2. röpdolgozat (3. gyakorlaton)

1. Hogyan értelmezi a függvényt?

1. Definíció. *Legyen A és B tetszőleges nemüres halmaz. A*

$$\emptyset \neq f \subset A \times B$$

hozzárendelést **függvénynek** *nevezzük, ha*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad \text{esetén} \quad \exists!\ y \in \mathcal{R}_f \colon (x, y) \in f.$$

Az y elemet az f függvény x helyen felvett **helyettesítési értékének** *nevezzük és az $f(x)$ szimbólummal jelöljük. Ekkor azt is mondjuk, hogy az f függvény x-hez az $f(x)$ függvényértéket* **rendeli**.

2. Mit jelent az f ∈A⟶B szimbólum?

$$\boxed{f \in A \to B} \quad : \iff \quad f \subset A \times B \text{ függvény és } \mathcal{D}_f \subset A.$$

3. Mit jelent az f : A⟶B szimbólum?

$$\boxed{f : A \to B} \quad : \iff \quad f \subset A \times B \text{ függvény és } \mathcal{D}_f = A.$$

4. Deniálja a halmaznak függvény által létesített képét!

3. Definíció. *Legyen $f : A \to B$ egy adott függvény és $C \subset A$. Ekkor* **a C halmaz f által létesített képén** *az*

$$f[C] := \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in C \right\} = \left\{ y \in B \;\middle|\; \exists x \in C : \ y = f(x) \right\} \subset B$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f[\emptyset] = \emptyset$.

5. Deniálja a halmaznak függvény által létesített ősképét!

4. Definíció. *Legyen* $f : A \to B$ *egy adott függvény és* $D \subset B$. *Ekkor* **a D halmaz f által létesített ősképén** *az*

$$f^{-1}[D] := \Big\{x \in \mathcal{D}_f \ \Big| \ f(x) \in D\Big\} \subset A$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.

6. Mikor nevez egy függvényt invertálhatónak (vagy injektívnek)?

3. Definíció. *Az* $f : A \to B$ *függvényt* **invertálhatónak** (**egy-egyértelműnek** *vagy* **injektívnek**) *nevezzük akkor, ha a* $\mathcal{D}_f = A$ *értelmezési tartomány bármely két különböző pontjának a képe különböző, azaz*

$$(\triangle) \qquad \forall x, t \in \mathcal{D}_f, \quad x \neq t \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(t).$$

7. Deniálja az inverz függvényt!

4. Definíció. *Legyen* f *egy invertálható függvény, azaz tegyük fel, hogy*

$$\forall y \in \mathcal{R}_f\text{-hez } \exists!\ x \in \mathcal{D}_f \colon f(x) = y.$$

Ekkor az f ***inverz függvényét*** (*vagy röviden* ***inverzét***) *így értelmezzük:*

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \quad \text{amelyre} \quad f(x) = y.$$

8. Mi a deníciója az összetett függvénynek?

5. Definíció. *Tegyük fel, hogy* $f : A \to B$ *és* $g : C \to D$ *olyan függvények, amelyekre*

$$\Big\{x \in \mathcal{D}_g \ \Big| \ g(x) \in \mathcal{D}_f\Big\} \neq \emptyset.$$

Ebben az esetben az f (**külső**) *és a* g (**belső**) *függvény* **összetett függvényét** (*vagy más szóval* f *és* g **kompozícióját**) *az* $f \circ g$ *szimbólummal jelöljük, és így értelmezzük:*

$$f \circ g : \Big\{x \in \mathcal{D}_g \ \Big| \ g(x) \in \mathcal{D}_f\Big\} \to B, \qquad \big(f \circ g\big)(x) := f\big(g(x)\big).$$