Numerikus módszerek 2.

12. előadás: Numerikus integrálás I.

Krebsz Anna

ELTE IK

Tartalomjegyzék

Feladat: az

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{illetve az} \quad \int_a^b f(x)w(x)\,dx$$

Riemann integrál közelítő kiszámítása, ahol $w(x) \geq 0$ súlyfüggvény.

Kézenfekvő lenne a definícióval (alsó- és felső közelítő összegekkel vagy Riemann közelítő összeggel) számolni, azonban így túl sokat kellene számolnunk a pontosabb eredmény eléréséhez.
$\rightarrow$ Nem gazdaságos.

Alkalmazási területei a matematikában:

- Amikor a primitív függvény nem állítható elő zárt alakban.
- Terület, térfogat, ívhossz számításnál.
- Differenciálegyenletek numerikus módszereinek konstrukciójakor.
- Az analitikus integrálás túl bonyolult lenne.

Példa: Számítsuk ki a következő integrálok értékét!

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = ?, \quad \int_0^\pi \cos(x^2)\,dx = ?$$

Alkalmazási területei a fizikában:

- Pl. forgatónyomaték, sűrűség, görbület számításnál.
- Ha a függvény csak mintavételezéssel adott.

Példa: Egy gazdaság területe egy folyó egyenes 10 km hosszú partszakaszának egyik partján fekszik. A folyó mentén kilométerenként megmérték, hogy a folyóra merőleges irányban hány kilométerre nyúlik a gazdaság területe. A kapott 11 értékből számítsuk ki közelítően a gazdaság területét!

Ötlet:

Tekintsük az $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$ felosztást és az általánosabb tárgyalásmódhoz a $w(x) \geq 0$ súlyfüggvényt. Feltesszük, hogy $\int_a^b w(x)\,dx < \infty$. Közelítsük az $f(x)$ függvényt az interpolációs polinomjának Lagrange-alakjával, $L_n(x)$-el.

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)w(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k)\ell_k(x)w(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^n f(x_k) \underbrace{\int_a^b \ell_k(x)w(x)\,dx}_{=:A_k} = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

Megj.: A_k csak az alappontoktól és a súlyfüggvénytől függ, f-től nem. Szingularitással rendelkező függvények esetén lesz szerepe a súlyfüggvénynek.

Definíció: Interpolációs kvadratúra formulák

1. A $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ formulát *kvadratúra formulának* nevezzük.
2. A kvadratúra formula *interpolációs típusú*, ha $A_k = \int_a^b \ell_k(x) w(x)\, dx \ \ (k = 0, \ldots, n)$.

Tétel: Pontossági tétel

$$\forall\, f \in P_n\text{-re} \ \ \int_a^b f(x) w(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$$\Leftrightarrow \quad A_k = \int_a^b \ell_k(x) w(x)\, dx \ \ (k = 0, \ldots, n)$$

Biz.:
$\Leftarrow$: Ha interpolációs típusú a kvadratúra formulánk, akkor $f \in P_n$ esetben az integrálközelítés ötleténél $f \equiv L_n$, tehát a levezetésben végig egyenlőség van. Ez azt jelenti, hogy az integrálközelítés pontos.

$\Rightarrow$: Mivel a kvadratúra formulánk minden legfeljebb n-edfokú polinomra pontos, így az $\ell_k \in P_n$ Lagrange-alappolinomra is $(k = 0, \ldots, n)$.

$$\int_a^b \ell_k(x) w(x)\, dx = \sum_{j=0}^{n} A_j \ell_k(x_j) = \sum_{j=0}^{n} A_j \delta_{kj} = A_k.$$

$\square$

Következmény:

1. $f \equiv 1$-re pontos a formula:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = \int_a^b w(x)\,dx =: \mu_0.$$

2. Ha $w(x) \equiv 1$, akkor

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = b - a.$$

Példa: interpolációs típusú kvadratúra formulára

Igazoljuk, hogy az alábbi kvadratúra formula interpolációs típusú.

