Diszkrét matematika II.
1. Zh – megoldás

(2025.10.13.)

1. *Pajkos százlábúak futkároznak a ládában. Az egyik fajtának 26 lába van, a másiknak 44. Összesen 236 lábat számoltunk meg. Hány százlábú van a ládában?* (**7p**)

Megoldás: Keresünk olyan x, y nem-negatív számokat, melyekre $26x + 44y = 236$. Először megoldjuk a fenti lineáris diofantikus egyenletet egész számok körében a bővített euklideszi algoritmus segítségéve.

i	r_i	q_i	x'_i	y'_i
-1	26	–	1	0
0	44	–	0	1
1	26	0	1	0
2	18	1	-1	1
3	8	1	2	-1
4	2	2	-5	3
5	0	4	22	-13

Itt $(26, 44) = 2 \mid 236$, így van megoldás. Egy megoldás pár:

$$x_0 = x'_4 \cdot \frac{236}{(26,44)} = -590, \quad y_0 = y'_4 \cdot \frac{236}{(26,44)} = 354.$$

A összes megoldása a lineáris diofantikus egyenletnek felírható

$$x_k = x_0 + k \cdot 22 \quad y_k = y_0 - k \cdot 13, \quad k \in \mathbb{Z}$$

alakban. Keressük azon k értékeket, hogy $x_k, y_k \geq 0$, azaz

$$-590 + k \cdot 22 \geq 0, \quad 354 - k \cdot 13 \geq 0,$$

azaz

$$k \geq \frac{590}{22} = 26,81\ldots, \quad k \leq \frac{354}{13} = 27,23\ldots$$

Innen adódik, hogy $k = 27$, és

$$x = 4, \quad y = 3,$$

azaz összesen **hét** pajkos százlábú van a dobozban.

Megjegyzések:

a) Ha az első lépésben észrevesszük, hogy az eredeti egyenletet leoszthatjuk 2-vel, a számolás rövidíthető.

b) A feladatot **kongruenciák** segítségével is megoldhatjuk. Azaz a $26x + 44y = 236$ egyenletet átírhatjuk $44y \equiv 236 \mod 26$ kongruenciává. Redukálva modulo 26, kapjuk, hogy

$$18y \equiv 2 \mod 26,$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$9y \equiv 1 \mod 13.$$

Vegyük észre $1 \equiv 14 \equiv 27 \mod 13$, azaz

$$9y \equiv 27 \mod 13.$$

Leosztva 9-cel, kapjuk, hogy

$$y \equiv 3 \mod \frac{13}{(9,13)} = 13,$$

azaz $y_k = 3 + k \cdot 13$ lesz az *összes* egész megoldás a fenti lineáris doifantikus egyenletre. Innen x_k meghatározható, majd a fenti módszer segítségével megtalálható a megfelelő k érték.

2. *Mi lesz* 3^{2025} *utolsó* két *számjegye* 5*-ös számrendszerben?* (**7p**)

Megoldás: Első lépésben kiszámoljuk a 3^{2025} egész 5^2-nel vett osztási maradékát:

$$3^{2025} \equiv ? \mod 25.$$

Mivel $\varphi(25) = 20$ és $(3, 25) = 1$, így az **Euler-Fermat tétel** szerint

$$3^{20} \equiv 1 \mod 25.$$

Mivel $2025 = 101 \cdot 20 + 5$, ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$3^{2025} = 3^{101 \cdot 20 + 5} = (3^{20})^{101} \cdot 3^5 \equiv 3^5 \mod 25.$$

Mivel $3^5 = 3^3 \cdot 3^2 = 27 \cdot 9 \equiv 2 \cdot 9 = 18 \mod 25$, és 18-at 5-ös számrendszerben felírva

$$18 = 3 \cdot 5 + 3 = (3, 3)_5,$$

így 3^{2025} utolsó két számjegye 5-ös számrendszerben 3 és 3 lesz.

3. *Határozza meg azt a* két *legkisebb pozitív egész számot, mely* egyszerre *elégítik ki a következő kongruenciákat* (**8p**):

$$5x \equiv 1 \mod 12$$
$$3x \equiv 1 \mod 14$$

Megoldás: Megoldva egyenként a két lineáris kongruenciát, kapjuk, hogy x-nek egyszerre kell kielégíteni a

$$x \equiv 5 \mod 12$$
$$x \equiv 5 \mod 14$$

kongruenciákat, azaz $x-5$ mind 12-vel, mind 14-gyel osztható, így $\mathrm{lkkt}(12, 14) = 84$-gyel is osztható. Azaz az *összes* olyan egész x mely *egyszerre* elégíti ki a fenti kongruenciákat az

$$x_k = 5 + k \cdot 84$$

alakú számok. Ezek közül a két legkisebb nemnegatív érték az $x_0 = 5$ és $x_1 = 89$ lesz.

4. *Legyen* $G_0 = 0$ *és* $G_1 = 1$*, továbbá* $G_n = 6G_{n-1} + 3G_{n-2}$*. Mi lesz* $(G_n, G_{n+1}) =$? (**8p**)

Megoldás: Felhasználva, hogy $(a, b) = (b, a)$ és $(ca, cb) = c(a, b)$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(G_n, G_{n+1}) &= (G_n, 6G_n + 3G_{n-1}) = (G_n, 3G_{n-1}) = (6G_{n-1} + 3G_{n-2}, 3G_{n-1}) \\ &= (3G_{n-2}, 3G_{n-1}) = 3(G_{n-2}, G_{n-1}).\end{aligned}$$

Azaz, ha $n = 2k$ páros, akkor

$$(G_{2k}, G_{2k+1}) = 3^k \cdot (G_0, G_1) = 3^k,$$

míg, ha $n = 2k + 1$ páratlan, akkor

$$(G_{2k+1}, G_{2k+2}) = 3^k \cdot (G_1, G_2) = 3^k.$$

Azaz $(G_n, G_{n+1}) = 3^{\lfloor n/2 \rfloor}$.