Diszkrét matematika 1

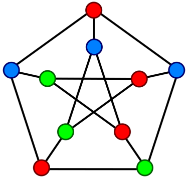
Gráfok

Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2025 tavasz

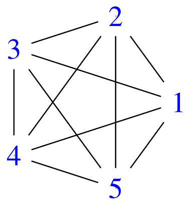
Gráfok



Kézfogás-szabály

Tétel

Minden $G = (V, E)$ gráfra $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

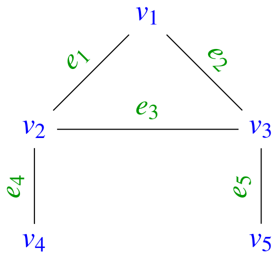


2. Bizonyítás.
Indukció $|E|$ szerint.

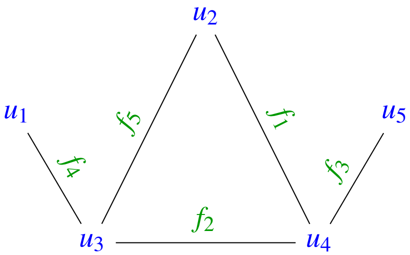
- $|E| = 0$ esetén az állítás igaz (üres gráf).
- Thf $|E| \leq k$ esetén igaz az állítás.
- $|E| = k + 1$ esete: a gráfot úgy kapjuk, hogy egy k élszámú gráfba egy új élet behúzunk.
- Ekkor a jobb oldal kettővel nő ($2(|E| - 1) \rightsquigarrow 2|E|$).
- Ekkor a bal oldal is kettővel nő (új élre illeszkedő két v_1, v_2 fokszáma eggyel-eggyel nő). $\square$

Gráfok izomorfiája

Példa



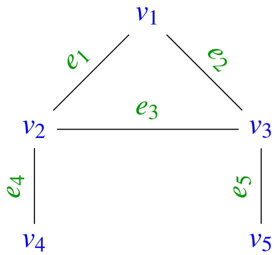
$G = (V, E)$



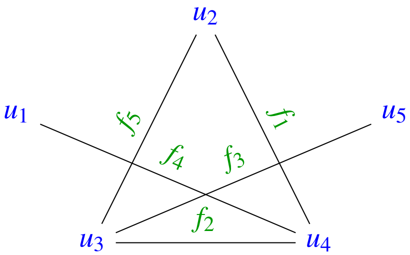
$H = (U, F)$

Gráfok izomorfiája

Példa



$G = (V, E)$

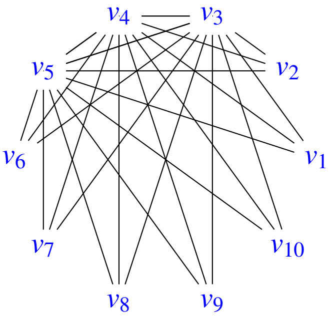


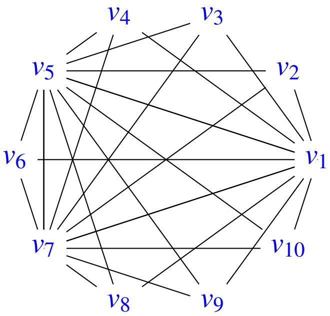
$H = (U, F)$

- Megegyezik-e a G és H gráf? $\implies$ nem, például $V \neq U$, $E \neq F$.
- Azonban G és H lényegében megegyeznek, például összes tulajdonságuk megegyezik $\implies$ G és H izomorfak.

