11. gyakorlat

1. feladat

Legyen $f(x) = cos(x),\ \ x \in [-\pi; \pi]$. Interpoláljuk a függvényt a $-\pi, 0, \pi$ alappontokon a tanult globális bázisban harmadfokú spline-nal, Hermite-féle peremfeltétellel: $f'(-\pi) = f'(\pi) = 0$

a) Készítsük el a LER-t,

b) majd oldjuk meg Matlabbal és rajzoljuk ki a megoldást.

2. feladat

A $-2, -1, 0, 1$ alappontokon a $-1, 0, 1, 0$ értéket felvevő függvényt közelítsük természetes permfeltételű harmadfokú spline-nal. A spline-t a tanult globális bázisban írjuk fel.

a) Készítsük el a LER-t,

b) majd oldjuk meg Matlabbal és rajzoljuk ki a megoldást.

Definíció: Általánosított inverz

Az $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix *Moore-Penrose-féle általánosított (pszeudo) inverze* az $A^+ \in \mathbb{C}^{n\times m}$ mátrix, ha

1. AA^+ önadjungált,

2. A^+A önadjungált,

3. $AA^+A = A$,

4. $A^+AA^+ = A^+$.

Tétel: Az általánosított inverz előállítása

Túlhatározott teljes rangú eset: Legyen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m > n$ és $r = \operatorname{rang}(A) = n$. Ekkor

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^*.$$

Alulhatározott teljes rangú eset: Legyen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m < n$ és $r = \operatorname{rang}(A) = m$. Ekkor

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1}.$$

3. feladat

Legyen

$$A := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

a) Állítsuk elő a A^+ mátrixot!

b) Állítsuk elő a B^+ mátrixot!

c) Mit jelentenek az egyes mátrixok esetén az általánosított megoldások?

4. feladat

Legyen

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3x2}, \quad B := A^T.$$

a) Állítsuk elő a A^+ mátrixot!

b) Állítsuk elő a B^+ mátrixot!

c) Bizonyítsuk a feladat alapján adható sejtést általában!

Definíció: Hilbert tér

1. H lineáris tér (vektortér) $\mathbb{K}$ felett (most $\mathbb{R}$ felett) és

2. értelmezett egy skalárisszorzat a térben.

3. A skaláris szorzatból természetes módon definiálható a tér normája: $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

4. Erre a normára nézve *teljes a tér*, ez azt jelenti, hogy minden H-beli Cauchy-sorozat konvergens.

Tétel: Hilbert térbeli approximáció

Legyen H Hilbert tér, $f \in H$ és $H' \subset H$ zárt altér, ekkor

$$\exists!\ f' \in H' : \ \|f - f'\| = \inf\{\|f - h'\| : \ h' \in H'\}$$

$$\text{és} \ \ f - f' \perp H' \quad (\text{azaz} \ \langle f - f', h'\rangle = 0 \ \forall\, h' \in H').$$

Tétel: Alkalmazás véges dimenziós altérre

$$H' = \mathrm{Span}(g_1, \dots, g_n)$$

Az altérbeli legjobban közelítő elemet $f' = \sum_{i=1}^n c_i g_i$ alakban keressük.

$$f - f' \perp H' \quad \Leftrightarrow \quad f - f' \perp g_j \;\; (j = 1, \dots, n)$$

$j = 1, \dots, n$-re:

$$\begin{aligned} \langle f - f', g_j \rangle &= 0 \\ \langle f', g_j \rangle &= \langle f, g_j \rangle \\ \sum_{i=1}^n c_i \langle g_i, g_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i g_i, g_j \right\rangle &= \langle f, g_j \rangle. \end{aligned}$$

$n \times n$-es Gram mátrixú LER-t kaptunk: $\quad Gc = b$,

ahol $G = (\langle g_i, g_j \rangle)_{j,i=1}^n, \quad c = (c_i)_{i=1}^n, b = (\langle f, g_j \rangle)_{j=1}^n$.

