Diszkrét matematika 1

Komplex számok

Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2025 tavasz

Komplex számok

$$(\cos t + i \cdot \sin t)^n = \cos(n \cdot t) + i \cdot \sin(n \cdot t)$$

Moivre-azonosságok

Tétel (Biz: HF)

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \; w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- $zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi))$
- $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

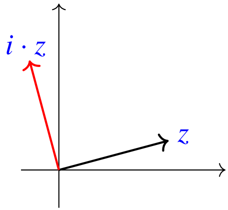
- A szögek rendre összeadódnak, kivonódnak, szorzódnak.
- Az argumentumot ezek után redukcióval kapjuk!

Szorzás, példák

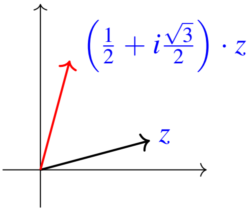
Példa

$$i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) \Longrightarrow$$
$$i \cdot z = |z| \cdot (\cos(\varphi + \pi/2) + i\sin(\varphi + \pi/2))$$

(algebrai alakban: $i \cdot (a + bi) = -b + ia$)



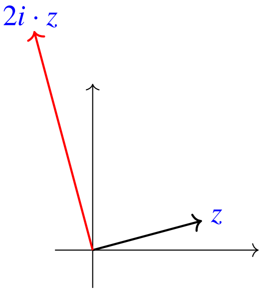
$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) \Longrightarrow$$
$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot z = |z| \cdot (\cos(\varphi + \pi/3) + i\sin(\varphi + \pi/3))$$



Szorzás, példák

Példa

$$2i = 2\left(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)\right) \Longrightarrow$$
$$2i \cdot z = 2|z| \cdot \left(\cos(\varphi + \pi/2) + i\sin(\varphi + \pi/2)\right)$$



Geometriai jelentés:

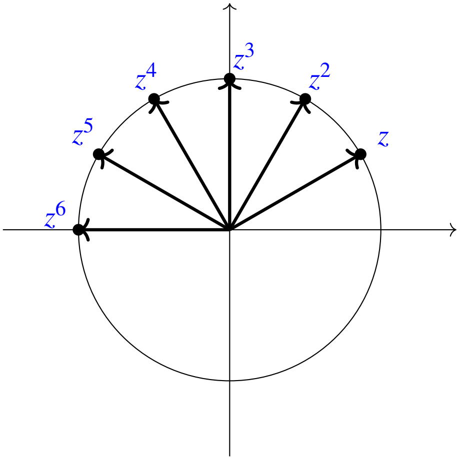
Egy $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex számmal való szorzás: nyújtva-forgatás

- $|w|$-szeres nyújtás
- $\arg(w)$ szöggel való forgatás.

Komplex számok hatványa

Példa

Legyen $z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$. Ekkor z hatványai:



- $z^2 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6)$
- $z^3 = \cos(3\pi/6) + i\sin(3\pi/6) = i$
- $z^4 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6)$
- $z^5 = \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)$
- $z^6 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1$
- $\ldots$
- $z^9 = \cos(9\pi/6) + i\sin(9\pi/6) = -i$
- $\ldots$
- $z^{12} = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6) = 1 = z^0$

Komplex számok hatványai, példa

Példa

Számoljuk ki $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8$ hatványt.

- Az alap trigonometrikus alakja: $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- Így a hatvány:
  $\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^8 = \cos\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$

De sok olyan z komplex szám van, melyre $z^8 = 1$:

- $1^8 = 1$, $(-1)^8 = 1$, $i^8 = 1$, $(-i)^8 = 1$
- $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1$, $\left((-1)\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1$
- Sőt $\left(\pm i\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1$

Gyökvonás

Legyen $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Ekkor

$$z = w \quad \Longleftrightarrow \quad |z| = |w| \text{ és } \varphi = \psi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Adott $w \in \mathbb{C}$ számra keressük a $z^n = w$ egyenlet megoldásait. Ekkor

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) = w$$

Így

$$|z| = |w|^{1/n} \quad \text{és} \quad n\varphi = \psi + 2k\pi \quad \left(\Longrightarrow \quad \varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)$$

Hány lényegesen különböző megoldás van:

$$\frac{\psi}{n},\ \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n},\ \frac{\psi}{n} + \frac{4\pi}{n},\ \ldots,\ \frac{\psi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

De $\sin\left(\frac{\psi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2n\pi}{n}\right)$ és $\cos\left(\frac{\psi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2n\pi}{n}\right)$,

így pontosan n különböző megoldás lesz: $\frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Komplex számok gyökei

Tétel (Biz.: ld. fönt)

Legyen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ trigonometrikus alakkal.
Ekkor a $z^n = w$, $z \in \mathbb{C}$ egyenlet megoldásai

$$z_k = |w|^{1/n}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k) : \quad \varphi_k = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Példa

- Mi lesz $z^2 = 1$ egyenlet megoldása (spoiler: ± 1).
  - $w = 1 = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)$.
  - $|z| = 1$
  - $z^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos 0 + i\sin 0 = 1$
  - $2\varphi = 0 + 2k\pi \implies \varphi = 0 + k\pi$ ($k = 0, 1$).
  - $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, \quad z_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

Lineáris transzformációk mátrixai – kiegészítő anyag

Lineáris transzformációk

- $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $\mathbf{0}$-t fixáló nyújtás, forgatás, tükrözés
- általában $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció, ha
  - $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$,
  - $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$, ($\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$)
  - $T(\lambda\mathbf{v})=\lambda T(\mathbf{v})$ ($\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$).

