2026.02.02.

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Informatikai Kar

Numerikus Analízis Tanszék

II. éves
Programtervező informatikus

Analízis 3A

Kovács Sándor gyakorlata

(Szerda, $8^{30} - 10^{00}$: DT-0.221, 4. csoport)

2026. tavasz

Tudnivalók

1. A félév gyakorlatainak tematikája:

„Korábbi zh-feladatok” megoldása

- **2022. tavasz**
  (a) **Az 1. zh feladatainak megoldása**.
  (b) **A 2. zh feladatainak megoldása**.

1. gyakorlat (2026. 02. 11.):
Az improprius integrál értelmezése, konvergeniája.

- **Az improprius integrál fogalma, típusai**
  (a) **első típus**
  (b) **második típus**
  (c) **harmadik típus**
- **Alkalmazások**
  (a) **Sorozatok határértékének kiszámítása**
  (b) **Numerikus sorok konvergenciájának vizsgálata**
  (c) **Bizonyos ponthalmazok ívhossza, területe, térfogata és felszíne**
  (d) **Fresnel-integrálok**
  (e) **A Wallis-formula**
  (f) **A Gauß-féle hibaintegrál**
  (g) **A gamma-függvény**
  (h) **A Stirling-formula**
  (i) **A Stefan-Boltzmann-törvény**
  (j) **Stabilitáselmélet**

2. gyakorlat (2026. 02. 18.):
A metrika és a norma fogalma, tulajdonságai, egymással való kapcsolatuk

- **Metrikus terek**
- **Normált terek**
- **Euklideszi terek**

3. gyakorlat (2026. 02. 25.): **Környezetek, konvergencia, teljesség**

- **Környezetek**
- **Konvergencia, teljesség**

4. gyakorlat (2026. 03. 04.): **Többváltozós függvények**

- **Többváltozós függvények grafikonja**
- **Többváltozós függvények határértéke**
- **Többváltozós függvények folytonossága**

5. gyakorlat (2026. 03. 11.): **Differenciálszámítás 1.**

- **A (totális) derivált fogalma**

- **Az iránymenti derivált fogalma**
- **A parciális derivált fogalma**
- **Magasabbrendű deriváltak**

6. gyakorlat (2026. 03. 18.): **Differenciálszámítás 2. (a deriválttípusok kapcsolata, Young tétele)**

7. gyakorlat (2026. 03. 25.): **Differenciálszámítás 3. (Taylor polinomok)**

8. gyakorlat (2026. 04. 08.): **Differenciálszámítás 4. (Többváltozós függvények lokális szélsőértéke)**

9. gyakorlat (2026. 04. 15.): **Differenciálszámítás 4. (Többváltozós függvények abszolút szélsőértéke)**

10. gyakorlat (2026. 04. 22.): **Paraméteres integrálok**

11. gyakorlat (2026. 04. 29.): **Többes integrálok 1. (Az integrál fogalma, szukszesszív integrálás, integrálás normáltartományon)**

12. gyakorlat (2026. 05. 06.): **Többes integrálok 2. (Integráltranszformáció)**

13. gyakorlat (2026. 05. 13.): **Többes integrálok 3. (Alkalmazások: Jordan-mérték, tömegközéppont, tehetetlenségi nyomaték)**

„14. gyakorlat” Zh-feladataok megoldása

- **Az 1. zh feladatai**
- **A 2. zh feladatai**

2. **Segédanyagok:**

- A görög ábécé és a fraktúra
- Elemi függvények deriváltja
- Alapintegrálok
- Elemi függvények
- Kidolgozott feladatok (improprius integrálok)
- Kidolgozott feladatok (többváltozós függvények folytonossága és határértéke I.)
- Kidolgozott feladatok (többváltozós függvények folytonossága és határértéke II.)
- Többszörös integrálok I.
- Többszörös integrálok II.
- Matematikai alapozás

3. **Ajánlott olvasmányok:**

- Simon Péter: Analízis 3A előadások kidolgozva
- Simon P.: Bevezetés az analízisbe 2. Budapest: ELTE Eötvös Kiadó, 2016.
- Simon P.: A funkcionálanalízis alapjai Budapest: ELTE Eötvös Kiadó, 2017.
- Szász P.: A differenciál- és integrálszámítás elemei 1. TypoTEX, Budapest, 2000.
- Szász P.: A differenciál- és integrálszámítás elemei 2. TypoTEX, Budapest, 2000.

4. **Érdekességek:**

   - Síkgörbék gyűjteménye
   - Térgörbék gyűjteménye
   - Felületek gyűjteménye
   - MacTutor History of Mathematics archive

Korábbi zh-feladatok megoldása

2022 tavasz

Az 1. zh feladatai

1. Konvergensek-e az

$$\text{a)}\ \int_1^{+\infty} x^2e^{1-x}\,dx, \qquad \text{b)}\ \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x^3+x^4}\,dx$$

integrálok? Ha igen, **számítsa ki** az értéküket!

Útm.

(a) Mivel az

$$f(x) := x^2e^{1-x} \qquad (x \in [1,+\infty))$$

függvény folytonos, ezért bármely $1 < c < +\infty$ esetén $f \in \mathfrak{R}[1,c]$. Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy bármely $x \in (1,+\infty)$, $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\int x^2e^{1-x}\,dx &= -x^2e^{1-x} + 2\int xe^{1-x}\,dx = -x^2e^{1-x} + 2\left(-xe^{1-x} + \int e^{1-x}\,dx\right) = \\ &= -x^2e^{1-x} - 2xe^{1-x} - 2e^{1-x} + c = -(x^2+2x+2)e^{1-x} + c.\end{aligned}$$

Ha tehát

$$F(x) := -(x^2+2x+2)e^{1-x} \qquad (x \in [1,+\infty)),$$

akkor

$$F'(x) = f(x) \qquad (x \in (1,+\infty)),$$

továbbá $\lim\limits_{x\to 1+0} F(x) = -5 \cdot e^0 = -5 = F(1)$ és (vö. Bernoulli-L'Hospital-szabály)

$$F(+\infty) = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+2}{e^{x-1}} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+2}{e^{x-1}} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0$$

következtében

$$\int_1^{+\infty} x^2e^{1-x}\,dx = \lim_{+\infty} F - F(1) = 0 - (-5) = 5.$$

(b) Mivel bármely $x \in (0,1]$ esetén

$$\frac{x+1}{x^2+x^3+x^4} \geq \frac{x}{3x^2} = \frac{1}{3x}$$

és

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty,$$

ezért az

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x}\,dx$$

integrál az

$$\int x^2 e^{1-x}\,dx$$

integrál divergens minoránsa.

2. **Indokolja meg**, hogy az

$$f_n(x) := \frac{1+nx^2}{1+3nx+n^2x^2} \qquad (x\in[0,1],\ n\in\mathbb{N})$$

függvénysorozat

(a) konvergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ térben,

(b) divergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ térben!

Útm. Világos, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x=0), \\ 0 & (x\in(0,1]. \end{cases}$$

Ha

$$f(x) := 0 \qquad (x\in[0,1]),$$

akkor

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} 1 & (x=0), \\ \dfrac{1+nx^2}{1+3nx+n^2x^2} & (x\in(0,1]). \end{cases}$$

Következésképpen az (f_n) függvénysorozat

(a) konvergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ térben, hiszen

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_1 &= \int_0^1 \frac{1+nx^2}{1+3nx+n^2x^2}\,dx = \frac{1}{3n}\cdot\int_0^1 \frac{3n+3n^2x^2}{1+3nx+n^2x^2}\,dx = \\ &= \frac{1}{3n}\cdot\left[1+3nx+n^2x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3n}\cdot\ln(1+3n+n^2), \end{aligned}$$

és a Bernoulli-L'Hospital-szabály felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+3n+n^2)}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+2n}{3(1+3n+n^2)} = 0,$$

így

$$\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

(b) divergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ térben, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} \frac{1+nx^2}{1+3nx+n^2x^2} \geq \max_{x\in[0,1]} \frac{1}{1+3nx+n^2x^2} = 1.$$

3. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy + x^2(1+\sin(y))}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x^2+y^2>0), \\ 0 & (x^2+y^2=0), \end{cases} \qquad g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x^2+y^2>0), \\ 0 & (x^2+y^2=0). \end{cases}$$

(a) A definíció alapján **igazolja**, hogy f folytonos a $(0,0)$ pontban!

(b) **Döntse el**, hogy van-e a g függvénynek határértéke a $(0,0)$ pontban!

Útm.

(a) Legyen $\varepsilon > 0$ és $\delta := \varepsilon/3$. Ekkor minden

$$(0,0) \neq (x,y) \in \mathcal{D}_f : \qquad \|(x,y)-(0,0)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

esetén a mértani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |f(x,y)-f(0,0)| &= \left| \frac{xy + x^2(1+\sin(y))}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|xy + x^2(1+\sin(y))|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|xy| + 2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \\ &\leq \frac{\frac{x^2+y^2}{2} + 2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{(x^2+y^2) + 2(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 3\sqrt{x^2+y^2} = \\ &= 3\|(x,y)-(0,0)\|_2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

(b) Legyen

$$\mathbf{a}_n := \left(\frac{1}{n}, 0\right), \quad \mathbf{b}_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\mathbf{a}_n \longrightarrow (0,0) \quad (n\to\infty), \qquad \mathbf{b}_n \longrightarrow (0,0) \quad (n\to\infty)$$

és

$$\lim_{n\to\infty} g(\mathbf{a}_n) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} g(\mathbf{b}_n),$$

ezért az átviteli elv értelmébenn nincsen határértéke g-nek $(0,0)$-ban.

4. A definíció alapján **lássa be**, hogy az

$$f(x,y) := (x^2+y^2, xy-x) \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

függvény deriválható az $a=(2,-1)$ pontban, és **adja meg** $f'(a)$ értékét! **Ellenőrizze** a kapott eredményt a Jacobi-mátrix kiszámításával!

Útm.

1. lépés. Mivel tetszőleges

$$h\in\mathbb{R}^2, \qquad \|h\|_\infty = \max\{|h_1|,|h_2|\}\neq 0$$

vektorra

$$\begin{aligned}
f(a+h)-f(a) &= f(2+h_1,-1+h_2)-f(2,-1) = \\
&= \begin{bmatrix} (2+h_1)^2+(-1+h_2)^2 \\ (2+h_1)(-1+h_2)-(2+h_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 4+4h_1+h_1^2+1-2h_2+h_2^2-5 \\ -2+2h_2-h_1+h_1h_2-2-h_1+4 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 4h_1-2h_2 \\ -2h_1+2h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^2+h_2^2 \\ h_1h_2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^2+h_2^2 \\ h_1h_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

és a

$$|h_1|,\ |h_2| \leq \|h\|_\infty$$

becslést felhasználva

$$0 \leq \lim_{\|h\|_\infty \to 0} \frac{\left\|(h_1^2+h_2^2, h_1h_2)\right\|_1}{\|h\|_\infty} = \lim_{\|h\|_\infty \to 0} \frac{\left|h_1^2+h_2^2\right| + |h_1h_2|}{\|h\|_\infty} \leq$$

$$\overset{\Delta\neq\text{-ség}}{\leq} \lim_{\|h\|_\infty \to 0} \frac{|h_1|^2+|h_2|^2+|h_1||h_2|}{\|h\|_\infty} \leq \lim_{\|h\|_\infty \to 0} \frac{3\|h\|_\infty^2}{\|h\|_\infty} = \lim_{\|h\|_\infty \to 0} 3\|h\|_\infty = 0,$$

ezért

$$f \in \mathfrak{D}[a] \qquad \text{és} \qquad f'(a) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. lépés. Mivel tetszőleges $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)),$$

ahol

$$f_1(x, y) := x^2 + y^2, \qquad f_2(x, y) := xy - x,$$

ezért

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f_1(x, y) \\ \operatorname{grad} f_1(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x, y) & \partial_2 f_1(x, y) \\ \partial_1 f_2(x, y) & \partial_2 f_2(x, y) \end{bmatrix} \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

így

$$f'(2, -1) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Legyen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2 > 0), \\ 0 & (x^2+y^2 = 0) \end{cases}$$

(a) **Számítsa ki** f parciális deriváltjait minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban!

(b) **Adja meg** f iránymenti deriváltját az $a := (1, 2)$ pontban az $(1, 1)$ vektorral párhuzamos irány mentén!

(c) **Írja fel** a $z = f(x, y)$ felület $(1, 2, 2/5)$ pontjához tartozó érintősík egyenletét!

Útm.

(a) Ha

- $(0,0) \neq a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, akkor

$$\partial_1 f(a) = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

és

$$\partial_2 f(a) = \frac{x(x^2+y^2) - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

- $a := (0,0)$, akkor

$$\partial_1 f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

és

$$\partial_2 f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

(b) Mivel

$$\|(1,1)\|_2 = \sqrt{2},$$

ezért az

$$\mathbf{e} := (e_1, e_2) := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

vektorral

$$\partial_{\mathbf{e}} f(a) = \langle (\partial_1 f(a), \partial_2 f(a)), \mathbf{e} \rangle = \partial_1 f(a) \cdot e_1 + \partial_2 f(a) \cdot e_2 = \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{25}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{25\sqrt{2}}.$$

(c) Ha $a := (a_1, a_2) := (1,2)$, akkor $f(a) = 2/5$, azaz az illető pont rajta van a $z = f(x,y)$ felületen. Így az érintősík egyenlete:

$$z = f(a) + \partial_1 f(a)(x - a_1) + \partial_2 f(a)(x - a_2) = \frac{2}{5} + \frac{6}{25}(x-1) - \frac{3}{25}(y-2).$$

A 2. zh feladatai

1. Legyen
$$f(x,y) := \frac{x-y}{x+y} \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\neq -y).$$
Írja fel az f függvény $\mathbf{a} := (1,1)$ ponthoz tartozó első Taylor-polinomját a hozzá tartozó Lagrange-féle maradéktaggal együtt!
Útm. Mivel $f(1,1)=0$ és
$$\partial_1 f(x,y) = \frac{2y}{(x+y)^2}, \qquad \partial_1 f(1,1) = \frac{1}{2},$$
$$\partial_2 f(x,y) = \frac{-2x}{(x+y)^2}, \qquad \partial_2 f(1,1) = -\frac{1}{2},$$
$$\partial_{12} f(x,y) = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} = \partial_{21} f(x,y), \qquad \partial_{12} f(1,1) = 0 = \partial_{21} f(1,1),$$
$$\partial_{11} f(x,y) = \frac{-4y}{(x+y)^3},$$
$$\partial_{22} f(x,y) = \frac{4x}{(x+y)^3},$$
ezért tetszőleges $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, ill. $\tau\in(0,1)$ esetén
$$T_{\mathbf{a},1}(x,y) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) = \frac{1}{2}(x-y),$$
ill. a
$$\xi := (1,1) + \tau(x-1, y-1) = (1+\tau x-\tau, 1+\tau y-\tau)$$
elemmel a Lagrange-féle maradéktag
$$\begin{aligned} R_2(x,y) &= \frac{1}{2!}\left\{\partial_{11} f(\xi)\cdot(x-1)^2 + 2\partial_{12} f(\xi)\cdot(x-1)(y-1) + \partial_{22} f(\xi)\cdot(y-1)^2\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{-4+4\tau(y-1)}{(2(1-\tau)+\tau(x+y))^3}\cdot(x-1)^2 + \frac{4\tau(x-y)}{(2(1-\tau)+\tau(x+y))^2}\cdot\right. \\ &\quad \left.\cdot(x-1)(y-1) + \frac{4+4\tau(x-1)}{(2(1-\tau)+\tau(x+y))^3}\cdot(y-1)^2\right\}. \end{aligned}$$

2. **Határozza meg** az

$$f(x,y) := x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény lokális, ill. abszolút szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit az

$$\Omega := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x, y \geq 0, \; x + y \leq 9\right\}$$

halmazon!

Útm.

1. lépés. Mivel

$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (2x-2, 2y-2) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

és

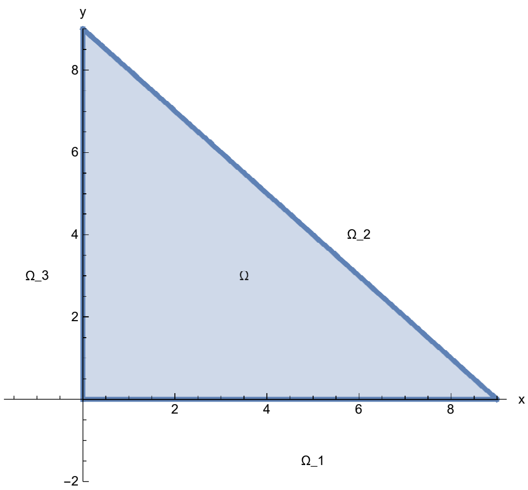
$$f'(x,y) = (0,0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y) = (1,1),$$

ill.

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

ezért $f''(1,1)$ pozitív definit. Következésképpen f-nek az $(1,1)$ pontban lokális minimuma van és $f(1,1) = -5$.

2. lépés. Az Ω halmaz nem más, mint a $(0,0)$, $(9,0)$ és a $0,9)$ csúcspontú zárt háromszöglap (vö. 1. ábra), így $(1,1) \in \Omega$. Az f függvény folytonos, ezért Weierstraß tétele szerint a függvénynek



1. ábra

van abszolút maximuma és abszolút minimuma az Ω halmazon. Világos, hogy

$$\partial\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3,$$

ahol

$$\Omega_1 := \left\{(x,0)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 9\right\},\qquad \Omega_2 := \left\{(x,9-x)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 9\right\},$$

ill.

$$\Omega_2 := \left\{(0,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y\le 9\right\}$$

és

$$f(x,y)=\begin{cases} f(x,0)=x^2-2x-3 & ((x,y)\in\Omega_1),\\ f(x,9-x)=2x^2-18x+60 & ((x,y)\in\Omega_2),\\ f(0,y)=y^2-2y-3 & ((x,y)\in\Omega_3).\end{cases}$$

Ezért

- az f függvény az Ω_1 halmazon az $(1,0)$ pontban veszi fel legkisebb, a $(9,0)$ pontban pedig a legnagyobb értékét, hiszen

  $$x^2-2x-3=(x-1)^2-4\qquad (x\in\mathbb{R}),$$

  így

  $$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(x,y)\in\mathbb{R}:\ (x,y)\in\Omega_1\}=\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(1,0),\ f(9,0)\}=\begin{matrix}-4,\\ 60.\end{matrix}$$

- az f függvény az Ω_2 halmazon a $\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right)$ pontban veszi fel legkisebb, a $(9,0)$ pontban pedig a legnagyobb értékét, hiszen

  $$2x^2-18x+60=2\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{39}{2}\qquad (x\in\mathbb{R}),$$

  így

  $$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(x,y)\in\mathbb{R}:\ (x,y)\in\Omega_2\}=\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\left\{f\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right),\ f(9,0)\right\}=\begin{matrix}39/2\\ 60.\end{matrix}$$

- az f függvény az Ω_3 halmazon a $(0,1)$ pontban veszi fel legkisebb, a $(0,9)$ pontban pedig a legnagyobb értékét, hiszen

  $$y^2-2y-3=(y-1)^2-4\qquad (x\in\mathbb{R}),$$

  így

  $$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(x,y)\in\mathbb{R}:\ (x,y)\in\Omega_1\}=\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(0,1),\ f(0,9)\}=\begin{matrix}-4,\\ 60.\end{matrix}$$

Tehát az f függvény abszolút szélsőértékei:

$$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(x,y)\in\mathbb{R}:\quad (x,y)\in\Omega\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{-5,-4,60,39/2\} = \begin{matrix}-5\\ 60,\end{matrix}$$

abszolút minimumot az $(1,1)$ pontban, abszolút maximumot pedig a $(0,9)$ és a $(9,0)$ pontban vesz fel.

3. **Számítsa ki** az

$$\int_0^2\int_{1+y^2}^5 ye^{(x-1)^2}\,dx\,dy$$

integrál értékét!

Útm.

1. módszer.

$$\int_0^2\int_{1+y^2}^5 ye^{(x-1)^2}\,dx\,dy = \int_0^2\left(\int_{1+y^2}^5 ye^{(x-1)^2}\,dx\right)dy =$$

$$= \int_0^2\left(\int_{1+y^2}^5 y\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n!}\,dx\right)dy = \int_0^2 y\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_{x=1+y^2}^{x=5}dy =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\left\{4^{2n+2}\left[\frac{y^2}{4}\right]_0^2-\left[\frac{y^{4n+4}}{4n+4}\right]_0^2\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\left\{4^{2n+1}\cdot 2-\frac{2^{4n+4}}{4n+4}\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\left\{2^{4n+3}-\frac{2^{4n+2}}{n+1}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{2n-1}\cdot\left\{2^{4n-1}-\frac{2^{4n-2}}{n}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{2n-1}\cdot\left\{2^{4n+1}-\frac{2^{4n}}{n}\right\} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{4n}}{n!}\cdot\frac{n}{2n-1}\cdot\left\{2-\frac{1}{n}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16^n}{n!}\cdot\frac{n}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{n} = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16^n}{n!} = \frac{e^{16}-1}{4}.$$

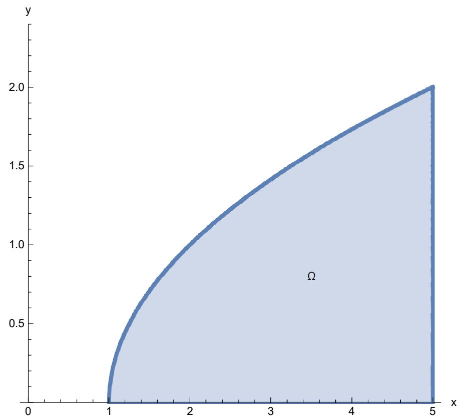
2. módszer. Világos, hogy

$$\int_0^2\int_{1+y^2}^5 ye^{(x-1)^2}\,dx\,dy = \int_\Omega f,$$

ahol

$$\Omega := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\in[0,2],\ 1+y^2\le x\le 5\right\},\qquad f(x,y) := ye^{(x-1)^2}\quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$

hiszen Ω az y-tengelyre nézve normáltartomány (vö. 2. ábra) és f folytonos. Mivel Ω az x-



2. ábra

tengelyre nézve is normáltartomány:

$$\Omega = N_x = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [1, 5], \ 0 \leq y \leq \sqrt{x-1}\right\}$$

és f folytonos, ezért

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 y e^{(x-1)^2} \, dx \, dy &= \int_\Omega f = \int_1^5 \left(\int_0^{\sqrt{x-1}} y e^{(x-1)^2} \, dy \right) dx = \\
&= \int_1^5 \left[\frac{y^2}{2} e^{(x-1)^2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x-1}} dx = \int_1^5 \frac{x-1}{2} e^{(x-1)^2} \, dx = \\
&= \frac{1}{4} \cdot \int_1^5 2(x-1) e^{(x-1)^2} \, dx = \frac{1}{4} \left[e^{(x-1)^2} \right]_1^5 = \frac{e^{16}-1}{4}.
\end{aligned}$$

4. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $b > 0$, $a > b\sqrt{2}$. **Írja le** az

$$x + y + z = a, \qquad x^2 + y^2 = b^2, \qquad z = 0$$

egyenletekkel határolt korlátos és zárt térbeli Ω tartományt, majd **számítsa ki** Ω Jordan-mértékét (térfogatát)!

Útm. A kérdéses Ω tartomány a $x + y + z = a$ egyenletű sík alatti és az xy-síkban ($z = 0$) lévő

$$H := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq b^2\right\}$$

körlap feletti hengerszerű test, hiszen a sík a koordinátatengelyeket az $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ és $(0, 0, a)$

pontokban metszi, így $a > b\sqrt{2}$ következtében a sík a $z = 0$ sík felett vág bele a hengerbe. Így a kérdéses ponthalmaz Jordan-mértékét (térfogatát) többféleképpen is kiszámíthatjuk.

1. módszer. A tartomány hengerszerű, így térfogatára

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_H (a - x - y)\, d(x, y) = \\ &= \int_0^b \int_0^{2\pi} (a - r\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)) \cdot r \, d\varphi \, dr = \\ &= \int_0^b \left[ar\varphi - r^2\sin(\varphi) + r^2\cos(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr = \int_0^b \{2a\pi r\}\, dr = \\ &= 2a\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^b = ab^2\pi. \end{aligned}$$

2. módszer. A tartomány hengerszerű, így

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi), \qquad z = m$$

$$(r \in [0, b], \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \qquad m \in [0, a - r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi))])$$

hengerkoordináták bevezetésével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_\Omega 1\, d(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^b \int_0^{a - r(\cos(\varphi)+\sin(\varphi))} r \, dm \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^b [a - r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi))]\, r \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[a\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}(\cos(\varphi) + \sin(\varphi))\right]_{r=0}^{r=b} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{\frac{ab^2}{2} - \frac{b^3}{3}(\cos(\varphi) + \sin(\varphi))\right\} d\varphi = \\ &= ab^2\pi - 0 - 0 = ab^2\pi. \end{aligned}$$

3. módszer. Mivel

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \in [-b, b], \ -\sqrt{b^2 - x^2} \le y \le \sqrt{b^2 - x^2}, \ 0 \le z \le a - x - y\right\},$$

ezért

$$V(\Omega) = \int_\Omega 1 \, d(x,y,z) =$$

$$= \int_{-b}^{b} \int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} \int_0^{a-x-y} 1 \, dz \, dy \, dx = \int_{-b}^{b} \int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} [z]_{z=0}^{z=a-x-y} \, dy \, dx =$$

$$= \int_{-b}^{b} \int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} (a-x-y) \, dy \, dx = \int_{-b}^{b} \left[ay - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=-\sqrt{b^2-x^2}}^{y=\sqrt{b^2-x^2}} dx =$$

$$= \int_{-b}^{b} \left\{ 2a\sqrt{b^2-x^2} - 2x\sqrt{b^2-x^2} - 0 \right\} dx =$$

$$= 2a \cdot \int_{-b}^{b} \sqrt{b^2-x^2} \, dx + \int_{-b}^{b} (-2x)\sqrt{b^2-x^2} \, dx =$$

$$= 2a \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{b^2 - b^2 \sin^2(t)} \cdot b \cdot \cos(t) \, dt + \left[\sqrt{(b^2-x^2)^3} \right]_{-b}^{b} =$$

$$= 2ab^2 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) \, dt + 0 = 2ab^2 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} \, dt = ab^2\pi.$$

1. gyakorlat (2026. 02. 11.)

Szükséges ismeretek.

- Primitív függvények meghatározásának a módszerei: alapintegrálok. Az első helyettesítési szabály, speciális esetek. A parciális integrálás szabálya. A második helyettesítési szabály. Racionális törtfüggvények integrálása.
- Határozott integrál és alkalmazásai. A Newton-Leibniz-tétel. Síkidom területe. Síkbeli görbe ívhossza. Forgástest térfogata.
- Az improprius integrál értelmezése, ha integrandus értelmezési tartománya nem korlátos intervallum, ha az integrandus nem korlátos, de az értelmezési tartománya korlátos intervallum. Összehasonlító kritériumok. Végtelen sorokra vonatkozó integrálkritérium.

Az improprius integrál fogalma, típusai

Első típus

Emlékeztető. Legyen

$$-\infty < a < b \leq +\infty \qquad \text{és} \qquad f : [a, b) \to \mathbb{R},$$

majd tegyük fel, hogy minden $c \in (a, b)$ esetén $f \in \mathfrak{R}[a, c]$. Legyen továbbá

$$F : [a, b) \to \mathbb{R}, \qquad F(\omega) := \int_a^\omega f(x)\, dx.$$

- Ha a
$$\lim_{\omega \to b} F(\omega) =: I \tag{1}$$
(baloldali) határérték létezik és véges ($I \in \mathbb{R}$), akkor azt mondtuk, hogy az f **függvény improprius integrálja konvergens és értéke** I (jelben $\int_a^b f = I$). Egyéb esetekben (amikor $I \notin \mathbb{R}$) azt mondtuk, hogy az $\int_a^b f$ **improprius integrál divergens**.
- Azt mondtuk, hogy az $\int_a^b f$ **improprius integrál létezik** (vagy f **impropriusan integrálható**), ha $\int_a^b f$ konvergens vagy az (1)-beli I határértékre $I \in \{-\infty, +\infty\}$ teljesül.

Megjegyezzük, hogy

1. a fenti definíció egyszerre tartalmazza a az alábbi két esetet:

   - $b = +\infty$, azaz, amikor az integrandus értelmezési tartománya nem-korlátos intervallum;
   - $b \in \mathbb{R}$, azaz amikor maga az integrandus a b pont valamely baloldali környezetében esetleg nem korlátos.

2. az inproprius integrál fogalma a Riemann-integrál fogalmának egyfajta kiterjesztése a következő értelemben: ha $f \in \mathfrak{R}[a, b]$, akkor az

$$\int_a^b f$$

   szimbólum jelenti

   (a) egyrészt az f függvény $[a, b]$-n vett Riemann-integrálját,

   (b) másrészt az f-nek az $[a, b)$-n vett improprius integrálját, azaz, ha $f \in \mathfrak{R}[a, b]$, akkor a

$$g(x) := f(x) \qquad (x \in [a, b))$$

   függvény improprius integrálja konvergens és

$$\int_a^b g = \lim_{\omega \to b} \int_a^\omega g = \lim_{\omega \to b} \int_a^\omega f = \int_a^b f.$$

3. a mérnöki gyakorlatból ismeretes, hogy (a légköri súrlódástól eltekintve és állandó üzemanyagfogyasztást feltételezve)

$$W(h) := \int_R^h \gamma \frac{mM}{x^2}\, dx = \gamma m M \int_R^h \frac{1}{x^2}\, dx = \gamma m M \left[-\frac{1}{x}\right]_R^h = \gamma m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{h}\right) \qquad (h > 0)$$

   munka szükséges ahhoz, hogy valamely m tömegű rakétát az R sugarú, M tömegű Földről h magasságba emeljünk, ahol $\gamma > 0$ jelöli a gravitációs állandót. A Föld gravitációs terének elhagyásához pedig

$$W(+\infty) := \lim_{h \to +\infty} W(h) = \gamma \frac{mM}{R}$$

   munkavégzés szükséges.

Példa. Az

$$\int_0^{+\infty} \cos(x)\,dx$$

impropríus integrál divergens, sőt a cos nem integrálható impropriusan a $[0,+\infty)$ intervallumon, hiszen

$$\int_0^{\omega} \cos(x)\,dx = \sin(\omega) \quad (0 \le \omega \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \nexists \lim_{\omega\to+\infty} \sin(\omega).$$

Példa. Ha $p \in \mathbb{R}$, akkor az

$$\int_1^{+\infty} x^p\,dx$$

impropríus integrál pontosan akkor konvergens, ha $p < -1$, ui.

$$F(\omega) = \int_1^{\omega} x^p\,dx = \begin{cases} \dfrac{\omega^{p+1}-1}{p+1} & (p \ne -1), \\ \ln(\omega) - \ln(1) & (p = -1) \end{cases} \qquad (\omega \in [1,+\infty)),$$

és így

1. $p < -1$ esetén
$$\int_1^{+\infty} x^p\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} F(\omega) = \frac{-1}{p+1};$$
2. $p \ge -1$ esetén
$$\int_1^{+\infty} x^p\,dx$$
(nyilvánvalóan) divergens, hiszen ekkor $\lim\limits_{\omega\to+\infty} F(\omega) = +\infty$.

