# Diszkrét matematika I. feladatok
## Relációk I.
*Harmadik alkalom (2025.02.24-28.)*

### Bemelegítő feladatok

1. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Tekintsük a következő $R \subset A \times B$ binér (kétváltozós) relációt: $R = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 9), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$.

   a) Határozza meg az $R$ reláció értelmezési tartományát és értékkészletét.
   **Megoldás:** Az értelmezési tartomány azon $A$-beli elemek halmaza, akik ténylegesen elő is fordulnak első koordinátaként: $\operatorname{dmn} R = \{1, 3, 4\}$.
   Az értékkészlet azon $B$-beli elemek halmaza, akik ténylegesen elő is fordulnak második koordinátaként: $\operatorname{rng} R = \{5, 6, 7, 9\}$.

   b) Legyen $H_1 = \{1, 2, 3\}$ és $H_2 = \{4\}$. Határozza meg az $R$ reláció $H_1$, illetve $H_2$ halmazra való leszűkítését.
   **Megoldás:** $R\big|_{H_1} = R \cap (H_1 \times B) = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 9)\}$, mert az $R$ összes olyan eleme alkotja, amelynek az első koordinátája $H_1$-beli.
   Hasonóan: $R\big|_{H_2} = R \cap (H_2 \times B) = \{(4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$.
   (Ha nem vagyunk biztosak abban, hogy $H \subset A$, akkor $R \subset A \times B$ esetén biztosra mehetunk azzal, hogy $R\big|_H = R \cap \big((H \cap A) \times B\big)$. De a fenti $H_1$ és $H_2$ az $A$ halmaznak részhalmazai voltak, ezért $H_i \subset A \Leftrightarrow H_i \cap A = H_i$ miatt írhattuk egyszerűbben.)

   c) A következő relációk közül melyek lehetnek az $R$ reláció kiterjesztései?

   - $R_1 = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 2), (2, 4), (3, 6), (3, 9), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$
     **Megoldás:** Mivel $R_1 \supseteq R$, ezért formálisan teljesül az a feltétel, amivel azt definiáljuk, hogy $R_1$ kiterjesztése $R$-nek (illetve $R$ leszűkítése/megszorítása $R_1$-nek). (**DE** mivel a relációk definíciójába beleértjük azt is, hogy mi az a DesCartes-szorzat, aminek a részhalmazaként értelmezzük, így itt definíciós problémába ütközünk: ha szigorúan vesszük, akkor $R_1 \not\subseteq A \times B$, hiszen $\operatorname{rng} R_1 = \{5, 6, 7, \mathbf{2}, \mathbf{4}, 9, \mathbf{3}\} \not\subseteq B$, és így **nem** "ugyananolyan típusú" reláció az $R$ és az $R_1$. Akinek ez gondot okoz, értelmezze át $R$-t, mint $A \times B'$ részhalamzát, ahol $B' = B \cup \{2, 4, 3\}$. Ekkor már bátran mondhatja, hogy $R_1$ kiterjesztése $R$-nek.) (És így $R$ megszorítása/leszűkítése $R_1$-nak; de NEM valamilyen "halmazra való leszűkítése" — mivel $R$ nem tartalmazza az $R_1$ összes olyan elemét, aminek az első koordinátája $\operatorname{dmn} R$-beli.)
   - $R_2 = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 8), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 9)\}$
     **Megoldás:** Mivel $(3, 9) \notin R_2$, ezért $R \not\subset R_2$, és így $R_2$ biztosan NEM kiterjesztése $R$-nek. (És mivel $(3, 8) \notin R$, ezért $R_2 \not\subset R$, és így $R$ SEM lehet kiterjesztése $R_2$-nek.)
   - $R_3 = A \times B$
     **Megoldás:** Mivel $R \subseteq A \times B = R_3$, ezért $R_3$ kiterjesztése $R$-nek. (És így $R$ megszorítása/leszűkítése $R_3$-nak; de NEM valamilyen "halmazra való leszűkítése" — mivel $R$ nem tartalmazza az $R_3$ összes olyan elemét, aminek az első koordinátája $\operatorname{dmn} R$-beli.)
   - $R_4 = B \times A$
     **Megoldás:** Mivel $R \not\subseteq B \times A$ (hiszen pl. $(1, 5) \notin B \times A$ mivel $5 \notin A$), ezért $R \not\subset R_4$, és így $R_4$ biztosan NEM kiterjesztése $R$-nek.

