1. Metrikus terek

1.1 Definíció

Legyen $X \neq \emptyset$ és $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ függvény ahol $\forall\ x,\ y,\ z \in X$-re igaz, hogy:

1. $\rho(x,\ y) \geq 0$
2. $\rho(x,\ y) = \rho(y,\ x)$
3. $\rho(x,\ y) = 0 \iff x = y$
4. $\rho(x,\ y) \leq \rho(x,\ z) + \rho(y,\ z)$

Ekkor ρ **metrika** (vagy távolságfüggvény), az $(X,\ \rho)$ pár pedig **metrikus tér**

1.2 Példák

1.2.1

Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ és

$$x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$$

Ekkor definiáljuk a $\rho_p : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to [0, +\infty)$ függvényt az alábbi módon:

$$\rho_p(x,\ y) := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \max\{|x_i - y_i|\ \ i = 1..n\} & (p = \infty) \end{cases}$$

Ekkor ρ_p metrikus tér ($p = 1$ és $p = \infty$ esetén triviális!). Speciális eset a $p = 2$ (euklideszi távolság), és a $p = 1$ (ekkor $\rho_1(x,\ y) = |x - y|$)

1.2.2

Ez a példa az előző példa kiterjesztése folytonos függvényekre. Legyen $X = C\,[a, b]$ az $[a, b]$-n értelmezett valós és folytonos függvények halmaza és $0 < p \leq +\infty$. Ekkor

$$\rho_p(x,\ y) := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_a^b |f - g|^p\right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \max\{|f(x) - g(x)|\ \ x \in [a, b]\} & (p = \infty) \end{cases}$$

1.3 Ekvivalencia

Azt mondjuk, hogy $X \neq \emptyset$ halmaz és $\rho,\ \tilde{\rho} : X \times X \to [0, +\infty)$ metrikák esetén ρ és $\tilde{\rho}$ ekvivalens, ha $\exists\ c_1,\ c_2 > 0$ úgy, hogy

$$c_1 \cdot \rho(x,\ y) \leq \tilde{\rho}(x,\ y) \leq c_2 \cdot \rho(x,\ y)$$

és $\rho \sim \tilde{\rho}$ - val jelöljük. Az 1.2.1-es példában definiált ρ_p metrikák ekvivalensek minden $p \geq 1$ - re

2. Normált terek

2.1 Definíció

Legyen $X \neq \emptyset$ egy vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor a

$$\varphi : X \to [0, +\infty)$$

függvény norma ha $\forall\ x,\ y \in X$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén:

- $\varphi(x) \geq 0$
- $\varphi(x) = 0 \iff x = 0$
- $\varphi(\lambda x) = |\lambda| \cdot \varphi(x)$
- $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$

Ekkor $\varphi(x)$ az x **hosszának** (vagy **normájának**) nevezzük és $||x||$ - el jelöljük, $(X, ||\cdot||)$ - et pedig **normált térnek** hívjuk.

2.2 Norma által indukált metrika

Legyen $\rho(x,\ y) := ||x - y||$. Ekkor ρ egy norma által indukált metrika

2.3 p-normák

Legyen $(X, ||\cdot||)$ tetszőleges normált tér és $1 \leq p \leq +\infty$. Ekkor $||x||_p := \rho_p(x,\ 0)$, ami $X = \mathbb{K}^n$ esetén

$$||x||_p := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} & (1 \le p < \infty) \\ \max\{|x_i| \ \ i = 1..n\} & (p = \infty) \end{cases}$$

$X = C[a,b]$ esetén pedig

$$||f||_p := \begin{cases} \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} & (1 \le p < \infty) \\ \max\{|f(x)| \ \ x \in [a,b]\} & (p = \infty) \end{cases}$$

2.4 Ekvivalencia

Azt mondjuk, hogy $||\cdot||, ||\cdot||_*$ ekvivalensek ($||\cdot|| \sim ||\cdot||_*$) ha $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} : c_1 \cdot ||x|| \le ||x||_* \le c_2 \cdot ||x|| \ (x \in X)$. Ez azzal ekvivalens, hogy a $\rho(x,\ y) := ||x - y||$ és $\tilde{\rho}(x,\ y) := ||x - y||_*$ metrikák ekvivalensek.

3 Euklédeszi terek

3.1 Definíció

Legyen X vektortér $\mathbb{K}^n$ - n és $< \cdot > : X \times X \to \mathbb{K}$ függvény amire igaz hogy $\forall x, y, z \in X$ és $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ esetén

1. $< x, y > = < \overline{y, x} >$
2. $0 \le < x, x > \in \mathbb{R}$
3. $< x, x > = 0 \iff x = 0$
4. $< \lambda x, y > = \lambda < x, y >$
5. $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$

Ekkor $< x, y >$ skaláris szorzat és $(X, < \cdot >)$ pedig euklideszi tér.

