(Hf) 1. Számítsa ki a következő határértékeket!

a) $$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2} = \lim_{x\to 5}\frac{(x-1)-2^2}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{\cancel{x-5}}{\cancel{(x-5)}(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{\sqrt{5-1}+2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{\frac{4x^3+3x^2}{4x-3}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{\frac{x^2(4x+3)}{4x-3}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-x\cdot\sqrt{\frac{4x+3}{4x-3}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{4x-3}} = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{4x-3}}\cdot\frac{\sqrt{4x-3}+\sqrt{4x+3}}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{4x+3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(4x-3-(4x+3))}{\sqrt{4x-3}(\sqrt{4x-3}+\sqrt{4x+3})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-6x}{\sqrt{4x-3}(\sqrt{4x-3}+\sqrt{4x+3})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-6}{\frac{\sqrt{4x-3}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{4x-3}+\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt{4-\underset{\downarrow 0}{\frac{3}{x}}}\left(\sqrt{4-\underset{\downarrow 0}{\frac{3}{x}}}+\sqrt{4+\underset{\downarrow 0}{\frac{3}{x}}}\right)} =$$

$$= \frac{-6}{\sqrt{4}(\sqrt{4}+\sqrt{4})} = -\frac{6}{8} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}}}$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{x}-\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}-3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{5\cdot 1-3\cdot 1}{1} = \underline{\underline{2}},$$

hiszen $(\alpha\neq 0)$ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x} = \left(\underset{\alpha x=0 \iff x=0}{y=\alpha x\to 0,\ \text{ha } x\to 0}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1.$$

d) $$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(3-x)}{\sin(4x-12)} = \lim_{x\to 3}\frac{-\sin(x-3)}{\sin(4(x-3))} = \left(\underset{x-3=0 \iff x=3}{y=x-3\to 0,\ \text{ha } x\to 3}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{-\sin y}{\sin 4y} = \lim_{y\to 0} -\frac{\frac{\sin y}{y}}{\frac{\sin 4y}{y}} = \lim_{y\to 0} -\frac{\frac{\sin y}{y}}{4\cdot\frac{\sin 4y}{4y}} =$$

$$= -\frac{1}{4\cdot 1} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-e^{5x}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2x}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(3x)^n}{n!} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(5x)^n}{n!}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2x}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{3^n x^n}{n!} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{5^n x^n}{n!}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2x} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(3^n-5^n)\,x^n}{n!} =$

$= \left(\text{a sor nulladik tagja } 0\right)$ $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2x} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(3^n-5^n)\,x^n}{n!} =$
$3^0-5^0=1-1=0$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2x} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(3^{n+1}-5^{n+1})\,x^{n+1}}{(n+1)!} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(3^{n+1}-5^{n+1})\,x^{n}}{(n+1)!} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(3-5)1}{1!} + \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(3^{n+1}-5^{n+1})\,x^{n}}{(n+1)!}}_{\to 0}\right) = \dfrac{1}{2}(3-5) = \underline{\underline{-1}}$

(mindegyik tagjában van x és konv. sugára $R=+\infty$)

Megjegyzés: Van egy nevezetes határérték, amit nem nehéz igazolni hatványsorokkal:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Valóban:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} - 1\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} - 1\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)!} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{(0+1)!} + \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)!}}_{\to 0}\right) = 1$

(mindegyik tagjában van x és konv. sugára $R=+\infty$)

Ennek segítségével: $(\alpha, \beta \neq 0)$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{\alpha x}-1)-(e^{\beta x}-1)}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-1}{x} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\beta x}-1}{x} = \alpha \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x} - \beta \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\beta x}-1}{\beta x} =$

$= \alpha\cdot 1 - \beta\cdot 1 = \underline{\underline{\alpha-\beta}}$, hiszen

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\gamma x}-1}{\gamma x} = \left(y=\gamma x \to 0,\ \text{ha } x\to 0\right) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^y-1}{y} = 1$, ha $\gamma \neq 0$.
$\gamma x = 0 \Leftrightarrow x=0$

f) $$\lim_{x\to 0+0} \frac{\cos\sqrt{x} - \frac{1}{1-x}}{x+\sin 2x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x}\cdot\frac{\cos\sqrt{x}-\frac{1}{1-x}}{1+\frac{\sin 2x}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}\left(\cos\sqrt{x}-\frac{1}{1-x}\right)}{1+\frac{\sin 2x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}\left(\cos\sqrt{x}-\frac{1}{1-x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0+0}\left(1+\frac{\sin 2x}{x}\right)} = \frac{-\frac{3}{2}}{3} = \underline{\underline{\frac{-1}{2}}}$$

hiszen $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \cos\sqrt{x} = \cos(x^{\frac{1}{2}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x^{1/2})^{2n}}{2n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$, $(x>0)$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad (-1<x<1)$

