

Diszkrét matematika I. feladatok

Relációk II.

Negyedik alkalom (2025.03.03-07.)

Bemelegítő feladatok

1. Döntse el, mely reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív.

a) $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\} \subset \{1, 2, 3\}^2$

Megoldás: *Reflexív*, mert $(1, 1)$ is, $(2, 2)$ is és $(3, 3)$ is benne van. *Szimmetrikus*, mert minden (x, y) párra az (y, x) pár is benne van. *NEM antiszimmetrikus*, mert $(1, 2)$ és $(2, 1)$ is benne van. *Tranzitív*, mert minden elképzelhető pár benne van, így az a feltétel, hogy (x, y) és (y, z) tartalmazása esetén (x, z) is benne legyen "automatikusan" teljesül.

b) $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\} \subset \{1, 2, 3\}^2$

Megoldás: *Reflexív*, mert $(1, 1)$ is, $(2, 2)$ is és $(3, 3)$ is benne van. *Szimmetrikus*, mert minden (x, y) párra az (y, x) pár is benne van. *NEM antiszimmetrikus*, mert $(1, 2)$ és $(2, 1)$ is benne van. *NEM tranzitív*, mert $(2, 1)$ és $(1, 3)$ benne van, de $(2, 3)$ nincs.

c) $R_3 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\} \subset \{1, 2, 3, 4\}^2$

Megoldás: *Reflexív*, mert $(1, 1)$ is, $(2, 2)$ is $(3, 3)$ és $(4, 4)$ is benne van. *Szimmetrikus*, mert minden (x, y) párra az (y, x) pár is benne van. *NEM antiszimmetrikus*, mert $(1, 3)$ és $(3, 1)$ is benne van. *Tranzitív*, mert $(x, y) \in R_3$ azt jelenti, hogy vagy x is és y is páratlan, vagy azt, h mindkettő páros, és minden páratlan minden páratlannal relációban áll, és minden páros is minden párossal (az alaphalmazból).

d) $R_4 = \{(1, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (4, 4),$
 $(5, 2), (5, 3), (5, 5), (5, 2), (5, 4)\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

Megoldás: *NEM reflexív*, mert $(2, 2)$ NINCS benne. *NEM szimmetrikus*, mert minden $(5, 4)$ benne van, de $(4, 5)$ nincs benne. *NEM antiszimmetrikus*, mert $(2, 3)$ és $(3, 2)$ is benne van. *NEM tranzitív*, mert $(2, 3)$ és $(3, 2)$ benne van, de $(2, 2)$ nincs.

e) $R_5 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$

Megoldás: *NEM reflexív*, mert nincs benne $(1, 1)$. *Szimmetrikus*, mert minden (x, y) párra az (y, x) pár is benne van. *NEM antiszimmetrikus*, mert $(1, 2)$ és $(2, 1)$ is benne van. *NEM tranzitív*, mert $(2, 1)$ és $(1, 3)$ benne van, de $(2, 3)$ nincs.

2. Tekintsük az 1. feladat relációit. Melyik lesz ekvivalenciareláció? Ekvivalenciareláció esetében határozza meg az osztályfelbontást!

Megoldás: Ekvivalenciareláció az, ami reflexív és szimmetrikus és tranzitív; azaz R_1 és R_3 . R_1 szerint mindenki mindenkivel relációban áll, azaz csak egyetlen osztály van, ami a teljes alaphalmaz.

R_3 szerint minden páros minden párossal (de csak párosokkal), minden páratlan minden páratlannal (de csak páratlanokkal) áll relációban, azaz két osztály van: az alaphalmaz páros elemei alkotják az egyiket, az alaphalmaz páratlan elemei a másikat.

Gyakorló feladatok

3. Döntse el, mely reláció reflexív, irreflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív, továbbá határozza meg a relációk értelmezési tartományát és értékkészletét.

a) $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b \text{ páratlan}\}$

Megoldás: Minden páratlan pozitív egész minden másik páratlan pozitív egészszel (és saját magával) áll relációban. Páros számok pedig senkivel sem. Mivel $(2, 2)$ nincs benne, így NEM reflexív. Mivel $(1, 1)$ benne van, így NEM is irreflexív. Mivel $a \cdot b = b \cdot a$, így (a, b) és (b, a) vagy egyszerre van benne vagy egyszerre nincs benne, azaz szimmetrikus. Mivel $(1, 3)$ és $(3, 1)$ is benne van, így NEM antiszimmetrikus. Ha (a, b) benne van, akkor a is és b is páratlan; ha (b, c) benne van, akkor c is páratlan, és így (a, c) is benne van: tehát tranzitív.

