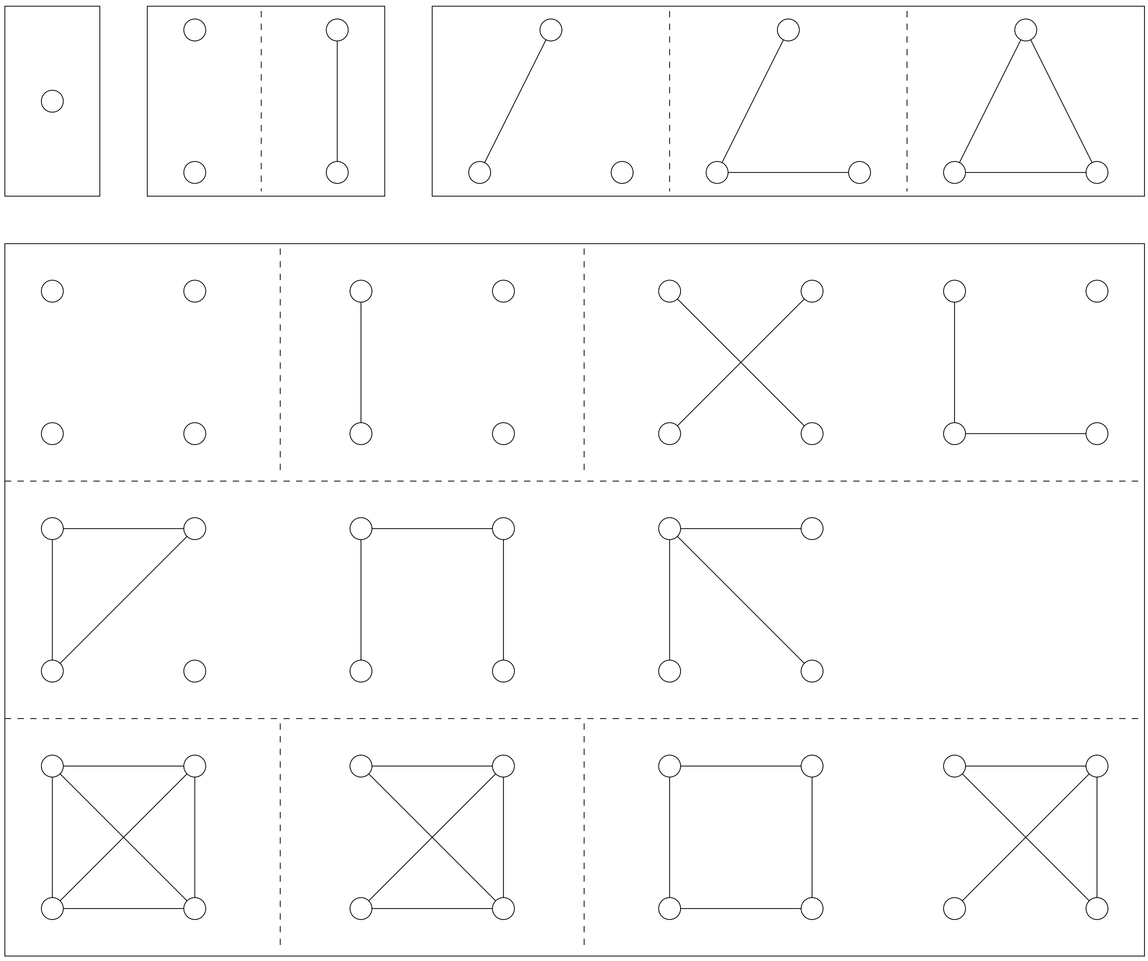
Diszkrét matematika I. feladatok
Gráfok I.
Kilencedik alkalom (2025.04.14-04.25.)

Bemelegítő feladatok

1. Rajzolja le az összes, páronként nem izomorf 3-, 4-, illetve 5-csúcsú egyszerű gráfot. Hány összefüggő van közöttük?

   Megoldás: 1, 2, 3 és 4 csúcsú egyszerű gráfok (az ábráról hiányzik a 3 csúcsú, 0 élű gráf; a csúcsok és az élek az ábrán nincsenek elnevezve, de úgyis csak ,,izomorfia erejéig” kell lerajzolni a gráfokat):

   Az 1 csúcsú gráf összefüggő; a 2 csúcsú gráfok közül a két izolált csúcsból álló nem, az egy élt tartalmazó összefüggő; a 3 csúcsúak közül a 0 élű és az 1 élű (tehát az izolált csúcsot tartalmazóak) nem összefüggő, a másik kettő igen. A 4 csúcsúak közül a fölső sorban egyik sem összefüggő, a középső sorban a bal oldali (egy 3 hosszú kör + egy izolált csúcs) nem összefüggő. A többi 4 csúcsú gráf összefüggő.

