Speckó deriváltak

Gradiens

$(X,\ ||.||_\circ) := (\mathbb{R}^n, ||.||_p),\ (Y,\ ||.||_*) := (\mathbb{R}^m, ||.||_q), f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Speciálisan $m = 1$ esetén $(f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ az f függvény a-beli **gradiense**: $\text{grad } f(a) := f'(a) \in \mathbb{R}^{1\times n} \equiv \mathbb{R}^n$

$f'(a)$ az a-beli Fréchet-derivált (lásd **5.md**)

Parciális derivált

Legyen $g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \text{int } D_g \ni a = (a_1, \dots, a_n),\ k \in \{1, \dots, n\},\ G \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} :$

$G(t) := g(a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n) \quad (t \in \mathbb{R},\ (a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n) \in D_g) \implies$

A k-adik komponensen kívül mindegyiket rögzítjük, így G csak t-től függ.

$a_k \in \text{int } D_G,\ G(a_k) = g(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) = g(a)$

Ha $G \in D\{a_k\}$, akkor $\partial_k\ g(a) := G'(a_k)$ a g függvény a-beli **parciális deriváltja** a k-adik változó szerint.

Sidenote: A parciális derivált lényegében a g egyváltozósra korlátozott deriváltja:

$$\partial_k g(a) = \lim_{x \to a_k} \frac{G(x) - G(a_k)}{x - x_k}$$

Iránymenti derivált

Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ a \in \text{int } D_f,\ e \in \mathbb{R}^n,\ ||e|| = 1,\ F(t) := f(a + t \cdot e) \quad (t \in \mathbb{R},\ a + t \cdot e \in D_f)$

Ha $F \in D\{0\}$ akkor $\partial_e f(a) := F'(0)$ az f a-beli **iránymenti deriváltja**.

$f \in D\{a\} \implies \forall e : \exists \partial_e f(a) = < f'(a),\ e >$

(Ha e egy kanonikus egységvektor, akkor az elsőrendű parciális deriváltat kapjuk az i-edik változó szerint.)

Deriválás és parciális deriválás kapcsolata

Legyen $g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \text{int}\ D_g \ni a = (a_1, \dots, a_n)$

Tegyük fel, hogy $g \in D\{a\} \implies \forall k = 1, \dots, m : \exists \partial_k\ g(a)$ és $\text{grad}\ g(a) = (\partial_1\ g(a), \dots, \partial_n\ g(a))$

Bizonyítás

Deriválhatóság definíciójából

$g(a+h) - g(a) = <\text{grad}\ g(a),\ h> + \eta(h) \cdot ||h||$

Speciálisan legyen $h := (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$ $(0 \neq t \in \mathbb{R}$ a k-adik indexen $)$ és $\text{grad}\ g(a) := (c_1, \dots, c_n)$

Ezeket behelyettesítve:

$$g(a+h) - g(a) = c_k \cdot t + \eta(h) \cdot |t| =$$
$$g(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_n) - g(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) = G(a_k + t) - G(a_k)$$
$$\implies c_k + \eta(h) \cdot (\pm 1) = \frac{G(a_k + h) - G(a_k)}{t}$$

$\eta(h) \to 0,$ ha $t \to 0$ és $\exists \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{G(a_k + h) - G(a_k)}{t}$ tehát $G \in D\{a_k\}$ és $G'(a_k) = c_k \implies \exists \partial_k\ g(a) = c_k$

Deriválás és parciális deriválás kapcsolata 2.

Legyen $n \geq 2,\ f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ a \in \text{int}\ D_f,\ K(a) \subset D_f$

Továbbá $\exists k \in 1, \dots, n$ úgy, hogy $\forall x \in K(a),\ \forall k \neq i = 1, \dots, n$ indexre léteznek a $\partial_i\ f(x)$ parciális deriváltfüggvények és azok folytonosak a-ban. Illetve létezik $\partial_k\ f(a)$ parciális derivált.

