8. gyakorlat

Definíció: A Hermite-interpoláció alapfeladata

1. Adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_k \in [a;b]$ különböző alappontok,

2. $m_0, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ multiplicitás értékek és

3. $y_0^{(j)}, y_1^{(j)}, \ldots, y_k^{(j)} \in \mathbb{R}$ függvény- és derivált értékek $(j = 0, \ldots, m_i - 1)$,

4. $m := \sum_{i=0}^{k} m_i - 1$.

5. Olyan $H_m \in P_m$ polinomot keresünk, melyre

$$H_m^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}, \quad (i = 0, 1, \ldots, k;\ j = 0, \ldots, m_i - 1).$$

A feltételnek eleget tevő polinomot *Hermite-interpolációs polinomnak* nevezzük.

Definíció: Osztott differenciák azonos alappontok esetén

1. Az *elsőrendű osztott differenciák*:

$$f[x_i, x_i] := f'(x_i), \quad (i = 0, 1, \ldots, k).$$

2. A *j-edrendű osztott differenciák*:

$$f[\underbrace{x_i}_{0.}, \underbrace{x_i}_{1.}, \ldots, \underbrace{x_i}_{j.}] := \frac{f^{(j)}(x_i)}{j!}, \quad (j = 1, 2, \ldots, m_i - 1).$$

Definíció: Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

Például $k = 2, m_0 = 1, m_1 = 2, m_2 = 3, m = 5$ esetén

$$\begin{aligned} H_5(x) = & f(x_0) \\ & + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) \\ & + f[x_0, x_1, x_1] \cdot (x - x_0)(x - x_1) \\ & + f[x_0, x_1, x_1, x_2] \cdot (x - x_0)(x - x_1)^2 \\ & + f[x_0, x_1, x_1, x_2, x_2] \cdot (x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2) \\ & + f[x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, x_2] \cdot (x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \end{aligned}$$

Megjegyzés

Hasonlóan a Newton-alaknál az osztott differenciákat is számolhatjuk rekurzívan:

$$
\begin{array}{c||ccccccc}
x_i & f(x_i) & f[x_i,x_{i+1}] & f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}] & \dots & & \\
\hline
x_0 & \boxed{f(x_0)} & & & & & \\
x_1 & f(x_1) & \boxed{f[x_0,x_1]} & & & & \\
x_1 & f(x_1) & f'(x_1) & \boxed{f[x_0,x_1,x_1]} & & & \\
x_2 & f(x_2) & f[x_1,x_2] & f[x_1,x_1,x_2] & \dots & & \\
x_2 & f(x_2) & f'(x_2) & f[x_1,x_2,x_1] & \dots & \dots & \\
x_2 & f(x_2) & f'(x_2) & \frac{f''(x_2)}{2} & \dots & \dots & \boxed{f[x_0,x_1,x_1,x_2,x_2,x_2]}
\end{array}
$$

Pontosan ugyanúgy számoljuk, mint a Newton-alak esetén. A különbség az, hogy több helyen is előre ki kell tölteni (ezek kékkel vannak beleírva a táblázatba).

1. feladat

Mi lesz az f-et közelítő interpolációs polinom, ha $f(0) = -1$, $f'(0) = -4$ és $f(2) = -1$, $f'(2) = 4$, $f''(2) = 12$?

Tétel: Hibaformula

1. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges,

2. $[a;b]$ az $x_0, x_1, \dots, x_k$ és x által kifeszített intervallum,

3. továbbá $f \in C^{m+1}[a;b]$.

Ekkor

1. $\exists\, \xi_x \in [a;b]$, melyre

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!} \cdot \Omega_m(x).$$

2. Hibabecslés

$$|f(x) - H_m(x)| \le \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \cdot |\Omega_m(x)|,$$

$$M_{m+1} := \|f^{(m+1)}\|_\infty, \quad \Omega_m(x) := \prod_{i=0}^{k} (x - x_i)^{m_i}.$$

Definíció: A Fejér–Hermite-interpoláció

A Hermite-interpoláció speciális esete ahol $\forall m_i = 2$ és ezért $m = 2k+1$.