Példa.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \lim_{\omega\to 2} \int_0^{\omega} \frac{1}{2\sqrt{1-(x/2)^2}}\,dx = \lim_{\omega\to 2} \left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\omega} = \\ &= \lim_{\omega\to 2} \left(\arcsin\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arcsin(0)\right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Példa.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}(x)\,dx &= \lim_{\omega\to\pi/2} -\int_0^{\omega} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\lim_{\omega\to\pi/2} [\ln(\cos(x))]_0^{\omega} = \\ &= -\lim_{\omega\to\pi/2} (\ln(\cos(\omega)) - \ln(\cos(0))) = -(-\infty - 0) = +\infty. \end{aligned}$$

Példa. Ha $p, a, b \in \mathbb{R}$: $p > 0$, $a < b$, akkor az

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$$

improprius integrál pontosan akkor konvergens, ha $p \in (0, 1)$, ui.

$$F(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{1}{(b-x)^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}\left\{(b-\omega)^{1-p} - (b-a)^{1-p}\right\} & (p \neq 1), \\ \\ \ln(b-a) - \ln(b-\omega) & (p = 1) \end{cases} \qquad (\omega \in [a, +\infty)),$$

és így

1. $0 < p < 1$ esetén
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{(b-x)^p}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} F(\omega) = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p};$$
2. $p \geq 1$ esetén
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{(b-x)^p}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} F(\omega) = +\infty.$$

Példa. Ha $p \in \mathbb{R}$, akkor az

$$\int_0^{+\infty} e^{px}\,dx$$

improprius integrál pontosan akkor konvergens, ha $p < 0$, ui.

$$F(\omega) = \int_0^{\omega} e^{px}\,dx = \begin{cases} \dfrac{e^{p\omega}-1}{p} & (p \neq 0), \\ \\ \omega & (p = 0) \end{cases} \qquad (\omega \in [0, +\infty)),$$

és így

1. $p < 0$ esetén $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{px}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} F(\omega) = -\frac{1}{p}$,
2. $p \geq 0$ esetén $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{px}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} F(\omega) = +\infty$.

Tétel (monotonitási kritérium). Legyen $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ olyan függvény, amelyre tetszőleges $c \in (a, +\infty)$ esetén $f \in \mathfrak{R}[a, c]$. Ekkor igaz az

$$\int_a^{+\infty} f \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, 0 < K \in \mathbb{R} : \quad \int_a^{\omega} f \leq K \; (a \leq \omega \in \mathbb{R})$$

ekvivalencia.

Biz. Mivel $f \geq 0$, ezért az

$$\int_a^{\omega} f(x)\,dx \qquad (a < \omega \in \mathbb{R})$$

integrálfüggvény monoton növekedő. ■

Példa. Megmutatjuk, hogy az

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+3x)^4}\,dx$$

improprius integrál konvergens. Ha ui. $1 \leq \omega \in \mathbb{R}$, akkor

$$\int_1^{\omega} \frac{1}{(1+3x)^4}\,dx \overset{t:=1+3x}{=} \int_4^{1+3\omega} \frac{1}{t^4} \cdot \frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3} \cdot \left[-\frac{1}{3t^3}\right]_4^{1+3\omega} = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{4^3} - \frac{1}{(1+3\omega)^3}\right) \leq \frac{1}{9 \cdot 4^3}.$$

Következéképpen a szóban forgó improprius integrál konvergens, és

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+3x)^4}\,dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{(1+3x)^4}\,dx = \frac{1}{9 \cdot 4^3}. \quad ■$$

Példa. Megmutatjuk, hogy az

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{3+x^2}\,dx$$

improprius integrál konvergens. Ha ui. $1 \leq \omega \in \mathbb{R}$, akkor

$$\int_1^{\omega} \frac{1}{3+x^2}\,dx = \frac{1}{3} \cdot \int_1^{\omega} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^{\omega} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \leq \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{3}}.$$

Következéképpen a szóban forgó improprius integrál konvergens, és

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{3+x^2}\,dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{3+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \quad ■$$

Az improprius integrál definíciója alapján nyilvánvaló az alábbi

Tétel. Legyen $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, majd tegyük fel, hogy bármely $c \in (a, b)$ esetén $f, g \in \mathfrak{R}[a, c]$. Ha $\int_a^b f \in \mathbb{R}$ és $\int_a^b g \in \mathbb{R}$, akkor bármely $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbb{R} \ni \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Tétel (összehasonlító-kritérium). Legyen $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ olyan függvények, amelyekre tetszőleges $c \in (a, b)$, ill. $x \in [a, b)$ esetén

$$f, g \in \mathfrak{R}[a, c], \qquad \text{ill.} \qquad 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

teljesül. Ekkor igazak az alábbi állítások.

1. Ha $\int_a^b g$ konvergens, akkor $\int_a^b f$ is konvergens és $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ (**majoránskritérium**).
2. Ha $\int_a^b f$ divergens, akkor $\int_a^b g$ is divergens (**minoránskritérium**).

Példa. Megmutatjuk, hogy az

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 5}\, dx$$

improprius integrál divergens. Valóban, bármely $x \in [1, +\infty)$ esetén

$$\frac{1}{2x + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 5} \geq \frac{1}{2x + \sqrt[3]{x^3 + x^3} + 5x} = \frac{1}{(2 + \sqrt[3]{2} + 5)x},$$

továbbá a korábbiak értelmében (vö. **Példa.**)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2 + \sqrt[3]{2} + 5)x}\, dx = \frac{1}{(2 + \sqrt[3]{2} + 5)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty.$$

Példa. Látható, hogy bármely $x \in [1, +\infty)$ esetén

$$0 \leq \frac{1}{5 + 4x + x^2} \leq \frac{1}{x^2},$$

ezért

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{\omega \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\omega} = \lim_{\omega \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) = 1$$

(vö. **Példa.**) következtében

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{5+4x+x^2}\,dx \in \mathbb{R}.$$

Megjegyezzük, hogy

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{5+4x+x^2}\,dx &= \lim_{\omega\to+\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{5+4x+x^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{1+(x+2)^2}\,dx = \\
&= \lim_{\omega\to+\infty} [\operatorname{arctg}(x+2)]_1^{\omega} = \lim_{\omega\to+\infty} \{\operatorname{arctg}(\omega+2) - \operatorname{arctg}(3)\} = \\
&= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(3).
\end{aligned}$$

Feladat. Legyen $2 \leq k \in \mathbb{N}$. Mely $p \in [1, +\infty)$ esetén konvergens az

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{1}{1+\sqrt[k]{x}} \right|^p dx$$

improprius integrál?

Útm. Lévén, hogy

$$[1, +\infty) = [1, k] \cup (k, +\infty),$$

két eset van:

1. ha $p \in [1, k]$, akkor a binomiális tételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\left(1+\sqrt[k]{x}\right)^p \leq \left(1+\sqrt[k]{x}\right)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \sqrt[k]{x^l} \leq \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \sqrt[k]{x^k} = 2^k x \qquad (x \in [1, +\infty))$$

$$\Big/ x \geq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(1+\sqrt[k]{x}\right)^k \leq \left(\sqrt[k]{x}+\sqrt[k]{x}\right)^k = 2^k x. \Big/$$

ezért

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega\to+\infty} \left(\int_1^{\omega} \frac{1}{\left(1+\sqrt[k]{x}\right)^p}\,dx \right) &\geq \lim_{\omega\to+\infty} \left(\int_1^{\omega} \frac{1}{\left(1+\sqrt[k]{x}\right)^k}\,dx \right) \geq \\
&\geq \lim_{\omega\to+\infty} \left(\int_1^{\omega} \frac{1}{2^k x}\,dx \right) = \frac{1}{2^k} \cdot \lim_{\omega\to+\infty} (\ln(\omega)) = +\infty,
\end{aligned}$$

azaz a szóban forgó improprius integrál divergens.

2. ha $p \in (k, +\infty)$, akkor $\left(1+\sqrt[k]{x}\right)^p \geq \sqrt[k]{x^p}$, így

$$\lim_{\omega\to+\infty}\left(\int_1^\omega \frac{1}{\left(1+\sqrt[k]{x}\right)^p}\,dx\right) \leq \lim_{\omega\to+\infty}\left(\int_1^\omega \frac{1}{\sqrt[k]{x^p}}\,dx\right) = \frac{k}{k-p}\lim_{\omega\to+\infty}\left(\left[x^{1-p/k}\right]_1^\omega\right) =$$

$$= \frac{k}{p-k}\cdot\lim_{\omega\to+\infty}\left(1-\omega^{1-p/k}\right) = \frac{k}{p-k} < +\infty,$$

azaz a szóban forgó improprius integrál konvergens. ■

Emlékeztető. Legyen $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre tetszőleges $c \in (a, b)$ $f \in \mathfrak{R}[a, c]$. Azt mondtuk, hogy az $\int_a^b f$ improprius integrál **abszolút konvergens**, ha az $\int_a^b |f|$ improprius integrál konvergens.

Tétel. Legyen $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre tetszőleges $c \in (a, b)$ $f \in \mathfrak{R}[a, c]$. Ha az $\int_a^b f$ improprius integrál abszolút konvergens, akkor konvergens is, és

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Példa. Megmutatjuk, hogy az

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx$$

improprius integrál abszolút konvergens. Mivel

$$\left|\frac{\cos(x)}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \qquad (1 \leq x \in \mathbb{R}),$$

és tetszőleges $1 < \omega \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_1^\omega \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\omega = 1 - \frac{1}{\omega} \longrightarrow 1 \quad (\omega \to +\infty)$$

(vö. **Példa.**), ezért a szóban forgó integrál asbzolút konvergens és

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx\right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Tétel. Legyen $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, majd tegyük fel, hogy bármely $c \in (a, b)$ esetén $f \in \mathfrak{R}[a, c]$. Ekkor igaz az

$$\int_a^b f \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, d \in [a, b) : \int_d^b f \in \mathbb{R}$$

ekvivalencia, és konvergencia esetén fennáll az

$$\int_a^b f = \int_a^d f + \int_d^b f$$

egyenlőség.

Biz. Tetszőleges $x \in (d, b)$ esetén

$$\int_a^x f = \int_a^d f + \int_d^x f$$

és ebből az $x \to b$ határátmenettel következik a tételbeli állítás. ■

Feladat. Igazoljuk, hogy az

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

improprius integrál (abszolút) konvergens.

Útm. Mivel az

$$[0, +\infty) \ni x \mapsto e^{-x^2}$$

függvény folytonos, ezért (vö. fenti **Tétel**) elég belátni, hogy az

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \tag{2}$$

improprius integrál konvergens. Ezután persze az is elmondható, hogy

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

A (2)-beli impriprius integrál konvergenciáját a majoránskritérium alkalmazásával látjuk be. Világos, hogy tetszőleges $x \in [1, +\infty)$ esetén

$$e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x},$$

és

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\int_1^{\omega} e^{-x^2}\,dx \leq \lim_{\omega\to+\infty}\int_1^{\omega} e^{-x}\,dx \lim_{\omega\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^{\omega} = -\lim_{\omega\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{\omega}}-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}. \quad \blacksquare$$

Az alábbi feladatbann a

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

Dirichlet-integrál konvergenciáját vizsgáljuk.

Feladat. Igazoljuk, hogy a Dirichlet-integrál konvergens, de nem abszolút konvergens!

Útm.

1. lépés. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx \in \mathbb{R}$, ui.

- az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \left(0 < x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

függvény Riemann-integrálható, hiszen folytonos.

- ha

$$F(\omega) := \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}\frac{\sin(x)}{x}\,dx \qquad \left(\omega \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)\right),$$

akkor

$$F(\omega) = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}\frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$$

és

$$\exists \lim_{+\infty} F \in \mathbb{R},$$

hiszen

$$\lim_{\omega\to+\infty}\left(\frac{\cos(\omega)}{\omega}\right) = 0 \qquad \text{és} \qquad \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \qquad \left(x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)\right),$$

továbbá (vö. **Példa.**)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} = \lim_{\omega\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\omega}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

Megjegyzés. Hasonlóan igazolható, hogy

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{2x}\,dx$$

konvergens. Ha ui.

$$F(\omega) := \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx \qquad \left(\omega \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)\right),$$

akkor

$$F(\omega) = \left[\frac{\sin(2x)}{4x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} \frac{\sin(2x)}{4x^2}\,dx$$

és

$$\exists \lim_{+\infty} F \in \mathbb{R},$$

hiszen

$$\lim_{\omega\to+\infty} \left(\frac{\sin(2\omega)}{4\omega}\right) = 0 \qquad \text{és} \qquad \left|\frac{\sin(2x)}{4x^2}\right| \leq \frac{1}{4x^2} \qquad \left(x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)\right).$$

2. lépés. Mivel az

$$[1, +\infty) \ni x \mapsto \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$$

függvény folytonos, ezért egy korábbi **Tétel** értelmében elég belátni, hogy az

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx$$

improprius integrál divergens. Mivel minden $x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ esetén

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \geq \frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{1-\cos(2x)}{2x},$$

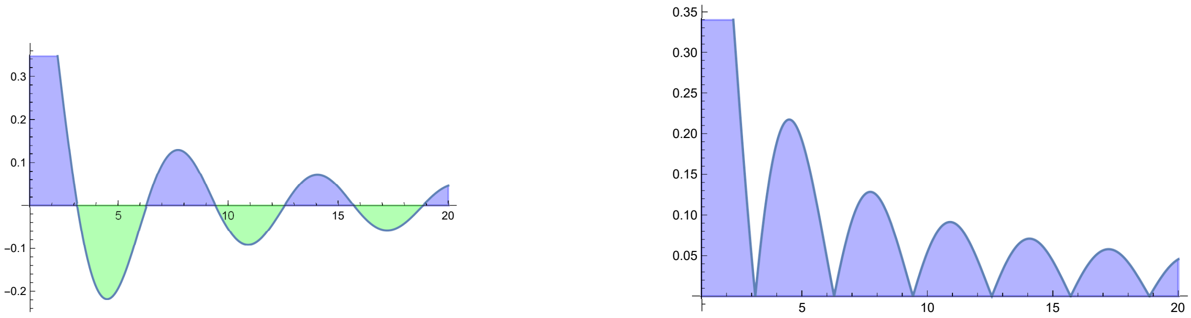
továbbá minden $\omega \in \left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ számra

$$G(\omega) := \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} \frac{1-\cos(2x)}{2x}\,dx = \frac{\ln(\omega)}{2} - \frac{\ln(\pi/2)}{2} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx,$$

és

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx$$

konvergens, így $\lim_{\omega\to+\infty} G(\omega) = +\infty$. ■



3. ábra. Az $[1,2]\ni x\mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ és az $[1,2]\ni x\mapsto \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$ grafikonja.

Szorgalmi feladat. Igazoljuk, hogy az

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

improprius integrál konvergens, de nem abszolút konvergens!

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} & (n-1\leq x<n,\ n\in\mathbb{N}), \\[2ex] 0 & (x<0) \end{cases} \qquad (a:=0\leq x\in\mathbb{R}).$$

Útm.

- Tetszőleges $\omega\geq 0$ esetén

$$\int_0^\omega f \;=\; \sum_{n=1}^{[\omega]}\int_{n-1}^{n} f+\int_{[\omega]}^{\omega} f=\sum_{n=1}^{[\omega]}\int_{n-1}^{n}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,dx+\int_{[\omega]}^{\omega}\frac{(-1)^{[\omega]}}{[\omega]+1}\,dx=$$

$$=\;\sum_{n=1}^{[\omega]}\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^{[\omega]}}{[\omega]+1}\,(\omega-[\omega])\,.$$

A Leibniz-kritérium, ill. $0\leq\omega-[\omega]\leq 1$ miatt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\in\mathbb{R}, \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{\omega\to+\infty}\frac{(-1)^{[\omega]}}{[\omega]+1}\,(\omega-[\omega])=0,$$

így

$$\int_0^{+\infty} f\in\mathbb{R}.$$

- Ha
$$f_n(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{k} & (k-1 \leq x < k,\ k \in \{1,\ldots,n\}), \\[2ex] 0 & (x \in (-\infty,0) \cup [n,+\infty)) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \leq |f|$. Így
$$\int_0^{+\infty} f_n \, dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot (k-(k-1)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \longrightarrow +\infty \quad (n \to \infty)$$
következtében
$$\int_0^{+\infty} |f| \notin \mathbb{R}, \qquad \text{azaz az} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |f|$$
improprius integrál divergens. ■

Bizonyos improprius integrálok kiszámítását könnyíti meg az alábbi

Tétel (Newton-Leibniz-kritérium). Legyen $-\infty < a < b \leq +\infty$, továbbá $f, F : [a,b) \to \mathbb{R}$, majd tegyük fel, hogy

(i) minden $c \in (a,b)$ esetén $f \in \mathfrak{R}[a,c]$;

(ii) tetszőleges $x \in (a,b)$ esetén $F \in \mathfrak{D}[x]$ és $F'(x) = f(x)$;

(iii) $F \in \mathfrak{C}[a]$.

Az $\displaystyle\int_a^b f$ improprius integrál pontosan akkor konvergens, ha F-nek van b-ben véges határértéke, és ekkor
$$\int_a^b f = \lim_b F - F(a) =: [F(x)]_a^b.$$

Biz. Tetszőleges $x \in (a,b)$ esetén teljesülnek a Newton-Leibniz-tétel feltételei, így ezekre az x-ekre
$$\int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a),$$
és ebből az $x \to b$ határátmenettel következik a tételbeli állítás. ■

Feladat. Lássuk meg, hogy az

$$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$$

improprius integrál konvergens, és számítsuk ki értékét!

Útm. Bármely $x \in [\sqrt{3}, +\infty)$ esetén, ha

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(C-B)x+A-C}{(x-1)(x^2+1)},$$

akkor nyilvánvalóan

$$A+B=0, \quad C-B=1, \quad A-C=3, \qquad \text{azaz} \qquad A=2, \quad B=-2, \quad C=-1.$$

Így

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{2}{x-1} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}.$$

Ez azt jelenti, hogy bármely $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = 2\ln(x-1) - \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg}(x) + c.$$

Ha tehát

$$F(x) := \ln\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\right) - \operatorname{arctg}(x) \qquad (x \in [\sqrt{3}, +\infty)),$$

akkor az F függvény teljesíti a fenti tétel feltételeit:

$$F'(x) = f(x) \qquad (x \in (\sqrt{3}, +\infty)),$$

továbbá

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} F(x) = F(\sqrt{3}) \qquad \text{és} \qquad F(+\infty) = \ln(1) - \frac{\pi}{2}.$$

Következésképpen

$$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \lim_{+\infty} F - F(\sqrt{3}) = \ln(1) - \frac{\pi}{2} - \ln\left(\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}\right) + \frac{\pi}{3} =$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \ln(4) - 2\ln(\sqrt{3}-1). \quad \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy a fenti feladatban a parciális törtekre való bontás módszerének egy speciális esetén használtuk fel (vö. **Analízis 2 GY**, 278-280. oldal).

Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,dx$$

improprius integrál értékét!

Útm. Mivel bármely $x \in (1, +\infty)$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + c,$$

ezért az

$$F(x) := \frac{\ln^2(x)}{2} \qquad (1 \leq x \in \mathbb{R})$$

függvénnyel:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,dx = F(+\infty) - F(1) = +\infty - 0 = +\infty. \qquad \blacksquare$$

Emlékeztető. Ha $R \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós racionális függvény, továbbá $x \in I \subset (-\pi, \pi)$, akkor (vö. **Analízis 2 GY**, 307-308. oldal)) az

$$\int R(\sin(x), \cos(x))\,dx$$

integrál kiszámítására alkalmazható a

$$t := \operatorname{tg}(x/2) \qquad (x \in I \subset (-\pi, \pi))$$

helyettesítés:

$$\int R(\sin(x), \cos(x))\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}(x/2)} \qquad (x \in I).$$

Feladat. Legyen $1 < a \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy ekkor fennáll az

$$\int_0^\pi \frac{1}{a+\cos(x)}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

egyenlőség!

Útm. Mivel $[0,\pi] \not\subset (-\pi,\pi)$, ezért a fenti emlékeztetőben megfogalmazott integrálási szabály nem alkalmazható automatikusan. Az így felmerülő probléma többféle módon is orvosolható.

1. mód. Korábbi tanulmányainkból tudjuk (vö. **Analízis 2 GY**, 407-408. oldal), hogy az

$$F(\omega) := \int_0^\omega \frac{1}{a+\cos(x)}\,dx \qquad (\omega \in [0,\pi])$$

függvény folytonos. Következésképpen

$$\int_0^\pi \frac{1}{a+\cos(x)}\,dx = F(\pi) = \lim_{\omega\to\pi} F(\omega) = \lim_{\omega\to\pi}\int_0^\omega \frac{1}{a+\cos(x)}\,dx \overset{t:=\mathrm{tg}(x/2)}{=} \qquad /0 \le \omega < \pi/$$

$$= \lim_{\omega\to\pi}\int_0^{\mathrm{tg}(\omega/2)} \frac{1}{a+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \lim_{\omega\to\pi}\int_0^{\mathrm{tg}(\omega/2)} \frac{2}{a\cdot(1+t^2)+1-t^2}\,dt =$$

$$= \lim_{\omega\to\pi}\int_0^{\mathrm{tg}(\omega/2)} \frac{2}{(a-1)\cdot t^2+a+1}\,dt = \lim_{\omega\to\pi}\frac{2}{a+1}\cdot\int_0^{\mathrm{tg}(\omega/2)} \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\cdot t\right)^2}\,dt =$$

$$= \frac{2}{a+1}\cdot\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\cdot\lim_{\omega\to\pi}\left[\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\cdot t\right)\right]_0^{\mathrm{tg}(\omega/2)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\lim_{\omega\to\pi}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\cdot\mathrm{tg}(\omega/2)\right) =$$

$$\overset{\mathrm{arctg}\in\mathfrak{C}}{=} \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\cdot\lim_{\omega\to\pi}\mathrm{tg}(\omega/2)\right) \overset{\mathrm{tg}\in\mathfrak{C}}{=} \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

2. mód. Mivel bármely $x \in (0,\pi)$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int \frac{1}{a+\cos(x)}\,dx = \ldots = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\cdot\mathrm{tg}(x/2)\right)$$

és az

$$F(x) := \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \cdot \operatorname{tg}(x/2)\right) \qquad (x \in [0,\pi))$$

függvény teljesíti a tétel feltételeit:

$$F'(x) = f(x) \qquad (x \in (0,\pi)),$$

továbbá

$$\lim_{x\to 0+0} F(x) = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \cdot 0 = 0 = F(0) \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\pi-0} F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

ezért

$$\int \frac{1}{a+\cos(x)}\, dx = \lim_{x\to\pi-0} F(x) - F(0) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$I_n := \int_1^{+\infty} \left(\frac{n}{x} - \frac{n^2}{1+nx}\right) dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat határértékét!

Útm. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $1 < x \in \mathbb{R}$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int \left(\frac{n}{x} - \frac{n^2}{1+nx}\right) dx = n\ln(x) - n\ln(1+nx) + c.$$

Így, ha

$$F(x) := n \cdot \ln\left(\frac{x}{1+nx}\right) \qquad (1 \leq x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \left(\frac{n}{x} - \frac{n^2}{1+nx}\right) dx &= \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(1) = n\ln\left(\frac{1}{n}\right) - n\ln(\frac{1}{1+n}) = \\ &= n\ln\left(\frac{1+n}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

A Bernoulli-L'Hospital-szabály felhasználásával így

$$\lim_{n\to\infty}(I_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{1+n} \cdot \frac{n-1-n}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+n} \cdot \frac{1}{n}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+n} = 1. \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen $p, q \in \mathbb{R}$: $p > 0$. Igazoljuk, hogy fennállnak az alábbi egyenlőségek!

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-px}\sin(qx)\,dx = \frac{q}{p^2+q^2}$,
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos(qx)\,dx = \frac{p}{p^2+q^2}$.

Útm.

1. Parciálisan integrálva könnyen megmutatható (vö. **Analízis 2 GY**, 246-248. old.), hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ esetén

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + c \qquad (x \in (0, +\infty),\ c \in \mathbb{R}).$$

Így az

$$F(x) := \frac{e^{-px}}{p^2+q^2}(-p\sin(qx) - q\cos(qx)) \qquad (0 \le x < +\infty)$$

függvényre teljesülnek a fenti tétel feltételei. Következésképpen

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\sin(qx)\,dx = \lim_{+\infty} F - F(0) = 0 - \frac{-q}{p^2+q^2} = \frac{q}{p^2+q^2}.$$

2. Parciálisan integrálva könnynen megmutatható (vö. **Analízis 2 GY**, 246-248. old.), hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ esetén

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin(bx) + a\cos(bx)) + c \qquad (x \in (0, +\infty),\ c \in \mathbb{R}).$$

Így az

$$F(x) := \frac{e^{-px}}{p^2+q^2}(q\sin(qx) - p\cos(qx)) \qquad (0 \le x < +\infty)$$

függvényre teljesülnek a fenti tétel feltételei. Következésképpen

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos(qx)\,dx = \lim_{+\infty} F - F(0) = 0 - \frac{-p}{p^2+q^2} = \frac{p}{p^2+q^2}. \qquad \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy gyakorlásképpen érdemes speciális p, q értékekre kiszámítani a fenti improprius integrált. Legyen $p := 2$, $q := 3$, azaz igazoljuk, hogy fennáll az

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos(3x)\,dx = \frac{2}{4+9} = \frac{2}{13}$$

egyenlőség.

1. lépés. Két különböző módon parciálisan integrálunk: egyszer az

$$f'(x) := \sin(3x) \qquad \text{és} \qquad g(x) := e^{-2x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

választással, majd az

$$f'(x) := e^{-2x}, \qquad g(x) := \sin(3x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

választással:

$$\int e^{-2x}\sin(3x)\,dx = -e^{-2x}\frac{\cos(3x)}{3} - \frac{2}{3}\int e^{-2x}\cos(3x)\,dx, \quad (*)$$

$$\int e^{-2x}\sin(3x)\,dx = -\frac{e^{-2x}}{2}\sin(3x) + \frac{3}{2}\int e^{-2x}\cos(3x)\,dx. \quad (**)$$

$(*)$-t $\left(-\frac{3}{2}\right)$-del, $(**)$-ot $\left(-\frac{2}{3}\right)$-dal szorozva és összeadva azt kapjuk, hogy

$$\underbrace{\left(\frac{3}{-2} + \frac{-2}{3}\right)}_{\frac{13}{-6}}\int e^{-2x}\sin(3x)\,dx = \frac{e^{-2x}}{2}\sin(3x) + \frac{e^{-2x}}{3}\cos(3x)$$

amiből

$$\int e^{-2x}\sin(3x)\,dx = \frac{e^{-2x}}{13}(3\sin(3x) - 2\cos(3x)) + c \quad (x \in (0, +\infty),\ c \in \mathbb{R})$$

következik.

2. lépés. Az

$$F(x) := \frac{e^{-2x}}{13}(2\sin(3x) - 3\cos(3x)) \qquad (0 \le x < +\infty)$$

függvény nyilván teljesíti a fenti tétel feltételeit, ezért

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos(3x)\,dx = \lim_{+\infty} F - F(0) = 0 - \frac{-2}{13} = \frac{2}{13}.$$

Feladat. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$. Igazoljuk, hogy az

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$$

improprius integrál konvergens, majd számítsuk ki értékét!

Útm. Ha bármely $n \in \mathbb{N}_0$ index és $0 \leq \omega \in \mathbb{R}$ szám esetén

$$F_n(\omega) := \int_0^{\omega} x^n e^{-x}\, dx,$$

akkor egyrészt

$$F_0(\omega) = [-e^{-x}]_0^{\omega} = 1 - e^{-\omega},$$

másrészt pedig tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$F_n(\omega) = [-x^n e^{-x}]_0^{\omega} + n \int_0^{\omega} x^{n-1} e^{-x}\, dx = -\omega^n e^{-\omega} + nF_{n-1}(\omega).$$

Innen teljes indukcióval könnyen ellenőrizhető, hogy

$$F_n(\omega) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!} \omega^{n-k} e^{-\omega} + n!(1 - e^{-\omega}) \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

A Bernoulli-L'Hospital szabályt alkalmazva

$$\lim_{\omega \to +\infty} \omega^{n-k} e^{-\omega} = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{\omega^{n-k}}{e^{\omega}} = \ldots = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{(n-k)!}{e^{\omega}} = 0,$$

következésképpen

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = \lim_{\omega \to +\infty} F_n(\omega) = n!$$

adódik. ■

Tétel (parciális integrálás). Legyen $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, majd tegyük fel, hogy bármely $c \in (a, b)$ esetén $f, g \in \mathfrak{R}[a, c]$. Ha

$$\lim_b fg \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \int_a^b fg' \in \mathbb{R},$$

akkor

$$\mathbb{R} \ni \int_a^b f'g = \lim_b fg - f(a)g(a) - \int_a^b fg'.$$

Biz. Tetszőleges $x \in (a, b)$ esetén alkalmazva a parciális integrálás szabályát azt kapjuk, hogy

$$\int_a^x fg' = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x fg',$$

és ebből az $x \to b$ határátmenettel következik a tételbeli állítás. ■

Feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi impropius integrálok konvergensek, és számítsuk ki értéküket!

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx,$ 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x/3}\,dx,$ 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{p}\right)^2 pe^{-px}\,dx \quad (0 < p \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. Az

$$f'(x) := e^{-2x} \quad (0 \leq x \in \mathbb{R}), \qquad g(x) := x \quad (0 \leq x \in \mathbb{R})$$

szereposztással

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\left[xe^{-2x}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx.$$

A Bernoulli-L'Hospital-szabály felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0,$$

így egy korábbi **Példa.** alapján

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \frac{1}{4}.$$

2. Kétszeri parciális integrálás után azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x/3}\,dx = 54.$$

3. Kétszeri parciális integrálás után azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{+\infty}\left(x-\frac{1}{p}\right)^2 pe^{-px}\,dx=\frac{1}{p^2}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll az

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}(x)\,dx$$

egyenlőség!

Útm. Legyen

$$\varphi(x):=\operatorname{tg}(x)\quad (x\in[0,\pi/2))\qquad \text{és}\qquad f(x):=\frac{1}{(1+x^2)^n}\quad (x\in\mathbb{R}).$$

Ekkor tetszőleges $0\leq\omega\in\mathbb{R}$ esetén – alkalmazva a határozott integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabályt (vö. **Analízis 2 GY**, 351. old.) – azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_0^{\omega}\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx &= \int_0^{\omega} f=\int_{\varphi^{-1}(0)}^{\varphi^{-1}(\omega)}(f\circ\varphi)\cdot\varphi'=\int_0^{\operatorname{arctg}(\omega)}\frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2(t))^n}\cdot\frac{1}{\cos^2(t)}\,dt=\\ &= \int_0^{\operatorname{arctg}(\omega)}\cos^{2n-2}(t)\,dt\longrightarrow\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}(t)\,dt\quad(\omega\to+\infty). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Tétel (helyettesítéses integrálás). Legyen

$$-\infty < a < b \leq +\infty \qquad \text{és} \qquad -\infty < c < d \leq +\infty,$$

továbbá

$$\varphi : [a, b) \to [c, d), \qquad \text{ill.} \qquad f : [c, d) \to \mathbb{R}$$

olyan függvények, amelyekre

$$\varphi \in \mathfrak{C}^1, \qquad \varphi(a) = c, \qquad \lim_b \varphi = d, \qquad f \in \mathfrak{C}$$

teljesül. Ekkor

$$\int_c^d f \qquad \text{és az} \qquad \int_a^b (f \circ \varphi)\varphi'$$

improprius integrál **ekvikonvergens** (egyszerre konvergens, ill. divergens), és konvervencia esetén a két integrál egyenlő.