Gráfok izomorfiája

Példa



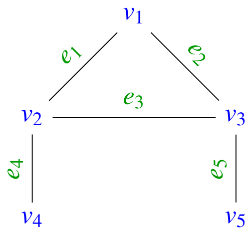


Gráfok izomorfiája

Definíció

Két $G = (V, E)$ és $H = (U, F)$ gráf izomorfak, ha léteznek olyan $f : V \to U$ és $g : E \to F$ bijekciók (egyértelmű hozzárendelések), hogy

$$\forall v \in V \wedge e \in E : \quad v \in e \quad \Longleftrightarrow \quad f(v) \in g(e)$$



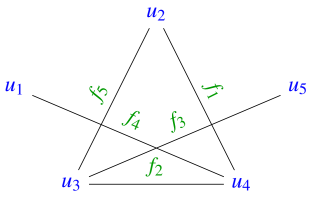
$G = (V, E)$

Példa

v	$f(v)$
v_1	u_2
v_2	u_3
v_3	u_4
v_4	u_5
v_5	u_1

e	$g(e)$
e_1	f_5
e_2	f_1
e_3	f_2
e_4	f_3
e_5	f_4

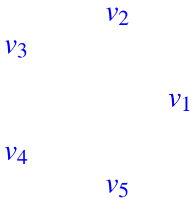
- $v_1 \in e_1 \Longleftrightarrow$
  $u_2 = f(v_1) \in g(e_1) = f_5$
- $v_5 \in e_5 \Longleftrightarrow$
  $u_1 = f(v_5) \in g(e_5) = f_4$



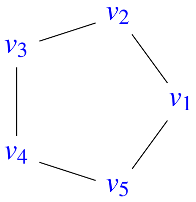
$H = (U, F)$

Speciális gráfok

Üres gráf: $G = (V, E)$, $E = \emptyset$



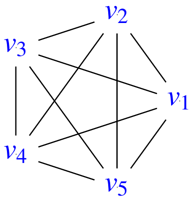
Ciklus: C_n: $|V| = n \geq 3$ csúcson egy kör



C_5

Teljes gráf:

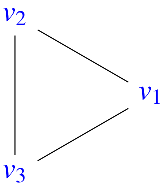
- $G = (V, E)$, $E = \{\{v_1, v_2\} : v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\}$
- K_n: n teljes gráf csúcson
- $K_n = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = \binom{n}{2}$ (Biz.: HF)



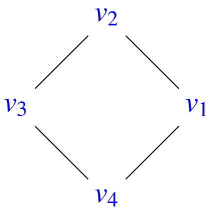
K_5

Speciális gráfok

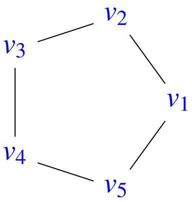
Ciklus



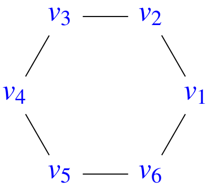
C_3



C_4



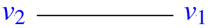
C_5



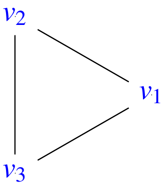
C_6

Teljes gráf

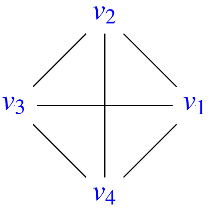
K_1



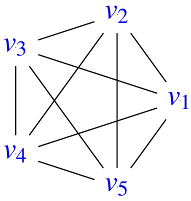
K_2



K_3



K_4



K_5

Részgráf

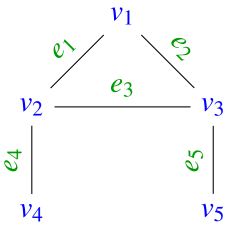
Példa

- Internet gráfja vs magyarországi szerverek gráfja
- Magyarország úthálózata vs Budapest úthálózata
- Budapest úthálózata vs budapesti bicikliutak hálózata

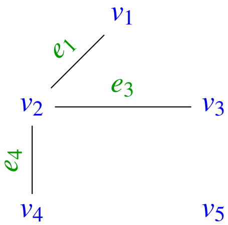
Definíció

Egy $G = (V, E)$ gráfnak a $H = (U, F)$ gráf részgráfja, ha $U \subset V \quad \wedge \quad F \subset E$

