6. gyakorlat

Megjegyzés

Motiváció: A gyakorlatban sokszor előfordul, hogy egy költségesen számolható függvény helyett egyszerűbbel akarunk dolgozni, tehát közelítjük a bonyolult függvényt egy egyszerűbbel. Az egyszerűbb függvény általában *polinom*, mely Horner-algoritmussal hatékonyan kiértékelhető. A közelítés lehet interpoláció és approximáció, melynek választását a megoldandó feladat határozza meg.

Definíció: Az interpoláció alapfeladata

Adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a;b]$ különböző alappontok, $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ függvényértékek. Olyan $p_n \in P_n$ polinomot keresünk, melyre

$$p_n(x_i) = y_i, \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

A feltételnek eleget tevő polinomot $interpolációs\ polinomnak$ nevezzük. P_n a legfeljebb n-edfokú polinomok halmaza.

Definíció: Lagrange-alappolinomok

Az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ különböző alappontok által meghatározott $Lagrange$-$alappolinomok$ a következők:

$$\ell_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1 \ldots, n).$$

Definíció: Interpolációs polinom Lagrange-alakja

$$L_n(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x) \equiv p_n(x)$$

Definíció: Hibaformula

1. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges,

2. $[a; b]$ az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ és x által kifeszített intervallum,

3. továbbá $f \in C^{n+1}[a; b]$.

Ekkor

1. $\exists\, \xi_x \in [a; b]$, melyre

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \omega_n(x), \text{ ahol } \omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

2. A hibabecslés

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_n(x)|, \text{ahol}$$

$$M_{n+1} := \|f^{(n+1)}\|_\infty := \|f^{(n+1)}\|_{C[a;b]} := \max_{\xi \in [a;b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

1. feladat

Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x}$ függvényt és az $x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = 9$ alappontokat.

a) Írjuk fel az interpolációs polinom Lagrange-alakját!

b) Közelítsük $f(2) = \sqrt{2}$ értéket az interpolációs polinommal!

c) Becsüljük a hibát az $x = 2$ pontban és az $[1; 9]$ intervallumon!

Definíció: Osztott differenciák

1. *elsőrendűosztott differenciák* a következők:

$$f[x_i, x_{i+1}] := \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

2. A *k-adrendű osztott differenciákat* rekurzívan definiáljuk:

$$\begin{aligned} f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] &:= \\ &\frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}, \\ &k = 0, 1, \ldots, n, \quad i = 0, \ldots n - k. \end{aligned}$$

3. Ha a 0-adrendű osztott differenciákat $f[x_i] := f(x_i)$-vel definiáljuk, akkor az elsőrendű osztott differenciát is a rekurzívan számolhatjuk.

Definíció: Newton-alak

$$N_n(x) := f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \cdot \omega_{k-1}(x) \equiv L_n(x)$$

N_n-t az interpolációs polinom *Newton-alakjának* nevezzük.
A rekurzív formula új x_{n+1} alappont hozzávétele esetén:

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}] \cdot \omega_n(x).$$

Megjegyzés

Az osztott differenciákat rekurzívan tudjuk számolni a következő módon:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
x_0	$\boxed{f(x_0)}$		
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \boxed{f[x_0, x_1]}$	
x_2	$f(x_2)$	$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f[x_1, x_2]$	$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \boxed{f[x_0, x_1, x_2]}$

Ennek a táblázatnak az első két oszlopát mindig ismerni fogjuk. A bekeretezett értékek lesznek a számunkra fontosak. Általában igaz, hogy a Newton-alakot egyszerűbb kiszámolni és programozni is, mint a Lagrange-alakot.

2. feladat

Írjuk fel az első feladatban szereplő függvényhez tartozó interpolációs polinom Newton-alakját is!

3. feladat

Tekintsük az $f(x) = 2^x$ függvényt és az $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ alappontokat.

a) Írjuk fel az interpolációs polinom Newton-alakját!

b) Becsüljük a hibát az $x = 1/2$ pontban!

4. feladat

Írjuk fel azt a lineáris transzformációt, mely

a) $[-1; 1]$-t $[a; b]$-be viszi és amely

b) $[a; b]$-t $[-1; 1]$-be viszi.