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}(f(0)+f(1))$$

Megoldás: A definíció felhasználásával oljuk meg a feladatot.

$$A_0 = \int_0^1 \ell_0(x)\,dx = \int_0^1 \frac{(x-1)}{(0-1)}\,dx = -\left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$A_1 = \int_0^1 \ell_1(x)\,dx = \int_0^1 \frac{(x-0)}{(1-0)}\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Látjuk, hogy a feladatban megadott $A_0 = A_1 = \frac{1}{2}$ értékeket kaptuk meg, tehát interpolációs típusú a kvadratúra formulánk. □

Megjegyzés: Ha az $\ell_0(x), \ell_1(x)$ alappolinomokat felrajzoljuk, akkor az integrálok értékét leolvashatjuk az ábráról.

Másik megoldás: A feladatot a pontosságra vonatkozó tétellel is megoldhatjuk ($n = 1$ esetre), ekkor az $1, x$ hatványfüggvényekre kell bizonyítanunk a pontosságot.

$$f(x) \equiv 1\text{-re}: \quad \int_0^1 1\,dx = 1 \ \ ? \ \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$f(x) = x\text{-re}: \quad \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \ \ ? \ \ \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Látjuk, hogy az $1, x$ hatványfüggvényekre pontos a kvadratúra formula. $\square$

A $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ képletben $2(n+1)$ szabad paraméter van: A_k, x_k, így a legfeljebb n-edfokú polinomokra való pontosság kevésnek tűnik.

Kvadratúra formula típusok:

1. **Newton–Cotes típus:**
   $w(x) \equiv 1$ és az $\{x_i : i = 0, \ldots, n\}$ alappontok egyenletes felosztású pontok $[a; b]$-n.
2. **Csebisev típus:**
   $A_k \equiv A$ $(k = 0, \ldots, n)$.
3. **Gauss típus:**
   maximális fokszámig $(2n+1)$ pontos formulák.

Newton–Cotes típusú kvadratúra formulák:

$$w(x) \equiv 1 \quad \text{és} \quad x_k = x_0 + kh$$

- **Zárt formulák** $(Z(n))$**:** a és b alappont

$$x_0 = a,\ x_n = b,\ \ h = \frac{b-a}{n}\ \text{ és }\ x_k = a + kh\ \ (k = 0, \ldots, n)$$

- **Nyílt formulák** $(Ny(n))$**:** a és b *nem* alappont

$$h = \frac{b-a}{n+2},\ \ x_k = a+kh\ \ (k = 1, \ldots, n+1)\ \text{ így }\ x_0 = a+h,\ x_n = b-h$$

Newton–Cotes formulák

A zárt N-C együtthatók számítása:

$$x = a + th, \quad t \in [0; n]$$

$$x - x_j = (t - j)h$$

$$x_k - x_j = (k - j)h$$

$$A_k = \int_a^b \ell_k(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x - x_0)\ldots \overset{k}{\vee} \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots \overset{k}{\vee} \ldots (x_k - x_n)}\,dx$$

A $t = \frac{x-a}{h}$ helyettesítést bevezetve $a \mapsto 0, b \mapsto n$ és $dx = h\,dt$:

$$A_k = h \cdot \int_0^n \frac{(t-0)(t-1)\ldots \overset{k}{\vee} \ldots (t-n)}{(k-0)(k-1)\ldots \overset{k}{\vee} \ldots (k-n)}\,dt$$

$$A_k = h \cdot \int_0^n \frac{(t-0)(t-1)\dots \cancel{k} \dots (t-n)}{(k-0)(k-1)\dots \cancel{k} \dots (k-n)}\,dt =$$

$$= h \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(t-k)}\,dt =$$

$$= (b-a)\underbrace{\frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k!(n-k)!} \cdot \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(t-k)}\,dt}_{=B_k^{(z)}}$$

A $B_k^{(z)}$ együtthatók függetlenek az $[a; b]$ intervallumtól.