Tétel: A legjobban közelítő elem távolsága

$$d^2 := \|f - f'\|^2 = \|f\|^2 - b^T c$$

5. feladat

A Hilbert térbeli elmélet segítségével adjuk meg az $f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ pontnak az $x + y + z = 0$ síkra merőleges vetületét és a pont és sík távolságát! Mi a pont síkra vett tükörképe?

1. megoldás

a) A spline-t

$$S(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \beta(x-0)_+^3$$

alakban keressük. A peremfeltételek felírásához szükségünk lesz a deriváltra.

$$S'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + 3\beta(x-0)_+^2$$

Mivel a bázisunk teljesíti a spline-ra tett feltételeket, ezért csak az interpolációs feltételeket és a két peremfeltételt kell felírnunk a fenti alakra.

$$\begin{aligned}
&(1)\ S(-\pi) = -1 && \rightarrow \alpha_0 - \alpha_1\pi + \alpha_2\pi^2 - \alpha_3\pi^3 && = -1\\
&(2)\ S(0) = 1 && \rightarrow \alpha_0 && = 1\\
&(3)\ S(\pi) = -1 && \rightarrow \alpha_0 + \alpha_1\pi + \alpha_2\pi^2 + \alpha_3\pi^3 + \beta\pi^3 && = -1\\
&(4)\ S'(-\pi) = 0 && \rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2\pi + 3\alpha_3\pi^2 && = 0\\
&(5)\ S'(\pi) = 0 && \rightarrow \alpha_1 + 2\alpha_2\pi + 3\alpha_3\pi^2 + 3\beta\pi^2 && = 0
\end{aligned}$$

Redukáljuk az egyenletrendszert

$$\begin{aligned}
&(1) && \alpha_1 - \alpha_2\pi + \alpha_3\pi^2 = \frac{2}{\pi}\\
&(3) && \alpha_1 + \alpha_2\pi + \alpha_3\pi^2 + \beta\pi^2 = -\frac{2}{\pi}\\
&(4) && \alpha_1 - 2\alpha_2\pi + 3\alpha_3\pi^2 = 0\\
&(5) && \alpha_1 + 2\alpha_2\pi + 3\alpha_3\pi^2 + 3\beta\pi^2 = 0.
\end{aligned}$$

Megjegyzés

Redukálásnál ne felejtsük el az elhagyott ismeretlen értékét is felvinni Matlabba!

Ebből a LER mátrix alakban felírva:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\pi & \pi^2 & 0 \\ 1 & \pi & \pi^2 & \pi^2 \\ 1 & -2\pi & 3\pi^2 & 0 \\ 1 & 2\pi & 3\pi^2 & 3\pi^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} \\ -\frac{2}{\pi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Lásd: gyakorlathoz kapcsolódó gyak11.mlx fájl.

2. megoldás

a) A keresett spline alakja:

$$\begin{aligned} S(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d + \beta_1(x+1)_+^3 + \beta_2(x-0)_+^3 \\ S'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c + 3\beta_1(x+1)_+^2 + 3\beta_2(x-0)_+^2 \\ S''(x) &= 6ax + 2b + 6\beta_1(x+1)_+ + 6\beta_2(x-0)_+ \end{aligned}$$

Írjuk interpolációs feltétel és a peremfeltételt:

$$\begin{array}{lllr} (1) & S(-2) = -1 & \rightarrow -8a + 4b - 2c + d & = -1 \\ (2) & S(-1) = 0 & \rightarrow -a + b - c + d & = 0 \\ (3) & S(0) = 1 & \rightarrow d + \beta_1 & = 1 \\ (4) & S(1) = 0 & \rightarrow a + b + c + d + 8\beta_1 + \beta_2 & = 0 \\ (5) & S''(-2) = 0 & \rightarrow 6a(-2) + 2b & = 0 \\ (5) & S''(1) = 0 & \rightarrow 6a + 2b + 6\beta_1 \cdot 2 + 6\beta_2 & = 0 \end{array}$$

Ebből a LER mátrix alakban felírva:

$$\begin{bmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 \\ -12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 12 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Lásd: gyakorlathoz kapcsolódó gyak11.mlx fájl.

