Legrövidebb utak minden csúcspárra *

Vadász Péter

1 Elméleti összefoglaló

Adott egy élsúlyozott gráf, keressük minden csúcspárra a két csúcs között lévő legrövidebb utat. Hasonló feladatot lehet elképzelni egy autóstérkép készítésekor is. A feladatot megoldhatjuk a Dijkstra vagy a Sor-alapú Bellman-Ford algoritmussal is, vizsgáljuk meg, hogy ez milyen futási idő költséggel járna:

- **Dijkstra algoritmus**: futtassuk le a Dijkstra algoritmust, a gráf összes csúcsára mint start csúcsra. (Ekkor nem engedünk meg negatív éleket.) Ha az algoritmus által használt prioritásos sort bináris kupac segítségével reprezentáljuk, akkor a futási idő
  – ritka gráfokra, azaz $m \in O(n)$ esetén $O(n(n+m)\log n) = O(n^2 \log n)$,
  – sűrű gráfokra, azaz $m \in \Theta(n^2)$ esetén $O(n(n+m)\log n) = O(n^3 \log n)$

- **Sor-alapú Bellman-Ford (QBF) algoritmus**: futtassuk a QBF algoritmust a gráf összes csúcsára, mint start csúcsra. (Irányított gráf esetén megengedünk negatív éleket, negatív összsúlyú köröket azonban nem. Irányítatlan gráf esetén most sem lehetnek negatív élek a gráfban.)
  – Ritka gráfok ($m \in O(n)$) esetén a futási idő: $O(n * n * m) = O(n^3)$,
  – sűrű gráfokra, azaz $m \in \Theta(n^2)$ esetén $O(n * n * m) = O(n^4)$

Láthatjuk, hogy sűrű gráfok esetén a fenti módszerek egyike sem túl hatékony, ezért egy olyan módszert is használhatunk, ami minden gráf esetén $\Theta(n^3)$ költséggel működik.

*Dr. Ásványi Tibor jegyzete alapján (lektor: Ásványi Tibor)

2 Floyd-Warshall algoritmus

Tegyük fel, hogy G gráf csúcsmátrixos reprezentációval adott. Az egyes csúcsok közötti távolságok számításához egy D-vel jelölt mátrixot fogunk használni, D_{ij} az i és j csúcs közti optimális út hosszát tartalmazza. Egy π mátrixban a közvetlen megelőző csúcsokat tároljuk, π_{ij} az i és j csúcs között vezető optimális úton j csúcs közvetlen megelőzőjét tartalmazza. Az optimális utakat úgynevezett **belső csúcsok** mentén keressük.

Definíció 2.1. Belső csúcs [2] Egy $p = \langle v_1, v_2, ..., v_k \rangle$ út belső csúcsa minden v_1-től és v_k-tól különböző csúcs. Tehát $\{v_2, ..., v_{k-1}\}$

Az algoritmus n lépésben határozza meg a csúcspárok közti legrövidebb utakat. A k-adik lépése után a $D_{ij}^{(k)}$ az i és j csúcsok között lévő szuboptimális út hosszát tartalmazza, azzal a megszorítással, hogy a belső csúcsok címkéje legfeljebb k. A k címkéjű csúcs vagy szerepel az úton vagy nem, attól függően, hogy az út ettől rövidebb lesz-e vagy sem.

A $D^{(k)}$ és $\pi^{(k)}$ mátrixok kiszámítása:

$$D_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0, \text{ ha } i = j \\ w(i,j), \text{ ha } (i,j) \in G.E \wedge i \neq j \\ \infty, \text{ ha } i \neq j \wedge (i,j) \notin G.E \end{cases}$$

$$\pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0, \text{ ha } i = j \\ i, \text{ ha } (i,j) \in G.E \wedge i \neq j \\ 0, \text{ ha } i \neq j \wedge (i,j) \notin G.E \end{cases}$$