Biz. A határozott integrálokra vonatkozó első helyettesítési szabály (vö. **Analízis 1 GY**, 389. old.) alkalmazásával azt kapjuk, hogy tetszőleges $t \in (a, b)$ esetén

$$\int_c^{\varphi(t)} f(x)\, dx = \int_a^t f(\varphi(s))\varphi'(s)\, ds. \tag{3}$$

Ha

- $\int_c^d f \in \mathbb{R}$, akkor az összetett függvény határértékére vonatkozó tétel (vö. **Analízis 2 GY** (2020 ősz), 6. old.) tétel alapján
$$\lim_{t \to b} \int_c^{\varphi(t)} f(x)\, dx = \lim_{y \to d} \int_c^y f(x)\, dx = \int_c^d f(x)\, dx,$$
ezért a (3) egyenlőség jobb oldalán álló függvénynek is létezik b-ben határértéke, továbbá fennáll a bizonyítandó egyenlőség is.

- $\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi' \in \mathbb{R}$, akkor a (3) egyenlőség jobb oldalán álló függvénynek létezik b-ben (véges) határértéke:
$$\lim_{t \to b} \int_a^t f(\varphi(s))\varphi'(s)\, ds =: I \in \mathbb{R}.$$
Ha tehát $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$, akkor alkalmas $\xi \in (a, b)$, ill. tetszőleges $t \in [\xi, b)$ esetén
$$\left| \int_a^t f(\varphi(s))\varphi'(s)\, ds - I \right| < \varepsilon.$$

A φ függvény folytonossága következtében

$$[\eta, d) := g[[\xi, b)] \subset [c, d].$$

Így (3) felhasználásával azt kapjuk, hogy tetszőleges $y \in [\eta, d)$ esetén

$$\left|\int_c^y f(x)\,dx - I\right| < \varepsilon,$$

ahonnan

$$\lim_{y\to d} \int_c^y f(x)\,dx = I$$

következik. ■

Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x}\,dx$$

improprius integrált!

Útm. A

$$\varphi(t) := \ln(t) \quad (1 \le t < +\infty) \qquad \text{és az} \qquad f(x) := \frac{1}{1+e^x} \quad (0 \le x < +\infty)$$

függvény teljesíti a tétel feltételeit, hiszen

$$\varphi \in \mathfrak{C}^1, \qquad \varphi(1) = 0, \qquad \lim_{+\infty} \varphi = +\infty, \qquad f \in \mathfrak{C}.$$

Következésképpen az

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x}\,dx \qquad \text{és az} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{t}\,dt$$

integrál ekvikonvergens. Mivel tetszőleges $0 \le \omega \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_1^\omega \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{t}\,dt = \int_1^\omega \frac{1+t-t}{(1+t)t}\,dt = \int_1^\omega \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln\left(\frac{\omega}{\omega+1}\right) - \ln(1/2),$$

ill.

$$\lim_{\omega\to+\infty} \ln\left(\frac{\omega}{\omega+1}\right) \overset{\ln\in\mathfrak{C}}{=} \ln\left(\lim_{\omega\to+\infty} \frac{\omega}{\omega+1}\right) = \ln(1) = 0,$$

ezért

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{t}\,dt = \lim_{\omega\to+\infty} \int_1^\omega \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{t}\,dt = 0 - \ln(1/2) = \ln(2). \quad ■$$

Az összehasonlító-kritérium következménye a

Tétel (határérték-kritérium). Legyen $a \in \mathbb{R}$, továbbá

1. $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$: $f, g > 0$ és $f, g \in \mathfrak{C}$;
2. alkalmas $A \in [0, +\infty]$ (kibővített nemnegatív) szám esetén
$$\lim_{+\infty} \frac{f}{g} = A. \tag{4}$$

Ekkor igazak az alábbi állítások.

1. $0 < A < +\infty$ esetén
$$\int_a^{+\infty} f \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_a^{+\infty} g \in \mathbb{R}$$
2. $A = 0$ esetén
$$\int_a^{+\infty} g \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^{+\infty} f \in \mathbb{R};$$
3. $A = +\infty$ esetén
$$\int_a^{+\infty} g \in \mathbb{R} \qquad \Longleftarrow \qquad \int_a^{+\infty} f \in \mathbb{R}.$$

Biz.

1. Legyen $A \in (0, +\infty)$. Ekkor az (4) határérték-reláció következtében alkalmas $\max\{0, a\} < \omega \in \mathbb{R}$ esetén
$$A - 1 < \frac{f(x)}{g(x)} < A + 1 \qquad (\omega < x \in \mathbb{R}).$$
Így bármely $x \in (\omega, +\infty)$ számra
$$\frac{f(x)}{g(x)} < A + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) < (A + 1)g(x).$$
Következésképpen
$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^{\omega} f + \int_{\omega}^{+\infty} f,$$
ezért
$$\int_{\omega}^{+\infty} f < \int_{\omega}^{+\infty} (A + 1)g = (A + 1) \cdot \int_{\omega}^{+\infty} g$$

felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\int_a^{+\infty} g \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^{+\infty} f \in \mathbb{R};$$

A fordított irányú implikációt a

$$\lim_{+\infty} \frac{g}{f} = \frac{1}{A}$$

határérték-reláció figyelembe vételével láthatjuk be.

2. $\boxed{\textbf{HF.}}$

3. $\boxed{\textbf{HF.}}$

Példa. Az

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x}\, dx$$

improprius integrál divergens, ui.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1-e^{-x}}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} (1-e^{-x}) = 1 \qquad \text{és} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty.$$

Példa. Az

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\, dx$$

improprius integrál divergens, hiszen tetszőleges $x \in [3, +\infty)$ esetén

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}}{\frac{1}{x}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}} \longrightarrow 1 \qquad (x \to +\infty)$$

és

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{x\to\infty} (\ln(\omega) - \ln(3)) = +\infty.$$

Feladat. Konvergens-e a

$$\int_4^{+\infty} \frac{2x^3-5x^2-4x+3}{3x^5+2x^4+x+1}\, dx$$

improprius integrál?

Útm. Igen, ui.

$$\frac{\frac{2x^3-5x^2-4x+3}{3x^5+2x^4+x+1}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{2x^5-5x^4-4x^3+3x^2}{3x^5+2x^4+x+1} \longrightarrow \frac{2}{3} \qquad (x \longrightarrow \infty)$$

és

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}.$$

Megjegyezzük, hogy bármely $x \in [4, +\infty)$ esetén

$$3x^5 + 2x^4 + x + 1 > 0,$$

továbbá

$$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x-3)(2x^2 + x - 1) > 0 \qquad (4 \leq x \in \mathbb{R}),$$

hiszen $2 > 0$ és

$$2x^2 + x - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \in \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}. \quad \blacksquare$$

Gyakorló feladat. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy ha

$$\lim_{+\infty} f =: A \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \int_a^{+\infty} f \in \mathbb{R},$$

akkor fennáll az $A = 0$ egyenlőség!

Útm. Ha

- $A > 0$, akkor alkalmas $\omega > 0$ esetén

  $$f(x) > \frac{A}{2} \qquad (x \in [\omega, +\infty)).$$

  Következésképpen

  $$\int_\omega^{+\infty} f(x)\,dx \geq \int_\omega^{+\infty} \frac{A}{2}\,dx = +\infty,$$

  ami nem lehetséges.

- $A < 0$, akkor a fenti gondolatmenettel ismét a feladat feltételeinek ellentmondó állítást kapunk. $\blacksquare$

Gyakorló feladat. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [n, n+2^{-n}],\ n \in \mathbb{N}), \\ \\ 0 & (\text{egyébként}). \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy $\int_0^{+\infty} f \in \mathbb{R}$, de nem létezik a $\lim_{x\to\infty} f(x)$ határérték!

Útm. Világos, hogy ha $m \in \mathbb{N}$, akkor

$$\int_0^m f = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} = 1 - \frac{1}{2^{m-1}} \longrightarrow 1 \qquad (m \to \infty).$$

A $\lim_{x\to\infty} f(x)$ határérték nem létezik, hiszen az $n \to \infty$ határesetben

$$f(n) \longrightarrow 1 \qquad \text{és} \qquad f\left(n + \frac{1}{2}\right) \longrightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Gyakorló feladat. Mutassuk meg, hogy igazak az

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln(2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,dx$$

egyenlőségek!

Útm. Mivel

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,dx &= \lim_{\omega\to\frac{\pi}{2}} \int_0^{\omega} \ln(\cos(x))\,dx = \lim_{\omega\to\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\omega} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)(-1)\,dt = \\ &= \lim_{\omega\to\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\omega} \ln(\sin(t))(-1)\,dt = \lim_{\omega\to\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}-\omega}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt, \end{aligned}$$

ezért az

$$A := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx, \qquad B := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,dx$$

jelöléseket bevezetve azt kapjuk, hogy $A = B$, ill.

$$\begin{aligned} 2A &= A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\ln(\sin(2x)) - \ln(2)\} dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\, dx - \frac{\pi}{2}\ln(2). \end{aligned}$$

Lévén, hogy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\, dx = \int_0^{\pi} \frac{\ln(\sin(t))}{2}\, dt = \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\, dt\right\}$$

és

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\, dt &= \lim_{\omega\to\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} \ln(\sin(t))\, dt = \lim_{\omega\to\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\omega} \ln(\sin(\pi - x))(-1)\, dx = \\ &= \lim_{\omega\to\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\omega} \ln(\sin(x)(-1)\, dx = \lim_{\omega\to\pi} \int_{\pi-\omega}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)\, dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\, dx = A, \end{aligned}$$

ezért

$$2A = A - \frac{\pi}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad A = -\frac{\pi}{2}\ln(2) = B. \quad \blacksquare$$

Tétel (Cauchy-kritérium). Tegyük fel, hogy $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, és minden $c \in (a, b)$ esetén $f \in \mathfrak{R}[a, c]$. Az

$$\int_a^b f$$

improprius integrál pontosan akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\alpha \in (a, b)$, hogy

$$\left|\int_s^t f\right| < \varepsilon \qquad (s, t \in (\alpha, b))$$

teljesül.

Biz. Az improprius integrál definíciója alapján

$$\int_a^b f \in \mathbb{R}$$

pontosan akor teljesül, ha az

$$F : [a, b) \to \mathbb{R}, \qquad F(\omega) := \int_a^\omega f(x)\,dx$$

függvényre

$$\lim_{\omega \to +\infty} F(\omega) =: A \in \mathbb{R}.$$

Ez utóbbi feltétel pedig a fügvényhatárértékre vonatkozó Cauchy-kritérium alapján pontosan akkor áll fenn, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\alpha \in (a, b)$, hogy

$$|F(s) - F(t)| < \varepsilon \qquad (s, t \in (\alpha, b)).$$

Innen már látható, hogy igaz a tételbeli állítás, hiszen F-re

$$F(s) - F(t) = \int_s^t f(x)\,dx \qquad (s, t \in (\alpha, b))$$

teljesül. ■

Példa. Mivel bármely $0 < s < t < +\infty$ esetén

$$\int_s^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_s^t - \int_s^t \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$$

és

$$\left|\int_s^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| \leq \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \int_s^t \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \left[-\frac{1}{x}\right]_s^t = \frac{2}{s},$$

ezért tetszőleges ε esetén az

$$\alpha := \frac{2}{\varepsilon}$$

jó választás.

Második típus

Emlékeztető. Legyen

$$-\infty \leq a < b < +\infty \qquad \text{és} \qquad f : (a, b] \to \mathbb{R},$$

majd tegyük fel, hogy minden $c \in (a, b)$ esetén $f \in \mathfrak{R}[c, b]$. Legyen továbbá

$$F : (a, b] \to \mathbb{R}, \qquad F(\alpha) := \int_\alpha^b f(x)\, dx.$$

- Ha a
$$\lim_{\alpha \to a} F(\alpha) =: I \tag{5}$$
(jobboldali) határérték létezik és véges ($I \in \mathbb{R}$), akkor azt mondtuk, hogy az f **függvény improprius integrálja konvergens és értéke** I (jelben $\int_a^b f = I$). Egyéb esetekben (amikor $I \notin \mathbb{R}$) azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f$ **improprius integrál divergens**.
- Azt mondtuk, hogy az $\int_a^b f$ **improprius integrál létezik** (vagy f **impropriusan integrálható**), ha $\int_a^b f$ konvergens vagy az (5)-beli I határértékre $I \in \{-\infty, +\infty\}$ teljesül.

Megjegyezzük, hogy

1. a fenti definíció egyszerre tartalmazza a az alábbi két esetet:
   - $a = -\infty$, azaz, amikor az integrandus értelmezési tartománya nem-korlátos intervallum;
   - $a \in \mathbb{R}$, azaz amikor maga az integrandus az a pont valamely jobboldali környezetében esetleg nem korlátos.
2. az inproprius integrál fogalma a Riemann-integrál fogalmának egyfajta kiterjesztése a következő értelemben: ha $f \in \mathfrak{R}[a, b]$, akkor az
$$\int_a^b f$$
szimbólum jelenti
   (a) egyrészt az f függvény $[a, b]$-n vett Riemann-integrálját,

(b) másrészt az f-nek az $(a, b]$-n vett improprius integrálját, azaz, ha $f \in \mathfrak{R}[a, b]$, akkor a

$$g(x) := f(x) \qquad (x \in (a, b])$$

függvény improprius integrálja konvergens és

$$\int_a^b g = \lim_{\alpha \to a} \int_\alpha^b g = \lim_{\alpha \to a} \int_\alpha^b f = \int_a^b f.$$

Példa. Ha $p \in \mathbb{R}$, így az

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx$$

improprius integrál pontosan akkor konvergens, ha $p < 1$, ui.

$$F(\alpha) = \int_\alpha^1 \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} -\ln(\alpha) & (p = 1), \\ \frac{1-\alpha^{1-p}}{1-p} & (p \neq 1) \end{cases} \qquad (\alpha \in (0, 1]),$$

és így

1. $p \geq 1$ esetén
$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{\alpha \to 0+0} F(\alpha) = +\infty;$$
2. $p < 1$ esetén
$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{\alpha \to 0+0} F(\alpha) = \frac{1}{1-p}.$$

Példa.
$$\int_{-\infty}^0 e^x\, dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_\alpha^0 e^x\, dx = \lim_{\alpha \to -\infty} [e^x]_\alpha^0 = \lim_{\alpha \to -\infty} \left(e^0 - e^\alpha\right) = 1.$$

Példa.

$$\int_0^1 \ln(x)\, dx = \lim_{\alpha \to 0+0} \int_\alpha^1 1 \cdot \ln(x)\, dx = \lim_{\alpha \to 0+0} [x \ln(x) - x]_\alpha^1 = \lim_{\alpha \to 0+0} (\alpha - 1 - \alpha \ln(\alpha)) = -1,$$

ui.

$$\alpha \ln(\alpha) = \frac{\ln(\alpha)}{\frac{1}{\alpha}} \sim \frac{\frac{1}{\alpha}}{-\frac{1}{\alpha^2}} = -\alpha \longrightarrow 0 \qquad (\alpha \to 0+0).$$

Példa.

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,dx = \lim_{\alpha\to 1+0}\int_\alpha^2 \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,dx =$$

$$= \lim_{\alpha\to 1+0}\frac{1}{2}\int_\alpha^2 \frac{(x-1)-(x-3)}{(x-1)(x-3)}\,dx = \lim_{\alpha\to 1+0}\frac{1}{2}\left[\ln(3-x)-\ln(x-1)\right]_\alpha^2 =$$

$$= -\lim_{\alpha\to 1+0}\ln\left(\sqrt{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}\right) = -\infty.$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_0^1 x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\,dx$$

integrált!

Útm. Mivel (vö. **Analízis 1 GY** (2020 ősz), 333. oldal))

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right] = 0,$$

ezért az

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\qquad f(x) := \begin{cases} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right] & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

függvény folytnos, következésképpen integrálható. Ha $n\in\mathbb{N}$ olyan index, amelyre

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n},$$

akkor

$$n \leq \frac{1}{x} < n+1,$$

tehát

$$\left[\frac{1}{x}\right] = n$$

és

$$\int_0^1 x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]dx = \lim_{n\to\infty}\int_{1/(n+1)}^1 x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{1/(k+1)}^{1/k} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{1/(k+1)}^{1/k} kx\,dx = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} k\cdot\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) \overset{\text{HF}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{n}{(n+1)^2}\right\} = \frac{\pi^2}{12}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

integrált!

Útm.

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{\alpha\to 1}\int_\alpha^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{\alpha\to 1}\left[2\cdot\sqrt{x-1}\right]_\alpha^2 = 2\cdot\lim_{\alpha\to 1}(1-\sqrt{\alpha-1}) = 2. \quad \blacksquare$$

Házi feladat. Fogalmazzuk meg az improprius integrál ezen típusára is

1. az összehasonlító-kritériumot (minoráns-, ill. majoránskritériumot);
2. az abszolút konvergencia fogalmát és a rá vonatkozó egyenlőtlenséget;
3. a parciális integrálás tételét,
4. a helyettesítéses integrálás tételét;
5. a Cauchy-kritériumot!

Tétel (Newton-Leibniz-kritérium). Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$, továbbá $f, F : (a, b] \to \mathbb{R}$, majd tegyük fel, hogy

(i) minden $c \in (a, b)$ esetén $f \in \mathfrak{R}[c, b]$;

(ii) tetszőleges $x \in (a, b)$ esetén $F \in \mathfrak{D}[x]$ és $F'(x) = f(x)$;

(iii) $F \in \mathfrak{C}[b]$.

Az $\int_a^b f$ improprius integrál pontosan akkor konvergens, ha F-nek van a-ban véges határértéke, és ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - \lim_a F =: [F(x)]_a^b.$$

Biz. Tetszőleges $x \in (a, b)$ esetén teljesülnek a Newton-Leibniz-tétel feltételei, így ezekre az x-ekre

$$\int_x^b f(t)\,dt = F(b) - F(x),$$

és ebből az $x \to a$ határátmenettel következik a tételbeli állítás. ■

Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e a következő improprius integrálok!

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^3}\,dx$, 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$, 3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\ln(x)}\,dx$, 1. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$.

improprius integrál!

Útm.

1. Mivel tetszőleges $x \in [0, 1]$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^3} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}},$$

továbbá a korábbiak értelmében (vö. **Példa**)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

ezért majoránskritérium felhasználásával azt kapjuk, hogy a fenti improprius integrál konvergens.

2. Mivel
$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{|\ln(x)|}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^{3/4}}}=\lim_{\alpha\to 0}x^{1/4}|\ln(x)|=\lim_{\alpha\to 0}\frac{|\ln(x)|}{x^{-1/4}}\overset{\text{BL}}{=}0,$$
továbbá a korábbiak értelmében (vö. **Példa**)
$$\int_0^1\frac{1}{x^{3/4}}\,dx=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4,$$
ezért a határérték-kritérium ferlhasználásával azt kapjuk, hogy az
$$\int_0^1\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$
improprius integrál abszolút konvergens.

3. Mivel
$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{\frac{1}{\ln(x)}}{\frac{1}{x-1}}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{x-1}{\ln(x)}\overset{\text{BL}}{=}1$$
és
$$\int_1^2\frac{1}{x-1}\,dx=\lim_{\alpha\to 1}\int_\alpha^2\frac{1}{x-1}\,dx=\lim_{\alpha\to 1}[\ln(x-1)]_\alpha^2=-\lim_{\alpha\to 1}\ln(\alpha-1)=-\infty,$$
ezért a határérték-kritérium ferlhasználásával azt kapjuk, hogy az
$$\int_1^2\frac{1}{\ln(x)}\,dx$$
improprius integrál divergens.

4. Mivel bármely $x\in(-\infty,0)$, ill. $c\in\mathbb{R}$ esetén
$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+c,$$
ezért az
$$F(x):=xe^x-e^x\qquad (x\in(-\infty,0])$$
függvénnyel
$$\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx=F(0)-F(-\infty)=-1-0=-1,$$
hiszen a Bernoulli-L'Hospital-szabály következtében
$$\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0.\quad\blacksquare$$

Harmadik típus

Emlékeztető. Legyen $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, továbbá $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, majd tegyük fel, hogy minden $c, d \in (a, b)$: $c < d$ esetén $f \in \mathfrak{R}[c, d]$.

1. Ha valamely $\xi \in (a, b)$ esetén az $I_1 := \int_a^\xi f$ és az $I_2 := \int_\xi^b f$ improprius integrál konvergens, akkor azt mondtuk, hogy az $\int_a^b f$ **improprius integrál konvergens**, és
$$\int_a^b f := I_1 + I_2.$$
2. Ha van olyan $\eta \in (a, b)$, hogy az $\int_a^\eta f$ és az $\int_\eta^b f$ improprius integrálok közül legalább az egyik divergens, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f$ **improprius integrál divergens**.
3. Azt mondtuk, hogy az $\int_a^b f$ **improprius integrál létezik** (vagy f **impropriusan integrálható**), ha $\int_a^b f$ konvergens vagy az I_1 és I_2 improprius integrálok láéteznek ($I_1, I_2 \in \overline{\mathbb{R}}$) és az $I_1 + I_2$ összegük értelmezve van.

Példa. Legyen $0 < p, q \in \mathbb{R}$. Ekkor
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p + qx^2}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{pq}},$$
ui.

- $$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{p+qx^2}\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_\alpha^0 \frac{1}{p+qx^2}\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \frac{1}{p}\int_\alpha^0 \frac{1}{1+(\sqrt{q/p}x)^2}\,dx =$$
$$= \lim_{\alpha\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{pq}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\alpha\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{pq}},$$
- $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{p+qx^2}\,dx = \ldots = \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{pq}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\omega\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{pq}}.$$

Példa. Mivel
$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\alpha\to-1} \int_\alpha^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\alpha\to-1} [\arcsin(x)]_\alpha^0 = -\lim_{\alpha\to-1} \arcsin(\alpha) = \frac{\pi}{2}$$

és

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\omega\to 1}\int_0^{\omega} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\omega\to 1}\,[\arcsin(x)]_0^{\omega} = \lim_{\omega\to 1}\arcsin(\omega) = \frac{\pi}{2},$$

ezért

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Házi feladat. Fogalmazzuk meg az improprius integrál ezen típusára is

1. az összehasonlító-kritériumot (minoráns-, ill. majoránskritériumot);
2. az abszolút konvergencia fogalmát és a rá vonatkozó egyenlőtlenséget;
3. a parciális integrálás tételét,
4. a helyettesítéses integrálás tételét;
5. a Cauchy-kritériumot!

A korábbiakhoz hasonlóan látható be a Newton-Leibniz-kritérium:

Tétel (Newton-Leibniz-kritérium). Legyen $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, továbbá $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, majd tegyük fel, hogy

(i) miden $c, d \in (a,b)$: $c < d$ esetén $f \in \mathfrak{R}[c,d]$

(ii) tetszőleges $x \in (a,b)$ esetén $F \in \mathfrak{D}[x]$ és $F'(x) = f(x)$.

Ekkor

$$\int_a^b f \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\lim_a F \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \lim_b F \in \mathbb{R}\right),$$

és konvergencia esetén

$$\int_a^b f = \lim_b F - \lim_a F =: [F(x)]_a^b.$$

Feladat. Konvergensek-e az alábbi improprius integrálok?

$$1.\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx, \qquad 2.\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

1. Mivel
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + c \qquad (x, c \in \mathbb{R}),$$
ezért, ha
$$F(x) := \operatorname{arctg}(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
akkor a Newton-Leibniz-kritérium alkalmazásával azt kapjuk, hogy
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = F(+\infty) - F(-\infty) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

2. Mivel
$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c \qquad (x, c \in \mathbb{R}),$$
ezért, ha
$$F(x) := \ln(\sqrt{1+x^2}) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
akkor a Newton-Leibniz-kritérium alkalmazásával azt kapjuk, hogy
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx = F(0) - F(-\infty) = -\infty, \qquad \text{ill.} \qquad \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = F(+\infty) - F(0) = +\infty.$$
Ez azt jelenti, hogy az
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$
improprius integrál divergens. **Megjegyezzük**, hogy a
$$\lim_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\ln(\sqrt{1+x^2})\right]_{-b}^{b} = \lim_{b\to+\infty} 0 = 0$$
határérték létezik és véges. ■

A következő feladatnak igen fontos valószínűségszámítási és statisztikai vonatkozásai vannak.

Feladat. Legyen $0 < p \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy az
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-px^2}\,dx$$
improprius integrál konvergens!

Útm. Világos, hogy

$$\int x e^{-px^2}\,dx = -\frac{1}{2p}\int(-2px)e^{-px^2}\,dx = -\frac{1}{2p}e^{-px^2}+c \qquad (x, c \in \mathbb{R}).$$

Ha most

$$F(x) := -\frac{1}{2p}e^{-px^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor a Newton-Leibniz-kritérium alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-px^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} F(\omega) - \lim_{\alpha\to-\infty} F(\alpha) = 0 - 0 = 0. \quad \blacksquare$$

Feladat. Konvergens-e az

$$\int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{3-x}}\right)dx$$

improprius integrál? Ha igen, számítsuk ki értékét!

Útm. Mivel

$$\int_{-2}^{0}\frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx = \lim_{\alpha\to-2}\int_{\alpha}^{0}\frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx = \lim_{\alpha\to-2}\left[2\sqrt{x+2}\right]_{\alpha}^{0} = \lim_{\alpha\to-2} 2(\sqrt{2}-\sqrt{\alpha+2}) = 2\sqrt{2}$$

és

$$\int_{0}^{3}\frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx = \left[2\sqrt{x+2}\right]_{0}^{3} = 2(\sqrt{5}-\sqrt{2}),$$

ill.

$$\int_{-2}^{0}\frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx = -2\left[\sqrt{3-x}\right]_{-2}^{0} = -2(\sqrt{3}-\sqrt{5})$$

és

$$\int_{0}^{3}\frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx = \lim_{\omega\to3}\int_{0}^{\omega}\frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx = -\lim_{\omega\to3} 2\left[\sqrt{3-x}\right]_{0}^{\omega} = -2\lim_{\omega\to3}(\sqrt{3-\omega}-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3},$$

ezért

$$\int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{3-x}}\right)dx = 2\sqrt{2}+2(\sqrt{5}-\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{5})+2\sqrt{3} = 4\sqrt{5}. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Gyakran találkozunk a következő szituációval. Valamely $c \in (a, b)$, ill. $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén

$$[a,b]\backslash\{c\}\subset\mathcal{D}_f, \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{x\to c+/-0} f(x)\in\{\pm\infty\},$$

és az

$$\int_a^b f$$

„integrál” meghatározása a feladat. Ha

$$\int_a^c f\in\mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \int_c^b f\in\mathbb{R},$$

akkor a következőképpen járunk el:

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Példa.

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx =$$

$$= \lim_{\omega\to 1}\int_0^\omega \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx + \lim_{\alpha\to 1}\int_\alpha^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx = \lim_{\omega\to 1}\left[3\cdot\sqrt[3]{x-1}\right]_0^\omega + \lim_{\alpha\to 1}\left[3\cdot\sqrt[3]{x-1}\right]_\alpha^3 =$$

$$\overset{\text{HF}}{=} 3\cdot(1+\sqrt[3]{2}). \quad \blacksquare$$

Alkalmazások

Sorozatok határértékének kiszámítása

Emlékeztető. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha bármely minden határon túl finomodó $(\tau_n) : \mathbb{N} \to \mathfrak{F}([a, b])$ felosztássorozat esetén

$$\lim_{n\to\infty} s(f,\tau_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,\tau_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f,\tau_n,\xi^{(n)}) = \int_a^b f.$$

Feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi sorozatok konvergensek és számítsuk ki határértéküket!

1. $x_n := \dfrac{n}{(n+1)^2} + \dfrac{n}{(n+2)^2} + \ldots + \dfrac{1}{4n} \qquad (n \in \mathbb{N});$
2. $x_n := \dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2-4}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{3}n} \qquad (n \in \mathbb{N});$
3. $x_n := \dfrac{\pi}{n} \cdot \left\{ \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right) \right\} \qquad (n \in \mathbb{N});$
4. $x_n := \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + (n-1)^\alpha + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \qquad (n \in \mathbb{N})$, ahol $\alpha \in (0, +\infty)$;
5. $x_n := \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} + \dfrac{1}{2n} \qquad (n \in \mathbb{N});$
6. $x_n := \dfrac{n}{1+n^2} + \dfrac{n}{4+n^2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} \qquad (n \in \mathbb{N});$
7. $x_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n}} \qquad (n \in \mathbb{N});$
8. $x_n := \dfrac{2}{n\sqrt[n]{e^{n+2}}} + \dfrac{2}{n\sqrt[n]{e^{n+4}}} + \ldots + \dfrac{2}{n\sqrt[n]{e^{n+2n}}} \qquad (n \in \mathbb{N});$
9. $x_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} \qquad (n \in \mathbb{N});$
10. $x_n := \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$

Útm.

