Mi a kapcsolat a monotonitás és a Riemann-integrálhatóság között?

Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény monoton az $[a, b]$ intervallumon, akkor integrálható $[a, b]$-n

Definiálja a szakaszonként monoton függvény fogalmát!

Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.
AMH az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény szakaszonként monoton, ha

$$\exists m \in \mathbb{N}^{+} \quad \text{és} \quad \tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$$

úgy, hogy minden $i = 1, \ldots, m$ index esetén

- az $f_{|_{(x_{i-1}, x_i)}}$ függvény monoton
- f korlátos $[a, b]$-n.

Definiálja az egyenletes folytonosság fogalmát!

Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény egyenletesen folytonos a $H \subset \mathcal{D}_f$ halmazon, ha

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in H, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Mondja ki az egyenletes folytonosságra igazolt Heine-tételt!

Ha $-\infty < a < b < +\infty$ és $f \in C[a, b]$, akkor f egyenletesen folytonos $[a, b]$ intervallumon.

Mi a kapcsolat a folytonosság és a Riemann-integrálhatóság között?

Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor integrálható $[a, b]$-n. ($C[a, b] \subset R[a, b]$)

Definiálja a szakaszonként folytonos függvény fogalmát!

Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.
AMH az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény szakaszonként folytonos, ha

$$\exists m \in \mathbb{N}^{+} \quad \text{és} \quad \tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$$

úgy, hogy minden $i = 1, \ldots, m$ index esetén

- az $f_{|_{(x_{i-1}, x_i)}}$ függvény folytonos
- léteznek és végesek a $\lim_{x_{i-1}, +0} f, \lim_{x_i - 0} f$ határértékek.

Hogyan szól a Newton–Leibniz-tétel ?

Ha $f \in R[a, b]$ és a f függvénynek van primitív függvénye az [a, b] intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

ahol F a f függvény egy (tetszőleges) primitív függvénye

Definiálja az integrálfüggvény fogalmát!

TFH $f \in R[a, b]$ és $x_0 \in [a, b]$. Ekkor a

$$F : [a, b] \ni x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

függvényt az f függvény x_0-ban eltűnő integrálfüggvényének nevezzük.