Diszkrét matematika I. feladatok
Komplex számok I
Ötödik alkalom (2025.03.10-14.)

Bemelegítő feladatok

1. Fejezze ki algebrai alakban a következő számokat

a) $\dfrac{3+i}{2+3i}$ **Megoldás:** $\dfrac{3+i}{2+3i} = \dfrac{3+i}{2+3i} \cdot \dfrac{2-3i}{2-3i} = \dfrac{6+3+2i-9i}{2^2+3^2} = \dfrac{9-7i}{13} = \dfrac{9}{13} - \dfrac{7}{13}i;$

b) $\dfrac{1-2i}{5+i}$ **Megoldás:** $\dfrac{1-2i}{5+i} = \dfrac{1-2i}{5+i} \cdot \dfrac{5-i}{5-i} = \dfrac{5-2-i-10i}{5^2+1^1} = \dfrac{3-11i}{25+1} = \dfrac{3}{26} - \dfrac{11}{26}i;$

c) $\dfrac{1}{(2-5i)^2}$ **Megoldás:** $(2-5i)^2 = 2^2 + (-5i)^2 - 2\cdot 2\cdot 5i = 4 - 25 - 20i = -21 - 20i$

$$\frac{1}{(2-5i)^2} = \frac{1}{-21-20i} \cdot \frac{-21+20i}{-21+20i} = \frac{-21+20i}{(-21)^2+20^2} = \frac{-21+20i}{441+400} = \left(-\frac{21}{841}\right) + \left(\frac{20}{841}\right) i.$$

Gyakorló feladatok

2. Oldja meg a következő egyenleteket a komplex számok halmazán:

a) $\dfrac{z+i-3i\overline{z}}{z-4} = i-1;$ **Megoldás:** Először kössük ki, hogy $z \neq 4$, ezután be lehet szorozni: $z+i-3i\overline{z} = (i-1)(z-4)$, most legyen $z = a+bi$, azaz $a+bi+i-3i(a-bi) = (i-1)(a+bi-4)$, vagyis $a-3b+i(b+1-3a) = (4-a-b)+i(a-4-b)$, azaz $a-3b = 4-a-b$ és $b+1-3a = a-4-b$. Tehát $2a-2b = 4$ és $4a-2b = 5$. A két egyenletet kivonva: $2a = 1$, és így $1-2b = 4$, azaz $2b = -3$. Tehát $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{3}{2}$, azaz $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$ ($\neq 4$, tehát jó megoldás).

b) $(z+3-i)(\overline{z}-4+3i) = 1;$ **Megoldás:** $z = a+bi$, így: $(a+bi+3-i)(a-bi-4+3i) = 1$ $((a+3)+(b-1)i)((a-4)+i(3-b)) = (a+3)(a-4)-(b-1)(3-b)+i((b-1)(a-4)+(a+3)(3-b)) = (a^2-a-12+b^2-4b+3)+i(2a-7b+13) = 1$. Ez két egyenlet két valós ismeretlenre: $2a-7b+13 = 0$ és $a^2-a+b^2-4b = 10$, az első egyenletből kifejezzük b-t: $b = (13+2a)/7$, ezt beírva a második egyenletbe: $a^2-a+(13+2a)^2/49-4(13+2a)/7 = 10$, szorozzunk be 49-cel: $49a^2-49a+(169+20a+4a^2)-(364+56a) = 490$, $53a^2-85a = 685$, $53a^2-85a-685 = 0$, erre megoldóképlet: $a = (85 \pm \sqrt{7225+145220})/106$. ($a$-ra csak valós megoldások jöhetnek szóba, és itt két valós megoldás van.)

Másik megoldás: $0 = (z+3-i)(\overline{z}-4+3i)-1 = z\overline{z}-4z+(3i)z+3\overline{z}-12+9i-i\overline{z}+4i+3-1 = |z|^2+(3\overline{z}-4z)+i(3z-\overline{z})-10+13i = |z|^2-3(z-\overline{z})-z+i(2z+(z-\overline{z}))-10+13i = |z|^2-3(2\operatorname{Im}(z)i)-z+i(2z+(2\operatorname{Im}(z)i))-10+13i = |z|^2-6\operatorname{Im}(z)i-z+(2i)z-2\operatorname{Im}(z)-10+13i = |z|^2-(2+6i)\operatorname{Im}(z)+(-1+2i)z-10+13i$. Eddig úsztuk meg azt, hogy $z = a+bi$. Tehát $(a^2+b^2)-(2+6i)b+(-1+2i)(a+bi)-10+13i = 0$. Az egyenlet valós része: $(a^2+b^2)-2b-a-2b-10 = 0$, a képzetes része: $-6b+2a-b+13 = 0$, vagyis $7b = 2a+13$, végül pontosan ugyanaz a két egyenlet jött ki.

