Diszkrét matematika II. feladatok

Első alkalom

Bemelegítő feladatok

1. Mik lesznek a z^3, z^{13}, z^{135} hatványok, ha $z = i \in \mathbb{C}$, $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$, ill. $z = 1 - i \in \mathbb{C}$? Válaszát formálisan indokolja a *maradékos osztás tétele* segítségével!

   Megoldás: $z = i$ *primitív* negyedik egységgyök: $i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$, $i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1 \cdot i = i$, hasonlóan $i^{4n+2} = 1 \cdot i^2 = -1$, és $i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = -i$, tehát $(n \bmod 4 = k) \Longrightarrow (i^n = i^k)$. Ezt használva $i^3 = -i$, $i^{13} = i^{12+1} = i$, $i^{135} = i^{120+12+3} = -i$.

   $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ trigonometrikus alakja $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = 1 \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4})$, azaz az $m = 8$ a legkisebb pozitív kitevő, amire $z^m = 1$ (más szavakkal ez a z egy *primitív* nyolcadik egységgyök), a kitevőnek csak a nyolc szerinti osztási maradéka számít $(n \bmod 8 = k) \Longrightarrow (z^n = z^k)$.

   Ezt használva $z^3 = 1^3 \cdot (\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4}) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $z^{13} = z^{8+5} = z^5 = 1^5 \cdot (\cos\frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{4}) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $z^{135} = z^{128+7} = z^7 = 1^7 \cdot (\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{4}) = 1 \cdot (\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{4})) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

   $z = 1 - i$ *nem* egységgyök, semmilyen pozitív (vagy negatív) kitevős hatványa nem lesz egyenlő 1-gyel. Viszont a trigonomerikus alakját felírva: $z = 1 - i = \sqrt{2} \cdot (\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot (\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{4}))$ észrevehető, hogy egy primitív nyolcadik egységgyöknek valós számszorosa. Vagyis $(n \bmod 8 = k) \Longrightarrow \Big(z^n = \sqrt{2}^n \cdot \big(\cos(-\frac{k\pi}{4}) + i \cdot \sin(-\frac{k\pi}{4})\big)\Big)$.

   Ezt használva: $z^3 = \sqrt{2}^3 \cdot \big(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i \cdot \sin(-\frac{3\pi}{4})\big) = \sqrt{2}^3 \cdot \frac{-1-i}{\sqrt{2}} = 2 \cdot (-1 - i) = -2 - 2i$,
   $z^{13} = z^{8+5} = \sqrt{2}^{13} \cdot \big(\cos(-\frac{5\pi}{4}) + i \cdot \sin(-\frac{5\pi}{4})\big) = \sqrt{2} \cdot 2^6 \cdot \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = 2^6 \cdot (-1 + i) = -64 + 64i$,
   $z^{135} = z^{128+7} = \sqrt{2}^{135} \cdot (\cos(-\frac{7\pi}{4}) + i \cdot \sin(-\frac{7\pi}{4})) = 2^{67} \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4})) = 2^{67} \cdot (1 + i)$.

2. Számolja ki az M^2, M^5, M^{123} hatványokat a következő M mátrixok esetén!

$$\begin{pmatrix} 8 & -21 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Válaszát formálisan indokolja a *maradékos osztás tétele* segítségével!

   Megoldás: Ha $M = \begin{pmatrix} 8 & -21 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$, akkor:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 8 & -21 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -21 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 8 - 21 \cdot 3 & -21 \cdot 8 - 21 \cdot (-8) \\ 3 \cdot 8 - 8 \cdot 3 & 3 \cdot (-21) - 8 \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

   Tehát $M^2 = I$ az egységmárix, ennek megfelelően $M^5 = M \cdot (M^2)^2 = M \cdot I^2 = M$, és $M^{123} = M^{122} \cdot M = I^{61} \cdot M = M$.

   Ha $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, akkor:

$$M^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot (-3) + 2 \cdot (-5) & -3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ -5 \cdot (-3) + 3 \cdot (-5) & -5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

   Tehát $M^2 = -I$ az egységmárix ellentettje, ezért $M^4 = (-I)^2 = I$ (hasonlóan a komplex imaginárius egységhez), ennek megfelelően $M^5 = M \cdot (M^2)^2 = M \cdot (-I)^2 = M$, és $M^{123} = M^{122} \cdot M = (-I)^{61} \cdot M = -I \cdot M = -M$.

