

Programtervező informatikus Bsc szak

A szakirány

Név _____

Neptun kód _____

Gyak.vez. neve _____

Pontszám _____

Számolási feladatok:A számolási feladatok során az **A** mátrix minden esetben a következő:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. (5 pont) Írja fel a mátrix Gersgorin köreit és adjon becslést az általánosított Gersgorin-tétellel a szimmetrikus mátrix (valós) sajátértékeire. Igazolja a mátrix invertálhatóságát hasonlósági transzformáció és Gersgorin-tétel alkalmazásával.
2. (5 pont) A Fagyejev-féle "trace" módszer segítségével írja fel az **A** mátrix karakteristikus polinomját!
3. (6 pont) Alkalmazza $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_1$ -ből indulva a hatványmódszer 3 lépését az alábbi szimmetrikus mátrix egy sajátértékének és sajátvektorának közelítésére! (Nem kell sejtést adni a sajátértékre, sajátvektorra.)
4. (8 pont) Végezze el az $(i, j) = (1, 2)$ pozíónak megfelelő Jacobi-forgatást az **A** mátrixon! Adja meg a forgatási mátrixot és a forgatás utáni eredményt is.

Segítségül képletek: $p := \cot 2\varphi$

$$\cos 2\varphi = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad c := \cos \varphi = \sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}}, \quad s := \sin \varphi = \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}$$

5. (6 pont) Határozza meg az $f(x) = 2^x + 3^x$ függvényt a 0, 1, 2, 3 alappontokon nterpoláló interpolációs polinomot! (Nem kell rendezni a polinomot.)

Programozási feladatok:

6. (20 pont) Írjon programot `rayleigh.m` néven a Rayleigh-hányadosra vonatkozó 2. tétel alkalmazására.

- Bemenő paraméter:
 - A : a vizsgált mátrix,
 - N : a vizsgált vektorok száma.
- Kimenő paraméter:
 - μ : a Rayleigh-hányadosok értéke.
 - r : a reziduális hibákat tartalmazó vektor,
- Jelezzen hibát, ha a mátrix nem négyzetes.
- Ha $\|A - A^T\|_2 < 10^{-6}$, akkor tekintse szimmetrikusnak a mátrixot. Jelezzen hibát, ha ez a feltétel nem teljesül.
- Készítsen összesen N db véletlen vektort $[-1; 1]$ intervallumból vett értékekkel.
- Ezen vektorokat
 - normálja le 2-es normában, majd
 - számítsa ki és tárolja a Rayleigh-hányados értékeit a μ vektorban.
 - Az egységvektorra és a hozzáartozó hányadosra határozza meg reziduális hiba 2-es normáját, és tárolja az r vektorban.
 - Csak a μ és r vektort tárolja, az összes véletlen vektort ne! A vektorokkal egyesével hajtsa végre a fenti lépéseket.
- Jelenítse meg pontokkal (.) a grafikonon az r értékeit a μ függvényében.
- Írja a következő címet a rajra: Reziduális hibák.
- Készítsen külön fájlban (`teszt.m`) két szimmetrikus 5×5 mátrixot teszt példának,
 - Az egyik példa véletlen számok segítségével előállított szimmetrikus mátrix legyen.
 - A másik példában a véletlen számok segítségével előállított mátrix sajátértékei egészek legyenek, és legyen közöttük többszörös sajátérték.
 - Próbálja ki minden mátrixra a programot először $N = 100$ esetén, majd ha működik $N = 10^6$ esetén!

Beküldendő a `rayleigh.m` és a `teszt.m` fájl.