Diszkrét matematika I. keddi (2025.04.01.) 2. Zh

feladatainak eredményei
és részletesen kidolgozott megoldásai

A megoldások ismertetésénél itt most nem csak a konkrét módszert, hanem a módszer hátterét, illetve a módszerhez vezető gondolatsort is bemutatjuk (ez utóbbiak részletezését a hallgatóktól a ZH megoldásában természetesen nem vártuk el).

1. Tekintsük a következő relációt $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n^2 + m^2 \text{ páros}\}$. Ekvivalenciareláció lesz-e R? (Az ekvivalenciarelációkat jellemző három tulajdonság közül melyek teljesülnek?) Válaszát indokolja! **(6p)**

Megoldás: Az $R \subset H \times H$ homogén binér relációt akkor nevezzük *ekvivalenciarelációnak*, ha egyszerre **reflexív** ($\forall x \in H : (x, x) \in R$) ÉS **szimmetikus** ($\forall x \forall y : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$) ÉS **tranzitív** ($\forall x \forall y \forall z : \big((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R\big) \Rightarrow (x, z) \in R$).

Reflexív: $\forall n \in \mathbb{Z} : n^2 + n^2 = 2n^2$ páros. Tehát IGEN, R tényleg reflexív.

Szimmetrikus: $\forall n \in \mathbb{Z} : \forall m \in \mathbb{Z} : n^2 + m^2 = m^2 + n^2$. Ezek szerint ($n^2 + m^2$ páros) $\Longleftrightarrow$ ($m^2 + n^2$ páros). Tehát IGEN, R tényleg szimmetrikus.

Tranzitív: Ha $n^2 + k^2$ páros és $k^2 + m^2$ is páros, akkor ezek összege $n^2 + 2k^2 + m^2$ is páros. De mivel $2k^2$ mindig páros (ha k egész), és két páros szám különbsége is mindig páros, így ekkor $n^2 + m^2$ is páros. Tehát IGEN, R tényleg tranzitív.

Konklúzió: IGEN, R ekvivalenciareláció.

Másik megoldás: Egész számok körében n^2+m^2 pontosan akkor páros, ha vagy mindkettő szám (m is és n is) páros, vagy ha mindkettő szám páratlan. (n^2 paritása megegyezik n paritásával, és két azonos paritású szám összege páros, két különböző paritású szám összege pedig páratlan.)

Tehát $\mathbb{Z} = \{\text{páros számok}\} \cup \{\text{páratlan számok}\}$ két diszjunkt halmaz uniójaként írható az egész számok halmaza, vagyis ez $\mathbb{Z}$-nek egy *osztályozása*, és R szerint pontosan azok állnak egymással relációban, akik azonos osztályhoz tartozak ezen osztályozás alapján.

Órán tanultuk, hogy minden osztályozás (az ‚azonos osztályba tartozik' relációval) ekvivalenciarelációt határoz meg (és viszont: minden ekvivalenciareláció osztályozást határoz meg). Ebből most az első irányt használhatjuk. Tehát IGEN, R ekvivalenciareláció.

Ezért további külön vizsgálat nélkül igaz, hogy mindhárom jellemző tulajdonságot (reflexivitás, szimmetria és tranzitivitás) kielégíti.

Nevezetes szögek trigonometrikus értéke

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

2. Számítsa ki a

$$\frac{(\sqrt{3}-i)^9}{(1+i)^{11}}$$

komplex szám harmadik gyökeit! (A végeredmény megadása trigonometrikus alakban is elegendő.) **(6p)**

Megoldás: Először adjuk meg a törtként megadott komplex szám trignometrikus alakját, ahhoz is először a nevezőben és a számlálóban szereplő hatványalapokét:

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right), \text{ és ezt hatványozva}$$

$$(1+i)^{11} = \sqrt{2}^{11}\left(\cos\frac{11\pi}{4}+i\sin\frac{11\pi}{4}\right) = 2^5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -32+32i$$

Mivel a számlálóbeli hatványalap valós része pozitív, képzetes része negatív, ezért a negyedik síknegyedbe esik a szöge, és a számolás során használhatunk negatív szögeket is:

$$\left(\sqrt{3}-i\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})\right), \text{ és ezt hatványozva}$$

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^9 = 2^9\left(\cos(2\pi-\frac{9\pi}{6})+i\sin(2\pi-\frac{9\pi}{6})\right) = 2^9\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 512i$$

(Az algebrai alakok, azaz $512i$ és $-32+32i$ megadása *nem szükséges.*) Így tehát

$$\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^9}{(1+i)^{11}} = \frac{2^9}{2^5\sqrt{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{2^4}{\sqrt{2}}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$$
$$= 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

(Az algebrai alakokkal: $\dfrac{512i}{-32+32i} = \dfrac{16}{-1+i} = \dfrac{16}{-1+i}\cdot\dfrac{-1-i}{-1-i} = \dfrac{-16-16i}{1+1} = -8-8i$, végül ennek úgyis a trigonometrikus alakja kell a gyökvonáshoz. De így is lehetett számolni.)