Tétel: A Fejér-Hermite-alappolinomok

1. Az elsőfajú Fejér-Hermite-alappolinomok:

$$A_i(x) := [1 - 2(x - x_i) \cdot \ell_i'(x_i)] \cdot \ell_i^2(x), \quad (i = 0, \dots, k).$$

2. A másodfajú Fejér-Hermite-alappolinomok:

$$B_i(x) := (x - x_i) \cdot \ell_i^2(x), \quad (i = 0, \dots, k).$$

Megjegyzés

Ezek a polinomok azért különlegesek, mivel $\forall j \neq i$ esetén

$$A_i(x_j) = A_i'(x_j) = B_i(x_j) = B_i'(x_j) = 0$$

De $j = i$ esetén

$$A_i(x_i) = 1, \quad A_i'(x_i) = 0$$

és

$$B_i(x_i) = 0, \quad B_i'(x_i) = 1$$

Azaz megfelelő lineáris kombinációjukkal előállítható a polinom hasonlóan a Lagrange-alakhoz.

2. feladat

Legyen $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in [0; 1]$, $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$ és $f(1) = \frac{1}{2}$, $f'(1) = -\frac{1}{4}$.

a) Írjuk fel a Fejér-Hermite interpolációs polinomot!

b) Becsüljük a hibát az $x = \frac{1}{2}$ pontban és a teljes intervallumon!

c) Készítsük el az alappolinomjait Newton-alakkal!

Definíció: Interpolációs spline

Tekintsük az $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ felosztást, ahol $I_k := [x_{k-1}; x_k]$ részintervallum $(k = 1, \dots, n)$.

Az $S_\ell : [a; b] \to \mathbb{R}$ függvényt *ℓ-edfokú spline*-nak nevezzük, ha

1. $S_\ell\big|_{I_k} \in P_\ell \;\; (k = 1, \dots, n)$

2. $S_\ell \in C^{(\ell-1)}[a; b]$.

3. Az S_ℓ spline-t *interpolációs spline*-nak nevezzük, ha $S_\ell(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, \dots, n)$.

Definíció: Köbös spline-interpoláció peremfeltételei

1. Hermite-féle peremfeltétel:

$$S_3'(a) = f'(a) \text{ és } S_3'(b) = f'(b).$$

2. Természetes peremfeltétel:

$$S_3''(a) = 0 \text{ és } S_3''(b) = 0.$$

3. Periodikus peremfeltétel: csak periodikus függvények közelítése esetén, ha $[a; b]$ a periódus többszöröse.
Ekkor $f(a) = f(b)$. A hiányzó két feltétel:

$$S_3'(a) = S_3'(b) \text{ és } S_3''(a) = S_3''(b).$$

4. A "not a knot" peremfeltétel:

$$S_3''' \in C\{x_1\} \text{ és } S_3''' \in C\{x_{n-1}\}.$$

Ez azt jelenti, hogy az első két részintervallumon illetve az utolsó kettőn is ugyanaz a képlet.

3. feladat

Létezik-e olyan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, melyre

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = x + 1, & x \in [-2; -1] \\ P_2(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, & x \in [-1; 1] \\ P_3(x) = x - 1, & x \in [1; 2] \end{cases}$$

természetes köbös spline? Miért?

4. feladat

Legyen $f(x) = sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $x \in [-1;1]$. Interpoláljuk a függvényt a $-1, 0, 1$ alappontokon

a) lineáris spline-nal,

b) másodfokú spline-nal $f'(-1) = 0$ peremfeltétellel,

c) harmadfokú spline-nal, Hermite-féle peremfeltétellel: $f'(-1) = f'(1) = 0$.

d) Érdemes-e más peremfeltételű köbös spline-t felírni a megadott függvényre?

Definíció: B-spline-ok

A $B_{\ell,k} \in S_\ell(\Omega_\infty)$ spline-okat *B-spline-oknak* nevezzük, ha

1. $B_{\ell,k}(x) \geq 0 \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$,

2. $\text{supp}\,(B_{\ell,k})$ minimális,

3. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} B_{\ell,k}(x) \equiv 1 \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$.

