

Diszkrét matematika I.

beugró tételsor

(2025. tavasz)

Nem végleges változat! (2025. május 5.)

A vizsga írásbeli részének az első fele egy beugró. Az alábbi kérdések közül **hat** kérdés fog szerepelni. A kérdések fontos alapfogalmakra kérdeznek rá elmélet + elmélet alkalmazásával. Az alkalmazásokra itt csak példák szerepelnek. Egy kérdésre 1+1 pont kapható (további részpontozás nincs). A sikeres vizsga feltétele, hogy a vizsgázó az elérhető 12 pontból legalább 9-et szerezzen.

Logika és halmazok

- Definiálja a *predikátum* fogalmát! Az alábbiak közül melyik predikátum: **a)** $P(x)$
b) $P(x) \wedge O(x)$. Mindkét részben adott x egész esetén $P(x)$ és $O(x)$ jelentése, hogy x prím, ill. x páratlan.
- Írja fel az *és* és a *vagy* igazságtábláját! Mi lesz az $I \wedge (H \vee I)$ igazságértéke?
- Írja fel a *tagadás* és az *implikáció* igazságtábláját! Mi lesz az $A \Rightarrow B$ tagadása?
- Mik az *egzisztenciális* és *univerzális* kvantorok? Mutasson példát olyan $H(x, y)$ kétváltozós predikátumra, melyre $\forall x \exists y H(x, y) \neq \exists y \forall x H(x, y)$!
- Definiálja logikai jelek segítségével halmazok *metsetét* és *unióját*! Mutasson egy-egy példát olyan A, B, C halmazokra melyekre $(A \cup B) \cap C$ megegyezik, ill. nem egyezik meg $A \cup (B \cap C)$ halmazzal!
- Definiálja halmazok *szimmetrikus differenciáját*! Mi lesz az $A = \{a, b, c\}$ és $B = \{b, c, d\}$ halmazok szimmetrikus differenciája?

Relációk

- Definiálja a *binér reláció* fogalmát! Mutasson két példát relációra az $X = \{a, b, c\}$ és $Y = \{1, 2, 3\}$ halmazok között!
- Definiálja relációk *értelmezési tartományát* és *értékkészletét*! Mi lesz az
$$R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 4)\} \subset \{a, b, c, d\} \times \{1, 2, 3, 4\}$$
reláció értelmezési tartománya és értékkészlete?
- Definiálja relációk *kompozícióját*! Legyen
$$R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 4)\} \quad \text{és} \quad S = \{(1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (3, \gamma)\}.$$
Mi lesz az $S \circ R$ kompozíció?
- Definiálja a *szimmetrikus* relációkat! Szimmetrikus-e az
$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1)\} \subset \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$$
reláció?

5. Definiálja a *reflexív* relációkat! Reflexív-e az

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1)\} \subset \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$$

reláció?

6. Definiálja a *transzitiv* relációkat! Transzitiv-e az

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1)\} \subset \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$$

reláció?

7. Definiálja az *ekvivalencia reláció* fogalmát! Adjon két különböző példát ekvivalencia relációra az $X = \{1, 2, 3\}$ halmazon!

8. Definiálja az *osztályozás* fogalmát! Adjon két különböző példát osztályozásra az $X = \{1, 2, 3\}$ halmazon!

Komplex számok

- Definiálja komplex számok *trigonometrikus alakját*! Mi lesz a $z = 1 + i \in \mathbb{C}$ szám trigonometrikus alakja?
- Mondja ki a *szorzásra* vonatkozó Moivre azonosságot! Mi lesz a $z = 3(\cos(\pi/3) + i \cdot \sin(\pi/3))$ és $w = 7(\cos(5\pi/6) + i \cdot \sin(5\pi/6))$ számok szorzatának *trigonometrikus* alakja?
- Mondja ki az *osztásra* vonatkozó Moivre azonosságot! Mi lesz a $z = 3(\cos(\pi/3) + i \cdot \sin(\pi/3))$ és $w = 7(\cos(5\pi/6) + i \cdot \sin(5\pi/6))$ számok hányadosának *trigonometrikus* alakja?
- Mondja ki a *hatványozásra* vonatkozó Moivre azonosságot! Mi lesz a $z = 3(\cos(\pi/3) + i \cdot \sin(\pi/3))$ szám tizenkettedik hatványának *trigonometrikus* alakja?
- Adott $w \neq 0$ komplex szám és $n \geq 1$ egész esetén mik lesznek a $z^n = w$ komplex megoldásai? Mondja ki a megfelelő tételt! Hány megoldása van a $z^3 = -1$ egyenletnek komplex számok körében?

