Analízis 3. (A), 1. zárthelyi, 2022.03.25.

Megoldások

1. *(10 pont)* Konvergensek-e az alábbi integrálok? Ha igen, számítsa is ki az értéküket!

$$\text{a)} \int_1^{+\infty} x^2 e^{1-x}\, dx \qquad\qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x^3+x^4}\, dx$$

Megoldás. a) Mivel az

$$f(x) := x^2 e^{1-x} \quad (x > 1)$$

függvény folytonos, ezért minden $1 < u < v < +\infty$ esetén $f \in R[u, v]$, illetve létezik primitív függvénye az $(1, +\infty)$ intervallumon. Ezt parciális integrálással számítjuk ki:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{1-x}\, dx &= -x^2 e^{1-x} + 2 \int x e^{1-x}\, dx = \\ &= -x^2 e^{1-x} + 2\left(-x e^{1-x} + \int e^{1-x}\, dx\right) = \\ &= -x^2 e^{1-x} - 2x e^{1-x} - 2e^{1-x} + c = \\ &= -(x^2 + 2x + 2)e^{1-x} + c \quad (c \in \mathbb{R},\ x > 1). \end{aligned}$$

Az f függvény egy primitív függvénye az $(1, +\infty)$ intervallumon tehát

$$F(x) := -(x^2 + 2x + 2)e^{1-x} \quad (x > 1),$$

amelynek határértékei a végpontokban:

$$F(1) := -\lim_{x \to 1+0} (x^2 + 2x + 2)e^{1-x} = -5,$$

$$F(+\infty) := -\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{e^{x-1}} = -\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 2}{e^{x-1}} = -\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0.$$

Így a szóban forgó improprius integrál konvergens, és

$$\int_1^{+\infty} x^2 e^{1-x}\, dx = \Big[F(x)\Big]_1^{+\infty} = F(+\infty) - F(1) = 5.$$

b) Mivel

$$\frac{x+1}{x^2+x^3+x^4} \geq \frac{x}{3x^2} = \frac{1}{3x} \quad (x \in (0,1))$$

és az

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$$

improprius integrál divergens, ezért a minoráns kritérium szerint a szóban forgó integrál is divergens.

2. *(10 pont)* Indokolja meg, hogy az alábbi függvénysorozat konvergens a $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ térben, de divergens a $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ térben!

$$f_n(x) = \frac{1+nx^2}{1+3nx+n^2x^3} \qquad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}^+)$$

Megoldás. Mivel minden $x \in (0,1]$ esetén

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+nx^2}{1+3nx+n^2x^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}+x^2}{n\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3x}{n}+x^3\right)} = 0,$$

ezért legyen $f(x) := 0$ $(x \in [0,1])$. Ekkor $f \in C[0,1]$, és

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 \frac{1+nx^2}{1+3nx+n^2x^3}\,dx = \frac{1}{3n}\int_0^1 \frac{(1+3nx+n^2x^3)'}{1+3nx+n^2x^3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3n}\Big[\ln(1+3nx+n^2x^3)\Big]_0^1 = \frac{\ln(1+3n+n^2)}{3n} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty),$$

ugyanis a L'Hospital-szabály alkalmazásával

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3x+x^2)}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+2x}{3(1+3x+x^2)} = 0.$$

Tehát f_n konvergál f-hez a $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ térben.

Ha a függvénysorozat konvergens lenne a $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ térben, akkor itt is csak az előbbi f függvényhez tarthatna a pontonkénti határérték miatt. De mivel

$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} \frac{1+nx^2}{1+3nx+n^2x^3} \geq \max_{x\in[0,1]} \frac{1}{1+3nx+n^2x^3} = 1,$$

ezért ebben a térben a konvergencia nem áll fenn.

3. *(10 pont)* Tekintsük az alábbi függvényeket:

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy+x^2(1+\sin y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad g(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad ((x,y)\neq(0,0)).$$

a) Igazolja a definíció szerint, hogy f folytonos a $(0,0)$ pontban!
b) Létezik-e g-nek határértéke $(0,0)$-ban?

Megoldás. a) Azt kell belátnunk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$\forall\,(x,y) \in \mathcal{D}_f,\ \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \ \text{ esetén } \ |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon.$$

Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ valós számot. Ha $(x,y) = (0,0)$, akkor $|f(x,y) - f(0,0)| = 0 < \varepsilon$.