Értelmezési tartománya és értékkészlete is: a pozitív páratlan egész számok halmaza.

b) $T_X = \{(A, B) \in 2^X \times 2^X \mid A \cap B \neq \emptyset\}$, ahol X adott halmaz

Megoldás: Mivel $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, ezért NEM reflexív ($\emptyset \in 2^X$). Ha az X halmaz nem az üreshalmaz, akkor $X \cap X = X \neq \emptyset$, és így NEM is irreflexív ($X \in 2^X$). (De ha $X = \emptyset$, akkor irreflexív, hiszen akkor $2^X = \{\emptyset\}$.) Mivel $A \cap B = B \cap A$, ezért ha A relációban áll B -vel, akkor fordítva is relációban állnak, ezért szimmetrikus. Ha X legalább két elemet tartalmaz (pl. $X = \{1, 2, \dots\}$), akkor $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \in 2^X$ halmazokra: $\{1\} \cap \{1, 2\} \neq \emptyset$, $\{1, 2\} \cap \{2\} \neq \emptyset$, viszont $\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$, ezért NEM tranzitív. (Ha viszont X halmaz legfeljebb egy elemű, akkor nincs ilyen ellenpélda, akkor tranzitív.) A szimmetria miatt az értelmezési tartomány és az értékkészlet megegyezik, és ez a hatványhalmazból kivéve az üres halmazt: $2^X \setminus \{\emptyset\}$, mivel minden nemüres részhalmaz valakivel (legalább saját magával) relációban áll.

c) $S = \{(M, N) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \exists P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \det P \neq 0, M = P^{-1}NP\}$

Megoldás: $P = I$ egységmátrix választással minden N mátrix saját magával relációban áll, azaz *reflexív*. Ha $M = P^{-1}NP$, akkor $P' = P^{-1}$ választással $M = P'NP'^{-1}$ (hiszen $P'^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P$), és így $N = P'^{-1}NP'$, ezért *szimmetrikus*. Ha $M = P_1^{-1}NP_1$ és $N = P_2^{-1}TP_2$, akkor $M = P_1^{-1}P_2^{-1}TP_2P_1$, és így $P = P_2P_1$ választással ($P^{-1} = (P_2P_1)^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}$ miatt) $M = P^{-1}TP$, ezért *tranzitív* is. Tehát ez egy ekvivalenciareláció, értelmezési tartománya és értékkészlete is a teljes alaphalmaz: $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

4. Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat.

a) Adott $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, ha $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$.

Megoldás: *Reflexív*, mert $|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|$.

Szimmetrikus, mert ha $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$ akkor $|\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|$.

Tranzitív, mert ha $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$ és $|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$, akkor $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$.

Két vektor ekvivalens, ha ugyanaz a hosszuk, azaz az egy ekvivalenciaosztályt alkotó vektorok végpontjai egy adott sugarú, origó körüli kört alkotnak. Tehát az ekvivalenciaosztályok az origó körüli körvonalak (beleértve magát az origót, mint nulla sugarú kört).

b) Legyen $m > 1$ egész és $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén $a \sim b$, ha $m \mid (a - b)$.

Megoldás: *Reflexív*, mert $a - a = 0$, és 0 bármely egész m számmal osztható.

Szimmetrikus, mert $b - a = -(a - b)$, azaz ha $a - b$ osztható m -mel ($a - b = k \cdot m$), akkor $b - a = (-k) \cdot m$ is osztható vele.

Tranzitív, mert ha $a - b = k_1 \cdot m$, és $b - c = k_2 \cdot m$, akkor $a - c = (a - b) + (b - c) = (k_1 + k_2) \cdot m$.

Az m -mel maradékosan osztva ugyanazt az osztási maradékot adó számok alkotnak egy ekvivalenciaosztályt.

- c) Legyen $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ egy nem-nulla vektor és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, ha $\mathbf{u}^T \mathbf{z} = \mathbf{v}^T \mathbf{z}$.

Megoldás: *Reflexív*, mert $\mathbf{u}^T \mathbf{z} = \mathbf{u}^T \mathbf{z}$.

Szimmetrikus, mert ha $\mathbf{u}^T \mathbf{z} = \mathbf{v}^T \mathbf{z}$, akkor $\mathbf{v}^T \mathbf{z} = \mathbf{u}^T \mathbf{z}$.

Tranzitív, mert ha $\mathbf{u}^T \mathbf{z} = \mathbf{v}^T \mathbf{z} = \mathbf{w}^T \mathbf{z}$, akkor $\mathbf{u}^T \mathbf{z} = \mathbf{w}^T \mathbf{z}$.

