11. gyakorlat

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA 2.

Emlékeztető. Az ***exponenciális***, a ***szinusz-*** és a ***koszinuszfüggvényt*** a teljes $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsorok összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\exp(x) :=e^x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\sin(x) := \sin x := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos(x) := \cos x := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Tétel. **(Hatványsor összegfüggvényének a határértéke)** *Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív. Jelölje*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big)$$

az összegfüggvényét. Ekkor $\forall b \in K_R(a)$ pontban létezik a $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ határérték, és

$$\lim_{x \to b} f(x) = f(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (b-a)^n.$$

Tehát, egy hatványsor összegfüggvényének van határértéke a konvergenciahalmaza minden belső pontjában, és a határérték megegyezik a pont behelyettesítésével kapott sor összegével.

Egy nevezetes határérték: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

A pontbeli folytonosság fogalma. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény ***folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban***, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta \colon \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon.$$

Jelölés: $\boldsymbol{f \in C\{a\}}$.

Fontos! A hatványfüggvények, a polinomok és általánosan a racionális törtfüggvények, a gyökfüggvények, illetve az exponenciális, a szinusz- és a koszinuszfüggvény az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak.

Tétel. **(Az összetett függvény határértéke)** *Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ két valós függvény, amire $R_g \subset \mathcal{D}_f$ teljesül, és $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Tegyük fel, hogy*

$$a \in \mathcal{D}_g',\ \ \exists \lim_a g =: b \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{és} \qquad b \in \mathcal{D}_f',\ \ \exists \lim_b f =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1. *ha $b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f \in C\{b\}$, akkor az $f \circ g$ függvénynek van határértéke az a pontban, és*
$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big) = A,$$
azaz a kompozíció- és a határérték képzés sorrendje felcserélhető.
2. *ha a g függvény nem veszi fel a b értéket az a egy pontozott környezetében, akkor az $f \circ g$ függvénynek van határértéke az a pontban, és*
$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = \lim_{y \to b} f(y) = A.$$

A tétel mindkét állításának eredménye a

$$\boxed{\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = \lim_{y\to b} f(y) \qquad \big(y = g(x) \to b,\ \text{ha } x \to a\big)}$$

módon is írható, ami úgy tekinthető, mint a $\lim\limits_{x\to a} f\big(g(x)\big)$ határértékben alkalmazott $y = g(x)$ helyettesítés. A tétel értelmében ez a helyettesítés akkor alkalmazható, ha

- f folytonos a $b \in \mathbb{R}$ pontban,

vagy

- g nem veszi fel a b értéket az a egy pontozott környezetében (pl. ha g invertálható, mondjuk nem állandó, lineáris függvény; vagy $b = \pm\infty$).

1. Feladat. *A „gyöktelenítés technikájával” számítsuk ki az alábbi határértékeket!*

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}, \qquad c)\ \lim_{x\to -\infty}\Big(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2-1}\Big).$$

Megoldás. Mivel a gyökfüggvények folytonosak, ezért az összetett függvény határértékére vonatkozó tétel szerint a gyökvonás és a határérték képzés sorrendje felcserélhető, így

$$\lim_{x\to a} \sqrt{g(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} g(x)} \qquad (g \geq 0).$$

Elegendő tehát a belső függvény határértéket kiszámolni, és utána gyököt vonni.

a) $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó. A számlálót „gyöktelenítve” azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{x}{x\cdot\big(\sqrt{1+x}+1\big)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \qquad \Big(x \in [-1,+\infty) \setminus \{0\}\Big).$$

A határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételek szerint

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

b) Az előzőhöz hasonlóan most is $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó. Először a számlálót, utána pedig a nevezőt gyöktelenítjük. Ha $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$, akkor

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1} &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{(1+x)-(1-x^2)}{\sqrt{1+x}-1} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x(1+x)}{\sqrt{1+x}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x(1+x)(\sqrt{1+x}+1)}{(1+x)-1} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}} \cdot (1+x)\cdot(\sqrt{1+x}+1).
\end{aligned}$$

A műveleti tételeket alkalmazva

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}\right)\cdot\lim_{x\to 0}(1+x)\cdot\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}\cdot(1+0)\cdot(\sqrt{1+0}+1)=\underline{\underline{1}}\,.$$

c) $(+\infty)-(+\infty)$ típusú kritikus határértékről van szó. A következő átalakítások lesznek célravezetők:

Ha $x<-1$, akkor

$$\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{-x+2}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\frac{-x+2}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}=\frac{-x+2}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\text{(Vigyázni! Mivel } x<-1\text{, ezért } \sqrt{x^2}=|x|=-x.\text{)}=$$

$$=\frac{-x+2}{-x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{-1+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.$$

Mivel $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ és $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$, így a műveleti tételeket alkalmazva

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\frac{-1+0}{-\sqrt{1-0+0}-\sqrt{1-0}}=\frac{-1}{-1-1}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}\,.$$

2. Feladat. *Mutassuk meg, hogy létezik a*

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\right)$$

határérték, ahol $[\alpha]$ jelöli az $\alpha\in\mathbb{R}$ szám egész részét. Mivel egyenlő ez a limesz?

