# Numerikus módszerek 2.

## 1. előadás: A sajátértékprobléma (SÉP) numerikus megoldása

Krebsz Anna

ELTE IK

# Tartalomjegyzék

# Emlékeztető

**Feladat**

Keressük egy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix $\lambda$ sajátértékét és $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ sajátvektorát, azaz

$$Av = \lambda\, v, \qquad \lambda = ?, v = ?$$

**Szemléltetés:** A Matlab *eigshow* függvényével.

# Sajátértékprobléma alkalmazása

- Többváltozós statisztikában: főkomponensanalízis, faktoranalízis a változók számának csökkentésére (közgazdaságtan).
- Differenciálegyenletek stabilitási problémái (fizika, numerikus módszerek).
- Rezgési és rezonancia problémák (mérnöki tudományok). Fontos a rezgő rendszer sajátfrekvenciáját ismerni tervezéskor, mert ha rezonancia lép fel, az tönkreteszi a rendszert.
- Internetes oldalak rangsorolásánál hatványmódszert alkalmaznak normálás nélkül. Lásd SG könyve.

**Definíció:** Sajátérték, sajátvektor

A $\lambda \in \mathbb{C}$ számot az $A$ mátrix *sajátértékének*, a $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ vektort az $A$ *sajátvektorának* nevezzük, ha $Av = \lambda\, v$.

**Definíció:** Karakterisztikus polinom

Az $A$ mátrix karakterisztikus polinomja $p(\lambda) = \det(A - \lambda\, I)$.

**Tételek:**

- 1. $\lambda$ sajátértéke $A$-nak $\Leftrightarrow \quad p(\lambda) = 0$.
- 2. Minden sajátértékhez tartozik sajátvektor.
- 3. Ha $v \neq 0$ sajátvektora $A$-nak, akkor $c \neq 0$ esetén $cv$ is sajátvektor.
- 4. A különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

**Definíció:** A sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása

Egy $\lambda$ sajátérték *algerai multiplicitása* a gyök $p(\lambda)$-beli multiplicitása. A továbbiakban $m_A(\lambda)$-val jelöljük.
Egy $\lambda$ sajátérték *geometriai multiplicitása*

$$m_G(\lambda) := \dim W_\lambda = \dim(\{v \in \mathbb{C}^n : Av = \lambda v\}).$$

**Definíció:** Mátrixok hasonlósága

Az $A$ és $B$ *mátrixok hasonlóak*, ha $\exists\ T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertálható mátrix, melyre $B = T^{-1}AT$. A $T$ mátrixot *transzformációs mátrixnak* nevezzük.

**Definíció:** Diagonalizálhatóság

Az $A$ mátrix *diagonalizálható*, ha létezik olyan $T$ invertálható mátrix, hogy $T^{-1}AT = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

**Megj.:** Ekkor $T$ oszlopai az $A$ sajátvektorai, vagyis létezik sajátvektorokból álló bázis.

## Tételek:

- 5. Tetszőleges $\lambda$ sajátérték esetén $m_A(\lambda) \geq m_G(\lambda)$.
- 6. Ha $A$ és $B$ hasonlóak ($B = T^{-1}AT$), akkor a sajátértékeik azonosak. Ha $v$ az $A$ sajátvektora, akkor $T^{-1}v$ a $B$ sajátvektora. (Biz: Hf.)
- 7. Ha $A$ és $B$ hasonlóak ($B = T^{-1}AT$), akkor
  - a) $\det(A) = \det(B)$ és
  - b) $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$. (Biz: Hf.)
- 8. $A$ diagonalizálható $\Leftrightarrow \ \forall \ \lambda$ sajátértékre $m_A(\lambda) = m_G(\lambda)$.

