Táblás bizonyítások a
Numerikus módszerek 2. előadáshoz

Programtervező informatikus Bsc szak A szakirány

Dr. Krebsz Anna

Frissült: 2024. július 30.

Az elkészített anyag a Numerikus módszerek 2. előadás fontosabb tételeit és annak bizonyításait tartalmazza, melyek az előadáson kerültek bizonyításra. A tételek megértéséhez szükséges definíciók és felhasznált tételek az előadás diáin megtalálhatók. Az anyag megértéséhez ezek ismerete szükséges.

Tartalomjegyzék

Tétel: Schur tétel

$\forall\ A \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $\exists\ U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitér mátrix, hogy $U^*AU = R$ felsőháromszög-mátrix.

Bizonyítás:

Teljes indukcióval végezzük a bizonyítást, de csak egy lépést végzünk, a többi analóg módon megtehető. A mátrix sajátértékei és sajátvektorai segítségével elkészítjük az U unitér hasonlósági transzformációt. Jelöljük λ_1-gyel $\mathbf{A}$ sajátértékét és $v_1 \neq 0$-val a hozzá tartozó normált sajátvektort ($\|v_1\|_2 = 1$). (Ha v_1 nem normált, akkor normáljuk le.) Írjuk fel azt a komplex Householder-transzformációt, melyre $H_1 v_1 = e_1$.

$$u_1 := \frac{v_1 - e_1}{\|v_1 - e_1\|_2} \quad \Rightarrow \quad H_1 := H(u_1) = I - 2 \cdot u_1 u_1^*$$

Ha $v_{11} > 0$, akkor $-v_1$-et válasszuk v_1 helyett, hogy a számlálóban biztos ne legyen nullvektor. Ekkor

$$H_1 v_1 = e_1 \quad \Rightarrow \quad H_1 e_1 = H_1(H_1 v_1) = v_1.$$

A hasonlósági traszformációt alkalmazva A-ra a kapott mátrix 1. oszlopa

$$H_1 A H_1 e_1 = H_1(Av_1) = H_1(\lambda_1 v_1) = \lambda_1 (H_1 v_1) = \lambda_1 e_1.$$

Tehát

$$\widetilde{A}_1 := H_1 A H_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & x & x & x \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & A_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right].$$

A hasonlósági transzformáció miatt A és $\widetilde{A}_1$ sajátértékei azonosak, így A_2 sajátértékei: $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Folytassuk tovább az eljárást A_2-re. Ha elkészült A_2-re az $(n-1)\times(n-1)$-es méretű H_2 Householder transzformáció és elvégeztük vele a hasonlósági transzformációt A_2-n, akkor a következő alakot kapjuk

$$\widetilde{A}_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} H_1 A H_1 \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & x & x \\ 0 & \lambda_2 & x \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}.$$

Ezzel $n-1$ lépésben felsőháromszög alakra hoztuk A-t. Nyilván a felhasznált Householder transzformációk unitérek és a szorzatuk (U) is az. Mivel minden mátrixnak $\mathbb{C}$ felett annyi sajátértéke van amennyi a mérete és minden sajátértékhez tartozik sajátvektor, ezért a fenti traszformációk mindig léteznek. $\square$

Tétel: normális mátrixok diagonalizálása

A normális mátrix ($A^*A = AA^*$) $\Leftrightarrow$ $\exists$ U unitér mátrix, melyre $U^*AU = D$ diagonális.

Bizonyítás:

$\Leftarrow$: $A = UDU^*$-ra ellenőrizzük a normalitást:

$$AA^* = (UDU^*)(UDU^*)^* = UD\underbrace{(U^*U)}_{=I}D^*U^* = UDD^*U^*$$
$$A^*A = (UDU^*)^*(UDU^*) = UD^*\underbrace{(U^*U)}_{=I}DU^* = UD^*DU^*$$

Mivel minden i-re $(DD^*)_{ii} = |d_{ii}|^2 = (D^*D)_{ii}$, ezért $DD^* = D^*D$.

$\Rightarrow$: Két részletben bizonyítunk:

1. Belátjuk, hogy ha A normális, akkor $\forall$ U unitér mátrixra U^*AU normális. (Hf: beszorzással igazolni, ugyanúgy, mint az előző részben, csak D helyett A-t írunk.)

2. A Schur tételből $\exists$ U unitér mátrix, melyre $U^*AU = R$ felsőháromszög-mátrix és normális is az előző pont szerint, vagyis $R^*R = RR^*$. Példaként 3×3-as mátrixra.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \overline{r_{11}} & 0 & 0 \\ \overline{r_{12}} & \overline{r_{22}} & 0 \\ \overline{r_{13}} & \overline{r_{23}} & \overline{r_{33}} \end{bmatrix}}_{R^*} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}}_{R} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}}_{R} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{r_{11}} & 0 & 0 \\ \overline{r_{12}} & \overline{r_{22}} & 0 \\ \overline{r_{13}} & \overline{r_{23}} & \overline{r_{33}} \end{bmatrix}}_{R^*}$$

Ha felírjuk R elemeire a normalitást, akkor

$$(R^*R)_{11} = \overline{r_{11}}r_{11} = |r_{11}|^2 = (RR^*)_{11} = \sum_{j=1}^{n} r_{1j}\overline{r_{1j}} = \sum_{j=1}^{n} |r_{1j}|^2,$$

innen $r_{1j} = 0$, $j = 2, \ldots, n$. Ezt tovább folytatva a $2. \ldots n.$ diagonális elemre, azt kapjuk, hogy R diagonális mátrix.

$\square$

Tétel: Gersgorin tétel

Az A minden sajátértéke a komplex sík a_{ii} középpontú

$$r_i := \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

sugarú zárt körlemezeinek úniójában helyezkedik el.

Bizonyítás:

Legyen λ az A tetszőleges sajátértéke és $v \neq 0$ a hozzá tartozó sajátvektor. Legyen i az az index, melyre $|v_i| = \|v\|_\infty$. Írjuk fel az $Av = \lambda v$ sajátegyenlet i. sorát

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda v_i$$

Átrendezve, majd abszolútértéket véve

$$\begin{aligned}(a_{ii} - \lambda) v_i &= - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} v_j \\ |a_{ii} - \lambda||v_i| &\leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \underbrace{|v_j|}_{\leq |v_i|} \leq |v_i| \cdot \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|.\end{aligned}$$

$|v_i| \neq 0$-val leosztva

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| = r_i.$$

$\square$

Tétel: Gersgorin tétel diagonális hasonlósági transzformációval

Legyen $D = \mathsf{diag}\,(d_1, \ldots, d_n)$, $\det(D) \neq 0$. *Ekkor a*

1. $B := D^{-1}AD$ *és* A *mátrix sajátértékei azonosak és a*

2. *transzformáció során a diagonális elemek nem változnak.*

3. B*-re a Gersgorin-tételt alkalmazva* A *sajátértékei az* a_{ii} *középpontú és*

$$R_i := \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{|a_{ij}||d_j|}{|d_i|}$$

sugarú körök úniójában vannak.

Bizonyítás:

A $B := D^{-1}AD$ mátrix elemei a mátrix szorzásból

$$b_{ij} = \frac{1}{d_i} \cdot a_{ij} \cdot d_j.$$

Innen $i = j$ esetben $b_{ii} = a_{ii}$, vagyis a diagonális elemek és ezzel a Gergorin körök középpontjai nem változnak. B-re alkalmazva a Gersgorin tételt

$$R_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |b_{ij}| = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{|a_{ij}d_j|}{|d_i|}.$$

$\square$

Tétel: Általános Gersgorin tétel

Ha a Gersgorin-körök között vannak diszjunkt körcsoportok, akkor minden körcsoportban annyi sajátérték helyezkedik el, amennyi körből a csoport áll.

Bizonyítás:

Homotópia módszerrel. Legyen $D := \mathsf{diag}\,(a_{11}, \dots, a_{nn})$ és

$$B(t) := t \cdot A + (1-t) \cdot D \quad \Rightarrow \quad B(0) = D \text{ és } B(1) = A.$$

Látjuk, hogy $t \to 1$ esetén $B(t) \to A$. A mátrix elemeire nézve

$$(B(t))_{ij} := \begin{cases} a_{ii} & \text{ha}\, i = j \\ t \cdot a_{ij} & \text{ha}\, i \neq j. \end{cases}$$

$B(t)$ középpontjai a_{ii}-k, a Gersgorin-körök sugarai $t \cdot R_i$-k.
$t = 0$ esetén minden sugár 0, $t \to 1$ esetén R_i-hez konvergálnak. Felhasználjuk hozzá a sajátértékek folytonos függését a mátrix elemeitől, azaz t-től is. (lásd Bauer-Fike–tétel). A sajátértékek a konvergencia során nem hagyhatják el a köreiket, így a körcsoportokat sem. $\square$

Tétel: Gersgorin tételének következményei

1. *A Gersgorin tétel állítása a mátrix oszlopaira is alkalmazható.*

2. *A sajátértékek a sor és oszlophoz kapcsolódó Gersgorin-kör úniók metszetében vannak.*

3. *Ha* 0 *nincs benne a Gersgorin-körök úniójában, akkor a mátrix invertálható.*

4. *Ha A szigorúan diagonálisan domináns a soraira (oszlopaira), akkor* $\det(A) \neq 0$.

