

Numerikus módszerek 1.

11. előadás: Nemlineáris egyenletek numerikus megoldása

Krebsz Anna

ELTE IK

- 1 Bolzano-tétel, intervallumfelezés
- 2 Fixponttételek, egyszerű iterációk
- 3 Konvergencia rend
- 4 Matlab példák

Feladat

Keressük meg egy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nemlineáris függvény gyökét, avagy zérushelyét. ($\exists?$, 1, több?)

$$f(x^*) = 0, \quad x^* = ?$$

Ekvivalens módon átfogalmazható (általában): keressük meg egy $\varphi \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nemlineáris függvény fixpontját.

$$x^* = \varphi(x^*), \quad x^* = ?$$

- 1 Bolzano-tétel, intervallumfelezés
- 2 Fixponttételek, egyszerű iterációk
- 3 Konvergencia rend
- 4 Matlab példák

Lásd Analízis. . .

Tétel: Bolzano-tétel

Ha $f \in C[a; b]$ és $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor $\exists x^* \in (a; b) : f(x^*) = 0$.

Megjegyzés:

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a; b]$ zárt intervallum,
- $C[a; b]$: az $[a; b]$ (zárt) intervallumon folytonos függvények halmaza,
- $f(a) \cdot f(b) < 0$: $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek
- van gyök az $(a; b)$ (nyílt) intervallumban

Biz. (Bolzano-tétel): az intervallumfelezés módszerével

① Legyen $x_0 := a$, $y_0 := b$.

② Ismételjük:

- Legyen $s_k := \frac{1}{2}(x_k + y_k)$, az intervallum fele.
- Ha $f(x_k) \cdot f(s_k) < 0$, akkor $x_{k+1} := x_k$, $y_{k+1} := s_k$.
- Ha $f(x_k) \cdot f(s_k) > 0$, akkor $x_{k+1} := s_k$, $y_{k+1} := y_k$.

③ Álljunk meg, ha

- egyenlőség teljesül, ekkor $x^* = s_k$, vagy
- elértük a kívánt pontosságot, ekkor $x^* \in (x_k, y_k)$, és

$$y_k - x_k = \frac{y_{k-1} - x_{k-1}}{2}$$

teljesül.



Megjegyzés:

- Általában nem tapasztalunk egyenlőséget.
- Az (x_k) és (y_k) sorozatok konvergenciájának részletes tárgyalása: Analízis...
- **Hibabecslések:**

$$|x_k - x^*| < \frac{b-a}{2^k}, \quad |y_k - x^*| < \frac{b-a}{2^k},$$
$$|s_k - x^*| < \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$

Példa

Közelítsük a $P(x) = x^3 + 3x - 2$ polinom egyik gyökét 0.1 pontossággal. Hány lépés szükséges?

Próbálkozhatunk a $[0; 1]$ intervallummal...

A $P(x) = x^3 + 3x - 2$ polinom gyökét keressük intervallumfelezéssel a $[0; 1]$ intervallumon:

$$\begin{aligned} P(0) &= -2 < 0, & P(1) &= 1 + 3 - 2 = 2 > 0 \\ \Rightarrow \quad \exists x^* \in (0; 1) : P(x^*) &= 0. \end{aligned}$$

Hibabecslés:

$$\frac{1}{2^k} < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad k > 3,$$

tehát legalább 4 lépésre van szükségünk. Lassú ...



Tétel: gyök egyértelmű létezéséről

- ① Ha $f \in C[a; b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$,
 - ② valamint $f \in D(a; b)$ és $f' > 0$ (vagy < 0),
- akkor $\exists! x^* \in (a; b) : f(x^*) = 0$.

Biz.: A Bolzano-tételből következik, hogy van gyök.
 f szigorúan monoton, ezért egyértelmű is.



- 1 Bolzano-tétel, intervallumfelezés
- 2 Fixponttételek, egyszerű iterációk**
- 3 Konvergencia rend
- 4 Matlab példák

Emlékeztető: Iterációs módszerek LER-ek esetén.

$$\begin{aligned}Ax = b &\iff x = Bx + c \\ x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) &= B \cdot x^{(k)} + c\end{aligned}$$

Ötlet: Most, nemlineáris függvények zérushelyéhez:

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\iff x = \varphi(x) \\ x_{k+1} &= \varphi(x_k) = \dots\end{aligned}$$

Emlékeztető: fixpont

Az $x^* \in \mathbb{R}^n$ pontot a $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés *fixpontjának* nevezzük, ha $x^* = \varphi(x^*)$.