Tétel: Másodfokú B-spline-ok egyenletes felosztáson

$\ell = 2$ esetben a B-spline a $h_k \equiv h$ esetben (eml.: $h_k := x_k - x_{k-1}$)

$$B_{2,k}(x) =$$
$$= \frac{1}{2h^2} \cdot \begin{cases} (x - x_k)^2, & x \in [x_k; x_{k+1}] \\ h^2 + 2h(x - x_{k+1}) - 2(x - x_{k+1})^2, & x \in [x_{k+1}; x_{k+2}] \\ (x_{k+3} - x)^2, & x \in [x_{k+2}; x_{k+3}] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

5. feladat

Legyen x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3} egyenletes felosztású. Írjuk fel az egyes intervallumokra a következő tulajdonságú másodfokú polinomokat:

a) $P_k(x_k) = 0$, $P_k'(x_k) = 0$, $P_k(x_{k+1}) = \frac{1}{2}$ az $[x_k; x_{k+1}]$ intervallumon.

b) $P_{k+1}(x_{k+1}) = \frac{1}{2}$, $P_{k+1}'(x_{k+1}) = P_k'(x_{k+1})$, $P_{k+1}(x_{k+2}) = \frac{1}{2}$ az $[x_{k+1}; x_{k+2}]$ intervallumon.

c) $P_{k+2}(x_{k+3}) = 0$, $P_{k+2}'(x_{k+3}) = 0$, $P_{k+2}(x_{k+2}) = \frac{1}{2}$ az $[x_{k+2}; x_{k+3}]$ intervallumon.

d) Ellenőrizzük, hogy $P_{k+1}'(x_{k+2}) = P_{k+2}'(x_{k+2})$.

Ezzel megkaptuk a $B_{2,k}(x)$ B-spline képletét.

1. megoldás

A Hermite-interpolációs polinom Newton-alakjához készítsük el az osztott differencia táblázatot. A táblázatban minden alappontot annyiszor írunk egymás alá, amennyi a multiplicitása. A második oszlopba a megadott függvényértékeket írjuk be. Azonos alappontok esetén az elsőrendű osztott differenciát $f[x_i, x_i] = f'(x_i)$-nek, a másodrendű osztott differenciát $f[x_i, x_i, x_i] = \frac{f''(x_i)}{2}$-nek értelmezzük. Ezeket írjuk be a táblázat megfelelő helyére. Az üresen maradt helyeket az interpolációnál tanultak szerint számoljuk ki.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	...	...
0	$\boxed{-1}$				
0	-1	$\boxed{-4}$			
2	-1	$\frac{1-1}{2-0} = 0$	$\frac{0-(-4)}{2-0} = \boxed{2}$		
2	-1	4	$\frac{4-0}{2-0} = 2$	$\frac{0-0}{2-0} = \boxed{0}$	
2	-1	4	6	$\frac{6-2}{2-0} = 2$	$\frac{2-0}{2-0} = \boxed{1}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakját.

$$H_3(x) = -1 - 4(x-0) + 2(x-0)^2 + (x-0)^2(x-2)^2 =$$
$$= -1 - 4x + 2x^2 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 1$$

Ennek a Horner-alakja:

$$H_3(x) = x(x(x(x-4)+6)-4)-1$$

2. megoldás

a) A Hermite-interpolációs polinom Newton-alakjához készítsük el az osztott differencia táblázatot az előző megoldásokban ismertetett módon.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	...
0	$\boxed{1}$			
0	1	$\boxed{-1}$		
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-1}{1-0} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-\frac{1}{2}-(-1)}{1-0} = \boxed{\frac{1}{2}}$	
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{-\frac{1}{4}-(-\frac{1}{2})}{1-0} = \frac{1}{4}$	$\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{1-0} = \boxed{-\frac{1}{4}}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az Hermite-interpolációs polinom

Newton-alakját.

$$\begin{aligned} H_3(x) &= 1-(x-0)+\frac{1}{2}\,x^2-\frac{1}{4}\,(x-0)^2(x-1) = \\ &= -\frac{1}{4}\,x^3+\frac{3}{4}\,x^2-x+1 \end{aligned}$$

Ennek a Horner-alakja:

$$H_3(x) = x\left(x\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\right)-1\right)+1$$

b) $H_3(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{32}+\frac{3}{16}-\frac{1}{2}+1 = \frac{21}{32}$ és $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$.