5. *Ha A szimmetrikus és* $a_{ii} > R_i \ \forall\, i$*-re, akkor A pozitív definit.*

Bizonyítás:

1. Trivi, A és A^T sajátértékei azonosak, ugyanis

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A^T - \lambda I).$$

2. Mindkét únióban benne vannak a sajátértékek, így a metszetben is.

3. A 0 pontosan akkor sajátérték, ha az $Av = 0$ homogén egyenletnek van triviális megoldása.

4. Ha A szigorúan diagonálisan domináns a soraira (oszlopaira), akkor a Gersgorin körök nem tartalmazzák a 0-t, így invertálható illetve $\det(A) \neq 0$.

5. Ha A szimmetrikus és $a_{ii} > R_i \ \forall\, i$-re, akkor a Gersgorin körök a komplex sík jobboldali felére esnek. Másrészt a szimmetria miatt a sajátértékek valósak, így a sajátértékek pozitívak.

$\square$

Tétel: sajátértékek becslése reziduális hibával

1. *Legyen A diagonalizálható, azaz $\exists\ X$ invertálható mátrix, melyre $X^{-1}AX = D = \mathsf{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.*

2. *Legyen μ és u az A közelítő sajátértéke és sajátvektora,*

3. *$r := Au - \mu u$ az közelítés reziduális hibája.*

4. *Olyan mátrixnormát válasszunk, melyben minden diagonális mátrixra $\|D\| = \max_{i=1}^{n} |d_{ii}|$. (Például a p-normák ilyenek.)*

Ekkor

$$\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu| \leq \frac{\|r\|}{\|u\|} \cdot \mathsf{cond}\,(X).$$

Bizonyítás:

A diagonalizálhatóságot felhasználva írjuk fel a reziduális hibát

$$r := Au - \mu u = XDX^{-1}u - \mu u = X(D - \mu I)X^{-1}u.$$

1. Ha valamely i-re $\mu = \lambda_i$, akkor az állítás bal oldala 0, így triviálisan teljesül.

2. Ha $\forall\, i: \ \mu \neq \lambda_i$, akkor $D - \mu I$ invertálható.
   ($D - \mu I$ diagonális elemei: $\lambda_i - \mu \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det(D - \mu I) \neq 0$.)
   Az r-re felírt képletből fejezzük ki u-t

$$X(D - \mu I)^{-1}X^{-1}r = u.$$

A norma szorzat tuladonságát és a vektor és mátrix norma közti illeszkedést felhasználva

$$\|u\| \leq \|X\| \underbrace{\|(D - \mu I)^{-1}\|}_{\frac{1}{\min|\lambda_i - \mu|}} \|X^{-1}\| \|r\| = \frac{\|r\|}{\min|\lambda_i - \mu|} \cdot \mathsf{cond}\,(X).$$

Innen átrendezve kapjuk az állítást.

$$\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu| \leq \frac{\|r\|}{\|u\|} \cdot \mathsf{cond}\,(X).$$

$\square$

Tétel: Bauer-Fike tétel

---

1. *Legyen A diagonalizálható, azaz $\exists\ X$ invertálható mátrix, melyre $X^{-1}AX = D = \mathsf{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.*

2. *Legyen $A + \Delta A$ sajátértéke μ és*

3. *olyan mátrixnormát válasszunk, melyben minden diagonális mátrixra $\|D\| = \max_{i=1}^{n} |d_{ii}|$. (Például a p-normák ilyenek.)*

Ekkor

$$\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu| \leq \mathsf{cond}\,(X) \cdot \|\Delta A\|.$$

Bizonyítás:

1. Ha valamely i-re $\mu = \lambda_i$, akkor az állítás bal oldala 0, így triviálisan teljesül.

2. Ha $\forall\, i:\ \ \mu \neq \lambda_i$, akkor $D - \mu I$ invertálható. (Lásd előző tétel bizonytása.)
Az $(A + \Delta A) - \mu I$ mátrixra alkalmazzuk ugyanazt a hasonlósági transzformációt, mint amit A diagonálizálására.

$$X^{-1}(A + \Delta A - \mu I)X = X^{-1}AX + X^{-1}\Delta AX - \mu I = D + X^{-1}\Delta AX - \mu I =$$
$$= (D - \mu I)\left(I + \underbrace{(D - \mu I)^{-1}X^{-1}\Delta AX}_{:=B}\right)$$
$$\det(A + \Delta A - \mu I) = \det(X^{-1}(A + \Delta A - \mu I)X) = \det(D - \mu I) \cdot \det(I + B)$$

Mivel μ az $A + \Delta A$ sajátértéke, ezért $\det(A + \Delta A - \mu I) = 0$. A fenti átrendezésből adódik, hogy
$$0 = \det(I + B) = \det(B - (-1) \cdot I),$$
ami azt jelenti, hogy B-nek (-1) sajátértéke. A spektrálsugár és norma közti egyenlőtlenségből, valamint norma tulajdonságokból

$$1 = |-1| \leq \varrho(B) \leq \|B\| = \|(D - \mu I)^{-1}X^{-1}\Delta AX\| \leq \|(D - \mu I)^{-1}\|\|X^{-1}\|\|\Delta A\|\|X\| =$$
$$= \max_{i=1}^{n} \frac{1}{|\lambda_i - \mu|} \cdot \mathsf{cond}\,(X)\|\Delta A\| = \frac{1}{\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu|} \cdot \mathsf{cond}\,(X)\|\Delta A\|.$$

Átrendezve $\displaystyle\min_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu| \leq \mathsf{cond}\,(X) \cdot \|\Delta A\|.$

□

Tétel: a Frobenius alakról

F_n karakterisztikus polinomja $p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n$, azaz $\det(\lambda I - F_n) = p(\lambda)$.

Bizonyítás:

A determinánst az 1. sor szerint kifejtve

$$\det(\lambda I - F_n) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & & \ldots & p_n \\ -1 & \lambda & & & p_{n-1} \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & p_2 \\ 0 & \ldots & & -1 & \lambda + p_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \ldots & p_{n-1} \\ -1 & \lambda & & p_{n-2} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & -1 & \lambda + p_1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \cdot p_n \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & \lambda & \\ & & \ddots & \lambda \\ 0 & \ldots & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{=(-1)^{n-1}} =$$

$$= \lambda \cdot \det(\lambda I - F_{n-1}) + (-1)^{n+1} p_n \cdot (-1)^{n-1} =$$

$$= \lambda \cdot \det(\lambda I - F_{n-1}) + p_n.$$

A kapott rekurzió a karakterisztikus polinomra felírt Horner algoritmust adja. □

Tétel: szimmetrikus mátrix tridiagonális alakra hozásáról

Ha $A^T = A$ (szimmetrikus), akkor $\exists\, Q$ ortogonális mátrix, melyre

$$Q^T A Q = \mathsf{tridiag}\,(\beta_{i-1}, \alpha_i, \beta_i).$$

Bizonyítás:

$n-2$ db valós Householder hasonlósági transzformációval A-t tridiagonális alakra hozzuk. Az A első oszlopából vegyük le az első elemet: $\widetilde{a}_1 := (a_{i1})_{i=2}^n \in \mathbb{R}^{n-1}$ és készítsük el a Householder transzformáció vektorát:

$$\widetilde{v}_1 := \frac{\widetilde{a}_1 - \sigma_1 e_1}{\|\widetilde{a}_1 - \sigma_1 e_1\|_2} \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \sigma_1 := \pm\|\widetilde{a}_1\|_2.$$

Ezzel megadtuk a $\widetilde{H}_1 := H(\widetilde{v}_1)$ Householder transzformációt, mellyel

$$\widetilde{H}_1 \widetilde{a}_1 = \sigma_1 e_1 \quad \text{illetve} \quad \widetilde{a}_1^T \widetilde{H}_1 = \left(\widetilde{H}_1 \widetilde{a}_1\right)^T = \sigma_1 e_1^T.$$

Alkalmazzuk A-ra hasonlósági transzformációként a következő módon:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & \widetilde{H}_1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \widetilde{a}_1^T \\ \hline \widetilde{a}_1 & \widetilde{A}_1 \end{array}\right]} \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & \widetilde{H}_1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \widetilde{a}_1^T \\ \hline \begin{matrix}\sigma_1 \\ 0\end{matrix} & \widetilde{H}_1 \widetilde{A}_1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & \widetilde{H}_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \sigma_1 \quad 0 \\ \hline \begin{matrix}\sigma_1 \\ 0\end{matrix} & \widetilde{H}_1 \widetilde{A}_1 \widetilde{H}_1 \end{array}\right].$$

Folytassuk a traszformációt eggyel kisebb méretben a $\widetilde{H}_1 \widetilde{A}_1 \widetilde{H}_1$ mátrixra.
A k. lépésben a Householder transzformáció matematikai alakja

$$H_k = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \widetilde{H}_k \end{bmatrix}, \quad \widetilde{H}_k \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}.$$

$n-2$ db hasonlósági transzformáció után $Q = H_1 H_2 \dots H_{n-2}$,

$$(H_{n-2} \dots H_2 H_1) A (H_1 H_2 \dots H_{n-2}) = \mathsf{tridiag}\,(\beta_{i-1}, \alpha_i, \beta_i).$$

$\square$

Tétel: a Rayleigh-hányadosról

Ha $A = A^*$, akkor

1.

$$\max_{x\neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_{max} \quad \textit{illetve} \quad \min_{x\neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_{min}$$

2. *Rögzített $x \neq 0$ vektor esetén*

$$\min_{\lambda\in\mathbb{K}} \|Ax - \lambda x\|_2 \quad \textit{feladat megoldása} \quad \lambda = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}.$$

Bizonyítás:

Mivel $A = A^*$, ezért $\langle Ax, x\rangle = x^*Ax \in \mathbb{R}$, ugyanis $(x^*Ax)^* = x^*A^*x = x^*Ax$.

