Diszkrét matematika 1

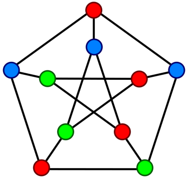
Gráfok

Mérai László, Farkas Izabella Ingrid
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2025 tavasz

Gráfok



Minden fának van levele

Tétel

Legyen $G = (V, E)$ egy körmentes nem-üres ($E \neq \emptyset$) véges gráf. Ekkor $\exists v \in V : d(v) = 1$.

Bizonyítás.

- Mivel $E \neq \emptyset$, G-ben van út. (Például egy egy hosszú v, e, v' út.)
- Legyen $v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k$ egy maximális hosszú út.
- Mivel G körmentes, v_k nem szomszédja v_i-nek $0 \leq i < k - 1$.

$$v_0 \;\text{———}\; v_1 \;\cdots\cdots\cdots\; v_{k-1} \;\text{———}\; v_k$$

- Mivel az út maximális, v_k-nak nincs az úton kívüli szomszédja.

$$v_0 \;\text{———}\; v_1 \;\cdots\cdots\cdots\; v_{k-1} \;\text{———}\; v_k \;\cdots\cdots$$

- Azaz v_k-nak csak v_{k-1} a szomszédja $\Longrightarrow d(v_k) = 1$. $\square$

Minden fának van levele

Tétel

Legyen $G = (V, E)$ egy körmentes nem-üres ($E \neq \emptyset$) véges gráf. Ekkor $\exists v \in V : d(v) = 1$.

Megjegyzések:

- Itt G nem feltétlenül fa, lehet több komponense (erdő).
- Levél: első fokú csúcs.
- Mindhárom feltétel szükséges:
  - Ha $E = \emptyset$ $\longrightarrow$ minden fok csúcsa 0.
  - Ha G nem körmentes $\longrightarrow$ $G = C_n$.
  - Ha G nem véges $\longrightarrow$ G: végtelen hosszú lánc (nincs se eleje, se vége).

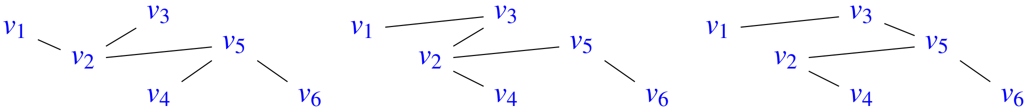
Fák élszáma

Tétel

Legyen G egyszerű n csúcsú gráf. Ekkor a következők ekvivalensek:

1. G fa;
2. G körmentes és $n-1$ éle van;
3. G összefüggő és $n-1$ éle van;

Példa



Bizonyítás.

- $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 1.$
- n szerinti indukció
- $n = 1$ esete triviális

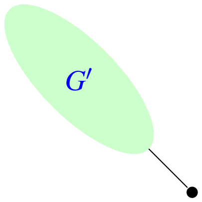
Fák élszáma, 1/3

1. Állítás ($1. \Rightarrow 2.$)

Legyen G egyszerű n csúcsú gráf. Ekkor G fa $\Rightarrow$ G körmentes és $n-1$ éle van;

Bizonyítás.

- Tfh $k < n$ csúcsú gráfra teljesül.
- Tekintsünk egy n csúcsú G fát.
- Mivel G fa (spec. körmentes), van elsőfokú csúcsa.
- Ezt elhagyva (az illeszkedő éllel) a kapott G' részgráf egy $n-1$ csúcsú fa.
- A részgráfnak $n-2$ éle van (indukció szerint).
- Az élet visszahúzva G-nek így $n-1$ éle van.



G gráf

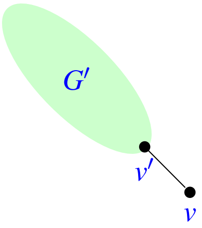
Fák élszáma, 2/3

2. Állítás ($2. \Rightarrow 3.$)

Legyen G egyszerű n csúcsú gráf. Ekkor G körmentes és $n-1$ éle van $\Rightarrow$ G összefüggő és $n-1$ éle van.

Bizonyítás.

- Tfh $k < n$ csúcsú gráfra teljesül.
- Tekintsünk egy n csúcsú G körmentes $n-1$ élű gráfot.
- Mivel G körmentes, van elsőfokú v csúcsa.
- Ezt elhagyva (az illeszkedő éllel) a kapott G' részgráf $n-1$ csúcsú, összefüggő és $n-2$ élű.
- A részgráf összefüggő (indukció szerint). Azaz minden v' és v'' csúcs között van séta.
- Az eredeti G gráf összefüggősége: legyen v' a v szomszédja. Tetszőleges v''-ből van séta v'-be, ahonnan van séta v-be.



G gráf

Fák élszáma, 3/3

3. Állítás ($3. \Rightarrow 1.$)

Legyen G egyszerű n csúcsú gráf. Ekkor G összefüggő és $n-1$ éle van $\Rightarrow$ G fa.

