

# Numerikus módszerek 2.

11. előadás: Hilbert térbeli approximáció

Krebsz Anna

ELTE IK

- 1 Hilbert térbeli approximáció
- 2 Ortogonális polinomok
- 3 Klasszikus ortogonális polinomok

- 1 Hilbert térbeli approximáció
- 2 Ortogonális polinomok
- 3 Klasszikus ortogonális polinomok

## Definíció: Hilbert tér

A  $(H, \langle, \rangle)$  Hilbert tér, ha

- $H$  lineáris tér (vektortér)  $\mathbb{K}$  felett (most  $\mathbb{R}$  felett) és
- értelmezett egy skaláriszorzat a térben.
- A skaláris szorzatból természetes módon definiálható a tér normája:  $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ .
- Erre a normára nézve *teljes a tér*, ez azt jelenti, hogy minden  $H$ -beli Cauchy-sorozat konvergens.

## Megjegyzés:

- A Hilbert tér egy teljes euklideszi tér.
- Minden Hilbert térben érvényes a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség, a Bessel-egyenlőtlenség és Pitagorasz-tétele.

**Példák Hilbert térre:**

- $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$  Hilbert tér, ahol

$$f, g \in \mathbb{R}^n : \langle f, g \rangle := \sum_{i=1}^n f_i \cdot g_i.$$

- $(L_{2,w}[a; b], \langle, \rangle_w)$  Hilbert tér, ahol

$w : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w \geq 0$  súlyfüggvény, melyre  $\int_a^b w < \infty$ .

$L_{2,w}[a; b] := \{f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b f^2 w < \infty\}$  és

$$f, g \in L_{2,w}[a; b] : \langle f, g \rangle := \int_a^b fgw$$

## **Tétel:** Hilbert térbeli approximáció

Legyen  $H$  Hilbert tér,  $f \in H$  és  $H' \subset H$  zárt altér, ekkor

$$\exists! f' \in H' : \|f - f'\| = \inf\{\|f - h'\| : h' \in H'\}$$

és  $f - f' \perp H'$  (azaz  $\langle f - f', h' \rangle = 0 \ \forall h' \in H'$ ).

Nem biz.

## **Megjegyzés:**

- Minden véges dimenziós altér zárt.
- $M \subset H$ ,  $M \neq \emptyset$  altér, akkor

$$M^\perp := \{f \in H \mid f \perp g, \ \forall g \in M\}$$

az  $M$  ortogonális kiegészítő altere (zárt altér).

## **Tétel:** Átfogalmazás

Legyen  $H$  Hilbert tér,  $f \in H$  és  $H' \subset H$  zárt altér, ekkor

$$\exists! f' \in H' \text{ és } f'' \in (H')^\perp : f = f' + f''.$$

**Alkalmazás véges dimenziós altérre:** ( $n = \dim H' < \infty$ )

$$H' = \text{Span}(g_1, \dots, g_n)$$

Az altérbeli legjobban közelítő elemet  $f' = \sum_{i=1}^n c_i g_i$  alakban keressük.

$$f - f' \perp H' \quad \Leftrightarrow \quad f - f' \perp g_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

$j = 1, \dots, n$ -re:

$$\langle f - f', g_j \rangle = 0$$

$$\langle f', g_j \rangle = \langle f, g_j \rangle$$

$$\sum_{i=1}^n c_i \langle g_i, g_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i g_i, g_j \right\rangle = \langle f, g_j \rangle.$$

$n \times n$ -es Gram mátrixú LER-t kaptunk:  $Gc = b$ ,

ahol  $G = (\langle g_i, g_j \rangle)_{j,i=1}^n$ ,  $c = (c_i)_{i=1}^n$ ,  $b = (\langle f, g_j \rangle)_{j=1}^n$ .

## Állítás:

$g_1, \dots, g_n$  lineárisan független  $\Leftrightarrow G$  szimm. és poz. def.

Nem biz.

**Köv.:**  $\exists! c$ , melyre  $Gc = b$ .

**Állítás:** A legjobban közelítő elem távolsága

$$d^2 := \|f - f'\|^2 = \|f\|^2 - b^T c$$

**Biz.:**  $d^2 := \|f - f'\|^2 = \langle f - f', f - f' \rangle =$

$$= \langle f, f - f' \rangle - \underbrace{\langle f', f - f' \rangle}_{=0} = \|f\|^2 - \langle f, f' \rangle =$$
$$= \|f\|^2 - \left\langle f, \sum_{i=1}^n c_i g_i \right\rangle = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n c_i \underbrace{\langle f, g_i \rangle}_{=b_i} =$$
$$= \|f\|^2 - b^T c.$$



