Numerikus módszerek 2.

8. előadás: Spline-interpoláció

Krebsz Anna

ELTE IK

Tartalomjegyzék

$\ell = 3$: **köbös spline megadása:** A polinom alakja I_k-n:

$$p_k(x) := a_3^{(k)} \cdot (x - x_{k-1})^3 + a_2^{(k)} \cdot (x - x_{k-1})^2 + a_1^{(k)} \cdot (x - x_{k-1}) + a_0^{(k)}.$$

- Látjuk, hogy az ismeretlenek száma: $4n$.
- A feltételek száma:
  1. interpolációs feltétel minden részintervallum két szélére: $2n$ feltétel,
  2. belső osztópontokban $S_3' \in C$: $n-1$ feltétel,
  3. belső osztópontokban $S_3'' \in C$: $n-1$ feltétel,

Összesen: $4n-2$ feltétel, vagyis az egyértelműséghez hiányzik két feltétel. Ezeket peremfeltételként szokás megadni.

1. **Hermite-féle peremfeltétel**:

$$S_3'(a) = f'(a) \text{ és } S_3'(b) = f'(b).$$

Fizikailag azt jelenti, hogy az $S(x)$ alakú vékony rugalmas fémszál a végpontokban be van fogva.

2. **Természetes peremfeltétel:**

$$S_3''(a) = 0 \text{ és } S_3''(b) = 0.$$

Fizikailag azt jelenti, hogy az $S(x)$ alakú vékony rugalmas fémszál a végpontokban csuklóval rögzített.

3. **Periodikus peremfeltétel:** csak periodikus függvények közelítése esetén, ha $[a; b]$ a periódus többszöröse.
   Ekkor $f(a) = f(b)$. A hiányzó két feltétel:

$$S_3'(a) = S_3'(b) \text{ és } S_3''(a) = S_3''(b).$$

4. **A "not a knot" peremfeltétel:**

$$S_3''' \in C\{x_1\} \text{ és } S_3''' \in C\{x_{n-1}\}.$$

Ez azt jelenti, hogy az első két részintervallumon illetve az utolsó kettőn is ugyanaz a képlet. Grafikában szokás használni, mert nem kell új adatot megadni.

Készítsük el az interpolációs köbös spline LER-ét:
Feltételek a $p_k(x)$ polinomra, $h_k := x_k - x_{k-1}$ bevezetésével:

1. **Interpolációs feltétel I_k bal végpontjára:** $(k = 1, \ldots, n)$

$$p_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1}) \quad \to \quad a_0^{(k)} = f(x_{k-1}).$$

2. **Interpolációs feltétel I_k jobb végpontjára:** $(k = 1, \ldots, n)$

$$p_k(x_k) = f(x_k) \quad \to \quad a_3^{(k)} h_k^3 + a_2^{(k)} h_k^2 + a_1^{(k)} h_k + a_0^{(k)} = f(x_k).$$

3. **A derivált folytonossága x_k-ban:** $(k = 1, \ldots, n-1)$

$$p_k'(x_k) = p_{k+1}'(x_k) \quad \to \quad 3a_3^{(k)} h_k^2 + 2a_2^{(k)} h_k + a_1^{(k)} = a_1^{(k+1)}.$$

4. **A** 2. **derivált folytonossága x_k-ban:** $(k = 1, \ldots, n-1)$

$$p_k''(x_k) = p_{k+1}''(x_k) \quad \to \quad 6a_3^{(k)} h_k + 2a_2^{(k)} = 2a_2^{(k+1)}.$$

Az egyenleteket redukáljuk, csak $a_2^{(k)}$ alakú ismeretlenünk marad a végére. Fejezzük ki 4.)-ből $a_3^{(k)}$-t:

$$a_3^{(k)} = \frac{1}{3h_k}\left(a_2^{(k+1)} - a_2^{(k)}\right) \quad (k = 1, \ldots, n-1).$$

2.)-ből fejezzük ki $a_1^{(k)}$-t és helyettesítsük $a_3^{(k)}$-t:

$$\frac{f(x_k) - a_0^{(k)}}{h_k} = a_3^{(k)} h_k^2 + a_2^{(k)} h_k + a_1^{(k)} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a_1^{(k)} &= f[x_{k-1}, x_k] - \left(a_3^{(k)} h_k + a_2^{(k)}\right) h_k = \\ &= f[x_{k-1}, x_k] - \left(\frac{1}{3} a_2^{(k+1)} - \frac{1}{3} a_2^{(k)} + a_2^{(k)}\right) h_k = \\ &= f[x_{k-1}, x_k] - \frac{h_k}{3}\left(2a_2^{(k)} + a_2^{(k+1)}\right) \quad (k = 1, \ldots, n-1). \end{aligned}$$

