Numerikus módszerek 1. **2. ZÁRTHELYI** **2024. december 12.**

Programtervező informatikus BSc szak

Gyak.vez. neve ____________________ **Név** ____________________

Gyak. ideje ____________________ **Neptun kód** ____________________

Pontszám ____________

1. (8 pont) Legyen $\|.\|$ egy tetszőleges mátrixnorma, $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertálható mátrix, és definiáljuk $\|.\|$ segítségével a következő $\|.\|_T$ mátrixnormát tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra:

$$\|A\|_T := \|TAT^{-1}\|.$$

a) Igazoljuk, hogy a kifejezés mátrixnormát definiál.
b) Ha T ortogonális mátrix és $\|.\| = \|.\|_2$, akkor milyen kapcsolat van a két norma között? Igazoljuk a sejtésünket.

2. (8 pont) Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ szimmetrikus mátrixot.

a) Számítsuk ki a $\mathrm{cond}_1(A)$-t!
a) Számítsuk ki a $\mathrm{cond}_2(A)$-t!

3. (6 pont) Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre a Jacobi-iterációt! Bizonyítsuk a iterációs módszer konvergenciáját!

4. (12 pont) Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre a Gauss–Seidel-iterációt!

a) Bizonyítsuk az iterációs módszer konvergenciáját!

b) Számítsuk ki $\mathbf{x}^{(1)}$ -et a koordinátás alakjában, ha $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$!

c) Írjuk fel a hibabecslést! Vezessük le azt a képletet, mellyel számológép segítségével ki tudjuk számolni, hogy hány lépés szükséges a fenti $\mathbf{x}^{(0)}$-ból indulva a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

5. (10 pont) Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre a Richardson-iterációt!

a) Pontosan mely p paraméter értékekre konvergens az iteráció?
b) Mi az optimális paraméter, mennyi ekkor a kontrakciós együttható, mely normában?
c) A 3–5. feladatokban ugyanazt a lineáris egyenletrendszert vizsgáltuk három konvergens iterációs módszerrel. A konvergencia bizonyítások alapján rendezzük sorba a módszereket a gyorsaságuk szerint. Pontos indoklást kérünk.

6. (6 pont) Készítsük el az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 7 & 4 \\ 6 & -13 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixnak a $J = \{(1,4),(2,4),(3,1)\}$ pozícióhalmazra illeszkedő részleges LU-felbontását? Határozzuk meg az $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ és $\mathbf{Q}$ mátrixokat!