3. megoldás

a) Az $\mathbf{A}$ mátrix túlhatározott és teljes rangú, $rang(\mathbf{A}) = 1$. Ekkor az általánosított inverz a következő képlettel számolható.

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T = (m)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

b) Az $\mathbf{B}$ mátrix alulhatározott és teljes rangú, $rang(\mathbf{B}) = 1$. Ekkor az általánosított inverz a következő képlettel számolható.

$$\mathbf{B}^+ = \mathbf{B}^T \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (n)^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Az A esetén A^+b adja b ortogonális vetületét, illetve azt a megoldást, ahol a reziduális hiba minimális az $Ax = b$ LER-ben (nem megoldható LER).

A B esetén B^+s a $Bx = s$ (végtelen sok megoldású LER) LER megoldásai közül a minimális normájú megoldás.

4. megoldás

a) Az $\mathbf{A}$ mátrix túlhatározott és teljes rangú, $rang(\mathbf{A}) = 2$. Ekkor az általánosított inverz a következő képlettel számolható.

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Az $\mathbf{B}$ mátrix alulhatározott és teljes rangú, $rang(\mathbf{B}) = 2$. Ekkor az általánosított inverz a következő képlettel számolható.

$$\mathbf{B}^+ = \mathbf{B}^T \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

c) Sejtés: minden $\mathbf{A}$ mátrix esetén teljesül, hogy $(\mathbf{A}^+)^T = (\mathbf{A}^T)^+$.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ túlhatározott és teljes rangú. Ekkor

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{A}^T$$

Ennek a transzponáltját véve és felhasználva azt, hogy $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$ (ld. lin. alg.)

$$(\mathbf{A}^+)^T = ((\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}((\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1})^T = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$$

Innen a $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ jelölést és azt a tényt felhasználva, hogy B alulhatározott teljes rangú mátrix, könnyen észrevehető, hogy

$$(\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} = \mathbf{B}^+ = (\mathbf{A}^T)^+$$

Ezzel az alulhatározott teljes rangú esetet is igazoltuk, hiszen ha $\mathbf{A}$ alulhatározott és teljes rangú, akkor csak alkalmazzuk a bizonyítást $\mathbf{A}^T$-re, ami egy túlhatározott teljes rangú mátrix.

5. megoldás

Kétféle megoldása van a feladatnak.

a) Írjuk fel az $x + y + z = 0$ síkhoz tartozó H' halmazt generátorrendszerként. Ezt úgy tudjuk egyszerűen megtenni, hogy választunk két olyan lineárisan független vektort, amely a halmazban van (hiszen a sík egy az altér, így a generátorrendszere is két vektor).

$$H' := \text{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right), \text{ ahol } \mathbf{q_1} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \text{ és } \mathbf{q_2} = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

Ezek alapján írjuk fel a $\mathbf{G}$ mátrixot és a $\mathbf{b}$ vektort, és oldjuk meg a belőlük kapott LERt.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \;\; \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

A $\mathbf{c}$ vektor az eredeti $\mathbf{f}$ vektor $\mathbf{q_1}$-re és $\mathbf{q_2}$-re vett vetületek nagyságát adja meg. Azaz a vetülete a síkra ebben az esetben:

$$\mathbf{f}' = (-1) \cdot \mathbf{q_2} = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} \in H'$$

Ez a vektor lesz az altérbeli legjobban közelítő eleme az $\mathbf{f}$-nek. Alkalmazzuk a tanult tételt a távolság kiszámítására:

$$\mathbf{f} - \mathbf{f}' = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} \perp H'$$

$$d^2 = \|\mathbf{f} - \mathbf{f}'\|^2 = 12 \;\; \rightarrow d = \sqrt{12}$$

b) Vegyük azt az alteret, amely a síkhoz tartozó normálvektorokat tartalmazza, és számoljuk ki annak a segítségével a vektorokat:

$$H'_\perp = \text{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right), \quad f'' \in H'_\perp, \quad f' \in H'$$

$$f'' = c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ alakú } G \cdot c = b \Leftrightarrow 3 \cdot c = 6 \Leftrightarrow c = 2$$

$$f'' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \perp H'$$

ugyan azt kaptuk!