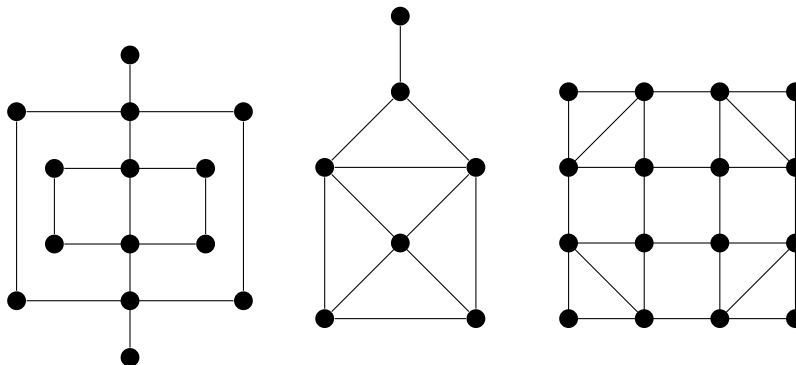


Diszkrét matematika I. feladatok

Gráfok III

Tizenkettedik alkalom (2025.05.06-05.16.)

1. Van-e az alábbi gráfokban Euler-séta?



2. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben van Euler-kör, páros sok csúcsa és páratlan sok éle van?
3. Igazolja, hogy minden összefüggő gráfban van olyan séta, amely a gráf minden élét pontosan kétszer tartalmazza. Igaz-e ez zárt sétára?
4. Mutassa meg, hogy ha egy gráf minden pontjának foka 4, akkor élei színezhetőek piros és kék színekkel úgy, hogy minden csúcshoz két-két piros és kék él illeszkedjen!
5. Mutassa meg, hogy ha egy gráfban van Hamilton-kör, de bárhogy töröljük egyetlen élet, a maradék gráf összefüggő.
6. Legyen a G gráf csúcsainak halmaza $\{1, 2, \dots, 100\}$. Határozzuk meg G éleinek és összefüggőségi komponenseinek számát, ha az éleket a következőképpen adjuk meg: i és j pontosan akkor van összekötve, ha
 - a) $i - j$ páratlan;
 - b) $2 \leq |i - j| \leq 3$;
 - c) $i - j$ osztható 3-mal és $i \neq j$;
 - d) $|i - j| = 3$ vagy $|i - j| = 8$? (A négy alfeladatban négy különböző gráfról van szó.)
7. Az alábbi gráfok közül melyekben van (nyílt vagy zárt) Euler-séta?
 - a) $V_1 = \{1, 2, \dots, 102\}$, $E_1 = \{\{i, j\} \subset V_1 : 1 \leq |i - j| \leq 2\}$, $G_1 = (V_1, E_1)$;
 - b) $V_2 = \{1, 2, \dots, 102\}$, $E_2 = \{\{i, j\} \subset V_2 : 1 \leq |i - j| \leq 3\}$, $G_2 = (V_2, E_2)$;
 - c) $V_3 = \{1, 2, \dots, 102\}$, $E_3 = \{\{i, j\} \subset V_3 : i - j \text{ páros}\}$, $G_3 = (V_3, E_3)$;
 - d) $H = \{1, 2, \dots, 10\}$, $V_4 = \{A \subset H : |A| = 3\}$, $E_4 = \{\{A, B\} \subset V_4 : A \cap B \neq \emptyset\}$, $G_4 = (V_4, E_4)$.
8. a) Mutasson olyan gráfot, amelyben minden csúcs foka páros, és nincs benne zárt Euler-séta (Euler-körséta)!
 b) Mutasson olyan gráfot, ami nem összefüggő, de van benne zárt Euler-séta!
9. Mutasson ellenpéldát a Dirac-tétel megfordítására!
10. Legyen a G gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \dots, 100\}$. Van-e G -ben Hamilton-út, ha az éleket a következőképpen adjuk meg: (i, j) pontosan akkor él, ha ...
 - a) $0 < |i - j| \leq 2$?
 - b) $|i - j| = 2$ vagy 3 ?
 - c) $i \mid j$ vagy $j \mid i$?
 - d) $|i - j| > 23$? (A négy alfeladatban négy különböző gráfról van szó.)
11. Mutasson olyan egyszerű gráfot, amelyben van Hamilton-út és zárt Euler-séta, de nincs Hamilton-kör! (Igazoljuk is a megfelelő tulajdonságok meglétét vagy hiányát.)