Diszkrét matematika I. feladatok
Kombinatorika II.
Kilencedik alkalom (2025.04.07-04.11.)

Bemelegítő feladatok

1. Hányféleképpen állhat föl 10 pár a körtánchoz, ha mindenki a saját párja oldalán táncol, de a Kiss és a Nagy pár nem táncol egymás mellett?

   Megoldás: Mindenkit összeragasztunk a párjával, de számít egy páron belül a férfi-nő sorrendje, ezért ez 2^{10} lehetőség, majd körbeállítjuk a tíz párt (9! lehetőség), ami összesen $2^{10} \cdot 9!$ fölállás, hiszen két egymás utáni független döntést hoztunk (párokon belüli sorrendek, utána párok egymás közötti ciklikus permutációja).

   Ezek közül rosszak azok, amikor a Nagy és Kiss párok egymás mellé kerülnek; ezen párokat összeragasztva (2 lehetőség, mert számít a Kiss és Nagy pár sorrendje) és a többi 8 (szintén ragasztott) párral körbeállítva $2^{10} \cdot 2 \cdot 8! = 2^{11} \cdot 8!$ rossz fölállást kapunk (párokon belüli sorrendek, utána Nagy-Kiss/Kiss-Nagy sorrend, utána 8 pár és a Nagy-Kiss kvartett egymás közötti ciklikus permutációja).

   Tehát összes mínusz rosszak: $2^{10} \cdot 9! - 2^{11} \cdot 8! = 2^{10} \cdot (9 - 2) \cdot 8! = 7 \cdot 8! \cdot 2^{10}$ jó fölállás van.

   Másik megoldás: Mindenkit összeragasztunk a párjával. Rögzítsük a Nagy pár helyét, hozzájuk képest állítjuk föl a többieket. A Nagy pár jobb oldali szomszédja 8 féle lehet, mert Kissék nem, a bal oldali szomszédja már csak 7 féle. Ezután a Nagy pár jobb oldali szomszédjától kezdve az óramutató járásával megegyezően sorban elhelyezzük a párokat, most már bármelyik helyre kerülhet a Kiss pár is, tehát $7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1$ féle sorrend van. Végül minden egyes páron belül külön-külön (egymástól függetlenül) a férfi-nő sorrendje kétféle lehet, tehát a megoldás $8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdots 1 \cdot 2^{10} = 7 \cdot 8! \cdot 2^{10}$.

   Harmadik megoldás: Most is mindenkit összeragasztunk a párjával, és rögzítjük Nagyék helyét, és hozzájuk képest állítjuk föl a többieket. Kissék a 9 hely közül csak 7 helyre állhatnak (a közvetlenül Nagyék melletti két helyre nem). Ez 7 lehetőség. Ezután döntjük el, hogy a maradék 8 helyet hogyan osztjuk ki a többi 8 pár között: ez 8!lehetőség. Ezután minden páron belül kettő-kettő lehetőség az egyes párokon belüli egymás közötti sorren. Egymás utáni független döntések, tehát: $7 \cdot 8! \cdot 2^{10}$.

2. Egy fagyizóban puncs, vanília, csokoládé és eper fagyit árulnak. Hányféleképpen kérhetünk 6 gombócot a) tölcsérbe (azaz számít a gombócok sorrendje); b) kehelybe (nem számít a sorrend); c) + d) mindenképp szeretnénk két gombóc puncsot?

   a) Megoldása: A tölcsérben van sorrend (nem mindegy, hogyan sorakoznak benne a gombócok), így alulról fölfelé haladva $4^6 = 2^{12} = 4096$ lehetőségünk van.

   b) Megoldása: A kehelyben nem számít a sorrend (bármelyik gombóchoz hozzáférhetünk), csak az, hogy miből mennyit választunk; ez tehát ismétléses kombináció: $\binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$-féle lehetőséggel (*vagy:* $4 - 1 = 3$ szeparátor és 6 elem).

c) Megoldása: Dobjuk ki azokat, amikor legfeljebb egy puncsot kértünk. Ezt esetszétválasztással számoljuk. Azon választások száma, amiben nincs puncs: 3^6 (mintha nem is lenne négyféle fagyi, csak háromféle). Amiben egy puncs van, azok száma: $6 \cdot 3^5$ (eldöntjük, hanyadik gombóc a puncs, a maradék öt gombócnál háromféle döntési lehetőségünk van). Marad tehát $4^6 - 3^6 - 6 \cdot 3^5 = 4^6 - 3^6 - 2 \cdot 3^6 = 4^6 - 3 \cdot 3^6 = 4^6 - 3^7 = 4096 - 2187 = 1909$ jó választás.

d) Megoldása: Két gombóc már fix, tehát még négy gombócot kérhetünk négyféléből, amit $\binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$-féleképp tehetünk meg (4 elem, 3 szeparátor).

