Analízis II. A és B szakirány, 1. zárthelyi, 2025.11.07.

1. Tekintsük az $f(x) := \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$ függvényt.

a) A definíció segítségével bizonyítsa be, hogy $f \notin D\{0\}$! $\boxed{\textbf{2 pont}}$

b) Írja fel az érintőegyenes egyenletét az $a = 1$ abszcisszájú pontban, ha létezik! $\boxed{\textbf{2 pont}}$

Megoldás:

a) Nyilván $0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Tekintsük a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ határértéket:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{0^+} \cdot 1 = +\infty.$$

A határérték létezik, de nem véges, tehát $f \notin D\{0\}$.

b) A műveleti szabályok és a deriválhatóság kapcsolatát leíró tételek alapján $f \in D\left(\mathbb{R}^+\right)$, így $f \in D\{1\}$. A függvénynek tehát létezik érintője az $(1, f(1))$ pontban, melynek egyenlete:

$$y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1).$$

A deriváltfüggvény:

$$f'(x) = \left(\frac{x^{1/3}}{x^2+1}\right)' = \frac{\left(x^{1/3}\right)' \cdot (x^2+1) - x^{1/3} \cdot (x^2+1)'}{\left(x^2+1\right)^2} =$$
$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} \cdot (x^2+1) - x^{1/3} \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} \quad (x > 0).$$

Tehát $f(1) = \dfrac{1}{2}$, $f'(1) = -\dfrac{1}{3}$, az érintőegyenes egyenlete pedig

$$y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1) = -\frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{2} = -\frac{x}{3} + \frac{5}{6}.$$

---

2. Határozza meg az $a, b \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy az alábbi függvény minden $x \in \mathbb{R}$ esetén differenciálható legyen, és adja meg a deriváltfüggvényt!

$$f(x) := \begin{cases} (x+a)^2 + x^{2025} \cdot \sin x, & \text{ha } x < 0, \\ b \cdot \left(\ln(1+2x) + \cos x\right), & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$ $\boxed{\textbf{8 pont}}$

Megoldás:

i. $x \in (-\infty, 0)$ esetén $f \in D\{x\}$ és $f'(x) = 2(x+a) + 2025 \cdot x^{2024} \cdot \sin x + x^{2025} \cdot \cos x$,

ii. $x \in (0, +\infty)$ esetén $f \in D\{x\}$ és $f'(x) = b\left(\dfrac{2}{1+2x} - \sin x\right)$,

iii. $x = 0$ esetén $f \in D\{0\} \iff f \in C\{0\} \wedge f'_-(0) = f'_+(0)$.

- Folytonosság:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = (x+a)^2 + x^{2025} \cdot \sin x \Big|_{x=0} = a^2,$$
$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = b \cdot \left(\ln(1+2x) + \cos x\right) \Big|_{x=0} = b = f(0).$$

Tehát $f \in C\{0\} \iff f(0) = \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} f(x) \iff a^2 = b.$

- Egyoldali deriváltak:

$$f'_-(0) = 2(x+a) + 2025 \cdot x^{2024} \cdot \sin x + x^{2025} \cdot \cos x \Big|_{x=0} = 2a,$$

$$f'_+(0) = b\left(\frac{2}{1+2x} - \sin x\right)\Bigg|_{x=0} = 2b.$$

Tehát $f'_-(0) = f'_+(0) \iff 2a = 2b \iff a = b$

- $f \in D\{0\} \iff \begin{cases} a^2 = b \\ a = b \end{cases} \iff a = b = 0$ vagy $a = b = 1.$

Tehát $f \in D \iff a = b = 0$ vagy $a = b = 1$, és ekkor a deriváltfüggvény:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x+a) + 2025 \cdot x^{2024} \cdot \sin x + x^{2025} \cdot \cos x, & \text{ha } x < 0, \\ 2a, & \text{ha } x = 0, \\ a\left(\dfrac{2}{1+2x} - \sin x\right), & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

---

3. Számítsa ki a következő határértékeket a L'Hospital-szabály segítségével!

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x) - \cos(3x)}{x \cdot e^x - \sin x}$, b) $\lim_{x\to 0} \left(1 - x^2\right)^{1/x^2}$. **4+4 pont**