Emlékeztető: kontrakció

A $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés *kontrakció*, ha $\exists q \in [0, 1)$, hogy

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq q \cdot \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Megj.:

- kontrakció \approx összehúzás, q : kontrakciós együttható
- most $n = 1$, $\|\cdot\| = |\cdot|$; \mathbb{R} helyett $[a; b] \subset \mathbb{R}$, így jobban használható

Definíció: kontrakció

A $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés *kontrakció* $[a; b]$ -n, ha $\exists q \in [0, 1)$, hogy

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q \cdot |x - y|, \quad \forall x, y \in [a; b].$$

Állítás

❶ $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, $\varphi \in C^1[a; b]$ és

❷ $|\varphi'(x)| < 1$ ($\forall x \in [a; b]$),

akkor φ kontrakció $[a; b]$ -n.

Megj.:

- C^1 : egyszer folyotnosan differenciálható, vagyis a deriváltja folytonos.
- A kontrakciós tulajdonság függ az intervallumtól.

Biz.: A Lagrange-féle középértéktétel segítségével.

$$q := \max_{x \in [a; b]} |\varphi'(x)| < 1$$

$$\forall x, y \in [a; b] \ (x < y) : \exists \xi \in (x; y) :$$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x - y| \leq q \cdot |x - y|.$$



Tétel: Brouwer-féle fixponttétel

① Ha $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$

② és $\varphi \in C[a; b]$,

akkor $\exists x^* \in [a; b] : \varphi(x^*) = x^*$.

Biz.: Definiáljuk a $g(x) = x - \varphi(x)$ függvényt, majd alkalmazzuk a Bolzano-tételt.

Biz. folyt.:

① Mivel $\varphi(a), \varphi(b) \in [a; b] \Rightarrow$

$$g(a) = a - \varphi(a) \leq 0, \quad g(b) = b - \varphi(b) \geq 0 \\ \Rightarrow g(a) \cdot g(b) \leq 0.$$

② Ha $g(a) \cdot g(b) = 0$, akkor $g(a) = 0$ vagy $g(b) = 0$.
Ez azt jelenti, hogy első esetben a , második esetben b fixpont.

③ Ha $g(a) \cdot g(b) < 0$, akkor a Bolzano-tétel miatt van g -nek gyöke $(a; b)$ -ben, azaz

$$\exists x^* \in (a; b) : g(x^*) = x^* - \varphi(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x^*) = x^*$$



Tétel: Banach-féle fixponttétel $[a; b]$ -re

Ha a $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$ függvény kontrakció $[a; b]$ -n q kontrakciós együtthatóval, akkor

- 1 $\exists! x^* \in [a; b] : x^* = \varphi(x^*)$, azaz létezik fixpont,
- 2 $\forall x_0 \in [a; b]$ esetén az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ sorozat konvergens és $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$,
- 3 továbbá a következő hibabecslések teljesülnek:
 - $|x_k - x^*| \leq q^k \cdot |x_0 - x^*| \leq q^k(b - a)$,
 - $|x_k - x^*| \leq \frac{q^k}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0|$.

Biz.: Már volt, csak most \mathbb{R}^n helyett \mathbb{R} ($n = 1$), sőt $[a; b]$.



Következmény: iteráció konvergenciájának elégséges feltétele

- 1 Ha $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$,
- 2 $\varphi \in C^1[a; b]$ és
- 3 $|\varphi'(x)| < 1 \quad \forall x \in [a; b]$,

akkor az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ iteráció konvergens $\forall x_0 \in [a; b]$ esetén.

Megj.: Attól még lehet konvergens a sorozat, ha valahol $|\varphi'| \geq 1$.
(Nem szükséges feltétel.)

Tétel Lokális fixponttétel

Legyen $\varphi: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény.

