A RENDEZÉSI FELADAT

Bemenet: $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ sorozat

Kimenet: a bemenet $\langle a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_n} \rangle$ perm.:

$$a_{p_1} \le a_{p_2} \le \dots \le a_{p_n}$$

Beszúró rend. (Insertion sort)

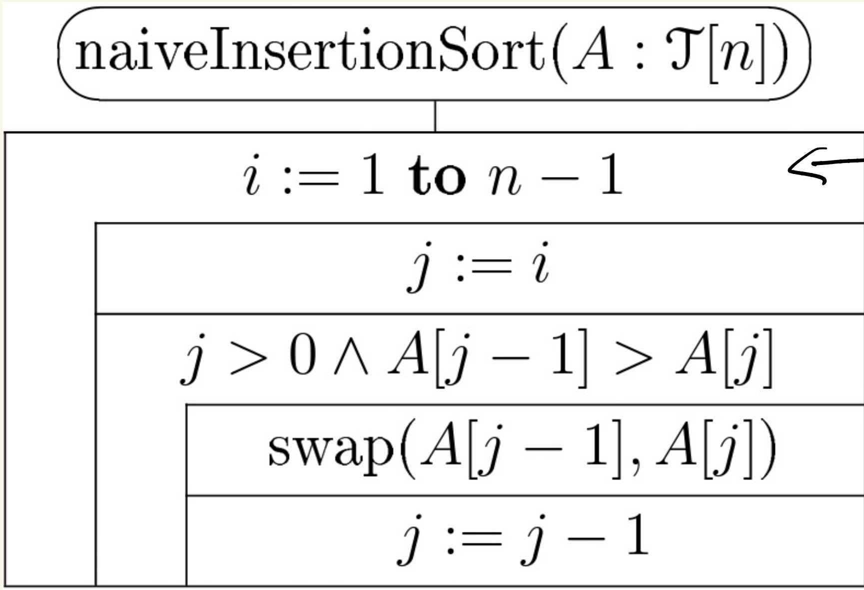
rtt rtlen

$\langle 5 \mid 3, 8, 1, 9, 1' \rangle \rightarrow \langle 3, 5 \mid 8, 1, 9, 1' \rangle \rightarrow$

$\langle 3, 5, 8 \mid 1, 9, 1' \rangle \rightarrow \langle 1, 3, 5, 8 \mid 9, 1' \rangle \rightarrow$

$\langle 1, 3, 5, 8, 9 \mid 1' \rangle \rightarrow \langle 1, 1', 3, 5, 8, 9 \rangle$

stabil



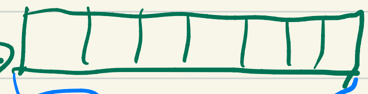
$A[0..n) = A[0..(n-1)]$

Inv.: $A[0..i)$ r.ett $\wedge$
$A[0..n)$ $\underline{\text{perm}}$ $A_0[0..n)$ $\wedge$
$1 \leq i \leq n$

$\boxed{\text{swap}(\&x, \&y : T)}$

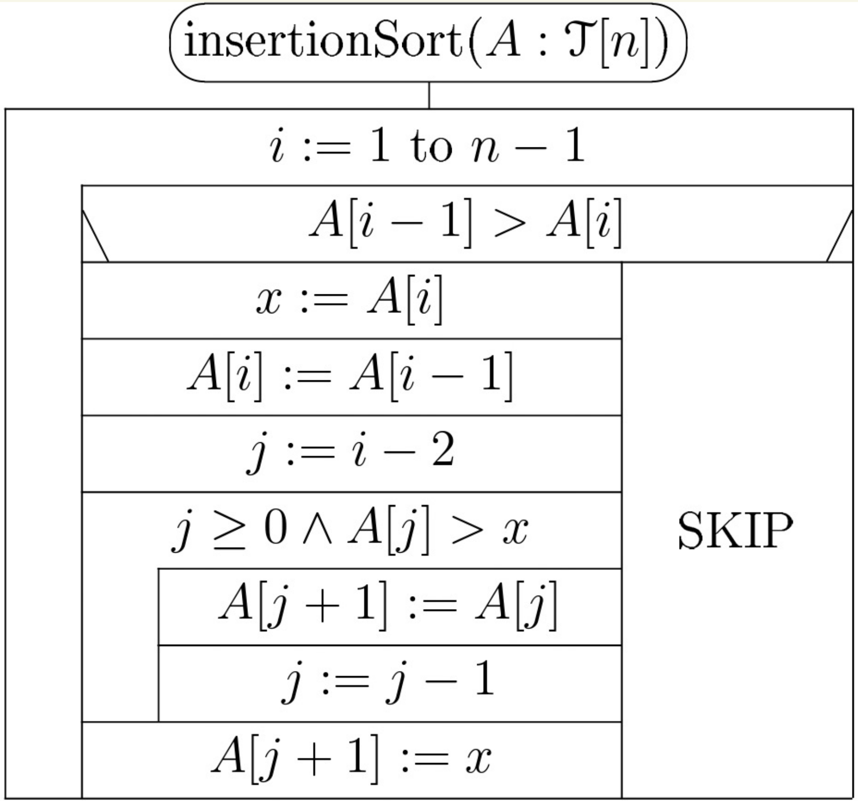
$z := x$
$x := y$
$y := z$

A $\left\{ \begin{array}{l} \text{A.length} \\ \text{A.pointer} \end{array} \right.$