**Speciális esetek:**

- ① Ha  $g_1, \dots, g_n$  ortogonális rendszer (OGR), akkor

$$G = \text{diag}(\|g_1\|^2, \dots, \|g_n\|^2), \quad c_i = \frac{\langle f, g_i \rangle}{\langle g_i, g_i \rangle},$$

így a legjobban közelítő elem

$$f' = \sum_{i=1}^n \frac{\langle f, g_i \rangle}{\langle g_i, g_i \rangle} g_i.$$

- ② Ha  $g_1, \dots, g_n$  ortonormált rendszer (ONR), akkor  $G = I$ ,  
 $c_i = \langle f, g_i \rangle$ , így a legjobban közelítő elem

$$f' = \sum_{i=1}^n \langle f, g_i \rangle g_i.$$

Ortonormált rendszer esetén a távolság képlete:

$$d^2 = \|f - f'\|^2 = \|f\|^2 - b^T c = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle f, g_i \rangle^2 \geq 0.$$

Innen átrendezéssel kapható a Bessel-egyenlőtlenség:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{i=1}^n \langle f, g_i \rangle^2.$$

Alkalmazzuk az elméletet a legkisebb négyzetek módszerének feladatára:

$$H = \mathbb{R}^N, \quad f = (y_k)_{k=1}^N \in H, \quad H' = \text{Span}(g_0, \dots, g_n) \subset H,$$

$$\text{ahol } g_j := ((x_k)^j)_{k=1}^N = \begin{bmatrix} x_1^j & x_2^j & \dots & x_N^j \end{bmatrix}^T \in H \quad (j = 0, \dots, n).$$

Tehát a bázisunk

$$g_0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g_1 := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \dots, \quad g_n := \begin{bmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ \vdots \\ x_N^n \end{bmatrix}.$$

A  $Gc = b$  LER-beli skaláris szorzatok

$$\langle g_i, g_j \rangle = \sum_{k=1}^N (x_k)^{i+j}, \quad \langle f, g_i \rangle = \sum_{k=1}^N (x_k)^i y_k.$$

A LER alakja:

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \dots & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n y_i \end{bmatrix}.$$

Látjuk, hogy a Gauss-féle normálegyenleteket kaptuk, az approximációs feladat megoldása:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j.$$



- 1 Hilbert térbeli approximáció
- 2 Ortogonális polinomok**
- 3 Klasszikus ortogonális polinomok

Tekintsük az  $(L_{2,w}[a; b], \langle \cdot, \cdot \rangle_w)$  Hilbert teret.

## **Definíció:** Ortogonalis rendszer

A  $(p_0, p_1, \dots, p_n)$  rendszer ortogonalis, ha  $\langle p_i, p_j \rangle_w = 0$ ,  $i \neq j$ .

Induljunk ki az  $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ , pontosabban az  $(1, id, id^2, \dots, id^n)$  hatványfüggvény rendszerből és állítsuk elő Gram–Schmidt-ortogonalizációval az 1 főegyütthatós  $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n$  ortogonalis polinomokat.

$$\tilde{p}_0(x) \equiv 1$$

$$\tilde{p}_k(x) = x^k - \sum_{j=0}^{k-1} c_j^{(k)} \tilde{p}_j(x), \quad \text{ahol} \quad c_j^{(k)} = \frac{\langle id^k, \tilde{p}_j \rangle_w}{\langle \tilde{p}_j, \tilde{p}_j \rangle_w}.$$

## Példa: ortogonalis polinomra

Állítsuk elő az  $(1, x, x^2, x^3)$ , pontosabban az  $(1, id, id^2, id^3)$  hatványfüggvény rendszerből kiindulva a  $[-1; 1]$  intervallumhoz és a  $w(x) \equiv 1$  súlyfüggvényhez tartozó  $p_0, p_1, p_2, p_3$  ortogonalis polinomrendszert Gram–Schmidt-ortogonalizációval!