**1. Példa:** Nem szimmetrikus mátrix, mely diagonalizálható

Készítsük el a példa mátrixunk diagonális alakját.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -5 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Első lépésben számítsuk ki a mátrix sajátértékeit a karakterisztikus polinom segítségével.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ -5 & -2-\lambda & -5 \\ 5 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (-2-\lambda)[(-2-\lambda)(3-\lambda)] = 0$$

Innen a sajátértékek

$$\lambda_{1,2} = -2, \quad \lambda_3 = 3.$$

A $-2$ sajátérték algerai multiplicitása 2, mivel 2-szeres gyöke a karakterisztikus polinomnak.
A 3 sajátérték algebrai multiplicitása 1. Jelöléseinkkel felírva

$$m_A(-2) = 2, \;\; m_A(3) = 1.$$

Mindegyik sajátértékhez meghatározunk lineárisan fgt. sajátvektor(-oka)t.
$\lambda_{1,2} = -2$ esetén a következő LER-t kell megoldanunk:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -5 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mivel a mátrix rangja 1, így a homogén LER-nek két lineárisan független megoldása van.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$W_{-2} = \mathrm{Span}\,(v_1, v_2) =< v_1, v_2 >, \;\; m_G(-2) = \dim(W_{-2}) = 2$$

$\lambda_3 = 3$ esetén a következő LER-t kell megoldanunk:

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & -5 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A 3-hoz tartozó sajátvektor, sajátaltér és geometriai multiplicitás a jelöléseinkkel felírva

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad W_3 = \mathrm{Span}\,(v_3) =< v_3 >, \quad m_G(3) = \dim(W_3) = 1.$$

A kapott sajátvektorokat egymás mellé helyezve felírható a transzformációs mátrix, a diagonális alakot a sajátértékek segítségével tudjuk felírni. Ügyeljünk sorrendre!

A transzformáció mátrix és a diagonális alak:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ezek felhasználásával

$$T^{-1}AT = D.$$

Ha a $T$ mátrixot az oszlopai segítségével írjuk fel, akkor

$$AT = TD$$

oszloponként adja az egyes sajátértékekhez tartozó sajátegyenletet.

**2. Példa:** Nem szimmetrikus mátrix, mely nem diagonalizálható

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Első lépésben számítsuk ki a mátrix sajátértékeit a karakterisztikus polinom segítségével.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 8 & 4-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^3 = 0$$

Innen a sajátértékek

$$\lambda_{1,2,3} = 4.$$

A 4 sajátérték algerai multiplicitása 3, mivel 3-szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak. Jelöléseinkkel felírva $m_A(4) = 3$.

Meghatározunk a 4-hez tartozó lineárisan független sajátvektorokat.
$\lambda_{1,2,3} = 4$ esetén a következő LER-t kell megoldanunk:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mivel a mátrix rangja 1, így a homogén LER-nek két lineárisan független megoldása van.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sikerült úgy megadnunk a két vektort, hogy merőlegesek egymásra, ezért a 4-hez tartozó sajátaltérnek egy két elemű ortogonális bázisát adtuk meg. Jelöléseinkkel

$$W_4 = \mathrm{Span}\,(v_1, v_2) = < v_1, v_2 >, \;\; m_G(4) = \dim(W_4) = 2.$$

**3. Példa:** Szimmetrikus mátrix diagonalizálása ortogonális hasonlósági transzformációval

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Első lépésben számítsuk ki a mátrix sajátértékeit a karakterisztikus polinom segítségével.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] - (-1)[-(2-\lambda)] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = 0$$

Innen a sajátértékek nagyság szerinti sorrendbe rendezve

$$\lambda_2 = 2, \quad \lambda_{3,1} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Mivel a sajátértékek különbözők, ezért mindegyik sajátérték algebrai multiplicitása 1, így a geometriai multiplicitás is 1. Jelöléseinkkel felírva

$$m_A(\lambda_i) = 1, \;\; m_G(\lambda_i) = 1 \;\; (i = 1, 2, 3).$$

Mindegyik sajátértékhez meghatározunk egy sajátvektort.
$\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}$ esetén a következő LER-t kell megoldanunk:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A $2 - \sqrt{2}$-höz tartozó sajátvektor

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A sajátaltér és geometriai multiplicitás a jelöléseinkkel felírva

$$W_{2-\sqrt{2}} = \mathrm{Span}\,(v_1) =< v_1 >, \;\; m_G(2-\sqrt{2}) = \dim(W_{2-\sqrt{2}}) = 1.$$

