

Felosztássorozatok segítségével adja meg a Riemann-integrálhatóság egy ekvivalens átfogalmazását!

Az $f \in R[a, b]$ és $\int_a^b f = I \iff \exists(\tau_n)$ felosztássorozat: $\lim_{n \rightarrow +\infty} s(f, \tau_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \tau_n) = I$

Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények összegével kapcsolatban tanult téTEL?

TFH $f, g \in R[a, b]$. Ekkor

$$f + g \in R[a, b] \quad \text{és} \quad \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények szorzatával kapcsolatban tanult téTEL?

TFH $f, g \in R[a, b]$. Ekkor

$$f \cdot g \in R[a, b]$$

Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények hányadosával kapcsolatban tanult téTEL?

Ha $|g(x)| \geq m > 0$ ($\forall x \in [a, b]$), akkor

$$\frac{f}{g} \in R[a, b]$$

Milyen tételek tanult Riemann-integrálható függvény értékeinek megváltoztatását illetően?

TFH $f, g \in K[a, b]$. Ha $f \in R[a, b]$ és az

$$A := \{x \in [a, b] \mid f(x) \neq g(x)\} \quad \text{halmaz véges, akkor} \quad g \in R[a, b] \quad \text{és} \quad \int_a^b g = \int_a^b f$$

Mit ért a Riemann-integrál intervallum szerinti additivitásán?

TFH $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, és legyen $c \in (a, b)$. Ekkor

- 1 $f \in R[a, b] \iff f \in R[a, c] \text{ és } f \in R[c, b]$
- 2 ha $f \in R[a, c]$ és $f \in R[c, b]$ (vagy $f \in R[a, b]$), akkor

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Hogyan szól az integrálszámítás első középértéktétele?

TFH $f, g \in R[a, b]$ és $g \geq 0$. Ekkor

1 az $m := \inf_{[a,b]} f, M := \sup_{[a,b]} f$ jelölésekkel

$$m \cdot \int_a^b g \leq \int_a^b f \cdot g \leq M \cdot \int_a^b g$$

2 ha még $f \in C[a, b]$ is teljesül, akkor $\exists \xi \in [a, b] :$

$$\int_a^b f \cdot g = f(\xi) \cdot \int_a^b g$$

Fogalmazza meg a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenséget!

Tetszőleges $f, g \in R[a, b]$ függvények esetén

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$