Az ekvivalenciaosztályok a \mathbf{z} vektorra merőleges egyenesek. (Egy ilyen egyenesbe eső pontokba mutató vektorok ugyanazt a skaláris szorzatot adják \mathbf{z} -vel.)

Érdekes feladatok

5. Konstruáljon az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazon olyan relációt, amely

- a) reflexív és nem irreflexív

Megoldás: ami reflexív, az biztosan nem irreflexív (ha az alaphalmaz nem üres), azaz elég csak a reflexivitásra ügyelni. Ahhoz csak az kell, hogy az alaphalmaz minden eleme saját magával relációban álljon. Azaz két jó megoldás a sok lehetséges közül: $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$, illetve $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3)\}$.

- b) antiszimmetrikus és nem szimmetrikus

Megoldás: Mivel antiszimmetrikus, ezért *két különböző* elem nem állhat mindkét irányban relációban egymással, erre ügyelni kell. Mivel nem szimmetrikus, így legalább egy elempárra sérülnie kell a szimmetria feltételének, azaz kell olyan (x, y) pár a relációba, amire (y, x) pár nincs benne. Ez könnyen megoldható, például úgy, hogy $R = \{(1, 2)\}$. De jó megoldás lehet az is, hogy $R = \{(1, 3), (2, 2), (4, 4)\}$ vagy $R = \{(1, 4), (1, 3)\}$.

- c) szimmetrikus és nem antiszimmetrikus

Megoldás: Mivel nem antiszimmetrikus, így sérülnie kell annak, hogy *"két különböző elem nem állhat mindkét irányban relációban egymással"*, vagyis kell bele két különböző elemre mindkét irányú relációban állás. Mivel szimmetrikus, így nem lehet benne olyan, hogy két elem csak az egyik irányban áll relációban. Egy jó megoldás a sok lehetséges közül: $R = \{(1, 3), (3, 1), (4, 4)\}$. De jó lenne az is, hogy $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$, vagy az, hogy $R = \{(1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1)\}$, és még sok más jó megoldás is van.

- d) nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm

Megoldás: Nem reflexív, ezt elérhetjük azzal, hogy valamelyik elem nem áll saját magával relációban (pl. az $(1, 1) \notin R$). Nem tranzitív, ezt elérhetjük azzal, ha például $(1, 2), (2, 3) \in R$ de $(1, 3) \notin R$. Nem szimmetrikus, ezt úgy érhetjük el, hogy ha $(1, 2) \in R$ (ezt már beletettük), akkor $(2, 1) \notin R$. Nem antiszimmetrikus, ehhez az kell, hogy legyen két különböző elem, ami mindkét irányban relációban áll egymással, azaz pl. $(3, 2), (2, 3) \in R$. Nem trichotóm, azaz nem minden különböző elem áll vagy az egyik vagy a másik irányban relációban, vagy valaki saját magával relációban áll (mindkettő elrontja a trichotómiát). Azaz például jó megoldás: $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ (ebben sem a $(3, 4)$ sem a $(4, 3)$ nincs benne). Vagy szintén jó lenne $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$. És még egyéb megoldások is lehetségesek.

6. a) Lehet-e egy reláció egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus? Illetve reflexív és irreflexív? Állítását indokolja.

Megoldás: Az "egyenlőség" reláció (az A alaphalmazon, azaz $\{(a, a) : a \in A\}$) például szimmetrikus is és antiszimmetrikus is, azaz lehetséges.

Ha $R \subseteq A \times A$ reláció *reflexív*, az azt jelenti, hogy $\forall x \in A : (xRx)$. Ha $R \subseteq A \times A$ reláció *irreflexív*, az azt jelenti, hogy $\forall x \in A : \neg(xRx)$. Ha tehát $R \subseteq A \times A$ reláció *reflexív* is és *irreflexív* is, az azt jelenti, hogy $\forall x \in A : (xRx) \wedge \neg(xRx)$. De $(xRx) \wedge \neg(xRx)$ egy azonosan hamis állítás, így $\forall x \in A : (xRx) \wedge \neg(xRx)$ csak akkor lehetne igaz, ha $A = \emptyset$ az üres halmaz lenne az alaphalmaz (amit általában nem szoktunk megengedni, de ez "ízlés" — definíció — kérdése).

- b) Bizonyítsuk be, hogy minden reláció, amely egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus, egyúttal tranzitív is.

