Összetett függvény deriváltja

Tegyük fel, hogy $g \in \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n,\ g \in D\{a\},\ f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ f \in D\{g(a)\}$

Ekkor $f \circ g \in D\{a\},\ (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Megjegyzés:

- $g \in D\{a\} \implies a \in \text{int } D_g$ és $f \in D\{g(a)\} \implies g(a) \in \text{int } D_f$
- $f \circ g \in \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ és $f'(g(a)) \cdot g'(a) \in \mathbb{R}^{m \times s}$
- $G \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q,\ G \in D\{b\}$ ekkor $G(b+h) - G(b) = G'(b) \cdot h + \tilde{\eta}(h) \cdot ||h||$

Legyen $x := b + h \implies G(x) - G(b) = G'(b)(x-b) + \tilde{\eta}(x-b) \cdot ||x-b|| =$
$G'(b)(x-b) + \eta(x) \cdot ||x-b|| \quad (\lim_b \eta = 0 =: \eta(b) \text{ azaz } \eta \in C\{b\})$

Bizonyítás

$$f \circ g(x) - f \circ g(a) = f(g(x)) - f(g(a)) = f'(g(a)) \cdot (g(x) - g(a)) + \tilde{\eta}(g(x)) \cdot ||g(x$$
$$= f'(g(a)) \cdot (g'(a)(x-a) + \eta^*(x) \cdot ||x-a||) + \tilde{\eta}(g(x)) \cdot ||g(x) - g(a)||$$
$$= f'(g(a)) \cdot g'(a) \cdot (x-a) + f'(g(a)) \cdot \eta^*(x) \cdot ||x-a|| + \tilde{\eta}(g(x)) \cdot ||g(x) - g(a)||$$
$$= f'(g(a)) \cdot g'(a) \cdot (x-a) + \underbrace{[f'(g(a)) \cdot \eta^*(x) + \tilde{\eta}(g(x)) \cdot \frac{||g(x) - g(a)||}{||x-a||}]}_{=:\, \eta(x)} \cdot ||x-a||$$

Ahol $\lim_{g(a)} \tilde{\eta} = 0 =: \tilde{\eta}(g(a)),\ \lim_a \eta^* = 0 =: \eta^*(a)$

Belátjuk, hogy $\lim_0 \eta = 0 \quad$ ($|||.|||$ most mátrixnormát jelöl)

$$||\eta(x)|| \leq |||f'(g(a))||| \cdot ||\eta^*(x)|| + ||\tilde{\eta}(g(x))|| + \underbrace{\frac{||g(x) - g(a)||}{||x-a||}}_{(*)}$$

$$(*) = \frac{||\, g'(a)(x-a) + \eta^*(x) \cdot ||x-a||\, ||}{||x-a||} \leq \frac{|||g'(a)||| \cdot ||x-a|| + ||\eta^*(x)|| \cdot ||x-a||}{||x-a||} = |||g'(a)||| + ||\eta^*(x)||$$

Így a felsőbecslésben két konstans (mátrixnormák) és 0-ba tartó ($x \to a$) sorozatok vannak így $\eta(x) \to 0\ (x \to a)$