Tehát $z = 8\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$ komplex számból kell harmadik gyököt vonni. A komplex számok körében minden nemnulla számnak pontosan három különböző köbgyöke van, amik egy origó középpontú szabályos háromszög csúcsait alkotják: $w = |w|\cdot(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, ha $w^3 = z$, akkor $|w|^3 = 8\sqrt{2}$, és $3\alpha = \dfrac{7\pi}{4}+2k\pi$. Tehát $|w| = 2\sqrt[6]{2}$, és $\alpha = \dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{2k\pi}{3} = \dfrac{(7+8k)\pi}{12}$. A három szög tehát: $\alpha_1 = \dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12} = 90^\circ+15^\circ = 105^\circ$ (ez a második síknegyedben van), $\alpha_2 = \dfrac{15\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{4} = \pi+\dfrac{\pi}{4} = 180^\circ+45^\circ = 225^\circ$ (ez a harmadik síknegyedben van, a $-1-i$ szám irányszöge), $\alpha_3 = \dfrac{23\pi}{12} = 2\pi-\dfrac{\pi}{12} = 360^\circ-15^\circ = 345^\circ$

(vagyis ez a $-15°$ szög, a negyedik síknegyedben), és így a három megoldás:

$$w_1 = 2\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$
$$w_2 = 2\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$
$$w_3 = 2\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$

3. Tekintsük a következő relációkat a komplex számok halmazán:

$$R = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| = |w|\}, \quad S = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(i \cdot w)\}.$$

a) Mi lesz $R(\{i\}) \cap S(\{i\})$? **(4p)**

Megoldás: Az S relációban a feltételt érdemes egyszerűsíteni: Mivel $w = a + bi$ esetén $i \cdot w = -b + ai$, és ez utóbbinak a képzetes része a, ezért: $\mathrm{Im}(i \cdot w) = \mathrm{Re}(w)$. Tehát S reláció szerint akkor áll relációban a z a w-vel, ha z képzetes része egyenlő w valós részével:

$$S = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(w)\}$$

Az R reláció szerint az azonos abszolút értékű (azonos 'hosszúságú' – az origótól azonos távolságra lévő) komplex számok állnak egymással relációban. Ez látványosan egy ekvivalenciareláció, aminek az ekvivalenciaosztályai az origó körüli körvonalak.

Definíció szerint $R(\{i\}) = \{w \in \mathbb{C} : |w| = |i|\} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ a komplex egységkör.

Definíció szerint $S(\{i\}) = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(i) = \mathrm{Re}(w)\} = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) = 1\}$, ami az a függőleges egyenes a komplex síkon, ami $w = 1$ pontban metszi a valós számegyenest.

Mivel a komplex egységkörnek egyetlen olyan pontja van, aminek a valós része 1, és ez a $w = 1$ pont, ezért: $R(\{i\}) \cap S(\{i\}) = \{1\}$

---

3. b) Mi lesz $(S \circ R)(\{i\})$ és $(R \circ S)(\{i\})$? **(4p)**

Megoldás: Bármely A halmaz esetén $(S \circ R)(A) = S(R(A))$, mivel a kép definíciója szerint $(S \circ R)(A) = \{w \in \mathbb{C} \mid \exists u \in A : (u, w) \in (S \circ R)\}$, a kompozíció definíciója szerint pedig

$$(u, w) \in (S \circ R) \Leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{C} : (u, z) \in R \land (z, w) \in S)$$

A kettőt összetéve: $(S \circ R)(A) = \{w \in \mathbb{C} \mid \exists u \in A : \exists z \in \mathbb{C} : (u, z) \in R \land (z, w) \in S\}$, most ravaszul átfogalmazhatjuk a feltételt:

$$\exists u \in A : \exists z \in \mathbb{C} : (u, z) \in R \land (z, w) \in S \Leftrightarrow \exists z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \exists u \in A : (u, z) \in R\} : (z, w) \in S$$