1. Létezik U unitér mátrix, melyre $U^*AU = D$ diagonális mátrix $\Rightarrow A = UDU^*$. $x \neq 0$ esetén

$$\frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\langle UDU^*x, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\langle D\overbrace{U^*x}^{y}, \overbrace{U^*x}^{y}\rangle}{\langle x, x\rangle}.$$

Bevezetve az $y := U^*x$ jelölést az unitér traszformáció miatt $\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle$, így

$$\frac{\langle Dy, y\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\langle Dy, y\rangle}{\langle y, y\rangle} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2}{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}.$$

Becsüljük alulról és felülről

$$\lambda_{min} \leq \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2}{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} \leq \lambda_{max}.$$

Belátjuk, hogy ezek a korlátok minimum illetve maximum értékek.
Legyen $x := v_{min} \neq 0$ a λ_{min}-hez tartozó sajátvektor, ekkor

$$\frac{\langle Av_{min}, v_{min}\rangle}{\langle v_{min}, v_{min}\rangle} = \frac{\langle \lambda_{min}v_{min}, v_{min}\rangle}{\langle v_{min}, v_{min}\rangle} = \lambda_{min}.$$

Hasonlóan $x := v_{max} \neq 0$ a λ_{max}-hoz tartozó sajátvektor, ekkor

$$\frac{\langle Av_{max}, v_{max}\rangle}{\langle v_{max}, v_{max}\rangle} = \frac{\langle \lambda_{max}v_{max}, v_{max}\rangle}{\langle v_{max}, v_{max}\rangle} = \lambda_{max}.$$

2. $Ax - \lambda x = r(x)$ az adott $x \neq 0$ vektorhoz és λ-hoz tartozó reziduális hiba.

$$\|Ax - \lambda x\|_2^2 = \langle Ax - \lambda x, Ax - \lambda x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle - 2\lambda \langle Ax, x \rangle + \lambda^2 \langle x, x \rangle =$$
$$= \langle x, x \rangle \cdot \left[\left(\lambda - \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \right)^2 - \left(\frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \right)^2 \right] + \langle Ax, Ax \rangle$$

λ-ra nézve egy másodfokú polinomot kaptunk, a teljes négyzetté alakításból látszik, hogy a kifejezés értéke a

$$\lambda = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

helyen lesz minimális. Tehát önadjungált mátrix esetén rögzített $x \neq 0$ vektor esetén a Rayleigh-hányados választásával lesz a reziduális hiba a legkisebb.

$\square$

Tétel: a hatványmódszerről

---

1. *Legyen A normális, vagyis létezzen sajátvektorokból álló ortonormált bázisa: $(v_1, \ldots, v_n)$.*

2. *A sajátértékeire $|\lambda_n| > |\lambda_{n-1}| \geq \ldots \geq |\lambda_1|$.*

3. *Az $x^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$ kezdővektorra $c_n = \langle x^{(0)}, v_n \rangle \neq 0$.*
(c_n az $x^{(0)}$-nak a v_n irányú komponense.)

Ekkor

1. $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^k} x^{(k)} = c_n v_n$.

2. $\lim_{k\to\infty} \frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}} = \lambda_n$, *ahol* $|x_i^{(k)}| = \|x^{(k)}\|_\infty$.

3. *Ha* $A = A^T$, *akkor* $\lim_{k\to\infty} \frac{\langle x^{(k)}, x^{(k+1)} \rangle}{\langle x^{(k)}, x^{(k)} \rangle} = \lambda_n$.

Bizonyítás:

A normális mátrix $\exists\, Q$ ortogonális mátrix, melyre $Q^T A Q = D = \mathsf{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.. Q oszlopai a sajátvektorok ($Q = (v_1, \ldots, v_n)$), továbbá

$$\langle x^{(0)}, v_n \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} c_j v_j, v_n \right\rangle = c_n \neq 0.$$

1. Fejtsük végig a rekurziót

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= Ax^{(k-1)} = \ldots = A^k x^{(0)} = A^k \sum_{j=1}^{n} c_j v_j = \sum_{j=1}^{n} c_j A^k v_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^k v_j = \\ &= \lambda_n^k c_n v_n + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \lambda_j^k v_j = \lambda_n^k \cdot \left(c_n v_n + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n} \right)^k v_j \right) \end{aligned}$$

Mivel $\left| \frac{\lambda_j}{\lambda_n} \right| < 1 \quad (j = 1, \ldots, n-1)$, ezért

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^k} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \left(c_n v_n + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n} \right)^k v_j \right) = c_n v_n.$$

A kapott $c_n v_n$ vektor λ_n-hez tartozó sajátvektor. Ha $c_n = 0$ lenne, akkor nullvektort kapnánk, ami nem sajátvektor.

2. Az $x^{(k)}$ vektor i. komponense

$$x_i^{(k)} = \lambda_n^k \cdot \left(c_n v_n^{(i)} + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n} \right)^k v_j^{(i)} \right).$$

Tegyük fel, hogy $|x_i^{(k)}| = \|x^{(k)}\|_\infty$, ezzel a megvalósítás során az osztás stabil lesz.

$$\begin{aligned}
\frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}} &= \lambda_n \cdot \frac{c_n v_n^{(i)} + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{k+1} v_j^{(i)}}{c_n v_n^{(i)} + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{k} v_j^{(i)}} = \\
&= \lambda_n \cdot \frac{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{c_n} \cdot \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{k+1} \frac{v_j^{(i)}}{v_n^{(i)}}}{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{c_n} \cdot \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{k} \frac{v_j^{(i)}}{v_n^{(i)}}} \quad \to \lambda_n \;\; (k \to \infty),
\end{aligned}$$

mivel $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right| < 1$. A nagyságrendi becsléshez

$$\begin{aligned}
\frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}} - \lambda_n &= \lambda_n \cdot \left(\frac{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{c_n} \cdot \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{k+1} \frac{v_j^{(i)}}{v_n^{(i)}}}{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{c_n} \cdot \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{k} \frac{v_j^{(i)}}{v_n^{(i)}}} - 1 \right) = \\
&= \lambda_n \cdot \left(\frac{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{c_n} \cdot \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{k+1} \frac{v_j^{(i)}}{v_n^{(i)}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{c_n} \cdot \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{k} \frac{v_j^{(i)}}{v_n^{(i)}}}{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{c_n} \cdot \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{k} \frac{v_j^{(i)}}{v_n^{(i)}}} \right) = \\
&= \lambda_n \cdot \left(\frac{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{c_n} \cdot \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{k} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n} - 1\right) \frac{v_j^{(i)}}{v_n^{(i)}}}{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{c_n} \cdot \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{k} \frac{v_j^{(i)}}{v_n^{(i)}}} \right)
\end{aligned}$$

Vegyünk abszolútértéket és felhasználva, hogy $j = 1, \ldots, (n-1)$-re $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_n} - 1\right| < 2$, a legnagyobb hányados $\left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|$ illetve a nevező második tagja nullához tart, ezért a nevezőt alulról becsülhetjük $\frac{1}{2}$-gdel.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}} - \lambda_n \right| &= |\lambda_n| \cdot \left| \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{c_n} \cdot \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{k} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n} - 1\right) \frac{v_j^{(i)}}{v_n^{(i)}}}{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{c_n} \cdot \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{k} \frac{v_j^{(i)}}{v_n^{(i)}}} \right| \leq \\
&\leq \frac{2}{\frac{1}{2}} \cdot |\lambda_n| \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \left|\frac{c_j}{c_n}\right| \cdot \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right|^k \left|\frac{v_j^{(i)}}{v_n^{(i)}}\right| \leq \\
&\leq 4 \cdot \left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|^k \cdot |\lambda_n| \sum_{j=1}^{n-1} \left|\frac{c_j}{c_n}\right| \cdot \left|\frac{v_j^{(i)}}{v_n^{(i)}}\right| \leq K \cdot \left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|^k.
\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy
$$\left|\frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}}-\lambda_n\right|=O\left(\left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|^k\right).$$

Megjegyzés: tetszőleges $y \in \mathbb{R}^n$ vektorra, melyre $\langle y, x^{(k)}\rangle \neq 0$ a fenti módon bizonyítható, hogy
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\langle x^{(k+1)}, y\rangle}{\langle x^{(k)}, y\rangle}=\lambda_n.$$
Ebből az $y := e_i$ vektorral megkapjuk a fenti eredményt. A tételbeli i index megválasztása garantálja a megvalósítás során az osztások stabilitását.

