2. gyakorlat

Tétel: Sajátértékek becslése normával

Az A minden sajátértéke a komplex sík 0 középpontú $r := \|A\|$ sugarú zárt körlemezén helyezkedik el, azaz

$$|\lambda_i| \le \|A\|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Tétel: Gersgorin tétel

Az A minden sajátértéke a komplex sík a_{ii} középpontú

$$r_i := \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

sugarú zárt körlemezeinek uniójában helyezkedik el. Ezeket a köröket Gersgorin-köröknek nevezzük.

Tétel: Általános Gersgorin tétel

Ha a Gersgorin-körök között vannak diszjunkt körcsoportok, akkor minden körcsoportban annyi sajátérték helyezkedik el, amennyi körből a csoport áll.

1. feladat

Adjunk becslést az

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -0{,}5 \\ 0{,}1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeire

a) normával

b) Gersgorin-tétellel!

c) Igazoljuk, hogy az A mátrix invertálható.

2. feladat

a) Az alábbi szimmetrikus mátrix sajátértékeire adjunk becslést a Gersgorin-tétellel!

b) A 2 közelében lévő sajátértékre adjunk jobb becslést egy paraméteres hasonlósági transzformációval!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. feladat

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Az A mátrix sajátértékeire adjunk becslést a Gersgorin-tétellel!

b) Végezzük el A-n egy hasonlósági transzformációt:

$$B := D^{-1}AD, \quad D = \text{diag}(3,2,2)$$

majd adjunk újabb becslést a Gersgorin-tétellel!

c) Igazoljuk, hogy A invertálható!

4. feladat

a) Milyen becslést adhatunk a Gersgorin-tétellel az A sajátértékeire, ha tudjuk, hogy

$$|a_{ij}| \leq \varepsilon, \quad \forall\, i \neq j\text{-re, és} \quad \varepsilon > 0 \text{ kicsi?}$$

A Jacobi-módszer és a QR-algoritmus esetén ezzel a technikával kapjuk a hibabecslést.

b) Amikor MATLAB-ban 4 tizedesjegy pontossággal jelenítünk meg, akkor $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$. Ilyenkor milyen becslést adhatunk a sajátértékekre?

5. feladat

Tétel: Becslés a reziduális hibával

1. Legyen A diagonalizálható, azaz $\exists X$ invertálható mátrix, melyre $X^{-1}AX = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
2. Legyen μ és u az A közelítő sajátértéke és sajátvektora.
3. $r := Au - \mu u$ a közelítés reziduális hibája.
4. Olyan mátrixnormát válasszunk, melyben minden diagonális mátrixra $\|D\| = \max_{i=1}^{n} |d_{ii}|$. (Például a p-normák ilyenek.)

Ekkor

$$\min_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i - \mu| \le \frac{\|r\|}{\|u\|} \cdot \mathrm{cond}(X).$$

Az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix közelítő sajátértékének és sajátvektorának ismeretében készítsük el a sajátértékek becslését a reziduális hibával! A kiindulásként vett közelítések hatványmódszerrel kapott értékek (lásd később).

a)

$$\mu = \frac{5}{2}, u = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \text{ a pontos hiba: } \frac{1}{2}$$

b)

$$\mu = \frac{14}{5}, u = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \text{ a pontos hiba (Rayleigh-hányadossal közelítve a sajátértéket): } \frac{1}{5}$$

c) Igazoljuk a Gersgorin-tétel segítségével, hogy A pozitív definit mátrix.

6. feladat

Készítsük el a következő mátrixok Schur-felbontását és adjuk meg a sajátértékeit, sajátvektorait. (Matlab példa.)