- 1 Ha $\varphi \in C^1[a; b]$ és
- 2 $\exists \xi \in [a; b]$ és $\delta > 0$, melyre

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad \forall x \in [\xi - \delta; \xi + \delta] \subset [a; b].$$

- 3 Ha $\exists r: 0 < r \leq \delta$, melyre

$$|\varphi(\xi) - \xi| \leq (1 - q)r,$$

(azaz ξ a fixpont elég jó közelítése,)

akkor φ kontrakció $[\xi - r; \xi + r]$ -n és

$$\forall x \in [\xi - r; \xi + r]: \varphi(x) \in [\xi - r; \xi + r].$$

Biz.: A tétel feltételeiből következik, hogy φ kontrakció $[\xi - \delta; \xi + \delta]$ -n.

Gondoljuk meg, hogy a kontrakciós tulajdonság a $[\xi - r; \xi + r] \subset [\xi - \delta; \xi + \delta]$ részintervallumra is teljesül a q kontrakciós együtthatóval.

Tetszőleges $x \in [\xi - r; \xi + r]$ esetén

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \xi| &= |\varphi(x) - \varphi(\xi) + \varphi(\xi) - \xi| \leq \\ &\leq |\varphi(x) - \varphi(\xi)| + |\varphi(\xi) - \xi| \leq \\ &\leq q \cdot \underbrace{|x - \xi|}_{\leq r} + (1 - q) \cdot r = r \end{aligned}$$

Tehát φ az $x \in [\xi - r; \xi + r]$ intervallumba beleképez.



Következmény:

Ha a lokális fixponttétel feltételei teljesülnek, akkor valójában a Banach-féle fixponttétel feltételei teljesülnek az $[\xi - r; \xi + r]$ intervallumra, így

- ❶ $\exists! x^* \in [\xi - r; \xi + r] : x^* = \varphi(x^*)$, azaz létezik fixpont,
- ❷ $\forall x_0 \in [\xi - r; \xi + r]$ esetén az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ sorozat konvergens és $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$,
- ❸ továbbá a következő hibabecslések teljesülnek:
 - $|x_k - x^*| \leq q^k \cdot |x_0 - x^*| \leq q^k(b - a),$
 - $|x_k - x^*| \leq \frac{q^k}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0|.$

1. Példa

A zsebszámológépünkbe írunk be egy 0 és 1 közötti számot, majd nyomjuk meg az x^2 billentyűt. A sokadik gombnyomás után mit tapasztalunk?

Valójában az $x = x^2$ egyenlet fixpontját keressük az

$$x_{k+1} = x_k^2$$

iterációval. Két fixpontja van 0 és 1, de

- $0 \leq x_0 < 1$ esetén $\lim(x_k) = 0$.
- $x_0 = 1$ esetén $\lim(x_k) = 1$.

2. Példa

A zsebszámológépünkbe írunk be egy 0 és 1 közötti számot, majd nyomjuk meg a \sqrt{x} billentyűt. A sokadik gombnyomás után mit tapasztalunk?

Valójában az $x = \sqrt{x}$ egyenlet fixpontját keressük az

$$x_{k+1} = \sqrt{x_k}$$

iterációval. Két fixpontja van 0 és 1, de

- $x_0 = 0$ esetén $\lim(x_k) = 0$.
- $0 < x_0 \leq 1$ esetén $\lim(x_k) = 1$.

3. Példa

A zsebszámológépünkbe írjunk be egy 0 és 1 közötti számot, majd nyomjuk meg a $\cos(x)$ billentyűt. A sokadik gombnyomás után mit tapasztalunk?

Valójában az $x = \cos(x)$ fixpontegyenlet megoldását keressük a $[0, 1]$ intervallumon az

$$x_{k+1} := \cos(x_k), \quad x_0 \in [0, 1]$$

iterációval. Egyértelmű-e a megoldás? Konvergens ez a sorozat? Adjunk hibabecslést! Hány lépés után kapjuk a megoldást 0.1-es pontossággal?

