

Numerikus módszerek 1.

3. előadás: Mátrixok LU -felbontása

Krebsz Anna

ELTE IK

- 1 Alsó háromszögmátrixok és Gauss-elimináció
- 2 Háromszögmátrixokról
- 3 LU -felbontás Gauss-eliminációval
- 4 Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 5 Műveletigény

- 1 Alsó háromszögmátrixok és Gauss-elimináció
- 2 Háromszögmátrixokról
- 3 LU -felbontás Gauss-eliminációval
- 4 Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 5 Műveletigény

Balról szorzás alsó háromszögmátrixokkal

Mi történik, ha az alábbi $L \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrixszal megszorozunk egy $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrixot balról?

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

Az 1. sor kétszeresét hozzáadjuk a 2. sorhoz.

Balról szorzás alsó háromszögmátrixokkal

Mi történik, ha az alábbi $L \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrixszal megszorozunk egy $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrixot balról?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az 1. sor kétszeresét hozzáadjuk a 2. sorhoz, valamint az 1. sor háromszorosát levonjuk a 3. sorból. (\sim GE 1. lépése volt)

A Gauss-elimináció lépései mátrixszorzással

Írjuk fel a GE k -adik lépését ugyanilyen módszerrel! ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{k+1k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -l_{nk} & & 1 \end{pmatrix} = I - \ell_k \mathbf{e}_k^\top, \quad \ell_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1k} \\ \vdots \\ l_{nk} \end{pmatrix}.$$

(A zérus elemek nincsenek feltüntetve L_k -ban.)

Tehát ha $l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad (k = 1, \dots, n-1; \quad i = k+1, \dots, n),$

akkor $L_k \cdot A^{(k-1)} = A^{(k)}$, vagyis megkaptuk a GE k -adik lépését.

Példa: GE az L_k mátrixokkal

Írjuk fel a Gauss-elimináció lépéseit mátrixszorzások segítségével a következő mátrix esetén (ua. mint az előző előadáson)!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás: 1. lépés

$$A^{(1)} = L_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

2. lépés

$$A^{(2)} = L_2 \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =: U$$

Tehát $A^{(2)} = L_2 \cdot L_1 \cdot A =: U$, a kapott felsőháromszög alakot U -val jelöljük.

Fejezzük ki A -t a képletből:

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}}_{=: L} \cdot U = L \cdot U.$$

Ezzel megkaptuk az A mátrix LU -felbontását. Ennek az elméletét tárgyaljuk a következőkben.

- 1 Alsó háromszögmátrixok és Gauss-elimináció
- 2 Háromszögmátrixokról
- 3 LU -felbontás Gauss-eliminációval
- 4 Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 5 Műveletigény

Definíció: alsó háromszögmátrix

Az $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot *alsó háromszögmátrixnak* nevezzük, ha $i < j$ esetén $l_{ij} = 0$. (A főátló felett csupa nulla.)

$$\mathcal{L} := \{ L \in \mathbb{R}^{n \times n} : l_{ij} = 0 \ (i < j) \},$$

$$\mathcal{L}_1 := \{ L \in \mathbb{R}^{n \times n} : l_{ij} = 0 \ (i < j), \ l_{ii} = 1 \}.$$

Definíció: felső háromszögmátrix

Az $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot *felső háromszögmátrixnak* nevezzük, ha $i > j$ esetén $u_{ij} = 0$. (A főátló alatt csupa nulla.)

$$\mathcal{U} := \{ U \in \mathbb{R}^{n \times n} : u_{ij} = 0 \ (i > j) \},$$

$$\mathcal{U}_1 := \{ U \in \mathbb{R}^{n \times n} : u_{ij} = 0 \ (i > j), \ u_{ii} = 1 \}.$$

Állítás: háromszögmátrixról

- 1 Ha $L', L'' \in \mathcal{L}$, akkor $L' \cdot L'' \in \mathcal{L}$.
- 2 Ha $U', U'' \in \mathcal{U}$, akkor $U' \cdot U'' \in \mathcal{U}$.
- 3 Ha $L', L'' \in \mathcal{L}_1$, akkor $L' \cdot L'' \in \mathcal{L}_1$.
- 4 Ha $U', U'' \in \mathcal{U}_1$, akkor $U' \cdot U'' \in \mathcal{U}_1$.
- 5 Ha $L \in \mathcal{L}$ és $\exists L^{-1}$, akkor $L^{-1} \in \mathcal{L}$.
- 6 Ha $U \in \mathcal{U}$ és $\exists U^{-1}$, akkor $U^{-1} \in \mathcal{U}$.
- 7 Ha $L \in \mathcal{L}_1$, akkor $\exists L^{-1}$ és $L^{-1} \in \mathcal{L}_1$.
- 8 Ha $U \in \mathcal{U}_1$, akkor $\exists U^{-1}$ és $U^{-1} \in \mathcal{U}_1$.