3. Egy osztályban 37 gyerek tanul. Közülük angolul 27-en, németül 15-en, mindkét nyelven 10-en beszélnek. Hány olyan gyerek van, aki sem angolul, sem németül nem tanul?

   Megoldás: Legyen $H = \{\text{osztály tagjai}\}$ az alaphalmaz, $A = \{\text{angolul tanulók}\}$, $N = \{\text{németül tanulók}\}$. A szitaformula értelmében $|H \setminus (A \cup N)| = |H| - |A| - |N| + |A \cap N|$, azaz $|H \setminus (A \cup N)| = 37 - 27 - 15 + 10 = 5$, tehát 5 gyerek nem tud egyik nyelven sem.

Logikai szitaformula: a „Dobjuk ki a rosszat!” ötlet általánosítása, amikor a megszámolandó ,,jó” elemek helyett a ,,rossz” elemeket számoltuk meg, majd ezt kivontuk az összes elemek számából. Általánosabban: előfordulhat, hogy több szempont is van, amely szerint egy elem ,,rossz” lehet. Ekkor lehetnek olyan többszörösen rossz elemek (sorrendek, kiválasztások stb.), amelyek egyszerre többféle szempont szerint is rossznak minősülnek. Azonban ezeket a többszörösen rossz elemeket is csak egyszer akarjuk kivonni az összes elemek számából. Erre ad megoldást a szitaformula.

Legyen $H = \{ \text{ összes elem } \}$ az alaphalmaz, $A_1 = \{\text{1. szempont szerint rossz elemek }\}$, $A_2 = \{\text{2. szempont szerint rossz elemek }\}$ stb., $A_1 \subseteq H$, $A_2 \subseteq H$, és így tovább...

Fölírjuk a formulát kettő, három, illetve négy ,,rossz” halmaz esetére:

$$|H \setminus (A_1 \cup A_2)| = |H| - (|A_1| + |A_2|) + |A_1 \cap A_2|$$

$$|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = |H| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|)+$$
$$+(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| = |H| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|)+$$
$$+(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|)-$$
$$-(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|)+$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

Megjegyzés: A szitaformula általános alakja tetszőlegesen sok rossz részhalmazra vonatkozik.

---

4. Hány olyan 20 hosszúságú kockadobás-sorozat van, amelyben
   a) van 1-es? b) van 1-es és 2-es is?
   c) van 1-es, 2-es és 3-as is? d)* az $1, 2, \ldots, 6$ számok mindegyike szerepel?

   a) Megoldása: Dobjuk ki a rosszat: $6^{20} - 5^{20}$.

   b) Megoldása: Dobjuk ki a rosszakat, de kompenzáljuk a kétszer kidobottakat (mini szita): legyen H az összes dobássorozatok halmaza, A_1 azon dobássorozatok halmaza, melyekben nem dobtunk 1-t, A_2 pedig azoké, melyekben nem dobtunk 2-t. Ekkor $|H| = 6^{20}$, $|A_1| = |A_2| = 5^{20}$, $|A_1 \cap A_2| = 4^{20}$, tehát a szitaformula értelmében $|H \setminus (A_1 \cup A_2)| = 6^{20} - 5^{20} - 5^{20} + 4^{20}$.

   c) Megoldása: Az előző gondolatmenettel, valamint a háromszor kidobott és háromszor visszavett dobássorozatokat egyszer ki kell dobni (közepes szita): Jelölések mint a **b)** részben, továbbá legyen A_3 azon dobássorozatok halmaza, melyekben nem dobtunk 3-t, ekkor $|H| = 6^{20}$, $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 5^{20}$, $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 4^{20}$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3^{20}$, azaz $|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = 6^{20} - 5^{20} - 5^{20} - 5^{20} + 4^{20} + 4^{20} + 4^{20} - 3^{20}$.

