

Diszkrét matematika I. feladatok

Relációk I.

Harmadik alkalom (2025.02.24-28.)

Bemelegítő feladatok

- Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Tekintsük a következő $R \subset A \times B$ binér (kétváltozós) relációt: $R = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 9), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$.
 - Határozza meg az R reláció értelmezési tartományát és értékkészletét.
 - Legyen $H_1 = \{1, 2, 3\}$ és $H_2 = \{4\}$. Határozza meg az R reláció H_1 , illetve H_2 halmazra való leszűkítését.
 - A következő relációk közül melyek lehetnek az R reláció kiterjesztései?
 - $R_1 = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 2), (2, 4), (3, 6), (3, 9), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$
 - $R_2 = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 8), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 9)\}$
 - $R_3 = A \times B$
 - $R_4 = B \times A$
 - Határozza meg az R reláció inverzét, $R(\{1, 2\})$ képét és $R^{-1}(\{5, 6\})$ inverz képet.
- Legyen $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a következő binér reláció $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Mi lesz $\text{dmn}(R)$, $\text{rng}(R)$, $R(\{0, 1\})$ és $R^{-1}(\{0, 1\})$?
- Legyen $R \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a következő binér reláció $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : |\mathbf{u} - \mathbf{v}| = 1\}$. Mi lesz $\text{dmn}(R)$, $\text{rng}(R)$, $R\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$ és $R^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$?

Gyakorló feladatok

- Legyen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ és $C = \{2, 4, 6, 8\}$, továbbá $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$,
 $R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (2, d), (3, c), (3, e)\}$ és
 $S = \{(a, 2), (a, 8), (c, 2), (c, 8), (e, 4), (f, 6)\}$.
Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót, a kompozíció értékkészletét, értelmezési tartományát.
- Legyenek $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ és $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ az alábbi binér relációk. Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót, annak értékkészletét és értelmezési tartományát!
 - $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $S = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 4\}$;
 - $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $S = \{(x, y) : (x - 2)^2 + y^2 \leq 4\}$;
 - $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $S = \{(x, y) : (x - 3)^2 + y^2 \leq 4\}$.

Érdekes feladatok

6. Tekintsük az emberek halmazán a G gyereke és a H házastársa relációt. Fejezzük ki segítségükkel a következőket:
- a) unokája relációt; nagyszülője relációt, anyósa/apósa relációt, veje/menye relációt, testvére/önmagára relációt;
 - b) házások halmaza, nagyszülők halmaza.
7. Adott $X = \{1, 2, \dots, 9\}$ alaphalmaz esetén tekintsük az alábbi $R \subset 2^X \times 2^X$ és $S \subset 2^X \times 2^X$ binér relációkat:

$$R = \{(A, B) : A \triangle B \neq \emptyset\}, \quad S = \{(A, B) : A \subset B\}.$$

Mi lesz $S \circ R(\{\emptyset, \{1, 2\}\})$, ill. $\text{dmn}(S \circ R)$ és $\text{rng}(S \circ R)$?

Beadandó házi feladatok

8. Legyen $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a következő binér reláció: $R = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 \leq 4\}$. Mi lesz $\text{dmn}(R)$, $\text{rng}(R)$, R^{-1} , $R(\{0, 1\})$ és $R^{-1}(\{0, 1\})$? **(1 pont)**
9. Legyen $X = \{1, 2, \dots, 36\}$ és $R \subset X \times X$, $S = X \times X$ az alábbi két reláció:

$$R = \{(n, m) : |n - m| \text{ páros}\}, \quad S = \{(n, m) : |n - m| \text{ osztható 3-mal}\}.$$

Mi lesz $S \circ R(\{1, 2\})$, $(S \circ R)^{-1}(\{1, 2\})$, $\text{dmn}(S \circ R)$, $\text{rng}(S \circ R)$? **(1 pont)**

10. Legyen $X = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\} \subset \mathbb{R}^2$ a következő vektorok halmaza:

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_6 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Legyen továbbá

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tekintsük az alábbi relációkat $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in X \times X : M\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$ és $S = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in X \times X : N\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$. Mi lesz az $R \circ S$, illetve az $S \circ R$ reláció? **(1 pont)**

További gyakorló feladatok

11. Legyenek $R \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ és $S \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ az alábbi binér relációk. Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót, annak értékkészletét és értelmezési tartományát!
- a) $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : |\mathbf{u}| \leq 2, |\mathbf{v}| \leq 2\}$, $S = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : |\mathbf{u} - (1, 0)| \leq 2, |\mathbf{v} - (1, 0)| \leq 2\}$;
 - b) $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : |\mathbf{u}| \leq 2, |\mathbf{v}| \leq 2\}$, $S = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : |\mathbf{u} - (2, 0)| \leq 2, |\mathbf{v} - (2, 0)| \leq 2\}$;
 - c) $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : |\mathbf{u}| \leq 2, |\mathbf{v}| \leq 2\}$, $S = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : |\mathbf{u} - (3, 0)| \leq 2, |\mathbf{v} - (3, 0)| \leq 2\}$.