Diszkrét matematika 1

Komplex számok I.

Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2024 tavasz

Komplex számok

$$(\cos t + i \cdot \sin t)^n = \cos(n \cdot t) + i \cdot \sin(n \cdot t)$$

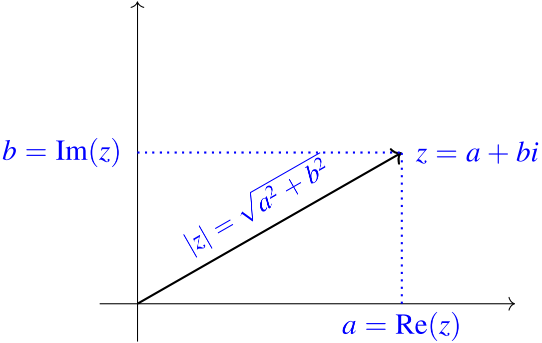
Komplex számok

- az $i \in \mathbb{C}$: $i^2 = -1$ számmal szimbolikus számolási szabályokkal

Definíció

A komplex számok halmaza a
$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$
Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Ekkor

- z valós része $\mathrm{Re}(z) = a$
- z képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$
- z abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Műveletek:

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + (ad + bc)i + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

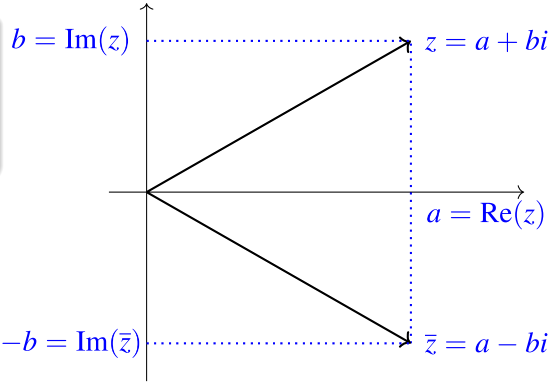
Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása a nevező gyöktelenítésével:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a-bi} \cdot \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a-bi}{a^2 - i^2b^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Definíció

- Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ szám konjugáltja:
$$\bar{z} = \overline{a+bi} = a - bi.$$
- Ezzel $z \neq 0$ esetén $1/z = \bar{z}/|z|^2$.



Példa

- $z = i$. Ekkor $\bar{i} = -i$, $|i| = 1$, így $1/i = -i$.
- $z = 2$. Ekkor $\bar{2} = 2$, $|2| = 2$, így $1/2 = 2/4 = 0.5$.

Műveletek komplex számokkal

Hasznos összefüggések:

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ és $w = c + di \in \mathbb{C}$. Ekkor

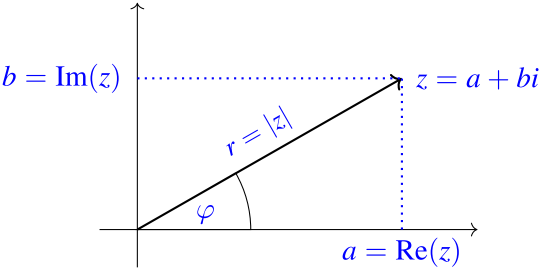
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $\dfrac{w}{z} = w \cdot \dfrac{1}{z} = w \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (ac - (-b)(-d)) + (a(-d) + (-b)c)i = \bar{z} \cdot \overline{w}$
- $|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot \overline{z \cdot w} = (z \cdot w) \cdot \bar{z} \cdot \overline{w} = |z|^2 |w|^2$
- speciálisan $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $\ldots$

(További hasznos összefüggéseket ld. a kiegészítésben.)

Komplex számok trigonometrikus alakja

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Az $r = |z|$ az $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vektor hossza.
- A $\varphi = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ az (a, b) vektor irányszöge, a z argumentuma.
- Ekkor $a = r\cos\varphi$ és $b = r\sin\varphi$, így
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$



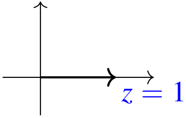
Definíció

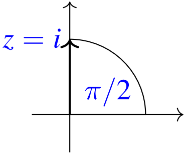
Az $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám trigonometrikus alakja:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{ahol } a = \mathrm{Re}(z) = r\cos\varphi \text{ és } b = \mathrm{Im}(z) = r\sin\varphi$$

Komplex számok trigonometrikus alakja, példák

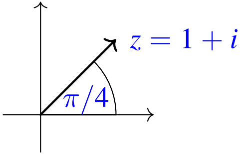
Példa

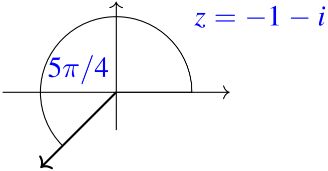




$z = 1$: $|z| = 1$, $\arg(z) = 0$
$\implies z = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

$z = i$: $|z| = 1$, $\arg(z) = \pi/2$
$\implies z = 1(\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2))$





$z = 1 + i$: $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \pi/4$
$\implies z = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$

$z = -1 - i$: $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = 5\pi/4$
$\implies z = \sqrt{2}(\cos(5\pi/4) + i \sin(5\pi/4))$