Biz.: házi feladat (beadható).



Definíció: L_k

$L_k := I - \ell_k e_k^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ahol $\ell_k \in \mathbb{R}^n$, $(\ell_k)_i = 0$ ($i \leq k$) és $e_k \in \mathbb{R}^n$ a k -adik egységvektor.

Állítás: L_k inverze

$$L_k^{-1} = I + \ell_k e_k^\top.$$

Biz.:

$$L_k \cdot L_k^{-1} = (I - \ell_k e_k^\top)(I + \ell_k e_k^\top) = I - \underbrace{\ell_k e_k^\top + \ell_k e_k^\top}_0 - \ell_k \underbrace{e_k^\top \ell_k}_0 e_k^\top = I. \quad \square$$

Szemléletesen?

Hogyan szorzunk össze két ilyen mátrixot?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{2} & 1 & 0 \\ \color{red}{1} & \color{red}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{2} & 1 & 0 \\ \color{red}{7} & \color{red}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

A bal oldali sorrendben „szépen” szorzódik. Általában is.

Állítás: L_k mátrixok szorzata

$$L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = I + \ell_1 \mathbf{e}_1^\top + \ell_2 \mathbf{e}_2^\top + \dots + \ell_{n-1} \mathbf{e}_{n-1}^\top.$$

Szemléletesen?

Biz.: Indukcióval.



$$\begin{aligned} L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} &= (I + \ell_1 \mathbf{e}_1^\top)(I + \ell_2 \mathbf{e}_2^\top) = \\ &= I + \ell_1 \mathbf{e}_1^\top + \ell_2 \mathbf{e}_2^\top + \ell_1 \underbrace{(\mathbf{e}_1^\top \ell_2)}_0 \mathbf{e}_2^\top = \\ &= I + \ell_1 \mathbf{e}_1^\top + \ell_2 \mathbf{e}_2^\top \end{aligned}$$

- Tegyük fel, hogy $k + 1 \leq n - 1$ és

$$L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_k^{-1} = I + \ell_1 \mathbf{e}_1^\top + \ell_2 \mathbf{e}_2^\top + \cdots + \ell_k \mathbf{e}_k^\top.$$

- $L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_k^{-1} \cdot L_{k+1}^{-1} =$

$$= (I + \ell_1 \mathbf{e}_1^\top + \ell_2 \mathbf{e}_2^\top + \cdots + \ell_k \mathbf{e}_k^\top)(I + \ell_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^\top) =$$

$$= I + \ell_1 \mathbf{e}_1^\top + \ell_2 \mathbf{e}_2^\top + \cdots + \ell_k \mathbf{e}_k^\top + \ell_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^\top +$$

$$+ \underbrace{\ell_1 \mathbf{e}_1^\top \ell_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^\top + \cdots + \ell_k \mathbf{e}_k^\top \ell_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^\top}_{\text{kiesnek}} =$$

$$= I + \ell_1 \mathbf{e}_1^\top + \ell_2 \mathbf{e}_2^\top + \cdots + \ell_k \mathbf{e}_k^\top + \ell_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^\top = \checkmark.$$



- 1 Alsó háromszögmátrixok és Gauss-elimináció
- 2 Háromszögmátrixokról
- 3 LU -felbontás Gauss-eliminációval**
- 4 Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 5 Műveletigény

Definíció: LU -felbontás

Az A mátrix LU -felbontásának nevezzük az $L \cdot U$ szorzatot, ha

$$A = LU, \quad L \in \mathcal{L}_1, \quad U \in \mathcal{U}.$$

A Gauss-eliminációt felírhatjuk alsó háromszögmátrixok segítségével:

$$L_{n-1} \cdots L_2 \cdot L_1 \cdot A = U,$$

majd az inverzekkel egyesével átszorozva:

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}}_L \cdot U = LU.$$

A fenti szorzat is alsó háromszögmátrix. Láttuk az előző tételből, hogy az L mátrix elemeit egy egységmátrixból kapjuk úgy, hogy minden oszlopba ez egyesek alá beletesszük a neki megfelelő ℓ_k vektor nem nulla elemeit (ezek a GE-s hányadosok). Tehát ennek előállításához nem kell több művelet, mint amit a GE-val végzünk.

