Diszkrét matematika 1

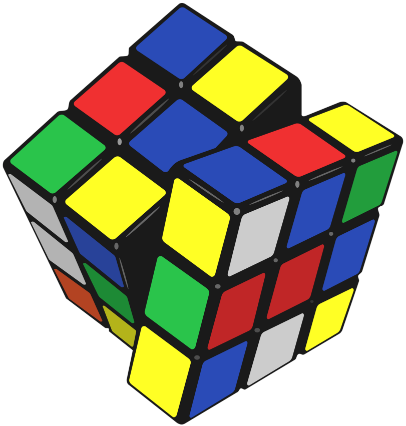
Kombinatorika

Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2025 tavasz

Kombinatorika



Összefoglaló

Ismélés nélküli permutáció: n különböző elem lehetséges sorrendjei: $n!$

Ismétléses permutáció: n elem lehetséges sorrendjei, ahol az i-edik típusból k_i darab van: $\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_m)!}{k_1!k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$, ahol $n=k_1+k_2+\cdots+k_m$.

Ismétlés nélküli variáció: n elemből k-t választunk (sorrend számít, egy elem legfeljebb egyszer): $\frac{n!}{(n-k)!}$

Ismétléses variáció: n elemből k-t választunk (sorrend számít, egy elem többször is választható): n^k

Ismétlés nélküli kombináció: n elemből k-t választunk (sorrend nem számít, egy elem legfeljebb egyszer): $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Ismétléses kombináció: n elemből k-t választunk (sorrend nem számít, egy elem többször is választható): $\binom{n+k-1}{k}$

Összefoglaló

Feladat: n elemből lehetséges sorrendje.

különböző elemek	vannak azonos típusú elemek
$n!$	$\dfrac{n!}{k_1!\cdots k_m!}$

Feladat: n elemből k darabot választunk.

	ismétléssel választunk	ismétlés nélkül választunk
sorrend számít	n^k	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$
sorrend nem számít	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Elemi valószínűség

Jelölés:

- Legyen A egy esemény. Ekkor $\mathrm{P}(A)$ az A esemény valószínűsége.
- Minden A eseményre $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$.

Elemi valószínűség:

- minden elemi esemény azonos valószínűségű
- Egy tetszőleges A esemény valószínűsége: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\text{jó esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$

Példa

- $A =$ hatos dobás $\Longrightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \dfrac{|\{6\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \dfrac{1}{6}$
- $A =$ páros dobás $\Longrightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \dfrac{|\{2,4,6\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \dfrac{3}{6}$
- $A =$ prímszám dobás $\Longrightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \dfrac{|\{2,3,5\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \dfrac{3}{6}$

Elemi valószínűség

Elemi valószínűség: Egy A esemény valószínűsége: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\text{jó esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$

Példa

- $A =$ lottón nyerő szelvény $\Longrightarrow$ $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{\binom{90}{5}} \approx \dfrac{1}{44.000.000}$
- $A =$ négytalálatos szelvény $\Longrightarrow$ $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\text{négytalálatos szelvények száma}}{\binom{90}{5}}$
    - négytalálatos szelvények száma $= ?$
    - kiválasztunk az 5 nyerő számból 4-et és választunk a 85 nem-nyerő számokból 1-et
    - ezek száma: $\binom{5}{4} \cdot 85 = 425$

Tehát

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \frac{425}{\binom{90}{5}}$$

Binomiális tétel

Emlékeztető:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $\ldots$

Tétel

Adott $n \geq 1$ egész esetén

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Pascal háromszög

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Általában:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}$$

Tétel

Adott n, i nemnegatív egészek esetén

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$$

Pascal háromszög

Tétel: Adott n, i nemnegatív egészek esetén

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$$

Bizonyítás.

- Hányféleképpen tudunk $n+1$ elemből $i+1$ elemet kiválasztani? $\Longrightarrow$ kétféleképpen számláljuk le
- 1. módszer: $n+1$ elemből közvetlenül kiválasztunk $i+1$-et: $\binom{n+1}{i+1}$
- 2. módszer: esetszétválasztással: kiválasztjuk-e az $n+1$-eik elemet?
  - vagy kiválasztjuk az $n+1$-edik elemet és a maradék n elemből i darabot,
  - vagy nem választjuk ki az $n+1$-edik elemet és a maradék n elemből $i+1$ darabot választunk
- összeadás-szabály szerint ez $\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1}$ $\square$

Binomiális együttható szimmetriája

Emlékeztető: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$ Itt a formula a-ra és b-re szimmetrikus:

Tétel

Minden n, k nemnegatív egészre $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Bizonyítás.

- **1. bizonyítás**: közvetlenül a formulából $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{n-k}$.
- **2. bizonyítás**:
  $\binom{n}{k} = n$-ből k-t választunk
  $= n$-ből $n-k$-t megjelölünk (és azokat nem választjuk) $= \binom{n}{n-k}$. □