Folytonosság

$(X,\ \rho),\ (Y,\ \sigma)$ metrikus terek és $f \in X \to Y,\ a \in D_f,$ ekkor f **folytonos** a-ban $(f \in C\{a\})$, ha $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D_f,\ \rho(x,\ a) < \delta : \sigma(f(x),\ f(a)) < \varepsilon$

f **folytonos** $(f \in C)$, ha $\forall a \in D_f : f \in C\{a\}$

Átviteli elv

$f \in C\{a\} \iff \forall x_n : \mathbb{N} \to X, \lim(x_n) = a :\ \exists \lim f(x_n) = f(a)$ (bizonyítása ugyanaz, mint valós esetben)

Ekvivalens metrikák esetén folytonosság ugyanaz.

Többváltozós vektorfüggvények folytonossága vagy függvénysorozatok folytonossága idk

$f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{K}^s \to \mathbb{K}^m$

$f \in C\{a\} \iff \forall i = 1, \ldots, m : f_i \in C\{a\}$ (amúgy f_i a koordináta-függvények)

Speciális esetek:

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m : \quad f(x) = (\cos(x), \sin(x)) \in \mathbb{R}^2 \quad (0 \le x \le 2\pi)$ egy egységkör

$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \quad f(u,\ v) = (\sin(v)\ \cos(u),\ \sin(v)\sin(u),\ \cos(v)) \in \mathbb{R}^3 \quad (0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le \pi)$ egy egység gömbfelület

Kompaktság

Definíció

$(x,\ \rho)$ metrikus tér, $\emptyset \ne A \subset X,\ A$ kompakt, ha

$\forall (x_n) : \mathbb{N} \to A, \exists (\nu_n)$ indexsorozat, hogy (x_{ν_n}) konvergens és $\lim(x_{\nu_n}) \in A$

Tétel 1.

A kompakt $\implies$ A korlátos és zárt

Bizonyítás

A zárt triviális Indirekt tegyük fel, hogy A nem korlátos. Legyen $x_0 \in A \implies A \not\subset K_1(x_0) \implies \exists x_1 \in A \setminus K_1(x_0)$, azaz $\rho(x_0,\ x_1) \geq 1$ ezért $A \not\subset K_1(x_0) \cup K_1(x_1) \implies \exists x_2 \in A : \rho(x_0,\ x_2) \geq 1$ és $\rho(x_1,\ x_2) \geq 1$

Ezt tovább folytatva:

$\exists(x_k) : \mathbb{N} \to A : \forall i, k \in \mathbb{N},\ i \neq k : \rho(x_i,\ x_k) \geq 1 \implies \forall(\nu_n)$ indexsorozatra $\rho(x_{\nu_i},\ x_{\nu_k}) \geq 1 \implies (x_{\nu_k})$ nem Cauchy-sorozat ezért nem konvergens.

Tétel 2.

$(\mathbb{K},\ \rho_p)$-ben kompaktság $\iff$ korlátos és zárt

Bizonyítás

$\Longleftarrow$ Korlátosság miatt működik B-W-tétel tehát konvergensség ✓.Zártság miatt a határérték a halmazon belül marad.

Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai

Legyen $(X,\ \rho),\ (Y,\ \sigma)$ mertrikus terek, $f \in X \to Y, f \in C,\ D_f$ kompakt ekkor:

$a)$ R_f kompakt (**Weierstrass** tétel)

$b)$ f egyenletesen folytonos ($\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, z \in D_f,\ \rho(x,\ z) < \delta : \sigma(f(x),\ f(z)) < \varepsilon$) (**Heine** tétel)

$c)$ ha $\exists f^{-1}$, akkor $f^{-1} \in C$ (**Inverz** függvény folytonossága)