(Hf) 1. Az alábbi sorok közül melyek konvergensek?

a) $\sum_{n=1} \frac{100^n}{n!}$, a hányadoskritérium szerint

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{100^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{100^n} = \frac{100 \cdot 100^n \cdot n!}{(n+1) \cdot n! \cdot 100^n} = \frac{100}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = A.$$

Mivel $A<1$, így a sor konvergens.

b) $\sum_{n=1} \frac{n^2}{2^n}$, a gyökkritérium szerint

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} = A.$$

Mivel $A<1$, így a sor konvergens.

c) $\sum_{n=1} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$, a hányadoskritérium szerint

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \frac{((n+1)\cdot n!)^2 \cdot 2^{n^2}}{2^{n^2+2n+1} \cdot (n!)^2} = \frac{(n+1)^2 \cdot (n!)^2 \cdot 2^{n^2}}{2^{n^2} \cdot 2^{2n+1} \cdot (n!)^2} =$$

$$= \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = \frac{n^2+2n+1}{2 \cdot 4^n} = \frac{1}{2} n^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n + n\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$(q^n \to 0,\ nq^n \to 0 \text{ és } n^2q^n \to 0, \text{ ha } |q|<1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0+0+0 = 0 = A$$

Mivel $A<1$, így a sor konvergens.

d) $\sum_{n=1} \frac{3^n (n+2)!}{(n+1)^n}$, a hányadoskritérium szerint

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{n+1}(n+3)!}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{3^n (n+2)!} = \frac{3 \cdot 3^n (n+3) \cdot (n+2)!\, (n+1)^n}{(n+2)^n (n+2) \cdot 3^n (n+2)!} =$$

$$= 3 \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{(n+1)^n}{(n+2)^n} = 3 \cdot \frac{n+3}{n+2} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = 3 \cdot \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 3 \cdot \frac{1+0}{1+0} \cdot \frac{e}{e^2} = \frac{3}{e} = A$$

Mivel $e<3$, ezért $A = \frac{3}{e} > 1$, így a sor divergens.

e) $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1}$, ez egy Leibniz-típusú sor, hiszen váltakozó előjelű,

$a_n = \frac{n}{n^2+1} > 0$ és $(a_n)$ monoton csökkenő sorozat, mert

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{(n+1)(n^2+1) - n\left[(n+1)^2+1\right]}{\left[(n+1)^2+1\right](n^2+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)(n^2+1) - n(n^2+2n+2)}{\left[(n+1)^2+1\right](n^2+1)} = \frac{n^3+n+n^2+1-(n^3+2n^2+2n)}{\left[(n+1)^2+1\right](n^2+1)} =$$

$$= \frac{\overbrace{1-n^2-n}^{<0}}{\underbrace{\left[(n+1)^2+1\right]}_{>0}\underbrace{(n^2+1)}_{>0}} < 0 \qquad (n^2+n > 1,\ \text{ha } n \geq 1).$$

Mivel $a_n = \frac{n}{n^2+1} = \frac{n}{n^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \cdot \frac{1}{1+0} = 0$,

így a Leibniz-kritérium szerint a sor konvergens.

f) $\sum\limits_{n=1} \left(\frac{1-n}{n^2+n}\right)^n$, a gyökkritérium szerint
(vegyük észre, hogy $|1-n| = n-1$, ha $n \geq 1$)

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{1-n}{n^2+n}\right|^n} = \frac{|1-n|}{|n^2+n|} = \frac{n-1}{n^2+n} = \frac{n}{n^2} \cdot \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \cdot \frac{1-0}{1+0} = 0 = A$$

Mivel $A < 1$, így a sor konvergens.

(Hf) 2, Adjuk meg a következő számok diadikus tört alakját!

a) $\frac{3}{8}$ Alkalmazzuk az algoritmust!

$\frac{3}{8} \xrightarrow{\times 2} \frac{6}{8} < 1 \ (a_1 = 0) \xrightarrow{\times 2} \frac{12}{8} = 1 + \frac{4}{8} \ (a_2 = 1) \to \frac{4}{8} \xrightarrow{\times 2} \frac{8}{8} = 1 + 0 \ (a_3 = 1) \to$
$\to 0$ (véges)

Ezért $\frac{3}{8} = 0,011_{(2)}$

Ellenőrzés: $0,011 = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \underbrace{\frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \dots}_{=0} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ ✓

b) $0,\dot{2}\dot{3}_{(5)}$

$0,\dot{2}\dot{3}_{(5)} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \frac{2}{5^5} + \frac{3}{5^6} + \dots = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2}\right) + \frac{1}{5^2}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2}\right) + \frac{1}{5^4}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2}\right) + \dots =$

$= \frac{13}{25} + \frac{1}{5^2} \cdot \frac{13}{25} + \frac{1}{5^4} \cdot \frac{13}{25} + \dots = \frac{13}{25}\left(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) =$

$= \frac{13}{25} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{13}{25} \cdot \frac{25}{24} = \frac{13}{24}$

$\frac{13}{24} \xrightarrow{\times 2} \frac{26}{24} = 1 + \frac{2}{24} \ (a_1 = 1) \to \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{12} = \frac{1}{6} < 1 \ (a_2 = 0) \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{6} = \frac{1}{3} < 1 \ (a_3 = 0) \to$
$\xrightarrow{\times 2} \frac{2}{3} < 1 \ (a_4 = 0) \xrightarrow{\times 2} \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} \ (a_5 = 1) \to \frac{1}{3}$ (ismétlés)

Az algoritmus alapján: $\frac{13}{24} = 0,10\dot{0}\dot{1}_{(2)}$

Ellenőrzés:

$0,10\dot{0}\dot{1}_{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \underbrace{\frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5}} + \underbrace{\frac{0}{2^6} + \frac{1}{2^7}} + \underbrace{\frac{0}{2^8} + \frac{1}{2^9}} + \dots =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^9} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots\right) =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^5} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{32} \cdot \frac{4}{3} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24}$ ✓

(Hf) 3. A $\sum\limits_{n=0} q^n$ és $\sum\limits_{n=0} n q^n$ sorok Cauchy-szorzatával igazolja, hogy ha $|q|<1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}.$$

<u>Megoldás</u>. Legyen

$$\sum_{n=0} a_n := \sum_{n=0} n \cdot q^n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0} b_n := \sum_{n=0} q^n \qquad (|q|<1).$$

A fenti két sor Cauchy-szorzata a $\sum\limits_{n=0} c_n$ sor, ahol

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k q^k \cdot q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k q^n = q^n \sum_{k=0}^{n} k = q^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Mivel $\sum\limits_{n=0} a_n$ és $\sum\limits_{n=0} b_n$ abszolút konvergens sorok, így $\sum\limits_{n=0} c_n$ is abszolút konvergens sor, és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2} q^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\right) \overset{\text{ezt már tudjuk.}}{=} \frac{q}{(1-q)^2} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{q}{(1-q)^3}$$

Másrészt

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2} q^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n) q^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n q^n =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n + \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Ezért

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{q}{(1-q)^3} - \frac{1}{2} \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{2q - q(1-q)}{2(1-q)^3} = \frac{q^2+q}{2(1-q)^3}$$

Tehát

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = 2 \cdot \frac{q^2+q}{2(1-q)^3} = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}.$$