

Programtervező informatikus Bsc szak

A szakirány

Név \_\_\_\_\_

Neptun kód \_\_\_\_\_

Gyak.vez. neve \_\_\_\_\_

Pontszám \_\_\_\_\_

**Számolási feladatok:**

A számolási feladatok során az  $\mathbf{A}$  mátrix minden esetben a következő:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. (5 pont) Írja fel a mátrix Gersgorin köreit és adjon becslést az általánosított Gersgorin-tétellel a szimmetrikus mátrix (valós) sajátértékeire. Igazolja a mátrix invertálhatóságát hasonlósági transzformáció és Gersgorin-tétel alkalmazásával.
2. (5 pont) A Fagyeyev-féle "trace" módszer segítségével írja fel az  $\mathbf{A}$  mátrix karakterisztikus polinomját!
3. (6 pont) Alkalmazza  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_1$ -ből indulva a hatványmódszer 3 lépését az alábbi szimmetrikus mátrix egy sajátértékének és sajátvektorának közelítésére! (Nem kell sejtést adni a sajátértékre, sajátvektorra.)
4. (8 pont) Végezze el az  $(i, j) = (1, 2)$  pozíciónak megfelelő Jacobi-forgatást az  $\mathbf{A}$  mátrixon! Adja meg a forgatási mátrixot és a forgatás utáni eredményt is.

Segítségül képletek:  $p := \cot 2\varphi$

$$\cos 2\varphi = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad c := \cos \varphi = \sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}}, \quad s := \sin \varphi = \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}$$

5. (6 pont) Határozza meg az  $f(x) = 2^x + 3^x$  függvényt a 0, 1, 2, 3 alappontokon interpoláló interpolációs polinomot! (Nem kell rendezni a polinomot.)

## Programozási feladatok:

6. (20 pont) Írjon programot `rayleigh.m` néven a Rayleigh-hányadosra vonatkozó 2. tétel alkalmazására.

- Bemenő paraméter:
  - `A`: a vizsgált mátrix,
  - `N`: a vizsgált vektorok száma.
- Kimenő paraméter:
  - `mu`: a Rayleigh-hányadosok értéke.
  - `r`: a reziduális hibákat tartalmazó vektor,
- Jelezzen hibát, ha a mátrix nem négyzetes.
- Ha  $\|A - A^T\|_2 < 10^{-6}$ , akkor tekintse szimmetrikusnak a mátrixot. Jelezzen hibát, ha ez a feltétel nem teljesül.
- Készítsen összesen  $N$  db véletlen vektort  $[-1; 1]$  intervallumból vett értékekkel.
- Ezen vektorokat
  - normálja le 2-es normában, majd
  - számítsa ki és tárolja a Rayleigh-hányados értékeit a `mu` vektorban.
  - Az egységvektorra és a hozzátartozó hányadosra határozza meg reziduális hiba 2-es normáját, és tárolja az `r` vektorban.
  - Csak a `mu` és `r` vektort tárolja, az összes véletlen vektort ne! A vektorokkal egyesével hajtsa végre a fenti lépéseket.
- Jelenítse meg pontokkal (.) a grafikonon az `r` értékeit a `mu` függvényében.
- Írja a következő címet a rajra: Reziduális hibák.
- Készítsen külön fájlban (`teszt.m`) két szimmetrikus  $5 \times 5$  mátrixot teszt példának,
  - Az egyik példa véletlen számok segítségével előállított szimmetrikus mátrix legyen.
  - A másik példában a véletlen számok segítségével előállított mátrix sajátértékei egészek legyenek, és legyen közöttük többszörös sajátérték.
  - Próbálja ki mindkét mátrixra a programot először  $N = 100$  esetén, majd ha működik  $N = 10^6$  esetén!

Beküldendő a `rayleigh.m` és a `teszt.m` fájl.