7. gyakorlat

Megjegyzés

Motiváció: Egyes függvényeknél előfordulhat az, hogy az interpolációs polinom hibája nagy, és hiába veszünk több alappontot, a hiba relatívan magas marad. Erre megoldás, hogy az alappontokat nem egyenletes felosztással vesszük, hanem különleges polinomok zérushelyeinél. Ezek a polinomok lesznek a **Csebisev-polinomok**.

Definíció: Csebisev-polinom

A $T_n(x) := \cos(n \cdot \arccos(x))$, $x \in [-1; 1]$ függvényt n-edfokú (elsőfajú) Csebisev-polinomnak nevezzük.

Tétel: Csebisev-polinomok rekurziója

$$T_0(x) := 1, \;\; T_1(x) := x,$$
$$T_{n+1}(x) := 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \;\; (n = 1, 2, \ldots).$$

Tétel: Csebisev-polinomok főegyütthatója

$T_n \in P_n$ és főegyütthatója: 2^{n-1} $(n \geq 1)$-re.

Definíció: 1 főegyütthatós Csebisev-polinom

$$\widetilde{T}_n := \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

az 1 főegyütthatós Csebisev-polinom. $\widetilde{T}_n \in P_n^{(1)}$, ahol
$P_n^{(1)}$: az 1 főegyütthatós n-edfokú polinomok halmaza.

Tétel: Csebisev-polinom gyökei

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \;\; (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Tétel: Csebisev-tétel

A $(T_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer extremális tulajdonsága:

$$\min_{\widetilde{Q} \in P_n^{(1)}} \|\widetilde{Q}\|_\infty = \|\widetilde{T}_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}},$$

ahol $\|\widetilde{Q}\|_\infty := \|\widetilde{Q}\|_{C[-1;1]}$.

Megjegyzés

Ez a tétel azért fontos mivel így, ha alappontokként az n-edik Csebisev-polinom gyökeit vesszük, akkor a hibabecslésben az $\omega(x)$ pont az n-edik 1 főegyütthatós Csebisev-polinom lesz (ld. polinomok egyértelműsége). Ezekkel az alappontokkal lesz a lehető legkisebb a hiba. A következő tétel ezt írja le formálisan.

Tétel: Az interpoláció hibája [-1; 1]-en

A $[-1;1]$-en vett interpoláció és $f \in C^{(n+1)}[-1;1]$ függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok a Csebisev-polinom gyükei. Ekkor

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \|\widetilde{T}_{n+1}\|_\infty = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

1. feladat

Közelítsük az $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$, $x \in [-1;1]$ függvényt elsőfokú interpolációs polinommal.

a) Milyen alappontokkal lesz az intervallumon vett hiba minimális?

b) Mennyi a minimális hiba?

Tétel: Az interpoláció hibája [a; b]-n

Az $[a;b]$-n vett interpoláció és $f \in C^{(n+1)}[a;b]$ függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok az $[a;b]$-be transzformált Csebisev gyökök. Ekkor

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot \|\widetilde{T}_{n+1}\|_\infty = \\ = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}.$$

Megjegyzés

Ebben az esetben vesszük az előző órán kiszámított

$$\varphi(x) = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}$$

$[1;-1]$-ből $[a;b]$-be vivő lineáris transzformációt és alkalmazzuk a Csebisev-polinom által meghatározott alappontokra.

2. feladat

Közelítsük $f(x) = y^3 - y$ függvényt a $[0; 2]$ intervallumon másodfokú interpolációs polinommal.

a) Milyen alappontokkal lesz az intervallumon vett hiba minimális?

b) Mennyi a minimális hiba?

3. feladat

Közelítsük az $f(y) = \cos(y),\ y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ függvényt másodfokú interpolációs polinommal.

a) Milyen alappontokkal lesz az intervallumon vett hiba minimális?

b) Mennyi a minimális hiba?

1. megoldás

a) A lineáris interpoláció miatt két alappontra van szükség. Ahhoz, hogy a hiba minimális legyen, úgy kell választani őket, hogy a $T_2(x) = 2x^2 - 1$ másodfokú Csebisev polinom gyökei legyenek. Így

$$x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a keresett alappontok.

Megjegyzés

Ha sok alappontot kell egyszerre meghatározni, egyszerűbb használni az n-edik Csebisev-polinom gyökeit kiszámoló képletet

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

b) Számítsuk ki a hibabecslésben szereplő mennyiségeket.

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) = x^2 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\, T_2(x) \quad \Rightarrow \quad \|\omega\|_\infty = \tfrac{1}{2}.$$

A függvény második deriváltja:

$$f(x) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right),$$

tehát

$$\|f''\|_\infty = M_2 = \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2.$$

Az általános hibabecslés szerint az $[-1; 1]$-en vett interpoláció hibája

$$|f(x) - P_1(x)| \leq \frac{M_2}{2!}\,\|\omega\|_\infty = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{16} \approx 0.617.$$

2. megoldás

a) A másodfokú interpoláció miatt három alappontra van szükség. Ahhoz, hogy a hiba minimális legyen úgy kell választani őket, hogy a harmadfokú Csebisev polinom gyökeit a $[0; 2]$ intervallumba transzformáljuk.

A rekurzióból $T_3(x) = 2x \cdot (2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$ a harmadfokú Csebisev polinom, melynek gyökei

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A $\varphi(x) = x + 1$ eltolás a $[-1; 1]$ intervallumot a $[0; 2]$ intervallumba képezi, ezt alkalmazzuk a gyökökre. Így $y_i = \varphi(x_i)$, azaz

$$y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

a keresett alappontok.

> **Megjegyzés**
>
> Bár a lineáris transzformáció függvényének az általános képletét ismerni hasznos, a legtöbb esetben ennek ismerete nélkül is meg tudjuk ezt határozni.

b) Számítsuk ki a hibabecslésben szereplő mennyiségeket.

$$\omega(y) = (y - y_0)(y - y_1)(y - y_2) = \frac{1}{4} T_3(\varphi^{-1}(y)) \quad \Rightarrow \quad \|\omega\|_\infty = \frac{1}{4}$$
$$f'''(y) = 6 \quad \Rightarrow \quad \|f'''\|_\infty = 6 = M_3$$

A hibabecslés $[0; 2]$-n

$$|f(y) - P_2(y)| \leq \frac{M_3}{3!} \cdot \|\omega\|_\infty \leq \frac{1}{4}.$$

3. megoldás

a) A másodfokú interpoláció miatt három alappontra van szükség. Ahhoz, hogy a hiba minimális legyen úgy kell választani őket, hogy a harmadfokú Csebisev polinom gyökeit a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallumba transzformáljuk.

A rekurzióból $T_3(x) = 2x \cdot (2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$ a harmadfokú Csebisev polinom, melynek gyökei

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A $\varphi(x) = \frac{\pi}{2} \cdot x$ függvény a $[-1; 1]$ intervallumot a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallumba képezi, ezt alkalmazzuk a gyökökre. Így

$$y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\pi, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi$$

a keresett alappontok.

b) Számítsuk ki a hibabecslésben szereplő mennyiségeket.

$$\omega(y) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} T_3(\varphi^{-1}(y)) = \frac{\pi^3}{32} \quad \Rightarrow \quad \|\omega\|_\infty = \frac{\pi^3}{32}$$
$$f'''(y) = \sin(y) \quad \Rightarrow \quad \|f'''\|_\infty = 1 = M_3$$

A hibabecslés $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$-n

$$|f(y) - P_2(y)| \leq \frac{M_3}{3!} \cdot \|\omega\|_\infty \leq \frac{\pi^3}{192} \approx 0,16.$$