Hf 1. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát a valós számok halmazán!

a) $\sum\limits_{n=0} \frac{3^n+(-2)^n}{n+1} x^n$.

A hatványsornál $\alpha_n = \frac{3^n+(-2)^n}{n+1}$ $(n\in\mathbb{N})$, és $\underline{\underline{a=0}}$.

A Cauchy–Hadamard-tétel szerint

$$\sqrt[n]{|\alpha_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{3^n+(-2)^n}{n+1}\right|} = \frac{\sqrt[n]{3^n\left|1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right|}}{\sqrt[n]{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = \frac{3}{\sqrt[n]{n}}\cdot\frac{\sqrt[n]{\left|1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right|}}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}} = \left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n \geq 0\right) =$$

$$= \frac{3}{\sqrt[n]{n}}\cdot\frac{\sqrt[n]{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(\sqrt[n]{n}\to 1,\ \frac{1}{n}\to 0,\ q^n\to 0 \text{ ha } |q|<1,\right.$$
$x_n := 1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n \to 1 > 0$ szám $\Rightarrow \sqrt[n]{x_n}\to 1$,
$\left. y_n = 1+\frac{1}{n} \to 1>0 \text{ szám} \Rightarrow \sqrt[n]{y_n}\to 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{}$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{1}\cdot\frac{1}{1} = 3 =: A.$$

Ekkor a hatványsor konvergenciasugara: $R = \frac{1}{A} = \frac{1}{3}$.

Ezért $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = (a-R, a+R) \subseteq KH\left(\sum\limits_{n=0} \frac{3^n+(-2)^n}{n+1} x^n\right) \subseteq [a-R, a+R] = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

A határpontok vizsgálata.

– Ha $x=\frac{1}{3}$, akkor a $\sum\limits_{n=0} \frac{3^n+(-2)^n}{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ sort kapjuk, ami divergens,

hiszen, pozitív tagú sor, és $\frac{3^n+(-2)^n}{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n+1} \geq \left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n \geq -\frac{2}{3}, \text{ ha } n\geq 1\right) \geq \frac{1-\frac{2}{3}}{n+1} = \frac{1/3}{n+1}$

és $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1/3}{n+1} = \frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{3}\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{3}(+\infty) = +\infty$ $\left(\sum\limits_{n=1}\frac{1}{n} \text{ sor divergens}\right)$,

ezért a minoráns krit. szerint a sor divergens.

– Ha $x=-\frac{1}{3}$, akkor a $\sum\limits_{n=0} \frac{3^n+(-2)^n}{n+1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ sort kapjuk, ami konvergens,

hiszen $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n+1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n+1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(2/3)^n}{n+1}$,

ahol $\sum\limits_{n=0}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum\limits_{n=1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ Leibniz-sor konverges,

és $\sum\limits_{n=0}\frac{(2/3)^n}{n+1}$ konvergens (gyökkritérium szerint $\sqrt[n]{\frac{(2/3)^n}{n+1}} = \frac{2/3}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}}_{\to 1}} \to \frac{2}{3} < 1$).

Összefoglalva: $KH\left(\sum\limits_{n=0}\frac{3^n+(-2)^n}{n+1}x^n\right) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

b) $\sum_{n=2} \frac{2^n+1}{n^2-1}(x-2)^n$

A hatványsornál $\alpha_0=0, \alpha_1=0$, $\alpha_n=\frac{2^n+1}{n^2-1}$ $(n\geq 2)$, és $\underline{\underline{a=2}}$.

Ha $n\geq 2$, akkor

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \frac{2^{n+1}+1}{(n+1)^2-1}\cdot\frac{n^2-1}{2^n+1} = \frac{2\cdot 2^n+1}{2^n+1}\cdot\frac{n^2-1}{n^2+2n} = \frac{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}\cdot\frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2 =: A$$

Ekkor a hatványsor konvergenciasugara: $R=\frac{1}{A}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

Ezért $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)=(a-R,a+R)\subseteq KH\left(\sum_{n=2}\frac{2^n+1}{n^2-1}(x-2)^n\right)\subseteq[a-R,a+R]=\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$.