$\lambda_2 = 2$ esetén a következő LER-t kell megoldanunk:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A 2-höz tartozó sajátvektor, sajátaltér és geometriai multiplicitás a jelöléseinkkel felírva

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \mathrm{Span}\,(v_2) =< v_2 >, \quad m_G(2) = \dim(W_2) = 1.$$

$\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$ esetén a következő LER-t kell megoldanunk:

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A $2 + \sqrt{2}$-höz tartozó sajátvektor,

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

A sajátaltér és geometriai multiplicitás a jelöléseinkkel felírva

$$W_{2+\sqrt{2}} = \mathrm{Span}\,(v_3) =< v_3 >, \ \ m_G(2+\sqrt{2}) = \dim(W_{2+\sqrt{2}}) = 1.$$

A kapott sajátvektorokat egymás mellé helyezve (a sajátértékek nagyság szerinti sorrendjében) felírható a transzformációs mátrix. A diagonális alakot a sajátértékek segítségével tudjuk felírni. Ügyeljünk sorrendre!

$$T = [v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A hasonlósági transzformációt elvégezve

$$T^{-1}AT = D = \begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Figyeljük meg, hogy a különböző sajátértékekhez megadott sajátvektorok páronként merőlegesek. Normálva őket ortonormált vektorokat kapunk, melyekkel az ortogonális transzformáció előállítható.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} = Q^T$$

A $Q$ ortogonális mátrix-szal elvégzett hasonlósági transzformáció után

$$Q^T A Q = D = \begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

**4. Példa:** Szimmetrikus mátrix diagonalizálása ortogonális transzformációval

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás HF vagy gyakorlaton.

**5. Példa:** Nem szimmetrikus mátrix, mely $\mathbb{C}$ felett diagonalizálható

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Megjegyzések:**

- A mátrix sajátértékei komplexek, ezért $\mathbb{R}$-ben nem diagonalizálható.
- A mátrix normális, ezért $\mathbb{C}$-ben unitér transzfomációval diagonalizálható.

Első lépésben számítsuk ki a mátrix sajátértékeit a karakterisztikus polinom segítségével.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Innen a sajátértékek

$$\lambda_{2,1} = \pm i \in \mathbb{C}.$$

Mindkét sajátérték algerai multiplicitása 1. Jelöléseinkkel felírva

$$m_A(-i) = 1, \;\; m_A(+i) = 1.$$

Mindegyik sajátértékhez meghatározunk egy sajátvektort.
$\lambda_1 = -i$ esetén a következő LER-t kell megoldanunk:

$$\begin{bmatrix} +i & -1 \\ 1 & +i \end{bmatrix} \cdot v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A $-i$-hez tartozó sajátvektor, sajátaltér és geometriai multiplicitás a jelöléseinkkel felírva

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \;\; W_{-i} = \mathrm{Span}\,(v_1) =< v_1 >, \;\; m_G(-i) = \dim(W_{-i}) = 1.$$

$\lambda_2 = +i$ esetén a következő LER-t kell megoldanunk:

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \cdot v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A $+i$-hoz tartozó sajátvektor, sajátaltér és geometriai multiplicitás a jelöléseinkkel felírva

$$v_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \;\; W_{+i} = \mathrm{Span}\,(v_2) =< v_2 >, \;\; m_G(+i) = \dim(W_{+i}) = 1.$$

A kapott sajátvektorokat egymás mellé helyezve felírható a transzformációs mátrix, a diagonális alakot a sajátértékek segítségével tudjuk felírni. Ügyeljünk sorrendre!

A transzformáció mátrix és a diagonális alak:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & +i \end{bmatrix}$$

Ezek felhasználásával

$$T^{-1}AT = D.$$

Vegyük észre, hogy $T$ oszlopai merőlegesek egymásra a komplex skaláris szorzat szerint:

$$< v_1; v_2 >= v_2^* \cdot v_1 = \begin{bmatrix} -i & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = -i + i = 0.$$

Ha T oszlopait normáljuk akkor unitér mátrixot kapunk.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Ezek felhasználásával

$$U^* A U = D = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & +i \end{bmatrix}.$$

A fentiek magyarázata, hogy $A$ normális mátrix, vagyis $A^* A = A A^*$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

## Jordan-normálforma

$\forall\ A \in \mathbb{C}^{n \times n}: \ \ \exists\ X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertálható mátrix, hogy $X^{-1}AX = J = \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_m)$, ahol

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i},$$

Jordan-blokk, melynek átlójában azonos sajátértékek állnak, $m \in \mathbb{N}$ és $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$.