Gyakorló feladatok

5. a) Egy 1 méter sugarú kör**vonal** alakú céltáblára lövünk (pl. darts táblán csak a külső kört célozzuk). Belövünk 4 nyilat a 4 lehető legtávolabbi pozícióba (pl. legfelső, legalsó, jobb szélső, bal szélső pontok). Bizonyítsuk, hogy egy ötödik nyilat már nem tudunk úgy belőni, hogy a távolsága mindegyik nyíltól nagyobb legyen, mint 1 méter.

   b) Igaz-e tehát, hogy öt nyilat bárhogyan belőve a fenti körvonalra biztosan lesz köztük kettő, amelyek távolsága kisebb, mint 1 méter?

   c) Egy 2m×2m-es, négyzet alakú céltáblába belövünk öt golyót. Mutassuk meg, hogy lesz kettő, melyek távolsága legfeljebb $\sqrt{2}$ m!

   d) És hány golyót kellene belelőni ahhoz, hogy biztosan legyen legalább hat, melyek páronként legfeljebb $\sqrt{2}$ méterre vannak egymástól?

   a) Megoldása: A 4 kijelölt pont, mint középpontok körül 1 méter sugarú köröket húzva a körlapok teljesen lefedik az eredeti céltábla körvonalát.

   b) Megoldása: Nem. Ha egy szabályos ötszög öt csúcsába lőjük a dartokat, akkor távolabb lesznek, mint 1 méter.

   c) Megoldása: Természetes módon fölosztva a táblát négy 1m×1m-es részre, észrevehetjük, hogy ezen kis négyzetek legtávolabbi pontjai (az átellenes sarkai) között a távolság $\sqrt{2}$ méter. Tehát ha két golyó ugyanabba a kis négyzetbe kerül, akkor a távolságuk biztosan nem több $\sqrt{2}$ méternél, tehát ezek megfelelnek skatulyáknak. A skatulyaelv szerint öt golyót négy skatulyába téve biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amibe legalább két golyó kerül, ami az észrevételünk fényében bizonyítja az állítást.

   Megjegyzés: Vigyázat! Az előző két alfeladat megmutatta, hogy az NEM lenne jó gondolatmenet, hogy a négy első dartot egymástól a lehető legtávolabb: a négy sarokba lőve sem tudjuk már hová belőni az ötödiket úgy, hogy valamelyikhez ne lenne közel. Hiszen ugyanez a gondolatmenet b)-re HAMIS választ adna.

   d) Megoldása: Több mint $5 \cdot 4$ golyót belelőve a táblába biztosan lesz olyan skatulya, amibe több mint 5 golyó kerül. Ezek közül bármely kettő legfeljebb $\sqrt{2}$ méterre van egymástól, azaz

21 golyó bizonyosan elég. Húsz viszont nem: a tábla négy sarkába 5-5 golyót lőve nagyon közel egymáshoz nem lesz hat olyan, melyek páronként közel lennének egymáshoz.

Skatulyaelv: Ha n darab skatulyába legalább $n+1$ darab tárgyat **bárhogyan** helyezünk el, akkor **biztosan** lesz **legalább egy** olyan skatulya, melybe **legalább** két tárgy kerül.

Általánosított skatulyaelv: Ha n darab skatulyába legalább $k \cdot n + 1$ darab tárgyat **bárhogyan** helyezünk el, akkor **biztosan** lesz **legalább egy** olyan skatulya, melybe **legalább** $k+1$ tárgy kerül.

A 5. c) feladatnál tipikus helytelen megoldási kísérlet: ,,LEGROSSZABB ESETBEN" a négy sarokba lövünk $1-1$ golyót, és akkor az ötödik valamelyikhez már közel lesz...

Probléma: a golyók helyét nem mi választjuk meg, bármely elrendezés esetén teljesülnie kell az állításnak. Ha egy konkrét elrendezésre bizonyítjuk, akkor az összes lehetséges elrendezésre is bizonyítanunk kellene. Ha valaki ezt nem akarja megtenni, és azt állítja, hogy ez az elrendezés a legrosszabb eset, akkor három dolog kell: egyrészt definiálni egy mérőszámot a ,,rosszaság"-ra , ami alapján összehasonlítjuk, hogy egy eset mikor rosszabb, mint a másik; másrészt bizonyítani, hogy ha egy esetre már igazoltuk az állítást, akkor abból az állítás következik a nála kevésbé rossz esetekre; harmadrészt igazolni kell, hogy tényleg ez az eset a legrosszabb.

Ha így szólna a kérdés: ,,Legfeljebb hány golyót lehet belelőni úgy, hogy nem lehet köztük kettő, melyek távolsága legfeljebb másfél méter?" Ekkor mutatnunk kell egy példát arra, hogy négyet még igen, a skatulyaelv segítségével pedig be kell látnunk, hogy ötöt már nem.

