felteteles valoszinuseg

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$

"A valoszinusege, felteve hogy B mar megtortent"

fuggetlenseg

$$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$$

"A, B fuggetlen"

$$P(B) > 0 \Longleftrightarrow P(A \mid B) = P(A)$$

"ha tudjuk az egyiket akkor a masikbol nem nyertunk semmi informaciot"

"kizaro": $A \cap B = \emptyset$**,** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

"felteteles": $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$A_1, ..., A_n \in \mathcal{A} \text{ feltetelek}$$
$$\forall k \leq n;$$
$$1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$$
$$P\left(\bigcap_{0=i}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=i}^{k} P\left(A_{i_j}\right)$$

Bayes-tetel

egyszerubb alak

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

masik alak (teljes valoszinuseg tetele)

ha van nehany esemeny ami teljes esemenyrendszer (tehat diszjunk esemenyek, semelyik kettonek nincs trivialis metszet es egyuttesen lefedik az egesz teret) es B tetszoleges esemeny (pozitiv valoszinuseggel) akkor

$$A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$$
$$B \in \mathcal{A}$$
$$P(A_i) > 0$$
$$P(B) = \sum_i P(B \mid A) \cdot P(A_i)$$
$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B \mid A) \cdot P(A) + P\left(B \mid \overline{A}\right) \cdot P\left(\overline{A}\right)}$$

gyakorlat

1.) Egy hattagú társaság az étteremben három rántott sajtot, két mátrai borzas csirkemellet, és egy böllér tálat rendel. A pincér a megrendelt ételeket véletlenszerűen osztja szét. Mennyi a valószínűsége, hogy

a.) mindenki azt kapja, amit rendelt;

$$\frac{1}{\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!}}$$

b.) senki sem azt kapja, amit rendelt?

$$\frac{\frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot 1}{\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!}}$$

2.) Gerike a Kinder csokoládéban lévő új játékokat, 'Shali baba' figurákat gyűjt. 10 különböző fajta ilyen baba van, mindegyik Kinder csokoládéba a 10 figura közül véletlenszerűen kerül egy. Gerike nagymamája tudja, hogy ez a gyerek álma, ezért karácsonyra a Jézuskától 20-at rendel a kisfiúnak.

Tegyük fel, hogy Gerikének még nincs otthon Shali babája.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy Gerike mind a 10-féle Shali babát begyűjti?

$$P = \frac{\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} (-1)^i (10-i)^{20}}{10^{20}}$$

b.) Mi a valószínűsége, hogy éppen a 20. tojás kinyitásánál gyűlik össze a kisfiúnak a 10. fajta baba?

$$P = \frac{10 \cdot \sum_{i=0}^{9} \binom{9}{i} (-1)^i (9-i)^{19}}{10^{20}}$$

3.) Mennyi a valószínűsége, hogy két kockadobásnál mind a két dobás 6-os, azzal a feltétellel, hogy legalább az egyik dobás 6-os?

$$A = \text{egyik hatos}, \quad B = \text{mindketto hatos}$$

$$P(A) = \frac{11}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \wedge B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{11}$$

4.) Három különböző kockával dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az egyik kockával 6-ost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12?

$$B = \text{osszeg pontosan 12}, \quad A = \text{pontosan az egyik hatos}$$

$$P(B) = \frac{3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 1}{6^3} = \frac{25}{6^3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2 \cdot 6 + 3}{6^3} = \frac{15}{6^3}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

5.) Egy érmével annyiszor dobunk, mint amennyi egy szabályos kockadobás eredménye. Mi a valószínűsége, hogy nem kapunk fejet?

$$A_i : \text{i-est dobunk (1-6)}$$
$$B : \text{nem kapunk fejet}$$
$$P(B) = \sum_{i=1}^{6} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i) = \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^6}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2^6}\right)}}$$

6.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 kockával kétszer dobva, mindkét esetben ugyanazt az eredményt kapjuk, ha

a.) a kockák megkülönböztethetőek?

Hogy a második dobás pont ugyanez legyen:

$$P = \frac{1}{6^3} \approx 0,0046$$

b.) a kockák nem különböztethetőek meg?

1. Három különböző szám (20-féle multihalmaz, egyenként $\frac{6}{216}$ eséllyel): $20 \cdot \left(\frac{6}{216}\right)^2$
2. Két egyforma, egy különböző (30-féle multihalmaz, egyenként $\frac{3}{216}$ eséllyel): $30 \cdot \left(\frac{3}{216}\right)^2$
3. Három egyforma (6-féle multihalmaz, egyenként $\frac{1}{216}$ eséllyel): $6 \cdot \left(\frac{1}{216}\right)^2$

$$P = \frac{20 \cdot 36 + 30 \cdot 9 + 6 \cdot 1}{216^2} \approx 0,0213$$

7.) 100 érme közül az egyik hamis (ennek mindkét oldalán fej van). Egy érmét kiválasztva és azzal 10-szer dobva, 10 fejet kaptunk. Ezen feltétellel mi a valószínűsége, hogy a hamis érmével dobtunk?

- $P(\text{Hamis}) = 0,01$
- $P(\text{10 fej} \mid \text{Hamis}) = 1$
- $P(\text{Igazi}) = 0,99$
- $P(\text{10 fej} \mid \text{Igazi}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$

A Bayes-tétel alapján:

$$P(\text{Hamis} \mid \text{10 fej}) = \frac{1 \cdot 0,01}{1 \cdot 0,01 + \frac{1}{1024} \cdot 0,99} \approx 0,9118$$

8.) Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel, és $\frac{1}{3}$ a jó válasz esélye. Feltesszük, hogy a diák tudása biztos (azaz ha tudja a választ, akkor az jó is). Határozzuk meg p értékét, ha $\frac{3}{5}$ annak a valószínűsége, hogy amennyiben helyesen válaszolt, tudta is a helyes választ!