Newton–Cotes formulák

A nyílt N-C együtthatók számítása.

$$
\begin{aligned}
x &= a + th, \quad t \in [0; n+2] \\
x - x_j &= (a + th) - (a + (j+1)h) = (t - (j+1))\, h \\
x_k - x_j &= (a + (k+1)h) - (x_0 + (j+1)h) = (k - j)h
\end{aligned}
$$

$$
A_k = \int_a^b \ell_k(x)\, dx = \int_a^b \frac{(x - x_0) \dots \overset{k}{\vee} \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots \overset{k}{\vee} \dots (x_k - x_n)}\, dx
$$

A $t = \frac{x-a}{h}$ helyettesítést bevezetve $a \mapsto 0, b \mapsto n+2$ és $dx = h\, dt$:

$$
A_k = h \cdot \int_0^{n+2} \frac{(t-1)\dots(t-k)(t-(k+2))\dots(t-(n+1))}{k(k-1)\dots 1 \cdot (k-(k+1))\dots(k-n)}\, dt
$$

$$A_k = h \cdot \int_0^{n+2} \frac{(t-1)\ldots(t-k)(t-(k+2))\ldots(t-(n+1)}{k(k-1)\ldots 1\cdot(k-(k+1))\ldots(k-n)}\,dt =$$

$$= h \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot \int_0^{n+2} \frac{(t-1)\ldots(t-(n+1))}{(t-(k+1))}\,dt =$$

$$= (b-a)\underbrace{\frac{(-1)^{n-k}}{(n+2)\cdot k!(n-k)!} \cdot \int_0^{n+2} \frac{(t-1)\ldots(t-(n+1))}{(t-(k+1))}\,dt}_{=B_k^{(ny)}}$$

A $B_k^{(ny)}$ együtthatók függetlenek az $[a;b]$ intervallumtól.

Tétel:

1. $\sum_{k=0}^{n} B_k = 1$
2. $B_k = B_{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n$

Biz:

1. $f \equiv 1$-re pontos a formula illetve
2. az alappontok szimmetriájából következik.
   ($y := n - t$ változó bevezetésével az integrálból.)

A N-C formulák együtthatóit más módon is meghatározhatjuk. A P_n-re való pontosság az integrál linearitása miatt azonos az $1, x, x^2, \ldots, x^n$ hatványfüggvényekre való pontossággal. Ebből A_k-ra LER-t írhatunk fel:

$$\int_a^b 1\,dx = b - a = A_0 + A_1 + \ldots + A_n$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = A_0 x_0 + A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n$$

$$\ldots\ldots$$

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right) = A_0 x_0^n + A_1 x_1^n + \ldots + A_n x_n^n$$

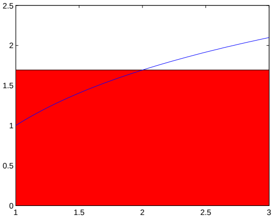
A kapott LER mátrixa a Vandermonde-mátrix transzponáltja, tehát a fenti módszer csak kézi számolásra használható.

Érintő formula (Ny(0))

$$\int_a^b f \approx (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) =: E(f)$$

Biz: A Newton–Cotes együtthatók tulajdonsága alapján

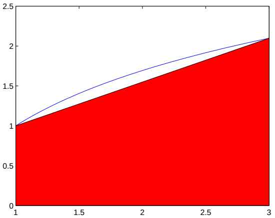
$$A_0 = b - a.$$



Trapéz formula (Z(1))

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)) =: T(f)$$

Biz: A Newton–Cotes együtthatók tulajdonsága alapján $A_0 = A_1$ és $A_0 + A_1 = b - a$. Innen $A_0 = A_1 = \frac{b-a}{2}$.



