(Hf) 1. Igazolja, hogy $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}-1$ $\quad (n=2,3,\dots)$

Megoldás: Teljes indukcióval:

I. $n=2$ esetén: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}-1$?

Ekvivalens átalakításokkal:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}-1 \iff \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}-2 \iff 1<(2\sqrt{2}-2)\sqrt{2} \iff$$

$$\iff 1 < 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4-2\sqrt{2} \iff 2\sqrt{2} < 3 \iff 8<9 \text{ igaz.}$$

II. Tf, h valamely $n=2,3,4,\dots$ számra igaz, hogy

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}-1 .$$

Ekkor $n+1$-re

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n+1}-1 \; ?$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{(*)}{<} 2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{<} 2\sqrt{n+1}-1$$

Ekvivalens átalakításokkal:

$$2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}-1 \iff 2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} \iff$$

$$\iff 2\sqrt{n(n+1)}+1 < 2(n+1) \iff 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \iff$$

$$\iff 4n(n+1) < (2n+1)^2 \iff 4n^2+4n < 4n^2+4n+1 \iff$$

$$\iff 0<1 \text{ igaz.}$$

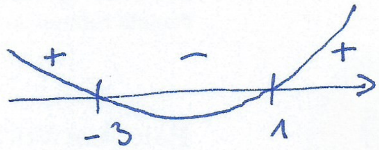
Ez azt jelenti, hogy az állítás, ha n-re igaz, akkor $n+1$-re is igaz.

Ezért az állítás minden $n=2,3,4,\dots$ szám esetén igaz, hiszen a teljes indukcióra vonatkozó tétel feltételei teljesülnek.

Hf 2. Oldja meg $\mathbb{R}$-en!

$$\frac{3x^2+7x-4}{x^2+2x-3}<2$$

Megoldás. $x\neq -3$, $x\neq 1$.

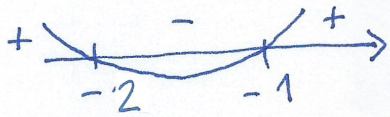


$x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

I. Ha $x>1$ v. $x<-3$, akkor $x^2+2x-3>0$. Ekkor

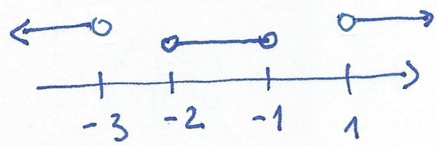
$3x^2+7x-4<2x^2+4x-6 \iff x^2+3x+2<0$

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$



Ezért $x^2+3x+2<0 \iff -2<x-1$

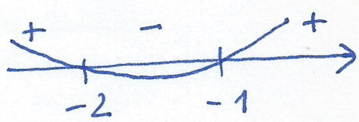
Ebben az esetben nem kapunk megoldást:



II. Ha $-3<x<1$, akkor $x^2+2x-3<0$. Ekkor

$3x^2+7x-4>2x^2+4x-6 \iff x^2+3x+2>0$

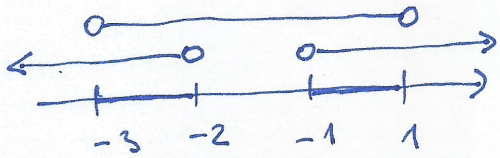
$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$



Ezért $x^2+3x+2>0 \iff x<-2$ vagy $x>-1$.

Ebben az esetben a megoldás:

$-3<x<-2$ vagy $-1<x<1$.



Összesítve, az egyenlőtlenség megoldása:

$-3<x<-2$ vagy $-1<x<1$.

Gy 2. Mutassa meg, hogy tetszőleges $a, b, c > 0$ számokra

$$8abc \le (a+b)(b+c)(a+c) \le \frac{8}{27}(a+b+c)^3$$

Megoldás.

I. Két szám számtani és mértani közepe közötti egyenlőtlenség miatt.

$$\left.\begin{array}{l} 2\sqrt{ab} \le a+b \\ 2\sqrt{bc} \le b+c \\ 2\sqrt{ca} \le c+a \end{array}\right\} \underset{\text{összeszorozva}}{\Longrightarrow} 8abc \le (a+b)(b+c)(c+a)$$

✓

II Három szám számtani és mértani közepe közötti egyenlőtlenség miatt $(a+b>0,\ b+c>0,\ c+a>0)$

$$\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3} = \frac{2}{3}(a+b+c)$$

Köbre emelés után:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \le \frac{8}{27}(a+b+c)^3.$$

✓