II. ZH bizonyítandó tételek LaTeX

Ennek az a lényege hogy Toledo nagyon sokat pofázik szóval leírom pofázás nélkül

1. A végtelen sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium.
2. Végtelen sorokra vonatkozó összehasonlító kritériumok.
3. A Cauchy-féle gyökkritérium.
4. A d'Alembert-féle hányadoskritérium.
5. Leibniz-típusú sorok konvergenciája.
6. Minden $[0,1]$-beli szám felírható tizedes tört alakban.
7. Konvergens sorok zárójelezése.
8. Abszolút konvergens sorok átrendezése.
9. Sorok téglányszorzatának konvergenciája.
10. Abszolút konvergens sorok szorzatai.
11. Hatványsorok konvergenciasugara.
12. A Cauchy-Hadamard-tétel.
13. Függvények határértékének egyértelműsége.
14. A határértékre vonatkozó átviteli elv.
15. Monoton függvények határértéke.
16. Az összetett függvény folytonossága.

1. A végtelen sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium.

Tétel:

A $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens ha

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n > n_0 : |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \epsilon$$

Bizonyítás:

$$\sum a_n \text{ konvergens} \iff (s_n) \text{ konvergens} \iff (s_n) \text{ Cauchy-sorozat}$$

tehát

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0 : |s_m - s_n| < \epsilon$$

$m > n$ esetén pedig

$$s_m - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m$$

$\square$

---

2. Végtelen sorokra vonatkozó összehasonlító kritériumok.

Tétel:

! $\sum a_n, \sum b_n$ nemnegatív tagú sorok

$$\text{TFH } \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : 0 \leq a_n \leq b_n$$

Ekkor

1. Majoráns kritérium: ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens

2. Minoráns kritérium: ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is divergens

Bizonyítás:

$$\text{TFH } \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$$

$$!(s_n), (t_n) \text{ a } \sum a_n, \sum b_n \text{ sorok részösszegeiből álló sorozatok}$$

$$\text{Ekkor } \forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq t_n, \text{ és}$$

1. $\sum b_n$ konvergens $\implies$ (t_n) korlátos $\implies$ (s_n) korlátos $\implies$ $\sum a_n$ konvergens
2. $\sum a_n$ divergens $\implies$ (s_n) nem korlátos $\implies$ (t_n) nem korlátos $\implies$ $\sum b_n$ divergens

□

---

3. A Cauchy-féle gyökkritérium.

Tétel:

$$! \sum a_n \text{ végtelen sor, és TFH } \exists A := \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Ekkor

1. $0 \leq A < 1 :$ $\sum a_n$ abszolút konvergens (tehát konvergens is)
2. $A > 1 :$ $\sum a_n$ divergens
3. $A = 1 :$ Nem ad információt $\sum a_n$ konvergenciájáról

Bizonyítás:

Világos, hogy $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 0 \implies A \geq 0$

1. TFH $0 \leq A < 1 :$

$!q : A < q < 1$

$$\lim \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right) < q \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} < q \iff |a_n| < q^n$$

Mivel $|q| < 1$, ezért $\sum q^n$ mértani sor konvergens $\implies$ majoráns kritérium szerint $\sum |a_n|$ konvergens $\implies$ $\sum a_n$ valóban abszolút konvergens

2. TFH $A > 1 :$

$!q : 1 < q < A$

$$\lim \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right) > q \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} > q \iff |a_n| > q^n$$

Mivel $|a_n| > q^n > 1$, ezért $\lim(q^n) \neq 0 \implies \sum a_n$ divergens

3. TFH $A = 1 :$

- $\sum \frac{1}{n}$ divergens sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n}$, azaz $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$
- $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, azaz $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$

□

---

4. A d'Alembert-féle hányadoskritérium.

Tétel:

$$\text{TFH } \sum a_n \text{ végtelen sor tagjai közül egyik sem 0 és}$$

$$\exists A := \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in \overline{\mathbb{R}}$$

