Algoritmusok és adatszerkezetek II.

2021/2022 őszi félév

Tartalom

Adattömörítés

Informatikában a **kódoláselmélet** adatok különböző reprezentációjával és azok közötti átalakításokkal foglalkozik. Ennek egyik ága, a **forráskódolás** az adott alak hosszát vizsgálja; vagyis azt a kérdést, hogy az adott mennyiségű információt mekkora mennyiségű adattal lehet tárolni. Legtöbb esetben a cél a rövidebb reprezentáció, tehát beszélhetünk **információ-** vagy **adattömörítésről**.

A kódolás során fontos kérdés, hogy az adat teljes egészében visszaállítható-e. Tömörítés esetében ennek megfelelően használhatunk **veszteségmentes** vagy veszteséggel járó eljárásokat (pl. JPEG, MPEG, MP3, . . .). Mi csak az előbbivel foglalkozunk.

A kódoláselméletnél meg kell adnunk az **információ alapegységét**, azaz azt, mennyi információtartalma van az atomi „tárolási egységnek". Mivel a jelenlegi számítógépek bináris elven működnek, ez r = 2 és így a kódszavaink a T = {'0', '1'} ábécé feletti szavak lesznek.

Kódnak nevezzük a T feletti véges szavak (**kódszavak**) egy tetszőleges nem üres halmazát.

Egy kód szemléletesebb ábrázolásához elkészíthetjük annak **kódfá**ját. Ebben a fában a fa csúcsai szavak (nem feltétlenül kódszavak), az éleit pedig a kódszavak lehetséges karaktereivel címkézzük. A fa gyökerében az üres szó szerepel és egy szóhoz tartozó csúcs leszármazottai azok a szavak, amelyeket úgy kapunk, hogy a szó után írjuk az élen szereplő karaktert. A kódhoz tartozó kódfa az a legkevesebb csúcsot tartalmazó ilyen tulajdonságú fa, ami tartalmazza az összes kódszót.

A kódfa szemléltetés mellett más szempontból is hasznos lehet. Egyrészt a fa tulajdonságaiból következtethetünk a kód tulajdonságaira, másrészt a kódfa segítségével egy bitsorozat hatékonyan dekódolható: A gyökérből indulva a bitek szekvenciájának megfelelően járjuk be a fát, az élek mentén kódszót keresve és találat esetén ismételve a bejárást megkapjuk a dekódolt adatot. (Ha a dekódolás lehetséges és egyértelmű.)

A kódolást **betűnkénti kódolás**nak nevezzük, ha az **eredeti ∑ ábécé** feletti adatot betűnként egy $\sum \rightarrow C \subset T^*$ kölcsönösen egyértelmű (bijektív) leképezéssel készítjük el. Például az ASCII kódolás is ilyen, hiszen a megfelelő táblázat alapján betűnként történik a kódolt adat kiszámolása.

A kódolandó állományokat karaktersorozatnak tekintjük, és a tömörítés célja az adatok kisebb helyen történő tárolásának biztosítása.

Naiv módszer

A tömörítendő szöveget karakterenként, fix hosszúságú bitsorozatokkal kódoljuk. A kódot **egyenletes kód**nak nevezzük, ha a kód szavainak hossza egyenlő. A **naiv módszer** egyenletes kódot használó betűnkénti kódolás.

$\sum = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d \rangle$ az ábécé.

A $\sum$ ábécé feletti kódolt adat akkor lesz a legkisebb, ha a kódszavak közös hossza a legkisebb. Mivel $|T| = r$ és $|\sum| = d$ ez azt jelenti, hogy az egyes karakterek legkevesebb $\lceil \log_r d \rceil$ hosszal kódolhatóak naiv módszer segítségével.

Ez alapján egy-egy karakter $\lceil \log_2 d \rceil$ bittel kódolható, ugyanis $\lceil \log_2 d \rceil$ biten $2^{\lceil \log_2 d \rceil}$ különböző bináris kód ábrázolható, és $2^{\lceil \log_2 d \rceil} \geq d > 2^{\lceil \log_2 d \rceil - 1}$, azaz $\lceil \log_2 d \rceil$ biten ábrázolható d-féle különböző kód, de eggyel kevesebb biten már nem.

(A későbbiekben $\log_2 d = \log d$, az alapértelmezett alap a 2-es lesz, ugyanis $r = 2$ a $T = \{'0', '1'\}$ ábécé miatt.)

$In : \sum\langle\rangle$ a tömörítendő szöveg. $n = |In|$ jelöléssel $n * \lceil \log d \rceil$ bittel kódolható. (n a tömörítendő szöveg hossza, d az ábécé betűinek számossága.)

Példa.

ABRAKADABRA szöveg

$d = 5$ és $n = 11$ → a tömörített kód hossza $11 * \lceil \log 5 \rceil = 11 * 3 = 33$ bit (A 3 bites kódok közül tetszőleges 5 kioszthatóaz 5 betűnek.) A tömörített fájl tartalmazza a kódtáblázatot is.

Az ABRAKADABRA szöveg kódtáblázata lehet a következő:

karakter	kód
A	000
B	001
D	010
K	011
R	100

A fenti kódtáblázattal a tömörített kód a következő lesz:
00000110000001100001000000011000000.

Ez a tömörített fájlba foglalt kódtáblázat alapján könnyedén 3 bites szakaszokra bontható és kitömöríthető. Gyakorlatban, ha a tömörítés nem igazán fontos szempont, egyszerűsége miatt sok helyen alkalmazzák, például a 8 bit hosszúságú kódszavakat használó ASCII kód is ilyen. Csak hosszabb szövegeket érdemes így tömöríteni a kódtáblázat mérete miatt.

Huffmann-kód

A Huffmann-kód nagyon hatékony módszer az adatállományok tömörítésére. A megtakarítás 20%-tól 90%-ig terjedhet, a tömörítendő adatállomány sajátosságai alapján. A mohó algoritmus egy táblázatot használ az egyes karakterek előfordulási gyakoriságára, hogy meghatározza, hogyan lehet a karaktereket optimálisan ábrázolni bináris jelsorozattal.

Betűnkénti kódolás esetén akkor kapunk rövidebb kódolt adatot, ha a gyakori betűkhöz rövid kódszót, a ritkákhoz pedig hosszabbakat rendelünk. A Huffman-kódolás egy **betűnkénti optimális kódolás**, az ilyen kódolások között szinte a legjobb tömörítés érhető el vele adott adat esetén. Ezt úgy érjük el, hogy a kódhoz tartozó kódfát alulról felfelé építjük az eredeti szöveg karaktereinek gyakorisága alapján.

Bináris esetben a lépések a következők:

1. Olvassuk végig a szöveget és határozzuk meg az egyes karakterekhez tartozó gyakoriságokat.
2. Hozzunk létre minden karakterhez egy csúcsot és helyezzük el azokat egy (min) prioritásos sorban a gyakoriság, mint kulcs segítségével.
3. a) Vegyünk ki két csúcsot a prioritásos sorból és hozzunk létre számukra egy szülő csúcsot.
   b) A szülő-gyerek éleket címkézzük nullával és eggyel a gyakoriságnak megfelelő sorrendben.
   c) Helyezzük el a szülő csúcsot a prioritásos sorba gyerekei gyakoriságának összegét használva kulcsként.
4. Ismételjük meg az előző pontot, ha több mint egy csúcs szerepel a sorban.
5. Olvassuk ki a karakterekhez tartozó kódszavakat a kódfából.
6. Olvassuk végig újra a bemenetet és kódoljuk azt karakterenként.

- A tömörítendő fájlt, illetve szöveget kétszer olvassa végig.
- A kódfa szigorúan bináris fa.
- A tömörített fájl a kódfát is tartalmazza.

A **kitömörítést** is karakterenként végezzük.

1. Mindegyik karakter kinyeréséhez a kódfa gyökerétől indulunk.
2. Majd a tömörített kód sorban olvasott bitjei szerint 0 esetén balra, 1 esetén jobbra lépünk lefelé a fában, mígnem levélcsúcshoz érünk.
3. Ekkor kiírjuk a levelet címkéző karaktert, majd a Huffman-kódban a következő bittől és újra a kódfa gyökerétől folytatjuk, amíg a tömörített kódon végig nem érünk.

A Huffmann-kód mindig egyértelműen dekódolható a kódfa segítségével, mivel prefix-kód. **Prefix-kód** esetén a kódszavak halmaza prefix mentes, a kódszavakra igaz, hogy egyik sem kezdőszelete (valódi prefixe) bármelyik másiknak. A kódolás minden bináris karakterkódra egyszerű: csak egymás után kell írni az egyes karakterek bináris kódját.

Általában a Huffman-kódolás nem egyértelmű. Egyrészt, ha több azonos gyakoriság van, akkor bármelyiket választva Huffman-kódolást kapunk; másrészt a 0 és 1 szerepe felcserélhető.

Mivel a kódolás miden adathoz különböző, a dekódoló oldalon is ismertnek kell lennie. Ez gyakorlatban azt jelenti, hogy a kódfát vagy kódtáblát is csatolnunk kell a kódolt adathoz (ront a tömörítési arányon), vagy a Huffman-kódot általánosított adathoz készítjük el. Emiatt a gyakorlatban Huffmann-kódolással is csak hosszabb szövegeket érdemes tömöríteni.

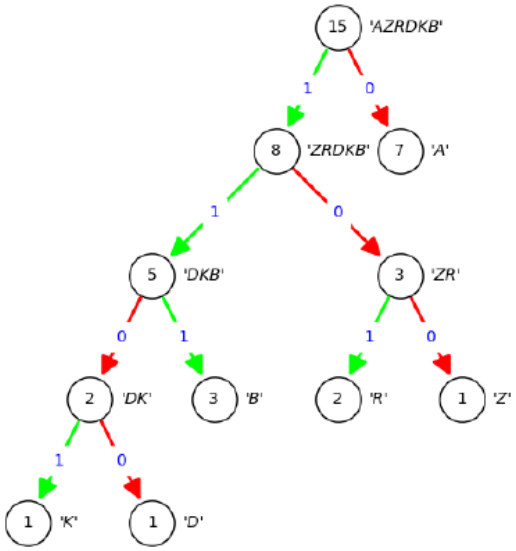
Példa.

AZABBRAKADABRAA szöveg

karakter	gyakoriság	kód
A	7	0
B	3	111
D	1	1100
K	1	1101
R	2	101
Z	1	100

Prioritásos minimumsorba hozzáadjuk a címkéket, hogy ennek segítségével felrajzolhassuk a kódfát.

