Numerikus módszerek 2.

5. előadás: Interpoláció polinomokkal

Krebsz Anna

ELTE IK

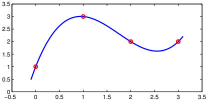
Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék

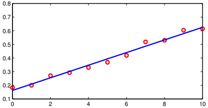
Függvények közelítése

A gyakorlatban sokszor előfordul, hogy egy költségesen számolható függvény helyett egyszerűbbel dolgozzunk. Az egyszerűbb függvény általában polinom, mely Horner-algoritmussal hatékonyan kiértékelhető.

- Olyan egyszerűbb függvényt keresünk, amely illeszkedik adott pontokra $\rightarrow$ ez az **interpolációs feladat**.



- Olyan egyszerűbb függvényt keresünk, amely közel van a mérési eredményekhez. A mérés hibája miatt nem cél a pontos illeszkedés $\rightarrow$ ez az **approximációs feladat**.



Az interpoláció alkalmazási területei:

1. Becslési módszerek konstrukciója
2. A numerikus integrálás alapja
3. Diff.egyenletek numerikus módszerei, többlépéses módszerek konstrukciója
4. Számítógépes grafika
5. Jel- és képfeldolgozás
    - Hang- és videófelvételek lassítása/gyorsítása
    - Képek méretezése, forgatása
    - Photoshop
6. Útvonalak, pályaívek tervezése
7. Meteorológiai állapothatározók megállapítása
8. Térinformatikai rendszereknél digitális terepmodellek

Az approximáció alkalmazási területei:

1. Gauss (1809) a Ceres pályáját a legkisebb négyzetek módszerével találta meg. Legendre (1805) ugyanezt a módszert az üstökösök pályájának megadására használta, tőle származik a legkisebb négyzetek módszere elnevezés.
2. Analízisben: Taylor-polinom, sorok, Fourier-sorok.
3. Statisztikában regresszióanalízis (trendszámítás).
4. Természettudományokban mérési eredményekkel paraméter becslés, a mérések matematikai feldolgozása.
5. Gazdasági elemzések, idősoranalízis, üzleti előre jelzések.
6. Geodéziai alkalmazások.
7. Vasúti, közúti útvonal, pályaívek tervezése.

Tartalomjegyzék

Definíció: Az interpoláció alapfeladata

Adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a; b]$ különböző alappontok, $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ függvényértékek. Olyan $p_n \in P_n$ polinomot keresünk, melyre

$$p_n(x_i) = y_i, \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

A feltételnek eleget tevő polinomot *interpolációs polinomnak* nevezzük. P_n a legfeljebb n-edfokú polinomok halmaza.

Megj.: Ha adott az $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ függvény, amit közelíteni szeretnénk, akkor $y_i = f(x_i)$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Tétel: Az interpolációs polinom létezése és egyértelműsége

$$\exists! \; p_n \in P_n : \quad p_n(x_i) = y_i, \; (i = 0, 1, \ldots, n)$$

Biz.: Az interpolációs polinomot a határozatlan együtthatók módszerével adjuk meg. A polinom alakja

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Az interpolációs feltételből

$$p_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Biz. folyt.: A kapott LER mátrixa Vandermonde mátrix, mely különböző alappontok esetén invertálható.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

A LER megoldása egyértelműen létezik, ezzel az interpolációs feladatnak is egyetlen megoldása van. □

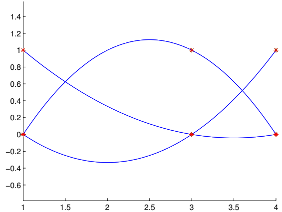
Megj.: A LER megoldást a gyakorlatban sosem használjuk, mert a Vandermonde-mátrix rosszul kondícionált. A hatványfüggvény rendszer $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ helyett más bázisokat fogunk használni az előállításhoz.