A=[-2,0,0;-5,-2,-5;5,0,3]

A=[4,0,0;8,4,8;0,0,4]

A=[0,-1;1,0]

7. feladat

A Matlab a polinomokat egy vektorral reprezentálja úgy, hogy az együtthatóit tárolja. Első eleme a főegyüttható, hossza: fokszám+1.

p = [1,3,-2,1] : polinom megadása

p(1) : a polinom főegyütthatója, nem az 1-beli helyettesítési érték A polinom helyettesítési értékeit a polyval utasítással számíthatjuk.

polyval(p,[-1,0,1,2]) : a p polinom helyettesítési értékeit számolja a [-1,0,1,2] vektorban megadott helyeken. Vektorban kapjuk az eredményt.

q = poly([1,2,3,4]) : a vektorban megadott értékekből mint gyökökből előállítja a polinom együtthatóit

roots([1,0,1]) : meghatározza a polinom gyökeit (komplex gyökök)

roots([1,0,-1])

roots(q)

8. feladat

Figyeljük Wilkinson híres példáját (az eredeti példa 1,2,. . . 20 gyökökre vonatkozott). A polinom gyökei: 1,2,. . . ,30. Számítsuk ki Matlabbal a polinom együtthatóit, majd határozzuk meg a gyökeit. Mi a jelenség magyarázata?

9. feladat

Hogyan számoljuk az eltérést a sajátértékek között?

D=diag(1:5);

A=invhilb(5)*D*hilb(5);

B=A+1/1000*(rand(5,5)-1/2);

eig(A), eig(B)

max(abs(eig(A)-eig(B)))

Vagy végtelen normával számolni.

10. feladat

Készítsük el az A=tridiag(-1,2,-1)-es mátrixot (a diag utasítás segítségével) és határozzuk meg a sajátértékeit. Változtassuk meg véletlenszerűen az elemeit és vizsgáljuk meg a sajátértékek változását!

1. megoldás

a) Az A mátrix 1-es és végtelen (Csebisev) normája könnyen kiszámolható:

$$\|A\|_1 = \max\{(4+0{,}1),(0{,}5+2)\} = 4{,}1, \quad \|A\|_\infty = \max\{(4+0{,}5),(0{,}1+2)\} = 4{,}5.$$

Tehát ebből a tétel alapján a becslés

$$|\lambda_i| \leq 4{,}1.$$

b) Alkalmazzuk a Gersgorin-tételt. A táblázat alapján a körök szemléletesen

kp	4	2
r_i	0,5	0,1

meghatározhatók: Van egy 4 középpontú kör, melynek sugara 0,5, és egy 2 középpontú kör, melynek sugara 0,1. Ezen körök tartalmazzák a sajátértékeket.

Megjegyzés

A tétel alkalmazásánál figyeljünk arra, hogy a kör középpontján nincs abszolút érték, de a nem diagonális elemeket abszolút értékkel kell összegezni. *(Ezt könnyen megjegyezhetjük úgy, hogy ha nem így lenne, akkor lehetne mondjuk negatív sugarú körünk is.)*

Megjegyzés

A feladatok megoldása során mindig az **általános Gersgorin-tételt** alkalmazzuk

Halmazként megadva:

$$G_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-4| \leq 0{,}5\},$$

$$G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq 0{,}1\}.$$

A két kör uniója adja meg a sajátértékek halmazát:

$$G = G_1 \cup G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-4| \leq 0{,}5 \text{ vagy } |z-2| \leq 0{,}1\}.$$

Mivel a körök diszjunktak, így az általános Gersgorin-tétel alapján minden kör pontosan egy sajátértéket tartalmaz, így

$$|\lambda_1 - 4| \leq 0{,}5, \quad |\lambda_2 - 2| \leq 0{,}1$$

c) Vegyük észre azt is, hogy a $0 \notin G_1 \cup G_2$, így az A invertálható.

Megjegyzés

A Gersgorin tétellel tehát az invertárhatóságra is adható elégséges feltétel: ha a körök egyikében sincs benne a 0, akkor az A invertálható. Ahogy majd később látni fogjuk, jelen elégséges feltétel egy *hasonlósági transzformáció* után is kihasználható.