<1 1 1 2 3 7>
D K Z R B A
<1 2 2 3 7>
Z DK R B A
<2 3 3 7>
DK B ZR A
<3 5 7>
ZR DKB A
<7 8>
A ZRDKB
< 15 >
AZRDKB



Az AZABBRAKADABRAA kódolt alakja: 01000111111101011010110001111010O.

Lempel – Ziv – Welch (LZW) módszer

A betűnkénti kódolás hatékonysága korlátozott, könnyen találhatunk olyan adatot, amit sokkal tömörebb formában lehet reprezentálni, ha a kódolás nem karakterenként történik. Ezt használják ki a **szótárkódok** úgy, hogy egy kódszó nem csak egy karakter képe lehet, hanem egy szóé is.

Az LZW kódolás egy kezdeti kódtáblát bővít lépésről-lépésre úgy, hogy egyre hosszabb már „látott" szavakhoz rendel új kódszót. Az algoritmus a szöveg bizonyos szavaiból **szótár**at épít. Ez szavak egy halmaza, amit *S*-sel jelölünk. A szótárról három dolgot tételezünk fel:

- az egybetűs szavak mind szerepelnek benne;
- ha egy szó benne van a szótárban, akkor annak minden kezdődarabja is benne van;
- a tárolt szavaknak fix hosszúságú kódjuk van; $x \in S$ szó kódját *c(x)* jelöli.

A gyakorlatban a kódok hosszát 12-15 bitnek érdemes választani. A tömörítendő szöveget *S*-beli szavak egymásutánjára bontjuk. A kódolás eredménye, a tömörített szöveg az így kapott szavak kódjainak a sorozata. Az eredeti szöveg olvasásakor egyidőben épül az *S* szótár és alakul ki a felbontás. A tömörítés abból adódik, hogy sokszor helyettesítünk hosszú szavakat a rövid kódjaikkal.

A szótár egyik szokásos tárolási módja a **szófa adatszerkezet**. Az $x \in S$ szó *c(x)* kódja úgy is tekinthető, mint egy hivatkozás az *x*-nek az *S*-beli előfordulására. A szöveg összenyomása úgy történik, hogy amikor az olvasás során egy $x \in S$ szót találunk, aminek a következő *Y* betűvel való folytatása már nincs *S*-ben, akkor *c(x)*-et kiírjuk a kódolt szövegbe. Az *xY* szót felvesszük az *S* szótárba. A szó *c(xY)* kódja a legkisebb még eddig az *S*-ben nem szereplő kódérték lesz. Ezután az *Y* betűvel kezdődően folytatjuk a bemeneti szöveg olvasását. Az algoritmus kicsit pontosabb megfogalmazásához legyen *z* egy szó típusú változó, *K* egy betű típusú változó. A *z* változó értéke kezdetben a tömöríteni kívánt állomány első betűje. Az eljárás futása során mindig teljesül, hogy $z \in S$.

Az algoritmus általános lépése a következő:

(1) Olvassuk a bemenő állomány következő betűjét *K*-ba.

(2) Ha az előző olvasási kísérlet sikertelen volt (vége a bemenetnek), akkor írjuk ki *c(z)*-t, és álljunk meg.

(3) Ha a *zK* szó is *S*-ben van, akkor $z \leftarrow zK$, és menjünk vissza (1)-re.

(4) Különben (ha $zK \notin S$) írjuk ki *c(z)*-t, tegyük a *zK* szót *S*-be. Legyen $z \leftarrow K$, majd menjünk vissza (1)-re.

Példa.

Legyen a tömörítendő szöveg: `ABABABAACAACCBBAAAAAAAAAA`
A kezdeti kódtábla (a szöveg karakterei alapján):

karakter	kód
A	1
B	2
C	3

A kódolás során a bemenetet pontosan egyszer olvassuk végig úgy, hogy mindig a már ismert (kóddal rendelkező) leghosszabb szót keressük. Ha megtaláltuk, akkor

- kiírjuk a talált szó kódját a kimenetre, és
- bővítjük a kódszavak halmazát az αK szó képével, ahol az α a talált szó és K a következő karakter.

Kezdetben a leghosszabb „ismert” szó az A, ennek kódja 1 és az új kóddal rendelkező szó az AB a 4 kóddal. A kódolás folyamán ezt az lépést ismételjük, amíg a szöveg végére nem érünk.

kód	aktuális szó	következő karakter	új kód
1	A	B	4
2	B	A	5
4	AB	A	6
6	ABA	A	7
1	A	C	8
3	C	A	9
1	A	A	10
8	AC	C	11
3	C	B	12
2	B	B	13
5	BA	A	14
10	AA	A	15
15	AAA	A	16
15	AAA	-	-

A kódolt üzenet tehát: 1 2 4 6 1 3 1 8 3 2 5 10 15 15

A dekódoláshoz ugyanazt a kezdeti, csak a karakterek kódját tartalmazó kódtáblát használjuk és szemléltethetjük ugyanazzal a táblázattal. Az első és utolsó oszlopot teljes egészében ki tudjuk tölteni, majd soronként haladunk. Jelen esetben az első két sorhoz tartozó aktuális szó nyilván ismert.

Mivel a második sor szavának első karaktere éppen az **első** sorban szereplő **következő karakter**, így az ismert. Ebből ismerjük mit kódolt az első sor új kódja, így folytathatjuk a kitöltést.

kód	aktuális szó	következő karakter	új kód
1	A	***B***	4
2	B	A	5
4	AB	A	6
6			7
…	…	…	…

A harmadik sorig mindig ismert volt a kódszóhoz tartozó szó mielőtt használni szerettük volna. Azonban következőnek azt a kódszót szeretnénk használni, aminek visszaállításához szükség lenne annak inverz képére. Nyilván amíg nem ismert a kódhoz tartozó szó addig nem is használhatjuk. Szerencsére csak az első karakterére van szükség, ami ismert.

A dekódolás ez alapján már egyszerűen befejezhető, a táblázat meg fog egyezni a kódolásnál már bemutatottal és a dekódolt szöveg kiolvasható a második oszlopból.

Egy hosszú szöveg esetén az ismertetett eljárás annyi új kódszót is bevezethet, hogy az azok közötti keresés a teljes szöveg végigolvasásához lenne hasonló. Ezzel a módszer elveszítené hatékonyságát, ezért gyakorlatban korlátozzuk a kódszavak halmazát. Ez történhet például

- a kódszavak számának korlátozásával;
- a kódszavakhoz tartozó szavak hosszának korlátozásával;
- azzal, hogy a bemenet csak egy kezdőszeletén építjük a szótárat, utána csak kódolunk.

Mivel a Huffman-kódolás csak a betűnkénti kódolások között optimális az LZW eljárás könnyen eredményezhet rövidebb kódolt alakot, annak ellenére is, hogy az itt használt kódszavakat még binárisan kódolni kell.

Az LZW eljárás egyszerűnek nevezhető (összehasonlítva például a Huffman kódolással), és mivel csak egyszer kell olvasni a bemenetet, hatékony is (amennyiben a kódszavak tárolása hatékony).

AVL fák

A bináris keresőfáknál láttuk, hogy a keresés műveletigénye lényegesen függ a fa szintjeinek számától, vagyis a fa magasságától. Egy fa magassága akkor mondható jónak, ha legfeljebb $c \log n$, ahol n a csúcsok száma és c egy kis pozitív állandó. A legterebélyesebb fáknál c érték 1 körül van. Az olyan fákat, ahol c 1-nél nem sokkal nagyobb, kiegyensúlyozott fáknak nevezzük.

Az AVL fák magasság szerint kiegyensúlyozott keresőfák.

Definíció.

t kiegyensúlyozott bináris fa (KBF) ⇔ t minden (*p) csúcsára:
| h(p→right) – h(p→left) | ≤ 1

Tétel.

Tetszőleges nem üres n csúcsú AVL fa h magasságára igaz, hogy
$\lfloor \log n \rfloor \leq h \leq 1{,}45 \log n$

Az AVL-fára, mint speciális alakú keresőfára, változatlanul érvényesek a keresőfákra bevezetett műveletek. Minden művelet (beszúrás és törlés) után ellenőrizzük, és ha kell, helyreállítjuk a fa kiegyensúlyozottságát. Az AVL fát láncoltan reprezentáljuk és a csúcsban tároljuk az egyensúlyát (balance), ahol p→b := h(p→right) – h(p→left) és p→b ∈ {-1,0,+1}.

Jelölések

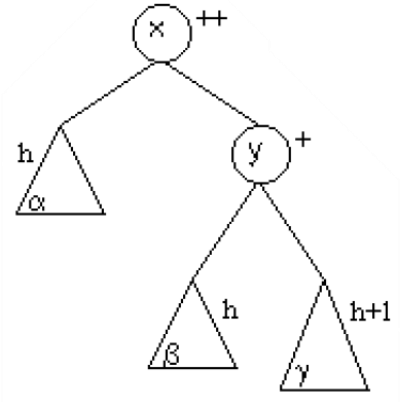
- A csúcs jelzője (indikátora) az '=', ha a csúcs két részfájának magassága egyenlő.
- A csúcs jelzője a '-', ha a csúcs baloldali részfájának magassága eggyel nagyobb, mint a jobboldali részfáé.
- A csúcs jelzője a '+', ha a csúcs jobboldali részfájának magassága eggyel nagyobb, mint a baloldali részfáé.

A levelek jelzője mindig az '='. (Ezért a leveleknél nem jelezzük az egyensúlyt.) Ha egy csúcs jelzője beszúrás vagy törlés miatt '++', vagy '- -' lesz (ez jelzi, hogy elromlott az AVL-tulajdonság), javítani kell.

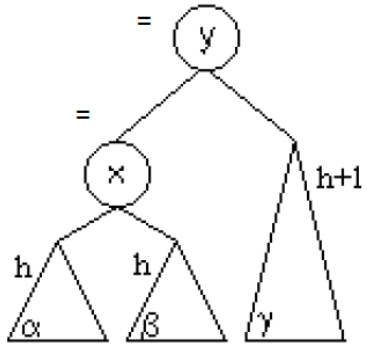
AVL fa forgatások

Csúcsok beszúrása esetén kétféle eset van, ahogyan elromolhat az AVL tulajdonság. Az egyik esetben a legjobboldalibb (vagy a legbaloldalibb) részfánál romlik el, a másik esetben pedig az ellenkező irányban.