Megoldás:

a) A L'Hospital-szabály kétszeri alkalmazásával:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(3x)}{x \cdot e^x - \sin x} &= \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\cos(2x) - \cos(3x))'}{(x \cdot e^x - \sin x)'} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(2x) + 3\sin(3x)}{x \cdot e^x + e^x - \cos x} = \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(-2\sin(2x) + 3\sin(3x))'}{(x \cdot e^x + e^x - \cos x)'} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos(2x) + 9\cos(3x)}{x \cdot e^x + 2e^x + \sin x} = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

b) Átalakítás e alapú hatvánnyá:

$$\left(1 - x^2\right)^{1/x^2} = \left(e^{\ln\left(1-x^2\right)}\right)^{1/x^2} = e^{\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}} \qquad (-1 < x < 1)\,.$$

A kitevő határértéke a L'Hospital-szabály alkalmazásával:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 - x^2\right)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln\left(1 - x^2\right)\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-2x}{1-x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{1 - x^2} = -1.$$

Az exp függvény folytonos, így a határérték:

$$\lim_{x\to 0} \left(1 - x^2\right)^{1/x^2} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

---

4. Teljes függvényvizsgálat végzése után (monotonitás, szélsőértékek, konvexitás, inflexiós pontok, határtértékek, aszimptoták) vázolja az alábbi függvény grafikonját!

$$f(x) := \frac{x^3}{x^2-3} \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}\right). \qquad \boxed{\textbf{12 pont}}$$

Megoldás:

1) **Kezdeti vizsgálatok:** $f \in D^\infty$, zérushely: $x = 0$, páratlan függvény ($f(-x) = -f(x)$).

2) **Monotonitás:** $f \in D$, a deriváltfüggvény:

$$f'(x) = \frac{(x^3)' \cdot (x^2-3) - x^3 \cdot (x^2-3)'}{(x^2-3)^2} = \frac{3x^2 \cdot (x^2-3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-3)^2} =$$
$$= \frac{x^4 - 9x^2}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2(x-3)(x+3)}{(x^2-3)^2}.$$

Monotonitási intervallumok és lokális szelsőértékek:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$\left(-3,-\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3},0\right)$	0	$\left(0,\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3},3\right)$	3	$(3,+\infty)$
f'	$\oplus$	0	$\ominus$	$-$	$\ominus$	0	$\ominus$	$-$	$\ominus$	0	$\oplus$
f	$\uparrow$ szig. mon. növekvő	$-\frac{9}{2}$ lok. max.	$\downarrow$ szig. mon. csökkenő	$-$	$\downarrow$ szig. mon. csökkenő			$-$	$\downarrow$ szig. mon. csökkenő	$\frac{9}{2}$ lok. min.	$\uparrow$ szig. mon. növekvő

3) **Konvexitás:** $f \in D^2$, a második deriváltfüggvény:

$$f''(x) = \frac{(x^4-9x^2)' \cdot (x^2-3)^2 - (x^4-9x^2) \cdot \left((x^2-3)^2\right)'}{(x^2-3)^4} =$$
$$= \frac{(4x^3-18x) \cdot (x^2-3)^2 - (x^4-9x^2) \cdot 2(x^2-3) \cdot 2x}{(x^2-3)^4} =$$
$$= 2x \cdot \frac{(2x^2-9) \cdot (x^2-3) - 2(x^4-9x^2)}{(x^2-3)^3} = 2x \cdot \frac{3x^2+27}{(x^2-3)^3}$$

Konvexitási intervallumok és inflexiós pontok:

x	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3},0\right)$	0	$\left(0,\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$(3,+\infty)$
f''	$\ominus$	$-$	$\oplus$	0	$\ominus$	$-$	$\oplus$
f	konkáv	$-$	konvex	inflexió	konkáv	$-$	konvex

4) **Határértékek:** $\mathcal{D}'_f \setminus \mathcal{D}_f = \left\{\pm\sqrt{3}, \pm\infty\right\}$.