   5 csúcsú gráfok: H.F.

2. Lehet-e egy 7-pontú egyszerű gráf fokszámsorozata

   a) $4, 4, 3, 3, 2, 2, 1$;
   b) $6, 3, 3, 3, 3, 2, 0$;
   c) $5, 5, 5, 2, 2, 2, 1$;
   d) $2, 2, 2, 2, 2, 2, 2$?

   a) Megoldása: Nem, mert a fokszámok összege páratlan lenne, de a fokszámok összege az élek számának *kétszerese* (azaz páros szám), ellentmondás.

   b) Megoldása: Nem, mert véges *egyszerű* gráfban (ahol a fokszám = a szomszédok számával) nem lehet $\deg(u) = |V| - 1$ fokú és $\deg(w) = 0$ fokú csúcs is egyszerre: a 0-fokú w csúcs *senkinek sem* a szomszédja, a $|V| - 1$ fokú u csúcsnak viszont az összesen $|V|$ csúcs közül rajta kívül *mindenki más* a szomszédja, azaz a 0-fokú w is szomszédja u-nak, ellentmondás.

   c) Megoldása: Indirekt tegyük föl, hogy van ilyen *egyszerű* gráf. Rajzoljuk a három darab öt fokú csúcsot a bal oldalra, a többit a jobb oldalra. Ekkor a bal oldal csúcsaiból összesen $3 \cdot 5 = 15$ él indul, és mind a három csúcsból legfeljebb kettő él mehet bal oldali csúcsba (a másik kettőbe), tehát $3 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 9$ él legalább átmegy a jobb oldalra. Oda viszont összesen $2 + 2 + 2 + 1 = 7$ él mehet. Tehát nincs ilyen egyszerű gráf.

   d) Megoldása: Igen, pl. C_7. Másik példa: C_3 és C_4 diszjunkt uniója. (Általában: ha egy egyszerű gráfban minden fokszám 2, akkor az vagy maga egy ciklus, vagy több diszjunkt ciklus uniója.)

Gyakorló feladatok

3. Van-e olyan (legalább kétpontú) gráf, melyben minden pont foka különböző?

   Megoldás: a) Ha csak egyszerű gráfokat engedünk meg, akkor NINCS ilyen: n csúcs esetén a lehetséges fokszámok: $0, 1, \ldots, n - 1$, ez látszólag n féle. Azonban 0 fokú és $n - 1$ fokú csúcs nem lehet egyszerre, hiszen a 0 fokú semelyik csúccsal, az $n - 1$ fokú mindegyik (saját magán kívül az összes többi) csúccsal össze lenne kötve. Tehát egyszerre csak $n - 1$ lehetséges fokszám van, viszont n csúcs, így lesz legalább két, megegyező fokszámú csúcs. (Ez valójában skatulyaelv, csak kicsit trükkösen kell megválasztani a skatulyákat: Legyenek a skatulyák a lehetséges fokszámok $1, 2, \ldots, n - 2$, az utolsó skatulyában pedig a 0 és $n - 1$ fokszámok egyaránt. Ha két csúcs ugyanabban a skatulyában van, akkor a fokszámuk megegyezik. Az utolsó skatulyában is, hiszen ha abban van két csúcs, akkor vagy mindkettő fokszáma 0, vagy mindkettőé $n - 1$. Így tehát $n - 1$ skatulyánk és n csúcsunk van, a skatulyaelv értelmében lesz két azonos fokszám.)

   b) Ha nem egyszerű gráfot is megengedünk, akkor VAN ilyen: például néhány csúcs, az első 0 fokú, a második csúcson egy hurokél, a harmadikon két hurokél stb. Másik példa: egy út, melynek beszámozzuk az éleit, a második élét megduplázzuk, a harmadikat megháromszorozzuk stb.

4. Mutassa meg, hogy tetszőleges gráfban a páratlan fokú pontok száma páros!

   Megoldás: Előadáson beláttuk, hogy tetszőleges gráfban a fokszámok összege éppen az élek számának kétszerese. Az élek száma egész szám, kétszerese tehát páros, vagyis a fokszámösszeg páros. Ez csak úgy lehet, hogy páros sok páratlan fokszám szerepel az összegben.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráfnak kevesebb éle van, mint pontja, akkor van elsőfokú pontja.