d) Határozza meg az $R$ reláció inverzét, $R(\{1,2\})$ képét és $R^{-1}(\{5,6\})$ inverz képet.
**Megoldás:** $R^{-1} = \{(5,1),(6,1),(7,1),(6,3),(9,3),(5,4),(7,4),(9,4)\} \subseteq B \times A$.
$R(\{1,2\}) = \operatorname{rng} R\big|_{\{1,2\}} = \operatorname{rng}\{(1,5),(1,6),(1,7)\} = \{5,6,7\}$
$R^{-1}(\{5,6\}) = \operatorname{rng} R^{-1}\big|_{\{5,6\}} = \operatorname{rng}\{(5,1),(6,1),(6,3),(5,4)\} = \{1,3,4\}$

2. Legyen $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a következő binér reláció $R = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4\}$. Mi lesz $\operatorname{dmn}(R)$, $\operatorname{rng}(R)$, $R(\{0,1\})$ és $R^{-1}(\{0,1\})$ ?
**Megoldás:** Az $x^2 + y^2 \le 4$ egyenlőtlenségben az $x$ és $y$ szerepe lányosan szimmetrikus, azaz $x^2 + y^2 \le 4 \Leftrightarrow y^2 + x^2 \le 4$, vagyis $(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R$, vagyis $R$ szimmetrikus reláció, más szavakkal $R^{-1} = R$, és így $\operatorname{rng}(R) = \operatorname{dmn}(R^{-1}) = \operatorname{dmn}(R)$.
Az $R$ relációban a koordinátasík azon koordinátapárjai vannak benne, amely koordinátapárok az origó körüli 2 sugarú tömör körlap pontjait koordinátázzák, hiszen $x^2 + y^2 \le 4$ ennek a körlapnak az egyenlőtlensége ($x^2 + y^2 = 4$ az origó körüli 2 sugarú körvonalnak az egyenlete).
Tehát első koordinátaként is és második koordinátaként is a $-2$ és 2 közötti valós számok fordulnak elő: $\operatorname{rng}(R) = \operatorname{dmn}(R) = [-2,2]$ zárt intervallum.
A 0 képe az összes olyan valós $y$ szám, akire $0 + y^2 \le 4$ vagyis $|y| \le 2$ teljesül. Tehát $R(\{0\}) = [-2,2]$ zárt intervallum. Hasonlóan az 1 képe az összes olyan valós $y$ szám, akire $1 + y^2 \le 4$, vagyis $y^2 \le 3$, azaz $|y| \le \sqrt{3}$ teljesül. Tehát $R(\{1\}) = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ zárt intervallum. $R^{-1} = R$ miatt $R^{-1}(\{0,1\}) = R(\{0,1\}) = R(\{0\}) \cup R(\{1\}) = [-2,2] \cup [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] = [-2,2]$ zárt intervallum.

3. Legyen $R \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a következő binér reláció $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : |\mathbf{u} - \mathbf{v}| = 1\}$. Mi lesz $\operatorname{dmn}(R)$, $\operatorname{rng}(R)$, $R\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}\right)$ és $R^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\right)$ ?
**Megoldás:** A sík két pontja pontosan akkor áll $R$ relációban, ha a távolságuk 1, tehát ez szintén egy szimmetrikus reláció ($R^{-1} = R$), és adott ponthoz az ezen pont körüli egységsugarú körvonal pontjait rendeli hozzá. Mivel minden ponthoz található tőle pontosan egységnyi távolsgra lévő pont, ezért $\operatorname{rng}(R) = \operatorname{dmn}(R^{-1}) = \operatorname{dmn}(R) = \mathbb{R}^2$ az egész sík.
Az origó (vagyis a $(0,0)$ koordinátájú pont) képe az origó körüli egységsugarú körvonal (pontjainak halmaza), a $(0,1)$ koordinátájú pont képe a $(0,1)$ körüli egységsugarú körvonal (pontjainak halmaza), $R^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\right) = R\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\right)$ pedig ezen két körvonal uniója.