Ekkor

1. $0 \leq A < 1 : \sum a_n$ abszolút konvergens (tehát konvergens is)
2. $A > 1 : \sum a_n$ divergens
3. $A = 1$: Nem ad információt $\sum a_n$ konvergenciáról

Bizonyítás:

Világos, hogy $A \geq 0$

1. TFH $0 \leq A < 1$:

$!q : A < q < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q \iff |a_{n+1}| < q|a_n|$$

ez azt jelenti hogy $\forall n \geq n_0$ esetén

$$|a_{n_0+1}| < q|a_{n_0}|, \quad |a_{n_0+2}| < q|a_{n_0+1}|, \quad \ldots \quad |a_{n-1}| < q|a_{n-2}|, \quad |a_n| < q|a_{n-1}|$$

Így

$$|a_n| < q|a_{n-1}| < q^2|a_{n-2}| < q^3|a_{n-3}| < \cdots < q^{n-n_0}|a_{n_0}| = q^n q^{-n_0}|a_{n_0}| = aq^n,$$

Ahol $a := q^{-n_0}|a_{n_0}|$ egy n-től független konstans

Mivel $|q| < 1$, ezért $\sum aq^n$ mértani sor konvergens $\implies$ majoráns kritérium szerint$\sum |a_n|$ konvergens $\implies$ $\sum a_n$ valóban abszolút konvergens

2. TFH $A > 1$:

$!q : 1 < q < A$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > q \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > q \iff |a_{n+1}| > q|a_n| > |a_n|$$

Ebből következik hogy $\lim(a_n) \neq 0 \implies \sum a_n$ divergens

3. TFH $A = 1$:

- $\sum \frac{1}{n}$ divergens sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n}$, azaz $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$
- $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, azaz $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$

□

---

5. Leibniz-típusú sorok konvergenciája.

Tétel:

$$\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n \text{ leibniz sor akkor és csak akkor konvergens ha } \lim(a_n) = 0$$

Bizonyítás:

$\implies$:

Ha $\sum(-1)^{n+1}a_n$ konvergens, akkor $\lim\left((-1)^{n+1}a_n\right) = 0$, ami csak akkor lehetséges, ha $\lim(a_n) = 0$

$\Longleftarrow$:

TFH $\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ leibniz sor és $\lim(a_n) = 0$. Igazoljuk hogy konvergens

Lássuk be hogy (s_{2n}) egy monoton növekvő részsorozat, (s_{2n+1}) pedig egy monoton csökkenő részsorozat

$$s_{2n} = \overbrace{\underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-3} - a_{2n-2})}_{\geq 0}}^{s_{2n-2}} + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\geq 0}$$

(s_{2n}) valóban monoton növekvő

$$s_{2n+1} = \overbrace{a_1 + \underbrace{(-a_2 + a_3)}_{\geq 0} + \underbrace{(-a_4 + a_5)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(-a_{2n-2} + a_{2n-1})}_{\geq 0}}^{s_{2n-1}} + \underbrace{(-a_{2n} + a_{2n+1})}_{\geq 0}$$

(s_{2n+1}) valóban monoton csökkenő

Másrészt $s_0 := 0$ értelmezés mellett

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0 \implies s_{2n+1} \geq s_{2n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Ekkor

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq \cdots \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1$$

Tehát s_{2n} és s_{2n+1} korlátos sorozatok. Korlátos monoton sorozat $\implies$ konvergens

$!A = \lim(s_{2n+1}), B = \lim(s_{2n})$

$$\begin{aligned} A - B = \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_{2n} = \lim_{n\to+\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \\ = \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \end{aligned}$$

Tehát a Leibniz sor valóban konvergens. $\square$

---

6. Minden $[0, 1]$-beli szám felírható tizedes tört alakban.

Tétel:

Minden $\alpha \in [0, 1]$ számhoz létezik olyan $(a_n) : \mathbb{N}^+ \to \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ sorozat, amelyre teljesül, hogy

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

Bizonyítás:

Rögzítsünk egy $\alpha \in [0, 1]$ számot!

Osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot 10 részre

$$\exists \alpha_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} : \alpha \in \left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}\right] =: I_1 \quad \text{azaz} \quad \frac{a_1}{10} \leq \alpha \leq \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$$

Osszuk fel az I_1-t 10 részre

$$\exists \alpha_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} : \alpha \in \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}\right] =: I_1 \quad \text{azaz}$$
$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq \alpha \leq \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}$$

Ha ezt ismételjük, az n-edik lépésre találunk olyan $a_n \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$ számot, hogy

$$s_n := \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq \alpha \leq \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} = s_n + \frac{1}{10^n}$$

Ekkor

$$|\alpha - s_n| = \left|\alpha - \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}\right)\right| \leq \frac{1}{10^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

és így

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

□

7. Konvergens sorok zárójelezése.

Tétel:

Egy konvergens sor minden zárójelezése is konvergens, és összege egyenlő az eredeti sor összegével

Bizonyítás:

! $\sum_{n=1} \alpha_n$ a $\sum_{n=1} a_n$ sor (m_n) által meghatározott zárójelezése. Ezeknek részletösszegei legyenek (σ_n) és (s_n).

Ha $\sum_{n=1} a_n$ konvergens akkor (s_n) konvergens sorozat, melynek minden részsorozata is konvergens, és határértékük megegyezik (s_n) határértékével.

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $s_{m_n} = \sigma_n$ teljesül, tehát (σ_n) részsorozata (s_n) sorozatnak. Tehát a (σ_n) sorozat konvergens és $\lim(\sigma_n) = \lim(s_n)$. Ez azt jelenti, hogy a $\sum \sigma_n$ sor konvergens, és

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

□

8. Abszolút konvergens sorok átrendezése.

Tétel:

Ha $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens akkor tetszőleges $(p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutációval képzett $\sum a_{p_n}$ átrendezése is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Tehát egy abszolút konvergens sor bármilyen átrendezése is abszolút konvergens, és összege egyenlő az eredetiével.

Bizonyítás:

$$!s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad \sigma_n := \sum_{k=0}^{n} a_{p_k}$$

1. lépés: Igazoljuk hogy a_{p_k} sor abszolút konvergens

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{p_k}| = |a_{p_0}| + |a_{p_1}| + \cdots + |a_{p_n}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| = K < +\infty$$

Tehát $\sum_{k=0}^{n} |a_{p_k}|$ felülről korlátos és monoton növekvő $\implies$ $\sum a_{p_n}$ sor konvergens $\implies$ $\sum a_{p_k}$ valóban abszolút konvergens.

2. lépés: Igazoljuk hogy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

$$!A := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n, \quad B := \sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n$$

$\sum |a_n|$ konvergens, így a Cauchy-kritérium szerint

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_0 : |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \epsilon$$

Ezért $n = n_0$ mellett, ha $m > n_0$ esetén $\sum_{k=n_0+1}^{m} |a_k| < \epsilon$

Adott $\varepsilon > 0$-ra tekintsük az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n0}$ tagokat, és legyen N_0 olyan index, amire az $a_{p_0} + a_{p_1} + \cdots + a_{p_{N_0}}$ összeg már tartalmazza ezeket a tagokat. Ilyen N_0 nyilván létezik, és $N_0 \geq n_0$. Legyen $n > N_0$. Ekkor

$$\sigma_n - s_n = (a_{p_0} + a_{p_1} + \cdots + a_{p_{N_0}} + a_{p_{N_0}+1} + \cdots + a_{p_n}) - (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n)$$

nem tartalmazza az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ tagokat. Ezért

$$|\sigma_n - s_n| \leq \sum_{k=n_0+1}^{m} |a_k| < \epsilon$$

ahol $m := \max\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$, hiszen $m \geq n > N \geq n_0$. Tehát $(\sigma_n - s_n)$ nullsorozat. Ezért

$$\sigma_n = (\sigma_n - s_n) + s_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0 + A = A$$

azaz

$$B = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$$

□

---

9. Sorok téglányszorzatának konvergenciája.

Tétel:

TFH $\sum_{n=0} a_n, \sum_{n=0} b_n$ végtelen sorok konvergensek. Ekkor $\sum_{n=0} t_n$ téglányszorzatuk is konvergens és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Tehát két konvergens sor téglányszorzata is konvergens, és összege megegyezik a két sor összegének szorzatával.

Bizonyítás:

$!A_n, B_n, T_n$ rendre $\sum_{n=0} a_n, \sum_{n=0} b_n, \sum_{n=0} t_n$ sorok n-edik részletösszegei. Ekkor

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\max\{i,j\}=k} a_i b_j \right) = \sum_{\max\{i,j\}\leq n} a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \right) = A_n B_n \to \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

Ez azt jelenti hogy (T_n) sorozat konvergens $\implies$ $\sum t_n$ végtelen sor is konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \lim(T_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

□

---

10. Abszolút konvergens sorok szorzatai.

Tétel:

TFH $\sum_{n=0} a_n, \sum_{n=0} b_n$ végtelen sorok abszolút konvergensek. Ekkor

1. $\sum_{n=0} t_n$ téglánysorozat is abszolút konvergens,

2. $\sum_{n=0} c_n$ Cauchy-szorzat is abszolút konvergens,
3. Az összes $a_i b_j$ szorzatból tetszés szerinti sorrendben és csoportosításban képzett $\sum_{n=0} d_n$ végtelen sor is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} d_n = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

Bizonyítás:

Elég a 3. állítást igazolni.

Mivel $\sum_{n=0} a_n, \sum_{n=0} b_n$ konvergensek, ezért

$$A_N := \sum_{n=0}^{N} |a_n| \xrightarrow{n\to+\infty} A \in \mathbb{R}, \quad B_N := \sum_{n=0}^{N} |b_n| \xrightarrow{n\to+\infty} B \in \mathbb{R}$$

! $\sum d_n$ tetszőleges sor, úgy hogy $\sum_{\dots} d_n = a_i b_j$. $!N \in \mathbb{N}$ tetszőleges. $!I, J$ maximális-, i, j minimális indexek a $d_0, d_1, \dots, d_N$ összegekben. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{N} |d_n| \leq \sum_{\substack{0\leq i\leq I \\ 0\leq j\leq J}}^{N} |a_i b_j| \left(\sum_{n=0}^{I} |a_n|\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{J} |b_n|\right) \leq A \cdot B$$

Ez azt jelenti hogy $\sum |d_n|$ nemnegatív tagú sor konvergens, mert részletösszegei korlátosak $\implies \implies \sum d_n$ abszolút konvergens

A fentiek érvényesek $d_n = t_n$ esetén, így $\sum t_n$ is abszolút konvergens, tehát konvergens is.

Tehát teljesül hogy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

! $\sum t_n^*$ az a sor amelyet a $\sum t_n$ téglánysorozatban szereplő zárójelek elhagyásával kapunk. Mivel $\sum t_n^*$ egy lehetséges $\sum d_n$ típusú sor, ezért $\sum t_n^*$ is abszolút konvergens, és bármely zárójelezéssel összege nem változik. Tehát

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n^* = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

Bármely $\sum d_n$ típusú sor megkapható $\sum t_n^*$ megfelelő átrendezésével és csoportosításával. Ekkor az összeg nem változik, tehát a tétel teljesül tetszőleges $\sum d_n$ sorra.

