Diszkrét matematika I. vizsga

2025, minta feladatsor

Név:
Neptun kód:

	pontszám
Beugró	/18
Bizonyítások	/60
Fogalmak	/24
Kvíz I	/9
Kvíz II	/9
Összesen	**/120**

A sikeres vizsga feltétele, hogy az 1. részből (**Beugró**) **legalább 15 pontot és** 2. rész **egyik bizonyításából legalább 15 pontot és összesen 48 pontot** (40%-ot) szerezzen. A dolgozatra 90 perc áll rendelkezésére.

Kvízkérdések pontozása: *feleletválasztós*, *kitöltős*: jó válasz 3 pont, rossz válasz -1 pont, *többszörös választás*: 2 jó válasz 3 pont, 1 jó válasz 1 pont, 1 jó és 1 rossz választás 0 pont, 1 ill. 2 rossz válasz -1 pont.

1. Beugró (6 × 3 pont)

1. Definiálja logikai jelek segítségével halmazok *metszetét* és *unióját*! Mutasson egy-egy példát olyan A, B, C halmazokra melyekre $(A \cup B) \cap C$ megegyezik, ill. nem egyezik meg $A \cup (B \cap C)$ halmazzal!

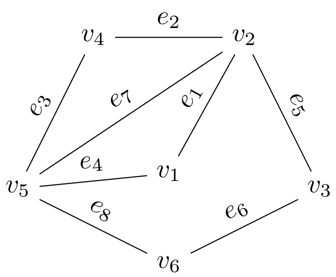
2. Definiálja a *reflexív* relációkat! Reflexív-e az $R = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,1)\} \subset \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ reláció?

3. Adott $w \neq 0$ komplex szám és $n \geq 1$ egész esetén mik lesznek a $z^n = w$ komplex megoldásai? Mondja ki a megfelelő tételt! Hány megoldása van a $z^3 = -1$ egyenletnek komplex számok körében?

4. Hányféleképpen lehet n különböző elemet sorba állítani? Mondja ki a megfelelő összefüggést! Hányféleképpen lehet 5 különböző könyvet a polcra felrakni?

5. Definiálja gráfok *izomorfiáját*! Mutasson példát két gráfra melyek izomorfak, és adja meg a közöttük lévő izomorfiát is!

6. Definiálja a *Hamilton-út* fogalmát! Mutasson példát Hamilton-útra az alábbi gráfban:



2. Bizonyítások (3×20 pont)

1. Mondja ki és bizyonítsa, hogy a relációk kompozíciója asszociatív!
2. Mondja ki és bizonyítsa a binomiális együttható *tulajdonságára* vonatkozó tételek (Pascal-háromszög, szimmetria, kombinatorikus bizonyítással)!
3. Adott G gráfra bizonyítsa be, hogy
   a) Ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor v-ből v'-be pontosan egy út vezet $\Longrightarrow$ G-nek nincs köre, de bármely él hozzáadásával kapott gráfban már van; ill.
   b) G-nek nincs köre, de bármely él hozzáadásával kapott gráfban már van $\Longrightarrow$ G fa.

Bizonyítások értékelése					
	Mat. helyesség	Teljesség	Érthetőség	Formai rendez.	**Össz.**
	0–8 p	0–6 p	0–3 p	0–3 p	**0–20 p**
1. biz.					
2. biz.					
3. biz.					

3. Fogalmak (8 $\times$ 3 pont)

1. Definiálja a *logikai formulák* fogalmát!

2. Definiálja halmazok *hatványhalmazát* és mondja ki a számosságra vonatkozó tételt!

3. Definiálja halmaz *képét* ill. *teljes inverzképét* adott relációra nézve!

4. Definiálja *anti-szimmetrikus* és *szigorúan anti-szimmetrikus* relációkat!

5. Definiálja a *részbenrendezés* fogalmát!

6. Mondja ki a *binomiális együtthatók* tulajdonságaira vonatkozó tételt (szimmetria, Pascal-háromszög)!

7. Definiálja gráfok csúcsainak *fokszámát*!

8. Mondja ki a *zárt Euler-séta* létezésére vonatkozó tételt!

4. Kvíz I (3×3 pont)

1. Tekintsük az alábbi relációt $\{a, b, c, d\}$ halmazon: $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c)\}$. Melyik állítás igaz a relációra (*többszörös választás*):
   a) reflexív
   b) szimmetrikus
   c) tranzitív
   d) irreflexív
2. Mi lesz a $z = 1 - i \in \mathbb{C}$ trigonometrikus alakja?
   a) $\cos(\pi/2) - i\sin(\pi/2)$
   b) $2\left(\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4)\right)$
   c) $\sqrt{2}\left(\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4)\right)$
   d) egyiksem
3. Legyen $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Hány különböző 3 elemű részhalmaza van X-nek?
   a) legalább 1, de legfeljebb 9
   b) legalább 10, de legfeljebb 99
   c) legalább 100, de legfeljebb 999
   d) legalább 1000

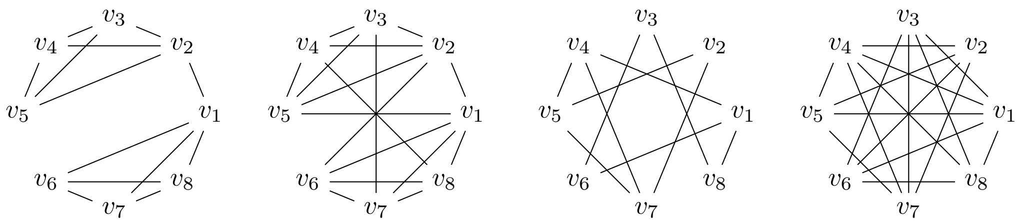
5. Kvíz II (3×3 pont)

1. Két A, B halmaz szimmetrikus differenciája: $A \triangle B = (A \square B) \blacksquare (B \blacklozenge A)$. Melyik *kettő* állítás igaz az alábbiak közül (*többszörös választás*)
   a) $\square = \setminus$, $\blacksquare = \cup$, $\blacklozenge = \setminus$
   b) $\square = \cap$, $\blacksquare = \cup$, $\blacklozenge = \setminus$
   c) $\square = \cup$, $\blacksquare = \setminus$, $\blacklozenge = \cap$
   d) $\square = \cup$, $\blacksquare = \setminus$, $\blacklozenge = \cup$

2. Legyen $\sim$ egy tranzitív és szimmetrikus reláció $\mathbb{C}$-n és $\mathcal{O} = \{\{w \in \mathbb{C} : w \sim z\} : z \in \mathbb{C}\}$. Melyik állítás igaz:

   a) $\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunktak és $\cup\mathcal{O} = \mathbb{C}$
   b) $\mathcal{O}$ elemei páronként nem diszjunktak és $\cup\mathcal{O} = \mathbb{C}$
   c) $\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunktak és $\cup\mathcal{O} \neq \mathbb{C}$
   d) $\mathcal{O}$ elemei páronként nem diszjunktak és $\cup\mathcal{O} \neq \mathbb{C}$

3. Tekintsük az alábbi gráfokat



$G_1 = (V_1, E_1)$ $G_2 = (V_2, E_2)$ $G_3 = (V_3, E_3)$ $G_4 = (V_4, E_4)$

Melyik kettő gráfnak van biztosan Hamilton-köre?

   a) G_1
   b) G_2
   c) G_3
   d) G_4