## Gyakorló feladatok

4. Legyen $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c,d,e,f\}$ és $C = \{2,4,6,8\}$, továbbá $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$,
$R = \{(1,a),(1,b),(2,b),(2,d),(3,c),(3,e)\}$ és
$S = \{(a,2),(a,8),(c,2),(c,8),(e,4),(f,6)\}$.
Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót, a kompozíció értékkészletét, értelmezési tartományát.
**Megoldás:** Definíció szeint $S \circ R = \{(x,z) : \exists y \in B(((x,y) \in R) \wedge ((y,z) \in S))\}$
$(1,a) \in R, \quad (a,2),(a,8) \in S \Longrightarrow (1,2),(1,8) \in S \circ R$ (ezek $y = a$ helyettesítéssel adódnak)
$(1,b),(2,b),(2,d) \in R$, de $b, d \notin \operatorname{dmn} S$, ezért ezeket nem tudjuk "folytatni"
$(3,c) \in R, \quad (c,2),(c,8) \in S \Longrightarrow (3,2),(3,8) \in S \circ R$ (ezek $y = c$ helyettesítéssel adódnak)
$(3,e) \in R, \quad (e,4) \in S \Longrightarrow (3,4) \in S \circ R$ (ez $y = e$ helyettesítéssel adódik)
$(f,6) \in S$, de $f \notin \operatorname{rng} R$, ezért ez senkinek sem "folytatása"
Tehát $S \circ R = \{(1,2),(1,8),(3,2),(3,8),(3,4)\}$, $\operatorname{dmn} S \circ R = \{1,3\}$, $\operatorname{rng} S \circ R = \{2,8,4\}$.

5. Legyenek $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ és $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ az alábbi binér relációk. Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót, annak értékkészletét és értelmezési tartományát!

   a) $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $S = R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$;
   **Megoldás:** $S \circ R = R \circ R = [-2, 2] \times [-2, 2]$ egy egész négyzet, vagyis minden $-2$ és 2 közötti valós számhoz hozzárendel minden $-2$ és 2 közötti valós számot.

   b) $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $S = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 4\}$;
   **Megoldás:** technikás számolgatás...

   c) $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $S = \{(x, y) : (x - 2)^2 + y^2 \leq 4\}$;
   **Megoldás:** technikás számolgatás...

   d) $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $S = \{(x, y) : (x - 3)^2 + y^2 \leq 4\}$.
   **Megoldás:** technikás számolgatás...

   e) $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $S = \{(x, y) : (x - 4)^2 + y^2 \leq 4\}$.
   **Megoldás:** Ekkor $\mathrm{dmn}(S) \cap \mathrm{rng}(R) = \{0\}$, így $S \circ R = \{(0, 0)\}$

   f) $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $S = \{(x, y) : (x - 5)^2 + y^2 \leq 4\}$.
   **Megoldás:** Ekkor $\mathrm{dmn}(S) \cap \mathrm{rng}(R) = \emptyset$, így $S \circ R$ kompozíció az üres reláció: $S \circ R = \emptyset$

