7. gyakorlat

VÉGTELEN SOROK 1.

Emlékeztető. Egy sort egy olyan sorozatból képzünk, amelynek tagjait szeretnénk „összeadni”.

1. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatból képzett
$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozatot az (a_n) által generált ***végtelen sornak*** (röviden ***sornak***) nevezzük, és így jelöljük:
$$\sum a_n, \quad \text{vagy} \quad \sum_{n=0} a_n, \quad \text{vagy} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots .$$
s_n a $\sum a_n$ sor ***n-edik részletösszege***, illetve a_n a $\sum a_n$ sor ***n-edik tagja***.
2. Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ ***sor konvergens***, ha részletösszegeinek az (s_n) sorozata konvergens, azaz ha létezik és véges a $\lim(s_n)$ határérték. Ekkor ezt a határértéket a $\sum a_n$ **végtelen sor összegének** nevezzük, és így jelöljük:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := \lim(s_n).$$
3. A $\sum a_n$ ***sor divergens***, ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat divergens. Ebben az esetben az (s_n) sorozatnak vagy nincs határértéke, vagy
   - $\lim(s_n) = +\infty$, és ekkor azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ **végtelen sor összege** $+\infty$,

   vagy
   - $\lim(s_n) = -\infty$, és ekkor azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ **végtelen sor összege** $-\infty$.

   Ezeket úgy jelöljük, hogy
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := +\infty, \qquad \text{illetve} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n := -\infty.$$

Figyeljük meg a bevezetett jelölések közötti különbséget!

- A $\sum\limits_{n=0} a_n$ szimbólum jelöli a *végtelen sort*, ami egy *sorozat*, mégpedig az (a_n) részletösszegeinek sorozata. Ha a $\sum\limits_{n=0} a_n$ szimbólumra tekintünk, akkor arra gondolunk, hogy össze akarjuk adni az (a_n) sorozat tagjait. A sor konvergenciája azt jelenti, hogy ez a végtelen sok szám „összeadható” és eredménye egy valós szám.
- A $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ szimbólum pedig az s_n részletösszeg-sorozat *határértékét*, azaz a *végtelen sor összegét*, vagyis egy $\overline{\mathbb{R}}$-beli elemet jelöl abban az esetben, ha a szóban forgó határérték létezik. Ha ez a határérték nem létezik, akkor a sor összegét nem értelmezzük. A sor összege különböző alakban írható fel:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right).$$
Sőt, ezt időnként az $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ alakban is írjuk.

Az $(a_n) : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq M\} \to \mathbb{R}$ függvények is sorozatok minden $M \in Z$ esetén. Az ilyenekből képzett

$$s_n := a_M + a_{M+1} + a_{M+2} + \cdots + a_n \qquad (M \leq n \in \mathbb{N})$$

sorozatot is ***végtelen sornak tekintjük***, és jelölésükre a

$$\sum_{n=M} a_n$$

szimbólumot fogjuk használni. A ***sor összege*** ugyanúgy legyen a $\lim(s_n)$ határérték. A további definíciók és tételek (az értelemszerű módosításokkal) ezekre a sorokra is érvényesek lesznek, de ezt nem fogjuk külön hangsúlyozni. Ennek alapvető oka, hogy az

$$(a_n) \quad (n = M,\, M+1,\, M+2,\, \ldots) \qquad \text{és az} \qquad (a_{n+M}) \quad (n = 0,\, 1,\, 2 \ldots)$$

sorozatok megegyeznek, ezért ugyanazt a sort generálják megegyező

$$\sum_{n=M}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+M}$$

sorösszegekkel. Az előző átalakítást ***átindexelésnek*** hívjuk.

Nevezetes sorok

1. ***A geometriai/mértani sor.*** *Legyen $q \in \mathbb{R}$. A (q^n) sorozatból képzett $\sum_{n=0} q^n$* **geometriai** *vagy* **mértani sor** *akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor az összege*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q} \qquad \big(|q| < 1\big).$$

Ha $q \geq 1$, akkor a $\sum_{n=0} q^n$ sornak van összege, és $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = +\infty$.

2. ***A teleszkopikus sor.*** *A $\sum_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$ ún.* **teleszkopikus sor** *konvergens, és összege* 1*, azaz*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = 1.$$

3. ***A hiperharmonikus sor.*** *Legyen α rögzített valós szám. Ekkor a*

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots$$

ún. **hiperharmonikus sor**

- *divergens, ha $\alpha \leq 1$, de ekkor van összege:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty.$
- *konvergens, ha $\alpha > 1$.*

Két speciális eset:

- $\alpha = 1$ esetén ***harmonikus sorról*** beszélünk: $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$, ami divergens,
- $\alpha = 2$ esetén ***szuperharmonikus sorról*** beszélünk: $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$, ami konvergens.

