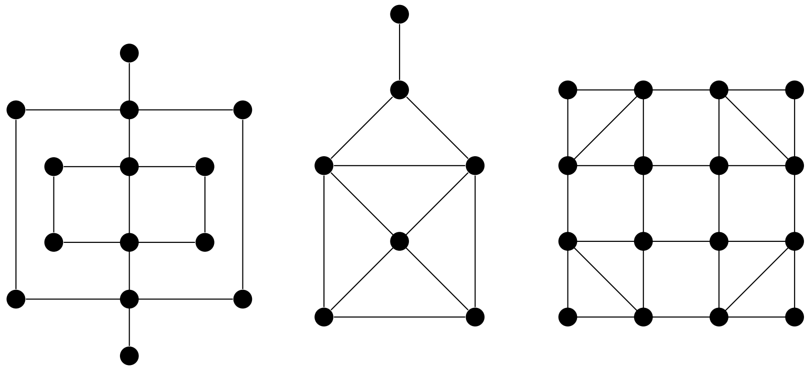
Diszkrét matematika I. feladatok
Gráfok III

Tizenkettedik alkalom (2025.05.06-05.16.)

1. Van-e az alábbi gráfokban Euler-séta?



   Megoldás: Mindhárom gráf összefüggő, tehát csak a fokszámokat kell vizsgálni. Bal oldali: 2 db elsőfokú csúcs, a többi páros fokú, tehát van nyílt Euler-séta (keressünk!). Középső: 3 db harmadfokú és 1 db elsőfokú csúcs, nincs sem nyílt, sem zárt Euler-séta. Jobb oldali: minden fokszám páros, tehát van zárt Euler-séta (keressünk!).

2. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben van Euler-kör, páros sok csúcsa és páratlan sok éle van?

   Megoldás: Pl. egy C_4 és egy C_3 egy csúcsánál összeragasztva: 6 csúcs, 7 él, öf. és minden fokszám páros. Másik pl.: C_3 és egy izolált csúcs: 4 csúcs, 3 él, minden fokszám páros, és az izolált csúcstól eltekintve öf. a gráf.

3. Igazolja, hogy minden VÉGES összefüggő gráfban van olyan séta, amely a gráf minden élét pontosan kétszer tartalmazza. Igaz-e ez zárt sétára?

   Megoldás: Minden élt kétszerezzünk meg! Ekkor minden fokszám páros, tehát van zárt Euler-séta. Ez az eredeti gráfban olyan (zárt) séta, amely minden élt pontosan kétszer tartalmaz.

4. Mutassa meg, hogy ha egy VÉGES gráf minden pontjának foka 4, akkor élei színezhetőek piros és kék színekkel úgy, hogy minden csúcshoz két-két piros és kék él illeszkedjen!

   Megoldás: Tegyük fel, hogy összefügő a gráf. (Ha nem összefüggő, az alábbi eljárást komponensenként végrehajthatjuk.) Minden fokszám páros, tehát van zárt Euler-séta. Menjünk végig egy zárt Euler-sétán! Menet közben az éppen bejárt éleket színezzük felváltva piros és kék színnel, pirossal kezdve. Minden közbenső csúcsban kétszer járunk, belépéskor az egyik, kilépéskor a másik színnel színezünk. Így minden közbenső csúcsra 2 piros és 2 kék él fog illeszkedni. Mivel minden fokszám 4, ezért $\sum d(v) = 4 \cdot |V| = 2 \cdot |E|$, azaz $2 \cdot |V| = |E|$, tehát az élszám páros. Így amikor a séta végén másodszor visszaérünk a kiindulási csúcsba, az utolsó élt kékkel színezzük, így a kiindulási csúcshoz is két piros és két kék él illeszkedik.

5. Mutassa meg, hogy ha egy gráfban van Hamilton-kör, AKKOR bárhogy töröljük egyetlen élét, a maradék gráf összefüggő.

   Megoldás: Ha a törölt él nem a Hamilton-kör éle volt, akkor a maradék gráfban is van Hamilton-kor, nyilván öf. Ha a törölt él a Hamilton-kör egy éle volt, akkor a maradék gráfban van Hamilton-út, nyilván öf.

6. Legyen a G gráf csúcsainak halmaza $\{1, 2, ..., 100\}$. Határozzuk meg G éleinek és összefüggőségi komponenseinek számát, ha az éleket a következőképpen adjuk meg: i és j pontosan akkor van összekötve, ha
   a) $i - j$ páratlan;

b) $2 \le |i-j| \le 3$;
c) $i-j$ osztható 3-mal és $i \ne j$;
d) $|i-j| = 3$ vagy $|i-j| = 8$? (A négy alfeladatban négy különböző gráfról van szó.)