## Érdekes feladatok

6. Tekintsük az emberek halmazán a $G$ gyereke és a $H$ házastársa relációt. Fejezzük ki segítségükkel a következőket:

   a) unokája relációt; nagyszülője relációt, anyósa/apósa relációt, veje/menye relációt, testvére/önmaga relációt;
   **Megoldás:** $U = G \circ G$, az unoka a gyerek gyereke. $N = U^{-1} = G^{-1} \circ G^{-1}$, az (unoka) nagyszülje reláció az a (nagyszülő) unokája relációnak pont az inverze. $(x, z) \in A$ jelenti azt, hogy $x$ apósa/anyósa $z$-nek, azaz $z$ az $x$ gyerekének a házastársa, azaz létezik egy olyan $y$, aki a $z$-nek házastársa, és egyúttal $x$ az $y$-nak a szülője: $\exists y : (x, y) \in G^{-1}$ és $(y, z) \in H = H^{-1}$, hiszen a házasnak lenni szimmetrikus reláció). $A = H \circ G^{-1} = H^{-1} \circ G^{-1} = (G \circ H)^{-1}$, a veje/menye reláció az anyósa/apósa relációnak az inverze: $M = A^{-1} = G \circ H$, és tényleg: ha $z$ menye/veje $x$-nek ($(z, x) \in M$), az azt jelenti, hogy van egy olyan köztes $y$, aki $z$-nek házastársa ($(z, y) \in H$) és $x$-nek gyereke ($(y, x) \in G$).
   Ha ezekre a relációkra "hozzárendelésként" ("többértékű" "függvényként") gondolunk, akkor az $A$ "apósa/ anyósa" relációban $(x, z) \in A$ jelenti azt, hogy $x$ az apósa $z$-nek, vagyis az apósHOZ/anyósHOZ *rendeljük hozzá* azt, akiNEK ő az apósa/anyósa. Tehát ha az $(x, z) \in A$-t úgy írjuk, hogy $A : x \mapsto z$, akkor ez egy após/anyós$\mapsto$menye/veje hozzárendelés. Ez okozhat némi félreértést. Hasonló a helyzet a $G$ reláció értelmezésénél is, és így az unokája $U$ és a nagyszülje $N$ és természetesen a veje/menye relációnál is.
   $(x, z) \in T$ azt jelenti, hogy $x$ testvére $z$-nek (vagy $x = z$, és a "testvér" fogalmába az egyszerűség kedvéért értsük most bele a féltestvért is), azaz $(x, z) \in T$ akkor és csak akkor, ha van egy közös szülő: $y$, akinek $x$ is és $z$ is gyereke: $\exists y : (x, y) \in G \wedge (z, y) \in G$, vagyis $\exists y : (x, y) \in G \wedge (y, z) \in G^{-1}$, azaz $T = G^{-1} \circ G$.

   b) házasok halmaza, nagyszülők halmaza.
   **Megoldás:** Házasok halmaza $= \mathrm{dmn}\, H = \mathrm{rng}\, H$, mivel szimmetrikus a $H$, ezért ugyanaz. A nagyszülők halmaza az a "nagyszülője" relációnak az értelmezési tartománya, mivel

$(x, y) \in N$ azt jelenti, hogy $x$ a nagyszülője $y$-nak, azaz az *első koordináta* a nagyszülő. Nagyszülők halmaza $= \operatorname{dmn} N = \operatorname{dmn}(G \circ G)^{-1} = \operatorname{rng} G \circ G$

7. Adott $X = \{1, 2, \ldots, 9\}$ alaphalmaz esetén tekintsük az alábbi $R \subset 2^X \times 2^X$ és $S \subset 2^X \times 2^X$ binér relációkat:

$$R = \{(A, B) : A \vartriangle B \neq \emptyset\}, \quad S = \{(A, B) : A \subset B\}.$$

Mi lesz $S \circ R\,(\{\emptyset, \{1, 2\}\})$, ill. $\operatorname{dmn}(S \circ R)$ és $\operatorname{rng}(S \circ R)$?
**Megoldás:**

**Beadandó házi feladatok**

8. Legyen $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a következő binér reláció: $R = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 \leq 4\}$. Mi lesz $\operatorname{dmn}(R)$, $\operatorname{rng}(R)$, $R^{-1}$, $R(\{0, 1\})$ és $R^{-1}(\{0, 1\})$? (**1 pont**)

**Megoldást itt nem közlünk** (mert beadandó feladat).

9. Legyen $X = \{1, 2, \ldots, 36\}$ és $R \subset X \times X$, $S = X \times X$ az alábbi két reláció:

$$R = \{(n, m) : |n - m| \text{ páros}\}, \quad S = \{(n, m) : |n - m| \text{ osztható 3-mal}\}.$$

Mi lesz $S \circ R(\{1, 2\})$, $(S \circ R)^{-1}(\{1, 2\})$, $\operatorname{dmn}(S \circ R)$, $\operatorname{rng}(S \circ R)$? (**1 pont**)

**Megoldást itt nem közlünk** (mert beadandó feladat).

10. Legyen $X = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\} \subset \mathbb{R}^2$ a következő vektorok halmaza:

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_6 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Legyen továbbá

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tekintsük az alábbi relációkat $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in X \times X : M\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$ és $S = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in X \times X : N\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$. Mi lesz az $R \circ S$, illetve az $S \circ R$ reláció? (**1 pont**)

