Hf 1. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét!

a) $a_n = \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+5} = \left(\frac{\cancel{3n}}{\cancel{3n}} \cdot \frac{1+\frac{1}{3n}}{1+\frac{2}{3n}}\right)^{6n+5} =$

$$= \left[\frac{\left(1+\frac{1/3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2/3}{n}\right)^n}\right]^6 \left[\frac{1+\frac{1/3}{n}}{1+\frac{2/3}{n}}\right]^5 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left[\frac{e^{1/3}}{e^{2/3}}\right]^6 \left(\frac{1+0}{1+0}\right)^5 = \left(\frac{1}{e^{1/3}}\right)^6 = \frac{1}{e^2}.$$

---

b) $a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)^{n-5} = \left(\frac{2\cancel{n}}{3\cancel{n}} \cdot \frac{1+\frac{3}{2n}}{1+\frac{1}{3n}}\right)^{n-5} =$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-5} \left(\frac{1+\frac{3}{2n}}{1+\frac{1}{3n}}\right)^{n-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \left[\frac{\left(1+\frac{3/2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1/3}{n}\right)^n}\right] \left(\frac{1+\frac{3/2}{n}}{1+\frac{1/3}{n}}\right)^{-5} \to$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \cdot 0 \cdot \frac{e^{3/2}}{e^{1/3}} \cdot \left(\frac{1+0}{1+0}\right)^{-5} = 0.$$

---

c) $a_n = \left(\frac{3n+3}{2n-1}\right)^{5n+1} = \left(\frac{3\cancel{n}}{2\cancel{n}} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{2n}}\right)^{5n+1} =$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{5n+1} \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{2n}}\right)^{5n+1} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]^5 \cdot \frac{3}{2} \left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{-1/2}{n}\right)^n}\right]^5 \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{-1/2}{n}}\right) \to$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} (+\infty)^5 \cdot \frac{3}{2} \frac{e}{e^{-1/2}} \cdot \left(\frac{1+0}{1+0}\right) = +\infty.$$

Azt alkalmaztuk, hogy $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$, ha $x \in \mathbb{Q}$.

Ezen kívül: $q^n \to 0$, ha $|q|<1$ és $q^n \to \infty$, ha $q>1$.

(Hf) 2 Legyen $a_0 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{3+2a_n}$ $(n=0,1,2,\dots)$

Mutassa meg, hogy a sorozat konvergens és számítsa ki a határértékét!

Megoldás.

(Sejtés: $a_n \to a$ $\Rightarrow$ $\underset{\downarrow \, a}{a_{n+1}} = \sqrt{3+2\underset{\downarrow \, a}{a_n}}$ $\Rightarrow$ $a = \sqrt{3+2a}$ $\Rightarrow$ $a^2 - 2a - 3 = 0$

$a_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} < \begin{matrix} 3 \checkmark \\ -1 \end{matrix}$)

- A sorozat monoton növekvő, azaz $a_{n+1} \geq a_n$ $(n=0,1,2,\dots)$

  Teljes indukcióval:

  – $n=0$ igaz, mert $a_0 = \sqrt{3}$, $a_1 = \sqrt{3+2a_0} = \sqrt{3+2\sqrt{3}} > \sqrt{3} = a_0$.

  – Tf, h valamely n-re igaz, hogy $a_{n+1} \geq a_n$ (indukciós feltevés)

  Ekkor

  $a_{n+2} = \sqrt{3+2\underline{a_{n+1}}} \geq (\text{ind. felt.}) \geq \sqrt{3+2\underline{a_n}} = a_{n+1}$,

  azaz az állítás $n+1$-re is teljesül.

- A sorozat felülről korlátos, és $a_n \leq 3$. $(n=0,1,2,\dots)$

  Teljes indukcióval:

  – $n=0$-ra igaz, mert $a_0 = \sqrt{3} < 3$.

