Numerikus módszerek 2.

2. előadás: A sajátértékprobléma érzékenysége és sajátértékek meghatározása a karakterisztikus polinomon keresztül

Krebsz Anna

ELTE IK

Tartalomjegyzék

1. A sajátértékprobléma érzékenysége
2. Karakterisztikus polinom meghatározása paraméterrel
3. Polinom egyenlet megoldása sajátérték feladatként
4. Karakterisztikus polinom meghatározása LER-rel (interpolációval)
5. A Fagyejev-féle "trace"-módszer
6. Karakterisztikus polinom felírása tridiagonális esetben

Tartalomjegyzék

1. A sajátértékprobléma érzékenysége
2. Karakterisztikus polinom meghatározása paraméterrel
3. Polinom egyenlet megoldása sajátérték feladatként
4. Karakterisztikus polinom meghatározása LER-rel (interpolációval)
5. A Fagyejev-féle "trace"-módszer
6. Karakterisztikus polinom felírása tridiagonális esetben

Kérdések

1. Ha az A mátrix λ_i sajátértékei helyett az $A + \Delta A$-nak a μ sajátértékét határozzuk meg, mennyire tér el a pontos sajátértéktől? Milyen becslést tudunk adni

$$\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu|\text{-re?}$$

2. Ha ismerjük egy A mátrix μ közelítő sajátértékét, hogyan tudjuk becsülni a kapott sajátérték jóságát?
(Például LER-k esetén a reziduum vektort vizsgáltuk.)

Becslés a reziduális hibával

1. Legyen A diagonalizálható, azaz $\exists\ X$ invertálható mátrix, melyre $X^{-1}AX = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
2. Legyen μ és u az A közelítő sajátértéke és sajátvektora,
3. $r := Au - \mu u$ a közelítés reziduális hibája.
4. Olyan mátrixnormát válasszunk, melyben minden diagonális mátrixra $\|D\| = \max_{i=1}^{n} |d_{ii}|$. (Például a p-normák ilyenek.)

Ekkor

$$\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu| \leq \frac{\|r\|}{\|u\|} \cdot \operatorname{cond}(X).$$

Biz.: A diagonalizálhatóságot felhasználva írjuk fel a reziduális hibát

$$r := Au - \mu u = XDX^{-1}u - \mu u = X(D - \mu I)X^{-1}u.$$

1. Ha valamely i-re $\mu = \lambda_i$, akkor az állítás bal oldala 0, így triviálisan teljesül az állítás.
2. Ha $\forall\, i: \ \ \mu \neq \lambda_i$, akkor $D - \mu I$ invertálható.
   ($D - \mu I$ diagonális elemei: $\lambda_i - \mu \neq 0 \Rightarrow \quad \det(D - \mu I) \neq 0$.)
   Az r-re felírt képletből fejezzük ki u-t

$$X(D - \mu I)^{-1}X^{-1}r = u.$$

Biz. folyt:

$$X(D-\mu I)^{-1}X^{-1}r = u.$$

A norma szorzat tuladonságát és a vektor és mátrix norma közti illeszkedést felhasználva

$$\|u\| \le \|X\| \underbrace{\|(D-\mu I)^{-1}\|}_{\frac{1}{\min|\lambda_i-\mu|}} \|X^{-1}\| \|r\| = \frac{\|r\|}{\min|\lambda_i-\mu|} \cdot \mathrm{cond}\,(X).$$

Átrendezve kapjuk az állítást.

$$\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu| \le \frac{\|r\|}{\|u\|} \cdot \mathrm{cond}\,(X).$$

□

Következmény: Ha $A = A^*$, akkor az X diagonalizáló mátrix unitér, $\mathrm{cond}_2(X) = 1$, ekkor

$$\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu| \le \frac{\|r\|_2}{\|u\|_2}.$$

Példa: Becslés a reziduális hibával

Az alábbi $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$-es mátrix közelítő sajátértéke μ és közelítő sajátvektora u. Adjunk becslést a μ-höz legközelebbi sajátértékre!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mu = 2, \quad u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:
Számítsuk ki a reziduum vektort:

$$r := Au - \mu u =$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Szimmetrikus mátrix esetén a tétel szerint

$$\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu| \leq \frac{\|r\|_2}{\|u\|_2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

Inverz perturbációs tétel

1. Legyen μ és u az A közelítő sajátértéke és sajátvektora,
2. $r := Au - \mu u$ a közelítés reziduális hibája.

Ekkor az

$$E = -\frac{ru^T}{\|u\|_2^2}, \quad \text{ahol} \quad \|E\|_2 = \frac{\|r\|_2}{\|u\|_2}$$

mátrix-szal μ és u az $A + E$ pontos sajátértéke és sajátvektora, azaz $(A + E)u = \mu u$.

