Riemann-integrál

Jelölések

Legyen $n \in \mathbb{N}^+,\ [a_i,\ b_i] \subset \mathbb{R}\ (i = 1, \ldots, n)$ és $I := [a_1,\ b_1] \times \cdots \times [a_n,\ b_n]$ intervallum.

Tegyük fel, hogy $\tau_i \subset [a_i,\ b_i]\ (i = 1, \ldots, n)$ felosztás és $\mathcal{F}(\tau) := \{J_1 \times \cdots \times J_n \mid J_1 \in \mathcal{F}(\tau_1), \ldots, J_n \in \mathcal{F}(\tau_n)\}$ osztásintervallumok halmaza.

τ felosztás finomsága: $|\tau| := \max\limits_{J \in \mathcal{F}(\tau)} \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in J\}$

Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos

$|J|$ mértéke $= |J_1 \times \cdots \times J_n| = |J_1| \cdot \ldots \cdot |J_n|$ (intervallumok hossza)

$$s(f, \tau) := \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} \inf\{f(\xi) \mid \xi \in J\} \cdot |J|$$

$$S(f, \tau) := \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} \sup\{f(\xi) \mid \xi \in J\} \cdot |J|$$

$I_*(f) := \sup\limits_{\tau} s(f, \tau),\ I^*(f) := \inf\limits_{\tau} S(f, \tau),\ I_*(f) \le I^*(f)$ (Darboux-féle közelítőösszegek)

Az f (Riemann) **integrálható**, ha $I_*(f) = I^*(f) =: \displaystyle\int_I f = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx_1 \ldots dx_n$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \tau \subset I,\ |\tau| < \delta : |S(f, \tau) - I^*(f)| < \varepsilon$ és $|s(f, \tau) - I_*(f)| < \varepsilon$

Oszcillációs összeg

Legyen $g : I \to \mathbb{R}$ korlátos, $\tau \subset I$ felosztás.

$\Omega(g, \tau) := S(g, \tau) - s(g, \tau)$

Ekkor $g \in R(I) \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \tau : \Omega(g, \tau) < \varepsilon$

$C(I) \subset R(I)$

Kiterjesztés nem intervallumon értelmezve

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ D_f$ korlátos $\implies \exists I \subset \mathbb{R}^n$ kompakt intervallum, hogy $D_f \subset I$

Legyen $f_I(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D_f \\ 0 & x \in I \setminus D_f \end{cases}$

Ha $\exists J \subset \mathbb{R}^n$ kompakt : $D_f \subset J$ akkor $f_I \in R(I) \iff f_J \in R(I) és f_I \in R(I) \implies \displaystyle\int_I f_I = \int_J f_J$

Ekkor legyen $\displaystyle\int_{D_f} f := \int_I f_I$

Alkalmazások

Tömeg

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^3\ (\mathbb{R}^2),\ \rho : A \to [0, +\infty)$ sűrűség. Ekkor

$|A| := \displaystyle\int_A \rho$ az A tömege (ha létezik)

Súlypont

$S = (x_s, y_s, z_s)$, ahol

$$x_s = \frac{1}{|A|} \int_A x \cdot \rho(x, y, z)\ dxdydz$$

$$y_s = \frac{1}{|A|} \int_A y \cdot \rho(x, y, z)\ dxdydz$$

$$z_s = \frac{1}{|A|} \int_A z \cdot \rho(x, y, z)\ dxdydz$$

Nyomaték

$a \in \mathbb{R}^3,\ 0 \neq e \in \mathbb{R}^3,\ l(t) := a + t \cdot e \quad (t \in \mathbb{R})$

$\xi \in \mathbb{R}^3 : r(\xi) := \inf\{||\xi - l(t)||_2 \mid t \in \mathbb{R}\}$. Ekkor

$$\theta_l := \int_A \rho \cdot r^2$$