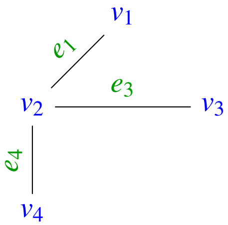
Példa



$G_1 = (V_1, E_1)$



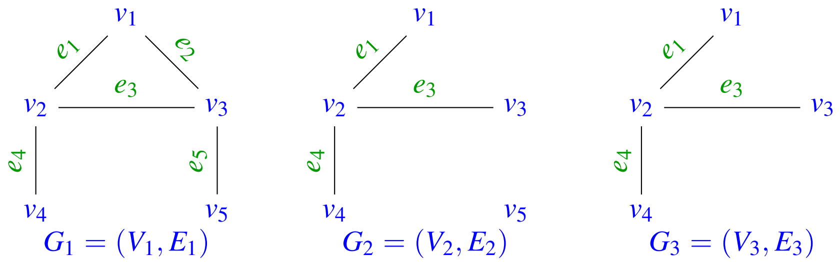
$G_2 = (V_2, E_2)$



$G_3 = (V_3, E_3)$

Részgráf

Példa



G_2 és G_3 részgráfjai G_1-nek, de másképp: G_3-hoz csak a szükséges éleket töröltük.

Definíció

Egy $H = (U, F)$ egy feszített részgráfja $G = (V, E)$-nek, ha

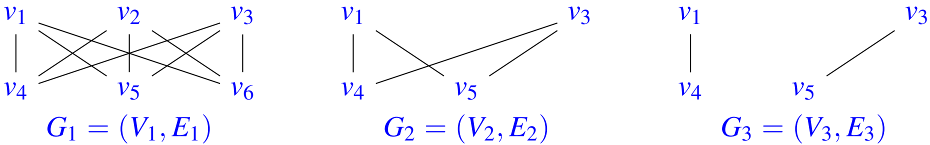
- részgráfja: $U \subset V$, $F \subset E$
- feszített: $u_1, u_2 \in U \wedge \{u_1, u_2\} \in E \quad \Longrightarrow \quad \{u_1, u_2\} \in F$.

Részgráf

Feszített részgráf: Egy $H = (U, F)$ egy feszített részgráfja $G = (V, E)$-nek, ha

- részgráfja: $U \subset V$, $F \subset E$
- feszített: $u_1, u_2 \in U \wedge \{u_1, u_2\} \in E \implies \{u_1, u_2\} \in F$.

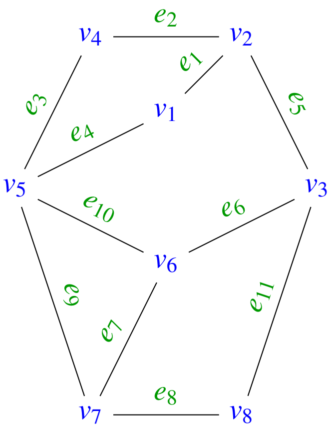
Példa



- G_2, G_3 részgráfjai G_1-nek
- G_2 feszített részgráfja G_1-nek
- G_3 nem feszített részgráfja G_1-nek

Feszített részgráf: éleket csak csúcs eltörlésével hagyhatunk el

Séta, út



Legyen $G = (V, E)$ egy város úthálózatának gráfja.

- Eljuthatunk-e v_1-ből v_8-ba?
- Igen: $v_1, e_1, v_2, e_2, v_4, e_3, v_5, e_4, v_1, e_1, v_2, e_5, v_3, e_6, v_6, e_7, v_7, e_8, v_8$

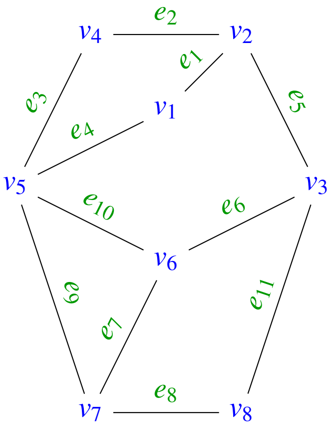
Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Egy $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ sorozatot k-hosszú **sétának** nevezünk, ha

- $v_i \in V$ $(0 \leq i \leq k)$, $e_i \in E$ $(1 \leq i \leq k)$
- $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ $(1 \leq i \leq k)$

Figyelem! A séta nem feltétlenül optimális! Vannak hosszabb és rövidebb séták.

