Diszkrét matematika II. feladatok

Első alkalom (2024.09.09-13.)

Bemelegítő feladatok

1. Mik lesznek a z^3, z^{13}, z^{135} hatványok, ha $z = i \in \mathbb{C}$, $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$, ill. $z = 1 - i \in \mathbb{C}$? Válaszát formálisan indokolja a *maradékos osztás tétele* segítségével!

2. Számolja ki az M^2, M^5, M^{123} hatványokat a következő M mátrixok esetén!

$$\begin{pmatrix} 8 & -21 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Válaszát formálisan indokolja a *maradékos osztás tétele* segítségével!

3. Mik lesznek a z^{13}, z^{135}, z^{13579} hatványok, ha $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \in \mathbb{C}$, $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \in \mathbb{C}$, ill. $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \in \mathbb{C}$? Válaszát formálisan indokolja a *maradékos osztás tétele* segítségével!

4. Sorolja fel a prímszámokat 1 és 150 között!

Gyakorló feladatok

5. Számolja ki az alábbi kifejezéseket:

   a) $13 \cdot 15 + 31 \cdot 42 + 51^2 \bmod 2$
   b) $73 \cdot 82 + 17 \cdot 71 \bmod 4$
   c) $123 + 594 + 931 \bmod 10$
   d) $123 \cdot 594 \cdot 931 \bmod 10$
   e) $17^{10} \bmod 3$
   f) $3^{32} \bmod 5$
   g) $3^{100} \bmod 7$
   h) $39 \cdot 47 \cdot 29 \cdot 11 \cdot 36 \cdot 83 \bmod 5$
   i) $(583 + 57) \cdot 715 + 41^2 \bmod 7$

Érdekes feladatok

6. Legyen G az az *irányított* gráf, melynek csúcsai az első 6 pozitív egész szám, élei pedig $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 4$, $4 \to 5$, $5 \to 6$, $6 \to 1$ azaz G egy irányított kör. Legyen M a gráf szomszédsági mátrixa (adjacenciamátrixa), tehát a mátrix i-edik sorának j-edik eleme az i-ből j-be vezető élek száma. Számítsuk ki M-nek a 2., 3., 6., 24. és 113. hatványát. (Ötlet: M^n elemei kapcsolatban állnak a G-beli sétákkal.)

Szorgalmi feladatok

7. Egy 8×8 -as sakktáblára szeretnénk harmincegy darab 2×1-es téglalapot elhelyezni úgy, hogy minden mező le legyen fedve, kivéve az A1-et és H8-at (azaz a bal alsót és jobb felsőt). Lehetséges-e ez?