paredes e pisos
- L - jardim.

Você possui equipes na sua empreiteira que realizam cada uma das atividades. O tempo em dias para concluir tudo é:

tarefa	B	F	E	P	D	L
tempo	3	2	3	4	1	2

Infelizmente as tarefas não podem ser realizadas todas simultaneamente. Se baseie na lista de restrições abaixo e formule o problema de construir a casa no menor tempo possível como uma PL.

- F só pode começar após B.
- L só pode começar após B.
- E só pode começar após F.
- P só pode começar após F.
- D só pode começar após E e P.

**Exercício 8.** Tente resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ x + y &= 1 \\ x + 3y &= 4 \\ -2x + 4y &= 3 \end{aligned}$$

Tentou? Vamos então tentar encontrar os valores que mais se aproximam de ser uma solução do sistema. Formule o problema de achar um vetor  $(x, y)$  que mais se aproxime de resolver este sistema como uma PL. Ou seja, você deseja achar  $(x, y)$  tal que a soma

$$|2x + y + 1| + |x + y - 1| + |x + 3y - 4| + |-2x + 4y - 3|$$

seja mínima.

E se ao invés de minimizar a soma, você desejasse minimizar o maior dos valores absolutos. Ainda é possível modelar como uma PL?

## 5 Formas de apresentar uma PL

Dado um vetor  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ , uma matriz  $m \times n$   $\mathbf{A}$  e um vetor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ , considere a seguinte PL

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Significa que estamos procurando o vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  que maximiza o produto interno  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  sujeito às desigualdades obtidas a partir de cada linha da matriz  $\mathbf{A}$ .

**Exemplo 2.** Considere a PL

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{sujeita a} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Esta PL pode ser expressa na forma matricial descrita acima da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \max \quad & (1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Neste exemplo:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

**Exercício 9.** Resolva a PL acima.

**Exercício 10.** Considere o primeiro exemplo de PL, (1). Identifique naquele exemplo quais são os vetores  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x}$  e a matriz  $\mathbf{A}$ .

Conforme você notou no exercício, nem sempre o conjunto de desigualdades obtidos da modelagem poderá ser imediatamente agrupado em um formato matricial, e então alguns ajustes podem precisar ser feitos.

Como forma de padronizar a interpretação de PLs definimos a **forma padrão de igualdades** (FPI) a seguir.

**Definição 5.1.** Uma PL está na forma padrão de igualdades se existem vetores  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{b}$  e uma matriz  $\mathbf{A}$  tal que a PL se expressa como

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Em outras palavras, uma PL está na FPI se

- é um problema de maximização.
- com exceção das restrições de não-negatividade, todas as outras são igualdades.
- toda variável possui uma restrição de não negatividade.

Qualquer PL pode ser expressa na FPI. Em geral, quando uma inequação é obtida na formulação, ela pode ser substituída por uma igualdade ao adicionarmos uma variável extra.

**Exercício 11.** Expresse a desigualdade  $2x + 3y \leq 5$  utilizando apenas igualdades e/ou restrições de não-negatividade. Dica: adicione uma variável  $w$ .  
Faça o mesmo para  $8x - y + z \geq 10$ .

Problemas de minimização também podem ser expressos como maximização.

**Exercício 12.** Expresse

$$\min x + y + z$$

como

$$\max \mathbf{c}^T \mathbf{x}.$$

Ou seja, diga quais são os vetores  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{x}$ .

Ainda pode haver um fator dificultador de que, ao modelarmos o problema, uma das variáveis não possua uma restrição de não-negatividade. Neste caso, a variável em questão deve ser substituída por duas outras. Note o exemplo abaixo.

**Exemplo 3.**

$$\begin{aligned} \min \quad & x + y \\ \text{sujeita a} \quad & x - y \leq 2 \\ & x + y \geq -1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Note que não podemos simplesmente adicionar  $y \geq 0$ , porque isto alteraria a solução da PL. No caso, a PL dada possui mínimo igual a  $-1$  referente à solução  $(x, y) = (0, -1)$ , onde  $y < 0$ . Para termos restrições de não-negatividade para todas as variáveis, vamos substituir  $y$  por duas variáveis:

$$y = y^+ - y^-,$$

e agora exigimos  $y^+, y^- \geq 0$ . No caso, quando  $y = -1$ , temos  $y^+ = 0$  e  $y^- = 1$ , ambos não-negativos. A PL se torna então:

$$\begin{aligned} \min \quad & x + y^+ - y^- \\ \text{sujeita a} \quad & x - (y^+ - y^-) \leq 2 \\ & x + (y^+ - y^-) \geq -1 \\ & x, y^+, y^- \geq 0 \end{aligned}$$

Há portanto três passos básicos a serem realizados para transformar uma PL para a FPI.

- (i) Trocar min por max, se necessário, adicionando um sinal negativo em  $\mathbf{c}$ .
- (ii) Trocar todas as inequações por igualdades adicionando variáveis extras.
- (iii) Trocar cada variável livre por duas variáveis não-negativas.

**Exemplo 4.** A PL do exemplo 3 se torna portanto:

$$\begin{aligned} \max \quad & (-1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y^+ \\ y^- \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y^+ \\ y^- \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ & x, y^+, y^-, z_1, z_2 \geq 0 \end{aligned}$$

**Exercício 13.** Expresse as PLs obtidas nos exercícios de modelagem na FPI.

## 6 Toda PL tem solução ótima?

Já discutimos na primeira aula situações em que uma PL possui uma solução ótima, não possui solução viável, ou é ilimitada. De fato, o Teorema Fundamental de Programações Lineares estabelece que essas são as únicas possibilidades. Vamos discutir cada uma delas. Para isto, a notação FPI é bastante útil.

### 6.1 PLs inviáveis

Como vimos, dada uma PL, um vetor  $\mathbf{x}$  que satisfaça as restrições é chamado de solução viável. Naturalmente, o objetivo de uma PL é encontrar a solução viável que maximiza ou minimiza a função objetivo. Ocorre que nem sempre existem soluções viáveis, caso em que a PL é chamada de **inviável**.