$a_1^{(k)}$, $a_3^{(k)}$-t írjuk be 3)-ba.

$$3.) \qquad 3a_3^{(k)}h_k^2 + 2a_2^{(k)}h_k + a_1^{(k)} = a_1^{(k+1)}$$

$$\left(a_2^{(k+1)} - a_2^{(k)}\right)h_k + 2a_2^{(k)}h_k + f[x_{k-1}, x_k] - \frac{h_k}{3}\left(2a_2^{(k)} + a_2^{(k+1)}\right) =$$
$$= f[x_k, x_{k+1}] - \frac{h_{k+1}}{3}\left(2a_2^{(k+1)} + a_2^{(k+2)}\right)$$

$$a_2^{(k)}(-3h_k + 6h_k - 2h_k) + a_2^{(k+1)}(3h_k - h_k + 2h_{k+1}) + a_2^{(k+2)}(h_{k+1}) =$$
$$= 3 \cdot (f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k])$$

A végeredmény egy LER $a_2^{(k)}$-kra ($k = 1, \ldots, n-1$)-re:

$$h_k \cdot a_2^{(k)} + 2(h_k + h_{k+1}) \cdot a_2^{(k+1)} + h_{k+1} \cdot a_2^{(k+2)} = 3 \cdot (f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k])$$

Egy jelölést bevezetve más alakban is felírhatjuk a LER-t:

$$\sigma_k := \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

$$\sigma_k a_2^{(k)} + 2a_2^{(k+1)} + (1-\sigma_k)a_2^{(k+2)} = 3 \cdot f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$$

Vezessük be az $a_2^{(n+1)}$ segédváltozót, hogy $a_3^{(n)}$ és $a_1^{(n)}$ értékeit a kapott képletekkel tudjuk számolni.

Így $a_2^{(k)}$-ból $n+1$ db ismeretlenünk van. A két hiányzó egyenletet (0. és n.) a peremfeltételek felírásával kapjuk meg.

Hermite-féle peremfeltétel

$$S_3'(a) = p_1'(x_0) = f'(a) \quad \Rightarrow$$

$$f'(a) = a_1^{(1)} = f[x_0, x_1] - \frac{h_1}{3}\left(2a_2^{(1)} + a_2^{(2)}\right)$$

Átrendezve

$$\frac{h_1}{3}\left(2a_2^{(1)} + a_2^{(2)}\right) = f[x_0, x_1] - f'(a)$$

$$2a_2^{(1)} + a_2^{(2)} = 3 \cdot \frac{f[x_0, x_1] - f'(a)}{h_1}$$

A 0. egyenlet: $\quad 2a_2^{(1)} + a_2^{(2)} = 3 \cdot f[x_0, x_0, x_1].$

Hermite-féle peremfeltétel

$$S_3'(b) = p_n'(x_n) = f'(b) \quad \Rightarrow$$

$$a_1^{(n)} + 2a_2^{(n)} h_n + 3a_3^{(n)} h_n^2 = f'(b)$$

$$f[x_{n-1}, x_n] - \frac{h_n}{3}\left(2a_2^{(n)} + a_2^{(n+1)}\right) + 2a_2^{(n)} h_n +$$

$$+ \left(a_2^{(n+1)} - a_2^{(n)}\right) h_n = f'(b)$$

Átrendezve

$$a_2^{(n)}(-2h_n + 6h_n - 3h_n) + a_2^{(n+1)}(-h_n + 3h_n) = 3 \cdot \left(f'(b) - f[x_{n-1}, x_n]\right)$$

$$h_n \cdot a_2^{(n)} + 2h_n \cdot a_2^{(n+1)} = 3 \cdot \left(f'(b) - f[x_{n-1}, x_n]\right)$$

Az n+1. egyenlet: $\quad a_2^{(n)} + 2a_2^{(n+1)} = 3 \cdot f[x_{n-1}, x_n, x_n].$

Köbös interpolációs spline Hermite peremfeltétellel:

A megoldandó $(n+1)\times(n+1)$-es tridiagonális LER alakja:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \sigma_1 & 2 & \delta_1 & & & \\ & \sigma_2 & 2 & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \sigma_{n-1} & 2 & \delta_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2^{(1)} \\ a_2^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_2^{(n)} \\ a_2^{(n+1)} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} f[x_0,x_0,x_1] \\ f[x_0,x_1,x_2] \\ \vdots \\ \vdots \\ f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] \\ f[x_{n-1},x_n,x_n] \end{bmatrix},$$

$$\text{ahol } \sigma_k := \frac{h_k}{h_k+h_{k+1}} \text{ és } \delta_k := 1-\sigma_k \quad (k=1,\ldots,n-1).$$

Köbös interpolációs spline Hermite peremfeltétellel:

Egyenletes felosztású alappontok esetén az $(n+1) \times (n+1)$-es tridiagonális LER alakja:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2^{(1)} \\ a_2^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_2^{(n)} \\ a_2^{(n+1)} \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} f[x_0, x_0, x_1] \\ f[x_0, x_1, x_2] \\ \vdots \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \\ f[x_{n-1}, x_n, x_n] \end{bmatrix}.$$

Összefoglalva:

A LER megoldása után a következő képletekből kapjuk a hiányzó együtthatókat: $(k = 1, \ldots, n)$

$$\begin{aligned} a_0^{(k)} &:= f(x_{k-1}) \\ a_3^{(k)} &:= \frac{1}{3h_k}\left(a_2^{(k+1)} - a_2^{(k)}\right) \\ a_1^{(k)} &:= f[x_{k-1}, x_k] - \frac{h_k}{3}\left(2a_2^{(k)} + a_2^{(k+1)}\right). \end{aligned}$$

A polinom alakja I_k-n:

$$p_k(x) := a_3^{(k)}(x - x_{k-1})^3 + a_2^{(k)}(x - x_{k-1})^2 + a_1^{(k)}(x - x_{k-1}) + a_0^{(k)}.$$

Természetes peremfeltétel

1.) $S_3''(a) = p_1''(x_0) = 0$

$$2a_2^{(1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2^{(1)} = 0$$

2.) $S_3''(b) = p_n''(x_n) = 0$

$$6a_3^{(n)} h_n + 2a_2^{(n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a_2^{(n+1)} = 0$$

vagyis az $a_2^{(1)} := 0$ és $a_2^{(n+1)} := 0$ választás jó, így a LER kisebb méretű lesz.

Köbös interpolációs spline természetes peremfeltétellel:

A korábbi tridiagonális LER $(n-1) \times (n-1)$-es méretűre redukálódik:

$$\begin{bmatrix} 2 & \delta_1 & & \\ \sigma_2 & 2 & \delta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \sigma_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_2^{(n)} \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} f[x_0, x_1, x_2] \\ \vdots \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \end{bmatrix},$$

$$\text{ahol } \sigma_k := \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} \text{ és } \delta_k := 1 - \sigma_k \ \ (k = 1, \ldots, n-1).$$

Köbös interpolációs spline természetes peremfeltétellel:

Egyenletes felosztású alappontok esetén az $(n-1)\times(n-1)$-es tridiagonális LER alakja:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_2^{(n)} \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} f[x_0, x_1, x_2] \\ \vdots \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \end{bmatrix}.$$

Összefoglalva:

A LER megoldása után a következő képletekből kapjuk a hiányzó együtthatókat: $(k = 1, \ldots, n)$

$$\begin{aligned}
a_2^{(1)} &:= 0 \quad \text{és} \quad a_2^{(n+1)} := 0 \\
a_0^{(k)} &:= f(x_{k-1}) \\
a_3^{(k)} &:= \frac{1}{3h_k}\left(a_2^{(k+1)} - a_2^{(k)}\right) \\
a_1^{(k)} &:= f[x_{k-1}, x_k] - \frac{h_k}{3}\left(2a_2^{(k)} + a_2^{(k+1)}\right).
\end{aligned}$$

A polinom alakja I_k-n:

$$p_k(x) := a_3^{(k)}(x - x_{k-1})^3 + a_2^{(k)}(x - x_{k-1})^2 + a_1^{(k)}(x - x_{k-1}) + a_0^{(k)}.$$

Tartalomjegyzék

Periodikus peremfeltétel: feltételezzük, hogy $f(x_0) = f(x_n)$.