Séta, út



Legyen $G = (V, E)$ egy város úthálózatának gráfja.

- Eljuthatunk-e v_1-ből v_8-ba felesleges körök nélkül?
- Igen: $v_1, e_1, v_2, e_2, v_4, e_3, v_5, e_{10}, v_6, e_6, v_3, e_{11}, v_8$

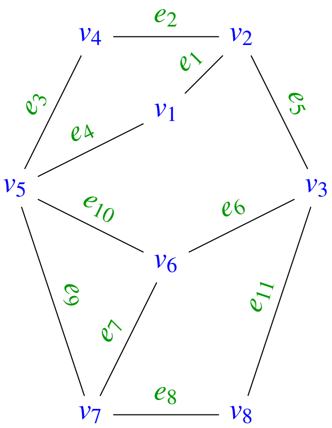
Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Egy $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ sorozatot k-hosszú útnak nevezünk, ha

- ez egy séta
- $v_i \neq v_j$ $(i \neq j)$

Figyelem! Az út nem feltétlenül optimális! Vannak hosszabb és rövidebb útak.

Séta, út, kör



Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $k \geq 3$. Egy $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_0$ sorozatot k-hosszú **körnek** nevezünk, ha

- ez egy (zárt) séta (zárt, azaz: $v_k = v_0$)
- $v_i \neq v_j$ $(i \neq j)$

Példa

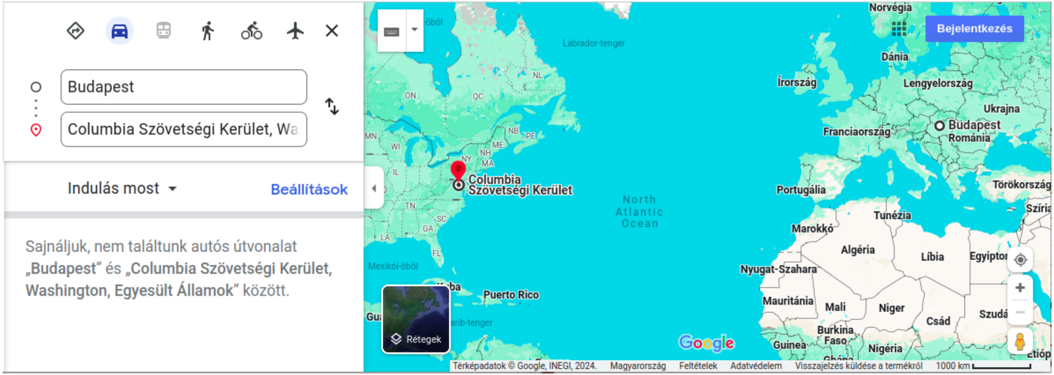
- $v_1, e_1, v_2, e_2, v_4, e_3, v_5, e_4, v_1$ egy 4 hosszú kör

Állítás: Egy nem zárt (azaz $v_0 \neq v_k$) sétából körök elhagyásával utat kapunk.

Bizonyítás. Legyen $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ egy séta. Ha $v_i \neq v_j$, akkor ez egy út. Ha $\exists i < j : v_i = v_j$, akkor a $v_i, e_{i+1}, \ldots, e_j$ részt törölve a sétából egy rövidebb sétát kapunk. Az eljárást ismételve egy utat kapunk. $\square$

Összefüggőség

A világ úthálózata nem összefüggő.



Definíció

Egy $G = (V, E)$ gráf összefüggő, ha $\forall u, v \in V$, $u \neq v$ van u és v között séta.