Ekkor $f \in D\{a\}$

Ennek csak $n = 2$ esetét bizonyítjuk

Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ a \in \text{int}\ D_f,\ K(a) \subset D_f$

Továbbá $\forall x \in K(a)$ létezik a $\partial_1\ f(x)$ parciális deriváltfüggvény és folytonos a-ban. Illetve létezik $\partial_2\ f(a)$ parciális derivált.

Ekkor $f \in D\{a\}$

Bizonyítás

Azt akarjuk belátni, hogy $f(a+h)-f(a) = < \text{grad } f(a),\ h > + \eta(h)||h||$

Ahol esetünkben $< \text{grad } f(a),\ h > = < [\partial_1 f(a) \quad \partial_2 f(a)],\ [h_1,\ h_2] > = \partial_1 f(a) \cdot h_1 + \partial_2 f(a) \cdot h_2$

$$A + B := f(a+h) - f(a) = \\ [f(a_1+h_1,\ a_2+h_2) - f(a_1,\ a_2+h_2)] + [f(a_1,\ a_2+h_2) - f(a_1,\ a_2)]$$

Ahol A-ban csak az első koordináta, B-ben csak a második, változik, ezért értelmezhetőek parciális deriváltakként (és feltettük, hogy ezek léteznek a-ban).

Továbbá $\partial_1 f \in C\{a\}$, ezért a Lagrange-féle középértéktétel szerint $\exists \xi \in [a_1,\ a_1+h_1]:$

$$f'(a_1+\xi,\ a_2+h_2) = \frac{f(a_1+h_1,\ a_2+h_2) - f(a_1,\ a_2+h_2)}{a_1+h_1-a_1} \iff \\ [\partial_1 f(a_1+\xi,\ a_2+h_2)] \cdot h_1 = f(a_1+h_1,\ a_2+h_2) - f(a_1,\ a_2+h_2) =: A$$

(Ezt Simon nem részletezte ennyire, de nekem kellett, hogy megértsem. Ő ξ-t $v \cdot h_1$-gyel jelölte $(0 < v < 1)$, mivel $\xi \in [a_1,\ a_1+h_1]$)

$A = [\partial_1 f(a_1+\xi,\ a_2+h_2)] \cdot h_1 = \partial_1 f(a) \cdot h_1 + [\partial_1 f(a_1+\xi,\ a_2+h_2) - \partial_1 f(a)] \cdot h_1$

Egy alkalmas $\theta \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \lim\limits_{0} \theta = 0$ függvénnyel:

$B = \partial_2 f(a) \cdot h_2 + \theta(h_2) \cdot h_2$

$f(a+h) - f(a) = \partial_1 f(a) \cdot h_1 + \partial_2 f(a) \cdot h_2 + [\partial_1 f(a_1+\xi,\ a_2+h_2) - \partial_1 f(a)] \cdot h_1 + \theta(h_2) \cdot |h_2|$

Ennek az eleje a gradiens, már csak annyi kell, hogy a vége 0-ba tartson

$\eta(h) := \frac{[\partial_1 f(a_1+\xi,\ a_2+h_2) - \partial_1 f(a)] \cdot h_1 + \theta(h_2) \cdot |h_2|}{||h||_\infty}$

$|\eta(h)| \leq |\partial_1 f(a_1+\xi,\ a_2+h_2) - \partial_1 f(a)| + |\theta(h_2)|$

$\partial_1 f \in C\{a\} \implies \forall \varepsilon > 0,\ \exists 0 < \delta < r,\ \forall x \in K_\delta(a) \subset K_r(a) : |\partial_1 f(x) - \partial_1 f(a)| < \varepsilon$

Tehát ha $||h||_\infty < \delta \implies (a_1+\xi,\ a_2+h_2) \in K_\delta(a) \implies |\partial_1 f(a_1+\xi,\ a_2+h_2) - \partial_1 f(a)| < \varepsilon$

$\implies \eta(h) \to 0 \quad (h \to 0) \implies f \in D\{a\}$