**Megoldást itt nem közlünk** (mert beadandó feladat).

**További gyakorló feladatok**

11. Legyenek $R \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ és $S \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ az alábbi binér relációk. Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót, annak értékkészletét és értelmezési tartományát!

   a) $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : |\mathbf{u}| \leq 2, |\mathbf{v}| \leq 2\}$, $S = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : |\mathbf{u} - (1, 0)| \leq 2, |\mathbf{v} - (1, 0)| \leq 2\}$;
   **Megoldás:** $R$ reláció az origó körüli 2 sugarú zárt körlap minden pontjához ugyanezen körlap minden pontját rendeli hozzá (a körlap pontjai közül mindenki mindenkivel relációban áll, egyébként senki senki mással.) Az $S$ reláció hasonló, csak a $(0, 1)$ körüli 2 sugarú körlappal. Mivel ez a két körlap metszi egymást, az $S \circ R$ kompozíció az origó középpontú 2 sugarú zárt körlap minden pontjához a $(0, 1)$ középpontú 2 sugarú zárt körlap minden pontját rendeli (köztes "z elemnek" használható a két körlap metszetének bármely pontja).

b) $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : |\mathbf{u}| \le 2, |\mathbf{v}| \le 2\}$, $S = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : |\mathbf{u} - (2,0)| \le 2, |\mathbf{v} - (2,0)| \le 2\}$;
**Megoldás:** A két körlap itt is metszi egymást (egyetlen pontban), így az előzőhöz hasonló.

c) $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : |\mathbf{u}| \le 2, |\mathbf{v}| \le 2\}$, $S = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : |\mathbf{u} - (3,0)| \le 2, |\mathbf{v} - (3,0)| \le 2\}$.
**Megoldás:** A két körlap itt diszjunkt, így a kompozíció az üres reláció.

12. Legyen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Az alábbi $R$ relációkra határozza meg $\mathrm{dmn}(R), \mathrm{rng}(R)$ halmazokat, illetve az $A$ képét $R(A)$, teljes inverzképét $R^{-1}(A)$, megszorítását $R\,|_A$:

a) $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : M\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$,
**Megoldás:** Ez a reláció egy "egyértelmű hozzárendelési szabályt" határoz meg, ha a szabályt úgy értjük, hogy $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in R$ azt jelenti, hogy $\mathbf{u}$ vektorhoz $\mathbf{v}$ vektort rendeljük. Tehát ez a reláció egy függvény. Méghozzá egy vektor-vektor függvény, amit egy mátrixszal való szorzás valósít meg. (Azaz ez egy "homogén lineáris leképezés" — és mivel ugyanabba a vektortérbe képez, azaz a $\mathbb{R}^2$ vektorteret saját magába képezi homogén lineárisan, ez egy "lineáris transzformáció".)
Mivel a valós $2 \times 2$-es $M$ mátrix bármelyik 2-dimenziós valós vektorra hattatható (megszorozható vele, ha a vektort oszlopmátrixként kezeljük), ezért az értlmezési tartomány a teljes vektortér: $\mathrm{dmn}\, R = \mathbb{R}^2$.
Az $M$ mátrix hatása az $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektorra: $M\mathbf{u} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$ azaz az eredményvektor első koordinátája az $\mathbf{u}$ második koordinátája lesz, az eredményvektor második koordinátája mindig nulla lesz. Ezért az értékkészlet azon vektorok halmaza lesz, amiknek az első koordinátája tetszőleges, a második koordinátája pedig nulla: $\mathrm{rng}\, R = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$, ez nem más, mint az "$x$-tengely" (a teljes koordinátatengely minden pontja előáll képként, hiszen tetszőleges $y$-hoz van olyan $\mathbf{u}$ vektor, aminek a második koordinátája pont $y$).
Az $A$ halmaz képe: $R(A) = R\left( \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right) = \left\{ M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, M\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
Az $A = \left( \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right)$ halmaz teljes inverzképéhez meg kell találni az összes olyan vektort, aminek az $M$ szerinti képe ezen három vektor valamelyike. Mivel $M\mathbf{u}$ csak olyan vektor lehet, aminek a második koodinátája 0, ezért a $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ biztos nem állhat elő képként. A $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ minden olyan vektornak a képe $M$ szerint, akinek a második koordinátája 0 (vagyis az "$x$-tengely" pontjai mind elemei a teljes ősképnek). Az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ minden olyan vektornak a képe $M$ szerint, akinek a második koordinátája 1 (vagyis az "$x$-tengellyel" párhuzamos, az $y$-tengelyt az 1 pontban metsző egyenes pontjai is mind elemei a teljes

ősképnek). Tehát $R^{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$.