(++, +) forgatás (tükörképe a (- -, -) forgatás)



→ Forgatás →

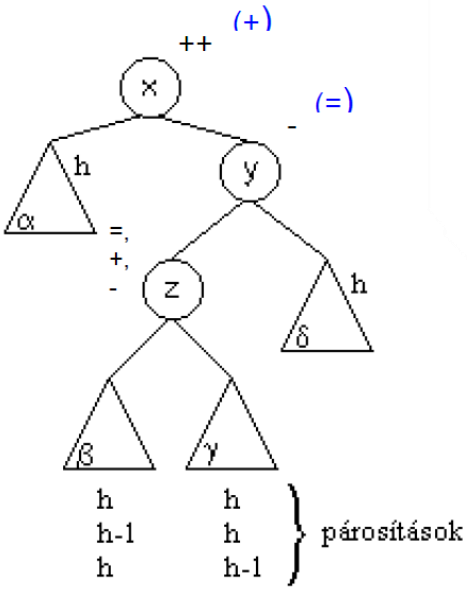


Elromlott az AVL tulajdonság

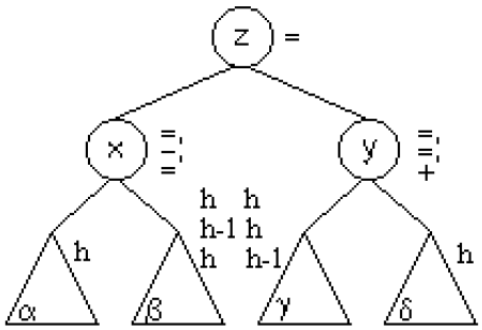
A forgatás után α, β és γ részfák csúcsai a keresőfa tulajdonság szerinti relációk szerint helyezkednek el a fában az új *y* gyökércsúcs kulcsa alapján.

α < x < β < y < γ (a reláció az α, β és γ részfák minden csúcsára igaz)

(++, -) forgatás (tükörképe a (- -, +) forgatás)



→ Forgatás →



Elromlott az AVL tulajdonság

A forgatás után α, β, γ, és δ részfák csúcsai a keresőfa tulajdonság szerinti relációk szerint helyezkednek el a fában az új *z* gyökércsúcs kulcsa alapján.

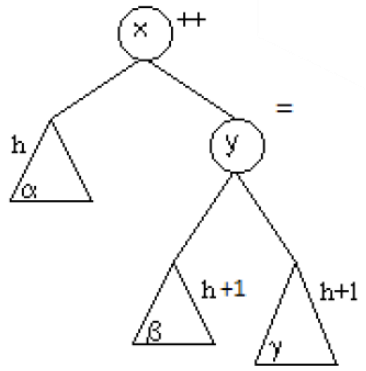
α < x < β < z < γ < y < δ (a reláció az α, β, γ és δ részfák minden csúcsára igaz)

A (+ +, -) eset háromféleképpen állhat elő:

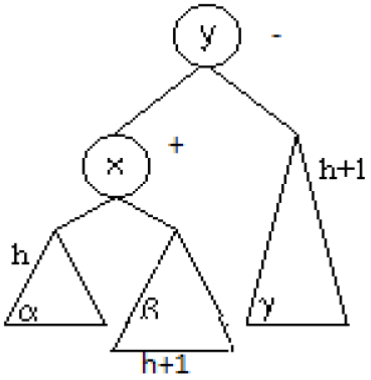
- A 'z' az új elem, részfák nincsenek, δ részfa sincs (h , h)
- Az új elem a γ részfába került (h-1 , h)
- Az új elem a β részfába került (h , h-1)

Csúcs törlésekor létrejöhet egy harmadik féle eset is, amikor az egyik részfa két szinttel eltér a másiktól (gyökér ++ vagy - - jelzőt kap), viszont az elromlott oldalon levő gyerek részfái egyenlő magasak lesznek.

(++, =) forgatás (tükörképe a (- -, =) forgatás)



→ Forgatás →



Elromlott az AVL tulajdonság

A forgatás után α, β és γ részfák csúcsai a keresőfa tulajdonság szerinti relációk szerint helyezkednek el a fában az új *y* gyökércsúcs kulcsa alapján.

α < x < β < y < γ (a reláció az α, β és γ részfák minden csúcsára igaz)

Ez a forgatási séma nem csökkenti az aktuális részfa magasságát, így ezután nem kell tovább ellenőrizni a címkéket.

AVL fába beszúrás

A beszúrás menete:

1. Megkeressük a kulcs helyét a fában.
2. Ha a kulcs benne van a fában, akkor KÉSZ vagyunk.
3. Ha a kulcs helyén egy üres részfa található, beszúrunk az üres fa helyére egy új a kulcsot tartalmazó levélcsúcsot, azzal, hogy ez a részfa eggyel magasabb lett.
4. Egyet felfelé lépünk a keresőfában. Mivel az a részfa, amiből felfelé építünk, eggyel magasabb lett, az aktuális csúcs egyensúlyát megfelelően módosítjuk. (Ha a jobb részfa lett magasabb, hozzáadunk az egyensúlyhoz egyet, ha a bal, levonunk belőle egyet.)
5. Ha az aktuális csúcs egyensúlya 0 lett, akkor az aktuális csúcshoz tartozó részfa alacsonyabb ága hozzánőtt a magasabbhoz, tehát az aktuális részfa most ugyanolyan magas, mint a beszúrás előtt volt, és így egyetlen más csúcs egyensúlyát sem kell módosítani, KÉSZ vagyunk.
6. Ha az aktuális csúcs új egyensúlya 1 vagy -1, akkor előtte 0 volt, ezért az aktuális részfa magasabb lett eggyel. Ekkor a 4. ponttól folytatjuk.
7. Ha az aktuális csúcs új egyensúlya 2 vagy -2, akkor a hozzá tartozó részfát ki kell egyensúlyozni. A kiegyensúlyozás után az aktuális részfa visszanyeri a beszúrás előtti magasságát, ezért már egyetlen más csúcs egyensúlyát sem kell módosítani, KÉSZ vagyunk.

AVL fából törlés

A megismert forgatások csökkentik a részfa magasságát, így törlésnél nem biztos, hogy egy forgatás után meg lehet állni a kiegyensúlyozással. Akár a gyökérig terjedhet a törlés hatása. Az általános törlő eljárás segéd eljárása lesz a minimális elem kivétele (törlése) a fából. Az eljárás a kiemelt minimum elem címét adja vissza.

Három eset van:

- Levelet törlünk. (Ez az eset a programban összevonható a következővel.)
- Egy gyerekes csúcsot törlünk.
- Két gyerekes csúcsot törlünk.

Levél törlése esetén a szülő megfelelő oldali részfája üres lesz és az egyensúlya eggyel nő vagy csökken.

Egy gyerekes csúcs törlése esetén a törlendő csúcs gyerekét beláncoljuk a szülő azon oldalára, ahonnan töröljük az elemet, és módosítjuk a szülő címkéjét, mert a megfelelő oldal mélysége eggyel csökkent. Az előbbi két eset fordul elő a minimum elem kivételénél.

Úgy is mondhatjuk, hogy „ha a törlendő csúcsnak egyik részfája üres, akkor a másik részfát tesszük a törlendő csúcs helyére", függetlenül attól, hogy ez a másik részfa üres-e vagy sem. Ilyen értelemben a fenti három esetből az első kettő összevonható.

Kétgyerekes elem törlésekor előbb kiemeljük a jobb oldali részfájának minimumát. A jobb oldali részfa szükség szerinti kiegyensúlyozása a minimumának kiemelésekor történik.

Ezután a törlendő elem helyére beláncoljuk a kiemelt minimumot, azaz a törlendő elem szülője erre a csúcsra fog mutatni, és ez a csúcs veszi át a törlendő elem két részfáját. Ezt követően beállítjuk aktuális részfa gyökerének egyensúlyát, és szükség esetén kiegyensúlyozzuk.

A jobb oldali részfa minimuma kisebb minden jobboldali elemnél és nagyobb a bal oldali részfa összes eleménél, így az új helyre való beillesztése nem rontja a keresőfa tulajdonságot. (Természetesen a bal oldali részfa maximuma is megfelelő lenne a törlendő elem helyére.)

Minimális elem kivétele a fából

1. Induljunk el a gyökértől és haladjuk balra addig, amíg lehet.
2. Ha az aktuális csúcsnak nincs bal részfája, akkor ő a minimum. A címét visszaadjuk az eljárás output paraméterébe.
3. A minimum szülőjének bal részfája lesz a minimum csúcs jobb részfája.
4. Állítsuk át a szülő címkéjét, azaz növeljük eggyel, mert rövidült a bal részfa.
5. Ha kell, forgassunk.
6. Ha a részfa nem rövidült, azaz nem '=' lett a részfa gyökerének címkéje, akkor kész vagyunk.
7. Ha rövidült, a részfa, akkor ismételjük a szülő címkéjének javítását.

B+ fák

Az adathalmazokon a keresés és a módosítás műveletek hatékonyabban hajthatók végre, ha az értékeket rendezve tároljuk. Nem célszerű szekvenciálisan vagy láncolt listákban tárolni a rekordokat, mert így a műveletek nem lesznek túl hatékonyak.

Hatékonyabban valósíthatjuk meg a műveleteket, ha az adatokat keresőfába rendezve képzeljük el. Kézenfekvő megoldás lehetne az AVL fák vagy a piros-fekete fák alkalmazása, most azonban az adatokat egy véletlen elérésű háttértáron, pl. egy mágneslemezen kívánjuk elhelyezni. A mágneslemezek pedig úgy működnek, hogy egyszerre az adatok egy egész blokkját, tipikusan 512 byte vagy négy kilobyte mennyiségű adatot mozgatunk. Egy bináris keresőfa egy csúcsa ennek csak egy töredékét használná, ezért olyan struktúrát keresünk, ami jobban kihasználja a mágneslemez blokkjait.

Innen adódik a B+ fák ötlete, amiben minden csúcs legfeljebb d mutatót ($4 \leq d$), és legfeljebb $d-1$ kulcsot tartalmaz, ahol d a fára jellemző állandó, a **B+ fa fokszáma**. A belső csúcsokban mindegyik referencia két kulcs "között" van, azaz egy olyan részfa gyökerére mutat, amiben minden érték a két kulcs között található (mindegyik csúcshoz hozzáképzelve balról egy "mínusz végtelen", jobbról egy "plusz végtelen" értékű kulcsot).