tömbtároló

tömb hivatkozás



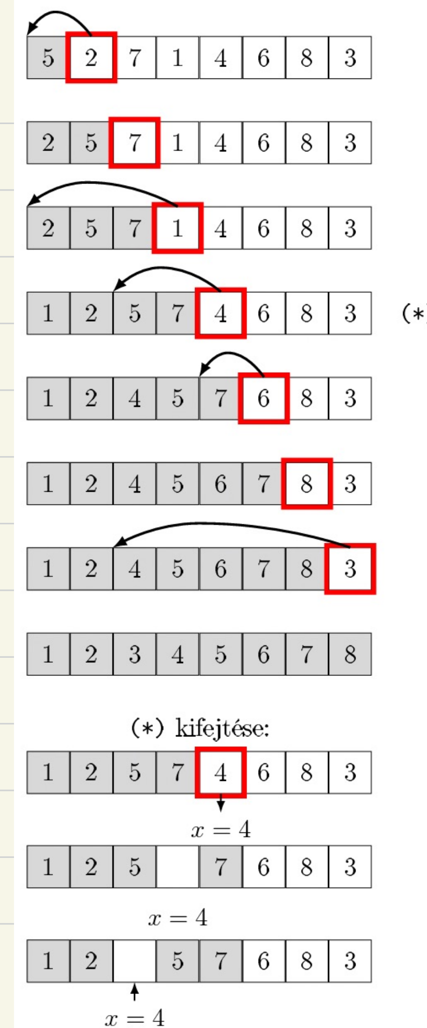
$$mT(n) = 1 + (n-1) = n \in \Theta(n)$$

$$S(n) \in \Theta(1)$$

Helybenrendező

$$MT(n) = 1 + (n-1) + \sum_{i=1}^{n-1}(i-1) = 1 + (n-1) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-2} i}$$

$$1 + \frac{n(n-1)}{2}$$



$$MT(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1 \in \Theta(n^2)$$

$$mT(n) \in \Theta(n)$$

A gépi kódokra a következő mértékek adódnak:

(Részletek a nyomtatott jegyzetben.)

n	$mT_{IS}(n)$	in secs	$MT_{IS}(n)$	in time
1000	8000	$4*10^{-6}$	$6*10^6$	0.003 sec
10^6	$8*10^6$	0.004	$6*10^{12}$	50 min
10^7	$8*10^7$	0.04	$6*10^{14}$	$\approx$ 3.5 days
10^8	$8*10^8$	0.4	$6*10^{16}$	$\approx$ 347 days
10^9	$8*10^9$	4	$6*10^{18}$	$\approx$ 95 years

$$AT(n) = \underbrace{1+(n-1)}_{n} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-2} i = n + \frac{(n-1)(n-2)}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n + \frac{1}{2} \in \Theta(n^2)$$

$\lfloor \log n \rfloor + 1$ szint

egy szint: n it. (alsó 2 szinten kevesebb)

Ciklusiterációk száma:

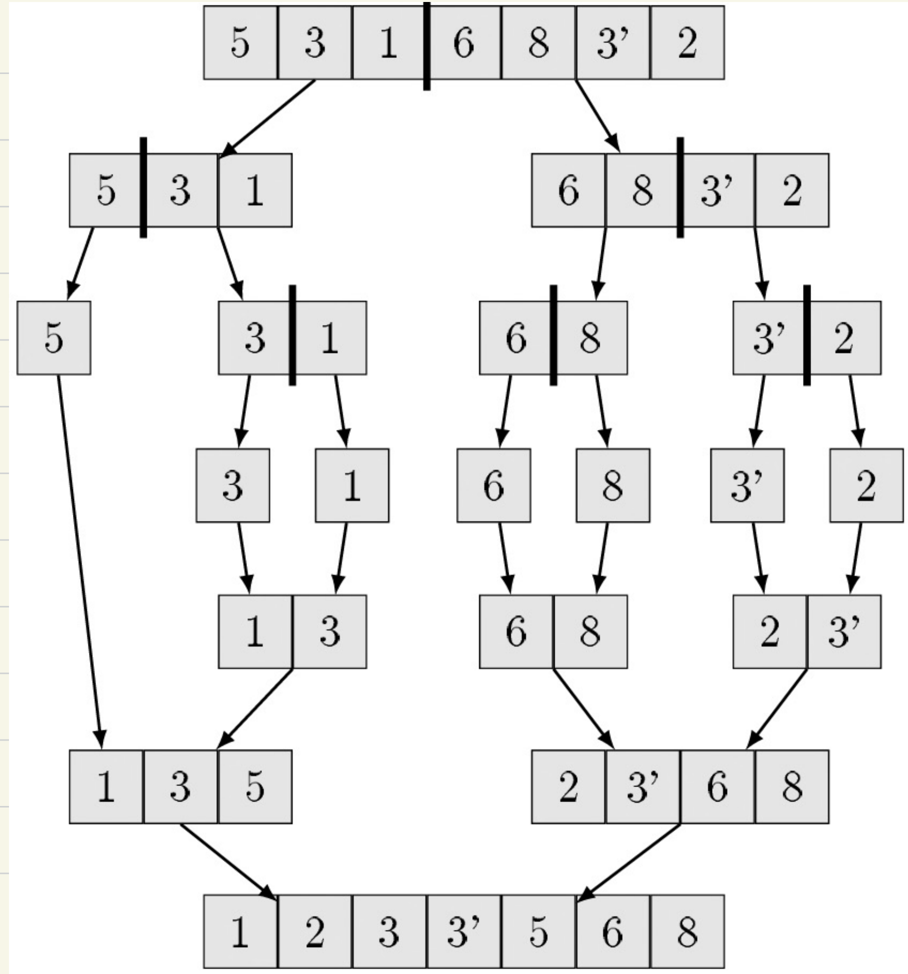
$\approx n \log n$

$$\text{Eljárás-hívás}: 1 + \underbrace{(2n-1)}_{ms()} + \underbrace{(n-1)}_{merge()}$$

$$\boxed{T_{MS}(n) \in \Theta(n \log n)}$$

$$T_{MS}(n) = MT_{MS}(n) = mT_{MS}(n)$$

MERGE SORT



mergeSort($A : \mathcal{T}[n]$)

$B : \mathcal{T}[n]$; $B[0\,..\,n) := A[0\,..\,n)$
// Sort $B[0\,..\,n)$ into $A[0\,..\,n)$ non-decreasingly:
ms(B, A)

ms($B, A : \mathcal{T}[n]$)

// Initially $B[0\,..\,n) = A[0\,..\,n)$.	
// Sort $B[0\,..\,n)$ into $A[0\,..\,n)$ non-decreasingly:	
$n > 1$	
$m := \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$	SKIP
ms($A[0\,..\,m), B[0\,..\,m)$) // Sort $A[0\,..\,m)$ into $B[0\,..\,m)$	
ms($A[m\,..\,n), B[m\,..\,n)$) // Sort $A[m\,..\,n)$ into $B[m\,..\,n)$	
merge($B[0\,..\,m), B[m\,..\,n), A[0\,..\,n)$) // sorted merge	

Az $m := \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ értékadással elfeleztük az aktuális (rész)tömböt: $A[0\,..\,m)$ és $A[m\,..\,n)$ hossza ugyanaz, ha n páros szám; továbbá $A[0\,..\,m)$ eggyel rövidebb, mint $A[m\,..\,n)$, ha n páratlan szám.

```
merge(A : T[l] ; B : T[m] ; C : T[n])
  // sorted merge of A and B into C where l + m = n
  k := 0 // in loop, copy into C[k]
  i := 0 ; j := 0 // from A[i] or B[j]
  while i < l ∧ j < m
      if A[i] ≤ B[j]
          C[k] := A[i]
          i := i + 1
      else
          C[k] := B[j]
          j := j + 1
      k := k + 1
  if i < l
      C[k..n) := A[i..l)
  else
      C[k..n) := B[j..m)
```

$S_{MS}(n) \in \Theta(n) + \Theta(\log n)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$

l it.

n it.

$(n-k)$ it.

$$\boxed{T_{MS}(n) \in \Theta(n \cdot \log n)}$$

$$\boxed{S_{MS}(n) \in \Theta(n) \text{ (tömbökre)}}$$

Nem helybenrendező.

GYORSRENDEZÉS (Quicksort) (QS)

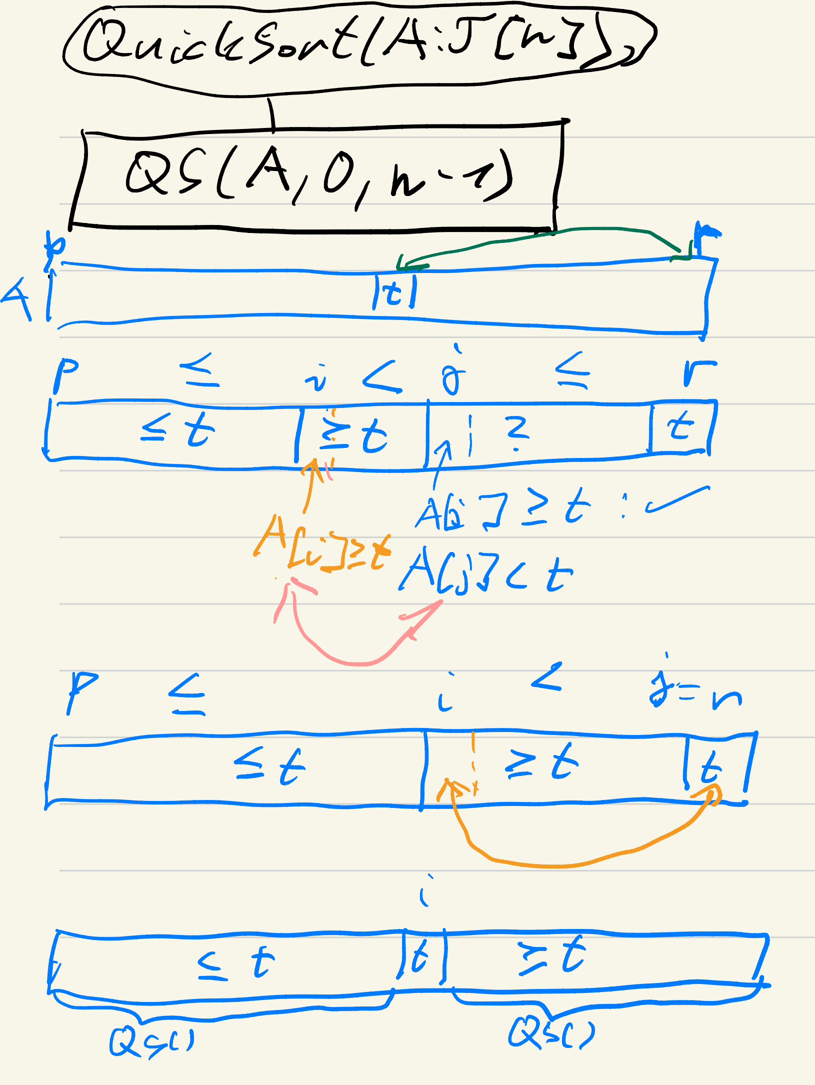
pivot (tengely)