Megoldás. Vegyük észre, hogy a 0-ban az első tényezőnek 0 a határértéke, a második tényezőnek pedig nincs határértéke.

Az egész rész definíciója alapján

$$\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}<\left[\frac{1}{x}\right]+1\qquad(x\in\mathbb{R},\ x\neq 0).$$

Ha $x>0$, akkor x-szel szorozva, majd átrendezve kapjuk, hogy:

$$1-x<x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\le 1\qquad(x>0).$$

A függvényhatárértékre vonatkozó közrefogási elv értelmében a jobb oldali határérték létezik, és

$$\lim_{x\to 0+0}\left(x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\right)=1.$$

Az $x<0$ esetben hasonló módon azt kapjuk, hogy:

$$1\le x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]<1-x \qquad (x<0).$$

Így a bal oldali határérték is létezik, és

$$\lim_{x\to 0-0}\left(x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\right)=1.$$

Mivel a bal és a jobb oldali határértékek megegyeznek, ezért

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\right)=\underline{\underline{1}}\,.$$

3. Feladat. *A* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ *felhasználásával számítsuk ki az alábbi határértékeket!*

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}\quad (a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\cdot\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

Megoldás. A sin, cos függvény folytonossága miatt az összetett függvény határértéke szerint

$$\lim_{x\to 0}\sin\alpha x=\sin\left(\lim_{x\to 0}\alpha x\right)=\sin(\alpha\cdot 0)=\sin 0=0 \qquad (\alpha\in\mathbb{R}).$$

Hasonlóan $\lim\limits_{x\to 0}\cos\alpha x=1$. Ezért mindegyik határérték $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határérték.

a) Először azt igazoljuk, hogy

$$(*)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}=1 \qquad (\alpha\neq 0).$$

Ezt helyettesítéssel könnyen megkapjuk a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ nevezetes határértékből:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}=\ \left(y=\alpha x\to 0,\ \text{ha } x\to 0\right)\ =\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1.$$

A helyettesítés azért alkalmazható, mert $g(x):=\alpha x\neq 0$ bármilyen

$$\dot{K}_r(0)=(-r,0)\cup(0,r)$$

pontozott környezetben. Így már $(*)$ miatt a műveleti tétel szerint

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{x}}{\frac{\sin bx}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{b}\,\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\underline{\underline{\frac{a}{b}}}\,.$$

b) Három különböző megoldást mutatunk.

1. megoldás. Szorzunk, osztunk $(1+\cos x)$-szel.

$$\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}.$$

Ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\right)=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

2. megoldás. Trigonometrikus azonosságokat felhasználva a számlálót $x/2$ segítségével fejezzük ki:

$$1-\cos x=\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Ekkor $(*)$ miatt

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

3. megoldás. Írjuk be a cos függvényt definiáló hatványsort, majd az összevonások után osszunk x^2-tel: ha $x\neq 0$, akkor

$$\mathbb{R}\ni\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}{x^2}=\left(\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}}{x^2}=\left(\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+2)!}=\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\cdots\right).$$

Az előző hatványsor az $x=0$ pontban is konvergens, hiszen ekkor a sor összege $1/2$. Ezért a hatványsor az egész $\mathbb{R}$-en konvergens, azaz konvergenciasugara $R=+\infty$. A hatványsor összegfüggvényének a határértéke szerint a hatványsor a 0 pontban vett határértéke megegyezik az $x=0$ pont behelyettesítésével kapott sor összegével:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\cdots\right)=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

c) Alkalmazhatjuk az előző feladatnál bemutatott megoldásokat. Például az 1. megoldást követve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}=$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\sin x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\right)=0\cdot 1\cdot\frac{1}{1+1}=\underline{\underline{0}}.$$

De az előző feladat végeredményét is tudnánk közvetlenül alkalmazni a műveleti tételek szerint:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\left(\lim_{x\to 0}x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=0\cdot\frac{1}{2}=\underline{\underline{0}}\,.$$

d) Gyöktelenítsük a nevezőt, majd osszuk el a számlálót is és a nevezőt is x^2-tel. Így már nevezetes határértékeket tudunk kialakítani:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{\sin x}{x}+\frac{1-\cos x}{x^2}}$$

Ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\cdot\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1}}{1+\frac{1}{2}}=\underline{\underline{\frac{4}{3}}}\,.$$

4. Feladat. *A hatványsor összegfüggvényének a határértékére vonatkozó tétel alapján számítsuk ki a következő határértékeket!*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$, *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Megoldás.