Tartalomjegyzék

Definíció: Lagrange-alappolinomok

Az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ különböző alappontok által meghatározott *Lagrange-alappolinomok* a következők:

$$\ell_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1 \ldots, n).$$



Tétel: A Lagrange-alappolinomok tulajdonságai

1.
$$\ell_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

2.
$$\ell_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\,\omega_n'(x_k)}, \quad \text{ahol} \quad \omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

3.
$$L_n(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x) \equiv p_n(x)$$

L_n-t az interpolációs polinom *Lagrange-alakjának* nevezzük.

Biz.: Trivi.

Példa: Lagrange-alakra

Készítsük el az $f(x) = 2^x$ függvényt a $0, 1, 2$ alappontokon interpoláló polinom Lagrange-alakját. A polinom segítségével közelítsük a $\sqrt{2}$ és a $2^{\sqrt{2}}$ értékeket!

Megoldás: Írjuk fel az $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ alappontokhoz tartozó Lagrange-alappolinomokat!

1. $$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

2. $$\ell_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = (-1)x(x-2)$$

3. $$\ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}x(x-1)$$

4. A függvényértékek a Lagrange-alak felírásához: $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 4$.

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) + 2 \cdot (-1)x(x-2) + 4 \cdot \frac{1}{2}x(x-1)$$

Példa Lagrange-alakra

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx L_2\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) - 2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-2\right) + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{11}{8} = 1.375$$

$$f\left(\sqrt{2}\right) \approx L_2\left(\sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-2\right) - 2\cdot\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-2\right) +$$

$$+ 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 2.7071$$

A Matlab által számolt érték: $f(\sqrt{2}) = 2^{\sqrt{2}} \approx 2.6651$.

Definíció: Osztott differenciák

Az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ különböző alappontok által meghatározott

- *elsőrendű osztott differenciák* a következők:

$$f[x_i, x_{i+1}] := \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

- A *k-adrendű osztott differenciákat* rekurzívan definiáljuk:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i},$$

$$k = 1, \ldots, n, \quad i = 0, \ldots n-k.$$

- Ha a 0-adrendű osztott differenciákat $f[x_i] := f(x_i)$-vel definiáljuk, akkor az elsőrendű osztott differenciát is a rekurzióval számolhatjuk.

Az osztott differenciákat táblázatba szokás rendezni:

x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

Definíció: Newton-féle bázis

Az interpolációs polinom felírásához a következő bázisra lesz szükségünk:

$$1,\ (x - x_0),\ (x - x_0)(x - x_1),\ \ldots,\ \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i).$$

Példa: Newton-alakra

Készítsük el az $f(x) = 2^x$ függvényre a $0, 1, 2$ alappontokon az interpoláció felírásához azükséges osztott differencia táblázatot és a Newton-bázist!

Megoldás: Az osztott differenciák táblázata:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	$\boxed{1}$		
1	2	$\frac{2-1}{1-0} = \boxed{1}$	
2	4	$\frac{4-2}{2-1} = 2$	$\frac{2-1}{2-0} = \boxed{\frac{1}{2}}$

Az interpolációs polinom Newton-bázisa:

$$1,\ (x-0),\ (x-0)(x-1).$$

□

Tétel: Az osztott differenciák tulajdonságai

1. $$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\omega_k'(x_j)}$$

2. Ha σ a $(0, 1, \dots, k)$ értékek egy permutációja, akkor

$$f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}] = f[x_0, x_1, \dots, x_k].$$

Biz.: Gyakorlaton az 1. állítást teljes indukcióval bizonyítjuk.
A 2. állítás ebből trivi.

Alakítsuk át a Lagrange-alakot:

$$L_n(x) = L_0(x) + \sum_{k=1}^{n} (L_k(x) - L_{k-1}(x)),$$

ahol L_k az $x_0, x_1, \ldots, x_k$ alappontokra felírt Lagrange-alak.