- Tudja: p, esély a jó válaszra: 1.
- Tippel: $1 - p$, esély a jó válaszra: $\frac{1}{3}$.

$$P(\text{Tudta} \mid \text{Jó válasz}) = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{3} \cdot (1 - p)} = \frac{3}{5}$$

$$5p = 3p + 1 - p \Rightarrow 3p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

9.) Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármas útelágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az athéniek kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden 3. alkalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveltetésnek köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak fogalma sincs, melyik út merre vezet, így feldob egy kockát, egyenlő esélyt adva mindegyik útnak. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert, mennyi $2 \cdot 2$, mire közlik vele, hogy 4. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénba jutott?

- $P(A) = P(M) = P(S) = \frac{1}{3}$
- $P(\text{Igaz} \mid A) = \frac{1}{3}, P(\text{Igaz} \mid M) = \frac{1}{2}, P(\text{Igaz} \mid S) = 1$

$$P(\text{Igaz}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{11}{18}$$

$$P(A \mid \text{Igaz}) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{11}{18}} \approx 0,1818$$

10.) Négyen lőnek egymás után egy céltáblára. A résztvevők találati valószínűségei egymástól függetlenül, sorrendben $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$. Ketten érnek el találatot. Mi a valószínűsége, hogy a második elhibázta a lövést?

A találati esélyek: $p_1 = \frac{3}{4}, p_2 = \frac{1}{2}, p_3 = \frac{2}{3}$. A tévesztések: $q_1 = \frac{1}{4}, q_2 = \frac{1}{2}, q_3 = \frac{1}{3}$. Pontosan 2 találat ($T_2$) esélye:

$$P(T_2) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = \frac{3}{24} + \frac{6}{24} + \frac{2}{24} = \frac{11}{24}$$

$$P(2.\text{ hibázott} \mid T_2) \approx 0,5455$$

11.) Milyen $n > 1$-re lesz független

a.) az a két esemény, hogy A : n érmedobásból van fej és írás is, valamint B : legfeljebb egy írás van.
Esemény A: van fej és írás is $\to P(A) = 1 - \frac{2}{2^n}$. $P(B) = \frac{1+n}{2^n}$. Metszet ($A \cap B$): pontosan egy írás -> $P = \frac{n}{2^n}$. Függetlenség feltétele:

$$\left(1 - \frac{2}{2^n}\right)\frac{n+1}{2^n} = \frac{n}{2^n} \Rightarrow 2^n = 2n + 2 \Rightarrow *n = 3*$$

b.) az a két esemény, hogy A : n érmedobásból van fej és írás is, valamint B : az első dobás fej.
Esemény A: van fej és írás is $\to P(A) = 1 - \frac{2}{2^n}$. $P(B) = \frac{1}{2}$. Metszet: az első fej, de van legalább egy írás -> $P = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$.

$$\left(1 - \frac{2}{2^n}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$$

Ez az egyenlőség **minden $n > 1$** esetén igaz.

12.) Osztozkodási probléma: hogyan osztozzon a téten két játékos, ha 2:1 állásnál félbeszakadt a 4 győzelemig tartó mérkőzésük? (Tfh. az egyes játékok egymástól függetlenek, bármelyikük $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyerhet az egyes játékoknál.)

Az első játékosnak 2, a másodiknak 3 meccset kell nyernie. Legfeljebb 4 meccs van hátra.

$$P(1.\text{ nyer}) = \sum_{k=2}^{4} \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6+4+1}{16} = \frac{11}{16}$$

A tétet **11:5** arányban kell elosztani.

13.) Adjuk meg annak a valószínűségi változónak az eloszlását, ami egy hatgyermekes családban a fiúk számát adja meg. Tegyük fel, hogy mindig $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ a fiúk, ill. a lányok születési valószínűsége, és az egyes születések függetlenek egymástól.

Jelölje a fiúk számát X. Az eloszlás (Binomiális):

$$P(X = k) = \binom{6}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{\binom{6}{k}}{64} \quad (k = 0, 1, ..., 6)$$

14.) Jelölje p_k annak a valószínűségét, hogy egy lottóhúzásnál $\binom{90}{5}$ a legnagyobb kihúzott szám k. Számítsuk ki a p_k értékeket, és mutassuk meg, hogy ez valóban valószínűségi eloszlás!

$$p_k = \frac{\binom{k-1}{4}}{\binom{90}{5}} \quad (k \in \{5, 6, ..., 90\})$$

Ez eloszlás, mert a "hokiütő-szabály" alapján: $\sum_{k=5}^{90} \binom{k-1}{4} = \binom{90}{5}$.

15.) Két doboz közül az elsőben k piros és l zöld golyó van, a másodikban k zöld és l piros. Visszatevéssel húzunk az alábbi szabály szerint: ha a kihúzott golyó piros, akkor a következő húzásnál az első dobozból; ha zöld, akkor a második dobozból húzunk. Először az első dobozból húzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az n. húzásnál piros golyót húzunk? Mihez tart ez a valószínűség, ha $n \to \infty$?

Jelölje p_n annak esélyét, hogy az n. húzás piros:

$$p_n = p_{n-1} \left(\frac{k}{k+l}\right) + (1 - p_{n-1}) \left(\frac{l}{k+l}\right)$$

A rekurzió zárt alakja ($p_1 = \frac{k}{k+l}$):

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{k-l}{k+l}\right)^n$$

Ha $n \to \infty$, a valószínűség $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$-hez tart.