Biz.:

$$(A + E)u = \left(A - \frac{ru^T}{\|u\|_2^2}\right) u = Au - r = Au - (Au - \mu u) = \mu u$$

$$\|E\|_2 = \frac{\|ru^T\|_2}{\|u\|_2^2} = \frac{\|r\|_2 \cdot \|u\|_2}{\|u\|_2^2} = \frac{\|r\|_2}{\|u\|_2}$$

Megjegyzés:

1. $\|E\|_2 = \|E\|_F$, mert $\|ru^T\|_F = \|r\|_2 \cdot \|u\|_2$.
2. Ha
$$\|E\|_2 = \|E\|_F = \frac{\|r\|_2}{\|u\|_2} \approx 10^{-9},$$
akkor a pontos mátrix, melynek a sajátpárját ismerjük csak a 10. jegyben különbözik A-tól. Ha A-t például csak 6 jegy pontosan ismerjük, nincs értelme pontosabb közelítést keresni.

Bauer-Fike–tétel

Tekintsük a következő feltételeket:

1. Legyen A diagonalizálható, azaz $\exists\ X$ invertálható mátrix, melyre $X^{-1}AX = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
2. Legyen $A + \Delta A$ sajátértéke μ és
3. olyan mátrixnormát válasszunk, melyben minden diagonális mátrixra $\|D\| = \max_{i=1}^{n} |d_{ii}|$. (Például a p-normák ilyenek.)

Ekkor
$$\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu| \leq \operatorname{cond}(X) \cdot \|\Delta A\|.$$

Biz.:
1. Ha valamely i-re $\mu = \lambda_i$, akkor az állítás bal oldala 0, így triviálisan teljesül.

2. Ha $\forall\, i: \ \ \mu \neq \lambda_i$, akkor $D - \mu I$ invertálható. (Az indoklás az előző tétel bizonyításában szerepel.)
Az $(A + \Delta A) - \mu I$ mátrixra alkalmazzuk ugyanazt a hasonlósági transzformációt, mint amit A diagonálizálására.

$$\begin{aligned} X^{-1}(A + \Delta A - \mu I)X &= X^{-1}AX + X^{-1}\Delta AX - \mu I = \\ &= D + X^{-1}\Delta AX - \mu I = \\ &= (D - \mu I)\left(I + \underbrace{(D - \mu I)^{-1}X^{-1}\Delta AX}_{:=B}\right) \end{aligned}$$

Biz. folyt.: Az előző oldalról

$$X^{-1}(A + \Delta A - \mu I)X = (D - \mu I)(I + B)$$

$$\begin{aligned} \det(A + \Delta A - \mu I) &= \det(X^{-1}(A + \Delta A - \mu I)X) = \\ &= \det(D - \mu I) \cdot \det(I + B) \end{aligned}$$

Mivel μ az $A + \Delta A$ sajátértéke, ezért $\det(A + \Delta A - \mu I) = 0$. A fenti átrendezésből adódik, hogy

$$0 = \det(I + B) = \det(B - (-1) \cdot I),$$

ami azt jelenti, hogy B-nek (-1) sajátértéke.

Biz. folyt.: A spektrálsugár és norma közti egyenlőtlenségből, valamint norma tulajdonságokból

$$\begin{aligned}
1 = |-1| \leq \varrho(B) &\leq \|B\| = \|(D-\mu I)^{-1} X^{-1} \Delta A X\| \\
&\leq \|(D-\mu I)^{-1}\| \|X^{-1}\| \|\Delta A\| \|X\| = \\
&= \max_{i=1}^{n} \frac{1}{|\lambda_i - \mu|} \cdot \operatorname{cond}(X) \|\Delta A\| = \\
&= \frac{1}{\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu|} \cdot \operatorname{cond}(X) \|\Delta A\|.
\end{aligned}$$