1. Világos, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{n}{(n+n)^2} = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right\}.$$

   Legyen

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{(1+x)^2}$$

   és

$$\tau_n := \left\{\frac{k}{n} \in \mathbb{R} : \ k \in \{0,1,\ldots,n\}\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

   Ekkor $f \in \mathfrak{C}[0,1] \subset \mathfrak{R}[0,1]$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $\tau_n \in \mathfrak{F}([0,1])$. Mivel f monoton csökkenő, ezért bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$s(f,\tau_n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = x_n.$$

   Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(s(f,\tau_n)) = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

2. Látható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} = \\ &= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right\}. \end{aligned}$$

   Legyen

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

   és

$$\tau_n := \left\{\frac{k}{n} \in \mathbb{R} : \ k \in \{0,1,\ldots,n\}\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

   Ekkor $f \in \mathfrak{C}[0,1] \subset \mathfrak{R}[0,1]$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $\tau_n \in \mathfrak{F}([0,1])$, továbbá

$$\sigma(f,\tau_n,\xi^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = x_n.$$

Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sigma(f,\tau_n,\xi^{(n)})\right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx = \left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

3. Vegyük észre, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{\pi}{n}\cdot\left\{\sin\left(\frac{0}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right\}.$$

Legyen

$$f : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sin(x)$$

és

$$\tau_n := \left\{\frac{k\pi}{n} \in \mathbb{R} : \ k \in \{0,1,\ldots,n\}\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{C}[0,\pi] \subset \mathfrak{R}[0,\pi]$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $\tau_n \in \mathfrak{F}([0,\pi])$, továbbá

$$\sigma(f,\tau_n,\xi^{(n)}) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n} = x_n$$

Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sigma(f,\tau_n,\xi^{(n)})\right) = \int_0^{\pi}\sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = 1+1 = 2.$$

4. Némi átalakítással azt kapjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, ill. $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$x_n = \frac{1}{n}\cdot\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} + \left(\frac{2}{n}\right)^{\alpha} + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^{\alpha}\right\} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}.$$

Legyen

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^{\alpha}$$

és

$$\tau_n := \left\{\frac{k}{n} \in \mathbb{R} : \ k \in \{0,1,\ldots,n\}\right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{C}[0,1] \subset \mathfrak{R}[0,1]$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $\tau_n \in \mathfrak{F}([0,1])$. Mivel f monoton növekedő, ezért bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$S(f,\tau_n) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = x_n.$$

Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(S(f,\tau_n)) = \int_0^1 x^\alpha\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Megjegyezzük, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+(n-1)^\alpha+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}\right) = \frac{1}{1+\alpha}$$

következtében

$$1^\alpha+2^\alpha+\ldots+(n-1)^\alpha+n^\alpha \sim \frac{1}{1+\alpha}\cdot n^{\alpha+1} \qquad (n\to\infty)$$

teljesül.[1]

5. Világos, hogy tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{n+n} = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right\}.$$

Legyen

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}, \qquad f(x):=\frac{1}{1+x}$$

és

$$\tau_n := \left\{\frac{k}{n}\in\mathbb{R}:\ k\in\{0,1,\ldots,n\}\right\} \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Ekkor $f\in\mathfrak{C}[0,1]\subset\mathfrak{R}[0,1]$ és bármely $n\in\mathbb{N}$ indexre $\tau_n\in\mathfrak{F}([0,1])$. Mivel f monoton csökkenő, ezért bármely $n\in\mathbb{N}$ indexre

$$s(f,\tau_n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = x_n.$$

Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(s(f,\tau_n)) = \int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)-\ln(1) = \ln(2).$$

[1] Azt mondjuk, hogy az (x_n) és az (y_n) sorozat **aszimptotikusan egyenlő**:

$$x_n\sim y_n \quad (n\to\infty), \qquad \text{ha} \quad \frac{x_n}{y_n}\longrightarrow 1 \quad (n\to\infty).$$

6. Látható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{n^2}{1+n^2} + \frac{n^2}{4+n^2} + \ldots + \frac{n^2}{n^2+n^2} \right\} = \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{1}{\frac{1^2}{n^2}+1} + \frac{1}{\frac{2^2}{n^2}+1} + \ldots + \frac{1}{\frac{n^2}{n^2}+1} \right\}.$$

Legyen

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{x^2+1}$$

és

$$\tau_n := \left\{ \frac{k}{n} \in \mathbb{R} : \ k \in \{0,1,\ldots,n\} \right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{C}[0,1] \subset \mathfrak{R}[0,1]$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $\tau_n \in \mathfrak{F}([0,1])$. Mivel f monoton csökkenő, ezért bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$s(f,\tau_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = x_n.$$

Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(s(f,\tau_n)) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\mathrm{arctg}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

7. Vegyük észre, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n}\left\{ \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n\cdot n}} \right\} = \\ &= \frac{1}{n}\left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}} \right\}. \end{aligned}$$

Legyen

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

és

$$\tau_n := \left\{ \frac{k}{n} \in \mathbb{R} : \ k \in \{0,1,\ldots,n\} \right\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $f \in \mathfrak{C}[0,1] \subset \mathfrak{R}[0,1]$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $\tau_n \in \mathfrak{F}([0,1])$. Mivel f monoton csökkenő, ezért bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$s(f,\tau_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = x_n.$$

Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(s(f,\tau_n)) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1 = 2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

8. Látható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n\sqrt[n]{e^{n+2k}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n\sqrt[n]{e^n}\sqrt[n]{e^{2k}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{ne\sqrt[n]{e^{2k}}} = \frac{2}{e}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(e^2)^{k/n}}.$$

Legyen

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\qquad f(x) := \frac{1}{e^{2x}}$$

és

$$\tau_n := \left\{\frac{k}{n}\in\mathbb{R}:\ k\in\{0,1,\ldots,n\}\right\}\qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Ekkor $f\in\mathfrak{C}[0,1]\subset\mathfrak{R}[0,1]$ és bármely $n\in\mathbb{N}$ indexre $\tau_n\in\mathfrak{F}([0,1])$, továbbá

$$\frac{2}{e}\cdot\sigma(f,\tau_n,\xi^{(n)}) = \frac{2}{e}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = x_n.$$

Következésképpen

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(x_n) &= \frac{2}{e}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sigma(f,\tau_n,\xi^{(n)})\right) = \frac{2}{e}\cdot\int_0^1\frac{1}{e^{2x}} = -\frac{1}{e}\cdot\int_0^{-2} e^t\,dt = -\frac{1}{e}\cdot\left[e^t\right]_0^{-2} = \\ &= -\frac{1}{e}\cdot\left(e^{-2}-e^1\right) = \frac{1}{e}-\frac{1}{e^3}.\end{aligned}$$

9. Világos, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}.$$

Legyen

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\qquad f(x) := \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (x\in[0,1)),\\[2ex] 0 & (x=1)\end{cases}$$

és

$$\tau_n := \left\{\frac{k}{n}\in\mathbb{R}:\ k\in\{0,1,\ldots,n\}\right\}\qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Ekkor $f\in\mathfrak{R}[0,1]$, ui. f-nek egyetlen szakadási helye van, és bármely $n\in\mathbb{N}$ indexre $\tau_n\in\mathfrak{F}([0,1])$.

Látható, hogy f szigorúan monoton növekedő, hiszen

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}>0 \qquad (x\in(0,1)).$$

Következésképpen

$$s(f,\tau_n)=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=x_n \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

és így

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(s(f,\tau_n)))=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\lim_{\omega\to 1}\int_0^{\omega}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\\ &= \lim_{\omega\to 1}\,[\arcsin(x)]_0^{\omega}=\lim_{\omega\to 1}(\arcsin(\omega)-\arcsin(0))=\frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

10. Világos, hogy bármely $n\in\mathbb{N}$ indexre

$$\begin{aligned} x_n &= \exp(\ln(x_n))=\exp\left(\frac{\ln(n!)}{n}-\ln(n)\right)=\exp\left(\frac{\ln(n!)-n\ln(n)}{n}\right)=\\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\cdot\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right)=\exp\left(\frac{1}{n}\cdot\ln\left(\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}\right)\right)=\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

Így az exponenciális függvény folytonossága alapján (vö. korábban)

$$\lim(x_n)=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\exp\left(\int_0^1\ln(x)\,dx\right)=\exp(-1)=\frac{1}{e}. \quad \blacksquare$$

Numerikus sorok konvergenciájának vizsgálata

Tétel (integrálkritérium.) Ha $a\in\mathbb{R}$, $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ pozitív és monoton fogyó függvény, úgy bármely $b>a$ szám esetén igaz a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(b+n)<+\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_b^{+\infty} f<+\infty$$

ekvivalencia.

Biz. Mivel f monoton fogyó, ezért minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_k := f(b+k) \geq f(x) \geq f(b+k+1) =: a_{k+1} \qquad (x \in [b+k,\, b+k+1]). \tag{6}$$

Az f monotonitásából következik, hogy $[b, +\infty)$ minden véges részintervallumán integrálható. Integráljuk a (6) egyenlőtlenséget a

$$[b+k,\, b+k+1]$$

intervallumon; az integrál monoton tulajdonsága alapján

$$a_k \geq \int_{b+k}^{b+k+1} f \geq a_{k+1} \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{7}$$

A (7) egyenlőtlenségeket $k = 0, \ldots, n$-re összeadva

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \geq \int_{b}^{b+n+1} f \geq s_{n+1} - a_0. \tag{8}$$

Miután az f függvény pozitív,

$$\int_{b}^{b+n+1} f < \int_{b}^{+\infty} f \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ha ez utóbbi improprius integrál létezik. Ebben az esetben a monoton növekedő (s_n) sorozat korlátos, így a sor konvergens. Ha az f függvény improprius integrálja divergens, vagyis

$$\lim_{\omega \to +\infty} \int_{b}^{\omega} f = +\infty,$$

akkor (8) miatt meg inkább $\lim(s_n) = +\infty$, azaz a sor divergens.

Megjegyzések.

- Hibabecslés:

  $$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(b+n) - \int_{b}^{+\infty} \leq f(b)$$

  (ez (8)-ból következik $n \to \infty$ esetén).

- Alkalmazások: valamely $\alpha > 0$ szám esetén

  1. a

     $$\sum_{n=1} \left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

(hiperharmonikus) sor pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 1$, ui. az

$$f(x) := \frac{1}{x^\alpha} \qquad (x \in (0, +\infty))$$

függvény pozitív, monoton fogyó és

$$\int_1^{+\infty} f = \begin{cases} +\infty & (0 < \alpha < 1), \\ +\infty & (\alpha = 1), \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & (1 < \alpha); \end{cases}$$

valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} = f(n+1).$$

Sőt $\alpha > 1$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \int_1^{+\infty} f \leq f(1),$$

azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1} + 1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

2. a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n \ln^\alpha(n)} \right)$$

sor pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 1$, ui. az

$$f(x) := \frac{1}{(x-1)\ln^\alpha(x-1)} \qquad (x \in (2, +\infty))$$

függvény pozitív, monoton fogyó és

$$\int_3^{+\infty} f = \begin{cases} +\infty & (0 < \alpha < 1), \\ +\infty & (\alpha = 1), \\ \dfrac{1}{(\alpha - 1)\ln^{\alpha-1}(3)} & (1 < \alpha); \end{cases}$$

valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{(2+n)\ln^\alpha(2+n)} = f(3+n). \quad \blacksquare$$

Bizonyos ponthalmazok ívhossza, területe, térfogata és felszíne

Feladat. Tulajdonítható-e térfogat az

$$\mathcal{F} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \in [4,+\infty),\ y^2+z^2 \leq \frac{1}{\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}}\right\}$$

ponthalmaznak?

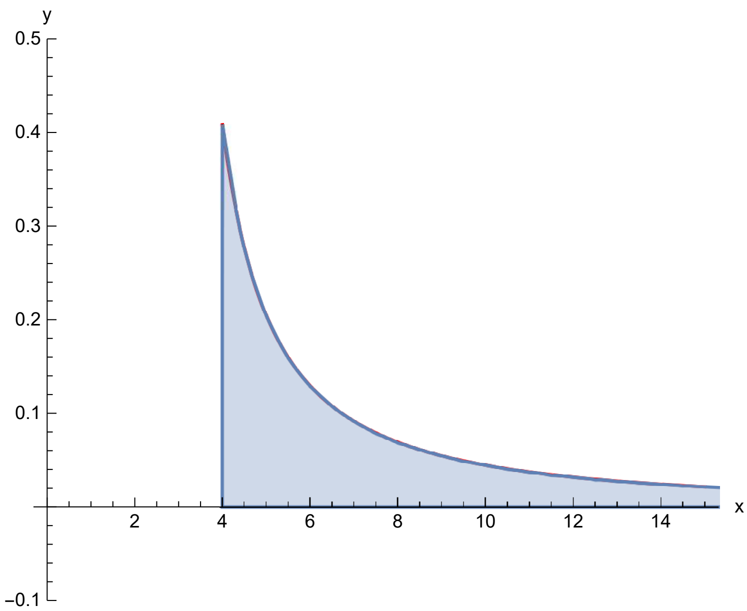
Útm. Világos, hogy

$$\mathcal{F} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \in [4,+\infty),\ \sqrt{y^2+z^2} \leq |f(x)|\right\}.$$

ahol (vö. 4. ábra)

$$f : [4,+\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}}$$

Mivel bármely $x \in [4,+\infty)$ esetén



4. ábra

$$
\begin{aligned}
f^2(x) &= \frac{1}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \\
&= \frac{1}{(x-2)(x-3)} - \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)-(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \\
&= \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1},
\end{aligned}
$$

ezért, ha $\omega \in [4, +\infty)$, akkor

$$
\int_4^{\omega} f^2(x)\,dx = \left[\ln(\sqrt{x-3}) - \ln(x-2) + \ln\sqrt{(x-1)}\right]_4^{\omega} = \left[\ln\left(\sqrt{\frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}}\right)\right]_4^{\omega} =
$$

$$
= \ln\left(\sqrt{\frac{(\omega-3)(\omega-1}{(\omega-2)^2}}\right) - \ln\left(\sqrt{\frac{1\cdot 3}{4}}\right) \longrightarrow \ln(1) + \ln(2) \quad (\omega \to +\infty).
$$

Az $\mathcal{F}$ ponthalmaznak tehát tulajdonítható térfogat:

$$
V(\mathcal{F}) = \pi \cdot \int_4^{+\infty} f^2(x)\,dx = \pi \cdot \ln(2). \quad \blacksquare
$$

Feladat. Legyen $0 < r < R$, majd $\alpha \in (0, r)$. Számítsuk ki annak az $\mathcal{S}_\alpha$ forgásfelületnek a felszínét, amelyet az

$$
x^2 + (y-R)^2 = r^2 \qquad (x \in (-\alpha, \alpha))
$$

körívek x-tengely körüli megforgatásával kapunk!

Útm. Világos, hogy az alsó, ill. a felső körív az

$$
f_- : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}, \quad R - \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad \text{ill. az} \qquad f_+ : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}, \quad R + \sqrt{r^2 - x^2}
$$

függvény grafikonja. Így $A(\mathcal{S}_\alpha) =$

$$2\pi\cdot\int_{-\alpha}^{\alpha}\left\{f_-\cdot\sqrt{1+(f_-')^2}+f_+\cdot\sqrt{1+(f_+')^2}\right\}=2\pi\cdot\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx+$$

$$+2\pi\cdot\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx=$$

$$=\quad 2\pi\cdot\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\cdot\left\{R-\sqrt{r^2-x^2}+R+\sqrt{r^2-x^2}\right\}\,dx=4\pi\cdot\int_0^{\alpha}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\cdot 2R\,dx=$$

$$=\quad 8\pi Rr\cdot\int_0^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=8\pi R\cdot\int_0^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,dx=8\pi R^2\left[r\cdot\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^{\alpha}=8\pi Rr\arcsin\left(\frac{\alpha}{r}\right).$$

Megjegyezzük, hogy az $\alpha\longrightarrow r$ határesetben

$$8\pi Rr\arcsin\left(\frac{\alpha}{r}\right)\longrightarrow 8\pi Rr\cdot\frac{\pi}{2}$$

és $\mathcal{S}_\pi$ épp egy tórusz felülete, így anak felszíne $4\pi^2Rr$. ■

Feladat. Legyen $0<R\in\mathbb{R}$ és $r\in(0,R)$. Határozzuk meg az

$$f:[-r,r]\to\mathbb{R},\qquad f(x):=\sqrt{R^2-x^2}$$

függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával előálló forgásfelület felszínét!

Útm. Mivel

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\qquad(x\in[-r,r]),$$

ezért a kérdéses felület (a $2r$ magasságú **gömböv** $\mathcal{S}_r$) felszíne:

$$\begin{aligned}A(\mathcal{S}_r)\quad&=\quad 2\pi\cdot\int_{-r}^{r}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx=\\&=\quad 2\pi\cdot\int_{-r}^{r}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=4\pi\cdot\int_0^{r}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\,dx=\\&=\quad 4\pi\cdot\int_0^{r}\sqrt{R^2}\,dx=4R\pi\cdot[x]_0^r=4Rr\pi.\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy az $r \longrightarrow R$ határesetben a gömbfelület felszínét kapjuk:

$$4rR\pi \longrightarrow 4R^2\pi \qquad (r \to R).$$

Fresnel-integrálok

A a fényinterferencia vizsgálatok matematikai elemzésénél, illetve az út-/vasútépítés során gyakran találkozunk az

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx, \qquad \text{ill. az} \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$$

ún. **Fresnel-integrál**lal.[2]

Világos, hogy bármely $\sqrt{\pi/2} < \omega \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} \sin(x^2)\,dx &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \sin(x^2)\,dx + \int_{\sqrt{\pi/2}}^{\omega} \sin(x^2)\,dx \overset{t:=x^2}{=} \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \sin(t^2)\,dt + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\omega^2} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,dt = \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \sin(t^2)\,dt - \frac{1}{2}\frac{\cos(x^2)}{x} - \frac{1}{4}\int_{\pi/2}^{\omega^2} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\,dt. \end{aligned}$$

A majoránskritérium alkalmazásával látható, hogy az

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\,dt$$

integrál abszolút konvergens (vö. **Példa**):

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\right| dt \leq \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,dt - \int_1^{\pi/2} \frac{1}{t^{3/2}}\,dt = \frac{1}{\frac{3}{2}-1} - \int_1^{\pi/2} \frac{1}{t^{3/2}}\,dt \in \mathbb{R}.$$

Így a cos korlátossága következtében

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x} = 0,$$

ahonnan

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \sin(t^2)\,dt - \frac{1}{4}\int_{\pi/2}^{\omega^2} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\,dt \in \mathbb{R}.$$

[2] Augustin-Jean Fresnel (1788-1827).

A másik Fresnel-integrál konvergenciája hasonlóképpen látható be. MEGJEGYEZZÜK, hogy

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx.$$

A Wallis-formula

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor fennáll az

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin(x))\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos(x))\,dx$$

egyenlőség!

Útm. A helyettesítéses integrálás tételét, illetve a

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

egyenlőséget alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin(x))\,dx \overset{t:=\frac{\pi}{2}-x}{=} -\int_{\pi/2}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)\,dt = -\int_{\pi/2}^{0} f(\cos(t))\,dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos(t))\,dt. \quad \blacksquare$$

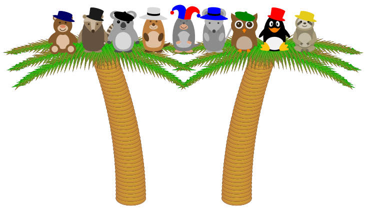
Emlékeztető. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$. Ekkor

1. $n! := \prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k=0}^{n-1}(n-k) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (**faktoriális**);
2. $$n!! := \begin{cases} \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}(n-2k) = n \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2 & (n \text{ páros}), \\ \prod_{k=0}^{\frac{n+1}{2}-1}(n-2k) = n \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1 & (n \text{ páratlan}). \end{cases}$$ (**szemifaktoriális**);

Nyilvánvaló, hogy

$$0! = 1, \qquad 0!! = 1, \qquad \text{ill.} \qquad (n+1)! = n! \cdot (n+1).$$

A következő határértékreláció alkalmas a



közelítő kiszámítására.

Tétel (Wallis-formula).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left((2n+1)\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k+1)^2}\right)=\frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Biz.

1. lépés. A fentiek következtében világos, hogy tetszőleges $n\in\mathbb{N}_0$ indexre

$$I_n:=\int_0^{\pi/2}\sin^n(x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^n(x)\,dx. \tag{10}$$

Ha $n=0$, ill. $n=1$, akkor

$$I_0=\int_0^{\pi/2}1\,dx=\frac{\pi}{2}\qquad\text{és}\qquad I_1=\int_0^{\pi/2}\cos(x)\,dx=[\sin(x)]_0^{\pi/2}=1,$$

és ha $2\leq n\in\mathbb{N}$, akkor parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$I_n=\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2(x))\cos^{n-2}(x)\,dx=I_{n-2}-\int_0^{\pi/2}\sin(x)\cos^{n-2}(x)\sin(x)\,dx=$$

$$=\quad I_{n-2}+\left[\frac{\cos^{n-1}(x)}{n-1}\sin(x)\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{n-1}(x)}{n-1}\cos(x)\,dx=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}\cdot I_n,$$

azaz

$$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot I_{n-4}=\ldots\qquad(2\leq n\in\mathbb{N}).$$

Így, ha

- n páros, azaz alkalmas $k\in\mathbb{N}_0$ indexre $n=2k$, akkor

$$I_{2k}=\prod_{l=1}^{k}\frac{2l-1}{2l}\cdot I_0=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2};$$

- n páratlan, azaz alkalmas $k \in \mathbb{N}_0$ indexre $n = 2k+1$, akkor

$$I_{2k+1} = \prod_{l=1}^{n} \frac{2l}{2l+1} \cdot I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 1.$$

2. lépés. Mivel

$$0 \leq \cos(x) \leq 1 \qquad (x \in [0, \pi/2])$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\cos^{2n}(x) \geq \cos^{2n+1}(x) \geq \cos^{2n+2}(x) \qquad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right),$$

ezért az integrál monotonitása alapján

$$I_{2n} \geq I_{2n+1} \geq I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot I_{2n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan

$$1 \geq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \geq \frac{2n+1}{2n+2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

következik. A Sandwich-tételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\lim \left(\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\right) = 1, \tag{11}$$

azaz

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}(2n+1)\frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)!!]^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k+1)^2}\right) = 1.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left((2n+1)\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k+1)^2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

azaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)} = \frac{\pi}{2}. \qquad \blacksquare$$

A Gauß-féle hibaintegrál

Az alkalmazásokban lépten-nyomon találkozhatunk az alábbi eredménnyel.

Tétel.
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Biz.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy az
$$I_n := \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$$
imptoprius integrál minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén konvergens. Valóban, tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén a
$$[0,+\infty) \ni x \mapsto x^n e^{-x^2}$$
függvény folytonos, ezért (vö. **Tétel**) elég belátni, hogy az
$$\int_1^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx \tag{12}$$
improprius integrál konvergens. Ezután persze az is elmondható, hogy
$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx.$$
Mivel
$$\left|x^n e^{-x^2}\right| = \left|\frac{x^n}{e^{x^2}}\right| \leq \frac{x^n}{e^x} = x^n e^{-x} \qquad (1 \leq x \in \mathbb{R})$$
és (vö. **Feladat**)
$$\int_1^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx \in \mathbb{R},$$
ezért a majoránskritérium az
$$\int_1^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$$
improprius integrál konvergens voltára enged következtetni.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy
$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx, \qquad I_1 = \frac{1}{2}, \qquad I_n = \frac{n-1}{2} I_{n-2} \quad (2 \leq n \in \mathbb{N}). \tag{13}$$

Valóban, ha

- $n = 0$, akkor a Bernoulli-L'Hospital-szabály következtében

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0,$$

és így

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} 1\cdot e^{-x^2}\,dx = \left[x\cdot e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}\,dx = 2I_2.$$

- $n \in \mathbb{N}$, akkor a Bernoulli-L'Hospital-szabállyal adódó

$$\lim_{x\to+\infty} x^{n+1}e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{e^{x^2}} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{(n+1)!}{p(x)e^{x^2}} = 0$$

határérték-relációt használva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{+\infty} x^ne^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} 1\cdot x^ne^{-x^2}\,dx = \\
&= \left[xx^ne^{-x^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x\left(nx^{n-1}e^{-x^2} - 2xx^ne^{-x^2}\right)\,dx = \\
&= 0 - n\int_0^{+\infty} x^ne^{-x^2}\,dx + 2\int_0^{+\infty} x^{n+2}e^{-x^2}\,dx = -nI_n + 2I_{n+2}.
\end{aligned}$$

Innen

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n, \qquad \text{ill.} \qquad I_n = \frac{n-1}{3}I_{n-2}$$

következik. Ha tehát

- n páros, azaz alkalmas $k \in \mathbb{N}_0$ esetén $n = 2k$, akkor

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^k}\cdot I_0 = \frac{(2k-1)!!}{2^k}\cdot I_0$$

- n páratlan, azaz alkalmas $k \in \mathbb{N}_0$ esetén $n = 2k+1$, akkor

$$I_{2k+1} = \frac{(2k)\cdot(2k-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{2^k}\cdot I_1$$

így

$$I_1 = \int_0^{+\infty} x^ne^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = -\frac{0-1}{2} = \frac{1}{2}$$

következtében

$$I_{2k+1}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}{2}=\frac{k!}{2}.$$

3. lépés. Legyen $n\in\mathbb{N}$, ill.

$$\begin{aligned} p(u) &:= I_{n-1}\cdot u^2+2I_n\cdot u+I_{n+1}= \\ &= u^2\cdot\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x^2}\,dx+2u\cdot\int_0^{+\infty}x^{n}e^{-x^2}\,dx+\int_0^{+\infty}x^{n+1}e^{-x^2}\,dx= \\ &= \int_0^{+\infty}x^{n-1}(x+u)^2e^{-x^2}\,dx \qquad (u\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Ekkor nyilván

$$p(u)>0 \qquad (u\in\mathbb{R}^2),$$

így a másodfokú p polinom

$$-I_n^2+I_{n-1}I_{n+1}$$

minimuma is pozitív, azaz

$$I_n^2<I_{n-1}I_{n+1}.$$

4. lépés. A (13) rekurzív formula következtében

$$I_{n+1}=\frac{n}{2}\cdot I_{n-1}.$$

A fenti egyenlőtlenségből így

$$\frac{2}{n}\cdot I_n^2<I_{n-1}^2.$$

Mindez azt jelenti, hogy

$$\frac{2}{2n+1}\cdot I_{2n+1}^2<I_{2n}^2<I_{2n-1}\cdot I_{2n+1},$$

azaz

$$\frac{[n!]^2}{4n+2}<I_{2n}^2<\frac{[n!]^2}{4n}.$$

Az I_{2n}-re vonatkozó fenti formulát ide behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}<2I_0^2<\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}.$$

Inne az $n\to\infty$ határátmenetben a (9)-beli Wallis-formulát használva kapjuk azt, hogy

$$2I_0^2=\frac{\pi}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad \int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=I_0=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, akkor igaz az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma\sqrt{2\pi}$$

állítás!

Útm. Mivel bármely

- $0 \le \omega \in \mathbb{R}$ esetén a
$$t := \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$$
helyettesítéssel
$$\int_0^{\omega} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{\omega-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} \exp\left(-t^2\right) \sigma\sqrt{2}\, dt$$
és
$$\lim_{\omega\to+\infty} \left\{ \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} \exp\left(-t^2\right) \sigma\sqrt{2}\, dt + \int_0^{\frac{\omega-\mu}{\sigma\sqrt{2}}} \exp\left(-t^2\right) \sqrt{2}\sigma\, dt \right\} =$$
$$= \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt + \sqrt{2}\sigma \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt + \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2},$$
ezért
$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt + \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2}.$$

- $0 \ge \alpha \in \mathbb{R}$ esetén a
$$t := \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$$
helyettesítéssel
$$\int_{\alpha}^{0} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{\frac{\alpha-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} \exp\left(-t^2\right) \sigma\sqrt{2}\, dt$$
és
$$\lim_{\alpha\to-\infty} \left\{ \int_{\frac{\alpha-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} \exp\left(-t^2\right) \sigma\sqrt{2}\, dt - \int_{\frac{-\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} \exp\left(-t^2\right) \sigma\sqrt{2}\, dt \right\} =$$
$$= \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\, dt - \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2} - \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt,$$
ezért
$$\int_{-\infty}^{0} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2} - \sqrt{2}\sigma \int_{-\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{0} e^{-t^2}\, dt,$$

ahonnan az állítás már következik. ■

A valószínűségszámításban és a statisztikában fontos szerepe van az

$$f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és a

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénynek ($\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$). Az f-et a **standard normális eloszlás sűrűségfüggvényének**, Φ-t pedig a **standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének** vagy **valószínűségintegrál**nak, ill. **Gauß-féle hibaintegrál**nak nevezik. A fenti f függvény harang alakú grafikonját, Carl Fiedrich Gauß ($1777 - 1855$) arcképét, valamint Göttingen történelmi épületeit láthatjuk az 1989-ben, a Német Szövetségi Bank által kibocsátott 10 márkás bankjegyen (vö. 5. ábra).

5. ábra

Feladat. A valószínűségszámításban a $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ **paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvényét** a következő módon értelmezik:

$$f_\lambda(x) := \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ábrázoljuk f_1-et, ill. f_2-t a pozitív féltengelyen! Mutassuk meg, hogy minden $\lambda > 0$ esetén

1. az f_λ grafikonja alatti terület 1-gyel egyenlő:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x)\,dx = 1;$$

2. az exponenciális eloszlás **várható érték**e $\frac{1}{\lambda}$, azaz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\lambda(x)\,dx = \frac{1}{\lambda};$$

3. az exponenciális eloszlás **szórásnégyzet**e $\frac{1}{\lambda^2}$, azaz fenáll az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\lambda(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\lambda(x)\,dx\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

egyenlőség!

Útm. Az f_1 és f_2 függvényeknek a pozitív féltengelyre vett leszűkítésének grafikonjai láthatók az 6 ábrán.

1. Tetszőleges $\lambda > 0$ esetén

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^\omega = \lim_{\omega\to+\infty} \left\{-\frac{1}{e^{\lambda\omega}} + 1\right\} = 1.$$

2. A várható érték parciális integrálással adódik:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\lambda(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_0^\omega x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \left\{\left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\omega + \int_0^\omega e^{-\lambda x}\,dx\right\} =$$

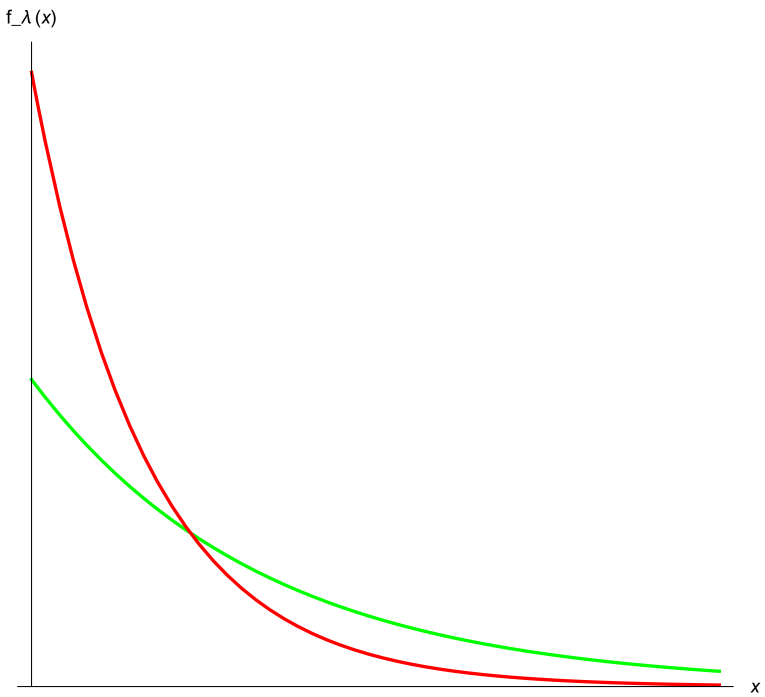
$$= \lim_{\omega\to+\infty} \left\{-\frac{\omega}{e^{\lambda\omega}} - \frac{1}{\lambda}\left[e^{-\lambda x}\right]_0^\omega\right\} = \lim_{\omega\to+\infty} \left\{-\frac{\omega}{e^{\lambda\omega}} - \frac{1}{\lambda e^{\lambda\omega}} + \frac{1}{\lambda}\right\} = \frac{1}{\lambda}.$$

3. A szórásnégyzetet kétszeres parciális integrálással kapjuk, ahol

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\lambda(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\int_0^{\omega} x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \\
&= \lim_{\omega\to+\infty}\left\{\left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_0^{\omega} + \int_0^{\omega} 2xe^{-\lambda x}\,dx\right\} = \lim_{\omega\to+\infty}\left\{-\frac{\omega^2}{e^{\lambda\omega}} + 2\int_0^{\omega} xe^{-\lambda x}\,dx\right\} = \\
&= \lim_{\omega\to+\infty}\left\{-\frac{\omega^2}{e^{\lambda\omega}} - \left[\frac{2xe^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{\omega} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{\omega} e^{-\lambda x}\,dx\right\} = \\
&= \lim_{\omega\to+\infty}\left\{-\frac{\omega^2}{e^{\lambda\omega}} - \frac{2\omega}{\lambda e^{\lambda\omega}} + \frac{2}{\lambda}\left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{\omega}\right\} = \\
&= \lim_{\omega\to+\infty}\left\{-\frac{\omega^2}{e^{\lambda\omega}} - \frac{2\omega}{\lambda e^{\lambda\omega}} + \frac{2}{\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{\lambda e^{\lambda\omega}}\right)\right\} = \frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Következésképpen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \quad \blacksquare$$



6. ábra. Az f_1 és f_2 függvények grafikonjai a pozitív féltengelyen.

A gamma-függvény

Az ebben a szakaszban sorra kerülő fogalmak és tételek tárgyalásához melegen ajánljuk a nyájas olvasónak, hogy tanulmányozza Simon Péternek a **Gamma-függvény** c. kitűnő oktatási segédanyagát.

Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy igaz a

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > 0$$

ekvivalencia!

Útm. Az állítás igazolásához megvizsgáljuk az

$$I_1 := \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt \qquad \text{és az} \qquad I_2 := \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

improprius integrál konvergenciáját.

- Mivel
$$\lim_{t\to 0} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^{1-x}}} = \lim_{t\to 0} e^{-t} = 1,$$
ezért a határérték-kritérium következtében igaz az
$$I_1 \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,dt \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > 0.$$
ekvivalencia.
- Mivel
$$\lim_{t\to +\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0} e^{-t}t^{x+1} = 0,$$
ezért a határértékkritérium következtében igaz az
$$I_2 \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \mathbb{R}.$$
ekvivalencia.

Mindez azt jelenti, hogy

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (I_1 \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad I_2 \in \mathbb{R}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > 0. \quad \blacksquare$$

Az alábbiakban a valószínűségszámításban, illetve a számelmélet egy részében gyakran előfordó **gamma-függvény** (**Γ-függvény**), azaz a

$$\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

függvény legfontosabb tulajdonságairól lesz szó.