Az **adatok a levélszinten** vannak. A belső kulcsok csak **hasító kulcsok**. Egy adott kulcsú adat keresése során ezek alapján tudhatjuk, melyik ágon keressünk tovább. A levélszinten minden kulcshoz tartozik egy mutató, ami a megfelelő adatrekordra hivatkozik. A gyökércsúcstól minden levél azonos távolságra kell legyen.

A d-ed fokú B+ fák **belső csúcsainak** tulajdonságai:

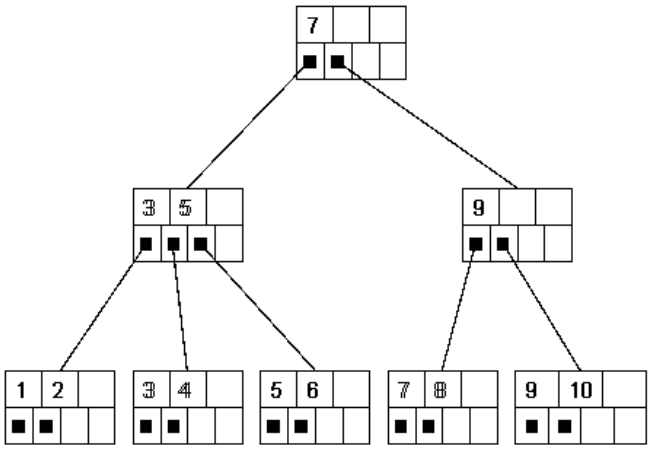
- Minden csúcs legfeljebb d mutatót ($4 \leq d$), és legfeljebb $d-1$ kulcsot tartalmaz. (d : állandó, a B+ fa fokszáma)
- Minden Cs belső csúcsra, ahol k a Cs csúcsban a kulcsok száma: az első gyerekhez tartozó részfában minden kulcs kisebb, mint a Cs első kulcsa; az utolsó gyerekhez tartozó részfában minden kulcs nagyobb-egyenlő, mint a Cs utolsó kulcsa; és az i-edik gyerekhez tartozó részfában ($2 \leq i \leq k$) lévő tetszőleges r kulcsra $Cs.kulcs[i-1] \leq r < Cs.kulcs[i]$.
- A gyökércsúcsnak legalább két gyereke van (kivéve, ha ez a fa egyetlen csúcsa, következésképpen az egyetlen levele is).
- Minden, a gyökértől különböző belső csúcsnak legalább $\lfloor d/2 \rfloor$ gyereke van.

A *d*-ed fokú B+ fák **levél csúcsainak** tulajdonságai:

- Minden levélben legfeljebb *d-1* kulcs, és ugyanennyi, a megfelelő (azaz ilyen kulcsú) adatrekordra hivatkozó mutató található
- A gyökértől mindegyik levél ugyanolyan távol található.
- Minden levél legalább $\lfloor d/2 \rfloor$ kulcsot tartalmaz (kivéve, ha a fának egyetlen csúcsa van).
- A B+ fa által reprezentált adathalmaz minden kulcsa megjelenik valamelyik levélben, balról jobbra szigorúan monoton növekvő sorrendben.

B+ fa zárójeles reprezentációja

{[(1 2) 3 (3 4) 5 (5 6)] 7 [(7 8) 9 (9 10)]}



Beszúrás B+ fába

Ha a fa üres, hozzunk létre egy új levélcsúcsot, ami egyben a gyökércsúcs is, és a beszúrandó kulcs/mutató pár a tartalma! Különben keressük meg a kulcsnak megfelelő levelet! Ha a levélben már szerepel a kulcs, a beszúrás sikertelen. Különben menjünk az 1. pontra!

1. Ha a csúcsban van üres hely, szúrjuk be a megfelelő kulcs/mutató párt kulcs szerint rendezetten ebbe a csúcsba!
2. Ha a csúcs már tele van, vágjuk szét két csúccsá, és osszuk el a d darab kulcsot egyenlően a két csúcs között! Ha a csúcs egy levél, vegyük a második csúcs legkisebb értékének másolatát, és ismételjük meg ezt a beszúró algoritmust, hogy beszúrjuk azt a szülő csúcsba! Ha a csúcs nem levél, vegyük ki a középső értéket a kulcsok elosztása során, és ismételjük meg ezt a beszúró algoritmust, hogy beszúrjuk ezt a középső értéket a szülő csúcsba! (Ha kell, a szülő csúcsot előbb létrehozzuk. Ekkor a B+ fa magassága nő.)

Törlés B+ fából

Keressük meg a törlendő kulcsot tartalmazó levelet! Ha ilyen nincs, a törlés meghiúsul. Különben a törlő algoritmus futása vagy az A esettel fejeződik be; vagy a B esettel folytatódik, ami után a C eset (nullaszor, egyszer, vagy többször) ismétlődhet, és még a D eset is sorra kerülhet végül.

A, A keresés során megtalált levélcsúcs egyben a gyökércsúcs is:

1. Töröljük a megfelelő kulcsot és a hozzá tartozó mutatót a csúcsból!
2. Ha a csúcs tartalmaz még kulcsot, kész vagyunk.
3. Különben töröljük a fa egyetlen csúcsát, és üres fát kapunk.

B, A keresés során megtalált levélcsúcs nem a gyökércsúcs:

1. Töröljük a megfelelő kulcsot és a hozzá tartozó mutatót a levélcsúcsból!
2. Ha a levélcsúcs még tartalmaz elég kulcsot és mutatót, hogy teljesítse az invariánsokat, kész vagyunk.
3. Ha a levélcsúcsban már túl kevés kulcs van ahhoz, hogy teljesítse az invariánsokat, de a következő, vagy a megelőző testvérének több van, mint amennyi szükséges, osszuk el a kulcsokat egyenlően közte és a megfelelő testvére között! Írjuk át a két testvér közös szülőjében a két testvérhez tartozó hasító kulcsot a két testvér közül a második minimumára!
4. Ha a levélcsúcsban már túl kevés kulcs van ahhoz, hogy teljesítse az invariánst, és a következő, valamint a megelőző testvére is a minimumon van, hogy teljesítse az invariánst, akkor egyesítsük egy vele szomszédos testvérével! Ennek során a két testvér közül a (balról jobbra sorrend szerinti) másodikból a kulcsokat és a hozzájuk tartozó mutatókat sorban átmásoljuk az elsőbe, annak eredeti kulcsai és mutatói után, majd a második testvért töröljük. Ezután meg kell ismételnünk a törlő algoritmust a szülőre, hogy eltávolítsuk a szülőből a hasító kulcsot (ami eddig elválasztotta a most egyesített levélcsúcsokat), a most törölt második testvérre hivatkozó mutatóval együtt.

C, Belső — a gyökértől különböző — csúcsból való törlés:

1. Töröljük a belső csúcs éppen most egyesített két gyereke közti hasító kulcsot és az egyesítés során törölt gyerekére hivatkozó mutatót a belső csúcsból!
2. Ha a belső csúcsnak van még floor(d/2) gyereke, (hogy teljesítse az invariánsokat) kész vagyunk.

3. Ha a belső csúcsnak már túl kevés gyereke van ahhoz, hogy teljesítse az invariánsokat, de a következő, vagy a megelőző testvérének több van, mint amennyi szükséges, osszuk el a gyerekeket és a köztük levő hasító kulcsokat egyenlően közte és a megfelelő testvére között, a hasító kulcsok közé a testvérek közti (a közös szülőjükben lévő) hasító kulcsot is beleértve! A gyerekek és a hasító kulcsok újraelosztása során, a középső hasító kulcs a testvérek közös szülőjében a két testvérhez tartozó régi hasító kulcs helyére kerül úgy, hogy megfelelően reprezentálja a köztük megváltozott vágási pontot! (Ha a két testvérben a gyerekek összlétszáma páratlan, akkor az újraelosztás után is annak a testvérnek legyen több gyereke, akinek előtte is több volt!)
4. Ha a belső csúcsnak már túl kevés gyereke van ahhoz, hogy teljesítse az invariánst, és a következő, valamint a megelőző testvére is a minimumon van, hogy teljesítse az invariánst, akkor egyesítsük egy vele szomszédos testvérével! Az egyesített csúcsot a két testvér közül a (balról jobbra sorrend szerinti) elsőből hozzuk létre. Gyerekei és hasító kulcsai először a saját gyerekei és hasító kulcsai az eredeti sorrendben, amiket a két testvér közti (a közös szülőjükben lévő) hasító kulcs követ, és végül a második testvér gyerekei és hasító kulcsai jönnek, szintén az eredeti sorrendben. Ezután töröljük a második testvért. A két testvér egyesítése után meg kell ismételnünk a törlő algoritmust a közös szülőjükre, hogy eltávolítsuk a szülőből a hasító kulcsot (ami eddig elválasztotta a most egyesített testvéreket), a most törölt második testvérre hivatkozó mutatóval együtt.

D, A gyökércsúcsból való törlés, ha az nem levélcsúcs:

1. Töröljük a gyökércsúcs éppen most egyesített két gyereke közti hasító kulcsot és az egyesítés során törölt gyerekére hivatkozó mutatót a gyökércsúcsból!
2. Ha a gyökércsúcsnak van még 2 gyereke, kész vagyunk.
3. Ha a gyökércsúcsnak csak 1 gyereke maradt, akkor töröljük a gyökércsúcsot, és a megmaradt egyetlen gyereke legyen az új gyökércsúcs! (Ekkor a B+ fa magassága csökken.)

Gráfábrázolások

Gráfokkal kapcsolatos definíciók

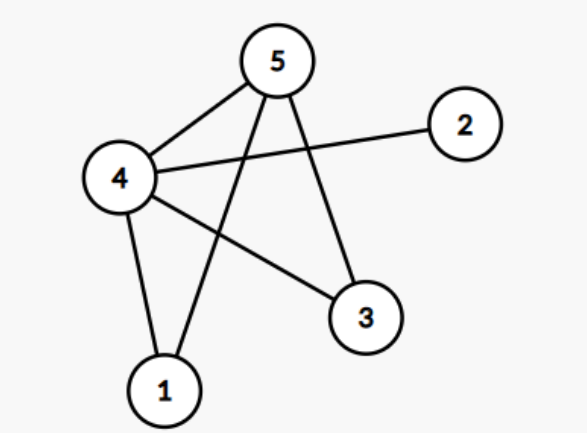
Gráf alatt egy $G = (V, E)$ rendezett párost értünk, ahol V a csúcsok vagy pontok (vertices) tetszőleges, véges halmaza, $E \subseteq V \times V \setminus \{(u, u) : u \in V\}$ pedig az élek (edges) halmaza. Az élek E halmazának elemei bizonyos V-beli párok. Ha $V = \{\}$, akkor üres gráfról, ha $V \neq \{\}$, akkor nemüres gráfról beszélünk.