4. ***Az e szám sorösszeg előállítása.*** *A $\sum_{n=0} \frac{1}{n!}$ végtelen sor konvergens, és az összege az $e := \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ számmal egyenlő:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e.$$

5. ***A Leibniz-sor.*** *A*

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Leibniz-sor *konvergens.*

Felhasználható eredmények

1. ***Cauchy-féle konvergencia kritérium sorokra.*** *A* $\sum a_n$ *sor akkor és csak akkor konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m > n > n_0 \colon |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

2. ***Sorok ekvikonvergenciája.*** *Ha két sor legfeljebb véges sok tagban különbözik egymástól, akkor a két sor egyszerre konvergens vagy divergens.*

3. ***Sorok konvergenciájának szükséges feltétele.*** *Ha a* $\sum a_n$ *végtelen sor konvergens, akkor az* (a_n) *generáló sorozat nullsorozat, azaz* $\lim(a_n) = 0$.

Ebből az állításból rögtön kapunk egyszerű elégséges feltételeket sorok divergenciájára: „*Ha az* (a_n) *sorozat nem nullsorozat, vagy divergens, akkor a* $\sum a_n$ *végtelen sor divergens.”*

4. **Sorok lineáris kombinációi.** *Tegyük fel, hogy a* $\sum a_n$ *és a* $\sum b_n$ *sorok összege*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n =: A \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \textit{és} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ha a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *olyan számok, amelyekre* $\lambda \cdot A + \mu \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ *értelmezve van, akkor*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \big(\lambda\, a_n + \mu\, b_n\big) = \lambda \cdot A + \mu \cdot B.$$

5. **Nemnegatív tagú sorok.** *Egy nemnegatív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha a részletösszegeiből álló sorozat korlátos.*

6. **Összehasonlító kritériumok.** *Legyenek* $\sum a_n$ *és* $\sum b_n$ *nemnegatív tagú sorok. Tegyük fel, hogy*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N \colon 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Ekkor

(a) **Majoráns kritérium:** *ha a* $\sum b_n$ *sor konvergens, akkor* $\sum a_n$ *sor is konvergens.*

(b) **Minoráns kritérium:** *ha a* $\sum a_n$ *sor divergens, akkor a* $\sum b_n$ *sor is divergens.*

7. **Abszolút és feltételesen konvergens sorok.** *Azt mondjuk, hogy a* $\sum a_n$ *sor*

- **abszolút konvergens**, *ha a* $\sum |a_n|$ *abszolút sora konvergens,*
- **feltételesen konvergens**, *ha a* $\sum a_n$ *sor konvergens, de nem abszolút konvergens.*

Ha a $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

1. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az alábbi végtelen sorok konvergensek, és számítsuk ki az összegüket!*

a) $$\sum_{n=2} \frac{(-5)^n}{3^{2n}},$$

b) $$\sum_{n=0} \frac{\big((-1)^n + 2^n\big)^2}{5^{n+2}},$$

c) $$\sum_{n=1} \frac{1}{4n^2 - 1},$$

d) $$\sum_{n=0} \frac{n^2 + 3n}{(n+2)!}.$$

Megoldás.

a) Alakítsuk át a sort:
$$\sum_{n=2} \frac{(-5)^n}{3^{2n}} = \sum_{n=2} \frac{(-5)^n}{9^n} = \sum_{n=2} \left(-\frac{5}{9}\right)^n.$$
Ez ekvikonvergens a $\sum_{n=0} \left(-\frac{5}{9}\right)^n$ mértani sorral, mert csak az első két tagban különböznek egymástól. $q = -\frac{5}{9}$ hányadosú mértani sorról van szó, ami konvergens, mert $|q| = \frac{5}{9} < 1$. Ezért a megadott sor konvergens. A sor összege:
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-5)^n}{3^{2n}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{5}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{5}{9}\right)^{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(-\frac{5}{9}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)^n\right) =$$
$$= \left(-\frac{5}{9}\right)^2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{5}{9}\right)^n = \frac{25}{81} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{5}{9}\right)} = \frac{25}{81} \cdot \frac{9}{14} = \underline{\underline{\frac{25}{126}}}.$$

Megjegyzés. A $\sum_{n=r} aq^n$ alakú sorokat is mértani sornak szokás nevezni, ahol $a \in \mathbb{R}$ és $r \in \mathbb{Z}$. Könnyű meggondolni, hogy ez ekvikonvergens a $\sum_{n=0} q^n$ sorral. Ezért, ha $|q| < 1$, akkor a $\sum_{n=r} aq^n$ sor konvergens, és
$$\sum_{n=r}^{+\infty} aq^n = \sum_{n=0}^{+\infty} aq^{n+r} = \sum_{n=0}^{+\infty} aq^r q^n = aq^r \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{aq^r}{1-q}.$$
Vegyük észre, hogy aq^r a $\sum_{n=r} aq^n$ sor kezdőtagja.

