1. gyakorlat

Definíció: Sajátérték, sajátvektor

A $\lambda \in \mathbb{C}$ számot az A mátrix *sajátértékének*, a $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ vektort az A *sajátvektorának* nevezzük, ha $Av = \lambda v$.

Definíció: Karakterisztikus polinom

Az A mátrix karakterisztikus polinomja $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Definíció: A sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása

Egy λ sajátérték *algebrai multiplicitása* a gyök $p(\lambda)$-beli multiplicitása. A továbbiakban $m_A(\lambda)$-val jelöljük.
Egy λ sajátérték *geometriai multiplicitása*

$$m_G(\lambda) := \dim W_\lambda = \dim(\{v \in \mathbb{C}^n : Av = \lambda v\}).$$

Definíció: Mátrixok hasonlósága

Az A és B *mátrixok hasonlóak*, ha $\exists T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertálható mátrix, melyre $B = T^{-1}AT$. A T mátrixot *transzformációs mátrixnak* nevezzük.

Definíció: Diagonalizálhatóság

Az A mátrix *diagonalizálható*, ha létezik olyan T invertálható mátrix, hogy $T^{-1}AT = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

1. feladat

a) Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

b) Diagonalizálható-e a mátrix? Mennyi a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitása? Mik a sajátalterek? (Szimmetrikus mátrix, ortogonális mátrixszal diagonalizálható, vannak azonos sajátértékei.)

c) Készítsük el MATLAB-ban is a sajátvektorokat, sajátértékeket. Hogyan tudjuk ellenőrizni, hogy a kétdimenziós sajátalterek azonosak (a számolt és a MATLAB által megadott)?

2. feladat

a) Határozzuk meg a síkon az origó körüli φ szöggel (óramutatóval ellentétesen) való elforgatás mátrixának sajátértékeit és sajátvektorait!

b) Diagonalizálható-e a mátrix? Mennyi a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitása? Mik a sajátalterek? (ortogonális mátrixszal, unitér mátrixszal diagonalizálható, komplex sajátértékei vannak.)

3. feladat

Nézzük meg az `eigshow` utasítást. Saját példát is megnézhetünk:

```
eigshow([2,-1; -1,2])
```

a) `A = [1,2; 0,3]` : megadtunk egy mátrixot

`poly(A)` : a mátrix karakterisztikus polinomját adja meg

`roots(poly(A))` : a sajátértékeket adja

`[V,D] = eig(A)` : D-ben a sajátértékek, V-ben a sajátvektorok; a sajátvektorok normalizálva vannak.

b) `A = [3,2,-2; -3,-1,3; 1,2,0];`

`eig(A)` : oszlopvektorba teszi a sajátértékeket

`[V,D] = eig(A)` : ha A diagonalizálható, akkor $A = V\,D\,V^{-1}$, ellenőrzés:

```
A - V*D*inv(V)
A - V*D/V
norm(A - V*D/V)
norm(A*V - V*D)
```

`[VN,DN] = eig(A,'nobalance')` : nincs kiegyensúlyozó lépés

`norm(A*V - V*D)`

`norm(A*VN - VN*DN)` : ekkor látszik a különbség

4. feladat

Határozzuk meg az 1. előadáson és 1. gyakorlaton megadott mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait Matlab segítségével. Miért kaptunk néhol más eredményt?

a) `A = [-2,0,0; -5,-2,-5; 5,0,3]`

b) `A = [4,0,0; 8,4,8; 0,0,4]`

c) `A = [0,-1; 1,0]`

1. megoldás

a)

Először képezzük az $A - \lambda I$ mátrixot:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

A karakterisztikus polinom:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\Big[(1-\lambda)^2 - 1\Big] + (\lambda - 2) + (\lambda - 2) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) + 2(\lambda - 2) \\
&= (1-\lambda)\,\lambda\,(\lambda - 2) + 2\,(\lambda - 2) \\
&= (\lambda - 2)\Big((1-\lambda)\,\lambda + 2\Big) \\
&= (\lambda - 2)\Big(-\lambda^2 + \lambda + 2\Big) \\
&= -\,(\lambda - 2)^2(\lambda + 1).
\end{aligned}$$

Innen adódik, hogy

$$p(\lambda) = 0 \quad \iff \quad (\lambda - 2)^2(\lambda + 1) = 0,$$

tehát

$$\lambda_{1,2} = 2 \quad \text{(kétszeres)}, \qquad \lambda_3 = -1.$$

Most a sajátértékekhez meghatározzuk a sajátvektorokat.

Megjegyzés

A sajátvektorok meghatározásához az

$$Av = \lambda v \text{ összefüggésből kiindulva az } (A - \lambda I)v = 0$$

LER-nek a lineárisan független megoldás vektorait kell megkeresnünk.

Sajátvektorok:

(i) $\lambda_{1,2} = 2$ esetén

$$(A - 2I)v = 0 \implies \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} v = 0 \implies v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) $\lambda_3 = -1$ esetén

$$(A + I)v = 0 \implies \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} v = 0 \implies v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát összefoglalva a sajátértékek és sajátvektorok:

$\lambda_{1,2} = 2 \quad \big(m_A = 2\big),$

sajátvektorok: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$

sajátaltér: $W_{\lambda_{1,2}} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad (m_G = dim(W_{\lambda_{1,2}}) = 2);$

$\lambda_3 = -1 \quad \big(m_A = 1\big),$

sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

sajátaltér: $W_{\lambda_3} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad (m_G = dim(W_{\lambda_3}) = 1);$

b)

Tétel: Mátrix diagonizálhatósága

A diagonizálható $\iff \forall\,\lambda$ sajátértékre $m_A(\lambda) = m_G(\lambda)$.