Ha $M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, akkor:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & \sqrt{3}+\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}-\sqrt{3} & -3+1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

ezt használva: $M^3 = M \cdot M^2 =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1-3 & \sqrt{3}-\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-\sqrt{3} & -3+-1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -8 \cdot I$$

ezt használva $M^6 = (M^3)^2 = (-8 \cdot I)^2 = 64 \cdot I = 2^6 \cdot I$. Vagyis hatványozás szempontjából M hasonlóan viselkedik egy primitív hatodik egységgyök kétszereséhez. $M^5 = M^3 \cdot M^2 = -8 \cdot I \cdot M^2 = -16 \cdot \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = 16 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. $M^{123} = (M^3)^{41} = (-8 \cdot I)^{41} = -2^{41} \cdot I$

Megjegyzés: Az $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alakú valós elemű mátrixok az $a + bi$ alakú komplex számok egyik implementációját[1] adják, ezért a fenti M mátrix az $1 + \sqrt{3}i = 2 \cdot (\cos 60° + i \cdot \sin 60°)$ komplex számnak megfelelő módon hatványozódik.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad \text{vagyis } M^2 = M^{-1}$$

Ezért $M^5 = M^2 \cdot M^3 = M^2 \cdot I = M^2$ és $M^{123} = (M^3)^{41} = I^{41} = I$.

3. Mik lesznek a z^{13}, z^{135}, z^{13579} hatványok, ha $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \in \mathbb{C}$, $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \in \mathbb{C}$, ill. $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \in \mathbb{C}$? Válaszát formálisan indokolja a *maradékos osztás tétele* segítségével!

   Megoldás: Trigonometrikus alakokban $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \cdot (\sin 60° + i \cdot \cos 60°)$, ez egy primitív hatodik egységgyök, azaz a hatványozása esetén csak a hatványkitevő hattal vett osztási maradéka számít: $z^{13} = z$, $z^{135} = z^3$, $z^{13579} = z^1 = z$.

   A második szám az elsőnek a komplex konjugáltja: $\overline{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \cdot (\sin 300° + i \cdot \cos 300°)$, ez is egy primitív hatodik egységgyök, azaz a hatványozása esetén csak a hatványkitevő hattal vett osztási maradéka számít: $\overline{z}^{13} = \overline{z}$, $\overline{z}^{135} = \overline{z}^3$, $\overline{z}^{13579} = \overline{z}$.

   $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \cdot (\sin 240° + i \cdot \cos 240°)$, ez egy primitív harmadik egységgyök, azaz a hatványozása esetén csak a hatványkitevő hárommal vett osztási maradéka számít: $z^{13} = z$, $z^{135} = z^0 = 1$, $z^{13579} = z^1 = z$.

   Közös formális indoklás: Egy primitív m-edik z egységgyök esetén $z^m = 1$, viszont $z^k \neq 1$, ha $0 < k < m$. Ha az n hatványkitevőt maradékosan osztjuk m-mel, akkor $n = q \cdot m + k$, tehát $z^n = z^{q \cdot m + k} = (z^m)^q \cdot z^k = 1^q \cdot z^k = z^k$. Tehát ha z primitív m-edik egységgyök, akkor $z^n = z^{n \bmod m}$. (Ez utóbbi akkor is igaz, ha nem primitív m-edik egységgyök, csak m-edik egységgyök a z, de *célszerű* mindig a legkisebb olyan m-et megkeresni, amivel már primitív m-edik egységgyök.)

4. Sorolja fel a prímszámokat 1 és 150 között!

   Megoldás: Eratoszthenész szitájával: felírjuk a számokat 1-től 150-ig. Az egy nem prím, azt kihúzzuk. A 2 prím, ezt követően minden második (minden további páros) számot kihúzunk, a következő szám a 3, az prím, ezt követően minden harmadik számot (a megmaradt páratlanok

[1] A matematikusok inkább a "reprezentáció" szót használják, ha egy algebrai struktúrát bizonyos speciális alakú mátrixokkal valósítunk meg, de programozók számára talán az "implementáció" kifejezőbb szó. :)

közül minden hárommal oszthatót) kihúzunk, a következő megmaradt száma 5, az prím, és így tovább. . . 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149.