(Párhuzamos és hurokélek nem szerepelhetnek a gráfokban, amikkel foglalkozni fogunk.)

Irányítatlan gráf

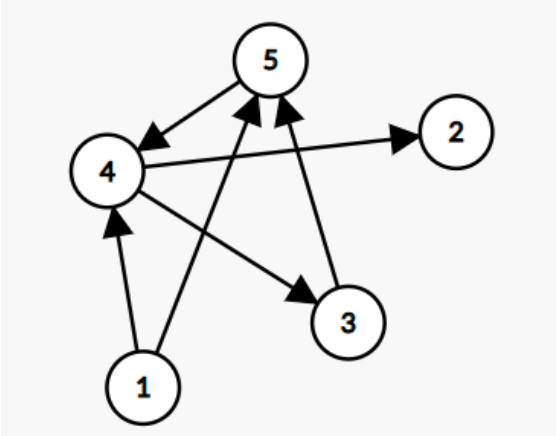
A $G = (V, E)$ gráf irányítatlan, ha tetszőleges $(u, v) \in E$ élre $(u, v) = (v, u)$. Azaz, ha (u, v) él létezik, akkor (v, u) él is létezik, és mindkettőt ábrázolni kell. Az irányítatlan gráfokat szimmetrikus kapcsolatok leírására használhatjuk.

(Az irányítatlan gráfok elképzelhetők speciális irányított gráfokként, ha mindkét élét oda és vissza mutató irányított éllel helyettesítjük. Ezzel az átírással irányított gráfokra megfogalmazott feladatok és algoritmusok értelmezhetők/használhatók irányítatlan gráfokra is.)



Irányított gráf

A $G = (V, E)$ gráf irányított, ha tetszőleges $(u, v), (v, u) \in E$ élpárra $(u, v) \neq (v, u)$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az (u, v) él fordítottja a (v, u) él, és viszont. Az élek E halmazában levő csúcspárok rendezettek. Az irányított gráfokat nem szimmetrikus kapcsolatok leírására használhatjuk.



(Az irányított gráfok is tekinthetők irányítatlannak úgy, hogy elfeledkezünk az élek irányításról. Ekkor nem teszünk különbséget az (u, v) és (v, u) él között.)

Út

A $G = (V, E)$ gráf csúcsainak (V) egy $\langle u_0, u_1, \ldots u_i \rangle$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozata a gráf egy útja, ha tetszőleges $i \in 1..n$-re $(u_{i-1}, u_i) \in E$. Ezek az (u_{i-1}, u_i) élek az út élei. Az **út hossza** ilyenkor n, azaz az utat alkotó élek számával egyenlő.

Tetszőleges $\langle u_0, u_1, \ldots u_i \rangle$ út rész-útja $0 \leq i \leq j \leq n$ esetén az $\langle u_i, u_{i+1}, \ldots u_j \rangle$ út.

Kör

A kör olyan út, aminek kezdő és végpontja (csúcsa) azonos, a hossza > 0, és az élei páronként különbözőek. Az egyszerű kör olyan kör, aminek csak a kezdő és a végpontja azonos. Tetszőleges út akkor tartalmaz kört, ha van olyan részútja, ami kör.

Ritka gráf

Egy gráf ritka gráf, ha $|E|$ sokkal kisebb, mint $|V|^2$.

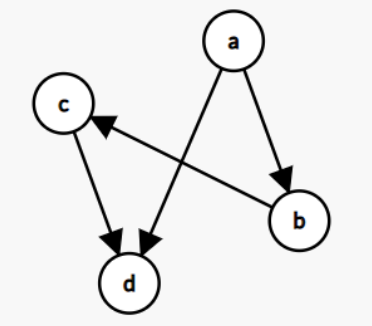
Sűrű gráf

Egy gráf sűrű gráf, ha $|E|$ megközelíti $|V|^2$-et.

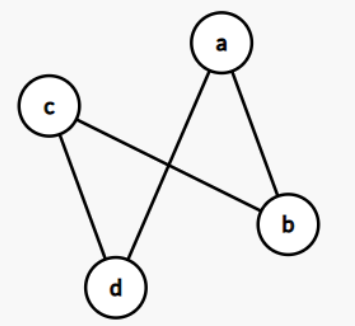
Két módszert szokás használni $G = (V, E)$ gráf ábrázolására a szöveges vagy rajzzal történő ábrázolás mellett. A gráfot megadhatjuk szomszédossági csúcsmátrixszal és szomszédossági éllistával. Leggyakrabban az éllistás ábrázolást használják, mert ezzel a **ritka gráfok** tömören ábrázolhatók. A csúcsmátrixos ábrázolás viszont előnyösebb sűrű gráfok esetén, vagy akkor, ha gyorsan kell eldönteni, hogy két csúcsot összeköt-e él.

Grafikus ábrázolás, szöveges ábrázolás

A grafikus ábrázolás a gráfok legismertebb ábrázolási módja. A csúcsokat kis körök jelölik, az éleket irányított gráfoknál a körök közti nyilak, irányítatlan esetben a köröket összekötő vonalak reprezentálják. A csúcsok sorszámát (illetve az azt reprezentáló betűt) általában a körökbe írjuk.



a → b; d
b → c
c → d



a – b; d
b – a; c
c – b; d
d – a; d

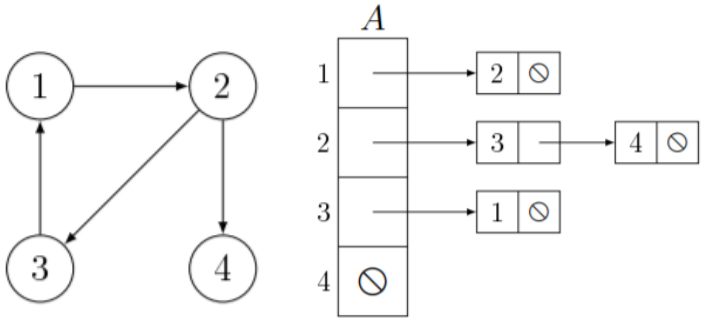
Szomszédossági listás ábrázolás

Az ábrázoláshoz egy tömböt használunk. Ez a tömb $|V|$ darab listából áll, és a tömbben minden csúcshoz egy lista tartozik.

Minden u csúcs esetén a tömbben az ahhoz tartozó szomszédossági lista tartalmazza az összes v olyan csúcsot, amelyre létezik $(u,v) \in E$ él. Azaz a lista elemei u csúcs G-beli szomszédjai. A szomszédossági listákban a csúcsok sorrendje általában tetszőleges. Irányítatlan és irányított gráfok esetén is alkalmazhatjuk ezt az ábrázolást. Az ábrázoláshoz szükséges tárterület $\Theta(V+E)$ mindkét esetben.

Ha G irányított gráf, akkor a szomszédsági listák hosszainak összege $|E|$, ugyanis egy (u,v) élt úgy ábrázolunk, hogy v-t felvesszük a megfelelő listába.

Ha G irányítatlan gráf, akkor a szomszédsági listák hosszainak összege $2|E|$, mivel (u,v) irányítatlan él ábrázolása során u-t betesszük v szomszédsági listájába, és fordítva.

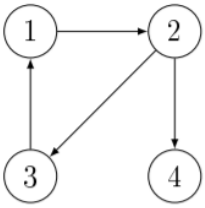


Szomszédossági mátrixos (csúcsmátrixos) ábrázolás

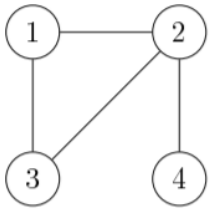
Feltesszük, hogy a csúcsokat tetszőleges módon megszámozzuk az 1, 2, … , $|V|$ értékekkel. A gráf ábrázolásához használt $A = (a_{ij})$ csúcsmátrix $|V| \times |V|$ méretű, és

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & ha\ (i,j) \in E \\ 0, & különben. \end{cases}$$

Irányítatlan gráf esetén (u, v) és (v, u) ugyanaz az él, így a gráfhoz tartozó A csúcsmátrix megegyezik önmaga transzponáltjával. Így a mátrix szimmetrikus a főátlójára. Ebben az esetben tárolhatjuk a csúcsmátrixból csak a főátlóban és efölött szereplő elemeket, ezzel majdnem a felére csökkenthetjük a szükséges tárhelyet.



A	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	0
4	0	0	0	0



A	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	1
3	1	1	0	0
4	0	1	0	0

Szélességi gráfkeresés

A szélességi keresés az egyik legegyszerűbb gráfbejáró algoritmus, és ezen alapul sok fontos gráfalgoritmus.

Adott $G = (V, E)$ irányított vagy irányítatlan gráf és egy kitüntetett s **kezdő csúcs** esetén a szélességi keresés módszeresen megvizsgálja G éleit, és így megtalálja az összes s-ből elérhető csúcsot. Emellett kiszámítja az elérhető csúcsok távolságát s-től (legkevesebb él). Létrehoz egy s gyökerű **szélességi fát**, amely tartalmazza az összes elérhető csúcsot. Bármely s-ből elérhető v csúcsra, A szélességi fában s-ből v-be vezető út a legrövidebb s-ből v-be vezető útnak felel meg G-ben (bármely s-ből elérhető v csúcsra). Legrövidebb útnak most a legkevesebb élből álló utat nevezzük.

Az algoritmus eljut az összes olyan csúcsba, amely s-től k távolságra van, mielőtt egy $k + 1$ távolságra levő csúcsot elérne.

Az algoritmus a csúcsok színezésével tartja számon a bejárás pillanatnyi állapotát.

- Kezdetben minden csúcs **fehér**,
- majd az elért csúcsokat **szürkére**,
- aztán **feketére** színezzük.