---

6. Legfeljebb hány természetes szám adható meg úgy, hogy semelyik kettő különbsége ne legyen osztható 8-cal?

   Megoldás: Két szám különbsége akkor osztható 8-cal, ha a 8-cal vett osztási maradékuk megegyezik. A lehetséges osztási maradékok: $0, 1, \ldots, 7$. Az osztási maradékok tehát megfelelőek lesznek skatulyáknak. 8 skatulya van, így a skatulyaelv értelmében 9 (vagy több) szám esetén biztosan van kettő, melyek különbsége osztható 8-cal. Tehát legfeljebb 8 szám adható meg, és ez meg is valósítható, pl. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Érdekes feladatok

7. Artúr király Kerekasztalánál 12 lovag ül. Mindegyikük haragban van a közvetlenül mellette ülőkkel, DE CSAK AZOKKAL. (Azaz minden lovag pontosan két lovaggal van haragban: a két mellette ülővel.) Öt lovagot kell kiválasztani, akik kiszabadítják a királylányt. Hányféleképpen tehetjük meg ezt úgy, hogy ne legyenek ellenségek a lovagok között? És ha n lovagból kell k-t kiválasztani?

   Megoldás: Képzelhetjük úgy, mint egy óra számlapját, ahol Sir Lancelot ül 1 óránál. Ekkor az 2 és 12 óránál ülő lovag Sir Lancelot két szomszédja. Most ,,kiegyenesítjük" a számlapot, Sir Lancelot lesz az első helyen, a szomszédjai a 2. és 12. helyeken. Egy lehetőséget kódoljunk 0/1 sorozattal (0: nem megy, 1: megy), így egy 12 hosszúságú 0/1 karaktersorozatot kapunk. Tehát visszavezettük a feladatot az ismétléses kombinációnál tanult módszerre, csak le kell fordítanunk a feladatban szereplő feltételeket: összesen 5 db 1-es és 7 db 0 lesz, és két 1-es nem lehet egymás mellett.

Esetszétválasztás aszerint, hogy Sir Lancelot elmegy-e vagy nem:

Ha Sir Lancelot megy, akkor az 1. helyen 1 áll, a 2. és 12. helyen 0 áll (mert Sir Lancelot szomszédjai nem mennek); és ezen kívül 4 db 1-es és 5 db 0 van, de két 1-es ezen 5 közül sem lehet egymás mellett.

Ez annak a feladatnak felel meg, amikor 5 gyerek között osztunk szét 7 egyforma cukorkát úgy, hogy mindenki legalább 1-et kapjon (most a szeparáló elemek az 1-esek, a cukorkákat a 0-k jelképezik, minden 1-es után legalább egy darab 0 következik és a 2. és 12. helyeen álló nullákat is beleszámoljuk). Ennek a megoldása: kiosztunk minden gyereknek egy cukorkát (ezek közé értjük a 2. és 12. helyre fixált nullákat), ezután a maradék 2 cukorkát kell 5 gyerek között kiosztani, de már nincs feltétel, tehát 4 db szeparáló elem (itt: 1-es) és 2 db cukorkát jelképező karakter (itt 0-ás) van. Ezek lehetséges sorrendjeinek száma $\binom{6}{2} = 15$.

Ha Sir Lancelot nem megy el, akkor az első helyen 0 áll, elegendő a sorozat további részével foglalkoznunk. Ekkor 11 hosszú 0/1 sorozatunk van, melyben 5 db 1-es és 6 db 0 szerepel, és két 1-es nem lehet egymás mellett (és a szélekre nincs külön feltétel, mert ahol záródik a kör, ott 0 áll).

Ez annak a feladatnak felel meg, amikor 6 gyerek között osztunk szét 6 egyforma cukorkát úgy, hogy a 2-5. gyerekek mindenképpen legalább 1-et kapnak (a szeparáló elemek az 1-esek, a cukorkákat a 0-k jelképezik, az első előtt nem feltétlenül áll 0, és minden 1-es után legalább egy darab 0 következik, az utolsót kivéve). Ennek a megoldása: kiosztunk a 2-5. gyerekeknek egy-egy cukorkát, ezután a maradék 2 cukorkát kell 6 gyerek között kiosztani, és már nincs feltétel: tehát 5 db szeparáló elem és 2 db cukorkát jelképező karakter van. Ezek lehetséges sorrendjeinek száma $\binom{7}{2} = 21$.

A lehetőségek száma a két esetben összesen: $\binom{6}{2} + \binom{7}{2} = 15 + 21 = 36$.

Másik megoldás: Az eleje ugyanaz, mint az előző megoldásnál, de most nem csinálunk esetszétválasztást, hanem egyelőre csak azokat az eseteket számoljuk meg, amikor Sir Lancelot megy. (És ebből okoskodunk tobvább.) Ez az előzőek szerint $\binom{6}{2} = 15$. Valójában Sir Lancelot helyett bármelyik másik lovaggal is ugyanígy számolhatjuk meg azokat az eseteket, amikor ez a lovag biztosan elmegy.

