Diszkrét matematika 1

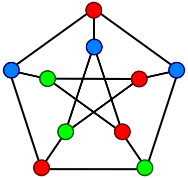
Gráfok

Mérai László
merai@inf.elte.hu

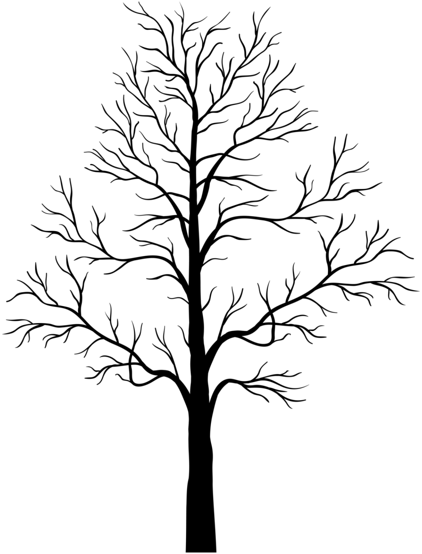
Komputeralgebra Tanszék

2025 tavasz

Gráfok



Fák

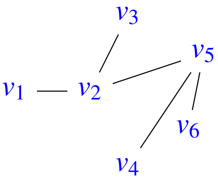


Definíció

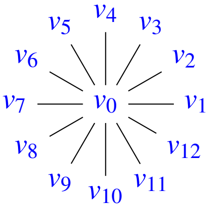
Egy $G = (V, E)$ gráfot fának hívunk, ha

- összefüggő;
- körmentes.

Példa



$G = (V, E)$



C_6

Fák

Tétel

Egy G gráfra a következők ekvivalensek

1. G fa
2. G összefüggő, de bármely él elhagyásával kapott részgráf már nem
3. ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor v-ből v'-be pontosan egy út vezet
4. G-nek nincs köre, de bármely él hozzáadásával kapott gráfban már van.

Azaz a fa élszám tekintetében optimális:

- él elhagyásával több komponensre esik
- él hozzáadásával kör keletkezik

Bizonyítás.

Bizonyítás menete: $1. \implies 2. \implies 3. \implies 4. \implies 1.$

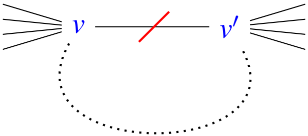
Fák, bizonyítás 1/4

1. állítás $(1. \implies 2.)$

G fa $\implies$ G összefüggő, de bármely él elhagyásával kapott részgráf már nem.

Bizonyítás.

- G összefüggősége következik a fa definíciójából.
- bármely él elhagyásával kapott részgráf már nem összefüggő:



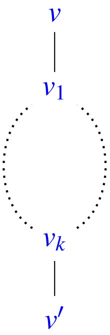
- Biz. indirekt.
- Tfh az e él (v és v' között) elhagyásával a gráf összefüggő marad.
- Ekkor az összefüggőség miatt van a részgráfban egy $v, e_1, v_1, \ldots, e_k, v'$ út.
- Ez kiegészítve az e éllel egy kört kapunk. $\lightning$

Fák, bizonyítás 2/4

2. állítás (2. $\Longrightarrow$ 3.)

G összefüggő, de bármely él elhagyásával kapott részgráf már nem $\Longrightarrow$ ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor v-ből v'-be pontosan egy út vezet

Bizonyítás.



- G összefüggő $\Longrightarrow$ v és v' között létezik séta
- körök elhagyásával létezik út
- út egyértelműsége: Biz. indirekt.
  - Tfh v és v' között több út is van:
    $v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_k, e_k, v'$ ill., $v, f_1, u_1, f_2, \ldots, u_\ell, f_\ell, v'$
  - A két út különbözik, legyen $r = \min\{i : v_i \neq u_i\}$ és $s = \min\{i > r : v_i = u_j$ valamely $j > r\}$
  - Ekkor a v_{r-1} és v_s közötti két út segítségével kört kapunk.
  - A körön bármely él elhagyásával a gráf összefüggő marad. $\lightning$

Fák, bizonyítás 3/4

3. állítás $(3. \implies 4.)$

Ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor v-ből v'-be pontosan egy út vezet $\implies$ G-nek nincs köre, de bármely él hozzáadásával kapott gráfban már van

Bizonyítás.

- Biz.: indirekt (Logikai emlékeztető: $A \Rightarrow (B \wedge C) \Leftrightarrow (\neg B \vee \neg C) \Rightarrow \neg A$)
- 1. rész: tfh van kör $\Rightarrow$ a körön két irányban haladva két különböző út $\lightning$.
- 2. rész: tfh $\{v, v'\}$ él hozzáadásával sem keletkezik kör $\Rightarrow$ v, v' között nem volt út $\lightning$

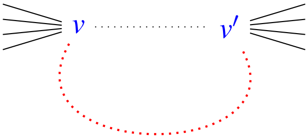
Fák, bizonyítás 4/4

4. állítás ($4. \implies 1.$)

G-nek nincs köre, de bármely él hozzáadásával kapott gráfban már van $\implies$ G fa

Bizonyítás.

- G körmentes közvetlenül következik
- G összefüggősége: Biz: indirekt



- Tfh nem összefüggő, pl. $v, v' \in V$ között nincs séta. Spec. $\{v, v'\} \notin E$
- Ekkor az $e = \{v, v'\}$ él behúzásával a gráfban már van kör.
- Legyen ez $v, e, v', e_1, v_1, \ldots, e_k, v$.
- Ekkor a $v', e_1, v_1, \ldots, e_k, v$ egy út v' között $\lightning$

Ezzel bebizonyítottuk az **eredeti tételt** is: $1. \implies 2. \implies 3. \implies 4. \implies 1.$ $\square$