Gyakorló feladatok

5. Számolja ki az alábbi kifejezéseket:

a) $13 \cdot 15 + 31 \cdot 42 + 51^2 \bmod 2$

Megoldás: $\big((13 \bmod 2) \cdot (15 \bmod 2) + (31 \bmod 2) \cdot (42 \bmod 2) + (51 \bmod 2)^2\big) \bmod 2 = \big(1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1^2\big) \bmod 2 = (1 + 0 + 1) \bmod 2 = 2 \bmod 2 = 0.$

b) $73 \cdot 82 + 17 \cdot 71 \bmod 4$

Megoldás: $\big((73 \bmod 4)\cdot(82 \bmod 4)+(17 \bmod 4)\cdot(71 \bmod 4)\big) \bmod 4 = \big(1\cdot2+1\cdot3\big) \bmod 4 = (2 + 3) \bmod 4 = 5 \bmod 4 = 1.$

c) $123 + 594 + 931 \bmod 10$

Megoldás: $\big(123 \bmod 10 + 594 \bmod 10 + 931 \bmod 10\big) \bmod 10 = (3 + 4 + 1) \bmod 10 = 8.$

d) $123 \cdot 594 \cdot 931 \bmod 10$

Megoldás: $\big((123 \bmod 10) \cdot (594 \bmod 10) \cdot (931 \bmod 10)\big) \bmod 10 = (3 \cdot 4 \cdot 1) \bmod 10 = 12 \bmod 10 = 2.$

e) $17^{10} \bmod 3$

Megoldás: $(17 \bmod 3)^{10} \bmod 3 = 2^{10} \bmod 3 = 1024 \bmod 3 = (1 + 0 + 2 + 4) \bmod 3 = 7 \bmod 3 = 1.$ **Másik befejezés:** $2^{10} \bmod 3 = (2^2 \bmod 3)^5 \bmod 3 = (4 \bmod 3)^5 \bmod 3 = 1^5 \bmod 3 = 1.$

f) $3^{32} \bmod 5$

Megoldás: Egymás utáni négyzetre emelésekkel: $3^{32} \bmod 5 = \left(\left(\left(\left(3^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2 \bmod 5 = \left(\left(\left((3^2 \bmod 5)^2 \bmod 5\right)^2 \bmod 5\right)^2 \bmod 5\right)^2 \bmod 5 = \left(\left((4^2 \bmod 5)^2 \bmod 5\right)^2 \bmod 5\right)^2 \bmod 5 = \left(\left(1^2 \bmod 5\right)^2 \bmod 5\right)^2 \bmod 5 = (1^2 \bmod 5)^2 \bmod 5 = 1^2 \bmod 5 = 1.$

Alternatív megoldás: Az első néhány hatványt kiszámolva: $3^2 \bmod 5 = 9 \bmod 5 = 4$, $3^3 \bmod 5 = 27 \bmod 5 = 2$, $3^4 \bmod 5 = 81 \bmod 5 = 1$.

Tehát $3^{4k} \bmod 5 = (3^4 \bmod 5)^k \bmod 5 = 1^k \bmod 5 = 1$, ezt kihasznáva: $3^{32} \bmod 5 = 1^8 = 1.$

g) $3^{100} \bmod 7$

Megoldás: Az első néhány hatványt kiszámolva: $3^2 \bmod 7 = 9 \bmod 7 = 2$, $3^3 \bmod 7 = 27 \bmod 7 = 6$, $3^4 \bmod 7 = (3^2 \bmod 7)^2 \bmod 7 = 2^2 \bmod 7 = 4$, $3^5 \bmod 7 = (3^4 \bmod 7) \cdot 3 \bmod 7 = 4 \cdot 3 \bmod 7 = 12 \bmod 7 = 5$, $3^6 \bmod 7 = (3^3 \bmod 7)^2 \bmod 7 = 6^2 \bmod 7 = 36 \bmod 7 = 1$.