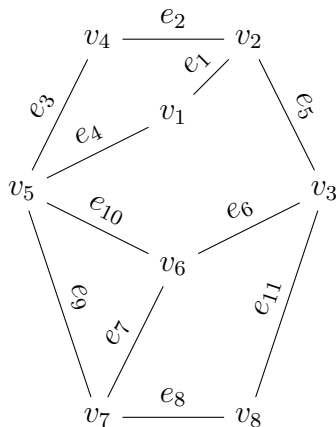
Kombinatorika

- Hányféleképpen lehet n különböző elemet sorba állítani? Mondja ki a megfelelő összefüggést! Hányféleképpen lehet 5 különböző könyvet a polcra felrakni?
- Hányféleképpen lehet n , nem feltétlen különböző elemet sorba állítani? Mondja ki a megfelelő összefüggést! Hányféleképpen lehet 8 hosszú szót képezni három darab 'a', két darab 'b' és három darab 'c' segítségével?
- Hányféleképpen lehet k elemet választani egy n elemű halmazból, ha a kiválasztás sorrendje számít és egy elemet többször is felhasználhatunk? Hány 7 hosszú szót képezhetünk az 'a', 'b' és 'c' karakterek felhasználásával?
- Hányféleképpen lehet k elemet kiválasztani egy n elemű halmazból, ha a kiválasztás sorrendje számít és egy elemet csak egyszer választhatunk? Hány 5 hosszú szót képezhetünk az 'a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f' és 'g' karakterek felhasználásával, ha egy karaktert csak egyszer használhatunk?

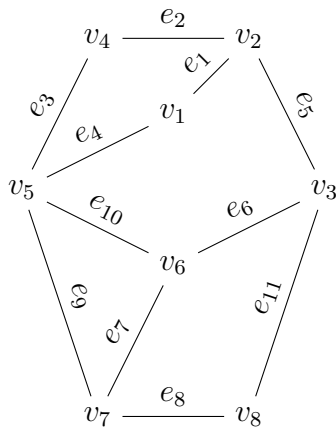
5. Hányféleképpen lehet k elemet kiválasztani egy n elemű halmazból, ha a kiválasztás sorrendje nem számít és egy elemet csak egyszer választhatunk? Hányféleképpen tudunk kiválasztani 2 könyvet az 5-ből, amit nyaralásra viszünk magunkkal?
6. Hányféleképpen lehet k elemet kiválasztani egy n elemű halmazból, ha a kiválasztás sorrendje nem számít és egy elemet többször is választhatunk? Hányféleképpen tudunk kiválasztani 3 gombócot az 5-féle fagyaltból, ha a választás sorrendje nem számít?

Gráfok

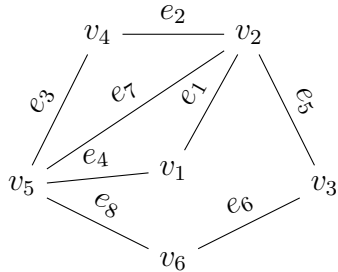
1. Mondja ki a gráf csúcsainak *fokszáma* és a gráf *élszáma* közötti összefüggést! Van-e olyan egyszerű gráf, mely csúcsainak fokszámai 1,2,2,2,2,4? Válaszát indokolja!
2. Definiálja gráfok *izomorfiját*! Mutasson példát két gráfra melyek izomorfak, és adja meg a közöttük lévő izomorfizmust is!
3. Definiálja a *részgráf* és *feszített részgráf* fogalmát! Mutasson két példát G ill. H gráfokra, melyekre H részgráfja, de nem feszített részgráfja G -nek!
4. Definiálja a *séta* fogalmát gráfokra! Adjon példát két különböző sétára v_1 és v_8 között az alábbi gráfban:



5. Definiálja az *út* fogalmát gráfokra! Adjon példát két különböző útra v_1 és v_8 között az alábbi gráfban:



6. Definiálja az *összefüggő* gráfok fogalmát! Mutasson *egy-egy* példát összefüggő és nem összefüggő gráfra!
7. Definiálja a *fa* fogalmát gráfok körében! Mutasson *egy-egy* példát fa és nem fa gráfra!
8. Definiálja az *Euler-séta* fogalmát! Mutasson példát Euler-sétára az alábbi gráfban:



9. Definiálja a *Hamilton-út* fogalmát! Mutasson példát Hamilton-útra az alábbi gráfban:

