# Numerikus módszerek 2.

## Programtervező informatikus BSc
## Vizsgakérdések és válaszok

Frissítve: 2024. július 30.

### 1. Definiálja a sajátérték és sajátvektor fogalmát!

A $\lambda \in \mathbb{K}$ számot az $A$ mátrix *sajátértékének*, a $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq 0$ vektort az $A$ *sajátvektorának* nevezzük, ha $Av = \lambda\, v$.

### 2. Definiálja az $A$ mátrix karakterisztikus polinomját!

Az $A$ mátrix karakterisztikus polinomja $p(\lambda) = \det(A - \lambda\, I)$.

### 3. Mi a sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása?

- Egy $\lambda$ sajátérték *algerai multiplicitása* a gyök $p(\lambda)$-beli multiplicitása. A továbbiakban $m_A(\lambda)$-val jelöljük.
- Egy $\lambda$ sajátérték *geometriai multiplicitása*
$$m_G(\lambda) := \dim W_\lambda = \dim(\{v \in \mathbb{K}^n : Av = \lambda\, v\}).$$

### 4. Mit nevezünk hasonlósági transzformációnak? Hogyan változnak a sajátértékek, sajátvektorok a hasonlósági transzformáció során?

- Az $A$ és $B$ *mátrixok hasonlóak*, ha $\exists\ T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertálható mátrix, melyre $B = T^{-1}AT$. A $T$ mátrixot *transzformációs mátrixnak* nevezzük.
- Hasonló mátrixok sajátértékei azonosok. Ha $v$ az $A$ sajátvektora, akkor $T^{-1}v$ a $B$ sajátvektora.

### 5. Írja le Schur tételt!

$\forall\ A \in \mathbb{K}^{n\times n}:\ \exists\, U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitér mátrix, hogy $U^*AU = R$ felsőháromszög-mátrix.

### 6. Milyen tételt tanult mátrixok unitér hasonlósági transzformációval történő diagonalizálhatóságáról?

$A$ normális mátrix $(A^*A = AA^*) \Leftrightarrow \exists\, U$ unitér mátrix, melyre $U^*AU = D$ diagonális.

### 7. Milyen becslést tanult a sajátértékekre a mátrix norma segítségével? !

Az $A$ minden sajátértéke a komplex sík 0 középpontú $r := \|A\|$ sugarú zárt körlemezén helyezkedik el, azaz $|\lambda_i| \leq \|A\| \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$.

**8. Írja le a kétféle Gersgorin tételt!**

- Az $A$ minden sajátértéke a komplex sík $a_{ii}$ középpontú $r_i := \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ sugarú zárt körlemezeinek uniójában helyezkedik el. Ezeket a köröket Gersgorin-köröknek nevezzük.
- Ha a Gersgorin-körök között vannak diszjunkt körcsoportok, akkor minden körcsoportban annyi sajátérték helyezkedik el, amennyi körből a csoport áll.

**9. Milyen tételt tanult a sajátértékek eltérésének becslésére a reziduális hiba segítségével?**

1) Legyen $A$ diagonalizálható, azaz $\exists\ X$ invertálható mátrix, melyre $X^{-1}AX = D = \mathsf{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
2) Legyen $\mu$ és $u$ az $A$ közelítő sajátértéke és sajátvektora,
3) $r := Au - \mu u$ a közelítés reziduális hibája.
4) Olyan mátrixnormát válasszunk, melyben minden diagonális mátrixra $\|D\| = \max_{i=1}^{n} |d_{ii}|$. (Például a p-normák ilyenek.)

Ekkor
$$\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu| \leq \frac{\|r\|}{\|u\|} \cdot \mathsf{cond}\,(X).$$

**10. Írja le a Bauer-Fike tételt!**

1) Legyen $A$ diagonalizálható, azaz $\exists\ X$ invertálható mátrix, melyre $X^{-1}AX = D = \mathsf{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
2) Legyen $A + \Delta A$ sajátértéke $\mu$ és
3) olyan mátrixnormát válasszunk, melyben minden diagonális mátrixra $\|D\| = \max_{i=1}^{n} |d_{ii}|$. (Például a p-normák ilyenek.)

