

Diszkrét matematika 1

Relációk

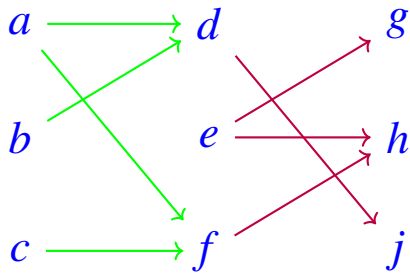
Mérai László

`merai@inf.elte.hu`

Komputeralgebra Tanszék

2025 tavasz

Relációk.



Relációk

Relációk: adat + köztük lévő kapcsolat

Példa

- Adott cég esetén legyenek A, B, \dots, M az alkalmazottak. A cég két projekten dolgozik: **BANK**, **JÁTÉK**

beosztás	alkalmazott
menedzser	A, B
fejlesztő	C, D, E, F, G
tesztelő	H, I,
HR	J
marketing	K, L
tech. dolgozó	M

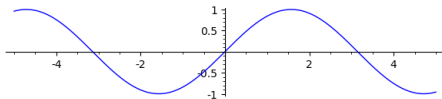
projekt	alkalmazott	határidő
BANK	A, C, D, F, G, H	2025.03.24.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, I	2025.03.31.

Relációk

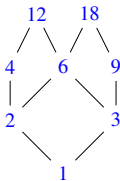
Relációk: adat + köztük lévő kapcsolat

Példa

- Függvények, „többértékű függvények”: $x \leftrightarrow \sin(x)$



- Egészek és $n \leftrightarrow m$, ha $n \mid m$



- Halmazok és $A \leftrightarrow B$, ha $A \subset B$
- ...

Descartes-szorzat

Relációk tárolása: rendezett páronként (ill. általában: rendezett n -esekként)

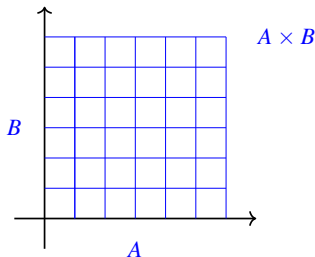
- IT cég: $\{(A, \text{'menedzser'}), (B, \text{'menedzser'}), (C, \text{'fejlesztő'}), \dots\}$
- sin: $\{(0, 0), (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}), (\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (\frac{\pi}{2}, 1), \dots\}$
- oszthatóság: $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 6), (3, 6), (3, 12), \dots\}$

Definíció

Adott A, B halmazok **Descartes-szorzata**: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Figyelem:

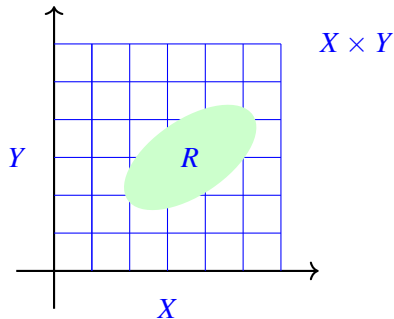
- ha $a \neq b$, akkor $(a, b) \neq (b, a)$
- ha $A \neq B$, akkor $A \times B \neq B \times A$
- $A^2 = A \times A, A^3 = A \times A \times A, \dots$



Binér reláció

Definíció

- Legyen X, Y két tetszőleges halmaz. Ekkor az $R \subset X \times Y$ egy (binér) **reláció** az X, Y halmaz között.
- Ha $X = Y$, akkor $R \subset X \times X$ egy (binér) **reláció** X -en.



