Numerikus módszerek 2.

13. előadás: Numerikus integrálás II.

Krebsz Anna

ELTE IK

Tartalomjegyzék

Csebisev típusú formulák:

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx \approx A \cdot \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \text{ alakúak.}$$

- Keressük az A értékét és az $x_0, x_1, \dots, x_n$ alappontokat (összesen: $n+2$ ismeretlen), hogy a formula $f \in P_{n+1}$-re pontos legyen.
- Mivel nem ismerjük az alappontokat, ezért az $A_k = \int_a^b \ell_k w$ képlet nem használható.
- Írjuk fel az $1, x, x^2, \dots, x^{n+1}$ hatványfüggvényekre a formula pontosságát!
- Ebből $f \in P_{n+1}$-re következik a pontosság.

- $f(x) \equiv 1$-re pontos: $\mu_0 := \int_a^b w = A \cdot \sum_{k=0}^n 1 = (n+1) \cdot A$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{\mu_0}{n+1}.$$

- $f(x) = x$-re pontos: $\mu_1 := \int_a^b x w(x)\, dx = A \cdot \sum_{k=0}^n x_k$

$$\Rightarrow \quad S_1 := \sum_{k=0}^{n} x_k = \frac{\mu_1}{A} = (n+1)\frac{\mu_1}{\mu_0}.$$

- Általában $j = 1, \ldots, n+1$-re
- $f(x) = x^j$-re pontos: $\mu_j := \int_a^b x^j w(x)\, dx = A \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^j$

$$\Rightarrow \quad S_j := \sum_{k=0}^{n} (x_k)^j = \frac{\mu_j}{A} = (n+1)\frac{\mu_j}{\mu_0}.$$

Vegyük észre, hogy a kapott S_j értékek azonosak a Fagyejev-féle "trace-módszer"-nél tanultakkal, így a Newton-Waring (Girard) formulák segítségével felírható a polinom, melynek gyökei x_k-k.

$$S_j + p_1 S_{j-1} + \ldots + p_{j-1} S_1 + j \cdot p_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, n+1)$$
$$\Rightarrow \quad p_j = -\frac{1}{j}(S_j + p_1 S_{j-1} + \ldots + p_{j-1} S_1),$$

ahol $P(x) = x^{n+1} + p_1 x^n + \ldots + p_n x + p_{n+1} = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$ 1-főegyütthatós $n+1$-edfokú polinom.

Tétel:

A Csebisev típusú kvadratúra formulák $n+1$-edfokú polinomokra pontosak.

Biz.: A konstrukcióból következik.

Állítás:

$[-1;1]$, $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ esetén a Csebisev típusú formulában $A=\frac{\pi}{n+1}$ és az $x_0, x_1 \dots, x_n$ alappontok a T_{n+1} Csebisev polinom gyökei.
A Csebisev típusú kvadratúra formula alakja:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \frac{\pi}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n} f(x_k).$$

Biz.: A konstrukcióból $A=\frac{\mu_0}{n+1}$, így csak $\mu_0=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\pi$-t kell kiszámolni.

Gauss típusú formulák:

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

alakú a formula, mely maximális fokszámig $(2n+1)$ pontos.

Példa: $w \equiv 1$-re, $[-1;1]$-en $n=1$-re vizsgáljuk a két alappontú Gauss-típusú formulát! Írjuk fel az $1, x, x^2, x^3$-re a pontosságot!

- $f(x) \equiv 1$-re pontos: $\mu_0 := \int_{-1}^{1} 1 = 2 = A_0 + A_1$
- $f(x) = x$-re pontos: $\mu_1 := \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 = A_0x_0 + A_1x_1$
- $f(x) = x^2$-re pontos: $\mu_2 := \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} = A_0x_0^2 + A_1x_1^2$
- $f(x) = x^3$-re pontos: $\mu_3 := \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 = A_0x_0^3 + A_1x_1^3$

Látjuk, hogy nemlineáris egyenletrendszert kaptunk A_0, A_1, x_0, x_1-re, melynek megoldása problémás.

Tétel: A Gauss-típusú formulák pontosságáról

$$\int_a^b fw = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \quad \forall\, f \in P_{2n+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\omega_n \perp P_n, \text{ ahol } \omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

Másképp megfogalmazva: a kvadratúra formula pontos bármely legfeljebb $2n+1$-edfokú polinomra akkor és csak akkor, ha $x_0, x_1 \dots, x_n$ az $n+1$-edfokú ortogonális polinom gyökei.