   Megoldás: $G(V, E)$, $|V| = n$ csúcsú gráfra az állítás csak $n \geq 2$ esetén igaz, ugyanis $n = 1$-re lehet egy izolált csúcs, 0 él, a csúcs foka 0. $n \geq 2$ esetén: Indirekt tegyük fel, hogy minden csúcs foka legalább 2. (Ha sikerül ellentmondásra jutni, akkor ezzel beláttuk, hogy van elsőfokú pont, mivel az összefüggőség miatt 0 fokú pont nem lehet a gráfban.) Ekkor $\sum d(v) = 2 \cdot |E|$. Becsüljük az egyenlőség mindkét oldalát! Egyrészt az indirekt feltevés szerint minden fokszám legalább 2, tehát $2 \cdot n \leq \sum d(v)$, másrészt a feladat feltétele szerint $|E| < n$, azaz $2 \cdot |E| < 2 \cdot n$. Tehát $2 \cdot n \leq \sum d(v) = 2 \cdot |E| < 2 \cdot n$, ellentmondás.

6. Igaz-e, hogy ha egy gráf bármely két pontja között van séta, akkor út is van?

   Megoldás: Legyen $G(V, E)$ gráf, $v, u \in V$ két tetszőleges csúcs, és legyen $v, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots$ $\ldots, e_k, v_k, u$ egy séta. Ha ez út, készen vagyunk. Ha ez nem út, akkor $\exists i : \exists j : 1 \leq i < j \leq k :$ $v_i = v_j$. Töröljük a sétából a $v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \ldots, e_j$ szakaszt. Így egy rövidebb sétához jutottunk. Ha az így kapott séta út, készen vagyunk. Ha nem, ismételjük meg az előbbi eljárást. Mivel minden lépésben az előzőnél rövidebb sétához jutunk, az eljárás véget fog érni.

Érdekes feladatok

7. Mutassuk meg, hogy ha egy $2n$-csúcsú gráf minden pontjának foka legalább n, akkor a gráf összefüggő! Mi történik, ha $n-1$-fokú pontokat is megengedünk ?

   Megoldás: A feladat állítása egyszerű gráfokra igaz. Nem egyszerű gráfra ellenpélda: $2n$ darab csúcs, mindegyiken legalább $n/2$ hurokél. (Másik példa hurokélek nélkül: párokba állítjuk a csúcsokat, minden pár két tagja között n darab párhuzamos él, de csak a párokon belül mennek élek.)

   Direkt bizonyításhoz ellenőrizzük az összefüggőség definícióját, azaz megmutatjuk, hogy két tetszőleges csúcs között van séta (út): Jelölje V a G csúcshalmazát. Legyen u és v két tetszőleges csúcs G-ben. Be fogjuk látni, hogy van út u és v között (tetszőleges választás esetén). Ha u és v szomszédosak (= van köztük él), akkor kész vagyunk. Ha nem szomszédosak: jelölje $N(u)$ az u, $N(v)$ a v szomszédainak halmazát. A fokszámfeltétel és az egyszerűség miatt $|N(u)| + |N(v)| \geq 2n$. Másrészt, mivel u és v nem szomszédosak, $(N(u) \cup N(v)) \subseteq V \setminus \{u; v\}$. Mivel $|V \setminus \{u; v\}| = 2n - 2$, ez csak úgy lehet, ha $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$, azaz u-nak és v-nek van közös szomszédja, vagyis van köztük kettő hosszú út. *Megjegyzés:* ezzel nemcsak annyit láttunk be, hogy G összefüggő (azaz bármely két csúcsa közt van út), hanem azt is, hogy bármely két csúcsa közt van legföljebb kettő hosszúságú út.

   Másik megoldás: Indirekt tegyük föl, hogy G nem összefüggő. Ekkor a csúcshalmaza felbontható két diszjunkt nemüres részre, hívjuk ezeket A-nak és B-nek, melyek közt nincs él. *Ennek indoklása precízen:* Legyen u tetszőleges csúcsa G-nek. Legyen A a u-ból sétán elérhető csúcsok halmaza (ez éppen az az összefüggőségi komponens, melynek u az eleme). Legyen B a többi csúcs halmaza. Az A nyilván nem üres ($u \in A$); és mivel G nem összefüggő, B sem üres. A és B közt nem lehet él A definíciója miatt. (*Megjegyzés:* B nem feltétlenül összefüggő.) Ekkor $|A| + |B| = 2n$. Másrészt: legyen $u \in A$, $w \in B$ (a nemüresség miatt vannak ilyen csúcsok). Ekkor u minden szomszédja A-ban van; és mivel a gráf egyszerű, ez legalább n csúcsot jelent u-n kívül A-ban, azaz $|A| \geq n + 1$. Hasonlóan $|B| \geq n + 1$ is teljesül. Viszont ekkor $|A| + |B| \geq 2 \cdot (n + 1) = 2n + 2$, ellentmondás.