Simpson formula (Z(2))

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) =: S(f)$$

Biz: Elég A_1-et a definícióból számolni.

$$A_1 = \int_a^b \ell_1(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}\,dx =$$

$$= \frac{-4}{(b-a)^2} \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx =$$

$$= \frac{-4}{(b-a)^2} \int_a^b (x^2-(a+b)x+ab)\,dx$$

$$= \frac{-4}{(b-a)^2}\left[\frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + ab\cdot x\right]_a^b =$$
$$= \frac{-4}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{3}(b^3-a^3) - \frac{1}{2}(a+b)(b^2-a^2) + ab(b-a)\right) =$$
$$= \frac{-4}{6(b-a)^2}\left(2(b^3-a^3) - 3(a+b)(b^2-a^2) + 6ab(b-a)\right) =$$
$$= \frac{-4}{6(b-a)^2}\left(2b^3 - 2a^3 - (3ab^2 - 3a^3 + 3b^3 - 3a^2b) + 6ab^2 - 6a^2b\right) =$$
$$= \frac{-4}{6(b-a)^2}\left(-b^3 + a^3 + 3ab^2 - 3a^2b\right) = \frac{4(b-a)^3}{6(b-a)^2} = \frac{4}{6}(b-a) = A_1$$

Innen

$$A_0 = A_2 \text{ és } A_0 + A_1 + A_2 = b - a \quad \Rightarrow \quad A_0 = A_2 = \frac{1}{6}(b-a).$$

Tartalomjegyzék

Tétel (Emlékeztető): Az integrálszámítás középértéktétele

Ha $f \in C[a;b]$ és $g \geq 0$, ekkor $\exists\, \xi \in (a;b)$:

$$\int_a^b fg = f(\xi) \cdot \int_a^b g.$$

Tétel: Az érintő formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - E(f) = \frac{(b-a)^3}{24} \cdot f''(\eta).$$

Biz.: Írjuk fel a Taylor-formulát az $\frac{a+b}{2}$ középpont körül másodrendű maradéktaggal

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_x)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

ahol $\xi_x \in [a;b]$.

Integráljuk a függvényt és használjuk fel az integrálszámítás középértéktételét.

$$\int_a^b f = \underbrace{(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{=E(f)} + 0 + \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}\underbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}_{\geq 0} dx =$$

$$= E(f) + \frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = E(f) + \frac{(b-a)^3}{24}\cdot f''(\eta)$$

Innen átrendezéssel kapjuk a tétel állítását.

Biz. folyt.: A képletben szereplő integrál

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot (b-a)^3 = \frac{1}{12} \cdot (b-a)^3.$$

$\square$

Tétel: A trapéz formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\eta).$$

Biz.: Az interpoláció hibaformulájából

$$f(x) = L_1(x) + \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b),$$

ahol $\xi_x \in [a;b]$. Integráljuk a függvényt és használjuk fel az integrálszámítás középértéktételét.

Biz. folyt.:

$$\int_a^b f = \underbrace{\int_a^b L_1(x)dx}_{=T(f)} + \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2} \underbrace{(x-a)(x-b)}_{\leq 0} dx =$$

$$= T(f) + \frac{f''(\eta)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)\, dx = T(f) - \frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\eta)$$

Innen átrendezéssel kapjuk a tétel állítását. A képletben szereplő integrál (Hf.)

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\, dx = -\frac{1}{6} \cdot (b-a)^3.$$

□

Tétel: A Simpson formula hibája

Ha $f \in C^4[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - S(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

Biz.: Az interpoláció hibaformulájával nem lehet bizonyítani a Simpson formula hibáját, mert a hibaformulában $\omega_2(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)$ szerepel és $\int_a^b \omega_2(x)\,dx = 0$. Másrészt ω_2 nem állandó előjelű, ezért az integrálszámítás középértéktétele nem alkalmazható.

Biz. folyt.: Hermite interpolációt készítünk az $x_0 = a, x_1 = b, x_2 = \frac{a+b}{2}$ alappontokkal és $m_0 = 1, m_1 = 1, m_2 = 2$ multiplicitásokkal. A Newton-alak rekurzióját felhasználva

$$H_3(x) = L_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_2] \cdot \omega_2(x).$$

Integráljuk a polinomot

$$\int_a^b H_3(x)\,dx = \int_a^b L_2(x)\,dx + f[x_0, x_1, x_2, x_2] \cdot \underbrace{\int_a^b \omega_2(x)\,dx}_{=0} = S(f).$$

Az Hermite interpoláció hibaformuláját felhasználva

$$f(x) = H_3(x) + \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

ahol $\xi_x \in [a; b]$.