Az $x=\frac{1}{2}$ pontban a hibabecslés

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-H_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{M_4}{4!}\left|\Omega\left(\frac{1}{2}\right)\right|,$$

ahol

$$\Omega(x) = x^2(x-1)^2$$

$$\left|\Omega\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}-1\right)^2\right| = \frac{1}{16}.$$

Mivel $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, az f deriváltjai

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(1+x)^{-2} \\ f''(x) &= 2(1+x)^{-3} \\ f'''(x) &= -6(1+x)^{-4} \\ f^{(4)}(x) &= 24(1+x)^{-5}, \end{aligned}$$

ahonnan $x\in[0;1]$ esetén

$$|f^{(4)}(x)| = \frac{24}{(1+x)^5} \le 4! = M_4.$$

A kapott értékeket a hibabecslésbe helyettesítve

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-H_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{4!}{4!}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{16},$$

Az intervallumra érvényes hibabecsléshez számítsuk ki $\|\Omega\|_\infty$-t.

$$\Omega(x) = (x-0)^2(x-1)^2 = (x(x-1))^2$$

Az $x(x-1)$-nek az $x = \frac{1}{2}$ pontban van szélsőértéke (a parabola csúcsa).

$$\Omega\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\right)^2 = \frac{1}{16}$$

Innen $\|\omega\|_\infty = \frac{1}{16}$. Az $x \in [0;1]$ intervallumon a hibabecslés

$$|f(x) - H_3(x)| \leq \frac{M_4}{4!}\|\Omega\|_\infty = \frac{1}{16}.$$

c) A következő tulajdonságú alappolinomokra van szükségünk:

$$\begin{array}{llll}
\boxed{A_0(0) = 1} & A_1(0) = 0 & B_0(0) = 0 & B_1(0) = 0 \\
A_0(1) = 0 & \boxed{A_1(1) = 1} & B_0(1) = 0 & B_1(1) = 0 \\
A_0'(0) = 0 & A_1'(0) = 0 & \boxed{B_0'(0) = 1} & B_1'(0) = 0 \\
A_0'(1) = 0 & A_1'(1) = 0 & B_0'(1) = 0 & \boxed{B_1'(1) = 1}
\end{array}$$

Ezek Newton-alakjainak a kiszámítása:

x_i	$A_0(x_i)$	$A_0[x_i, x_{i+1}]$	$A_0[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	...
0	$\boxed{1}$			
0	1	$\boxed{0}$		
1	0	-1	$\boxed{-1}$	
1	0	0	1	$\boxed{2}$

$$A_0(x) = 1 - x^2 + 2x^2(x-1)$$

x_i	$A_1(x_i)$	$A_1[x_i, x_{i+1}]$	$A_1[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	...
0	$\boxed{0}$			
0	0	$\boxed{0}$		
1	1	1	$\boxed{1}$	
1	1	0	-1	$\boxed{-2}$

$$A_1(x) = x^2 - 2x^2(x-1)$$

x_i	$B_0(x_i)$	$B_0[x_i, x_{i+1}]$	$B_0[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	...
0	$\boxed{0}$			
0	0	$\boxed{1}$		
1	0	0	$\boxed{-1}$	
1	0	0	0	$\boxed{1}$

$$B_0(x) = x - x^2 + x^2(x-1)$$

x_i	$B_1(x_i)$	$B_1[x_i,x_{i+1}]$	$B_1[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$\dots$
0	$\boxed{0}$			
0	0	$\boxed{0}$		
1	0	0	$\boxed{0}$	
1	0	1	1	$\boxed{1}$

$$B_1(x) = x^2(x-1)$$

3. megoldás

A keresett spline alakja

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = x+1, & \text{ha } x \in [-2;-1] \\ P_2(x) = ax^3+bx^2+cx+d, & \text{ha } x \in [-1;1] \\ P_3(x) = x-1, & \text{ha } x \in [1;2]. \end{cases}$$

A természetes peremfeltétel teljesül, mert $P_1''(-2) = 0$ és $P_3''(2) = 0$.
Ezek után elegendő a spline tulajdonság feltételeit felírni. Írjuk fel először a függvény és deriváltjának a folytonosságát. Ez 4 feltételt ad a 4 ismeretlenre.