3. Felhasználjuk, hogy $A = A^T$ esetben a sajátvektorok ortonormált rendszert alkotnak, vagyis $\langle v_j, v_l\rangle = \delta_{jl}$.

$$\langle x^{(k)}, x^{(k)}\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n c_j\lambda_j^k v_j, \sum_{l=1}^n c_l\lambda_l^k v_l\right\rangle = \sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^n c_jc_l\lambda_j^k\lambda_l^k \underbrace{\langle v_j, v_l\rangle}_{=\delta_{jl}} =$$
$$= \sum_{j=1}^n c_j^2\lambda_j^{2k} = c_n^2\lambda_n^{2k} + \sum_{j=1}^{n-1} c_j^2\lambda_j^{2k} = c_n^2\lambda_n^{2k}\cdot\left(1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{c_j}{c_n}\right)^2\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{2k}\right)$$

$$\langle x^{(k+1)}, x^{(k)}\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n c_j\lambda_j^{k+1} v_j, \sum_{l=1}^n c_l\lambda_l^k v_l\right\rangle = \sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^n c_jc_l\lambda_j^{k+1}\lambda_l^k \underbrace{\langle v_j, v_l\rangle}_{=\delta_{jl}} =$$
$$= \sum_{j=1}^n c_j^2\lambda_j^{2k+1} = c_n^2\lambda_n^{2k+1} + \sum_{j=1}^{n-1} c_j^2\lambda_j^{2k+1} = c_n^2\lambda_n^{2k+1}\cdot\left(1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{c_j}{c_n}\right)^2\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{2k+1}\right)$$

A Rayleigh-hányadost felírva

$$\frac{\langle x^{(k+1)}, x^{(k)}\rangle}{\langle x^{(k)}, x^{(k)}\rangle} = \lambda_n\cdot\frac{1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{c_j}{c_n}\right)^2\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{2k+1}}{1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{c_j}{c_n}\right)^2\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{2k}} \quad\to \lambda_n\ \ (k\to\infty),$$

mivel $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right| < 1$. A nagyságrendi becsléshez

$$\frac{\langle x^{(k+1)}, x^{(k)}\rangle}{\langle x_i^{(k)}, x_i^{(k)}\rangle} - \lambda_n = \lambda_n\cdot\left(\frac{1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{c_j}{c_n}\right)^2\cdot\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{2k+1}}{1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{c_j}{c_n}\right)^2\cdot\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{2k}}-1\right) =$$
$$= \lambda_n\cdot\left(\frac{\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{c_j}{c_n}\right)^2\cdot\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{2k+1}-\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{c_j}{c_n}\right)^2\cdot\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{2k}}{1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{c_j}{c_n}\right)^2\cdot\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{2k}}\right) =$$
$$= \lambda_n\cdot\left(\frac{\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{c_j}{c_n}\right)^2\cdot\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{2k}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}-1\right)}{1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{c_j}{c_n}\right)^2\cdot\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{2k}}\right).$$

Vegyünk abszolútértéket

$$\begin{aligned}\left|\frac{\langle x^{(k+1)}, x^{(k)}\rangle}{\langle x^{(k)}, x^{(k)}\rangle} - \lambda_n\right| &= |\lambda_n| \cdot \left|\frac{\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{c_j}{c_n}\right)^2 \cdot \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{2k}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n} - 1\right)}{1 + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{c_j}{c_n}\right)^2 \cdot \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^{2k}}\right| \leq \\ &\leq |\lambda_n| \cdot \sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{c_j}{c_n}\right|^2 \cdot \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right|^{2k} \cdot 2 \leq \\ &\leq 2 \cdot |\lambda_n| \cdot \left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|^{2k} \sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{c_j}{c_n}\right|^2 \leq K \cdot \left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|^{2k}.\end{aligned}$$

Az előző részhez hasonlóan felhasználtuk, hogy $j = 1, \ldots, (n-1)$-re $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_n} - 1\right| < 2$, a legnagyobb hányados $\left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|$ illetve a nevezőt alulról becsültük 1-gyel. Ezzel beláttuk, hogy

$$\left|\frac{\langle x^{(k+1)}, x^{(k)}\rangle}{\langle x^{(k)}, x^{(k)}\rangle} - \lambda_n\right| = O\left(\left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|^{2k}\right).$$

□

Tétel: a Jacobi-módszer konvergencia tétele

A klasszikus Jacobi-módszerrel generált $(A^{(k)})$ sorozat olyan diagonális mátrixhoz konvergál, melynek átlójában az A sajátértékei állnak.

Bizonyítás:

1. Vezessük be a követlező jelölést a főátlón kívüli elemek négyzetösszegére:

$$N(A) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}^2 = \|A\|_F^2 - \sum_{l=1}^{n} a_{ll}^2.$$

2. Belátjuk, hogy $N(A^{(k)}) = N(A^{(k-1)}) - 2 \cdot (a_{ij}^{(k-1)})^2$.
Felhasználva az 1. és 3. Lemmát, továbbá hogy a módszer egy lépése során csak az i. és j. sorok és oszlopok változnak:

$$\begin{aligned} N(A^{(k-1)}) - N(A^{(k)}) &= \left(\|A^{(k-1)}\|_F^2 - \sum_{l=1}^{n} (a_{ll}^{(k-1)})^2\right) - \left(\|A^{(k)}\|_F^2 - \sum_{l=1}^{n} (a_{ll}^{(k)})^2\right) = \\ &= \sum_{l=1}^{n} (a_{ll}^{(k)})^2 - \sum_{l=1}^{n} (a_{ll}^{(k-1)})^2 = \\ &= (a_{ii}^{(k)})^2 + (a_{jj}^{(k)})^2 - (a_{ii}^{(k-1)})^2 - (a_{jj}^{(k-1)})^2 = \\ &= 2 \cdot (a_{ij}^{(k-1)})^2 \end{aligned}$$

3. A klasszikus Jacobi-módszer esetén $|a_{ij}^{(k-1)}|$ a maximális abszolút értékű elem $A^{(k-1)}$-ben, így

$$N(A^{(k-1)}) \leq n(n-1) \cdot |a_{ij}^{(k-1)}|^2 \quad \Rightarrow \quad |a_{ij}^{(k-1)}|^2 \geq \frac{1}{n(n-1)} N(A^{(k-1)}).$$

4. Írjuk fel $N(A^{(k)})$-ra a rekurziót

$$\begin{aligned} N(A^{(k)}) = N(A^{(k-1)}) - 2 \cdot (a_{ij}^{(k-1)})^2 \leq N(A^{(k-1)}) - \frac{2}{n(n-1)} N(A^{(k-1)}) = \\ = N(A^{(k-1)}) \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right). \end{aligned}$$

Kibontva a rekurziót

$$N(A^{(k)}) \leq N(A) \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^k \to 0 \;\; (k \to \infty) \quad (n > 2).$$

Ahonnan $\left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) < 1$ miatt az $(A^{(k)})$ sorozat diagonális mátrixhoz konvergál.

5. Az 1. és 2. Lemmából

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \|A\|_F^2 = \|A^{(k)}\|_F^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{n} (a_{ll}^{(k)})^2.$$

Mivel a Gersgorin-körök sugarai 0-hoz tartanak, így $A^{(k)}$ állóbeli elemei a sajátértékekhez konvergálnak.

□

Tétel: az interpolációs polinom létezése és egyértelműsége

$$\exists!\ p_n \in P_n : \quad p_n(x_i) = y_i, \ \ (i = 0, 1, \ldots, n)$$

Bizonyítás:

Az interpolációs polinomot a határozatlan együtthatók módszerével adjuk meg. A polinom alakja

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Az interpolációs feltételből

$$p_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

A kapott LER mátrixa Vandermonde mátrix, mely különböző alappontok esetén invertálható.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

A LER megoldása egyértelműen létezik, ezzel az interpolációs feladatnak is egyetlen megoldása van. $\square$

Tétel: az interpoláció hibaformulája

1. *Legyen* $x \in \mathbb{R}$ *tetszőleges,*
2. $[a;b]$ *az* $x_0, x_1, \dots, x_n$ *és* x *által kifeszített intervallum,*
3. *továbbá* $f \in C^{n+1}[a;b]$.