**Exemplo 5.** Suponha que o sistema abaixo foi retirado de uma PL em FPI e descreve todas as suas restrições

$$\begin{aligned} 4x_1 + 10x_2 - 6x_3 - 2x_4 &= 6 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 &= 5 \\ -7x_1 - 2x_2 \quad \quad + 4x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Você pode tentar resolver este sistema, mas notará que não é possível. Como entretanto provar isto?

A verificação de que uma PL é inviável não depende da função objetivo, dependendo apenas do conjunto de restrições. Podemos provar que um sistema de equações com restrições de não-negatividade não possui solução ao encontrarmos uma equação tal que

- (i) esta equação seja consequência de operações elementares nas equações do sistema e

(ii) todos os coeficientes sejam não-negativos, mas o lado direito seja negativo.

Veja, por exemplo, o que acontece se multiplicarmos a 1a equação por  $y_1 = 1$ , a 2a por  $y_2 = -2$  e a 3a por  $y_3 = 1$  e somarmos, obteremos

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1.$$

Naturalmente não há quaisquer valores de  $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$  que satisfaçam isso.

O vetor  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  obtido no exemplo acima é chamado de **certificado de inviabilidade**. Em notação matricial, tínhamos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & 1 \\ -7 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e concluímos que

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ não é possível pois, ao multiplicar por } \mathbf{y}, \text{ temos } \mathbf{y}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{y}^T \mathbf{b},$$

$$\mathbf{y}^T \mathbf{Ax} \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0.$$

**Exercício 14.** Ache um certificado de inviabilidade para o sistema determinado por

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

## 6.2 PLs ilimitadas

**Exemplo 6.** Considere a PL dada por

$$\begin{aligned} & \max \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{sujeita a} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \quad \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{c} = (-2 \quad 2 \quad 3) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Esta PL possui solução viável? E solução ótima?

Note que  $x_1 = 20, x_2 = 10, x_3 = 10$  é uma solução viável. Entretanto, qualquer solução da forma

$$S(t) = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

com  $t \geq 0$  também será viável. Note que

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot S(t) = 10 + 3t,$$

portanto se  $t \rightarrow \infty$ , então  $\mathbf{c}^T \cdot S(t) \rightarrow \infty$ . Não há portanto um máximo para esta PL, e ela é chamada de ilimitada.

O vetor  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  encontrado acima é um certificado de que a PL é ilimitada. Note que este vetor satisfaz as propriedades de que  $\mathbf{A}\mathbf{d} = 0$ ,  $\mathbf{d} \geq 0$  e  $\mathbf{c}^T \mathbf{d} > 0$ .

**Exercício 15.** Demonstre que a PL abaixo é viável, porém ilimitada.

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

### 6.3 PLs com soluções ótimas

**Exemplo 7.** Agora considere a PL

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Suponha que alguém lhe informe que  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  é uma solução ótima desta PL. Como provar isto?

Certamente  $\mathbf{z}$  é solução viável. Mas para mostrar que também é ótima, precisamos mostrar que para qualquer outra solução viável  $\mathbf{x}$ , temos

$$\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{z} = 6.$$

Isto é verdade?

De fato, se  $\mathbf{x}$  é viável, então

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Logo

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = 6.$$

Daí note que

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} - 6 = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq 0,$$

como queríamos. (explique por quê esta última desigualdade é verdadeira....)

O vetor  $(-1 \ 2)$  (que apareceu como uma mágica, eu sei) é um certificado de otimalidade da PL.

**Exercício 16.** Coloque a PL abaixo em FPI, e exiba um certificado de otimalidade.

$$\begin{aligned} \max \quad & (1 \ 1) \cdot \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

## 6.4 Resumo

Dada uma PL em FPI

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned}$$

esta PL é

- inviável se existir um vetor  $\mathbf{y}$  tal que

$$\mathbf{y}^T \mathbf{A} \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0.$$

- ilimitada se for viável e se existir um vetor  $\mathbf{d}$  tal que

$$\mathbf{Ad} = 0, \quad \mathbf{d} \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{d} > 0.$$

- resolvível com solução ótima  $\mathbf{z}$  se  $\mathbf{z}$  for viável e existir um vetor  $\mathbf{y}$  tal que

$$\mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T \mathbf{A} \leq 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{y}^T \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \mathbf{z}.$$

## 7 Simplex

Considere a seguinte PL

$$\begin{aligned} \max \quad & (3 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0) \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Claramente  $\mathbf{z} = (1 \ 1 \ 5 \ 5 \ 3)$  é uma solução viável. É possível melhorá-la? Qualquer solução que aumente  $z_1$  ou  $z_2$  vai melhorar a solução da PL. Vamos então manter  $z_2$  fixo e aumentar  $z_1$ , mas para isso teremos que diminuir  $z_3$ ,  $z_4$  e  $z_5$ . Teremos

$$\mathbf{z}(t) = (1+t \ 1 \ 5-2t \ 5-t \ 3-t)$$



permanece sendo uma solução viável desde que  $5 - 2t \geq 0$ ,  $5 - t \geq 0$  e  $3 - t \geq 0$ . O maior valor de  $t$  possível é, portanto  $t = 5/2$ . Daí

$$(7/2 \quad 1 \quad 0 \quad 5/2 \quad 1/2)$$

é uma nova solução que melhora a solução anterior.

Podemos agora repetir este processo para a variável  $z_2$  ? Como proceder?

## Aulas 4 e 5

### 8 Uma base de soluções viáveis

Dada uma PL em FPI

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned}$$

podemos sempre assumir que a matriz  $A$  está em um formato especial. O objetivo dos exercícios dirigidos a seguir é descobrirmos que formato é este.