Ha $n-1$ fokú pontokat is megengedünk, akkor tudunk példát adni nem összefüggő gráfra: két komponens, mindkettő egy-egy n csúcsú teljes részgráf (K_n), ekkor minden csúcs foka pontosan $n-1$.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf minden pontjának fokszáma legalább 2, akkor a gráf tartalmaz kört.

   Megoldás: Tekintsünk a gráfban egy maximális (tovább már nem bővíthető) utat, és annak v végpontját! A v-ből kiinduló élek közül az egyik az útban szereplő él, de mivel $d(v) \geq 2$, ezért v-ből további él(ek) is kiindul(nak). Jelöljön e_1 egy ilyen élt, v_1 az él másik végpontját. Ha v_1 nem szerepelne az útban, ellentmondásra jutnánk, hiszen akkor e_1, v_1-gyel tovább bővíthető lenne az út. Tehát v_1 szerepel az útban. Ekkor az út $v_1, \ldots, v$ szakaszához hozzávéve e_1 élt (azaz a $v_1, \ldots, v$ szimbólumsorozatot kiegészítve e_1, v_1-gyel) kört kapunk.

9. Az n hosszúságú 0–1 sorozatok legyenek egy gráf csúcsai. A gráfban két csúcs pontosan akkor van éllel összekötve, ha a megfelelő sorozatok pontosan egy helyen különböznek. Rajzolja fel a gráfokat $n = 2$ és 3 esetén. Legalább hány élet kell a gráfból törölni, hogy ne legyen a maradékban kör?

   Megoldás: $n = 2$ esetén a négy csúcs az $\mathbb{R}^2$ euklideszi koordinátasík négy pontja: az origó: $O = (0, 0)$, továbbá $A = (0, 1)$ és $B = (1, 0)$, valamint $E = (1, 1)$. A gráf az $OAEB$ négyzet: csúcsai a négyzet csúcsai, élei a négyzet élei. Azaz ez a C_4 ciklus egy konkrét megvalósulása. Ebből egy él törlésével kapunk P_3 ösvényt, ami már körmentes.

   $n = 3$ esetén ehhez hasolóan az $\mathbb{R}^3$ koordinátatér nyolc pontjáról van szó: $O = (0, 0, 0)$, $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $E = (1, 1, 0)$, $C = (1, 0, 0)$, $P = (1, 1, 0)$, $R = (1, 0, 1)$, $F = (1, 1, 1)$, az élek a koordinátatengelyekkel párhuzamos szakaszok, amik ezeket a pontokat összekötik. Ez egy kocka nyolc csúcsa és a gráf élei a kocka tizenkét éle.

   Egy V csúcshalmazú és E élhalmazú G gráfban van legalább $|E|-|V|+1$ kör (annyi, amennyi éllel több van benne, mint egy feszítőfájának az élszáma). Tehát legalább annyi élet kell elhagyni a körmentességhez, hogy legfeljebb $|V| - 1$ él maradjon. Itt $|V| = 8$, és eredetileg $|E| = 12$, ebből a 12-ből legalább ötöt el kell hagynunk. És *alkalmas* öt élt elhagyva feszítőfát kapunk, ami tényleg körmentes.

   Általában n esetén az $\mathbb{R}^n$ euklideszi koordinátatér hiperkockájának az élhálózata a gráf. Azaz $|V| = 2^n$ a csúcsszáma (ennyi n-hosszúságú 0–1-sorozat van), és minden csúcsból n él indul ki (minden koordinátatengely irányában egy-egy), azaz n-reguláris a gráf, vagyis minden fokszám n, tehát a fokszámösszeg $n \cdot 2^n$, ez az élszám duplája, azaz $|E| = n \cdot 2^{n-1}$. Legalább $|E| - |V| + 1 = n \cdot 2^{n-1} - 2^n + 1 = n \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1} + 1 = (n-2) \cdot 2^{n-1} + 1$ élet kell törölni a körmentességhez.

Beadandó házi feladatok

10. Lehet-e egy egyszerű gráf fokszámsorozata a következő: $7, 6, 6, 5, 3, 3, 2, 2$. Ha igen, mutasson rá példát, ha nem, indokoljon! (**1 pont**)

11. Hány olyan 3-, 4-, illetve 5-csúcsú gráf van, amely izomorf a komplementerével? (**1 pont**)

12. Igaz-e, hogy vagy G, vagy a komplementere biztosan összefüggő? (**1 pont**)

Gráf komplementere: Egy $G = (V, E)$ egyszerű gráf komplementere az a $H = (V, F)$ gráf, ahol $\{u, v\} \in E \Longleftrightarrow \{u, v\} \notin F$.