Analízis II., ZH I. bizonyítandó tételek

1. A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása lineáris megközelítéssel

Tétel:
Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.
Ekkor

$$f \in D\{a\} \iff \exists A \in \mathbb{R} \text{ és } \exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0 :$$
$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f\big),$$

és $A = f'(a)$.

Bizonyítás:
$\Longrightarrow :$

$$f \in D\{a\} \Longrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0$$

Ha

$$\varepsilon(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big),$$

akkor $\lim_a \varepsilon = 0$ és

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f\big),$$

ezért a feltétel az $A = f'(a)$ választással teljesül.

$\Longleftarrow :$
TFH $\exists A \in \mathbb{R}$ és $\exists \varepsilon : D_f \to \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0$, hogy

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad \big(x \in D_f\big).$$

Ebből

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = A + \varepsilon(x) \to A, \qquad \text{ha } x \to a$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A$.
$\square$

2. A szorzatfüggvény deriválása

Tétel:
TFH, $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \operatorname{int}\left(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\right)$ pontban. Ekkor

$$f \cdot g \in D\{a\} \quad \text{és} \quad (f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

Bizonyítás:
Világos, hogy $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_{f \cdot g}$. Az $f \cdot g$ függvény különbséghányados-függvénye az a pontban

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \overset{!}{=} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g(x)}{x - a} =$$
$$= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \qquad \left(x \in \mathcal{D}_{f \cdot g} \setminus \{a\}\right).$$

Mivel $g \in D\{a\}$, ezért $g \in C\{a\}$, tehát $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. Így

$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} =$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} =$$
$$= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Ez azt jelenti, hogy $f \cdot g \in D\{a\}$ és

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

$\square$

3. A hányadosfüggvény deriválása

Tétel:
TFH, $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \operatorname{int}\left(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\right)$ pontban, és $g(a) \neq 0$. Ekkor

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \text{es} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Bizonyítás:
Először igazoljuk, hogy $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$.

Valóban: $g \in D\{a\} \Longrightarrow g \in C\{a\}$.
Tehát $g(a) \neq 0 \implies \exists K(a) \subset \mathcal{D}_f : g(x) \neq 0 \ (\forall x \in K(a)) \implies a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$

Az $\frac{f}{g}$ hányadosfüggvény különbséghányados-függvénye a-ban

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{x-a} =$$
$$= \frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$$

Mivel $g \in C\{a\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a) \neq 0$, ezért

$$\lim_{x\to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} =$$
$$= \frac{1}{g(a) \lim\limits_{x\to a} g(x)} \left(\lim_{x-a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) =$$
$$= \frac{1}{g^2(a)} (f'(a)g(a) - f(a)g'(a)).$$

Ez azt jelenti, hogy $\frac{f}{g} \in D\{a\}$, és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

□

4. A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel

Tétel:
TFH az f függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban lokális szélsőértéke van és $f \in D\{a\}$. Ekkor

$$f'(a) = 0$$

Bizonyítás:
TFH f-nek a-ban lokális maximuma van, azaz $\exists r > 0$:

$$\forall x \in (a-r, a+r): \; f(x) \leq f(a) \Longrightarrow f(x) - f(a) \leq 0.$$

Tekintsük az f függvény a-hoz tartozó különbséghányados-függvényét:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big).$$

Ha $a < x < a+r \Longrightarrow x - a > 0$ és $f(x) - f(a) \leq 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0 \Longrightarrow \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_+(a) \leq 0.$$

Ha $a - r < x < a \Longrightarrow x - a < 0$ és $f(x) - f(a) \leq 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0 \Longrightarrow \lim_{x \to a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_-(a) \geq 0.$$

Mivel $f \in D\{a\}$, ezért

$$\underbrace{f'_-(a)}_{\geq 0} = \underbrace{f'_+(a)}_{\leq 0} = f'(a) = 0$$

$\square$

5. A Rolle-féle középértéktétel

Tétel:

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ekkor

$$\left.\begin{array}{l} f \in C[a,b] \\ f \in D(a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b), \text{hogy } f'(\xi) = 0.$$

Bizonyítás:

$$f \in C[a,b] \Longrightarrow (\text{Weierstrass-tétel})\ \exists \alpha, \beta \in [a,b] :$$

$$f(\alpha) = \min_{[a,b]} f =: m \quad \text{és} \quad f(\beta) = \max_{[a,b]} f =: M.$$

- 1. eset: $m = M$.

  Ekkor f állandó, így $\forall \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$.

- 2. eset: $m \neq M$.

  Mivel $f(a) = f(b)$, ezért α és β közül legalább az egyik (pl. α) (a,b)-be esik.
  Ekkor $\xi := \alpha \in \text{int } \mathcal{D}_f = (a,b)$, és f-nek ξ-ben lokális minimuma van.
  Mivel $f \in D\{\xi\} \Longrightarrow$ (az elsőrendű szükséges feltétel)$f'(\xi) = 0$.

