5. gyakorlat

Megjegyzés

Ötlet: A kiinduló A mátrixon $Q^{(k)}$ ortogonális mátrixokkal végzünk hasonlósági transzformációkat: $(Q^{(k)})^T A^{(k-1)} Q^{(k)}$, mely a $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mátrixhoz konvergál.
A Q transzformáló mátrix mindig egy elemi forgatási mátrix: Tehát ez egy egységmátrix, amelynek a négy, i és j által meghatározott pozícióján van egy megfelelő szögfüggvény értéke.
Ebből adódóan egy forgatáshoz két dolgot kell meghatározni: Az (i,j) pozíciót és a szöget.

Megjegyzés

Az (i,j) pozíció választása:
– **Klasszikus:** ha $\left|a_{ij}^{(k-1)}\right| = \max\left\{\left|a_{pq}^{(k-1)}\right| : p < q\right\}$, akkor (i,j)-t választjuk. Túl sok összehasonlítás kell hozzá, műveletigényes.
– **Ciklikus:** az $i < j$ és $a_{ij}^{(k-1)} \neq 0$ elemeken megyünk sorban végig, majd elölről kezdjük.
– **Küszöb:** $\varepsilon_k > 0$ előre adott nullsorozat. Ugyanúgy választunk pozíciót, mint a ciklikus változatnál, de csak olyan pozíciót, melyre $\left|a_{ij}^{(k-1)}\right| > \varepsilon_k$.

Megjegyzés

Egy φ szöggel (az óramutató járásával megegyezően) forgató mátrix például így néz ki:

$$Q_{1,3}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Figyeljük meg a mínusz jelet a $\sin$-nál! Gyakori hiba szokott lenni a transzponálás miatt, hogy a mínusz a rossz helyre kerül!

1. feladat

Az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixra alkalmazzuk a Jacobi-módszert. 2×2-es mátrix esetén a módszer egy lépésben végetér. Olvassuk le a mátrix sajátértékeit és sajátvektorait a kapott eredményből!

2. feladat

Az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix esetén alkalmazzuk a Jacobi-módszer forgatási hasonlósági transzformációját az (1,2) pozícióra.

Ellenőrizzük a konvergencia tétel bizonyításában szereplő állítást a végrehajtott lépésre:

$$N(A) - N(A^{(1)}) = 2 \cdot a_{ij}^2.$$

3. feladat

A következő program az alap képletekkel (nem stabil) és mátrixszorzással számol (fölösleges műveletekkel). Írjunk ennél jobbat, majd hasonlítsuk össze a műveletigényt. A pontos képletek (c, s-re és a mátrix szorzásra jobbról illetve balról) megtalálhatóak az `NM2A_ea4.pdf`-ban.

```
function [B,Q] = forgat(A,i,j)
% Nem stabil és sokat számoló verzió.
n=max(size(A));
Q=eye(n);
p=(A(j,j)-A(i,i))/2/A(i,j);
c2=p/sqrt(1+p^2);
c=sqrt((1+c2)/2);
s=sqrt((1-c2)/2);
Q(i,i)=c;
Q(i,j)=s;
Q(j,i)=-s;
Q(j,j)=c;
B=Q'*A*Q;
B(i,j)=0;
B(j,i)=0;
```

```
end
```

4. feladat

Készítsük el a programot forgatási hasonlósági transzformációra. Csak az i, j sorokban illetve oszlopokban változik a mátrix értéke. A módszerrel kinullázott pozíciókat automatikusan nullázzuk ki. (Könnyítésképpen lehet először úgy írni a programot, hogy Q-t előállítjuk és a Matlabbal szorzunk.) A 4. előadás diasorában megtalálhatóak a képletek.

- Bemenő paraméterek: A (mátrix)
  i, j (az (i, j) pozíció)
- Kimenő paraméterek: B (eredmény mátrix),
  c, s $(\cos(\varphi), \sin(\varphi)$ értékek$)$

5. feladat

Készítsük el a programot a ciklikus küszöb Jacobi-módszerre!
Használjuk az előző feladatbeli forgatási transzformációt!