$\square$

11. Hatványsorok konvergenciasugara.

Tétel:

Tetszőleges $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor konvergenciahalmazára a következő három eset egyike áll fenn:

1. $\exists 0 < R < +\infty$, hogy a hatványsor $\forall x \in \mathbb{R} : |x-a| < R$ pontban abszolút konvergens, és $\forall x \in \mathbb{R} : |x-a| > R$ pontban divergens.
2. A hatványsor csak az $x = a$ pontban konvergens. Ekkor $!R := 0$
3. A hatványsor abszolút konvergens $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor $!R := +\infty$

R-et a hatványsor konvergenciasugarának nevezzük.

Bizonyítás:

Az állítást elég $a = 0$ esetén igazolni.

Segédtétel:

TFH $\sum \alpha_n x^n$ hatványsor konvergens egy $x_0 \neq 0$ pontban. Ekkor $\forall x \in \mathbb{R} : |x| < |x_0|$ esetén a hatványsor abszolút konvergens az x pontban.

Segédtétel bizonyítása:

Mivel $\sum \alpha_n x_0^n$ konvergens, ezért $\lim(\alpha_n x_0^n) = 0 \implies (\alpha_n x_0^n)$ sorozat korlátos, azaz

$$\exists M > 0 : |\alpha_n x_0^n| \leq M < +\infty$$

$!x \in \mathbb{R}$ olyan, amire $|x| < |x_0|$ teljesül. Ekkor

$$|\alpha_n x^n| = |\alpha_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n =: Mq^n$$

$\sum |\alpha_n x^n|$ végtelen sor, tehát majorálható $\sum Mq^n$ mértani sorral, ami konvergens mert $|q| = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$.

Tehát $\sum |\alpha_n x^n|$ abszolút konvergens $\implies \sum \alpha_n x^n$ konvergens.

$\sum \alpha_n x^n$ hatványsor $x = 0$-ban konvergens, ezért $\mathrm{KH}(\alpha_n x^n) \neq \emptyset$, így

$$\exists \sup \mathrm{KH}\left(\sum_{n=0} \alpha_n x^n\right) =: R \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad R \geq 0$$

Három eset lehetséges.

1. $0 < R < +\infty$.

   $!|x| < R$ tetszőleges. Ekkor a szuprémum definicója szerint $\exists x_0 > 0 : |x_0| < |x| < R$ és x_0 a konvergenciahalmaz eleme, azaz $\sum \alpha_n x_0^n$ konvergens. Ekkor a segédtétel szerint $\sum \alpha_n x^n$ abszolút konvergens. Ha $|x| > R$ tetszőleges, akkor az R definíciója és a segédtétel szerint a $\sum \alpha_n x^n$ sor divergens.

2. $R = 0$

   $\sum \alpha_n x^n$ hatványsor az $x = 0$ pontban nyilván konvergens. TFH van olyan $x \neq 0$ pont ahol $\sum \alpha_n x^n$ konvergens. A segédtétel szerint a hatványsor konvergens $\frac{|x|}{2} > 0$ pontban, ami lehetetlen mert $R = 0$. A hatványsor tehát csak $x = 0$ pontban konvergens.

3. $R = +\infty$

   $!x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor $\exists x_0 > 0 : |x| < x_0$ és x_0 a konvergenciahalmaz eleme, azaz $\sum \alpha_n x_0^n$ konvergens. Ekkor a segédtétel szerint $\sum \alpha_n x^n$ abszolút konvergens.

□

---

12. A Cauchy-Hadamard-tétel.

Tétel:

Tekintsük a $\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsort, és TFH

$$\exists \lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) =: A \in \overline{\mathbb{R}}$$

Ekkor a hatványsor konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{A} \quad \left(\frac{1}{+\infty} := 0, \frac{1}{0} := +\infty\right)$$

Bizonyítás:

Világos hogy $A \geq 0$. Rögzítsünk egy $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges számot, és alkalmazzuk a Cauchy-féle gyökkritériumot a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsorra

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n (x-a)^n|} = \left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}\right) |x-a| = A|x-a|,$$

és így

$A|x-a|<1 \implies$ a sor konvergens,

$A|x-a|>1 \implies$ a sor divergens.