Ekkor

1. $\exists\, \xi_x \in [a;b]$, *melyre* $f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \omega_n(x)$.
2. *A hibabecslés*

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_n(x)|, \quad \textit{ahol}$$

$$M_{n+1} := \|f^{(n+1)}\|_\infty := \|f^{(n+1)}\|_{C[a;b]} := \max_{\xi \in [a;b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Bizonyítás:

1. Ha $x = x_i$ valamely i-re, akkor az állítás trivi.

2. Tegyük fel, hogy $x \neq x_i$ minden i-re és definiáljuk a következő függvényt

$$g_x(z) := f(z) - p_n(z) - \frac{\omega_n(z)}{\omega_n(x)} \cdot (f(x) - p_n(x)).$$

Ekkor

$$g_x(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n) \text{ és } g_x(x) = 0,$$

tehát g_x-nek legalább $n+2$ db gyöke van $[a;b]$-n. A Rolle-tétel miatt a szomszédos gyökök között van g'_x-nak gyöke. Így g'_x-nak legalább $n+1$ db gyöke van $[a;b]$-n. Hasonlóan végiggondolva g''_x-nak legalább n db gyöke. Így $g_x^{(n+1)}$-nak legalább 1 db gyöke van $[a;b]$-n, jelöljük ξ_x-szel.

$$0 = g_x^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - \underbrace{p_n^{(n+1)}(\xi_x)}_{=0} - \frac{(n+1)!}{\omega_n(x)} \cdot (f(x) - p_n(x))$$

$$\Rightarrow \quad f^{(n+1)}(\xi_x) = \frac{(n+1)!}{\omega_n(x)} \cdot (f(x) - p_n(x))$$

Átrendezve

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \omega_n(x).$$

□

Tétel: Csebisev tétel

A $(T_n, n \in \mathbb{N})$ *rendszer extremális tulajdonsága:*

$$\min_{\widetilde{Q} \in P_n^{(1)}} \|\widetilde{Q}\|_\infty = \|\widetilde{T}_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}},$$

ahol $\|\widetilde{Q}\|_\infty := \|\widetilde{Q}\|_{C[-1;1]}$.

Bizonyítás:

Tegyük fel indirekt, hogy $\exists\, \widetilde{Q}_n \in P_n^{(1)}$, melyre $\|\widetilde{Q}_n\|_\infty < \|\widetilde{T}_n\|_\infty$.
Legyen $R := \widetilde{Q}_n - \widetilde{T}_n \in P_{n-1}$ és vizsgáljuk az értékeit a $\widetilde{T}_n$ szélsőértékhelyein (ξ_k).

$$|\widetilde{Q}_n(\xi_k)| < \frac{1}{2^{n-1}} = \|\widetilde{T}_n\|_\infty$$

miatt ξ_k-ban $(k = 0 \ldots, n)$ az R polinomnak váltakozó az előjele. Tehát a ξ_k-k $(k = 0 \ldots, n)$ között, azaz n db intervallumban előjelet vált R, így n db gyöke van a legfeljebb $n-1$-edfokú polinomnak, mellyel $R \equiv 0$. Ezzel ellentmondásra jutottunk. $\square$

Tétel: az interpolációs polinomok konvergenciájáról

1. *Tegyük fel, hogy* $f \in C^{\infty}[a;b]$ *és*

2. $\exists\, M > 0: \quad \|f^{(n)}\|_\infty \leq M^n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$

Ekkor $\forall\ (x_k^{(n)} : k = 0, 1 \ldots, n)$ *alappontrendszer sorozat esetén*

$$\lim_{n \to \infty} \|f - L_n\|_\infty = 0.$$

Bizonyítás:

Felhasználva, hogy

$$\|\omega_n\|_\infty = \max_{x \in [a;b]} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leq (b-a)^{n+1}$$

az interpolációs hibaformulából

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \|\omega_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1} \leq \frac{(M(b-a))^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Tehát

$$\|f - L_n\|_\infty = \max_{x \in [a;b]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{(M(b-a))^{n+1}}{(n+1)!} \quad \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

$\square$

Tétel: az interpoláció öröklött hibájáról

$$|L_n(x) - \widetilde{L}_n(x)| \leq \varepsilon \cdot \Lambda_n, \quad (x \in [a;b])$$

ahol $\varepsilon := \max_{i=0}^{n} |f(x_i) - \widetilde{f}(x_i)|$.

Bizonyítás:

Mivel $|f(x_i) - \widetilde{f}(x_i)| \leq \varepsilon$ a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva $x \in [a;b]$-re

$$\begin{aligned}
|L_n(x) - \widetilde{L}_n(x)| &= \left|\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x) - \sum_{i=0}^{n} \widetilde{f}(x_i)\ell_i(x)\right| = \left|\sum_{i=0}^{n}(f(x_i) - \widetilde{f}(x_i)) \cdot \ell_i(x)\right| \leq \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - \widetilde{f}(x_i)| \cdot |\ell_i(x)| \leq \\
&\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)| \leq \varepsilon \cdot \Lambda_n.
\end{aligned}$$

$\square$

Tétel: az Hermite-interpolációs polinom létezése és egyértelműsége

---

$$\exists!\ H_m \in P_m: \quad H_m^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k;\ j = 0, \ldots, m_i - 1)$$

Bizonyítás:

Az interpolációs polinomot a határozatlan együtthatók módszerével adjuk meg. A polinom alakja

$$H_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k.$$

Az interpolációs feltételből

$$H_m^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)} \quad (i = 0, 1, \ldots, m;\ j = 0, \ldots, m_i - 1).$$

A kapott LER alakja (pl. $m_0 = 3$ esetben)

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \ldots & x_0^m \\ 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 & \ldots & mx_0^{m-1} \\ 0 & 0 & 2 & 6x_0 & \ldots & m(m-1)x_0^{m-2} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^m \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & x_k^3 & \ldots & x_k^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0^{(0)} \\ y_0^{(1)} \\ y_0^{(2)} \\ y_1^{(0)} \\ \vdots \\ y_m^{(0)} \end{bmatrix}$$

A kapott LER mátrixa általánosított Vandermonde mátrix. A továbbiakban belátjuk, hogy a homogén feladat ($y_i^{(j)} = 0$ minden i, j-re) egyértelműen oldható meg, amiből a fenti mátrix determinánsának nem nulla volta következik. Így az Hermite interpolációs feladat egyértelműen oldható meg.

Tekintsük a továbbiakban a homogén feladatot. Belátjuk, hogy ennek egyetlen megoldása a $H_m \equiv 0$ polinom. Tegyük fel indirekt, hogy létezik legalább két különböző $H_1 \neq H_2$ interpolációs polinom, melyek a homogén feladat megoldásai és vizsgáljuk az eltérés polinomot.

$$R := H_1 - H_2$$

$$R^{(j)}(x_i) = H_1^{(j)}(x_i) - H_2^{(j)}(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, m;\ j = 0, \ldots, m_i - 1)$$

Multiplicitással számolva R-nek $\sum_{i=0}^{k} m_i = m + 1$ db gyöke van, de m-edfokú polinom, tehát $R \equiv 0$. Ellentmondásra jutottunk, tehát a homogén LER-nek egyértelműen van megoldása, így az inhomogénnek is.

$\square$

Tétel: az Hermite interpoláció hibaformulája

1. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges,

2. $[a;b]$ az $x_0, x_1, \dots, x_k$ és x által kifeszített intervallum,

3. továbbá $f \in C^{m+1}[a;b]$.

Ekkor

1. $\exists\, \xi_x \in [a;b]$, melyre

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!} \cdot \Omega_m(x).$$

2. Hibabecslés

$$|f(x) - H_m(x)| \le \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \cdot |\Omega_m(x)|,$$

$$M_{m+1} := \|f^{(m+1)}\|_\infty, \quad \Omega_m(x) := \textstyle\prod_{i=0}^{k} (x - x_i)^{m_i}.$$

Bizonyítás:

1. Ha $x = x_i$ valamely i-re, akkor az állítás trivi.

2. Tegyük fel, hogy $x \ne x_i$ minden i-re és definiáljuk a következő függvényt

$$G_x(z) := f(z) - H_m(z) - \frac{\Omega_m(z)}{\Omega_m(x)} \cdot \left(f(x) - H_n(x)\right).$$

Ekkor

$$G_x^{(j)}(x_i) = 0 \;\; (i = 0, 1, \dots, k;\, j = 0, \dots, m_i - 1) \;\text{ és }\; G_x(x) = 0,$$

tehát G_x-nek legalább $\sum_{i=0}^{k} m_i + 1 = m + 2$ db gyöke van $[a;b]$-n multiplicitással számolva, ezek közül $k+2$ db különböző. A Rolle-tétel miatt a szomszédos gyökök között van G'_x-nak gyöke, így G'_x-nak legalább legalább $k+1$ db különböző gyöke van az alappontok között, a többszörös gyökök multiplicitása pedig eggyel csökken. Tehát

$$(k+1) + \sum_{i=0}^{k} (m_i - 1) = \sum_{i=0}^{k} m_i = m + 1$$

db gyöke van $[a;b]$-n multiplicitással számolva. Hasonlóan végiggondolva igazolható, hogy G''_x-nak legalább m db gyöke. Így $G_x^{(m+1)}$-nak legalább 1 db gyöke van $[a;b]$-n, jelöljük ξ_x-szel.