Biz.:
$\Rightarrow$: Vegyünk egy $p \in P_n$ polinomot és igazoljuk, hogy $\omega_n \perp p$.
Mivel $\omega_n p \in P_{2n+1}$, ezért felhasználhatjuk a pontosságra tett feltételt.

$$\langle \omega_n, p \rangle_w = \int_a^b \omega_n p w = \sum_{k=0}^{n} A_k \underbrace{\omega_n(x_k)}_{=0} p(x_k) = 0$$

$\Leftarrow$: Vegyünk egy $f \in P_{2n+1}$ polinomot és osszuk maradékosan ω_n-nel

$$f = \omega_n \cdot q + r, \quad \text{ekkor} \quad q, r \in P_n.$$

Felhasználjuk, hogy a feltétel miatt $\langle \omega_n, q \rangle_w = 0$ és az $r \in P_n$ maradék polinomra az interpolációs kvadratúra formula pontos.

Biz. folyt:

$$\int_a^b fw = \int_a^b (\omega_n q + r)w = \underbrace{\int_a^b \omega_n q w}_{=\langle \omega_n, q\rangle_w = 0} + \int_a^b rw =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_k r(x_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

mivel

$$f(x_k) = \underbrace{\omega_n(x_k)}_{=0} q(x_k) + r(x_k) = r(x_k).$$

Ezzel beláttuk az $f \in P_{2n+1}$ polinomokra a pontosságot. $\square$

Elnevezés: Gauss–"ortogonális polinom neve" formula.
Például Gauss–Csebisev formula, mely a Csebisev polinom gyökeire épül illetve Gauss–Legendre formula, mely a Legendre polinom gyökeire épül. (Lásd a korábbi ortogonális polinomok fejezetet.)

Tétel:

Gauss típusú kvadratúra formulák esetén $A_k > 0 \ (k = 0, \ldots, n)$.

Biz.: Mivel $\ell_k^2 \in P_{2n}$, ezért $f = \ell_k^2$-re pontos a kvadratúra formula.

$$0 < \int_a^b \ell_k^2 w = \sum_{j=0}^{n} A_j \ell_k^2(x_j) = A_k$$

$\square$

A továbbiakban megmutatjuk, hogy f közelítésére valójában a Fejér–Hermite interpolációs polinomot használjuk (az interpolációs polinom helyett). Az alappontok az adott intervallumhoz és súlyfüggvényhez tartozó $n+1$-edfokú ortogonális polinom gyökei.

$$f \approx H_{2n+1}, \text{ ahol}$$

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) a_k(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_k) b_k(x).$$

$$\int_a^b fw \approx \int_a^b H_{2n+1} w = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \underbrace{\int_a^b a_k w}_{=: U_k} + \sum_{i=0}^{n} f'(x_k) \underbrace{\int_a^b b_k w}_{=: V_k}.$$

Belátjuk, hogy $V_k = 0$ és $U_k = A_k$ minden k-ra.

- $V_k = \int_a^b (x - x_k)\ell_k^2(x)w(x)\ dx =$

$$= \frac{1}{\omega_n'(x_k)} \cdot \int_a^b \omega_n(x)\ell_k(x)w(x)\ dx = 0,$$

mivel $\omega_n \perp \ell_k \in P_n$.

- $U_k = \int_a^b \left[1 - 2(x - x_k)\ell_k'(x_k)\right] \ell_k^2(x)w(x)\ dx =$

$$= \int_a^b \ell_k^2(x)w(x)\ dx - 2\ell_k'(x_k) \underbrace{\int_a^b (x - x_k)\ell_k^2(x)w(x)\ dx}_{=0} =$$

$$= \int_a^b \ell_k^2(x)w(x)\ dx = A_k \text{ lásd előző tétel.}$$

$\square$

Tétel: Hibaformula Gauss típusú formulákra

Gauss típusú kvadratúra formulák esetén ha $f \in C^{(2n+2)}[a;b]$, akkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b fw - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \frac{f^{2n+2}(\eta)}{(2n+2)!} \|\omega_n\|_w^2,$$

$$\text{ahol } \ \omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \ \text{ és } \ \|\omega_n\|_w^2 = \int_a^b \omega_n^2 w.$$

Biz.: A hibaformulát a Fejér–Hermite interpoláció hibaformulájával bizonyítjuk.