A határpontok vizsgálata:

– Ha $x=\frac{5}{2}$, akkor a $\sum_{n=2}\frac{2^n+1}{n^2-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ sort kapjuk, ami konvergens,

hiszen, pozitív tagú sor, és $\frac{2^n+1}{n^2-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^2-1} \leq \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq 1, \text{ha } n\geq 2\right) \leq \frac{1+1}{n^2-1} = \frac{2}{n^2-1} =$

$$= \frac{4}{2n^2-2} = \frac{4}{n^2+n^2-2} \leq \left(n^2-2\geq 0, \text{ha } n\geq 2\right) \leq \frac{4}{n^2}$$

és $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{4}{n^2} = 4\cdot\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$ $\left(\sum_{n=1}\frac{1}{n^2} \text{ sor konvergens}\right)$,

ezért a majoráns kritérium szerint a sor konvergens.

– Ha $x=\frac{3}{2}$, akkor a $\sum_{n=2}\frac{2^n+1}{n^2-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ sort kapjuk, ami konvergens,

hiszen abszolút konvergens, mert abszolút sora

$$\sum_{n=2}\left|\frac{2^n+1}{n^2-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = \sum_{n=2}\frac{2^n+1}{n^2-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

ami az előző pont szerint konvergens.

Összefoglalva: $KH\left(\sum_{n=2}\frac{2^n+1}{n^2-1}(x-2)^n\right)=\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$

Hf 2. Az alábbi f függvényeket (vagy egy alkalmas leszűkítésüket) állítsa elő nulla középpontú hatványsor összegeként!

a) $f(x)=\dfrac{x+3}{5x^2+9x-2}$ $\left(x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,\tfrac{1}{5}\}\right)$

Alakítsuk át a függvényt!

$$f(x)=\frac{x+3}{5x^2+9x-2}=\frac{x+3}{(x+2)(5x-1)}\quad \left(x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,\tfrac{1}{5}\}\right)$$

Parciális törtekre bontunk:

$$\frac{x+3}{(x+2)(5x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{5x-1}=\frac{A(5x-1)+B(x+2)}{(x+2)(5x-1)}$$

$x+3=A(5x-1)+B(x+2)$ $\forall x\in\mathbb{R}$
$\begin{cases}\text{Ha } x=-2 \Rightarrow 1=A(-11)+B\cdot 0\Rightarrow A=-\frac{1}{11}\\ \text{Ha } x=\frac{1}{5}\Rightarrow \frac{16}{5}=A\cdot 0+B\frac{11}{5}\Rightarrow B=\frac{16}{11}.\end{cases}$

Így

$$f(x)=\frac{16}{11(5x-1)}-\frac{1}{11(x+2)}=-\frac{16}{11}\cdot\frac{1}{1-5x}-\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{16}{11}\cdot\frac{1}{1-5x}-\frac{1}{22}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}.$$

A mértani sor összegfüggvénye $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ $(-1<x<1)$. Ez alapján

$\dfrac{1}{1-5x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(5x)^n$ $(-1<5x<1)$, azaz $\dfrac{1}{1-5x}=\sum_{n=0}^{+\infty}5^nx^n$ $\left(-\frac{1}{5}<x<\frac{1}{5}\right)$.

$\dfrac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n$ $\left(-1<-\frac{x}{2}<1\right)$, azaz $\dfrac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^nx^n$ $(-2<x<2)$.

Tehát $f(x)=-\dfrac{16}{11}\,\dfrac{1}{1-5x}-\dfrac{1}{22}\,\dfrac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}=-\dfrac{16}{11}\sum_{n=0}^{+\infty}5^nx^n-\dfrac{1}{22}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^nx^n=$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[-\frac{16}{11}\cdot 5^n-\frac{1}{22\cdot(-2)^n}\right]x^n\quad\left(-\frac{1}{5}<x<\frac{1}{5}\right).$$

b) $f(x)=\sin 2x\cdot\cos 2x$ $(x\in\mathbb{R})$

Alakítsuk át a függvényt: $f(x)=\frac{1}{2}(2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x)=\frac{1}{2}\sin 4x$ $(x\in\mathbb{R})$.

A szinusz függvény értelmezése szerint $\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. $(x\in\mathbb{R})$.

Tehát $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 4x=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2}\cdot\dfrac{4^{2n+1}\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}=$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}2\cdot\frac{(-16)^n\,x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(x\in\mathbb{R}).$$