$$0 = G_x^{(m+1)}(\xi_x) = f^{(m+1)}(\xi_x) - \underbrace{H_m^{(m+1)}(\xi_x)}_{=0} - \frac{(m+1)!}{\Omega_m(x)} \cdot (f(x) - H_m(x))$$

$$\Rightarrow \quad f^{(m+1)}(\xi_x) = \frac{(m+1)!}{\Omega_m(x)} \cdot (f(x) - H_m(x))$$

Átrendezve

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!} \cdot \Omega_m(x).$$

□

Tétel: a Fejér–Hermite-alappolinomok

1. *Az elsőfajú Fejér–Hermite-alappolinomok:*

$$A_i(x) := [1 - 2(x - x_i) \cdot \ell_i'(x_i)] \cdot \ell_i^2(x), \ \ (i = 0, \dots, k).$$

2. *A másodfajú Fejér–Hermite-alappolinomok:*

$$B_i(x) := (x - x_i) \cdot \ell_i^2(x), \ \ (i = 0, \dots, k).$$

Bizonyítás:

Tudjuk, hogy az A_i alappolinomok és deriváltjaik az $i \neq j$ esetben nulla értéket vesznek fel, ezért A_i-nek az x_j $(j \neq i)$ pontok kétszeres gyökei. Az $\ell_i^2(x)$ polinom (fokszáma $2n$) ezt teljesíti, tehát egy lineáris polinomot kell csak meghatároznunk. A következő alakban keressük:

$$A_i(x) := (a_i x + b_i) \cdot \ell_i^2(x), \ \ (i = 0, \dots, k).$$

Adjuk meg a_i, b_i értékét, hogy kielégítse a következő tulajdonságokat:

$$A_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad A_i'(x_j) = 0.$$

$$\begin{aligned}
i \neq j: \ \ & A_i(x_j) = (a_i x_j + b_i) \cdot \ell_i^2(x_j) = 0 \\
i = j: \ \ & A_i(x_i) = (a_i x_i + b_i) \cdot \ell_i^2(x_i) = a_i x_i + b_i = 1 \ \ \Rightarrow \ \ a_i x_i + b_i = 1 \\
& A_i'(x) = a_i \ell_i^2(x) + (a_i x + b_i) \cdot 2\ell_i(x)\ell_i'(x) \\
i \neq j: \ \ & A_i'(x_j) = a_i \ell_i^2(x_j) + (a_i x_j + b_i) \cdot 2\ell_i(x_j)\ell_i'(x_j) = 0 \\
i = j: \ \ & A_i'(x_i) = a_i \ell_i^2(x_i) + \underbrace{(a_i x_i + b_i)}_{=1} \cdot 2\ell_i(x_i)\ell_i'(x_i) = 0 \ \ \Rightarrow \ \ a_i + 2\ell_i'(x_i) = 0
\end{aligned}$$

Innen $a_i = -2\ell_i'(x_i)$ és $b_i = 1 - a_i x_i = 1 + 2\ell_i'(x_i)x_i$, tehát a lineáris tényező

$$a_i x + b_i = -2\ell_i'(x_i) \cdot x + 1 + 2\ell_i'(x_i)x_i = 1 - 2\ell_i'(x_i) \cdot (x - x_i).$$

Az B_i alappolinomokat a fenti meggondoláshoz hasonlóan

$$B_i(x) := (c_i x - d_i) \cdot \ell_i^2(x), \ \ (i = 0, \dots, k)$$

alakban keressük. Felhasználva a Lagrange-alappolinomok tulajdonságait, adjuk meg

c_i, d_i értékét, hogy kielégíti a következő tulajdonságokat:

$$\begin{aligned}
i \neq j: \quad & B_i(x_j) = (c_i x_j + d_i) \cdot \ell_i^2(x_j) = 0 \\
i = j: \quad & B_i(x_i) = (c_i x_i + d_i) \cdot \ell_i^2(x_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_i x_i + d_i = 0 \\
& B_i'(x) = c_i \ell_i^2(x) + (c_i x + d_i) \cdot 2\ell_i(x)\ell_i'(x) \\
i \neq j: \quad & B_i'(x_j) = c_i \ell_i^2(x_j) + (c_i x_j + d_i) \cdot 2\ell_i(x_j)\ell_i'(x_j) = 0 \\
i = j: \quad & B_i'(x_i) = c_i \ell_i^2(x_i) + \underbrace{(c_i x_i + d_i)}_{=0} \cdot 2\ell_i(x_i)\ell_i'(x_i) = 1 \quad \Rightarrow \quad c_i = 1
\end{aligned}$$

Innen $c_i = 1$ és $d_i = -c_i x_i = 1 - x_i$, tehát a lineáris tényező

$$c_i x + d_i = x - x_i.$$

□

Tétel: $[a;b]$-n a globális spline bázisról

1. *Az* $1, x, \ldots, x^\ell, (x-x_1)_+^\ell, \ldots, (x-x_{n-1})_+^\ell$ *függvényrendszer lineárisan független* $S_\ell(\Omega_n)$*-en.*

2. *Bármely* $S \in S_\ell(\Omega_n)$ *egyértelműen előállítható a fenti rendszerrel.*

3. $\dim S_\ell(\Omega_n) = n + \ell$

Bizonyítás:

1. A bizonyítás megtalálható Csörgő István: Fejezetek a lineáris algebrából című könyvének 38. oldalán.

2. Tetszőleges $S \in S_\ell(\Omega_n)$ esetén intervallumonként konstruáljuk meg az előállítást. Mivel $S\Big|_{I_1} \in P_\ell$, ezért egyértelműen léteznek az $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{R}$ számok melyre

$$S\Big|_{I_1}(x) = \sum_{j=0}^{\ell} \alpha_j x^j =: P_1(x).$$

Legyen $R_2 := S - P_1\Big|_{I_2}$ és írjuk fel mely feltételeket kell kielégítenie a polinomnak:

$$\left.\begin{aligned} R_2(x_1) &= 0 \\ R_2'(x_1) &= 0 \\ &\vdots \\ R_2^{\ell-1}(x_1) &= 0 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad R_2(x) = \beta_1 (x - x_1)_+^\ell$$

továbbá

$$R_2(x_2) = \beta_1 (x_2 - x_1)_+^\ell = S(x_2) - P_1(x_2),$$

ahonnan β_1 egyértelműen meghatározható:

$$\beta_1 = \frac{S(x_2) - P_1(x_2)}{(x_2 - x_1)_+^\ell}.$$

Tegyük fel, hogy az $I_1, \ldots, I_{n-1}$ intervallumokra elkészült az egyértelmű előállítás, melynek alakja

$$S\Big|_{[a;b]\setminus I_n}(x) =: \widetilde{S}(x) = \sum_{j=0}^{\ell} \alpha_j x^j + \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i (x - x_i)_+^\ell.$$

Készítsük el I_n-re az előállítást, legyen $R_n := S - \widetilde{S}\Big|_{I_n}$ és írjuk fel mely feltételeket kell kielégítenie a polinomnak:

$$\left.\begin{aligned} R_n(x_{n-1}) &= 0 \\ R_n'(x_{n-1}) &= 0 \\ &\vdots \\ R_n^{\ell-1}(x_{n-1}) &= 0 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad R_n(x) = \beta_{n-1}(x - x_{n-1})_+^\ell$$

továbbá

$$R_n(x_n) = \beta_{n-1}(x_n - x_{n-1})_+^\ell = S(x_n) - \widetilde{S}(x_n),$$

ahonnan β_{n-1} egyértelműen meghatározható:

$$\beta_{n-1} = \frac{S(x_n) - \widetilde{S}(x_n)}{(x_n - x_{n-1})_+^\ell}.$$

Ezzel az előállítás elkészült és minden β_i egyértelmű.