Egy csúcs akkor válik elértté, amikor először rátalálunk a keresés során, ezután a színe nem lehet fehér. A szürke és fekete csúcsokat is megkülönbözteti az algoritmus, hogy a keresés jellege szélességi maradjon.

Ha $(u,v) \in E$, és u fekete, akkor v fekete vagy szürke lehet. Tehát egy fekete csúcs összes szomszédja elért csúcs. A szürke csúcsoknak lehetnek fehér szomszédjaik. Ezek alkotják az elért és a még felfedezetlen csúcsok közötti határt.

A szélességi keresés létrehoz egy **szélességi fát**, amely kezdetben csak a gyökeret tartalmazza, ami s kezdő csúcs.

- Ha egy fehér v csúcsot elérünk egy már elért u csúcshoz tartozó szomszédsági lista vizsgálata során, akkor a fát kiegészítjük a v csúccsal és az (u, v) éllel.
    - Azt mondjuk, hogy a szélességi fában u a v csúcs elődje vagy szülője.
- Egy csúcsot legfeljebb egyszer érhetünk el, így legfeljebb egy szülője lehet. Az ős és leszármazott relációkat, a szokásos módon, az s gyökérhez viszonyítva definiáljuk: ha u az s-ből v-be vezető úton helyezkedik el a fában, akkor u a v őse és v az u leszármazottja. Az előd részgráf ebben az esetben egy fa.

Mélységi gráfbejárás (DFS: *Depth-first Search*)

Az algoritmus célja keresés a gráfban a lehető legmélyebben. Leginkább általános fák preorder bejárásához hasonlít. Csak egyszerű irányított gráfokra értelmezzük.

A keresés menete:

- A keresés során az utoljára elért, új kivezető élekkel rendelkező v csúcsból kivezető, még nem vizsgált éleket derítjük fel.
- Ha a v-hez tartozó összes élt megvizsgáltuk, akkor a keresés visszalép, és megvizsgálja annak a csúcsnak a kivezető éleit, amelyből v-t elértük.
    - Ezt addig folytatja, amíg el nem éri az összes csúcsot, amely elérhető az eredeti kezdő csúcsból.
- Ha marad érintetlen csúcs, akkor ezek közül valamelyiket kiválasztjuk, mint új kezdőcsúcsot, és az eljárást ebből kiindulva megismételjük.
    - Ezt egészen addig folytatjuk, amíg az összes csúcsot el nem érjük.

Az **előd részgráf** több fából is állhat, mivel a keresést többször hajthatjuk végre különböző kezdőcsúcsokból kiindulva.

Előd részgráf:

$G_\pi = (V, E_\pi)$, ahol

$$E_\pi = \{(\pi[v], v) : v \in V \text{ és } \pi[v] \neq \text{nil}\}.$$

Az előd részgráf egy **mélységi erdő**, amely több **mélységi fát** tartalmaz. E_π éleit **fa élek**nek nevezzük.

A csúcsok állapotait ebben az esetben is színekkel különböztetjük meg. Kezdetben minden csúcs **fehér**, amikor *elérünk* egy csúcsot, akkor **szürkére** színezzük azt, és ha *elhagytuk*, akkor **fekete** színű lesz (akkor, amikor a szomszédsági listájának minden elemét megvizsgáltuk). Ez biztosítja, hogy minden csúcs pontosan egy mélységi fában legyen benne, így ezek a fák diszjunktak legyenek.

A mélységi keresés minden csúcshoz **időpontot** rendel. Minden v csúcshoz két időpont tartozik:

- $d[v]$ kezdési időpont (discovery time), ezt akkor rögzítjük, amikor v-t elérjük (és szürkére színezzük);
- $f[v]$ befejezési időpont (finishing time), ezt akkor jegyezzük fel, amikor befejezzük v szomszédsági listájának vizsgálatát (és v-t befeketítjük).

A keresés eredményét befolyásolja, hogy milyen sorrendben vizsgáljuk meg az aktuális csúcsot követő csúcsokat, de alapvetően ekvivalens eredményeket kapunk. Az algoritmus költsége $\Theta(V+E)$.

Élek osztályzása

Mélységi keresés segítségével a gráf éleit osztályokba sorolhatjuk.

Négy éltípust különböztethetünk meg G_π mélységi erdő segítségével, amelyet a $G_\pi = (V, E_\pi)$ gráf mélységi keresése során kaptunk.

- **Fa élek** (*tree edge*) a G_π mélységi erdő élei.
  - Az (u, v) él fa él, ha v-t az (u, v) él vizsgálata során értük el először. A fa élek mentén járjuk be a gráfot.
- **Visszamutató él** (*back edge*) (u, v) él, ha v őse u-nak egy mélységi fában.
  - A hurokéleket, amelyek előfordulhatnak irányított gráfokban, visszamutató éleknek tekintjük.
- **Előremutató él** (*forward edge*) az (u, v) él, ha v leszármazottja u-nak egy mélységi fában, és (u, v) nem éle a mélységi fának.
- **Kereszt él** (*cross edge*) az összes többi él.
  - Ezek ugyanazon mélységi fa csúcsait köthetik össze, ha azok közül egyik sem őse a másiknak, illetve végpontjaik különböző mélységi fákhoz tartozó csúcsok lehetnek.

Egy irányított gráf akkor és csak akkor körmentes, ha a mélységi keresés során nem találunk visszamutató éleket.

DFS irányítatlan gráfokra

Az élek a bejárás során irányítást kapnak. A bejárás során csak fa él és visszamutató él lesz a gráfban.

A visszamutató éleken keresztül megtaláljuk az irányítatlan gráfban is az irányítatlan köröket.

Az algoritmus hasznos, ha **kört keresünk** a gráfban, és ha a **komponenseket** szeretnénk meghatározni. Annyi komponensből áll a gráf, ahány mélységi fa keletkezik a bejárás során.

Az (u, v) él feldolgozásakor:

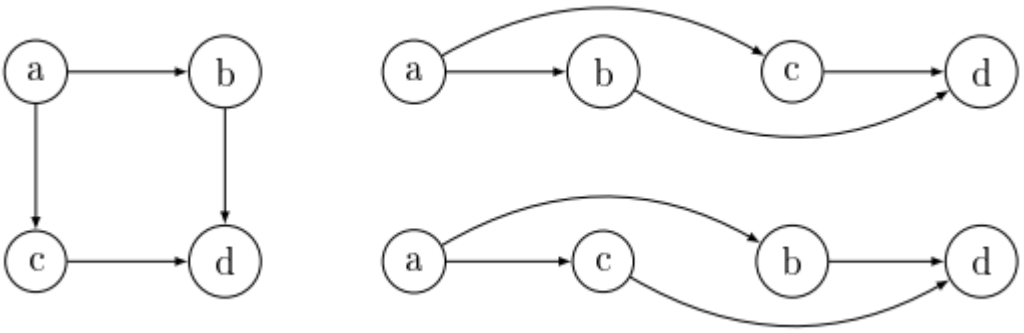
- v fehér → (u, v) fa él
- v szürke → (u, v) visszamutató él
- v fekete ($\pi[u] = v$) → (u, v) fa él

Dag gráfok

A G irányított gráf akkor DAG (*Directed Acyclic Graph* = körmentes irányított gráf), ha nem tartalmaz irányított kört, vagyis a mélységi keresés során nem találunk benne visszaélt.

Topologikus rendezés

Irányított gráf **topologikus rendezése** alatt a gráf csúcsainak olyan sorba rendezését értjük, amelyben minden él egy-egy később jövő csúcsba (szemléletesen: balról jobbra) mutat.



Tetszőleges DAG-ra a topologikus rendezés befokokkal:

1. Határozzuk meg a csúcsok befokait (hány él vezet beléjük).
2. Kiválasztunk egy csúcsot, aminek a befoka 0, majd rakjuk be a rendezésbe.
    - Ilyen csúcsot mindig tudunk találni, ha a gráf DAG
3. Töröljük a kiválasztott csúcsot, az éleivel együtt. Csökkentsük ennek alapján a többi csúcs befokát.
4. Térjünk vissza a 2. lépésre, és folytassuk ugyanígy, amíg el nem fogynak a csúcsok.

Az elején határozzuk meg a befokokat (pl. egy segédtömbbe) és csak a 0 befokú csúcsokat gyűjtsük egy sorba (Queue). Járjuk végig ezt a sort. Az aktuálisan feldolgozott csúcsra vegyük az összes kimenő élét, a cél-csúcsok tárolt befokait csökkentsük, de se csúcsot, se élt ne töröljünk sehonnan. Ha ilyenkor egy befok eléri a 0-t, a hozzá tartozó csúcsot rakjuk a sorba. És így tovább, míg el nem fogy.

Az algoritmus fontos része a körfigyelés. Ez annyit jelent, hogy amikor végeztünk az algoritmussal, akkor nézzük meg, hogy bejártunk-e minden csúcsot, azaz üres lett-e a sor. Ha marad csúcs, akkor azok vagy részei egy körnek, vagy egy őse része egy körnek.

Tetszőleges DAG-ra a topologikus rendezés DFS segítségével:

Futtassuk le a mélységi bejárást a gráfon, közben a tanult módon figyeljük a visszaéleket, hogy eldönthessük, DAG-e (létezik-e topologikus sorrendje).

A következő egyszerű algoritmus topologikusan rendez irányított, körmentes gráfokat:

```
Topologikus_rendezés(G)
1  Mélységi bejárás hívása G gráfra
2  minden csúcsra meghatározzuk f(v) befejezési időt
3  a csúcsok elhagyásakor szúrjuk be azokat egy láncolt lista elejére
4  return a csúcsok láncolt listája
```

Tehát egy lehetséges topologikus rendezést kapunk, ha a DFS-sel kapott befejezési időpontok szerinti csökkenő sorrendben felsoroljuk a csúcsokat.

A topologikus rendezés elvégezhető $\Theta(V + E)$ időben, hiszen a mélységi bejárás ideje $\Theta(V + E)$, és a $|V|$ csúcs mindegyike $O(1)$ idő alatt beszúrható a láncolt lista elejére.

Erősen összefüggő komponensek

A mélységi bejárás egy másik klasszikus alkalmazása egy irányított gráf erősen összefüggő komponenseinek meghatározása.

Minimális feszítőfák (*Minimal Spanning Trees*)

Egy irányítatlan $G = (V, E)$ gráf minden (u, v) éle rendelkezik egy $w(u, v)$ súllyal, ami az u és v élek összekötésének költségét adja meg. A cél megtalálni azt a $T \subseteq E$ részhalmazt, aminek segítségével az összes csúcs összekapcsolható, és amelynek a

$$w(T) = \sum_{(u,v)\in T} w(u, v)$$

teljes súlya a lehető legkisebb.

