

## Analízis II., ZH II. bizonyítandó tételek

### 1. Oszcillációs összegek. Az integrálhatóság jellemzése az oszcillációs összegekkel.

**Tétel:**

$$f \in R[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \tau \in \mathcal{F}[a, b] : \Omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

**Bizonyítás:**

$\implies$

$$\text{TFH } f \in R[a, b] : I_*(f) = I^*(f) =: I(f).$$

$$\sup\{s(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\} = I_*(f) = I(f) \implies (\text{a sup def.}) \implies \forall \varepsilon > 0, \exists \tau_1 \in \mathcal{F}[a, b] : I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \tau_1) \leq I(f);$$

$$\inf\{S(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\} = I^*(f) = I(f) \implies (\text{az inf def.}) \implies \forall \varepsilon > 0, \exists \tau_2 \in \mathcal{F}[a, b] : I(f) \leq S(f, \tau_2) < I(f) + \frac{\varepsilon}{2};$$

Legyen  $\tau := \tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a, b]$ . Ekkor  $\tau$  finomítása  $\tau_1, \tau_2$ -nek, ezért

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f, \tau) \leq S(f, \tau_2) < I(f) + \frac{\varepsilon}{2} \implies \Omega(f, \tau) = S(f, \tau) - s(f, \tau) < \varepsilon.$$

$\impliedby$

Legyen  $\varepsilon > 0$  tetszőleges és  $\tau \in \mathcal{F}[a, b] : \Omega(f, \tau) < \varepsilon$ .

Mivel  $s(f, \tau) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f, \tau)$ , ezért

$$\begin{aligned} 0 &\leq I^*(f) - I_*(f) \leq S(f, \tau) - s(f, \tau) = \Omega(f, \tau) < \varepsilon \implies \\ &\implies 0 \leq I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies \\ &\implies I^*(f) - I_*(f) = 0 \implies \\ &\implies I^*(f) = I_*(f) \implies f \in R[a, b]. \end{aligned}$$

□

## 2. Az összegfüggvény integrálhatóságára vonatkozó tétel.

**Tétel:**

TFH  $f, g \in R[a, b]$ . Ekkor

$$f + g \in R[a, b] \quad \text{és} \quad \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

**Bizonyítás:**

Legyen  $\tau = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$  és

$$\begin{aligned} f_i &= \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f, & F_i &= \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f, \\ g_i &= \inf_{[x_{i-1}, x_i]} g, & G_i &= \sup_{[x_{i-1}, x_i]} g, \end{aligned}$$

Mivel

$$f_i + g_i \leq f(x) + g(x) \leq F_i + G_i, \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i],$$

ezért

$$f_i + g_i \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} (f + g) \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i]} (f + g) \leq F_i + G_i.$$

Ebből  $(x_i - x_{i-1})$ -gyel való szorzás és összegzés után az adódik, hogy

$$s(f, \tau) + s(g, \tau) \leq s(f + g, \tau) \leq S(f + g, \tau) \leq S(f, \tau) + S(g, \tau)$$

TFH  $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a, b]$ , és legyen  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a, b]$ . Ekkor

$$s(f, \tau_1) + s(g, \tau_2) \leq s(f, \tau) + s(g, \tau) \leq s(f + g, \tau) \leq I_*(f + g)$$

Innen először a  $\tau_1 \in \mathcal{F}[a, b]$ , majd a  $\tau_2 \in \mathcal{F}[a, b]$  felosztásokra a bal oldal felső határát véve következik hogy

$$I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f + g).$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$I^*(f + g) \leq I^*(f) + I^*(g).$$

Így

$$I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f + g) \leq I^*(f + g) \leq I^*(f) + I^*(g)$$

Mivel

$$f, g \in R[a, b], \quad \text{ezért} \quad I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f$$

és

$$I_*(g) = I^*(g) = \int_a^b g, \quad \text{ezért} \quad I_*(f + g) = I^*(f + g), \quad \text{tehát} \quad f + g \in R[a, b] \quad \text{és} \quad \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

