Numerikus módszerek 2.

9. előadás: Spline-interpoláció B-spline-okkal

Krebsz Anna

ELTE IK

Tartalomjegyzék

Definíció:

Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény tartója* a következő valós számhalmaz

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x\in\mathbb{R} : f(x)\neq 0\}}.$$

$\Omega_\infty := \{\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ alappontrendszer
$S_\ell(\Omega_\infty)$: az Ω_∞ alappontrendszeren értelmezett ℓ-edfokú spline-ok halmaza.

Definíció: B-spline-ok

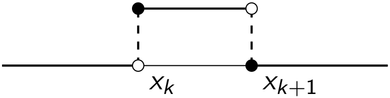
A $B_{\ell,k}\in S_\ell(\Omega_\infty)$ spline-okat *B-spline-oknak* nevezzük, ha

1. $B_{\ell,k}(x)\geq 0 \quad (\forall\, x\in\mathbb{R})$,
2. $\operatorname{supp}(B_{\ell,k})$ minimális,
3. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} B_{\ell,k}(x)\equiv 1 \quad (\forall\, x\in\mathbb{R})$.

Nulladfokú B-spline-ok

$\ell = 0$ esetben a B-spline:

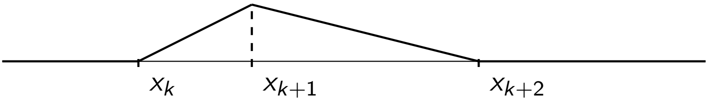
$$B_{0,k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in [x_k; x_{k+1}) \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$



Elsőfokú B-spline-ok, "Kalap függvények"

$\ell = 1$ esetben a B-spline

$$B_{1,k}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} & \text{ha } x \in [x_k; x_{k+1}) \\ \frac{x_{k+2}-x}{x_{k+2}-x_{k+1}} & \text{ha } x \in [x_{k+1}; x_{k+2}) \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$



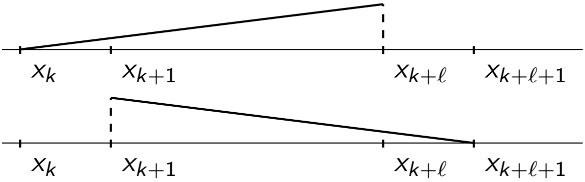
B-spline-ok

Tétel: Rekurzió

A B-spline-okra a következő rekurzió teljesül:

$$B_{\ell,k}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+\ell} - x_k} \cdot B_{\ell-1,k}(x) + \\ + \frac{x_{k+\ell+1} - x}{x_{k+\ell+1} - x_{k+1}} \cdot B_{\ell-1,k+1}(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Biz. nélkül. A lineáris szorzók alakja:



Tartalomjegyzék

Tétel Spline előállítása B-spline-okkal

$$\forall\, S \in S_\ell(\Omega_\infty) \quad \exists\, c_k \in \mathbb{R}\ (k \in \mathbb{N}): \quad S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot B_{\ell,k}(x)$$

$$\forall\, S \in S_\ell(\Omega_n) \quad \exists\, c_{-\ell}, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}: \quad S(x) = \sum_{k=-\ell}^{n-1} c_k \cdot B_{\ell,k}(x)$$

Emlékeztető: $\dim S_\ell(\Omega_n) = n + \ell$, így B-spline-okból egy $n + \ell$ elemű bázisra van szükségünk az interpolációs spline előállításához.

Biz. nélkül.

Tétel: Rekurzió a B-spline deriváltjára

A B-spline deriváltjára a következő rekurzió teljesül:

$$B'_{\ell,k}(x) = \frac{\ell}{x_{k+\ell} - x_k} \cdot B'_{\ell-1,k}(x) -$$
$$- \frac{\ell}{x_{k+\ell+1} - x_{k+1}} \cdot B'_{\ell-1,k+1}(x) \quad (x \in \mathbb{R},\ l \geq 1).$$

Tétel: B-spline integrálja

A B-spline integrálja a következő:

$$\int_{-\infty}^{x} B_{\ell,k}(t)\,dt = \left(\frac{x_{k+\ell+1} - x_{k+1}}{\ell + 1}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{\ell+1,k}(x)$$

Biz. nélkül.