□

6. A Lagrange-féle középértéktétel

Tétel:

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ekkor

$$\left.\begin{matrix} f \in C[a,b] \\ f \in D(a,b) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b), \text{hogy } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bizonyítás:

Az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon átmenő szelő egyenesének az egyenlete:

$$y = h_{a,b}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

igazoljuk, hogy az

$$F(x) := f(x) - h_{a,b}(x) \qquad (x \in [a,b])$$

függvény kielégíti a Rolle-féle középértéktétel feltételeit.

Valóban, f és $h_{a,b}$ mindketten folytonosak $[a,b]$-n és deriválhatók (a,b)-n, ezért a különbségük, F szintén rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Továbbá

$$F(a) = f(a) - h_{a,b}(a) = f(a) - f(a) = 0,$$
$$F(b) = f(b) - h_{a,b}(b) = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a)\right) = 0,$$

tehát $F(a) = F(b)$ is teljesül. A Rolle-féle tétel alapján tehát van olyan $\xi \in (a,b)$ pont, amelyre

$$F'(\xi) = f'(\xi) - h'_{a,b}(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

következésképpen

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

7. A Cauchy-féle középértéktétel

Tétel:

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ es $a < b$. Ekkor

$$\left.\begin{array}{l} f, g \in C[a,b] \\ f, g \in D(a,b) \\ \forall x \in (a,b) : g'(x) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b), \text{hogy } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Bizonyítás:

A Rolle-tételből következik, hogy $g(a) \neq g(b)$.
Valóban, $g(a) = g(b)$-ből az következne, hogy g deriváltja nulla az (a,b) intervallum legalább egy pontjában, amit kizártunk.
Legyen

$$F(x) \coloneqq f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)) \qquad (x \in [a,b])$$

Az F függvény folytonos $[a,b]$-n, deriválható (a,b)-n és $F(a) = F(b) = 0$. Így a Rolle-tétel szerint létezik olyan $\xi \in (a,b)$, amelyre $F'(\xi) = 0$. Ekkor

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi).$$

Mivel a feltételeink szerint $g'(\xi) \neq 0$, ezért azt kapjuk, hogy

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

□

8. Nyílt intervallumon értelmezett deriválható függvények esetében a monotonitás és a derivált kapcsolata.

Tétel:

Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum.
TFH $f \in D(a, b)$. Ekkor

1. $f \nearrow [\searrow]\ (a, b)$-n $\iff f' \geq 0\ [f' \leq 0]\ (a, b)$-n;
2. ha $f' > 0\ [f' < 0]\ (a, b)$-n $\implies f \uparrow [\downarrow](a, b)$-n.

Bizonyítás:

1.

$\implies$:

Ha $f \nearrow (a, b)$-n és $t \in (a, b)$ egy tetszőleges pont, akkor

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \geq 0 \qquad (t < x < b),$$

hiszen $x - t > 0$ és a monotonitás miatt $f(x) - f(t) \geq 0$. Mivel $f \in D\{t\}$, így

$$f'(t) = f'_{+}(t) = \lim_{x \to t+0} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \geq 0.$$

$\impliedby$:

Ha $\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0$, akkor legyen $x, y \in (a, b), x < y$ két tetszőleges pont.
Ekkor $f \in C[x, y]$, $f \in D(x, y)$, és így a Lagrange-féle középértéktétel szerint

$$\exists \xi \in (x, y) : \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \geq 0 \implies f(x) \leq f(y).$$

Ezért $f \nearrow (a, b)$-n.

Az állítás hasonlóan igazolható monoton csökkenő függvények esetén is.

2.

Alkalmazzunk "éles" egyenlőtlenségeket 1.-ben a $\impliedby$ irányban.

$\square$

9. A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel.

Tétel:
Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$
TFH
- $f \in D(a, b)$
- egy $c \in (a, b)$ pontban $f'(c) = 0$
- az f' deriváltfüggvény előjelet vált c-ben.

Ekkor
1. ha az f' függvénynek c-ben $(-, +)$ előjelváltása van, akkor c az f függvénynek szigorú lokális minimumhelye.
2. ha az f' függvénynek c-ben $(+, -)$ előjelváltása van, akkor c az f függvénynek szigorú lokális maximumhelye.

Bizonyítás:
Az állítás azonnal következik a monotonitás és a derivált kapcsolatáról szóló tételből, hiszen ha az f függvénynek c-ben $(-, +)$ előjelváltása van, akkor
$\exists \delta > 0$ úgy hogy
$f' < 0$ $(c - \delta, c)$-n és
$f' > 0$ $(c, c + \delta)$-n

Ezért
$f \downarrow (c - \delta, c]$-n, és
$f \uparrow [c, c + \delta)$-n.

Emiatt $\forall x \in (c - \delta, c + \delta) : f(x) > f(c)$, tehát c az f függvénynek szigorú lokális minimumhelye.