Feladat. Mutassuk meg, hogy a gamma-függvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokal!

1. $\Gamma(1) = 1$;
2. tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Útm.

1. Világos, hogy

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{\omega\to+\infty}\int_0^{\omega} e^{-t}\,dt = \lim_{\omega\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^{\omega} = \lim_{\omega\to+\infty}(1-e^{-\omega}) = 1-0 = 1.$$

2. Ha $0 < a < b \in \mathbb{R}$ és $0 < x \in \mathbb{R}$, akkor az $a \to 0$, $b \to +\infty$ határátmenettel (vö. **Analízis 2 GY**, 169. oldal)

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_a^b t^x e^{-t}\,dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_a^b - x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,dt = a^x e^{-a} - b^x e^{-b} + x\Gamma(x)\\ &= \frac{a^x}{e^a} - \frac{b^x}{e^b} + x\Gamma(x) = e^{x\ln(a)-a} - e^{x\ln(b)-b} + x\Gamma(x) \longrightarrow x\Gamma(x).\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy

1. a gamma-függvényt szokás faktoriális-függvénynek kiterjesztése:

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

ui.

- ha $n = 0$, akkor a fentiek következtében $\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1 = 0!$;
- ha pedig valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\Gamma(n+1) = n!$, akkor

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!.$$

2. a gamma-függvény nem az egyetlen az

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(x+1) = x \cdot \varphi(x) \qquad (0 < x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet kielégítő függvény. Ha ui. $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ olyan 1-periodikus függvény, amelyre $f(1) = 1$, pl.

$$f(x) := \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos(2\pi x) \qquad (0 < x \in \mathbb{R}),$$

akkor az $f \cdot \Gamma$ is rendelkezik a γ-függvény fenti feladatbeli első két tulajdonsággal, ui.

$$(f \cdot \Gamma)(1) = f(1) \cdot \Gamma(1) = 1 \cdot 1 = 1$$

és

$$(f \cdot \Gamma)(x+1) = f(x+1) \cdot \Gamma(x+1) = f(x) \cdot x \cdot \Gamma(x) = x \cdot (f \cdot \Gamma)(x) \qquad (0 < x \in \mathbb{R}).$$

Ha a fenti két tulajdonséghoz hozzávesszük a gamma-függvény logaritmikus konvexitását, akkor már elmondható, hogy ezzel a tulajdonsággal kiegészült fenti kettő egyértelműen jellemzi a gamma-függvényt.

A Stirling-formula

Az alábbiakban a matematika szinte minden ágában, különösen a valószínűségszámításban használatos, a faktoriális nagy értékeit közelítő formulát – az ún. **Stirling[3]-formulát** fogjuk tárgyalni.

Tétel.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+1/2} \cdot e^{-n} \qquad (n \to \infty), \tag{14}$$

azaz

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \right) = 1.$$

Biz.

1. lépés. A logaritmusfüggvény additív tulajdonsága, illetve szigorú monotonitása következtében bármely $n \in \mathbb{N}$ index esetén

$$\ln(n!) = \ln(1) + \ln(2) + \ldots + \ln(n-1) + \ln(n),$$

[3]James Stirling (1692-1770) skót matematikus (nem összetévesztendő Robert Stirling (1790-1878) brit mérnökkel, a Stirling-motor feltalálójával).

ill.

$$\int_{n-1}^{n} \ln(x)\,dx < \ln(n) < \int_{n}^{n+1} \ln(x)\,dx, \tag{15}$$

ahol $n = 1$ esetén

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(x)\,dx &= \lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^1 1\cdot\ln(x)\,dx = \lim_{\alpha\to 0}\left\{[x\cdot\ln(x)]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 1\,dx\right\} = \lim_{\alpha\to 0}\{-\alpha\ln(\alpha)+\alpha-1\} = \\ &= -\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(\alpha)}{\frac{1}{\alpha}} - 1 = -\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{\alpha}}{-\frac{1}{\alpha^2}} - 1 = 0 - 1 = -1.\end{aligned}$$

A (15)-beli egyenlőtlenségeket összeadva $n \in \{1,\ldots,N\}$ azt kapjuk, hogy

$$\int_0^N \ln(x)\,dx < \ln(N!) < \int_1^{N+1} \ln(x)\,dx.$$

Mivel tetszőleges $x \in (0,+\infty)$, ill. $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + c,$$

ezért bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$n\cdot\ln(n) - n < \ln(n!) < (n+1)\cdot\ln(n+1) - n.$$

2. lépés. Legyen

$$a_n := \ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln(n) + n \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Ekkor

$$a_n - a_{n+1} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}\right) - 1 \qquad (n\in\mathbb{N})$$

Elemi eszközökkel belátható (vö. **Analízis 2 GY** (2020 ősz), 119-120. old.), hogy

$$\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (x\in(-1,1)).$$

Következésképpen

$$a_n - a_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)^{2k}} \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

ahonnan

$$0 < a_n - a_{n+1} < \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2k}} < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

következik. Mindez azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő, a $\left(a_n - \frac{1}{12n}\right)$ sorozat pedig szigorúan monoton növekedő. Az (a_n) sorozat tehát konvergens:

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(a_n - \frac{1}{12n}\right) \in \mathbb{R}$$

Így az exponenciális függvény folytonossága következtében

$$e^{\alpha} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+1/2} \cdot e^{-n}},$$

azaz

$$n! \sim n^{(n+1/2)} \cdot e^{-n} \cdot e^{\alpha} \quad (n \to \infty). \tag{16}$$

3. lépés. Megmutatjuk, hogy fennáll az $e^{\alpha} = \sqrt{2\pi}$ egyenlőség. A Wallis-formula szerint (vö. (9))

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{\pi}{2},$$

azaz

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!! \cdot \sqrt{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad (n \to \infty).$$

Felhasználva a tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre fennálló

$$(2n)!! = 2^n \cdot n!, \qquad \text{ill.} \qquad \frac{(2n)!}{n!} = 2^n \cdot (2n-1)!!$$

egyenlőtlenségeket (vö. **Analízis 1 EAGY** (2022 tavasz), 22-23. old.) azt kapjuk, hogy

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad (n \to \infty).$$

Ez a (16) fényében azt jelenti, hogy

$$\frac{2^{2n} \cdot \left(n^{2n+1} \cdot e^{-2n} \cdot e^{2\alpha}\right)}{(2n)^{(2n+1/2)} \cdot e^{-2n} \cdot e^{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad (n \to \infty),$$

ahonnan átrendezéssel azt kapjuk, hogy $e^{\alpha} = \sqrt{2\pi}$. ■

A Stefan-Boltzmann-törvény

Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx$$

integrált!

Útm. A Bernoulli-L'Hospital-szabály felhasználásával könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{e^x - 1} = 0,$$

ui.

$$\frac{x^3}{e^x - 1} \sim \frac{3x^2}{e^x} \longrightarrow 0 \qquad (x \to 0).$$

Az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^3}{e^x - 1} & (x > 0), \\ & \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

függvény tehát folytonos, ezért bármely $\omega \geq 0$ számra $f \in \mathfrak{R}[0, \omega]$. Így

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x)\, dx &= \int_0^{+\infty} x^3 \cdot \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\, dx = \int_0^{+\infty} \left(x^3 \cdot e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \right) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(x^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)x} \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(x^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \right) dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{+\infty} x^3 \cdot e^{-nx}\, dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{\omega\to+\infty} \int_0^{\omega} x^3 \cdot e^{-nx}\, dx \right) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} x^3 \cdot e^{-nx}\, dx &= \left[\frac{x^3 e^{-nx}}{-n} \right]_0^{\omega} + \frac{3}{n} \int_0^{\omega} x^2 \cdot e^{-nx}\, dx = -\frac{\omega^3}{n e^{n\omega}} + \left[\frac{3x^2 e^{-nx}}{-n^2} \right]_0^{\omega} + \frac{6}{n^2} \int_0^{\omega} x e^{-nx}\, dx = \\ &= -\frac{\omega^3}{n e^{n\omega}} - \frac{3\omega^2}{n^2 e^{n\omega}} + \left[\frac{6x e^{-nx}}{-n^3} \right]_0^{\omega} + \frac{6}{n^3} \int_0^{\omega} e^{-nx}\, dx = -\frac{\omega^3}{n e^{n\omega}} - \frac{3\omega^2}{n^2 e^{n\omega}} - \frac{6\omega}{n^3 e^{n\omega}} + \\ &\quad + \frac{6}{n^3} \left[\frac{e^{-nx}}{-n} \right]_0^{\omega} = -\frac{\omega^3}{n e^{n\omega}} - \frac{3\omega^2}{n^2 e^{n\omega}} - \frac{6\omega}{n^3 e^{n\omega}} + \frac{6}{n^4} - \frac{6}{n^4 e^{n\omega}} \end{aligned}$$

következtében a Bernoulli-L'Hospital-szabály többszöri felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x-1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\omega\to+\infty}\left(-\frac{\omega^3}{ne^{n\omega}} - \frac{3\omega^2}{n^2e^{n\omega}} - \frac{6\omega}{n^3e^{n\omega}} + \frac{6}{n^4} - \frac{6}{n^4e^{n\omega}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^4} \in \mathbb{R}.$$

Feladat. Közismert, hogy az **abszolút fekete test** emisszióképességének frekvenciától és hőmérséklettől való függésére

$$E(\nu,T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\cdot\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1} \qquad (\nu, T\in(0,+\infty)),$$

ill. (a $c=\lambda\nu$ helyettesítéssel) hullámhossztól és hőmérséklettől való függésére

$$E(\lambda,T) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda Tk}\right)-1} \qquad (\lambda, T\in(0,+\infty))$$

teljesül, ahol

c : a fény sebessége vákuumban,
ν : a sugárzás frekvenciája,
λ : a sugárzás hullámhossza,
k : a Boltzmann-állandó,
T : a sugárzó test abszolút hőmérséklete,
h : a Planck-állandó

(**Planck-féle sugárzási törvény**). Számítsuk ki a sugárzás teljes energiasűrűségét, azaz tetszőlegesen rögzített $T>0$ esetén az

$$\int_0^{+\infty} E(\nu,T)\,d\nu$$

integrált!

Útm.

$$\int_0^{+\infty} E(\nu,T)\,d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}\,d\nu = \frac{8\pi k^4T^4}{h^3c^3}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}\,dx\Big|_{x=\frac{h\nu}{kT}} =$$

$$= \underbrace{\frac{8\pi k^4}{h^3c^3}\cdot\frac{\pi^4}{15}}_{=:\sigma}\cdot T^4 \qquad (\textbf{Stefan-Boltzmann-törvény}). \quad \blacksquare$$

Stabilitáselmélet

A következő állításnak fontos szerepe van a nem-autonóm differenciálegyenletek megoldásainak stabilitásvizsgálata során.

Tétel (Barbalat-lemma). Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, olyan függvény, amelyre

$$f \in \mathfrak{E}\mathfrak{C}[0, +\infty) \qquad \text{és} \qquad \int_0^{+\infty} f \in \mathbb{R}$$

teljesül. Ekkor fennáll a $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ határértékreláció!

Biz. Mivel $f \in \mathfrak{E}\mathfrak{C}[0, +\infty)$, ezért $f \in \mathfrak{C}[0, +\infty)$, így minden $a > 0$ esetén $f \in \mathfrak{R}[0, a]$. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy

$$f(x) \not\to 0 \qquad (x \to +\infty).$$

Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$ és $x : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ sorozat, amelyre

$$\lim(x_n) = +\infty \qquad \text{és} \qquad |f(x_n)| \geq \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az egyenletes folytonosság miatt a fenti ε-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \in [0, +\infty)$ esetén

$$|t - x_n| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(t) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, ill. $t \in [x_n, x_n + \delta]$ esetén

$$|f(t)| = |f(x_n) - (f(x_n) - f(t))| \geq |f(x_n)| - |f(x_n) - f(t)| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

amiből

$$\left| \int_0^{x_n+\delta} f - \int_0^{x_n} f \right| = \left| \int_{x_n}^{x_n+\delta} f \right| = \int_{x_n}^{x_n+\delta} |f| > \frac{\varepsilon\delta}{2} > 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

következik (a második egyenlőségjel azért jogos, mert f állandó előjelű az $[x_n, x_n + \delta]$ intervallumon). Ez utóbbi pedig ellentmond annak, hogy

$$\int_0^{+\infty} f \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

2. gyakorlat (2026. 02. 18.)

Szükséges ismeretek.

- A metrikus tér fogalma. Példák metrikus terekre.
- A normált tér fogalma. Példák normált terekre. Ekvivalens normák.
- Az euklideszi tér fogalma. Példák eukliszi terekre. Alaptulajdonságok.

Metrikus terek

Emlékeztető. Adott $\emptyset \neq \mathcal{H}$ halmaz esetén az $(\mathcal{H}, \rho)$ rendezett párt **metrikus tér**nek nevezzük, ha ρ **metrika** ($\mathcal{H}$-n), azaz

$$\rho : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$$

olyan függvény, amleyre bármely $x, y, z \in \mathcal{H}$ esetén

(M1) $\rho(x, y) \geq 0$ és $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (ρ **pozitív definit**);

(M2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (ρ **szimmetrikus**);

(M3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (**háromszög-egyenlőtlenség**)

teljesül. A ρ leképezést szokás **távolségfüggvény**nek nevezni, a $\rho(x, y) \geq 0$ valós számot pedig az x **és az** y **pont távolságá**nak.

Példák.

1. Ha $\mathcal{H} := \mathbb{K}$, akkor a

$$\rho(x, y) := |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{K})$$

leképezés nyilván metrika.

2. Ha $\emptyset \neq \mathcal{H}$ tetszőleges, akkor a

$$\rho_{\text{diszkr}}(x, y) := \begin{cases} 1 & (x \neq y) \\ 0 & (x = y) \end{cases} \qquad (x, y \in \mathcal{H})$$

leképezés metrika (**diszkrét metrika**), hiszen

- a ρ leképezés nyilvánvalóan pozitív definit és szimmetrikus;

- a ρ leképezésre teljesül a háromszög-egyenlőség. Legyen ui. $x, y, z \in \mathcal{H}$. Két esetet különböztetünk meg:

  1. eset. Ha $x = y$, akkor **(M3)** bal oldala 0, így az egyenlőtlenség nyilvánvaló.

  2. eset. Ha $x \neq y$, akkor $z \neq x$ vagy $z \neq y$, ui. z nem lehet mindkettőjükkel egyenlő. Következésképpen a $\rho(x, z)$ és $\rho(z, y)$ számok legalább egyike 1-gyel egyenlő, így

$$\rho(x, y) = 1 \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

3. Ha $d \in \mathbb{N}$, $p \in (0, +\infty]$, $\mathcal{H} := \mathbb{K}^d$, továbbá $x := (x_1, \ldots, x_d)$, $y := (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{K}^d$ esetén

$$\rho_p(x, y) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{d} |x_k - y_k|^p & (0 < p < 1), \\ \displaystyle\left(\sum_{k=1}^{d} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty), \\ \max\{|x_k - y_k| \in \mathbb{R} :\ k \in \{1, \ldots, d\}\} & (p = +\infty), \end{cases}$$

akkor ρ_p metrika $\mathcal{H}$-n ($p \geq 1$ esetén ρ_p neve **Minkowszki-metrika**), speciálisan

- $p = 1$ esetén ρ_p neve **taxi-metrika** vagy **Manhattan-metrika** vagy **Mannheim-metrika** (vö. 7. ábra);
- $p = 2$ esetén ρ_p neve **euklideszi metrika**;
- $p = \infty$ esetén ρ_p neve **Csebisev-metrika**.

4. Ha $\emptyset \neq M$ tetszőleges, akkor a $(\mathcal{K}(M), \rho_\infty)$ pár metrikus tér, ahol

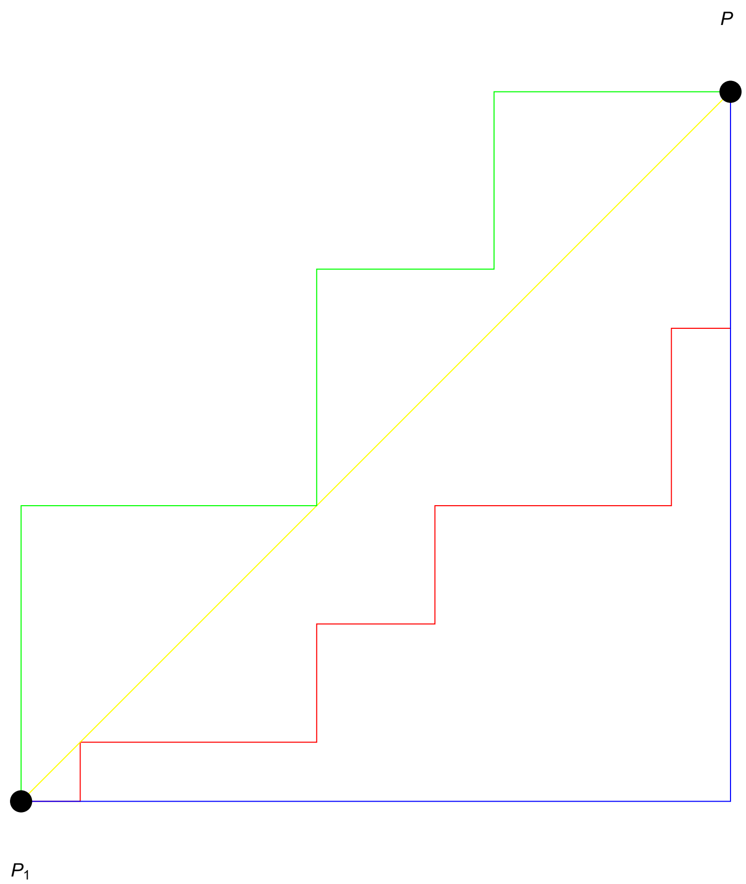
$$\mathcal{K}(M) := \mathcal{K}(M, \mathbb{K}) := \left\{ f : M \to \mathbb{K} :\ \sup_M |f| < +\infty \right\}$$

(az M halmazon értelmezett **korlátos függvény**ek halmaza), ill.

$$\rho_\infty(f, g) := \sup_M |f - g| \qquad (f, g \in \mathcal{K}(M, \mathbb{K})),$$

hiszen

- mivel $\mathcal{K}(H, \mathbb{K})$ vektortér, ezért ρ_∞ jólértelmezett;
- ρ_∞ nyilvánvalóan szemidefinit, szimmetrikus, valamint definit is egyben (ui. $f \neq g$ azt jelenti, hogy alkalmas $x \in H$ esetén $f(x) \neq g(x)$);



7. ábra. A taxis- és az euklideszi távolság: a taxik geometriájában a zöld, a piros és a kék útvonalak mindegyike azonos legrövidebb $2d$ hosszúságú; az euklideszi geometriában a sárga vonal hossza és ez az egyedülálló legrövidebb $d\sqrt{2}$ hosszúságú út.

- a háromszög-egyenlőtlenség a következőképpen látható be. Ha $x \in H$, akkor

$$\begin{aligned} |f(x)-g(x)| &\leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)| \leq \sup_{x\in H}|f(x)-h(x)|+\sup_{x\in H}|h(x)-g(x)| = \\ &= \rho_\infty(f,h)+\rho_\infty(h,g), \end{aligned}$$

ahonnan

$$\rho_\infty(f,g)=\sup_{x\in H}|f(x)-g(x)| \leq \rho_\infty(f,h)+\rho_\infty(h,g)$$

következik.

5. Ha $p \in (0, +\infty]$, akkor a

$$l_p := \begin{cases} \left\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\right\} & (0 < p < +\infty), \\ \left\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\right\} & (p = \infty) \end{cases}$$

halmazon a

$$\rho_p(x, y) := \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p & (0 < p < 1), \\ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty), \\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| & (p = \infty) \end{cases} \qquad (x = (x_n),\ y = (y_n) \in l_p)$$

leképezés metrika.

6. Ha $p \in (0, +\infty]$, $\mathcal{H} := \mathfrak{C}[a, b]$, továbbá $f, g \in \mathfrak{C}[a, b]$ esetén

$$\rho_p(x, y) := \begin{cases} \int_a^b |f - g|^p & (0 < p < 1), \\ \left(\int_a^b |f - g|^p\right)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty), \\ \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| & (p = +\infty), \end{cases}$$

akkor ρ_p metrika.

7. Adott $d \in \mathbb{N}$, ill. $x := (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ esetén legyen

$$\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}.$$

Ekkor

(a) a

$$\rho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \rho(x, y) := \begin{cases} \|x - y\|_2 & (\exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad x = \lambda y \ \text{ vagy } \ y = \lambda x), \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & (\text{egyébként}) \end{cases}$$

leképezés metrika (**vasutas metrika** vagy **TGV-metrika**[4]).

[4] A TGV (*Train á Grande Vitesse*) a francia nagysebességű vonatrendszer.

(b) a

$$\rho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \rho(x,y) := \begin{cases} 0 & (x = y), \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & (\text{egyébként}) \end{cases}$$

leképezés metrika (**postás metrika**).

8. Legyen a $n \in \mathbb{N}$, ill. $\emptyset \neq \Sigma$ véges ún. **karakterhalmaz**, $\mathcal{H}$ pedig a Σ elemeiből álló n hosszúságú karaktersorozatok halmaza: $\mathcal{H} := \Sigma^n$. A Richard Wesley Hamming egy 1950-ben megjelent a hibajelző és hibajavító kódokról szóló alapvető tanulmányában bevezetett

$$\rho_{\mathcal{H}}(x,y) := |\{k \in \{1,2,\ldots,n\} : \; x_k \neq y_k\}| \qquad (x, y \in \mathcal{H})$$

leképezés metrika (**Hamming-metrika**),[5] ui.

- a $\rho_{\mathcal{H}}$ leképezés pozitív definit volta, ill. szimmetriája nyilvánvaló;
- a háromszög-egyenlőtlenség pedig így látható be. Legyen $x, y, z \in \mathcal{H}$. Két esetet különböztetünk meg:

  1. eset. Ha $x = y$, azaz tetszőleges $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $x_k = y_k$, akkor **(M3)** bal oldala 0, így az egyenlőtlenség nyilvánvaló.

  2. eset. Ha $x \neq y$, azaz alkalmas $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $x_k \neq y_k$, akkor $x_k \neq z_k$ vagy $y_k \neq z_k$. Következésképpen

  $$\{k \in \{1,\ldots,n\} : \; x_k \neq y_k\} \subset \{k \in \{1,\ldots,n\} : \; x_k \neq z_k\} \cup \{k \in \{1,\ldots,n\} : \; y_k \neq z_k\},$$

  és így

  $$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{H}}(x,y) &= |\{k \in \{1,2,\ldots,n\} : \; x_k \neq y_k\}| \leq \\ &\leq |\{k \in \{1,2,\ldots,n\} : \; x_k \neq z_k\}| + |\{k \in \{1,2,\ldots,n\} : \; y_k \neq z_k\}| = \\ &= \rho_{\mathcal{H}}(x,z) + \rho_{\mathcal{H}}(z,y). \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a következő módon is eljárhatunk.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy ha valamely $m \in \mathbb{N}$ esetén $(\mathcal{M}, d_1), \ldots, (\mathcal{M}, d_m)$ metrikus tér, akkor a

$$d_1 + \ldots + d_m : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$$

[5] A $\rho_{\mathcal{H}}$ leképezés tehát két karakterosrozathoz azt a számot redeli, hogy hány helyen különbözik egymástól a két karaktersorozat. Pl.:

(a) A 00110 és a 00100 Hamming-távolsága: 1.

(b) A 12345 és az 13344 Hamming-távolsága: 2.

(c) A *ház* és a *fák* Hamming-távolsága: 2.

leképezés metrika.

2. lépés. Nyilvánvaló, hogy ha (Σ, d) diszkrtét metrikus tér, akkor a fentiek következtében

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n} d(x_k, y_k) \qquad (x = (x_1,\ldots,x_n), y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathcal{H}).$$

szintén metrika. ■

Megjegyezzük, hogy

1. a Minkowski-metrika esetében tetszőleges $d \in \mathbb{N}$ esetén fennáll a

$$\lim_{p\to+\infty} \rho_p(x,y) = \rho_\infty(x,y) \qquad (x,y \in \mathbb{K}^d)$$

határérték-reláció, hiszen ha $x, y \in \mathbb{K}^d$, akkor

$$\begin{aligned}
(\max\{|x_k - y_k| \in \mathbb{R} : \; k \in \{1,\ldots,d\}\})^p &= \max\{|x_k - y_k|^p \in \mathbb{R} : \; k \in \{1,\ldots,d\}\} \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{d} |x_k - y_k|^p \leq \\
&\leq d \cdot \max\{|x_k - y_k|^p \in \mathbb{R} : \; k \in \{1,\ldots,d\}\} = \\
&= d \cdot (\max\{|x_k - y_k| \in \mathbb{R} : \; k \in \{1,\ldots,d\}\})^p ,
\end{aligned}$$

ezért

$$\rho_\infty(x,y) \leq \rho_p(x,y) \leq d^{1/p} \cdot \rho_\infty(x,y) \qquad (x,y \in \mathbb{K}^d),$$

ahonnan a Sandwich-tétel felhasználásával az igazolandó állítást kapjuk.

2. az informatikában (pl. **gépi tanulás**) igen gyakran használatos az euklideszi metrika, a taxi-metrika, a Hamming-metrika és általában a Minkowszki-metrika.

3. a **relativitáselmélet**ben használatos ún.

$$\rho : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \qquad \rho(x,y) := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - cx_4y_4$$

Minkowski-metrikának nevezett függvény nem metrika, ahol $c :=$ a fény sebessége vákuumban, hiszen pl. az $x := (1,0,0,1)$ pontra $\rho(x,x) = 1 - c \neq 0$.

Feladat. Fogalmazzzuk meg, majd oldjuk meg a

$$\min\left\{\int_0^1 |x^2-c|\,dx:\ c\in\mathbb{R}\right\}=?$$

minimumkeresési feladatot metrikus terekben!

Útm. Legyen

$$\rho_1(f,g):=\int_0^1|f-g|\qquad (f,g\in\mathcal{H}:=\mathfrak{C}[0,1]).$$

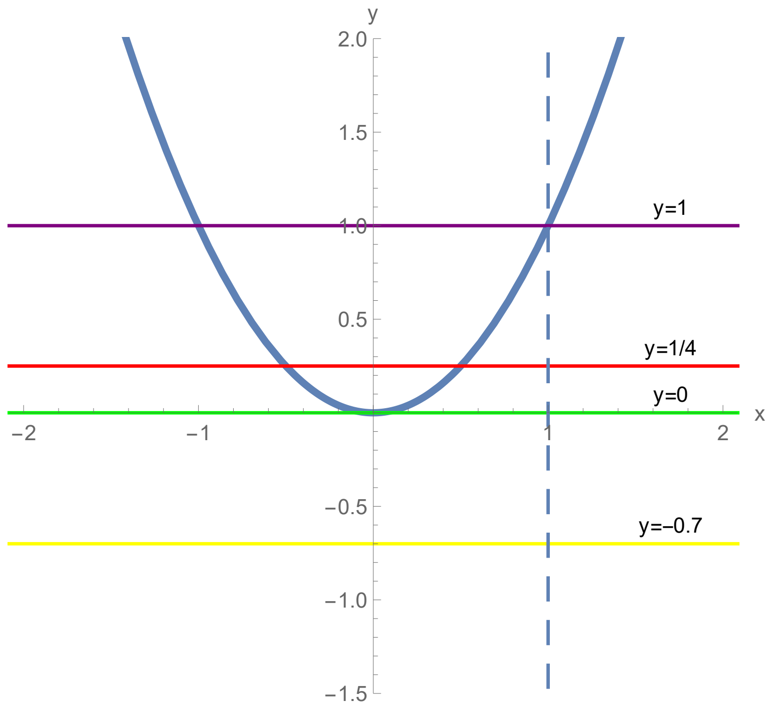
Keressük meg $(\mathcal{H},\rho_1)$ metrikus tér konstans függvények közül azokat, amelyek legközelebb vannak az

$$f(x):=x^2\qquad (x\in[0,1])$$

függvényhez. Geometriai megfontolással belátható, hogy

$$\left\{\int_0^1 |x^2-c|\,dx:\ c\in[0,1]\right\}<\left\{\int_0^1 |x^2-c|\,dx:\ c\in\mathbb{R}\backslash[0,1]\right\},$$

hiszen az $y=x^2$ és az $y=x$ görbék közrezárta ponthalmaz területe $c>1$, ill. $c<0$ esetén nagyobb, mint a $c=1$, ill. a $c=0$ esetben (vö. 8. ábra). Legyen tehát $c\in[0,1]$, majd számítsuk ki a



8. ábra

$$T_c := \int_0^1 |x^2 - c|\, dx$$

integrált. Mivel

$$x^2 = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt{c},$$

ezért

$$T_c = \int_0^{\sqrt{c}} (c - x^2), dx + \int_{\sqrt{c}}^1 (x^2 - c), dx = \left[cx - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{c}} + \left[\frac{x^3}{3} - cx\right]_{\sqrt{c}}^1 = \frac{4c\sqrt{c}}{3} - c + \frac{1}{3}.$$

Nyilvánvaló, hogy a

$$T : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad T(c) := T_c$$

függvény folytonos. Így a Weierstraß-tétel következményeként T-nek van minimuma és maximuma. Mivel bármely $c \in (0, 1)$ esetén

$$T'(c) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x} - 1 = 2\sqrt{c} - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = \frac{1}{4} \in (0, 1),$$

ezért

$$\min\{T(c) \in \mathbb{R} : \ c \in [0, 1]\} = \min\left\{T(0), T\left(\frac{1}{4}\right), T(1)\right\} = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{1}{4},$$

azaz a T függvény a $c = \dfrac{1}{4}$ értéknél veszi fel minimumát. Következésképpen

$$\min(H) = T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Tekintsük a $(\mathfrak{C}[-1, 1], \rho_\infty)$ metrikus teret, az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméterekkel jellemzett

$$g_\alpha(x) := \alpha \cdot x \qquad (x \in [-1, 1])$$

nyilván $\mathfrak{C}[-1, 1]$-beli elemeket és az

$$f(x) := x^2 - 1 \qquad (x \in [-1, 1])$$

függvényt. A g_α függvények melyike lesz legközelebb f-hez?

Útm. Világos, hogy a

$$H := \{\max\{|f(x) - g_\alpha(x)| \in \mathbb{R} : \; x \in [-1,1]\} \in \mathbb{R} : \; \alpha \in \mathbb{R}\}$$

halmaz minimumát keressük. Mivel

$$H = \left\{\max\left\{|x^2 - 1 - \alpha x| \in \mathbb{R} : \; x \in [-1,1] \in \mathbb{R}\right\} : \; \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$

ezért adott $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\varphi_\alpha(x) := x^2 - 1 - \alpha x \qquad (x \in [-1,1])$$

függvényt vizsgáljuk. Látható, hogy

$$\varphi_\alpha(-1) = \alpha, \qquad \varphi_\alpha(1) = -\alpha,$$

és tetszőleges $x \in (-1,1)$ esetén

$$\varphi'_\alpha(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \alpha/2,$$

továbbá

$$\varphi_\alpha(\alpha/2) = \ldots = -\alpha^2/4 - 1.$$

Így

$$\inf(H) = \inf\left\{\max\left\{1 + \frac{\alpha^2}{4}, |\alpha|\right\} \in \mathbb{R} : \; \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \inf\left\{1 + \frac{\alpha^2}{4} \in \mathbb{R} : \; \alpha \in \mathbb{R}\right\} = 1.$$

Tehát $\alpha = 0$ esetén lesz g_α legközelebb f-hez és

$$g_0(x) = 0 \qquad (x \in [-1,1]). \quad \blacksquare$$

Feladat. Tekintsük a $(\mathfrak{C}[0,2], \rho_2)$ metrikus teret, az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméterekkel jellemzett

$$g_\alpha(x) := \alpha \cdot x \qquad (x \in [0,2])$$

nyilván $\mathfrak{C}[0,2]$-beli elemeket és az

$$f : [0,2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x^2 & (x \in [0,1]), \\ 2-x & (x \in [1,2]) \end{cases}$$

függvényt. Határozzuk meg a

$$H := \{\rho_2(f, g_\alpha) \in \mathbb{R} : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

halmaz minimumát (ha létezik)!