Átrendezve

$$\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu| \leq \operatorname{cond}(X) \cdot \|\Delta A\|.$$

□

Következmények:

- A sajátértékek változása folytonosan függ a mátrix elemek változásától. Hasonló a sajátvektorok esetén akkor állítható, ha a sajátértékek egyszeresek.
- $A = A^*$ esetén az X diagonalizáló mátrix unitér, $\mathrm{cond}_2(X) = 1$, ekkor

$$\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu| \leq \|\Delta A\|_2.$$

- A $H = (\frac{1}{i+j-1})_{i,j=1}^{n}$ Hilbert mátrix a sajátértékprobléma szempontjából jól kondícionált mátrix, de ha tetszőleges D diagonális mátrix esetén az $A = HDH^{-1}$ mátrixot választjuk, akkor

$$\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu| \leq \mathrm{cond}_2(H) \cdot \|\Delta A\|_2 \approx 20^n \cdot \|\Delta A\|_2.$$

Próbáljuk ki gyakorlaton 5×5-ös mátrixon!

Példa: Az $A_t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei: 1 (kétszeres), a sajátvektor

- $t \neq 0$ esetén $v = e_1$, 1 dim-s a sajátaltér, $m_G(1) = 1$, míg
- $t = 0$ esetén $v_1 = e_1$ és $v_2 = e_2$, $m_G(1) = 2$.
- $t \to 0$ esetén A_t sajátvektoraiból nem kapjuk meg A sajátvektorait.

Tartalomjegyzék

1. A sajátértékprobléma érzékenysége
2. Karakterisztikus polinom meghatározása paraméterrel
3. Polinom egyenlet megoldása sajátérték feladatként
4. Karakterisztikus polinom meghatározása LER-rel (interpolációval)
5. A Fagyejev-féle "trace"-módszer
6. Karakterisztikus polinom felírása tridiagonális esetben

Karakterisztikus polinom meghatározása paraméterrel

- A karakterisztikus polinom $(p(\lambda))$ meghatározása a tanult képlettel kézzel vagy Maple-lel,
- a gyökök meghatározása $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ nemlineáris egyenlet megoldását jelenti,
- a sajátvektorok megadásához az $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ lineáris egyenletrendszereket kell megoldani minden i-re.

Példák

- Tekintsük a $p(\lambda) = \lambda^{10} - \varepsilon$ polinom gyökeit
  - $\varepsilon = 0$ esetén: $\lambda_i = 0$ minden i-re, míg
  - $\varepsilon = 10^{-10}$ esetén: $|\lambda_i| = \frac{1}{10}$ minden i-re.
  - Vagyis a polinom együtthatóit 10 jegy pontossággal kell ismernünk, hogy a gyököket $\frac{1}{10}$ pontossággal megkapjuk.

  Rosszul kondícionált a feladat.
- $P(\lambda) = \prod_{k=1}^{20}(\lambda - k)$ esetén a gyökök ábrázolhatók, a konstans tag (20!) nem. Lásd Matlab példa gyakorlaton.
- A fentiek miatt a polinom hatványösszeg alakján keresztül sajátértékeket számolni csak kis n-ekre ($n \leq 5$) érdemes.

Tartalomjegyzék

1. A sajátértékprobléma érzékenysége
2. Karakterisztikus polinom meghatározása paraméterrel
3. Polinom egyenlet megoldása sajátérték feladatként
4. Karakterisztikus polinom meghatározása LER-rel (interpolációval)
5. A Fagyejev-féle "trace"-módszer
6. Karakterisztikus polinom felírása tridiagonális esetben

Polinom egyenlet megoldása sajátérték feladatként

Definíció: Frobenius kísérő mátrix

Adott $p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n$ polinom esetén az

$$F_n := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & -p_n \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -p_2 \\ 0 & \ldots & 1 & -p_1 \end{bmatrix}$$

mátrixot Frobenius kísérő mátrixnak nevezzük.

Tétel:

F_n karakterisztikus polinomja
$p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n$, azaz $\det(\lambda I - F_n) = p(\lambda)$.