**Exercício 17.** Considere a PL abaixo

$$\begin{aligned} \max \quad & (1 \ 2 \ 3) \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

É possível escrever uma PL equivalente a esta em que a matriz possua menos linhas?

**Exercício 18.** Considere a PL abaixo

$$\begin{aligned} \max \quad & (1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 1) \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Qual o posto dessa matriz? Ou seja, quantas colunas linearmente independentes existem? É possível reduzir o número de linhas?

**Exercício 19.** Considere a PL abaixo

$$\begin{aligned} \max \quad & (2 \ 3 \ 1) \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Suponha que  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ .

Elimine linhas, se for possível, e identifique colunas da matriz que formem uma matriz quadrada não-singular.

**Exercício 20.** Considere a seguinte PL em FPI

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Suponha que  $A$  possui  $m$  linhas e  $n$  colunas. Explique por que podemos assumir, sem qualquer prejuízo à solução da PL, que  $n \geq m$ , que há precisamente  $m$  colunas linearmente independentes em  $A$ .

Ao longo dos exercícios acima, vimos que sempre que uma PL estiver em FPI, podemos assumir que existe uma escolha de colunas para a matriz  $A$  que formam uma base para o espaço. Por exemplo, se essas colunas forem as primeiras  $n$  colunas, a matriz  $A$  estará na forma abaixo

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_B & A_N \end{array} \right) \quad (2)$$

onde  $A_B$  é uma matriz quadrada não singular, e  $A_N$  é uma matriz cujas colunas são combinações lineares das colunas de  $A_B$ . Note que pode haver diferentes escolhas para as matrizes  $A_B$  e  $A_N$  (elas podem estar intercaladas...), sempre dependendo da matriz original  $A$ .

Quando temos  $A\mathbf{x}$ , podemos separar as variáveis que compõem o vetor  $\mathbf{x}$  entre aquelas indexadas pelas colunas linearmente independentes e as outras. As variáveis de  $\mathbf{x}$  que correspondem às colunas de  $A_B$  são chamadas de variáveis básicas, ao passo que as demais são as variáveis não-básicas. No exemplo (1), teremos exatamente que o vetor  $\mathbf{x}$  está dividido como

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix},$$

onde o vetor  $\mathbf{x}_B$  possui as variáveis básicas, e  $\mathbf{x}_N$  as não-básicas. Note que, mesmo que as matrizes  $A_B$  e  $A_N$  estejam originalmente intercaladas em  $A$ , vale a igualdade abaixo:

$$A\mathbf{x} = A_B \mathbf{x}_B + A_N \mathbf{x}_N.$$

**Exercício 21.** No exercício 19, identifique as matrizes  $A_B$  e  $A_N$ , e os vetores  $\mathbf{x}_B$  e  $\mathbf{x}_N$ . Calcule  $A_B \mathbf{x}_B$  e  $A_N \mathbf{x}_N$  separadamente, e mostre que  $A\mathbf{x} = A_B \mathbf{x}_B + A_N \mathbf{x}_N$ .

Dada uma matriz  $A$  no formato de (2), e vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{b}$  tais que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

note que  $\mathbf{b}$  é uma combinação linear das colunas em  $A_B$ , ou seja, existe um vetor  $\mathbf{z}$  tal que  $A\mathbf{z} = \mathbf{b}$ , e

$$A_B \mathbf{z}_B = \mathbf{b} \quad \text{e} \quad \mathbf{z}_N = 0.$$

Um vetor  $\mathbf{z}$  como descrito acima é chamado de uma **solução básica da PL**.

**Exercício 22.** Novamente no exercício 19, ache uma solução básica.

Note que uma vez escolhida a matriz  $A_B$ , existe uma **única solução básica** associada  $\mathbf{z}$ , e ela é definida por  $\mathbf{z}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$ , e  $\mathbf{z}_N = 0$ , com

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_B \\ \mathbf{z}_N \end{pmatrix}.$$

Voltamos agora ao exemplo do fim da aula 3:

$$\begin{array}{ll} \max & (3 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{array}$$

Note que as colunas 3, 4 e 5 desta PL formam uma base, e que nesta base,  $A_B = I$ , e as entradas correspondentes de  $\mathbf{c}$  são 0.

**Definição 8.1.** Uma PL em FPI tal que  $A_B = I$  e  $\mathbf{c}_B = 0$  é uma PL em forma **canônica**.

Quando uma PL está em forma canônica e há uma solução básica viável, sempre é possível (tentar) melhorar a solução da maneira como fizemos no exemplo! Portanto o problema de achar a solução ótima de uma PL se reduz ao problema de colocar uma PL em forma canônica. O exemplo abaixo deverá ser esclarecedor.

**Exemplo 8.** Começamos com

$$\begin{array}{ll} \max & (3 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0) \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{array}$$

- (i) Esta PL já está em forma canônica.
- (ii) Achamos a solução básica - no caso,  $\mathbf{x} = (0 \ 0 \ 8 \ 8 \ 5)$ . Ela é viável, ou seja,  $\mathbf{x} \geq 0$ , e portanto prosseguimos.
- (iii) Identificamos no vetor  $\mathbf{c}$  uma entrada positiva. Escolhemos esta entrada. No caso, a primeira. Então alteramos esta solução  $\mathbf{x}$  aumentando o valor da variável  $x_1$  e deixando  $x_2$  fixo. Observe que se  $\mathbf{z} = (1 \ 0 \ -2 \ -1 \ -1)^T$ ,

$$A\mathbf{z} = 0,$$

e então achamos o maior  $t$  tal que  $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \geq 0$ . No caso,  $t = 4$ , logo temos a nova solução

$$\mathbf{x} = (4 \ 0 \ 0 \ 4 \ 1).$$

(iv) Queremos que esta se torne uma solução básica para uma PL em forma canônica. Logo devemos alterar a PL de modo que

- (a) as colunas 1, 4 e 5 correspondam a uma matriz identidade
- (b) a função objetivo seja 0 nas entradas 1, 4 e 5.

