

Programtervező informatikus Bsc szak

A szakirány

Név _____

Neptun kód _____

Csoport száma / gyak. vez. neve _____

Pontszám _____

Számolási feladatok:

A számolási feladatok során az \mathbf{A} mátrix minden esetben a következő:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

1. (8 pont) Írja fel az \mathbf{A} mátrix Gersgorin köreit és adjon becslést az általánosított Gesgorin-tétellel a szimmetrikus mátrix (valós) sajátértékeire. Adjon meg olyan egy paraméteres hasonlósági transzformációt, melynek segítségével a Gersgorin-tétel alkalmazásával igazolni tudja az \mathbf{A} mátrix negatív definittségét. Végezze el konkrét paraméterrel a transzformációt a mátrixon és adjon becslést az általánosított Gesgorin-tétellel a sajátértékekre.
2. (6 pont) A Fagyeyev-féle "trace" módszer segítségével írja fel az \mathbf{A} mátrix karakterisztikus polinomját!
3. (6 pont) Alkalmazza $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_1$ -ből indulva a hatványmódszer 3 lépését a megadott \mathbf{A} szimmetrikus mátrix egy sajátértékének és sajátvektorának közelítésére! (Nem kell sejtést adni a sajátértékekre, sajátvektorra.)
4. (10 pont) Végezze el az $(i, j) = (1, 3)$ pozíciónak megfelelő Jacobi-forgatást (hasonlósági transzformációt) az \mathbf{A} mátrixon! Adja meg a forgatási mátrixot és a forgatás utáni eredményt is.

Segítségül képletek: $p := \cot 2\varphi$

$$\cos 2\varphi = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad c := \cos \varphi = \sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}}, \quad s := \sin \varphi = \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}$$

Programozási feladat:

5. (20 pont) Írjon programot `qrmax.m` néven, mely szimmetrikus mátrixra alkalmazza a QR-algoritmust, majd a Gersgorin-tételt alkalmazza a sajátértékek becslésére.

- **Bemenő paraméterek:**

- `A`: a vizsgált mátrix,
- `N`: a végrehajtandó lépések száma.

- **Kimenő paraméterek:**

- `rho`: a lépésenkénti spektrálsugar közelítéseket tartalmazó vektor,
- `err`: a lépésenkénti hiba a Gergorin-tétellel számolva.

- Jelezzen hibát, ha a mátrix nem négyzetes.

- Ha $\|A - A^T\|_2 < 10^{-6}$, akkor tekintse szimmetrikusnak a mátrixot. Jelezzen hibát, ha ez a feltétel nem teljesül.

- A kimeneti változókat nullázza le.

- Hajtsa végre a QR-algoritmus N lépését az A szimmetrikus mátrixon. Minden lépésben

- számítsa ki a mátrix legnagyobb abszolút értékű (domináns) diagonális elemét (Gersgorin-tételbeli középpont) és tárolja `rho(i)`-ben,
- számítsa ki a hozzá tartozó sugarat a Gergorin-tétellel és tárolja `err(i)`-ben.

- Készítsen ábrát az előállított vektorokból

- a `rho(i)` értékeit jelenítse meg kék .-tal jelölve a lépésekhez rendelve,
- a `rho(i)-err(i)` és `rho(i)+err(i)` értékeit jelenítse meg piros .-tal jelölve a lépésekhez rendelve.
- A rajz címe legyen: *Gergorin-tétel alkalmazása a QR algoritmusra.*
- Ne felejtse el a rajzolás végén kiadni a `hold off` utasítást.

- Készítsen külön fájlban (`test.m`) szimmetrikus 5×5 -ös mátrixot teszt példának.

- A példában a véletlen számok segítségével előállított szimmetrikus mátrix sajátértékei $-3, 0, 1, 5, 2$ legyenek.
- Próbálja ki a mátrixra a programot $N = 15$ esetén. Írja a hívást a teszt fájlba.

Beküldendő a `qrmax.m` és a `test.m` fájl.