$$\begin{array}{lllll} (1) & P_1(-1) = P_2(-1) & \rightarrow & -a+b-c+d & = 0 \\ (2) & P_2(1) = P_3(1) & \rightarrow & a+b+c+d & = 0 \\ (3) & P_1'(-1) = P_2'(-1) & \rightarrow & 3a-2b+c & = 1 \\ (4) & P_2'(1) = P_3'(1) & \rightarrow & 3a+2b+c & = 1 \end{array}$$

Átalakítva

$$\begin{array}{llll} (1) & a+c = b+d & & \\ (2) & a+b+c+d = 2(a+c) = 0 & \rightarrow & a+c = b+d = 0 \\ (3) & 3a+c = 1+2b & & \\ (4) & 3a+2b+c = 1+4b = 1 & \rightarrow & b = 0, \quad d = 0 \end{array}$$

Már csak a, c -re kell felírnunk az egyenleteket.

$$\begin{array}{lll} (1) & a+c & = 0 \\ (3) & 3a+c & = 1 \end{array}$$

$(3) - (1)$ -ből $2a = 1 \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2}$.

Ezzel minden ismeretlen értékét meghatároztuk.

Ellenőriznünk kell még a függvény második deriváltjának folytonosságát.

$$\begin{aligned} &(5) \quad P_1''(-1) = P_2''(-1) \quad &\rightarrow \quad -6a + 2b \neq 0 \\ &(6) \quad P_2''(1) = P_3''(1) \quad &\rightarrow \quad 6a + 2b \neq 0 \end{aligned}$$

Az (5) és (6) feltétel nem teljesül, tehát nincs olyan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, melyre $S(x)$ spline.

4. megoldás

a) A feladat triviális, hiszen az $S_1(x) = x, \ x \in [-1; 1]$ függvény tökéletesen teljesíti a megszabott feltételeket, hiszen ekkor:

$$\begin{aligned} S_1(-1) &= -1 \quad &= f(-1) \\ S_1(0) &= \ \ 0 \quad &= f(0) \\ S_1(1) &= \ \ 1 \quad &= f(1) \end{aligned}$$

b) A következő alakú spline-t keressük:

$$S_2(x) = \begin{cases} P_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1, & x \in [-1; 0] \\ P_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2, & x \in [0; 1] \end{cases}$$

Megjegyzés

Azért hatványfüggvény rendszer ($x^0, x^1, x^2, \ldots$-ből álló rendszer) az intervallumonkénti bázis (ez alatt azt értjük, hogy az intervallumonkénti függvényeket hatványfüggvények lineáris kombinációjaként képezzük, ugyanazt jelenti mint lineáris algebrában), mert a 0 pontra sok feltételt kell felírnunk és így egyszerű, könnyen megoldható egyenleteket kapunk.

Az interpoláció feltételeket véve írjuk fel a megoldandó egyenletrendszert

$$\begin{aligned} &(1) \quad & P_1(-1) = a_1 - b_1 + c_1 = -1 \\ &(2) \quad & P_1(0) = c_1 = 0 \\ &(3) \quad & P_2(0) = c_2 = 0 \\ &(4) \quad & P_2(1) = a_2 + b_2 + c_2 = 1 \end{aligned}$$

Ebből megkapjuk hogy

$$\begin{aligned} &(\star) \quad & a_1 - b_1 = -1 \\ &(\triangle) \quad & a_2 + b_2 = 1 \end{aligned}$$

A belső alappontokban a spline első deriváltja folytonos.

$$P_i'(x) = 2a_ix + b_i$$

$$S_2' \in C : P_1'(0) = P_2'(0) \to b_1 = b_2 (5)$$

Szükségünk van még a peremfeltételre, azaz

$$P_1'(-1) = 0 \to -2a_1 + b_1 = 0 (6)$$

Így

$$(5), (6) \to b_1 = 2a_1 \wedge b_2 = 2a_1$$

és

$$\begin{aligned} (\star) \qquad a_1 - 2a_1 = -a_1 = -1 \to a_1 = 1 \to b_1 = b_2 = 2 \\ (\triangle) \qquad a_2 + 2a_1 = a_2 + 2 = 1 \to a_2 = -1 \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^2 + 2x, \qquad x \in [-1; 0] \\ P_2(x) &= -x^2 + 2x, \qquad x \in [0; 1] \end{aligned}$$