A körmentes és minden csúcspontot összekapcsoló T egy fa, amelyik „kifeszíti" G gráfot. A T fa meghatározásának problémáját minimális feszítőfa problémának hívjuk.

A minimális feszítőfa meghatározására szolgáló alább vázolt algoritmusok **mohó algoritmusok** közé tartoznak. Általában egy algoritmus minden lépésben több lehetőség közül választ. A mohó stratégia ezek közül azt részesíti előnyben, amelyik az adott pillanatban a legjobbnak látszik. Az optimális megoldás megtalálását ez a stratégia általában nem garantálja. A minimális feszítőfa problémánál azonban bebizonyítható, hogy bizonyos mohó stratégiák minimális súlyú feszítőfához vezetnek.

Általános minimális feszítőfa algoritmus

Ez az algoritmus fokozatosan, újabb és újabb élek hozzáadásával állítja elő a feszítőfát. Egy minimális feszítőfát szeretnénk találni egy összefüggő, irányítatlan, $w : E \to R$ súlyfüggvénnyel élsúlyozott $G = (V, E)$ gráfban.

Az algoritmus az éleknek azt az A-val jelölt halmazát kezeli, amire a következő invariáns állítás teljesül:

> Az iterációk előtt A valamelyik minimális feszítőfának a részhalmaza.

Az algoritmus minden lépésben azt az (u, v) élt határozza meg, amelyiket az A-hoz téve, továbbra is fennáll az előbbi állítás, miszerint $A \cup \{(u, v)\}$ is egy részhalmaza az egyik minimális feszítőfának. Egy ilyen élt A-ra nézve **biztonságos élnek** hívunk, mivel A-hoz történő hozzávétele biztosan nem rontja el az A-ra vonatkozó invariáns állítást.

Az algoritmus lépései

1. Létrehozzuk A-t üres halmazként.
2. Amíg A nem feszítőfa, addig keresünk A-ra nézve egy biztonságos (u, v) élt, és hozzáadjuk A-hoz.
3. Végül A egy minimális feszítőfa lesz.

Kruskal algoritmus

Ebben az esetben A halmaz egy erdő. Az A-hoz hozzáadott biztonságos él mindig az erdő két különböző komponensét összekötő legkisebb súlyú él.

Az algoritmus minden lépésben megkeresi a $G_A = (V, E)$ erdő két tetszőleges komponensét összekötő élek közül a legkisebb súlyú (u, v) élt, és ezt veszi hozzá az egyre bővülő erdőhöz.

Legyen az erdő két fája C_1 és C_2, amit az (u, v) él összeköt. Mivel az (u, v) él a legkisebb súlyú olyan él is, amelyik C_1-et valamelyik másik komponenssel is összeköti, így (u, v) biztosan biztonságos él C_1-re nézve.

Az algoritmus mivel mohó algoritmus, így minden lépésben a lehetséges legkisebb súlyú élt adja hozzá az erdőhöz.

Az algoritmus lépései

1. A halmaz üres kezdőértéket kap, és létrejön a gráf csúcsait külön-külön tartalmazó $|V|$ darab fa.
2. Egy ciklussal megyünk, amíg van feldolgozatlan él. Kivesszük a következő legkisebb súlyú élt.
3. Minden így kapott (u, v) élre meg kell vizsgálni, hogy a végpontjaik ugyanahhoz a fához tartoznak-e.
    a. Ha igen, akkor nem kell az éllel foglalkozni (az erdőben kör alakulna ki).
    b. Ha nem, akkor (u, v) élt hozzá kell venni A-hoz, és a két fa csúcsait összevonjuk. (Ebben az esetben a két csúcs különböző fákhoz tartozott.)

Az algoritmus teljes költsége $\boldsymbol{O}(E * logE)$.

Prim algoritmus

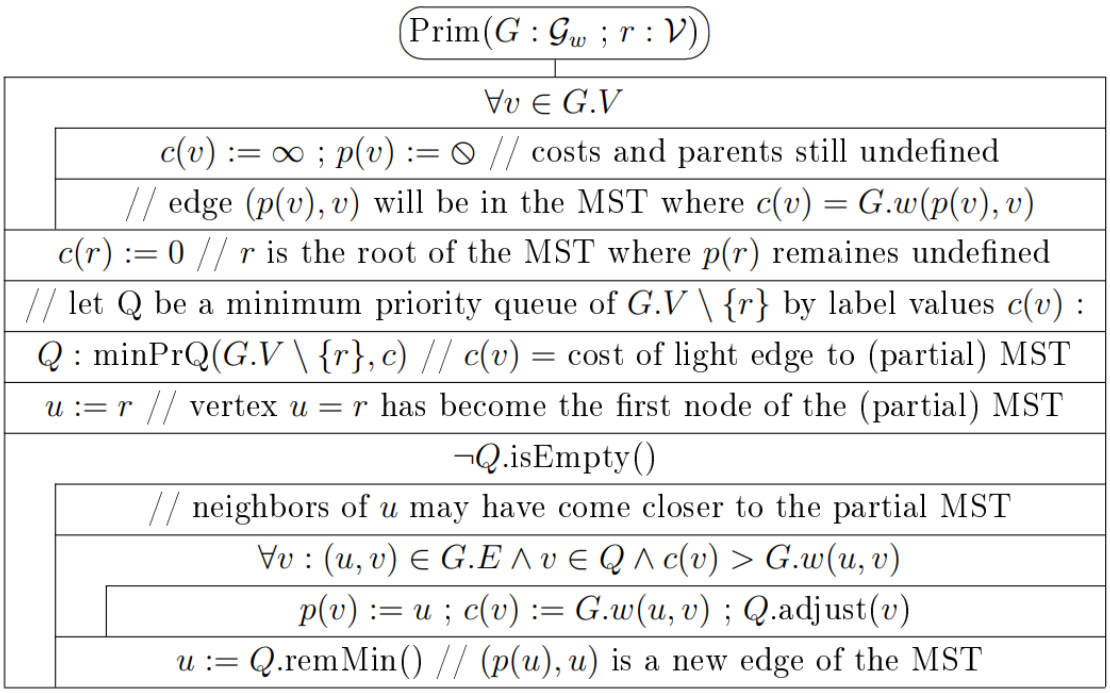
Az A halmaz egyetlen fa. Az A-hoz hozzáadott **biztonságos él** mindig a legkisebb súlyú olyan él, amelyik egy A-beli és egy A-n kívüli csúcsot köt össze. Mivel mohó algoritmus, így minden lépésben olyan éllel bővíti a fát, amely a lehető legkisebb mértékben növeli a fa teljes súlyát.

Az A fa építése egy tetszőlegesen kiválasztott gyökérpontból indul, és addig növekszik, amíg a V összes csúcsa bele nem kerül. Minden lépésben azt a **könnyű élt** vesszük hozzá az A fához, amelyik egy A-beli csúcsot köt össze a $G_A = (V, E)$ egy izolált csúcsával. Ez biztonságos élt ad A-ra nézve. Az algoritmus befejezésekor az A-beli élek minimális feszítőfát alkotnak.

Az algoritmus hatékony megvalósításának kulcsa az A-hoz hozzáadandó él ügyes kiválasztása. Tároljuk el az A fához hozzáadott éleket egy minimum prioritásos sorban, nevezzük ezt *minQ*-nak. Azt mondhatjuk, hogy a mindenkori vágás a *minQ* és a $V \setminus minQ$ elemei között történik (legalábbis az első kör után, amikor már nem üres az egyik halmaz), azaz a már lezárt csúcshalmaz egyre terjeszkedik. Mindig a frissen a *minQ*-ból kikerült elemet a többire rávezető él lesz a könnyű, azaz a hozzáveendő.

A **vágás** a gráf csúcsainak két nemüres részhalmazra való bontása, osztályozása. Minden csúcs pontosan az egyikbe kerül.

Nem akkor történik a könnyű él hozzáadása szabály alkalmazása, amikor frissítjük egy csúcs (d, π) párját, hanem amikor jóváhagyjuk egy csúcs (d, π) értékeit, amikor kivesszük azt a *minQ*-ból.



Az első ciklusban inicializáljuk minden csúcs szülőjét ismeretlenre és költségét végtelenre. Csak a kezdőcsúcs szülője marad NULL, a költsége semelyik csúcsnak sem lesz a végére végtelen.

A következő részben kiválasztjuk a tetszőleges kezdőcsúcsot (ez ingyen a fa része), létrehozunk egy minimum prioritásos sort és inicializáljuk azt, azaz bepakoljuk a kezdőcsúcsot 0-s és az összes többit ∞ prioritási értékkel.

A második ciklus során a kezdetben n elemű *minQ*-ból mindig az aktuálisan legolcsóbb csúcsot kivéve csúcsról csúcsra feldolgozzuk a gráfot. Végig nézzük az adott csúcs kimenő éleit, és ha úgy tűnik, ebből a csúcsból olcsóbb úton tudunk eljutni egy még nem véglegesített/nem látogatott másik csúcsba, akkor azt frissítjük. Ilyenkor az új prioritások mentén a sort is újra kellhet rendezni.

Legrövidebb utak egy forrásból

Dijkstra algoritmus

Legrövidebb utak egy forrásból DAG esetén

Sor alapú Bellman-Ford algoritmus

Legrövidebb utak minden csúcspárra

Floyd-Warshall algoritmus

Gráf tranzitív lezártja

Warshall algoritmus

Mintaillesztés

A mintaillesztési probléma a következőképpen fogalmazható meg: tegyük fel, hogy a szöveget egy n hosszú $T[1..n]$ tömb tartalmazza, a mintát pedig egy m hosszú $P[1..m]$ tömbben tároljuk, és $1 \leq m \leq n$. Mindkét tömb elemei a Σ véges ábécé jelei.

P minta előfordul s eltolással a T szövegben akkor, ha P minta a T szöveg $(s+1)$-edik pozíciójára illeszkedik, vagyis, ha $0 \leq s \leq n-m$ és $T[s+1..s+m] = P[1..m]$. Ekkor s-t érvényes eltolásnak nevezzük.

A mintaillesztési probléma megoldásakor egy adott P minta összesérvényes eltolását kell megtalálnunk a T szövegben.

