Numerikus módszerek 1. **2. ZÁRTHELYI** **2024. december 12.**

Programtervező informatikus Bsc szak

1. (8 pont) Legyen $\|.\|$ egy tetszőleges mátrixnorma, $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertálható mátrix, és definiáljuk $\|.\|$ segítségével a következő $\|.\|_T$ mátrixnormát tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra:

$$\|\mathbf{A}\|_T := \|\mathbf{TAT^{-1}}\|.$$

a) Igazoljuk, hogy a kifejezés mátrixnormát definiál.
b) Ha $\mathbf{T}$ ortogonális mátrix és $\|.\| = \|.\|_2$, akkor milyen kapcsolat van a két norma között? Igazoljuk a sejtésünket.

Megoldás:
a) Az eredeti mátrixnorma tulajdonságainak felhasználásával bizonyítjuk a $\|.\|_T$ mátrixnorma tulajdonságait.

1) $\|\mathbf{A}\|_T = \|\mathbf{TAT^{-1}}\| \geq 0$ (1 pont)

2) $\|\mathbf{A}\|_T = \|\mathbf{TAT^{-1}}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{TAT^{-1}} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = 0$ (1 pont)

3) $\|\lambda\mathbf{A}\|_T = \|\lambda\mathbf{TAT^{-1}}\|_T = |\lambda|\|\mathbf{TAT^{-1}}\| = |\lambda|\|\mathbf{A}\|_T$ (1 pont)

4)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|_T &= \|(\mathbf{T}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{T^{-1}})\| = \|\mathbf{TAT^{-1}} + \mathbf{TBT^{-1}}\| \leq \\ &\leq \|\mathbf{TAT^{-1}}\| + \|\mathbf{TBT^{-1}}\| = \|\mathbf{A}\|_T + \|\mathbf{B}\|_T\end{aligned}$$

(1 pont)

5)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\|_T &= \|(\mathbf{T}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{T^{-1}})\| = \|((\mathbf{TAT^{-1}})\cdot(\mathbf{TBT^{-1}}))\| \leq \\ &\leq \|\mathbf{TAT^{-1}}\|\cdot\|\mathbf{TBT^{-1}}\| = \|\mathbf{A}\|_T\cdot\|\mathbf{B}\|_T\end{aligned}$$

(2 pont)

b) Ha $\mathbf{T}$ ortogonális mátrix és $\|.\| = \|.\|_2$, akkor a 2-es mátrixnormának az ortogonális transzformációkra való invarianciája miatt (jobbról illetve balról szorozva otogonális mátrix-szal, nem változatja a 2-es norma értékét)

$$\|\mathbf{A}\|_T = \|\mathbf{TAT^{-1}}\|_2 = \|\mathbf{AT^{-1}}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2.$$

(2 pont)

2. (8 pont) Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ szimmetrikus mátrixot.

a) Számítsuk ki a $\mathrm{cond}_1(\mathbf{A})$-t!
a) Számítsuk ki a $\mathrm{cond}_2(\mathbf{A})$-t!

Megoldás: a) Az inverz mátrix számolása

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -4 & -6 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_1 &= \max\{5,5,2\} = 5 \\ \|\mathbf{A^{-1}}\|_1 &= \max\left\{1,1,\frac{1}{2}\right\} = 1 \\ \mathrm{cond}_1(\mathbf{A}) &= 5 \cdot 1 = 5. \end{aligned}$$

(2 pont)

b) Az **A** szimmetrikus mátrix, a 2-es kondíciószámához számítsuk ki a sajátértékeit.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 9\right] = \\ &= (2-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda - 5] = 0 \end{aligned}$$

A mátrix sajátértékei

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \Rightarrow \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5.$$

$$\mathrm{cond}_2(\mathbf{A}) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} = \frac{5}{|-1|} = 5$$

(4 pont)

3. (6 pont) Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre a Jacobi-iterációt! Bizonyítsuk az iterációs módszer konvergenciáját!