## Megoldás:

$$p_0(x) \equiv 1$$

$$p_1(x) = x - c_0^{(1)} p_0(x) = x$$

$$c_0^{(1)} = \frac{\langle id, p_0 \rangle}{\langle p_0, p_0 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x \cdot 1 \, dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dx} = \frac{0}{2} = 0$$

$$p_2(x) = x^2 - c_0^{(2)} p_0(x) - c_1^{(2)} p_1(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$c_0^{(2)} = \frac{\langle id^2, p_0 \rangle}{\langle p_0, p_0 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 \, dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dx} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$c_1^{(2)} = \frac{\langle id^2, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot x \, dx}{\int_{-1}^1 x \cdot x \, dx} = \frac{0}{\frac{2}{3}} = 0.$$

$$p_3(x) = x^3 - c_0^{(3)} p_0(x) - c_1^{(3)} p_1(x) - c_2^{(3)} p_2(x) = x^3 - \frac{3}{5} x$$

$$c_0^{(3)} = \frac{\langle id^3, p_0 \rangle}{\langle p_0, p_0 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot 1 \, dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dx} = 0$$

$$c_1^{(3)} = \frac{\langle id^3, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot x \, dx}{\int_{-1}^1 x \cdot x \, dx} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$c_2^{(3)} = \frac{\langle id^3, p_2 \rangle}{\langle p_2, p_2 \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot (x^2 - \frac{1}{3}) \, dx}{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3}) \cdot (x^2 - \frac{1}{3}) \, dx} = 0$$

**Keressük a következő approximációs feladat megoldását:**

$H := L_{2,w}[a; b]$ ,  $f := \tilde{p}_n \in H$ ,  $H' = \text{Span}(\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{n-1})$  és keressük az altérbeli legjobb közelítést illetve a legkisebb távolságot.

**Tétel:** Az ortogonalis polinomok approximációs tulajdonsága

$$\min_{\tilde{p} \in P_n^{(1)}} \|\tilde{p}\|_w^2 = \min_{\tilde{p} \in P_n^{(1)}} \left( \int_a^b \tilde{p}^2 w \right) = \|\tilde{p}_n\|_w^2$$

**Biz.:** Mivel  $f = \tilde{p}_n$ , így az approximációs tételből következik, hogy  $f' \equiv 0$ .

$$f - f' = \tilde{p}_n - 0 = \tilde{p}_n \perp H'.$$



## Tétel: Az ortogonalis polinomok rekurziója

A  $(\tilde{p}_n)_{n=0}^{\infty}$  1 főegyütthatós polinomrendszerre a következő rekurzió teljesül:

$$\tilde{p}_{-1}(x) \equiv 0, \quad \tilde{p}_0(x) \equiv 1$$

$$\tilde{p}_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1}) \cdot \tilde{p}_n(x) - \beta_n \cdot \tilde{p}_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\text{ahol } \alpha_{n+1} = \frac{\langle id \cdot \tilde{p}_n, \tilde{p}_n \rangle_w}{\|\tilde{p}_n\|_w^2}, \quad \beta_n = \frac{\|\tilde{p}_n\|_w^2}{\|\tilde{p}_{n-1}\|_w^2} > 0, \quad id(x) \equiv x.$$

**Biz.:** Az egyszerűbb jelölés kedvéért a továbbiakban nem írjuk ki a súlyfüggvényt. Mivel  $\tilde{p}_{n+1} - id \cdot \tilde{p}_n \in P_n$ , ezért

$$\tilde{p}_{n+1}(x) = x \cdot \tilde{p}_n(x) - \sum_{k=0}^n c_k \tilde{p}_k(x).$$

Szorozzuk mindkét oldalt jobbról skalárisan  $\tilde{p}_j$ -vel ( $j = 0, \dots, n$ ) és használjuk ki a polinomok ortogonalitását.

$$0 = \langle \tilde{p}_{n+1}, \tilde{p}_j \rangle = \langle id \cdot \tilde{p}_n, \tilde{p}_j \rangle - \sum_{k=0}^n c_k \underbrace{\langle \tilde{p}_k, \tilde{p}_j \rangle}_{=0 \text{ } k \neq j} = \langle id \cdot \tilde{p}_n, \tilde{p}_j \rangle - c_j \langle \tilde{p}_j, \tilde{p}_j \rangle$$

$$\Rightarrow c_j = \frac{\langle id \cdot \tilde{p}_n, \tilde{p}_j \rangle}{\|\tilde{p}_j\|^2} \quad (j = 0, \dots, n)$$

**Biz. folyt.:**

Mivel  $\langle id \cdot \tilde{p}_n, \tilde{p}_j \rangle = \langle \tilde{p}_n, id \cdot \tilde{p}_j \rangle$  és  $id \cdot \tilde{p}_j \in P_{j+1}$ , ezért

$$\langle \tilde{p}_n, id \cdot \tilde{p}_j \rangle = 0 \quad (j = 0, \dots, n-2).$$

Így csak két nem nulla együtthatónk maradt

$$\alpha_{n+1} := c_n = \frac{\langle \tilde{p}_n, id \cdot \tilde{p}_n \rangle}{\|\tilde{p}_n\|^2} \quad \text{és} \quad \beta_n := c_{n-1} = \frac{\langle \tilde{p}_n, id \cdot \tilde{p}_{n-1} \rangle}{\|\tilde{p}_{n-1}\|^2}.$$

A  $\beta_n$ -beli számlálót egyszerűbb alakra hozhatjuk.