Para (a), fazemos eliminação Gaussiana. Teremos

$$\begin{aligned} \max \quad & (3 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0) \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Para (b), subtraímos a função objetivo por 3 vezes a primeira equação (e compensamos adicionando  $3 \times 4 = 12$ ). Portanto o problema de otimização não se altera, e teremos

$$\begin{aligned} \max \quad & (0 \ 1/2 \ -3/2 \ 0 \ 0) \mathbf{x} + 12 \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Note que a função objetivo não é mais linear, mas a adição de uma constante não afeta em qualquer maneira o problema de otimização. De fato, a solução básica

$$\mathbf{x} = (4 \ 0 \ 0 \ 4 \ 1)$$

satisfaz as equações da PL e possui valor objetivo igual a 12.

(v) Repetimos o item (iii). Agora só faz sentido aumentar  $x_2$ . Daí teremos que  $\mathbf{z} = (-1 \ 2 \ 0 \ -3 \ -1)$  é tal que

$$A\mathbf{z} = 0,$$

e  $\mathbf{x} + t\mathbf{z}$  apenas melhorará o valor objetivo para qualquer valor de  $t > 0$ . A única restrição é que  $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \geq 0$ . O maior  $t$  que torna isto possível é  $t = 1$ . A nova solução será

$$\mathbf{x} = (3 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0).$$

(vi) Repetimos o item (iv) - faça o passo a passo.

$$\begin{aligned} \max \quad & (0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1) \mathbf{x} + 13 \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Note que a solução básica

$$\mathbf{x} = (3 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0)$$

satisfaz as equações da PL e possui valor objetivo igual a 13.

- (vii) Repetimos (ou tentamos repetir) o item (iii). Note entretanto que não existe variável que faça sentido aumentar em  $\mathbf{x}$  tendo em vista o atual formato do vetor  $\mathbf{c}$ .
- (viii) A PL está resolvida. Este foi o método simplex.

**Exercício 23.** Note que o cálculo explícito dos vetores  $\mathbf{z}$  não é necessário (passo iii). A única coisa que você precisa fazer é, uma vez que a variável a ser aumentada seja decidida, achar a entrada da coluna associada que será transformada em 1, e portanto qual coluna deixa de fazer parte da identidade. Em outras palavras: você só precisa achar a coluna que entra na base, e a coluna que sai. Como fazer essa escolha?

**Exercício 24.** Refaça este exemplo, mas na primeira vez que chegar ao passo (iii), comece aumentando  $x_2$ , deixando  $x_1$  fixo. Daí pra frente, faça como achar melhor. Note que no final, o valor de ótimo precisa ser o mesmo.

Algumas observações:

- (i) Este método sempre resolverá uma PL. Nós entretanto não demonstraremos isto.
- (ii) Geometricamente, cada iteração dos pontos (ii)-(iv) correspondem a: achar uma solução na região viável, caminhar até uma face aumentando o valor da função objetivo, depois achar o melhor caminho para caminhar pela face até a próxima face.
- (iii) Na próxima seção, veremos uma maneira esquemática de repetirmos esses passos.

**Exercício 25.** Considere o sistema de equações abaixo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

e os vetores

- (a)  $(1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$
- (b)  $(2 \ -1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$
- (c)  $(1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$
- (d)  $(0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$
- (e)  $(0 \ 1/2 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 0 \ 1)$

Para cada um deles, decida se é uma solução básica ou não.

**Exercício 26.** Considere a PL em FPI abaixo.

$$\begin{aligned} \max \quad & (1 \ -2 \ 0 \ 1 \ 3) \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Construa PL equivalente em forma canônica para as bases formadas pelas colunas  $\{1, 4\}$  e pelas colunas  $\{3, 5\}$ . A solução básica correspondente é viável?

Decida se esta PL é viável ou inviável. Se for viável, construa uma PL equivalente em forma canônica cuja solução básica associada seja viável. Se for inviável, apresente um certificado.

**Exercício 27** (Só para o pessoal que gosta de matemática). O objetivo deste exercício é compreender melhor a geometria da região viável de uma PL, assim como a natureza das soluções básicas. Considere uma PL em FPI

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned}$$

que seja viável e limitada. Suponha que  $A$  é uma matriz  $m \times n$ ,  $n \geq m$ , e seu posto é igual a  $m$ .

- (a) Suponha que  $\mathbf{z}_1$  e  $\mathbf{z}_2$  são soluções viáveis. Mostre que para qualquer  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , o vetor

$$\mathbf{z} = \alpha \mathbf{z}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{z}_2$$

também é uma solução viável. (em particular, você estará mostrando que a região de viabilidade é convexa).

- (b) Mostre que o valor objetivo de  $\mathbf{z}$  não pode ser estritamente maior que ambos os valores objetivos de  $\mathbf{z}_1$  e  $\mathbf{z}_2$ , e que se  $\mathbf{z}_1$  e  $\mathbf{z}_2$  são soluções ótimas, então  $\mathbf{z}$  também é.
- (c) Mostre que  $\mathbf{z}$  não pode ser uma solução básica viável da PL.
- (d) Mostre que se  $\mathbf{w} > 0$  (ou seja, um vetor em que todas as entradas são positivas) e  $\mathbf{w}$  é viável, então existem  $\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{w}_2$  soluções viáveis tais que  $\mathbf{w} = 1/2(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$ , a não ser possivelmente no caso em que  $n = m$ .
- (e) Desafio: mostre que os vértices da região viável (ou seja, os pontos que não pertencem a um segmento viável) são exatamente as soluções básicas viáveis.

**Exercício 28.** Considere a PL

$$\begin{aligned} \max \quad & (5 \ 3 \ 0 \ 0 \ 1) \cdot \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Esta PL está na forma canônica para as colunas 3 e 4. Aplique o método simplex do Exemplo (8) para resolvê-la. O que aconteceu? Se você concluir algo interessante a respeito desta PL, ache um certificado para tal.