Biz.: A determinánst az 1. sor szerint kifejtve

$$\det(\lambda I - F_n) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & & \dots & p_n \\ -1 & \lambda & & & p_{n-1} \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & p_2 \\ 0 & \dots & & -1 & \lambda + p_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & p_{n-1} \\ -1 & \lambda & & p_{n-2} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & \lambda + p_1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \cdot p_n \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & -1 & \lambda & \\ & & \ddots & \lambda \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{=(-1)^{n-1}} =$$

$$= \lambda \cdot \det(\lambda I - F_{n-1}) + (-1)^{n+1} p_n \cdot (-1)^{n-1} =$$

$$= \lambda \cdot \det(\lambda I - F_{n-1}) + p_n.$$

Ez a Horner-algoritmus rekurziója. $\square$

Példa: Frobenius kísérő mátrixra

Adott $p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1$ polinom esetén a Frobenius kísérő mátrix alakja

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés:

A determinánst az 1. oszlop szerint kifejtve:

$$\det(\lambda I - F_3) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & 2 \\ 0 & -1 & \lambda+3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda+3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda\left(\lambda(\lambda+3)+2\right)+1 = \lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+1 = p(\lambda).$$

1. A sajátértékprobléma érzékenysége
2. Karakterisztikus polinom meghatározása paraméterrel
3. Polinom egyenlet megoldása sajátérték feladatként
4. Karakterisztikus polinom meghatározása LER-rel (interpolációval)
5. A Fagyejev-féle "trace"-módszer
6. Karakterisztikus polinom felírása tridiagonális esetben

Karakterisztikus polinom meghatározása LER megoldással (interpolációval)

Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ különböző pontok és számítsuk ki a következő determinánsokat:

$$p(x_i) = \det(x_i I - A) = x_i^n + p_1 x_i^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x_i + p_n, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Átrendezve a következő LER-t kapjuk:
$p_1 x_i^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x_i + p_n = p(x_i) - x_i^n, \quad (i = 1, \ldots, n).$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(x_1) - x_1^n \\ p(x_2) - x_2^n \\ \vdots \\ p(x_n) - x_n^n \end{bmatrix}$$

A $p_1, \ldots, p_n$ együtthatókat egy Vandermonde-mátrixú LER-ből kell meghatározni.

1. Példa: Karakterisztikus polinom felírására LER-rel

Lineáris egyenletrendszer megoldásával írja fel az A mátrix karakterisztikus polinomját! Az alappontok, ahol a determináns értékeket meghatározzuk: $x_1 = 0, x_2 = 1$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Ezt a technikát kizárólag gyakorlaton, kézzel számolásnál alkalmazzuk!

Megoldás:
Számítsuk ki a $p(x_i) := \det(x_i \cdot I - A)$ determináns értékeket a megadott alappontokra.

$$p(0) = \det(-A) = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 6 - (-4) = 10$$

$$p(1) = \det(1 \cdot I - A) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 - (-4) = 4$$

A karakterisztikus polinomot $p(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$ alakban keressük. Írjuk fel a Vandermonde mátrixú lineáris egyenletrendszert a polinom együtthatóinak meghatározására, melynek általános alakja:

$$p_1 \cdot x_i + p_2 = p(x_i) - x_i^2, \quad (i = 1, 2).$$

$$\begin{aligned} 0 \cdot p_1 + p_2 = p_2 &= 10 - 0^2 = 10 \\ 1 \cdot p_1 + p_2 = p_1 + p_2 &= 4 - 1^2 = 3 \end{aligned}$$

A második egyenletbe behelyettesítve:

$$p_1 + p_2 = p_1 + 10 = 3 \;\; \rightarrow \;\; p_1 = -7.$$

Tehát az 1 főegyütthatós karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - A) = \lambda^2 - 7\lambda + 10.$$

2. Példa: Karakterisztikus polinom felírására LER-rel

Lineáris egyenletrendszer megoldásával írja fel az A mátrix karakterisztikus polinomját! Az alappontok, ahol a determináns értékeket meghatározzuk: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & -5 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ezt a technikát kizárólag gyakorlaton, kézzel számolásnál alkalmazzuk!

Megoldás:
Számítsuk ki a $p(x_i) := \det(x_i \cdot I - A)$ determináns értékeket a megadott alappontokra.

$$p(-1) = \det((-1) \cdot I - A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 5 \\ -5 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot (-4) = 12$$

$$p(0) = \det(-A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 5 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot (-3) = 12$$

$$p(1) = \det(1 \cdot I - A) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \\ -5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot (-2) = 6$$

A karakterisztikus polinomot $p(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3$ alakban keressük.