Jelölje $L = \{lovagok\}$ a lovagok halmazát, $C = \{csapatok\}$ az ötfős mentőcsapatok halmazát, és legyen $R \subseteq L \times C$ az a reláció, hogy $(\ell, c) \in R$, ha ℓ lovag benne van c csapatban. Számoljuk meg R elemeinek a számát kétféleképpen!

Egyrészt a lovagok felől: Sir Lancelotnál kiszámoltuk, hogy ő (vagy bármelyik lovag) 15 csapatban van benne, tehát a rendezett párok száma $|L| \cdot 15 = 12 \cdot 15 = 180$.

Másrészt a csapatok felől: minden csapatban pontosan 5 lovag van, tehát a rendezett párok száma $|C| \cdot 5$. Mivel ugyanazt számoltuk meg mindkétszer, a kettő megegyezik, így $|L| \cdot 15 =$

$|C| \cdot 5$. Tudjuk, hogy $|L| = 12$, tehát $12 \cdot 15 = |C| \cdot 5 \Longrightarrow |C| = 36$, vagyis 36 csapatösszeállítás lehetséges.

8. Hány szelvényre van szükség a TOTÓ-n, hogy legalább 5/13 találatot érjünk el? (A TOTÓ-n 13 focimeccsnek kell megtippelni az eredményét, melyek mindegyike háromféle lehet: 1, 2, X.)

   Megoldás: Minden meccs eredménye háromféle lehet: 1 = hazai győzelem, 2 = vendég győzelem, vagy X = döntetlen. Ez három „skatulya" — és $13 = 3 \cdot 4 + 1$ meccset három skatulyába beskatulyázva nem lehetséges, hogy mindhárom skatulyában legfeljebb csak négy meccs legyen.

   Tehát lesz legalább öt meccs egyforma végeredménnyel. Azaz ha három szelvényt töltünk ki, az elsőt csupa egyessel, a másodikat csupa kettessel, a harmadikat csupa X-szel, akkor ezek között a szelvények között legalább az egyiken lesz lelgalább öt találatunk.

Beadandó házi feladatok

9. Egy teremben legalább hány hallgatónak kell lenni, hogy mindenképpen legyen

   a) legalább három olyan, akiknek ugyanabban a hónapban van a születésnapja? (**1/3 pont**)

   b) legalább három olyan, akiknek áprilisban van a születésnapja? (**1/3 pont**)

   c) legalább két olyan hónap, mikor legalább 2-2 hallgatónak van születésnapja? (**1/3 pont**)

   Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat). (**részenként 1/3 pont**)

10. Arabella, Bella, Cilla, Daniella és Ella elmennek színházba, ahol leadják a kabátjukat a ruhatárba. A ruhatáros összekeveri a kabátjaikat. Hányféleképpen kaphatják vissza, ha

    a) Bella nem a sajátját kapja vissza? (**1/3 pont**)

    b) sem Bella, sem Cilla nem a sajátját kapja vissza? (**1/3 pont**)

    c) senki sem a sajátját kapja vissza? (**1/3 pont**)

    Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat). (**részenként 1/3 pont**)

További gyakorló feladatok

11. Az 52 lapos francia kártyában négy szín mindegyikéből 13-13 darab van, minden színből egy ász van. Négy játékosnak osztunk 13-13 lapot. a) Hány különböző leosztás van? b) Hány olyan, amikor mindenkinek van ásza? c) Hány olyan, amikor minden ász egyvalakinél van?

    a) Megoldása: Összekeverjük a paklit, aminek eredménye 52! féle permutáció lehet. Ezután minden néggyel osztható soszámú lap a 4. játékoshoz, minden 4-gyel osztva 3 maradékot adó sorszámú lap a 3. játékoshoz, minden 4-gyel osztva 2 maradékot adó sorszámú lap a 2. játékoshoz, minden 4-gyel osztva 1 maradékot adó sorszámú lap a 1. játékoshoz kerül. (Ez az, ami ténylegesen történik egy osztáskor, de modhatnánk azt is, hogy az első 13 lap az elsőhöz, a következő 13 lap a másodikhoz, és így tovább, a számoláson nem változtatna.)