Bizonyítás.

- Tekintsünk egy n csúcsú G összefüggő $n-1$ élű gráfot.
- Ha G körmentes is, akkor fa.
- Ha van benne kör, a körön egy élt elhagyva a részgráf még mindig összefüggő.
- Folytassuk ezt addig, amíg körmentes T gráfot (és így fát) kapunk.
- Legyen ℓ az elhagyott élek száma.
- A T gráfnak n csúcsa és $n-1-\ell$ éle van.
- T fa $\Rightarrow$ élei száma $n-1$ $\Rightarrow \ell = 0$ $\Rightarrow$ G körmentes volt.

Így az **eredeti** tételt is beláttuk. □

Svájci 10 frankos, 1984

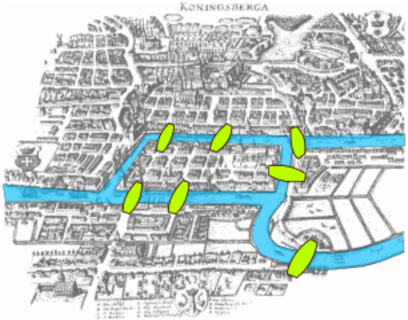
- 1984-es svájci frank sorozat
- 10 frankoson Leonhard Euler 1707 (Bázel) - 1783 (Szentpétervár)

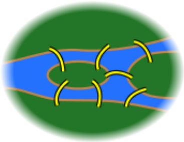
- 10 frankos hátoldala:
  - $n!$,
  - Gamma függvény
  - Naprendszer

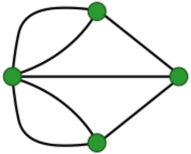
A königsbergi hidak problémája

Königsbergi lakosok megkeresték Eulert:

- Végig lehet-e menni a königsbergi 7 hídon, hogy mindegyiken csak egyszer megyünk át?







- Euler: nem lehet! $\longrightarrow$ gráfelmélet születése

Euler-séta

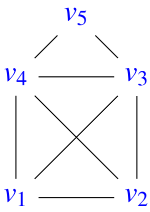
Definíció

Egy G gráfban a $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ séta egy Euler-séta, ha

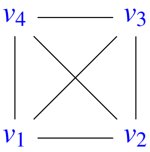
- $e_i \neq e_j$ $(i \neq j)$.
- a séta G minden élét tartalmazza.
- zárt Euler-séta: $v_0 = v_k$

Azaz az Euler-séta a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza.

Példa



G



H

- G-ben van Euler-séta
- H-ban nincs Euler-séta
- egyikben sincs zárt Euler-séta

Euler-séta

Tétel

Egy véges gráfban pontosan akkor van zárt Euler-séta, ha

1. izolált csúcsoktól eltekintve összefüggő;
2. minden csúcs foka páros.

Bizonyítás. $\Longrightarrow$

- Legyen $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_0$ egy zárt Euler-séta
- a gráf összes éle fel van sorolva a sétában

  $\Rightarrow$ minden v csúcs is szerepel, amire illeszkedik él ($d(v) \geq 1$)

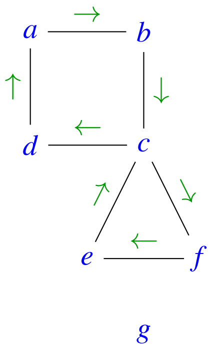
  $\Rightarrow$ minden nem-izolált csúcs között van séta $\Rightarrow 1.$
- legyen $i \neq 0$, ekkor v_i közbenső csúcs
- ekkor e_{i-1}, e_i 2-vel járul hozzá $d(v_i)$-hez
- $i = 0$: e_1 ill. e_k is $1+1$-gyel járul hozzá $d(v_0)$-hoz $\Rightarrow 2.$

Euler-séta

Tétel
Létezik zárt Euler-séta $\iff$ összefüggő (leszámítva az izolált csúcsokat) és $d(v)$ páros

Bizonyítás. $\Longleftarrow$

- A bizonyítás konstruktív
- hagyjuk el az izolált csúcsokat (a maradék gráf tartalmazza a zárt Euler-sétát)
- induljunk el egy v_0 tetszőleges csúcsból eddig nem látogatott élek mentén
- minden $d(v)$ páros, így csak akkor akadunk el ha v_0-ba érkeztünk
- ha minden élet felsoroltunk $\Rightarrow$ kész
- ha nem $\Rightarrow$ iteratívan bővíteni fogjuk a zárt sétát

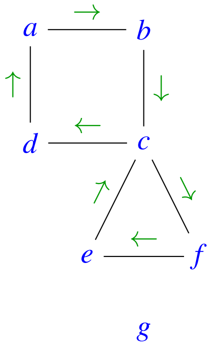


Euler-séta

Tétel
Létezik zárt Euler-séta $\iff$ összefüggő (leszámítva az izolált csúcsokat) és $d(v)$ páros