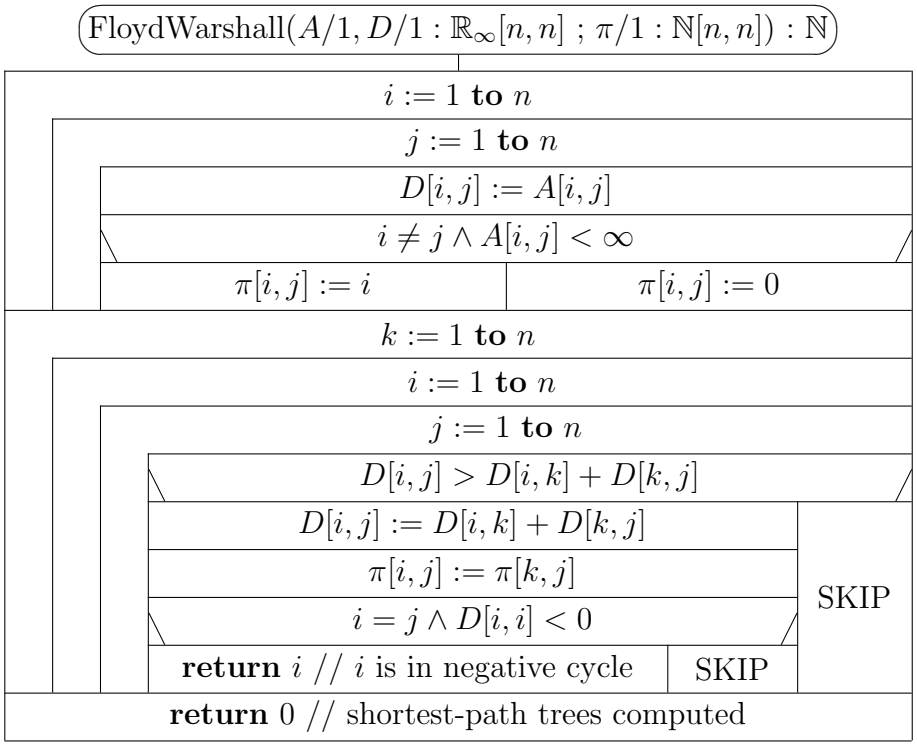
$D^{(0)}$ mátrix lényegében megegyezik a csúcsmátrixal.

$$D_{ij}^{(k)} = \begin{cases} D_{ik}^{(k-1)} + D_{kj}^{(k-1)}, \text{ ha } D_{ij}^{(k-1)} > D_{ik}^{(k-1)} + D_{kj}^{(k-1)} \\ D_{ij}^{(k-1)} \text{ különben} \end{cases}$$

$$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \pi_{kj}^{(k-1)}, \text{ ha } D_{ij}^{(k-1)} > D_{ik}^{(k-1)} + D_{kj}^{(k-1)} \\ \pi_{ij}^{(k-1)} \text{ különben} \end{cases}$$

Az algoritmus mátrixpárok sorozatát állítja elő 0-tól n-ig, ami $n + 1$ db mátrixpár. Az algoritmus működése során mégis elegendő egyetlen D és π mátrixot fenntartani, mivel a k-adik sor és k-adik oszlop a $k - 1$ és k-adik lépés között nem változik meg, hiszen a k

címkéjű csúcsból saját magán keresztül nem találhatunk rövidebb utat sehova, valamint a k címkéjű csúcsba sem találhatunk rövidebb utat önmagán keresztül semelyik másik csúcsból sem.



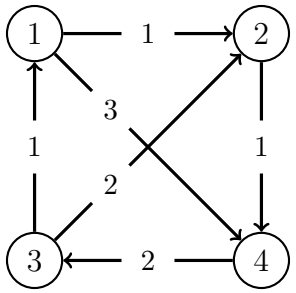
Ábra 1.: Floyd-Warshall algoritmus [1]

Floyd-Warshall algoritmus esetén, ha a gráf tartalmaz negatív összsúlyú kört, akkor a főátlóban negatív értékek jelennek meg, ezt az algoritmus is figyelembe veszi.