Megoldás: Először ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_J &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\ &= -\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_J &= \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Így a Jacobi iteráció vektoros alakja a következő:

$$\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{B}_J \mathbf{x_k} + \mathbf{c}_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x_k} + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

Jelen esetben nem tudjuk alkalmazni egyik elégséges feltételt sem $\mathbf{B}_J$-re: a sor-, az oszlop- és a Frobenius norma egyike sem kisebb 1-nél. Az A mátrix nem szig. diag. dom. a soraira nézve. Ahhoz, hogy a konvergenciát igazoljuk, ellenőriznünk kell a szükséges és elégséges feltételt, azaz meg kell mutatnunk, hogy $\rho(B_J) < 1$.

$$\det(\mathbf{B_J} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\lambda = (-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

A mátrix sajátértékei

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\rho\left(\mathbf{B}_J\right) = \max|\lambda_i| = \frac{\sqrt{2}}{2} = q < 1$$

Tehát teljesül a konvergencia szükséges és elégséges feltétele, így $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt mindig konvergens lesz. (4 pont)

4. (12 pont) Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre a Gauss–Seidel-iterációt!

a) Bizonyítsuk az iterációs módszer konvergenciáját!

b) Számítsuk ki $\mathbf{x}^{(1)}$ -et a koordinátás alakjában, ha $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$!

c) Írjuk fel a hibabecslést! Vezessük le azt a képletet, mellyel számológép segítségével ki tudjuk számolni, hogy hány lépés szükséges a fenti $\mathbf{x}^{(0)}$-ból indulva a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

Megoldás: a) Először ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_S &= -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{\mathbf{-1}}\mathbf{U} = -\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_S &= (\mathbf{D}+\mathbf{L})^{\mathbf{-1}}\mathbf{b} = \\
&= \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Így a Gauss–Seidel iteráció vektoros alakja a következő:

$$\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{B}_S\mathbf{x_k} + \mathbf{c}_S = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x_k} + \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(5 pont)

Megkaptuk az átmenetmátrixot, a konvergencia elégséges feltételét elegendő megvizsgálnunk.

$$\|\mathbf{B}_S\|_\infty = \frac{3}{4} = q < 1$$

Mivel találtunk olyan illeszkedő normát, aminek az értéke egynél kisebb, így $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt mindig konvergens lesz. (1 pont)

b) Számítsuk ki az első lépést $\mathbf{x_0} = [1\ 2\ 3]^T$-ból indulva. A Gauss–Seidel-iteráció koordinátás alakja 3×3-es mátrix esetén

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -\frac{1}{a_{11}} \cdot \left(a_{12} \cdot x_2^{(0)} + a_{13} \cdot x_3^{(0)} - b_1\right) = -\frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 - (-8)) = -5 \\
x_2^{(1)} &= -\frac{1}{a_{22}} \cdot \left(a_{21} \cdot x_1^{(1)} + a_{23} \cdot x_3^{(0)} - b_2\right) = -\frac{1}{2} \cdot (1 \cdot (-5) + 1 \cdot 3 + 0) = 1 \\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{a_{33}} \cdot \left(a_{31} \cdot x_1^{(1)} + a_{32} \cdot x_2^{(1)} - b_3\right) = -\frac{1}{2} \cdot (0 \cdot (-5) + 1 \cdot 1 - 0) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Tehát
$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$
(3 pont)

c) A hibabecsléshez számítsuk ki a hiányzó mennyiséget:
$$\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -5-1 \\ 1-2 \\ -\frac{1}{2}-3 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \right\|_\infty = 6.$$
Az iteráció hibabecslése
$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty \le \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^k}{1-\frac{3}{4}} \cdot \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty = \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot 4 \cdot 6 = 24 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \le 10^{-3},$$
$$24000 \le \left(\frac{4}{3}\right)^k.$$
Innen kapjuk, hogy
$$\frac{\lg(24000)}{\lg(4/3)} \le k.$$
(3 pont)

5. (10 pont) Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszerre a Richardson-iterációt!

a) Pontosan mely p paraméter értékekre konvergens az iteráció?
b) Mi az optimális paraméter, mennyi ekkor a kontrakciós együttható, mely normában?
c) A 3–5. feladatokban ugyanazt a lineáris egyenletrendszert vizsgáltuk három konvergens iterációs módszerrel. A konvergencia bizonyítások alapján rendezzük sorba a módszereket a gyorsaságuk szerint. Pontos indoklást kérünk.

Megoldás: A Richardson-iteráció tanult konvergencia tételét használjuk a megoldáshoz.
A tétel szerint szimmetrikus és pozitív definit **A** mátrixra az
$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{I} - p \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x_k} + p \cdot \mathbf{b}$$
iteráció pontosan a $p \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra. Ahol
$$0 < m = \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n = M$$
az **A** mátrix sajátértékei.