## 9 O simplex via tableaus

Nesta seção mostraremos como aplicar o simplex de modo mais enxuto.

Considere a PL

$$\begin{aligned} \max \quad & w = 0 + (2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0) \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

onde a variável  $w$  representa o valor objetivo. Note que esta PL já se encontra em forma canônica para a base viável formada pelas colunas 3, 4 e 5. Vamos reescrever as equações e a função objetivo como um sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Note que a primeira linha da matriz corresponde a  $w - 2x_1 - 3x_2 = 0$ , ou  $w = 2x_1 + 3x_2$ , que é o valor objetivo. Escrevemos agora a matriz aumentada deste sistema

$$T_1 = \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

No simplex, escolhemos uma entrada de  $\mathbf{c}$  que seja positiva. Como a matriz  $T_1$  possui  $-\mathbf{c}^T$  na primeira linha, faremos agora:

- (1) Escolhemos uma coluna cuja primeira entrada seja negativa. Digamos a 2a coluna.
- (2) Escolhemos agora uma linha da 2a a 5a tal que a razão entre os elementos da última coluna e da 2a coluna seja o menor possível. No caso, 3a linha.
- (3) Daí transformamos a 2a coluna usando eliminação Gaussiana, de modo que apenas o elemento na 3a linha e 2a coluna seja igual a 1, e o resto seja 0. Isso se chama “pivotar” o elemento (3,2).



$$T_2 = \left( \begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 & 1 & 9 \end{array} \right)$$

Repetimos agora na 3a coluna, pivoteando o elemento (2,3).

$$T_2 = \left( \begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 14 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

Repetimos agora na 5a coluna, pivoteando o elemento (4,5).

$$T_3 = \left( \begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 0 & 1/2 & 17 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & \boxed{1} & 1/2 & 3 \end{array} \right)$$

Não há mais elementos negativos na 1a linha, e de fato, a função objetivo agora é

$$w = 17 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5,$$

cujo valor máximo, igual a 17, ocorre com  $x_3 = x_5 = 0$ , e corresponde à solução básica viável

$$\mathbf{x} = (1 \quad 5 \quad 0 \quad 3 \quad 0),$$

que é facilmente observada em  $T_3$ .

## Aulas 6

### 10 Simplex

Ei-lo.

Método Simplex
<b>Input:</b> Uma PL e uma base viável de colunas $B$ . <b>Output:</b> Uma solução ótima, ou um certificado de que a PL é ilimitada.
1: Reescreva a PL para a forma canônica com respeito à base $B$ . Seja $\mathbf{x}$ a solução básica viável associada. 2: <b>Se <math>\mathbf{c}_N \leq 0</math>, então pare.</b> $\mathbf{x}$ é ótima. 3: Escolha um $k \in N$ tal que $\mathbf{c}_k > 0$ . 4: <b>Se <math>A_k \leq 0</math>, então pare.</b> A PL é ilimitada. 5: Seja $r$ o índice $j$ tal que o mínimo abaixo ocorre: $t = \min \left\{ \frac{\mathbf{b}_j}{A_{jk}} : A_{jk} > 0 \right\}.$ 6: Troque a $r$ -ésima (na ordem da matriz identidade) coluna de $B$ pela coluna $k$ . 7: Volte para 1.

Este algoritmo passeia de solução básica em solução básica até encontrar a melhor. Cada solução básica corresponde a precisamente um valor objetivo, e como há um número finito de soluções básicas, se garantirmos que a cada rodada o algoritmo pára ou aumenta o valor objetivo, então teremos que este algoritmo sempre termina.

Note que existe uma possibilidade, entretanto, em que este algoritmo não aumenta o valor objetivo. Isto poderá ocorrer se  $t = 0$  no passo 5. Eventualmente, poderemos acabar retornando a uma solução básica já visitada, e o algoritmo poderá entrar num loop. Como então garantir que isto nunca ocorra?

Regra de Bland:

- Se  $t = 0$  no passo (5), escolha o menor  $r \in B$  possível tal que  $\mathbf{b}_r = 0$ .

**Exercício 29.** Considere a PL em FPI com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Aplique o método simplex a esta PL iniciando com a base de colunas 1 e 4.
- Ache um certificado de que a PL é ótima ou ilimitada.

**Exercício 30.** Considere a PL em FPI dada por

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolva a PL usando o simplex.

**Exercício 31.** Dada a PL

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned}$$

e um vetor  $\mathbf{y}$  tal que  $\mathbf{y} \geq 0$  e  $\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{c}^T$ , mostre que nenhuma solução da PL pode ter valor objetivo maior que  $\mathbf{y}^T \mathbf{b}$ .

**Exercício 32.** Escreva um algoritmo baseado no simplex que resolve a PL

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

sem precisar convertê-la para um problema de maximização.

## 11 O problema de achar soluções viáveis

**Exemplo 9.** Considere a PL

$$\begin{aligned} \max \quad & (1 \ 2 \ -1 \ 3) \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ -2 & -9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Queremos apenas decidir por ora se esta PL é viável ou inviável. O primeiro passo é tornar  $\mathbf{b} \geq 0$ . Fazemos então

$$\begin{aligned} \max \quad & (1 \ 2 \ -1 \ 3) \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Agora construímos uma nova PL auxiliar em FPI que satisfaz a seguintes propriedades:

- (a) Possui uma solução viável óbvia.
- (b) É limitada, e nenhuma solução ótima pode ter valor objetivo maior que 0.
- (c) Uma solução ótima da nova PL de valor objetivo igual a 0 é uma solução viável da PL original, e se o ótimo for menor que 0, a PL original é inviável.

