1. Mit ért azon, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely helyen lokális minimuma van?

Az f függvénynek $a \in \text{int } D_f$ pontban lokális maximuma van, ha

$$\exists K(a) \subset D_f, \text{hogy } \forall x \in K(a) : f(x) \geq f(a)$$

Az $a \in \text{int } D_f$ pont f lokális maximumhelye, $f(a)$ pedig f lokális maximuma.

2. Mit ért azon, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely helyen lokális maximuma van?

Az f függvénynek $a \in \text{int } D_f$ pontban lokális minimuma van, ha

$$\exists K(a) \subset D_f, \text{hogy } \forall x \in K(a) : f(x) \leq f(a)$$

Az $a \in \text{int } D_f$ pont f lokális minimumhelye, $f(a)$ pedig f lokális minimuma.

3. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel?

TFH az f függvénynek az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban lokális szélsőértéke van és $f \in D\{a\}$. Ekkor

$$f'(a) = 0$$

4. Adjon példát olyan $f \in \mathbb{R} \to$ függvényre, amelyre valamely $a \in \mathbb{R}$ esetén $f \in D\{a\},\ f'(a) = 0$ teljesül, de az f függvénynek az a pontban nincs lokális szélsőértéke!

$$f(x) = x^3$$

5. Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer differenciálható függvény monoton növekedésével kapcsolatban?

Legyen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. $f \uparrow$ ha

$$f'(x) \geq 0 \quad (\forall x \in (a, b))$$

6. Milyen elégséges feltételt ismer differenciálható függvény szigorú monoton növekedésével kapcsolatban?

Legyen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. f szigorú monoton növekedvő ha

$$f'(x) > 0 \quad (\forall x \in (a, b))$$

7. Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer differenciálható függvény szigorú monoton növekedésével kapcsolatban?

legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum.

TFH $f \in D(a, b)$

Ekkor $f \uparrow\ [\downarrow]\ (a, b)$-n $\iff f' \geq 0\ [f' \leq 0]\ (a, b)$-n és (a, b)-nek nincs olyan részintervalluma, amelyen $f' = 0$ azonosan.

8. Mit ért azon, hogy egy függvény valamely helyen jelet vált?

Azt mondjuk hogy a h függvény a $c \in \text{int } \mathcal{D}_h$ negatívból pozitívba megy át (röviden h-nak c-ben előjelváltása van), ha $h(c) = 0$ és $\exists \delta > 0$ úgy, hogy

$$h(x) < 0, \text{ ha } \ x \in (c-\delta, c) \quad \text{és } \ h(x) > 0, \text{ ha } \ x \in (c, c+\delta)$$

A h függvény c-beli $(+, -)$ előjelváltását hasonlóan értelmezzük. Ekkor h a c pontban pozitívból negatívba megy át.

Azt mondjuk, hogy a h függvény c-ben előjelet vált, ha h-nak c-ben $(-, +)$ vagy $(+, -)$ előjelváltása van.

9. Hogyan szól a lokális minimumra vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel?

legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. TFH
- $f \in D(a, b)$,
- egy $c \in (a, b)$ pontban $f'(c) = 0$,
- az f' deriváltfüggvény előjelet vált c-ben

Ekkor ha az f' függvénynek c-ben $(-, +)$ előjelváltása van, akkor c az f függvénynek szigorú lokális minimumhelye;

10. Hogyan szól a lokális maximumra vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel?

legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. TFH
- $f \in D(a, b)$,
- egy $c \in (a, b)$ pontban $f'(c) = 0$,
- az f' deriváltfüggvény előjelet vált c-ben

Ekkor ha az f' függvénynek c-ben $(+, -)$ előjelváltása van, akkor c az f függvénynek szigorú lokális maximumhelye;

11. Írja le a lokális minimumra vonatkozó másodrendű elégséges feltételt!

legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. TFH
- f kétszer deriválható egy $c \in (a, b)$ pontban, $f \in D^2\{c\}$
- $f'(c) = 0$
- $f''(c) \neq 0$

Ekkor c szigorú lokális szélsőértékhelye az f függvénynek ha $f''(c) > 0$, akkor c az f függvénynek szigorú lokális minimumhelye;

12. Írja le a lokális maximumra vonatkozó másodrendű elégséges feltételt!

legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. TFH
- f kétszer deriválható egy $c \in (a, b)$ pontban, $f \in D^2\{c\}$
- $f'(c) = 0$
- $f''(c) \neq 0$

Ekkor c szigorú lokális szélsőértékhelye az f függvénynek ha $f''(c) < 0$, akkor c az f függvénynek szigorú lokális maximumhelye;

13. Fogalmazza meg a Weierstrass-tételt!

Korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos f függvénynek léteznek abszolút szélsőértékei, azaz

$$\exists \alpha, \beta \in [a, b] \quad \text{úgy hogy} \quad f(\beta) \leq f(x) \leq f(\alpha) \qquad (\forall x \in [a, b])$$