Tétel: Spline korlátja

Legyen $S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k B_{\ell,k}(x)$,

$$\min_i c_i \leq S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k B_{\ell,k}(x) \leq \max_i c_i$$

Tétel: Spline deriváltja

Legyen $S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k B_{\ell,k}(x)$, ekkor $\ell \geq 1$-re

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k B_{\ell,k}(x)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k B_{\ell-1,k}(x),$$

$$\text{ahol } \; d_k = \ell \cdot \left(\frac{c_k - c_{k-1}}{x_{k+\ell} - x_k}\right).$$

Tétel: Spline integrálja

Legyen $S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k B_{\ell,k}(x)$, ekkor

$$\int_{-\infty}^{x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k B_{\ell,k}(t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k B_{\ell+1,k}(x),$$

$$\text{ahol } f_k = \frac{1}{\ell+1} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\ell} c_k (x_{k+\ell+1} - x_k).$$

Biz. nélkül.

Másodfokú B-spline-ok egyenletes felosztáson

$\ell = 2$ esetben a B-spline a $h_k \equiv h$ esetben

$$B_{2,k}(x) =$$

$$= \frac{1}{2h^2} \cdot \begin{cases} (x - x_k)^2, & x \in [x_k; x_{k+1}] \\ h^2 + 2h(x - x_{k+1}) - 2(x - x_{k+1})^2, & x \in [x_{k+1}; x_{k+2}] \\ (x_{k+3} - x)^2, & x \in [x_{k+2}; x_{k+3}] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Biz. gyakorlaton.

Harmadfokú B-spline-ok egyenletes felosztáson

$\ell = 3$ esetben a B-spline a $h_k \equiv h$ esetben

$$B_{3,k}(x) = \frac{1}{6h^3}\cdot$$
$$\cdot \begin{cases} (x-x_k)^3, & I_1 \\ h^3 + 3h^2(x-x_{k+1}) + 3h(x-x_{k+1})^2 - 3(x-x_{k+1})^3, & I_2 \\ h^3 + 3h^2(x_{k+3}-x) + 3h(x_{k+3}-x)^2 - 3(x_{k+3}-x)^3, & I_3 \\ (x_{k+4}-x)^3, & I_4 \\ 0 & \text{kül.} \end{cases}$$

ahol $I_1 := [x_k; x_{k+1}]$, $I_2 := [x_{k+1}; x_{k+2}]$, $I_3 := [x_{k+2}; x_{k+3}]$ és $I_4 := [x_{k+3}; x_{k+4}]$.

Biz. gyakorlaton.

Tartalomjegyzék

Interpolációs spline előállítása B-spline-okkal

Tétel Lineáris interpolációs spline előállítása B-spline-okkal

Tetszőleges $x_{-1}, x_0, \ldots, x_n$ alappontrendszer és $f(x_0), \ldots, f(x_n)$ függvényértékek esetén az interpolációs spline

$$S(x) = \sum_{k=-1}^{n-1} f(x_{k+1}) \cdot B_{1,k}(x) \;\; (i = 0, \ldots, n).$$

Biz.:

$$B_{1,k}(x_i) = \delta_{i,k+1} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \; i = k+1 \\ 0 & \text{ha } \; i \neq k+1 \end{cases}$$

$$S(x_i) = \sum_{k=-1}^{n-1} f(x_{k+1}) \cdot \delta_{i,k+1} = f(x_i) \quad (i = 0, \ldots, n)$$

Másodfokú interpolációs spline előállítása B-spline-okkal:

Tetszőleges $x_{-2}, x_{-1}, x_0, \ldots, x_n$ egyenletes felosztású alappontrendszer ($h \equiv h_k$) esetén

$$S_2(x) = \sum_{k=-2}^{n-1} c_k \cdot B_{2,k}(x)$$

alakú spline-t keresünk, melyre adott $f(x_0), \ldots, f(x_n)$ függvényértékek esetén az interpolációs feltételt kielégíti

$$f(x_i) = S_2(x_i), \ \ (i = 0, \ldots, n).$$

Az egyenletes felosztáson megadott másodfokú B-spline és deriváltjának képletei, hogy az alappontokban felvett értékeket értékeket ellenőrizni tudjuk:

$$B_{2,k}(x) =$$
$$= \frac{1}{2h^2} \cdot \begin{cases} (x - x_k)^2, & x \in [x_k; x_{k+1}] \\ h^2 + 2h(x - x_{k+1}) - 2(x - x_{k+1})^2, & x \in [x_{k+1}; x_{k+2}] \\ (x_{k+3} - x)^2, & x \in [x_{k+2}; x_{k+3}] \end{cases}$$

