

Analízis II., ZH II. bizonyítandó tételek

1. Oszcillációs összegek. Az integrálhatóság jellemzése az oszcillációs összegekkel.

Tétel:

$$f \in R[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \tau \in \mathcal{F}[a, b] : \Omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

Bizonyítás:

\implies

$$\text{TFH } f \in R[a, b] : I_*(f) = I^*(f) =: I(f).$$

$$\sup\{s(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\} = I_*(f) = I(f) \implies (\text{a sup def.}) \implies \forall \varepsilon > 0, \exists \tau_1 \in \mathcal{F}[a, b] : I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \tau_1) \leq I(f);$$

$$\inf\{S(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a, b]\} = I^*(f) = I(f) \implies (\text{az inf def.}) \implies \forall \varepsilon > 0, \exists \tau_2 \in \mathcal{F}[a, b] : I(f) \leq S(f, \tau_2) < I(f) + \frac{\varepsilon}{2};$$

Legyen $\tau := \tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a, b]$. Ekkor τ finomítása τ_1, τ_2 -nek, ezért

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f, \tau) \leq S(f, \tau_2) < I(f) + \frac{\varepsilon}{2} \implies \Omega(f, \tau) = S(f, \tau) - s(f, \tau) < \varepsilon.$$

\impliedby

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $\tau \in \mathcal{F}[a, b] : \Omega(f, \tau) < \varepsilon$.

Mivel $s(f, \tau) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f, \tau)$, ezért

$$\begin{aligned} 0 &\leq I^*(f) - I_*(f) \leq S(f, \tau) - s(f, \tau) = \Omega(f, \tau) < \varepsilon \implies \\ &\implies 0 \leq I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon) > 0 \implies \\ &\implies I^*(f) - I_*(f) = 0 \implies \\ &\implies I^*(f) = I_*(f) \implies f \in R[a, b]. \end{aligned}$$

□

2. Az összegfüggvény integrálhatóságára vonatkozó tétel.

Tétel:

TFH $f, g \in R[a, b]$. Ekkor

$$f + g \in R[a, b] \quad \text{és} \quad \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Bizonyítás:

Legyen $\tau = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$ és

$$\begin{aligned} f_i &= \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f, & F_i &= \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f, \\ g_i &= \inf_{[x_{i-1}, x_i]} g, & G_i &= \sup_{[x_{i-1}, x_i]} g, \end{aligned}$$

Mivel

$$f_i + g_i \leq f(x) + g(x) \leq F_i + G_i, \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i],$$

ezért

$$f_i + g_i \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} (f + g) \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i]} (f + g) \leq F_i + G_i.$$

Ebből $(x_i - x_{i-1})$ -gyel való szorzás és összegzés után az adódik, hogy

$$s(f, \tau) + s(g, \tau) \leq s(f + g, \tau) \leq S(f + g, \tau) \leq S(f, \tau) + S(g, \tau)$$

TFH $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a, b]$, és legyen $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a, b]$. Ekkor

$$s(f, \tau_1) + s(g, \tau_2) \leq s(f, \tau) + s(g, \tau) \leq s(f + g, \tau) \leq I_*(f + g)$$

Innen először a $\tau_1 \in \mathcal{F}[a, b]$, majd a $\tau_2 \in \mathcal{F}[a, b]$ felosztásokra a bal oldal felső határát véve következik hogy

$$I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f + g).$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$I^*(f + g) \leq I^*(f) + I^*(g).$$

Így

$$I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f + g) \leq I^*(f + g) \leq I^*(f) + I^*(g)$$

Mivel

$$f, g \in R[a, b], \quad \text{ezért} \quad I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f$$

és

$$I_*(g) = I^*(g) = \int_a^b g, \quad \text{ezért} \quad I_*(f + g) = I^*(f + g), \quad \text{tehát} \quad f + g \in R[a, b] \quad \text{és} \quad \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

3. A szorzatfüggvény integrálhatóságára vonatkozó tétel.

Tétel:

TFH $f, g \in R[a, b]$. Ekkor

$$f \cdot g \in R[a, b]$$

Bizonyítás:

