Numerikus módszerek 1. **1. ZÁRTHELYI** **2024. november 7.**

Programtervező informatikus BSc szak

1. (13 pont) Az $M = M(7, -4, 5)$ gépi számok halmazában

a) számítsuk ki M_∞ és ε_0 értékét,

b) adjuk meg a 2-nek és 7.2-nek megfeleltetett gépi számot,

c) végezzük el a $2 + \mathrm{fl}(7.2)$ gépi összeadást.

d) Milyen hosszúnak kell választanunk a mantisszát az $M(t, -4, 5)$ számhalmazban, ha azt szeretnénk, hogy az $1/\pi$ szám ábrázolásából eredő hiba biztosan kisebb legyen, mint 10^{-3}?

Megoldás

a)

$$\varepsilon_0 = [1000000| - 4] = \frac{1}{2} \cdot 2^{-4} = 2^{-}5 = \frac{1}{32}$$

1 p

$$M_\infty = [1111111|5] = (1 - 2^{-7}) \cdot 2^5 = 2^5 - 2^{-2} = \frac{127}{4}$$

1 p

b)

$$2 = [1000000|2]$$

1 p

A 7.2 esetén váltsuk át külön az egészrészt és a törtrészt kettes számrendszerbe.

$$\begin{array}{c|c} 7 & \\ \hline 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & 2 \\ \hline 0 & 4 \\ 0 & 8 \\ 1 & 6 \\ 1 & 2 \\ \boxed{0} & 4 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Az első értékes jegytől számolva a $8.$ számjegy 0, ezért a kapott bináris számot lefelé kerekítjük:

$$7.2 = 111.0011\boxed{0}\cdots \approx 111.0011 = [1110011|3]$$

A kapott szám értéke:

$$[1110011|3] = \frac{1 + 2 + 16 + 32 + 64}{128} \cdot 2^3 = \frac{115}{16} = \frac{575}{80}$$

Ennek felső szomszédja:

$$[1110100|3] = \frac{4 + 16 + 32 + 64}{128} \cdot 2^3 = \frac{116}{16} = \frac{580}{80}$$

Mivel

$$7.2 = 7 + \frac{1}{5} = \frac{36}{5} = \frac{576}{80}$$

így láthatjuk, hogy megtaláltuk a két szomszédos gépi számot, ami közrefogja az ábrázolandót, és ezek közül a 7.2 a kisebbikhez van közelebb, azaz:

$$fl(7.2) = [1110011|3]$$

4 p

c)

Hozzuk a két számot a közös, nagyobb karakterisztikára:

$$2 = [1000000|2] = [0100000|3]$$

Ezután elvégezhetjük az összeadást:

$$\begin{array}{rl} [0100000|3] & \\ \oplus[1110011|3] & \\ \hline [10010011|4] & \approx [1001010|4] \end{array}$$

3 p

d)

A kérdés megválaszolásához el kell döntenünk, hogy az $1/\pi$ szám milyen karakterisztikán ábrázolódik. Mivel

$$2 < \pi < 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 2^{-2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

Ezért az $1/\pi$ karakterisztikája -1. Ezen a karakterisztikán a számábrázolás hibakorlátja t hosszú mantissza mellett:

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{-1-t} = 2^{-(t+2)}$$

Könnyű észrevenni, hogy a kívánt pontosság eléréséhez $t = 8$ már elegendő, hiszen

$$2^{-(t+2)} < \frac{1}{1000} \quad \Longleftarrow \quad 2^{-(t+2)} \leq \frac{1}{1024} = 2^{-10} < \frac{1}{1000}$$

miatt

$$2^{-(t+2)} \leq 2^{-10} \iff -(t+2) \leq -10 \iff t+2 \geq 10 \iff t \geq 8$$

3 p

2. (9 pont) Határozzuk meg a következő mátrix inverzét és determinánsát Gauss-eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

3 p

Ekkor leolvasható a determináns, ez az utolsó (bal oldali) mátrix főátlóbeli elemeinek szorzata: $\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 4 \cdot 2 = 8$.