Biz. folyt.: Integráljuk a függvényt és használjuk fel az integrálszámítás középértéktételét.

$$\int_a^b f = \underbrace{\int_a^b H_3(x)\,dx}_{=S(f)} + \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} \underbrace{(x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}_{\leq 0} dx =$$

$$= S(f) + \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!} \int_a^b (x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx =$$

$$= S(f) - \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\eta)$$

Innen átrendezéssel kapjuk a tétel állítását. A képletben szereplő integrál (Hf.)

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx = -\frac{1}{5!} \cdot (b-a)^5,$$

továbbá $4! \cdot 5! = 2880$. $\square$

Tétel: A N-C formulák hibája

Jelölje $I(f)$ jelöli a N-C kvadratúra formulát.

1. Ha n páratlan és $f \in C^{n+1}[a;b]$, akkor létezik $\xi \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - I(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega_n(x)\, dx.$$

2. Ha n páros és $f \in C^{n+2}[a;b]$, akkor létezik $\xi \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - I(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x \cdot \omega_n(x)\, dx.$$

Megjegyzés: Vagyis páros n esetén a formula nagyobb pontosságot tud, mint amit elvárunk tőle. (Lásd érintő és Simpson formula.) Nem biz.

Tartalomjegyzék

Trapéz összetett formula

$[a; b]$-t m egyenlő részre osztjuk és minden részintervallumon trapéz formulát $(T(f))$ alkalmazunk.

Trapéz összetett formula (Trapéz szabály)

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2m} \cdot \left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_k) + f(b) \right) =: T_m(f)$$

Megj.: A megjegyzendő együttható sorozat: $1, 2, 2, \ldots, 2, 2, 1$.

Tétel: A trapéz összetett formula hibája

Ha $f \in C^2[a; b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a; b]$:

$$\int_a^b f - T_m(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot f''(\eta).$$

Biz.: Írjuk fel az $[x_{k-1}; x_k]$ intervallumra a trapéz formula hibáját, $h = \frac{b-a}{m}$.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right) = -\frac{h^3}{12} \cdot f''(\eta_k)$$

Összegezve az összes intervallumra

$$\int_a^b f(x)\,dx - T_m(f) = -\frac{h^3}{12}\sum_{k=1}^m f''(\eta_k) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m f''(\eta_k).$$

Mivel $f \in C^2[a;b]$, ezért $f'' \in C$ a függvényértékek átlagát felveszi egy $\eta \in [a;b]$ helyen.

$$\int_a^b f - T_m(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot f''(\eta).$$

$\square$

Legyen m páros és $[a; b]$-t m egyenlő részre osztjuk, majd az $I_k := [x_{2k-2}, x_{2k}]$, $(k = 1, \dots, \frac{m}{2})$ részintervallumokra Simpson formulát $(S(f))$ alkalmazunk. Vagyis a belső felezőpontokat is megszámoztuk, így $\frac{m}{2}$ Simpson formulát használunk.

A Simpson összetett formula (Simpson szabály)

$$\int_a^b f \approx S_m(f)$$

$$S_m(f) := \frac{b-a}{3m} \cdot \left(f(a) + 4 \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2k}) + f(b) \right)$$

Megj.: A megjegyzendő együttható sorozat:
$1, 4, 2, 4, \dots, 4, 2, 4, 1.$

Tétel: A Simpson összetett formula hibája

Ha $f \in C^4[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

Biz.: Írjuk fel az $[x_{2k-2}; x_{2k}]$ intervallumra a Simpson formula hibáját, $h = \frac{b-a}{m}$.