3. Következmény.

$\square$

Tétel: az általánosított inverz approximációs tulajdonságáról

1. $\|Ax-b\|_2 \geq \|Ax^+ - b\|_2, \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n.$

2. $H := \{x \in \mathbb{C}^n |\ \|Ax-b\|_2 = \|Ax^+ - b\|_2\}$, *akkor*

$$\|x^+\|_2 < \|x\|_2 \ \forall\, x \in H, \ \ x \neq x^+.$$

Bizonyítás:

1. $Ax - b = (Ax - Ax^+) + (Ax^+ - b) = A(x - x^+) + (Ax^+ - b)$ és igazoljuk a 2. Lemmával, hogy a két komponens merőleges egymásra.

$$\left\langle A(x-x^+), Ax^+ - b\right\rangle = \left\langle x - x^+, A^*(Ax^+ - b)\right\rangle = \left\langle x - x^+, A^*(AA^+b - b)\right\rangle =$$
$$= \left\langle x - x^+, \underbrace{A^*(AA^+ - I)}_{=0}\, b \right\rangle = 0$$

Az 1. Lemmát felhasználva

$$\|Ax-b\|_2^2 = \|A(x-x^+)+(Ax^+-b)\|_2^2 = \underbrace{\|A(x-x^+)\|_2^2}_{\geq 0} + \|Ax^+-b\|_2^2 \geq \|Ax^+-b\|_2^2.$$

Következmény: $x \in H$-ra $\|A(x-x^+)\|_2 = 0$, innen $A(x - x^+) = 0$.

$$A^+ \cdot | \quad Ax = Ax^+$$
$$A^+Ax = A^+Ax^+ = \underbrace{A^+AA^+}_{=A^+} b = A^+b = x^+$$

2. Legyen $x \in H$, $x \neq x^+$ és $x = (x - x^+) + x^+$. Igazoljuk, hogy a felbontás két komponense merőleges, azaz $x - x^+ \perp x^+$. A következményt és a 3. Lemmát felhasználva

$$x - x^+ = x - A^+Ax = (I - A^+A)x.$$

$$\left\langle x - x^+, x^+\right\rangle = \left\langle (I - A^+A)x, A^+b\right\rangle = \left\langle \underbrace{(A^+)^*(I - A^+A)}_{=0}\, x, b\right\rangle = 0$$

Újra az 1. Lemmát felhasználva

$$\|x\|_2^2 = \underbrace{\|x-x^+\|_2^2}_{>0} + \|x^+\|_2^2 > \|x^+\|_2^2 \ \forall\, x \in \mathbb{C}^n, \ \ x \neq x^+.$$

$\square$

Tétel: az ortogonális polinomok rekurziója

A $(\widetilde{p}_n)_{n=0}^{\infty}$ *1 főegyütthatós ortogonális polinomrendszerre a következő rekurzió teljesül:*

$$\widetilde{p}_{-1} \equiv 0, \;\; \widetilde{p}_0 \equiv 1$$
$$\widetilde{p}_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1}) \cdot \widetilde{p}_n(x) - \beta_n \cdot \widetilde{p}_{n-1}(x) \;\; (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\textit{ahol } \alpha_{n+1} = \frac{\langle id \cdot \widetilde{p}_n, \widetilde{p}_n \rangle_w}{\|\widetilde{p}_n\|_w^2}, \;\; \beta_n = \frac{\|\widetilde{p}_n\|_w^2}{\|\widetilde{p}_{n-1}\|_w^2} > 0, \;\; id(x) \equiv x.$$

Bizonyítás:

Az egyszerűbb jelölés kedvéért a továbbiakban nem írjuk ki a súlyfüggvényt. Mivel $\widetilde{p}_{n+1} - id \cdot \widetilde{p}_n \in P_n$, ezért

$$\widetilde{p}_{n+1}(x) = x \cdot \widetilde{p}_n(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \widetilde{p}_k(x).$$

Szorozzuk mindkét oldalt jobbról skalárisan $\widetilde{p}_j$-vel ($j = 0, \ldots, n$) és használjuk ki a polinomok ortogonalitását.

$$0 = \langle \widetilde{p}_{n+1}, \widetilde{p}_j \rangle = \langle id \cdot \widetilde{p}_n, \widetilde{p}_j \rangle - \sum_{k=0}^{n} c_k \underbrace{\langle \widetilde{p}_k, \widetilde{p}_j \rangle}_{=0 \, k \neq j} = \langle id \cdot \widetilde{p}_n, \widetilde{p}_j \rangle - c_j \langle \widetilde{p}_j, \widetilde{p}_j \rangle$$

$$\Rightarrow \quad c_j = \frac{\langle id \cdot \widetilde{p}_n, \widetilde{p}_j \rangle}{\|\widetilde{p}_j\|^2} \quad (j = 0, \ldots, n)$$

Mivel $\langle id \cdot \widetilde{p}_n, \widetilde{p}_j \rangle = \langle \widetilde{p}_n, id \cdot \widetilde{p}_j \rangle$ és $id \cdot \widetilde{p}_j \in P_{j+1}$, ezért $\langle \widetilde{p}_n, id \cdot \widetilde{p}_j \rangle = 0 \quad (j = 0, \ldots, n-2)$.

Így csak két nem nulla együtthatónk maradt

$$\alpha_{n+1} := c_n = \frac{\langle \widetilde{p}_n, id \cdot \widetilde{p}_n \rangle}{\|\widetilde{p}_n\|^2} \text{ és } \beta_n := c_{n-1} = \frac{\langle \widetilde{p}_n, id \cdot \widetilde{p}_{n-1} \rangle}{\|\widetilde{p}_{n-1}\|^2}.$$

A β_n-beli számlálót egyszerűbb alakra hozhatjuk. Mivel $id \cdot \widetilde{p}_{n-1} \in P_n^{(1)}$, ezért

$$x \cdot \widetilde{p}_{n-1} = \widetilde{p}_n + \sum_{k=0}^{n-1} d_k \widetilde{p}_k.$$

Behelyettesítve és felhasználva a polinomok ortogonalitását

$$\langle \widetilde{p}_n, id \cdot \widetilde{p}_{n-1} \rangle = \langle \widetilde{p}_n, \widetilde{p}_n + \sum_{k=0}^{n-1} d_k \widetilde{p}_k \rangle = \langle \widetilde{p}_n, \widetilde{p}_n \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} d_k \underbrace{\langle \widetilde{p}_n, \widetilde{p}_k \rangle}_{=0} = \langle \widetilde{p}_n, \widetilde{p}_n \rangle = \|\widetilde{p}_n\|^2.$$

Tehát β_n-re az egyszerűbb képlet

$$\beta_n = \frac{\|\widetilde{p}_n\|^2}{\|\widetilde{p}_{n-1}\|^2} > 0.$$

$\square$

Tétel: az ortogonális polinomok gyökei

1. $n \geq 1$ esetén a $\widetilde{p}_n$ ortogonális polinomnak n db valós különböző gyöke van $[a;b]$-n.

2. $\widetilde{p}_{n-1}$ és $\widetilde{p}_n$ gyökei váltakozva helyezkednek el.

Bizonyítás:

1. Tegyük fel, hogy a $\widetilde{p}_n$ ortogonális polinomnak k db olyan valós gyöke van $[a;b]$-n, ahol előjelet vált. Indirekt módon tegyük fel, hogy $k < n$ és jelöljük $x_1, \ldots, x_k$ -val ezeket a gyököket.

$$q(x) := (x - x_1) \ldots (x - x_k) \in P_k$$

Ekkor $q \cdot \widetilde{p}_n$ nem vált előjelet $[a;b]$-n, így

$$0 < \int_a^b q\widetilde{p}_n w = \langle q, \widetilde{p}_n \rangle_w = 0.$$

Ugyanis $\widetilde{p}_n$ ortogonális P_{n-1}-re, így q-ra is. Ezzel ellentmondásra jutottunk.

2. Csak $\widetilde{p}_1$ és $\widetilde{p}_2$ gyökeire mutatjuk meg a váltakozást, a többi polinomra indukcióval a rekurzióból hasonlóan bizonyíthatjuk. A rekurzióból

$$\widetilde{p}_2(x) = (x - \alpha_2)\widetilde{p}_1(x) - \beta_1 \underbrace{\widetilde{p}_0(x)}_{=1}.$$

Legyen x_1 gyöke $\widetilde{p}_1$-nek, ekkor $\widetilde{p}_2(x_1) = -\beta_1 < 0$. De

$$\lim_{-\infty} \widetilde{p}_2 = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{+\infty} \widetilde{p}_2 = +\infty,$$

tehát $\widetilde{p}_2$-nek két gyöke van, egyik $(-\infty; x_1)$-en, a másik $(x_1; +\infty)$-en.

□

Tétel: az interpolációs típusú kvadratúra formulák pontosságáról

$$\forall\, f \in P_n\text{-re} \;\; \int_a^b f(x)w(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$
$$\Leftrightarrow \quad A_k = \int_a^b \ell_k(x)w(x)\,dx \;\; (k = 0, \ldots, n)$$

Bizonyítás:

$\Leftarrow$: Ha interpolációs típusú a kvadratúra formulánk, akkor $f \in P_n$ esetben az integrálközelítés ötleténél $f \equiv L_n$, tehát a levezetésben végig egyenlőség van. Ez azt jelenti, hogy az integrálközelítés pontos.