### 3. A szorzatfüggvény integrálhatóságára vonatkozó tétel.

**Tétel:**

TFH  $f, g \in R[a, b]$ . Ekkor

$$f \cdot g \in R[a, b]$$

**Bizonyítás:**

1 TFH  $f, g \geq 0, \tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n\} \in \mathcal{F}[a, b]$

$$f_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f, \quad F_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

$$g_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} g, \quad G_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} g,$$

$$f_i \cdot g_i \leq f(x) \cdot g(x) \leq F_i \cdot G_i, \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \implies$$

$$\implies f_i \cdot g_i \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot g \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot g \leq F_i \cdot G_i, \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \implies$$

$$\implies \Omega(f \cdot g, \tau) = S(f \cdot g, \tau) - s(f \cdot g, \tau) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left( \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot g - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot g \right) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n (F_i \cdot G_i - f_i \cdot g_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Mivel  $f$  és  $g$  korlátos, ezért  $\exists M : |f|, |g| \leq M$   $[a, b]$ -n. Így

$$\begin{aligned} \Omega(f \cdot g, \tau) &\leq \sum_{i=1}^n [F_i \cdot (G_i - g_i) + (F_i - f_i) \cdot g_i] \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq M \cdot \sum_{i=1}^n (G_i - g_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + M \cdot \sum_{i=1}^n (F_i - f_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \\ &= M \cdot (\Omega(g, \tau) + \Omega(f, \tau)). \end{aligned}$$

Mivel  $f, g \in R[a, b]$ , ezért  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \tau : \Omega(f, \tau), \Omega(g, \tau) < \varepsilon$ .

Tehát  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \tau \in \mathcal{F}[a, b]$  felosztás:

$$\Omega(f \cdot g, \tau) \leq 2 \cdot M \cdot \varepsilon \implies f \cdot g \in R[a, b]$$

2 TFH  $f, g$  tetszőleges, és legyen

$$m_f := \inf_{[a, b]} f, \quad m_g := \inf_{[a, b]} g.$$

Ekkor  $f - m_f \geq 0$  és  $g - m_g \geq 0$   $[a, b]$ -n integrálható függvények.

Tehát (1.) szerint

$$(f - m_f) \cdot (g - m_g) = \underbrace{f \cdot g - m_f \cdot g - f \cdot m_g + m_f \cdot m_g}_{\in R[a, b]} \in R[a, b],$$

Valóban  $f \cdot g \in R[a, b]$ .  $\square$

#### 4. Függvények hányadosának integrálhatóságára vonatkozó tétel.

**Tétel:**

Ha  $|g(x)| \geq m > 0$  ( $\forall x \in [a, b]$ ), akkor

$$\frac{f}{g} \in R[a, b]$$

**Bizonyítás:**

Elég igazolni hogy  $\frac{1}{g} \in R[a, b]$

Legyen  $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$  tetszőleges.

Ekkor  $\forall x, y \in [x_{i-1}, x_i]$  pontban

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} = \frac{g(y) - g(x)}{g(x) \cdot g(y)} \leq \frac{|g(y) - g(x)|}{|g(x) \cdot g(y)|} \leq \frac{G_i - g_i}{m^2}$$

Ebből következik, hogy

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{g} - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{g} \leq \frac{G_i - g_i}{m^2}$$

$(x_i - x_{i-1})$ -gyel való szorzás és összegzés után azt kapjuk, hogy

$$\Omega\left(\frac{1}{g}, \tau\right) \leq \frac{1}{m^2} \cdot \Omega(g, \tau)$$

Mivel  $g \in R[a, b]$ , ezért  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \tau : \Omega(g, \tau) < \varepsilon$ . Így

$$\Omega\left(\frac{1}{g}, \tau\right) < \frac{\varepsilon}{m^2} \implies \frac{1}{g} \in R[a, b]$$

□

## 5. A monoton függvények integrálhatóságára vonatkozó tétel.

**Tétel:**

Ha az  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény monoton az  $[a, b]$  intervallumon, akkor integrálható  $[a, b]$ -n

**Bizonyítás:**

Igazoljuk hogy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tau \in \mathcal{F}[a, b] : \Omega(f, \tau) < \varepsilon$$

Legyen pl.  $f \nearrow$ . Ha  $f(a) = f(b)$ , akkor  $f$  állandó, ezért ebben az esetben az állítás igaz.

Ha  $f(a) < f(b)$ , akkor  $\forall \tau = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$  felosztásra

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_{i-1}) \text{ és } M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_i)$$

ezért

$$\Omega(f, \tau) = S(f, \tau) - s(f, \tau) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Legyen  $\varepsilon > 0$  adott és  $n \in \mathbb{N}^+ : \frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ , valamint  $\tau$  az  $[a, b]$  egyenletes felosztása. Ekkor  $x_i - x_{i-1} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$  minden  $i = 1, \dots, n$  indexre, és

$$\begin{aligned} \Omega(f, \tau) &< \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot \left( \left( \cancel{f(x_1)} - \underbrace{f(x_0)}_{f(a)} \right) + (\cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)}) + \dots + \left( \underbrace{f(x_n)}_{f(b)} - \cancel{f(x_{n-1})} \right) \right) = \varepsilon \implies f \in R[a, b] \end{aligned}$$

□

## 6. Az egyenletes folytonosságra vonatkozó Heine-tétel.

### Tétel:

Ha  $-\infty < a < b < +\infty$  és  $f \in C[a, b]$ , akkor  $f$  egyenletesen folytonos  $[a, b]$  intervallumon.

