Diszkrét matematika I. keddi (2025.03.11.) 1. Zh

feladatainak eredményei és részletesen kidolgozott megoldásai

A megoldások ismertetésénél itt most nem csak a konkrét módszert, hanem a módszer hátterét, illetve a módszerhez vezető gondolatsort is bemutatjuk (ez utóbbiak részletezését a hallgatóktól a ZH megoldásában természetesen nem vártuk el).

1. a) Pozitív egészeket tekintve jelölje $P(x)$, $K(x,y)$ illetve $D(x,y)$ rendre azt, hogy x prím, x kisebb y-nál, illetve hogy x osztója y-nak. Igaz-e a következő állítás? (Válaszát indokolja!) Tagadja formálisan a kifejezést! **(3p)**

$$\forall x(P(x) \Rightarrow (\forall y(D(y,x) \wedge K(y,x) \Rightarrow \forall z D(y,z))))$$

Megoldás: Minden x-re, ha x prím, akkor minden olyan y-ra, amire y osztja x-et, és $y < x$, arra az is teljesül, hogy y oszt minden z-t. Természetesebb nyelvre átfogalmazva:

Minden (pozitív egész) x prímszámnak minden nála kisebb pozitív egész y osztója minden pozitív egész z számot oszt.

Ha x prím, akkor a pozitív egészek körében csak saját maga és az 1 a két osztója, ezek közül csak az 1 az, ami x-nél kisebb, azaz a fenti kifejezésben csak $y = 1$ lehet olyan, amire $(D(y,x) \wedge K(y,x)$ IGAZ értéket vesz fel $P(x)$ IGAZsága esetén. Az 1 pedig tényleg minden pozitív egész z-nek osztója (minden más y esetén HAMIS a második implikáció feltétele, így maga az implikáció azonosan IGAZ). **Tehát IGAZ az állítás.**

A formális tagadáshoz először fogalmazzuk át az implikációkat ‚Ha A akkor B' formáról ‚nem A vagy B' formájúra. Először az első (‚külső') implikációt:

$$\forall x : \Big(\neg P(x) \vee \Big(\forall y : \big((D(y,x) \wedge K(y,x)\big) \Rightarrow \big(\forall z : D(y,z)\big)\Big)\Big)$$

Majd a másikat is, a $\neg\big((D(y,x) \wedge K(y,x)\big) \Leftrightarrow \neg D(y,x) \vee \neg K(y,x)$ deMorgan szabállyal:

$$\forall x : \Big(\neg P(x) \vee \Big(\forall y : \big(\neg D(y,x) \vee \neg K(y,x)\big) \vee \big(\forall z : D(y,z)\big)\Big)\Big)$$

A kvantorokat is gyűjtsük a kifejezés legelejére, és a ‚vagy' asszociativitását kihasználva hagyjuk el a ‚felesleges' zárójeleket:

$$\forall x : \forall y : \forall z : \neg P(x) \vee \neg D(y,x) \vee \neg K(y,x) \vee D(y,z)$$

Most már kényelmesen lehet formálisan tagadni, újra a deMorgan-szabályokat használva:

$$\boldsymbol{\exists x : \exists y : \exists z : P(x) \wedge D(y,x) \wedge K(y,x) \wedge \neg D(y,z)}$$

1. b) Az embereket tekintve jelölje $J(x)$, $B(x)$, $E(x)$, $K(x)$, $N(x)$, $H(x,y)$, $I(x,y)$ rendre azt, hogy x jogász, bíró, életerős, képviselő, nő, illetve hogy x házastársa y-nak és x ismeri y-t. Formalizálja az alábbi állításokat: **(3p)**

- minden életerős bíró ismer olyan jogászt aki házas de a jogász viszont nem ismeri azt az életerős bírót;
- azok a bírók, akiknek képviselő feleségük van de életerősek, mind jogászok.

Megoldás:

- minden életerős bíró ($\forall x : E(x) \wedge B(x) \Rightarrow \dots$) ismer olyan jogászt ($\exists y : I(x,y) \wedge J(y)$), aki házas ($\exists z : H(y,z)$), de a jogász viszont nem ismeri őt ($\neg I(y,x)$); összerakva:

$$\boldsymbol{\forall x : E(x) \wedge B(x) \Rightarrow \exists y : I(x,y) \wedge J(y) \wedge (\exists z : H(y,z)) \wedge \neg I(y,x)}$$

Vagy egy kvantort előrehozva is jó:

$$\boldsymbol{\forall x : \exists y : E(x) \wedge B(x) \Rightarrow I(x,y) \wedge J(y) \wedge (\exists z : H(y,z)) \wedge \neg(I(y,x)}$$

Vagy az összes kvantort előrehozva is jó:

$$\boldsymbol{\forall x : \exists y : \exists z : E(x) \wedge B(x) \Rightarrow I(x,y) \wedge J(y) \wedge H(y,z) \wedge \neg I(y,x)}$$