Tétel: Normális mátrixok diagonalizálása

A normális mátrix $(A^*A = AA^*) \Leftrightarrow \exists U$ unitér mátrix, melyre $U^*AU = D$ diagonális.

Az első tétel állítása alapján az A mátrix diagonizálható. Ezen kívül a mátrix szimmetrikus, azaz normális, így a második tétel szerint $\exists U \in \mathbb{R}^3$ unitér mátrix, amelyre U^*AU diagonális. Hozzunk létre egy sajátvektorokból álló ortonormált bázist a már kiszámolt sajátvektorokból!

Látható, hogy a v_1 és v_2 vektorok nem ortogonálisak, viszont mindkettő ortogonális v_3-ra (ez a szimmetriából adódik automatikusan). Így elég a v_1 és v_2-höz tartozó kétdimenziós sajátalteret ortogonalizálni. Alkalmazzunk Gram-Schmidt ortogonalizációt erre az altérre, és minden vektort normalizáljunk:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$u_1 = v_1, \qquad f_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$u_2 = v_2 - (f_1^T v_2)\, f_1 = v_2 - \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$f_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Miután létrehoztuk a SONB-t (sajátvektorokból álló ortonormált bázist), a sajátvektorokból álló mátrixot is meg tudjuk határozni:

$$U = [\, f_1 \ f_2 \ f_3 \,] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

Ekkor a transzformáció eredménye a diagonális alak lesz. (mivel U valós elemű ezért $U^* = U^T$)

$$U^T A U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés

Figyeljünk arra, hogy a U mátrixban a vektorok sorrendje meghatározza, hogy a diagonális alakban melyik λ_i sajátérték hol szerepel.
A tétel szemléletes megjegyzését segíti, hogy minden sajátvektorhoz be kell írni a diagonális alakba a sajátértéket, tehát nyilván egy kiválasztott sajátértékhez tartozó algebrai és geometriai multiplicitások ily módon egyenlőek.

c) `A = [1, -1, -1;  -1, 1, -1;  -1, -1, 1];`
`[V, D] = eig(A)` : D-ben a sajátértékek, V-ben a normalizált sajátvektorok.
`poly(A)` : a mátrix karakterisztikus polinomját adja meg.
`roots(poly(A))` : a sajátértékeket adja.
`eig(A)` : oszlopvektorba rendezi a sajátértékeket.
Ha A diagonalizálható, az ellenőrzéséhez futtassuk:

```
A - V*D*inv(V)
A - V*D/V
norm(A - V*D/V)
norm(A*V - V*D)
```

2. megoldás

a) A transzformációs mátrix:

$$T(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \qquad T(\varphi)^{-1} = T(-\varphi) = T(\varphi)^T.$$

A karakterisztikus polinom kiszámolható a következőképpen:

$$p(\lambda) = \det\Big(T(\varphi) - \lambda I\Big) = (\cos\varphi - \lambda)^2 + (\sin\varphi)^2 = 0$$

Világos, hogy a karakterisztikus polinomnak két komplex gyöke van.

$$\begin{aligned} (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi &= 0 \\ (\lambda - \cos\varphi)^2 &= -\sin^2\varphi \\ \lambda - \cos\varphi &= \pm i\sin\varphi \\ \implies \quad \lambda &= \cos\varphi \pm i\sin\varphi. \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \lambda_2 = \cos\varphi - i\sin\varphi,$$

mindkettő egyszeres algebrai és geometriai multiplicitással.

Így a megoldandó LER-ek a következők:

$$(T(\varphi) - (\cos\varphi + i\sin\varphi)I)v = \begin{bmatrix} -i\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & -i\sin\varphi \end{bmatrix} v = 0$$

$$(T(\varphi) - (\cos\varphi - i\sin\varphi)I)v = \begin{bmatrix} i\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & i\sin\varphi \end{bmatrix} v = 0$$

Ezek egy tetszőleges megoldása:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

(vagy ekvivalensen $v_2 = \begin{bmatrix} i, & -1 \end{bmatrix}^*$).

b) A mátrix diagonalizálhatósága:

Az algebrai multiplicitások megegyeznek a sajátalterek dimenzióival (geometriai multiplicitásokkal), hiszen mindkét sajátértékhez pontosan egy független sajátvektor tartozik.

$$m_A(\lambda_1) = m_G(\lambda_1) = 1, \quad m_A(\lambda_2) = m_G(\lambda_2) = 1.$$

Komplex esetben unitér mátrixszal diagonizálunk.

Megjegyzés

Komplex esetben a skaláris szorzatban komplex konjugáltat használunk.
Szintén, egy A komplex elemű mátrix transzponálásánál az adjungáltat kell kiszámolni.

Az is észrevehető, hogy a két sajátvektor ortogonális:

$$v_1^* v_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Így egyszerűen, ortogonalizálás nélkül felírható a diagonalizáló mátrix. Legyen

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix},$$

ez ortonormált sajátvektorokat tartalmazó mátrix. Ekkor

$$U^* \, T(\varphi) \, U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} =: D,$$

ahol $\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$.

A sajátalterek:

$$W_{\lambda_1} = \mathrm{Span}\{v_1\}, \qquad W_{\lambda_2} = \mathrm{Span}\{v_2\},$$

itt $v_1 = (1, -i)^T$, $v_2 = (1, i)^T$.

3. megoldás

Gyakorlati példa.

4. megoldás

Házi feladat.