b) Először átalakítjuk a sor tagjait megadó képletet:
$$\frac{\left((-1)^n + 2^n\right)^2}{5^{n+2}} = \frac{1 + 2\cdot(-2)^n + 4^n}{5^2 \cdot 5^n} = \frac{1}{5^2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{2}{5^2}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{5^2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n.$$
A $q = \frac{1}{5}$, $q = -\frac{2}{5}$ és $q = \frac{4}{5}$ hányadosú geometriai sorok lineáris kombinációjáról van szó. Mindegyik esetben $|q| < 1$, ezért a szóban forgó sorok, következésképpen a lineáris kombinációjuk is konvergens. A megadott sor tehát valóban konvergens. A sor összege:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((-1)^n + 2^n\right)^2}{5^{n+2}} = \frac{1}{5^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{2}{5^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{5^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n =$$
$$= \frac{1}{5^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}} + \frac{2}{5^2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)} + \frac{1}{5^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{20} + \frac{2}{35} + \frac{1}{5} = \underline{\underline{\frac{43}{140}}}.$$

c) A $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ teleszkopikus sornál bemutatott ötletet alkalmazzuk, ti. a sor n-edik tagját két egyszerűbb alakú tört összegére bontjuk. Olyan $A, B \in \mathbb{R}$ keresünk, amelyekre
$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

A és B meghatározása: Közös nevezőre hozás után

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A\cdot(2n+1)+B\cdot(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2(A+B)\cdot n+(A-B)}{(2n-1)(2n+1)} \implies$$

$$\implies \quad 2(A+B)=0 \text{ és } A-B=1 \quad \implies \quad A=\tfrac{1}{2} \text{ és } B=-\tfrac{1}{2}, \quad \text{azaz}$$

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

(Ezt az eljárást a ***parciális törtekre bontás*** módszerének nevezzük.)

A $\sum \frac{1}{4n^2-1}$ sor n-edik részletösszege tehát

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}\,.$$

d) A sor n-edik tagját az

$$n^2+3n = (n+1)(n+2)-2 \qquad (n\in\mathbb{N})$$

azonosság alapján átalakítjuk:

$$\frac{n^2+3n}{(n+2)!} = \frac{(n+1)(n+2)-2}{(n+2)!} = \frac{1}{n!} - 2\cdot\frac{1}{(n+2)!}.$$

Tudjuk, hogy a $\sum\limits_{n=0}\frac{1}{n!}$ végtelen sor konvergens, ezért a $\sum\limits_{n=0}\frac{1}{(n+2)!} = \sum\limits_{n=2}\frac{1}{n!}$ sor is konvergens. Mivel

$$\sum_{n=0}\frac{n^2+3n}{(n+2)!} = \sum_{n=0}\left(\frac{1}{n!}-2\cdot\frac{1}{(n+2)!}\right),$$

ezért a $\sum\frac{n^2+3n}{(n+2)!}$ sor két konvergens sor lineáris kombinációja, tehát valóban konvergens.

Az összeg kiszámításához alkalmazzuk a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e$ nevezetes sor összegét:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+3n}{(n+2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} - 2\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} - 2\cdot\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} - 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}-1-\frac{1}{1!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} - 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}-2\right) = e-2(e-2) = \underline{\underline{4-e}}\,.$$

2. Feladat. *Számítsuk ki a*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n$$

sorösszeget, ha $q \in (-1, 1)$.

Megoldás. A $\sum\limits_{n=1} nq^n$ sor n-edik részletösszege:

$$s_n := q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Az (s_n) sorozat határértékét keressük. A mértani sornál alkalmazott ötlethez hasonlóan megpróbáljuk a fenti összeget „zárt” alakban felírni. Vegyük észre, hogy ha vesszük a

$$\begin{aligned} s_n &= q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots \qquad\qquad + nq^n \\ q \cdot s_n &= \qquad\quad q^2 + 2q^3 + \cdots + (n-1)q^n + nq^{n+1} \end{aligned}$$

összegek különbségét, akkor

$$s_n - q \cdot s_n = q + q^2 + \cdots + q^n - nq^{n+1} = (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) - nq^{n+1} - 1$$

A mértani sor bizonyításában igazoltuk, hogy ha $q \neq 1$, akkor

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

és így

$$(1 - q)s_n = s_n - qs_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - nq^{n+1} - 1.$$

Mivel $|q| < 1$, ezért a $\lim(q^{n+1}) = 0$ és $\lim(nq^{n+1}) = 0$ határértékek alapján

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-q}\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - nq^{n+1} - 1\right) = \frac{1}{1-q}\left(\frac{1-0}{1-q} - 0 - 1\right) = \frac{q}{(1-q)^2},$$

azaz

$$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}}}\ .$$

3. Feladat. *Konvergencia szempontjából vizsgáljuk meg az alábbi sorokat!*

a) $\displaystyle\sum_{n=1} \sqrt[n]{0,1}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n}{2n-1}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, *d)* $\displaystyle\sum_{n=1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+2}$.

