3. gyakorlat

Definíció: Sajátérték, sajátvektor

A $\lambda \in \mathbb{C}$ számot az A mátrix *sajátértékének*, a $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ vektort az A *sajátvektorának* nevezzük, ha $Av = \lambda v$.

Definíció: Karakterisztikus polinom

Az A mátrix karakterisztikus polinomja $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Definíció: Frobenius kísérő mátrix

Adott $p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n$ polinom esetén az

$$F_n := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -p_n \\ 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -p_2 \\ 0 & \dots & 1 & -p_1 \end{bmatrix}$$

mátrixot Frobenius kísérő mátrixnak nevezzük.

Definíció: Karakterisztikus polinom meghatározása LER megoldással (interpolációval)

Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ különböző pontok és számítsuk ki a következő determinánsokat:

$$p(x_i) = \det(x_i I - A) = x_i^n + p_1 x_i^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x_i + p_n, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Átrendezve a következő LER-t kapjuk:
$p_1 x_i^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x_i + p_n = p(x_i) - x_i^n, \quad (i = 1, \dots, n).$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(x_1) - x_1^n \\ p(x_2) - x_2^n \\ \vdots \\ p(x_n) - x_n^n \end{bmatrix}$$

A $p_1, \dots, p_n$ együtthatókat egy Vandermonde-mátrixú LER-ből kell meghatározni.

Tétel: Fagyejev-féle "trace"-módszer:

1. Kiszámítjuk az $s_k := \mathrm{tr}(A^k)$ értékeket $k = 1, \ldots, n$-re.
2. A Newton–Waring (Girard) – formula alapján (gyökök és együtthatók összefüggése)

$$s_k + p_1 s_{k-1} + \cdots + p_{k-1} s_1 + k \cdot p_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

alsóháromszög mátrixú LER-ből:

$$p_k = -\frac{1}{k}\left(s_k + p_1 s_{k-1} + \cdots + p_{k-1} s_1\right) \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

3. $p(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = \det(\lambda I - A)$.

1. feladat

Írjuk fel az $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix karakterisztikus polinomját LER-rel az $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ pontokban számolt determinánsból!

a) Számítsuk ki a karakterisztikus polinomot a determináns alapján!

b) Írjuk fel a karakterisztikus polinom Frobenius-mátrix alakját, és ellenőrizzük a helyességét!

2. feladat

a) Írjuk fel az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix karakterisztikus polinomját LER-rel az $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$ pontokban számolt determinánsból!

b) Írjuk fel a karakterisztikus polinom Frobenius-mátrix alakját és ellenőrizzük a helyességét!

3. feladat

Számítsuk ki az 1. feladat mátrixának karakterisztikus polinomját „trace-módszerrel”.

4. feladat

Számítsuk ki a 2. feladat mátrixának karakterisztikus polinomját „trace-módszerrel”.

5. feladat

Hogyan lehet szimmetrikus, illetve nem szimmetrikus teszt példákat készíteni a sajátérték feladatokhoz?

6. feladat

Készítsünk programot a „trace-módszerre”!

- Bemenő paraméter: A (mátrix)
- Kimenő paraméter: p (a karakterisztikus polinom)

Megjegyzés

A karakterisztikus polinomot

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

alakban keressük, ahol $p \in P_n$ egy legfeljebb n-ed fokú polinom. Mivel a p polinom helyettesítési értékét kiszámoljuk n különböző alappontban, így a polinom együtthatói egyértelműen előállnak.
Egy n-ed fokú polinomhoz $n+1$ adatra lenne szükségünk, de a karakterisztikus polinom főegyütthatója 1.

Megjegyzés

Figyeljünk arra, hogy a karakterisztikus polinom ezen algoritmus esetén 1 főegyütthatós, ezért a

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

alakban dolgozunk vele.

1. megoldás

a) Végezzük el az interpolációt, azaz keressük meg a karakterisztikus polinom még ismeretlen együtthatóit.

