Szélsőérték

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ a \in \text{int } D_f$

Az f-nek az a-ban **lokális maximuma** [minimuma] van, ha $\exists K(a),\ \forall x \in K(a) \cap D_f$: $f(x) \leq f(a)\ [f(x) \geq f(a)]$

Elsőrendű szükséges feltétel

Tegyük fel, hogy f-nek a-ban lokális szélsőértéke van és $f \in D\{a\}$

Ekkor $f'(a) = 0$

Bizonyítás

$e \in \mathbb{R}^n,\ ||e|| = 1,\ \varphi(t) := f(a + t \cdot e) \quad (t \in \mathbb{R},\ a + t \cdot e \in D_f)$

φ-nek a 0-ban lokális szélsőértéke van.

$\varphi \in D\{0\},\ \varphi'(0) = \partial_e f(a)$ és egyváltozós eset miatt $\varphi'(0) = 0 \implies \partial_e f(a) = 0 \implies \partial_i f(a) \quad (i = 1, \ldots, n)$

$\implies f'(a) = \text{grad } f(a) = (\partial_1 f(a), \ldots, \partial_n f(a)) = 0 \in \mathbb{R}^n$

Másodrendű elégséges feltétel

Tegyük fel, hogy $f \in D^2\{a\},\ f'(a) = 0,\ Q(x) := < f''(a) \cdot x,\ x > \quad (x \in \mathbb{R}^n)$ pozitív [negatív] definit

Ekkor az f-nek az a-ban lokális minimuma [maximuma] van.

Bizonyítás

Q legyen pl pozitív definit.

(Taylor-Peano)

$f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2} \cdot Q(x) + \eta(h) \cdot ||h||^2 \geq \frac{m}{2} \cdot ||h||^2 + \eta(h) \cdot ||h||^2 = ||h||^2 \cdot (\frac{m}{2} + \eta(h)) \quad (m > 0,\ \eta(h) \to 0\ (h \to 0))$

$\implies \exists r > 0 : K_r(a) \subset D_f$ és $|\eta(h)| < \frac{m}{4} \quad (||h|| < r) \implies \frac{m}{2} + \eta(h) \geq 0 \implies f(a + h) \geq f(a) \quad (||h|| < r)$ azaz $f(x) \geq f(a) \quad (x \in K_r(a))$

Másodrendű szükséges feltétel

Tegyük fel, hogy $f \in D^2\{a\}$ és az f-nek a-ban lokális minimuma [maximuma] van

Ekkor $f'(a) = 0$ és Q pozitív [negatív] szemidefinit.

Bizonyítás

$f'(a) = 0$ következik az elsőrendű szükséges feltételből.

Legyen pl lokális minimum.

Azaz $\exists r > 0 : K_r(a) \subset D_f$ és $f(x) \geq f(a) \quad (x \in K_r(a))$

Indirekt tegyük fel, hogy Q nem pozitív definit, tehát $\exists z \in \mathbb{R}^n : Q(z) < 0 \iff z \neq 0$

Továbbá $\forall t \in \mathbb{R},\ a + t \cdot z \in K_r(a) \iff ||t \cdot z|| < r \iff |t| < \frac{r}{||z||} \implies$

$f(a + t \cdot z) - f(a) = \frac{1}{2} \cdot Q(t \cdot z) + \eta(t \cdot z) \cdot ||t \cdot z||^2 = t^2 \cdot (\frac{Q(z)}{2} + \eta(t \cdot z) \cdot ||z||^2)$

$\eta(t \cdot z) \to 0 \quad (t \to 0)$ ezért $\exists 0 < |t| < \frac{r}{||z||} : \frac{Q(z)}{2} + \eta(t \cdot z) \cdot ||z||^2 < 0 \implies f(a + t \cdot z) < f(a)$

Ami nem lehetséges, mivel $a + t \cdot z \in K_r(a)$ és a-ban lokális minimum van.