Ahol használjuk azt az általános trükköt, hogy $\Big(\exists x : x \in H \land \varphi(x)\Big) \Leftrightarrow \Big(\exists x \in H : \varphi(x)\Big)$, illetve az *egyforma* kvantorok egymás közötti kommutativiását is használjuk.
Mivel $\{z \in \mathbb{C} \mid \exists u \in A : (u, z) \in R\} = R(A)$, így

$$\exists u \in A : \exists z \in \mathbb{C} : (u, z) \in R \land (z, w) \in S \Leftrightarrow \exists z \in R(A) : (z, w) \in S$$

Tehát: $(S \circ R)(A) = \{w \in \mathbb{C} \mid \exists z \in R(A) : (z, w) \in S\} = S(R(A))$. És ugyanezért lesz $(R \circ S)(A) = R(S(A))$

Tehát $(S \circ R)(\{i\}) = S(R(\{i\})) = S(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\})$, ami definíció szerint a következő halmaz: $\{w \in \mathbb{C} \mid \exists z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} : \mathrm{Re}(w) = \mathrm{Im}(z)\}$, vagyis mindazon w számok halmaza, amelyek valós része megegyezik az egységkörön elhelyezkedő valamelyik z szám képzetes részével. Mivel az egységkörön elhelyezkedő számok képzetes részei -1 és 1 között vannak (és ebből a zárt intervallumból minden érték elő is fordul), ezért

$$(S \circ R)(\{i\}) = S(R(\{i\})) = S(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}) = \{w \in \mathbb{C} : -1 \leq \mathrm{Re}(w) \leq 1\}$$

ez a komplex számsíkon egy ,függőleges sáv' — vagy $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ azonosítással a $[-1, 1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ valós számpárok halmaza.

Hasonlóan $(R \circ S)(\{i\}) = R(S(\{i\})) = R(\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) = 1\})$. Az R reláció szerint az egyforma abszolútértékű számok állnak egymással relációban, azaz tetszőleges $A \subset \mathbb{C}$ esetén $R(A)$ az összes olyan komplex számot tartalmazza, amelyhez van ugyanakkora abszolút értékű szám az A halmazban. Mivel az $A = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) = 1\}$ halmazban minden 1-nél nem kisebb abszolútérték előfordul, ezért $R(\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) = 1\})$ a legalább 1 abszolút értékű számok halmaza:

$$(R \circ S)(\{i\}) = R(S(\{i\})) = R(\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) = 1\}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$$

Másik megoldás: Kiszámolhatjuk a kompozíciókat:

$$\begin{aligned} S \circ R = \{(u, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \exists z \in \mathbb{C} : (u, z) \in R \wedge (z, w) \in S\} = \\ = \{(u, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \exists z \in \mathbb{C} : |u| = |z| \wedge \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(w)\} \end{aligned}$$

És ezt használva:

$$\begin{aligned} (S \circ R)(\{i\}) &= \{w \in \mathbb{C} \mid \exists z \in \mathbb{C} : |i| = |z| \wedge \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(w)\} = \\ &= \{w \in \mathbb{C} \mid \exists z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \wedge \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(w)\} = \\ &= \{w \in \mathbb{C} \mid \exists z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} : \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(w)\} \end{aligned}$$

És mivel $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ halmaz elemeinek képzetes részei a teljes $[-1, 1]$ intervallumot alkotják, ezért

$$(S \circ R)(\{i\}) = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) \in [-1, 1]\} = \{w \in \mathbb{C} : -1 \leq \mathrm{Re}(w) \leq 1\}$$

Hasonlóan a másik kompozíció:

$$\begin{aligned} R \circ S = \{(u, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \exists z \in \mathbb{C} : (u, z) \in S \wedge (z, w) \in R\} = \\ = \{(u, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \exists z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Re}(z) \wedge |z| = |w|\} \end{aligned}$$

És ezt használva:

$$\begin{aligned} (S \circ R)(\{i\}) &= \{w \in \mathbb{C} \mid \exists z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(i) = \mathrm{Re}(w) \wedge |z| = |w|\} = \\ &= \{w \in \mathbb{C} \mid \exists z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 1 \wedge |z| = |w|\} = \\ &= \{w \in \mathbb{C} \mid \exists z \in \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 1\} : |z| = |w|\} \end{aligned}$$

És mivel $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 1\}$ halmaz elemeinek abszolút értékei teljes $[1, \infty)$ intervallumot alkotják, ezért

$$(S \circ R)(\{i\}) = \{w \in \mathbb{C} : |w| \in [1, \infty)\} = \{w \in \mathbb{C} : |w| \geq 1\}$$