2.1 Példák

A feladatok megoldása során minden lépésben felrajzoljuk a mátrixokat, irányítatlan esetben a D mátrixok szimmetrikusak. A k-adik lépésben végigmegyünk D mátrix celláin, k-adik sor és k-adik oszlop kivételével és megnézzük, hogy az (i,j) cella esetén (i,k) és (k,j) cellák összege, optimálisabb-e, mint (i,j), ha igen, akkor módosítjuk az értéket (π mátrixban is).

1. példa: Szemléltessük a Floyd-Warshall algoritmus működését az alábbi gráfon! Adjuk meg D és π mátrixokat minden iterációban. Adjuk meg a csúcspárok közti optimális utakat is!



$D^{(0)}$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	1	∞	3
2	∞	0	∞	1
3	1	2	0	∞
4	∞	∞	2	0

$\pi^{(0)}$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	1	0	1
2	0	0	0	2
3	3	3	0	0
4	0	0	4	0

Láthatjuk, hogy $D^{(0)}$ mátrix megegyezik a gráf csúcsmátrixos reprezentációjával.

$D^{(1)}$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	1	∞	3
2	∞	0	∞	1
3	1	2	0	④
4	∞	∞	2	0

$\pi^{(1)}$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	1	0	1
2	0	0	0	2
3	3	3	0	①
4	0	0	4	0

$D^{(1)}$ és $\pi^{(1)}$ mátrixokan dupla szegéllyel jelöltük azokat a sorokat, melyek nem változnak az első iterációban. Nézzük meg, hogyan határozhatjuk meg a kék színű cella értékét a piros színű cellák segítségével! A cella a mátrix 3. sorában és 4. oszlopában van, a fenti rekurzív képlet alapján, ha $D_{34}^{(0)} > D_{31}^{(0)} + D_{14}^{(0)}$, akkor $D_{34}^{(1)} = D_{31}^{(0)} + D_{14}^{(0)}$, $D_{31}^{(0)} + D_{14}^{(0)} = 4$, ami határozottan kisebb, mint ∞ ($D_{34}^{(0)}$ értéke), tehát 4 lesz a cella új értéke. A $\pi_{34}^{(1)}$ értékét $\pi_{14}^{(0)}$ értéke határozza meg. A felülírt mezők új értékét bekarikáztuk.

$D^{(2)}$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	1	∞	②
2	∞	0	∞	1
3	1	2	0	③
4	∞	∞	2	0

$\pi^{(2)}$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	1	0	②
2	0	0	0	2
3	3	3	0	②
4	0	0	4	0

$D^{(3)}$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	1	∞	2
2	∞	0	∞	1
3	1	2	0	3
4	③	④	2	0

$\pi^{(3)}$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	1	0	2
2	0	0	0	2
3	3	3	0	2
4	③	③	4	0

$D^{(4)}$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	1	④	2
2	④	0	③	1
3	1	2	0	3
4	3	4	2	0

$\pi^{(4)}$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	1	④	2
2	③	0	④	2
3	3	3	0	2
4	3	3	4	0

Az egyes csúcsok közötti legrövidebb utakat a $\pi^{(4)}$ mátrix alapján tudjuk meghatározni:

- $1 \rightsquigarrow 2$: $1 \to 2$ [összsúly: 1], $D^{(4)}_{12}$ érték alapján
- $1 \rightsquigarrow 3$: $1 \to 2 \to 4 \to 3$ [összsúly: 4] ($\pi^{(4)}_{13}$ értéke 4, azaz az 1-es és 3-as csúcs között vezető optimális úton 3-as csúcs közvetlen megelőzője a 4-es csúcs. Most meg kell néznünk, hogy hogyan jutunk a 4-es csúcsba, azaz mi a 4-es megelőzője, ezt a $\pi^{(4)}_{14}$ érték mutatja, ami 2, végül pedig a 2-es csúcs megelőzője kell, amit a $\pi^{(4)}_{12}$ értéke ad meg, ez már 1, tehát megtaláltuk az $1 \rightsquigarrow 3$ úton szereplő összes csúcsot.)
- $1 \rightsquigarrow 4$: $1 \to 2 \to 4$ [összsúly: 2]
- $2 \rightsquigarrow 1$: $2 \to 4 \to 3 \to 1$ [összsúly: 4]
- $2 \rightsquigarrow 3$: $2 \to 4 \to 3$ [összsúly: 3]
- $2 \rightsquigarrow 4$: $2 \to 4$ [összsúly: 1]
- $3 \rightsquigarrow 1$: $3 \to 1$ [összsúly: 1]
- $3 \rightsquigarrow 2$: $2 \to 3 \to 2$ [összsúly: 2]
- $3 \rightsquigarrow 4$: $3 \to 2 \to 4$ [összsúly: 3]
- $4 \rightsquigarrow 1$: $4 \to 3 \to 1$ [összsúly: 3]
- $4 \rightsquigarrow 2$: $4 \to 3 \to 2$ [összsúly: 4]

