Diszkrét matematika I. feladatok
Gráfok II.

Kilencedik alkalom (2025.04.28-05.02.)

Gyakorló feladatok

1. Mutassa meg, hogy tetszőleges páratlan hosszúságú zárt séta tartalmaz kört. Igaz-e ez páros hosszúságúra?

Megoldás: A séta egy $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-2}, e_{k-1}, v_{k-1}, e_k, v_k$ csúcs-él-csúcs-él-stb. szimbólum-sorozat. Zárt a séta, azaz a legelső és a legutolsó csúcsszimbólum ugyanaz: $v_0 = v_k = v$.

Ha a két legszélső él is ugyanaz ($e_1 = e_k = e$), akkor, mivel v_1 és v_{k-1} is az e él *másik* vége (ami nem v), ezért $v_1 = v_{k-1}$. (Vagy ha $v_1 = v$ vagy $v_{k-1} = v$, akkor e hurokél, és azért lesz $v_1 = v_{k-1}$). Mindenesetre ekkor a sorozat elejét (v, e) és a végét (e, v) lehagyva, a kapott sorozat: $v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-2}, e_{k-1}, v_{k-1}$ szintén egy zárt séta. Mivel két éllel kevesebbet tartalmaz, ez is egy páratlan hosszúságú zárt séta. Ezt a lépést véges sokszor alkalmazva már egy olyan páratlan hosszúságú zárt sétát kapunk, amiben második és az utolsó előtti csúcs nem azonos. (Vagy egyetlen hurokélből áll a zárt séta: v, e, v, vagy az első és az utolsó éle két különböző él: $v, e, w_1, \ldots, w_m, f, v$, ahol $e \neq f$ és így $w_1 \neq w_m$.)

Ha a séta egyetlen hurokélből áll, akkor az maga egy kör. Ha a séta $v, e, w_1, \ldots, w_m, f, v$, ahol $e \neq f$ és így $w_1 \neq w_m$, akkor a $w_1, \ldots, w_m, f, v$, sétából kiválasztható egy $w_1, \ldots, v$ út, és ezt az utat az e él egy körré zárja be: $w_1, \ldots, v, e, w_1$.

Páros hosszúságúra biztosan nem igaz, ellenpélda: Legyen a gráf egy 1 élű ösvény: P_1, azaz két csúcs ($V = \{A, B\}$) és köztük egy él ($E = \{e\}$, $\varphi(e) = \{A, B\}$), és legyen a páros hosszúságú (két élszimbólumot tartalmazó) zárt séta: A, e, B, e, A (mindkét élszimbólum ugyanaz). A P_1 ösvény egy fa, körmetes, esélyünk sincs tehát a fenti sétából kört kiválasztani.

2. Mutassa meg, hogy ha a-ból vezet út b-be, és b-ből c-be, akkor a-ból is vezet út c-be!

Megoldás: Az a-ból b-be vezető utat és a b-ből c-be vezető utat egymás után írva (a két út találkozásánál b csúcsot csak egyszer leírva) egy sétát kapunk a-ból c-be. Ebből a sétából pedig kiválasztható út a-ból c-be (ami esteleg nem tartalmazza b-t, de az nem is fontos).

3. Egy körmérkőzéses sakkversenyen 27-en indultak. Lehetett-e olyan pillanat, amikor mindenki pontosan 9 ellenfélen volt túl?

Megoldás: Készítsünk gráfot! A csúcsok legyenek a versenyzők, és húzzunk élt két versenyző közé, ha már játszottak egymással. A kérdéses pillanatban a gráfban minden csúcsnak kilenc volna a foka, és így a fokszámösszeg $27 \cdot 9$ volna, ami páratlan; tehát nem lehetett ilyen pillanat.

4. Olyan fát szeretnék készíteni, melyben csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik fajta 92-szer. Mi lehet a szóban forgó két fokszám?

Megoldás: Ennek a fának $9 + 92 = 101$ csúcsa és így 100 éle lesz. Ha a két fokszám x és y, akkor a fokszámösszege $9x + 92y = 200$, emiatt x páros kell, hogy legyen. Mivel legalább két csúcsú fában van levél, x és y közül valamelyik 1; ezekből $y = 1$ és $x = 12$ adódik. Ilyen fokszámokkal valóban lehet fát készíteni, pl. egy 11 csúcsú út minden másodfokú pontjára tegyünk 10 további levelet.

5. Igazolja, hogy ha egy n csúcsú, egyszerű gráf izomorf a komplementerével, akkor n néggyel osztva 0 vagy 1 maradékot ad.

Megoldás: Legyen $G(V, E)$, $|V| = n$. Egy gráf élei és a komplementerének élei együtt pontosan kiadják a teljes gráf éleit, azaz $|E(G)|+|E(\overline{G})| = |E(K_n)| = \binom{n}{2}$, továbbá ha G és $\overline{G}$ izomorfak, akkor $|E(G)| = |E(\overline{G})|$. Ezt visszahelyettesítve az előző egyenletbe $2|E(G)| = \binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$, azaz $|E(G)| = \frac{n\cdot(n-1)}{4}$ adódik. Az élek száma egész, ezért $n \cdot (n - 1)$ osztható 4-gyel, és mivel a két szám közül az egyik páratlan, a másik osztható lesz 4-gyel. $4|n$ esetén n néggyel osztva 0 maradékot, $4|(n - 1)$ esetén n néggyel osztva 1 maradékot ad.

