Diszkrét matematika I. hétfői (2025.04.28.) 3. Zh

feladatainak eredményei és részletesen kidolgozott megoldásai

1. a) Igaz-e, hogy bárhogyan adunk meg 7 különböző természetes számot, mindig lesz köztük 4, melyeknek az összege páros? Ha igaz, bizonyítsd, ha nem igaz, adj ellenpéldát! **(3p)**

Megoldás: IGAZ. Például skatulya-elv segítségével bizonyítható: Két ,,skatulya" van, a páros számoké és a páratlan számoké. Nem lehetséges, hogy mindkét skatulyában legfeljebb három-három szám legyen, hiszen az összesen még csak hat szám, azaz hét szám esetén vagy van legalább négy páros, vagy van legalább négy páratlan. Négy (sőt: akármennyi) páros szám összege páros. Négy (sőt: páros sok) páratlan szám összege is páros.

b) Hány olyan anagrammája van a MASSACHUSETTS szónak, amelyben a négy S betű nem kerül egymás mellé? (Anagramma: olyan karaktersorozat, amelyben minden betűt pontosan annyiszor használhatunk fel, ahányszor az eredeti szóban szerepel.) **(3p)**

Megoldás: Összes mínusz rosszak, ahol azok az anagrammák a ,,rosszak", amelyekben mégis egymás mellé került mind a négy S betű. Összes anagrammák száma ismétléses permutációval: $\dfrac{13!}{2!\cdot 4!\cdot 2!}$ (összesen 13 betű, de A betűből 2, S betűből 4, T betűből 2 egyforma). A ,,rossz" anagrammák számát úgy számoljuk meg, hogy a négy S-betűt egy SSSS ,,négyjegyű betűvé" összeragasztjuk, így lesz 10 féle karakterünk (egy SSSS, két A, két T, továbbá egy-egy M, C, H, U, E): $\dfrac{10!}{2!\cdot 2!}$. Az összesből a rosszak számát kivonva: $\dfrac{13!}{4!\cdot 2!\cdot 2!}-\dfrac{10!}{2!\cdot 2!}$.

2. Egy bárban unicum, vodka, gin, tequila, cseresznyepálinka, szilvapálinka, és whisky kapható.

a) Hányféleképpen rendelhetünk 5 shotot (sorrend nem számít)? **(2p)**

Megoldás: Ismétléses kombináció (7 féle ital közül választunk 5-öt, egyféléből többet is választhatunk, az számít, hogy melyik féléből hányat választunk, de az nem, hogy milyen sorrendben): $\binom{7+5-1}{5}=\binom{11}{5}$.

b) Hányféleképpen rendelhetünk 5 shotot, ha mindenképpen szeretnénk 2 gint? **(2p)**

Megoldás: Továbbra sem számít a sorrend, és most az öt rendelésből csak 3-ról kell dönteni (a további kettő biztosan gin, és mivel a sorrend nem számít, feltehetjük, hogy első kettőnek már meg is rendeltük a 2 gint): Most 7 féléből választunk összesen hármat (egyféléből többet is választhatunk, az számít, hogy melyik féléből hányat választunk, de az nem, hogy milyen sorrendben): $\binom{7+3-1}{3}=\binom{9}{3}$.

c) A bárban egy vakteszt kóstolás során 8 röviditalt tesznek ki sorrendben. Hányféleképpen tudják ezt megtenni, ha egy típusú ital a vakteszt során többször is szerepelhet? **(2p)**

Megoldás: Itt nyilván számít a sorrend (a szöveg ezt lényegében ki is mondja). A nyolc közül az első lehet a 7 közül bármelyik féle, a második is lehet bármelyik féle a 7 közül, a harmadik és, és így tovább a nyocadikig. Ezek egymás utáni független döntések: $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^8$ (ha úgy jobban tetszik: ismétléses variáció).

d) Hányféleképpen lehet a vaktesztet végrehajtani, ha mindenképpen szeretnék mind a cseresznye-, mind a szilvapálinkát kóstoltatni? **(2p)**

Megoldás: Ez összes mínusz rosszak, ahol rossz az is, amikor nincs cseresznyepálinka (de esetleg van szilva), rossz az is amikor nincs szilvapálinka (de esetleg van cseresznye), és rossz az is, amikor nincs sem cseresznye- sem szilvapálinka a kóstolandó sorozatban. Mindegyik esetet az előző módszerrel (ismétléses variáció) számolhatjuk ki. Az összes lehetséges sorozat 7^8 (az előző részfeladat szerint), ha nincs cseresznye, akkor 7 helyett csak 6 közül választottunk: 6^8, ugyanígy ha nincs szilva, akkor is 7 helyett csak 6 közül választottunk: 6^8, és mindkettőben számoltuk azt is, amikor sem cseresznye sem szilva nem volt. Ez utóbbiak azok, amikor csak 5 közül választottuk a sorozat mind a nyolc elemét: 5^8. Ha kivonjuk az összeből a rosszakat, akkor a $7^8 - 6^8 - 6^8$ még nem a jó végeredmény, mert azokat, amikor sem szilva sem cseresznye nem volt, duplán vontuk ki, ezért (a szita-formula sémája szerint) a megoldás: $7^8 - 6^8 - 6^8 + 5^8$.

3. a) Hány $f : \{0, 1, 2\}^2 \to \{0, 1, 2\}^2$ függvény létezik? **(3p)**

Megoldás: Az f függvény a $\{0, 1, 2\}^2 = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ descartes szorzatnak, azaz $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ halmaznak mind a kilenc eleméhez hozzárendel valamit. (Hogy 9 elem van, az számolással is kijönne: minden pár első koordinátája is 3 féle lehet, második koordinátája is 3 féle, egymástól függetlenül: $3 \cdot 3 = 9$ lehetőség.) Azt kell eldönteni, hogy f mit rendel az egyes elemekhez. Mivel ugyanezen kilencelemű halmaz bármelyik elemét rendelheti, így kilenc egymás utáni döntést kell hoznunk, egymástól függetlenül, és minden döntésünk (hogy az adott elemhez mit rendeljen az f), mindig kilenc féle lehet: $9 \cdots 9 = 9^9$.

b) Hány $f : \{0, 1, 2\}^2 \to \{0, 1, 2\}^2$ *bijektív* függvény létezik? **(3p)**

(*Emlékeztető: egy $f : X \to Y$ függvény bijektív, ha injektív és szürjektív, azaz $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$, és* $\operatorname{rng} f = Y$.)

Megoldás: Az előzőhöz hasonlóan 9 egymás utáni döntést kell hoznunk, de most minden döntés után eggyel csökken a további döntési lehetőségek száma. Most szigorúan nem függetlenek az egymás utáni döntéseink, de az, hogy a $k+1$. döntésben $9 - k$ féle döntési lehetőségünk van, az független s korábbi k darab döntéstől, ezért szorozhatunk: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9!$ féle bijektív függvény van.

Másik megoldás: $\{0, 1, 2\}^2$ elemeit tekinthetjük 3-as szárendszerben felírt legfeljebb 2-jegyű számoknak (azaz 0-tól 8-ig az egész számoknak). Ennek a 9 elemű halmaznak az elemeit kell sorba rendeznünk: $f(i)$ mondja meg a sorozat i-edik elemét, és minden elem pontosan egyszer fordul elő, azaz 9 különböző elemet kell sorbarendezni: ez pont a(z ismétlés nélküli) permutáció feladata: 9! féle ilyen permutáció van.