Mindegyik algoritmus első lépésben valamilyen módon feldolgozza a mintát, és ezután találja meg az érvényes eltolásokat. Az első lépést **előfeldolgozásnak**, a másodikat **illesztésnek** nevezzük. Ezek idejének összegeként fogjuk megkapni a teljes futási időt.

Az érvényes eltolások halmaza S.

Egyszerű mintaillesztő algoritmus (*Brute force*)

Ennek alapötlete az, hogy a mintát toljuk végig a szövegen, és balról jobbra ellenőrizzük, hogy a minta karakterei megegyeznek-e a szöveg lefedett karaktereivel. Ha nem egyeznek meg a karakterek, akkor eggyel arrébb toljuk a mintát, és ott végezzük el újra az ellenőrzést.

Egy ciklusban vizsgáljuk a $T[s+1..s+m] = P[1..m]$ feltétel teljesülését az összes, $(n-m+1)$ darab lehetséges s értékre.

A futási idő $\boldsymbol{O}((n-m+1)*m)$, a legrosszabb futási idő pedig $\boldsymbol{\Theta}((n-m+1)*m)$.

A futási idő megegyezik az illesztési idővel, mert nincsen előfeldolgozás. Ez a módszer nem biztosít hatékony megoldást a problémára, ugyanis új s értékekkor figyelmen kívül hagyja a szövegre vonatkozó ismereteket, amiket a korábbi lehetséges s értékek kipróbálásakor szerzett.

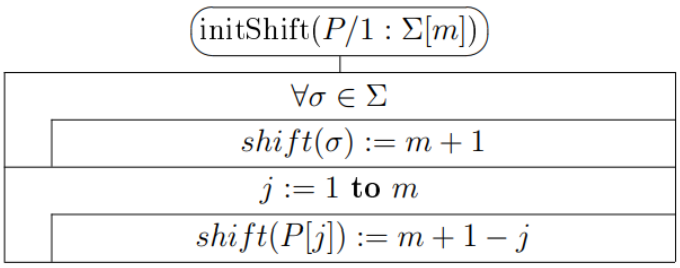
Quick-Search

Az alapötlet az, hogy ha elromlik az illeszkedés, akkor nézzük a szövegben a minta utáni karaktert, és úgy toljuk el a mintát, hogy illeszkedjen a szöveg ezen karakteréhez. Ha a mintában nem szerepel ez a karakter, akkor átugorjuk a mintával. Az új vizsgálatot mindig a minta elejéről nézzük.

A mintával való „**ugrás**” végrehajtásához bevezetjük a **shift függvényt**.

Shift függvény

A shift függvény az ABC minden betűjére megadja az "ugrás" nagyságát, amelyet akkor tehetünk, ha az illeszkedés elromlása esetén az illető betű lenne a szöveg minta utáni első karaktere.



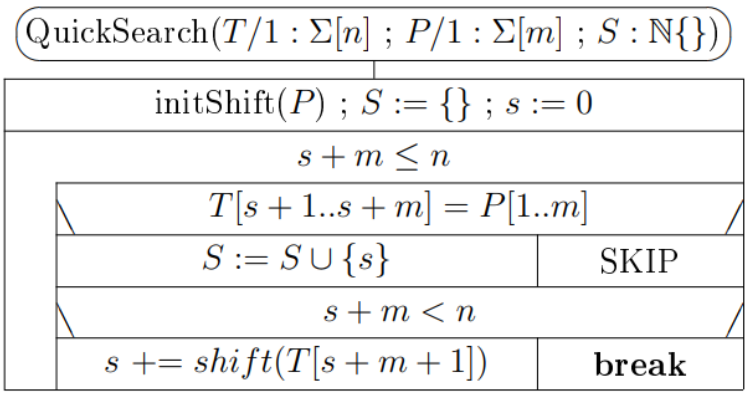
Az alapértelmezett eltolás minden betűre a minta hossza + 1.

Általános shift érték az adott betűhöz a minta hossza + 1 – j index.

Az **initShift** műveletigénye: $\Theta(d)+\Theta(m) \in \Theta(m)$

(d: az ábécé elemszáma, konstans).

- **legjobb eset:** $mÖ(n,m) \in \Theta(n/(m+1))$
  - (A minta első karakterénél már elromlik az illeszkedés, továbbá a minta utáni karakter sem fordul elő a mintában, így azt „átugorjuk”.)
- **legrosszabb eset:** $MÖ(n) \in \Theta(n*m)$
  - ($m<<n$ esetén; a minta végén romlik el az illeszkedés, így kicsi az „ugrás”.)



A szövegben „ugrálunk”, ezért az olyan adatszerkezeteknél ahol nem megengedett az indexelés, szükség van buffer használatára.

Knuth-Morris-Pratt (KMP) algoritmus

Ez az algoritmus egy lineáris idejű mintaillesztő algoritmus.

Ennél az algoritmusnál nem szükséges minden esetben a minta elejéről kezdeni az illeszkedést. Előfeldolgozással el tudjuk dönteni, hogy honnan kezdjük az illeszkedés vizsgálatát.

Ha a mintával akkorát ugrunk, hogy a minta kezdőszelete (**prefixe**) egy valódi végszeletnél (**szuffix**) kezdődjön, azaz a prefix a szuffixel kerüljön fedésbe, a prefixet már nem kell újra vizsgálni.

Előfeldolgozás

Az előfeldolgozás során definiálunk egy **next függvényt**, amely megadja a minta egyes kezdőrészleteire a leghosszabb egymással egyező prefix-szuffix párok hosszát. Ezt felhasználva tudjuk megadni a mintával való „ugrás” mértékét.

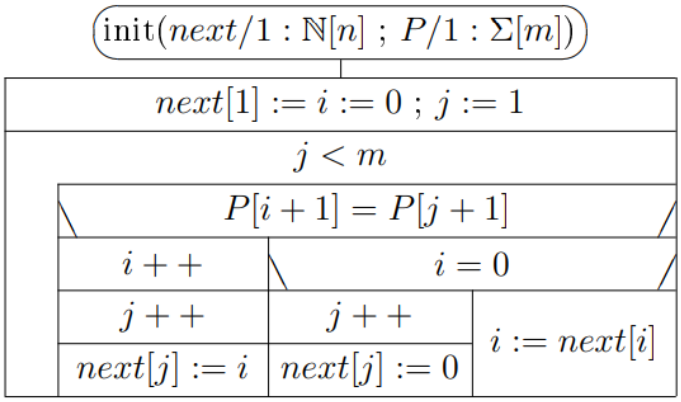
Megadja, hogy hogyan illeszkedik a minta önmaga eltoltjaira, így elkerülhetjük, hogy kizárható eltolási értékeket vizsgáljunk az illesztés során.

A next(j) a leghosszabb olyan P-beli prefix hossza, amely valódi szuffixe P_j-nek.

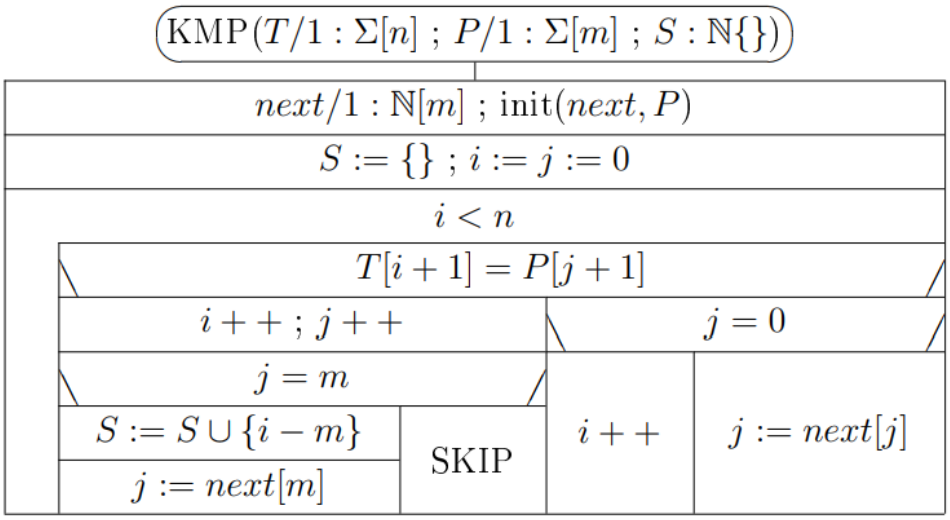
A next függvényt $\Theta(m)$ idő alatt számítjuk ki.

A next függvény alapvető tulajdonságai:

1. next(j) ∈ 0..(j-1) (j ∈ 1..m)
2. next(j+1) ≤ next(j)+1 (j ∈ 1..m-1)
3. $P_{h+1} \sqsupset T_{j+1} \Leftrightarrow P_h \sqsupset T_j \wedge P[h+1]=T[j+1]$
4. $0 \le h < j \le m$ és $P_j \sqsupset T_i$ esetén $P_h \sqsupset T_i \Leftrightarrow P_h \sqsupset P_j$
5. $\max_{l+1} H(j) = \text{next}(\max_l H(j))$ ($j \in 1..m, l \in 1..|H(j)|-1$)



Az algoritmus előnye az, hogy a szövegben nem kell visszaugrani. Ennek jelentősége például szekvenciális sorozat/fájl formában adott szövegnél van, mivel ekkor buffer használata nélkül is tudjuk alkalmazni a KMP algoritmust.



Az init műveletigénye $\Theta(m)$. (Ahol m a minta hossza.)

Tegyük fel, hogy $m \leq n$, ekkor a KMP műveletigénye legjobb és legrosszabb esetben is $\Theta(n)$.

($T \in \Omega(n)$, mivel i növekedni egyesével tud, és n-ig nő $\Longrightarrow$ biztos van n lefutás

$T \in O(n)$ o $\leq j \leq i \leq n$, mivel a fő ciklus maximum $2n$-szer fut le.)

Irodalomjegyzék

THOMAS H. CORMEN, CHARLES E. LEISERSON, RONALD L. RIVEST, CLIFFORD STEIN: Új algoritmusok, 2003

IVANYOS GÁBOR, RÓNYAI LAJOS, SZABÓ RÉKA: Algoritmusok

NAGY ÁDÁM: Algoritmusok és adatszerkezetek II. gyakorlati segédlet - Tömörítés

CSci 340: B+-trees

SZITA B. : Minimális költségű feszítőfák