### Bizonyítás:

TFH  $f$  nem egyenletesen folytonos  $[a, b]$ -n

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in [a, b], |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

$\delta := \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) választással

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ és } \underbrace{|f(x_n) - f(y_n)|}_{(*)} \geq \varepsilon$$

Az  $(x_n)$  sorozat korlátos, ezért van egy  $(x_{n_k})$  konvergens részsorozata, amelynek az  $\alpha$  határértéke ugyancsak  $[a, b]$ -ben van. Így

$$y_{n_k} = (y_{n_k} - x_{n_k}) + x_{n_k} \rightarrow 0 + \alpha = \alpha, \text{ ha } n_k \rightarrow +\infty$$

Mivel  $f \in C[a, b]$ , ezért  $f \in C\{\alpha\}$  is teljesül. Az átviteli elv szerint tehát  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\alpha)$  és  $f(y_{n_k}) \rightarrow f(\alpha)$ , ezért

$$\lim_{n_k \rightarrow +\infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$$

Ez azonban ellentmond  $(*)$ -nak.

□

## 7. A folytonos függvények integrálhatóságára vonatkozó tétel.

### Tétel:

Ha az  $f$  függvény folytonos az  $[a, b]$  intervallumon, akkor integrálható  $[a, b]$ -n. ( $C[a, b] \subset R[a, b]$ )

### Bizonyítás:

Elég:

$$\forall f \in C[a, b] : \forall \varepsilon > 0, \exists \tau \in \mathcal{F}[a, b] : \Omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

Mivel  $f \in C[a, b] \implies$  (l. Heine-tételét)  $f$  egyenletesen folytonos az  $[a, b]$  intervallumon, ezért  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , hogy

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Legyen

$$\varepsilon > 0 \text{ és } \tau = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a, b] : \|\tau\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \dots, n\} < \delta$$

Ekkor  $\Omega(f, \tau)$ -ban  $i = 1, \dots, n$  esetén legyen

$$m_i := \min_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(u_i), \quad M_i := \max_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(v_i)$$

Ekkor

$$\Omega(f, \tau) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon \implies f \in R[a, b]$$

□

## 8. A Newton–Leibniz-tétel.

### Tétel:

Ha  $f \in R[a, b]$  és  $f$  függvénynek van primitív függvénye az  $[a, b]$  intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

ahol  $F$  a  $f$  függvény egy (tetszőleges) primitív függvénye

### Bizonyítás:

Legyen  $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$  tetszőleges. A Lagrange-középértéktétel szerint  $\forall i = 1, \dots, n$  indexre  $\exists \xi \in (x_{i-1}, x_i)$  :

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Összeadva  $\forall i = 1, \dots, n$  indexre:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sigma(f, \tau, \xi),$$

ahol  $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Mivel  $\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq f(\xi_i) \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$ , ezért

$$s(f, \tau) < \sigma(f, \tau, \xi) = F(b) - F(a) \leq S(f, \tau, \xi)$$

Következésképpen

$$I_*(f) = \sup_{\tau \in \mathcal{F}[a, b]} s(f, \tau) \leq F(b) - F(a) \leq \inf_{\tau \in \mathcal{F}[a, b]} S(f, \tau, \xi) = I^*(f)$$

Mivel  $f \in R[a, b]$ , ezért  $I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f$ . Így

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

□



## 9. Az integrálfüggvény folytonosságára vonatkozó állítás.

**Tétel:**

TFH  $f \in R[a, b]$  és  $x_0 \in [a, b]$ . Ekkor a

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) \, dt \quad (x \in [a, b])$$

Ekkor az  $F$  függvény folytonos az  $[a, b]$  intervallumon.

