(Hf) 1. Az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterektől függően határozzuk meg az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x+2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}, \\ \alpha, & \text{ha } x=-1, \\ \beta, & \text{ha } x=-2, \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

<u>Megoldás</u>. A megadott f függvény minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezhető, hiszen az

$$f_1(x) = \frac{x^2+5x+4}{x^2+3x+2} = \frac{\cancel{(x+1)}(x+4)}{\cancel{(x+1)}(x+2)} = \frac{x+4}{x+2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\})$$

függvény értelmezhető a megadott intervallumokon. A racionális törtfüggvények folytonossága miatt igaz, hogy $f_1$ folytonos minden értelmezési tartománybeli pontjában. Ha $x \neq -1$ és $x \neq -2$, akkor az $x$ pontnak van olyan környezete, ahol az $f$ függvény értéke kizárólag az $f_1$ függvénnyel kifejezhető. Ez azt jelenti, hogy $f$ folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}$ halmazon.

$x=-1$ esetén

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x+4}{x+2} = \frac{-1+4}{-1+2} = 3, \quad f(-1) = \alpha,$$

így ha $\alpha = 3$, akkor a függvény folytonos az $x=-1$ pontban, ha $\alpha \neq 3$, akkor a függvénynek elsőfajú szakadása van az $x=-1$ pontban.

$x=-2$ esetén

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x+4}{x+2} = \frac{2}{0} = ?$$

$$\lim_{x \to -2+0} f(x) = \lim_{x \to -2+0} \frac{x+4}{x+2} = \underbrace{\lim_{x \to -2} (x+4)}_{-2+4} \cdot \underbrace{\lim_{x \to -2+0} \frac{1}{x+2}}_{+\infty} = (-2+4)(+\infty) = +\infty$$

Így az $\alpha, \beta$ értékektől függetlenül a függvénynek másodfajú szakadása van az $x=-2$ pontban.

(H1) 2. Igazolja, hogy az alábbi egyenleteknek van megoldása a valós számok halmazán!

a) $x^4 + x^2 - 2 = x$

Legyen $f(x) = x^4 + x^2 - 2 - x$ $(x \in \mathbb{R})$. Az $f$ függvény egy polinom, így folytonos $\mathbb{R}$-en. Vegyük észre, hogy

$$f(0) = -2 < 0, \quad f(2) = 16 + 4 - 2 - 2 > 0$$

Tehát $f \in C[0,2]$ és $f(0)f(2) < 0$. Így a Bolzano tétele szerint $\exists \xi \in (0,2)$: $f(\xi) = 0$. Ez azt jelenti, hogy a megadott egyenletnek van megoldása $\mathbb{R}$-en.

b) $e^x = x^2 + 3$

Legyen $f(x) = e^x - x^2 - 3$ $(x \in \mathbb{R})$. $f$ folytonos $\mathbb{R}$-en, hiszen folytonos függvények összege (exponenciális és polinom). Vegyük észre, hogy

$$f(0) = e^0 - 0^2 - 3 = 1 - 3 = -2 < 0, \quad f(5) = e^5 - 25 - 3 > 2^5 - 28 = 4 > 0$$

Tehát $f \in C[0,5]$ és $f(0) \cdot f(5) < 0$. Így a Bolzano tétele szerint $\exists \xi \in (0,5)$: $f(\xi) = 0$. Ez azt jelenti, hogy a megadott egyenletnek van megoldása $\mathbb{R}$-en.