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$$

alakban keressük a polinomot, ahol p_1 és p_2 az ismeretlen együtthatók.

A két alappont, amit behelyettesítünk a polinomba, pedig: $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$.

- $p(x_1) = p(0) = \det(0 \cdot I - A) = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-6) - (-3)\cdot 1 = 12+3 = 15$
- $p(x_2) = p(1) = \det(I - A) = \begin{vmatrix} 1-2 & -3 \\ 1 & 1-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-5) - (-3)\cdot 1 = 5 + 3 = 8$

Ebből felírható egy LER (a x_i^2 átkerült a jobb oldalra):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) - 0^2 \\ p(1) - 1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 8-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Megoldva:

$$p_2 = 15, \qquad p_1 = 7 - 15 = -8,$$

így

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3)(\lambda - 5).$$

Tehát $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$ a sajátértékek.

b) A Frobenius-mátrix alak a definíció alapján triviális:

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & -p_2 \\ 1 & -p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -15 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

A helyességét ellenőrizzük úgy, hogy kiszámoljuk a karakterisztikus polinomját:

$$\det(\lambda I - F_2) = \begin{vmatrix} \lambda & 15 \\ -1 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 8) + 15 = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = p(\lambda)$$

valóban.

2. megoldás

a) Itt a karakterisztikus polinomot a következőképpen keressük:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3$$

A három alappont, amit behelyettesítünk a polinomba: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 2$

- $p(x_1) = p(-1) = \det((-1)I - A) = \begin{vmatrix} -1-1 & 0 & 0 \\ 0-4 & -1-4 & 0-4 \\ 0 & 0 & -1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$ $-2 \cdot (-5) \cdot (-2) = -20$
- $p(x_2) = p(0) = \det(0I - A) = \begin{vmatrix} 0-1 & 0 & 0 \\ 0-4 & 0-4 & 0-4 \\ 0 & 0 & 0-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4$
- $p(x_3) = p(2) = \det(2I - A) = \begin{vmatrix} 2-1 & 0 & 0 \\ 0-4 & 2-4 & 0-4 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

Ebből felírható egy LER (a x_i^3 átkerült a jobb oldalra):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_2 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(-1) - (-1)^3 \\ p(0) - 0^3 \\ p(2) - 2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 - (-1) \\ -4 - 0 \\ -2 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -4 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Megoldva: $p_3 = -4$, $p_2 = 9$, $p_1 = -6$.

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$$

Tehát $\lambda_1 = 1$ (kétszeres multiplicitással) és $\lambda_2 = 4$ a sajátértékek.

b) A Frobenius-mátrix alak a definíció alapján triviális:

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -p_3 \\ 1 & 0 & -p_2 \\ 0 & 1 & -p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

A helyességét ellenőrizzük úgy, hogy kiszámoljuk a karakterisztikus polinomját:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - F_3) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -4 \\ -1 & \lambda & 9 \\ 0 & -1 & \lambda - 6 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 9 \\ -1 & \lambda - 6 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \cdot (\lambda(\lambda - 6) + 9) - 4(1) \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = p(\lambda) \end{aligned}$$

valóban.

3. megoldás

Használjuk a Fagyejev-féle "trace"-módszert a karakterisztikus polinom kiszámítására. Az A egy 2×2 mátrix, így a karakterisztikus polinom legfeljebb másodfokú lesz, azaz

$$p(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2.$$

alakban keressük a polinomot, ahol p_1 és p_2 az ismeretlen együtthatók.

Első lépés:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad s_1 = \operatorname{tr}(A) = 2 + 6 = 8$$

Második lépés:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 24 \\ -8 & 33 \end{bmatrix}$$

$$s_2 = \operatorname{tr}(A^2) = 1 + 33 = 34$$

Miután elértük az n-edik lépést, a Newton-Waring formulák alapján kiszámítjuk a karakterisztikus polinom együtthatóit.