Írjuk fel a Vandermonde mátrixú lineáris egyenletrendszert a polinom együtthatóinak meghatározására, melynek általános alakja:

$$p_1 \cdot x_i^2 + p_2 \cdot x_i + p_3 = p(x_i) - x_i^3, \quad (i = 1, 2, 3).$$

$$(-1)^2 \cdot p_1 + (-1) \cdot p_2 + p_3 = p_1 - p_2 + p_3 = 12 - (-1)^3 = 13$$
$$(0)^2 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + p_3 = p_3 = 12 - (0)^3 = 12$$
$$1^2 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + p_3 = p_1 + p_2 + p_3 = 6 - 1^3 = 5$$

Az első egyenletetből a harmadikat kivonva

$$-2p_2 = 8 \;\; \rightarrow \;\; p_2 = -4.$$

A harmadik egyenletbe behelyettesítve:

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1 - 4 + 12 = 5 \;\; \rightarrow \;\; p_1 = -3.$$

Tehát az 1 főegyütthatós karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - A) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12.$$

Karakterisztikus polinom meghatározása LER-rel (interpolációval)

Megjegyzések:

- Numerikusan a LER-t nem szabad megoldani, mert gyakran rosszul kondícionált.
- Interpolációs feladatként fogalmazzuk meg a feladatot és úgy oldjuk meg a gyakorlatban számítógéppel:

Algoritmus:

- Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ különböző pontok,
- a $p(x_1) - x_1^n,\ \ p(x_2) - x_2^n, \ldots,\ \ p(x_n) - x_n^n$ függvényértékekre
- keressük azt a $P_{n-1}(x) := p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n$ legfeljebb $n-1$-edfokú polinomot, melyre

$$P_{n-1}(x_i) = p(x_i) - x_i^n, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

- Ekkor $p(x) = x^n + P_{n-1}(x)$ a karakterisztikus polinom.

Tartalomjegyzék

1. A sajátértékprobléma érzékenysége
2. Karakterisztikus polinom meghatározása paraméterrel
3. Polinom egyenlet megoldása sajátérték feladatként
4. Karakterisztikus polinom meghatározása LER-rel (interpolációval)
5. A Fagyejev-féle "trace"-módszer
6. Karakterisztikus polinom felírása tridiagonális esetben

A Fagyejev-féle "trace"-módszer

Az 1 főegyütthatós $p(\lambda)$ karakterisztikus polinomot határozzuk meg a következő módszerrel:

Algoritmus: Fagyejev-féle "trace"-módszer:

1. Kiszámítjuk az $s_k := \operatorname{tr}(A^k)$ értékeket $k = 1, \ldots, n$-re.
2. A Newton-Waring (Girard) – formula alapján (gyökök és együtthatók összefüggése)

$$s_k + p_1 s_{k-1} + \ldots + p_{k-1} s_1 + k \cdot p_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$$

   alsóháromszög mátrixú LER-ből:

$$p_k = -\frac{1}{k}(s_k + p_1 s_{k-1} + \ldots + p_{k-1} s_1) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

3. $p(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = \det(\lambda I - A)$.

Állítás:

$$s_k := \mathrm{tr}\,(A^k) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^k \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Biz.: $A = X^{-1} J\, X$, ahol J a Jordan-alak. Teljes indukcióval belátjuk, hogy $A^k = X^{-1} J^k X$, vagyis A^k és J^k hasonlók.

$$A^2 = X^{-1} J\, X \cdot X^{-1} J\, X = X^{-1} J^2 X$$

$$A^k = A \cdot A^{k-1} = X^{-1} J\, X \cdot X^{-1} J^{k-1} X = X^{-1} J^k X$$

Innen $\mathrm{tr}\,(A^k) = \mathrm{tr}\,(J^k) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^k$ (lásd beadható Hf.).