Megjegyzés

Egy másik megoldás lehetne a Hermite-interpoláció alkalmazása intervallumonként, hiszen az adott $P_i(x)$ polinomok egyértelműen meghatározhatóak az adott feltételekkel. Ügyeljünk rá, hogy a második intervallumban a bal oldali végpontban való folytonosság adja a látszólag hiányzó feltételt.

c) A keresett spline alakja

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & \text{,ha } x \in [-1; 0] \\ P_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \text{,ha } x \in [0; 1] \end{cases}$$

Megjegyzés

Azért hatványfüggvény rendszer az intervallumonkénti bázis, mert a 0 pontra sok feltételt kell felírnunk és így egyszerű, könnyen megoldható egyenleteket kapunk.

Írjuk fel elsőként az interpolációs feltételeket a polinomokra.

$$\begin{array}{llll} (1) & P_1(-1) = f(-1) = -1 & \to -a_1 + b_1 - c_1 + & d_1 = -1 \\ (2) & P_1(0) = f(0) = 0 & \to & d_1 = 0 \\ (3) & P_2(0) = f(0) = 0 & \to & d_2 = 0 \\ (4) & P_2(1) = f(1) = 1 & \to a_2 + b_2 + c_2 + & d_2 = 1 \end{array}$$

A polinomok első és második deriváltjai ($i = 1, 2$)

$$P_i'(x) = 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i$$
$$P_i''(x) = 6a_i x + 2b_i$$

A belső alappontban a spline első és második deriváltja is folytonos.

$$\begin{aligned}
&(5) \quad P_1'(0) = P_2'(0) \quad &\to c_1 &= c_2 \\
&(6) \quad P_1''(0) = P_2''(0) \quad &\to 2b_1 &= 2b_2
\end{aligned}$$

Hiányzik még az Hermite-féle peremfeltétel, azaz

$$S'(-1) = f'(-1) = 0, \;\; S'(1) = f'(1) = 0.$$

$$\begin{aligned}
&(7) \quad P_1'(-1) = 0 \quad &\to 3a_1 - 2b_1 + c_1 &= 0 \\
&(8) \quad P_2'(1) = 0 \quad &\to 3a_2 + 2b_2 + c_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Megjegyzés

Ilyen nagy egyenletrendszer esetén érdemes lehet Matlab-ot használni, ahol az egyenletrendszert mátrixos alakban írjuk fel.

A 8 egyenletes lineáris egyenletrendszert 4 egyenletesre redukálhatjuk.

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad -a_1 + b_1 - c_1 = -1 \\
&(4) \qquad a_2 + b_1 + c_1 = 1 \\
&(7) \qquad 3a_1 - 2b_1 + c_1 = 0 \\
&(8) \qquad 3a_2 + 2b_1 + c_1 = 0
\end{aligned}$$

Alakítsuk át az egyenletrendszert.

$$\begin{aligned}
&(1) + (4) \quad \to \quad -a_1 + a_2 + 2b_1 = 0 \quad \to \quad 2b_1 = a_1 - a_2 \\
&(7) - (8) \quad \to \quad 3(a_1 - a_2) - 4b_1 = 0 \quad \to \quad 3(a_1 - a_2) = 4b_1
\end{aligned}$$

Ezekből következik, hogy $b_1 = 0 = b_2$, tehát $a_1 = a_2$. Behelyettesítve (1) és (7) egyenletekbe:

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad -a_1 - c_1 = -1 \\
&(7) \qquad 3a_1 + c_1 = 0
\end{aligned}$$

Innen $c_1 = -3a_1$, és így $-a_1 - (-3a_1) = -1 \Rightarrow 2a_1 = -1 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}$. Tehát

$$c_1 = -3a_1 = \frac{3}{2}.$$

A keresett Hermite-féle peremfeltételű spline $x \in [-1;1]$ esetén

$$S(x) = -\tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{2}x.$$

Az előző szép eredmény után nem is lepődünk meg. A függvény páratlan volta, a nullára szimmetrikus alappontok és a jól megválasztott paraméterezés könnyű számolást és szép alakot eredményezett.

d) Nem, mert nem teljesíti a függvény a másik két klasszikus peremfeltételt, így nem várhatjuk, hogy a kapott spline jól közelít.