$\Rightarrow$: Mivel a kvadratúra formulánk minden legfeljebb n-edfokú polinomra pontos, így az $\ell_k \in P_n$ Lagrange-alappolinomra is $(k = 0, \ldots, n)$.

$$\int_a^b \ell_k(x)w(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} A_j \ell_k(x_j) = \sum_{j=0}^{n} A_j \delta_{kj} = A_k.$$

$\square$

Tétel: az érintő formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - E(f) = \frac{(b-a)^3}{24} \cdot f''(\eta).$$

Bizonyítás:

Írjuk fel a Taylor-formulát az $\frac{a+b}{2}$ középpont körül másodrendű maradéktaggal

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_x)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

ahol $\xi_x \in [a;b]$. Integráljuk a függvényt és használjuk fel az integrálszámítás középértéktételét.

$$\int_a^b f = \underbrace{(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{=E(f)} + 0 + \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}\underbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}_{\geq 0} dx =$$

$$= E(f) + \frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = E(f) + \frac{(b-a)^3}{24} \cdot f''(\eta)$$

Innen átrendezéssel kapjuk a tétel állítását. A képletben szereplő integrál

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot (b-a)^3 = \frac{1}{12} \cdot (b-a)^3.$$

$\square$

Tétel: a trapéz formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, *ekkor* $\exists\, \eta \in [a;b]$*:*

$$\int_a^b f - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\eta).$$

Bizonyítás:

Az interpoláció hibaformulájából

$$f(x) = L_1(x) + \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b),$$

ahol $\xi_x \in [a;b]$. Integráljuk a függvényt és használjuk fel az integrálszámítás középértéktételét.

$$\int_a^b f = \underbrace{\int_a^b L_1(x)dx}_{=T(f)} + \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2} \underbrace{(x-a)(x-b)}_{\leq 0}\, dx =$$

$$= T(f) + \frac{f''(\eta)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)\, dx = T(f) - \frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\eta)$$

Innen átrendezéssel kapjuk a tétel állítását. A képletben szereplő integrál (Hf.)

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\, dx = -\frac{1}{6} \cdot (b-a)^3.$$

□

Tétel: a Simpson formula hibája

Ha $f \in C^4[a;b]$*, ekkor* $\exists\, \eta \in [a;b]$*:*

$$\int_a^b f - S(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

Bizonyítás:

Az interpoláció hibaformulájával nem lehet bizonyítani a Simpson formula hibáját, mert a hibaformulában $\omega_2(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)$ szerepel és $\int_a^b \omega_2(x)\,dx = 0$. Másrészt ω_2 nem állandó előjelű, ezért az integrálszámítás középértéktétele nem alkalmazható. Hermite interpolációt készítünk az $x_0 = a, x_1 = b, x_2 = \frac{a+b}{2}$ alappontokkal és $m_0 = 1, m_1 = 1, m_2 = 2$ multiplicitásokkal. A Newton-alak rekurzióját felhasználva

$$H_3(x) = L_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_2]\omega_2(x).$$

Integráljuk a polinomot

$$\int_a^b H_3(x)\,dx = \int_a^b L_2(x)\,dx + f[x_0, x_1, x_2, x_2] \cdot \underbrace{\int_a^b \omega_2(x)\,dx}_{=0} = S(f).$$

Az Hermite interpoláció hibaformuláját felhasználva

$$f(x) = H_3(x) + \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

ahol $\xi_x \in [a;b]$. Integráljuk a függvényt és használjuk fel az integrálszámítás középértéktételét.

$$\int_a^b f = \underbrace{\int_a^b H_3(x)\,dx}_{=S(f)} + \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} \underbrace{(x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}_{\leq 0} dx =$$

$$= S(f) + \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!} \int_a^b (x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = S(f) - \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\eta)$$

Innen átrendezéssel kapjuk a tétel állítását. A képletben szereplő integrál (Hf.)

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = -\frac{1}{5!} \cdot (b-a)^5,$$

továbbá $4! \cdot 5! = 2880$. $\square$

Tétel: a trapéz összetett formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, *ekkor* $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - T_m(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot f''(\eta).$$

Bizonyítás:

Írjuk fel az $[x_{k-1}; x_k]$ intervallumra a trapéz formula hibáját, $h = \frac{b-a}{m}$.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right) = -\frac{h^3}{12} \cdot f''(\eta_k)$$

Összegezve az összes intervallumra

$$\int_a^b f(x)\,dx - T_m(f) = -\frac{h^3}{12} \sum_{k=1}^{m} f''(\eta_k) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f''(\eta_k).$$

Mivel $f \in C^2[a;b]$, ezért $f'' \in C$ a függvényértékek átlagát felveszi egy $\eta \in [a;b]$ helyen.

$$\int_a^b f - T_m(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot f''(\eta).$$

$\square$

Tétel: a Simpson összetett formula hibája

Ha $f \in C^4[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

Bizonyítás:

Írjuk fel az $[x_{2k-2}; x_{2k}]$ intervallumra a Simpson formula hibáját, $h = \frac{b-a}{m}$.

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx - \frac{2h}{6}\left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right) =$$
$$= -\frac{(2h)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\eta_k) = -\frac{2^5(b-a)^5}{2880m^5} \cdot f^{(4)}(\eta_k) = -\frac{(b-a)^5}{90m^5} \cdot f^{(4)}(\eta_k)$$

Összegezve az összes intervallumra

$$\int_a^b f(x)\,dx - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{90m^5} \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f^{(4)}(\eta_k) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} \cdot \frac{1}{\frac{m}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f''(\eta_k).$$

Mivel $f \in C^4[a;b]$, ezért $f^{(4)} \in C$ az $\frac{m}{2}$ db függvényérték átlagát felveszi egy $\eta \in [a;b]$ helyen, így

$$\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

$\square$

Tétel: a Gauss-típusú formulák pontosságáról

$$\int_a^b fw = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \quad \forall\, f \in P_{2n+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\omega_n \perp P_n, \ \ \textit{ahol}\ \omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

Bizonyítás:

$\Rightarrow$: Vegyünk egy $p \in P_n$ polinomot és igazoljuk, hogy $\omega_n \perp p$.
Mivel $\omega_n p \in P_{2n+1}$, ezért felhasználhatjuk a pontosságra tett feltételt.

$$\langle \omega_n, p \rangle_w = \int_a^b \omega_n p w = \sum_{k=0}^{n} A_k \underbrace{\omega_n(x_k)}_{=0} p(x_k) = 0$$

$\Leftarrow$: Vegyünk egy $f \in P_{2n+1}$ polinomot és osszuk maradékosan ω_n-nel

$$f = \omega_n \cdot q + r, \quad \text{ekkor} \quad q, r \in P_n.$$

Felhasználjuk, hogy a feltétel miatt $\langle \omega_n, q \rangle_w = 0$ és az $r \in P_n$ maradék polinomra az interpolációs kvadratúra formula pontos.

$$\int_a^b fw = \int_a^b (\omega_n q + r) w = \underbrace{\int_a^b \omega_n q w}_{=\langle \omega_n, q \rangle_w = 0} + \int_a^b r w = \sum_{k=0}^{n} A_k r(x_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

mivel $f(x_k) = \underbrace{\omega_n(x_k)}_{=0} q(x_k) + r(x_k) = r(x_k)$. Ezzel beláttuk az $f \in P_{2n+1}$ polinomokra a pontosságot. $\square$

Tétel: a Gauss típusú formulák hibájáról

Gauss típusú kvadratúra formulák esetén ha $f \in C^{(2n+2)}[a;b]$*, akkor* $\exists\ \eta \in [a;b]$*:*

$$\int_a^b fw - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \frac{f^{2n+2}(\eta)}{(2n+2)!}\|\omega_n\|_w^2,$$

$$\textit{ahol } \omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k) \ \textit{ és } \|\omega_n\|_w^2 = \int_a^b \omega_n^2 w.$$

Bizonyítás:

A hibaformulát a Fejér–Hermite interpoláció hibaformulájával bizonyítjuk.

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{2n+2}(\xi_x)}{(2n+2)!}\omega_n(x)^2,$$

ahol $\xi_x \in [a;b]$. Integráljuk mindkét oldalt a w súlyfüggvénnyel

$$\int_a^b fw - \int_a^b H_{2n+1}w = \int_a^b \frac{f^{2n+2}(\xi_x)}{(2n+2)!}\underbrace{\omega_n(x)^2 w(x)}_{\geq 0}\,dx = \frac{f^{2n+2}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b \omega_n(x)^2 w(x)\,dx,$$

ahol a jobboldali függvény integráljára alkalmaztuk az integrálszámítás középérték tételét. Másrészt a H_{2n+1} Hermite interpolációs polinomra pontos a Gauss-kvadratúra formula, ezért

$$\int_a^b H_{2n+1}w = \sum_{k=0}^{n} A_k H_{2n+1}(x_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k).$$

Ezt alkalmazva

$$\int_a^b fw - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \frac{f^{2n+2}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b \omega_n(x)^2 w(x)\,dx = \frac{f^{2n+2}(\eta)}{(2n+2)!}\|\omega_n\|_w^2.$$

□