Ekkor
$$\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu| \leq \mathsf{cond}\,(X) \cdot \|\Delta A\|.$$

**11. Írja fel a Fagyejev-féle "trace-módszerrel" a karakterisztikus polinomot!**

1) Kiszámítjuk az $s_k := \mathsf{tr}\,(A^k)$ értékeket $k = 1, \ldots, n$-re.
2) A Newton-Waring (Girard) – formula alapján (gyökök és együtthatók összefüggése)
$$s_k + p_1 s_{k-1} + \ldots + p_{k-1} s_1 + k \cdot p_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$$
alsóháromszög mátrixú LER-ből:
$$p_k = -\frac{1}{k}(s_k + p_1 s_{k-1} + \ldots + p_{k-1} s_1) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

$$\Rightarrow \quad p(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = \det(\lambda I - A)$$

**12. Írja le a tridiagonális mátrix karakterisztikus polinomjára tanult rekurziót!**

$A = \mathsf{tridiag}\,(\beta_{i-1}, \alpha_i, \gamma_i)$ esetén a karakterisztikus polinom
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 - \lambda & \gamma_2 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 - \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n - \lambda \end{vmatrix}.$$

Az $A - \lambda I$ mátrix $k$. főminorára ($p_k(\lambda)$) a következő rekurzió teljesül:

$$p_0(\lambda) = 1, \;\; p_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda,$$
$$p_k(\lambda) = (\alpha_k - \lambda)p_{k-1}(\lambda) - \beta_{k-1}\gamma_{k-1}p_{k-2}(\lambda), \;\; k = 2, \dots, n.$$

Ekkor $p_n(\lambda)$ az $A$ karakterisztikus polinomja.

## 13. Mi a Frobenius mátrix és mi a kapcsolata a sajátértékproblémával?

- Adott $p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n$ polinom esetén az
$$F_n := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -p_n \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -p_2 \\ 0 & \dots & 1 & -p_1 \end{bmatrix}$$
mátrixot Frobenius kísérő mátrixnak nevezzük.

- $F_n$ karakterisztikus polinomja $p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n$, azaz $\det(\lambda I - F_n) = p(\lambda)$.

## 14. Definiálja a Rayleigh-hányadost!

Az $\frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle x,x\rangle}$ hányadost ($x \neq 0$) *Rayleigh-hányadosnak* nevezzük.

## 15. Írja le a Rayleigh-hányadosról tanult két állítást!

Ha $A = A^*$, akkor
1)
$$\max_{x\neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_{max} \quad \text{illetve} \quad \min_{x\neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_{min}$$
2) Rögzített $x \neq 0$ vektor esetén
$$\min_{\lambda\in\mathbb{K}} \|Ax - \lambda x\|_2$$
megoldása $\lambda = \frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle x,x\rangle}$.

## 16. Írja le a hatvány-módszer rekurzióját!

Az abszolút értékben legnagyobb (domináns) sajátértéket és sajátvektorát közelíti a következő iteráció:
$$x^{(0)} \neq 0 \;\; (\in \mathbb{R}^n) \quad \text{kezdővektor}$$
$$x^{(k+1)} := Ax^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Célszerű néhány lépés után vagy lépésenként normálni a vektorokat, hogy az alul- illetve túlcsordulást elkerüljük.

## 17. Írja le az inverz-iteráció rekurzióját!

Az $A^{-1}$-re alkalmazott hatványmódszer, csak invertálható mátrixra alkalmazható.

Az abszolút értékben legkisebb sajátértéket és sajátvektorát közelíti a következő iteráció:

$$x^{(0)} \neq 0 \ \ (\in \mathbb{R}^n) \quad \text{kezdővektor}$$
$$x^{(k+1)} := A^{-1}x^{(k)} \quad \text{helyett az} \quad Ax^{(k+1)} = x^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

LER-t oldjuk meg pl. az $A$ mátrix LU-felbontásának felhasználásával. Célszerű itt is néhány lépés után vagy lépésenként normálni a vektorokat, hogy az alul- illetve túlcsordulást elkerüljük.

## 18. Milyen tételt tanult a hatvány-módszer konvergenciájáról?

1) Legyen $A$ normális, vagyis létezzen sajátvektorokból álló ortonormált bázisa: $(v_1, \ldots, v_n)$.
2) A sajátértékeire $|\lambda_n| > |\lambda_{n-1}| \geq \ldots \geq |\lambda_1|$.
3) Az $x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ kezdővektorra $c_n = \langle x^{(0)}, v_n \rangle \neq 0$.
   ($c_n$ az $x^{(0)}$-nak a $v_n$ irányú komponense.)