- Bemenő paraméterek: A (mátrix),
  cikl (ciklusszám),
  ep (küszöb)
- Kimenő paraméterek: D (diagonális alak közelítése),
  Q (sajátvektorok közelítése)

A küszöb érthető konkrét korlátnak az $|a_{ij}|$-re vonatkozóan, de akár egy mértani sorozat hányadosának is. (Érdemes különböző hányadosokkal futtatni.)

1. megoldás

Egy 2×2-es mátrix esetén egyetlen megfelelő i, j pozíció van, az $(1, 2)$, hiszen $i < j$ és $a_{12} \neq 0$. Ezen pozíciót választva a pontos sajátértékek az iteráció egyetlen, első lépésében előállnak, a diagonálisban.

Jelen feladatban kétféle megoldási módszert is mutatunk. *Úgy véljük, hogy talán a második módszer jobb, különösen kézi számolásra.*

Tétel: Forgatási szög kiszámítása

$$\mathrm{ctg}(2\varphi) = \frac{a_{jj} - a_{ii}}{2a_{ij}} \qquad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad b_{ij} = b_{ji} = 0.$$

Ezen képlettel a forgatási szög kiszámítható, majd a megfelelő cos és sin értékek is:

$$\mathrm{ctg}(2\varphi) = \frac{a_{22} - a_{11}}{2a_{12}} = \frac{2 - 2}{2 \cdot (-1)} = 0.$$

Ebből $2\varphi = \frac{\pi}{2}$, azaz $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Így a szinusz és koszinusz értékek:

$$c = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad s = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A forgatási mátrix az $(i, j) = (1, 2)$ pozícióra:

$$Q_{1,2}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Ezzel a mátrixszal végezzük el a hasonlósági transzformációt:

$$A^{(1)} = Q^T A Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A sajátértékek a diagonálisban lévő elemek: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$. A sajátvektorok a Q mátrix oszlopvektorai.

Megjegyzés

Egy lépés könnyen ellenőrizhető, hiszen ha a transzformáció során nem egy nullázódnak ki az i, j elemek, akkor hibás a megoldásunk. Speciálisan ez egy 2×2 esetben azt jelenti, hogy helyes számolás esetén diagonális mátrixot kell kapnunk.

A feladatra egy másik megoldást is adunk. Szimuláljuk a törlendő paraméterekkel. Adjuk meg a hasonlósági transzformációt, és használjuk ki, hogy tudjuk, mit kell kinulláznunk az adott lépés végén.

Egy 2×2-es mátrix esetén egyetlen megfelelő i, j pozíció van, az $(1, 2)$, hiszen $i < j$ és $a_{12} \neq 0$. Ezen pozíciót választva a pontos sajátértékek az iteráció egyetlen, első lépésében előállnak, a diagonálisban.

Szimuláljuk a lépést:

$$A^{(1)} = Q^T A Q = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2c+s & -c-2s \\ 2s-c & -s+2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(2c+s) - s(-c-2s) & s(2c+s) + c(-c-2s) \\ c(2s-c) - s(-s+2c) & s(2s-c) + c(-s+2c) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2c^2 + cs + cs + 2s^2 & 2cs + s^2 - c^2 - 2cs \\ 2cs - c^2 + s^2 - 2cs & 2s^2 - cs - cs + 2c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(c^2+s^2) + 2cs & s^2 - c^2 \\ s^2 - c^2 & 2(c^2+s^2) - 2cs \end{bmatrix}.$$

Mivel $c = \cos\varphi$ és $s = \sin\varphi$, tudjuk, hogy $c^2 + s^2 = 1$. Ezt felhasználva:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 + 2cs & s^2 - c^2 \\ s^2 - c^2 & 2 - 2cs \end{bmatrix}.$$

