Lineáris leképezések

Definició

$(X,\ ||.||_\circ),\ (Y,\ ||.||_*)$ metrikus terek, $f : X \to Y$ korlátos-lineáris leképezés ha

a) $f(x\ +\ \lambda y) = f(x)\ +\ \lambda f(y) \quad (x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$ (lineáris)

b) $\exists M > 0 : ||f(x)||_* \leq M||x||_\circ (x \in X)$ (korlátos)

Legyen $L(X,\ Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ korlátos lineáris leképezés}\}$

Tétel 1.

Legyen $f \in L(X,\ Y)$, $K_f := \left\{M \geq 0 \,\middle|\, ||f(x)||_* \leq M \cdot ||x||_\circ \quad (x \in X)\right\}$. Ekkor $\exists \min K_f$

Bizonyítás

$\gamma := \inf K_f$, belátjuk $\gamma \in K_f$

Indirekt tegyük fel, hogy $\gamma \notin K_f$ ez azt jelenti, hogy $\exists x \in X : ||f(x)||_* > \gamma \cdot ||x||_\circ \iff x \neq 0$ (tehát $||x||_\circ \neq 0$) mivel a linearitás miatt $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 0$ és nyilván $0 > \gamma \cdot 0$ nem igaz.

Legyen $r > 0 : ||f(x)||_* > (\gamma + r) \cdot ||x||_\circ$. Ez azt jelenti, hogy $\exists K_f \ni \underline{M < \gamma + r}$ mivel $\gamma + r > \inf K_f$ tehát $M \cdot ||x||_\circ \geq ||f(x)||_* > (\gamma + r) \cdot ||x||_\circ \implies \underline{M > \gamma + r}$ ami ellentmondás.

Tétel 2.

$\forall f \in L(X,\ Y),\ \forall x, y \in X : ||f(x) - f(y)||_* = ||f(x - z)||_* \leq ||f|| \cdot ||x - z||_\circ \implies f$ egyenletesen folytonos.

Megjegyzések

$L(X,\ Y) \ni f \mapsto ||f|| := \min K_f$ norma

$L(X,\ Y)$ lineáris tér $\mathbb{K}$ felett

$(L(X,\ Y),\ ||.||)$ normált tér (operátor-tér)

Mátrixok (i guess) :)

Legyen most $(X,\ ||.||_\circ) \coloneqq (\mathbb{R}^n, ||.||_p),\ (Y,\ ||.||_*) \coloneqq (\mathbb{R}^m, ||.||_q)$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ **mátrix** és $f_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^n)$ korlátos-lineáris leképezés.

Az is igaz, hogy $\forall f \in L(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^m) : \exists! A \in \mathbb{R}^{n\times m} : f = f_A$

tehát $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \equiv R^{m\times n}$, az A **mátrix normá**ja pedig $||A||_{(p,\ q)} \coloneqq ||f_A||$ (ha $p = q$ akkor elég $||A||_p$-ként jelölni)

$||Ax||_q \leq ||A||_{(p,\ q)} \cdot ||x||_p$

Fréchet-deriválhatóság

$(X,\ ||.||_\circ),\ (Y,\ ||.||_*),\ f \in X \to Y,\ a \in int\ D_f$. Ekkor $f \in D\{a\}$ ha $\exists\ L \in L(X, Y), \exists\ \eta \in X \to Y : \lim\limits_0 \eta = 0$ és $f(a+h) - f(a) = L(h) + \eta(h) \cdot ||h||_\circ \quad (h \in X, a + h \in int\ D_f)$

Ekkor $f'(a) \coloneqq L$ az f a-beli Fréchet-deriváltja.

Fréchet-derivált egyértelműsége

$\implies \exists! L$

Bizonyítás

Indirekt módon t.f.h $\exists\ L, \tilde{L} \in L(X, Y), \tilde{\eta} \in X \to Y, \lim\limits_0 \tilde{\eta} = 0$, hogy $f(a+h) - f(a) = \tilde{L}(h) + \tilde{\eta}(h) \cdot ||h||_\circ$

Legyen $0 \neq x \in X,\ 0 \neq t \in \mathbb{R},\ h = t \cdot x \implies$

$$\begin{gathered}
0 = (L - \tilde{L})(h) + (\eta(h) - \tilde{\eta}(h))||h||_\circ \\
= t(L(x) - \tilde{L}(x)) + (\eta(tx) - \tilde{\eta}(tx)) \cdot |t| \cdot ||x||_\circ \\
\implies L(x) - \tilde{L}(x) = (\eta(tx) - \tilde{\eta}(tx))(\pm||x||_\circ) \\
\implies L(x) = \tilde{L}(x)
\end{gathered}$$

Többváltozós vektorfüggvény esetén (véges térben)

$(X,\ ||.||_\circ) \coloneqq (\mathbb{R}^n, ||.||_p),\ (Y,\ ||.||_*) \coloneqq (\mathbb{R}^m, ||.||_q), f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Tehát $f \in D\{a\}$ $(a \in int\ D_f) \iff \exists! A \in \mathbb{R}^{n \times m}, \exists\, \eta \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : \lim\limits_{0} \eta = 0$ és
$f(a+h) - f(a) = A \cdot h + \eta(h) \cdot ||h||_p$

Ekkor $f'(a) \coloneqq A$ az f a-beli deriváltmátrixa vagy **Jacobi-mátrixa**.