Útm. Mivel

$$\rho_2(f, g_\alpha) = \sqrt{\int_0^2 |f - g_\alpha|^2},$$

ezért (ha létezik)

$$\min\{\rho_2(f.g_\alpha) \in \mathbb{R} : \ \alpha \in \mathbb{R}\} = \min\left\{\int_0^2 |f - g_\alpha|^2 \in \mathbb{R} : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

Mivel

$$\int_0^2 |f - g_\alpha|^2 = \int_0^1 \left(x^2 - \alpha x\right)^2 \, dx + \int_1^2 (2 - x - \alpha x)^2 \, dx \overset{\boxed{\text{HF}}}{=} \frac{8}{15} - \frac{11\alpha}{6} + \frac{8\alpha^2}{3}.$$

ezért

$$H = \{\varphi(\alpha) \in \mathbb{R} : \ \alpha \in \mathbb{R}\} := \left\{\frac{8}{15} - \frac{11\alpha}{6} + \frac{8\alpha^2}{3} \in \mathbb{R} : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

Elemi ismeretek fényében elmondható, hogy H-nak van minimuma, és az nem más, mint

$$\varphi\left(\frac{11}{16}\right) \overset{\boxed{\text{HF}}}{=} \frac{8}{15}.$$

Elmondható az is, hogy az adott metrikában $\alpha = 11/16$ esetén lesz g_α legközelebb f-hez. ■

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a metrika definíciójában szereplő tulajdonságok függetlenek!

Útm. A $\rho_2 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ euklideszi metrika esetén a

$$d_1(x,y) := \rho_2(x,y) + 1 \qquad (x, y \in \mathbb{R}^d)$$

leképezésre a metrikát definiáló első tulajdnság nem teljesül, a másik kettő igen, a

$$d_2(x,y) := \begin{cases} \|x\|_2 - \|y\|_2 & (\|x\|_2 > \|y\|_2), \\ \\ \|x-y\|_2 & (\|x\|_2 \leq |y\|_2) \end{cases} \qquad (x,y \in \mathbb{R}^d)$$

leképezésre a metrikát definiáló második tulajdnság nem teljesül, a másik kettő igen, a

$$d_3(x,y) := \begin{cases} \rho_2(x,y) & (\rho_2(x,y) \leq 1), \\ \\ 2\rho_2(x,y) & (\rho_2(x,y) > 1) \end{cases} \qquad (x,y \in \mathbb{R}^d)$$

leképezésre a metrikát definiáló harmadik tulajdnság nem teljesül, a másik kettő igen. ■

Feladat. Adott $\mathcal{H} \neq \emptyset$ halmaz ill. $\rho : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ függvény esetén mutassuk meg, hogy ρ pontosan akkor metrika, ha minden $x, y, z \in \mathcal{H}$ esetén

$$\rho(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \qquad \text{és} \qquad \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$$

teljesül!

Útm. Világos, hogy ha ρ metrika, akkor teljesül a két állítás. Ha bármely $x, y, z \in \mathcal{H}$ esetén

- $x = y$, akkor a második tulajdonság alapján $2\rho(x,z) \geq \rho(x,x) = 0$, és így ρ értékei nemnegatív valós számok;
- ha most $z = x$, akkor szintén a második tulajdonság alapján $\rho(x,y) \leq \rho(y,x)$, majd x, ill. y szerepét felcserélve $\rho(y,x) \leq \rho(x,y)$ adódik, amiből $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ következik. ■

Feladat. Tegyük fel, hogy $(\mathcal{H}, \rho)$ metrikus tér és $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy

- f monoton növő,
- $f(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 0$, ill.
- $f(s+t) \leq f(s) + f(t) \ (s,t \in [0,+\infty))$.

Igazoljuk, hogy ekkor $(\mathcal{H}, f \circ \rho)$ is metrikus tér!

Útm. Az első, a második, ill. a $\mathcal{D}_f = [0, +\infty)$ tulajdonság következménye, hogy $f(t) \geq 0$ $(t \in [0, +\infty))$. Továbbá

- az $f \circ \rho$ leképezés pozitív definit, hiszen bármely $x, y \in \mathcal{H}$ esetén $(f \circ \rho)(x, y) = f(\rho(x, y)) \geq 0$ és

$$(f \circ \rho)(x, y) = f(\rho(x, y)) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho(x, y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y;$$

- az $f \circ \rho$ leképezés hiszen, hiszen bármely $x, y \in \mathcal{H}$ esetén

$$(f \circ \rho)(x, y) = f(\rho(x, y)) = f(\rho(y, x)) = (f \circ \rho)(y, x);$$

- az $f \circ \rho$ leképezésre teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, ui. tetszőleges $x, y, z \in \mathcal{H}$ esetén

$$\begin{aligned}(f \circ \rho)(x, y) &= f(\rho(x, y)) \leq f(\rho(x, z) + \rho(z, y)) \leq f(\rho(x, z)) + f(\rho(z, y)) = \\ &= (f \circ \rho)(x, z) + (f \circ \rho)(z, y). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Feladat. Igazoljuk, hogy teteszőleges $0 < c \in \mathbb{R}$, ill. $\mu \in (0, 1]$ esetén az alábbi függvények eleget tesznek az előző feladat feltételeinek!

1. $f(x) := cx \ (0 \leq x \in \mathbb{R})$;
2. $f(x) := \dfrac{x}{1 + x} \ (0 \leq x \in \mathbb{R})$;
3. $f(x) := x^{\mu} \ (0 \leq x \in \mathbb{R})$;
4. $f(x) := \ln(1 + x) \ (0 \leq x \in \mathbb{R})$;
5. $f(x) := \min\{1, x\} \ (0 \leq x \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Világos, hogy
   - f monoton növő, hiszen $f' > 0$.
   - $f(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ct = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 0$, ill.
   - $f(s + t) = c(s + t) = cs + ct = f(s) + f(t) \ (s, t \in [0, +\infty))$.
2. Könnyen belátható, hogy
   - f monoton növő, hiszen

$$f'(t) = \frac{1 \cdot (1 + t) - t \cdot 1}{(1 + t)^2} = \frac{1}{(1 + t)^2} \qquad (0 \leq t \in \mathbb{R}).$$

- $f(t)=0 \iff \dfrac{t}{1+t}=0 \iff t=0$, ill.
- bármely $0\le s,t\in\mathbb{R}$ esetén

$$f(s+t)=\frac{s+t}{1+s+t}=\frac{s}{1+s+t}+\frac{t}{1+s+t}\le\frac{s}{1+s}+\frac{t}{1+t}=f(s)+f(t).$$

3. Nyilvánvaló, hogy

- f monoton növő, hiszen
$$f'(x)=\mu x^{\mu-1}>0 \qquad (0<x\in\mathbb{R}).$$
- $f(t)=0 \iff t^{\mu}=0 \iff t=0$, ill.
- bármely $0\le s,t\in\mathbb{R}$ esetén
$$f(s+t)=f(s+t)\le f(s)+f(t) \qquad\iff\qquad (s+t)^{\mu}\le s^{\mu}+t^{\mu},$$
hiszen ha valamely rögzített $0\le t\in\mathbb{R}$ mellett
$$\varphi(s):=s^{\mu}-(s+t)^{\mu}+t^{\mu} \qquad (0\le s\in\mathbb{R}),$$
akkor bármely $0<s\in\mathbb{R}$ esetén $\varphi\in\mathfrak{D}[s]$ és
$$\varphi'(s)=\mu\left(s^{\mu-1}-(s+t)^{\mu-1}\right),$$
ahol $0<\mu\le 1$ következtében $-1<\mu-1\le 0$. Következésképpen
$$s^{\mu-1}-(s+t)^{\mu-1}\ge 0 \qquad (0\le s\in\mathbb{R}),$$
ahonnan
$$\varphi'(s)\ge 0 \qquad (0\le s\in\mathbb{R})$$
következik. Ezt azt jelenti, hogy φ monoton növekedő.

4. Könnyen belátható, hogy

- f szigorúan monoton növő, hiszen
$$f'(t)=\frac{1}{1+t}>0 \qquad (0\le t\in\mathbb{R});$$
- bármely $0\le t\in\mathbb{R}$ esetén
$$\ln(t+1)=0 \qquad\iff\qquad t+1=1 \qquad\iff\qquad t=0;$$

ill.

- bármely $0 \leq s, t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\ln(1+s+t) \leq \ln(s+1) + \ln(t+1) = \ln((s+1)\cdot(t+1)) \quad &\Longleftrightarrow \quad 1+s+t \leq st+s+t+1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 \leq st.\end{aligned}$$

5. Nem nehéz megmutatni, hogy

- f monoton növő, hiszen

$$f(t) = \min\{1, t\} = \begin{cases} t & (0 \leq x \leq 1), \\ 1 & (x \geq 1); \end{cases}$$

- $f(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \min\{1, t\} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 0$, ill.
- bármely $0 \leq s, t \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(s+t) \leq f(s) + f(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \min\{1, s+t\} \leq \min\{1, s\} + \min\{1, t\},$$

hiszen

  - ha $s \geq 1$ vagy $t \geq 1$, akkor

$$\min\{1, s\} = 1 \qquad \text{vagy} \qquad \min\{1, t\} = 1,$$

  így

$$\min\{1, s+t\} \leq 1 \leq \min\{1, s\} + \min\{1, t\};$$

  - ha $0 \leq s, t < 1$, akkor

$$\min\{1, s\} = s \qquad \text{és} \qquad \min\{1, t\} = t,$$

  így

$$\min\{1, s+t\} = \left\{ \begin{array}{ll} s+t & (s+t \leq 1), \\ 1 & (s+t > 1) \end{array} \right\} \leq s+t = \min\{1, s\} + \min\{1, t\}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekedő függvény, akkor az

$$\rho_f(x, y) := |f(x) - f(y)| \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvény metrika!

Útm. Világos, hogy bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $\rho_f(x, y) \geq 0$ és $\rho_f(x, y) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $f(x) = f(y)$. Ez viszont az f függvény injektivitása miatt azzal egyenértékű, hogy $x = y$, így ρ pozitív definit. A ρ leképezés szimmetriája az abszolútérték homogenitásának következménye. A háromszög-egyenlőtlenség is teljesül, hiszen bármely $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \rho_f(x, z) + \rho_f(z, y) &= |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \geq |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)| = \\ &= |f(x) - f(y)| = \rho_f(x, y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a fentiek következtében pl. metrikák $\mathbb{R}$-en az alábbi leképezések:

$$\rho(x, y) := |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)| \qquad (x, y \in \mathbb{R}),$$

$$\rho(x, y) := |e^x - e^y| \qquad (x, y \in \mathbb{R}),$$

ill.

$$\rho(x, y) := |\sin(x) - \sin(y)| \qquad (x, y \in [-1, 1]).$$

Feladat. Döntsük el, hogy metrikák-e a $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények!

1. $\rho(x, y) := |x - y|^p$ $(x, y \in \mathbb{R},\ p \geq 0)$;
2. $\rho(x, y) := \cos^2(x - y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$;
3. $\rho(x, y) := |\ln(x/y)|$ $(0 < x, y \in \mathbb{R})$.

Útm.

1. Ha

   - $p = 0$, akkor $\rho(x, y) := 1$ $(x, y \in \mathbb{R})$, így $\rho(x, y) \neq 0$ $(x \in \mathbb{R})$, azaz ρ nem metrika.
   - $p \in (0, 1]$, akkor bármely $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén

     (a) $\rho(x, y) \geq 0$ és $\rho(x, y) = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x = y$,

(b) $\rho(x, y) = |x - y|^p = |y - x|^p = \rho(y, x)$,

(c) ρ-ra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, hiszen (**HF**)

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= |x - y|^p = |x - z + z - y|^p \leq (|x - z| + |z - y|)^p \leq \\ &\leq |x - z|^p + |z - y|^p = \rho(x, z) + \rho(z, y), \end{aligned}$$

ezért ρ metrika.

- $p > 1$, akkor bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\rho(-x, x) = |-x - x|^p = 2^p|x|^p \not\leq |-x|^p + |x|^p = \rho(-x, 0) + \rho(0, x),$$

azaz ρ nem metrika.

2. ρ nem metrika, hiszen
$$\rho\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

3. ρ metrika hiszen bármely $0 < x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén $\rho(x, y) \geq 0$ és

- $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow \ln(x/y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

- $\rho(x, y) = |\ln(x/y)| = |\ln(x) - \ln(y)| = |\ln(y) - \ln(x)| = |\ln(y/x)| = \rho(y, x)$;

- $\rho(x, y) = |\ln(x) - \ln(y)| \leq |\ln(x) - \ln(z)| + |\ln(z) - \ln(z)| = |\ln(x/z)| + |\ln(z/y)| =$
$$= \rho(x, z) + \rho(z, y). \quad \blacksquare$$

Feladat. Döntsük el, hogy metrikák-e a $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények!

1. $\rho(x, y) := (x - y)^2$; 2. $\rho(x, y) := \sqrt{|x - y|}$; 3. $\rho(x, y) := \left|x^2 - y^2\right|$;
4. $\rho(x, y) := |x - 2y|$; 5. $\rho(x, y) := \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$; 6. $\rho(x, y) := |a^x - a^y|$ $(a > 1)$.

Útm.

1. ρ nem metrika, ui. pl. $x := 3$, $y := 0$ és $z := 1$ esetén nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség:

$$\rho(3, 0) = 9 > 4 + 1 = \rho(3, 1) + \rho(0, 1).$$

2. Ha

$$f(t) := \sqrt{t} \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

akkor a $\mu := 1/2$ kitevővel f teljesíti **Feladat** feltételeit:

- f monoton növő,
- $f(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 0$ ill.
- $f(s+t) \leq f(s) + f(t) \; (s, t \in [0, +\infty))$.

3. ρ nem metrika, ugyanis $\rho(1, -1) = 0$.

4. ρ nem metrika, ugyanis $\rho(2, 1) = 0$.

5. Ha

$$f(t) := \frac{t}{1+t} \qquad (t \in [0, +\infty)),$$

akkor f teljesíti a **Feladat** feltételeit:

- f monoton növő,
- $f(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 0$ ill.
- $f(s+t) \leq f(s) + f(t) \; (s, t \in [0, +\infty))$.

6. A ρ leképezés metrika, ui. az

$$f(x) := a^x \qquad (x > 0)$$

függvény szigorúan monoton növekedő (vö. **Feladat**). ■

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{H} := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ és bármely $(x_n), (y_n) \in \mathcal{H}$ esetén

$$\rho((x_n), (y_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

akkor ρ metrika!

Útm. Világos, hogy

$$\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \text{így} \qquad 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \in \mathbb{R},$$

sőt az is látható, hogy

$$\rho((x_n), (y_n)) = 0$$

pontosan akkor teljesül, ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n = y_n$. Az abszolútérték-függvény homogenitásából következik ρ szimmetriája. A háromszög-egyenlőtlenség pedig a következő módon látható be. Ha $(z_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, akkor

$$\begin{aligned}
& (1+|y_n-z_n|)(1+|x_n-z_n|)|x_n-y_n| + (1+|x_n-y_n|)(1+|x_n-z_n|)|y_n-z_n| = \\
= \; & |x_n-y_n| + |y_n-z_n| + 2|x_n-y_n||y_n-z_n| + |x_n-z_n||x_n-y_n| + |x_n-z_n||y_n-z_n| + \\
& +2|x_n-y_n||y_n-z_n||x_n-z_n| \geq \\
\geq \; & |x_n-z_n| + |x_n-z_n||x_n-y_n| + |x_n-z_n||y_n-z_n| + |x_n-y_n||y_n-z_n||x_n-z_n| = \\
= \; & |x_n-z_n|\left(1+|x_n-y_n|\right)\left(1+|y_n-z_n|\right).
\end{aligned}$$

Így

$$\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|} + \frac{|y_n-z_n|}{1+|y_n-z_n|} \geq \frac{|x_n-z_n|}{1+|x_n-z_n|} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan

$$\rho\left((x_n),(y_n)\right) + \rho\left((y_n),(z_n)\right) \geq \rho\left((x_n),(z_n)\right)$$

következik. ■

Feladat. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy ha

$$\rho(m,n) := \begin{cases} 0 & (m=n), \\ \alpha + \dfrac{1}{m+n} & (m \neq n) \end{cases} \qquad (m,n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor

1. $\alpha \geq 1$ esetén $(\mathbb{N}_0, \rho)$ metrikus tér;
2. $\alpha < 1$ esetén $(\mathbb{N}_0, \rho)$ nem metrikus tér!

Útm. Világos, hogy bármely $m,n \in \mathbb{N}_0$, $m \neq n$ esetén

$$0 \leq \rho(m,n) = \alpha + \frac{1}{m+n} \longrightarrow \alpha \qquad (m,n \to \infty),$$

így ρ csak $\alpha \geq 0$ esetén lehet metrika. Ebben az esetben

- ρ pozitív definit, hiszen nyilvánvalóan

$$\rho(m,n) \geq 0 \qquad ((m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : \; m = n = 0)$$

és $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $m \neq n$ esetén

$$\rho(m,n) = \alpha + \frac{1}{m+n} \geq 0 + \frac{1}{m+n} > 0.$$

- ρ triviálisan szimmetrikus, azaz bármely $m,n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\rho(m,n) = \rho(n,m)$.

- a háromszög-egyenlőtlenség pedig a következőképpen látható be. Legyen $m,n,p \in \mathbb{N}_0$. Ha

  1. $m = n$, akkor nyilván $\rho(m,n) = 0$, így $0 \leq \rho(m,p) + \rho(p,n)$ következtében teljesül a háromszög-egyenlőtlenség;
  2. $m \neq n$, akkor
     (a) $p = m$, ill. $p \neq n$ esetén

$$\alpha+\frac{1}{m+n} \leq 0+\alpha+\frac{1}{m+n} = 0+\alpha+\frac{1}{p+n} = \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho(m,n) \leq \rho(m,p)+\rho(p,n),$$

     (b) $p \neq m$, ill. $p = n$ esetén

$$\alpha+\frac{1}{m+n} \leq \alpha+\frac{1}{m+n}+0 = \alpha+\frac{1}{m+p}+0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho(m,n) \leq \rho(m,p)+\rho(p,n),$$

     (c) páronként különböző $m,n,p \in \mathbb{N}_0$ esetén, ha

$\alpha \geq 1$, akkor

$$\frac{1}{m+n} \leq 1 \leq \alpha < \alpha + \frac{1}{m+p} + \frac{1}{p+n},$$

így mindkét oldalhoz α-t adva azt kapjuk, hogy

$$\alpha + \frac{1}{m+n} \leq \alpha + \frac{1}{m+p} + \alpha + \frac{1}{p+n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho(m,n) \leq \rho(m,p) + \rho(p,n);$$

$\alpha < 1$, akkor

$$\underbrace{\alpha + \frac{1}{m+n} \leq \alpha + \frac{1}{m+p} + \alpha + \frac{1}{p+n}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overbrace{\frac{1}{m+n} \leq \alpha + \frac{1}{m+p} + \frac{1}{p+n}}$$

ekvivalencia következménye

$$1 \leq \alpha + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} \quad \text{vagy} \quad 1 \leq \alpha + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p} \qquad (2 \leq p \in \mathbb{N}),$$

hiszen a bal oldal legnagyobb értéke 1, amit akkor vesz fel, ha $(m, n) = (1, 0)$ vagy $(m, n) = (0, 1)$. Ez pedig $\alpha < 1$ esetén nem teljesül, ui. innen a $p \to \infty$ határátmenettel $\alpha \geq 1$ következik. ■

Normált terek

Emlékeztető. Adott $\mathcal{V}$ lineáris tér esetén az $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ rendezett párt **normált tér**nek neveztük, ha $\|\cdot\|$ **norma** ($\mathcal{V}$-n), azaz

$$\|\cdot\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$$

olyan függvény, amelyre bármely $x, y \in \mathcal{V}$, ill. $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

(N1) $\|x\| = 0 \implies x = \theta \in \mathcal{V}$;

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (ρ **abszolút homogén**);

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**háromszög-egyenlőtlenség**).

A $\|x\| \geq 0$ számot az x **vektor normájá**nak nevezzük.

Megjegyezzük, hogy

1. a $\mathcal{V}$ lineáris tér nullelemének normája zérus:

$$\|\theta\| = \|0 \cdot \theta\| = 0 \cdot \|\theta\| = 0.$$

2. a norma nem-negatív függvény:

$$0 = \|\theta\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|x\| = 2\|x\| \qquad (x \in \mathcal{V}).$$

3. bármely $x, y \in \mathcal{V}$ esetén az $x = (x - y) + y$ felbontásból

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|, \qquad \text{azaz} \qquad \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

következik. Az $x \leftrightarrow y$ szerepcsere után pedig $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$ adódik. Mindez azt jelenti, hogy

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \qquad (x, y \in \mathcal{V}).$$

Példák.

1. Ha $d \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$, $\mathcal{V} := \mathbb{K}^d$, továbbá $x := (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d$ esetén

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p\right)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty), \\ \max\limits_{1\leq k\leq d} |x_k| := \max\{|x_k| \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, d\}\} & (p = +\infty), \end{cases}$$

akkor $\|\cdot\|_p$ norma $\mathcal{V}$-n. **Biz.**

(a) $p = 1$, akkor bármely $x, y \in \mathbb{K}^d$, ill. $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

- a $0 = \|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_d|$ egyenlőség következménye az, hogy bármely $k \in \{1, \ldots, d\}$ esetén $|x_k| = 0$, azaz $x_k = 0$. Ez azt jelenti, hogy $x = \theta$.
- $\|\lambda x\|_1 = |\lambda x_1| + \ldots + |\lambda x_d| = |\lambda| \cdot |x_1| + \ldots + |\lambda| \cdot |x_d| = |\lambda| \cdot \|x\|_1$.
- $\|x + y\|_1 = |x_1 + y_1| + \ldots + |x_d + y_d| \leq (|x_1| + |y_1|) + \ldots + (|x_d| + |y_d|) = (|x_1| + \ldots + |x_d|) + (|y_1| + \ldots + |y_d|) = \|x\|_1 + \|y\|_1$.

(b) $p \in (1, +\infty)$, akkor bármely $x, y \in \mathbb{K}^d$, ill. $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

- a $0 = \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p\right)^{1/p}$ egyenlőség következménye az, hogy $\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p = 0$ és így bármely $k \in \{1, \ldots, d\}$ esetén $|x_k|^p = 0$, azaz $x_k = 0$. Ez azt jelenti, hogy $x = \theta$.
- $\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{d} |\lambda x_k|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{d} |\lambda|^p \cdot |x_k|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \cdot \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \cdot \|x\|_p$.
- A háromszög-egyenlőtlenség bizonyításához szükségünk van egy segédállításra.
  Lemma. Ha $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ szigorúan konkáv függvény és

$$f(s, t) := t \cdot \varphi\left(\frac{s}{t}\right) \qquad (s, t \in (0, +\infty)),$$

  akkor minden $d \in \mathbb{N}$ index és $a_1, \ldots, a_d, b_1, \ldots, b_d \in (0, +\infty)$ szám esetén

$$\sum_{k=1}^{d} f(a_k, b_k) \leq f\left(\sum_{k=1}^{d} a_k, \sum_{k=1}^{d} b_k\right),$$

  és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha van olyan $c \in (0, +\infty)$, hogy bármely $k \in \{1, \ldots, d\}$ indexre $a_k / b_k = c$.

Biz. Világos, hogy $d = 1$ esetén teljesül az egyenlőtlenség. Ha $d = 2$, akkor φ konkávitását felhasználva a

$$\lambda := \frac{b_1}{b_1 + b_2}$$

választással azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) &= b_1 \cdot \varphi\left(\frac{a_1}{b_1}\right) + b_2 \cdot \varphi\left(\frac{a_2}{b_2}\right) = \\ &= (b_1 + b_2) \cdot \left\{\frac{b_1}{b_1 + b_2} \cdot \varphi\left(\frac{a_1}{b_1}\right) + \frac{b_2}{b_1 + b_2} \cdot \varphi\left(\frac{a_2}{b_2}\right)\right\} \leq \\ &\leq (b_1 + b_2) \cdot \varphi\left(\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}\right) = f(a_1 + a_2, b_1 + b_2). \end{aligned}$$

A φ függvény konkávitásának következményeként pontosan akkor van egyenlőség, ha $a_1/b_1 = a_2/b_2$ teljesül. Nagyobb d-kre az állítás indukcióval bizonyítható. ■
Így, ha valamely $p \in (1, +\infty)$ esetén

$$\varphi(t) := \left(t^{1/p} + 1\right)^p \qquad (0 < t \in \mathbb{R}),$$

akkor bármely $d \in \mathbb{N}$ index és $0 < a_1, \ldots, a_d,\ b_1, \ldots, b_d \in \mathbb{R}$ szám esetén

$$\sum_{k=1}^{d} \left(a_k^{1/p} + b_k^{1/p}\right)^p \leq \left(\left(\sum_{k=1}^{d} a_k\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{d} b_k\right)^{1/p}\right)^p,$$

azaz az

$$a_k =: x_k^p \quad \text{és} \quad b_k =: y_k^p \qquad (k \in \{1, \ldots, d\})$$

választással a

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{d} (x_k + y_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{d} x_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{d} y_k^p\right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

háromszög-egyenlőtlenséget (**Minkowski-egyenlőtlenség**et) kapjuk.
Megjegyezzük, hogy ez a technika több egyenlőtlenség bizonyítását is leegyszerűsíti (vö. **Funkcionálanalízis feladatokban, 950-951. old.**).

(c) $p = \infty$, akkor bármely $x, y \in \mathbb{K}^d$, ill. $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

- a $0 = \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq k \leq d} |x_k|$ egyenlőség következménye az, hogy bármely $k \in \{1, \ldots, d\}$ esetén $|x_k| = 0$, azaz $x_k = 0$. Ez azt jelenti, hogy $x = \theta$.

- $\|\lambda x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq d} |\lambda x_k| = \max_{1\leq k\leq d} |\lambda|\cdot|x_k| = |\lambda|\cdot \max_{1\leq k\leq d} |x_k| = |\lambda|\cdot\|x\|_\infty.$
- $\|x+y\|_\infty = \max_{1\leq k\leq d} |x_k+y_k| \leq \max_{1\leq k\leq d} (|x_k|+|y_k|) \leq \max_{1\leq k\leq d} |x_k| + \max_{1\leq k\leq d} |y_k = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$

2. Az $m\times n$-es mátrixok $\mathbb{K}^{m\times n}$ vektorterében az alábbi függvények mindegyike normát értelmez:

   (a) $\|M\|_F := \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} |m_{kl}|^2}$ (**euklideszi**, **Frobenius-**, **Schur-**, ill. **Hilbert-Schmidt-norma**);

   (b) $\|M\|_o := \max\left\{\sum_{k=1}^{m} |m_{kl}| :\ l\in\{1,\ldots,n\}\right\}$ (**oszlopösszeg-norma**);

   (c) $\|M\|_s := \max\left\{\sum_{l=1}^{n} |m_{kl}| :\ k\in\{1,\ldots,m\}\right\}$ (**sorösszeg-norma**)

$$\left(M = [m_{kl}] \in \mathbb{K}^{m\times n}\right).$$

3. A folytonos függvények $\mathfrak{C}[a,b]$ vektorterén normák az

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} & (p\in[1,+\infty)) \\ \max\{|f(x)|\in\mathbb{R}:\ x\in[a,b]\} & (p=+\infty)\end{cases} \qquad (f\in\mathfrak{C}[a,b])$$

   függvények.

4. Az l_p vektortéren normák az

$$\|(x_n)\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\, dx\right)^{1/p} & (p\in[1,+\infty)) \\ \sup\{x_n|\in\mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\} & (p=+\infty)\end{cases} \qquad ((x_n)\in l_p)$$

   függvények.

5. Ha $k\in\mathbb{N}_0$, és

$$\mathfrak{C}^k[a,b] := \{f:[a,b]\to\mathbb{R}:\ f\ \text{ k-szor folytonosan deriválható}\},$$

   akkor a

$$\|f\|_{\mathfrak{C}^k} := \|f\|_{\mathfrak{C}^k[a,b]} := \sum_{\nu=0}^{k} \max\left\{\left|f^{(\nu)}(x)\right|\in\mathbb{R}:\ x\in[a,b]\right\} \qquad (f\in\mathfrak{C}^k[a,b])$$

leképezés norma, hiszen bármely $\nu \in \{0, \dots, k\}$ esetén

$$\|f\|_\nu := \max\left\{|f^{(\nu)}(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\right\} = \|f^{(\nu)}\|_\infty \qquad (f \in \mathfrak{C}^k[a,b])$$

norma, így a

$$\|f\| := \sum_{\nu=1}^{k} \|f\|_\nu = \sum_{\nu=1}^{k} \max\left\{|f^{(\nu)}(x)| \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\right\} \qquad (f \in \mathfrak{C}^k[a,b])$$

leképezésre **(N2)-(N3)** teljesül, sőt

$$\|f\| \geq \|f\|_0 = \|f\|_\infty > 0 \qquad (f \in \mathfrak{C}^k[a,b] \backslash \{\widehat{0}\})$$

következtében még **(N1)** is.

Feladat. Legyen $\|\cdot\| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ norma. Mtassuk meg, hogy ekkor alkalmas $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$\|x\| = \alpha \cdot |x| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlőség!

Útm. A **(N2)** tulajdonság következtében bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\|x\| = \|1 \cdot x\| = \|1\| \cdot |x| =: \alpha \cdot |x|$$

és $\alpha > 0$, ui. $1 \neq 0$, így $\|1\| > 0$. ■

Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy ha $p \in (0,1)$, akkor norma-e a $\varphi : \mathbb{K}^d \to \mathbb{R}$ leképezés!

1. $\varphi_p(x) := \sum_{k=1}^{d} |x_k|^p \quad (x \in \mathbb{K}^d)$
2. $\varphi_p(x) := \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p\right)^{1/p} \quad (x \in \mathbb{K}^d)$.

Útm.

1. A φ_p leképezés nem abszolút homogén (nem teljesül **(N2)**): ha $x \in \mathbb{K}^d$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor

$$\varphi_p(\lambda x) = \sum_{k=1}^{d} |\lambda x_k|^p = |\lambda|^p \cdot \sum_{k=1}^{d} |x_k|^p = |\lambda|^p \cdot \varphi_p(x).$$

2. A φ_p leképezésre nem teljesül a háromszög-egyenőtlenség ((**N3**)): ha $2 \leq d \in \mathbb{N}$ és

$$x := (2, 0, 0, \ldots, 0, 0, 0), \qquad \text{ill.} \qquad y := (0, 2, 0, \ldots, 0, 0, 0),$$

akkor

$$\varphi_p(x) + \varphi_p(y) = 2 + 2 = 2 \cdot 2 < 2^{1/p} \cdot 2 = (2^p + 2^p)^{1/p} = \varphi_p(x + y). \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $x \in \mathbb{K}^d$, akkor igaz a

$$\lim_{p \to +\infty} (\|x\|_p) = \|x\|_\infty$$

állítás!