5. feladat

Igazoljuk, hogy a $f \in \mathbb{C}^2[a;b]$ esetén a lineáris interpoláció hibabecslése

$$|f(x) - P_1(x)| \leq \frac{M_2}{8}(b-a)^2$$

ahol $M_2 = \|f''\|_\infty$.

1. megoldás

a)

Megjegyzés

Átláthatóság érdekében érdemes az alappontokat és a függvényértékeket táblázatos formában felírni, melynek első sorában az alappontok szerepelnek, míg a második sorában az alappontokhoz kapcsolódó függvényértékek. Például ennél a feladatnál a táblázat így nézne ki:

x_i	1	4	9
y_i	1	2	3

Az $x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = 9$ alappontokhoz tartozó Lagrange-alappolinomok a következők:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)} = \frac{1}{24}(x-4)(x-9)$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(4-9)} = -\frac{1}{15}(x-1)(x-9)$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)} = \frac{1}{40}(x-1)(x-4).$$

Az $1, 4, 9$ alappontokhoz tartozó függvényértékek rendre $1, 2, 3$. Ezt felhasználva a másodfokú interpolációs polinom Lagrange-alakja:

$$L_2(x) = 1\cdot\ell_0(x)+2\cdot\ell_1(x)+3\cdot\ell_2(x) = \frac{1}{24}(x-4)(x-9)-\frac{2}{15}(x-1)(x-9)+\frac{3}{40}(x-1)(x-4).$$

b) Az $f(2) = \sqrt{2}$ közelítése az interpolációs polinom felhasználásával

$$L_2(2) = \frac{1}{24}(2-4)(2-9)-\frac{2}{15}(2-1)(2-9)+\frac{3}{40}(2-1)(2-4) = \frac{14}{24}+\frac{14}{15}-\frac{6}{40} = \frac{41}{30} \approx 1,3667.$$

c) Az interpoláció hibabecslése az $x \in [1;9]$ pontban

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!}|\omega(x)|,$$

ahol $M_3 = \|f'''\|_\infty = \max\{|f'''(x)| : \ x \in [1;9]\}$.
Számítsuk ki a képletben szereplő mennyiségeket! Az $f(x) = \sqrt{x}$ deriváltjai

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}.$$

Innen a derivált becslése $[1;9]$ intervallumon

$$|f'''(x)| = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{x^5}} \leq \frac{3}{8} = M_3$$

illetve

$$|\omega(2)| = |(2-1)(2-4)(2-9)| = 14.$$

Az $x = 2$ pontban a hibabecslés

$$|f(2) - P_2(2)| = \left|\sqrt{2} - \frac{41}{30}\right| \leq \frac{M_3}{3!}|\omega(2)| = \frac{\frac{3}{8}}{6} \cdot 14 = \frac{7}{8}.$$

Az egész intervallumra érvényes hibabecsléshez számítsuk ki $\|\omega\|_\infty$-t.

$$\omega(x) = (x-1)(x-4)(x-9) = x^3 - 14x^2 + 49x - 36$$

$$\omega'(x) = 3x^2 - 28x + 49$$

Az ω lehetséges szélsőértékei

$$x_{1,2} = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 3 \cdot 49}}{6} = \frac{28 \pm 14}{6} = \frac{14 \pm 7}{3}$$

$$x_1 = 7, \quad x_2 = \frac{7}{3}$$

$$\omega(7) = (7-1)(7-4)(7-9) = -36$$

$$\omega\left(\frac{7}{3}\right) = \left(\frac{7}{3} - 1\right)\left(\frac{7}{3} - 4\right)\left(\frac{7}{3} - 9\right) = \frac{400}{27} \approx 14,8$$

Innen $\|\omega\|_\infty = 36$. Az $x \in [1;9]$ intervallumon a hibabecslés

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!}\|\omega\|_\infty = \frac{\frac{3}{8}}{6} \cdot 36 = \frac{9}{4}.$$

2. megoldás

Az alappontok és függvényértékek ismeretében készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
1	$\boxed{1}$		
4	2	$\frac{2-1}{4-1} = \boxed{\frac{1}{3}}$	
9	3	$\frac{3-2}{9-4} = \frac{1}{5}$	$\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{9-1} = \boxed{-\frac{1}{60}}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az interpolációs polinom Newton-alakját.