- $k = 1$: $s_1 + p_1 = 0 \implies p_1 = -s_1 = -8$.
- $k = 2$: $s_2 + p_1 s_1 + 2p_2 = 0 \implies p_2 = -\frac{1}{2}(s_2 + p_1 s_1) = -\frac{1}{2}(34 + (-8) \cdot 8) = -\frac{1}{2}(34 - 64) = -\frac{1}{2}(-30) = 15$.

Így a karakterisztikus polinom:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 15.$$

Megjegyzés

Ügyeljünk rá, hogy az s_k értékekből csak annyit kell számolni, amennyi a mátrix mérete. A karakterisztikus polinom főegyütthatóját mindig automatikusan írjuk fel.

4. megoldás

Használjuk a Fagyejev-féle "trace"-módszert a 2. feladat mátrixának karakterisztikus polinomjának kiszámítására. Az A egy 3×3 mátrix, így a karakterisztikus polinom harmadfokú lesz, azaz

$$p(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3.$$

alakban keressük a polinomot, ahol p_1, p_2, p_3 az ismeretlen együtthatók.

Első lépés:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad s_1 = \mathrm{tr}(A) = 1 + 4 + 1 = 6$$

Második lépés:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 20 & 16 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$s_2 = \mathrm{tr}(A^2) = 1 + 16 + 1 = 18$$

Harmadik lépés:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 20 & 16 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 84 & 64 & 84 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = \mathrm{tr}(A^3) = 1 + 64 + 1 = 66$$

Miután elértük az n-edik lépést, a Newton-Waring formulák alapján kiszámítjuk a karakterisztikus polinom együtthatóit.

- $k = 1$: $s_1 + p_1 = 0 \implies p_1 = -s_1 = -6$.
- $k = 2$: $s_2 + p_1 s_1 + 2p_2 = 0 \implies p_2 = -\frac{1}{2}(s_2 + p_1 s_1) = -\frac{1}{2}(18 + (-6) \cdot 6) = -\frac{1}{2}(18 - 36) = 9$.
- $k = 3$: $s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1 + 3p_3 = 0 \implies p_3 = -\frac{1}{3}(s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1) = -\frac{1}{3}(66 + (-6) \cdot 18 + 9 \cdot 6) = -\frac{1}{3}(66 - 108 + 54) = -4$.

Így a karakterisztikus polinom:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4.$$

Ez megegyezik a 2. feladatban kapott eredménnyel.

5. megoldás

Könnyen lehet olyan mátrixot készíteni, amelynek ismerjük a sajátértékeit: Készítsünk egy diagonális mátrixot, amelynek a főátlójában a sajátértékek vannak.

Nem szimmetrikus mátrix készítése

Tudjuk, hogy egy hasonlósági transzformáció a sajátértéket helyben hagyja. Így akár egy véletlen mátrixal vett hasonlósági transzformációval egy véletlen mátrix előáll, amelynek sajátértékeit ismerjük.
Példa (Matlab):

```
n = 5;
S = (rand(n, n) - 0.5) * 10;
D = diag(1:n); % Ennek így a főátlójában vannak a sajátértékek.
A = S * D * inv(S); % Hasonlósági transzformációval kapunk egy olyan mátrixot, amel
eig(A); % A sajátértékeket adja meg vektorban.
```

Szimmetrikus mátrix készítése

Szimmetrikus mátrixot pedig ortogonálissal vett hasonlósági transzformációval kapunk.
Példa (Matlab):

```
n = 5;
S = (rand(n, n) - 0.5) * 10; % Véletlen mátrix, amely nem feltétlen szimmetrikus.
[Q, R] = qr(S); % QR felbontás, Q ortogonális mátrix, R felső háromszög.
D = diag(1:n);
A = Q * D * Q'; % Szimmetrikus mátrix.
eig(A); % A sajátértékeket adja meg vektorban.
```

6. megoldás

Órai feladat, szabadon megoldható.