    Mivel az egy játékos kezébe kerülő lapok egymás közötti sorrendje nem számít (a játékos a saját kezében úgy kever, ahogy akar, azzal nem keletkezik új leosztás), ezért a tehénszabály alapján az 52!-t osztani kell az egyes játékosok kezében a lapok közötti sorrendek 13! számával, méghozzá mind a négy játékos esetén kell egy-egy tehénszabály:

$$\frac{52!}{13!\cdot 13!\cdot 13!\cdot 13!}=\frac{52!}{(13!)^4}$$

(Ez hasoló ahhoz, mint amikor könyveket raktunk számozott dobozokba.)

a) Másik megoldása: $\binom{52}{13}$ féleképpen választhatjuk ki az első játékos kezébe kerülő lapok halmazát, a maradék 39 lap közül $\binom{39}{13}$ féleképpen választhatjuk ki a második játékos kezébe kerülő lapok halmazát, a maradék 26 lap közül $\binom{26}{13}$ féleképpen választhatjuk ki a harmadik játékos kezébe kerülő lapok halmazát, és végül a maradék 13 lap közül $\binom{13}{13}=1$ féle lehet az utolsó játékos kezébe kerülő lapok halmaza. Ezek egymás utáni „független” döntések, azaz

$$\binom{52}{13}\cdot\binom{39}{13}\cdot\binom{26}{13}\cdot\binom{13}{13}=\frac{52!}{13!\cdot 39!}\cdot\frac{39!}{13!\cdot 26!}\cdot\frac{26!}{13!\cdot 13!}\cdot 1=\frac{52!}{13!\cdot 13!\cdot 13!\cdot 13!}=\frac{52!}{(13!)^4}$$

b) Megoldása: Négy különböző ász van (cœurs, carreaux, piques és trèfles), ezeket 4! féleképpen kaphatja a négy különböző játékos. A maradék $52-4=48$ lapból tizekettőt-tizenkettőt kapnak, az előző részhez hasonlóan $\binom{48}{12}\cdot\binom{36}{12}\cdot\binom{24}{12}\cdot\binom{12}{12}=\frac{48!}{(12!)^4}$ féleképpen. Ezek egymástól függetlenül alakulhatnak, ezért az összes lehetőségek száma: $4!\cdot\frac{48!}{(12!)^4}$.

c) Megoldása: Négyféleképpen dőlhet el, hogy ki legyen az az egyetlen játékos, aki mind a négy ászt megkapja. Ezután ő a négy ász mellé a maradék 48 lap közül csak kilencet kap, majd a következő játékos a további 39 közül tizenhármat, és így tovább (az első részhez hasonló gondolatmenettel): $4\cdot\binom{48}{9}\cdot\binom{39}{13}\cdot\binom{26}{13}\cdot\binom{13}{13}=\frac{4\cdot 48!}{9!\cdot(13!)^3}$.

12. Hányféleképpen lehet sorba rendezni n nullát és k egyest úgy, hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?

    Megoldás: EZ VOLT MÁR AZ ELŐZŐ FELADATSORON. Az n darab nulla között $n-1$ hely van, előttük és utánuk még egy-egy, ez összesen $n+1$ pozíció az egyesek számára. Ezen pozíciók közül kell kiválasztani azt a k különbözőt, ahová egyest írunk: $\binom{n+1}{k}$ féleképpen tehetjük ezt meg.

13. Hányféleképpen állíthatunk sorba n különböző magasságú embert úgy, hogy senkit ne fogjon közre két nála magasabb ember?

    Megoldás: Ha senkit sem foghat közre két magasabb, akkor a legalacsonyabb csak a sor legszélén állhat: vagy a jobbszélen, vagy a balszélen.

Ha a legalacsonyabb helye már eldőlt, utána (vagy a baloldalán, vagy a jobboldalán) egy eggyel rövidebb embersor áll, amire ugyanez a szabály vonatkozik. Azaz a második legalacsonyabb ennek az eggyel rövidebb sornak a két széle közül valamelyiken áll. És így tovább.

Tehát a legalacsonyabbal kezdve, nagyság szerint növekvő sorrendben döntjük el az egyes emberekről, hogy a még üres helyek egyre fogyó (de végig közvetlenül egymás melletti helyekből álló) sorozatának melyik szélére kerüljön. (Amikor már csak egy üres hely marad, akkor nem kétféle a döntési lehetőség, mert egy egyhosszú sorozat balszéle ugyanaz mint a jobbszéle). Egymás után n független döntés, amiből az első $n-1$ kétféle, az utolsó egyféle lehet, azaz összesen: $2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 1 = 2^{n-1}$ féleképpen állhatnak az emberek.

