Diszkrét matematika I. feladatok
Halmazok
Második alkalom (2024.02.17-21.)

Bemelegítő feladatok

1. Legyenek $x = \{\text{alma, szilva}\}$ és $y = \{\text{kutya, macska}\}$ halmazok. Az alábbi halmazok közül melyekre igaz, hogy x eleme, x részhalmaza, x se nem eleme, se nem részhalmaza: $\{\{x\}, y\}$, x, $\{\emptyset\} \cap x$, $\{x\} \setminus \{\{x\}\}$, $\{x\} \cup x$, $\{x\} \cup \{\emptyset\}$?
Megoldás: $\{\{x\}, y\}$ ennek két eleme van, egyik eleme az x-et tartalmazó egyelemű halmaz, másik eleme az y halmaz, ezek egyike sem az x, tehát az x nem eleme: $x \notin \{\{x\}, y\}$. Ezen fenti két elem nem az alma és a szilva, így az x nem is lehet részhalmaza sem: $x \not\subseteq \{\{x\}, y\}$.
$x = \{\text{alma, szilva}\}$ ennek két eleme van, egyik eleme az alma, a másik eleme a szilva, ezek egyike sem az x, tehát az x nem eleme: $x \notin x$. Viszont az x mindkét eleme eleme x-nek, ezért részhalmaza: $x \subseteq x$ (minden halmaz részhalmaza saját magának).
Mivel $\{\emptyset\}$ egy egyelemű halmaz, aminek az egyetlen eleme (az üreshalmaz) sem nem az alma, sem nem a szilva, így nincs közös eleme x-szel, ezért $\{\emptyset\} \cap x = \emptyset$, ennek nincs eleme, azaz x nem eleme és nem is részhalmaza: $x \notin \{\emptyset\} \cap x$, $x \not\subseteq \{\emptyset\} \cap x$.
Mivel $\{\{x\}\}$ egy egyelemű halmaz, aminek az egyetlen eleme (az x-et tartalmazó egyelemű halmaz) nem az x halmaz (ami egy kételemű halmaz), így $\{\{x\}\}$ halmaznak nincs közös eleme $\{x\}$ halmazzal, ezért $\{x\} \setminus \{\{x\}\} = \{x\}$, ennek az x látványosan eleme: $x \in \{x\}$. De $\{x\}$ halmaznak az alma és a szilva nem eleme, így neki az x nem részhalmaza: $x \not\subseteq \{x\}$.
$\{x\} \cup x = \{x\} \cup \{\text{alma, szilva}\} = \{x, \text{alma, szilva}\}$ egy háromelemű halmaz, aminek az x is eleme, és x mindkét eleme is eleme, azaz ennek az x eleme is és részhalmaza is: $x \in \{x\} \cup x$, $x \subseteq \{x\} \cup x$.
$\{x\} \cup \{\emptyset\} = \{x, \emptyset\}$ egy kételemű halmaz, aminek két eleme az x és az $\emptyset$. Tehát az x ennek eleme: $x \in \{x\} \cup \{\emptyset\}$. De sem az x sem az $\emptyset$ nem a szilva és nem az alma, így az x nem részhalmaza: $x \not\subseteq \{x\} \cup \{\emptyset\}$.

2. Keressen olyan A, B, C halmazokat, melyekre egyszerre teljesülnek a következők:
$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset.$$
Megoldás: Ha $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$, akkor $(A \cap B)$ *minden eleme* C-ben kell legyen: $A \cap B \subseteq C$. De ha $A \cap C = \emptyset$, akkor A-nak (és így $(A \cap B)$-nek sem) *nincs* közös eleme C-vel, és így $A \cap B$-nek nincs eleme C-ben, de minden eleme C-ben van, azaz nem lehet eleme, ellentmndásban $A \cap B \neq \emptyset$ elvárással. Tehát nem lehet ilyen halmazokat találni.

3. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést: $(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C)$.
Megoldás: Az első zárójel hármas unióját zárójelezzük tetszőlegesen (mert az unió asszociatív), például így $((A \cup (A \cap B)) \cup (A \cap B \cap C))$. Mivel $(A \cap B) \subseteq A$, ezért $A \cup (A \cap B) = A$, és így $((A \cup (A \cap B)) \cup (A \cap B \cap C)) = (A \cup (A \cap B \cap C))$. Mivel $(A \cap B \cap C) \subseteq A$, ezért $(A \cup (A \cap B \cap C)) = A$. Tehát $((A \cup (A \cap B)) \cup (A \cap B \cap C)) = A$, és így $(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C) = A \cap (A \cup B \cup C)$. Mivel $A \subseteq (A \cup B \cup C)$, ezért $A \cap (A \cup B \cup C) = A$, tehát $(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C) = A$.

Gyakorló feladatok

4. Bizonyítsa be logikai formulák segítségével a következő azonosságokat:

$$\text{a) } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \quad \text{b) } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \text{c) } A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

Megoldás: $x \in \overline{A \cap B} \iff \neg(x \in A \cap B) \iff \neg(x \in A \wedge x \in B)$ itt használjuk a logikai és-re és vagy-ra vonatkozó deMorgan-szabályt: $\neg(x \in A \wedge x \in B) \iff (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) \iff ((x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B})) \longleftrightarrow (x \in \overline{A} \cup \overline{B})$. A b) rész teljesen hasonlóan bizonyítható.
$x \in A \setminus B \iff (x \in A) \wedge \neg(x \in B) \iff (x \in A) \wedge (x \in \overline{B}) \iff (x \in A \cap \overline{B})$

5. Bizonyítsa be a következő azonosságokat az előző feladat segítségével!

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Megoldás az előző feladatra visszavezetve:
Az előző feladat c) részét használva: $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)}$
Az előző feladat b) részét használva: $\overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}$, tehát $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C}$, az utóbbi lépésnél kihasználva az asszociativitást.
Újra az előző feladat c) részét kétszer is használva: $(A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = (A \setminus B) \cap \overline{C} = (A \setminus B) \setminus C$

Megoldás közvetlenül logikai formulákkal:
$x \in (A \setminus (B \cup C)) \iff (x \in A \wedge \neg(x \in (B \cup C)) \iff (x \in A \wedge \neg((x \in B) \vee (x \in C))) \iff (x \in A \wedge (\neg(x \in B) \wedge \neg(x \in C))) \iff ((x \in A \wedge \neg(x \in B)) \wedge \neg(x \in C)) \longleftrightarrow (x \in (A \setminus B)) \wedge \neg(x \in C) \longleftrightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C$
$x \in (A \cap (B \cup C)) \iff (x \in A) \wedge (x \in (B \cup C)) \iff (x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))$ itt használjuk a logikai és-nek a logikai vagy-ra vonatkozó disztributivitását: $(x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C)) \iff ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) \iff (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
a c) rész teljesen hasonlóan bizonyítható.

Érdekes feladatok

6. Fejezze ki a $\triangle$ és $\cap$ segítségével a következő halmazokat: $A \setminus B$ és $A \cup B$.
Megoldás: $A \setminus B$ az A-nak részhalmaza (és $B \setminus A$ pedig B-nek részhalmaza, míg A-tól diszjunkt). $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, tehát $A \setminus B$ az $A \triangle B$-nek pontosan az a része, ami teljesen az A-ba esik: $A \setminus B = A \cap (A \triangle B)$.
Két *diszjunkt* X és Y halmaz szimmetrikus differenciája $X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \cup Y) \setminus \emptyset = X \cup Y$ a két halmaz diszjunkt uniója. $X = A \triangle B$ és $Y = A \cap B$ választással két diszjunk halmazunk van, amelyeknek az uniója pont $A \cup B = ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) = (A \triangle B) \cup (A \cap B) = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$.

7. Bizonyítsa be a következő azonosságokat.

a) $A \triangle \emptyset = A$

b) $A \triangle A = \emptyset$

c) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$

d) $A \triangle (A \triangle B) = B$

Beadandó házi feladatok

8. Léteznek-e olyan A, B, C halmazok, melyekre egyszerre teljesülnek a következők (**részenként 1 pont**):

   a) $A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset$

   b) $A \vartriangle B \neq \emptyset, \quad A \cup \overline{C} = \emptyset, \quad B \setminus C = \emptyset$

   Ha igen, mutasson példát, ha nem, indokoljon!

   Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat).

9. Legyenek A és B nemüres halmazok. Bizonyítsa a következő egyenlőségeket (**részenként 1/2 pont**):

   a) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$

   b) $\left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = \overline{B}$

   Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat).

További feladatok otthoni gyakorlásra

10. Legyen $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ és

$$A = \{\mathbf{v} : M\mathbf{v} = \mathbf{0}\}, \quad B = \{\mathbf{v} : M^2\mathbf{v} = \mathbf{0}\}, \quad C = \left\{\mathbf{v} : M\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Adja meg a követjező halmazokat

$$A \cup B; \quad A \cap B; \quad A \triangle B \quad A \cup C, \quad A \cap C \quad A \triangle C.$$

Megoldás: Az M mátrix hatása a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektorra: $M\mathbf{v} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$ azaz az eredményvektor első koordinátája a $\mathbf{v}$ második koordinátája lesz, az eredményvektor második koordinátája mindig nulla lesz. Tehát az $A = \{\mathbf{v} : M\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ halmaz elemei azon $\mathbf{v}$ vektorok, amiknek az y koordinátája 0, vagyis $A = \left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\right\} = \{\text{az } x \text{ tengely pontjai}\} = \text{az } x \text{ tengely.}$

A $C = \left\{\mathbf{v} : M\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ halmaz elemei azon $\mathbf{v}$ vektorok, amiknek az y koordinátája 2, vagyis $C = \left\{\begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\right\} = \text{az } x$ tengellyel párhuzamos egyenes, ami az y tengelyt a 2-ben metszi.

Az M mátrix négyzete a csupa nulla mátrix: $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, amit bármelyik $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorra hattatva az eredemény a nullvektor: $M^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Vagyis a B halmazt definiáló feltételt minden $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ vektor teljesíti: $B = \mathbb{R}^2$ az egész sík.

$A \cup B$ az x tengely és az egész sík uniója, azaz az egész sík: $A \cup B = B$.
$A \cap B$ az x tengely és az egész sík metszete, azaz az x tengely: $A \cap B = A$.
$A \triangle B$ az x tengely és az egész sík szimmetrikus differenciája, azaz $A \triangle B = A \cup B \setminus A \cap B = B \setminus A$ az egész sík kivéve az x tengely pontjait.
$A \cup C$ az x tengely és egy vele párhuzamos egyenes uniója.
$A \cap C$ az x tengely és egy vele párhuzamos egyenes metszete, ami üres, hiszen párhuzamos egyenesek nem metszik egymást: $A \cap C = \emptyset$.
$A \triangle C = A \cup C \setminus A \cap C = A \cup C \setminus \emptyset = A \cup C$.

11. Állapítsa meg, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak tetszőleges A, B, C halmazokra:
$(A \cup B) \setminus A = B$; $\quad (A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$; $\quad (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.
Megoldás: Megsejteni Venn-diagramokat felrajzolva sejthetjük meg, hogy melyik igaz, és amelyik nem igaz, arra a Venn-diagram "kitöltésével" (konkrét elemek beírásával) ellenpéldát is gyárthatunk. Amelyik igaznak tűnik, azt vagy logikai állításokra visszavezetve, vagy a halmazműveletekre tanult azonosságokat használva bizonyíthatjuk.
$(A \cup B) \setminus A = B$ NEM igaz minden halmazra, hiszen például $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3\}$ választással $(A \cup B) \setminus A = \{3\}$.
$(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$ SEM igaz minden halmazra, hiszen például $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 1\}$ választással $(A \cup B) \setminus C = \{2\}$ míg $A \cup (B \setminus C) = \{1, 2\}$.
$x \in (A \setminus B) \cap C \iff (x \in A) \wedge \neg(x \in B) \wedge (x \in C)$.
$x \in (A \cap C) \setminus B \iff (x \in A) \wedge (x \in C) \wedge \neg(x \in B)$, mivel a logikai és asszociatív és kommutatív, így ez ugyanaz.
$x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C) \iff (x \in A) \wedge (x \in C) \wedge \neg((x \in B) \wedge (x \in C)) \iff (x \in A) \wedge (x \in C) \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C)) \iff (x \in A) \wedge ((x \in C) \wedge \neg(x \in B)) \vee ((x \in C) \wedge \neg(x \in C))$.
Mivel $(x \in C) \wedge \neg(x \in C)$ azonosan hamis, így bármivel "összevagyolva" olyan, mintha nem tennénk semmit. $(x \in A) \wedge ((x \in C) \wedge \neg(x \in B)) \vee ((x \in C) \wedge \neg(x \in C)) \iff (x \in A) \wedge ((x \in C) \wedge \neg(x \in B))$ így ez is ugyanaz a logikai állítás.
Ugyanezt nemcsak logikára visszavezetve, hanem halmazműveletek azonosságaival is megoldhatjuk: $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$ azonosságot használva (alaphalmaznak kellően nagy halmazt választva):
$(A \setminus B) \cap C = A \cap \overline{B} \cap C$, $\quad (A \cap C) \setminus B = A \cap C \cap \overline{B}$, ami ugyanaz, hiszen a metszet asszociatív és kommutatív.
$(A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \cap \overline{(B \cap C)} = (A \cap C) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$, itt használtuk a deMorgan azonosságot, és most használni fogjuk a disztrubutivtást is (de előtte a metszet asszociativitását): $A \cap (C \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) = A \cap ((C \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{C}))$. Most használjuk, hogy $C \cap \overline{C} = \emptyset$, és azt,h $X \cup \emptyset = X$ minden X-re: $A \cap ((C \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{C})) = A \cap (C \cap \overline{B})$.

12. Bizonyítsa be a következő összefüggéseket: $\overline{(\overline{A \cap B} \cup C) \cap \overline{A}} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = A \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.
Megoldás: $X = (\overline{A \cap B} \cup C)$ rövidítéssel élve $\overline{X \cap \overline{A}} = \overline{X} \cup A$ a deMorgan azonosság

(és $\overline{\overline{A}} = A$) miatt. Maga $\overline{X} = \overline{\overline{A \cap B}} \cap \overline{C} = (A \cap B \cap \overline{C})$ a deMorgan azonosság miatt. Ebből látszik, hogy $\overline{X} \subseteq A$, hiszen egy olyan metszet, amiben az egyik tényező az A, ezért $\overline{X \cap \overline{A}} = \overline{X} \cup A = A$. Ebből már látszik, hogy az eredeti egyenlet bal oldalán is ugyanaz a halmaz szerepel, mint a jobb oldalán.

13. Legyen $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ és $C = \{2, 3, 4\}$. Határozza meg a következő halmazokat

    a) $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$;
    b) $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$;
    c) $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$;
    g) $A \bigtriangleup B = \{1, 2, a, b, c\}$;
    h) $A \bigtriangleup C = \{1, 3, 4\}$;
    i) $(A \times B) \bigtriangleup (C \times B) = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\} \bigtriangleup$
    $\bigtriangleup \{(2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\} =$
    $= \{(1, a), (1, b), (1, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\} = (A \times C) \bigtriangleup B$