Diszkrét matematika 1

Halmazok

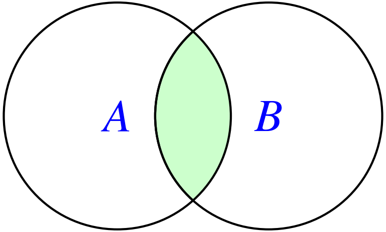
Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2025 tavasz

Halmazok

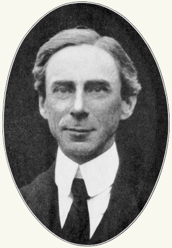
$A \cap B$



Halmazok

- Mi naiv halmazelmélettel foglalkozunk:
  halmazok = elemek gondolati burka
- azonban ez nem a mindig elég

Russell paradoxon (Bertrand Russell, 1872 - 1970)



- Egy halmaz legyen jó, ha nem eleme saját magának.
- Egy halmaz legyen rossz, ha eleme saját magának.
- Legyen A a jó halmazok halmaza.
- Ekkor A jó vagy rossz?

- Ha A jó halmaz $\Longrightarrow$ A eleme önmagának (definíció szerint) $\Longrightarrow$ A rossz $\lightning$
- Ha A rossz halmaz $\Longrightarrow$ A nem eleme önmagának (definíció szerint) $\Longrightarrow$ A jó $\lightning$

Halmazok

- Mi naiv halmazelmélettel foglalkozunk:
  halmazok = elemek gondolati burka

Meghatározottsági axióma

Egy halmazt az elemei egyértelműen meghatároznak.

Speciálisan:

- Két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik.
$$\{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \{1,3,2\} = \ldots$$
- Egy halmaznak egy elem csak egyszer lehet eleme.
$$\{1,2,3\} = \{1,1,2,3\} = \{1,1,2,2,3\} = \{1,1,2,2,3,3\} = \ldots$$
- Üres halmaz: $\emptyset = \{\}$. **Figyelem** $\emptyset \neq \{\emptyset\}$!

Részhalmazok

Definíció

- Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, $A \subset B$, ha $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$.
- Ha $A \subset B$-nek, de $A \neq B$, akkor A valódi részhalmaza B-nek: $A \subsetneq B$.

A részhalmazok tulajdonságai:

Állítás (Biz.: NB)

1. $\forall A: \ A \subset A$ (reflexivitás).
2. $\forall A, B, C: \ A \subset B \ \wedge \ B \subset C \ \Rightarrow \ A \subset C$ (tranzitivitás).
3. $\forall A, B: \ A \subset B \ \wedge \ B \subset A \ \Rightarrow \ A = B$ (antiszimmetria).

Művelet halmazokkal – unió

Definíció

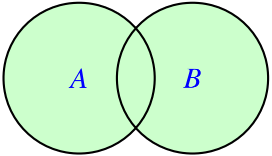
Legyen A, B két halmaz. A és B **uniója**,

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Általában: legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer (halmaz, mely elemei halmazok). Ekkor

$$\cup\mathcal{A} = \cup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x : \exists A \in \mathcal{A}, x \in A\}.$$

$A \cup B$



Példa

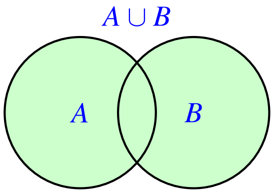
- $\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\} = \cup\{\{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$
- $\{M \in \mathbb{R}^{5\times5} : \det M = 0\} \cup \{M \in \mathbb{R}^{5\times5} : \det M \neq 0\} = \mathbb{R}^{5\times5}$
- $\cup_{r \in \mathbb{R}} \{\{M \in \mathbb{R}^{5\times5} : \det M = r\}\} = \mathbb{R}^{5\times5}$

Művelet halmazokkal – unió

Az unió tulajdonságai

Állítás (Biz.: részben)

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup B = B \cup A$ (kommutativitás)
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asszociativitás)
4. $A \cup A = A$
5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$



Bizonyítás.

5. Két irányt külön bizonyítjuk!

   $\Rightarrow$: $A \subset B \Rightarrow A \cup B \subset B$, de $A \cup B \supset B$ mindig teljesül, így $A \cup B = B$.

