Diszkrét matematika I. hétfői (2025.03.10.) 1. Zh feladatainak eredményei és részletesen kidolgozott megoldásai

A megoldások ismertetésénél itt most nem csak a konkrét módszert, hanem a módszer hátterét, illetve a módszerhez vezető gondolatsort is bemutatjuk (ez utóbbiak részletezését a hallgatóktól a ZH megoldásában természetesen nem vártuk el).

1. a) Pozitív egészeket tekintve jelölje $P(x)$, $E(x)$, illetve $D(x,y)$ rendre azt, hogy x prím, páros, illetve hogy x osztója y-nak. Igaz-e a következő állítás? (Válaszát indokolja!) Tagadja formálisan a kifejezést! (**3p**)

$$\forall x : \Bigg(\neg E(x) \Rightarrow \bigg(\forall y : \Big(\big(P(y) \land E(y)\big) \Rightarrow \neg D(x,y)\Big)\bigg)\Bigg)$$

Megoldás: Minden x pozitív egész szám esetén abból, hogy x nem páros, abból következik az, hogy… ezt az elejét már célszerű rögtön magyarosabban átfogalmazni: Minden páratlan pozitív egész x számra teljesül az, hogy…
Ami a … helyén áll, az pedig: Minden pozitív egész y-ra igaz, hogy HA y prímszám és y páros, akkor x NEM osztja y-t. Ezt is átfogalmazva természetesebb nyelvre: Minden pozitív egész páros prímszám y-ra telejsül, hogy x NEM osztja y-t.
A kettőt összerakva: Minden páratlan pozitív egész x számra igaz, hogy minden pozitív egész y páros prímszámnak ez az x nem lesz az osztója. A 2 az egyetlen pozitív egész páros prímszám, és annak az 1 egy pozitív páratlan egész osztója, azaz **HAMIS az állítás**.

Formálisan: Az $x = 1$, $y = 2$ helyettesítéssel a belső implikáció:
$\Big(\big(P(2) \land E(2)\big) \Rightarrow \neg D(1,2)\Big) \Leftrightarrow \Big(\big(\text{IGAZ} \land \text{IGAZ}\big) \Rightarrow \neg\text{IGAZ}\Big) \Leftrightarrow \Big(\text{IGAZ} \Rightarrow \text{HAMIS}\Big) \Leftrightarrow$ HAMIS, vagyis NEM MINDEN y-ra teljesül a belső $\Big(\big(P(y) \land E(y)\big) \Rightarrow \neg D(1,y)\Big)$ implikáció IGAZ értékkel, tehát a $\bigg(\forall y : \Big(\big(P(y) \land E(y)\big) \Rightarrow \neg D(x,y)\Big)\bigg)$ állítás $x = 1$ esetén HAMIS.
$x = 1$ helyettesítéssel $E(1) = \text{HAMIS}$, tehát $\neg E(1) = \text{IGAZ}$, ezért (és a fentiek miatt):

$$\Bigg(\neg E(1) \Rightarrow \bigg(\forall y : \Big(\big(P(y) \land E(y)\big) \Rightarrow \neg D(1,y)\Big)\bigg)\Bigg) \Leftrightarrow \Bigg(\text{IGAZ} \Rightarrow \text{HAMIS}\Bigg) \Leftrightarrow \text{HAMIS}$$

Tehát van olyan helyettesítés, amire a kifejezés HAMIS, vagyis **a teljes kifejezés HAMIS**.

A tagadáshoz az eredeti kifejezés mindkét implikációját fogalmazzuk át ,ha A akkor B' alakról ,nem A vagy B' alakra:

$$\forall x : \Bigg(\neg\big(\neg E(x)\big) \lor \bigg(\forall y : \Big(\neg\big(P(y) \land E(y)\big) \lor \big(\neg D(x,y)\big)\Big)\bigg)\Bigg)$$

ezután a dupla negációt hagyjuk el, és használjuk a deMorgan azonosságot:

$$\forall x : \Bigg(\big(E(x)\big) \lor \bigg(\forall y : \Big(\big(\neg P(y)\big) \lor \big(\neg E(y)\big) \lor \big(\neg D(x,y)\big)\Big)\bigg)\Bigg)$$