1 p

Folytassuk az eliminációt visszafelé.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/8 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/8 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

4 p

Ezért tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/8 & -1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

1 p

3. (10 pont) Adjuk meg a szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix

a) LU-felbontását,

b) LDL^T-felbontását és a

c) Cholesky-felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

Megoldás

a)

Dolgozzunk Gauss-eliminációval, „tömörített alakkal":

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 10 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

4 p

Innen az LU-felbontás mátrixai:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 0 & 1/2 & 1 & \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ & 4 & 2 & 0 \\ & & 1 & -3 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

2 p

b)

Mivel $\mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{L}\mathbf{D}(\mathbf{D}^{-1}\widetilde{\mathbf{U}}) = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{U}$:

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ & 4 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1/2 & 0 \\ & & 1 & -3 \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{L}^T$$

2 p

c)

Mivel $\mathbf{D}$ főátlóbeli elemei pozitívak, így értelmes az alábbi:

$$\sqrt{D} := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Ennek segítségével pedig az $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^T$ Cholesky-felbontás $\hat{\mathbf{L}}$ mátrixa a következő:

$$\hat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -2 & 2 & & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

2 p

4. (9 pont) Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását Gram–Schmidt-ortogonalizációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{QR} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ & r_{22} & r_{23} \\ & & r_{33} \end{bmatrix}$$

1 p

$$r_{11} = \|\mathbf{a}_1\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$$

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{r_{11}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1 p

$$r_{12} = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{q}_1 \rangle = \frac{1}{3} \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{a}_2 - r_{12}\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4}{9} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$r_{22} = \|\mathbf{s}_2\|_2 = \frac{4}{9} \cdot \sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2} = \frac{4}{9}\sqrt{18} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{s}_2}{r_{22}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4 p

$$r_{13} = \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{q}_1 \rangle = \frac{1}{3} \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

$$r_{23} = \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{q}_2 \rangle = \frac{1}{3\sqrt{2}} \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\mathbf{s}_3 = \mathbf{a}_3 - r_{13}\mathbf{q}_1 - r_{23}\mathbf{q}_2 = \mathbf{a}_3$$

$$r_{33} = \|\mathbf{s}_3\|_2 = \|\mathbf{a}_3\|_2 = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{s}_3}{r_{33}} = \frac{\mathbf{a}_3}{r_{33}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3 p

5. (9 pont) Tekintsük az

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

vektort.
a) Határozzuk meg azt a $\mathbf{v}$ vektort, amellyel a $\mathbf{H}(\mathbf{v})$ Householder-transzformáció az $\mathbf{u}$ vektort $k\mathbf{e}_1$ alakra hozza.
b) Adjunk meg olyan $\mathbf{x}$ vektort, amelyre $\mathbf{H}(\mathbf{v})\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.
c) Adjunk meg olyan $\mathbf{y}$ vektort, amelyre $\mathbf{H}(\mathbf{v})\mathbf{y} = \mathbf{y}$.
d) Ellenőrizzük ez utóbbi eredményt, számítsuk ki a $\mathbf{H}(\mathbf{v})\mathbf{y}$ vektort a Householder-mátrix meghatározása nélkül!

Megoldás

a)

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 + (-1)^2} = 4$$

Ezért legyen:

$$k := -\text{sign}(u_1)\|\mathbf{u}\|_2 = -4$$

$$\mathbf{a} - k\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{a} - k\mathbf{e}_1\|_2 = \sqrt{5^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Továbbá

$$v := \frac{\mathbf{a} - k\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - k\mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4 p

b)

A Householder-transzformáció mátrixának tulajdonságai miatt tudjuk, hogy minden $\mathbf{v}$-vel párhuzamos vektor ilyen. Legyen például $\mathbf{x} := \mathbf{v}$.

1 p

c)

Egy olyan vektorra van szükségünk, amely merőleges $\mathbf{v}$-re, azaz ameyre $\langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Legyen például

$$\mathbf{y} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2 p

d)

$$H(\mathbf{v})\mathbf{y} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{y} = \mathbf{y} - 2\mathbf{v}(\mathbf{v}^T\mathbf{y}) = \mathbf{y} - 2\mathbf{v}\langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle$$

1 p

Azonban

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{2\sqrt{10}} \left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

így valóban:

$$H(\mathbf{v})\mathbf{y} = \mathbf{y} - 2\mathbf{v} \cdot 0 = \mathbf{y}$$

1 p