Mivel  $id \cdot \tilde{p}_{n-1} \in P_n^{(1)}$ , ezért a következő alakban írjuk fel

$$id \cdot \tilde{p}_{n-1} = \tilde{p}_n + \sum_{k=0}^{n-1} d_k \tilde{p}_k.$$

**Biz. folyt.:** Behelyettesítve és felhasználva a polinomok ortogonalitását

$$\begin{aligned}\langle \tilde{p}_n, id \cdot \tilde{p}_{n-1} \rangle &= \langle \tilde{p}_n, \tilde{p}_n + \sum_{k=0}^{n-1} d_k \tilde{p}_k \rangle = \langle \tilde{p}_n, \tilde{p}_n \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} d_k \underbrace{\langle \tilde{p}_n, \tilde{p}_k \rangle}_{=0} = \\ &= \langle \tilde{p}_n, \tilde{p}_n \rangle = \|\tilde{p}_n\|^2.\end{aligned}$$

Tehát  $\beta_n$ -re az egyszerűbb képlet, ami a pozitivitást is garantálja

$$\beta_n = \frac{\|\tilde{p}_n\|^2}{\|\tilde{p}_{n-1}\|^2} > 0.$$



## Tétel: Az ortogonalis polinomok gyökei

- 1  $n \geq 1$  esetén a  $\tilde{p}_n$  ortogonalis polinomnak  $n$  db valós különböző gyöke van  $[a; b]$ -n.
- 2  $\tilde{p}_{n-1}$  és  $\tilde{p}_n$  gyökei váltakozva helyezkednek el.

## Tétel biz.:

- 1 Tegyük fel, hogy a  $\tilde{p}_n$  ortogonalis polinomnak  $k$  db olyan valós gyöke van  $[a; b]$ -n, ahol előjelet vált. Indirekt módon tegyük fel, hogy  $k < n$  és jelöljük  $x_1, \dots, x_k$  -val ezeket a gyököket.

$$q(x) := (x - x_1) \dots (x - x_k) \in P_k$$

**Biz.:**

1. Ekkor  $q \cdot \tilde{p}_n$  nem vált előjelet  $[a; b]$ -n, másrészt  $\tilde{p}_n$  ortogonalis  $P_{n-1}$ -re, így  $q$ -ra is.

$$0 < \int_a^b q \tilde{p}_n w = \langle q, \tilde{p}_n \rangle_w = 0.$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk.

2. Csak  $\tilde{p}_1$  és  $\tilde{p}_2$  gyökeire mutatjuk meg a váltakozást, a többire indukcióval hasonlóan bizonyíthatjuk. A rekurzióból

$$\tilde{p}_2(x) = (x - \alpha_2)\tilde{p}_1(x) - \underbrace{\beta_1 \tilde{p}_0(x)}_{=1}.$$

Legyen  $x_1$  gyöke  $\tilde{p}_1$ -nek, ekkor  $\tilde{p}_2(x_1) = -\beta_1 < 0$ . De

$$\lim_{-\infty} \tilde{p}_2 = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{+\infty} \tilde{p}_2 = +\infty,$$

tehát  $\tilde{p}_2$ -nek két gyöke van, egyik  $(-\infty; x_1)$ -en, a másik  $(x_1; +\infty)$ -en.



- 1 Hilbert térbeli approximáció
- 2 Ortogonális polinomok
- 3 Klasszikus ortogonális polinomok

## Legendre polinom

$$[-1; 1], w(x) \equiv 1,$$

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x,$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x \cdot P_n(x) - \frac{n}{n+1} \cdot P_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

## Csebisev I.fajú polinom

$$[-1; 1], w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad (x \in [-1; 1])$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

## Csebisev II.fajú polinom

$$[-1; 1], w(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos(x))}{\sin(\arccos(x))} \quad (x \in [-1; 1])$$

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x,$$

$$U_{n+1}(x) = 2x \cdot U_n(x) - U_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

## Hermite polinom

$$(-\infty, +\infty), w(x) = e^{-x^2},$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x,$$

$$H_{n+1}(x) = 2x \cdot H_n(x) - 2n \cdot H_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

## Laguerre polinom

$$(0, +\infty), w(x) = e^{-x},$$

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x - 1,$$

$$P_{n+1}(x) = (x - (2n + 1)) \cdot P_n(x) - n^2 \cdot P_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

**Köszönöm a figyelmet!**