- ① Belátjuk, hogy a $\varphi(x) := \cos(x)$ függvény a $[0; 1]$ intervallumot a $[0; 1]$ -be képezi:
- Mivel $\varphi'(x) = -\sin(x) < 0$, $\forall x \in [0; 1]$, ezért φ szigorúan monoton fogyó $[0; 1]$ -en.
 - $\varphi([0; 1]) = [\varphi(1); \varphi(0)] = [\cos(1), 1] \subset [0; 1]$, tehát $\varphi : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$.
- ② Belátjuk, hogy a $\varphi(x) = \cos(x)$ függvény kontrakció $[0; 1]$ -en. Tetszőleges $x, y \in [0; 1]$ -re a Lagrange-középértéktételt alkalmazva $\exists \xi \in (0; 1)$, melyre

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x - y| \leq q \cdot |x - y|,$$

ahol a kontrakciós együttható

$$q := \max_{\xi \in [0; 1]} |-\sin(\xi)| = \sin(1) \approx 0.8415 < 1.$$

- ③ A Banach-féle fixponttétel feltételei teljesülnek, így annak állításai felhasználhatóak, ezzel a fixpont létezését, egyértelműségét és a konvergenciát beláttuk.
- ④ Hibabecslése:

$$|x_k - x^*| \leq 0.8415^k \cdot \underbrace{|x_0 - x^*|}_{<1} \leq 0.8415^k.$$

- ⑤ A megadott pontosság eléréséhez szükséges lépésszám:

$$0.8415^k < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad k > \frac{-1}{\lg(0.8415)} \approx 13.34.$$

Nagyon lassú ...

- 1 Bolzano-tétel, intervallumfelezés
- 2 Fixponttételek, egyszerű iterációk
- 3 Konvergencia rend**
- 4 Matlab példák

Definíció: konvergenca rend

Az (x_k) konvergens sorozat – határértékét jelölje x^* – p -edrendben konvergens, ha $\exists c \in (0; +\infty) \subset \mathbb{R}$, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c.$$

Megjegyzés:

- p egyértelmű, $p \geq 1$,
- p nem feltétlenül egész (A szelőmódszernél $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.)
- $p = 1$: elsőrendű vagy lineáris konvergenca (ekkor $c \leq 1$)
 $p = 2$: másodrendű vagy kvadratikus konvergenca
- $p > 1$: szuperlineáris konvergenca

Megjegyzés folyt.:

- Gyakorlatban a legalább p -edrendű konvergenca megfogalmazása:

$$\exists K \in \mathbb{R}^+ : \forall k \in \mathbb{N}_0 : |x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^p$$

- A fixponttételek nem mondanak konvergenca rendet. (Csak annyit, hogy legalább elsőrendű.)
- Ha $c = 0$, akkor a keresett konvergenca rend nagyobb a megadottnál.
- Ha $c = \infty$, akkor a keresett konvergenca rend kisebb a megadottnál.

Példa

Mennyi a konvergenciarendje a következő nullsorozatoknak?

$$\left(\frac{1}{n^2}\right); \quad \left(\frac{1}{2^n}\right); \quad (q^n) \ (|q| < 1); \quad \left(\frac{1}{2^{2^n}}\right);$$

Vizsgáljuk az egyik sorozatot, a többit gyakorlalon..

Tekintsük az $(x_k) = \left(\frac{1}{2^k}\right)$, $(k \in \mathbb{N})$ sorozatot.

- ① Tippeljük $p = 2$ -re a konvergencia rendet:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left|\frac{1}{2^{k+1}} - 0\right|}{\left|\frac{1}{2^k} - 0\right|^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{2k}}{2^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{k-1} = \infty.$$

Látjuk, hogy a határérték ∞ , vagyis kisebb p -vel kell próbálkoznunk.

- ② Tippeljük $p = 1$ -re a konvergencia rendet.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left|\frac{1}{2^{k+1}} - 0\right|}{\left|\frac{1}{2^k} - 0\right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{2^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Látjuk, hogy a határérték rendben van, a konvergencia elsőrendű.

Mit jelent az első- és másodrendű konvergencia számokban? ($\sqrt{2}$)

① $p = 1, |x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^1$

1.414184570312500

1.414245605468750

1.414215087890625

Minden lépésben kb. egy újabb tizedesjegy pontos.

② $p = 2, |x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^2$

1.4166666666666667

1.414215686274510

1.414213562374690

Minden lépésben kb. kétszer annyi tizedesjegy pontos.