A deriváltra:

$$B'_{2,k}(x) = \frac{1}{2h^2} \cdot \begin{cases} 2(x - x_k), & x \in [x_k; x_{k+1}] \\ 2h - 4(x - x_{k+1}), & x \in [x_{k+1}; x_{k+2}] \\ -2(x_{k+3} - x), & x \in [x_{k+2}; x_{k+3}] \end{cases}$$

Interpolációs spline előállítása B-spline-okkal

A spline alappontokban felvett értékei:

$$B_{2,k}(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } \ i = k+1 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } \ i = k+2 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az interpolációs feltételt felírva a spline-ra $(i = 0, \ldots, n)$-re

$$f(x_i) = S_2(x_i) = \sum_{k=-2}^{n-1} c_k \cdot B_{2,k}(x_i) = \frac{1}{2}\left(c_{i-1} + c_{i-2}\right).$$

A spline deriváltjának az alappontokban felvett értékei:

$$B'_{2,k}(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{ha } \ i = k+1 \\ -\frac{1}{h} & \text{ha } \ i = k+2 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Hozzá véve a peremfeltételt x_0-ban:

$$f'(a) = f'(x_0) = S_2'(x_0) = \sum_{k=-2}^{n-1} c_k \cdot B_{2,k}'(x_0) = -\frac{1}{h}c_{-2} + \frac{1}{h}c_{-1}.$$

A $c_{-2}, \dots, c_{n-1}$ együtthatókat a következő kétátlós LER-ből fogjuk meghatározni:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{h} & \frac{2}{h} & & \\ 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{-2} \\ c_{-1} \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} f'(a) \\ f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

Megjegyzések:

- Az LER első két egyenlete külön megoldható, utána már csak be kell helyettesíteni a többi egyenletbe. (A mátrix felső háromszög alakú.)
- Az $f'(b)$ peremfeltétellel ugyanígy dolgozunk, ekkor az előző LER első egyenlete hiányzik, helyette egy hasonló utolsó egyenlet lép be. Ebben az esetben a LER felső háromszögmátrixú, alulról kezdjük a behelyettesítést.

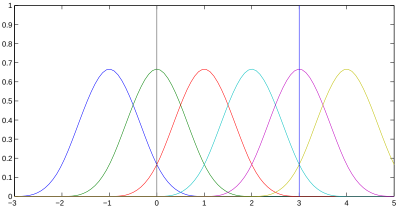
Köbös interpolációs spline előállítása B-spline-okkal:

Tetszőleges $x_{-3}, \ldots, x_0, \ldots, x_n$ egyenletes felosztású alappontrendszer $(h \equiv h_k)$ esetén

$$S_3(x) = \sum_{k=-3}^{n-1} c_k \cdot B_{3,k}(x)$$

alakú spline-t keresünk, melyre adott $f(x_0), \ldots, f(x_n)$ függvényértékek esetén az interpolációs feltételek teljesülnek

$$f(x_i) = S_3(x_i), \;\; (i = 0, \ldots, n).$$



Interpolációs spline előállítása B-spline-okkal

Az egyenletes felosztáson megadott harmadfokú B-spline és deriváltjának képletei emlékeztetőül:

$$B_{3,k}(x) = \frac{1}{6h^3} \cdot$$

$$\cdot \begin{cases} (x-x_k)^3, & I_1 \\ h^3 + 3h^2(x-x_{k+1}) + 3h(x-x_{k+1})^2 - 3(x-x_{k+1})^3, & I_2 \\ h^3 + 3h^2(x_{k+3}-x) + 3h(x_{k+3}-x)^2 - 3(x_{k+3}-x)^3, & I_3 \\ (x_{k+4}-x)^3, & I_4 \end{cases}$$

$I_1 := [x_k; x_{k+1}]$, $I_2 := [x_{k+1}; x_{k+2}]$, $I_3 := [x_{k+2}; x_{k+3}]$, $I_4 := [x_{k+3}; x_{k+4}]$.

$$B'_{3,k}(x) = \frac{1}{6h^3} \cdot \begin{cases} 3(x-x_k)^2, & I_1 \\ 3h^2 + 6h(x-x_{k+1}) - 9(x-x_{k+1})^2, & I_2 \\ -3h^2 - 3h(x_{k+3}-x) + 9(x_{k+3}-x)^2, & I_3 \\ -3(x_{k+4}-x)^2, & I_4 \end{cases}$$

Emlékeztetőül az első derivált:

$$B'_{3,k}(x) = \frac{1}{6h^3} \cdot \begin{cases} 3(x-x_k)^2, & I_1 \\ 3h^2 + 6h(x-x_{k+1}) - 9(x-x_{k+1})^2, & I_2 \\ -3h^2 - 3h(x_{k+3}-x) + 9(x_{k+3}-x)^2, & I_3 \\ -3(x_{k+4}-x)^2, & I_4 \end{cases}$$