- azok a bírók ($B(x)$), akiknek képviselő feleségük van ($\exists y : K(y) \wedge H(x,y) \wedge N(y)$), de életerősek ($E(x)$), mind jogászok ($J(x)$). Tehát minden olyan x-re, ami a korábbi mondatrészek feltételeit teljesíti, teljesül az, hogy $J(x)$.

$$\boldsymbol{\forall x : \Big(B(x) \wedge \big(\exists y : K(y) \wedge H(x,y) \wedge N(y)\big) \wedge E(x)\Big) \Rightarrow J(x)}$$

Már ez is jó megoldás. Ha viszont most is előre akarjuk hozni az összes kvantort, akkor itt nagyon körültekintően kell eljárni, mivel itt a $\exists y$ kvantor egy *implikáció feltételén belül* szerepel! Fogalmazzuk át ezt az implikációt ,Ha A akkor B' formáról ,nem A vagy B' formájúra:

$$\forall x : \neg\Big(B(x) \wedge \big(\exists y : K(y) \wedge H(x,y) \wedge N(y)\big) \wedge E(x)\Big) \vee J(x)$$

Használjuk a deMorgan szabályt:

$$\forall x : \Big(\neg B(x) \vee \neg\big(\exists y : K(y) \wedge H(x,y) \wedge N(y)\big) \vee \neg E(x)\Big) \vee J(x)$$

Használjuk a deMorgan szabályt a kvantort tartalmazó zárójeles formula tagadására:

$$\forall x : \Big(\neg B(x) \vee \big(\forall y : \neg K(y) \vee \neg H(x,y) \vee \neg N(y)\big) \vee \neg E(x)\Big) \vee J(x)$$

Most már bátran előrehozhatjuk a kvantort:

$$\forall x : \forall y : \big(\neg B(x) \vee \neg K(y) \vee \neg H(x,y) \vee \neg N(y) \vee \neg E(x)\big) \vee J(x)$$

A sok tagadást a zárójelen kívülre hozva, ugyancsak deMorgan szabállyal:

$$\forall x : \forall y : \neg\big(B(x) \wedge K(y) \wedge H(x,y) \wedge N(y) \wedge E(x)\big) \vee J(x)$$

És visszaírhatjuk a ,Nem A vagy B' formulát implikációvá:

$$\boldsymbol{\forall x : \forall y : \big(B(x) \wedge K(y) \wedge H(x,y) \wedge N(y) \wedge E(x)\big) \Rightarrow J(x)}$$

Tehát az ,akiknek képvislő feleségük VAN' feltételből előre hozott kvantor ,MINDEN' kvantorrá lényegül át, egyébént minden más változatlan.

2. Léteznek-e olyan A, B, C halmazok, melyekre egyszerre teljesülnek a következők:

$$\overline{A} \triangle B \neq \emptyset, \quad A \triangle \overline{C} = \emptyset, \quad B \cap C = \emptyset.$$

Ha igen, mutasson példát, ha nem, indokoljon! (**6p**)

Megoldás: Két halmaz szimmetrikus differenciája pontosan akkor üres, ha a két halmaz megegyezik (vagyis pontosan akkor nemüres, ha a két halmaz nem egyezik meg). Tehát

$$\overline{A} \triangle B \neq \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \neq B, \quad A \triangle \overline{C} = \emptyset \Leftrightarrow A = \overline{C} \Leftrightarrow C = \overline{A}, \quad B \cap C = \emptyset.$$

Vagyis ha léteznek ilyen halmazok, akkor nem kell külön A halmazt keresnünk, mert az maga lesz a C komplementere. Tehát olyan B és C halmazokat keresünk (egy adott H alaphalmaz részhalmazaiként), amikre az teljesül, hogy:

$$C \neq B \quad \wedge \quad B \cap C = \emptyset.$$

Bármely két diszjunkt halmaz jó B és C szerepére, feltéve, hogy nem azért diszjunktak, mert mindkettő az üreshalmaz lenne. Például $H = \{1, 2, 3\}$ alaphalmaz esetén jó lehet $A = \{2, 3\}, B = \emptyset, C = \{1\}$, vagy az $A = \{3\}, B = \emptyset, C = \{1, 2\}$, vagy az $A = \emptyset, B = \emptyset, C = \{1, 2, 3\}$, vagy az $A = \{1, 3\}, B = \{1\}, C = \{2\}$, vagy az $A = \{1\}, B = \{1\}, C = \{2, 3\}$, vagy az $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2\}, C = \{3\}$, stb...

3. Legyen $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \leq 1\}$ és $S = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 :$ $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ merőlegesek$\}$.

