$$I_j(x) = \frac{\prod_{i \neq j}(x - c_i)}{\prod_{i \neq j}(c_j - c_i)}$$

$$c_0, c_1, ..., c_n \in R \;\text{ kulonbozo ertek }\; (R \;\text{ test})$$
$$d_0, d_1, ..., d_n \in R \;\text{ tetszoleges ertek}$$
$$\Longrightarrow \exists \text{ legfeljebb } n\text{-ed foku polinom, melyre } \; f\left(c_j\right) = d_j \; (j = 0...n)$$
$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} d_j \cdot l_j(x)$$

feladat

$$f\left(\underbrace{0}_{c_0}\right) = \underbrace{1}_{d_0}, f(3) = 0, f(5) = 2$$
$$\ell_{d=j}(x) = \frac{\prod_{i \neq j}(x - c_i)}{\prod_{i \neq j}(c_j - c_i)} = \frac{(x-3)(x-5)}{(0-3)(0-5)}$$
$$\ell_1(x) = ... = \frac{(x-0)(x-5)}{(3-0)(3-5)}$$
$$\ell_2(x) = ... = \frac{(x-0)(x-5)}{(5-0)(5-3)}$$
$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} d_j \cdot l_j(x)$$
$$f(x) = 1 \cdot \frac{(x-3)(x-5)}{(0-3)(0-5)} + 0 \cdot \frac{(x-0)(x-5)}{(3-0)(3-5)} + 2 \cdot \frac{(x-0)(x-5)}{(5-0)(5-3)}$$

Hamming-távolság:

$$A \;\text{ véges }\; abc, \; u, v \in A^n. \; u \;\text{ és }\; v \;\text{ Hamming-távolsága :}$$
$$d(u, v) = |\{i : 1 \leq i \leq n \land u_i \neq v_i\}|$$
$$d(0010, 0110) = 1$$

1

a

$$d(01110, 10101) = 4$$

b

$$00 \mapsto 00000,\ 01 \mapsto 01110,\ 10 \mapsto 10101,\ 11 \mapsto 11011$$
$$d(00000, 01110) = 3$$
$$d(00000, 10101) = 3$$
$$d(00000, 11011) = 4$$
$$d(01110, 10101) = 4$$
$$d(01110, 11011) = 3$$
$$d(10101, 11011) = 3$$
$$\min = 3 \Longrightarrow d(B) = 3$$

c

Kódszó súlya: Nem 0 koordinátájú száma

$$w(11011) = 4$$

d

Kód súlya

$$w(B) = 3$$

e

$$00000 \ \text{ kódszóhoz legfeljebb } \ 1 \ \text{ távolsűgra lévő } \ \mathbb{Z}_2^5 \ \text{ szavak}$$
$$E = \{00000, 10000, 01000, 00100, 00010, 00001\}$$

2

a

Egy kód $d - 1a$: hibajelző, $t = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ hiba esetén javító

$$(c_1, c_2, c_3) \mapsto (c_1, c_2, c_3, c_1 + c_2 + c_3 + 1)$$
$$(k_1, k_2, k_3) \mapsto (k_1, k_2, k_3, k_1 + k_2 + k_3 + 1)$$
$$d(A) = 2 \Longrightarrow 2 - 1 = 1 \ \text{ hibajelző}$$
$$t = \left\lfloor \frac{2-1}{2} \right\rfloor = 0 \ \text{ hibajavító}$$

b

$$(c_1, c_2, c_3) \mapsto (c_1, c_2, c_3, c_1 + c_2 + c_3)$$
$$d(B) = 2 \Longrightarrow 2 - 1 = 1 \ \text{ hibajelző}$$
$$t = \left\lfloor \frac{2-1}{2} \right\rfloor = 0 \ \text{ hibajavító}$$

$$(0, 0, 1) \mapsto (0, 0, 1, 0, 1)$$
$$(0, 0, 1) \mapsto (1, 0, 1, 0, 1)$$

Singleton kód:

$$C \subset \sum^{n} \ \text{kód}, d(C) = d, \Longrightarrow |C| \leq \left|\sum\right|^{n-d+1}$$

MDS kód:

$$|C| = \left|\sum\right|^{n-d+1}$$

3

d = ?,
hibajelző = ?,
t = ?,
MDS?

a

$$(c_1, c_2) \mapsto (c_1, c_2, c_1 + c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}_5 \quad \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p, \text{ ha } p \text{ prím}$$

$$d(A) = 2, \text{ hibajelző} = 1, \ t = 0$$

$$n = 3, \qquad \underbrace{|C|}_{5^2 = |\mathbb{F}_5|^{3-2+1} \Longrightarrow \text{MDS}} = \left|\sum\right|^{n-d+1}$$

b

abszolut ugyanaz mint a

c

$$(c_1, c_2) \mapsto (c_1, c_2, c_1 + c_2, c_1 \cdot c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{F}_7$$

$$d(C) = 2$$

$$d - 1 = 1 \text{ hibajelző}$$

$$\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = 0 = t$$

$$n = 4$$

$$|C| = 7^2 = 49$$

$$\left|\sum\right| = 7$$

$$|C| = \left|\sum\right|^{n-d+1}$$

$$49 \neq 7^{4-2+1}$$

$$49 \neq 7^3 \Longrightarrow \text{nem MDS}$$

5

a

$$x \in \{1, ..., 16\}$$

b

egyszer elfelejt valaszolni

a hibajavito tavolsag akkor kell ha hazudna. ha egyszer hazudik 1 hibajavito kell. ha elfelejt valaszolni azert eleg csak hibajelzo mert tudjuk hol van a hiba

6

a

$$x \in \{1, ..., 16\}$$

1 hazugsag $\Longrightarrow$ 1 hibajavito $\Longrightarrow d = 3 \Longrightarrow \left\lfloor \frac{3-1}{2} \right\rfloor = 1$

$$(a, b, c, d) \mapsto (a, b, c, d, a + b, c + d, a + b + c + d)$$

b

6x hazugsag: $6 = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor \implies d = 13$

$$|C| \leq \left|\sum\right|^{n-d+1}$$
$$2^4 \leq 2^{n-13+1}$$
$$2^4 \leq 2^{n-12}$$
$$4 \leq n-12$$
$$16 \leq n = \text{kérdések}$$

c

16x hazugsag: $16 = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor \implies d = 33$

$$2^4 \leq 2^{n-33+1}$$
$$4 \leq n-32$$
$$36 \leq n \text{ kérdések}$$