Tétel: p -edrendben konvergens iterációk

- 1 Legyen $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in C^p[a; b]$ és
- 2 az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sorozat konvergens, határértéke x^* .
- 3 Ha $\varphi'(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$, de $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$,
akkor a konvergencia p -edrendű és hibabecslése:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_p}{p!} |x_k - x^*|^p,$$

ahol $M_p = \max_{\xi \in [a; b]} |\varphi^{(p)}(\xi)|$.

Biz.: Írjuk fel a φ függvény x^* körüli Taylor-polinomját a maradéktaggal.

$\exists \xi \in (x, x^*)$ (vagy (x^*, x)) :

$$\begin{aligned}\varphi(x) = & \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x - x^*) + \cdots + \frac{\varphi^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}(x - x^*)^{p-1} + \\ & + \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x - x^*)^p\end{aligned}$$

Vizsgáljuk ezt az $x = x_k$ helyen, kihasználva a deriváltak zérus voltát is. ($\exists \xi_k$):

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \underbrace{\varphi(x^*)}_{x^*} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k - x^*)^p$$

Biz. folyt.: átrendezve

$$x_{k+1} - x^* = \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!} (x_k - x^*)^p.$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varphi^{(p)}(\xi_k)|}{p!} = \frac{|\varphi^{(p)}(x^*)|}{p!} \neq 0.$$

Tehát (x_k) egy p -adrendben konvergens sorozat.

Vegyük szemügyre a $k + 1$ -edik és a k -adik tag hibáját.

$$|x_{k+1} - x^*| = \frac{|\varphi^{(p)}(\xi_k)|}{p!} \cdot |x_k - x^*|^p \leq \frac{M_p}{p!} |x_k - x^*|^p,$$

ahol $M_p = \max_{\xi \in [a, b]} |\varphi^{(p)}(\xi)|.$



Következmény

- 1 Ha $\varphi: [a; b] \rightarrow [a; b]$ kontrakció,
- 2 x^* a φ fixpontja és
- 3 $\varphi'(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$, de $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$,

akkor

- 1 a fixpont egyértelmű,
- 2 $\forall x_0 \in [a; b]$ esetén az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ sorozat konvergens és $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$,
- 3 és a következő hibabecslés teljesül:
$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_p}{p!} |x_k - x^*|^p.$$

Biz.: Ez a Banach-féle fixponttétel és a p -edrendben konvergens iterációk tételének összeházasításaként adódik. □

Példa

Írjunk fel fixpont-iteráció(ka)t az $x^3 - x - 1 = 0$ egyenlet megoldására, bizonyítsuk a konvergenciát.

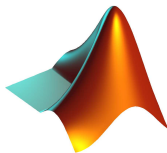
a $x = x^3 - 1,$

b $x = \sqrt[3]{x + 1}.$

Lásd gyakorlat...

A két sorozat közül az egyik konvergens, a másik divergens.
Melyik-melyik? Milyen intervallumon konvergens? Indokoljuk.

- ① Bolzano-tétel, intervallumfelezés
- ② Fixponttételek, egyszerű iterációk
- ③ Konvergencia rend
- ④ Matlab példák

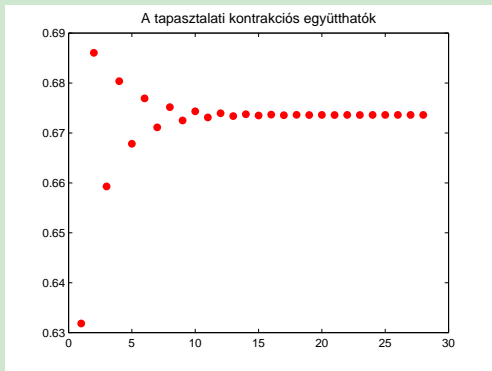


- 1 Intervallumfelezés számolása és szemléltetése.
- 2 Egyszerű iterációk és fixpontok elemzése az $x = \cos(x)$ egyenlet példáján keresztül.
- 3 Tapasztalati kontrakciós együtthatók szemléltetése.
- 4 $\sqrt{2}$ közelítése különböző iterációkkal ($p = 1, 2, 3$ rendűek).
- 5 A logisztikus leképezés viselkedésének bemutatása érdekességképpen.

Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

1. Példa:

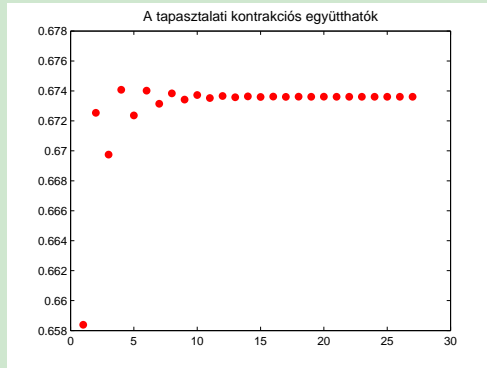
$$x_{k+1} := \cos(x_k), \quad x_0 \in [0, 1]$$



$$q \approx 0.6736$$

Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

1. Példa:



Az egymást követő tapasztalati kontrakciós együtthatók mértani közepét rajzoltuk ki. $q \approx 0.6736$

2. Példa:

Matlab segítségével vizsgáljuk a következő sorozatokat:

- ① A $\sqrt{2}$ lánc törtkifejtéséből: ($p = 1$)

$$x_{k+1} = 1 + \frac{1}{1 + x_k}.$$

- ② Az $f(x) = x^2 - 2$ függvényre alkalmaztuk a Newton-módszert, analízisből ismerős lehet... ($p = 2$)

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{2}{x_k} \right).$$

- ③ Másodfokú Taylor-polinom közelítéssel: ($p = 3$)

$$x_{k+1} = x_k \cdot \frac{x_k^2 + 6}{3x_k^2 + 2}.$$

Logisztikus leképezés

Az ökológusok gyakran vizsgálnak olyan - időszakosan szaporodó - populációkat (pl. gyümölcsöskerti kártevők), amelyekben nincs átfedés az egyes generációk között. A kutatások célja ilyenkor annak megértése, hogy az $n + 1$ -edik generáció számossága (N_{n+1}) hogyan függ az előző, n -edik generáció számosságától (N_n). Az ismert tendenciát figyelembe véve, nevezetesen, hogy az utódok száma (N_{n+1}) általában nő, ha a populáció számossága kicsi, és csökken, ha N_n értéke nagy, egy egyszerű nemlineáris differenciaegyenletet írhatunk fel:

$$N_{n+1} = kN_n - bN_n^2 = N_n(k - bN_n),$$

amelyet logisztikus differenciaegyenletnek neveznek, és amelyben k és b a populációk növekedésének, illetve csökkenésének mértékét megszabó paraméterek.

$$N_{n+1} = kN_n \left(1 - \frac{bN_n}{k}\right) \Leftrightarrow \frac{bN_{n+1}}{k} = k \frac{bN_n}{k} \left(1 - \frac{bN_n}{k}\right)$$

Az $x_n = bN_n/k$ jelölést bevezetve az egyenlet a következő egyszerű alakra hozható:

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n),$$

amit logisztikus leképezésnek nevezünk.

A logisztikus leképezés egyik nagy előnye az, hogy $1 < k < 4$ esetén a megoldás mindig a $0 < x < 1$ intervallumban marad. A $k < 1$ esetben az összes megoldás az $x = 0$ ponthoz tart, azaz a populáció kihal.

k értéke és a megfigyelt dinamikai viselkedés:

- 3.0000 : a fixpont instabilissá válik, megjelenik az oszcilláció
- 3.4500 : a perióduskettőződés kezdete
- 3.5700 : a $2n$ periódusú oszcillációk torlódási pontja, a kaotikus tartomány kezdete
- 3.6786 : az első páratlan periódusú oszcilláció megjelenése
- 3.8284 : a háromperiódusú oszcilláció megjelenése
- 4.0000 : a kaotikus tartomány vége.

Irodalom: Gáspár Vilmos: Játsszunk káoszt! (Természet Világa cikk)

Példa

Vizsgáljuk meg az $x_0 \in [0, 1]$, $x_{k+1} = \alpha \cdot x_k(1 - x_k)$ iterációk (logisztikus leképezés) viselkedését különböző $\alpha \in [0, 4]$ paraméterek esetén.

Megj.: Általában nem kontrakció. Könnyen eljuthatunk differenciaegyenletek bifurkációinak és a káoszelmélet alapjainak vizsgálatához. . .