Diszkrét matematika 1

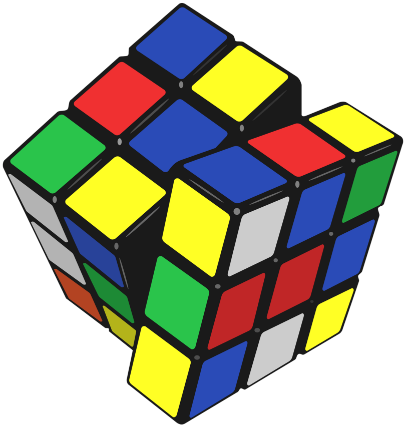
Kombinatorika

Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2025 tavasz

Kombinatorika



Összeadás-szabály

Példa

- Egy pékségben 3-féle édes és 2-féle sós péksütemény van. Hányféleképpen tudunk egy édes vagy sós süteményt választani?
- $3 + 2 = 5$ lehetséges módon.

Összeadás-szabály

- Adott két véges diszjunkt halmaz

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \quad \text{és} \quad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

  Hányféleképpen tudunk A-ból vagy B-ből egy elemet választani?
- A lehetséges választások: $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_n$.
- Ezek száma: $k + n$.

Szorzat-szabály

Példa

- Egy pékségben 3-féle édes és 2-féle sós péksütemény van. Hányféleképpen tudunk egy édes és egy sós süteményt választani? $\Rightarrow 2 \times 3 = 6$

Szorzat-szabály

- Adott két véges diszjunkt halmaz

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \quad \text{és} \quad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

Hányféleképpen tudunk A-ból és B-ből egy-egy elemet választani?

$$\begin{array}{c|cccc} & b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \hline a_1 & (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \ldots & (a_1, b_n) \\ a_2 & (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \ldots & (a_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k & (a_k, b_1) & (a_k, b_2) & \ldots & (a_k, b_n) \end{array}$$

- Ezek száma: $k \times n$.

Szorzat-szabály, ismétléses variáció

Tétel

Legyen A egy véges halmaz. Ekkor A hatávnyhalmazának elemszáma $|\mathcal{P}(A)| = |\{B : B \subset A\}| = \left|2^A\right| = 2^{|A|}$.

Bizonyítás.

- Állítsuk sorrendbe A elemeit.
- Minden egyes elemre válasszunk a $\left\{\text{benne van}, \text{nincs benne}\right\}$ halmazból.
- Az ilyen $|A|$ hosszú ,,benne van"/,,nincs benne" sorozatok szám: $2^{|A|}$. $\square$

Példa

- Lifttel utazunk a földszintről a 7. emeletre.
- Két utazás különböző, ha menet közben máshol állnak meg.
- Hány típusú utazás van?

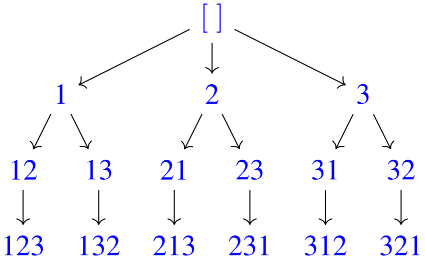
$\Longrightarrow$ 6 közbenső emelet, 2 választás $\left\{\text{megáll}, \text{nem áll meg}\right\}$

$\Longrightarrow$ 2^6 lehetőség

Szorzat-szabály 2

Példa

- Hányféleképpen tudunk 3 embert sorba állítani?



Szorzat-szabály 2

- Adott egy $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ véges halmaz, és minden a_i elemhez egy B_i véges halmaz.
- A B_i halmazok elemszáma megegyezik: $|B_1| = |B_2| = \cdots = |B_k| = \ell$
- Választunk egy $a_i \in A$ elemet és választunk egy $b \in B_i$ elemet.
- Ezek száma: $k \times \ell$

- 3 embert $3 \times 2 \times 1 = 6$ módon tudunk sorba állítani.

Szorzat-szabály 2, ismétlés nélküli permutáció

Feladat: Egy n-elemű halmaz elemeit sorba állítjuk. Hány lehetőség van?

Példa

- A vizsgán 10 feladat van kitűzve. Hányféleképpen oldhatjuk meg ezeket?
  $\Longrightarrow 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \approx 3,6 \cdot 10^6$
- Egy lóversenyen 70 induló van. A verseny lehetséges kimenetele (nincs döntetlen, mindenki célba ér):
  $\Longrightarrow 70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \approx 1,2 \cdot 10^{100}$
  (v.s atomok száma a megfigyelt univerzumban: $10^{78} - 10^{82}$)
- Egy 200 fős évfolyam hányféleképpen tudja aláírni a jelenléti ívet?
  $\Longrightarrow \quad 200 \cdot 199 \cdot \ldots 2 \cdot 1 \approx 7,89 \cdot 10^{374}$ lehetőség

A szorzat-szabály 2 szerint: $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ lehetséges sorrend.