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}\pm0} f(x) = \lim_{x\to-\sqrt{3}\pm0} \frac{x^3}{x-\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{3}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty,$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}\pm0} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}\pm0} \frac{x^3}{x+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x-\sqrt{3}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-\frac{3}{x^2}} = \pm\infty,$$

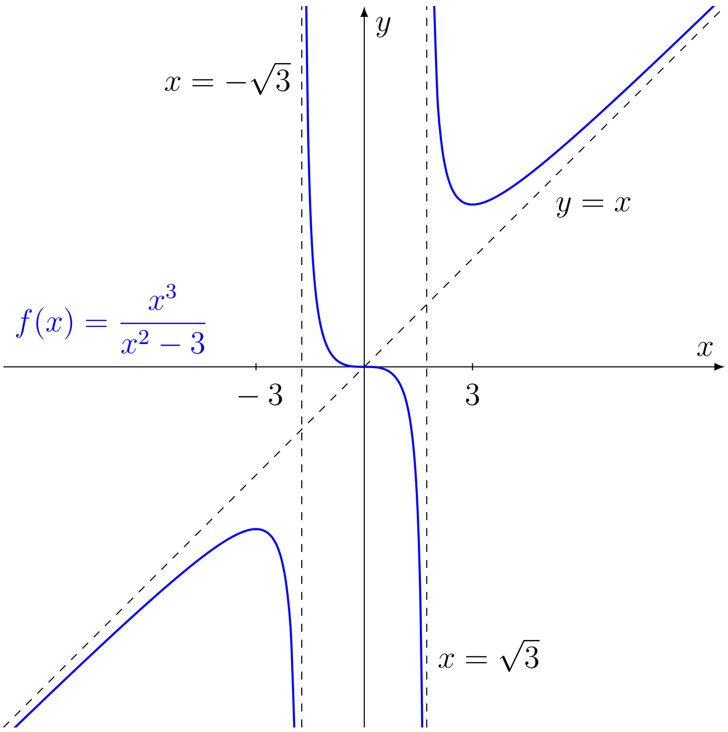
5) **Aszimptota:** $x = \pm\sqrt{3}$ függőleges aszimptoták. Ferde aszimptoták $y = Ax + B$ alakban:

$$A = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{3}{x^2}} = 1 \in \mathbb{R},$$

$$B = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{x^2-3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x^2}} = 0 \in \mathbb{R}.$$

Tehát az $y = Ax + B = x$ egyenes aszimptota $(-\infty)$-ben és $(+\infty)$-ben is.

6) **Grafikon:**



---

5. Írja fel az alábbi függvény 0 középpontú másodfokú Taylor-polinomját, és becsülje meg, hogy a $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ intervallumon mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt!

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \qquad \left(x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)\right).$$

8 pont

Megoldás:

- **Taylor-polinom:**
  $f \in D^2$. A függvény és deriváltjai, valamint értékük 0-ban:

$$f(x) = (1+2x)^{-1/2}, \qquad f(0) = 1;$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (1+2x)^{-3/2} \cdot 2 = -(1+2x)^{-3/2}, \qquad f'(0) = -1;$$

$$f''(x) = -\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (1+2x)^{-5/2} \cdot 2 = 3 \cdot (1+2x)^{-5/2}, \qquad f''(0) = 3.$$

  Tehát a 0 középpontú másodfokú Taylor-polinom:

$$T_{2,0}f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 - x + \frac{3}{2}x^2.$$

- **Hibabecslés:**
  $f \in D^3$, a hibabecsléshez alkalmazható a Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal:

$$\forall\, x \in \left(0, \frac{1}{10}\right] : \ \exists\, \xi \in (0, x) : \ f(x) - T_{2,0}f(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot x^3.$$

  A harmadik deriváltfüggvény:

$$f'''(x) = 3 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot (1+2x)^{-7/2} \cdot 2 = -\frac{15}{\sqrt{(1+2x)^7}}.$$

Ha $0 < x \leq \dfrac{1}{10}$ és $0 < \xi < x$, akkor $0 < \xi \leq \dfrac{1}{10}$, és

$$|f'''(\xi)| = \frac{15}{\sqrt{(1+2\xi)^7}} \leq \frac{15}{\sqrt{(1+2\cdot 0)^7}} = 15.$$

Tehát a hibabecslés a $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ intervallumon:

$$|f(x) - T_{2,0}f(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!} \cdot |x|^3 \leq \frac{15}{6} \cdot \left|\frac{1}{10}\right|^3 = \frac{1}{400}.$$