Diszkrét matematika I. feladatok
Relációk II.
Negyedik alkalom (2025.03.03-07.)

Bemelegítő feladatok

1. Döntse el, mely reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív.
   a) $R_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\} \subset \{1,2,3\}^2$
   b) $R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3)\} \subset \{1,2,3\}^2$
   c) $R_3 = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\} \subset \{1,2,3,4\}^2$
   d) $R_4 = \{(1,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,5),(4,4),$
   $(5,2),(5,3),(5,5),(5,2),(5,4)\} \subset \{1,2,3,4,5\}^2$
2. Tekintsük az 1. feladat relációit. Melyik lesz ekvivalenciareláció? Ekvivalenciareláció esetében határozza meg az osztályfelbontást!

Gyakorló feladatok

3. Döntse el, mely reláció reflexív, irreflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív, továbbá határozza meg a relációk értelmezési tartományát és értékkészletét.
   a) $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b \text{ páratlan}\}$
   b) $T_X = \{(A,B) \in 2^X \times 2^X \mid A \cap B \neq \emptyset\}$, ahol X adott halmaz
   c) $S = \{(M,N) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \exists P \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \det P \neq 0, M = P^{-1}NP\}$
4. Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat.
   a) Adott $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, ha $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$.
   b) Legyen $m > 1$ egész és $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén $a \sim b$, ha $m \mid (a-b)$.
   c) Legyen $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ egy nem-nulla vektor és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, ha $\mathbf{u}^T\mathbf{z} = \mathbf{v}^T\mathbf{z}$.

Érdekes feladatok

5. Konstruáljon az $\{1,2,3,4\}$ halmazon olyan relációt, amely
   a) reflexív és nem irreflexív
   b) antiszimmetrikus és nem szimmetrikus
   c) szimmetrikus és nem antiszimmetrikus
   d) nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm

6. a) Lehet-e egy reláció egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus? Illetve reflexív és irreflexív? Állítását indokolja.
   b) Bizonyítsuk be, hogy minden reláció, amely egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus, egyúttal tranzitív is.

Beadandó házi feladatok

7. Konstruáljon az $\mathbb{Z}$ halmazon olyan relációt, amely
   a) tranzitív és nem irreflexív
   b) reflexív és antiszimmetrikus
   c) nem tranzitív és dichotóm

   (**részenként 1/3 pont**)

8. Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat. (**részenként 1/2 pont**)
   a) Adott $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $x \sim y$, ha $x - y \in \mathbb{Z}$.
   b) Adott $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ és $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ esetén $\mathbf{n} \sim \mathbf{m}$, ha $n_1 m_2 = m_1 n_2$.

9. Tekintsük az alábbi relációkat! Döntse el, hogy azok ekvivalenciarelációk-e. Ha nem, mely tulajdonságokat teljesítik? (**részenként 1/2 pont**)
   a) Adott $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, ha $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}$.
   b) Adott $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, ha $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^n \mathbf{u}$ valamely $n \in \mathbb{Z}$ egészre.