Bizonyítás.
n-féleképpen választhatjuk az $1.$ elemet és $(n-1)$-féleképpen választhatjuk a $2.$ elemet és $(n-2)$-féleképpen választhatjuk a $3.$ elemet és ... $\square$

Szorzat-szabály 2, ismétlés nélküli variáció

Feladat: Egy n-elemű halmazból választunk. A sorrend számít, de egy elemet csak egyszer választhatunk. Hány lehetőség van?

Példa

- A vizsgán 10 feladat van kitűzve.
  Hányféleképpen oldhatjuk meg ezek közül 3-at? $\Longrightarrow 10 \cdot 9 \cdot 8$
- Egy lóversenyen 70 induló van. Hány lehetőség van a dobogó (1-3.) helyezettjeire? $\Longrightarrow 70 \cdot 69 \cdot 68$
- Egy 200 fős évfolyam hallgatóiból hányféleképpen jöhet be 100 fő az előadóba?
  $\Longrightarrow \quad 200 \cdot 199 \cdot \ldots 102 \cdot 101$

A szorzat-szabály 2 szerint: $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ lehetséges sorrend.

Bizonyítás. HF $\square$

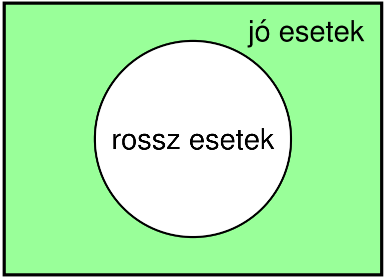
Kivonás-szabály

Példa

- Háromszor dobunk kockával. Hány dobássorozat van, amiben van hatos?
- összes − nincs hatos$= 6^3 - 5^3$

Kivonás-szabály

- Adott események számát szeretnénk leszámlálni.
- Ekkor események száma $=$ összes eset $-$ rossz esetek.



Kivonás-szabály

Példa

- Hány 7 jegyű szám van?
  Rossz esetek: 7 hosszú sorozatok melyek 0-val kezdődnek.
  $\Longrightarrow 10^7 - 10^6 = (10-1) \cdot 10^6 = 9 \times 10^6$

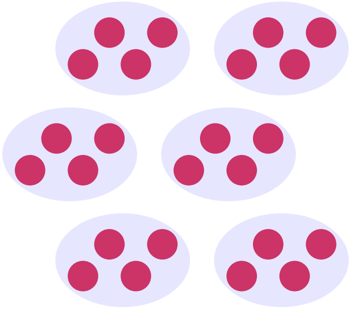
- Az $1, 2, 3, 4, 5$ lehetséges sorrendje, ahol 1 és 2 nincs egymás mellett.
  Rossz esetek: Az $1, 2, 3, 4, 5$ lehetséges sorrendje, ahol 1 és 2 egymás mellet vannak: $12, 3, 4, 5$ vagy $21, 3, 4, 5$ lehetséges sorrendje: $4! + 4! = 2 \cdot 4!$
  $\Longrightarrow 5! - 2 \cdot 4!$

- Egy lóversenyen 70 induló van. Hány lehetőség van a dobogó (1-3.) helyezettjeire, ha a 13. rajtszámú közöttük van?
  Rossz esetek: 13. rajtszámú nincs közöttük: $69 \cdot 68 \cdot 67 = \frac{69!}{66!}$
  $\Longrightarrow \frac{70!}{67!} - \frac{69!}{66!}$

Osztás-szabály

Osztás-szabály

- Adott lehetőségeket szeretnénk megszámolni.
- Ehelyett más eseteket számolunk meg.
- Egy lehetőséget L-szer számolunk.
- Összesen N esetet számoltunk le.
- Összesen N/L lehetőség van.



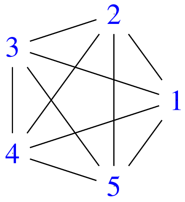
Példa

- Egy lóversenyen 70 induló van. Hány lehetőség van a dobogó (1-3.) helyezettjeire?
- esetek: összes lehetséges sorrend $70!$
- L: egy lehetőséget $67!$-szer számolunk (4-70. helyezettek sorrendje)
- számolandó lehetőségek: $70!/67!$ (v.ö. ism. nélküli variáció)

Osztás-szabály

Példa

- 5 ember találkozik, mindenki kezet fog. Hány kézfogás történt?
  - Kiválasztunk 2 embert, aki kezet fog: $5 \cdot 4 = \frac{5!}{3!}$
  - A kézfogás szimmetrikus, így minden kézfogást 2-szer számoltunk.
  - Összes kézfogás: $\frac{5!/3!}{2}$



- Egy lóversenyen 70 induló van. Hány lehetőség van a dobogó (1-3.) helyezettjeire (sorrend nem számít)?
  - Lehetséges esetek, ahol a sorrend számít: $70 \cdot 69 \cdot 68 = 70!/67!$
  - L: Egy lehetőséget $3!$-szer számoltunk (1-3. helyezettek sorrendje.)
  - számolandó lehetőségek: $\frac{70!/67!}{3!}$

Osztás-szabály, ismétlés nélküli kombináció

Feladat: Egy n elemű halmazból választunk k elemet, a sorrend nem számít.