A Fagyejev-féle "trace"-módszer

Tétel:

$$s_k + p_1 s_{k-1} + \ldots + p_{k-1} s_1 + k \cdot p_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$$

Biz.: Csak az n. egyenletet igazoljuk

$$0 = p(\lambda_i) = \lambda_i^n + p_1 \lambda_i^{n-1} + \ldots + p_{n-1} \lambda_i + p_n.$$

Összegezzük $i = 1, \ldots, n$-re az egyenletet

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n + p_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{n-1} + \ldots + p_{n-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + n p_n =$$
$$= s_n + p_1 s_{n-1} + \ldots + p_{n-1} s_1 + n \cdot p_n.$$

Példa: Karakterisztikus polinom felírására "trace"-módszerrel

A Fagyejev-féle "trace"-módszerrel írja fel az A mátrix karakterisztikus polinomját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Számítsuk ki a Fagyejev-féle "trace" módszerbeli s_k-kat.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 28 \\ -7 & 32 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = tr(A) = 1 + 6 = 7$$

$$s_2 = tr(A^2) = -3 + 32 = 29$$

A karakterisztikus polinom együtthatóira

$$s_1 + p_1 = 0 \quad \rightarrow \quad p_1 = -s_1 = -7$$

$$s_2 + p_1 s_1 + 2p_2 = 0 \quad \rightarrow \quad p_2 = -\frac{1}{2}\left(s_2 + p_1 s_1\right) = -\frac{1}{2}\left(29 - 49\right) = 10.$$

Leolvashatjuk, hogy az 1 főegyütthatós karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10.$$

Tartalomjegyzék

1 A sajátértékprobléma érzékenysége

2 Karakterisztikus polinom meghatározása paraméterrel

3 Polinom egyenlet megoldása sajátérték feladatként

4 Karakterisztikus polinom meghatározása LER-rel (interpolációval)

5 A Fagyejev-féle "trace"-módszer

6 Karakterisztikus polinom felírása tridiagonális esetben

$A = \text{tridiag}\,(\beta_{i-1}, \alpha_i, \gamma_i)$

$A = \text{tridiag}\,(\beta_{i-1}, \alpha_i, \gamma_i)$ esetén a karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 - \lambda & \gamma_2 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 - \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n - \lambda \end{vmatrix}.$$

Tétel:

Az $A - \lambda I$ mátrix k. főminorára ($p_k(\lambda)$) a következő rekurzió teljesül: $p_0(\lambda) = 1$, $p_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda$,

$$p_k(\lambda) = (\alpha_k - \lambda)p_{k-1}(\lambda) - \beta_{k-1}\gamma_{k-1}p_{k-2}(\lambda), \quad k = 2, \dots, n.$$

$p_n(\lambda)$ az A karakterisztikus polinomja.

Biz.: Teljes indukcióval, az utolsó sor szerint kifejtve $p_k(\lambda) =$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 - \lambda & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \beta_{k-2} & \alpha_{k-1} - \lambda & \gamma_{k-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{k-1} & \alpha_k - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha_k - \lambda) p_{k-1}(\lambda) +$$

$$+ (-1)^{2k-1} \beta_{k-1} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 - \lambda & \gamma_2 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \alpha_{k-2} - \lambda & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{k-2} & \gamma_{k-1} \end{vmatrix}$$

Biz. folyt.:

$$p_k(\lambda) = (\alpha_k - \lambda)p_{k-1}(\lambda) + (-1)^{2k-1}\beta_{k-1}\cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 - \lambda & \gamma_2 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \alpha_{k-2} - \lambda & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{k-2} & \gamma_{k-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha_k - \lambda)p_{k-1}(\lambda) + (-1)^{2k-1}\beta_{k-1}(-1)^{2k-2}\gamma_{k-1}p_{k-2}(\lambda) =$$

$$= (\alpha_k - \lambda)p_{k-1}(\lambda) - \beta_{k-1}\gamma_{k-1}p_{k-2}(\lambda)$$

$\square$

Megjegyzések:

- Ha A szimmetrikus, azaz $\beta_i = \gamma_i$, akkor a sajátértékek valósak.
- Ha van olyan i, melyre $\beta_i = \gamma_i = 0$, akkor $A - \lambda I$ tridiagonális blokkokból áll, ezek karakterisztikus polinomját külön-külön meghatározhatjuk.
- Konkrét λ sajátérték közelítés esetén a tételbeli rekurzió könnyen számolható és egy nemlineáris egyenlet megoldó módszerben – pl. intervallumfelezés – felhasználható. (A hatványegyütthatós polinomot stabilitási okokból nem célszerű előállítani.)

