Diszkrét matematika 1

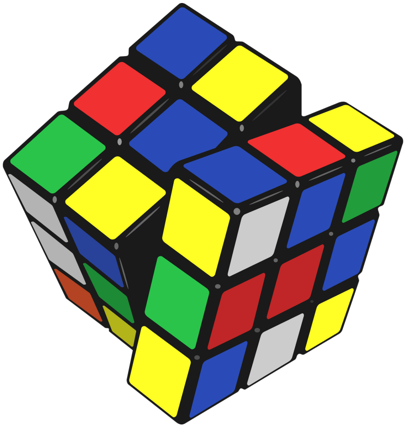
Kombinatorika

Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2024 tavasz

Kombinatorika



Kombinatorika

Célunk

- véges halmazok elemeinek rendezése valamely szempont szerint
- különböző lehetőségek leszámlálása

Példa

- Mennyi a lehetséges rendszámtáblák/telefonszámok/IP címek száma?

  123.12.1.56 242.1.199.251 87.210.165.1 176.63.92.47 . . .

- 5 különböző elem lehetséges sorrendjeinek száma.

  12345, 12354, 12435, 12453, . . .

- A Lottón hány lehetséges szelvény van?

  7,11,19,67,74 32,33,59,75,90 14,17,40,44,76, 15,58,59,59,61, . . .

ÉSZ KOMBÁJN

Egy pakli kártyát többféleképpen lehet elrendezni, mint ahány atom van a Földön

ÉSZKOMBÁJN 2022. szeptember 12. – 04:52 frissítve

Mint csillag az égen – Fotó: Hannah Yelverton / Getty

Legfontosabb

GAZDASÁG

Osztrák Spar-vezér: A magyar kormány szerint jobban járnánk, ha bevásárolhatná magát az állam

Összeadás-szabály

Példa

- Egy pékségben 3-féle édes és 2-féle sós péksütemény van. Hányféleképpen tudunk egy édes vagy sós süteményt választani?
- $3 + 2 = 5$ lehetséges módon.

Összeadás-szabály

- Adott két véges diszjunkt halmaz

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \quad \text{és} \quad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

  Hányféleképpen tudunk A-ból vagy B-ből egy elemet választani?
- A lehetséges választások: $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_n$.
- Ezek száma: $k + n$.

Szorzat-szabály

Példa

- Egy pékségben 3-féle édes és 2-féle sós péksütemény van. Hányféleképpen tudunk egy édes és egy sós süteményt választani? $\Rightarrow 2 \times 3 = 6$

Szorzat-szabály

- Adott két véges diszjunkt halmaz
  $$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \quad \text{és} \quad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$
  Hányféleképpen tudunk A-ból és B-ből egy-egy elemet választani?

$$\begin{array}{c|cccc}
 & b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\
\hline
a_1 & (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \ldots & (a_1, b_n) \\
a_2 & (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \ldots & (a_2, b_n) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_k & (a_k, b_1) & (a_k, b_2) & \ldots & (a_k, b_n)
\end{array}$$

- Ezek száma: $k \times n$.

Szorzat-szabály, ismétléses variáció

Feladat: Egy n-elemű halmazból kiválasztunk k-szor elemet. A sorrend számít, egy elemet többször választhatunk. Hány választási lehetőség van?

Példa

- Lehetséges IP-címek száma:
  $n = 2$ (alaphalmaz: $\{0, 1\}$), $k = 32$ (bitek száma). $\Longrightarrow$ 2^{32} lehetőség
- Telefonszámok (körzetszám nélkül):
  $n = 10$ (alaphalmaz: $\{0, 1, \ldots, 9\}$), $k = 7$ (telefonszám hossza).
  $\Longrightarrow$ 10^7 lehetőség
- Szeminárium-termek kulcstartó lehetséges kódja:
  $n = 10$ (alaphalmaz: $\{0, 1, \ldots, 9\}$), $k = 4$ (kód hossza). $\Longrightarrow$ 10^4 lehetőség

A szorzat-szabály szerint: n^k lehetséges sorrend.