3.2 Példa

$$< x,\ y >:= \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} & (x, y, \in \mathbb{K}^n) \\ \int_a^b xy & (x, y, \in C[a, b]) \end{cases}$$

3.3 Tételek

3.3.1 Skaláris szorzat által generált norma

$||x||_p = \sqrt{< x,\ x >}$ norma ha teljesül a paralelogramma szabály. Ekkor $p = 2$

3.3.2 Paralelogramma szabály

Tetszőleges $(X, < \cdot >)$ euklideszi térre legyen $||x|| := \sqrt{< x,\ x >}$. Ekkor

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) \quad (x, y \in X)$$

4 Metrikus terek topológiája

4.1 Környezet

Legyen $(X,\ \rho)$ metrikus tér esetén $a \in X$ és $r > 0$. Ekkor

$$K_r(a) := \{x \in X : \rho(x,\ a) < r\}$$

halmaz az a r-sugarú **környezete**.

4.2 Belső pont, nyílt halmaz és topológia

Legyen $\emptyset \neq A \subset X$ és $a \in A$. Ekkor az a pont **belső pont** ha $\exists\ K(a)$ környezet amire igaz, hogy $K(a) \subset A$. Az A halmaz belső pontjainak halmazát $int\ A$ - val fogunk jelölni. Speciálisan $int\ \emptyset = \emptyset$.

Az A halmaz **nyílt halmaz** ha $int\ A = A$

Legyen $\mathcal{T}_\rho(X) := \{A \in \mathcal{P}(X) : A\ nyílt\}$. Ekkor $\mathcal{T}$ a metrikus tér **topológiája**.

4.3 Tétel

T.f.h. $\Gamma(x) \neq \emptyset$ indexhalmaz úgy, hogy $\forall\gamma \in \Gamma : A_\gamma \in \mathcal{T}$ (tehát minden A_γ nyílt halmaz). Ekkor

a) $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \in \mathcal{T}$

b) Ha Γ véges akkor $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \in \mathcal{T}$

Bizonyítás

a) Legyen $a \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ tetszőleges. Ekkor $\exists v \in \Gamma$ index úgy, hogy $a \in A_v$. Mivel A_v halmaz nyílt, ezért léteznie kelle egy $K(a)$ környzetnek ami $K(a) \subset A_v$. És mivel $A_v \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ ezért $K(a) \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ ami azt jelenti hogy az a pont belső pont, tehát az $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ halmaz nyílt.

b) Most t.f.h. a Γ halmaz véges. Ekkor $a \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ mellett igaz az, hogy

$$\forall\gamma \in \Gamma : a \in A_\gamma$$

és mivel A_γ nyílt ezért $\exists\ r_\gamma > 0 : K_{r_\gamma} \subset A_\gamma$. Ekkor ha

$$r := \min\{r_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$$

akkor $K_r(a) \subset K_{r_\gamma}(a) \subset A_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma)$ tehát $K_r(a) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ ami azt jelenti, hogy a egy belső pont. És mivel minden a pontra igaz ez, ezért a $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ halmaz nyílt.

4.4 Zárt halmaz

$(X,\ \rho)$ metrikus tér esetén B halmaz **zárt halmaz** ha $X \setminus B \in \mathcal{T}_\rho$ (tehát B halmaz komplementere nyílt). Legyen $\mathcal{C}_\rho := \{B \in \mathcal{P}(X) : B\ z\acute{a}rt\}$. Ekkor triviális, hogy $\emptyset, X \in \mathcal{C}_\rho$, illetve, hogy $\forall a \in X : \{a\} \in \mathcal{C}_\rho$

4.5 Torlódási pont

$(X,\ \rho)$ metrikus tér és $A \subset X$ halmaz esetén az $\alpha \in X$ pont **torlódási pont** ha minden $K(\alpha)$ környezetre igaz, hogy $(K(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap A \neq \emptyset$ (tehát bármely $r > 0$ sugárhoz létezik egy $\alpha \neq x \in A$ pont ami a $K_r(\alpha)$ környezetben benne van).