Megoldás: Általában: Összefüggőség igazolásához elég megmutatni, hogy van olyan csúcs, melyből bármely másik csúcsba eljuthatunk sétával (séta = ,,átjárás éleken"); vagy mutathatunk egy összefüggő, feszítő részgráfot; vagy megmutathatjuk, hogy bármely két csúcs közt van séta. Összefüggőség cáfolásához elég mutatni két olyan csúcsot, melyek közt nincs séta; vagy megpróbálhatjuk felosztani a csúcsokat nemüres részhalmazokra úgy, hogy a részek között ne vezessen él; vagy választhatunk egy csúcsot, és megmutathatjuk, hogy az ebből a csúcsból sétával elérhető csúcsok halmaza nem tartalmazza az összes csúcsot.

a) A gráf öf (azaz 1 öf komponense van), hiszen bármely két eltérő paritású szám között van él, két azonos paritású szám között pedig van kettő hosszúságú út tetszőleges ellenkező paritású szám közbeiktatásával. Mind a 100 csúcs fokszáma 50, így az élek száma $100 \cdot 50/2 = 2500$.

b) Az 1-ből kettő távolságokra lépkedve végig tudunk menni a páratlan számokon (találunk egy utat, ami tartalmazza mindet, tehát ezek mind egy komponensen belül kell, hogy legyenek), és ugyanúgy a 2-ből indulva találunk olyan utat is, mely az összes páros számot tartalmazza (tehát a páros számok is egyazon komponensen belül kell, hogy legyenek – eddig azt állapítottuk meg, hogy a komponensek száma legfeljebb kettő). Ráadásul páros és páratlan számok között is vezet él (pl. az 1 és a 4 között), így bármely két csúcs közt van séta (avagy a páros és páratlan számok halmaza nem alkothat két külön komponenst, hiszen van él a két halmaz között), tehát a gráf öf, azaz összefüggőségi komponenseinek száma 1. Az élek számát megállapíthatjuk a fokszámok segíségével: az 1, 2, 99, 100 csúcsok foka 2, a 3 és a 98 csúcsok foka 3, a többié ($100-6=94$ db) 4, tehát a fokszámok összege $4\cdot 2+2\cdot 3+94\cdot 4 = 390$, így az élek száma 195.

c) A feltétel szerint két csúcs között pontosan akkor van él, ha a hárommal való osztási maradékuk megegyezik. Így a gráfnak három összefüggőségi komponense lesz: a nulla, illetve kettő maradékot adó számok egy-egy K_{33}-at (33 csúcsú teljes gráf), míg az egy maradékot adó számok egy K_{34}-et feszítenek, melyek között nem megy él. Egy n csúcsú teljes gráf éleinek száma $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$, így a gráf élszáma $2\binom{33}{2} + \binom{34}{2}$.

d) A gráf összefüggő, ehhez elegendő megmutatni, hogy az i csúcsból el tudunk jutni az $i+1$-be ($1 \le i \le 99$). Az élek behúzási szabálya miatt az i, $i+3$, $i+6$, $i+9$, $i+1$ csúcssorozat egy út i-ből $i+1$-be. Ez jó, feltéve, hogy $i+9 \le 100$, azaz $i \le 91$. Ha $i \ge 92$, először balra lépve nyolcat, majd háromszor jobbra hármat kapunk jó utat: i, $i-8$, $i-5$, $i-2$, $i+1$.

Másik megoldás: A ,,háromlépéses" éleket behúzva látszik, hogy a hárommal osztva azonos maradékot adó számok egyazon komponensben lesznek; tehát ha csak ezek az élek volnának G-ben, akkor három komponense volna, az $\{1,4,7,10,\ldots,100\}$, $\{2,5,8,\ldots,98\}$ és a $\{3,6,9,\ldots,99\}$ csúcsok által feszítettek. Viszont vannak még a ,,nyolclépéses" élek is, pl az $\{1,9\}$ és a $\{2,10\}$, melyek összekötik ezeket a kupacokat. Ezek alapján G összefüggő, vagyis az öf. komponensek száma 1.

Élek száma: a csúcsok többségének 4 a fokszáma, kivéve azokat, melyeknél nincs 3-mal vagy 8-cal kisebb vagy nagyobb szám a csúcshalmazban. Tehát $d(1) = d(2) = d(3) = d(98) = d(99) = d(100) = 2$, $d(4) = \ldots = d(8) = d(93) = \ldots = d(97) = 3$, $d(9) = \ldots = d(92) = 4$. Így $|E| = \frac{\sum_{i\in\{1,2,\ldots 100\}} d(i)}{2} = \frac{6\cdot 2+10\cdot 3+84\cdot 4}{2} = 189$.

7. Az alábbi gráfok közül melyekben van (nyílt vagy zárt) Euler-séta?
a) $V_1 = \{1,2,\ldots,102\}$, $E_1 = \{\{i,j\} \subset V_1 \colon 1 \le |i-j| \le 2\}$, $G_1 = (V_1, E_1)$;
b) $V_2 = \{1,2,\ldots,102\}$, $E_2 = \{\{i,j\} \subset V_2 \colon 1 \le |i-j| \le 3\}$, $G_2 = (V_2, E_2)$;
c) $V_3 = \{1,2,\ldots,102\}$, $E_3 = \{\{i,j\} \subset V_3 \colon i-j \text{ páros}\}$, $G_3 = (V_3, E_3)$;
d) $H = \{1,2,\ldots,10\}$, $V_4 = \{A \subset H \colon |A| = 3\}$, $E_4 = \{\{A,B\} \subset V_4 \colon A \cap B \ne \emptyset\}$, $G_4 = (V_4, E_4)$.