1 TFH $f, g \geq 0, \tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n\} \in \mathcal{F}[a, b]$

$$f_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f, \quad F_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

$$g_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} g, \quad G_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} g,$$

$$f_i \cdot g_i \leq f(x) \cdot g(x) \leq F_i \cdot G_i, \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \implies$$

$$\implies f_i \cdot g_i \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot g \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot g \leq F_i \cdot G_i, \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \implies$$

$$\implies \Omega(f \cdot g, \tau) = S(f \cdot g, \tau) - s(f \cdot g, \tau) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot g - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot g \right) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n (F_i \cdot G_i - f_i \cdot g_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Mivel f és g korlátos, ezért $\exists M : |f|, |g| \leq M$ $[a, b]$ -n. Így

$$\begin{aligned} \Omega(f \cdot g, \tau) &\leq \sum_{i=1}^n [F_i \cdot (G_i - g_i) + (F_i - f_i) \cdot g_i] \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq M \cdot \sum_{i=1}^n (G_i - g_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + M \cdot \sum_{i=1}^n (F_i - f_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \\ &= M \cdot (\Omega(g, \tau) + \Omega(f, \tau)). \end{aligned}$$

Mivel $f, g \in R[a, b]$, ezért $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \tau : \Omega(f, \tau), \Omega(g, \tau) < \varepsilon$.

Tehát $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \tau \in \mathcal{F}[a, b]$ felosztás:

$$\Omega(f \cdot g, \tau) \leq 2 \cdot M \cdot \varepsilon \implies f \cdot g \in R[a, b]$$

2 TFH f, g tetszőleges, és legyen

$$m_f := \inf_{[a, b]} f, \quad m_g := \inf_{[a, b]} g.$$

Ekkor $f - m_f \geq 0$ és $g - m_g \geq 0$ $[a, b]$ -n integrálható függvények.

Tehát (1.) szerint

$$(f - m_f) \cdot (g - m_g) = \underbrace{f \cdot g - m_f \cdot g - f \cdot m_g + m_f \cdot m_g}_{\in R[a, b]} \in R[a, b],$$

Valóban $f \cdot g \in R[a, b]$. \square

4. Függvények hányadosának integrálhatóságára vonatkozó tétel.

Tétel:

TFH $f, g \in R[a, b]$. Ha $|g(x)| \geq m > 0$ ($\forall x \in [a, b]$), akkor

$$\frac{f}{g} \in R[a, b]$$

Bizonyítás:

Elég igazolni hogy $\frac{1}{g} \in R[a, b]$

Legyen $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$ tetszőleges.

Ekkor $\forall x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ pontban

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} = \frac{g(y) - g(x)}{g(x) \cdot g(y)} \leq \frac{|g(y) - g(x)|}{|g(x) \cdot g(y)|} \leq \frac{G_i - g_i}{m^2}$$

Ebből következik, hogy

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{g} - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{g} \leq \frac{G_i - g_i}{m^2}$$

$(x_i - x_{i-1})$ -gyel való szorzás és összegzés után azt kapjuk, hogy

$$\Omega\left(\frac{1}{g}, \tau\right) \leq \frac{1}{m^2} \cdot \Omega(g, \tau)$$

Mivel $g \in R[a, b]$, ezért $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \tau : \Omega(g, \tau) < \varepsilon$. Így

$$\Omega\left(\frac{1}{g}, \tau\right) < \frac{\varepsilon}{m^2} \implies \frac{1}{g} \in R[a, b]$$

□

5. A monoton függvények integrálhatóságára vonatkozó tétel.

Tétel:

Ha az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény monoton az $[a, b]$ intervallumon, akkor integrálható $[a, b]$ -n

Bizonyítás:

Igazoljuk hogy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tau \in \mathcal{F}[a, b] : \Omega(f, \tau) < \varepsilon$$

Legyen pl. $f \nearrow$. Ha $f(a) = f(b)$, akkor f állandó, ezért ebben az esetben az állítás igaz.

