2. zárthelyi dolgozat, 2022. május 13.
Analízis III.

Programtervező informatikus BSc szak

A szakirány

Megoldások

1. *(13 pont)* Legyen

$$f(x,y) := \frac{x-y}{x+y} \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\neq -y).$$

Írja fel az f függvény $\mathbf{a} := (1,1)$ ponthoz tartozó első Taylor-polinomját a hozzá tartozó Lagrange-féle maradéktaggal együtt!

Megoldás. Mivel $f(1,1)=0$ és

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{2y}{(x+y)^2}, \qquad \partial_1 f(1,1) = \frac{1}{2},$$

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{-2x}{(x+y)^2}, \qquad \partial_2 f(1,1) = -\frac{1}{2},$$

$$\partial_{12} f(x,y) = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} = \partial_{21} f(x,y), \qquad \partial_{12} f(1,1) = 0 = \partial_{21} f(1,1),$$

$$\partial_{11} f(x,y) = \frac{-4y}{(x+y)^3},$$

$$\partial_{22} f(x,y) = \frac{4x}{(x+y)^3},$$

ezért tetszőleges $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, ill. $\tau\in(0,1)$ esetén

$$T_{\mathbf{a},1}(x,y) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) = \frac{1}{2}(x-y),$$

ill. a

$$\xi := (1,1) + \tau(x-1, y-1) = (1+\tau x-\tau, 1+\tau y-\tau)$$

elemmel a Lagrange-féle maradéktag

$$R_2(x,y) = \frac{1}{2!}\left\{\partial_{11} f(\xi)\cdot(x-1)^2 + 2\partial_{12} f(\xi)\cdot(x-1)(y-1) + \partial_{22} f(\xi)\cdot(y-1)^2\right\}.$$

2. *(18 pont)* Határozza meg az

$$f(x,y) := x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit, majd az abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit az

$$\Omega := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x, y \geq 0, \; x + y \leq 9\right\}$$

halmazon!
Megoldás.

1. lépés. Mivel

$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (2x - 2, 2y - 2) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

és

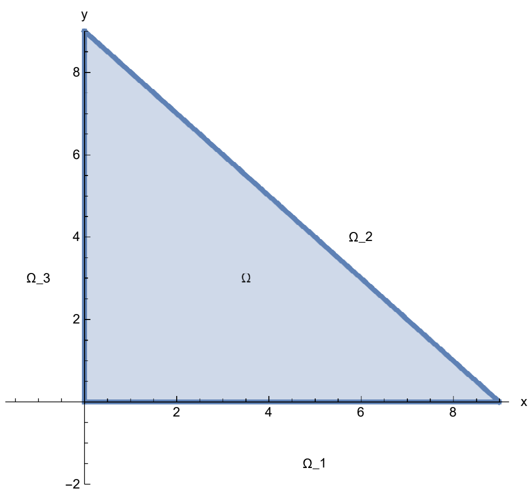
$$f'(x,y) = (0,0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y) = (1,1),$$

ill.

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

ezért $f''(1,1)$ pozitív definit. Következésképpen f-nek az $(1,1)$ pontban lokális minimuma van és $f(1,1) = -5$.

2. lépés. Az Ω halmaz nem más, mint a $(0,0)$, $(9,0)$ és a $0,9)$ csúcspontú zárt háromszöglap (vö. 1. ábra), így $(1,1) \in \Omega$. Az f függvény folytonos, ezért Weierstraß tétele szerint a



1. ábra.

függvénynek van abszolút maximuma és abszolút minimuma az Ω halmazon. Világos, hogy

$$\partial\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3,$$

ahol

$$\Omega_1 := \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq 9\right\}, \qquad \Omega_2 := \left\{(x,9-x) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq 9\right\},$$

ill.

$$\Omega_2 := \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq y \leq 9\right\}$$

és

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x,0) = x^2 - 2x - 3 & ((x,y) \in \Omega_1), \\ \\ f(x,9-x) = 2x^2 - 18x + 60 & ((x,y) \in \Omega_2), \\ \\ f(0,y) = y^2 - 2y - 3 & ((x,y) \in \Omega_3). \end{array} \right\}$$

Ezért

- az f függvény az Ω_1 halmazon az $(1,0)$ pontban veszi fel legkisebb, a $(9,0)$ pontban pedig a legnagyobb értékét, hiszen

  $$x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

  így

  $$\begin{array}{c}\min\\ \max\end{array} \{f(x,y) \in \mathbb{R} : \; (x,y) \in \Omega_1\} = \begin{array}{c}\min\\ \max\end{array} \{f(1,0), \; f(9,0)\} = \begin{array}{l}-4,\\ 60.\end{array}$$

- az f függvény az Ω_2 halmazon a $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$ pontban veszi fel legkisebb, a $(9,0)$ pontban pedig a legnagyobb értékét, hiszen

  $$2x^2 - 18x + 60 = 2\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{39}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