Tehát $3^{6k} \bmod 7 = 1$, ezt kihasználva $3^{100} \bmod 7 = 3^4\cdot 3^{96} \bmod 7 = 3^4\cdot(3^6 \bmod 7)^{16} \bmod 7 = 3^4 \cdot 1^{16} \bmod 7 = 3^4 \bmod 7 = 4.$

h) $39 \cdot 47 \cdot 29 \cdot 11 \cdot 36 \cdot 83 \bmod 5$

Megoldás: $(39 \bmod 5)\cdot(47 \bmod 5)\cdot(29 \bmod 5)\cdot(11 \bmod 5)\cdot(36 \bmod 5)\cdot(83 \bmod 5) \bmod 5 = (4 \cdot 2 \bmod 5) \cdot (4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \bmod 5) \bmod 5 = (8 \bmod 5) \cdot (12 \bmod 5) \bmod 5 = 3 \cdot 2 \bmod 5 = 6 \bmod 5 = 1.$

i) $(583 + 57) \cdot 715 + 41^2 \bmod 7$

Megoldás: $((583 \bmod 7)+(57 \bmod 7))\cdot(715 \bmod 7)+(41 \bmod 7)^2 \bmod 7 = ((2+1 \bmod 7)\cdot 1 + 6^2 \bmod 7) \bmod 7 = (3 \cdot 1 + (36 \bmod 7)) \bmod 7 = (3 + 1) \bmod 7 = 4.$

Minden művelet elvégzése után újra és újra kiszámolva a maradékot, és csak a maradékokkal tovább számolva.

Érdekes feladatok

6. Legyen G az az *irányított* gráf, melynek csúcsai az első 6 pozitív egész szám, élei pedig $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 4$, $4 \to 5$, $5 \to 6$, $6 \to 1$ azaz G egy irányított kör. Legyen M a gráf szomszédsági mátrixa (adjacenciamátrixa), tehát a mátrix i-edik sorának j-edik eleme az i-ből j-be vezető élek száma. Számítsuk ki M-nek a 2., 3., 6., 24. és 113. hatványát. (Ötlet: M^n elemei kapcsolatban állnak a G-beli sétákkal.)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az N csúcsú gráf szomszédsági mátrixának négyzetében az i-edik sor j-edik eleme a mátrixszorzás definíciója szerint:

$$\sum_{k=1}^{N} M_{i,k} \cdot M_{k,j} = M_{i,1} \cdot M_{1,j} + M_{i,2} \cdot M_{2,j} + \cdots + M_{i,N} \cdot M_{N,j}$$

Mivel $M_{i,k}$ az i-edik csúcsból a k-adikba vezető élek száma, és $M_{k,j}$ a k-adik csúcsból a j-edikbe vezető élek száma, az $M_{i,k} \cdot M_{k,j}$ szorzat azt mondja meg, hogy a k-adik csúcson keresztül összesen hányféleképpen juthatunk el az i-edik csúcsból a j-edikben *két lépésben* (vagyis olyan kettő hosszú sétán át, aminek a k-adik csúcs a középső csúcsa), az ilyen szorzatok összege pedig esetszétválaszással az összes kettőhosszú séták számát adja meg az i-edik csúcsból a j-edikbe (ahol az esetszétválasztás a középső csúcs szerint megy).

Teljes indukcióval belátható, hogy az M szomszédsági mátrix n-edik hatványánban az i-edik sor j-edik eleme az összes n-hosszú séták számát adja meg az i-edik csúcsból a j-edikbe.

A $\vec{C}_6$ hathosszú irányított ciklusban kettőhosszú irányított séták csak 1-ből 3-ba, 2-ből 4-be, 3-ból 5-be, 4-ből 6-ba, 5-ből 1-be és 6-ból 2-be vezetnek, méghozzá egy-egy. Tehát:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A $\vec{C}_6$ hathosszú irányított ciklusban háromhosszú irányított séták csak 1-ből 4-be, 2-ből 5-be, 3-ból 6-ba, 4-ből 1-be, 5-ből 2-be és 6-ból 3-ba vezetnek, méghozzá egy-egy. Tehát:

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A $\vec{C_6}$ hathosszú irányított ciklusban hathosszú irányított séták csak 1-ből 1-be, 2-ből 2-be, 3-ból 3-ba, 4-ből 4-be, 5-ből 5-be és 6-ból 6-ba vezetnek, méghozzá egy-egy. Tehát:

$$M^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Mivel $M^6 = I$ a 6×6-os egységmátrix, ezért $M^n = M^{(n \bmod 6)}$. Tehát $M^{24} = M^{(24 \bmod 6)} = M^6 = I$, és $M^{113} = M^{(113 \bmod 6)} = M^5 = M^{-1}$. Az inverzmátrix tehát az ötödik hatvány, és mivel a $\vec{C_6}$ hathosszú irányított ciklusban öthosszú irányított séták csak 1-ből 6-ba, 2-ből 1-be, 3-ból 2-be, 4-ből 3-ba, 5-ből 4-be és 6-ból 5-be vezetnek, méghozzá egy-egy, ezért:

$$M^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M^{-1}$$

Megjegyzés: A fenti M mátrix egy úgynevezett "permutációmátrix" (az első N pozitív egész szám egy konkrét $\sigma : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, N\}$ permutációját megadó olyan $0-1$-mátrix, aminek i-edik sorának a $\sigma(i)$-edik eleme 1-es, a sor többi eleme 0). Egy permutációmátrix minden sorában és minden oszlopában is pontosan egy-egy 1-es van, a többi eleme 0. Ebben a feladatban a $\sigma : 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 4,\ 4 \mapsto 5,\ 5 \mapsto 6,\ 6 \mapsto 1$ permutáció mátrixa az M mátrix.

A σ permutáció négyzete a $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$ kompozíció, ami a $\sigma^2 : 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 5,\ 4 \mapsto 6,\ 5 \mapsto 2,\ 6 \mapsto 3$ permutáció, aminek a mátrixa az M^2 mátrix. A σ permutáció köbe a $\sigma^3 = \sigma \circ \sigma \circ \sigma$ kompozíció, ami a $\sigma^3 : 1 \mapsto 4,\ 2 \mapsto 5,\ 3 \mapsto 6,\ 4 \mapsto 1,\ 5 \mapsto 3,\ 6 \mapsto 4$ permutáció, aminek a mátrixa az M^3 mátrix. Általában is igaz, hogy egy permutációmátrix hatványa az általa reprezentált permutáció megfelelő hatványának a permutációmátrixa, ahol a permutáció hatványát, mint függvénynek a saját magával vett (többszörös) kompozíciójaként definiáljuk.

Egy permutációmátrix az általa reprezentált permutációnak megfelelően permutálja a sztenderd bázis elemeit, más szóval a vektorok koordinátáit permutálja.

Permutációkkal is meg lehetett volna oldani a fenti feladatot, ami lényegében ugyanaz a megoldás lett volna, mint a megfelelő hosszú séták számolgatása.

Természetesen nyers erővel, a 6×6-os mátrixok szorozgatásával is meg lehetett volna oldani a feladatot.

Szorgalmi feladatok

7. Egy 8×8 -as sakktáblára szeretnénk harmincegy darab 2×1-es téglalapot elhelyezni úgy, hogy minden mező le legyen fedve, kivéve az A1-et és H8-at (azaz a bal alsót és jobb felsőt). Lehetséges-e ez?

   Megoldás: A sakktáblából két *azonos színű* mezőt (A1 és H8 is sötét) kellene fedetlenül hagynunk, azaz 32 világos és 30 sötét mezőt kellene lefedünk olyan téglalapokkal, amelyek mindegyike egy sötét és egy világos mezőt tud lefedni.

   Ha minden lefedendő mezőt csak egyszeresen fedünk le (nem teszünk le téglalapokat úgy, hogy egyes mezőket több téglalap is fed), akkor tehát mindig ugyanannyi sötét és világos mezőt lehet csak lefedni ilyen módon, ezért NEM lehetséges a feladat feltételeinek megfelelő lefedés.

Ha esetleg megengednénk, hogy egy mezőt több téglalap is fedjen, akkor készítsünk el egy páros gráfot: egyik csúcsosztálya a lefedendő 62 mező, a másik csúcsosztálya a 31 téglalap, és egy él azt jelenti, hogy az adott mezőt lefedi az adott téglalap. Mivel minden téglalap két mezőt fed, a második csúcsosztályon belül minden fokszám 2, ezért az élek száma 62. Ha az első csúcsosztályban lenne egynél nagyobb fokú csúcs, akkor azon belül a fokszámösszeg csak úgy lehetne 62, ha lenne izolált csúcs is, amiazt jelenti, hogy az a mező fedetleül maradt. Tehát 31 téglalappal úgy sem oldható meg a feladat, ha esetleg megengednénk többszörös fedéseket is.