- Mi a belso pont definicioja?

Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Az $a \in A$ pont az A halmaz belso pontja, ha

$$\exists r > 0, \qquad \text{hogy } K_r(a) = (a - r, a + r) \subset A.$$

Jeloles: $\text{int } A := \{a \in A \mid \text{a belso pontja A-nak}\}$.

- Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fuggveny differencialhato valamely $a \in \text{int } D_f$ pontban?

Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fuggveny az $a \in \text{int } D_f$ pontban differencialhato (vagy derivalhato) ha

$$\exists \text{ es veges a } \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ hatarertek.}$$

Ezt $f'(a)$-val jeloljuk, es az f fuggveny a pontbeli derivaltjanak (vagy differenciahanyadosanak) nevezzuk, azaz

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

jeloles: $f \in D\{a\}$

- Mi a kapcsolat a pontbeli differencialhatosag es folytonossag kozott?

TFH, $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $a \in \text{int } D_f$. Ekkor
- 1. $f \in D\{a\} \Longrightarrow f \in C\{a\}$
- 2. az allitas megforditasa nem igaz.

- Adjon peldat olyan fuggvenyre, ami az $a \in \mathbb{R}$ pontban folytonos, de nem differencialhato!

$$f(x) = |x|$$

- Milyen tetelt ismer ket fuggveny szorzatanak valamely pontbeli differencialhatosagarol es a derivaltjarol?

TFH, $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \text{int } \left(D_f \cap D_g\right)$ pontban. Ekkor

$$f \cdot g \in D\{a\} \quad \text{es} \quad (f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

- Milyen tetelt ismer ket fuggveny hanyadosanak valamely pontbeli differencialhatosagarol es a derivaltjarol?

TFH, $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \text{int } \left(D_f \cap D_g\right)$ pontban, es $g(a) \neq 0$. Ekkor

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \text{es} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

- Milyen tetelt ismer ket fuggveny kompoziciojanak valamely pontbeli differencialhatosagarol es a derivaltjarol?

TFH, $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, R_g \subset D_f$ es egy $a \in \text{int } D_g$ pontban $g \in D\{a\}$, tovabba $f \in D\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in D\{a\}$, es

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

- Mi az exp, sin, cos fuggvenyek derivaltfuggvenye?
  - $\exp'(x) = (e^x)' = e^x \ (x \in \mathbb{R})$
  - $\sin'(x) = \cos(x) \ (x \in \mathbb{R})$
  - $\cos'(x) = -\sin(x) \ (x \in \mathbb{R})$

- Milyen tetelt ismer hatvanysor osszegfuggvenyenek differencialhatosagarol es a derivaltjarol?

TFH, a $\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \ (x \in \mathbb{R})$ hatvanysor R konvergenciasugara pozitiv, es legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in K_R(a)).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D\{x\}$ es

$$f'(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} \qquad (\forall x \in K_R(a)).$$