- Válasszunk n-ből k elemet, úgy, hogy a sorrend számít $\Longrightarrow n!/(n-k)!$ (ld. ismétlés nélküli variáció)
- Egy számolandó lehetőséget $L = k!$-szor számoltunk.
- Így összesen $\dfrac{n!/(n-k)!}{k!}$ lehetőség van.

Definíció

Legyenek $n, k \in \mathbb{N}$. Ekkor a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

értéket binomiális együtthatónak nevezzük.

Osztás-szabály, ismétléses nélküli kombináció

Emlékeztető: Egy n elemű halmazból k elemet $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ módon választhatunk (sorrend nem számít).

Példa

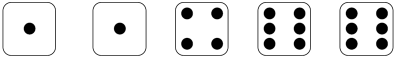
- n ember találkozik. Ekkor a kézfogások száma: $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$
- Lóversenyen 70 induló, dobogósok lehetséges halmaza (sorrend nem számít): $\binom{70}{3} = \frac{70!}{3! \cdot 67!} \approx 55.000$
- Lottó: 90-ből 5 számot választunk: $\binom{90}{5} = \frac{90!}{5! \cdot 85!} \approx 44.000.000$
- Hány olyan 20 hosszú $0-1$ sorozat van, ami pontosan 7 darab 1-et tartalmaz? Hányféleképpen tudjuk kiválasztani az 1-ek pozícióját?
  $\binom{20}{7} = \frac{20!}{7! \cdot 13!} \approx 78.000$

Ismétléses kombináció

Példa

- 5-féle sütemény van a cukrászdában, 8 darabot szeretnénk vásárolni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

- Hányféleképpen dobhatunk 5 dobókockával, ha csak a dobott számok számítanak, az nem, hogy melyik kockán dobtuk az egyes számokat?



Általában Egy n elemű halmazból választunk k-szor. Egy elemet többször is választhatunk, sorrend nem számít.

Ismétléses kombináció

Feladat: Egy n elemű halmazból választunk k-szor. Egy elemet többször is választhatunk, sorrend nem számít.

- Legyen $A = \{a_1, a_2 \dots, a_n\}$ az n elemű halmaz, melyből k elemet választunk (ismétléssel, sorrend nem számít).
- Minden lehetséges választás megfelel egy $0-1$ sorozatnak:

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{a_1\text{-ek száma}}, 0\, \underbrace{1, 1 \dots, 1}_{a_2\text{-k száma}}, 0, \dots, 0, \underbrace{1, 1 \dots, 1}_{a_n\text{-ek száma}}$$

- Ekkor elég leszámlálni a lehetséges ilyen típusú sorozatokat. Itt pontosan k darab 1-es van (választott elemek) és $n-1$ darab 0 (szeparátorok száma).
- Összesen $k+n-1$ pozíció van és ezek közül választunk k pozíciót (1-esek pozícióját).
- Összes lehetőség száma: $\binom{n+k-1}{k}$

Ismétléses kombináció, példa

Példa

- 5-féle sütemény van a cukrászdában, 8 darabot szeretnénk vásárolni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

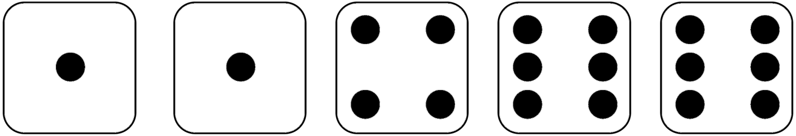
$$\underbrace{1,1,\ldots,1}_{\text{1. fajta süti}},0\,\underbrace{1,1\ldots,1}_{\text{2. fajta süti}},0,\underbrace{1,1\ldots,1}_{\text{3. fajta süti}},0,\underbrace{1,1\ldots,1}_{\text{4. fajta süti}},0,\underbrace{1,1\ldots,1}_{\text{5. fajta süti}}$$

- Lehetséges esetek száma: $\binom{8+5-1}{8}$

Ismétléses kombináció, példa

Példa

- Hányféleképpen dobhatunk 5 dobókockával, ha csak a dobott számok számítanak, az nem, hogy melyik kockán dobtuk az egyes számokat?



- Választási lehetőségek: $\{1,2,3,4,5,6\}$. Választások száma: 5.

$$\underbrace{1,1,\ldots,1}_{\text{1-esek}},0\,\underbrace{1,1\ldots,1}_{\text{2-esek}},0,\underbrace{1,1\ldots,1}_{\text{3-asok}},0,\underbrace{1,1\ldots,1}_{\text{4-esek}},0,\underbrace{1,1\ldots,1}_{\text{5-ösök}},0,\underbrace{1,1\ldots,1}_{\text{6-osok}}$$

- Lehetséges esetek száma: $\binom{6+5-1}{5}$