1.) $S_3''(a) = S_3''(b)$

$$p_1''(x_0) = p_n''(x_n) \;\; \Rightarrow \;\; 2a_2^{(1)} = 6a_3^{(n)}h_n + 2a_2^{(n)}$$

vagyis a segédváltozóra $a_2^{(n+1)} := a_2^{(1)}$ választás jó, nem lesz n. egyenletünk.

2.) $S_3'(a) = S_3'(b)$ feltételből kapjuk a 0. egyenletet.

$$p_1'(x_0) = p_n'(x_n) \;\; \Rightarrow \;\; a_1^{(1)} = a_1^{(n)} + 2a_2^{(n)} h_n + 3a_3^{(n)} h_n^2$$

$$f[x_0, x_1] - \frac{h_1}{3}\left(2a_2^{(1)} + a_2^{(2)}\right) = f[x_{n-1}, x_n] - \frac{h_n}{3}\left(2a_2^{(n)} + a_2^{(1)}\right) + \\ + 2a_2^{(n)} h_n + \left(a_2^{(1)} - a_2^{(n)}\right) h_n$$

$$a_2^{(1)}(-2h_1 + h_n - 3h_n) - a_2^{(2)} h_1 + a_2^{(n)}(2h_n - 6h_n + 3h_n) = \\ = 3 \cdot (f[x_{n-1}, x_n] - f[x_0, x_1])$$

$$(2h_1 + 2h_n) a_2^{(1)} + h_1 a_2^{(2)} + h_n a_2^{(n)} = 3 \cdot (f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n])$$

Bevezetve az $x_{-1} := x_0 - h_n$, $h_0 := h_n$, $f(x_{-1}) := f(x_{n-1})$ jelölést

$$(2h_1 + 2h_0)a_2^{(1)} + h_1 a_2^{(2)} + h_0 a_2^{(n)} = 3 \cdot (f[x_0, x_1] - f[x_{-1}, x_0])$$

A 0. egyenlet alakja:

$$2a_2^{(1)} + a_2^{(2)}\delta_0 + a_2^{(n)}\sigma_0 = 3 \cdot f[x_{-1}, x_0, x_1].$$

A segédváltozó ismert értékét írjuk be az $n-1$. egyenletbe

$$h_{n-1}a_2^{(n-1)} + 2(h_{n-1} + h_n)a_2^{(n)} + h_n a_2^{(n+1)} = 3 \cdot (f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}]),$$

innen az $n-1$. egyenlet alakja:

$$a_2^{(1)}\delta_{n-1} + a_2^{(n-1)}\sigma_{n-1} + 2a_2^{(n)} = 3 \cdot f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n].$$

Köbös interpolációs spline periodikus peremfeltétellel:

A korábbi tridiagonális LER ciklikus mátrixú válik és $n \times n$-es méretűre redukálódik:

$$\begin{bmatrix} 2 & \delta_0 & & & \sigma_0 \\ \sigma_1 & 2 & \delta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \delta_{n-1} & & & \sigma_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2^{(1)} \\ a_2^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_2^{(n)} \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} f[x_{-1}, x_0, x_1] \\ f[x_0, x_1, x_2] \\ \vdots \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \end{bmatrix},$$

$$\text{ahol } \sigma_k := \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} \text{ és } \delta_k := 1 - \sigma_k \ (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$x_{-1} := x_0 - h_n, \ h_0 := h_n, \ f(x_{-1}) := f(x_{n-1}).$$

Köbös interpolációs spline periodikus peremfeltétellel:

Egyenletes felosztású alappontok esetén az $n \times n$-es tridiagonális ciklikus mátrixú LER alakja:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & 1 \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1 & & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2^{(1)} \\ a_2^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_2^{(n)} \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} f[x_{-1}, x_0, x_1] \\ f[x_0, x_1, x_2] \\ \vdots \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \end{bmatrix},$$

$$x_{-1} := x_0 - h, \;\; f(x_{-1}) := f(x_{n-1}).$$

Összefoglalva:

A LER megoldása után a következő képletekből kapjuk a hiányzó együtthatókat: $(k = 1, \ldots, n)$

$$\begin{aligned} a_2^{(n+1)} &:= a_2^{(1)} \\ a_0^{(k)} &:= f(x_{k-1}) \\ a_3^{(k)} &:= \frac{1}{3h_k}\left(a_2^{(k+1)} - a_2^{(k)}\right) \\ a_1^{(k)} &:= f[x_{k-1}, x_k] - \frac{h_k}{3}\left(2a_2^{(k)} + a_2^{(k+1)}\right). \end{aligned}$$

