Analízis 1, 1. zárthelyi dolgozat, 2025.03.28.

1. (7 pont) Legyen

$$H = \left\{ \frac{8n-5}{4n+2} \in \mathbb{R} \;\middle|\; n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Határozza meg a H halmaz szuprémumát és infimumát! Van-e a H halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

Megoldás:

- $\dfrac{8n-5}{4n+2} = \dfrac{2 \cdot (4n+2) - 9}{4n+2} = 2 - \dfrac{9}{4n+2}$
- $2 - \dfrac{9}{4n+2} < 2$. Sejtés: $\sup H = 2$
  - $\forall h \in H : h \leq 2 \quad \checkmark$
  - $\forall \varepsilon > 0 : \exists h \in H : h > 2 - \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : 2 - \dfrac{9}{4n+2} > 2 - \varepsilon$

    elég: $4n + 2 > 4n > \dfrac{9}{\varepsilon} \iff n > \dfrac{9}{4\varepsilon}$, pl. $x := \left[\dfrac{9}{4\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}$
- $\sup H \notin H \implies \nexists \max H$
- $n \geq 1 \implies 2 - \dfrac{9}{4n+2} \geq \dfrac{1}{2} \in H \ (n = 1) \implies \min H = \inf H = \dfrac{1}{2}$

---

2. (4+4 pont) Legyen

$$f(x) = \frac{1}{4 + x^2} \quad \big(x \in [0, 3]\big) \qquad \text{és} \qquad g(x) = \sqrt{6 - x} \quad \big(x \in [-\infty, 5]\big).$$

(a) Határozza meg az $f \circ g$ függvényt!

(b) Igazolja, hogy a g függvény invertálható, és határozza meg az inverzét!

Megoldás:

(a)

- $\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \leq 5 \mid 0 \leq g(x) \leq 3\}$
- $0 \leq \sqrt{6 - x} \leq 3 \iff 0 \leq 6 - x \leq 9 \iff -6 \leq -x \leq 3 \iff -3 \leq x \leq 6$,

  tehát $\mathcal{D}_{f \circ g} = [-3, 6] \cap (-\infty, 5] = [-3, 5]$.
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{1}{4 + (\sqrt{6 - x})^2} = \dfrac{1}{4 + (6 - x)} = \dfrac{1}{10 - x} \quad (-3 \leq x \leq 5)$

(b)

- $x, t \leq 5 : \ g(x) = g(t) \iff \sqrt{6 - x} = \sqrt{6 - t} \iff 6 - x = 6 - t \iff x = t$, tehát a függvény invertálható
- $x \leq 5 \iff 6 - x \geq 1 \iff \sqrt{6 - x} \geq 1$, tehát $\mathcal{R}_g = [1, +\infty)$.
  $g(x) = y \iff \sqrt{6 - x} = y \iff 6 - x = y^2 \iff -x = y^2 - 6 \iff x = -y^2 + 6$
- Tehát $\mathcal{D}_{g^{-1}} = \mathcal{R}_g = [1, +\infty)$ és $g^{-1}(x) = -x^2 + 6$

---

3. (5 pont) A definíció alapján igazolja, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-2n+4}{n^2+3n-5} = 3.$$

Megoldás:

- Bizonyítandó: $\forall \varepsilon > 0: \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n > n_0: \ \left| \frac{3n^2-2n+4}{n^2+3n-5} - 3 \right| < \varepsilon$
- $\left| \frac{3n^2-2n+4}{n^2+3n-5} - 2 \right| = \left| \frac{-11n+19}{n^2+3n-5} \right| \underset{(n>1)}{=} \frac{11n-19}{n^2+\underbrace{3n-5}} \underset{(n>1)}{\leq} \frac{11n}{n^2} = \frac{11}{n}$
- $\varepsilon > 0$ rögzített, elég: $\frac{11}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{11}{\varepsilon}$, tehát pl. $n_0 := \left[\frac{11}{\varepsilon}\right] + 1$ alkalmas

---

4. (4+4+4 pont) Számítsa ki az alábbi határértékeket!

$$(a)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+4n}-n}{\sqrt{n^2+2n}-n}, \qquad (b)\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n+1}+2025}{28n^3+3^{n+2}}}, \qquad (c)\ \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{6n+5}{6n+4}\right)^{3n+3}.$$

Megoldás:

(a) $$\frac{\sqrt{n^2+4n}-n}{\sqrt{n^2+2n}-n} = \frac{n^2+4n-n^2}{n^2+2n-n^2} \cdot \frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{\sqrt{n^2+4n}+n} = 2 \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}+1} \longrightarrow 2 \cdot \frac{1+1}{1+1} = 2$$

(b) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n+1}+2025}{28n^3+3^{n+2}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2\cdot 4^n+2025}{28n^3+9\cdot 3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{3^n}} \cdot \sqrt[n]{\frac{2+2025\cdot(\frac{1}{4})^n}{28\cdot n^3\cdot(\frac{1}{3})^n+9}},$$

$(\frac{1}{4})^n \to 0$, $n^3 \cdot (\frac{1}{3})^n \to 0 \Longrightarrow b_n := \frac{2+2025\cdot(\frac{1}{4})^n}{28\cdot n^3\cdot(\frac{1}{3})^n+9} \to \frac{2}{9} \Longrightarrow \sqrt[n]{b_n} \to 1$

így a kérdezett határérték $\frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$

(c) $$\lim\left(\frac{6n+5}{6n+4}\right)^{3n+3} = \lim \frac{\left(\left(1+\frac{5/6}{n}\right)^n\right)^3 \cdot \left(1+\frac{5/6}{n}\right)^3}{\left(\left(1+\frac{4/6}{n}\right)^n\right)^3 \cdot \left(1+\frac{4/6}{n}\right)^3} = \frac{\left(e^{5/6}\right)^3 \cdot 1^3}{\left(e^{4/6}\right)^3 \cdot 1^3} =$$

$$= \frac{e^{5/2}}{e^2} = e^{1/2} = \sqrt{e} \approx 1.6487$$

---

5. (8 pont) Mutassa meg, hogy az

$$a_0 := 11, \qquad a_{n+1} := \sqrt{2a_n + 3} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens, és számítsa ki a határértékét!

Megoldás:

- Értelmezés: $a_n \geq 0$ (teljes ind.), a gyökvonás értelmezett, a sorozat jól definiált
- Monotonitás: $(a_n) \searrow \iff \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$, teljes indukcióval:
  - $n = 0 : a_0 = 11 \geq a_1 = \sqrt{2 \cdot 11 + 3} = \sqrt{25} = 5$
  - Adott $n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1} \implies a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} \geq \sqrt{2a_{n+1} + 3} = a_{n+2}$
- Lehetséges határérték: ha $\exists A := \lim (a_n)$, akkor $A = \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2a_n + 3} = \sqrt{2A + 3}$
  $\implies A^2 = 2A + 3 \implies A^2 - 2A + 3 = 0 \iff A = -1 \vee A = 3$
  $A = -1$ nem lehet a határérték, hiszen $a_n \geq 0$
- Korlátosság: $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 3$, teljes indukcióval:
  - $n = 0 : a_0 = 11 \geq 3$
  - Adott $n \in \mathbb{N} : a_n \geq 3 \implies a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} \geq \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3$
- (a_n) monoton csökkenő és alulról korlátos $\implies$ konvergens, $\lim (a_n) = 3$