14. Hány olyan húszjegyű szám van, melyben minden számjegy pontosan kétszer szerepel?

Megoldás: Ha a nullák is bárhol állhatnának, akkor ismétléses permutáció: 10 féle karakter, mindegyik kétszer szerepel: $\dfrac{20!}{(2!)^{10}}$. De ekkor számoltuk azokat, amikor a legelső karakter egy nulla, ezeket nem kellene számolni.

A rossz esetek tehát a nullval kezdődők: első karakter az egyik nulla, a további 19 helyre egy további nulla és minden más számjegyből kettő-kettő kerülhet: $\dfrac{19!}{1! \cdot (2!)^9}$.

Összes mínusz rosszak: $\dfrac{20!}{2^{10}} - \dfrac{19!}{2^9} = \dfrac{20 \cdot 19!}{2^{10}} - \dfrac{2 \cdot 19!}{2^{10}} = (20-2) \cdot \dfrac{19!}{2^{10}} = 9 \cdot \dfrac{19!}{2^9}$

Másik megoldás: Az első karakter kilencféle lehet, a többi 19 helyre ebből a fajtból csak egy, a többiből kettő-kettő kerülhet. Ez utóbbi $1 + 2 + \cdots + 2 = 19$ elem ismétléses permutációja, és egymás utáni két döntés: $9 \cdot \dfrac{19!}{1! \cdot (2!)^9} = 9 \cdot \dfrac{19!}{2^9}$.

15. Hányféleképpen tehetünk be 20 szál virágot 4 különböző színű vázába, ha a virágok...
a) egyformák; b) egyformák, és minden vázába kell jutnia legalább egynek;
c) különbözők; d) különbözők, és minden vázába kell jutnia legalább egynek?

a) Megoldása: Az a lényeg, hogy *melyik* vázába *hány szál* virág kerül, azaz a vázák közül választunk összesen huszat (visszatevéssel, kiválasztás sorrendje nem számít). Ismétléses kombináció: $\dbinom{4+20-1}{20} = \dbinom{23}{20} = \dbinom{23}{3}$.

Vagy másképpen: Leteszünk 20 szál virágot és $4-1=3$ hurkapálcát (szeparálóelemet), és az első hurkapálca előtti virágok az első vázába kerülnek, és így tovább. $\dfrac{23!}{3! \cdot 20!} = \dbinom{23}{3} = \dbinom{23}{20}$.

b) Megoldása: Mivel egyformák a virágok, nem számít melyik melyik vázába kerül, azaz előre betehetünk közülük egyet-egyet minden vázába, hogy biztosan jusson minden vázába legalább egy.

Ezután a maradék $20-4=16$ szál virágot kell ugyanúgy szétosztanunk, mint az előbb a 20 szálat: $\dbinom{4+16-1}{16} = \dbinom{19}{16} = \dbinom{19}{3}$.

Vagy másképpen: Leteszünk 20 szál virágot és $4-1=3$ hurkapálcát (szeparálóelemet), és az első hurkapálca előtti virágok az első vázába kerülnek, és így tovább. De most a 3 hurkapálcát kizárólag a $20 - 1 = 19$ virágközbe tehetjük, és egy virágközbe maximum egyet. Vagyis a 19 virágköz közül választunk hármat: $\binom{19}{3}$.

c) Megoldása: Ha minden virág különböző, akkor minden virágról külön-külön kell eldönteni, hogy melyik vázába kerüljön. Végigmegyünk a 20 virágszálon, és egymás után hozunk független döntéseket, amelyek mindgyike négyféle lehetőségből választ: $4 \cdots 4 = 4^{20} = 2^{40}$.

d) Megoldása: Itt az előző feladathoz hasonlóan számoljuk a összes eseteket, és rossz esetből négyféle van: A_i azon esetek halmaza, amikor az i-edik váza üresen marad. Ha az egyik váza biztosan üresen marad, akkor csak három választási lehetőségünk van: $|A_i| = 3^{20}$.

Ha két váza (az i. és j. $i \neq j$) marad biztosan üresen, akkor: $|A_i \cap A_j| = 2^{20}$.

Ha három váza (az i., j. és k. $i \neq j$, $j \neq k$, $k \neq i$) marad üresen, akkor: $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1^{20}$.