Nem bizonyítjuk.

**Megjegyzések:**

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

- $J_i$ karakterisztikus polinomja $\det(J_i - \lambda I) = (\lambda_i - \lambda)^{n_i}$, így a sajátérték algebrai multiplicitása $m_A(\lambda_i) = n_i$.
- A geometriai multiplicitása $m_G(\lambda_i) = 1$, mert

  $$rang(J_i - \lambda_i I) = n_i - 1.$$

  Tehát egy lineárisan független sajátvektor tartozik hozzá.
- Minden $\lambda_i$ sajátértékhez egy vagy több Jordan-blokk tartozik.

**Példa:** Jordan-normálformára

Az alábbi $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$-es mátrixhoz létezik $X \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ invertálható mátrix, hogy $X^{-1}AX = J = \operatorname{diag}(J_1, J_2, J_3)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A transzformációs mátrix és inverze:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A Jordan-forma 3 Jordan-blokkal:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; J_2 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \; J_3 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix},$$

A $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 2$ sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása:

$$m_A(1) = 3, \quad m_G(1) := \dim W_1 = \dim(\{v \in \mathbb{R}^4 : Av = v\}) = 2$$

$$m_A(2) = 1, \quad m_G(2) := \dim W_2 = \dim(\{v \in \mathbb{R}^4 : Av = 2v\}) = 1$$

**Schur-tétel**

$\forall\, A \in \mathbb{C}^{n\times n}: \;\; \exists\, U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitér mátrix, hogy $U^*AU = R$ felsőháromszög-mátrix.

**Biz.:** Teljes indukcióval végezzük a bizonyítást, de csak egy lépést végzünk. A többi analóg módon végig gondolható.

A mátrix sajátértékei és sajátvektorai segítségével elkészítjük az $U$ unitér hasonlósági transzformációt.

Jelöljük $\lambda_1$-gyel az A mátrix sajátértékét és $v_1 \neq 0$-val a hozzá tartozó normált sajátvektort ($\|v_1\|_2 = 1$). (Ha $v_1$ nem normált, akkor normáljuk le.)

**Biz. folyt.:** Írjuk fel azt a komplex Householder-transzformációt, melyre $H_1 v_1 = e_1$.

$$u_1 := \frac{v_1 - e_1}{\|v_1 - e_1\|_2} \quad \Rightarrow \quad H_1 := H(u_1) = I - 2 \cdot u_1 u_1^*$$

Ha $v_{11} > 0$, akkor $-v_1$-et válasszuk $v_1$ helyett, hogy a számlálóban biztos ne legyen nullvektor. Ekkor

$$H_1 v_1 = e_1 \quad \Rightarrow \quad H_1 e_1 = H_1(H_1 v_1) = v_1.$$

A hasonlósági traszformációt alkalmazva a kapott mátrix 1. oszlopa

$$H_1 A H_1 e_1 = H_1(Av_1) = H_1(\lambda_1 v_1) = \lambda_1 (H_1 v_1) = \lambda_1 e_1.$$

Tehát

$$\widetilde{A}_1 := H_1 A H_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & x & x & x \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & A_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right].$$

**Biz. folyt.:** A hasonlósági transzformáció miatt $A$ és $\widetilde{A}_1$ sajátértékei azonosak, így $A_2$ sajátértékei: $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Folytassuk tovább az eljárást $A_2$-re. Ha elkészült $A_2$-re az $(n-1) \times (n-1)$-es méretű $H_2$ Householder transzformáció és elvégeztük vele a hasonlósági transzformációt $A_2$-n, akkor a következő alakot kapjuk

$$\widetilde{A}_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} H_1 A H_1 \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & x & x \\ 0 & \lambda_2 & x \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}.$$