Ekkor
1) $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^k} x^{(k)} = c_n v_n$.
2) $\lim_{k\to\infty} \frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}} = \lambda_n$, ahol $|x_i^{(k)}| = \|x^{(k)}\|_\infty$.
3) Ha $A = A^*$, akkor $\lim_{k\to\infty} \frac{\langle x^{(k+1)}, x^{(k)} \rangle}{\langle x^{(k)}, x^{(k)} \rangle} = \lambda_n$.

## 19. Milyen tételt tanult az inverz-iteráció konvergenciájáról?

1) Legyen $A$ normális, vagyis létezzen sajátvektorokból álló ortonormált bázisa: $(v_1, \ldots, v_n)$.
2) A sajátértékeire $|\lambda_1| < |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_n|$.
3) Az $x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ kezdővektorra $c_1 = \langle x^{(0)}, v_1 \rangle \neq 0$.
   ($c_1$ az $x^{(0)}$-nak a $v_1$ irányú komponense.)

Ekkor
1) $\lim_{k\to\infty} \lambda_1^k x^{(k)} = c_1 v_1$.
2) $\lim_{k\to\infty} \frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}} = \frac{1}{\lambda_1}$, ahol $|x_i^{(k)}| = \|x^{(k)}\|_\infty$.
3) Ha $A = A^*$, akkor $\lim_{k\to\infty} \frac{\langle x^{(k+1)}, x^{(k)} \rangle}{\langle x^{(k)}, x^{(k)} \rangle} = \frac{1}{\lambda_1}$.

## 20. Írja le a klasszikus Jacobi-módszer konvergencia tételét!

A klasszikus Jacobi-módszerrel generált $(A^{(k)})$ sorozat olyan diagonális mátrixhoz konvergál, melynek átlójában az $A$ sajátértékei állnak.

## 21. Írja le az LU-algoritmus rekurzióját!

1) $A_1 := A$, $k = 1, 2, \ldots$, leállásig:
2) $A_k = L_k \cdot U_k$, LU-felbontás előállítása
3) $A_{k+1} := U_k \cdot L_k$.

**22. Írja le a QR-algoritmus rekurzióját!**

1) $A_1 := A$, $k = 1, 2, \ldots$, leállásig:
2) $A_k = Q_k \cdot R_k$, QR-felbontást állítsuk elő
3) $A_{k+1} := R_k \cdot Q_k$.

**23. Definiálja az interpoláció feladatát!**

Adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a; b]$ különböző alappontok, $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ függvényértékek. Olyan $p_n \in P_n$ polinomot keresünk, melyre

$$p_n(x_i) = y_i, \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

A feltételnek eleget tevő polinomot *interpolációs polinomnak* nevezzük. $P_n$ a legfeljebb $n$-edfokú polinomok halmaza.

**24. Definiálja a Lagrange-alappolinomokat!**

Az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ különböző alappontok által meghatározott *Lagrange-alappolinomok* a következők:

$$\ell_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1 \ldots, n).$$

**25. Írja le a Lagrange-alappolinomok tulajdonságait!**

1) $\ell_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$
2) $\ell_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\,\omega_n'(x_k)}$, ahol $\omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$

**26. Írja fel az interpolációs polinom Lagrange-alakját!**

$$L_n(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x) \equiv p_n(x)$$

$L_n$-t az interpolációs polinom *Lagrange-alakjának* nevezzük.

**27. Milyen tételt tanult az interpoláció hibájáról?**

1) Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges,
2) $[a; b]$ az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ és $x$ által kifeszített intervallum,
3) továbbá $f \in C^{n+1}[a; b]$.