$\langle 5', 2, 7, 4, \boxed{5''}, 8, 3, 5, 1 \rangle$ particionálás

$\underbrace{\langle 5', 2, 4, 3, 1 \rangle}_{QS}$ $\underbrace{\langle 7, 8, 5 \rangle}_{QS}$

Láncolt listákra így stabil.

Tömbökre nem ismerünk hatékony, stabil megvalósítást.



$QS(A : \mathcal{T}[]\ ;\ p, r : \mathbb{N})$

$A[p..r]$ rendezése

$p < r$	
$q :=$ partition(A, p, r)	SKIP
$QS(A, p, q-1)$	
$QS(A, q+1, r)$	

partition$(A : \mathcal{T}[]\ ;\ p, r : \mathbb{N}) : \mathbb{N}$

$i :=$ random(p, r) // Select the pivot

swap$(A[i], A[r])$ // $A[r]$ is the pivot

$i := p$

$i < r \wedge A[i] \leq A[r]$

- $i := i + 1$

$i < r$	
$j := i + 1$	// $i = r$ // $A[p..r) \leq A[r]$
$j < r$	
$A[j] < A[r]$: swap$(A[i], A[j])$; $i := i + 1$ / SKIP	
$j := j + 1$	
swap$(A[i], A[r])$	

return i

particionadas:

$\downarrow$ pivot

$\langle 5'', 2, 7, 5', 5, 8, 3, 6, 1 \rangle$

$\langle 5'', 2, 7, 5', 1, 8, 3, 6, 5 \rangle$

$i \to i \to i \quad j \to j$

$\langle 5'', 2, 1, 5', 7, 8, 3, 6, 5 \rangle$

$i \quad j \to j$

$\langle 5'', 2, 1, 3, 7, 8, 5', 6, 5 \rangle$

$i \quad j \to j$

$\langle 5'', 2, 1, 3, 5, 8, 5', 6, 7 \rangle$

$\langle 5'', 2, 1, 3 \rangle \qquad \langle 8, 5', 6, 7 \rangle$

$\langle 3, 2, 1, 5'' \rangle \qquad \langle 8, 7, 6, 5' \rangle$

$i \to i \to i \to i \qquad i \quad j \to j \to j$

$\langle 3, 2, 1 \rangle \qquad \langle \rangle \qquad \langle 5, 7, 6, 8 \rangle$

$\langle 3, 1, 2 \rangle \qquad \langle \rangle \qquad \langle 7, 6, 8 \rangle$

$i \quad j$

$\langle 1, 3, 2 \rangle \qquad \langle 7, 6, 8 \rangle$

$i \quad j \qquad i \; (i) \; i \to i$

$MS_{QS}(n) \in \Theta(n)$

$MT_{part}(n) = n-1$

$MT_{QS}(n) \geq (n-1)+(n-2)+\dots+1 = \frac{n(n-1)}{2} \in \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

$MT_{QS}(n) \in \Omega(n^2)$

$\langle 1, 2, 3 \rangle$ $\qquad$ $\langle 7, 6 \rangle$ $\qquad$ $\langle \rangle$