Példa: LU -felbontás GE-val

Készítsük el a példamátrixunk LU -felbontását

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

- a** részletezve az L_k mátrixokat, a számítás menetét,
- b** majd „tömör” írásmóddal!

Megoldás: (a) 1. lépés

$$A^{(1)} = L_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

L_1^{-1} -et úgy kapjuk, hogy L_1 1. oszlopában az átló alatti elemeket (-1) -szeresére változtatjuk. Megfigyelhetjük, hogy ezek a tényleges GE-s hányadosok. Láttuk, hogy L meghatározáshoz csak ℓ_1 -re van szükségünk.

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. lépés

$$A^{(2)} = L_2 \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =: U$$

L_2^{-1} -et úgy kapjuk, hogy L_2 2. oszlopában az átló alatti elemeket (-1) -szeresére változtatjuk. Megfigyelhetjük, hogy ez a tényleges GE-s hányados. Láttuk, hogy L meghatározáshoz csak ℓ_2 -re van szükségünk.

$$L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát $A^{(2)} = L_2 \cdot L_1 \cdot A =: U$

Fejezzük ki A -t a képletből:

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}}_{=:L} \cdot U = L \cdot U.$$

Tehát $L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1}$. Az L_k mátrixok szorzatára felírt tétel alapján ehhez nem kell mátrixot szoroznunk, csak az ℓ_k vektorokból kell összeraknunk L -et.

$$L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A kapott eredményt szorzással is ellenőrizhetjük.

(b) Tömör írásmódban: 1. lépés

A GE-s hányadosokat minden lépésben az eliminált pozíciókon tudjuk tárolni (éppen ennyi nulla van az oszlopban). Könnyen megjegyezhető ezek képzése: az eliminálandó mátrix rész 1. oszlopában az első elemmel leosztjuk az alatta levőket. Ezzel minden a helyére került. Vonalakkal jelezzük, hogy itt már tárolásról is szó van. A jobb alsó 2×2 -es mátrix részen elvégezzük az eliminációt.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 3 & & \\ \hline -4 & 5 & -2 & -4 & 2 \\ 6 & -5 & 4 & 6 & 2 \end{array} \right] \rightarrow$$

2. lépés:

Ugyanúgy dolgozunk tovább, de most már csak a jobb alsó 2×2 -es mátrix részen, a többi változatlanul leírjuk.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 3 & & \\ \hline -2 & & & 5 & 4 \\ 3 & & & -5 & -5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 3 & & \\ \hline -2 & & & 5 & 4 \\ 3 & & & -5 & -5 \\ \hline & & & -5 & -1 \end{array} \right]$$

Olvassuk ki a keresett mátrixokat!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = L \cdot U$$

Tétel: LU -felbontás létezése

Ha a Gauss-elimináció végrehajtható sor és oszlopcsere nélkül (azaz $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ ($k = 1, \dots, n-1$)), akkor az A mátrix LU -felbontása létezik.

Biz.: Ha a GE végrehajtható sor és oszlopcsere nélkül, akkor az L_k mátrixok felírhatók és L, U előállítható. \square

Megj.:

- $u_{kk} = a_{kk}^{(k-1)}$ és $D_k = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdots a_{kk}^{(k-1)}$
- Ha van A -nak LU -felbontása, ahol U átlójában nem nullák állnak, akkor $u_{kk} = a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$.
- $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) = D_n \neq 0$.
- Ha a GE végrehajtható, de $a_{nn}^{(n-1)} = 0$, akkor létezik LU -felbontás, de $\det(A) = \det(L) \cdot \det(U) = \det(U) = 0$ -ból $u_{nn} = 0$. Ebben az esetben a LER vagy nem oldható meg vagy nem egyértelműen.

Tétel: LU -felbontás létezése és egyértelműsége (főminorokkal)

- Ha $D_k \neq 0$ ($k = 1, \dots, n-1$), akkor létezik az A mátrix LU -felbontása és $u_{kk} \neq 0$ ($k = 1, \dots, n-1$).
- Ha $\det(A) \neq 0$, akkor a felbontás egyértelmű.

Biz.: létezés: az LU -felbontás létezése a GE-nál tanult tételünkből következik. $D_k \neq 0 \Leftrightarrow a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ a megadott indexekre, ezért a GE végrehajtható és az L, U mátrixok előállíthatóak.