- $L_0(x) = \text{konstans} = f(x_0)$
- $L_k(x_j) - L_{k-1}(x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0, \quad (j = 0, 1, \ldots, k-1)$
- Tehát $L_k - L_{k-1}$ legfeljebb k-adfokú polinom és k db gyöke van, így alakja

  $$(L_k - L_{k-1})(x) = c_k \cdot (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}) = c_k\, \omega_{k-1}(x).$$

- $$(L_k - L_{k-1})(x_k) = f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = c_k\, \omega_{k-1}(x_k) \quad | : \omega_{k-1}(x_k)$$

- $$\frac{f(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} - \frac{L_{k-1}(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} = c_k$$
- Felhasználva, hogy
  $L_{k-1}(x_k) = \sum_{j=0}^{k-1} f(x_j) \cdot \underbrace{\frac{\omega_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_j)\,\omega'_{k-1}(x_j)}}_{=\ell_j(x_k)},$
- $$\frac{f(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{(x_k - x_j)\,\omega'_{k-1}(x_j)} = c_k.$$
- De $\omega_{k-1}(x_k) = \omega'_k(x_k)$ és
- $(x_k - x_j)\,\omega'_{k-1}(x_j) = -(x_j - x_k)\,\omega'_{k-1}(x_j) = -\omega'_k(x_j)$.
- $$\frac{f(x_k)}{\omega'_k(x_k)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{-\omega'_k(x_j)} = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\omega'_k(x_j)} = f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = c_k$$

Tétel: Newton-alak

$$N_n(x) := f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \cdot \omega_{k-1}(x) \equiv L_n(x)$$

N_n-t az interpolációs polinom *Newton-alakjának* nevezzük.
A rekurzív formula új x_{n+1} alappont hozzávétele esetén:

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}] \cdot \omega_n(x).$$

Biz.: A tétel előtti levezetésben.

Példa: Newton-alakra

Írjuk fel az $f(x) = 2^x$ függvényt a $0, 1, 2$ alappontokon interpoláló polinom Newton-alakját és közelítsük $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$ értékét!

Megoldás: Az osztott differenciák táblázatát korábban már kiszámoltuk, az átlóbeli értékekre van szükségünk:

$$f(0) = 1, \;\; f[0,1] = 1, \;\; f[0,1,2] = \frac{1}{2}.$$

A Newton-alak és Horner elrendezése:

$$N_2(x) = 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2}\,x(x-1) = \left[\frac{1}{2}\,(x-1) + 1\right] x + 1.$$

$\sqrt{2}$ közelítése a Newton-alakból:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx N_2\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\frac{1}{2}\,\left(\frac{1}{2} - 1\right) + 1\right] \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{8}.$$

$\square$

Tétel: Hibaformula

1. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges,
2. $[a;b]$ az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ és x által kifeszített intervallum,
3. továbbá $f \in C^{n+1}[a;b]$.

Ekkor

1. $\exists\ \xi_x \in [a;b]$, melyre

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \omega_n(x).$$

2. A hibabecslés

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_n(x)|, \text{ahol}$$

$$M_{n+1} := \|f^{(n+1)}\|_\infty := \|f^{(n+1)}\|_{C[a;b]} := \max_{\xi \in [a;b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Biz.: A Rolle-tétel többszöri alkalmazásával.

1. Ha $x = x_i$ valamely i-re, akkor az állítás trivi.
2. Tegyük fel, hogy $x \neq x_i$ minden i-re és definiáljuk a következő függvényt

$$g_x(z) := f(z) - p_n(z) - \frac{\omega_n(z)}{\omega_n(x)} \cdot (f(x) - p_n(x)) \,.$$

3. Ekkor

$$g_x(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \text{ és } g_x(x) = 0,$$

tehát g_x-nek legalább $n+2$ db gyöke van $[a; b]$-n. A Rolle-tétel miatt a szomszédos gyökök között van g_x'-nak gyöke. Így g_x'-nak legalább $n+1$ db gyöke van $[a; b]$-n. Hasonlóan végiggondolva g_x''-nak legalább n db gyöke. Így $g_x^{(n+1)}$-nak legalább 1 db gyöke van $[a; b]$-n, jelöljük ξ_x-szel.