$\langle 7, 6 \rangle$

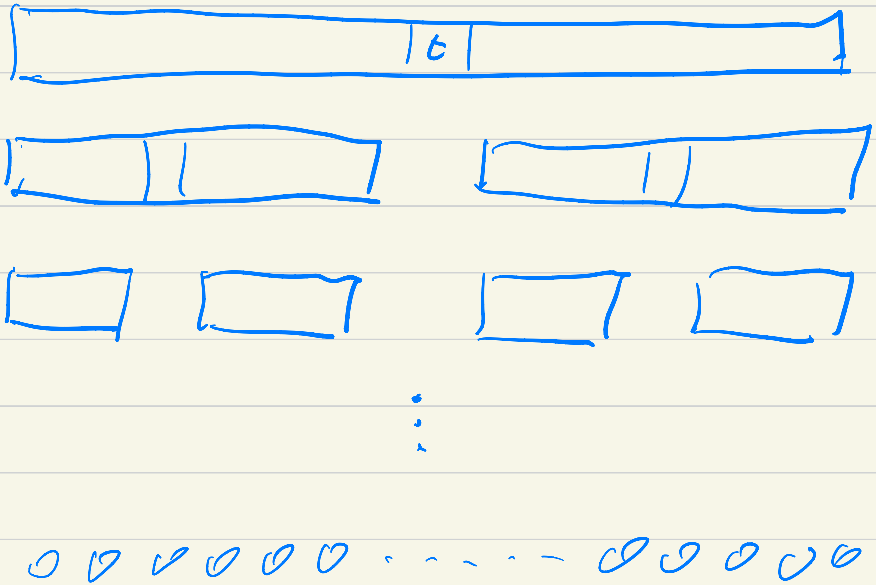
$\langle 1 \rangle$ $\qquad$ $\langle 3 \rangle$ $\qquad$ i $\quad$ j

$\langle 6, 7 \rangle$

$\langle 6 \rangle$ $\qquad$ $\langle \rangle$

$\langle 1, 2, 3, 5'', 5, 5', 6, 7, 8 \rangle$ NEM stabil a QS.

Legjobb: „tengely középre" $\quad mS(n) \in \Theta(\log n)$



$\le n-1$

$\le n-1$

$\le n-1$

$\le \log n$ szint

$O(n \log n)$

$$mT_{QS}(n) \in \Theta(n \log n)$$

Biz-ható: $\left.\begin{array}{l} mT_{QS}(n) \\ AT_{QS}(n) \end{array}\right\} \in \Theta(n \log n)$

$MT_{QS}(n) \in \Theta(n^2)$

$AS_{QS}(n) \in \Theta(\log n)$

Mixed QuickSort (MQS)

(C++ STL: $k = 55$)

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">Quicksort$(A : \mathcal{T}[n])$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Quicksort$(A, 0, n-1, \lfloor 2\log n \rfloor)$ // Sort $A[0..(n-1)]$.</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Quicksort$(A : \mathcal{T}[]\ ;\ p, r, d : \mathbb{N})$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">$r - p < k$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">insertionSort$(A[p..r])$</td><td colspan="2" align="center">$d > 0$</td></tr>
<tr><td>$d--$</td><td rowspan="4">heapSort$(A[p..r])$</td></tr>
<tr><td>$q :=$ partition(A, p, r)</td></tr>
<tr><td>Quicksort$(A, p, q-1, d)$</td></tr>
<tr><td>Quicksort$(A, q+1, r, d)$</td></tr>
</table>

$\cdot\ mT_{MQS}(n), MT_{MQS}(n) \in \Theta(n \cdot \log n)$

Aszimptotika

$\mathbb{P} \stackrel{def}{=} \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$

$f, g, h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $\overbrace{\underbrace{\text{aszimptotikusan pozitívak}}}^{AP}$,

$$\boxed{\varphi, \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}}$$

$\underbrace{\text{elég nagy } n\text{-ekre}}_{EN(n)}$, $f(n) > 0$
$g(n) > 0$
$h(n) > 0$

D, $EN(n) : \mathcal{P}(n) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \longrightarrow \mathcal{P}(n)$

D, $O(g) = \{ f \mid \exists d > 0 ; EN(n) : f(n) \leq d\, g(n) \}$

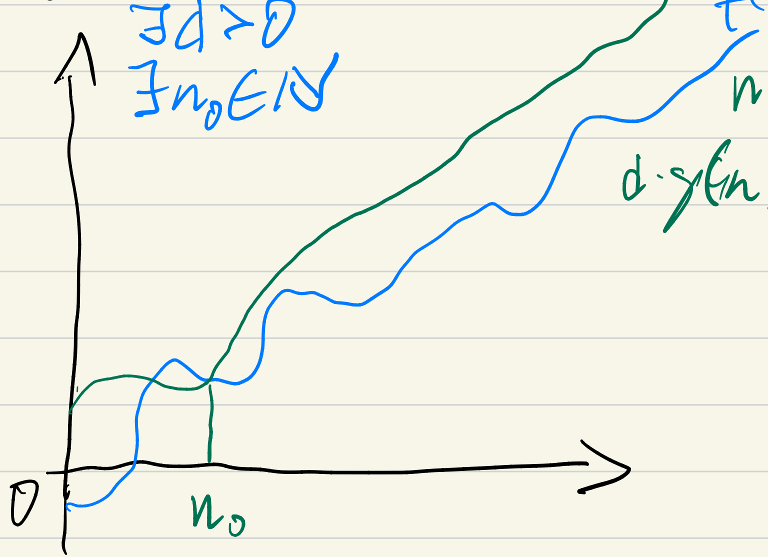
D, $\Omega(g) = \{ f \mid \exists c > 0 : EN(n) : c \cdot g(n) \leq f(n) \}$

D, $\Theta(g) = O(g) \cap \Omega(g)$

Köv., $\Theta(g) = \{ f \mid \exists c, d > 0 : EN(n) : c \cdot g(n) \leq f(n) \leq d \cdot g(n) \}$