Megoldás: Euler-vonal keresésénél két dologra kell figyelni: páratlan fokú csúcsok száma, illetve összefüggőség.

a) Az 1 és a 102 foka kettő, a 2 és a 101 foka három, a többié négy; és mivel összefüggő (ld. pl. az $1-2-3-\ldots-101-102$ utat), Euler tétele miatt lesz benne nyílt Euler-vonal.
b) Az 1 és a 102 foka három, a 3 és a 100 foka öt, azaz találtunk négy páratlan fokú csúcsot, tehát biztosan nincs a gráfban sem nyílt, sem zárt Euler-vonal.

c) Két csúcs között pontosan akkor megy él, ha a paritásuk megegyezik, tehát a gráf két komponensből áll (páros, ill. páratlan számok), vagyis a gráf nem összefüggő. Mindkét komponensben vannak élek, tehát biztosan nincs a gráfban sem nyílt, sem zárt Euler-vonal.

d) $|V_4| = \binom{10}{3}$, és minden csúcs foka $\binom{10}{3} - 1 - \binom{7}{3}$ (ugyanis $\binom{7}{3}$ diszjunkt háromelemű részhalmaz van egy rögzített háromelemű részhalmazhoz), ami páros (kiszámolandó!). A gráf továbbá összefüggő, hiszen ha az $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ és a $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ csúcsok közt nincs él (azaz $A \cap B = \emptyset$), akkor pl. a $C = \{a_1, a_2, b_1\}$ csúcs közös szomszéd, tehát van út A és B között. (Ha A és B szomszédosak, akkor nyilván van köztük út.) Euler tétele alapján van G_4-ben zárt Euler-vonal.

8. a) Mutasson olyan gráfot, amelyben minden csúcs foka páros, és nincs benne zárt Euler-séta (Euler-körséta)!
b) Mutasson olyan gráfot, ami nem összefüggő, de van benne zárt Euler-séta!

Megoldás: a) Két háromszög (mint hat csúcsú, nem összefüggő gráf).

b) Egy háromszög és egy izolált csúcs (avagy: legalább két izolált csúcs). Ebben van zárt Euler-vonal, mert ott annyi a feladat, hogy minden élen pontosan egyszer járjunk, tehát az izolált csúcsokon nem kell áthaladnunk.

9. Mutasson ellenpéldát a Dirac-tétel megfordítására!

Megoldás: Egy 10 csúcsú kör. Avagy bármilyen, legalább 5 csúcsú kör, ugyanis ekkor nyilvánvalóan van Hamilton-kör (maga a gráf), de minden csúcs fokszáma 2, ami $n \geq 5$ esetén kisebb, mint $n/2$. Vagyis a Dirac-tétel elégséges, de messze nem szükséges feltételt ad Hamilton-kör létezésére.

10. Legyen a G gráf csúcshalmaza $\{1, 2, ..., 100\}$. Van-e G-ben Hamilton-út, ha az éleket a következőképpen adjuk meg: (i, j) pontosan akkor él, ha ...
a) $0 < |i - j| \leq 2$?
b) $|i - j| = 2$ vagy 3?
c) $i \mid j$ vagy $j \mid i$?
d) $|i - j| > 23$? (A négy alfeladatban négy különböző gráfról van szó.)

Megoldás: a) 1–2–3...–100 egy Hamilton-út.

b) Induljunk az 1-ből. A $+2$, $+2$, -3, $+2$, $+2$ lépésekkel bejárjuk az 1–5 csúcsokat, és elérkezünk a 6-ba. Ismételve a folyamatot a gráf összes csúcsát bejárjuk (ötös blokkokban; a legvégén az utolsó $+2$ nem kell).

c) Nincs, mert az 50-nél nagyobb prímek foka egy, és több mint kettő ilyen csúcs van (ráadásul mind az 1-gyel szomszédosak, így az 1-et kitörölve is igazolhatjuk az állítást).

d) Például az 1-ből indulva a $+50$, -49 lépések ismételgetésével Hamilton-utat kapunk. Máshogyan: minden csúcsnak legalább $99 - 2 \cdot 23 = 53 \geq 100/2$ szomszédja van (a 100 csúcsból saját magával, és a tőle legfeljebb 23-mal jobbra vagy balra levő csúcsokkal nincs összekötve), tehát Dirac tétele szerint van Hamilton-kör a gráfban (és persze ekkor Hamilton-út is).

11. Mutasson olyan egyszerű gráfot, amelyben van Hamilton-út és zárt Euler-séta, de nincs Hamilton-kör! (Igazoljuk is a megfelelő tulajdonságok meglétét vagy hiányát.)

Megoldás: Pl. két darab három hosszú kör összeragasztva egy csúcsánál. Az indoklások egyszerűek, Hamilton-kör nemlétét a ragasztási csúcs törlésével igazolhatjuk.