

Többször differenciálható függvények

Parciális

$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int } D_f$, $i \in \{1, \dots, n\}$ és tegyük fel, hogy $\exists \partial_i f$

Továbbá $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ és tff $\exists \partial_k(\partial_i f)(a) =: \partial_{ik} f(a)$ az i és k szerinti **másodrendű parciális derivált**.

Magasabbrendűeket hasonlóan folytatva.

Többszörös deriválás

$f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int } D_f$, $K(a) \subset D_f$, $s \in \mathbb{N}^+$

$f \in D^{s+1}\{a\}$, ha $\forall x \in K(a) : f \in D^s\{a\}$ azaz

$\forall i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, n\} : \exists \partial_{i_1 \dots i_s} f(x)$ és $\partial_{i_1 \dots i_s} f \in D\{a\}$

Young-tétel

$f \in D^s\{a\}$, $i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, n\}$ és j_1, \dots, j_s az i_1, \dots, i_s egy permutációja

Ekkor $\partial_{i_1 \dots i_s} f(a) = \partial_{j_1 \dots j_s} f(a)$

Speciális eset

Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in D^2\{a\} \implies \partial_{12} f(a) = \partial_{21} f(a)$

Bizonyítás

$\Delta(x, y) := f(a_1 + x, a_2 + y) - f(a_1 + x, a_2) + f(a_1, a_2) - f(a_1, a_2 + y)$

$\varphi(x) := f(a_1 + x, a_2 + y) - f(a_1 + x, a_2)$

Ekkor

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) &= \varphi(x) - \varphi(0) = (*) = \varphi'(v \cdot x) \cdot x \\ &= [\partial_1 f(a_1 + v \cdot x, a_2 + y) - \partial_1 f(a_1 + v \cdot x, a_2)] \cdot x \\ &= [\partial_1 f(a_1 + v \cdot x, a_2 + y) - \partial_1 f(a_1, a_2) - [\partial_1 f(a_1 + v \cdot x, a_2) - \partial_1 f(a_1, a_2)]] \cdot x \\ &= (\circ) = [(\partial_1 f)'(a_1, a_2) \cdot (v \cdot x, y) + \eta(v \cdot x, y) \cdot \|(v \cdot x, y)\| \\ &\quad - [(\partial_1 f)'(a_1, a_2) \cdot (v \cdot x, 0) + \eta(v \cdot x, 0) \cdot \|(v \cdot x, 0)\|]] \cdot x \\ &= (\triangle) = [\langle (\partial_{11} f(a), \partial_{12} f(a)), (v \cdot x, y) \rangle + \eta(v \cdot x, y) \cdot \|(v \cdot x, y)\|] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -[< (\partial_{11}f(a), \partial_{12}f(a)), (v \cdot x, 0) > + \eta(v \cdot x, 0) \cdot \|v \cdot x, 0\|] \cdot x \\
& = [\partial_{12}f(a) \cdot y + \eta(v \cdot x, y) \cdot \|v \cdot x, y\| - \eta(v \cdot x, 0) \cdot \|v \cdot x, 0\|] \cdot x \\
& = \partial_{12}f(a) \cdot x \cdot y + \eta(v \cdot x, y) \cdot \|v \cdot x, y\| \cdot x - \eta(v \cdot x, 0) \cdot \|v \cdot x, 0\| \cdot x
\end{aligned}$$

Emlékeztető/magyarázat (nekem kellett):

(*) Lagrange k.é.t. szerint valamilyen $0 < v < 1$ -re

(o) $f(a+h) - f(a) = f'(a) \cdot h + \eta(h) \cdot \|h\|$ és $\partial_1 f \in D\{a\}$ és nyilván $\lim_0 \eta = 0$

(Δ) $(\partial_1 f)'(a) = (\partial_{11}f(a), \partial_{12}f(a))$ és $(\partial_1 f)'(a) \cdot (u, v) = < (\partial_{11}f(a), \partial_{12}f(a)), (u, v) >$

Tehát ott járunk, hogy

$$\Delta(x, y) = \partial_{12}f(a) \cdot x \cdot y + \eta(v \cdot x, y) \cdot \|v \cdot x, y\| \cdot x - \eta(v \cdot x, 0) \cdot \|v \cdot x, 0\| \cdot x$$

Most speciálisan tekintsük

$$\Delta(x, x) = \partial_{12}f(a) \cdot x^2 + \eta(v \cdot x, x) \cdot \|v, 1\| \cdot x \cdot |x| - \eta(v \cdot x, 0) \cdot \|v, 0\| \cdot x \cdot |x|$$

$x \neq 0$ feltétel mellett

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta(x, x)}{x^2} &= \partial_{12}f(a) \pm \eta(v \cdot x, x) \cdot \|v, 1\| - \eta(v \cdot x, 0) \cdot \|v, 0\| \implies \partial_{12}f(a) = \\
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta(x, x)}{x^2}
\end{aligned}$$

Továbbá ugyanígy, ha

$$\varphi(y) := f(a_1 + x, a_2 + y) - f(a_1, a_2 + y) \implies \Delta(x, y) = \varphi(y) - \varphi(0)$$

$$\text{És hasonlóan kijön, hogy } \partial_{21}f(a) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\Delta(y, y)}{y^2}$$

$$\text{Így } \partial_{12}f(a) = \partial_{21}f(a)$$