$R\,|_A = \left\{ (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}) \right\}$

b) $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{u} = N\mathbf{v}\}$,
**Megoldás:** Mivel az $N$ mátrix *invertálható*, ezért az $\mathbf{u} = N\mathbf{v}$ feltétel ekvivalens átalakítása az $N^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Tehát $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{u} = N\mathbf{v}\} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : N^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$, és ezzel ugyanolyan jellegű lett a feladat, mint az a) részben, csak invertálható mátrixszal.

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det N} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1 \cdot 4 - 1 \cdot 3)} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Vegyük észre: $R^{-1} = \{(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{u} = N\mathbf{v}\} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : N\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$, tehát egy $S = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : N\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$ módon megadott relációnak az inverzrelációja, amennyiben a $N \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix invertálható, akkor $S^{-1} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : N^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$.

Mivel $N^{-1}$ is egy *invertálható* mátrix ($(N^{-1})^{-1} = N$), ezért az a lineáris trnszformáció, amit mevalósít, az egy *bijekció* $\mathbb{R}^2$-ből saját magába, vagyis nem csak minden vektornak van képe, hanem minden vektor elő is áll képként. Ezért most $\operatorname{dmn} R = \operatorname{rng} R = \mathbb{R}^2$. Az $A$ halmaz képe: $R(A) = R\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}\right) = \left\{ N^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, N^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, N^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

A halmaz teljes inverzképe tekinthető a halmaz képének az inverzreláció szerint:$R^{-1}(A) = R^{-1}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}\right) = \left\{ N\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, N\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix} \right\}$

$R\,|_A = \left\{ (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}) \right\}$

c) $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : M\mathbf{u} = N\mathbf{v}\}$,
**Megoldás:** Mivel az $N$ mátrix *invertálható*, ezért az $\mathbf{u} = N\mathbf{v}$ feltétel ekvivalens átalakítása az $N^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Tehát $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : M\mathbf{u} = N\mathbf{v}\} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : N^{-1}M\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$, és ezzel ugyanolyan jellegű lett a feladat, mint az a) részben.

$$N^{-1}M = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad N^{-1}M\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y \\ -3y \end{pmatrix}$$

Mivel $N^{-1}M$ *nem* invertálható mátrix, így a feladat megoldása az a) rész megoldásához hasonlóan fejezhető be.

13. Legyen $M, N \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mint a 12. feladatban. Az alábbi $R, S$ relációkra határozza meg az $R \circ S$ és $S \circ R$ kompozíciókat.

a) $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : M\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$, $S = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : N\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$,
**Megoldás:** $S \circ R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{w}) : \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2(((\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in R) \wedge ((\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in S))\} = \{(\mathbf{u}, \mathbf{w}) : \exists \mathbf{v} \in$

$\mathbb{R}^2((M\mathbf{u}=\mathbf{v})\wedge(N\mathbf{v}=\mathbf{w}))\} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w}) : \exists\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2((M\mathbf{u}=\mathbf{v})\wedge(NM\mathbf{u}=\mathbf{w}))\}$, mivel a $\exists\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2(M\mathbf{u}=\mathbf{v})$ feltétel mindig IGAZ, így elhagyható:

$$S\circ R = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : NM\mathbf{u}=\mathbf{w}\}$$

