

Diszkrét matematika I.
Írásbeli vizsgán számonkért bizonyítások
(2025. tavasz)

Nem végleges változat! (2025. május 5.)

Relációk

- 1) Mondja ki és bizonyítsa *relációk kompozíciójának asszociativitására* vonatkozó tételt!
- 2) Mondja ki és bizonyítsa *relációk kompozíciójának és inverzének* kapcsolatát!
- 3) Mondja ki és bizonyítsa az *ekvivalencia-relációk* és az *osztályozás* közötti összefüggésre vonatkozó tételt!

Komplex számok

- 1) Mondja ki és bizonyítsa komplex számok *szorzatára, hányadosára* ill. *hatványára* vonatkozó Moivre tétel!
- 2) Mondja ki és bizonyítsa komplex számok *gyökvonására* vonatkozó tétel.

Kombinatorika

- 1) Hányféleképpen tudunk n különböző ill. nem különböző elemet sorrendbe állítani (ismétlés nélküli ill. ismétléses permutáció)? Mondja ki és bizonyítsa a megfelelő tételeket!
- 2) Hányféleképpen választhatunk ki n különböző elemből k darabot, ha a sorrend számít és **a)** egy elemet csak egyszer, **b)** egy elemet többször is választhatunk (ismétlés nélküli ill. ismétléses variáció). Mondja ki és bizonyítsa a megfelelő tételeket!
- 3) Hányféleképpen választhatunk ki n különböző elemből k darabot, ha a sorrend nem számít és **a)** egy elemet csak egyszer, **b)** egy elemet többször is választhatunk (ismétlés nélküli ill. ismétléses kombináció). Mondja ki és bizonyítsa a megfelelő tételeket!
- 4) Mondja ki és bizonyítsa a *binomiális* tételt.
- 5) Mondja ki és bizonyítsa a binomiális együttható *tulajdonságára* vonatkozó tételek (Pascal-háromszög, szimmetria, kombinatorikus bizonyítással)!

Gráfok

- 1) Mondja ki és bizonyítsa a gráfok *élszáma* és *csúcsainak fokszáma* közötti összefüggés.
- 2) Mondja ki és bizonyítsa a *körmentes gráfok elsőfokú csúcsaira* vonatkozó tétel.
- 3) Adott G gráfra bizonyítsa be, hogy
 - a) G fa $\implies G$ összefüggő, de bármely él elhagyásával kapott részgráf már nem; ill.
 - b) G összefüggő, de bármely él elhagyásával kapott részgráf már nem \implies ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor v -ből v' -be pontosan egy út vezet.
- 4) Adott G gráfra bizonyítsa be, hogy
 - a) Ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor v -ből v' -be pontosan egy út vezet $\implies G$ -nek nincs köre, de bármely él hozzáadásával kapott gráfban már van; ill.
 - b) G -nek nincs köre, de bármely él hozzáadásával kapott gráfban már van $\implies G$ fa.

- 5) Mondja ki és bizonyítsa a fa gráfok *élszámára* vonatkozó tétel (3 ekvivalens állítás).
- 6) Mondja ki és bizonyítsa a szükséges és elégséges feltételre vonatkozó tételt *zárt Eulerséta* létezéséről.
- 7) Mondja ki és bizonyítsa a *Dirac tétele* Hamilton-kör létezésének elégséges feltételéről.