

# Diszkrét matematika 1

## Gráfok

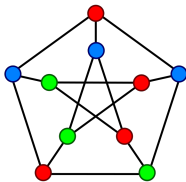
Mérai László

`merai@inf.elte.hu`

Komputeralgebra Tanszék

2025 tavasz

# Gráfok

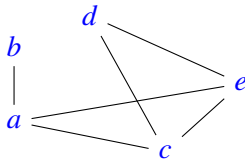


# Egyszerű gráfok

## Definíció

Egy  $G = (V, E)$  egy **egyszerű gráf**, ha

- $V$  a gráf **pontjainak** halmaza,
- $E$  a gráf **éleinek** halmaza, ahol  $E$  a  $V$ -ből alkotott **rendezetlen párok** egy halmaza.



**Alternatív definíció:** szimmetrikus, irreflexív reláció

## Példa

- $G = (V, E)$ ,  $V = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{d, e\}, \{c, e\}, \{d, c\}, \{a, e\}\}$
- város úthálózata
- Internet hivatkozásai (egyszerű **irányított** gráf)
- szerverek és közöttük közvetlen adatkapcsolat
- ismeretségi kapcsolat

# Nem egyszerű gráfok

**Emlékeztető:** Egy  $G = (V, E)$  egy **egyszerű gráf**, ha

- $V$  a gráf **pontjainak** halmaza,
- $E$  a gráf **éleinek** halmaza, ahol  $E$  a  $V$ -ből alkotott **rendezetlen párok** egy halmaza.

Nem egyszerű gráf:

- hurokél:  $\{a, a\} = \{a\}$  él
- párhuzamos élek:  $\{a, b\}, \{a, b\}$
- ...

# Nem egyszerű gráfok

**Emlékeztető:** Egy  $G = (V, E)$  egy **egyszerű gráf**, ha

- $V$  a gráf **pontjainak** halmaza,
- $E$  a gráf **éleinek** halmaza, ahol  $E$  a  $V$ -ből alkotott **rendezetlen párok** egy halmaza.

További lehetőségek:

- irányított gráf
- él-súlyozott gráf (pl. úthálózat, csomópontok között különböző hosszú út)
- csúcs-súlyozott gráf
- ...

## Definíció

Egy  $G = (V, E)$  gráf **véges**, ha véges sok pontja van ( $V$  egy véges halmaz).

Informatikában elsősorban **véges** gráfokkal foglalkozunk.

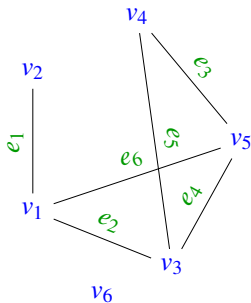
# Gráf alapfogalmak

Most csak **egyszerű**, **véges** gráfokkal foglalkozunk.

## Definíció

Legyen  $G = (V, E)$  egy egyszerű véges gráf.

- A  $v \in V$  csúcs és az  $e \in E$  él **illeszkednek**, ha  $v \in e$ .
- A  $v \in V$  csúcs **fokszáma** a rá illeszkedő élek száma:  $d(v) = |\{e \in E : v \in e\}|$
- A  $v \in V$  csúcs **izolált csúcs**, ha  $d(v) = 0$ .
- Az  $u, v \in V$  csúcsok **szomszédosak**, ha  $u \neq v \wedge \exists e \in E : u, v \in e$  (azaz  $\{u, v\} \in E$ )



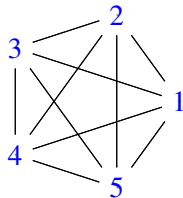
## Példa

- $v_1$  illeszkedik az  $e_1, e_2, e_6$  élre
- $d(v_1) = 3$
- $d(v_6) = 0$  (izolált csúcs)
- $v_1, v_2$  szomszédosak

# Kézfogás-szabály

## Tétel

Minden  $G = (V, E)$  gráfra  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ .



## 1. Bizonyítás.

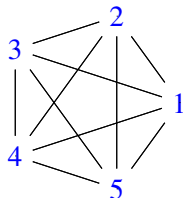
- Számoljuk meg az **illeszkedő** pont-él párokat  $\{(v, e) \in V \times E : v \in e\}$ :
  - $\sum_{v \in V} \sum_{e \in E} |\{(v, e) \in V \times E : v \in e\}| = \sum_{v \in V} |\{e \in E : v \in e\}| = \sum_{v \in V} d(v).$
  - $\sum_{e \in E} \sum_{v \in V} |\{(v, e) \in V \times E : v \in e\}| = \sum_{e \in E} |\{v \in V : v \in e\}| = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|.$



# Kézfogás-szabály

## Tétel

Minden  $G = (V, E)$  gráfra  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ .



## 2. Bizonyítás.

Indukció  $|E|$  szerint.

- $|E| = 0$  esetén az állítás igaz (üres gráf).
- Thf  $|E| \leq k$  esetén igaz az állítás.
- $|E| = k + 1$  esete: a gráfot úgy kapjuk, hogy egy  $k$  élszámú gráfba egy új élet behúzunk.
- Ekkor a jobb oldal kettővel nő ( $2(|E| - 1) \rightsquigarrow 2|E|$ ).
- Ekkor a bal oldal is kettővel nő (új élre illeszkedő két  $v_1, v_2$  fokszáma eggyel-eggyel nő).