  így

  $$\begin{array}{c}\min\\ \max\end{array} \{f(x,y) \in \mathbb{R} : \; (x,y) \in \Omega_2\} = \begin{array}{c}\min\\ \max\end{array} \left\{f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right), \; f(9,0)\right\} = \begin{array}{l}39/2\\ 60.\end{array}$$

- az f függvény az Ω_3 halmazon a $(0,1)$ pontban veszi fel legkisebb, a $(0,9)$ pontban pedig a legnagyobb értékét, hiszen

  $$y^2 - 2y - 3 = (y-1)^2 - 4 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

  így

  $$\begin{array}{c}\min\\ \max\end{array} \{f(x,y) \in \mathbb{R} : \; (x,y) \in \Omega_1\} = \begin{array}{c}\min\\ \max\end{array} \{f(0,1), \; f(0,9)\} = \begin{array}{l}-4,\\ 60.\end{array}$$

Tehát az f függvény abszolút szélsőértékei:

$$\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{f(x,y)\in\mathbb{R}:\quad (x,y)\in\Omega\} = \begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{-5,-4,60,39/2\} = \begin{matrix}-5\\ 60\end{matrix},$$

abszolút minimumot az $(1,1)$ pontban, abszolút maximumot pedig a $(0,9)$ és a $(9,0)$ pontban vesz fel.

3. *(9 pont)* Számítsa ki az

$$\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 y e^{(x-1)^2}\,dx\,dy$$

integrál értékét!

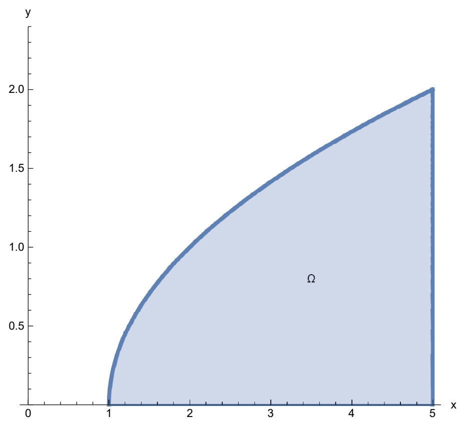
Megoldás. Világos, hogy

$$\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 y e^{(x-1)^2}\,dx\,dy = \int_\Omega f,$$

ahol

$$\Omega := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\in[0,2],\ 1+y^2\le x\le 5\right\}, \qquad f(x,y) := y e^{(x-1)^2} \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$

hiszen Ω az y-tengelyre nézve normáltartomány (vö. 2. ábra) és f folytonos. Mivel Ω az



2. ábra.

x-tengelyre nézve is normáltartomány:

$$\Omega = N_x = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[1,5],\ 0\le y\le\sqrt{x-1}\right\}$$

és f folytonos, ezért

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 y e^{(x-1)^2}\, dx\, dy &= \int_\Omega f = \int_1^5 \left(\int_0^{\sqrt{x-1}} y e^{(x-1)^2}\, dy \right) dx = \\ &= \int_1^5 \left[\frac{y^2}{2} e^{(x-1)^2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x-1}} dx = \int_1^5 \frac{x-1}{2} e^{(x-1)^2}\, dx = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \int_1^5 2(x-1) e^{(x-1)^2}\, dx = \frac{1}{4} \left[e^{(x-1)^2} \right]_1^5 = \frac{e^{16}-1}{4}.\end{aligned}$$

4. *(10 pont)* Legyen $a, b \in \mathbb{R}$: $b > 0$, $a > b\sqrt{2}$. Írja le az

$$x + y + z = a, \qquad x^2 + y^2 = b^2, \qquad z = 0$$

egyenletekkel határolt korlátos és zárt térbeli Ω tartományt, majd számítsa ki Ω Jordan-mértékét (térfogatát)!

Megoldás. A kérdéses Ω tartomány a $x + y + z = a$ egyenletű sík alatti és az xy-síkban ($z = 0$) lévő

$$H := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le b^2 \right\}$$

körlap feletti hengerszerű test, hiszen a sík a koordinátatengelyeket az $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ és $(0, 0, a)$ pontokban metszi, így $a > b\sqrt{2}$ következtében a sík a $z = 0$ sík felett vág bele a hengerbe. Ezért a kérdéses ponthalmaz Jordan-mértéke (térfogata) például a

$$V(\Omega) = \iint_H (a - x - y)\, dx\, dy$$

kettős integrállal is kiszámítható. Ennek az integrálnak a kiszámításához síkbeli polárkoordinátás helyettesítést használunk. Ha

$$\Phi(r, \varphi) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \qquad ((r, \varphi) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi]),$$

akkor

$$H = \left\{ \Phi(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \ r \in [0, b], \varphi \in [0, 2\pi] \right\},$$

ezért

$$\begin{aligned}V(\Omega) &= \int_0^b \left(\int_0^{2\pi} (a - r\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)) \cdot r\, d\varphi \right) dr = \\ &= \int_0^b \left[ar\varphi - r^2\sin(\varphi) + r^2\cos(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr = \\ &= \int_0^b 2\pi a r\, dr = \left[2\pi a \frac{r^2}{2} \right]_0^b = ab^2\pi.\end{aligned}$$