Considere a PL aplicada a vetores  $\mathbf{x}$  agora com 6 variáveis:

$$\begin{aligned} & \max \quad (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1) \mathbf{x} \\ & \text{sujeita a} \quad \left( \begin{array}{cccc|cc} 1 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Claramente

- (a)  $\mathbf{x} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 7 \ 13)$  é solução viável para esta PL (note que aqui foi extremamente importante que  $\mathbf{b} \geq 0$ ).
- (b) Esta PL é limitada e nenhuma solução desta PL pode ter valor objetivo maior que 0, já que  $\mathbf{x} \geq 0$  e  $\mathbf{c} \leq 0$ .
- (c) Usando o simplex (faça como exercício), descobriremos que

$$\mathbf{x} = (2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

é uma **solução ótima para a PL auxiliar**, e, portanto, como  $x_5 = x_6 = 0$ , esta solução leva à **solução viável da PL original**.

$$\mathbf{x} = (2 \ 1 \ 0 \ 0)$$

**Exemplo 10.** Considere agora a PL

$$\begin{aligned} & \max \quad (6 \ 1 \ -1) \mathbf{x} \\ & \text{sujeita a} \quad \left( \begin{array}{ccc} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Novamente, fazemos

$$\begin{aligned} & \max \quad (0 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1) \mathbf{x} \\ & \text{sujeita a} \quad \left( \begin{array}{ccccc} 5 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Esta PL é viável e limitada, com valor ótimo no máximo 0. Entretanto, ao resolvermos esta PL, obteremos o ótimo

$$\mathbf{x} = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 3),$$

cujo valor objetivo é  $-3$ . O que houve?

A PL deste exemplo é inviável, uma vez que qualquer solução viável da PL original corresponde a uma solução com valor objetivo 0 da PL auxiliar.

Ademais, um certificado de otimalidade desta PL para uma solução ótima  $\mathbf{x}$  é um vetor  $\mathbf{y}$  tal que

$$(a) \quad \mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T A \leq 0.$$

$$(b) \quad \mathbf{y}^T \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}.$$

Escolhendo  $\mathbf{y} = (2 \ -1)$  teremos um certificado de otimalidade para a PL auxiliar, que é ao mesmo tempo um certificado de inviabilidade para a PL original.

Resumindo: dada uma PL

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned}$$

onde  $A$  é  $m \times n$  e  $\mathbf{b} \geq 0$ , então construímos a PL auxiliar

$$\begin{aligned} \max \quad & (0 \ \cdots \ 0 \mid -1 \ \cdots \ -1) \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & (A \mid I) \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned}$$

onde há precisamente  $m$   $(-1)$ s na função objetivo, e a matrix identidade ao lado de  $A$  é de tamanho  $m \times m$ . Esta PL auxiliar é viável, seu ótimo é no máximo 0. Se seu ótimo é menor que 0, a PL original é inviável, e se seu ótimo for igual a 0, então qualquer vetor que atinja esse ótimo corresponde a uma solução viável da PL original.

**Exercício 33.** A PL abaixo é viável ou inviável?

$$\begin{aligned} \max \quad & (2 \ -1 \ 2) \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

**Exercício 34.** Suponha que uma dada PL seja inviável. Prove que um certificado de otimalidade para a PL auxiliar é também um certificado de inviabilidade para a PL original.

## 12 Um pouco mais de geometria

(este é um material de leitura opcional)

Dado um vetor  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , o conjunto de vetores  $\mathbf{x}$  que satisfaz

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = 0$$

é um hiperplano, ou seja, um subespaço de  $\mathbb{R}^n$  de dimensão  $n - 1$ . O vetor  $\mathbf{a}$  é o vetor diretor do hiperplano, ortogonal a todos os vetores que lá se encontram. Ao trocarmos  $=$  por  $\leq$  ou  $\geq$ , passamos a considerar a metade do  $\mathbb{R}^n$  que se encontra de um lado ou de outro do hiperplano. Por exemplo, o conjunto dos  $\mathbf{x}$  tais que

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq 0$$

é o conjunto de todos os vetores  $\mathbf{x}$  tais que o ângulo entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{a}$  está entre 0 e  $\pi/2$ . Tais conjuntos são chamados de hiperespaços. Ao adicionarmos uma constante, por exemplo

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq \beta,$$

estamos apenas transladando o hiperplano que serve de fronteira entre o hiperespaço e o seu complemento.

As restrições lineares de uma PL sempre são da forma

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \beta \quad \text{ou} \quad \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \beta \quad \text{ou} \quad \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq \beta.$$

Note que  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq \beta$  é equivalente a  $(-\mathbf{a}^T)\mathbf{x} \leq -\beta$ , e que  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = \beta$  é equivalente a simultaneamente termos  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \beta$  e  $(-\mathbf{a}^T)\mathbf{x} \leq -\beta$ . Portanto as restrições de uma PL sempre podem ser expressas usando  $\leq$ , e ao juntarmos todas elas, teremos

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \tag{*}$$

para uma certa matriz  $A$  e um vetor  $\mathbf{b}$ . Conjuntos de vetores  $\mathbf{x}$  satisfazendo (\*) são chamados de poliedros. Todo poliedro é uma interseção finita de hiperespaços.

**Toda PL consiste em otimizar uma função afim (linear adicionada de uma possível constante) em um poliedro.**

Dados dois pontos  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ , o segmento de reta entre eles pode ser expresso como

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 \text{ com } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Um conjunto  $C$  de pontos é chamado de convexo se para quaisquer dois pontos no conjunto, o segmento de reta entre eles também pertence ao conjunto.

**Theorem 12.1.** *Poliedros são convexos.*

**Demonstração.** Sejam  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  pontos satisfazendo  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ . Daí teremos que, para todo  $\lambda$  tal que  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,

$$A(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \leq \lambda \mathbf{b} + (1 - \lambda) \mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

□

**Exercício 35.** A reta entre dois pontos  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  é definida como

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por que não podemos usar a demonstração acima para mostrar que a reta entre dois pontos de um poliedro está sempre contida no poliedro?