Ekkor $\exists\, \xi_x \in [a; b]$, melyre

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \omega_n(x).$$

A hibabecslés

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_n(x)|, \text{ahol}$$
$$M_{n+1} := \|f^{(n+1)}\|_\infty := \|f^{(n+1)}\|_{C[a;b]} := \max_{\xi \in [a;b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

**28. Definiálja az elsőrendű és k-adrendű osztott differencia fogalmát!**

Az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ különböző alappontok által meghatározott

- *elsőrendű osztott differenciák* a következők:
$$f[x_i, x_{i+1}] := \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \ \ (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$
- A *k-adrendű osztott differenciákat* rekurzívan definiáljuk:
$$\begin{aligned} &f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] := \\ &\qquad \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}, \\ &\qquad (k = 1, \ldots, n, \ \ i = 0, \ldots n-k). \end{aligned}$$
- Ha a 0-adrendű osztott differenciákat $f[x_i] := f(x_i)$-vel definiáljuk, akkor az elsőrendű osztott differenciát is a rekurzióval számolhatjuk.

**29. Írja fel az interpolációs polinom Newton-alakját!**

$$N_n(x) := f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \cdot \omega_{k-1}(x) \equiv L_n(x)$$

$N_n$-t az interpolációs polinom *Newton-alakjának* nevezzük.

**30. Írja fel az interpolációs polinom Newton-alakjának hibaformuláját!**

Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $x \neq x_i$, ekkor

$$f(x) - N_n(x) = f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] \cdot \omega_n(x).$$

**31. Definiálja a Csebisev polinomot!**

A $T_n(x) := \cos(n \cdot \arccos(x)), \ x \in [-1; 1]$ függvényt $n$-edfokú (elsőfajú) Csebisev-polinomnak nevezzük.

**32. Írja fel a Csebisev polinomok rekurziós formuláját!**

$$T_0(x) := 1, \ \ T_1(x) := x,$$
$$T_{n+1}(x) := 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \ \ (n = 1, 2, \ldots).$$

**33. Írja fel az n-edfokú Csebisev polinom gyökeit!**

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

**34. Írja fel a Csebisev polinom extremális tulajdonságáról tanult tételt!**

**Csebisev-tétel:** A $(T_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer extremális tulajdonsága:

$$\min_{\widetilde{Q} \in P_n^{(1)}} \|\widetilde{Q}\|_\infty = \|\widetilde{T}_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}},$$

ahol $\|\widetilde{Q}\|_\infty := \|\widetilde{Q}\|_{C[-1;1]}$.

**35. Mi az inverz interpoláció és mire használjuk?**

Az interpolációt alkalmazzuk az $f(x) = 0$ típusú egyenletek megoldására, az $x^*$ gyök közelítésére. Tegyük fel, hogy $f$ invertálható $[a;b]$-n, ekkor az $f$ függvény helyett az inverzét közelítjük.

$$f(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^* = f^{-1}(0) \text{ helyettesítés}$$

Az $f(x_0), \ldots, f(x_n)$ alappontokra és $x_0, \ldots, x_n \in [a;b]$ függvényértékekre felírjuk az $Q_n(y)$ interpolációs polinomot.

$$Q_n(y) \approx f^{-1}(y), \quad \rightarrow \quad x_{k+1} := Q_n(0)$$

**36. Definiálja az Hermite interpoláció feladatát!**

1) Adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_k \in [a;b]$ különböző alappontok,
2) $m_0, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ multiplicitás értékek és
3) $y_0^{(j)}, y_1^{(j)}, \ldots, y_k^{(j)} \in \mathbb{R}$ függvény- és derivált értékek $(j = 0, \ldots, m_i - 1)$,
4) $m := \sum_{i=0}^{k} m_i - 1$.

Olyan $H_m \in P_m$ polinomot keresünk, melyre

$$H_m^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}, \quad (i = 0, 1, \ldots, k;\ j = 0, \ldots, m_i - 1).$$

A feltételnek eleget tevő polinomot *Hermite-interpolációs polinomnak* nevezzük.

**37. Milyen tételt tanult az Hermite interpoláció hibájáról?**

1) Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges,
2) $[a;b]$ az $x_0, x_1, \ldots, x_k$ és $x$ által kifeszített intervallum,
3) továbbá $f \in C^{m+1}[a;b]$.

Ekkor $\exists\, \xi_x \in [a;b]$, melyre

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!} \cdot \Omega_m(x).$$

Hibabecslés

$$|f(x) - H_m(x)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \cdot |\Omega_m(x)|,$$

ahol $M_{m+1} := \|f^{(m+1)}\|_\infty, \quad \Omega_m(x) := \prod_{i=0}^{k} (x - x_i)^{m_i}$.

**38. Definiálja a Fejér-Hermite interpolációt!**

Fejér–Hermite-interpoláció esetén $\forall\, m_i = 2$, így a polinom fokszáma $m = 2k + 1$.

