Diszkrét matematika I. hétfői (2025.03.31.) 2. Zh

feladatainak eredményei és részletesen kidolgozott megoldásai

A megoldások ismertetésénél itt most nem csak a konkrét módszert, hanem a módszer hátterét, illetve a módszerhez vezető gondolatsort is bemutatjuk (ez utóbbiak részletezését a hallgatóktól a ZH megoldásában természetesen nem vártuk el).

1. Tekintsük a következő relációt

$$R = \left\{ (r, s) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Ekvivalenciareláció lesz-e R? (Az ekvivalenciarelációkat jellemző három tulajdonság közül melyek teljesülnek?) Válaszát indokolja! **(6p)**

(VIGYÁZAT: $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ nem jelenti azt, hogy r és s külön-külön racionálisak lennének. Pl. $\frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$)

Megoldás: Az $R \subset H \times H$ homogén binér relációt akkor nevezzük *ekvivalenciarelációnak*, ha egyszerre **reflexív** ($\forall x \in H : (x, x) \in R$) ÉS **szimmetikus** ($\forall x \forall y : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$) ÉS **tranzitív** ($\forall x \forall y \forall z : \big((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R\big) \Rightarrow (x, z) \in R$).

Reflexív: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{Q}$. (Bármely nemnulla valós számak a saját magával vett hányadosa az 1, és az 1 az racionális szám.) Tehát IGEN, R tényleg reflexív.

Szimmetrikus: Bármely racionális számnak a reciproka is racionális. Tehát

$$(x, y) \in R \Longleftrightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x} \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow (y, x) \in R$$

Tehát IGEN, R tényleg szimmetrikus.

Tranzitív: Bármely két racionális számnak a szorzata is racionális. Tehát

$$\Big((x, y) \in R\Big) \wedge \Big((y, z) \in R\Big) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}\right) \wedge \left(\frac{y}{z} \in \mathbb{Q}\right) \Longrightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = \frac{x}{z} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow (x, z) \in R$$

Tehát IGEN, R tényleg tranzitív.

Konklúzió: IGEN, R ekvivalenciareláció.

---

2. Számítsa ki a

$$\frac{(1 + \sqrt{3}i)^6}{(-1 + i)^{11}}$$

komplex szám harmadik gyökeit! (A végeredmény megadása trigonometrikus alakban is elegendő.) **(6p)**

Nevezetes szögek trigonometrikus értéke

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Megoldás: Először adjuk meg a törtként megadott komplex szám trignometrikus alakját, ahhoz is először a számlálóban és a nevezőben szereplő hatványalapokét:

$$\left(1+\sqrt{3}i\right) = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right), \text{ és ezt hatványozva}$$
$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^6 = 2^6\left(\cos\frac{6\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi}{3}\right) = \sqrt{2}^{12}\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right) = 64$$

Mivel a nevezőbeli hatványalap valós része negatív, képzetes része pozitív, ezért a második síknegyedbe esik a szöge:

$$(-1+i) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \text{ és ezt hatványozva}$$
$$(-1+i)^{11} = \sqrt{2}^{11}\left(\cos\frac{33\pi}{4}+i\sin\frac{33\pi}{4}\right) = 2^5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 32+32i$$

(Az algebrai alakok, azaz 64 és $32+32i$ megadása *nem szükséges.*) Így tehát

$$\frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^6}{(-1+i)^{11}} = \frac{\sqrt{2}^{12}}{\sqrt{2}^{11}}\cdot\frac{\cos 2\pi + i\sin 2\pi}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

(Az algebrai alakokkal: $\dfrac{64}{32+32i} = \dfrac{2}{1+i} = \dfrac{2}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{2-2i}{1+1} = 1-i$, végül ennek úgyis a trigonometrikus alakja kell a gyökvonáshoz. De így is lehetett számolni.)

Tehát $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$ komplex számból kell harmadik gyököt vonni. A komplex számok körében minden nemnulla számnak pontosan három különböző köbgyöke van, amik egy origó középpontú szabályos háromszög három csúcsát alkotják: $w = |w|\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ha $w^3 = z$, akkor $|w|^3 = \sqrt{2}$, és $3\alpha = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi$. Tehát $|w| = \sqrt[6]{2}$, és $\alpha = \dfrac{7\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3} = \dfrac{(7+8k)\pi}{12}$. A három szög tehát: $\alpha_1 = \dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{12} = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$ (ez a második síknegyedben van), $\alpha_2 = \dfrac{15\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{4} = \pi + \dfrac{\pi}{4} = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$ (ez a harmadik síknegyedben van, a $-1-i$ szám irányszöge), $\alpha_3 = \dfrac{23\pi}{12} = 2\pi - \dfrac{\pi}{12} = 360^\circ - 15^\circ = 345^\circ$ (vagyis ez a -15° szög, a negyedik síknegyedben), és így a három megoldás:

$$w_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$
$$w_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$
$$w_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$

3. Tekintsük az $R = \{(z^4, z) : z \in \mathbb{C}\}$ és $S = \{(z^6, z) : z \in \mathbb{C}\}$ relációkat a komplex számok halmazán.