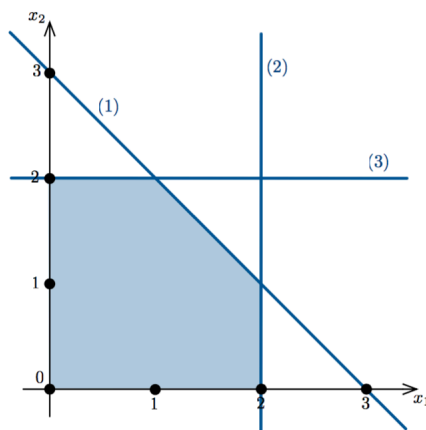
Um ponto  $\mathbf{x}$  em um poliedro  $P$  é chamado de ponto extremo se não há qualquer segmento em  $P$  que tenha  $\mathbf{x}$  como um ponto em seu interior. Nosso objetivo agora é entender como podemos identificar os pontos extremos de um poliedro olhando apenas para o conjunto de desigualdades  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$  que o define. Se  $\mathbf{x}_1$  é um ponto específico que satisfaz essas desigualdades, definimos como  $A^=$  a matriz associada a  $\mathbf{x}_1$  que contempla todas as linhas em que a inequação é uma igualdade, e analogamente  $\mathbf{b}^=$ . Ou seja,  $A^=\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}^=$ .

**Theorem 12.2.** *Seja  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$  um poliedro, e suponha que  $\mathbf{x}_1 \in P$ . Seja  $A^=\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}^=$  o conjunto de restrições com igualdade para  $\mathbf{x}_1$ . Então  $\mathbf{x}_1$  é um ponto extremo de  $P$  se, e somente se, o posto de  $A^=$  é igual a  $n$ .*

**Exemplo 11.** Considere o poliedro definido por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cujas região correspondente no  $\mathbb{R}^2$  é dada por



Pegamos por exemplo o ponto  $\mathbf{x} = (1 \ 1)$ . Segue que

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e portanto nenhuma das linhas corresponde a uma restrição com igualdade. Segue que  $A^=$  é a matriz vazia, de posto 0, e  $\mathbf{x}$  não é ponto extremo.

Considere agora  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Teremos

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

portanto a última linha é uma restrição com igualdade, e  $A^= = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{b}^= = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ . Como o posto de  $A^=$  é igual a 1, e não 2, este ponto  $\mathbf{x}$  não é um ponto extremo.

Considere agora  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Segue que

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

portanto as duas primeiras linhas são restrições com igualdade, e daí teremos

$$A^= = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b}^= = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Como o posto de  $A^=$  é 2, este ponto  $\mathbf{x}$  é um ponto extremo.

Apresentamos a demonstração do teorema.

**Demonstração.** Suponha que o posto de  $A^=$  é  $n$ , e suponha por contradição que  $\mathbf{x}$  não é ponto extremo, logo existem  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  distintos, e um  $\lambda$  entre 0 e 1, tais que  $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$ . Segue que

$$\mathbf{b}^= = A^=\mathbf{x} = A^=(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq \lambda\mathbf{b}^+ + (1-\lambda)\mathbf{b}^- = \mathbf{b}^=.$$

Portanto o sinal de desigualdade é uma igualdade, e daí segue que

$$A^=\mathbf{x}_1 = A^=\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}^=,$$

logo  $A^=(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 0$ , uma contradição ao fato de que  $A$  tem posto  $n$ .

Suponha agora que o posto de  $A^=$  seja menor que  $n$ , e portanto existe um vetor  $\mathbf{d} \neq 0$  tal que  $A^=\mathbf{d} = 0$ . Para todo  $\epsilon > 0$ , segue que  $\mathbf{x}$  é ponto médio entre  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + \epsilon\mathbf{d}$  e  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} - \epsilon\mathbf{d}$ . Vamos mostrar agora que tanto  $\mathbf{x}_1$  como  $\mathbf{x}_2$  estão em  $P$ . Note primeiro que  $A^=\mathbf{x}_1 = A^=\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}^=$ , já que  $A^=\mathbf{d} = 0$ , daí as únicas desigualdades em  $A\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}$  e  $A\mathbf{x}_2 \leq \mathbf{b}$  que faltam ser testadas são aquelas em que  $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$  ocorria como desigualdade estrita. Mas aí basta escolhermos  $\epsilon$  pequeno o suficiente para que a influência de  $A\mathbf{d}$  nestas desigualdades não seja relevante.  $\square$



Note que usando o teorema acima é possível mostrar com facilidade o desafio proposto na lista passada, ou seja, que os pontos extremos de poliedros correspondem a soluções básicas viáveis. Note o exercício abaixo.

**Exercício 36.** Considere o poliedro

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} \geq 0 \right\}.$$

Note que  $\mathbf{z} = (0 \ 0 \ 2 \ 1)^T$  é uma solução básica viável.

- (i) Reescreva as restrições que definem  $P$  para que apareçam apenas restrições com  $\leq$ .
- (ii) Use o Teorema (12.2) para mostrar que  $\mathbf{z}$  é um ponto extremo do poliedro.

Como vimos no final da lista passada, a solução ótima de uma PL sempre estará em um ponto de extremo, e portanto a estratégia de procurá-la passeando de solução viável para solução viável é uma estratégia eficaz.

Por fim, seja  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  um conjunto de pontos no  $\mathbb{R}^n$ . Uma combinação convexa desses pontos é um ponto  $\mathbf{x}$  que satisfaz

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{x}_m,$$

onde  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  para todo  $i$ , e  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ .

**Exercício 37.**

- (i) Considere três pontos não-colineares. Geometricamente, o que é o conjunto de todas as combinações convexas desses pontos?
- (ii) Mostre que se três pontos pertencem a conjunto convexo, então todas as combinações convexas também pertencem.
- (iii) Se convença, mas tente me convencer também, que um poliedro que não contenha uma semi-reta (ou se você preferir, um poliedro limitado) é precisamente o conjunto de combinações convexas dos seus pontos extremos.