Útm. Mivel bármely $x \in \mathbb{K}^d$ esetén

$$\begin{aligned}
\|x\|_\infty^p = (\max\{|x_k| \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, d\}\})^p &= \max\{|x_k|^p \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, d\}\} \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{d} |x_k|^p \leq d \cdot \max\{|x_k|^p \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, d\}\} = \\
&= d \cdot (\max\{|x_k| \in \mathbb{R} : \ k \in \{1, \ldots, d\}\})^p = d \cdot \|x\|_\infty^p,
\end{aligned}$$

ezért

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq d^{1/p} \cdot \|x\|_\infty,$$

ahonnan a Sandwich-tétel felhasználásával az igazolandó állítást kapjuk. $\blacksquare$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor a

$$\rho(x, y) := \|x - y\| \qquad (x, y \in \mathcal{V})$$

leképezés metrika! Ezt a szituációt rüviden a $(\mathcal{V}, \rho) \equiv (\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ jelsorozattal juttatjuk kifejezésre.

Útm.

- Bármely $x, y \in \mathcal{V}$ esetén $\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ és

$$\rho(x, y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|x - y\| = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - y = \theta \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y.$$

- Ha $x, y \in \mathcal{V}$, akkor

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = 1 \cdot \|x-y\| = |(-1)| \cdot \|x-y\| = \|(-1)(x-y)\| = \|y-x\| = \rho(y,x).$$

- Tetszőleges $x, y \in \mathcal{V}$ esetén

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = \rho(x,z) + \rho(z,y). \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{V}, \rho)$ metrikus tér, akkor valamely $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ normált tér esetén $(\mathcal{V}, \rho) \equiv (\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ pontosan akkor áll fenn, ha ρ **eltolásinvariáns** és **abszolút homogén**, azaz bármely $x, y \in \mathcal{V}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$\rho(x+z, y+z) = \rho(x,y) \qquad \text{és} \qquad \rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot \rho(x,y)$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. Ha a $\|\cdot\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ leképezés norma, akkor tetszőleges $x, y \in \mathcal{V}$ vektorok, ill. $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár esetén

- $\rho(x+z, y+z) = \|(x+z)-(y+z)\| = \|x-y\| = \rho(x,y)$;
- $\rho(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \cdot \|x-y\| = |\lambda| \cdot \rho(x,y)$.

2. lépés. Ha

$$\|x\| := \rho(x, \theta) \qquad (x \in \mathcal{V}),$$

akkor tetszőleges $y \in \mathcal{V}$ vektorok, ill. $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár esetén

- $\|\lambda x\| = \rho(\lambda x, 0) = \rho(\lambda x, \lambda 0) = |\lambda| \cdot \rho(x, 0) = |\lambda| \cdot p(x)$,
- $\|x+y\| = \rho(x+y, 0) \leq \rho(x+y, y) + \rho(y, 0) = \|x+y-y\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|$. $\blacksquare$

Feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$\rho(x,y) := \begin{cases} 1 & (x_1 \neq y_1), \\ \\ \min\{1, |x_2 - y_2|\} & (x_1 = y_1) \end{cases} \qquad \left((x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\right)$$

metrikát nem indukálja egyetlen norma sem!

Útm. A ρ leképezés nem eltolásinvariáns, hiszen ha $x := (0,0)$, $y := (0,1)$ és $\lambda := 2$, akkor

$$\rho(\lambda x, \lambda y) = \rho((0,0),(0,2)) = \min\{1, |0-2|\} = 1,$$

és

$$|\lambda| \cdot \rho(x,y) = 2 \cdot \rho((0,0),(0,1)) = 2 \cdot \min\{1, |0-1|\} = 2. \quad \blacksquare$$

Euklideszi terek

Definíció. Adott $\emptyset \neq \mathcal{V}$ lineáris tér esetén azt mondjuk, hogy $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ rendezett pár **euklideszi tér**, ha,

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$$

skaláris szorzás (ill. **belső szorzás**) $\mathcal{V}$-n, azaz bármely $\lambda \in \mathbb{K}$, ill. $x, y, z \in \mathcal{V}$ esetén

(S1) $\langle x, x\rangle \in [0, +\infty)$ és $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = \theta \in \mathcal{V}$;

(S2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

(S3) $\langle x + \lambda y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \lambda\langle y, z\rangle$.

Megjegyzések.

1. Könnyen látható, hogy tetszőleges $\lambda \in \mathbb{K}$, ill. $x, y, z \in \mathcal{V}$, ill. a $\theta \in \mathcal{V}$ esetén

$$\langle \theta, x\rangle = \langle x, \theta\rangle = 0 \qquad \text{és} \qquad \langle x, y + \lambda z\rangle = \langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\langle x, z\rangle.$$

2. A skaláris szorzásnak ezt a tulajdonságát szokás második változójában **konjugált lineáris**nak vagy **antilineáris**nak nevezni.

3. Több szerző (különösen a fizikai ihletésű művek szerzői) a skaláris szorzásnak a második változóban való linearitását teszi fel (ekkor az első változóból emelető ki a skalár konjugáltja).

4. Az $x, y \in X$ vektorok skaláris szorzatára különböző szerzők műveiben az (x, y), $(x|y)$, $x \cdot y$ ill. az $x \bullet y$ jelölések is használatosak.

Példák.

1. Ha adott $d \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{V} := \mathbb{K}^d$, akkor az

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k \qquad (x, y \in \mathbb{K}^d)$$

függvény skaláris szorzás.

2. Ha $\mathcal{V} := \mathfrak{C}[a, b]$ adott mértéktér, akkor az

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f\overline{g} \qquad (f, g \in \mathfrak{C}[a, b])$$

függvény skaláris szorzás.

3. Az

$$l_2 := \left\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty\right\}$$

sorozatok vektorterén skaláris szorzás az

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n} \qquad (x = (x_n), y = (y_n) \in l_2)$$

függvény.

4. Bármely $d \in \mathbb{N}$,

$$w = (w_1, \ldots, w_d) \in \mathbb{R}^d : \qquad w_k > 0 \quad (k \in \{1, \ldots, d\})$$

esetén az

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{d} w_k x_k \overline{y_k} \qquad (x = (x_1, \ldots, x_d),\ y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{K}^d)$$

leképezés skaláris szorzás.

5. Az

$$\langle x, y\rangle_\sharp := 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 \qquad (x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2)$$

leképezés skaláris szorzás.

6. Tetszőleges $p, q \in \mathbb{N}$ esetén a

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{Sp}(AB^*) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} a_{kl}\overline{b_{kl}} \qquad (A, B \in \mathbb{K}^{p\times q})$$

leképezés skaláris szorzás, hiszen ha $A, B, C \in \mathbb{K}^{p\times q}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

- $\langle A, A\rangle = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} |a_{kl}|^2 \geq 0$ és $\langle A, A\rangle = 0$ esetén $\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} |a_{kl}|^2 = 0$, azaz

$$a_{kl} = 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, p\},\ l \in \{1, \ldots, q\}),$$

amiből $A = O$ következik, ill. ha $A = O$, azaz

$$a_{kl} = 0 \qquad (k \in \{1, \dots, p\},\ l \in \{1, \dots, q\}),$$

akkor

$$\langle A, A \rangle = 0.$$

- $\langle \alpha A, B \rangle = \mathrm{Sp}(\alpha A B^*) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} \alpha a_{kl} \overline{b_{kl}} = \alpha \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} a_{kl} \overline{b_{kl}} = \alpha \langle A, B \rangle.$
- az $\langle A + B, C \rangle$ szorzás a következőképpen alakítható át:

$$\begin{aligned} \langle A+B, C \rangle &= \mathrm{Sp}((A+B)C^*) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} (a_{kl} + b_{kl}) \overline{c_{kl}} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} a_{kl} \overline{c_{kl}} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} b_{kl} \overline{c_{kl}} = \\ &= \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle. \end{aligned}$$

- $\langle A, B \rangle = \mathrm{Sp}(AB^*) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} a_{kl} \overline{b_{kl}} = \overline{\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} \overline{a_{kl}} b_{kl}} = \overline{\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} b_{kl} \overline{a_{kl}}} = \overline{\langle B, A \rangle}.$ ■

Tétel. Igazoljuk, hogy bármely $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$ esetén fennáll az

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \sqrt{\left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right)} \tag{17}$$

egyenlőtlenség!

Útm.

1. lépés. Ha

$$\int_a^b f^2 = \int_a^b g^2 = 0,$$

akkor az

$$|f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2} \left([f(t)]^2 + [g(t)]^2 \right) \qquad (t \in [a, b])$$

egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$0 \leq \left| \int_a^b fg \right| \leq \int_a^b |fg| \leq \frac{1}{2} \left(\int_a^b f^2 + \int_a^b g^2 \right) = 0.$$

2. lépés. Ha pl.

$$\int_a^b f^2 > 0,$$

akkor tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az

$$F(t) := (g(t) - \lambda f(t))^2 \qquad (t \in [a, b])$$

függvényre $F \in \mathfrak{R}[a, b]$ és bármely $t \in [a, b]$ esetén

$$F(t) \geq 0 \qquad (t \in [a, b]),$$

így

$$0 \leq \int_a^b F = \lambda^2 \int_a^b f^2 - 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2,$$

azaz

$$\left(2\int_a^b fg\right)^2 - 4\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \leq 0. \quad \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy ha $f, g \in \mathfrak{C}[a, b]$, akkor (17) neve: **Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség**.

Példa.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx \quad &= \quad \int_0^1 \sqrt{(1 + x^4) \cdot 1}\, dx \leq \sqrt{\int_0^1 (1 + x^4)\, dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 1\, dx} = \\ &= \quad \sqrt{\left[x + \frac{x^5}{5}\right]_0^1} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{\frac{6}{5}} = \sqrt{1,2} < 1,1. \quad \diamond\end{aligned}$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ olyan folytonosan differenciálható függvény, amelyre $f(1) = 0$, akkor fennáll az

$$\left|\int_0^1 f(x)\, dx\right|^2 \leq \frac{1}{12} \cdot \int_0^1 |f'(x)|^2\, dx$$

egyenlőslenség!

Útm. Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 1 \cdot f(x)\, dx = [x \cdot f(x)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot f'(x)\, dx = -\int_0^1 x \cdot f'(x)\, dx.$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|^2 &= \left|4\cdot\int_0^1 \frac{x}{4}\cdot f'(x)\,dx\right|^2 \leq 4\cdot\left(\int_0^1 \frac{x^2}{16}\,dx\right)\cdot\left(\int_0^1 (f'(x))^2\,dx\right) = \\ &= \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\cdot\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx = \frac{1}{12}\cdot\int_0^1 |f'(x)|^2\,dx. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Tétel. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér, ill.

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in \mathcal{V}),$$

akkor bármely $x, y \in \mathcal{V}$ esetén

1. $4\Re(\langle x, y\rangle) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$ (**polarizációs azonosság**);
2. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (**paralelogramma-azonosság**);
3. $\langle x, y\rangle = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (**Pitagorasz-tétel**);
4. $|\langle x, y\rangle|^2 \leq |x\|^2 + \|y\|^2$ (**Cauchy-Bnyakovszkij-egyenlőtlenség**);
5. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**Minkowszki-egyenlőtlenség**).

Biz.

1. Ha $x, y \in \mathcal{V}$, akkor

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle}\end{aligned} \tag{18}$$

és

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x-y\rangle + \langle y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle - \langle y, y\rangle = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x, y\rangle - \overline{\langle x, y\rangle}.\end{aligned} \tag{19}$$

A (18) és (19) egyenlőtlenséget kivonva egymásból azt kapjuk, hogy

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2\langle x, y\rangle + 2\overline{\langle x, y\rangle} = 2\left(\langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle}\right) = 2\cdot 2\cdot\Re(\langle x, y\rangle) = 4\Re(\langle x, y\rangle).$$

2. A (18) és (19) egyenlőtlenséget összeadva egymással azt kapjuk, hogy

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

3. Két lépésben bizonyítunk. Ha

   - $\langle x,y\rangle=0$, akkor a fenmtiek következtében

   $$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+\Re(\langle x,y\rangle)=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

   - $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$, akkor a fentiek következtében

   $$0=\|x+y\|^2-\|x\|^2+\|y\|^2=\Re(\langle x,y\rangle)$$

   így

   $$\Re(\langle x,y\rangle),\qquad \text{azaz}\qquad \langle x,y\rangle=0$$

4. Két lépésben bizonyítunk.

   1. lépés. Bármely $x,y\in\mathcal{V}$ és $\alpha\in\mathbb{K}$ esetén

$$\begin{aligned}
{\color{red}0} &{\color{red}\leq} p(\alpha):=\langle x+\alpha y,x+\alpha y\rangle=\langle x,x+\alpha y\rangle+\langle \alpha y,x+\alpha y\rangle=\\
&= \langle x,x\rangle+\langle x,\alpha y\rangle+\langle \alpha y,x\rangle+\langle \alpha y,\alpha y\rangle=\\
&= \langle x,x\rangle+\overline{\alpha}\langle x,y\rangle+\alpha\langle y,x\rangle+\alpha\overline{\alpha}\langle y,y\rangle=\\
&= {\color{red}\|x\|^2+\overline{\alpha}\langle x,y\rangle+\alpha\overline{\langle x,y\rangle}+|\alpha|^2\|y\|^2}.
\end{aligned}$$

   2. lépés. Ha $y=0\in\mathcal{V}$, akkor nyilván fennáll az egyenlőtlenség, sőt egyenlőség van. Feltehető tehát, hogy $y\neq 0\in\mathcal{V}$, ahonnan $\langle y,y\rangle\neq 0$ következik. Így az

$$\alpha^*:=-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$$

   számmal

$$0\leq p(\alpha^*)=\|x\|^2-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}+\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}=\langle x,y\rangle-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}.$$

Megjegyzések.

(a) A **Heisenberg-féle határozatlansági reláció** bizonyítása is a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenségen alapul (vö. Határozatlansági relációk).

(b) A $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (valós) esetben

$$p(\alpha) = \alpha^2\|x\|^2 + 2\alpha\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Következésképpen a

$$d := 4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

diszkriminánsra $d \leq 0$ adódik, amiből a (valós) Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség már következik.

5. A Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint

$$\Re(\langle x, y\rangle) \leq |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Következésképpen

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

ahonnan a háromszög-egyenlőtlenség már nyilvánvaló. ■

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklideszi tér,

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in \mathcal{V})$$

akkor $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ normált tér!

Útm. Világos, hogy bármely $x, y \in \mathcal{V}$, ill. $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

- ha $0 = \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, akkor $\langle x, x\rangle = 0$ azaz $x = \theta$.
- $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda} \cdot \langle x, x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \cdot \langle x, x\rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|.$
- A háromszög-egyenlőtlenség pedig nem más, mint a fentebb belátott Minkowszki-egyenlőtlenség. ■

Tétel (Neumann-Jordan). Ha a $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor megadható olyan

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

skaláris szorzás, amelyre

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, y \rangle} \qquad (x, y \in \mathcal{V}).$$

Biz. Vö. Simon Péter **oktatási segédanyaga**, ill. **egyetmi tankönyve (19-24. old).**

Feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$1.\ \mathcal{V} := \mathbb{K}^d, \qquad 2.\ \mathcal{V} := \mathfrak{C}[0,1] \qquad 3.\ \mathcal{V} := l_p,$$

úgy tetszőleges $p \in [1, +\infty]$ esetén $\|\cdot\|_p$-t pontosan akkor generálja skaláris szorzás, ha $p = 2$ teljesül!

Útm.

1. Az $\mathcal{V} := \mathbb{K}^d$ esetben:

   - bármely $x, y \in \mathbb{K}^d$ esetén
     $$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{d} x_k \overline{y_k},$$
     akkor triviálisan
     $$\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle.$$
   - ha $p \in [1, +\infty)$ és
     $$x = (1, 1, 0, 0 \ldots, 0), \qquad \text{ill.} \qquad y = (1, -1, 0, 0 \ldots, 0),$$
     úgy
     $$\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 = 4 + 4 = 8 = 4 \cdot 2^{2/p} = 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2)$$
     nem teljesül, ha $p \neq 2$;
   - ha $p = +\infty$, akkor
     $$\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \lim_{p \to \infty} \|y\|_p = 1,$$
     ezért a paralelogramma-szabály nem teljesül.

2. Az $\mathcal{V} := \mathfrak{C}[0,1]$ esetben:

- bármely $f, g \in \mathfrak{C}[0,1]$ esetén
$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f\overline{g},$$
akkor triviálisan
$$\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle;$$

- ha $p \in [1, +\infty)$, ill.
$$f(x) := x \quad \text{és} \quad g(x) := 1 - x \qquad (x \in [0,1]),$$
úgy
$$\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 1 + (p+1)^{-2/p} = 4(p+1)^{-2/p} = 2(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2)$$
pontosan akkor teljesül, ha
$$(p+1)^2 = 3^p, \qquad \text{azaz} \qquad p = 2;$$

- ha $p = +\infty$, akkor az előző f-fel és g-vel
$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 1 + 1 = 2 \neq 4 = 2(1+1) = 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2),$$
ezért a paralelogramma-szabály nem teljesül.

3. Az $\mathcal{V} := l_p$ esetben, ha $(x_n), (y_n) \in l_p$, akkor a
$$\langle (x_n), (y_n)\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n},$$
skaláris szorzatra triviálisan
$$\|(x_n)\|_2^2 = \langle (x_n), (x_n)\rangle$$
teljesül. Ha $p \in [1, +\infty)$, ill.
$$x_n := \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 0 & (n \neq 1) \end{cases}, \qquad y_n := \begin{cases} 1 & (n = 2) \\ 0 & (n \neq 2) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
úgy bármely $1 \leq p \leq \infty$ esetén $(x_n), (y_n) \in l_p$ és

- $1 \leq p < +\infty$ esetén
$$\|x\|_{l_p}^2 = 1, \quad \|y\|_{l_p}^2 = 1, \quad \|x+y\|_{l_p}^2 = 2^{2/p}, \quad \|x-y\|_{l_p}^2 = 2^{2/p},$$

így, ha $p \neq 2$, akkor

$$\|x+y\|_{l_p}^2 + \|x-y\|_{l_p} = 2 \cdot 2^{2/p} \neq 4 = 2\left(\|x\|_{l_p}^2 + \|y\|_{l_p}^2\right).$$

- $p = +\infty$ esetén
$$\|x\|_{l_\infty}^2 = \|y\|_{l_\infty}^2 = \|x+y\|_{l_\infty}^2 = \|x-y\|_{l_\infty}^2 = 1,$$

  így
$$\|x+y\|_{l_\infty}^2 + \|x-y\|_{l_\infty}^2 = 2 \neq 4 = 2\left(\|x\|_{l_\infty}^2 + \|y\|_{l_\infty}^2\right). \quad \blacksquare$$

3. gyakorlat (2026. 02. 25.)

Szükséges ismeretek.

- A konvergens sorozat fogalma normált, illetve metrikus terekben. Alaptulajdonságok.
- Vektorsorozat konvergenciája.
- A Cauchy-féle konvergenciakritérium normált terekben. Teljes normált terek vagy Banach-terek, példák. A Cauchy-kritérium $\mathbb{K}^d$-ben.
- A Bolzano-Weierstraß-féle kiválasztási tétel $\mathbb{K}^d$-ben.

Környezetek

Definíció. Adott $(\mathcal{H}, \rho)$ metrikus tér, $a \in \mathcal{H}$ pont, ill. $0 < r \in \mathbb{R}$ esetén

1. a
$$K_r(a) := K_r^{\rho}(a) := \{x \in \mathcal{H} : \rho(x, a) < r\}$$
halmazt a **középpontú,** r**-sugarú nyílt gömb**nek vagy az a **pont (**r**-sugarú) környezeté**nek,

2. a
$$B_r(a) := B_r^{\rho}(a) := \{x \in \mathcal{H} : \rho(x, a) \leq r\}$$
halmazt a **középpontú,** r**-sugarú zárt gömb**nek

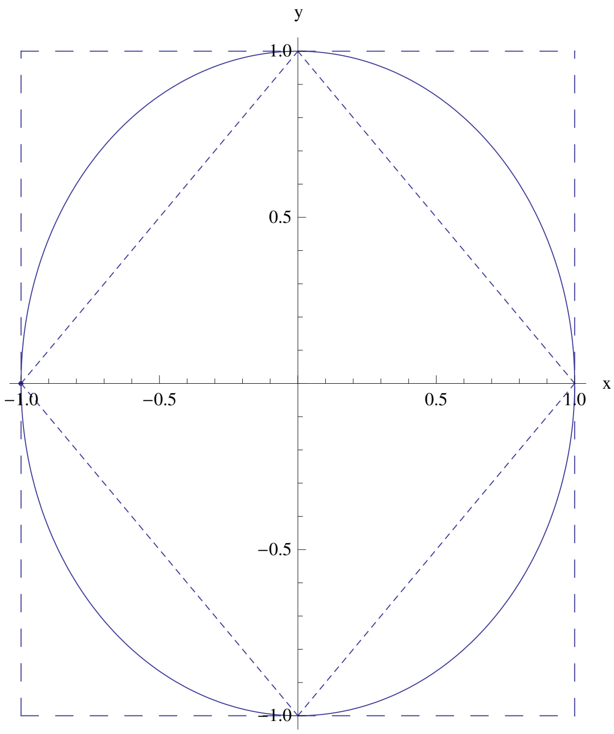
nevezzük.

Példa.

1. Ha $(\mathcal{H}, \rho)$ a diszkrét metrikus tér, akkor tetszőleges $a \in \mathcal{H}$ esetén
$$K_r(a) = \begin{cases} \mathcal{H} & (r > 1), \\ \{a\} & (0 < r \leq 1). \end{cases}$$

2. Ha $\mathcal{H} := \mathbb{R}^2$, $p \in \{1, 2, \infty\}$, továbbá $r := 1$, akkor
$$\begin{aligned} K_1^{\rho_1}(0) &= \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |x_1| + |x_2| < 1\right\}, \\ K_1^{\rho_2}(0) &= \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |x_1|^2 + |x_2|^2 < 1\right\}, \\ K_1^{\rho_\infty}(0) &= \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |x_1| < 1 \text{ és } |x_2| < 1\right\} \end{aligned}$$

(vö. 9. ábra).



9. ábra. A $0 \in \mathbb{R}^2$ pont környezetei az $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$, $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$, $(\mathbb{R}^2, \rho_\infty)$ metrikus terekben.

Feladat. Adott $(\mathcal{H}, \rho)$ metrikus tér esetén mutassuk meg, hogy

1. bármely $a \in \mathcal{H}$ és $r > 0$ esetén $a \in K_r(a)$;
2. minden $a, b \in \mathcal{H}$, $a \neq b$ esetén van olyan $r > 0$, hogy $K_r(a) \cap K_r(b) = \emptyset$ teljesül!

Útm.

1. $\rho(a, a) = 0$ miatt igaz az állítás.
2. Ha
$$r := \rho(a, b)/2 \qquad \text{és} \qquad K_r(a) \cap K_r(b) \neq \emptyset,$$
akkor alkalmas $x \in K_r(a) \cap K_r(b)$ esetén
$$\rho(a, b) \leq \rho(a, x) + \rho(x, b) < r + r = 2r = \rho(a, b)$$
ami nem lehetséges. ■

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{H}, \rho)$ metrikus térben az $A \subset \mathcal{H}$ halmaz

1. **nyílt**, ha minden $a \in A$ esetén van olyan $r > 0$, hogy $K_r(a) \subset A$;
2. **zárt**, ha A^c nyílt.

Megjegyzés. $\emptyset$, ill. $\mathcal{H}$ nyílt és zárt is.

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{H}, \rho)$ metrikus tér és

$$\mathcal{N}_\rho := \{A \subset \mathcal{H} : \; A \text{ nyílt}\},$$

akkor igazak az alábbi állítások!

1. Tetszőleges $\emptyset \neq \Gamma$ indexhalmaz esetén
$$A_\gamma \in \mathcal{N}_\rho \quad (\gamma \in \Gamma) \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \in \mathcal{N}_\rho.$$
2. Bármely véges $\emptyset \neq \widetilde{\Gamma}$ indexhalmaz esetén
$$A_\gamma \in \mathcal{N}_\rho \quad \left(\gamma \in \widetilde{\Gamma}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcap_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} A_\gamma \in \mathcal{N}_\rho.$$

Útm.

1. Ha $\emptyset \neq \Gamma$ indexhalmaz és $A_\gamma \in \mathcal{N}_\rho$ $(\gamma \in \Gamma)$, akkor tetszőleges
$$a \in A := \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$$
esetén van olyan $\gamma \in \Gamma$, hogy $a \in A_\gamma \in \mathcal{N}_\rho$. Mivel A_γ nyílt, ezért alkalmas $\delta > 0$ esetén
$$K_\delta(a) \subset A_\gamma \subset A,$$
azaz $A \in \mathcal{N}_\rho$.
2. Ha $\emptyset \neq \widetilde{\Gamma}$ véges indexhalmaz és $A_\gamma \in \mathcal{N}_\rho$ $(\gamma \in \widetilde{\Gamma})$, akkor tetszőleges
$$a \in A := \bigcap_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} A_\gamma$$

esetén $a \in A_\gamma$ $(\gamma \in \widetilde{\Gamma})$, azaz alkalmas $\delta_\gamma > 0$ számmal $K_{\delta_\gamma}(a) \subset A_\gamma$. Ha

$$\delta := \min\left\{\delta_\gamma > 0 : \ \gamma \in \widetilde{\Gamma}\right\},$$

akkor bármely $\gamma \in \widetilde{\Gamma}$ esetén $K_\delta(a) \subset K_{\delta_\gamma}(a) \subset A_\gamma$, azaz $K_\delta(a) \subset A$. ■

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $(\mathcal{H}, \rho)$ metrikus tér és

$$\mathcal{Z}_\rho := \{A \subset \mathcal{H} : \ A \text{ zárt}\},$$

akkor igazak az alábbi állítások!

1. Tetszőleges $\emptyset \neq \Gamma$ indexhalmaz esetén

$$A_\gamma \in \mathcal{Z}_\rho \quad (\gamma \in \Gamma) \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \mathcal{Z}_\rho.$$

2. Bármely véges $\emptyset \neq \widetilde{\Gamma}$ indexhalmaz esetén

$$A_\gamma \in \mathcal{Z}_\rho \quad \left(\gamma \in \widetilde{\Gamma}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcup_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}} A_\gamma \in \mathcal{Z}_\rho.$$

Útm.

1. Ha tetszőleges $\emptyset \neq \Gamma$ esetén $A_\gamma \in \mathcal{Z}_\rho$, akkor $A_\gamma^c \in \mathcal{N}_\rho$, így a De Morgan-azonosságok, ill. az előző feladat alapján

$$\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)^c = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^c \in \mathcal{N}_\rho, \qquad \text{így} \qquad \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \mathcal{Z}_\rho.$$

2. Ha $\emptyset \neq \widetilde{\Gamma}$ véges indexhalmaz és $A_\gamma \in \mathcal{Z}_\rho$ $(\gamma \in \widetilde{\Gamma})$, akkor $A_\gamma^c \in \mathcal{N}_\rho$ $(\gamma \in \widetilde{\Gamma})$, ezért a De Morgan-azonosságok, ill. az előző feladat alapján

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^c \in \mathcal{N}_\rho, \qquad \text{így} \qquad \bigcup_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}} A_\gamma = \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^c\right)^c \in \mathcal{Z}_\rho. \quad ■$$

A fenti feladat nyújtotta eredmény ad lehetőségünk a halmaz lezárásának értelmezésére.

Definíció. Legyen $(\mathcal{H}, \rho)$ metrikus tér. Valamely $A \in \mathcal{H}$ halmaz $\overline{A}$-val jelölt **lezárás**át (vagy **lezárt**ját) mindazon $B \in \mathcal{Z}_\rho$ halmazok metszeteként definiáljuk, amelyekre $A \subset B$ igaz:

$$\overline{A} := \bigcap_{A \subset B \in \mathcal{Z}_\rho} B.$$

Megjegyezzük, hogy

$$\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}, \qquad A \subset \overline{A}, \qquad \overline{A} \in \mathcal{Z}_\rho,$$

sőt

$$(B \in \mathcal{Z}_\rho, \quad A \subset B) \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{A} \subset B$$

($\overline{A}$ az A halmazt lefedő legszűkebb zárt részhalmaza $\mathcal{H}$-nak).

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{H}, \rho)$ metrikus tér, $a \in \mathcal{H}$, ill. $0 < r \in \mathbb{R}$, akkor

1. a $K_r(a)$ nyílt gömb nyílt halmaz;
2. a $B_r(a)$ zárt gömb zárt halmaz;
3. a $B_r(a)$ zárt gömb nem feltétlenül egyezik meg $K_r(a)$ lezártjával!

Útm.

1. A $K_r(a)$ nyílt gömb nyíltságához azt fogjuk megmutatni, hogy tetszőleges $x \in K_r(a)$ esetén van olyan $s > 0$, hogy $K_s(x) \subset K_r(a)$. Valóban, ha

$$s := r - \rho(x, a) \qquad \text{és} \qquad b \in K_s(x),$$

akkor a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\rho(b, a) \leq \rho(b, x) + \rho(x, a) < s + \rho(x, a) = r,$$

ahonnan

$$b \in K_r(a), \qquad \text{azaz} \qquad K_s(x) \subset K_r(a)$$

következik.

2. Ha $x \in \mathcal{H} \backslash B_r(a)$, akkor $\rho(x, a) > r$. Így a

$$s := \rho(x, a) - r$$

számra $s > 0$, és bármely $y \in K_s(x)$ esetén $y \in \mathcal{H}\backslash B_r(a)$, hiszen ellenkező esetben a háromszög-egyenlőtlenség következményeként

$$\rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a) < s + r = \rho(x, a)$$

adódna, ami nem lehetséges. Így $K_s(x) \subset \mathcal{H}\backslash B_r(a)$, azaz $\mathcal{H}\backslash B_r(a)$ nyílt halmaz, amiből $B_r(a)$ zártsága következik.

3. Ha $\mathcal{H}$ végtelen halmaz, $(\mathcal{H}, \rho)$ a diszkrét metrikus tér és $a \in \mathcal{H}$, akkor

$$K_1(a) = \overline{K_1(a)} = \{a\}$$

és $B_1(a) = \mathcal{H}$. ■

Feladat. Mutasson példát olyan metrikus térre, amelyben van olyan gömb, amelyik tartalmaz egy nagyobb sugarú valódi részgömböt!

Útm.

1. Legyen

$$\mathcal{H} := \{1; 2; 3\}, \qquad \rho(x, x) := 0 \quad (x \in \mathcal{H}), \qquad \rho(2, 3) := \rho(3, 2) := 2,$$

$$\rho(x, y) := 1 \qquad (\text{egyéb } x, y \in \mathcal{H}, \quad x \neq y \text{ esetén}).$$

Könnyű belátni (**HF**), hogy ekkor $(\mathcal{H}, \rho)$ metrikus tér és minden $0 < \beta < \alpha < 1$ esetén

$$K_{1+\alpha}(2) = \{1; 2\} \subsetneqq \{1; 2; 3\} = K_{1+\beta}(1).$$

2. Legyen

$$\mathcal{H} := (-4, 4], \qquad \rho(x, y) := |x - y| \quad (x, y) \in \mathcal{H}).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} K_4(4) &= \{x \in (-4, 4] : \ \rho(x, 4) = |x - 4| < 4\} = (0, 4] \subsetneqq (-1, 4] = \\ &= \{x \in (-4, 4] : \ \rho(x, 2) = |x - 2| < 3\} = K_3(2). \quad ■ \end{aligned}$$

Definíció. Adott $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ normált tér, $a \in \mathcal{V}$ pont, ill. $0 < r \in \mathbb{R}$ esetén

1. a
$$K_r(a) := K_r^{\|\cdot\|}(a) := \{x \in \mathcal{V} : \ \|x - a\| < r\}$$
halmazt a **középpontú, r-sugarú nyílt gömb**nek vagy az a **pont (r-sugarú) környezeté**nek,

2. a
$$B_r(a) := B_r^{\|\cdot\|}(a) := \{x \in \mathcal{V} : \ \|x - a\| \leq r\}$$
halmazt a **középpontú, r-sugarú zárt gömb**nek

nevezzük.