A második derivált:

$$B''_{3,k}(x) = \frac{1}{6h^3} \cdot \begin{cases} 6(x-x_k), & I_1 \\ 6h - 18(x-x_{k+1}), & I_2 \\ 6h - 18(x_{k+3}-x), & I_3 \\ 6(x_{k+4}-x), & I_4 \end{cases}$$

Interpolációs spline előállítása B-spline-okkal

Az előállításhoz a következő táblázat lesz segítségünkre, melyet megadott képletek alapján ellenőrizhetünk:

	x_k	x_{k+1}	x_{k+2}	x_{k+3}	x_{k+4}
$B_{3,k}(x)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
$B'_{3,k}(x)$	0	$\frac{1}{2h}$	0	$-\frac{1}{2h}$	0
$B''_{3,k}(x)$	0	$\frac{1}{h^2}$	$-\frac{2}{h^2}$	$\frac{1}{h^2}$	0

Az interpolációs feltételek egyenletei

$$f(x_i) = S_3(x_i) = \sum_{k=-3}^{n-1} c_k \cdot B_{3,k}(x_i) = \frac{1}{6}\,c_{i-3} + \frac{4}{6}\,c_{i-2} + \frac{1}{6}\,c_{i-1}$$

tehát

$$c_{i-3} + 4 \cdot c_{i-2} + c_{i-1} = 6 \cdot f(x_i) \;\; (i = 0, \ldots, n).$$

Interpolációs spline előállítása B-spline-okkal

Az interpolációs feltételekből a tridiagonális LER belseje:

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{-3} \\ c_{-2} \\ c_{-1} \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} \cdots \\ f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \\ \cdots \end{bmatrix}$$

A hiányzó -1. és $n+1$. egyenletet a peremfeltételekből kapjuk meg.

Hermite-féle peremfeltétel esetén:

$$f'(a) = -\frac{1}{2h}\,c_{-3} + \frac{1}{2h}\,c_{-1}$$

-1. egyenlet: $$-\frac{3}{h}\,c_{-3} + \frac{3}{h}\,c_{-1} = 6 \cdot f'(a)$$

$$f'(b) = -\frac{1}{2h}\,c_{n-3} + \frac{1}{2h}\,c_{n-1}$$

n+1. egyenlet: $$-\frac{3}{h}\,c_{n-3} + \frac{3}{h}\,c_{n-1} = 6 \cdot f'(b)$$

Természetes peremfeltétel esetén:

$$0 = f''(a) = \frac{1}{h^2}\,c_{-3} - \frac{2}{h^2}\,c_{-2} + \frac{1}{h^2}\,c_{-1}$$

-1. egyenlet: $c_{-3} - 2c_{-2} + c_{-1} = 0$

$$0 = f''(b) = \frac{1}{h^2}\,c_{n-3} - \frac{2}{h^2}\,c_{n-2} + \frac{1}{h^2}\,c_{n-1}$$

n+1. egyenlet: $c_{n-3} - 2c_{n-2} + c_{n-1} = 0$

Periodikus peremfeltétel esetén:

$$S_3'(x_0) = S_3'(x_n)$$

$$-\frac{1}{2h}\,c_{-3} + \frac{1}{2h}\,c_{-1} = -\frac{1}{2h}\,c_{n-3} + \frac{1}{2h}\,c_{n-1}$$

-1. egyenlet: $\quad - c_{-3} + c_{-1} + c_{n-3} - c_{n-1} = 0$

$$S_3''(x_0) = S_3''(x_n)$$

$$\frac{1}{h^2}\,c_{-3} - \frac{2}{h^2}\,c_{-2} + \frac{1}{h^2}\,c_{-1} = \frac{1}{h^2}\,c_{n-3} - \frac{2}{h^2}\,c_{n-2} + \frac{1}{h^2}\,c_{n-1}$$

n+1. egyenlet: $\quad c_{-3} - 2c_{-2} + c_{-1} - c_{n-3} + 2c_{n-2} - c_{n-1} = 0$

Tétel: $\ell = 1$ esetén

Ha $f \in C^2[a;b]$ és $S \in S_1(\Omega_n)$ lineáris interpolációs spline, akkor

$$\|f - S\|_\infty \le \frac{1}{8}\, h^2 \cdot \|f''\|_\infty$$

ahol $h := \max_{i=1}^n |h_k|$.