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4) = \frac{1}{60}(-x^2 + 25x + 36)$$

Ennek a Horner-alakja:

$$N_2(x) = x(-\frac{1}{60}x + \frac{5}{12}) + \frac{3}{5}$$

3. megoldás

a) A $0, 1, 2, 3$ alappontok és az $1, 2, 4, 8$ függvényértékek ismeretében írjuk fel az interpolációs polinom Newton-alakját. Ehhez készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$\dots$	$\dots$
0	$\boxed{1}$			
1	2	$\frac{2-1}{1-0} = \boxed{1}$		
2	4	$\frac{4-2}{2-1} = 2$	$\frac{2-1}{2-0} = \boxed{\frac{1}{2}}$	
3	8	$\frac{8-4}{3-2} = 4$	$\frac{4-2}{3-1} = 1$	$\frac{1-\frac{1}{2}}{3-0} = \boxed{\frac{1}{6}}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az interpolációs polinom Newton-alakját.

$$N_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

Ennek a Horner-alakja:

$$N_3(x) = x\left(x\left(\frac{1}{6}x + 0\right) + \frac{5}{6}\right) + 1$$

b) Az interpoláció hibabecslése az $x = 1/2$ pontban

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - N_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{M_4}{4!}\left|\omega\left(\frac{1}{2}\right)\right|,$$

ahol $M_4 = \|f^{(4)}\|_\infty$.
Először számítsuk ki a behelyettesítési értékeket:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 2^{\frac{1}{2}} \approx 1,4142 \\ N_3\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+0\right)+\frac{5}{6}\right)+1 = 1,4375 \end{aligned}$$

Számítsuk ki a képletben szereplő többi mennyiségeket! Az $f(x) = 2^x$ deriváltjai

$$f'(x) = 2^x \ln(2), \quad f''(x) = 2^x(\ln(2))^2, \quad \ldots, \quad f^{(4)} = 2^x(\ln(2))^4$$

Innen a derivált becslése

$$f^{(4)}(x) = 2^x(\ln(2))^4 \leq 8(\ln(2))^4 = M_4, \quad (x \in [0;3])$$

illetve

$$\omega\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{15}{16}$$

Így a hibabecslés az $x = 1/2$ pontban

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - N_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{8(\ln(2))^4}{24}\cdot\frac{15}{16} = \frac{5}{16}(\ln(2))^4 \approx 0,072$$

4. megoldás

a) Az osztott differencia táblázatot a szokásos módon állítjuk elő azzal a különbséggel, hogy most az a, b paraméterekkel dolgozunk.

x_i	$\varphi(x_i)$	$\varphi[x_i, x_{i+1}]$
-1	$\boxed{a}$	
1	b	$\frac{b-a}{1-(-1)} = \boxed{\frac{b-a}{2}}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az interpolációs polinom Newton-alakját.

$$\varphi(x) = a + \frac{b-a}{2}(x+1) = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}$$

Megjegyzés

Nagyon sok esetben szükségünk van erre a lineáris transzformációra, ezért ezt érdemes megjegyezni.

b) A fenti lépéseket analóg módon megismételjük erre az esetre is.

x_i	$\psi(x_i)$	$\psi[x_i, x_{i+1}]$
a	$\boxed{-1}$	
b	1	$\frac{1-(-1)}{b-a} = \boxed{\dfrac{2}{b-a}}$

$$\psi(x) = -1 + \frac{2}{b-a}(x-a), \quad (x \in [a;b])$$

5. megoldás

Az állítást definició alapján egyszerűen be tudjuk látni:

$$|f(x) - P_1(x)| \leq \frac{M_2}{2}|\omega(x)| \leq \frac{M_2}{2}\left|\omega\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| = \frac{M_2}{8} \cdot (b-a)^2$$

ahol

$$\omega(x) = (x-a)(x-b)$$

ebből következik, hogy $\omega(x)$ az $\frac{a+b}{2}$ helyen a legnagyobb (ld. parabola tulajdonságai), és az ott felvett értéke

$$\omega\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right) = \frac{(b-a)^2}{4}$$