(Hf) 1. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2+x+3} = -\dfrac{2}{5}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+x-4}{x^2+1} = +\infty$

Megoldás

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2+x+3} = -\dfrac{2}{5}$

Vegyük észre, hogy ez egy $\left(\frac{0}{0}\right)$ típusú kritikus határérték, és

$$\frac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2+x+3} = \frac{x^2+2x-3}{x^2(x+3)+(x+3)} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^2+1} \quad (x\neq -3).$$

Ezért azt kell igazolni, hogy

(*) $\forall \varepsilon>0$-hoz $\exists \delta>0$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$, $0<|x+3|<\delta$: $\left|\dfrac{x-1}{x^2+1}+\dfrac{2}{5}\right|<\varepsilon$.

Legyen $\varepsilon>0$ rögzített és $x\neq -3$. Ekkor

$$\left|\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{2}{5}\right| = \left|\frac{5(x-1)+2(x^2+1)}{5(x^2+1)}\right| = \left|\frac{2x^2+5x-3}{5(x^2+1)}\right| = \left|\frac{(x+3)(2x-1)}{5(x^2+1)}\right| =$$

$$= \frac{|2x-1|}{5(x^2+1)}\cdot|x+3| \le (\text{ha } \underline{|x+3|<1}) < \frac{9}{5\cdot 5}|x+3| < \underbrace{|x+3|}_{<\varepsilon}$$

hiszen ha $|x+3|<1$, akkor $-1<x+3<1 \Rightarrow -4<x<-2$, és így

a) $-8<2x<-4 \Rightarrow -9<2x-1<-5 \Rightarrow \underline{5<|2x-1|<9}$

b) $4<x^2<16 \Rightarrow \underline{5<x^2+1}<17$

Így a $\delta:=\min\{1,\varepsilon\}$ választással (*) teljesül.

---

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+x-4}{x^2+1} = +\infty$

Azt kell igazolni, hogy

(**) $\forall P>0$-hoz $\exists x_0>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x>x_0$: $\dfrac{x^3+x-4}{x^2+1}>P$.

Legyen $P>0$ rögzített. Ekkor

$$\frac{x^3+x-4}{x^2+1} > (x-4>0, \text{ha } \underline{x>4}) > \frac{x^3}{x^2+1} > (1<x^2, \text{ha } x>1) > \frac{x^3}{x^2+x^2} =$$

$$= \frac{x^3}{2x^2} = \underbrace{\frac{x}{2}>P}_{x>2P}.$$

Így az $x_0:=\max\{4, 2P\}$ választással (**) teljesül.

Hf 2. Számítsa ki a következő határértékeket!

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^5+3x^2-x}{2x^4-x^3+x} = \lim_{x\to 0} \cancel{\frac{x}{x}} \cdot \frac{x^4+3x-1}{2x^3-x^2+1} = \frac{0+0-1}{0-0+1} = -1$$

b) $$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+7x+5}{x^3+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(2x+5)}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)} = \frac{2(-1)+5}{(-1)^2-(-1)+1} = \frac{3}{3} = 1$$

c) $$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}\right) = \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} = \frac{1+2}{1^2+1+1} = 1$$

d) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} \qquad (m, n = 1, 2, \dots)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)}{\cancel{(x-1)}(x^{m-1}+x^{m-2}+\dots+1)} = \frac{\overbrace{1+1+\dots+1}^{n \text{ db.}}}{\underbrace{1+1+\dots+1}_{m \text{ db.}}} = \frac{n}{m}$$