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx - \frac{2h}{6}\left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right) =$$

$$= -\frac{(2h)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\eta_k) = -\frac{2^5(b-a)^5}{2880m^5} \cdot f^{(4)}(\eta_k) = -\frac{(b-a)^5}{90m^5} \cdot f^{(4)}(\eta_k)$$

Biz. folyt.: Összegezve az összes intervallumra

$$\int_a^b f(x)\,dx - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{90m^5}\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f^{(4)}(\eta_k) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4}\cdot\frac{1}{\frac{m}{2}}\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f''(\eta_k).$$

Mivel $f \in C^4[a;b]$, ezért $f^{(4)} \in C$ az $\frac{m}{2}$ db függvényérték átlagát felveszi egy $\eta \in [a;b]$ helyen, így

$$\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4}\cdot f^{(4)}(\eta).$$

$\square$

Megjegyzés:

- Az érintő formulából is készíthető összetett formula az előzőekhez hasonlóan. Hf. felírni és a hibaformuláját bizonyítani.
- Ha $f \in C^2[a;b]$ illetve $f \in C^4[a;b]$, akkor $m \to \infty$ esetén

$$T_m(f) \to \int_a^b f, \text{ illetve } S_m(f) \to \int_a^b f$$

  m^2 illetve m^4 nagyságrendben. Tehát az f-re tett feltételek mellett az összetett formuláink értékei $m \to \infty$ esetén konvergálnak a pontos integrálhoz.
- Formuláink javíthatók a Richardson-féle extrapolációval.

Richardson-féle extrapoláció a trapéz összetett formulára:

Írjuk fel a trapéz összetett formulát m-re és $2m$-re:

$$\int_a^b f - T_m(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot f''(\eta_1)$$
$$\int_a^b f - T_{2m}(f) = -\frac{(b-a)^3}{48m^2} \cdot f''(\eta_2)$$

Ha f'' elég sima, akkor $f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$, így a 2. egyenlet 4-szereséből kivonva az 1. egyenletet

$$3\int_a^b f - 4T_{2m}(f) + T_m(f) \approx 0$$
$$\int_a^b f \approx \frac{1}{3}\left(4T_{2m}(f) - T_m(f)\right)$$

A trapéz szabály javító formulája

$$\frac{1}{3}\left(4T_{2m}(f) - T_m(f)\right) = S_m(f)$$

A közelítés hibája $O(h^4)$.

Megjegyzés:
Figyeljünk rá, hogy a javítás nem mindig alkalmazható. Például az $\int_0^1 x^{1/3}\,dx$ integrál kiszámításához a Richardson-féle extrapoláció nem használható, mert f nem deriválható a 0-ban. Az ehhez hasonló szingularitások kezeléséhez más típusú módszerek kellenek. (Lásd Gauss-kvadratúra formulák.)

Richardson-féle extrapoláció a Simpson összetett formulára:

Írjuk fel a Simpson összetett formulát m-re és $2m$-re:

$$\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180\,m^4} \cdot f^{(4)}(\eta_1)$$
$$\int_a^b f - S_{2m}(f) = -\frac{(b-a)^5}{180 \cdot 16\,m^4} \cdot f^{(4)}(\eta_2)$$

Ha $f^{(4)}$ elég sima, akkor $f^{(4)}(\eta_1) \approx f^{(4)}(\eta_2)$, így a 2. egyenlet 16-szorosából kivonva az 1. egyenletet

$$15\int_a^b f - 16\,S_{2m}(f) + S_m(f) \approx 0$$

$$\int_a^b f \approx \frac{1}{15}\left(16\,S_{2m}(f) - S_m(f)\right)$$

A Simpson szabály javító formulája

$$\frac{1}{15}\left(16\, S_{2m}(f) - S_m(f)\right)$$

A közelítés hibája $O(h^6)$.

Megjegyzés:

- A Richarson-féle extrapolációból készített rekurzió a Romberg-féle integrálás alapja.
- A gyakorlati számítások során jól használhatók a következő tételek a formula pontosságának megadására:

Tétel:

- Ha f'' korlátos $[a; b]$-n, akkor

$$\left|\int_a^b f - T_m(f)\right| \leq |T_m(f) - T_{2m}(f)|.$$

- Ha $f^{(4)}$ korlátos $[a; b]$-n, akkor

$$\left|\int_a^b f - S_m(f)\right| \leq |S_m(f) - S_{2m}(f)|.$$

Nem biz.

Köszönöm a figyelmet!