Ezért $\frac{1}{x}\left(\cos\sqrt{x} - \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$ ha $0<x<1$

$$= \frac{1}{x}\left[\cancel{1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} - \left(\cancel{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left[\frac{(-1)^n}{(2n)!}-1\right]x^n\right) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}-1\right]x^{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}-1\right]x^n\right) = \frac{(-1)^{0+1}}{(2\cdot 0+2)!} - 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}-1\right]x^n\right)}_{\to 0 \text{ ha } x\to 0}$$

Tehát $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{x}\left(\cos\sqrt{x} - \frac{1}{1-x}\right) = \frac{-1}{2!} - 1 = -\frac{3}{2}$

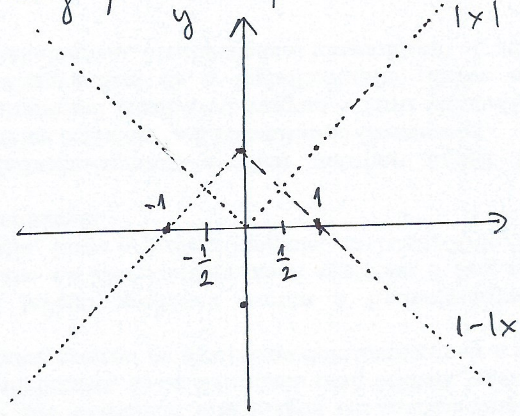
Másrészt

$$\lim_{x\to 0+0}\left(1+\frac{\sin 2x}{x}\right) = \lim_{x\to 0+0}\left(1+2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right) = 1+2\cdot 1 = 3$$

(Hf) 2. Határozzuk meg az alábbi függvény folytonossági és szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

$$f(x)=\begin{cases} |x|, & \text{ha } x\in\mathbb{Q}, \\ 1-|x|, & \text{ha } x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Megoldás. A függvény grafikonját szemlélteti a köv. ábra:



$D_f=\mathbb{R}$. Legyen $a\in\mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $x_n\in\mathbb{Q}$ és $x_n\to a$, illetve $y_n\notin\mathbb{Q}$ és $y_n\to a$. (Két ilyen sorozat mindig van.)

$\exists \lim\limits_a f \Rightarrow$ (átviteli elv) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$.

Az abszolút érték függvény folytonossága miatt:

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n|=|a|$, és $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-|y_n|)=1-|a|$

Ezért $\exists \lim\limits_a f \Rightarrow |a|=1-|a| \Rightarrow 2|a|=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$ vagy $a=-\frac{1}{2}$.

Így a többi pont másodfajú szakadási hely.

Igazolni fogjuk, hogy f folytonos az $a=\frac{1}{2}$ és $a=-\frac{1}{2}$ pontokban.

A definíció alapján: $(*)$ $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists\delta>0: \forall |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Legyen $a=\frac{1}{2} \Rightarrow f(a)=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

$x\in\mathbb{Q}\Rightarrow \left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\left||x|-\frac{1}{2}\right|=\left||x|-\left|\frac{1}{2}\right|\right|\le\underbrace{\left|x-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon}$

$x\notin\mathbb{Q}\Rightarrow \left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\left|1-|x|-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}-|x|\right|=\left||x|-\frac{1}{2}\right|=\left||x|-\left|\frac{1}{2}\right|\right|\le\underbrace{\left|x-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon}$

(A fentiekben azt alkalmaztuk, hogy $||a|-|b||\le|a-b|$ (1. gyakorlat))

Tehát $\delta:=\varepsilon$ esetén $(*)$ teljesül.

Hasonlóan igazolható a folytonosság $a=-\frac{1}{2}$ esetén.