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{2n+2}(\xi_x)}{(2n+2)!}\omega_n(x)^2,$$

ahol $\xi_x \in [a; b]$.

Integráljuk mindkét oldalt a w súlyfüggvénnyel

$$\int_a^b fw - \int_a^b H_{2n+1} w = \int_a^b \frac{f^{2n+2}(\xi_x)}{(2n+2)!} \underbrace{\omega_n(x)^2 w(x)}_{\geq 0} \, dx =$$

$$= \frac{f^{2n+2}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b \omega_n(x)^2 w(x) \, dx,$$

ahol a jobboldali függvény integráljára alkalmaztuk az integrálszámítás középérték tételét.

Másrészt a H_{2n+1} Hermite interpolációs polinomra pontos a Gauss-kvadratúra formula, ezért

$$\int_a^b H_{2n+1} w = \sum_{k=0}^{n} A_k H_{2n+1}(x_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k).$$

Ezt beírva előző képletünkbe

$$\int_a^b fw - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \frac{f^{2n+2}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b \omega_n(x)^2 w(x)\, dx =$$

$$= \frac{f^{2n+2}(\eta)}{(2n+2)!} \|\omega_n\|_w^2.$$

$\square$

Hibaformulák

Jelölés: $m(n) \in \mathbb{N}$ jelöli azt a maximális fokszámot, melyre a kvadratúra formula pontos, azaz

$$\int_a^b fw = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \quad \forall\, f \in P_{m(n)}.$$

A tanult típusok esetén

- Interpolációs típusú kvadratúra formuláknál: $m(n) = n$.
- Newton-Cotes formuláknál páros n-re: $m(n) = n + 1$, páratlan n-re: $m(n) = n$.
- Csebisev típusú kvadratúra formuláknál: $m(n) = n + 1$.
- Gauss típusú kvadratúra formuláknál: $m(n) = 2n + 1$.

Tétel: A kvadratúrák konvergenciája

$f \in C[a;b]$ esetén ha

1. $\int_a^b fw = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \quad \forall\, f \in P_{m(n)}$,
2. $m(n) \to \infty \ \ (n \to \infty)$,
3. $\sum_{k=0}^n |A_k| \leq K \ \ (n \in \mathbb{N})$,
4. $[a;b]$ véges intervallum, akkor

- $$\left| \int_a^b fw - \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \right| \leq (K + \mu_0) \cdot E_{m(n)}(f),$$

ahol $E_{m(n)}(f) := \|f - P_{m(n)}\|_\infty = \min\limits_{Q \in P_{m(n)}} \|f - Q\|_\infty.$

Biz.: Legyen $Q \in P_{m(n)}$ az f-et egyenletesen legjobban közelítő polinom.

$$\int_a^b fw = \int_a^b (f - Q)w + \int_a^b Qw \text{ és}$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k (f - Q)(x_k) + \sum_{k=0}^{n} A_k Q(x_k).$$

Vegyük a két baloldali kifejezés különbségét és használjuk fel, hogy Q-ra pontos a kvadratúra formula: $\int_a^b Qw = \sum_{k=0}^{n} A_k Q(x_k)$.

$$\left| \int_a^b fw - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \right| = \left| \int_a^b (f - Q)w - \sum_{k=0}^{n} A_k (f - Q)(x_k) \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_a^b (f - Q)w \right| + \sum_{k=0}^{n} |A_k| \cdot |f - Q|(x_k)| \leq$$

$$\|f - Q\|_\infty \cdot \mu_0 + \|f - Q\|_\infty \cdot K = E_{m(n)}(f) \cdot (\mu_0 + K).$$

□

Következmény:

1. Interpolációs kvadratúra formula és $A_k > 0$ $(k = 0, \ldots, n)$ esetén $\sum_{k=0}^{n} |A_k| = \mu_0$ és $m(n) = n$, ezért a tételbeli felső becslés
$$2\mu_0 E_n(f).$$
2. Gauss típusú kvadratúrák esetén
$$2\mu_0 E_{2n+1}(f) \text{ a becslés.}$$
3. $f \in C[a;b]$ és $[a;b]$ véges esetben a Gauss típusú kvadratúra formulák értéke konvergál az integrálhoz.

Köszönöm a figyelmet!