Integrál kiszámítása

Tegyük fel, hogy $f : \underbrace{[a_1,\ b_1] \times [a_2,\ b_2]}_{I} \to \mathbb{R},\ f \in R(I)$

Legyen $x \in [a_1,\ b_1],\ f_x(y) := f(x,y) \quad (y \in [a_2,\ b_2]),\ m_f(x) := I_*(f_x),\ (m_f \in [a_1,\ b_1] \to \mathbb{R})$

Ekkor $m_f \in R[a_1,\ b_1]$ és $\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} m_f = \int_I f$

Bizonyítás

$K \in \mathcal{F}(\tau_1),\ L \in \mathcal{F}(\tau_2) \quad (\tau_1 \subset [a_1,\ b_1],\ \tau_2 \subset [a_2,\ b_2]),\ x \in K$

$\inf\{f_x(y) \mid y \in L\} \geq \inf\{f(\xi) \mid \xi \in K \times L\} \implies$

$\inf\{f_x(y) \mid y \in L\} \cdot |L| \geq \inf\{f(\xi) \mid \xi \in K \times L\} \cdot |L| \implies (\sum_L)$

$$m_f(x) = I_*(f_x) \geq s(f_x, \tau_2) \geq \sum_L \inf\{f(\xi) \mid \xi \in K \times L\} \cdot |L|$$

$$\inf\{m_f(x) \mid x \in K\} \geq \sum_L \inf\{f(\xi) \mid \xi \in K \times L\} \cdot |L| \implies$$

$$s(m_f, \tau_1) = \sum_K \inf\{m_f(x) \mid x \in K\} \cdot |K| \geq \sum_K \sum_L \inf\{f(\xi) \mid \xi \in K \times L\} \cdot |L| \cdot |K| = s(f, \tau)\ (\tau := \tau_1 \times \tau_2) \implies$$

$s(f, \tau) \leq s(m_f, \tau_1) \leq I_*(m_f) \implies (\sup)\ I_*(f) \leq I_*(m_f) \leq I^*(m_f)$

Hasonlóan kapjuk, hogy $I^*(m_f) \leq I^*(f)$

$f \in R(I) \implies I_*(f) = I^*(f) \implies I_*(m_f) = I^*(m_f) \implies m_f \in R[a_1,\ b_1]$

Megjegyzés: Ha $m_f(x) := I^*(f_x)$, vagy y-t rögzítjük, akkor az állítás analógiája igaz marad.

Szukcesszív ingergálás

Tegyük fel, hogy $\forall x \in [a_1,\ b_1] : f_x \in R[a_2,\ b_2]$ ekkor

$m_f(x) = I_*(f_x) = \int_{a_2}^{b_2} f_x = \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy \implies \int_{a_1}^{b_1} m_f(x)dx =$
$\int_{a_1}^{b_1} (\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy)dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dxdy$

Lebesgue-kritérium

$f : I \to \mathbb{R}$ korlátos $A \coloneqq \{x \in I \mid f \in C\{x\}\}$. Ekkor

$f \in R(I) \iff A$ **nullmértékű**, azaz

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists J_k \subset \mathbb{R}^n\ (k \in \mathbb{N}) : A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} J_k$ és $\sum_{k=0}^{\infty} |J_k| < \varepsilon$

Normáltartomány

Legyen $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt, $g, h \in U \to \mathbb{R},\ g, h \in C,\ g \leq h$

$\mathcal{N} \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid x \in U,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$

$f : \mathcal{N} \to \mathbb{R},\ f \in C \implies f \in R(\mathcal{N})$ és $\int_{\mathcal{N}} f = \int_U (\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\ dy)dx$

Megjegyzés: valójában az az érdekes, hogy az f tartója korlátos $(\text{supp} f \coloneqq \{x \in D_f \mid f(x) \neq 0\})$