Bizonyítás. $\Longleftarrow$

- A bizonyítás konstruktív (folyt.)
- van egy zárt sétánk, ami nem tartalmazza az összes élt $\Rightarrow$ bővítjük a sétát
- ha nem soroltunk fel minden élt $\Rightarrow$ van olyan v_i a már látogatott csúcsok között, amire illeszkedik nem-látogatott él (Miért? ö.f. miatt)
- v_i-ből elindulva a nem-látogatott él mentén sétáljunk mindig nem-látogatott éleken
- ekkor visszatérünk v_i-be (Miért?) $\Rightarrow$ a két zárt sétát egyesítve hosszabb zárt sétát kapunk
- az eljárást iterálva egy zárt Euler-sétát kapunk $\square$



Euler-séta

Tétel

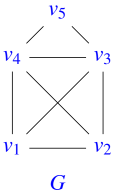
Egy véges gráfban pontosan akkor van zárt Euler-séta, ha

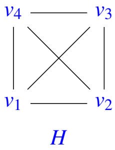
1. izolált csúcsoktól eltekintve összefüggő;
2. minden csúcs foka páros.

Következmény: (Biz.: HF)
Egy véges gráfban pontosan akkor van nem-zárt Euler-séta, ha

1. izolált csúcsoktól eltekintve összefüggő;
2. minden csúcs foka páros kivéve pontosan kettőt .

Példa

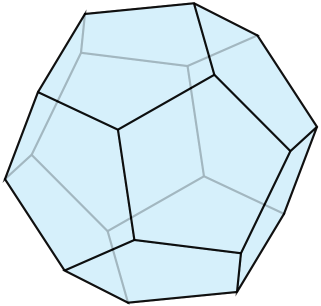




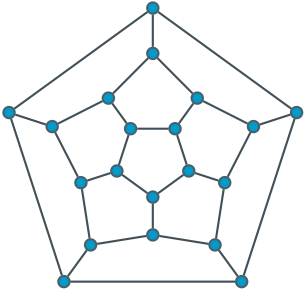
- H-ban nincs Euler-séta $d(v_i) = 3$
- G-ben nincs zárt Euler-séta $d(v_1) = d(v_2) = 3$, $d(v_3) = d(v_4) = 4$, $d(v_5) = 2$
- G-ben van nem-zárt Euler-séta $d(v_1) = d(v_2) = 3$, $d(v_3) = d(v_4) = 4$, $d(v_5) = 2$

Utazás a föld körül

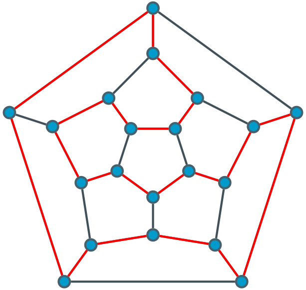
Sir William Rowan Hamilton (1857): Végig tudjuk-e látogatni a dodekaéder (szabályos test, 12 oldala szabályos 5 szög) 20 csúcsán lévő városokat, hogy minden városban pontosan egyszer vagyunk?



dodekaéder



dodekaéder élhálózata



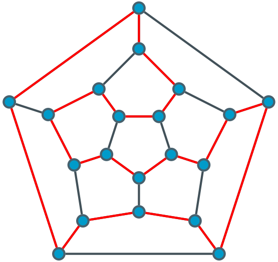
Hamilton-kör
a dodekaéderen

Hamilton-út, Hamilton-kör

Definíció

Legyen G egy véges egyszerű gráf.

- A G gráfban egy út Hamilton-út, ha minden csúcsot pontosan egyszer tartalmaz.
- A G gráfban egy kör Hamilton-kör, ha minden csúcsot pontosan egyszer tartalmaz.



Hamilton-kör
a dodekaéderen

- minden **élet** pontosan egyszer tartalmaz
  $\longrightarrow$ Euler-séta
- minden **csúcsot** pontosan egyszer tartalmaz
  $\longrightarrow$ Hamilton-út

Hamilton-út létezése

Emlékeztető: Egy gráfban létezik zárt Euler-séta

- (lényegében) összefüggő;
- minden csúcs foka páros.
- Ekkor van hatékony algoritmus a zárt Euler-séta megtalálására.

Kérdés: Mikor létezik egy gráfban Hamilton-kör?

- 1M USD értékű kérdés! (általában: P v.s NP probléma)
- Ha lenne hatékony algoritmusunk, sok biztonsági rendszert fel tudnánk törni!

Lehetőségeink:

- Nem hatékony algoritmus: n csúcsú gráfon $n!$ lehetséges sorrendje a csúcsoknak $\longrightarrow$ kimerítő keresés.
- Elégséges feltétel Hamilton-út létezésére.