**39. Hogyan definiáljuk azonos alappontok esetén az osztott differenciákat?**

Az *elsőrendű osztott differenciák*:

$$f[x_i, x_i] := f'(x_i), \quad (i = 0, 1, \ldots, k).$$

A $j$*-edrendű osztott differenciák*:

$$f[\underbrace{x_i}_{0.}, \underbrace{x_i}_{1.}, \ldots, \underbrace{x_i}_{j.}] := \frac{f^{(j)}(x_i)}{j!}, \quad (i = 0, 1, \ldots, k \;\; j = 0, 1, \ldots, m_i - 1).$$

**40. Definiálja az interpolációs spline-okat!**

Tekintsük az $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ felosztást, ahol $I_k := [x_{k-1}; x_k]$ részintervallum $(k = 1, \ldots, n)$. Az $S_\ell : [a; b] \to \mathbb{R}$ függvényt $\ell$*-edfokú spline*-nak nevezzük, ha

1) $S_\ell\big|_{I_k} \in P_\ell \;\; (k = 1, \ldots, n)$
2) $S_\ell \in C^{(\ell-1)}[a; b]$.

3) Az $S_\ell$ spline-t *interpolációs spline*-nak nevezzük, ha $S_\ell(x_i) = f(x_i) \;\; (i = 0, \ldots, n)$.

**41. Írja le köbös spline-ok esetén a természetes peremfeltételt!**

$$S_3''(a) = 0 \;\text{ és }\; S_3''(b) = 0.$$

**42. Írja le köbös spline-ok esetén az Hermite-féle peremfeltételt!**

$$S_3'(a) = f'(a) \;\text{ és }\; S_3'(b) = f'(b)$$

ahol $f'(a)$ és $f'(b)$ adott.

**43. Írja le köbös spline-ok esetén a periodikus peremfeltételt!**

Csak $f(a) = f(b)$ esetén alkalmazható, ekkor hiányzó két feltétel:

$$S_3'(a) = S_3'(b) \;\text{ és }\; S_3''(a) = S_3''(b).$$

**44. Adja meg az $(x - x_k)_+^\ell$-el jelölt függvény definícióját!**

A jobb oldali hatványfüggvény:

$$(x - x_k)_+^\ell := \begin{cases} (x - x_k)^\ell & \text{ha } x \geq x_k \\ 0 & \text{ha } x < x_k \end{cases}$$

**45. Definiálja a B-spline-okat a tulajdonságaival!**

A $B_{\ell,k} \in S_\ell(\Omega_\infty)$ spline-okat *B-spline*-oknak nevezzük, ha

1) $B_{\ell,k}(x) \geq 0 \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$,
2) $\mathsf{supp}\,(B_{\ell,k})$ (tartó) minimális,
3) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} B_{\ell,k}(x) \equiv 1 \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$.

**46. Írja fel az elsőfokú B-spline képletét!**

$\ell = 1$ esetben a B-spline "Kalap függvények":

$$B_{1,k}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} & \text{ha } x \in [x_k; x_{k+1}) \\ \frac{x_{k+2}-x}{x_{k+2}-x_{k+1}} & \text{ha } x \in [x_{k+1}; x_{k+2}) \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

**47. Írja le a B-spline-okkal történő előállításról szóló tételt!**

$$\forall\, S \in S_\ell(\Omega_n) \quad \exists\, c_{-\ell}, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R} : \quad S(x) = \sum_{k=-\ell}^{n-1} c_k \cdot B_{\ell,k}(x)$$

**48. Definiálja a Moore-Penrose-féle általánosított inverzet!**

Az $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mátrix *Moore-Penrose-féle általánosított (pszeudo) inverze* az $A^+ \in \mathbb{K}^{n\times m}$ mátrix, ha

1) $AA^+$ önadjungált,
2) $A^+A$ önadjungált,
3) $AA^+A = A$,
4) $A^+AA^+ = A^+$.

**49. Írja le a szinguláris felbontásról tanult tételt!**

Tetszőleges $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ esetén $\exists\, U \in \mathbb{K}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitér mátrix és $D \in \mathbb{K}^{m\times n}$, particionálva $D = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, hogy

$$A = UDV^*,$$

ahol $\Sigma = \mathsf{diag}\,(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, $r = \mathsf{rang}\,(A)$ és $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.