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ normált tér, $a \in \mathcal{V}$, ill. $0 < r \in \mathbb{R}$, akkor

1. a $K_r(a)$ nyílt gömb nyílt halmaz;
2. a $B_r(a)$ zárt gömb zárt halmaz;
3. a $B_r(a)$ zárt gömb a $K_r(a)$ nyílt gömbnek lezártja, azaz fennáll a
$$\overline{K_r(a)} = B_r(a) = \{x \in \mathcal{V} : \ \|x - a\| \leq r\}$$
egyenlőség!

Útm. Az első két állítás a **Feladat** közvetlen következménye. A harmadik pedig a következőképpen látható be. Mivel $K_r(a) \subset B_r(a)$ és $B_r(a)$ zárt halmaz, ezért $\overline{K_r(a)} \subset B_r(a)$, így már csak azt kell megmutatni, hogy $B_r(a) \subset \overline{K_r(a)}$ teljesül. Mivel

$$b \in B_r(a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|b - a\| \leq r \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\|b - a\| < r \quad \text{vagy} \quad \|b - a\| = r),$$

ezért

- ha $\|b - a\| < r$, akkor $b \in K_r(a) \subset \overline{K_r(a)}$.
- ha $\|b - a\| = r$, akkor elég belátni, hogy bármely $s > 0$ esetén $K_s(b) \cap K_r(a) \neq \emptyset$. Ha
$$\varphi(t) := a + t(b - a) \qquad (0 \leq t \in \mathbb{R}),$$

akkor φ értékkészlete az az a-ból induló, $a-b$ irányvektorú félegyenes:

$$\mathcal{L}_a^b := \{a + t(a-b) \in \mathcal{V}: \; 0 \leq t \in \mathbb{R}\}.$$

Világos, hogy

$$\varphi(t) \in K_r(a) \iff \|\varphi(t) - a\| < \varepsilon \iff \|t(b-a)\| = t\|b-a\| = t\varepsilon < \varepsilon \iff 0 < t < 1,$$

azaz a $K_r(a)$ környezet az $\mathcal{L}_a^b$ félegyenesnek pontosan azokat a pontjait tartalmazza, amelyek t paraméterére $0 < t < 1$ teljesül. Hasonlóan

$$\varphi(t) \in K_s(b) \iff \|\varphi(t) - b\| < s \iff \|a + t(b-a) - b\| = |t-1| \cdot \|b-a\| < s,$$

azaz a $K_s(b)$ környezet az $\mathcal{L}_a^b$ félegyenesnek pontosan azokat a pontjait tartalmazza, amelyek t paraméterére

$$|t-1| \cdot \|b-a\| < s$$

teljesül.

Így, ha $t \in (0,1)$, akkor

$$|t-1| \cdot \|b-a\| = (1-t)r < s \iff 1 - t < \frac{s}{r} \iff 1 - \frac{s}{r} < t < 1$$

és ilyen t van. ■

Feladat. tegyük fel, hogy $\mathcal{V}$ olyan lineáris tér, amely tartalmaz a nullelemétől különböző elemet is: $\mathcal{V} \neq \{\theta\}$. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathcal{V}$, ill. $0 < r, R \in \mathbb{R}$, akkor igaz a

$$K_r(a) \subset K_R(b) \qquad \Longrightarrow \qquad r \leq R$$

implikáció!

Útm. Legyen

$\boxed{a \neq b}$, ill.

$$\varphi(t) := a + t(a-b) \quad (0 \leq t \in \mathbb{R}).$$

Így

$$\varphi(t)\in K_r(a) \iff \|\varphi(t)-a\|<r \iff \|a+t(a-b)-a\|=t\|a-b\|<r \iff$$

$$\iff 0\leq t<\frac{r}{\|a-b\|},$$

azaz a $K_r(a)$ környezet az $\mathcal{L}_a^b$ félegyenesnek pontosan azokat a pontjait tartalmazza, amelyek t paraméterére

$$0\leq t<\frac{r}{\|a-b\|}$$

teljesül. Hasonlóan

$$\varphi(t)\in K_R(b) \iff \|\varphi(t)-b\|<R \iff \|a+t(a-b)-b\|=(t+1)\|a-b\|<R \iff$$

$$\iff 0\leq t<\frac{R}{\|a-b\|}-1,$$

azaz a $K_R(b)$ környezet az $\mathcal{L}_a^b$ félegyenesnek pontosan azokat a pontjait tartalmazza, amelyek t paraméterére

$$0\leq t<\frac{R}{\|a-b\|}-1$$

teljesül. Így

$$K_R(b)\supset K_r(a) \implies \frac{r}{\|a-b\|}\leq\frac{R}{\|a-b\|}-1 \iff r\leq r+\|a-b\|\leq R.$$

„Itt a gömbök folytonosan vannak kitöltve, míg metrikus térben *diszkrét* esetekben nincs így.”

$\boxed{a=b}$. Ha $K_r(a)\subsetneqq K_R(a)$, akkor alkalmas $x\in K_R(a)$ esetén $x\notin K_r(a)$, azaz

$$x\in K_R(a) = \{u\in\mathcal{V}:\ \|u-a\|<R\} \iff \|x-a\|\leq R$$

és

$$x\notin K_r(a) = \{u\in\mathcal{V}:\ \|u-a\|<r\} \iff \|x-a\|\geq r.$$

Innen pedig

$$r\leq\|v-a\|\leq R,\qquad \text{azaz}\qquad r\leq R$$

következik. ■

Megjegyezzük, hogy mindez azt jelenti, hogy – metrikus terekkel ellentétben – normált térben a nagyobb sugarú gömb „nem fér bele” a kisebb sugarúba.

Konvergencia, teljesség

Definíció. Adott $(\mathcal{H}, \rho)$ metrikus tér esetén azt mondjuk, hogy az $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{H}$ sorozat

1. **konvergens**, ha alkalmas $\alpha \in \mathcal{H}$ esetén $\lim(\rho(x_n, \alpha)) = 0$.
2. **szabályos** vagy **Cauchy-féle**, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon \qquad (N \leq m, n \in \mathbb{N}).$$

Megjegyzések.

1. Ha $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{V}$ sorozat
   (a) pontosan akkor **konvergens**, ha alkalmas $\alpha \in \mathcal{V}$ esetén $\lim(\|x_n - \alpha\|) = 0$.
   (b) pontosan **szabályos** vagy **Cauchy-féle**, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy
   $$\|x_m - x_n\| < \varepsilon \qquad (N \leq m, n \in \mathbb{N}).$$
2. Ha valamely $(\mathcal{H}, \rho)$ metrikus, ill. $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ normált térben az (x_n) sorozat Cauchy-féle, akkor arra sok esetben a
   $$\rho(x_m, x_n) \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty), \qquad \text{ill. a} \qquad \|x_m - x_n\| \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty)$$
   jelölés is használatos.
3. Világos, hogy ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor Cauchy-féle, hiszen a háromszög-egyenlőtenség következtében
   $$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, \alpha) + \rho(\alpha, x_n) \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty),$$
   ill.
   $$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - \alpha\| + \|\alpha - x_n\| \longrightarrow 0 \qquad (m, n \to \infty).$$
4. Bizonyos metrikus terekben nem konvergens sorozatok is lehetnek Cauchy-sorozatok. Így van ez a $(\mathbb{Q}, \rho_E)$ metrikus térben is.

   Példák.

   (a) Legyen
   $$\mathcal{H} := \mathbb{Q} \qquad \text{és} \qquad \rho(x, y) := |x - y| \quad (x, y \in \mathcal{H}).$$

Az

$$x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatról tudjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre $x_n \in \mathbb{Q}$, továbbá bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $N \in \mathbb{N}$ index, amelyre

$$|x_n - e| < \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}).$$

Következésképpen,

$$|x_m - x_n| = |x_m - e| + |e - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (N \leq m, n \in \mathbb{N}).$$

Ez azt jelenti, hogy (x_n) Cauchy-féle. Az (x_n) sorozat nyilvánvalóan nem konvergens, hiszen ellenkező esetben alkalmas $\alpha \in \mathbb{Q}$ elemmel $\lim(x_n) = \alpha$, és így

$$|\alpha - e| \leq |\alpha - x_n| + |x_n - e| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

miatt $\alpha = e$ teljesülne, ami nem lehetséges, mert $e \notin \mathbb{Q}$ (vö. **Analízis 1 EAGY** (2022 tavasz), x. old.).

(b) Legyen

$$\mathcal{H} := \mathbb{Q} \qquad \text{és} \qquad \rho(x, y) := |x - y| \quad (x, y \in \mathcal{H}).$$

Az

$$x_1 := 2, \qquad x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

rekurzív sorozatról tudjuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre $x_n \in \mathbb{Q}$, továbbá bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $N \in \mathbb{N}$ index, amelyre

$$|x_n - \sqrt{2}| < \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}).$$

Következésképpen,

$$|x_m - x_n| = \left|x_m - \sqrt{2}\right| + \left|\sqrt{2} - x_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (N \leq m, n \in \mathbb{N}).$$

Ez azt jelenti, hogy (x_n) Cauchy-féle. Az (x_n) sorozat nyilvánvalóan nem konvergens, hiszen ellenkező esetben alkalmas $\alpha \in \mathbb{Q}$ elemmel $\lim(x_n) = \alpha$, és így

$$|\alpha - \sqrt{2}| \leq |\alpha - x_n| + |x_n - \sqrt{2}| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

miatt $\alpha = \sqrt{2}$ teljesülne, ami nem lehetséges, mert $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{H}, \rho)$ a diszkrét metrikus tér, akkor valamely $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{H}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha (x_n) kvázikonstans, azaz alkalmas $\alpha \in \mathcal{H}$, ill. $M \in \mathbb{N}$ esetén fennáll az

$$x_n = \alpha \qquad (M \le n \in \mathbb{N})$$

tartalmazás!

Útm.

1. lépés. Ha (x_n) kvázikonstans, akkor tetszőleges metrikus térben) triviálisan konvergens.

2. lépés. Ha (x_n) konvergens és $\alpha := \lim(x_n)$, akkor az $\varepsilon := 1$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$\rho(x_n, \alpha) < 1 \qquad (N \le n \in \mathbb{N}),$$

és így

$$\rho(x_n, \alpha) = 0 \quad (N \le n \in \mathbb{N}), \qquad \text{azaz} \qquad x_n = \alpha \quad (N \le n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $(\mathcal{H}, \rho)$ a diszkrét metrikus tér, akkor valamely $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{H}$ sorozat pontosan akkor Cauchy-féle, ha (x_n) kvázikonstans!

Útm.

1. lépés. Ha (x_n) kvázikonstans, akkor (tetszőleges metrikus térben) triviálisan Cauchy-féle.

2. lépés. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan (küszöb)index, amellyel

$$\rho(x_m, x_n) < \frac{1}{2} \qquad (N \le m, n \in \mathbb{N})$$

A diszkrét metrika értelmezése alapján

$$\rho(x_m, x_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_m = x_n \qquad (N \le m, n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

Definícó. Az $(\mathcal{H}, \rho)$ metrikus teret **teljes**nek nevezzük, ha $(\mathcal{H}, \rho)$-ban bármely Cauchy-sorozat konvergens.

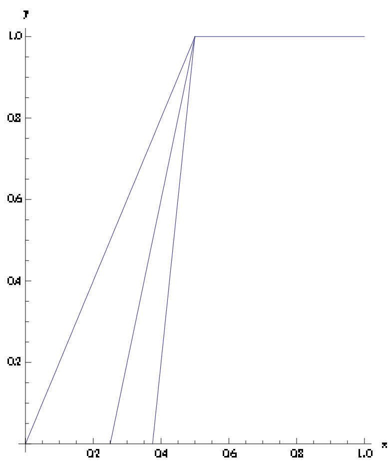
Példa. Ha $(\mathcal{H}, \rho)$ a diszkrét metrikus tér, akkor $(\mathcal{H}, \rho)$ teljes, ui. a diszkrét metrikus térben valamely sorozat triviálisan pontosan akkor konvergens, ha kvázi-kontans, és a Cauchy-sorozatok pontosan a kvázi-konstans sorozatok.

Példa. A $(\mathbb{K}^d, \rho_E)$ metrikus tér teljes /$d \in \mathbb{N}$/.

Feladat. Igazoljuk, hogy $(\mathfrak{C}[a, b], \rho_1)$ metrikus tér nem teljes, azaz a $(\mathfrak{C}[a, b], \|\cdot\|_1)$ normált tér nem Banach-tér!

Útm. Ha $n \in \mathbb{N}$ és

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \left(x \in \left[0, \dfrac{n-1}{2n}\right)\right), \\[2ex] 2n\left(x - \dfrac{n-1}{2n}\right) & \left(x \in \left[\dfrac{n-1}{2n}, \dfrac{1}{2}\right]\right), \\[2ex] 1 & \left(x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]\right), \end{cases} \qquad (x \in [0, 1]),$$



akkor (f_n) Cauchy-sorozat $(\mathfrak{C}[0, 1], \rho_1)$-ben, hiszen ha $n, N \in \mathbb{N}$: $n \geq N$, akkor

$$\rho_1(f_N, f_n) = \int_0^1 |f_N - f_n| = \int_0^1 (f_N - f_n) = \int_0^1 f_N - \int_0^1 f_n = \frac{1}{4N} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{4N},$$

így bármely $\varepsilon > 0$ esetén ha $N \in \mathbb{N}$: $N > 1/4\varepsilon$, úgy

$$\rho_1(f_N, f_n) \leq \frac{1}{4N} < \varepsilon.$$

Ha a $(\mathfrak{C}[0,1], \rho_1)$ térben

$$f_n \longrightarrow f \qquad (n \to \infty),$$

akkor

$$0 \le \int_0^{1/2} |f| \;\le\; \int_0^{1/2} |f_n| + \int_0^{1/2} |f - f_n| = \frac{1}{4n} + \int_0^{1/2} |f - f_n| \le \frac{1}{4n} + \int_0^{1} |f - f_n| =$$

$$= \frac{1}{4n} + \rho_1(f_n, f) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty),$$

azaz

$$\int_0^{1/2} |f| = 0,$$

és így

$$f(x) = 0 \qquad (x \in [0, 1/2]).$$

Továbbá

$$0 \le \int_{1/2}^{1} |f - 1| \le \int_{1/2}^{1} |f_n - 1| + \int_{1/2}^{1} |f - f_n| = 0 + \int_{1/2}^{1} |f - f_n| \le \rho_1(f_n, f) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty),$$

azaz

$$\int_{1/2}^{1} |f - 1| = 0,$$

és így

$$f(x) = 1 \qquad (x \in [1/2, 1]),$$

ami nem lehetséges. ■

Feladat. Igazoljuk, hogy az

$$f_n(x) := x^n \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1])$$

függvénysorozat

1. konvergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ normált térben,

2. divergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben!

Mi a helyzet akkor, ha a $\mathfrak{C}[0,\alpha]$ lineáris teret tekintjük, ahol $0 < \alpha < 1$?

Útm.

1. Ha
$$f(x) := 0 \qquad (x \in [0,1]),$$
akkor
$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$
2. Ha lenne olyan $f \in \mathfrak{C}[0,1]$, amelyre tetszőleges $x \in [0,1]$ esetén
$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \max_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| = \|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$
teljesülne, akkor
$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1 & (x = 1), \\ 0 & (x \in [0,1)) \end{cases}$$
következtében
$$f(x) = 0 \qquad (x \in [0,1))$$
lenne. Innen f folytonosságából $f(1) = 0$ következne, ami nem lehetséges, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $f_n(1) = 1$.

A $\mathfrak{C}[0,\alpha]$ $(0 < \alpha < 1)$ teret illetően a következő mondható el:

- ha
$$f(x) := 0 \qquad (x \in [0,1]),$$
akkor
$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^\alpha |f_n(x) - f(x)|\,dx = \int_0^\alpha x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^\alpha = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$
Következésképpen az (f_n) függvénysorozat konvergens a $(\mathfrak{C}[0,\alpha], \|\cdot\|_1)$ normált térben.

- mivel
$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{x\in[0,\alpha]} |x^n| = |\alpha^n| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty),$$
ezért az (f_n) függvénysorozat konvergens a $(\mathfrak{C}[0,\alpha], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben. ■

Megjegyezzük, hogy a $(\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$, ill. a $(\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_1)$ normált terek esetében a következőket érdemes figyelembe venni.

1. Ha valamely $f \in \mathfrak{C}[a,b]$ függvény, illetve $f_n \in \mathfrak{C}[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat esetén
$$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty),$$

akkor tetszőleges $x \in [a,b]$ számra

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad (n \to \infty),$$

hiszen

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| = \|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

2. Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre $f_n \in \mathfrak{C}[a,b]$, akkor az (f_n) függvénysorozat $(\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ térbeli konvergenciája azt jelenti, hogy alkalmas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvénnyel az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0.$$

3. Ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre $f_n \in \mathfrak{C}[a,b]$, akkor az (f_n) függvénysorozat $(\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_1)$ térbeli konvergenciája azt jelenti, hogy alkalmas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvénnyel

$$\int_a^b |f_n - f| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

4. bármely $f \in \mathfrak{C}[a,b]$ függvény, illetve $f_n \in \mathfrak{C}[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat esetén igaz a

$$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \qquad \Longrightarrow \qquad \|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

implikáció, hiszen

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_1 &= \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_a^b \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\,dx = \\ &= (b-a) \max_{x\in[a,b]} \|f_n(x) - f(x)\| = (b-a)\|f_n - f\|_\infty. \end{aligned}$$

Itt ekvivalencia nem áll fenn, ui. pl. az

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & \left(x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]\right), \\ 0 & \left(x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]\right) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1])$$

függvénysorozat esetében

$$\|f_n - \widehat{0}\|_\infty = f_n(0) = 1 > \frac{1}{2} = n \cdot \frac{1}{2n} = n \cdot \int_0^1 |1 - nx - 0|\,dx = n \cdot \int_0^1 |f_n - 0| = n \cdot \|f_n - \widehat{0}\|_1.$$

Feladat. Igazoljuk, hogy az

$$f_n(x) := \frac{n^2x^3}{1+n^2x^4} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [1,2])$$

függvénysorozat

1. konvergens a $(\mathfrak{C}[1,2], \|\cdot\|_1)$ normált térben,
2. konvergens a $(\mathfrak{C}[1,2], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben!

Útm. Tetszőleges $x \in [1,2]$ esetén

$$\frac{n^2x^3}{1+n^2x^4} \longrightarrow \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x} \qquad (n \to \infty),$$

ezért az

$$f(x) := \frac{1}{x} \qquad (x \in [1,2])$$

függvénnyel dolgozunk tovább. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\begin{aligned} \max_{x\in[1,2]} |f_n(x) - f(x)| &= \max_{x\in[1,2]} \left| \frac{n^2x^3}{1+n^2x^4} - \frac{1}{x} \right| = \max_{x\in[1,2]} \left| \frac{n^2x^4 - 1 - n^2x^4}{x(1+n^2x^4)} \right| = \\ &= \max_{x\in[1,2]} \left| \frac{1}{x(1+n^2x^4)} \right| = \frac{1}{1+n^2} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty), \end{aligned}$$

így

$$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

A fenti megjegyzés következtében tehát

$$\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy az

$$f_n(x) := x^n - x^{2n} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1])$$

függvénysorozat

1. konvergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ normált térben,
2. divergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben!

Útm.

1. Tetszőleges $x \in [0,1]$ esetén

$$f_n(x) = x^n - x^{2n} = x^n(1-x^n) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

Ha

$$f(x) := 0 \qquad (x \in [0,1]),$$

akkor

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_1 &= \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx = \int_0^1 (x^n - x^{2n})\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-(n+1)}{(n+1)(2n+1)} = \frac{n}{2n^2+3n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty), \end{aligned}$$

azaz (f_n) konvergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben.

2. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n(0) = 0 = f_n(1)$ és

$$f_n'(c) = nc^{n-1} - 2nc^{2n-1} = nc^{n-1}(1-2c^n) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

továbbá

$$f_n(c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

ezért a Weierstraß-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{4} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így az $(\|f_n - f\|_\infty)$ számsorozat nem nullsorozat, azaz (f_n) nem konvergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ normált térben. ■

Gyakorló feladat. Konvergensek-e a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$, ill. a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben az alábbi függvénysorozatok?

1. $f_n(x) := \dfrac{1}{x+n} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,2]);$
2. $f_n(x) := \dfrac{nx}{1+n+x} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]);$
3. $f_n(x) := \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [1,2]);$
4. $f_n(x) := x^n - x^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]).$

Útm.

1. Mivel bármely $x \in [0,2]$ esetén

$$\frac{1}{x+n} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért az

$$f(x) := 0 \qquad (x \in [0,2])$$

függvénnyel dolgozunk tovább. Mivel

$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{x\in[0,2]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,2]} \left|\frac{1}{x+n}\right| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért az (f_n) függvénysorozat konvergens a $(\mathfrak{C}[0,2], \|\cdot\|_\infty)$ térben. A fenti megjegyzés következtében a $(\mathfrak{C}[0,2], \|\cdot\|_1)$ térben is konvergens.

2. Mivel bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$\frac{nx}{1+n+x} \longrightarrow x \qquad (n \to \infty),$$

ezért az

$$f(x) := x \qquad (x \in [0,1])$$

függvénnyel dolgozunk tovább.

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_\infty &= \max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{nx}{1+n+x} - x\right| = \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{nx - x - nx - x^2}{1+n+x}\right| = \\ &= \max_{x\in[0,1]} \frac{x+x^2}{1+n+x} \leq \frac{2}{1+n} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),\end{aligned}$$

ezért az (f_n) függvénysorozat konvergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ térben. A fenti A fenti megjegyzés következtében a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ térben is konvergens.

3. Mivel bármely $x \in [1,2]$ esetén

$$\frac{2nx}{1+n^2x^2} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért az

$$f(x) := 0 \qquad (x \in [1,2])$$

függvénnyel dolgozunk tovább. Mivel

$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{x\in[1,2]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[1,2]} \left|\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right| \leq \max_{x\in[1,2]} \frac{2nx}{n^2x^2} = \frac{2}{n} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért az (f_n) függvénysorozat konvergens a $(\mathfrak{C}[1,2], \|\cdot\|_\infty)$ térben. A fenti megjegyzés következtében a $(\mathfrak{C}[1,2], \|\cdot\|_1)$ térben is konvergens.

4. Mivel bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$x^n - x^{n+1} = x^n(1-x) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért az

$$f(x) := 0 \qquad (x \in [0,1])$$

függvénnyel dolgozunk tovább. Mivel

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_1 &= \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \longrightarrow 0 - 0 = 0 \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

ezért az (f_n) függvénysorozat konvergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ térben. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n(0) = 0 = f_n(1)$$

és

$$f_n'(c) = nc^{n-1} - (n+1)c^n = c^{n-1}[n - (n+1)c] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = \frac{n}{n+1},$$

továbbá

$$f_n(c) = \frac{n^n}{(n+1)^n} - \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n}\left[1 - \frac{n}{n+1}\right] = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \cdot \frac{1}{n+1},$$

ezért a Weierstraß-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1},$$

és így

$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} \longrightarrow \frac{1}{e} \cdot 0 = 0 \quad (n \to \infty),$$

ezért az (f_n) függvénysorozat konvergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ térben. ■

Gyakorló feladat. Konvergensek-e a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ normált térben az alábbi függvénysorozatok?

1. $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [-1,1]);$
2. $f_n(x) := n \cdot \left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [1,2]);$
3. $f_n(x) := \dfrac{\sin(nx)}{n} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [-1,1]);$
4. $f_n(x) := \operatorname{arctg}(nx) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]);$
5. $f_n(x) := \left(x + \dfrac{1}{n}\right)^2 \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [e,\pi]);$
6. $f_n(x) := \dfrac{\sqrt{n}x}{1+nx} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]);$
7. $f_n(x) := \dfrac{\sqrt{n}}{(1+nx)^2} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]);$
8. $f_n(x) := n^2x(1-x^2)^n \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]);$
9. $f_n(x) := \begin{cases} n^2x & \left(0 <\leq x \leq \frac{1}{n}\right), \\ n^2 \cdot \left(\frac{2}{n} - x\right) & \left(0\frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}\right), \\ 0 & \left(x \geq \frac{2}{n}\right) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]);$
10. $f_n(x) := \dfrac{\pi n + \sin(nx)}{2n + \cos(n^2x)} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]);$
11. $f_n(x) := nxe^{-nx^2} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]).$

Útm.

1. Mivel bármely $x \in [-1,1]$ esetén

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \longrightarrow |x| \qquad (n \to \infty),$$

ezért az

$$f(x) := |x| \qquad (x \in [-1,1])$$

függvénnyel dolgozunk tovább. Mivel

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_\infty &= \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[-1,1]} \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right| = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sup_{x\in[-1,1]} \frac{1}{\sqrt{n^2x^2+1} + n|x|} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),\end{aligned}$$

ezért az (f_n) függvénysorozat konvergens a $(\mathfrak{C}[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ térben.

Megjegyzés. Felhasználtuk, hogy ha $\alpha > 0$, $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos, akkor

$$\sup(\alpha\mathcal{H}) = \alpha \sup(\mathcal{H}).$$

2. Mivel bármely $x \in [1,2]$ esetén

$$n \cdot \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (n \to \infty),$$

ezért az

$$f(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x \in [1,2])$$

függvénnyel dolgozunk tovább. Mivel

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_\infty &= \sup_{x\in[1,2]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[1,2]} \left| n \cdot \left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right| = \\ &= \sup_{x\in[1,2]} \left| \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| = \sup_{x\in[1,2]} \left| \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)} \right| = \\ &= \sup_{x\in[1,2]} \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+\frac{1}{n}}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+\frac{1}{n}}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+\frac{1}{n}}} \right| =\end{aligned}$$

$$= \sup_{x\in[1,2]} \frac{1}{2n\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{1}{2n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^2} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

ezért az (f_n) függvénysorozat konvergens a $(\mathfrak{C}[1,2], \|\cdot\|_\infty)$ térben.

3. Mivel bármely $x \in [-1,1]$ esetén

$$\frac{\sin(nx)}{n} \longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty),$$

ezért az

$$f(x) := 0 \qquad (x\in[-1,1])$$

függvénnyel dolgozunk tovább. Mivel

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[1,2]} \left|\frac{\sin(nx)}{n}\right| \le \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty),$$

ezért az (f_n) függvénysorozat konvergens a $(\mathfrak{C}[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ térben.

4. Mivel bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$\operatorname{arctg}(nx) \longrightarrow \frac{\pi}{2} \qquad (n\to\infty),$$

ezért az

$$f(x) := \frac{\pi}{2} \qquad (x\in[0,1])$$

függvénnyel dolgozunk tovább. Mivel

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left|\operatorname{arctg}(nx) - \frac{\pi}{2}\right| = \lim_{x\to 0+0} \left|\operatorname{arctg}(nx) - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2},$$

ezért az (f_n) függvénysorozat nem konvergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ térben.

5. Mivel bármely $x \in [e,\pi]$ esetén

$$\left(x+\frac{1}{n}\right)^2 \longrightarrow x^2 \qquad (n\to\infty),$$

ezért az

$$f(x) := x^2 \qquad (x\in[-1,1])$$

függvénnyel dolgozunk tovább. Mivel

$$
\begin{aligned}
\|f_n - f\|_\infty &= \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[-1,1]} \left| \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2 \right| = \\
&= \sup_{x\in[-1,1]} \left| \left(x + \frac{1}{n} - x\right)\left(x + \frac{1}{n} + x\right) \right| = \frac{1}{n} \cdot \sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{1}{n} + 2x \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} + 2\right) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

ezért az (f_n) függvénysorozat konvergens a $(\mathfrak{C}[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ térben.

6. Mivel bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$\frac{\sqrt{n}x}{1+nx} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért az

$$f(x) := 0 \qquad (x \in [0,1])$$

függvénnyel dolgozunk tovább. Mivel

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (x = 0), \\ \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}x} + \sqrt{n}} & (x \in (0,1]) \end{array} \right\} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

így

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{\sqrt{n}x}{1+nx} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty),$$

ezért az (f_n) függvénysorozat konvergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ térben.

7. Mivel

$$f_n(0) = \sqrt{n} \longrightarrow +\infty \qquad (n \to \infty),$$

ezért az (f_n) függvénysorozat nem konvergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ térben.

8. Mivel bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$n^2 x (1-x^2)^n \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért az

$$f(x) := 0 \qquad (x \in [0,1])$$

függvénnyel dolgozunk tovább. Világos, hogy

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n^2}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=n\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\longrightarrow\infty\quad(n\to\infty),$$

hiszen a Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásával

$$1-\frac{1}{n}\leq\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\leq 1\qquad(n\in\mathbb{N})$$

adódik, így a Sandwich tétel következtében

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\longrightarrow 1\quad(n\to\infty).$$

Mindez azt jelenti, hogy

$$\|f_n-f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=+\infty,$$

ezért az (f_n) függvénysorozat nem konvergens a $(\mathfrak{C}[0,1],\|\cdot\|_\infty)$ térben.

9. Mivel bármely $x\in[0,1]$ esetén

$$f_n(x)\longrightarrow 0\qquad(n\to\infty),$$

ezért az

$$f(x):=0\qquad(x\in[0,1])$$

függvénnyel dolgozunk tovább. Világos, hogy

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)=n\longrightarrow\infty\quad(n\to\infty),$$

ezért

$$\|f_n-f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=+\infty,$$

azaz az (f_n) függvénysorozat nem konvergens a $(\mathfrak{C}[0,1],\|\cdot\|_\infty)$ térben.

10. Mivel bármely $x\in[0,1]$ esetén

$$\frac{\pi n+\sin(nx)}{2n+\cos(n^2x)}=\frac{\pi+\frac{\sin(nx)}{n}}{2+\frac{\cos(n^2x)}{n}}\longrightarrow\frac{\pi+0}{2+0}=\frac{\pi}{2}\qquad(n\to\infty),$$

ezért az

$$f(x):=\frac{\pi}{2}\qquad(x\in[0,1])$$

függvénnyel dolgozunk tovább. Mivel

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{\pi n + \sin(nx)}{2n + \cos(n^2x)} - \frac{\pi}{2}\right| = \\ &= \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{2\sin(nx) - \pi\cos(n^2x)}{4n + 2\cos(n^2x)}\right| \leq \frac{2+\pi}{4n-2} \longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty),\end{aligned}$$

ezért az (f_n) függvénysorozat konvergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ térben.

11. Mivel bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$nxe^{-nx^2} = \frac{nx}{e^{nx^2}} \longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty),$$

ezért az

$$f(x) := 0 \qquad (x \in [0,1])$$

függvénnyel dolgozunk tovább. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e^{1/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{e}} \longrightarrow 1 \quad (n\to\infty),$$

ezért az (f_n) függvénysorozat nem konvergens a $(\mathfrak{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ térben. ■

Tétel (majoránskritérium). Tegyük fel, hogy az $f_n \in \mathfrak{C}[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatra és az $M_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ számsorozatra alkalmas $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexszel

$$|f_n(x)| \leq M_n \qquad (N \leq n \in \mathbb{N},\ x \in [a,b]), \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{n\to\infty}(M_n) = 0$$

teljesül. Ekkor az (f_n) függvénysorozat konvergens a $(\mathfrak{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ térben.

Biz. Mivel $\lim_{n\to\infty}(M_n) = 0$, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$0 \leq M_n < \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}).$$

Következésképpen

$$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| \leq M_n < \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N},\ x \in [a,b]). \quad ■$$