1. Irja fel az $\exp, \ln, \sin, \cos, \operatorname{tg}, a^x \ (a > 0, x \in \mathbb{R})$ fuggvenyek derivaltfuggvenyet.

$$\exp' = \exp$$

$$\ln' = \frac{1}{x}$$

$$\sin' = \cos$$

$$\cos' = -\sin$$

$$\operatorname{tg}' = \frac{1}{\cos^2}$$

$$a^x = a^x \ln a$$

2. Milyen ekvivalens atfogalmazast ismer a pontbeli derivalhatosagra lineris kozelitessel?

legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} D_f$. Ekkor:

$$f \in D\{a\} \Longleftrightarrow \exists A \in \mathbb{R} \ \text{ es } \ \exists \varepsilon \in D_f \to \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0 : f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \ \left(x \in D_f\right), \ \text{ es } \ A = f'(a)$$

3. Mi az erinto definicioja?

Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fuggveny grafikonjanak az $(a, f(a))$ pontban van erintoje, ha $f \in D\{a\}$.

Az f grafikonjanak $(a, f(a))$ pontbeli erintojen az

$$y = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$$

egyenletu egyenest ertjuk.

4. Irja le az inverz fuggveny differencialhatosagarol szolo tetelt!

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyilt intervalllum, es $f : I \to \mathbb{R}$

TFH

- (a) f szigoruan monoton es folytonos I-n
- (b) egy $a \in I$ pontban $f \in D\{a\}$ es $f'(a) \neq 0$

Ekkor az f^{-1} inverz fuggveny derivalhato a $b := f(a)$ pontban, es

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

5. Defininalja a jobb oldali derivalt fogalmat!

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D_f$

TFH $\exists \delta > 0 : [a, a+\delta) \subset D_f$

AMH f az a pontban jobbrol derivalhato, ha

$$\exists \ \text{ es veges a } \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ \text{ hatarertek}$$

Ezt az f fuggveny a pontbeli jobb oldali derivaltjanak nevezzuk, es $f'_+(a)$-val jeloljuk.

6. Defininalja a bal oldali derivalt fogalmat!

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D_f$

TFH $\exists \delta > 0 : (a - \delta, a] \subset D_f$

AMH f az a pontban balrol derivalhato, ha

$$\exists \text{ es veges a } \lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ hatarertek}$$

Ezt az f fuggveny a pontbeli bal oldali derivaltjanak nevezzuk, es $f'_{-}(a)$-val jeloljuk.

7. Mikor mondjuk azt hogy egy fuggveny ketszer derivalhato egy pontban?

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} D_f$

AKM f ketszer derivalhato az $a \in \operatorname{int} D_f$ pontban (jelolese: $f \in D^2\{a\}$), ha
- a fuggveny derivalhato az $a \in \operatorname{int} D_f$ pont egy kornyezeteben, azaz $\exists r > 0 : f \in D\left(K_{r(a)}\right)$ es
- az f' derivaltfuggveny derivalhato a-ban, azaz $f'(a) \in D\{a\}$.

Legyen ekkor

$$f''(a) := (f')'(a)$$

az f masodik a pontbeli masodik derivaltja

8. Mondja ki a Rolle-tetelt!

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ es $a < b$. Ekkor

$$\left.\begin{array}{l} f \in C[a,b] \\ f \in D(a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b), \text{hogy } f'(\xi) = 0.$$

9. Mondja ki a Lagrange-fele kozepertektetelt!

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ es $a < b$. Ekkor

$$\left.\begin{array}{l} f \in C[a,b] \\ f \in D(a,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b), \text{hogy } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

10. Mondja ki a Cauchy-fele kozepertektetelt!

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ es $a < b$. Ekkor

$$\left.\begin{array}{l} f, g \in C[a,b] \\ f, g \in D(a,b) \\ \forall x \in (a,b) : g'(x) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b), \text{hogy } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$