5. megoldás

Megjegyzés

Mivel egyenletes felosztáson vagyunk, ezért kihasználhatjuk azt, hogy

$$h := h_k = h_{k+1} = h_{k+2},$$

azaz ahol előjön két szomszédos alappont különbsége, ott h-t fogunk írni.

a) Az $[x_k; x_{k+1}]$ intervallumon a P_k polinomnak a következő feltételeket kell teljesítenie: a két végpontban az interpolációs feltételt és x_k -ban a derivált folytonosságát.

($x < x_k$ esetén a spline értéke 0 és az intervallum hossza h.)

$$P_k(x_k) = 0$$
$$P_k'(x_k) = 0$$
$$P_k(x_{k+1}) = \frac{1}{2}$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
x_k	$\boxed{0}$		
x_k	0	$\boxed{0}$	
x_{k+1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-0}{h} = \frac{1}{2h}$	$\frac{\frac{1}{2h}-0}{h} = \boxed{\frac{1}{2h^2}}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$P_k(x) = \frac{1}{2h^2}(x - x_k)^2.$$

b) Az $[x_{k+1};x_{k+2}]$ intervallumon a P_{k+1} polinomnak a következő feltételeket kell teljesítenie: a két végpontban az interpolációs feltételt és x_{k+1} -ben a derivált folytonosságát. (Az intervallum hossza h.)

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x_{k+1}) &= \frac{1}{2} \\ P'_{k+1}(x_{k+1}) &= P'_k(x_{k+1}) = \frac{1}{h} \\ P_{k+1}(x_{k+2}) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
x_{k+1}	$\boxed{\frac{1}{2}}$		
x_{k+1}	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{h}}$	
x_{k+2}	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{0-\frac{1}{h}}{h} = \boxed{-\frac{1}{h^2}}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$P_{k+1}(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{h}(x-x_{k+1})-\frac{1}{h^2}(x-x_{k+1})^2 = \frac{1}{2h^2}\left(h^2+2h(x-x_{k+1})-2(x-x_{k+1})^2\right).$$

c) Az $[x_{k+2};x_{k+3}]$ intervallumon a P_{k+2} polinomnak a következő feltételeket kell teljesítenie: a két végpontban az interpolációs feltételt és x_{k+3} -ban a derivált folytonosságát. (Az intervallum hossza h és $x > x_{k+3}$ esetén a spline értéke 0.)

$$\begin{aligned} P_{k+2}(x_{k+1}) &= \frac{1}{2} \\ P_{k+3}(x_{k+1}) &= 0 \\ P'_{k+3}(x_{k+2}) &= 0 \end{aligned}$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
x_{k+3}	$\boxed{0}$		
x_{k+3}	0	$\boxed{0}$	
x_{k+2}	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-0}{-h} = -\frac{1}{2h}$	$\frac{-\frac{1}{2h}-0}{-h} = \boxed{\frac{1}{2h^2}}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$P_{k+2}(x) = \frac{1}{2h^2}(x-x_{k+3})^2 = \frac{1}{2h^2}(x_{k+3}-x)^2.$$

d) Ellenőrizzük, hogy az x_{k+2} pontban folytonos-e a derivált.

$$\begin{aligned}
P'_{k+1}(x) &= \frac{1}{2h^2}\,(2h - 4(x - x_{k+1})) \\
P'_{k+1}(x_{k+2}) &= -\frac{1}{h} \\
P'_{k+2}(x) &= \frac{1}{2h^2} \cdot 2 \cdot (x - x_{k+3}) \\
P'_{k+2}(x_{k+2}) &= -\frac{1}{h}
\end{aligned}$$

Tehát $P'_{k+1}(x_{k+2}) = P'_{k+2}(x_{k+2})$ teljesül.

Ezzel megkaptuk a k. B-spline képletét

$$B_k(x) = \frac{1}{2h^2}\begin{cases} (x - x_k)^2 & \text{,ha } x \in [x_k; x_{k+1}] \\ h^2 + 2h(x - x_{k+1}) - 2(x - x_{k+1})^2 & \text{,ha } x \in [x_{k+1}; x_{k+2}] \\ (x_{k+3} - x)^2 & \text{,ha } x \in [x_{k+2}; x_{k+3}] \\ 0 & \text{,ha } x \notin [x_k; x_{k+3}]. \end{cases}$$