## Aulas 7 e 8

### 13 Modelagem

**Exercício 38.** Uma refinaria processa vários tipos de petróleo. Cada tipo de petróleo possui uma planilha de custos diferente, expressando condições de transporte e preços na origem. Por outro lado, cada tipo de petróleo é mais ou menos apropriado para a produção de certos tipos de gasolina. Supondo que a refinaria trabalhe com uma linha de quatro tipos diferentes de petróleo e deseje produzir as gasolinas amarela, azul e superazul, modele o problema de achar a melhor estratégia para maximização de lucros. Suponha que não há perda volumétrica no processo da refinaria.

Tipo de petróleo	Quantidade máxima disponível (barril/dia)	Custo por barril/dia
1	3500	19
2	2200	24
3	4200	20
4	1800	27

Tipo de gasolina	Especificação	preço de venda R\$/barril
Superazul	não mais que 30% de 1 não menos que 40% de 2 não mais que 50% de 3	35
Azul	não mais que 30% de 1 não menos que 10% de 2	28
Amarela	não mais que 70% de 1	22

DICA: use 12 variáveis. Cada variável correspondendo a quanto de cada tipo de petróleo será usado em cada tipo de gasolina.

**Exercício 39.** Tente resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ x + y &= 1 \\ x + 3y &= 4 \\ -2x + 4y &= 3 \end{aligned}$$

Tentou? Agora formule o problema de achar um vetor  $(x, y)$  que mais se aproxime de resolver este sistema como uma PL. Ou seja, você deseja achar  $(x, y)$  tal que a soma

$$|2x + y + 1| + |x + y - 1| + |x + 3y - 4| + |-2x + 4y - 3|$$

seja mínima.

E se ao invés de minimizar a soma, você desejasse minimizar o maior dos valores absolutos. Ainda é possível modelar como uma PL?

## 14 O método simplex dual

Suponha que você queira resolver a seguinte PL:

$$(P) \quad \begin{aligned} \min \quad & (4 \ 8 \ 9) \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Ao escrever em FPI, notaremos um fato inconveniente. A base de variáveis de folga não será viável, pois a última entrada do vetor  $\mathbf{b}$  é negativa. Isso significa que primeiro precisaremos escrever a PL auxiliar para decidir se (P) é viável, e então eventualmente achar uma base viável para então colocarmos (P) em forma canônica.

Vamos ver uma forma melhor de resolver este problema. Note que o tableau da PL em FPI será o seguinte (lembre-se que transformamos num problema de maximização, e portanto multiplicamos o  $\mathbf{c}$  por  $-1$ , e depois por  $-1$  de novo para ir pro tableaux....):

$$\left( \begin{array}{ccc|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -8 \end{array} \right)$$

Vamos agora fazer modificações do tipo pivoteamento, de modo que o  $\mathbf{c}$  permaneça  $\geq 0$ , mas mudemos o sinal das entradas problemáticas de  $\mathbf{b}$ . Olhamos então a última linha, onde  $\mathbf{b}$  é negativo, e selecionamos a entrada negativa que minimiza

$$\frac{c_i}{-A_{3,i}}.$$

Teremos  $i = 1$ . Daí fazemos pivoteamento:

$$\left( \begin{array}{ccc|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-1} & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -8 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|cccc|c} 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 & 4 & -32 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 & -15 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 & 3 & -21 \\ 0 & 0 & -1 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 8 \end{array} \right)$$

Agora duas entradas de  $\mathbf{b}$  são negativas. Escolhemos a primeira, e na sua linha, há uma única entrada negativa, no caso será na coluna  $i = 2$ . Teremos

$$\left( \begin{array}{ccc|cccc|c} 8 & 0 & 20 & 0 & 0 & 9 & 8 & 0 & 20 & -152 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 0 & -2 & 15 \\ -4 & 1 & -5 & 0 & 0 & -9 & -4 & 1 & -5 & 39 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 8 \end{array} \right)$$

Note que  $\mathbf{c}^T \leq 0$ ,  $\mathbf{b} \geq 0$ , e a base das colunas 1, 2 e 5 é viável. Portanto achamos uma solução ótima! Em particular

$$\mathbf{x}^T = (8 \ 15 \ 0)$$

E o vetor  $\mathbf{y}^T = (8 \ 0 \ 20)$  é certificado (verifique!).

Resumindo, sabemos que  $B$  é uma base viável e ótima para uma PL se

(1)  $\mathbf{c} \leq 0$  e  $\mathbf{c}_B = 0$ .

(2)  $\mathbf{b} \geq 0$ .

A filosofia do simplex (versão primal) é a seguinte:

- (i) Encontra solução viável para a PL primal, ou seja, uma base satisfazendo (2) acima.
- (ii) Modifica esta solução em direção a (1), mantendo (2) verdade.

A filosofia do simplex (versão dual) é a seguinte:

- (i) Encontra solução satisfazendo (1).
- (ii) Modifica esta solução em direção a (2), mantendo (1).

**Exercício 40.** Resolva a PL

$$\begin{aligned} \min \quad & (2 \ 3 \ 4 \ 5) \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Note que ao colocá-la em FPI, teremos uma situação perfeita para aplicar o método simplex dual.

**Exercício 41.** Resolva a PL

$$\begin{aligned} \max \quad & (5 \ 4 \ 3) \mathbf{x} \\ \text{sujeita a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned}$$

usando o método simplex primal.

Uma vez que sua solução esteja pronta, suponha que você receba uma nova restrição adicional:

$$(1 \ 1 \ 1) \mathbf{x} \leq 1.$$

Qual a maneira mais eficiente de aproveitar a sua solução antiga para achar uma solução para a nova PL?

**Exercício 42.** Faça o mesmo no exercício 40. Suponha que após resolver a PL, o cliente chega e lhe diz que esqueceu a restrição mais importante, que é

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \leq 8.$$

Resolva a nova PL.

## 15 Revisão

Tragam suas perguntas.