Diszkét Matematika II. - Szorgalmi feladat II.

Feladat:

Legyen F_n az n-edik Fibonacci-szám! Mi lesz (F_{n+2}, F_n) ill. (F_{n+3}, F_n)?

Megoldás:

1. (F_{n+2}, F_n)

   Euklideszi algoritmussal:

   Mivel $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, ezért $F_{n+2} \bmod F_n = F_{n+1}$

osztandó	**osztó**
F_{n+2}	F_n
F_n	$F_{n+2} \bmod F_n = F_{n+1}$
F_{n+1}	$F_n \bmod F_{n+1} = F_{n-1}$
F_{n-1}	$F_{n+1} \bmod F_{n-1} = F_{n-2}$
...	...
F_3	F_1
F_2	F_1
F_1	0

   Minden lépésnél a maradék F_{k-1}

   Így végül a legkisebb nem nulla maradék $F_1 = 1$, és

$$\gcd(F_{n+2}, F_n) = \gcd(F_2, F_1) = \gcd(1, 1) = 1$$

2. (F_{n+3}, F_n)

   Mivel

$$F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} = (F_{n+1} + F_n) + F_{n+1} = 2F_{n+1} + F_n.$$

   ezért

$$F_{n+3} \bmod F_n = (2F_{n+1} + F_n) \bmod F_n = 2F_{n+1} \bmod F_n$$

   Így

osztandó	**osztó**
F_{n+3}	F_n
F_n	$2F_{n+1}$
$2F_{n+1}$	$2F_{n-1}$
$2F_{n-1}$	$2F_{n-2}$
$2F_{n-2}$	$2F_{n-3}$
...	...
$2F_r$	$2F_{r-3}$
$2F_{r-3}$	0

Minden lépésnél a maradék $2F_{k+1} \bmod 2F_{k-1} = 2F_{k-2}$ így hárommal csökken az index. Végül arra az r-re jutunk, amelyre $0 \leq r < 3$ három lehetőség:

- Ha $n \equiv 0 (\bmod 3)$ akkor az utolsó nem nulla sor $\operatorname{gcm}(2F_3, 2F_0) = \operatorname{gcm}(2, 1) = 2$
- Ha $n \equiv 1 (\bmod 3)$ akkor az utolsó nem nulla sor $\operatorname{gcm}(2F_1, 2F_{-2}) = \operatorname{gcm}(2 \cdot 1, 2 \cdot 1) = 1$ (feltéve hogy negatív fibonaccik értelmesek és egyenlőek eggyel (?))
- Ha $n \equiv 2 (\bmod 3)$ akkor hasonlóan $\operatorname{gcm}(2F_3, 2F_0) = \operatorname{gcm}(2, 1) = 2$

Tehát:

$$\operatorname{gcm}(F_{n+3}, F_n) = \begin{cases} 2, & 3 \mid n \\ 1, & 3 \nmid n \end{cases}$$