6. Legyen G egy n csúcsú, egyszerű gráf, melyben bármely két nem szomszédos pont fokszámának összege legalább $n - 1$. Mutassuk meg, hogy G összefüggő.

Megoldás: Tegyük föl indirekt, hogy G nem összefüggő. Ekkor a csúcshalmaza felbontható két diszjunkt részre, hívjuk ezeket A-nak és B-nek, melyek közt nincs él. (Ezt már láttuk.) Egy $u \in A$ csúcsnak legfeljebb $|A| - 1$, egy $v \in B$ csúcsnak legfeljebb $|B| - 1$ lehet a fokszáma, hiszen G egyszerű. Ebből $\deg(u) + \deg(v) \leq |A| - 1 + |B| - 1 = |A| + |B| - 2 = n - 2$ adódik. Másrészt a fokszámokra vonatkozó feltétel miatt (u és v nyilván nem szomszédosak) $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$ teljesül. Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát az indirekt feltevés hamis.

7. Hat versenyző körmérkőzést játszik. Bizonyítsa be, hogy bármely időpontban van három olyan versenyző, akik már mind játszottak egymással, vagy három olyan, hogy egyik sem játszott a másik kettővel.

Megoldás: Minden pillanathoz tartozik egy hatpontú gráf, amiben azok a csúcsok vannak összekötve, akik adott pillanatig már játszottak egymással. Az állítás szerint minden ilyen gráfban vagy a komplementerében van háromszög.

Tekintsünk egy tetszőleges csúcsot és tetszőleges pillanathoz tartozó gráfot. A többi öt csúcs közül vagy van legalább három, amivel ő össze van kötve, vagy legalább három, amivel nincs összekötve (azaz a komplementerben van velük összekötve). Ez skatulya-elvvel belátható (a két skatulya a „szomszédja” és a „nem szomszédja”, és nem lehet, hogy öt csúcs közül mindkét skatulyába csak legfeljebb kettő-kettő kerül).

1. Ha a gráfban van legalább 3 szomszédja a kiválasztott csúcsnak, akkor két eset lehetséges: 1/a) Ezen három szomszéd közül valamelyik kettő között van él, és így ez a két csúcs, és az előre kiválasztot csúcs egy háromszöget alkot a gráfban. 1/b) Ezen három szomszéd közül semelyik kettő között sincs él, és így ez a három csúcs a komplementerben alkot egy háromszöget.

2. Ha a gráf komplementerében van legalább 3 szomszédja a kiválasztott csúcsak, akkor két eset lehetséges: 2/a) Ezen három szomszéd közül valamelyik kettő között van él a komplementerben, és így ez a két csúcs, és az előre kiválasztot csúcs egy háromszöget alkot a komplementerben. 2/b) Ezen három szomszéd közül semelyik kettő között sincs él a komplementerben, és így ez a három csúcs a a gráfban alkot egy háromszöget.

8. Igazolja, hogy egy összefüggő véges gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja!

Megoldás: Legyen a leghosszabb utak hossza k. Legyen két tetszőleges leghosszabb út közül az egyik $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$, és a másik pedig $(w_0, f_1, w_1, f_2, w_2, \ldots, w_{k-1}, f_k, w_k)$.

Indirekt tegyük fel, hogy ennek a két útak nincs közös pontja. Mivel a gráf összefüggő, bizosan létezik séta v_0 és w_0 között, ezen séta használhatja a két út csúcsait és éleit, akár többször is (vissza-visszatérve is az egyik és a másik útra), de biztosan lesz egy olyan szakasza, ami után már nincsen csúcsa az első útól, és ennek a szakasznak az elején lesz egy olyan szakasz, aminek csak az utolsó csúcsa van a második útról.

A fenti szakasz eleje tehát indul az első út egy csúcsával, nevezzük ezt v_i-nek, és befejeződik a második út egy csúcsával, nevezzük ezt w_j-ek. A kettő között pedig sem az egyik, sem a másik útról nincs csúcs (esteleg csak egy él van v_i és w_j között, de lehet hosszabb is az ,,átkötés”, de biztosan olyan csúcsokon át, amik sem a v-k, sem a w-k között nincsenek felsorolva). Ezt a $v_i, \ldots, w_j$ utat jelölje α. Ez az α legalább 1-hosszú út. (Az α karaktersorozat fordított sorrendjét jelölje α')

Jelöljük az első és a második út szakaszait is röviden:
$\beta = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{i-1}, e_i, v_i$, ez i-hosszú,
$\gamma = v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, e_{i+2}, v_{i+2}, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$, ez $k-i$-hosszú.
$\delta = (w_0, f_1, w_1, f_2, w_2, \ldots, w_{j-1}, f_j, w_j)$, ez j-hosszú,
$\varepsilon = (w_j, f_{j+1}, w_{j+1}, f_{j+2}, w_{j+2}, \ldots, w_{k-1}, f_k, w_k)$, ez $k-j$-hosszú. Ezeknek a karaktersorozatoknak a fordított sorrendjeit is jelöljük vesszővel.