- $4 \rightsquigarrow 3$: $4 \to 3$ [összsúly: 2]

3 Gráf tranzitív lezártja

Definíció 3.1. Tranzitív lezárt: Egy $G(V, E)$ gráf tranzitív lezártja egy $G'(V, E')$ gráf, ahol $(u, v) \in G'.E'$ akkor és csak akkor, ha G-ben vezet út u-ból v-be.

A tranzitív lezárt kiszámításához használhatjuk a Warshall algoritmust, amely a Floyd-Warshall algoritmus egy módosított változata. Egy T $n \times n$-es logikai mátrixot használunk, az élsúlyok most nem számítanak, a gráf lehet irányított, irányítatlan.

A Floyd-Warshall algoritmushoz hasonlóan a Warshall algoritmus mátrixok sorozatát állítja elő (n iterációval), de a korábbi indoklás miatt itt is elég egy mátrixot használni. A k-adik iteráció után $T_{ij}^{(k)}$ értéke igaz, ha az i és j címkéjű csúcsok között vezet olyan út, amelyben a belső csúcsok címkéje legfeljebb k.

A $T^{(k)}$ mátrixok kiszámítása (1 jelentése "igaz", 0 jelentése "hamis"):

$$T_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, \text{ ha } i = j \vee (i, j) \in G.E \\ 0, \text{ különben} \end{cases}$$

$$T_{ij}^{(k)} = T_{ij}^{(k-1)} \vee (T_{ik}^{(k-1)} \wedge T_{kj}^{(k-1)})$$

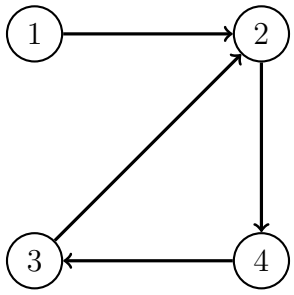
```
TransitiveClosure(A/1, T/1 : B[n, n])
    i := 1 to n
        j := 1 to n
            T[i, j] := A[i, j]
        T[i, i] := 1
    k := 1 to n
        i := 1 to n
            j := 1 to n
                T[i, j] := T[i, j] ∨ (T[i, k] ∧ T[k, j])
```

Ábra 2.: Warshall algoritmus [1]

Futási idő: $\Theta(n^3)$

3.1 Példák

2. példa: Szemléltessük a Warshall algoritmus működését az alábbi gráfon! Adjuk meg T mátrixot az inicializálása és a fő ciklus mindegyik iterációja után is!



$T^{(0)}$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	1	0	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	0	0	1	1

$T^{(1)}$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	1	0	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	0	0	1	1

$T^{(2)}$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	1	0	①
2	0	1	0	1
3	0	1	1	①
4	0	0	1	1

$T^{(3)}$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	1	0	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	0	①	1	1

$T^{(4)}$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	1	①	1
2	0	1	①	1
3	0	1	1	1
4	0	1	1	1

Irodalomjegyzék

[1] Dr. Ásványi Tibor *Algoritmusok és adatszerkezetek II. előadásjegyzet - Élsúlyozott gráfok és algoritmusaik*

[2] Fekete István, Hunyadvári László: *Algoritmusok és adatszerkezetek*
`http://tamop412.elte.hu/tananyagok/algoritmusok/index.html`