Példa

- egyenlőség reláció: $\mathbb{I}_X = \{(x, x) : x \in X\}$
- részhalmaz reláció X -en: $\{(A, B) \in 2^X \times 2^X : A \subset B : A, B \in 2^X\}$
- altér reláció: $\{(U, V) : U, V \leq \mathbb{R}^5, U \text{ altér } V\text{-nek}\}$
- sajátvektor reláció $\{(\mathbf{v}, M) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2 \times 2} : \exists \lambda : M\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}\}$
- \sin függvény relációja: $\{(x, \sin x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$

Értelmezési tartomány, értékkészlet

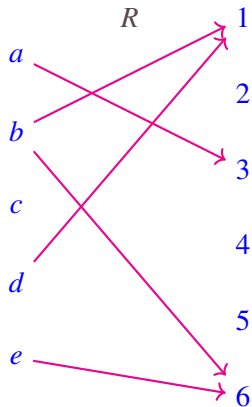
Definíció

Legyen $R \subset X \times Y$ egy reláció. Ekkor

- R **értelmezési tartománya** ('domain'):
 $\text{dmn}(R) = \{x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in R\}.$
- R **értékkészlete** ('range'):
 $\text{rng}(R) = \{y \in Y : \exists x \in X : (x, y) \in R\}.$

Példa

- Legyen $R \subset \{a, b, c, d, e\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$
 $\text{dmn}(R) = \{a, b, d, e\}, \text{rng}(R) = \{1, 3, 6\}.$
- $N = \{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$ $\text{dmn}(N) = \mathbb{R}_0^+, \text{rng}(N) = \mathbb{R}.$



Reláció inverze

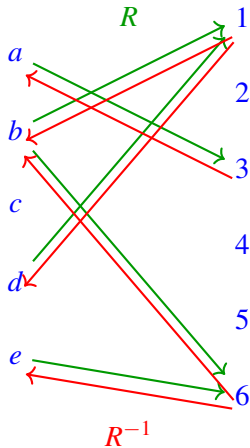
Definíció

Egy $R \subset X \times Y$ reláció **inverze** az

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}.$$

Példa

- $R = \{(a, 3), (b, 1), (b, 6), (d, 1), (e, 6)\}$ és
 $R^{-1} = \{(1, b), (1, d), (3, a), (6, b), (6, e)\}$
- Legyen $R = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ Ekkor
 $R^{-1} = \{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\} \neq \{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbb{R}_0^+\}$



Halmaz képe, teljes inverz képe

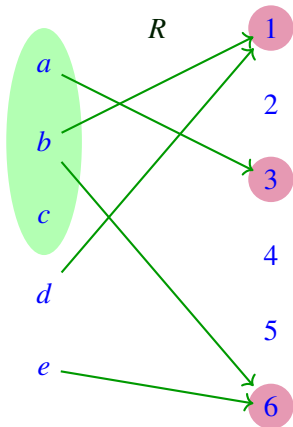
Definíció

Legyen R egy binér reláció.

- Az A **halmaz képe** az $R(A) = \{y : \exists x \in A : (x, y) \in R\}$.
- Adott B halmaz **inverz képe**, vagy **teljes ősképe** az $R^{-1}(B)$, a B halmaz képe az R^{-1} reláció esetén.

Példa

- $R = \{(a, 3), (b, 1), (b, 6), (d, 1), (e, 6)\}$. Ekkor $R(\{a, b, c\}) = \{1, 3, 6\}$
- Legyen $R = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.
Ekkor $R(\{2\}) = \{4\}$ (vagy $(R(2) = 4)$) és
 $R^{-1}(\{4\}) = \{-2, +2\}$ (vagy $R^{-1}(4) = \{-2, +2\}$).



Példa

Legyen

$$R = \{(a, 3), (b, 1), (b, 6), (c, 2), (c, 7), (d, 1), (d, 7), (e, 4), (e, 6)\}$$

Ekkor

- $\text{dmn}(R) = \{a, b, c, d, e\}$
- $\text{rng}(R) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$
- $R|_{\{a,e,f\}} = \{(a, 3), (e, 4), (e, 6)\}$
- $R(\{a, b, c\}) = \{1, 2, 3, 6, 7\}$
- $R^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{a, b, c, d\}$