Bizonyítás.
n-féleképpen választhatjuk az $1.$ elemet és n-féleképpen választhatjuk a $2.$ elemet és n-féleképpen választhatjuk a $3.$ elemet és ... $\square$

Szorzat-szabály, ismétléses variáció

Tétel

Legyen A egy véges halmaz. Ekkor A határvnyhalmazának elemszáma $|\mathcal{P}(A)| = |\{B : B \subset A\}| = \left|2^A\right| = 2^{|A|}$.

Bizonyítás.

- Állítsuk sorrendbe A elemeit.
- Minden egyes elemre válasszunk a $\left\{\text{benne van}, \text{nincs benne}\right\}$ halmazból.
- Az ilyen $|A|$ hosszú ,,benne van"/,,nincs benne" sorozatok szám: $2^{|A|}$. $\square$

Példa

- Lifttel utazunk a földszintről a 7. emeletre.
- Két utazás különböző, ha menet közben máshol állnak meg.
- Hány típusú utazás van?

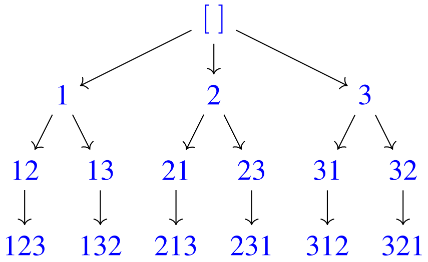
$\Longrightarrow$ 6 közbenső emelet, 2 választás $\left\{\text{megáll}, \text{nem áll meg}\right\}$

$\Longrightarrow$ 2^6 lehetőség

Szorzat-szabály 2

Példa

- Hányféleképpen tudunk 3 embert sorba állítani?



Szorzat-szabály 2

- Adott egy $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ véges halmaz, és minden a_i elemhez egy B_i véges halmaz.
- A B_i halmazok elemszáma megegyezik: $|B_1| = |B_2| = \cdots = |B_k| = \ell$
- Választunk egy $a_i \in A$ elemet és választunk egy $b \in B_i$ elemet.
- Ezek száma: $k \times \ell$

- 3 embert $3 \times 2 \times 1 = 6$ módon tudunk sorba állítani.

Szorzat-szabály 2, ismétlés nélküli permutáció

Feladat: Egy n-elemű halmaz elemeit sorba állítjuk. Hány lehetőség van?

Példa

- A vizsgán 10 feladat van kitűzve. Hányféleképpen oldhatjuk meg ezeket?
  $\Longrightarrow 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \approx 3,6 \cdot 10^6$
- Egy lóversenyen 70 induló van. A verseny lehetséges kimenetele (nincs döntetlen, mindenki célba ér):
  $\Longrightarrow 70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \approx 1,2 \cdot 10^{100}$
  (v.s atomok száma a megfigyelt univerzumban: $10^{78} - 10^{82}$)
- Egy 200 fős évfolyam hányféleképpen tudja aláírni a jelenléti ívet?
  $\Longrightarrow \quad 200 \cdot 199 \cdot \ldots 2 \cdot 1 \approx 7,89 \cdot 10^{374}$ lehetőség

A szorzat-szabály 2 szerint: $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ lehetséges sorrend.

Bizonyítás.
n-féleképpen választhatjuk az $1.$ elemet és $(n-1)$-féleképpen választhatjuk a $2.$ elemet és $(n-2)$-féleképpen választhatjuk a $3.$ elemet és ... $\square$

Szorzat-szabály 2, ismétlés nélküli variáció

Feladat: Egy n-elemű halmazból választunk. A sorrend számít, de egy elemet csak egyszer választhatunk. Hány lehetőség van?

Példa

- A vizsgán 10 feladat van kitűzve.
  Hányféleképpen oldhatjuk meg ezek közül 3-at? $\Longrightarrow$ $10 \cdot 9 \cdot 8$
- Egy lóversenyen 70 induló van. Hány lehetőség van a dobogó (1-3.) helyezettjeire? $\Longrightarrow$ $70 \cdot 69 \cdot 68$
- Egy 200 fős évfolyam hallgatóiból hányféleképpen jöhet be 100 fő az előadóba?
  $\Longrightarrow \quad 200 \cdot 199 \cdot \ldots 102 \cdot 101$

A szorzat-szabály 2 szerint: $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ lehetséges sorrend.

Bizonyítás. HF $\square$