A célunk, hogy a diagonálison kívüli elemek nullák legyenek:

$$s^2 - c^2 = 0.$$

Tudjuk, hogy $c = \cos\varphi$ és $s = \sin\varphi$. A trigonometrikus azonosságokat felhasználva:

$$s^2 - c^2 = -(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = -\cos(2\varphi).$$

Tehát a feltételünk: $\cos(2\varphi) = 0$. A Jacobi-módszernél a forgatási szöget a $(0, \pi/2)$ intervallumban keressük, így $2\varphi \in (0, \pi)$. Ezen az intervallumon a $\cos(2\varphi) = 0$ egyenlet egyetlen megoldása $2\varphi = \pi/2$, amiből $\varphi = \pi/4$.

Ebből a szögből a koszinusz és szinusz értékek:

$$c = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad s = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ezeket visszahelyettesítve az $A^{(1)}$ mátrixba:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 0 \\ 0 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez megegyezik az előző módszerrel kapott eredménnyel. A sajátvektorok a Q mátrix oszlopvektorai a sajátértékek sorrendjének megfelelően.

Megjegyzés

Az ilyen egyenletrendszernél fontos megjegyzés, hogy mindig megoldhatóak úgy, ha kétszeres szögek szögfüggvényeire vezetjük vissza a megoldást a következő összefüggésekkel:

$$\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \qquad \text{és} \qquad \sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

majd ezután a $\operatorname{ctg}(2\varphi)$ értékkel dolgozunk.

2. megoldás

Most a $(i, j) = (1, 2)$ pozícióra alkalmazzuk a Jacobi-módszert. A lépés során a forgatást paraméteresen, $c = \cos\varphi$ és $s = \sin\varphi$ értékekkel végezzük el. A forgatási mátrix az $(i, j) = (1, 2)$ pozícióra egy 3×3-as mátrix, ami az egységmátrixtól csak az 1. és 2. sorában és oszlopában tér el:

$$Q = Q_{1,2}(\varphi) = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezzel a mátrixszal végezzük el a hasonlósági transzformációt: $A^{(1)} = Q^T AQ$.

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A szorzásokat elvégezve (a részletes számolástól eltekintünk, az analóg az első feladatban bemutatottal), és felhasználva, hogy $c^2 + s^2 = 1$:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 + 2cs & s^2 - c^2 & s \\ s^2 - c^2 & 2 - 2cs & -c \\ s & -c & 2 \end{bmatrix}.$$

A célunk, hogy a $(1, 2)$ pozíción lévő elem nulla legyen: $s^2 - c^2 = 0$. A kétszeres szögekre vonatkozó azonosság szerint $s^2 - c^2 = -\cos(2\varphi)$. Tehát $\cos(2\varphi) = 0$, amiből $\varphi = \pi/4$. Ebből $c = s = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ezeket visszahelyettesítve az $A^{(1)}$ mátrixba:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 + 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 2 - 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzésnél az ismert összefüggést használjuk:

$$N(A) - N(A^{(1)}) = 2 \cdot a_{ij}^2,$$

ahol $N(A) = \sum_{i \neq j} a_{ij}^2$ az A mátrix nem-diagonális elemeinek négyzetösszege.

A kiinduló mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

esetén a nem-diagonális elemek: $a_{12} = a_{21} = -1$, $a_{23} = a_{32} = -1$, $a_{13} = a_{31} = 0$.

Ezért:

$$N(A) = 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 0^2 = 4.$$

Az $A^{(1)}$ mátrixban a nem-diagonális elemek: $a_{12}^{(1)} = a_{21}^{(1)} = 0$, $a_{13}^{(1)} = a_{31}^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_{23}^{(1)} = a_{32}^{(1)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ezért:

$$N(A^{(1)}) = 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Tehát:

$$N(A) - N(A^{(1)}) = 4 - 2 = 2 = 2 \cdot a_{12}^2 = 2 \cdot (-1)^2 = 2.$$

Az összefüggés teljesül.

3. megoldás

Órai feladat.

4. megoldás

Gyakorló feladat.

5. megoldás

Gyakorló feladat.