**50. Hogyan állítható elő az általánosított inverz a szinguláris felbontás segítségével?**

A szinguláris felbontás felhasználásával az $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mátrix általánosított inverze a következő alakban állítható elő:

$$A^+ = VD^+U^* \in \mathbb{K}^{n\times m},$$

ahol $D^+ \in \mathbb{K}^{n\times m}$ diagonális mátrix, $d^+_{ii} = \frac{1}{d_{ii}}$, ha $d_{ii} \neq 0$, különben 0 az értéke.

**51. Hogyan számítjuk az általánosított inverzet a túlhatározott teljes rangú esetben?**

Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $m > n$ és $r = \mathsf{rang}\,(A) = n$. Ekkor

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^*.$$

**52. Hogyan számítjuk az általánosított inverzet az alulhatározott teljes rangú esetben?**

Legyen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $m < n$ és $r = \mathsf{rang}\,(A) = m$. Ekkor

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1}.$$

**53. Mit nevezünk Gauss-féle normálegyenleteknek?**

Túlhatározott teljes rangú esetben az általánosított megoldás meghatározáshoz a jobb-oldali Gauss-féle normálegyenleteket kell megoldanunk:

$$a^+ = A^+y = (A^TA)^{-1}\cdot A^Ty \quad \Leftrightarrow \quad A^TA\cdot a^+ = A^Ty.$$

**54. Írja le az általánosított inverz approximációs tulajdonságáról szóló tételt!**

1) $\|Ax - b\|_2 \geq \|Ax^+ - b\|_2, \quad \forall\, x \in \mathbb{K}^n.$

2) $H := \{x \in \mathbb{K}^n |\ \|Ax - b\|_2 = \|Ax^+ - b\|_2\}$, akkor

$$\|x^+\|_2 < \|x\|_2 \ \ \forall\, x \in H^n,\ \ x \neq x^+.$$

**55. Definiálja a legkisebb négyzetek módszerének feladatát!**

Adottak az $x_1,\ldots,x_N \in [a;b]$ különböző alappontok, $y_1,\ldots,y_N \in \mathbb{R}$ függvényértékek vagy mérési eredmények. Olyan $p_n \in P_n$ polinomot keresünk ($n+1 \leq N$, általában $N \gg n$), melyre

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - p_n(x_i))^2 \ \text{ minimális.}$$

A $p_n$ polinomot *négyzetesen legjobban közelítő polinomnak* nevezzük.

**56. Milyen tételt tanult a Hilbert térbeli approximációra?**

Legyen $H$ Hilbert tér, $f \in H$ és $H' \subset H$ zárt altér, ekkor

$$\exists!\ f' \in H' :\ \ \|f - f'\| = \inf\{\|f - h\| :\ h \in H'\}$$

$$\text{és}\ \ f - f' \perp H' \quad (\text{azaz}\ \langle f - f', h\rangle = 0\ \ \forall\, h' \in H').$$

**57. Véges dimenziós esetben hogyan oldható meg a Hilbert térbeli approximációs feladat? Írja fel a távolság képletét is!**

$H' = \mathsf{Span}\,(g_1,\ldots,g_n)$, az altérbeli legjobban közelítő elemet

$$f' = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i$$

alakban keressük. A c vektor elemeit a $Gc = b$ LER-ből kapjuk:

$$\text{ahol}\ G = (\langle g_i, g_j\rangle)_{j,i=1}^n,\ \ c = (c_i)_{i=1}^n, b = (\langle f, g_j\rangle)_{j=1}^n.$$

A távolság: $d^2 := \|f - f'\|^2 = \|f\|^2 - b^T c$.