$f \in O(g)$

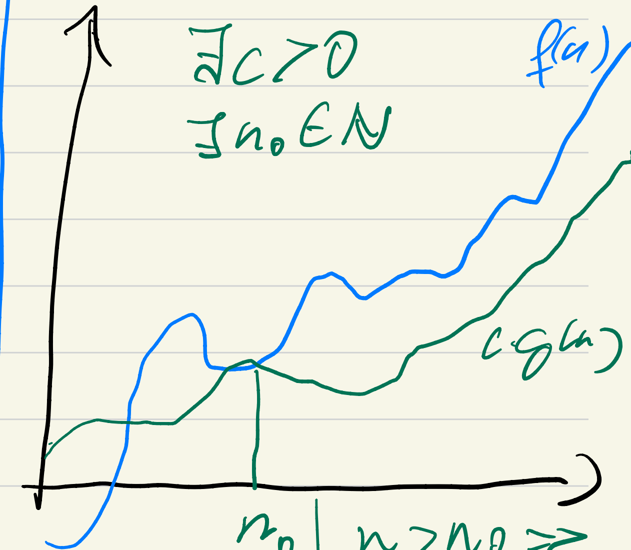
$\exists d > 0$
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$



$n \geq n_0 \Downarrow d \cdot g(n) \geq f(n)$

$f \in \Omega(g)$

$\exists c > 0$
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$



$n \geq n_0 \Rightarrow$
$c \cdot g(n) \leq f(n)$

$$\Theta(g) = O(g) \cap \Omega(g)$$

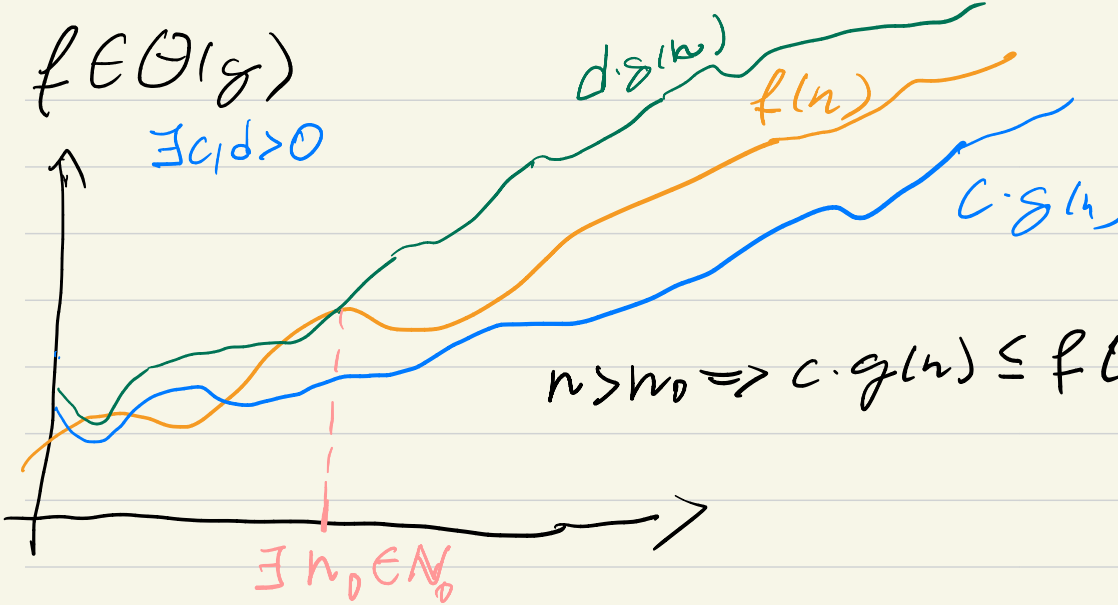
Köv., $f \in \Theta(g) \Longleftrightarrow \exists c, d > 0 : EN(n) : c \cdot g(n) \leq f(n) \leq d \cdot g(n)$

$\Updownarrow$ köv.

$g \in \Theta(f) \Longleftrightarrow \exists \frac{1}{d}, \frac{1}{c} > 0 : EN(n) : \frac{1}{d} f(n) \leq g(n) \leq \frac{1}{c} \cdot f(n)$

$f \in \Theta(g)$

$\exists c, d > 0$



$n > n_0 \Rightarrow c \cdot g(n) \le f(n) \le d \cdot g(n)$

I $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow g \in \Theta(f) \Leftrightarrow \Theta(f) = \Theta(g)$

$f \in \Theta(1) \Leftrightarrow \exists c, d > 0 : \in N(n) : c \le f(n) \le d$

D. $\varphi \prec g \overset{def}{\iff} \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\varphi(n)}{g(n)} = 0$ (φ aszimptotikusan kisebb, mint g)

$g \succ \varphi \overset{def}{\iff} \varphi \prec g$

$o(g) \overset{def}{=} \{ f \mid f \prec g \}$

$\omega(g) = \{ f \mid f \succ g \}$

$f \in O(g)$: f aszimptotikusan felső korlátja g

$f \in \Omega(g)$: —— " —— alsó —— " ——

$f \in \Theta(g)$: f aszimptotikusan ekv. g-vel.