Megjegyzések folyt.:

- Ha Newton-módszer szeretnénk alkalmazni, akkor $p_k'(\lambda)$ meghatározásához is szükségünk van egy rekurzióra. Deriváljuk $p_k(\lambda)$-t λ szerint:

$$p_0'(\lambda) = 0, \quad p_1'(\lambda) = -1 \quad (k = 2, \dots, n)$$
$$p_k'(\lambda) = -p_{k-1}(\lambda) + (\alpha_k - \lambda)p_{k-1}'(\lambda) - \beta_{k-1}\gamma_{k-1}p_{k-2}'(\lambda).$$

Ekkor

$$\lambda^{(j+1)} := \lambda^{(j)} - \frac{p_n(\lambda^{(j)})}{p_n'(\lambda^{(j)})}.$$

ahol $p_n(\lambda^{(j)})$ és $p_n'(\lambda^{(j)})$-t is a rekurziókkal számoljuk ki.

Tétel:

Ha $A^T = A$ (szimmetrikus), akkor $\exists$ Q ortogonális mátrix, melyre

$$Q^T A Q = \mathrm{tridiag}\,(\beta_{i-1}, \alpha_i, \beta_i).$$

Biz.: $n-2$ db valós Householder hasonlósági transzformációval A-t tridiagonális alakra hozzuk. Az A első oszlopából vegyük le az első elemet: $\widetilde{a}_1 := (a_{i1})_{i=2}^n \in \mathbb{R}^{n-1}$ és készítsük el a Householder transzformáció vektorát:

$$\widetilde{v}_1 := \frac{\widetilde{a}_1 - \sigma_1 e_1}{\|\widetilde{a}_1 - \sigma_1 e_1\|_2} \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \sigma_1 := \pm\|\widetilde{a}_1\|_2.$$

Ezzel megadtuk a $\widetilde{H}_1 := H(\widetilde{v}_1)$ Householder transzformációt, mellyel

$$\widetilde{H}_1 \widetilde{a}_1 = \sigma_1 e_1 \quad \text{illetve} \quad \widetilde{a}_1^T \widetilde{H}_1 = \left(\widetilde{H}_1 \widetilde{a}_1\right)^T = \sigma_1 e_1^T.$$

Biz.folyt.:
Alkalmazzuk A-ra hasonlósági transzformációként a következő módon:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & \widetilde{H}_1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \widetilde{a}_1^T \\ \hline \widetilde{a}_1 & \widetilde{A}_1 \end{array}\right]} \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & \widetilde{H}_1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \widetilde{a}_1^T \\ \hline \begin{matrix}\sigma_1 \\ 0\end{matrix} & \widetilde{H}_1\widetilde{A}_1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & \widetilde{H}_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} a_{11} & \sigma_1 & 0 \\ \hline \begin{matrix}\sigma_1 \\ 0\end{matrix} & \multicolumn{2}{c}{\widetilde{H}_1\widetilde{A}_1\widetilde{H}_1} \end{array}\right].$$

Biz.folyt.:
Folytassuk a traszformációt eggyel kisebb méretben a $\widetilde{H}_1 \widetilde{A}_1 \widetilde{H}_1$ mátrixra.

A k. lépésben a Householder transzformáció matematikai alakja

$$H_k = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \widetilde{H}_k \end{bmatrix}, \quad \widetilde{H}_k \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}.$$

$n-2$ db hasonlósági transzformáció után $Q = H_1 H_2 \dots H_{n-2}$,

$$(H_{n-2} \dots H_2 H_1) A (H_1 H_2 \dots H_{n-2}) = \text{tridiag}\,(\beta_{i-1}, \alpha_i, \beta_i).$$

$\square$

Megjegyzések:

- Tehát bármely szimmetrikus mátrix tridiagonális alakra hozható, így az előző tétel rekurziója alkalmazható.
- Ha A nem szimmetrikus, akkor a fenti hasonlósági transzformációkkal felső Hessenberg alakot állíthatunk elő. Ekkor is adható rekurzió (bonyolultabb, lásd Hegedűs Csaba jegyzetében).
- A fenti transzformáció az LU- és QR-algoritmusok alkalmazása előtt is fontos, csökkenti a műveletigényt.

Köszönöm a figyelmet!