Diszkrét matematika 1

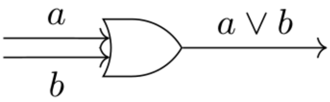
Logika

Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2025 tavasz

Logika



Logika

if ($i \geq 1$ and $a > 2$) or ($i = 0$ and $a^2 < 3$) and (i is even or a is odd) **then**

$i+=1$

else

$i = -i^2 + 1$

for $i = 0, 1, \ldots, n$

if esik az eső, de meleg van, bár a nap is elbújt, és az idő is későre jár **then**

$i+=1$

else

$i = -i^2 + 1$

for $i = 0, 1, \ldots, n$

Predikátumok

Definíció

Predikátum: olyan változóktól függő kijelentések, amelyhez a változóik értékétől függően valamilyen igazságérték tartozik:
igaz (I, ↑), **hamis** (H,↓), és a kettő egyidejűleg nem teljesül.

Példa

$V()$: A vonat késik.	0-változós, értéke: I.
$G(x)$: x hölgy.	1-változós,
	értéke: G('Éva') $=$I, G('Ádám') $=$H.
$F(x)$: x felnőtt.	1-változós.
$P(x)$: x vizsgázó puskázott.	1-változós.
$B(x,y)$: x főnöke y-nak.	2-változós.

Logikai jelek

A predikátumokat logikai jelekkel tudjuk összekötni:

Definíció

Legyenek A, B predikátumok. Ekkor

tagadás, jele $\neg A$

$\neg A$	I	H
	H	I

és, jele $A \wedge B$

$A \wedge B$	I	H
I	I	H
H	H	H

vagy (megengedő), jele $A \vee B$

$A \vee B$	I	H
I	I	I
H	I	H

ha . . . , akkor . . . (implikáció), jele $A \Rightarrow B$

$A \Rightarrow B$	I	H
I	I	H
H	I	I

Ekvivalencia, jele $A \Leftrightarrow B$

$A \Leftrightarrow B$	I	H
I	I	H
H	H	I

Logikai jelek – **vagy**

Köznyelvbe a **vagy** háromféle értelemmel bírhat:

Megengedő **vagy**: *„Ha megcsalsz a-val **vagy** b-vel, elhagylak!”*

$A \vee B$	I	H
I	I	I
H	I	H

Kizáró **vagy**: *„**Vagy** moziba megyünk, **vagy** színházba”*
(„exclusive or”, XOR, $\oplus$)

$A \oplus B$	I	H
I	H	I
H	I	H

Összeférhetetlen **vagy**: *„Iszik **vagy** vezet!”*

	I	H
I	H	I
H	I	I

Logikai jelek – **implikáció**

Az **implikáció** ($A \Rightarrow B$) csak logikai összefüggést jelent, és nem okozatit!

$A \Rightarrow B$	I	H
I	I	H
H	I	I

Példa

$2 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \sin(2\pi) = 0$

$2 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad$ hétfő van

Hamis állításból minden következik:

Példa

$2 \cdot 2 = 5 \quad \Rightarrow \quad \sin(2\pi) = -2$

Adott logikai jel, más módon is kifejezhető:

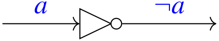
$$(A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg A \vee B)$$

Bizonyítás. Ugyanaz az igazságtáblájuk.

Logikai áramkörök – Boole-algebrák

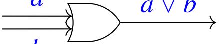
Legyenek bitek a logikai értékek: 0–hamis, 1–igaz.
Legyenek $a, b \in \{0, 1\}$ bitek (vagy Boole változók). Ekkor

negálás



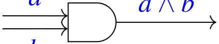
$\neg$	0	1
	1	0

vagy



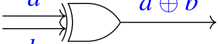
$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

és



$\wedge, \cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

kizáró vagy, XOR

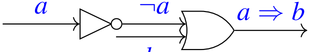


$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Példa

További áramkörök

Implikáció



Kvantorok

A kvantorokkal a változókból ,,lokális változókat” k épezhetünk.

- egzisztenciális kvantor: $\exists$,,létezik”, ,,van olyan”
- univerzális kvantor: $\forall$,,minden”

Példa

$V(x)$: x veréb

$M(x)$: x madár

- Minden veréb madár: $\forall x(V(x) \Rightarrow M(x))$, ill. $\forall x(\neg V(x) \vee M(x))$,
- Van olyan madár ami veréb: $\exists x(M(x) \wedge V(x))$,
- Minden veréb madár de nem minden madár veréb:

$$\big(\forall x(\neg V(x) \vee M(x))\big) \wedge \big(\exists x(M(x) \wedge \neg V(x))\big)$$

Formulák

A formulák predikátumokból és logikai jelekből alkotott „mondatok”.

Definíció (Formulák)

- A predikátumok a legegyszerűbb, ún. elemi formulák.
- Ha $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ két formula, akkor $\neg\mathcal{A}$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$ is formulák.
- Ha $\mathcal{A}$ egy formula és x egy változó, akkor , $(\exists x \mathcal{A})$ és $(\forall x \mathcal{A})$ is formulák.

Példa

Minden veréb madár de nem minden madár veréb.:
$\big(\forall x(V(x) \Rightarrow M(x))\big) \wedge \big(\exists x(M(x) \wedge \neg V(x))\big)$.
egy formula.

Ha nem okoz félreértést, a zárójelek elhagyhatóak.