Tétel: (NB)
A T az $\mathbb{R}^n$ lineáris transzformációja $\iff$ $T(\mathbf{v})=M\mathbf{v}$ valamely $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra.

Konstrukció:
Legyenek $\mathbf{e}_i=(0,\dots,0,\underset{i.}{1},0,\dots,0)^T\in\mathbb{R}^n$ a sztenderd bázisvektorok.

Ekkor $M=(T(e_1),\dots,T(e_n))\in\mathbb{R}^{n\times n}$, u.i.

$$T(\mathbf{v})=T(v_1\mathbf{e}_1+\dots+v_n\mathbf{e}_n)=v_1T(\mathbf{e}_1)+\dots+v_nT(\mathbf{e}_n)=M\mathbf{v}.$$

Példa

- Mi lesz a $T : \mathbf{v} \mapsto 2\mathbf{v}$ ($T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) mátrixa?

  $$M = (T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2)) = \left(T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

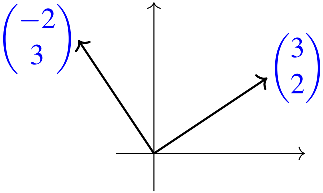
  Valóban: $M\mathbf{v} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{pmatrix}$

- Mi lesz $\mathbb{R}^2$-ben a $\frac{\pi}{2} (= 90^\circ)$ való forgatás mátrixa?

  $$M = (T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2)) = \left(T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Valóban:

  $$M\mathbf{v} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$



Lineáris transzformációk $\mathbb{C}$-n – kiegészítő anyag

Emlékeztető:
Legyen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ekkor a $z \mapsto w \cdot z$ egy nyújtva-forgatás (azaz lineáris transzformáció). Mi lesz ennek a mátrixa? ($\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}$, $z \leftrightarrow (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$)

Példa

- $T_i : z \mapsto i \cdot z$ transzformáció: $\pi/2$-vel való forgatás. Mátrixa: $T_i \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $T_2 : z \mapsto 2 \cdot z$ transzformáció: 2-vel való nyújtás. Mátrixa: $T_2 \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Általába:

- A $\mathbb{C}$ számsíkon a két bázisvektor: $1, i$.
- Legyen $w = a + bi$ és $T_w : z \mapsto w \cdot z$
- Ekkor $T_w(1) = w = a + bi$ és $T_w(i) = w \cdot i = -b + ai$.
- Így $T_w \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Komplex számok implementálása – kiegészítő anyag

Legyen $w = a + bi$ és $T_w : z \mapsto w \cdot z$

Ekkor $T_w \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(w) & -\mathrm{Im}(w) \\ \mathrm{Im}(w) & \mathrm{Re}(w) \end{pmatrix}$

Állítás (NB):
Legyen $v, w \in \mathbb{C}$. Ekkor

- $T_{v+w} \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(v+w) & -\mathrm{Im}(v+w) \\ \mathrm{Im}(v+w) & \mathrm{Re}(v+w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(v) & -\mathrm{Im}(v) \\ \mathrm{Im}(v) & \mathrm{Re}(v) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(w) & -\mathrm{Im}(w) \\ \mathrm{Im}(w) & \mathrm{Re}(w) \end{pmatrix}$
- $T_{v \cdot w} \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(v \cdot w) & -\mathrm{Im}(v \cdot w) \\ \mathrm{Im}(v \cdot w) & \mathrm{Re}(v \cdot w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(v) & -\mathrm{Im}(v) \\ \mathrm{Im}(v) & \mathrm{Re}(v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(w) & -\mathrm{Im}(w) \\ \mathrm{Im}(w) & \mathrm{Re}(w) \end{pmatrix}$

A $w \in \mathbb{C}$ számot megfeleltethetjük a $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(w) & -\mathrm{Im}(w) \\ \mathrm{Im}(w) & \mathrm{Re}(w) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixnak.

$\rightarrow$ komplex számok gyakori implementációja

Számfogalom bővítése

Természetes számok: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

- Nincs olyan $x \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $x + 2 = 1$.

Egész számok: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

- Kivonás elvégezhető.
- Egész számok: (a, b) rendezett párok ekvivalenciaosztályai, ahol $(a, b) \sim (c, d)$, ha $a + d = c + b$.
- Nincs olyan $x \in \mathbb{Z}$ egész szám, hogy $2 \cdot x = 1$.

Racionális számok: $\mathbb{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

- Az osztás elvégezhető.
- Racionális számok: (a, b) rendezett párok ekvivalenciaosztályai, ahol $(a, b) \sim (c, d)$, ha $a \cdot d = c \cdot b$.
- Nincs olyan $x \in \mathbb{Q}$ egész szám, hogy $x^2 = 2$.

Számfogalom bővítése

Valós számok: $\mathbb{R} = \{1, 2, \dots\}$

- Gyökvonás nem-negatív számból elvégezhető.
- Valós számok: Cauchy sorozatok ekvivalenciaosztályai.
- Nincs olyan $x \in \mathbb{R}$ egész szám, hogy $x^2 = -1$.

Komplex számok: $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

- Az $x^2 = -1$ egyenlet megoldható.

A komplex számoknál nem kell tovább menni:

Tétel (Algebra alaptétele, biz.: NB)

Adott $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $c_n \neq 0$, a

$$c_n z^n + \dots + c_1 z + c_0 = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

egyenlet mindig megoldható.