(Ez egy nem túl szép, technikás feladat.)

c) $\dfrac{z+i-\overline{z}}{\overline{z}-3+z}=i$ **Megoldás:** Először kössük ki, hogy $\overline{z}-3+z=2\operatorname{Re}(z)-3\neq 0$. Ha $z=a+bi$, akkor $\overline{z}=a-bi$, így $\dfrac{a+bi+i-a+bi}{a-bi-3+a+bi}=\dfrac{(2b+1)i}{2a-3}=i$, vagyis $\dfrac{2b+1}{2a-3}=1$, azaz $2b+1=2a-3$, vagyis $2b=2a-4$, tehát $b=a-2$, ez egy egyenes egyenlete a komplex számsíkon: $\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Re}(z)-2$, vagy ha jobban tetszik, az $y=x-2$ egyenes az x-y-koordinátasíkon. Viszont volt egy feltételünk, hogy $2\operatorname{Re}(z)\neq 3$, azaz a fenti egyenesnek a $(3/2,-1/2)$ koordinátájú pontja (a $z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ komplex szám) mégsem megoldás.

Tehát a megoldások halmaza $\{z=a+bi\in\mathbb{C}:b=a-2\wedge a\neq\frac{3}{2}\}$, vagy másképpen: $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Re}(z)-2\wedge\operatorname{Re}(z)\neq 3/2\}$.

Ugyanaz a megoldás más szavakkal: Mivel $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$, és $z-\overline{z}=2\operatorname{Im}(z)i$, így $\dfrac{z+i-\overline{z}}{\overline{z}-3+z}=\dfrac{(2\operatorname{Im}(z)+1)i}{2\operatorname{Re}(z)-3}=i$, i-vel egyszerűsítve $\dfrac{2\operatorname{Im}(z)+1}{2\operatorname{Re}(z)-3}=1$ Most is kikötjük, hogy $\operatorname{Re}(z)\neq 3/2$, ezután beszorozhatunk a nevezővel: $2\operatorname{Im}(z)+1=2\operatorname{Re}(z)-3$, azaz $2\operatorname{Im}(z)=2\operatorname{Re}(z)-4$, azaz $\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Re}(z)-2$. Az ezt teljesítő z-k közül ki kell hagyni a $\operatorname{Re}(z)=3/2$ $(\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Re}(z)-2=-1/2)$ elemet: $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Re}(z)-2\}\setminus\{\frac{3-i}{2}\}$

3. Adja meg az a és b valós számok értékét, ha

a) $(a+bi)(2-i)=a+(3+b)i$; **Megoldás:** $(2a+b)+i\cdot(2b-a)=a+(3+b)i$, vagyis $(a+b)+i\cdot(b-a-3)=0$, azaz $a+b=0$ és $b-a-3=0$, tehát $b=-a$, és így $-2a-3=0$, ezért $a=-\dfrac{3}{2}$, és $b=\dfrac{3}{2}$.

Frappánsabb megoldás: Legyen $z=a+bi$, ekkor $(a+bi)(2-i)=a+(3+b)i$ úgy írható, hogy $z(2-i)=z+3i$, mindkét oldalból kivonva z-t: $z(1-i)=3i$, azaz $z=\dfrac{3i}{1-i}=\dfrac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{-3+3i}{2}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$, ezért $a=-\dfrac{3}{2}$, és $b=\dfrac{3}{2}$.

b) $(a+bi)(-1-2i)=\dfrac{2+i}{a-bi}$; **Megoldás:** Először kikötjük, hogy $a-bi\neq 0$, vagyis a és b *egyszerre* nem lehet nulla. Ezután már beszorozhatunk $a-bi$-vel: $(a-bi)(a+bi)(-1-2i)=2+i$, azaz $(a^2+b^2)(-1-2i)=(-a^2-b^2)-2(a^2+b^2)i=2+i$, vagyis $-a^2-b^2=2$, és $-2(a^2+b^2)=1$, azaz $-2(-2)=1$, $4=1$, ami ellentmondás, azaz nincs megoldás: semmilyen a és b valós számokat megadva sem teljesíthető az egyenlet. (Valójában már a $-a^2-b^2=2\Leftrightarrow a^2+b^2=-2$ egyenlet önmagában is ellentmondásra vezet, hiszen két nemnegatív valós szám összege nem lehet negatív.)