Ha $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{R}^2$, akkor

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|xy + x^2(1+\sin y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|xy| + 2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{x^2+y^2}{2} + 2(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 3\sqrt{x^2+y^2} = 3\,\|(x,y)-(0,0)\|_2 < \varepsilon.$$

Ezért a $\delta := \varepsilon/3$ választással teljesül a definíció.

b) Tekintsük az

$$(x_n, y_n) := \left(\frac{1}{n}, 0\right) \longrightarrow (0,0) \quad (n \to \infty)$$

sorozatot. Ekkor

$$g(x_n, y_n) = 0 \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty),$$

tehát ha van g-nek határértéke $(0,0)$-ban, akkor az csak 0 lehet. Ugyanakkor az

$$(u_n, v_n) := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow (0,0) \quad (n \to \infty)$$

sorozat esetén

$$g(u_n, v_n) = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \neq 0 \quad (n \to \infty).$$

Ezért az átviteli elv értelmében g-nek nem létezik határértéke $(0,0)$-ban.

4. *(10 pont)* A definíció alapján lássa be, hogy az alábbi függvény deriválható az $a = (2,-1)$ pontban, és adja meg $f'(a)$ értékét! Ellenőrizze a kapott eredményt a Jacobi-mátrix kiszámításával!

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ xy - x \end{pmatrix} \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

Megoldás. Legyen $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor

$$f(a+h) - f(h) = f(h_1+2, h_2-1) - f(2,-1) = \begin{pmatrix} (h_1+2)^2 + (h_2-1)^2 - 5 \\ (h_1+2)(h_2-1) - (h_1+2) + 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} h_1^2 + h_2^2 + 4h_1 - 2h_2 \\ h_1h_2 - 2h_1 + 2h_2 \end{pmatrix} = A \cdot h + \begin{pmatrix} h_1^2 + h_2^2 \\ h_1h_2 \end{pmatrix},$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

A deriválhatóság igazolásához azt kell belátni, hogy

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - A \cdot h\|}{\|h\|} = 0.$$

Ehhez alkalmazzuk a közrefogási elvet:

$$0 \leq \frac{\|f(a+h)-f(a)-A\cdot h\|_1}{\|h\|_\infty} = \frac{|h_1^2+h_2^2|+|h_1h_2|}{\|(h_1,h_2)\|_\infty} \leq$$

$$\leq \frac{3\,\|(h_1,h_2)\|_\infty^2}{\|(h_1,h_2)\|_\infty} = 3\,\|(h_1,h_2)\|_\infty \longrightarrow 0 \quad ((h_1,h_2)\to(0,0)).$$

Így f deriválható az a pontban, és $f'(a)=A$. Az ellenőrzéshez írjuk fel f Jacobi-mátrixát:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x,y) & \partial_2 f_1(x,y) \\ \partial_1 f_2(x,y) & \partial_2 f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y-1 & x \end{pmatrix} \quad \left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right).$$

Tehát valóban

$$f'(2,-1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. *(10 pont)* Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

a) Számítsa ki f parciális deriváltjait minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban!
b) Adja meg f iránymenti deriváltját az $(1,2)$ pontban az $(1,1)$ vektorral párhuzamos irány mentén!
c) Írja fel a $z=f(x,y)$ felület $(1,2,2/5)$ pontjához tartozó érintősík egyenletét!

Megoldás. a) Ha $(0,0)\neq(x,y)\in\mathbb{R}^2$, akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{x(x^2+y^2)-2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Az $(x,y)=(0,0)$ pontban:

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t-0} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0,$$

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t-0} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0.$$

b) Mivel $\|(1,1)\|_2=\sqrt{2}$, ezért

$$e := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

az $(1,1)$ vektorral párhuzamos egységvektor. Az a)-beli számolások alapján f parciális deriváltjai léteznek és folytonosak az $(1,2)$ pont egy környezetében, ezért alkalmazhatjuk az iránymenti derivált kiszámítására vonatkozó tételt:

$$\partial_e f(1,2) = \partial_1 f(1,2) \cdot e_1 + \partial_2 f(1,2) \cdot e_2 =$$

$$= \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{25} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{25\sqrt{2}}.$$

c) Legyen $(x_0, y_0) = (1, 2)$, ekkor $f(x_0, y_0) = 2/5$, a megadott pont tehát valóban rajta van a $z = f(x, y)$ felületen. Az f függvény parciális deriváltjai léteznek az (x_0, y_0) pont egy környezetében és folytonosak (x_0, y_0)-ban, ezért f totálisan deriválható az (x_0, y_0) pontban. A felület megadott pontjához tehát húzható érintősík, amely a következő képlettel adható meg:

$$z - f(x_0, y_0) = \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Behelyettesítés után:

$$z - \frac{2}{5} = \frac{6}{25}(x-1) - \frac{3}{25}(y-2) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{6}{25}x - \frac{3}{25}y - z = -\frac{2}{5}.$$