2. megoldás

a) Alkalmazzuk a Gersgorin-tételt. A kapott körök halmazai:

kp	2	1
r_i	0,1	0,1

$$G_1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \le 0{,}1\}, \quad G_2 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \le 0{,}1\}.$$

Ezek uniója adja meg a sajátértékek lehetséges helyét:

$$G = G_1 \cup G_2.$$

Megjegyzés

Szimmetrikus mátrix sajátértékei valósak.

Így az általános Gersgorin-tétel miatt:

$$\lambda_1 \in [1{,}9; 2{,}1], \quad \lambda_2 \in [0{,}9; 1{,}1].$$

b) A 2 közelében lévő sajátérték jobb közelítéséhez végezzünk el egy paraméteres hasonlósági transzformációt!

Legyen a transzformáló mátrix

$$D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad d > 0.$$

Hasonlósági transzformációnk:

$$\widetilde{A} \;=\; D^{-1}AD.$$

Először írjuk fel D^{-1}:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Most lépésről lépésre:

$$A\,D = \begin{bmatrix} 2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2d & 0{,}1 \\ 0{,}1d & 1 \end{bmatrix},$$

(ez egy oszlopokat manipuláló mátrixszorzás)

$$D^{-1}(A\,D) = \begin{bmatrix} 1/d & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2d & 0{,}1 \\ 0{,}1d & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{0{,}1}{d} \\ 0{,}1\,d & 1 \end{bmatrix}$$

(ez egy sorokat manipuláló mátrixszorzás)

Így a transzformált mátrix:

$$\widetilde{A} = D^{-1}AD = \begin{bmatrix} 2 & \dfrac{0{,}1}{d} \\ 0{,}1\,d & 1 \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy a hasonlósági transzformáció a sajátértékeket nem változtatja meg, sőt a Gersgorin kör középpontok is a helyükön maradnak. Viszont a segítségével paraméteres alakban kapjuk meg a sugarakat.

Ekkor az $\widetilde{A}$ mátrixra az általános Gersgorin-tételt alkalmazva:

kp	2	1
r_i	0,1/d	0,1d

Most kétféle dolgot szeretnénk: a 2-höz tartozó kör sugarát minimalizálni, de csak úgy, hogy a két kör ne érjen össze, hiszen csak ekkor tudunk a két sajátértékre külön becslést adni.

Ehhez szükséges, hogy

$$2 - \frac{0{,}1}{d} \;>\; 1 + 0{,}1\,d.$$

Mindkét oldalt szorozzuk d-vel ($d > 0$):

$$2d - 0{,}1 \;>\; d + 0{,}1\,d^2,$$

$$2d - d - 0{,}1 - 0{,}1\,d^2 \;>\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -0{,}1\,d^2 + d - 0{,}1 > 0.$$

$$d^2 - 10\,d + 1 < 0.$$

Ennek a másodfokú egyenlőtlenségnek a gyökei

$$d = \frac{10 \pm \sqrt{100-4}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6},$$

így a megoldás:

$$d \in \left(5 - 2\sqrt{6},\; 5 + 2\sqrt{6}\right).$$

És nyilván a d-t pedig maximalizálni szeretnénk, így jó lesz a $d = 5+2\sqrt{6} \approx 9{,}89$.

3. megoldás

a) Alkalmazzuk a Gersgorin-tételt az A mátrixra.

kp	8	4	5
r_i	9	2	3

A Gersgorin körök a következők:

$$G_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-8| \leq 9\}, \quad G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-4| \leq 2\}, \quad G_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-5| \leq 3\}.$$

Mivel a körök nem diszjunktak, ezek uniója adja meg a sajátértékek lehetséges helyét:

$$\forall i: \ \lambda_i \in G_1 \cup G_2 \cup G_3$$

b) Végezzük el mátrixszorzással a hasonlósági transzformációt!

$$B = D^{-1}AD, \quad D = \mathrm{diag}(3{,}2{,}2).$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Így a B mátrix egyszerű szorzással előállítható.

$$B = D^{-1}AD = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 3/2 & 4 & -1 \\ -3/2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés

A diagonális mátrixal végzett hasonlósági transzformáció a kiinduló A mátrix diagonális elemeit mindig változatlanul hagyja. Ennek a következménye, hogy a Gersgorin körök középpontja nem változik. *Gondoljuk meg, hogy minden diagonális elemet egyszer a d_i értékkel szorzunk, majd egyszer a $1/d_i$ értékkel, így az eredmény mindig az eredeti diagonális elem lesz.*

c) Alkalmazzuk a Gersgorin-tételt most a B mátrixra.

kp	8	4	5
r_i	6	2,5	3,5

A kapott körök ekkor:

$$G_1' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-8| \leq 6\}, \quad G_2' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-4| \leq 2,5\}, \quad G_3' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-5| \leq 3,5\}.$$

Látható, hogy $0 \notin G'_1 \cup G'_2 \cup G'_3$, így a B az elégséges feltétel miatt invertálható. Mivel a hasonlósági transzformáció a sajátértékeket nem változtatja meg, így az A-nak sincs 0 sajétértéke, azaz A invertálható.

4. megoldás

a) A Gersgorin-tételt kell alkalmazni. Tehát a λ_i sajátértékek az a_{ii} középpontú és $(n-1)\,\varepsilon$-os sugarú körök uniójában helyezkednek el.

b) Ha

$$|a_{ii} - a_{jj}| > 2\,(n-1)\,\varepsilon \quad \forall\, j \neq i,$$

akkor az a_{ii} az i-edik sajátérték $(n-1)\,\varepsilon$-os közelítése.

5. megoldás

a) A tételt alkalmazzuk a konkrét értékekre.

$$r = Au - \mu u \;= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{25}{2} \\ -10 \end{bmatrix} \;= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

A reziduális hiba normája:

$$\|r\|_2 = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-3)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 9} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

A sajátvektor normája:

$$\|u\|_2 = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}.$$

A tétel alapján: $|\lambda_i - \mu| \leq \frac{\|r\|_2}{\|u\|_2} \cdot \mathrm{cond}(X)$. A feladat során a kettes normát használjuk azért, hogy a kondíciószám kiszámítása egyszerű legyen. Emiatt $\mathrm{cond}(X) = 1$, hiszen A szimmetrikus: $|\lambda_i - \mu| \leq \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{41}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{41}} \approx 0.524$.

b) Analóg módon megoldható. A tételt alkalmazzuk a konkrét értékekre.

$$r = Au - \mu u = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{14}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{70}{5} \\ -\frac{56}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 \\ -\frac{56}{5} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -13 + \frac{56}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-65}{5} + \frac{56}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-9}{5} \end{bmatrix}.$$

A reziduális hiba normája:

$$\|r\|_2 = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{9}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{9}{5}.$$

A sajátvektor normája:

$$\|u\|_2 = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}.$$

A tétel alapján: $|\lambda_i - \mu| \leq \frac{\|r\|_2}{\|u\|_2} \cdot \mathrm{cond}(X)$.

Mivel $\mathrm{cond}(X) = 1$, hiszen A szimmetrikus: $|\lambda_i - \mu| \leq \frac{\frac{9}{5}}{\sqrt{41}} = \frac{9}{5\sqrt{41}} \approx 0.281$.

c) Az A mátrix nyilván pozitív definit, hiszen a Gersgorin-tétel alkalmazásával:

kp	2	2
r_i	1	1

A mátrix szimmetrikus, így minden sajátértéke valós. A Gersgorin-körök középpontjai 2 és 2, mindkettő sugara 1, így nyilván $\forall i: \ \lambda_i \in [1, 3]$, tehát $\lambda_i > 0$.

6. megoldás

R=schur(A)

[Q,R] = schur(A)

[Q,R] = schur(A,'complex') : valós A esetén komplex felbontást kérünk

7. megoldás

Matlab példafeladat.

8. megoldás

A polinom gyökei és együtthatói közti kapcsolat numerikusan instabil lehet, és ez különösen magas fokszám és kis perturbáció esetén jelentős gyök-eltolódást okozhat.

9. megoldás

Matlab példafeladat.

10. megoldás

Matlab példafeladat.