Most már tagadhatjuk formálisan:

$$\neg\Bigg(\forall x : \Bigg(\big(E(x)\big) \vee \Bigg(\forall y : \Big(\big(\neg P(y)\big) \vee \big(\neg E(y)\big) \vee \big(\neg D(x,y)\big)\Big)\Bigg)\Bigg)\Bigg) \iff$$

A ‚minden' kvantor tagadása a ‚létezik' kvantor, és VAGY-ra deMorgan szabály:

$$\exists x : \Bigg(\big(\neg E(x)\big) \wedge \neg\Bigg(\forall y : \Big(\big(\neg P(y)\big) \vee \big(\neg E(y)\big) \vee \big(\neg D(x,y)\big)\Big)\Bigg)\Bigg) \iff$$

És újracsak a ‚minden' kvantor tagadása a ‚létezik' kvantor, és VAGY-ra deMorgan szabály:

$$\exists x : \Bigg(\big(\neg E(x)\big) \wedge \Bigg(\exists y : \Big(\big(\neg\neg P(y)\big) \wedge \big(\neg\neg E(y)\big) \wedge \big(\neg\neg D(x,y)\big)\Big)\Bigg)\Bigg) \iff$$

A dupla negációkat elhagyva:

$$\boldsymbol{\exists x : \Bigg(\big(\neg E(x)\big) \wedge \Bigg(\exists y : \Big(P(y) \wedge E(y) \wedge D(x,y)\Big)\Bigg)\Bigg)}$$

Az összes kvantort előrehozhatjuk (az egymás közötti sorrendjüket megtartva):

$$\exists x : \exists y : \Bigg(\big(\neg E(x)\big) \wedge \Bigg(\Big(P(y) \wedge E(y) \wedge D(x,y)\Big)\Bigg)\Bigg)$$

A ‚fölösleges' zárójelekt is elhagyhatjuk:

$$\boldsymbol{\exists x : \exists y : \big(\neg E(x) \wedge P(y) \wedge E(y) \wedge D(x,y)\big)}$$

Az utolsó két lépés csak esztétikai finomság. Valójában a kvantorok előrehozását már az egész feladat legelején is elvégezhettük volna, így az igazságérték megállapítása is könnyebb lett volna. Mivel a $\forall y$: kifejezés nem egy implikáció feltételén belül van, így egyszerűen előre hozható. Így az eredeti formulával ekvivalens:

$$\forall x : \Bigg(\forall y : \Bigg(\neg E(x) \Rightarrow \Big(\big(P(y) \wedge E(y)\big) \Rightarrow \big(\neg D(x,y)\big)\Big)\Bigg)\Bigg)$$

Minden pozitív egész x-re és y-ra: Ha x páratlan, akkor ha y páros prím (vagyis ha $y = 2$), akkor x nem osztja y-t. Vagyis: Ha x páratlan pozitív egész, akkor x nem osztja $y = 2$-t. Ami nyilván nem igaz, hiszen $x = 1$ osztja $y = 2$-t.

1. b) Az embereket tekintve jelölje $J(x)$, $B(x)$, $E(x)$, $K(x)$, $N(x)$, $H(x,y)$, $I(x,y)$ rendre azt, hogy x jogász, bíró, életerős, képviselő, nő, illetve hogy x házastársa y-nak és x ismeri y-t. Formalizálja az alábbi állításokat: (**3p**)

   - bármely két bírónak van olyan közös ismerőse aki képviselő;
   - azok a képviselők, akiknek jogász feleségük van de életerősek, mind bírók.

Megoldás:

- bármely *két* (tehát két *különböző*) bírónak ($\forall x : \forall y : x \neq y \wedge B(x) \wedge B(y) \Rightarrow$) van olyan közös ismerőse ($\exists z : I(x,z) \wedge I(y,z)$), aki képviselő ($\wedge K(z)$); összerakva:

  $$\boldsymbol{\forall x : \forall y : \big(x \neq y \wedge B(x) \wedge B(y)\big) \Rightarrow \big(\exists z : I(x,z) \wedge I(y,z) \wedge K(z)\big)}$$

  Így is jó, de az összes kvantort előrehozva még elegánsabb:

  $$\boldsymbol{\forall x : \forall y : \exists z : \big(x \neq y \wedge B(x) \wedge B(y)\big) \Rightarrow \big(I(x,z) \wedge I(y,z) \wedge K(z)\big)}$$