Ha $f(a) < f(b)$, akkor $\forall \tau = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$ felosztásra

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_{i-1}) \text{ és } M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_i)$$

ezért

$$\Omega(f, \tau) = S(f, \tau) - s(f, \tau) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott és $n \in \mathbb{N}^+ : \frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, valamint τ az $[a, b]$ egyenletes felosztása. Ekkor $x_i - x_{i-1} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ minden $i = 1, \dots, n$ indexre, és

$$\begin{aligned} \Omega(f, \tau) &< \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot \left(\left(\cancel{f(x_1)} - \underbrace{f(x_0)}_{f(a)} \right) + (\cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)}) + \dots + \left(\underbrace{f(x_n)}_{f(b)} - \cancel{f(x_{n-1})} \right) \right) = \varepsilon \implies f \in R[a, b] \end{aligned}$$

□

6. Az egyenletes folytonosságra vonatkozó Heine-tétel.

Tétel:

Ha $-\infty < a < b < +\infty$ és $f \in C[a, b]$, akkor f egyenletesen folytonos $[a, b]$ intervallumon.

Bizonyítás:

TFH f nem egyenletesen folytonos $[a, b]$ -n

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in [a, b], |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

$\delta := \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^+$) választással

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ és } \underbrace{|f(x_n) - f(y_n)|}_{(*)} \geq \varepsilon$$

Az (x_n) sorozat korlátos, ezért van egy (x_{n_k}) konvergens részsorozata, amelynek az α határértéke ugyancsak $[a, b]$ -ben van. Így

$$y_{n_k} = (y_{n_k} - x_{n_k}) + x_{n_k} \rightarrow 0 + \alpha = \alpha, \text{ ha } n_k \rightarrow +\infty$$

Mivel $f \in C[a, b]$, ezért $f \in C\{\alpha\}$ is teljesül. Az átviteli elv szerint tehát $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\alpha)$ és $f(y_{n_k}) \rightarrow f(\alpha)$, ezért

$$\lim_{n_k \rightarrow +\infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$$

Ez azonban ellentmond $(*)$ -nak.

□

7. A folytonos függvények integrálhatóságára vonatkozó tétel.

Tétel:

Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor integrálható $[a, b]$ -n. ($C[a, b] \subset R[a, b]$)

Bizonyítás:

Elég:

$$\forall f \in C[a, b] : \forall \varepsilon > 0, \exists \tau \in \mathcal{F}[a, b] : \Omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

Mivel $f \in C[a, b] \implies$ (l. Heine-tételét) f egyenletesen folytonos az $[a, b]$ intervallumon, ezért $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, hogy

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Legyen

$$\varepsilon > 0 \text{ és } \tau = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a, b] : \|\tau\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \dots, n\} < \delta$$

Ekkor $\Omega(f, \tau)$ -ban $i = 1, \dots, n$ esetén legyen

$$m_i := \min_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(u_i), \quad M_i := \max_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(v_i)$$

Ekkor

$$\Omega(f, \tau) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon \implies f \in R[a, b]$$

□

8. A Newton–Leibniz-tétel.

Tétel:

Ha $f \in R[a, b]$ és f függvénynek van primitív függvénye az $[a, b]$ intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

ahol F a f függvény egy (tetszőleges) primitív függvénye

Bizonyítás:

Legyen $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$ tetszőleges. A Lagrange-középértéktétel szerint $\forall i = 1, \dots, n$ indexre $\exists \xi \in (x_{i-1}, x_i)$:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Összeadva $\forall i = 1, \dots, n$ indexre:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sigma(f, \tau, \xi),$$

ahol $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Mivel $\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq f(\xi_i) \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$, ezért

$$s(f, \tau) < \sigma(f, \tau, \xi) = F(b) - F(a) \leq S(f, \tau, \xi)$$

Következésképpen

$$I_*(f) = \sup_{\tau \in \mathcal{F}[a, b]} s(f, \tau) \leq F(b) - F(a) \leq \inf_{\tau \in \mathcal{F}[a, b]} S(f, \tau, \xi) = I^*(f)$$

Mivel $f \in R[a, b]$, ezért $I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f$. Így

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

□

9. Az integrálfüggvény folytonosságára vonatkozó állítás.

Tétel:

TFH $f \in R[a, b]$ és $x_0 \in [a, b]$. Ekkor a

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) \, dt \quad (x \in [a, b])$$

Ekkor az F függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon.