   $\Leftarrow$: Ha $A \cup B = B$, akkor A minden eleme eleme B-nek. $\square$

Művelet halmazokkal – metszet

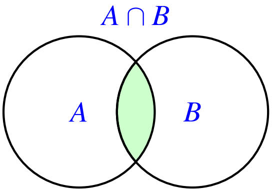
Definíció

Legyen A, B két halmaz. A és B metszete,

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$. Általában: legyen $\mathcal{A}$

egy halmazrendszer (halmaz, mely elemei halmazok). Ekkor

$$\cap\mathcal{A} = \cap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x : \forall A \in \mathcal{A}, x \in A\}.$$



Példa

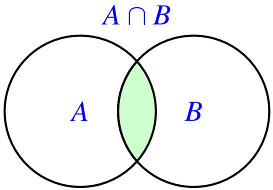
- $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\} = \cap\{\{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$
- $\left\{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} : M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \mathbf{0}\right\} \cap \left\{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} : M\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \mathbf{0}\right\} = \{\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2\times 2}\}$

Művelet halmazokkal – metszet

A metszet tulajdonságai

Állítás

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás)
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asszociativitás)
4. $A \cap A = A$
5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

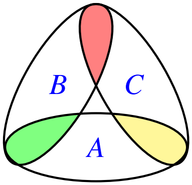


Diszjunkt halmazok

Definíció

- Az A, B halmazok diszjunktak, ha $A \cap B = \emptyset$.
- Legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer (halmaz, mely elemei halmazok). Ekkor $\mathcal{A}$ diszjunkt, ha $\cap\mathcal{A} = \emptyset$.
- Legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer (halmaz, mely elemei halmazok). Ekkor $\mathcal{A}$ elemei páronként diszjunktak, ha

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, A \neq B : A \cap B = \emptyset$$



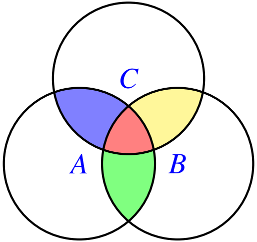
Megjegyzés:

- páronként diszjunkt $\Longrightarrow$ diszjunkt
- de diszjunkt $\not\Longrightarrow$ páronként diszjunkt

Példa

- Legyen $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ $C = \{2, 3\}$. A, B, C diszjunktak, de nem páronként diszjunktak.

Az unió és metszet disztributivitása.



Állítás

Legyenek A, B, C tetszőleges halmazok. Ekkor

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Bizonyítás.

1. $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$.
   Így x pontosan akkor eleme a baloldalnak, ha
   $$x \in A \ \wedge \ x \in B \text{ vagy } x \in A \ \wedge \ x \in C,$$
   azaz $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. HF, hasonló

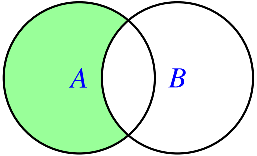
$\square$

Különbség, komplementer

Definíció

Két A, B halmaz különbsége

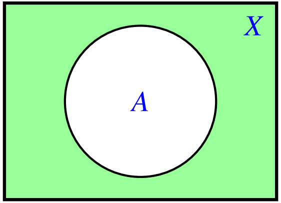
$$A \setminus B = \{a \in A : a \notin B\}$$



Definíció

Legyen X egy rögzített alaphalmaz. Ekkor A halmaz komplementere

$$\overline{A} = X \setminus A = \{a \in X : a \notin A\}.$$



Állítás (Biz.: gyakon)

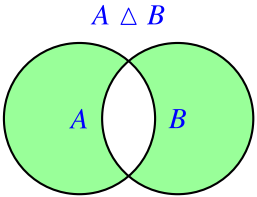
- $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (1. de Morgan szabály)
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (2. de Morgan szabály)

Szimmetrikus differencia

Definíció

Két A, B halmaz szimmetrikus differenciája

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Megjegyzés: Ekvivalens definíció a szimmetrikus differenciára

$$A \triangle B = \{a : (a \in A) \oplus (a \in B)\}$$

Hatványhalmaz

Definíció

Egy A halmaz hatványhalmaza $\mathcal{P}(A) = 2^A = \{B : B \subset A\}$, A összes részhalmazának halmaza.

Példa

- $\mathcal{P}(\emptyset) = 2^\emptyset = \{\emptyset\}$ (egyelemű halmaz!)
- $\mathcal{P}(\{a\}) = 2^{\{a\}} = \{\emptyset, \{a\}\}$
- $\mathcal{P}(\{a,b\}) = 2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

Egy véges A halmaz elemszámát jelöljük $|A|$-val.

Állítás (Biz. később)

Legyen A egy véges halmaz. Ekkor $|\mathcal{P}(A)| = \left|2^A\right| = 2^{|A|}$.