Összefüggőség

Összefüggő: Egy $G = (V, E)$ gráf $\forall u, v \in V$, $u \neq v$ csúcsa között van séta.

Vezessünk be egy $\sim$ relációt a csúcsok között.

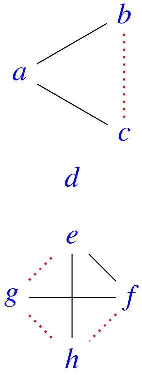
- $u \sim v$, ha van u-ból v-be séta.

Állítás: $\sim$ egy ekvivalencia reláció V-n.

Bizonyítás.

- reflexivitás $v_0 \sim v_0$: v_0 0 hosszú séta
- szimmetria $v_0 \sim v_k$:
  $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k \;\rightarrow\; v_k, e_k, v_{k-1}, \ldots, v_1, e_1, v_0 \;\rightarrow$
  $v_k \sim v_0$
- tranzitivitás: $v_0 \sim v_k$, $v_k \sim v_m \rightarrow v_0$–$v_k$ és v_k–v_m séták konkatenálása $\square$

Komponensek: $\sim$ ekivivalenciareláció által meghatározott osztályok



G gráf és $\sim$ reláció

Összefüggőség

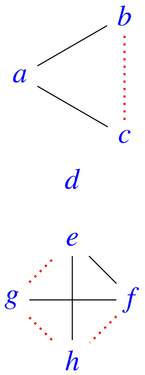
- $\sim$ reláció a csúcsok között: $u \sim v$, ha van u-ból v-be séta.
- $\sim$ egy ekvivalencia reláció V-n
- Komponensek: $\sim$ ekivivalenciareláció által meghatározott osztályok

Példa

- komponensek: $\{a,b,c\}$, $\{d\}$, $\{e,f,g,h\}$ csúcsok által meghatározott feszített részgráf

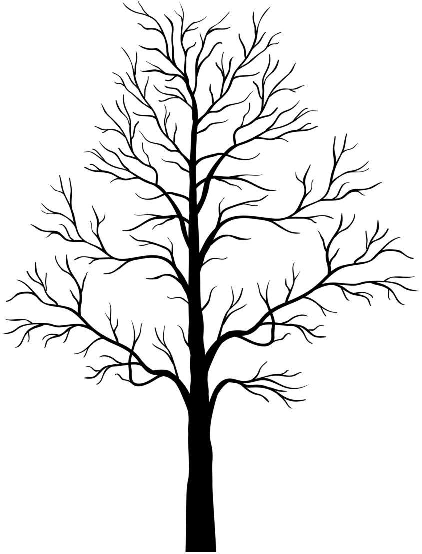
Megjegyzések:

- G összefüggő $\iff$ minden csúcs ugyanabba az osztályba tartozik (azaz egy komponens van)
- Bármely él két végpontja azonos osztályba tartozik (Miért?), így a gráf minden éle hozzátartozik egy komponenshez.



G gráf és $\sim$ reláció

Fák

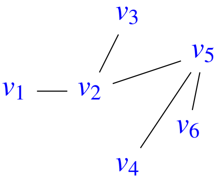


Definíció

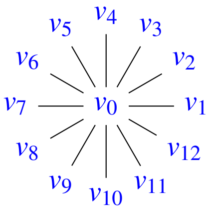
Egy $G = (V, E)$ gráfot fának hívunk, ha

- összefüggő;
- körmentes.

Példa



$G = (V, E)$



C_6

Fák

Tétel

Egy G gráfra a következők ekvivalensek

1. G fa
2. G összefüggő, de bármely él elhagyásával kapott részgráf már nem
3. ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor v-ből v'-be pontosan egy út vezet
4. G-nek nincs köre, de bármely él hozzáadásával kapott gráfban már van.

Azaz a fa élszám tekintetében optimális:

- él elhagyásával több komponensre esik
- él hozzáadásával kör keletkezik

Bizonyítás.
Bizonyítás menete: $1. \implies 2. \implies 3. \implies 4. \implies 1.$