Megoldás. Mindegyik feladat megoldásában a végtelen sorok konvergenciájára vonatkozó *szükséges feltételt* alkalmazzuk. Ez azt állítja, hogy ha a sort generáló (a_n) sorozat divergens, vagy konvergens, de nem tart nullához, akkor a sor divergens.

a) A sor általános tagja nem tart nullához, hiszen

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{0,1} = 1 \neq 0.$$

Ezért a sor divergens.

b) A sor általános tagja nem tart nullához, hiszen

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Ezért a sor divergens.

c) A sor általános tagja nem tart nullához, hiszen

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0.$$

Ezért a sor divergens.

d) A sor általános tagja nem tart nullához, hiszen

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{-1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2}\right] = e^{-1} \cdot (1-0)^2 = e^{-1} \neq 0.$$

Ezért a sor divergens.

4. Feladat. *Konvergencia szempontjából vizsgáljuk meg az alábbi sorokat!*

a) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{2n+1}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n^2-n+1}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, *d)* $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$.

Megoldás. Az összehasonlító kritériumokat alkalmazzuk, azaz a megadott sorhoz keresünk egy konvergens majoráló vagy egy divergens minoráló sort. Akkor mondjuk, hogy $\sum b_n$ a megadott $\sum a_n$ sor

- ***majoráló sora***, ha véges sok indextől eltekintve $0 \leq a_n \leq b_n$. Ekkor, ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens (***majoráns kritérium***).
- ***minoráló sora***, ha véges sok indextől eltekintve $a_n \geq b_n \geq 0$. Ekkor, ha $\sum b_n$ divergens, akkor $\sum a_n$ is divergens (***minoráns kritérium***).

Ahhoz, hogy eldöntsük melyik kritériumot alkalmazunk, először meg kell sejtenünk, hogy a sor konvergens vagy divergens, hiszen ettől függően felülről vagy alulról kell becsülni az a_n tagokat. Ehhez figyelembe kell venni az a_n képletében szereplő kifejezések nagyságrendjét.

a) Sejtés: a sor divergens, mert

$$\frac{1}{2n+1} \approx \frac{1}{2n}, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy, és a} \quad \sum_{n=1} \frac{1}{n} \quad \text{sor divergens.}$$

A sejtés igazolása:

$$a_n = \frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2n+n} = \frac{1}{3n} =: b_n \quad (n \in \mathbb{N}^+) \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1} \frac{1}{3n} \text{ divergens,}$$

hiszen a harmonikus sor divergenciája szerint

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{3} \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Ezért a minoráns kritérium szerint a megadott sor divergens.

b) Sejtés: a sor konvergens, mert

$$\frac{1}{n^2-n+1} \approx \frac{1}{n^2}, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy, és a} \quad \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} \quad \text{sor konvergens.}$$

A sejtés igazolása: mivel $n \geq 1$, így

$$a_n = \frac{1}{n^2-n+1} \leq \frac{1}{n^2-n} = \frac{2}{2n^2-2n} = \frac{2}{n^2+n(n-2)} \leq \Big(\text{ha } n \geq 2\Big) \leq \frac{2}{n^2} =: b_n,$$

és $\sum\limits_{n=1} \frac{2}{n^2}$ konvergens, mert a szuperharmonikus sor konvergenciája szerint

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}.$$

Ezért a majoráns kritérium szerint a megadott sor konvergens.

c) Sejtés: a sor divergens, mert

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \approx \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy, és a} \quad \sum_{n=1} \frac{1}{n} \quad \text{sor divergens.}$$

A sejtés igazolása:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}n} =: b_n \quad (n \in \mathbb{N}^+) \quad \text{és} \quad \sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{2}n} \text{ div.,}$$

hiszen a harmonikus sor divergenciája szerint

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Ezért a minoráns kritérium szerint a megadott sor divergens.

d) Sejtés: a sor konvergens, mert

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \approx \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}}, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy, és a } \quad \sum_{n=1} \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{sor konvergens.}$$

A sejtés igazolása:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^3+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}} =: b_n \quad (n \in \mathbb{N}^+) \quad \text{és} \quad \sum_{n=1} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ konv.},$$

hiszen a hiperharmonikus sor $\frac{3}{2} =: \alpha > 1$-re konvergens.

Ezért a minoráns kritérium szerint a megadott sor $\underline{\underline{\text{konvergens}}}$.