Vagy a $\beta\alpha\delta'$ út, vagy a $\beta\alpha\varepsilon$ út, vagy a $\gamma'\alpha\delta'$ út, vagy a $\gamma'\alpha\varepsilon$ út (ahol a görög betűkkel jelölt karatersorozatok határain a közös csúcsokat csak egyszer írjuk le) hosszabb lesz mint k, és így ellentmondásra jutunk azzal, hogy k-hosszú a leghosszabb út.

9. Mutassa meg, hogy egy véges fában az összes leghosszabb út egy ponton megy át!

Megoldás: Először bizonyítjuk, hogy bármely két leghosszabb útnak van közös pontja. Indirekt tfh. van két diszjunkt leghosszabb út, P_1 és P_2, hosszuk legyen k. Mivel fa, ezért összefüggő, tehát van ”átkötés” a két út között, azaz van $v_1 \in P_1$ és $v_2 \in P_2$ úgy, hogy van olyan v_1-ből v_2-be vezető út, melynek egyik éle sincs rajta sem P_1-en, sem P_2-n. v_1 két részre osztja P_1-et, tekintsük a hosszabbik részt, ez legalább $k/2$ hosszú. Hasonlóan v_2 két részre osztja P_2-t, tekintsük a hosszabbik részt, ez legalább $k/2$ hosszú. A két rész és a $v_1 - v_2$ út együtt egy több mint k hosszú út, ellentmondás.
Most szintén indirekt tfh. van 3 leghosszabb út P_1, P_2 és P_3, de nem egy ponton mennek át. A következő gondolatmenettel azt fogjuk megmutatni, hogy ekkor van a gráfban kör, ami ellentmondás. (Két leghosszabb útnak lehet több közös pontja is, azaz egy egész közös

útszakasz, de a körmentesség miatt csak egy ilyen közös szakasz lehet, ami legalább egy pontú. Jelölje $\gamma_1 = P_2 \cap P_3$ útszakaszt, és jelölje $\gamma_2 = P_3 \cap P_1$ útszakaszt. Az indirekt feltevés szerint nincs olyan csúcs, ami mindhárom leghosszabb útnak közös csúcsa, ezért γ_1 és γ_2 két diszjunkt szakasza P_3-nak. Jelölje $m_1 \in \gamma_1$ és $m_2 \in \gamma_2$ azt a két pontot, ami a P_3 úton egymáshoz a legközelebb van. Jelölje $\gamma_3 = P_2 \cap P_1$ útszakaszt. Az indirekt feltevés szerint ez diszjunkt P_3 úttól. Jelölje $m_3 \in P_3$ az egyik csúcsot.) Tehát m_1, m_2, m_3 csupa különböző csúcs. m_1 és m_2 csúcsok között van β séta m_3 csúcson keresztül, ami nem használja P_3 útnak az m_1 és m_2 közötti szakaszát (amit jelöljön α_3). A β sétából kiválasztható α_2 út, ami úgy köti össze m_1 és m_2 csúcsokat, hogy nincs közös belső csúcsa a α_3 úttal. Ekkor tehát m_1, m_2, m_3 rajta van egy körön (ami α_2 és α_3 útszakaszokból áll), de a gráf fa, ellentmondás.

10. Jelöljük egy fa elsőfokú pontjainak számát f_1-gyel, a kettőnél nagyobb fokúak számát pedig c-vel. Mutassuk meg, hogy ha legalább két pontja van a gráfnak, akkor $f_1 \geq c + 2$.

Megoldás: Legyen $G(V, E)$, $|V| = n$ fa gráf, jelöljük a fa másodfokú pontjainak számát f_2-vel, általában az i-edfokú pontjainak számát f_i-vel. Ekkor a fokszámösszeg $\sum d(v) = 1 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 3 \cdot f_3 + \ldots + i \cdot f_i + \ldots$ alulról becsülhető $\sum d(v) \geq 1 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 3 \cdot c$-vel. Másrészt, mivel a gráf fa, $|E| = n - 1$, tehát a fokszámösszeg $\sum d(v) = 2 \cdot (n - 1) = 2n - 2$. A csúcsszám felírható $n = f_1 + f_2 + c$ alakban, az előző egyenletbe behelyettesítve $\sum d(v) = 2 \cdot (f_1 + f_2 + c) - 2$. Összevetve a korábbi becsléssel $2 \cdot (f_1 + f_2 + c) - 2 = \sum d(v) \geq 1 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 3 \cdot c$, azaz $2 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 2 \cdot c - 2 \geq f_1 + 2 \cdot f_2 + 3 \cdot c$, rendezve az egyenlőtlenséget $f_1 - 2 \geq c$ adódik.

Megjegyzés: az eredmény jelentése, hogy ha a fában van(nak) nagy fokszámú csúcs(ok), akkor sok elsőfokú csúcs lesz, ami megegyezik a fákkal kapcsolatos természetes intuíciónkkal.