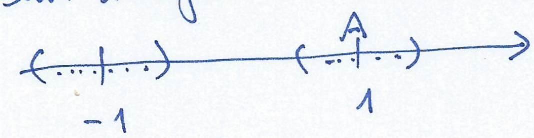
(Hf) 1. A feltétel a sűrűsödési pont fogalma, ami eltér a határérték fogalmától. Pl.

$$a_n=(-1)^n \quad (n\in\mathbb{N}) \quad \text{és} \quad A=1.$$

Ekkor a feladatban szereplő feltétel teljesül, de (a_n) divergens.



2. a) $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^3+n^2-2n}{n^3+1}}=1$$

Azt kell igazolni, hogy $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n>n_0$: $\left|\sqrt{\frac{n^3+n^2-2n}{n^3+1}}-1\right|<\varepsilon$.

Jelölje $x_n:=\frac{n^3+n^2-2n}{n^3+1}$! Ekkor $x_n\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x_n}\geq 0$ $(n\in\mathbb{N})$.

Legyen $\varepsilon>0$ rögzített!

$$\left|\sqrt{\frac{n^3+n^2-2n}{n^3+1}}-1\right|=\left|\sqrt{x_n}-1\right|=\left|\frac{(\sqrt{x_n}-1)(\sqrt{x_n}+1)}{\sqrt{x_n}+1}\right|=\frac{|x_n-1|}{\sqrt{x_n}+1}\leq$$

$$\leq\left(\sqrt{x_n}\geq 0\Rightarrow\sqrt{x_n}+1\geq 1\right)\leq|x_n-1|=$$

$$(*)\quad =\left|\frac{n^3+n^2-2n}{n^3+1}-1\right|=\left|\frac{n^3+n^2-2n-(n^3+1)}{n^3+1}\right|=\frac{|n^2-2n-1|}{n^3+1}=$$

$$=\left(n^2-2n-1=n^2-2n+1-2=(n-1)^2-2\geq 0,\ \text{ha}\ \underline{n\geq 3}\right)=$$

$$=\frac{n^2-2n-1}{n^3+1}\leq\frac{n^2}{n^3+1}\leq\frac{n^2}{n^3}=\underbrace{\frac{1}{n}<\varepsilon}$$

Legyen $n_0:=\max\left\{3,\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$. Ekkor ha $n>n_0$, akkor $(*)$ teljesül.

(Hf) 2b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^4+2n^2+1}{n^2+1} = +\infty.$

Azt kell igazolni, hogy $\forall P>0$-hoz $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n>n_0$: $\dfrac{n^4+2n^2+1}{n^2+1} > P$.

Legyen $P>0$ rögzített!

$$(*)\quad \frac{n^4+2n^2+1}{n^2+1} = \frac{(n^2+1)^2}{n^2+1} = n^2+1 > n^2 \geq \underbrace{n > P}.$$

Legyen $n_0 := [P]$. Ekkor ha $n>n_0$, akkor $(*)$ teljesül.

Másik megoldás

$$(*)\quad \frac{n^4+2n^2+1}{n^2+1} > \frac{n^4}{n^2+1} \geq \frac{n^4}{n^2+n^2} \;(\text{ha } n\geq 1) = \frac{n^4}{2n^2} = \frac{1}{2}n^2 \geq \underbrace{\frac{1}{2}n > P}$$

Legyen $n_0 := \max\{1, [2P]\}$. Ekkor ha $n>n_0$, akkor $(*)$ teljesül.

2c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+3n-1} - 2n\right) \qquad (n\geq 1)$

Azt kell igazolni, hogy $\forall P<0$-hoz $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n>n_0$: $\sqrt{n^2+3n-1}-2n < P$, azaz $2n-\sqrt{n^2+3n-1} > -P$. Legyen $P<0$ rögzített!

$$2n-\sqrt{n^2+3n-1} = \frac{\left(2n-\sqrt{n^2+3n-1}\right)\left(2n+\sqrt{n^2+3n-1}\right)}{2n+\sqrt{n^2+3n-1}} = \frac{4n^2-(n^2+3n-1)}{2n+\sqrt{n^2+3n-1}} =$$

$$(*)\quad = \frac{3n^2-3n+1}{2n+\sqrt{n^2+3n-1}} > \frac{3n^2-3n+1}{2n+\sqrt{n^2+3n}} \geq \frac{3n^2-3n+1}{2n+\sqrt{n^2+3n^2}} = \frac{3n^2-3n+1}{2n+\sqrt{4n^2}} =$$

$$= \frac{3n^2-3n+1}{2n+2n} = \frac{3n^2-3n+1}{4n} > \frac{3n^2-3n}{4n} = \underbrace{\frac{3}{4}(n-1) > -P}$$

Legyen $n_0 := \max\left\{1, \left[-\frac{4P}{3}+1\right]\right\}$. Ekkor ha $n>n_0$, akkor $(*)$ teljesül.