Tul. $f \in \Theta(g) \iff g \in \Theta(f)$ [szimmetria]

Tranzitivitás: $f \in \Theta(g) \wedge g \in \Theta(h) \Rightarrow f \in \Theta(h)$ $[O, \Omega, o, \omega]$

Reflexivitás $f \in \Theta(f)$ $[O, \Omega]$

Felcserélt szimmetria: $\begin{cases} f \in O(g) \Leftrightarrow g \in \Omega(g) \\ \varphi \prec g \Leftrightarrow g \succ \varphi \quad (f \in o(g) \Leftrightarrow g \in \omega(f)) \end{cases}$

„$\prec$" tranzitív: $\varphi \prec f \wedge f \prec g \Rightarrow \varphi \prec g$

„$\succ$" — „ —

„$\prec$" irreflexív: $\neg(f \prec f)$

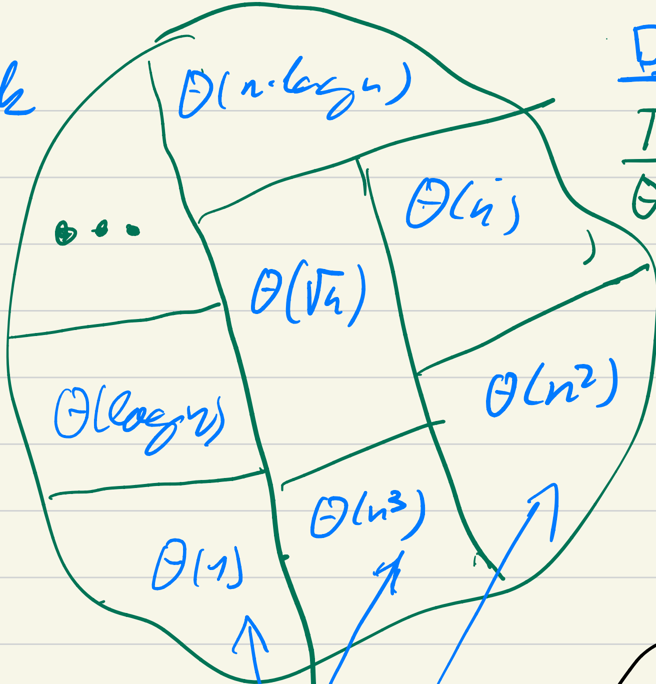
„$\succ$" — „ —

$\cdot \in \Theta(\cdot)$: szimmetrikus, tranzitív, reflexív bin. reláció

$\Rightarrow$ ekvivalencia rel. $\Rightarrow$ osztályozza az AP fv-eket.

Tul. $f_1, g_1 \in \Theta(h_1) \wedge f_2, g_2 \in \Theta(h_2), f_1 \prec f_2 \Rightarrow g_1 \overset{?}{\prec} g_2$

AP fv-ek



(diszjunkt) ekv. osztályok

Tul.:
$f \in \Theta(g)$
$\Updownarrow$
$\Theta(f) = \Theta(g)$

Ekv. osztályok sorbaállítása:

D: $\Theta(f) \prec \Theta(g) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f \prec g$

Tul.: $0 < \varepsilon < 1$

$\Theta(1) \prec \Theta(\log n) \prec \Theta(n^{\varepsilon}) \prec \Theta(n) \prec$
$\Theta(n \cdot \log n) \prec \Theta(n^{1+\varepsilon}) \prec \Theta(n^2) \prec$
$\prec \Theta(n^b) \prec \Theta(a^n) \prec \Theta(n!) \prec \Theta(n^n)$
$(b > 2)$ $(a > 1)$

Zártsági tulajdonságok:

$f \in \Theta(g),\ \varphi \prec f \Rightarrow f + \varphi \in \Theta(g)$

$f \in \Theta(g),\ c > 0 \Rightarrow c \cdot f \in \Theta(g)$

$f_1 \in \Theta(g_1),\ f_2 \in \Theta(g_2) \Rightarrow$
$f_1 + f_2,\ \max(f_1, f_2) \in \Theta(g_1 + g_2)$

$f_1 \in \Theta(g_1),\ f_2 \in \Theta(g_2) \Rightarrow$
$f_1 * f_2 \Rightarrow \Theta(g_1 * g_2)$