Frappánsabb megoldás: Legyen $z=a+bi$, ekkor $(a+bi)(-1-2i)=-z(1+2i)$ és $\dfrac{2+i}{a-bi}=\dfrac{2+i}{\overline{z}}$, és az egyenlet: $-z(1+2i)=\dfrac{2+i}{\overline{z}}$. Feltéve, hogy $\overline{z}\neq 0$ (és így $z\neq 0$), beszorozva: $-z\overline{z}(1+2i)=2+i$, azaz $-|z|^2(1+2i)=2+i$. Mivel $|z|^2\in\mathbb{R}$ valós szám, viszont az $1+2i$ és a $2+i$ komplex számok irányszöge nem egyezik (és nem is kiegészítő szögei egymásnak, vagyis $(1,2)$ és $(2,1)$ síkvektorok lineárisan függetlenek), így nem lehetséges, hogy $1+2i$ valós számszorosa $2+i$ legyen.

Máshogy befejezve a frappánsabb megoldást: $-|z|^2(1+2i)=2+i$, átosztva: $-|z|^2=\dfrac{2+i}{1+2i}=\dfrac{2+i}{1+2i}\cdot\dfrac{1-2i}{1-2i}=\dfrac{4-3i}{1^2+2^2}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$, de $-|z|^2\in\mathbb{R}$ tisztán valós szám, míg $\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

nemvalós komplex szám. Ellentmondásra jutottunk, nincs ilyen z.

c) $\overline{(a+bi)(3-4i)} = 2i$. **Megoldás:** $\overline{(a+bi)(3-4i)} = \overline{(3a+4b)+(3b-4a)i} = (3a+4b)-(3b-4a)i = 2i$, azaz $3a+4b=0$, és $4a-3b=2$. Ez egy lineáis egyenletrendszer, amit vagy mátrixosan oldunk meg, vagy ad hoc módon.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-9-16}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{25}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

az ad hoc megoldással: $3a+4b=0$ egyenlet négyszeresét kivonjuk $4a-3b=2$ egyenlet háromszorosából: $-9b-16b=6$, azaz $-25b=6$, vagyis $b=-\frac{6}{25}$. Illetve $3a+4b=0$ egyenlet háromszorosát hozzáadjuk $4a-3b=2$ egyenlet négyszereséhez: $9a+16a=8$, és így $a=\frac{8}{25}$. (Természetesen ugyanaz jön ki, mint mátrixosan.)

Frappánsabb megoldás: Legyen $z=a+bi$, ekkor $\overline{(a+bi)(3-4i)}=2i$ úgy írható, hogy $\overline{z(3-4i)}=2i$, mindkét oldal konjugáltját véve $z(3-4i)=-2i$, átosztva $z=\dfrac{-2i}{3-4i}$ és a bemelegítő módszerével $z=\dfrac{-2i}{3-4i}\cdot\dfrac{3+4i}{3+4i}=\dfrac{-6i+8}{3^2+4^2}=\dfrac{8}{25}-\dfrac{6}{25}i$, vagyis $a=\dfrac{8}{25}$ és $b=-\dfrac{6}{25}$.

Érdekes feladatok

4. Rajzolja le a komplex számsíkon a következő halmazokat:

a) $\{z:\ \mathrm{Re}(z+2i)\le 0\}$; **Megoldás:** Mivel $2i$ hozzáadása nem válozttat a valós részen: $\mathrm{Re}(z+2i)=\mathrm{Re}\,z\le 0$, ezek azok a z komplex számok, amiknek a valós része (az "x-koordinátája") nempozitív. Azaz ez a képzetes tengelytől balra eső zárt félsík (maga a félsíkot határoló képzetes tengely is benne van).

b) $\{z:\ \mathrm{Re}(z+1)\ge \mathrm{Im}(z-3i)\}$; **Megoldás:** $\mathrm{Re}(z+1)=\mathrm{Re}\,z+1$, és $\mathrm{Im}(z-3i)=\mathrm{Im}\,z-3$, így a feltétel $1+\mathrm{Re}\,z\ge -3+\mathrm{Im}\,z$, vagyis $z=x+yi$ esetén $1+x\ge y-3$, vagyis $y\le 4+x$. Ez tehát az $y=x+4$ egyenletű egyenes által határolt két félsík egyike, méghozzá az, ami $(x,y)=(0.0)$ pontot tartalmazza (hiszen $0\le 4+0$), azaz az egyenes *alatti* félsík (a határolóegyenest is beleértve).

c) $\{z:\ |z-i-1|\le 3\}$; **Megoldás:** A $|z|\le 3$ egyenlőtlenséget kielégítő $z=a+bi$ komplex számokra $\sqrt{a^2+b^2}\le 3$ teljesül, azaz ez az origó körüli 3 sugarú körlap (a $a^2+b^2=3^2$ egyenletű körvonal és annak belseje is). De a feladat nem ezt kérdezi, hanem $|z-i-1|\le 3$ egyenlőtlenséget. Ebben a $z=0$ helyett a $z=i+1$ esetén lenne a baloldal 0, azaz sejthető, hogy ez az $1+i$ körüli 3 sugarú körlap lesz.