Biz. folyt.: Felírva, hogy $g_x^{(n+1)}$-nak ξ_x gyöke

$$0 = g_x^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - \underbrace{p_n^{(n+1)}(\xi_x)}_{=0} - \frac{(n+1)!}{\omega_n(x)} \cdot (f(x) - p_n(x))$$

$$\Rightarrow \quad f^{(n+1)}(\xi_x) = \frac{(n+1)!}{\omega_n(x)} \cdot (f(x) - p_n(x)) \,.$$

Átrendezve kapjuk a tétel állítását

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \omega_n(x),$$

melyből a hibabecslés triviálisan adódik. $\square$

Tétel: Hibaformula a Newton-alakra

- Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $x \neq x_i$.
- Ekkor

$$f(x) - N_n(x) = f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] \cdot \omega_n(x).$$

Biz.: Legyen $N_{n+1}(x)$ az $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$ pontokra felírt Newton-alak. Mivel x-ben interpolál, ezért $N_{n+1}(x) = f(x)$.
A rekurzióból

$$f(x) - N_n(x) = N_{n+1}(x) - N_n(x) = f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] \cdot \omega_n(x).$$

$\square$

Tétel: Következmény a hibaformulákból

1. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $x \neq x_i$
2. $[a; b]$ az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ és x által kifeszített intervallum,
3. továbbá $f \in C^{n+1}[a; b]$.

Ekkor $\exists\ \xi_x \in [a; b]$, melyre

$$f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}.$$

Megj.: $n = 0$ esetén a Lagrange-középérték-tételt kapjuk $\exists\ \xi_x \in [x; x_0]$ vagy $\xi_x \in [x_0; x]$, melyre

$$f[x, x_0] = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'(\xi_x).$$

Példa: hibabecslésre

Készítsük el az $f(x) = 2^x$ függvényt a $0, 1, 2$ alappontokon interpoláló polinomra hibabecslést az $x = \frac{1}{2}$ pontban és a $[0; 2]$ intervallumon!

Megoldás: A függvény deriváltjai:

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2, \quad f''(x) = 2^x \cdot (\ln 2)^2, \quad f'''(x) = 2^x \cdot (\ln 2)^3.$$

A derivált becslése:

$$M_3 = \max\left(|f'''(\xi)| : \xi \in [0; 2]\right) = 2^2 \cdot (\ln 2)^3 = 4(\ln 2)^3.$$

Példa hibabecslésre

Az $\omega_2(x)$ függvény

$$\omega_2(x) = (x-0)(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x,$$
$$\omega_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) = \frac{3}{8}.$$

Hibabecslés az $x = \frac{1}{2}$ pontban

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - L_2\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\sqrt{2} - \frac{11}{8}\right| \le \frac{M_3}{3!}\cdot\left|\omega_2\left(\frac{1}{2}\right)\right| =$$
$$= \frac{4(\ln 2)^3}{6}\cdot\frac{3}{8} = \frac{(\ln 2)^3}{4} \approx 0.0833$$

Példa hibabecslésre

Vizsgáljuk $\omega_2(x)$ szélsőértékét $[0;2]$-n.

$$\omega_2'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\omega_2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \approx -0.3839$$

$$\omega_2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Hibabecslés $x \in [0;2]$ esetén

$$|f(x) - L_2(x)| \le \frac{M_3}{3!} \cdot |\omega_2(x)| \le \frac{4(\ln 2)^3}{6} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{4(\ln 2)^3\sqrt{3}}{27} \approx 0.0855$$

$\square$

Köszönöm a figyelmet!