Ezzel $n-1$ lépésben felsőháromszög alakra hoztuk $A$-t. Nyilván a felhasznált Householder transzformációk unitérek és a szorzatuk ($U$) is az. Mivel minden mátrixnak $\mathbb{C}$ felett annyi sajátértéke van amennyi a mérete és minden sajátértékhez tartozik sajátvektor, ezért a fenti traszformációk mindig léteznek. $\square$

## Normális mátrixok diagonalizálása

$A$ normális mátrix ($A^*A = AA^*$) $\Leftrightarrow \exists\ U$ unitér mátrix, melyre $U^*AU = D$ diagonális.

**Biz.:** $\Leftarrow$: $A = UDU^*$-ra ellenőrizzük a normalitást:

$$AA^* = (UDU^*)(UDU^*)^* = UD\underbrace{(U^*U)}_{=I}D^*U^* = UDD^*U^*$$

$$A^*A = (UDU^*)^*(UDU^*) = UD^*\underbrace{(U^*U)}_{=I}DU^* = UD^*DU^*$$

Mivel minden $i$-re $(DD^*)_{ii} = |d_{ii}|^2 = (D^*D)_{ii}$, ezért $DD^* = D^*D$. $\square$

**Biz. folyt.:**

$\Rightarrow$: Két részletben bizonyítunk:

1. Belátjuk, hogy ha $A$ normális, akkor $\forall$ $U$ unitér mátrixra $U^*AU$ normális. (Hf: beszorzással igazolni, ugyanúgy, mint az előző részben, csak $D$ helyett $A$-t írunk.)

2. A Schur tételből $\exists$ $U$ unitér mátrix, melyre $U^*AU = R$ felsőháromszög-mátrix és normális is az előző pont szerint, vagyis $R^*R = RR^*$.

**Biz. folyt.:** Példaként $3 \times 3$-as mátrixra.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \overline{r_{11}} & 0 & 0 \\ \overline{r_{12}} & \overline{r_{22}} & 0 \\ \overline{r_{13}} & \overline{r_{23}} & \overline{r_{33}} \end{bmatrix}}_{R^*} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}}_{R} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}}_{R} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{r_{11}} & 0 & 0 \\ \overline{r_{12}} & \overline{r_{22}} & 0 \\ \overline{r_{13}} & \overline{r_{23}} & \overline{r_{33}} \end{bmatrix}}_{R^*}$$

Ha felírjuk $R$ elemeire a normalitást, akkor

$$(R^*R)_{11} = \overline{r_{11}}r_{11} = |r_{11}|^2 = (RR^*)_{11} = \sum_{j=1}^{n} r_{1j}\overline{r_{1j}} = \sum_{j=1}^{n} |r_{1j}|^2,$$

innen $r_{1j} = 0$, $j = 2, \ldots, n$. Ezt tovább folytatva a $2. \ldots n$. diagonális elemre, azt kapjuk, hogy $R$ diagonális mátrix. $\square$

**Emlékeztető: Sajátértékek becslése normával**

Az $A$ minden sajátértéke a komplex sík 0 középpontú $r := \|A\|$ sugarú zárt körlemezén helyezkedik el, azaz

$$|\lambda_i| \leq \|A\| \quad \forall\ i = 1, \ldots, n.$$

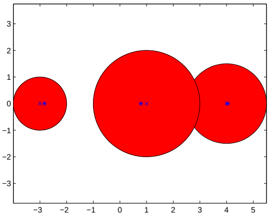
**Biz.:** Előző félévben igazoltuk, hogy

$$\varrho(A) \leq \|A\|.$$

## Gersgorin tétel

Az $A$ minden sajátértéke a komplex sík $a_{ii}$ középpontú $r_i := \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ sugarú zárt körlemezeinek úniójában helyezkedik el. Ezeket a köröket Gersgorin-köröknek nevezzük.