Biz.: Az I_k részintervallumokra felírjuk a lineáris interpoláció hibáját, ami $M_{2,k} = \max_{x \in I_k} |f''(x)|$-val felírva

$$|f(x) - S(x)| \le \frac{M_{2,k}}{8} h^2 \quad \forall\, x \in I_k.$$

Maximumot véve minden $x \in [a;b]$ esetén
$M_2 = \max_{x \in [a;b]} |f''(x)|$-vel megkapjuk a bizonyítandó korlátot.

Tétel: $\ell = 3$ Hermite peremfeltétel

Ha $f \in C^4[a;b]$ és $S \in S_3(\Omega_n)$ köbös interpolációs spline Hermite-peremfeltétellel, akkor

$$\|f - S\|_\infty \leq \frac{5}{384}\, h^4 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty$$
$$\|f' - S'\|_\infty \leq \frac{1}{24}\, h^3 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty$$
$$\|f'' - S''\|_\infty \leq \frac{3}{8}\, h^2 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty$$

ahol $h := \max_{i=1}^{n} |h_k|$.

Nem bizonyítjuk.

Tétel: $\ell = 3$ klasszikus peremfeltétel

Ha $f \in C^2[a;b]$ és $S \in S_3(\Omega_n)$ köbös interpolációs spline Hermite-, természetes- vagy periodikus peremfeltétellel, akkor

$$\|S''\|_2^2 \leq \|f''\|_2^2, \quad \text{ahol } \|f''\|_2^2 := \int_a^b (f'')^2.$$

Vagyis S az $\int_a^b (S'')^2$ integrált minimalizálja.

Következmény: A görbület képlete S-re: $\frac{S''}{(1+(S')^2)^{3/2}} \approx S''$, ha $S'(x)$ kicsi, így a spline minimalizálja az

$$\int_a^b \frac{(f''(x))^2}{(1+(f'(x))^2)^3}\, dx$$

integrált. Ez fizikailag azt jelenti, hogy az $S(x)$ alakú rugalmas huzal minimalizálja a feszültségi energiát.

Biz.: 1) Legyen $d(x) := f(x) - S(x)$. Belátjuk, hogy a megadott peremfeltételek esetén

$$S''(a)d'(a) = S''(b)d'(b).$$

1. Hermite-féle spline esetén:
   $f'(a) - S'(a) = 0,\ \ f'(b) - S'(b) = 0 \Rightarrow\ \ d'(a) = d'(b) = 0,$
2. természetes spline esetén: $S''(a) = S''(b) = 0,$
3. periodikus spline esetén $S''(a) = S''(b)$ és $d'(a) = d'(b)$

2) Felírjuk az f'', S'' és d'' közötti kapcsolatot, melyből látjuk, hogy $\langle d'', S'' \rangle = 0$-val teljesül a bizonyítandó állítás.

$$\begin{aligned} f'' &= f'' - S'' + S'' = d'' + S'' \\ \|f''\|_2^2 &= \langle d'' + S'', d'' + S'' \rangle = \\ &= \underbrace{\|d''\|_2^2}_{\geq 0} + \|S''\|_2^2 + 2\underbrace{\langle d'', S'' \rangle}_{=0} \geq \|S''\|_2^2. \end{aligned}$$

3) Belátjuk, hogy $\langle d'', S'' \rangle = 0$. A részintegrálokat parciálisan integrálva

$$\langle d'', S'' \rangle = \int_a^b d'' \cdot S'' = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{d''}_{v'} \cdot \underbrace{S''}_{u} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[d' \cdot S'' \right]_{x_{k-1}}^{x_k} - \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} d' \cdot S''' =$$

Az első tagra

$$\sum_{k=1}^{n} \left[d' \cdot S'' \right]_{x_{k-1}}^{x_k} = S''(b)d'(b) - S''(a)d'(a) = 0.$$

A második tagra újabb parciális integrálást alkalmazunk

$$-\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\underbrace{d'}_{v'}\cdot\underbrace{S'''}_{u} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\left[d\cdot S'''\right]_{x_{k-1}}^{x_k} + \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} d\cdot S^{(4)} = 0,$$

mivel $d(x_k) = 0$ minden k-ra és $S^{(4)} \equiv 0$. □

Megjegyzés: Az állítást úgy is megfogalmazhattuk volna, hogy

$$\|f''\|_2^2 = \|f'' - S''\|_2^2 + \|S''\|_2^2$$

.

Köszönöm a figyelmet!