Látjuk, hogy a feladat megoldásához az **A** mátrix sajátértékeit ismernünk kell.
$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) - (2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = 0 \end{aligned}$$
A mátrix sajátértékei
$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$
A sajátértékek nagyság szerinti sorrendbe rendezve
$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}.$$
Mivel az összes sajátérték pozitív és **A** szimmetrikus, így alkalmazható a Richardson-iteráció konvergenciájára vonatkozó tétel. (4 pont)

a) A tételben szereplő jelöléseket használva
$$m = 2 - \sqrt{2}, \quad M = 2 + \sqrt{2}.$$

Tehát az iteráció a $p \in (0; \frac{2}{2+\sqrt{2}}) = (0; 2-\sqrt{2})$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra.

(1 pont)

b) Az optimális paraméter a tétel szerint

$$p_0 = \frac{2}{M+m} = \frac{2}{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

A $p_0 = \frac{1}{2}$ paraméterrel felírt optimális Richardson–iteráció vektoros alakja a következő:

$$\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{B}_{p_0}\mathbf{x_k} + \mathbf{c}_{p_0} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x_k} + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ezen paraméter mellett az átmenetmátrix spektrálsugara a tétel állítása szerint

$$\varrho(\mathbf{B_{p_0}}) = \frac{M-m}{M+m} = \frac{2+\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mivel $\mathbf{B_{p_0}}$ szimmetrikus, ezért

$$\varrho(\mathbf{B_{p_0}}) = \|\mathbf{B_{p_0}}\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} = q$$

a kontrakciós együttható a 2-es vektornormában. (2 pont)

c) Mivel $\mathbf{B_J} = \mathbf{B_{p_0}}$, $\mathbf{c_J} = \mathbf{c_{p_0}}$, ezért a két iteráció azonos, ezért a Jacobi–iteráció és a Richardson–iteráció gyorsasága is azonos. A LER mátrixa tridiagonális, ezért $\varrho(\mathbf{B_S}) = \varrho(\mathbf{B_J})^2 < 1$, tehát a Gauss–Seidel-iteráció kétszer gyorsabb, mint a Jacobi–iteráció.

(3 pont)

6. (6 pont) Készítsük el az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 7 & 4 \\ 6 & -13 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixnak a $J = \{(1,4),(2,4),(3,1)\}$ pozícióhalmazra illeszkedő részleges LU-felbontását? Határozzuk meg az $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ és $\mathbf{Q}$ mátrixokat!

Megoldás: Az $\mathbf{A}$ mátrix J-re illeszkedő faktorizációját határozzuk meg, azaz a

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} - \mathbf{Q}$$

alakot, ahol $\mathbf{J} = \{(1,4),(2,4),(3,1)\}$ a pozícióhalmaz. Ez az alábbi pozíciókat jelenti.

$$\begin{bmatrix} & & & * \\ & & & * \\ * & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

1. lépés: Az $\mathbf{A}$ mátrix szétbontása a pozicióhalmaz első sora és oszlopa alapján, majd eliminálás az 1. oszlopban.

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{1} = \mathbf{B} = \mathbf{P_1} - \mathbf{Q_1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 6 & -13 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt.

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2} = \mathbf{L_1 P_1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_1^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_1}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 1. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_1}$-et megszorozva balról $\mathbf{L_1}$-gyel, a $\mathbf{P_1}$ első oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_1^{-1}}$ mátrixot a $\mathbf{P_1}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy az első oszlopának elemeit $p_{11}^{(1)}$-gyel leosztjuk. $\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt.

(2 pont)

2. lépés: Az $\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2}$ mátrix szétbontása a pozicióhalmaz második sora és oszlopa alapján, majd eliminálás a 2. oszlopban.

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{P_2} - \mathbf{Q_2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P_2}$-n elvégezzük az eliminációt.

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{3} = \mathbf{L_2 P_2} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_2}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 2. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_2}$-t megszorozva balról $\mathbf{L_2}$-vel, a $\mathbf{P_2}$ második oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_2^{-1}}$ mátrixot a $\mathbf{P_2}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy a második oszlopának diagonális alatti elemeit $p_{22}^{(2)}$-vel leosztjuk.

(2 pont)

3. lépés: Mivel a 2. lépés után felsőháromszög alakot kaptunk és minden pozícióhalmaz elemet felhasználtunk, ezért $\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{3} = \mathbf{P_3}$, $\quad \mathbf{Q_3} = \mathbf{0}$, $\quad \mathbf{L_3} = \mathbf{I}$, tehát $\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{4} = \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{3}$.

A kapott részeredményekből fel tudjuk írni az ILU-felbontást.

$$\mathbf{L} \;=\; \mathbf{L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{U} \;=\; \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{4} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} \;=\; \mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2} + \mathbf{Q_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2 pont)