És valóban: mivel $|z-i-1|$ a z szám "távolsága" $1+i$-től (abban az értelemben, hogy $|z-w|$ a z és w számok távolsága, mivel a különbségvektor hossza), így $|z-i-1|\le 3$ feltételt kielégítő z számok valóban az $1+i$-tól legfeljebb 3 távolságra lévő számok a komplex számsíkon, azaz egy 3 sugarú, $1+i$ középpontú zárt körlap pontjai.

Másik megoldás: $|z-i-1|\le 3 \Leftrightarrow |z-i-1|^2\le 9$ (mivel az egyenlőtlenség mindkét oldalán nemnegatív valós szám áll). $|z-i-1|^2=|(a-1)+(b-1)i|^2=(a-1)^2+(b-1)^2\le 3^2$. Ez valóban az $(1,1)$ koordinátájú pont körüli 3 sugarú körlap "egyenlete".

d) $\{z:\ |z-3+2i|=|z+4-i|\}$; **Megoldás:** $|(a-3)+(b+2)i|=|(a+4)+(b-1)i|$, vagyis $|(a-3)+(b+2)i|^2=|(a+4)+(b-1)i|^2$ (az egyenlet mindkét oldalán nemnegatív valós szám áll), vagyis $(a-3)^2+(b+2)^2=(a+4)^2+(b-1)^2$, azaz $a^2-6a+9+b^2+4b+4=a^2+8a+16+b^2-2b+1$, azaz $13-6a+4b=17+8a-2b$, azaz $6b=14a+4$, azaz $3b=7a+2$. Ez egy egyenes.

Másik megoldás: $|z-3+2i|=|z-(3-2i)|$ a z távolsága $3-2i$ számtól. $|z+4-i|=|z-(-4+i)|$ a z távolsága $-4+i$ számtól. Azaz $|z-3+2i|=|z+4-i|$ feltételt azok a z pontok teljesítik, amik *ugyanakkora távolságra* vannak $3-2i$ és $-4+i$ pontoktól, azaz a $3-2i$ és $-4+i$ pontok közötti szakasznak a szakaszfelező merőlegese (ezen egyenes pontjai) a megoldások halmaza.

e) $\{z:\ z=1/\overline{z}\}$; **Megoldás:** $z=1/\overline{z} \Leftrightarrow 1=z\overline{z}=|z|^2 \Leftrightarrow |z|=1$. Ez a komplex egységkör.

f) $\{z:\ z+\overline{z}=0\}$. **Megoldás:** $z+\overline{z}=2\operatorname{Re} z=0$, ez a képzetes tengely.

5. Adja meg a következő számokat trigonometrikus alakban:

a) $\sqrt{3}+i$; **Megoldás:** $\sqrt{3}+i=2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=2\cdot(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$

b) $1-i$; **Megoldás:**

$$1-i=\sqrt{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i)=\sqrt{2}\cdot(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\cdot\sin(-\frac{\pi}{4}))=\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{7\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{4})$$

c) $4i$; **Megoldás:** $4i=4\cdot(0+1\cdot i)=4\cdot(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2})$

d) -3; **Megoldás:** $-3=3\cdot(-1+0\cdot i)=3\cdot(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)$

e) $\frac{10}{\sqrt{3}-i}$; **Megoldás:** Előbb külön a számláló és külön a nevező trigonometrikus alakja:

$$10=10\cdot(1+0\cdot i)=10\cdot(\cos 0+i\cdot\sin 0)\qquad \sqrt{3}-i=2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot i)=2\cdot(\cos\frac{-\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{-\pi}{6})$$

$$\frac{10}{\sqrt{3}-i}=\frac{10}{2}\cdot(\cos(0-\frac{-\pi}{6})+i\cdot\sin(0-\frac{-\pi}{6}))=5\cdot(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$$

Beadandó házi feladatok

6. Rajzolja le a komplex számsíkon a következő halmazokat (**részenként 1/3 pont**):

a) $\{z:\ \operatorname{Re}((1+i)z)\le 0\}$; b) $\{z:\ \operatorname{Im}(1/z)\ge 0\}$; c) $\{z:\ |(1+i)(z-i-1)|\le 1\}$.

Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat).

7. Adja meg a következő számokat trigonometrikus alakban (**részenként 1/3 pont**):

a) $1+\sqrt{3}i$; b) $\frac{7}{1+i}$; c) $\frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}$.

Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat).

Nevezetes szögek trigonometrikus értéke

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

8. Tekintsük a következő relációkat a komplex számok halmazán:

$$R = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| = |w|\}, \quad S = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)\}.$$

Mi lesz $(R \circ S)(\{1\})$, ill. $(S \circ R)(\{1\})$? (**1 pont**)

Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat).

További gyakorló feladatok otthonra

9. Adja meg a következő számokat trigonometrikus alakban (5. feladat folytatása):

f) $\dfrac{2+3i}{5+i}$; **Megoldás:** Vagy 5/e)-hez hasonlóan, csak itt nem nevezetes szög sem a számláló, sem a nevező argumentuma, így precíz formárban benne maradnak az arkusztangensek. Vagy:

Másik megoldás: Előbb algebrai alakkal kiszámoljuk tört algebrai alakját:

$$\frac{2+3i}{5+i} = \frac{2+3i}{5+i} \cdot \frac{5-i}{5-i} = \frac{10+3+i\cdot(15-2)}{5^2-(-1)} = \frac{13+13i}{26} = \frac{1}{2}\cdot(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

Tehát $\dfrac{2+3i}{5+i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{4})$, így sikerült precíz alakot adni.

g) $3-4i$; **Megoldás:** $3-4i = \sqrt{3^2+4^2}\cdot(\frac{3}{5}+i\cdot\frac{-4}{5}) = 5\cdot(\frac{3}{5}+i\cdot\frac{-4}{5}) = 5\cdot(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)$, ahol α egy olyan szög, aminek a tangense $\frac{-4}{3}$, és a negyedik síknegyedbe esik, tehát $\alpha = \arctan\frac{-4}{3}$.

h) $-2+i$. **Megoldás:** $-2+i = \sqrt{2^2+1^2}\cdot(\frac{-2}{\sqrt{5}}+i\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}\cdot(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)$, ahol α egy olyan szög, aminek a tangense $\frac{-1}{2}$, és a második síknegyedbe esik, tehát $\alpha = \arctan\frac{-1}{2}+\pi$.

10. Legyenek $A \in \mathbb{C}^{2\times2}, B \in \mathbb{C}^{3\times2}, C \in \mathbb{C}^{3\times3}$ a következő mátrixok

$$A = \begin{pmatrix} 2-i & 2+i \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -i & 3-i \\ 3-i & 2-i \\ -1+2i & -i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -3+i & i \\ 3i & 2i & 3-4i \\ 2i & 2 & -i \end{pmatrix}$$

Számítsa ki a következő szorzatok közül amelyiket lehet: $A^2, B^2, AB, BA, AC, CA, BC, CB$.

Megoldás: A^2 létezik, B^2 nem létezik, AB nem léezik, BA létezik, AC nem létezik, CA nem létezik, BC nem létezik, CB létezik.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \overline{z} & z \\ z & \overline{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z} & z \\ z & \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{z}^2+z^2 & 2z\overline{z} \\ 2z\overline{z} & \overline{z}^2+z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2\cdot5 \\ 2\cdot5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$$

BA és CB is kiszámolható...

11. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2-i & 2+i \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times2}.$$

Számolja ki a $\det A, \det B, \det A^2, \det AB, \det BA, \det B^2$ determinánsokat.

Megoldás: $\det A = \det(i \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = i^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 2$, hiszen $d \times d$-es mátrix λ skalárszorosának determinánsa a determináns λ^d-szerese. De kijönne úgy is, hogy $\det A = (-i) \cdot (i) - (i) \cdot (i) = -(-1) - (-1) = 2$
$\det B = \overline{z} \cdot \overline{z} - z \cdot z = \overline{z^2} - z^2 = \overline{(2+i)^2} - (2+i)^2 = \overline{(5+4i)} - (5+4i) = (5-4i) - (5+4i) = -8i$
$\det A^2 = (\det A)^2 = 2^2 = 4$, $\det AB = \det A \det B = 2 \cdot (-8i) = -16i$, $\det BA = \det B \det A = -16i$, $\det B^2 = (\det B)^2 = (-8i)^2 = -64$.