**Például** az $A = [4, -1, \frac{1}{2}; 1, -3, 0; 1, 1, 1]$ mátrix esetén a Gersgorin körök úniója (lásd Matlab):



**Biz.:** Legyen $\lambda$ az $A$ tetszőleges sajátértéke és $v \neq 0$ a hozzá tartozó sajátvektor. Legyen $i$ az az index, melyre $|v_i| = \|v\|_\infty$. Írjuk fel az $Av = \lambda v$ sajátegyenlet $i$. sorát

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda v_i$$

Átrendezve, majd abszolútértéket véve

$$(a_{ii} - \lambda) v_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij} v_j$$

$$|a_{ii} - \lambda| |v_i| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \underbrace{|v_j|}_{\leq |v_i|} \leq |v_i| \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

$|v_i| \neq 0$-val leosztva

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| = r_i. \quad \square$$

### Gersgorin tétel diagonális hasonlósági transzformáció alkalmazásával

Legyen $D = \mathrm{diag}\,(d_1, \ldots, d_n)$, $\det(D) \neq 0$. Ekkor a

1. $B := D^{-1}AD$ és $A$ mátrix sajátértékei azonosak és
2. a transzformáció során a diagonális elemek nem változnak.
3. $B$-re a Gersgorin-tételt alkalmazva $A$ sajátértékei az $a_{ii}$ középpontú és

$$R_i := \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{|a_{ij}||d_j|}{|d_i|}$$

sugarú körök uniójában vannak.

**Biz.:** A $B := D^{-1}AD$ mátrix elemei a mátrix szorzásból

$$b_{ij} = \frac{1}{d_i} \cdot a_{ij} \cdot d_j.$$

Innen $i = j$ esetben $b_{ii} = a_{ii}$, vagyis a diagonális elemek és ezzel a Gergorin körök középpontjai nem változnak.

$B$-re alkalmazva a Gersgorin tételt

$$R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |b_{ij}| = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{|a_{ij} d_j|}{|d_i|}.$$

$\square$

**Példa:** Sajátértékek becslése Gersgorin tétellel

Becsüljük az alábbi mátrix sajátértékeit a Gersgorin tétel segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix},$$

**Megoldás:**
A középpontok és a hozzátartozó sugarak az alábbiak:

| $a_{ii}$ | 1 | 6 |
|---|---|---|
| $R_i$ | 4 | 1 |

Tehát a $\overline{K_4(1)} \bigcup \overline{K_1(6)}$ zárt körök úniójában vannak a sajátértékek.

## Általános Gersgorin tétel

Ha a Gersgorin-körök között vannak diszjunkt körcsoportok, akkor minden körcsoportban annyi sajátérték helyezkedik el, amennyi körből a csoport áll.

**Biz.:** Homotópia módszerrel.
Legyen $D := \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ és

$$B(t) := t \cdot A + (1-t) \cdot D \quad \Rightarrow \quad B(0) = D \text{ és } B(1) = A.$$

Látjuk, hogy $t \to 1$ esetén $B(t) \to A$.

**Biz. folyt.:** A mátrix elemeire nézve

$$(B(t))_{ij} := \begin{cases} a_{ii} & \text{ha } i = j \\ t \cdot a_{ij} & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

$B(t)$ középpontjai $a_{ii}$-k, a Gersgorin-körök sugarai $t \cdot R_i$-k.

$t = 0$ esetén minden sugár 0, $t \to 1$ esetén $R_i$-hez konvergálnak. Felhasználjuk hozzá a sajátértékek folytonos függését a mátrix elemeitől, azaz $t$-től is. (lásd Bauer-Fike–tétel). A sajátértékek a konvergencia során nem hagyhatják el a köreiket, így a körcsoportokat sem. $\square$

**Példa:** Sajátértékek becslése Gersgorin tétellel

1. Az előző példa mátrixán végezzük el a $D = \operatorname{diag}(2, 1)$ mátrix-szal a hasonlósági transzformációt és adjunk becslést sajátértékeire a Gersgorin tétel segítségével!
2. Az előző példa mátrixán végezzük el a $D = \operatorname{diag}(d, 1)$ paraméteres mátrix-szal $(d > 0)$ a hasonlósági transzformációt és adjunk becslést sajátértékeire a Gersgorin tétel segítségével!
3. A $d > 0$ paraméter segítségével keressünk minél jobb közelítést az 1 körüli sajátértékekre.