Szita formula segítségével tudjuk az összes mínusz rosszak számát kiszámolni:

$$\begin{aligned}|H \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_4)| &= |H| - |A_1| - |A_2| - |A_3| - |A_4| + \\ &+|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \pm \\ &-|A_1 \cap A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_4| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \\ &= 4^{20} - 4 \cdot 3^{20} + 6 \cdot 2^{20} - 4 \cdot 1\end{aligned}$$

16. Egy dobozban 10 piros, 20 fehér és 40 zöld golyó van, ezekből húzunk. Hányat kell húznunk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük a) fehér; b) 3 különböző színű; c) 3 azonos színű; d) 5 azonos színű; e) 15 azonos színű; f) két egymás utáni zöld húzás?

a) Megoldása: $10 + 40 = 50$ golyó kihúzása esetén még előfordulhatna, hogy csupa piros és zöld golyót húzunk, de 51 golyó kihúzása biztosan elég.

b) Megoldása: $20 + 40 = 60$ golyó kihúzása esetén még előfordulhatna, hogy csupa fehér és zöld golyót húzunk, de 61 golyó kihúzása biztosan elég.

c) Megoldása: $3 \cdot 2 = 6$ golyó kihúzása esetén még előfordulhatna, hogy két-két golyót húzunk mindhárom színből, de 7 golyó kihúzása biztosan elég (általánosított skatulyelv).

d) Megoldása: $3 \cdot 4 = 12$ golyó kihúzása esetén még előfordulhatna, hogy négy-négy golyót húzunk mindhárom színből, de 13 golyó kihúzása biztosan elég (általánosított skatulyelv).

e) Megoldása: Piros golyóból csak 10 van, ezért $10 + 2 \cdot 14 = 38$ golyó kihúzása esetén még előfordulhatna, hogy tíz, illetve tizennégy golyót húzunk mindhárom színből, de 39 golyó kihúzása biztosan elég.

f) Megoldása: Nemzöld (piros vagy fehér) golyóból $10+20 = 30$ van, ezek legfeljebb 31 zöld golyót tudnak "szeparálni" (zöld-nemzöld-zöld-…-nemzöld-zöld), ez összesen $30 + 31 = 61$ golyó, ha ennél többet (azaz legalább 62 golyót) húzunk, biztosan nem lehet minden zöld között nemzöld.

17. Hányféleképpen lehet 100 rekeszben 30 golyót elhelyezni úgy, hogy minden rekeszben, amelyikben van golyó, pontosan 6 darab van és a) a golyók egyformák; b) a golyók különbözőek,

és minden rekeszben figyelembe vesszük a golyók sorrendjét; c) a golyók különbözőek, de a rekeszben nem vesszük figyelembe a golyók sorrendjét?

Megoldás: Mindegyik alfeladatban 5 rekeszbe fognak kerülni a golyók.

a) Megoldása: Itt csak azt kell kiválasztanunk, hogy melyik rekeszekbe kerülnek golyók, ezt $\binom{100}{5}$ féleképpen tehetjük meg.

b) Megoldása: Kiválasztjuk a rekeszeket, mint az előbb, majd sorba kell raknunk a 30 golyót: a sorba rakott golyók közül az első öt kerül az első kiválasztott rekeszbe, a második öt kerül a második kiválasztott rekeszbe stb. A golyóknak 30! lehetséges sorrendje van. A rekeszek kiválasztása és a golyók sorba rakása független, a lehetőségek száma tehát $\binom{100}{5} \cdot 30!$.

c) Megoldása: Kiválasztjuk a rekeszeket, mint az előbb, majd kiválasztjuk, hogy az első rekeszbe melyik 6 golyó kerül, erre $\binom{30}{6}$ lehetőség van, ezután a maradék 24 golyó közül kiválasztjuk, hogy a második rekeszbe melyik 6 golyó kerül, erre $\binom{24}{6}$ lehetőség van stb. A választások függetlenek, így a lehetőségek száma $\binom{100}{5} \cdot \binom{30}{6} \cdot \binom{24}{6} \cdot \binom{18}{6} \cdot \binom{12}{6}$.

18. Hány nullára végződik a $11^{100} - 1$ szám?

Megoldás: A binomiális tétel szerint $11^{100} = (10+1)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 10^k = 1 + 100 \cdot 10 + \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 100 + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{6} \cdot 1000 + x \cdot 10000$, ahol x valami egész szám (a $k \geq 4$-es tagok mindegyike osztható 10^4-nel, tehát az valóban kiemelhető ezen tagok összegéből).

Sőt, már a $k = 3$-as, $\frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{6} \cdot 1000$ tag is osztható 10^4-nel, tehát kiszámítva az első pár tagot, kapjuk, hogy $11^{100} = 1 + 1000 + 495000 + x' \cdot 10^4 = 496001 + x' \cdot 10^4$. Mivel az $x' \cdot 10^4$ hozzáadása nem változtatja meg az utolsó négy számjegyet, azt kapjuk, hogy $11^{100} - 1$ utolsó négy számjegye 6000, tehát három nullára végződik.