Diszkrét matematika 1

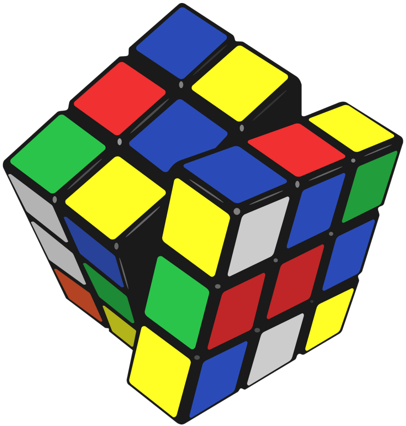
Kombinatorika

Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2025 tavasz

Kombinatorika



Ismétléses permutáció

Példa

Egy vizsgán 5 hallgató vett részt, 3 darab 5-ös és 2 darab 4-es született.
Hányféleképpen tudjuk leírni az öt érdemjegyet?

5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	...
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	

- Ha az azonos érdemjegyek között különbséget teszünk, lehetséges sorrendek száma: $5!$
- Ha az azonos érdemjegyek között nem teszünk különbséget, egy lehetőséget többször számolunk: az 5-ök lehetséges sorrendje és a 4-ek lehetséges sorrendje
- A szorzat-szabály szereint egy lehetőséget $3! \times 2!$-szor számolunk.
- Az osztás-szabály szerint, így a lehetséges sorrendek száma: $\dfrac{5!}{2! \cdot 3!}$

Ismétléses permutáció

Feladat: adott m típusú tárgy, az első típusból k_1 darab, a második típusból k_2 darab, ...

Hány lehetséges sorrend van, ha az azonos típusú elemeket nem különböztetjük meg?

- Összesen $k_1 + k_2 + \cdots + k_m$ elemünk van.
- Ha ezek között különbséget teszünk, a lehetséges sorrendek száma: $(k_1 + k_2 + \cdots + k_m)!$
- Ha azonban az azonos típusú elemek között nem teszünk külömbséget, egy sorrendet többször számolunk.
- Egy sorrendet $k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!$ multiplicitással számolunk.
- Így az osztás szabály szerint $\dfrac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!}$ lehetséges sorrend van.

Binomiális tétel

Emlékeztető:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $\ldots$

Tétel

Adott $n \geq 1$ egész esetén

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i\end{aligned}$$

Binomiális tétel

Tétel: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$

Bizonyítás.

- $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$
- A szorzatban mi lesz $a^{n-i}b^i$ együtthatója?
- i tényezőből b-t választunk, a maradékból a-t (sorrend nem számít, egy tényezőből csak egyszer).
- Ennek száma: $\binom{n}{i}$. $\square$

Példa

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) \implies$
  a, a-k száma: 1, a, b-k száma: 2, b, b-k száma: $1 \implies a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) \implies$
  a, a, a-k száma: 1, a, a, b-k száma: 3, a, b, b-k száma: 3, b, b, b-k száma: 1
  $\implies a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Pascal háromszög

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Általában:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
$$

Tétel

Adott n, i nemnegatív egészek esetén

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$$

Pascal háromszög

Tétel: Adott n, i nemnegatív egészek esetén
$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$$

Bizonyítás.

- Hányféleképpen tudunk $n+1$ elemből $i+1$ elemet kiválasztani?
  $\Longrightarrow$ kétféleképpen számláljuk le
- 1. módszer: $n+1$ elemből közvetlenül kiválasztunk $i+1$-et: $\binom{n+1}{i+1}$
- 2. módszer: esetszétválasztással: kiválasztjuk-e az $n+1$-eik elemet?
  - vagy kiválasztjuk az $n+1$-edik elemet és a maradék n elemből i darabot,
  - vagy nem választjuk ki az $n+1$-edik elemet és a maradék n elemből $i+1$ darabot választunk
- összeadás-szabály szerint ez $\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1}$ □

Binomiális együttható szimmetriája

Emlékeztető: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$ Itt a formula a-ra és b-re szimmetrikus:

Tétel

Minden n, k nemnegatív egészre $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Bizonyítás.

- **1. bizonyítás**: közvetlenül a formulából $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{n-k}$.
- **2. bizonyítás**:
  $\binom{n}{k} = n$-ből k-t választunk
  $= n$-ből $n-k$-t megjelölünk (és azokat nem választjuk) $= \binom{n}{n-k}$. □