Hasonlóan:

$$R\circ S = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : MN\mathbf{u}=\mathbf{w}\}$$

b) $R=\{(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : \mathbf{u}=M\mathbf{v}\}$, $S=\{(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : \mathbf{u}=M^2\mathbf{v}\}$,
**Megoldás:** $R^{-1}=\{(\mathbf{v},\mathbf{u})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : M\mathbf{v}=\mathbf{u}\}$, $S^{-1}=\{(\mathbf{v},\mathbf{u})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : M^2\mathbf{v}=\mathbf{u}\}$, és ezek olyan jellegű relációk, mint az előző feladatrészben az $R$ és az $S$. Annak megfelelően:

$$S^{-1}\circ R^{-1} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : M^2M\mathbf{u}=\mathbf{w}\} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : M^3\mathbf{u}=\mathbf{w}\}$$

$$R^{-1}\circ S^{-1} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : MM^2\mathbf{u}=\mathbf{w}\} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : M^3\mathbf{u}=\mathbf{w}\}$$

Most pedig használva az $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$ általános összefüggést:

$$(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : M^3\mathbf{u}=\mathbf{w}\}$$

$$(S\circ R)^{-1} = R^{-1}\circ S^{-1} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : M^3\mathbf{u}=\mathbf{w}\}$$

És így: $S\circ R = R\circ S = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : \mathbf{u}=M^3\mathbf{w}\}$. De mivel jelen esetben az $M^2=0$ a csupa nulla mátrix, ezért a végeredmény: $S\circ R = R\circ S = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : \mathbf{u}=\mathbf{0}\} = \{(\mathbf{0},\mathbf{w}) : \mathbf{w}\in\mathbb{R}^2\}$, és ez sokkal előbb is kijöhetett volna:
**Másik megoldás:** $S=\{(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : \mathbf{u}=M^2\mathbf{v}\} = \{(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : \mathbf{u}=\mathbf{0}\}$, vagyis $S=\{(\mathbf{0},\mathbf{v}) : \mathbf{v}\in\mathbb{R}^2\}$.
$S\circ R = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : \exists\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2(((\mathbf{u},\mathbf{v})\in R)\wedge((\mathbf{v},\mathbf{w})\in S))\} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : \exists\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2((\mathbf{u}=M\mathbf{v})\wedge(\mathbf{v}=M^2\mathbf{w}=\mathbf{0}))\} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : \exists\mathbf{v}=\mathbf{0}\in\mathbb{R}^2(\mathbf{u}=M\mathbf{0}=\mathbf{0})\} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : \mathbf{u}=\mathbf{0})\} = \{(\mathbf{0},\mathbf{w}) : \mathbf{w}\in\mathbb{R}^2\}$
$R\circ S = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : \exists\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2(((\mathbf{u},\mathbf{v})\in S)\wedge((\mathbf{v},\mathbf{w})\in R))\} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : \exists\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2((\mathbf{u}=M^2\mathbf{v}=\mathbf{0})\wedge(\mathbf{v}=M\mathbf{w}))\} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : (\mathbf{u}=\mathbf{0})\wedge\exists\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2(\mathbf{v}=M\mathbf{w})\} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : \mathbf{u}=\mathbf{0})\} = \{(\mathbf{0},\mathbf{w}) : \mathbf{w}\in\mathbb{R}^2\}$

14. Legyen $M,N\in\mathbb{R}^{2\times2}$ két invertálható mátrix. Legyen $R=\{(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : M\mathbf{u}=\mathbf{v}\}$ és $S=\{(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : N\mathbf{u}=\mathbf{v}\}$. Fejezze ki a $R\circ S$, $S\circ R$ relációkat ill. azok inverzét az $M,N$ mátrixok segítségével.
**Megoldás:** Az elző feladat a) részében leírtakkal azonos módon:

$$S\circ R = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : NM\mathbf{u}=\mathbf{w}\}\quad R\circ S = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : MN\mathbf{u}=\mathbf{w}\}$$

Mivel $R^{-1}=\{(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : M^{-1}\mathbf{u}=\mathbf{v}\}$ és $S^{-1}=\{(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : N^{-1}\mathbf{u}=\mathbf{v}\}$, ezért

$$S^{-1}\circ R^{-1} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : N^{-1}M^{-1}\mathbf{u}=\mathbf{w}\}\quad R^{-1}\circ S^{-1} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : M^{-1}N^{-1}\mathbf{u}=\mathbf{w}\}$$

$$(R\circ S)^{-1} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : (MN)^{-1}\mathbf{u}=\mathbf{w}\}\quad (S\circ R)^{-1} = \{(\mathbf{u},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : (NM)^{-1}\mathbf{u}=\mathbf{w}\}$$