Az állítás hasonlóan igazolható $(+, -)$ előjelváltás esetén.
$\square$

10. A konvexitás jellemzése a deriváltfüggvénnyel.

Tétel:
TFH $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f \in D(I)$. Ekkor

$$f \text{ konvex } I\text{-n} \quad \Longleftrightarrow \quad f' \nearrow I\text{-n}.$$

Bizonyítás:
$\Longrightarrow$:
Legyen
$u, v \in I$
$u < v$ tetszőleges
$x \in (u, v)$ is tetszőleges
TFH f konvex I-n. Ekkor

$$f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u) \quad \text{és} \quad f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - v) + f(v)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(x) - f(v)}{x - v}$$

Vegyük itt az $x \to u$ ill. az $x \to v$ határátmenetet:

$$f'(u) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq f'(v)$$

Tehát $f' \nearrow I$-n.

$\Longleftarrow$:
TFH $f' \nearrow I$-n.
Legyen
$u, v \in I$
$u < v$ tetszőleges
$x \in (u, v)$ is tetszőleges
Ekkor a Lagrange-féle középértéktétel szerint
$\exists \xi_1 \in (u, x)$ és $\exists \xi_2 \in (x, v)$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \quad \text{és} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(v) - f(x)}{v - x}$$

Mivel $f' \nearrow I$-n, ezért $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ vagyis

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(v) - f(x)}{v - x} \Longleftrightarrow f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u)$$

Tehát f konvex I-n.
$\square$

11. A véges pontbeli $\frac{0}{0}$ határérték esetre vonatkozó L'Hospital-szabály.

Tétel:

Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$ és $f, g \in D(a,b)$.
TFH

- $$\exists \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0$$
- $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$
- $$\exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Ekkor

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Bizonyítás:

1. eset $a > -\infty$ (véges)

Legyen $A := \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$, azaz

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in (a, a+\delta) \subset (a,b) : \frac{f'(y)}{g'(y)} \in K_\varepsilon(A)$$

Igazoljuk hogy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a+\delta) \subset (a,b) : \frac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A)$$

Legyen

$$f(a) := 0 \quad \text{és} \quad g(a) := 0$$

Ekkor a $\lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0$ feltételből következik, hogy $f, g \in C[a, a+\delta)$

Legyen most $x \in (a, a+\delta)$ tetszőleges pont. A Cauchy-féle középértéktétel feltételei az f és a g függvényre az $[a,x]$ intervallumon teljesülnek. Így $\exists \xi_x \in (a,x)$, amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \in K_\varepsilon(A)$$

Tehát $\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g}$ és $\lim_{a+0} \frac{f}{g} = A$

2. eset $a = -\infty$

nem bizonyítjuk.

□

12. A Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.

Tétel:
Legyen $n \in \mathbb{N}$
TFH $f \in D^{n+1}(K(a))$
Ekkor $\forall x \in K(a)$ ponthoz $\exists$ olyan a és x közé eső ξ szám, hogy

$$f(x) - T_{a,n}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Bizonyítás:
Cauchy-féle középértéktétellel.
Legyen

$$F(x) \coloneqq f(x) - T_{a,n}f(x) \qquad (x \in K(a))$$

A $T_{a,n}f$ polinom definíciójából következik, hogy

$$F^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) - \left(T_{a,n}f\right)^{(i)}(a) = 0 \qquad (i = 0, 1, ..., n).$$

Továbbá, $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$, hiszen $\left(T_{n,a}f\right)^{(n+1)} \equiv 0$, mert $T_{a,n}f$ egy legfeljebb n-edfokú polinom.
Másrészt, legyen $G(x) \coloneqq (x-a)^{n+1} \qquad (x \in K(a))$.
Ekkor

$$\begin{gathered}
\forall x \in K(a) : \\
G'(x) = (n+1)(x-a)^n, \\
G''(x) = n(n+1)(x-a)^{n-1}, \\
..., \\
G^{(n)}(x) = (n+1)!(x-a),
\end{gathered}$$

amiből következik, hogy

$$G^{(i)}(a) = 0 \qquad (i = 0, 1, ..., n), \quad \text{és} \quad G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

TFH $x \in K(a)$ és például $x > a$.
Az F és G függvényekre az $[a, x]$ intervallumon alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel:

$$\exists \xi_1 \in (a, x) : \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f(x) - T_{a,n}f(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

A Cauchy-féle középértéktételt most az F' és a G' függvényekre az $[a, \xi_1]$ intervallumon alkalmazzuk:

$$\exists \xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a, x) : \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}$$

Ha a fenti gondolatmenetet n-szer megismételjük, akkor a k-dik lépésben $(k = 1, 2, ..., n)$:

$$\begin{gathered}
\exists \xi_{k+1} \in (a, \xi_k) \subset (a, x) : \\
\frac{F^{(k+1)}(\xi_{k+1})}{G^{(k+1)}(\xi_{k+1})} = \frac{F^{(k)}(\xi_k) - F^{(k)}(a)}{G^{(k)}(\xi_k) - G^{(k)}(a)} = \frac{F^{(k)}(\xi_k)}{G^{(k)}(\xi_k)}.
\end{gathered}$$

az n számú lépés után kapott egyenlőségeket egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - T_{a,n}(f,x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \dots = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!},$$

hiszen $\forall x \in K(a) : F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}$ és $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$.
A konstrukcióból látható, hogy ξ_{n+1} az a pont és x között van, ezért a $\xi := \xi_{n+1}$ választással a bizonyítandó állítást kapjuk.

$\square$