**58. Az ortogonális polinomok milyen minimum tulajdonsággal rendelkeznek? Írja le a tanult tételt!**

Az 1 főegyütthatós $n$-edfokú ortogonális polinomok approximációs tulajdonsága:

$$\min_{\widetilde{p} \in P_n^{(1)}} \|\widetilde{p}\|_w^2 = \min_{\widetilde{p} \in P_n^{(1)}} \left( \int_a^b \widetilde{p}^2 w \right) = \|\widetilde{p}_n\|_w^2.$$

**59. Írja le az ortogonális polinomok rekurziós tételét!**

A $(\widetilde{p}_n)_{n=0}^{\infty}$ 1 főegyütthatós polinomrendszerre a következő rekurzió teljesül:

$$\widetilde{p}_{-1}(x) \equiv 0, \quad \widetilde{p}_0(x) \equiv 1$$

$$\widetilde{p}_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1}) \cdot \widetilde{p}_n(x) - \beta_n \cdot \widetilde{p}_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\text{ahol } \alpha_{n+1} = \frac{\langle id \cdot \widetilde{p}_n, \widetilde{p}_n \rangle_w}{\|\widetilde{p}_n\|_w^2}, \quad \beta_n = \frac{\|\widetilde{p}_n\|_w^2}{\|\widetilde{p}_{n-1}\|_w^2} > 0, \quad id(x) \equiv x.$$

**60. Milyen két tételt tanult az ortogonális polinomok gyökeiről?**

1) $n \geq 1$ esetén a $\widetilde{p}_n$ ortogonális polinomnak $n$ db valós különböző gyöke van $[a; b]$-n.

2) $\widetilde{p}_{n-1}$ és $\widetilde{p}_n$ gyökei váltakozva helyezkednek el.

**61. Definiálja az interpolációs típusú kvadratúra formulákat!**

A $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ formula *interpolációs típusú*, ha

$$A_k = \int_a^b \ell_k(x) w(x) \, dx \quad (k = 0, \ldots, n).$$

**62. Milyen tételt tanult az interpolációs típusú kvadratúra formulák pontosságáról?**

$$\forall\, f \in P_n\text{-re} \quad \int_a^b f(x) w(x) \, dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$$\Leftrightarrow \quad A_k = \int_a^b \ell_k(x) w(x) \, dx \quad (k = 0, \ldots, n)$$

**63. Mi a jellemzője a Newton-Cotes típusú kvadratúra formuláknak?**

$w(x) \equiv 1$ és az $\{x_i : i = 0, \ldots, n\}$ alappontok egyenletes felosztású pontok $[a; b]$-n.

**64. Mi a jellemzője a Csebisev típusú kvadratúra formuláknak?**

$A_k \equiv A \quad (k = 0, \ldots, n)$.

**65. Mi a jellemzője a Gauss típusú kvadratúra formuláknak?**

Maximális fokszámig $(2n+1)$ pontos formulák.

**66. Írja fel az érintő formulát!**

$$\int_a^b f \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) =: E(f)$$

**67. Írja fel a trapéz formulát!**

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2} \cdot (f(a)+f(b)) =: T(f)$$

**68. Írja fel a Simpson formulát!**

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) =: S(f)$$

**69. Írja fel az érintő formula hibabecslését!**

Ha $f \in C^2[a;b]$, akkor

$$\left|\int_a^b f - E(f)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \cdot M_2$$

ahol $M_2 = \|f''\|_\infty$.

**70. Írja fel a trapéz formula hibabecslését!**

Ha $f \in C^2[a;b]$, akkor

$$\left|\int_a^b f - T(f)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \cdot M_2,$$

ahol $M_2 = \|f''\|_\infty$.

**71. Írja fel a Simpson formula hibabecslését!**

Ha $f \in C^4[a;b]$, akkor

$$\left|\int_a^b f - S(f)\right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot M_4$$

ahol $M_4 = \|f^{(4)}\|_\infty$.

**72. Milyen tételt tanult a Gauss típusú kvadratúra formulák pontosságáról?**

$$\int_a^b fw = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \quad \forall\, f \in P_{2n+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\omega_n \perp P_n, \text{ ahol } \omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

**Másképp:** a kvadratúra formula pontos bármely legfeljebb $2n+1$-edfokú polinomra akkor és csak akkor,
ha $x_0, x_1 \ldots, x_n$ az $n+1$-edfokú ortogonális polinom gyökei.

**73. Írja le a Gauss típusú kvadratúra formulák hibabecslésére vonatkozó tételt!**

Gauss típusú kvadratúra formulák esetén ha $f \in C^{(2n+2)}[a;b]$, akkor

$$\left| \int_a^b fw - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \right| \leq \frac{M_{2n+2}}{(2n+2)!} \|\omega_n\|_w^2,$$

$$\text{ahol } \omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \quad \text{és } M_{2n+1} = \|f^{(2n+2)}\|_\infty$$