

Programtervező informatikus Bsc szak

A szakirány

Név \_\_\_\_\_

Neptun kód \_\_\_\_\_

Csoport száma / gyak. vez. neve \_\_\_\_\_

Pontszám \_\_\_\_\_

**Számolási feladatok:**A számolási feladatok során az **A** mátrix minden esetben a következő:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

1. (8 pont) Írja fel az **A** mátrix Gersgorin köreit és adjon becslést az általánosított Gersgorin-tétellel a szimmetrikus mátrix (valós) sajátértékeire. Adjon meg olyan paraméteres hasonlósági transzformációt, melynek segítségével a Gersgorin-tétel alkalmazásával igazolni tudja az **A** mátrix negatív definitségét.  
Végezze el konkrét paraméterrel a transzformációt a mátrixon és adjon becslést az általánosított Gersgorin-tétellel a sajátértékekre.
2. (6 pont) A Fagyejev-féle "trace" módszer segítségével írja fel az **A** mátrix karakteristikus polinomját!
3. (6 pont) Alkalmazza  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_1$ -ból indulva a hatványmódszer 3 lépését a megadott **A** szimmetrikus mátrix egy sajátértékének és sajátvektorának közelítésére! (Nem kell sejtést adni a sajátértékre, sajátvektorra.)
4. (10 pont) Végezze el az  $(i, j) = (1, 3)$  pozíónak megfelelő Jacobi-forgatást (hasonlósági transzformációt) az **A** mátrixon! Adja meg a forgatási mátrixot és a forgatás utáni eredményt is.

Segítségül képletek:  $p := \cot 2\varphi$ 

$$\cos 2\varphi = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad c := \cos \varphi = \sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}}, \quad s := \sin \varphi = \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}$$

## Programozási feladat:

5. (20 pont) Írjon programot `qrmax.m` néven, mely szimmetrikus mátrixra alkalmazza a QR-algoritmust, majd a Gersgorin-tételt alkalmazza a sajátértékek becslésére.

- **Bemenő paraméterek:**

- $A$ : a vizsgált mátrix,
- $N$ : a végrehajtandó lépések száma.

- **Kimenő paraméterek:**

- `rho`: a lépésenkénti spektrálsugár közelítéseket tartalmazó vektor,
- `err`: a lépésenkénti hiba a Gergorin-tétellel számolva.

- Jelezzen hibát, ha a mátrix nem négyzetes.
- Ha  $\|A - A^T\|_2 < 10^{-6}$ , akkor tekintse szimmetrikusnak a mátrixot. Jelezzen hibát, ha ez a feltétel nem teljesül.
- A kimeneti változókat nullázza le.
- Hajtsa végre a QR-algoritmus  $N$  lépését az  $A$  szimmetrikus mátrixon. minden lépésben
  - számítsa ki a mátrix legnagyobb abszolút értékű (domináns) diagonális elemét (Gersgorin-tételbeli középpont) és tárolja `rho(i)`-ben,
  - számítsa ki a hozzá tartozó sugarat a Gergorin-tétellel és tárolja `err(i)`-ben.
- Készítsen ábrát az előállított vektorokból
  - a `rho(i)` értékeit jelenítse meg kék .-tal jelölve a lépésekhez rendelve,
  - a `rho(i)-err(i)` és `rho(i)+err(i)` értékeit jelenítse meg piros .-tal jelölve a lépésekhez rendelve.
  - A rajz címe legyen: *Gergorin-tétel alkalmazása a QR algoritmusra*.
  - Ne felejtse el a rajzolás végén kiadni a `hold off` utasítást.
- Készítsen külön fájlban (`test.m`) szimmetrikus  $5 \times 5$ -ös mátrixot teszt példának.
  - A példában a véletlen számok segítségével előállított szimmetrikus mátrix sajátértékei  $-3, 0, 1, 5, 2$  legyenek.
  - Próbálja ki a mátrixra a programot  $N = 15$  esetén. Írja a hívást a teszt fájlba.

Beküldendő a `qrmax.m` és a `test.m` fájl.