**Megoldás:**

1. Készítsük el a hasonlósági transzformációt:

$$B = D^{-1}AD = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

A $B$-re a középpontok változatlanok, a sugarak az alábbiak:

| $a_{ii}$ | 1 | 6 |
|---|---|---|
| $R_i$ | 2 | 2 |

Tehát a $\overline{K_2(1)} \cup \overline{K_2(6)}$ zárt körök úniójában vannak a sajátértékek. Az általánosított Gersgorin tétel szerint mivel a Gersgorin-körök diszjunktak, ezért $\overline{K_2(1)}$-ben és $\overline{K_2(6)}$-ban is van egy-egy sajátérték.

❷ Készítsük el a hasonlósági transzformációt a $d > 0$ paraméterrel:

$$B = D^{-1}AD = \begin{bmatrix} \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{d} \\ -d & 6 \end{bmatrix}$$

A $B$-re a középpontok változatlanok, a sugarak az alábbiak:

| $a_{ii}$ | 1 | 6 |
|---|---|---|
| $R_i$ | $\frac{4}{d}$ | $d$ |

❸ Ahhoz, hogy az 1 körüli sajétértékre jobb becslést kapjunk szükséges, hogy a két Gersgorin-kör diszjunkt legyen. Írjuk fel ezt a feltételt:

$$1 + \frac{4}{d} < 6 - d.$$

Keressünk a legnagyobb $d$-t, melyre

$$d - 5 + \frac{4}{d} < 0.$$

$$d - 5 + \frac{4}{d} < 0 \quad | \cdot d > 0$$

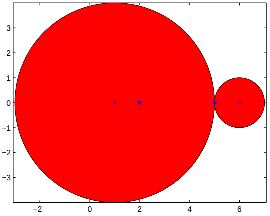
$$d^2 - 5d + 4 < 0$$

$$d_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

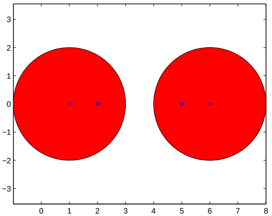
Tehát $1 < d < 4$ esetén teljesül a feltétel, azonban $d = 4$ esetén a két kör összeér, így az 1 sugár csak tetszőlegesen megközelíthető felülről, de nem érhető el.
(A feladat pontos sajátértékei: 2 és 5.)

# 2. Példa a Gersgorin tételre

Az 1. Példa becslésének megjelenítése:




A 2. Példa becslésének megjelenítése $d = 2$-vel:



**1. Következmény:**

A Gersgorin tétel állítása a mátrix oszlopaira is alkalmazható.

**Biz.:** Trivi, $A$ és $A^T$ sajátértékei azonosak, ugyanis

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A^T - \lambda I).$$

**2. Következmény:**

A sajátértékek a sor és oszlophoz kapcsolódó Gersgorin-kör úniók metszetében vannak.

**Biz.:** Mindkét únióban benne vannak a sajátértékek, így a metszetben is.

**3. Következmény:**

Ha 0 nincs benne a Gersgorin-körök uniójában, akkor a mátrix invertálható.

**Biz.:** A 0 pontosan akkor sajátérték, ha az $Av = 0v = 0$ homogén egyenletnek van triviális megoldása.

**4. Következmény:**

Ha $A$ szigorúan diagonálisan domináns a soraira (oszlopaira), akkor $\det(A) \neq 0$.

**Biz.:** Ha $A$ szigorúan diagonálisan domináns a soraira (oszlopaira), akkor a Gersgorin körök nem tartalmazzák a 0-t, így invertálható illetve $\det(A) \neq 0$.

**5. Következmény:**

Ha $A$ szimmetrikus és $a_{ii} > R_i \ \forall \ i$-re, akkor $A$ pozitív definit.

**Biz.:** Ha $A$ szimmetrikus és $a_{ii} > R_i \ \forall \ i$-re, akkor a Gersgorin körök a komplex sík jobboldali felére esnek. Másrészt a szimmetria miatt a sajátértékek valósak, így a sajátértékek pozitívak.

# Köszönöm a figyelmet!