Ekkor legyen

$$A' := \{\alpha \in X : \alpha \text{ torlódási pontja } A\text{-nak}\}$$

4.6 Tétel

$\alpha \in A' \iff \forall r > 0 : K_r(\alpha) \cap A \text{ végtelen halmaz}$

Bizonyítás

=> Indirekt módon t.f.h $\exists K(\alpha)$, hogy $K_r(\alpha) \cap A$ véges, és nem csak α van benne. Legyen $0 < r < \min\{\rho(x,\ \alpha)\ :\ \alpha \neq x \in K_r(\alpha) \cap A\}$. Ekkor világos, hogy $(K_r(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap A = \emptyset$ ami szembe megy az $\alpha \in A'$ állítással.

<= trivi.

4.7 Tétel

Legyen $(X,\ \rho)$ metrikus tér és $A \subset X$. Ekkor $A \in \mathcal{C}_\rho \iff A' \subset A$.

Bizonyítás

=> T.f.h A zárt és indirekt módon, hogy $\exists\ \alpha \in A' \setminus A$. Ez azt jelenti, hogy $\alpha \in X \setminus A$, és mivel A zárt halmaz ezért $X \setminus A$ nyílt. Ekkor α egy az $X \setminus A$ halmaz belső pontja tehát $\exists K(\alpha) : K(\alpha) \subset X \setminus A$. Ebből az következik, hogy $K(\alpha) \cap A = \emptyset$ ami ellentmond annak, hogy $\alpha \in A'$.

<= T.f.h $A' \subset A$ és indirekt módon, hogy A nem zárt. Ekkor $X \setminus A$ nem nyílt, tehát $\exists\ \alpha \in X \setminus A : \alpha \notin int(X \setminus A)$. Így $\forall\ K(\alpha) : K(\alpha) \not\subset X \setminus A$ ami azt jelenti, hogy $(K(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap A \neq \emptyset$ (α belső pontja A - nak). Az $A' \subset A$ feltétel miatt pedig $\alpha \in A$ ami ellentmond annak, hogy $\alpha \in X \setminus A$.

4.8 Topológikus tér

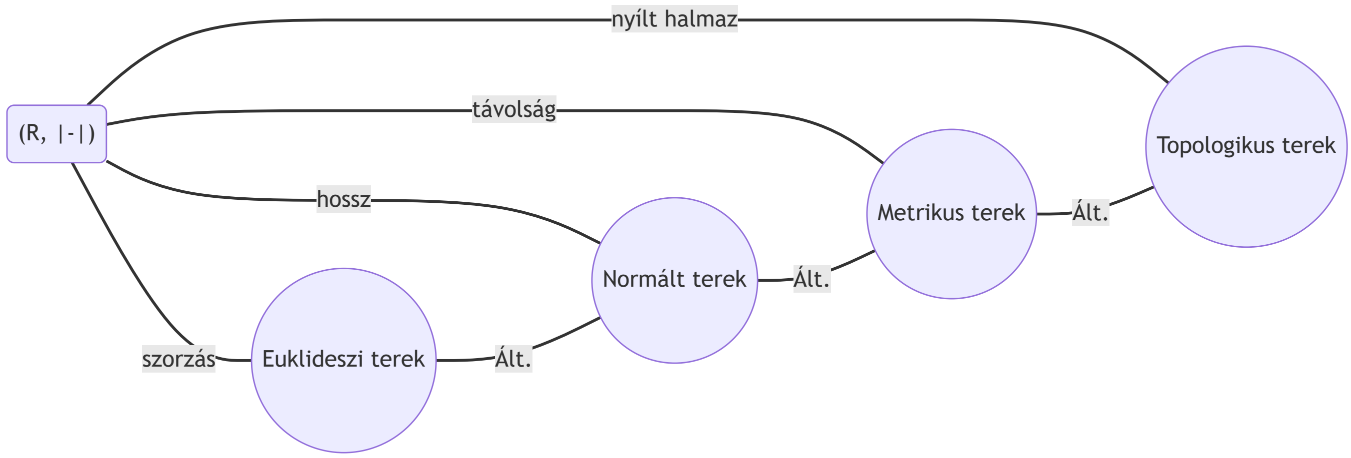
Legyen X tetszőleges halmaz és $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazra pedig legyen igaz, hogy:

a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

b) Bármely $\Gamma \neq \emptyset,\ \forall\ \gamma \in \Gamma : A_\gamma \in \mathcal{T}$ halmaz esetén $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \mathcal{T}$

c) Ha Γ véges akkor $\bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \mathcal{T}$

Ekkor $\mathcal{T}$ halmaz **topológia**, az $(X,\ \mathcal{T})$ pár pedig **topologikus tér.**


nyílt halmaz
távolság
(R, |-|)
hossz
Topologikus terek
Metrikus terek
Ált.
Normált terek
Ált.
szorzás
Euklideszi terek
Ált.