Bizonyítás:

Tetszőleges $x, y \in [a, b]$, $x < y$ esetén

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_{x_0}^y f - \int_{x_0}^x f \right| = \left| \int_{x_0}^y f - \int_{x_0}^{x_0} f \right| = \left| \int_x^y f \right| \leq \int_x^y |f| \leq M \cdot \int_x^y 1 = M \cdot (y - x),$$

ahol M az f függvény egy korlátja: $|f(x)| \leq M$ ($x \in [a, b]$)

Ha tehát $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$: $M\delta < \varepsilon$, akkor $\forall x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$ esetén

$$|F(y) - F(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

□

10. Az integrálfüggvény differenciálhatóságára vonatkozó állítás.

Tétel:

TFH $f \in R[a, b]$ és $x_0 \in [a, b]$. Ekkor a

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

Ha egy $d \in [a, b]$ pontban f folytonos, akkor ott a F integrálfüggvény deriválható, és $F'(d) = f(d)$

Bizonyítás:

Legyen $d \in (a, b)$, és TFH $f \in C\{d\}$. Ez azt jelenti, hogy $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :$

$$\forall t \in [a, b], |t - d| < \delta : |f(t) - f(d)| < \varepsilon$$

TFH h -ra $d + h \in (a, b)$ teljesül. Ekkor

$$F(d + h) - F(d) = \int_{x_0}^{d+h} f - \int_{x_0}^d f = \int_d^{d+h} f$$

Mivel $f(d) = \frac{1}{h} \cdot \int_d^{d+h} f(d) dt$, ezért

$$\frac{F(d + h) - F(d)}{h} - f(d) = \frac{1}{h} \int_d^{d+h} (f(t) - f(d)) dt$$

Ha $0 < h < \delta$, akkor

$$\left| \frac{F(d + h) - F(d)}{h} - f(d) \right| < \frac{1}{h} \cdot \int_d^{d+h} |f(t) - f(d)| dt < \frac{1}{h} \cdot \int_d^{d+h} \varepsilon dt = \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \cdot h$$

Ha $-\delta < h < 0$, akkor

$$\left| \frac{F(d + h) - F(d)}{h} - f(d) \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot \int_{d+h}^d |f(t) - f(d)| dt < \varepsilon$$

Ezek alapján $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall |h| < \delta$ -ra

$$\left| \frac{F(d + h) - F(d)}{h} - f(d) \right| < \varepsilon$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{F(d + h) - F(d)}{h} - f(d) \right) = 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{F(d + h) - F(d)}{h} \right) = f(d)$$

vagyis $F \in D\{d\}$ és $F'(d) = f(d)$

□

11. A parciális integrálásra vonatkozó tétel határozott integrálra.

Tétel:

TFH $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in D[a, b]$, $f', g' \in R[a, b]$ Ekkor

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g$$

Bizonyítás:

Egyrészt

$$f \in D[a, b] \implies f \in C[a, b] \implies f \in R[a, b]$$

Mivel $g' \in R$, ezért $fg' \in R[a, b]$ és $f'g \in R[a, b]$. Így $f'g + fg' \in R[a, b]$

Másrészt fg primitív függvénye az $f'g + fg'$ függvénynek

A Newton-Leibniz-tétel szerint tehát

$$\int_a^b (fg' + f'g) = [fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

A határozott integrál additivitását felhasználva rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$$

□

12. A helyettesítéses integrálás szabálya határozott integrálra.

Tétel:

TFH $f \in C[a, b]$ és $g : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ függvény folytonosan deriválható. Ekkor

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g'.$$

Bizonyítás:

Tekintsük:

$$F(x) := \int_{g(\alpha)}^x f \quad (x \in [a, b]), \quad G(u) := \int_{\alpha}^u f \circ g \cdot g' \quad (u \in [\alpha, \beta])$$

integrálfüggvényeket. Megmutatjuk, hogy

$$(*) \quad \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = F(g(\beta)) = G(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g'$$

Egyrészt $f \in C[a, b] \implies F' = f$, másrészt $f \circ g \cdot g' \in C[\alpha, \beta] \implies G' = f \circ g \cdot g'$

Mivel $(F \circ g)' = F' \circ g \cdot g' = f \circ g \cdot g'$, ezért $(F \circ g - G)' = 0 \implies \exists c \in \mathbb{R} : F \circ g - G = c$.

Ugyanakkor $F(g(\alpha)) = 0 = G(\alpha) \implies c = 0$, következésképpen $F \circ g = G \implies F(g(\beta)) = G(\beta)$

(*) valóban teljesül.

□