Megoldás: Az, hogy az $R \subseteq A \times A$ reláció *szimmetrikus*, az azt jelenti, hogy $\forall x, y \in A : (xRy \Rightarrow yRx)$. Az, hogy R reláció *antiszimmetrikus*, az azt jelenti, hogy $\forall x, y \in A : (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$. Mivel $\forall x, y \in A : (xRy \Rightarrow xRy) \Leftrightarrow (\neg xRy \vee xRy)$ mindig IGAZ, ezért ha R *szimmetrikus* is és *antiszimmetrikus* is, akkor $\forall x, y \in A : (xRy \Rightarrow xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$, azaz A minden eleme csak saját magával állhat relációban (de nem feltétlenül kell relációban állnia saját magával). Tehát az A alaphalmazon értelmezett, egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus reláció az az A halmaz "egyenlőség" relációjának a megszorítása, tehát $(xRy) \Rightarrow x = y$ miatt, $\forall x, y, z \in A : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow x = y = z$, és ha xRy , akkor xRx , és így xRz is (mert $z = x$).

Beadandó házi feladatok

7. Konstruáljon az \mathbb{Z} halmazon olyan relációt, amely

- a) tranzitív és nem irreflexív
- b) reflexív és antiszimmetrikus
- c) nem tranzitív és dichotóm

Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat).

(részenként 1/3 pont)

8. Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat. (részenként 1/2 pont)

- a) Adott $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $x \sim y$, ha $x - y \in \mathbb{Z}$.
- b) Adott $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ és $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ esetén $\mathbf{n} \sim \mathbf{m}$, ha $n_1 m_2 = m_1 n_2$.

Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat).

9. Tekintsük az alábbi relációkat! Döntse el, hogy azok ekvivalenciarelációk-e. Ha nem, mely tulajdonságokat teljesítik? (részenként 1/2 pont)

a) Adott $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, ha $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}$.

b) Adott $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, ha $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^n \mathbf{u}$ valamely $n \in \mathbb{Z}$ egészre.

Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat).

További gyakorló feladatok otthonra

10. Legyenek $R, S \subseteq A \times A$ szimmetrikus relációk. Bizonyítsuk be, hogy $R \circ S$ akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $R \circ S = S \circ R$.

Megoldás: Azt, hogy egy T reláció szimmetrikus, úgy is megfogalmazhatjuk, hogy azonos a saját inverzrelációjával: $T^{-1} = T$. Tehát a feladat szerint $R^{-1} = R$ és $S^{-1} = S$. A $T = R \circ S$ reláció pontosan akkor szimmetrikus, ha $T^{-1} = T$, vagyis ha $(R \circ S)^{-1} = R \circ S$. Mivel $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$ (ez általában *tetszőleges* $R, S \subseteq A \times B$ relációkra is igaz lenne), ezért, $R^{-1} = R$ és $S^{-1} = S$ kihasználásával $T^{-1} = (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R$. Tehát $T^{-1} = T$ akkor és csak akkor, ha $S \circ R = T^{-1} = T = R \circ S$.

11. Tekintsük a következő R és R' relációt.

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és

$$R = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 5)\} \subset A \times A$$

- $A' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ és

$$R' = \{(1, 1), (1, 5), (1, 6), (1, 8), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 7), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (5, 6), (5, 8), (6, 1), (6, 5), (6, 6), (6, 8), (7, 3), (7, 7), (8, 1), (8, 5), (8, 6), (8, 8)\} \subset A' \times A'$$

a) Mutassa meg, hogy az R reláció ekvivalenciareláció.

Megoldás: *Reflexív*, mert $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) \in R$.

Szimmetrikus, mert különböző elemek relációban csak így vannak benne: $(1, 5), (5, 1), (3, 4), (4, 3) \in R$, vagyis ha egyik irányban relációban állnak, akkor fordított irányban is.

Tranzitív, mert nem található olyan $x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (sem három különböző, sem úgy, hogy valamelyik kettő megegyezne), hogy $(x, y), (y, z) \in R$ de $(x, z) \notin R$.

b) Határozza meg az A halmaz osztályfelbontását (azaz az $\{[a] : a \in A\}$ halmazt).

Megoldás: Az 1-gyel relációban álló elemek halmaza: $\{1, 5\}$, a 2-vel relációban álló elemek halmaza: $\{2\}$, a 3-mal relációban álló elemek halmaza: $\{3, 4\}$, a 5-tel relációban álló elemek halmaza: $\{1, 5\}$, a 4-gyel relációban álló elemek halmaza: $\{3, 4\}$, azaz: $\{\{1, 5\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$ az osztályfelbontás.