   a) Mi lesz $R(\{1\}) \cap S(\{1\})$? **(4p)**

Megoldás: Az R reláció ismerős lehet a gyakorlatról, ez a ‚komplex negyedik gyökvonás' többértékű hozzárendelés. ($R^{-1} : z \mapsto z^4$ a ‚negyedik hatványra emelés' függvény, ennek a nem invertálható függvénynek az inverz-relációja az R.) Tehát R minden w komplex számhoz hozzárendeli mind a négy ($w = 0$ esetén csak egy) olyan komplex z számot, amire $z^4 = w$, tehát amik w-nek a komplex negyedik gyökei: $(w, z) \in R \Leftrightarrow z^4 = w$.

Tehát $R(\{1\}) = \{1, -1, i, -i\}$.

Hasonlóan S reláció a ‚komplex hatodik gyökvonás' többértékű hozzárendelés. ($S^{-1} : z \mapsto z^6$ a ‚hatodik hatványra emelés' függvény, ennek a nem invertálható függvénynek az inverz-relációja az S.) Tehát S minden w komplex számhoz hozzárendeli mind a hat ($w = 0$ esetén csak egy) olyan komplex z számot, amire $z^6 = w$, tehát amik w-nek a komplex hatodik gyökei: $(w, z) \in R \Leftrightarrow z^6 = w$.

Tehát $S(\{1\}) = \{1, (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}), (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}), -1, (\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}), (\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})\}$.

$$\begin{aligned}R(\{1\}) \cap S(\{1\}) &= \{1, -1, i, -i\} \cap \{1, (\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}), (-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}), -1, (-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}), (\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2})\} = \\ &= \{1, -1\}\end{aligned}$$

Másik megoldás: $R(\{1\}) \cap S(\{1\}) = \{z \in \mathbb{C} : z^4 = 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : z^6 = 1\}$, tehát $R(\{1\}) \cap S(\{1\}) = \{z \in \mathbb{C} : z^4 = z^6 = 1\}$. A $z^4 = z^6 = 1$ megoldása: $(z^2)^2 = (z^2)^3 = 1$, vezessünk be új $w = z^2$ ismeretlent, erre $w^2 = w^3 = 1$, és $w^2 = w^3$ osztva $w^2 = 1$-gyel: $w = 1$. Azaz $z^2 = 1$, tehát $z = 1$ vagy $z = -1$, így $R(\{1\}) \cap S(\{1\}) = \{1, -1\}$.

Harmadik megoldás: $R(\{1\}) \cap S(\{1\}) = \{1, -1, i, -i\} \cap \{z \in \mathbb{C} : z^6 = 1\}$, tehát $z \in \{1, -1, i, -i\}$ elemei közül kellenek azok, akikre $z^6 = 1$ teljesül. Ezt csak 1 és -1 tudja, ezért $R(\{1\}) \cap S(\{1\}) = \{1, -1\}$.

---

3. b) Mi lesz $(S \circ R)(\{1, -1\})$? **(4p)**

Megoldás: $(S \circ R) = \{(u, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid \exists z \in \mathbb{C} : (u, z) \in R \wedge (z, w) \in S\}$.
$(u, z) \in R \Leftrightarrow u = z^4$, $(z, w) \in S \Leftrightarrow z = w^6$, tehát a fenti halmazt definiáló feltétellel ekvivalens: $\exists z \in \mathbb{C} : (u = z^4 \wedge z = w^6)$, ezt célszerűbb az ÉS kommutativitását használva úgy írni, hogy $\exists z \in \mathbb{C} : (z = w^6 \wedge u = z^4) \Leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{C} : z = w^6) \wedge (u = (w^6)^4)$, ahol kihasználjuk azt, hogy ha $z = w^6$, akkor $z^4 = (w^6)^4 = w^{24}$, az ÉS csak akkor igaz, amikor mindkettő állítás igaz, így a másodikban kicserélhetjük z-t w^6-ra, és így a z csak az elsőben marad változó, és így a kvantor csak arra a részállításra vonatkozik.
Mivel $\exists z \in \mathbb{C} : z = w^6$ azonosan igaz (bármi is legyen $w \in \mathbb{C}$), így ez a feltétel az ÉS-ből elhagyható: $\exists z \in \mathbb{C} : (u, z) \in R \wedge (z, w) \in S \Leftrightarrow u = w^{24}$.

Tehát: $(S \circ R) = \{(u, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : u = w^{24}\}$, így

$$\begin{aligned}(S \circ R)(\{1, -1\}) &= \{w \in \mathbb{C} : w^{24} = 1 \vee w^{24} = -1\} \\ &= \left\{w_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{24}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{24}\right), k = 0, 1, \ldots, 24\right\} \\ &\quad \cup \left\{w_k = \cos\left(\frac{\pi}{24} + \frac{2\pi k}{24}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{24} + \frac{2\pi k}{24}\right), k = 0, 1, \ldots, 24\right\}\end{aligned}$$