Diszkrét matematika 1

Halmazok

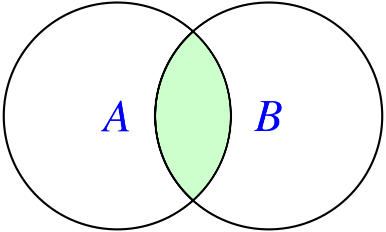
Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2025 tavasz

Halmazok

$A \cap B$

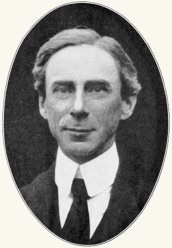


Halmazok

- Mi naiv halmazelmélettel foglalkozunk:
  halmazok = elemek gondolati burka
- azonban ez nem a mindig elég

Russell paradoxon (Bertrand Russell, 1872 - 1970)

- Egy halmaz legyen jó, ha nem eleme saját magának.
- Egy halmaz legyen rossz, ha eleme saját magának.
- Legyen A a jó halmazok halmaza.
- Ekkor A jó vagy rossz?



- Ha A jó halmaz $\Longrightarrow$ A eleme önmagának (definíció szerint) $\Longrightarrow$ A rossz $\lightning$
- Ha A rossz halmaz $\Longrightarrow$ A nem eleme önmagának (definíció szerint) $\Longrightarrow$ A jó $\lightning$

Halmazok

- Mi naiv halmazelmélettel foglalkozunk:

  halmazok = elemek gondolati burka

Meghatározottsági axióma

Egy halmazt az elemei egyértelműen meghatároznak.

Speciálisan:

- Két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik.

$$\{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \{1,3,2\} = \ldots$$

- Egy halmaznak egy elem csak egyszer lehet eleme.

$$\{1,2,3\} = \{1,1,2,3\} = \{1,1,2,2,3\} = \{1,1,2,2,3,3\} = \ldots$$

- Üres halmaz: $\emptyset = \{\}$. **Figyelem** $\emptyset \neq \{\emptyset\}$!

Részhalmazok

Definíció

- Az A halmaz **részhalmaza** a B halmaznak, $A \subset B$, ha $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$.
- Ha $A \subset B$-nek, de $A \neq B$, akkor A **valódi részhalmaza** B-nek: $A \subsetneq B$.

A részhalmazok tulajdonságai:

Állítás (Biz.: NB)

1. $\forall A: \ A \subset A$ (reflexivitás).
2. $\forall A, B, C: \ A \subset B \ \wedge \ B \subset C \ \Rightarrow \ A \subset C$ (tranzitivitás).
3. $\forall A, B: \ A \subset B \ \wedge \ B \subset A \ \Rightarrow \ A = B$ (antiszimmetria).

Művelet halmazokkal – unió

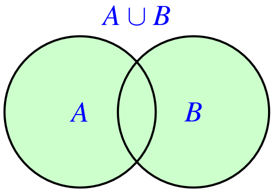
Definíció

Legyen A, B két halmaz. A és B **uniója**,

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Általában: legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer (halmaz, mely elemei halmazok). Ekkor

$$\cup\mathcal{A} = \cup_{A\in\mathcal{A}} A = \{x : \exists A \in \mathcal{A}, x \in A\}.$$



Példa

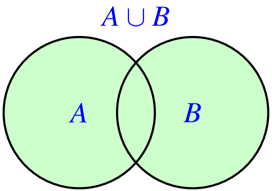
- $\{a,b,c\} \cup \{b,c,d\} = \{a,b,c,d\} = \cup\{\{a,b,c\},\{b,c,d\}\}$
- $\{M \in \mathbb{R}^{5\times5} : \det M = 0\} \cup \{M \in \mathbb{R}^{5\times5} : \det M \neq 0\} = \mathbb{R}^{5\times5}$
- $\cup_{r\in\mathbb{R}}\{\{M \in \mathbb{R}^{5\times5} : \det M = r\}\} = \mathbb{R}^{5\times5}$

Művelet halmazokkal – unió

Az unió tulajdonságai

Állítás (Biz.: részben)

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup B = B \cup A$ (kommutativitás)
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asszociativitás)
4. $A \cup A = A$
5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$



Bizonyítás.

5. Két irányt külön bizonyítjuk!

   $\Rightarrow$: $A \subset B \Rightarrow A \cup B \subset B$, de $A \cup B \supset B$ mindig teljesül, így $A \cup B = B$.

   $\Leftarrow$: Ha $A \cup B = B$, akkor A minden eleme eleme B-nek. □

Művelet halmazokkal – metszet

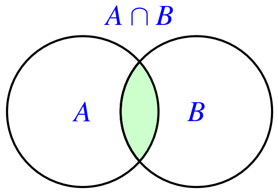
Definíció

Legyen A, B két halmaz. A és B metszete,

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$. Általában: legyen $\mathcal{A}$

egy halmazrendszer (halmaz, mely elemei halmazok). Ekkor

$$\cap\mathcal{A} = \cap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x : \forall A \in \mathcal{A}, x \in A\}.$$



Példa

- $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\} = \cap\{\{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$
- $\left\{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} : M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\right\} \cap \left\{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} : M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\right\} = \{\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2\times 2}\}$

Művelet halmazokkal – metszet

A metszet tulajdonságai

Állítás

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás)
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asszociativitás)
4. $A \cap A = A$
5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$