1. Ha $0<A<+\infty$ akkor lehet A-val osztani. Ekkor

$$x \in \left(a-\frac{1}{A}, a+\frac{1}{A}\right) \implies \text{a sor konvergens}$$

$$x \notin \left[a-\frac{1}{A}, a+\frac{1}{A}\right] \implies \text{a sor divergens}$$

   Tehát valóban $R=\frac{1}{A}$.

2. Ha $A=+\infty$, akkor $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq a : A|x-a|=(+\infty)\cdot|x-a|=+\infty>1$

   Ezért a hatványsor az $x=a$ pont kivételével divergens, azaz $R=0$

3. ha $A=0$, akkor $\forall x \in \mathbb{R} : A|x-a|=0|x-a|=0<1$

   Ezért a hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens, azaz $R=+\infty$

$\square$

---

13. Függvények határértékének egyértelműsége.

Tétel:

Ha az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f^{'}$ pontban van határértéke, akkor a definícióban szereplő A $A \in \overline{\mathbb{R}}$ egyértelműen létezik.

Bizonyítás:

TFH $A_1, A_2 \in \overline{\mathbb{R}}, A_1 \neq A_2$. Két különböző $\overline{\mathbb{R}}$-beli határérték szétválasztható diszjunkt környezetekkel.

$$\exists \epsilon>0 : K_\epsilon(A_1) \cap K_\epsilon(A_2)=\emptyset$$

A határérték definíciója szerint ilyen ϵ-hoz

$$\begin{gathered}\exists \delta_1>0 \forall x \in \dot{K}_{\delta_1}(a) \cap \mathcal{D}_f : f(x) \in K_\epsilon(A_1) \\ \exists \delta_2>0 \forall x \in \dot{K}_{\delta_2}(a) \cap \mathcal{D}_f : f(x) \in K_\epsilon(A_2)\end{gathered}$$

$!\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor

$$\forall x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f : f(x) \in K_\epsilon(A_1) \cap K_\epsilon(A_2)=\emptyset$$

de

$$\dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$$

mert $a \in \mathcal{D}_f^{'}$

Ellentmondásra jutottunk, tehát a határérték egyértelmű. $\square$

---

14. A határértékre vonatkozó átviteli elv.

Tétel:

$$!f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathcal{D}_f^{'}, A \in \overline{\mathbb{R}}$$

Ekkor

$$\lim_a f=A \iff \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, \lim_{n\to+\infty} x_n=a \text{ esetén } \lim_{n\to+\infty} f(x_n)=A$$

Bizonyítás:

$\implies$:

$$\lim_a f = A \implies \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f : f(x) \in K_\epsilon(A)$$

$!(x_n)$ a tételben szereplő sorozat, és $\epsilon > 0$ egy rögzített érték.

$$\lim(x_n) = a \implies \delta\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : x_n \in K_\delta(a)$$

Mivel $x_n \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, így $x_n \in \dot{K}_\delta \cap \mathcal{D}_f$, amiből $f(x) \in \dot{K}_\epsilon(A)$ teljesül $n > n_0$ esetén.

Ez azt jelenti hogy $(f(x_n))$ sorozatnak van határértéke, és $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$

$\Longleftarrow$:

TFH

$$\forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, \lim_{n\to+\infty} x_n = a \text{ esetén } \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A$$

Mutassuk meg hogy $\lim\limits_a f = A$

Indirekt módon TFH $\lim\limits_a f \neq A$, ami azt jelenti hogy

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f : f(x_\delta) \notin K_\epsilon(A)$$

$\delta := \frac{1}{n}$ választással ez azt jelenti, hogy

$$\exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^+, \exists x_n \in \dot{K}_{\frac{1}{n}}(a) \cap \mathcal{D}_f : f(x_n) \notin K_\epsilon(A)$$

$!x_0 \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ tetszőleges. Az $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ sorozat nyilván a-hoz tart, de a függvényértékek $(f(x_n))$ sorozata nem tart A-hoz.

Ellentmondáshoz jutottunk. $\square$

---

15. Monoton függvények határértéke.

Tétel:

$!(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ tetszőleges nyílt intervallum. Ha f függvény monoton (α, β)-n, akkor az f-nek $\forall a \in (\alpha, \beta)$ pontban létezik a jobb oldali, illetve a bal oldali határértéke, és ezek végesek.

a. Ha $f \nearrow (\alpha, \beta)$-n, akkor

$$\lim_{a+0} f = \inf\{f(x) | x \in (\alpha, \beta), x > a\},$$
$$\lim_{a-0} f = \sup\{f(x) | x \in (\alpha, \beta), x < a\},$$

a. Ha $f \searrow (\alpha, \beta)$-n, akkor

$$\lim_{a+0} f = \sup\{f(x) | x \in (\alpha, \beta), x > a\},$$
$$\lim_{a-0} f = \inf\{f(x) | x \in (\alpha, \beta), x < a\},$$

Bizonyítás:

TFH $f \nearrow (\alpha, \beta)$-n. Igazoljuk a jobb oldali határértékre vonatkozó állítást

$$!m := \inf\{f(x) | x \in (\alpha, \beta), x > a\}$$

Világos, hogy $m \in \mathbb{R}$. Az infinum definíciója szerint:

$$\forall x \in (\alpha, \beta), x > a : m \leq f(x)$$
$$\forall \epsilon > 0, \exists x_1 \in (\alpha, \beta), x_1 > a : f(x_1) < m + \epsilon$$

Ekkor $m \leq f(x_1) \leq m + \epsilon$. Mivel $f \nearrow (\alpha, \beta)$-n, ezért

$$m \leq f(x) \leq f(x_1) < m + \epsilon$$

A $\delta := x_1 - a > 0$ választással azt mutattuk meg hogy

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in (\alpha, \beta), a < x < a + \delta : \underbrace{0 \leq f(x) - m < \epsilon}_{f(x) \in K_\epsilon(m)}$$

Ez pedig azt jelenti hogy f-nek a-ban van jobb oldali határértéke, és m-mel egyenlő, azaz

$$\lim_{a+0} f = m = \inf\{f(x) | x \in (\alpha, \beta), x > a\}$$

A többi állítást hasonlóan lehet igazolni. □

---

16. Az összetett függvény folytonossága.

Tétel:

TFH $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g \in C\{a\}$ és $f \in C\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in C\{a\}$, tehát az összetett függvény "örökli" a belső- és a külső függvény folytonosságát.

Bizonyítás:

Világos hogy $g(a) \in \mathcal{D}_f$, ezért $g(a) \in \mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f$, azaz $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$. Tehát $f \circ g$ értelmes és $a \in \mathcal{D}_{f \circ g}$ is igaz.

$!(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_{f \circ g} \subset \mathcal{D}_g$ egy olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) = a$. Mivel $g \in C\{a\}$, így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $\lim(g(x_n)) = g(a)$.

$$!b := g(a), \quad y_n := g(x_n)$$

Ekkor $(y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$ és $\lim(y_n) = b$. Mivel $f \in C\{b\}$, így folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $\lim(f(y_n)) = f(b)$. Ugyanakkor

$$f(b) = f(g(a)) = (f \circ g)(a) \quad \text{és} \quad f(y_n) = f(g(x_n)) = (f \circ g)(x_n)$$

Azt igazoltuk tehátm, hogy $\forall(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_{f \circ g}, \lim(x_n) = a$ sorozat esetén igaz, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} (f \circ g)(x_n) = \lim_{n\to+\infty} (f(y_n)) = f(b) = (f \circ g)(a)$$

Ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $f \circ g \in C\{a\}$

□