

Fixpont-tétel

Kontrakció

$f : X \rightarrow X$ kontrakció, ha

$$\exists 0 \leq q < 1 : \rho(f(x), f(y)) \leq q \cdot \rho(x, y) \quad (x, y \in X)$$

Ekkor q kontrakciós együttható.

Tétel

Tegyük fel, hogy (X, ρ) metrikus tér teljes és $f : X \rightarrow X$ kontrakció. Ekkor

$$1^\circ \quad \exists! \alpha \in X : f(\alpha) = \alpha \quad (\alpha \text{ az } f \text{ fixpontja, } f \text{ helybenhagyja})$$

$$2^\circ \quad \forall x_0 \in X, x_{n+1} := f(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}) : (x_n) \text{ konvergens és } \lim(x_n) = \alpha$$

$$3^\circ \quad \forall n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \alpha) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot \rho(x_0, x_1)$$

Bizonyítás

$$1^\circ \quad \text{Ekőször bizonyítsuk, hogy } \forall k \in \mathbb{N} : \rho(x_k, x_{k+1}) \leq q^k \cdot \rho(x_0, x_1)$$

Teljes indukcióval, $k = 0$ esetén $\rho(x_0, x_1) \leq 1 \cdot \rho(x_0, x_1)$. Tegyük fel, hogy k esetén is igaz. Ekkor $k + 1$ - el

$$\rho(x_{k+1}, x_{k+2}) = \rho(f(x_k), f(x_{k+1})) \leq q \cdot \rho(x_k, x_{k+1}) \leq q \cdot q^k \cdot \rho(x_0, x_1) = q^{k+1} \cdot \rho(x_0, x_1)$$

tehát minden k - ra igaz az állítás.

$$2^\circ \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n, \implies \rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_m) \leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \rho(x_{n+2}, x_m) \leq \dots \leq \sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1})$$

$$1^\circ \text{ miatt ez}$$
$$\text{becsülhető} \leq \rho(x_0, x_1) \cdot \sum_{k=n}^{m-1} q^k \leq \rho(x_0, x_1) \cdot \sum_{k=n}^{\infty} q^k = \rho(x_0, x_1) \cdot \frac{q^n}{1-q} \rightarrow$$

$$0 \quad (n, m \rightarrow +\infty) \quad (\text{mértani sor összegképlete})$$

Összességében $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_0, x_1) \cdot \frac{q^n}{1-q}$, a majoráns kritérium miatt $\rho(x_n, x_m)$ is 0-ba tart, ami azt jelenti, hogy (x_n) Cauchy-sorozat $\implies \exists \alpha := \lim(x_n)$

3° Mivel ρ metrika, ezért

$$0 \leq \rho(f(\alpha), \alpha) \leq \rho(f(\alpha), f(x_n)) + \rho(f(x_n), \alpha).$$

Ez felülről becsülhető $q \cdot \rho(x_n, \alpha) + \rho(x_{n+1}, \alpha)$ - val, ami tart 0-hoz ahogy n tart a végtelenhez. Ez azt jelenti, hogy $\rho(f(\alpha), \alpha) = 0$ tehát $f(\alpha) = \alpha$.

4° T.f.h. $\beta \in X$ úgy, hogy $f(\beta) = \beta$. Ekkor $0 \leq \rho(\alpha, \beta) \leq \rho(f(\alpha), f(\beta))$ ami felülről becsülhető $q \cdot \rho(\alpha, \beta)$ - val. Ezt átrendezve $(1 - q) \cdot \rho(\alpha, \beta) \leq 0$, ahol $(1 - q) > 0$ és $\rho(\alpha, \beta) \geq 0$. Ebből következik, hogy $\rho(\alpha, \beta) = 0$ tehát $\alpha = \beta$.

$$5^\circ \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n : \rho(x_n, \alpha) \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, \alpha) \leq (\text{lásd } 2^\circ) \leq \rho(x_0, x_1) \cdot \frac{q^n}{1-q} + \rho(x_m, \alpha)$$

$$\text{Viszont } \rho(x_m, \alpha) \rightarrow 0 \ (m \rightarrow +\infty) \text{ ezért } \rho(x_n, \alpha) \leq \rho(x_0, x_1) \cdot \frac{q^n}{1-q}$$