a) $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határértékről van szó. A definíció szerint

$$e^x:=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Ezért, ha $x\neq 0$, akkor

$$\mathbb{R}\ni\frac{e^x-1}{x}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}-1}{x}=\left(\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)-1}{x}\right)=$$

$$=\frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}}{x}=\left(\frac{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots}{x}\right)=$$

$$=\frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}=\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots\right).$$

A fenti hatványsor az $x=0$ pontban is konvergens, hiszen ekkor a sor összege nyilvánvalóan 1. Ezért a hatványsor az egész $\mathbb{R}$-en konvergens, azaz konvergenciasugara $R=+\infty$. Így a hatványsor összegfüggvényének a határértéke szerint

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots\right)=\underline{\underline{1}}\,,$$

hiszen a hatványsor a 0 pontban vett határértéke megegyezik az $x=0$ pont behelyettesítésével kapott sor összegével, ami 1-gyel egyenlő.

b) $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határértékről van szó. A következő képleteket fogjuk alkalmazni:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} + \cdots =$$
$$= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Vizsgájuk meg külön-külön a határértékben szereplő kifejezés számlálóját és nevezőjét.

$$e^x - e^{-x} - 2x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) - 2x =$$
$$= \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + \frac{2x^7}{7!} + \cdots = x^3\left(\frac{2}{3!} + \frac{2x^2}{5!} + \frac{2x^4}{7!} + \cdots\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Ebből már a szokott módon azt tudjuk igazolni, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3!} + \frac{2x^2}{5!} + \frac{2x^4}{7!} + \frac{2x^6}{9!} - \cdots\right) = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}.$$

Hasonlóan

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots\right) = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} + \cdots =$$
$$= x^3\left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \frac{x^6}{9!} + \cdots\right) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

és így

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \frac{x^6}{9!} + \cdots\right) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Ekkor a műveleti tétel miatt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}}{\frac{x - \sin x}{x^3}} = \frac{1/3}{1/6} = \underline{\underline{2}}\,.$$

5. Feladat. *Számítsuk ki a következő paraméteres határértékeket!*

$$a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{\sqrt{\alpha x^2 + 1} - 1} \quad (\alpha > 0), \qquad\qquad b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x} \quad (\alpha, \beta \neq 0).$$

Megoldás.

a) $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határértékről van szó. Gyöktelenítéssel:

$$\frac{x \sin x}{\sqrt{\alpha x^2 + 1} - 1} = \frac{x \sin x(\sqrt{\alpha x^2 + 1} + 1)}{\alpha x^2 + 1 - 1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \left(\sqrt{\alpha x^2 + 1} + 1\right)$$

Ezért a műveleti tétel szerint

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sqrt{\alpha x^2+1}-1}=\frac{1}{\alpha}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}(\sqrt{\alpha x^2+1}+1)\right)=\frac{1}{\alpha}\cdot 1\cdot(\sqrt{0+1}+1)=\underline{\underline{\frac{2}{\alpha}}}\,.$$

b) $\frac{0}{0}$-típusú kritikus határértékről van szó. Induljunk ki a

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

nevezetes határértékből. Helyettesítéssel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma x}=\ (y=\gamma x\to 0,\ \text{ha } x\to 0)\ =\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1.\qquad(\gamma\neq 0).$$

Ebből a műveleti tétel szerint

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\alpha x}-1)-(e^{\beta x}-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}-1}{x}=$$

$$=\alpha\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x}-\beta\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}-1}{\beta x}=\alpha\cdot 1-\beta\cdot 1=\underline{\underline{\alpha-\beta}}\,.$$

Calculate the following parametric limits!

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sqrt{\alpha x^2+1}-1}\quad(\alpha>0),$ *d)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}\quad(\alpha,\beta\neq 0).$

a) This is a critical limit of type $\frac{0}{0}$. Using rationalization:

$$\frac{x\sin x}{\sqrt{\alpha x^2+1}-1}=\frac{x\sin x(\sqrt{\alpha x^2+1}+1)}{\alpha x^2+1-1}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\left(\sqrt{\alpha x^2+1}+1\right)$$

Therefore, according to the operational theorem,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sqrt{\alpha x^2+1}-1}=\frac{1}{\alpha}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}(\sqrt{\alpha x^2+1}+1)\right)=\frac{1}{\alpha}\cdot 1\cdot(\sqrt{0+1}+1)=\underline{\underline{\frac{2}{\alpha}}}\,.$$

b) This is a critical limit of type $\frac{0}{0}$. Start from the well-known limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Using substitution:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\gamma x}-1}{\gamma x}=\ (y=\gamma x\to 0,\ \text{if } x\to 0)\ =\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1.\qquad(\gamma\neq 0).$$

From this, according to the operational theorem,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\alpha x}-1)-(e^{\beta x}-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}-1}{x}=$$

$$=\alpha\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x}-\beta\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}-1}{\beta x}=\alpha\cdot 1-\beta\cdot 1=\underline{\underline{\alpha-\beta}}\,.$$