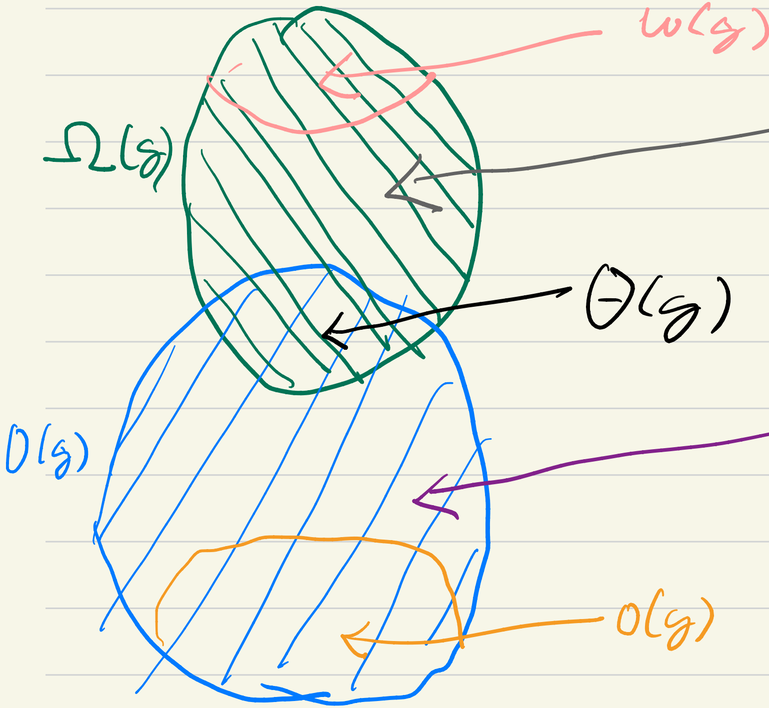
$O,\ \Omega$
$o,\ \omega$

I $\max(f,g) \in \Theta(f+g)$ $\quad$ $\left[\max(f,g)(n) \overset{\text{def}}{=} \max(f(n),g(n)) \right.$

$\left. (f+g)(n) \overset{\text{def}}{=} f(n)+g(n) \right]$

<u>Biz: HF</u>

g: AP fv. fv. osztályai:



$$f(n) = \begin{cases} g(n) & \text{ha } 2 \mid n \\ n \cdot g(n) & \text{ha } 2 \nmid n \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} g(n) & \text{ha } 2 \mid n \\ \frac{g(n)}{n} & \text{ha } 2 \nmid n \end{cases}$$

ALAPTÉTEL:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0 \iff f \prec g \\ c>0 \implies f \in \Theta(g) \\ \infty \iff f \succ g \end{cases}$$

Biz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \implies \exists N(n): \left| \frac{f(n)}{g(n)} - c \right| < \frac{c}{2} \implies$$

$$\implies \exists N(n): \frac{c}{2} < \frac{f(n)}{g(n)} < \frac{3}{2}c \implies \exists N(n): \frac{c}{2} \cdot g(n) < f(n) < \frac{3}{2} c \cdot g(n)$$

$$f(n) \in \Theta(g(n))$$

KÖV. $P(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 \wedge a_k > 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow P(n) \in \Theta(n^k) \Longrightarrow \Theta(P(n)) = \Theta(n^k)$$

Biz: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{n^k} = \underbrace{\lim \underbrace{\dfrac{a_k \cdot n^k}{n^k}}_{a_k}}_{a_k} + \underbrace{\lim \underbrace{\dfrac{a_{k-1} \cdot n^{k-1}}{n^k}}_{\frac{a_{k-1}}{n}}}_{0} + 0 + \dots + 0 =$

$$= a_k > 0 \Longrightarrow P(n) \in \Theta(n^k)$$

A, $*$ $\Big\}$ ALAPTÉTEL + L'Hospital szabály: ✓

8.27. Tétel. $f \in O(g) \iff \exists d \in \mathbb{P}$ *és* $\exists \psi \prec g$, *hogy elég nagy* n*-ekre*

$$d * g(n) + \psi(n) \geq f(n)$$

8.28. Tétel. $f \in \Omega(g) \iff \exists c \in \mathbb{P}$ *és* $\exists \varphi \prec g$, *hogy elég nagy* n*-ekre*

$$c * g(n) + \varphi(n) \leq f(n)$$

8.29. Tétel. $f \in \Theta(g) \iff \exists c, d \in \mathbb{P}$ *és* $\exists \varphi, \psi \prec g$, *hogy elég nagy* n*-ekre*

$$c * g(n) + \varphi(n) \leq f(n) \leq d * g(n) + \psi(n)$$

8.1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ értelmezési tartományú függvények

Vegyük észre, hogy a fenti függvényosztályokat eddig csak olyan függvényekre értelmeztük, amelyek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza. Ha értelmezési tartománynak az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-et tekintjük, az alapvető fogalmak a következők.

8.30. Definíció. *$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény AP, ha elég nagy n és elég nagy m értékekre $g(n, m) > 0$.*

8.31. Megjegyzés. *Az alfejezet hátralevő részében az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $f, g, h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ AP függvényeket jelölnek.*

8.32. Definíció. $O(g) = \{f \mid \exists d \in \mathbb{P}$*, hogy* $f(n, m) \leq d * g(n, m)$*, tetszőleges elég nagy n és elég nagy m értékekre*$\}$.

8.33. Definíció. $\Omega(g) = \{f \mid \exists c \in \mathbb{P}$*, hogy* $f(n, m) \geq c * g(n, m)$*, tetszőleges elég nagy n és elég nagy m értékekre*$\}$.

8.34. Definíció. $\Theta(g) = \{f \mid \exists c, d \in \mathbb{P}$*, hogy* $c * g(n, m) \leq f(n, m) \leq d * g(n, m)$*, tetszőleges elég nagy n és elég nagy m értékekre*$\}$.

8.35. Megjegyzés. *A korábban a természetes számokon értelmezett függvényekre vonatkozó tételek az itt tárgyaltakra természetes módon általánosíthatók.*