Egyértelműség: indirekt tegyük fel, hogy az A invertálható mátrix LU -felbontása nem egyértelmű, azaz legalább két különböző felbontás létezik:

$$A = L_1 \cdot U_1 = L_2 \cdot U_2.$$

$$A = L_1 \cdot U_1 = L_2 \cdot U_2.$$

Az egyenlőséget U_2^{-1} -zel jobbról, majd L_1^{-1} -zel balról szorozva kapjuk, hogy

$$U_1 \cdot U_2^{-1} = L_1^{-1} \cdot L_2.$$

A szóban forgó inverzek léteznek, hiszen

$$\det(A) = \det(L_i) \cdot \det(U_i) = \det(U_i) \neq 0, \quad i = 1, 2\text{-re.}$$

Az egyenlőség bal oldalán egy felső háromszögmátrix, jobb oldalán pedig egy 1 főátlójú alsó háromszögmátrix áll. Ez csak úgy lehet, ha az egységmátrixról van szó. Tehát

$$U_1 \cdot U_2^{-1} = I \quad \implies \quad U_1 = U_2,$$

$$L_1^{-1} \cdot L_2 = I \quad \implies \quad L_1 = L_2.$$

Ellentmondásra jutottunk, vagyis az LU -felbontás egyértelmű. \square

L és U megadása GE-val

Az eddigieket összefoglalva felírhatjuk az $A = LU$ felbontást:

$$L \in \mathcal{L}_1 \text{ és } l_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}} \quad (i > j), \quad U \in \mathcal{U} \text{ és } u_{ij} = a_{ij}^{(i-1)} \quad (i \leq j).$$

Miért jó az LU -felbontás?

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az $A = LU$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{U \cdot x}_y = b$ helyett $(\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$

- 1 oldjuk meg az $Ly = b$ alsó háromszögű, $(n^2 + \mathcal{O}(n))$
- 2 majd az $Ux = y$ felső háromszögű LER-t. $(n^2 + \mathcal{O}(n))$

Összehasonlításként: egy mátrix-vektor szorzás műveletigénye:

$$n \cdot (2n - 1) = 2n^2 + \mathcal{O}(n).$$

Persze valamikor elő kell állítani az LU -felbontást. $(\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$

Előnyös, ha sokszor ugyanaz A : az ILU -algoritmusnál illetve az inverz iterációnál látjuk majd alkalmazását.

- 1 Alsó háromszögmátrixok és Gauss-elimináció
- 2 Háromszögmátrixokról
- 3 LU -felbontás Gauss-eliminációval
- 4 Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 5 Műveletigény

Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása

- Nem ismerjük L -t és U -t: ismeretlenek a mátrixokban.
- Viszont szorzatukat ismerjük: $LU = A$.
- A egyes elemeit a mátrixszorzás alapján felírva egyenleteket kapunk L és U elemeire.
- *Jó sorrendben* felírva az egyenleteket, mindig megkapjuk egy-egy új ismeretlen értékét.
- A GE-nál láttuk, hogy U 1. sora azonos A 1. sorával (a GE az 1.sort nem változtatja).
- L 1. oszlopát úgy kapjuk, hogy A 1. oszlopát leosztjuk a_{11} -gyel.

$$\begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 2. & 3. & 3. & 3. \\ 4. & 4. & 5. & 5. \\ 6. & 6. & 6. & 7. \end{pmatrix}$$

sorfolytonosan

$$\begin{pmatrix} 1. & 3. & 5. & 7. \\ 2. & 3. & 5. & 7. \\ 2. & 4. & 5. & 7. \\ 2. & 4. & 6. & 7. \end{pmatrix}$$

oszlopfolytonosan

$$\begin{pmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. \\ 2. & 3. & 3. & 3. \\ 2. & 4. & 5. & 5. \\ 2. & 4. & 6. & 7. \end{pmatrix}$$

parkettaszerűen

Példa: LU -felbontás közvetlenül

- a Készítsük el a példamátrixunk LU -felbontását közvetlenül a mátrixszorzás alapján.
- b Nézzünk egy újabb példát is. (Vigyázat, $\det(B_2) = 0$.)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolyonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 & l_{31} &= 3 \\ l_{31} \cdot 0 + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 & l_{32} &= \frac{-5}{5} = -1 \\ l_{31} \cdot 3 + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} &= 4 & u_{33} &= 4 - 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = -1 \end{aligned}$$

Sorfolytanosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot (-2) + 1 \cdot u_{22} &= 4 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 4 - (-2) \cdot (-2) = 0 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 & l_{31} &= 3 \\ l_{31} \cdot (-2) + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 & \rightsquigarrow & \text{ellentmondásos egyenlet} \end{aligned}$$

Mivel $D_2 = \det(B_2) = 0$, így $u_{22} = 0$ lesz. Az LU -felbontás nem készíthető el. GE-t alkalmazva $a_{22}^{(1)} = 0$ lenne, emiatt sort kéne cserélni.

Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Tétel: az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az L és U mátrixok elemei a következő képletekkel számolhatók:

$$\begin{aligned} i \leq j \text{ (felső)} \quad & u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}, \\ i > j \text{ (alsó)} \quad & l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right). \end{aligned}$$

Ha jó sorrendben számolunk, mindig ismert az egész jobb oldal.

Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Biz.: Írjuk fel az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, mint mátrixszorzat i -edik sorának j -edik elemét feltéve, hogy $A = L \cdot U$. Használjuk ki, hogy háromszögmátrixokról van szó, majd válasszunk le egy tagot.

Ha $i \leq j$, azaz egy főátló feletti (vagy főátlóbeli) elemről van szó, akkor $k > i \Rightarrow l_{ik} = 0$, valamint $l_{ii} = 1$, és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^i l_{ik} \cdot u_{kj} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ebből u_{ij} kifejezhető

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Biz. folyt. Ha $i > j$, azaz egy főátló alatti elemről van szó, akkor $k > j \Rightarrow u_{kj} = 0$, és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^j l_{ik} \cdot u_{kj} = l_{ij} \cdot u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ha $u_{jj} \neq 0$ (találkoztunk már ezzel a feltétellel), akkor l_{ij} kifejezhető

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right).$$

Figyeljük meg, hogy ha valamely „jó sorrendben” (lásd az előadás diásorát) megyünk végig az (i, j) indexekkel A elemein, akkor az l_{ij} illetve u_{ij} értékét megadó egyenlőségek jobb oldalán minden mennyiség ismert. □

- 1 Alsó háromszögmátrixok és Gauss-elimináció
- 2 Háromszögmátrixokról
- 3 LU -felbontás Gauss-eliminációval
- 4 Az LU -felbontás „közvetlen” kiszámítása
- 5 Műveletigény

Tétel: Az LU -felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Biz.: A GE-ből trivi, mert vele az LU -felbontás is előállítható.

A képletekből: Rögzített j -re:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj},$$

u_{ij} -hez $(i - 1)$ szorzás és $(i - 1)$ összeadás kell. Összesen $2(i - 1)$ művelet. Rögzített i -re:

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right),$$

l_{ij} -hez 1 osztás, $(j - 1)$ szorzás és $(j - 1)$ összeadás kell. Összesen $2j - 1$ művelet.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j 2(i-1) + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} (2j-1) = \\
 & \sum_{j=1}^n 2 \cdot \frac{(j-1)j}{2} + \sum_{i=2}^n \left(2 \cdot \frac{(i-1)i}{2} - (i-1) \right) = \\
 & \sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^n j + \sum_{i=2}^n (i-1)^2 = \sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^n j + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\
 & = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2). \quad \square
 \end{aligned}$$

A háromszögmátrixú LER megoldás műveletigénye

Tétel: Az $Ux = y$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

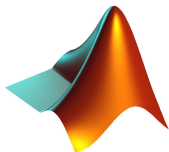
Biz.: lásd GE visszahelyettesítés.

Tétel: Az $Ly = b$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

Biz.: Rögzített i . sorra $(i - 1)$ szorzás és $(i - 1)$ összeadás.
Összesen: $2(i - 1)$ művelet.

$$\sum_{i=2}^n 2(i - 1) = \sum_{s=1}^{n-1} 2s = 2 \cdot \frac{n(n - 1)}{2} = n^2 + \mathcal{O}(n). \quad \square$$



- 1 Az LU -felbontás működése „kisebb” ($n \approx 7$) mátrixokra,
- 2 valamint „nagyobb” mátrixokra ($n \approx 50$) színkóddal.
- 3 LER megoldása LU -felbontás segítségével.
- 4 Sok LER ($m \approx 10, 100$) megoldása futási idejének összevetése nagyobb mátrixok ($n \approx 50, 100, 200$) esetén: GE-val valamint az LU -felbontás kihasználásával.