  – Tf, h valamely n-re igaz, hogy $a_n \leq 3$ (indukciós feltevés)

  Ekkor $a_{n+1} = \sqrt{3+2\underline{a_n}} \leq (\text{ind. felt}) \leq \sqrt{3+2\cdot\underline{3}} = \sqrt{9} = 3$,

  azaz az állítás $n+1$-re is teljesül.

Mivel (a_n) monoton növekvő és felülről korlátos, így konvergens.
A sejtésben leírtak szerint a határértéke csak -1 vagy 3 lehet.
De -1 nem lehet mert $a_n \geq \sqrt{3} = a_0$, mert monoton növekvő.

Ezért $\underline{\lim (a_n) = 3.}$

(Hf) 3. Bizonyítsa be, hogy ha $\alpha \in [0,1]$, akkor az

$$a_0 = \frac{\alpha}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2+\alpha}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens, és számítsa ki a határértékét!

Megoldás. Sejtés $a_n \to A$. Ekkor

$$\overset{A}{\uparrow}{a_{n+1}} = \frac{\overset{A^2}{\uparrow}{a_n^2}+\alpha}{2} \Rightarrow A = \frac{A^2+\alpha}{2} \Rightarrow A^2-2A+\alpha = 0 \Rightarrow A_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4-4\alpha}}{2} = 1\pm\sqrt{1-\alpha}$$

Mindkét megoldás létezik, mert $1-\alpha \geq 0$, illetve

$$0 < A_1 = 1-\sqrt{1-\alpha} \leq 1+\sqrt{1-\alpha} = A_2.$$

(*) Mivel A_1 gyöke az $A = \frac{A^2+\alpha}{2}$ egyenletnek, így $\frac{A_1^2+\alpha}{2} = A_1$.

- A sorozat monoton növekvő, azaz $a_{n+1} \geq a_n$ $(n=0,1,2,\dots)$

  Teljes indukcióval:
  - $n=0$ igaz, mert $a_0 = \frac{\alpha}{2}$ és $a_1 = \frac{a_0^2+\alpha}{2} = \frac{(\alpha/2)^2+\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{8}+\frac{\alpha}{2} \geq \frac{\alpha}{2} = a_0$
  - Tf, h valamely n-re igaz, hogy $a_{n+1} \geq a_n$ (indukciós feltevés). Ekkor

    $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2+\alpha}{2} \geq (\text{ind. felt}) \geq \frac{a_n^2+\alpha}{2} = a_{n+1}$, hiszen $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow a_n^2 \leq a_{n+1}^2$.

  azaz az állítás $n+1$-re teljesül.

- A sorozat felülről korlátos, és $a_n \leq A_1 = 1-\sqrt{1-\alpha}$.

  Teljes indukcióval:
  - $n=0$-ra igaz, mert $a_0 = \frac{\alpha}{2} \leq 1-\sqrt{1-\alpha} \Leftrightarrow \sqrt{1-\alpha} \leq 1-\frac{\alpha}{2} \overset{\text{(négyzetre em.)}}{\Leftrightarrow}$

    $\Leftrightarrow 1-\alpha \leq 1-\alpha+\frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\alpha^2}{4}$ igaz.
  - Tegyük fel, hogy valamely n-re igaz, hogy $a_n \leq A_1$ (indukciós feltevés).

    Ekkor $a_{n+1} = \frac{a_n^2+\alpha}{2} \leq (\text{ind. felt}) \leq \frac{A_1^2+\alpha}{2} = ((*)\text{ miatt}) = A_1$,

  azaz az állítás $n+1$-re is teljesül.

Mivel (a_n) monoton növekvő és felülről korlátos, így konvergens. A sejtésben leírtak szerint a határértéke csak A_1 vagy A_2 lehet. De $a_n \leq A_1 \leq A_2$, ezért

$$\lim(a_n) = A_1 = 1-\sqrt{1-\alpha}.$$