- azok a képviselők ($K(x)$), akiknek jogász feleségük van ($\exists y : J(y) \wedge N(y) \wedge H(x,y)$), de életerősek ($E(x)$), mind bírók ($B(x)$). De ezt össze kell rakni. A mondat szerint ‚mindazok az x-ek, akik…, azok mind bírók, azaz ez ‚Minden x-re HA …, AKKOR' lesz:

  $$\boldsymbol{\forall x : \Big(\Big(K(x) \wedge \big(\exists y : J(y) \wedge N(y) \wedge H(x,y)\big) \wedge E(x)\Big) \Rightarrow B(x)\Big)}$$

  Ha itt akarjuk előre hozni a $\exists y$ kvantort, akkor itt nagyon körültekintően kell eljárni, mivel itt a $\exists y$ kvantor egy *implikáció feltételén belül* szerepel! Fogalmazzuk át ezt az implikációt ‚Ha A akkor B' formáról ‚Nem A vagy B' formájúra:

  $$\forall x : \Big(\neg\Big(K(x) \wedge \big(\exists y : J(y) \wedge N(y) \wedge H(x,y)\big) \wedge E(x)\Big) \vee B(x)\Big)$$

  DeMorgan szabállyal:

  $$\forall x : \Big(\Big(\neg K(x) \vee \neg\big(\exists y : J(y) \wedge N(y) \wedge H(x,y)\big) \vee \neg E(x)\Big) \vee B(x)\Big)$$

  A létezik kvantor negáltja a minden kvantor, és újra deMorgan:

  $$\forall x : \Big(\Big(\neg K(x) \vee \big(\forall y : \neg J(y) \vee \neg N(y) \vee \neg H(x,y)\big) \vee \neg E(x)\Big) \vee B(x)\Big)$$

  Most már előre hozhatjuk a kvantort:

  $$\forall x : \forall y : \Big(\Big(\neg K(x) \vee \neg J(y) \vee \neg N(y) \vee \neg H(x,y) \vee \neg E(x)\Big) \vee B(x)\Big)$$

  Most visszafelé alkalmazva a deMorgant:

  $$\forall x : \forall y : \Big(\neg\Big(K(x) \wedge J(y) \wedge N(y) \wedge H(x,y) \wedge E(x)\Big) \vee B(x)\Big)$$

  Most a ‚Nem A vagy B' helyett írhatunk újra ‚Ha A akkor B' implikációt:

  $$\boldsymbol{\forall x : \forall y : \Big(\Big(K(x) \wedge J(y) \wedge N(y) \wedge H(x,y) \wedge E(x)\Big) \Rightarrow B(x)\Big)}$$

  Tehát minden maradt a régiben, csak az előrehozásnál a $\exists y$ kvantor változott át $\forall y$ kvantorrá.

2. Léteznek-e olyan A, B, C halmazok, melyekre egyszerre teljesülnek a következők:

$$A \cup B \neq \emptyset, \quad A \triangle \overline{C} = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset.$$

Ha igen, mutasson példát, ha nem, indokoljon! (**6p**)

Megoldás: Két halmaz szimmetrikus differenciája pontosan akkor üres, ha a két halmaz megegyezik. Tehát $A \triangle \overline{C} = \emptyset \iff A = \overline{C}$. (Vagyis C halmazt nem kell külön megadni, az az A komplementere lesz.)
Mivel $(A\cap B)\setminus C = (A\cap B)\cap\overline{C}$, ha $A = \overline{C}$ teljesül, akkor $(A\cap B)\setminus C = \emptyset \iff (A\cap B)\cap A = \emptyset$, és így $(A\cap B)\cap A = A\cap(A\cap B) = (A\cap A)\cap B = A\cap B$ miatt $(A\cap B)\setminus C = \emptyset \iff (A\cap B) = \emptyset$. Tehát ahárom felétellel ekvivalens:

$$A \cup B \neq \emptyset \quad \wedge \quad A \cap B = \emptyset \quad \left(\wedge \quad C = \overline{A}\right).$$

Ez könnyen teljesíthető, csak arra kell figyelni, hogy A és B diszjunkt halmazok legyenek, de ne legyen mindkettő az üreshalmaz (C pedig az A komplementere legyen, bármi is az A). Például $H = \{1, 2\}$ alaphalmaz esetén jó lehet $A = \{1, 2\}$, $B = C = \emptyset$, vagy az $A = \{1\}$, $B = \emptyset$, $C = \{2\}$, vagy az $A = \{1\}$, $B = C = \{2\}$, vagy az $A = \emptyset$, $B = C = \{1, 2\}$, vagy az $A = \emptyset$, $B = \{1\}$, $C = \{1, 2\}$, stb...

