

Integráltranszformáció (helyettesítés)

Legyen $g \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g \in C^1$ (azaz $\exists \partial_i g_k \in C(i, k = 1, \dots, n)$)

$I \subset D_g$ kompakt, $g|_{\text{int}I}$ injektív, és $f : g[I] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos. Ekkor

$$\begin{aligned} f \in R(g[I]) &\iff I \ni x \mapsto f(g(x)) \cdot |\det g'(x)| \in R(I) \\ f \in R(g[I]) &\implies \int_{g[I]} f = \int_I f \circ g \cdot |\det g'| \end{aligned}$$

Polárkoordináták

$n = 2$ esetében

$$g(r, \varphi) := (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi) \quad ((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2)$$

$$\implies g'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin \varphi & \cos \varphi \\ r \cdot \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \implies \det g'(r, \varphi) = -r$$

$I \subset [0, 2\pi] \times [0, r] \quad (r > 0)$ esetén $g|_{\text{int}I}$ injektív

$n = 3$ esetében

$$g(r, \theta, \varphi) := (r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, r \cdot \cos \theta) \quad ((r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3)$$

$$g'(r, \varphi, \theta) = \text{Hf}$$

Hengerkoordináták

$n = 3$ esetében

$$g(\rho, \varphi, z) := (\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi, z) \quad ((\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3)$$

$$g'(\rho, \varphi, z) = \text{Hf}$$

Példa?

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Bizonyítás

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_0^R e^{-x^2} dx}_{=: I_R}$$

$$I_R^2 = \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy = \int_{[0,R]^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = (*)$$

$$g(r, \varphi) := (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi) \quad (0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$$

$[0, R]^2$ egy négyzet a síkon, $g[[0, R]^2]$ pedig R sugarú negyedkör az első síknegyedben, ezt jelöljük K -val, a négyzet maradék részét $(x^2 + y^2 \geq R^2)$ pedig L -lel.

$$(*) = \int_K \dots + \int_L \dots =: I_{R_1} + I_{R_2}$$

$$I_{R_2} \leq e^{-R^2} \cdot |L| \leq e^{-R^2} \cdot R^2 \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty)$$

$$I_{R_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R e^{-(r^2 \cdot \cos^2 \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \varphi)} \cdot r \, dr d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^R r \cdot e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2} \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_0^R = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \rightarrow \frac{\pi}{4} \quad (R \rightarrow +\infty)$$