

Diszkrét matematika I. feladatok

Logika

Első alkalom (2024.02.10-14.)

Bemelegítő feladatok

1. Pozitív egészeket tekintve, jelölje $P(x)$, $E(x)$, $O(x)$, illetve $D(x, y)$ rendre azt, hogy x prím, páros, páratlan, illetve hogy x osztója y -nak. Fordítsuk le magyar nyelvre az alábbi formulákat. Állapítsuk meg, hogy igaz-e az állítás. Tagadjuk a formulákat formálisan. Tagadjuk a formulákat köznyelvileg. Állapítsuk meg, hogy igaz-e az állítás tagadása.
a) $P(7)$; b) $E(2) \wedge P(2)$; c) $\forall x(D(2, x) \Rightarrow E(x))$; d) $\exists x(E(x) \wedge D(x, 6))$;
e) $\forall x(\neg E(x) \Rightarrow \neg D(2, x))$; f) $\forall x(E(x) \Rightarrow (\forall y(D(x, y) \Rightarrow E(y))))$;
g) $\forall x(P(x) \Rightarrow (\exists y(E(y) \wedge D(x, y))))$; h) $\forall x(O(x) \Rightarrow (\forall y(P(y) \Rightarrow \neg D(x, y))))$;
i) $(\exists x(E(x) \wedge P(x))) \wedge (\neg(\exists x(E(x) \wedge P(x)) \wedge (\exists y(\neg x = y \wedge E(y) \wedge P(y)))))$.

Gyakorló feladatok

2. Az embereket tekintve jelölje $J(x)$, $B(x)$, $U(x)$, $I(x)$, $E(x)$, $P(x)$, $K(x)$, $N(x)$, $H(x, y)$, illetve $T(x, y)$ rendre azt, hogy x jogász, bíró, ügyeskedő, idős, életerős, politikus, képviselő, nő, illetve hogy x házastársa y -nak, valamint hogy x tiszteli y -t. Formalizáljuk az alábbi állításokat:
a) minden bíró jogász;
b) vannak ügyeskedő jogászok;
c) nincs ügyeskedő bíró;
d) bizonyos bírók idősök, de életerősök;
e) d bíró sem nem idős, sem nem életerős;
f) a bírók kivételével minden jogász ügyeskedő;
g) néhány jogász, aki politikus, képviselő is;
h) egyetlen képviselő felesége sem idős;
i) minden idős képviselő jogász;
j) van olyan nő, aki jogász és képviselő;
k) minden olyan nő, aki jogász, tisztel néhány bírót;
l) bizonyos jogászok csak bírókat tisztelnek.
3. Az embereket tekintve, jelölje $N(x)$ illetve $G(x, y)$ azt, hogy x nő, illetve x gyereke y -nak. Definiáljuk formulával az alábbi kapcsolatokat: x az y -nak fia, lánya, szülője, apja, anyja, unokája, nagyszülője, nagyapja, nagyanyja, apai nagyapja, anyai nagyapja, apai nagyanyja, anyai nagyanyja, testvére, fivére, nővére, féltestvére, unokatestvére, nagybátyja, nagynénje, unokaöccse, unokahúga.

Érdekes feladatok

4. Egy táncmulatságon fiúk és lányok táncolnak. Jelölje $T(L, F)$, hogy az L lány táncolt az F fiúval. Mit jelentenek az alábbi formulák? Döntsük el, hogy melyik következik a másiktól. (Egy formulából következik egy másik formula, ha valahányszor az egyik igaz, a másik is.) Melyik a legerősebb, ill. leggyengébb állítás?

- a) $\exists L \forall F T(L, F), \quad \forall F \exists L T(L, F), \quad \exists F \forall L T(L, F),$
 $\forall L \exists F T(L, F), \quad \forall L \forall F T(L, F), \quad \exists L \exists F T(L, F);$
- b) $\neg \exists L \exists F T(L, F), \quad \forall F \exists L \neg T(L, F), \quad \forall L \exists F \neg T(L, F), \quad \forall L \forall F \neg T(L, F)$

5. Legyenek A, B, C predikátumok. Igazolja a következő állításokat igazságtáblázat segítségével:

- a) $A \wedge A \Leftrightarrow A$ ill.
 $A \vee A \Leftrightarrow A$
- b) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ ill.
 $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
- c) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ ill.
 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- d) $A \oplus B \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

Beadandó házi feladatok

6. Jelölje $P(p)$, hogy a p egy pont, $L(\ell)$, hogy az ℓ egy egyenes, $I(p, \ell)$, hogy a p pont rajta van az ℓ egyenesen. Mit jelentenek az alábbi formulák? Döntse el a formulák igazságértékét! Írja le a formulák tagadását! **(részenként 1/3 pont)**

- a) $\forall \ell \exists p I(p, \ell)$
- b) $\exists \ell \forall p I(p, \ell)$
- c) $\forall p_1 \forall p_2 \exists \ell I(p_1, \ell) \wedge I(p_2, \ell)$
- d) $\forall \ell_1 \forall \ell_2 \exists p I(p, \ell_1) \wedge I(p, \ell_2)$
- e) $\forall \ell \exists p \neg I(p, \ell)$
- f) $\forall \ell \forall p (\neg I(p, \ell) \Rightarrow \exists \ell' I(p, \ell') \wedge (\forall p' I(p', \ell) \Rightarrow \neg I(p', \ell')))$

7. A 2. feladat jelöléseivel formalizálja az alábbi állításokat! **(részenként 1/3 pont)**

- a) vannak idős képviselők;
- b) minden életerős politikus házasságos;
- c) vannak idős politikusok;
- d) bizonyos férfiak, akik bírók, életerősök is;
- e) minden ügyeskedő bírósági házasságos;
- f) vannak olyan idős bírók, akiknek politikus férjük van.