3. Legyen $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Z}\}$ és $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq 1/2\}$.

   (a) Mi lesz $R^{-1}(\{1\})$, $S^{-1}(\{1\})$, $(S \circ R)(\{0\})$ és $(R \circ S)(\{0\})$? (**4p**)

   (b) Mutassa meg, hogy $R \circ S = S \circ R$! (**4p**)

Megoldás: Mindkét reláció látványosan szimmetrikus, hiszen $x - y$ pontosan akkor egész, ha $y - x$ egész, és $|x - y| = |y - x|$. Tehát $R^{-1} = R$, és $S^{-1} = S$.

$$R^{-1}(\{1\}) = R(\{1\}) = \{y \in \mathbb{R} : 1 - y \in \mathbb{Z}\} = \{y \in \mathbb{R} : y \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

Érdemes S relációt úgy átfogalmazni, hogy $|x - y| \leq 1/2 \iff -1/2 \leq x - y \leq 1/2 \iff$

$$(x, y) \in S \iff y - \frac{1}{2} \leq x \leq y + \frac{1}{2} \iff x \in \left[y - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}\right] \text{ (zárt intervallum)},$$

hasonlóan

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow -x - \frac{1}{2} \leq -y \leq -x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} \geq y \geq x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y \in \left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right]$$

és így

$$S^{-1}(\{1\}) = S(\{1\}) = \{y \in \mathbb{R} : |1 - y| \leq \frac{1}{2}\} = \{y \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} \leq y - 1 \leq \frac{1}{2}\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$R \circ S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \exists z \in \mathbb{R} : (x, z) \in S \wedge (z, y) \in R\} =$
$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \exists z \in \mathbb{R} : z \in [x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}] \wedge (z - y) \in \mathbb{Z}\}$, azaz x pontosan akkor áll relációban y-nal, ha az x-nek $1/2$ sugarú környezetében van az y-tól egész távolságra lévő elem. Még jobban látszik, ha az S másik átfogalmazását használjuk:
$R \circ S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \exists z \in \mathbb{R} : x \in [z - \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}] \wedge (z - y) \in \mathbb{Z}\}$, azaz $(x, y) \in R \circ S$, ha x benne van a $[z - \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}]$ intervallumok uniójában, ha $z = y + k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, és mivel $k + \frac{1}{2} = (k + 1) - \frac{1}{2}$, ezek az intervallumok tetszőleges y esetén lefedik az egész számegyenest.

Tehát $R \circ S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a teljes reláció. Ezért $(R \circ S)(\{0\}) = \mathbb{R}$.

Hasonlóan $S \circ R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \exists z \in \mathbb{R} : (x,z) \in R \wedge (z,y) \in S\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \exists z \in \mathbb{R} : (x-z) \in \mathbb{Z} \wedge y \in [z-\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]\}$, azaz $(x,y) \in S \circ R$, ha y benne van a $[z-\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}]$ intervallumok uniójában, ha $z = x+k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, és mivel $k+\frac{1}{2} = (k+1)-\frac{1}{2}$, ezek az intervallumok tetszőleges x esetén feledik az egész számegyenest.

Tehát $S \circ R = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a teljes reláció. Ezért $(S \circ R)(\{0\}) = \mathbb{R}$.

A második kompozíció úgy is kijöhetett volna, hogy $(S\circ R)^{-1} = R^{-1}\circ S^{-1} = R\circ S = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, viszont a teljes reláció inverze is a teljes reláció, így $S\circ R = ((S\circ R)^{-1})^{-1} = (\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{-1} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Egyúttal azt is bebizonyítottuk, hogy $R \circ S = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = S \circ R$.