Diszkrét matematika I.
4. Zh

(2025. tavasz)

Név:

Neptun kód:

Csoport:

Gyakorlatvezető:

	pontszám
1. feladat	
2. feladat	
3. feladat	
Összesen	

A zárthelyi dolgozatra 60 perc áll rendelkezésre. A dolgozathoz számológép nem használható. A beadott megoldásokon szerepeljen a nevük, csoportjuk.

A Zh-n 20 pontot lehet elérni, az elégséges érdemjegy feltétele, hogy minden Zh-n legalább 8 pontot elérjenek.

1. a) Lehet-e egy gráf fokszámsorozata a következő: $7, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 1$. Ha igen, mutasson rá példát, ha nem, indokoljon! **(4p)**

Megoldás: Nem létezik ilyen egyszerű gráf. Tegyük fel indirekt, hogy létezik ilyen egyszerű gráf, és tekintsük a 7-fokú, 5-fokú és 4-fokú csúcsok halmazát. Ha ez a három csúcs egymással mind össze van kötve, még akkor is legalább $5 + 3 + 2 = 10$ élnek kellene ebből a halmazból a többi csúcsokba mennie. (Ha nincs mindháro nagyfokú csúcs összeötve, akkor mégtöbb él menne a kisfokúak felé.) De a többi csúcs összesen csak $3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 8$ élet tud befogadni. Ezzel ellentmndásra jutottunk, így hamis az indirekt feltevés, tehát nincs ilyen egyszerű gráf.

Másik megoldás: Nem lényegileg más, de ha a 7, 5, 4, és 3 fokú csúcsokat vesszük a „nagyfokszámú" csúcsok (itt négy elemű) halmazának, úgy is ellentmondásra jutunk: legalább $(7 - 3) + (5 - 3) + (4 - 3) + (3 - 3) = 7$ él megy a kisfokúak felé, akik összesen csak $2 + 1 + 1 + 1 = 5$ élet tudnak befogadni.

b) Mi lehet d értéke, ha $1, 1, 3, 2, d, 2, 3, 1, 1$ egy (9 csúcsú) fa fokszámsorozata? **(4p)**

Megoldás: Egy 9 csúcsú fának a élszáma $9 - 1 = 8$. A fokszámösszeg $1 + 1 + 3 + 2 + d + 2 + 3 + 1 + 1 = 14 + d$ az élszám duplája, azaz $14 + d = 16$, vagyis $d = 2$.

Tehát ha egyáltalán létezik ilyen fa, akkor abban a d fokszám csak $d = 2$ lehet, de hogy tényleg létezik ilyen fa, azt azzal tudjuk bizonyítani, hogy megadunk (pl. rajzolunk) egyet. Például ha a két 3-fokú csúcs legyen A és E, a három 2-fokú csúcs neve legyen B, C és D, és A, B, C, D, E csúcsok ebben a sorrendben legyenek egymás mellett és az egymás mellettiek összekötve. A két 3-fokú csúcsból kiinduló további 4 é végén legyen egy-egy levél (1-fokú csúcs). (Másik példák is léteznek.)

2. Adott n csúcsú, e élű G gráfban jelölje k a komponensek számát. Mutassa meg, hogy

$$n \leq e + k. \qquad \textbf{(6p)}$$

Megoldás: Tekintsük a G gráf feszítő erdőjét (minden komponensében annak egy feszítő fáját). Ez a feszítőerdő az eredeti G gráfból bizonyos élek elhagyásával készült (esetleg egy élet sem hagytunk el, ha eleve körmentes volt a gráf), tehát G élszáma legalább akkora, mint a feszítőerdő élszáma. Egy erdő élszáma a csúcsok számának és a komponensek számának különbsége, azaz $n-k$. Tehát $e \leq n-$, ami a bizonyítandó $n \leq e+k$ egyenlőtlenség ekvivalens átalakítása.

3. Legyen $H = \{1, 2, \ldots, 6\}$. A $G = (V, E)$ gráf csúcsai legyenek a H halmaz 3 elemű részhalmazai (az összes háromelemű), azaz

$$V = \{A \subset H : |A| = 3\}$$

és legyenek az $A, B \in V$ csúcsok összekötve pontosan akkor, ha

$$A \cap B \neq \emptyset.$$

Igazolja, hogy a G gráfban van zárt Euler-séta! **(6p)**

Megoldás: A gráf csúcsai egy hatelemű halmaz háromelemű részhalmazai, ezek száma (kombinatorikából ismert képlet szerint) $|V| = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 5 \cdot 4 = 20.$

Ezen húsz csúcs közül mindenki majdnem mindenki mással össze van kötve, hiszen egy hatelemű alaphalmaz két háromelemű részhalmaza csak úgy lehet diszjunkt, ha ez a két halmaz egymás komplementere. (Például $A = \{1, 2, 3\}$ csak $\overline{A} = \{4, 5, 6\}$ halmazzal nincs összekötve, bárhogy máshogy választanánk H-ból három elemet, azok közül legalább az egyik *nem* $\overline{A}$-beli lenne, tehát A-beli.)

Tehát a fenti G gráf egy olyan 20 csúcsú gráf, ami ,,majdnem teljes" de minden csúcsnak van egy ,,párja" akivel *nincs* összekötve. Úgy is mondhatjuk, hogy G gráf komplementere egy teljes párosítás (1-reguláris gráf, olyan gráf, amiben minden csúcs pontosan egy másikkal van összekötve). Vagyis mind a 20 csúcs a többi 19 csúcs közül pontosan 18-cal van összekötve. Ez egy 20 csúcsú 18-reguláris gráf.

Gyakorlaton volt, hogy ha egy gráfban minden csúcs a többiek legalább felével össze van kötve, akkor a gráf összefüggő, tehát ez egy összefüggő gráf.

Tehát G egy olyan gráf, ami összefüggő, és minden csúcsa páros fokszámú, tehát Euler-tétele szerint létezik benne zárt Euler-séta.