**Bizonyítás:**

Tetszőleges  $x, y \in [a, b]$ ,  $x < y$  esetén

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_{x_0}^y f - \int_{x_0}^x f \right| = \left| \int_{x_0}^y f - \int_{x_0}^{x_0} f \right| = \left| \int_x^y f \right| \leq \int_x^y |f| \leq M \cdot \int_x^y 1 = M \cdot (y - x),$$

ahol  $M$  az  $f$  függvény egy korlátja:  $|f(x)| \leq M$  ( $x \in [a, b]$ )

Ha tehát  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$ :  $M\delta < \varepsilon$ , akkor  $\forall x, y \in [a, b]$ ,  $|x - y| < \delta$  esetén

$$|F(y) - F(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

□

## 10. Az integrálfüggvény differenciálhatóságára vonatkozó állítás.

**Tétel:**

TFH  $f \in R[a, b]$  és  $x_0 \in [a, b]$ . Ekkor a

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

Ha egy  $d \in [a, b]$  pontban  $f$  folytonos, akkor ott a  $F$  integrálfüggvény deriválható, és  $F'(d) = f(d)$

**Bizonyítás:**

Legyen  $d \in (a, b)$ , és TFH  $f \in C\{d\}$ . Ez azt jelenti, hogy  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :$

$$\forall t \in [a, b], |t - d| < \delta : |f(t) - f(d)| < \varepsilon$$

TFH  $h$ -ra  $d + h \in (a, b)$  teljesül. Ekkor

$$F(d + h) - F(d) = \int_{x_0}^{d+h} f - \int_{x_0}^d f = \int_d^{d+h} f$$

Mivel  $f(d) = \frac{1}{h} \cdot \int_d^{d+h} f(d) dt$ , ezért

$$\frac{F(d + h) - F(d)}{h} - f(d) = \frac{1}{h} \int_d^{d+h} (f(t) - f(d)) dt$$

Ha  $0 < h < \delta$ , akkor

$$\left| \frac{F(d + h) - F(d)}{h} - f(d) \right| < \frac{1}{h} \cdot \int_d^{d+h} |f(t) - f(d)| dt < \frac{1}{h} \cdot \int_d^{d+h} \varepsilon dt = \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \cdot h$$

Ha  $-\delta < h < 0$ , akkor

$$\left| \frac{F(d + h) - F(d)}{h} - f(d) \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot \int_{d+h}^d |f(t) - f(d)| dt < \varepsilon$$

Ezek alapján  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall |h| < \delta$ -ra

$$\left| \frac{F(d + h) - F(d)}{h} - f(d) \right| < \varepsilon$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{F(d + h) - F(d)}{h} - f(d) \right) = 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{F(d + h) - F(d)}{h} \right) = f(d)$$

vagyis  $F \in D\{d\}$  és  $F'(d) = f(d)$

□

## 11. A parciális integrálásra vonatkozó tétel határozott integrálra.

**Tétel:**

TFH  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g \in D[a, b]$ ,  $f', g' \in R[a, b]$  Ekkor

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g$$

**Bizonyítás:**

Egyrészt

$$f \in D[a, b] \implies f \in C[a, b] \implies f \in R[a, b]$$

Mivel  $g' \in R$ , ezért  $fg' \in R[a, b]$  és  $f'g \in R[a, b]$ . Így  $f'g + fg' \in R[a, b]$

Másrészt  $fg$  primitív függvénye az  $f'g + fg'$  függvénynek

A Newton-Leibniz-tétel szerint tehát

$$\int_a^b (fg' + f'g) = [fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

A határozott integrál additivitását felhasználva rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$$

□

## 12. A helyettesítéses integrálás szabálya határozott integrálra.

**Tétel:**

TFH  $f \in C[a, b]$  és  $g : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  függvény folytonosan deriválható. Ekkor

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g'.$$

**Bizonyítás:**

Tekintsük:

$$F(x) := \int_{g(\alpha)}^x f \quad (x \in [a, b]), \quad G(u) := \int_{\alpha}^u f \circ g \cdot g' \quad (u \in [\alpha, \beta])$$

integrálfüggvényeket. Megmutatjuk, hogy

$$(*) \quad \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = F(g(\beta)) = G(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g'$$

Egyrészt  $f \in C[a, b] \implies F' = f$ , másrészt  $f \circ g \cdot g' \in C[\alpha, \beta] \implies G' = f \circ g \cdot g'$

Mivel  $(F \circ g)' = F' \circ g \cdot g' = f \circ g \cdot g'$ , ezért  $(F \circ g - G)' = 0 \implies \exists c \in \mathbb{R} : F \circ g - G = c$ .

Ugyanakkor  $F(g(\alpha)) = 0 = G(\alpha) \implies c = 0$ , következésképpen  $F \circ g = G \implies F(g(\beta)) = G(\beta)$

(\*) valóban teljesül.

□