   (a) Legyenek $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ és $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ a sztenderd egységvektorok $\mathbb{R}^2$-ben. Mi lesz $(S \circ R)^{-1}(\{\mathbf{e}_1\})$ és $(R \circ S)^{-1}(\{\mathbf{e}_1\})$? (**4p**)

Megoldás: Mindkét reláció látványosan szimmetrikus, hiszen $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$, és $\mathbf{u}$ pontosan akkor merőleges $\mathbf{v}$-re, ha $\mathbf{v}$ merőleges $\mathbf{u}$-ra. Vagyis $R^{-1} = R$, és $S^{-1} = S$, és így $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1} = R \circ S$, ezért $(S \circ R)^{-1}(\{\mathbf{e}_1\}) = R \circ S(\{\mathbf{e}_1\})$, és hasonlóan $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R$, ezért $(R \circ S)^{-1}(\{\mathbf{e}_1\}) = S \circ R(\{\mathbf{e}_1\})$. Határozzuk meg a két kompozíciót:

$$R \circ S = \{(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \wedge |\mathbf{v} - \mathbf{w}| \leq 1\}$$

ezt használva:

$$R \circ S(\{\mathbf{e}_1\}) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{v} \wedge |\mathbf{v} - \mathbf{w}| \leq 1\}$$

Mivel $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ sztenderd egységvektorra pontosan az $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ sztenderd egységvektor skalárszorosai ($\lambda \mathbf{e}_2 : \lambda \in \mathbb{R}$) merőlegesek, így tovább írhatjuk:

$$R \circ S(\{\mathbf{e}_1\}) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : |\lambda \mathbf{e}_2 - \mathbf{w}| \leq 1\}$$

Tehát $R \circ S(\{\mathbf{e}_1\})$ képhalmaz azokat a $\mathbf{w}$ vektorokat tartalmazza, amelyek végpontjai a $\lambda \mathbf{e}_2 : \lambda \in \mathbb{R}$ egyenesnek legalább egy pontjától legfeljebb egy távolságra vannak, vagyis amelyek végpontjai ezen egyenessel (az ‚y-tengellyel') párhuzamos, attól jobbra-balra 1-1 távolságra lévő két egyenes közé esnek, vagyis amelyeknek első koordinátája 1 és -1 közé esik.

Ugyenez másik gondolatmenettel: Egy vektor hosszának négyzete a saját magával vett

skaláris szorzata: $|\mathbf{u}-\mathbf{w}|^2 = \langle \mathbf{u}-\mathbf{w}|\mathbf{u}-\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{w}|\mathbf{w}\rangle - 2\langle \mathbf{u}|\mathbf{w}\rangle = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{w}|^2 - 2\langle \mathbf{u}|\mathbf{w}\rangle$, azaz $\mathbf{w} = (x, y)$ és $\lambda\mathbf{e}_2 = (0, \lambda)$ koordinátás felírással: $|\lambda\mathbf{e}_2 - \mathbf{w}|^2 = \lambda^2 + x^2 + y^2 - 2y\lambda = (\lambda - y)^2 + x^2 \geq x^2$, hiszen $(\lambda - y)^2 \geq 0$, azaz $|\lambda\mathbf{e}_2 - \mathbf{w}| \leq 1$ szükséges feltétele, hogy $x^2 \leq 1$ legyen, viszont ha ez teljesül a $\mathbf{w}$ első koordiátájára, akkor $\lambda = y$ választással $|\lambda\mathbf{e}_2 - \mathbf{w}|^2 = (\lambda - y)^2 + x^2 = x^2 \leq 1$, és így $|\lambda\mathbf{e}_2 - \mathbf{w}| \leq 1$ is teljesül.
Mindkét gondolatmenet eredménye az, hogy

$$R \circ S(\{\mathbf{e}_1\}) = \{\mathbf{w} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\} = [-1, 1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$$

A másik kompozíció:

$$S \circ R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \;\big|\; \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \leq 1 \wedge \mathbf{v} \perp \mathbf{w}\}$$

ezt használva:

$$S \circ R(\{\mathbf{e}_1\}) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{e}_1 - \mathbf{v}| \leq 1 \wedge \mathbf{v} \perp \mathbf{w}\}$$

Most teljesen más a helyzet, mint a korábbi esetben, mivel a $\mathbf{v} = \mathbf{0} = (0, 0)$ választás mindig kielégíti a $|\mathbf{e}_1 - \mathbf{v}| = |\mathbf{e}_1 - \mathbf{0}| = |\mathbf{e}_1| = 1 \leq 1$, és a $\mathbf{0} \perp \mathbf{w}$ feltételt is, tetszőleges $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ vektor esetén! Azaz

$$S \circ R(\{\mathbf{e}_1\}) = \mathbb{R}^2$$

(b) Adjon példát olyan $T \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ binér relációra, hogy $S \circ T \neq T \circ S$? **(4p)**

Megoldás: Az előbb láttuk, hogy $R \circ S(\{\mathbf{e}_1\}) = [-1, 1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, míg $S \circ R(\{\mathbf{e}_1\}) = \mathbb{R}^2$, azaz biztosan nem igaz az, hogy $S \circ R$ és $R \circ S$ egyenlő lenne, vagyis $S \circ R \neq R \circ S$, tehát $T = R$ tökéletes választás.