A polinom alakja I_k-n:

$$p_k(x) := a_3^{(k)}(x - x_{k-1})^3 + a_2^{(k)}(x - x_{k-1})^2 + a_1^{(k)}(x - x_{k-1}) + a_0^{(k)}.$$

Jelölés:

$\Omega_n := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ alappontrendszer
$S_\ell(\Omega_n)$: az Ω_n alappontrendszeren értelmezett ℓ-edfokú spline-ok halmaza.

Definíció: Jobb oldali hatványfüggvény

$$(x - x_k)_+^\ell := \begin{cases} (x - x_k)^\ell & \text{ha } x \geq x_k \\ 0 & \text{ha } x < x_k \end{cases}$$

Tétel:

1. Az $1, x, \ldots, x^\ell, (x - x_1)_+^\ell, \ldots, (x - x_{n-1})_+^\ell$ függvényrendszer lineárisan független $S_\ell(\Omega_n)$-en.
2. Bármely $S \in S_\ell(\Omega_n)$ egyértelműen előállítható a fenti rendszerrel.
3. $\dim S_\ell(\Omega_n) = n + \ell$

Biz.:

1. A bizonyítás megtalálható Csörgő István: Fejezetek a lineáris algebrából című könyvének 38. oldalán.
2. Tetszőleges $S \in S_\ell(\Omega_n)$ esetén intervallumonként konstruáljuk meg az előállítást. Mivel $S\big|_{I_1} \in P_\ell$, ezért egyértelműen léteznek az $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{R}$ számok melyre

$$S\big|_{I_1}(x) = \sum_{j=0}^{\ell} \alpha_j x^j =: P_1(x).$$

Biz. folyt.: Legyen $R_2 := S - P_1\big|_{I_2}$ és írjuk fel mely feltételeket kell kielégítenie a polinomnak:

$$\left.\begin{aligned} R_2(x_1) &= 0 \\ R_2'(x_1) &= 0 \\ &\vdots \\ R_2^{\ell-1}(x_1) &= 0 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad R_2(x) = \beta_1 (x - x_1)_+^{\ell}$$

továbbá

$$R_2(x_2) = \beta_1 (x_2 - x_1)_+^{\ell} = S(x_2) - P_1(x_2),$$

ahonnan β_1 egyértelműen meghatározható:

$$\beta_1 = \frac{S(x_2) - P_1(x_2)}{(x_2 - x_1)^{\ell}}.$$

Biz. folyt.: Tegyük fel, hogy az $I_1, \ldots, I_{n-1}$ intervallumokra elkészült az egyértelmű előállítás, melynek alakja

$$S\big|_{[a;b]\setminus I_n}(x) =: \widetilde{S}(x) = \sum_{j=0}^{\ell} \alpha_j x^j + \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i (x - x_i)_+^{\ell}.$$

Készítsük el I_n intervallumra az előállítást. Legyen $R_n := S - \widetilde{S}\big|_{I_n}$ és írjuk fel mely feltételeket kell kielégítenie a polinomnak:

$$\left.\begin{aligned} R_n(x_{n-1}) &= 0 \\ R_n'(x_{n-1}) &= 0 \\ &\vdots \\ R_n^{\ell-1}(x_{n-1}) &= 0 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad R_n(x) = \beta_{n-1}(x - x_{n-1})_+^{\ell}.,$$

továbbá

$$R_n(x_n) = \beta_{n-1}(x_n - x_{n-1})_+^{\ell} = S(x_n) - \widetilde{S}(x_n).$$

Biz. folyt.:

$$R_n(x_n) = \beta_{n-1}(x_n - x_{n-1})_+^{\ell} = S(x_n) - \widetilde{S}(x_n),$$

ahonnan β_{n-1} egyértelműen meghatározható:

$$\beta_{n-1} = \frac{S(x_n) - \widetilde{S}(x_n)}{(x_n - x_{n-1})^{\ell}}.$$

3. Következmény.

$\square$

Megj.: Konkrét feladatra az interpolációs spline előállítása gyakorlaton.

Köszönöm a figyelmet!