

Diszkrét matematika I. feladatok

Logika

Első alkalom (2024.02.10-14.)

Bemelegítő feladatok

1. Pozitív egészeket tekintve, jelölje $P(x)$, $E(x)$, $O(x)$, illetve $D(x, y)$ rendre azt, hogy x prím, páros, páratlan, illetve hogy x osztója y -nak. Fordítsuk le magyar nyelvre az alábbi formulákat. Állapítsuk meg, hogy igaz-e az állítás. Tagadjuk a formulákat formálisan. Tagadjuk a formulákat köznyelviileg. Állapítsuk meg, hogy igaz-e az állítás tagadása.
 - a) $P(7)$; **Megoldás:** "A 7 egy prímszám." IGAZ. (Tagadása: $\neg P(7)$, "Nem igaz, hogy a 7 prímszám." Vagyis: "A 7 nem prímszám." HAMIS.)
 - b) $(E(2) \wedge P(2))$; **Megoldás:** "A 2 páros szám és prímszám is." Vagyis: "A 2 egy páros prímszám." IGAZ. (Tagadása: $\neg(E(2) \wedge P(2)) \Leftrightarrow \neg E(2) \vee \neg P(2)$, "Nem igaz, hogy a 2 egy páros pramszám." Vagyis: "A 2 nem páros szám, vagy nem prímszám." HAMIS.)
 - c) $(\forall x(D(2, x) \Rightarrow E(x)))$; **Megoldás:** "Minden x pozitív egész számra teljesül: Ha 2 osztja x -et, akkor x páros." IGAZ. (Tagadása: $\neg(\forall x(D(2, x) \Rightarrow E(x))) \Leftrightarrow \neg(\forall x(\neg D(2, x) \vee E(x))) \Leftrightarrow \exists x(D(2, x) \wedge \neg E(x))$ "Van olyan x pozitív egész szám, aminek 2 az osztója és x mégsem páros." HAMIS.)
 - d) $(\exists x(E(x) \wedge D(x, 6)))$; **Megoldás:** "Van olyan x pozitív egész, ami páros és osztója 6-nak." Vagyis: "A 6-nak van páros osztója (a pozitív egészek körében)." IGAZ: $x = 2$ teljesíti. (Tagadása: $\neg(\exists x(E(x) \wedge D(x, 6))) \Leftrightarrow (\forall x(\neg E(x) \vee \neg D(x, 6)))$ "A 6-nak nincs páros osztója a pozitív egészek körében." Vagyis: "Minden pozitív egész x páratlan vagy nem osztója 6-nak." HAMIS)
 - e) $(\forall x(\neg E(x) \Rightarrow \neg D(2, x)))$; **Megoldás:** "Minden pozitív egész x -re igaz, hogy abból, hogy x nem páros (páratlan), abból következik, hogy 2 nem osztója x -nek." Vagyis: "A páratlan számok nem oszthatók kettővel." IGAZ (Tagadása: $\neg(\forall x(\neg E(x) \Rightarrow \neg D(2, x))) \Leftrightarrow \neg(\forall x(E(x) \vee \neg D(2, x))) \Leftrightarrow (\exists x(\neg E(x) \wedge D(2, x)))$ "Van olyan pozitív egész x , ami nem páros (páratlan) és 2 osztója x -nek." Vagyis: "Van olyan páratlan pozitív egész, aminek a 2 osztója." HAMIS)
 - f) $(\forall x(E(x) \Rightarrow (\forall y(D(x, y) \Rightarrow E(y))))$; **Megoldás:** "Minden x pozitív egész számra, ha x páros, akkor minden y pozitív egészre teljesül, abból, hogy x osztja y -t, abból következik, hogy y is páros." Röviden: "Minden páros szám minden többszöröse maga is páros." IGAZ (Tagadása: $\neg(\forall x(E(x) \Rightarrow (\forall y(D(x, y) \Rightarrow E(y)))) \Leftrightarrow \neg(\forall x(\neg E(x) \vee (\forall y(\neg D(x, y) \vee E(y)))) \Leftrightarrow (\exists x \neg(\neg E(x) \vee (\forall y(\neg D(x, y) \vee E(y)))) \Leftrightarrow (\exists x(E(x) \wedge \neg(\forall y(\neg D(x, y) \vee E(y)))) \Leftrightarrow (\exists x(E(x) \wedge (\exists y(D(x, y) \wedge \neg E(y)))) \Leftrightarrow (\exists x \exists y(E(x) \wedge D(x, y) \wedge \neg E(y)))$, vagyis: "Van olyan x páros és olyan y páratlan pozitív egész, hogy a páros x osztója a páratlan y -nak." HAMIS)
 - g) $(\forall x(P(x) \Rightarrow (\exists y(E(y) \wedge D(x, y))))$; **Megoldás:** "Minden pozitív egész x -re, ha x prím, akkor létezik olyan pozitív egész y , ami páros és x osztja y -t." Röviden: "Minden pozitív prímszámnak létezik páros többszöröse." IGAZ, pl. $y = 2x$ (Tagadása: $\neg(\forall x(\neg P(x) \vee (\exists y(E(y) \wedge D(x, y)))) \Leftrightarrow (\exists x(P(x) \wedge \neg(\exists y(E(y) \wedge D(x, y)))) \Leftrightarrow (\exists x(P(x) \wedge (\forall y \neg(E(y) \wedge D(x, y)))) \Leftrightarrow (\exists x(P(x) \wedge (\forall y(\neg E(y) \vee \neg D(x, y)))) \Leftrightarrow (\exists x(P(x) \wedge (\forall y(E(y) \Rightarrow \neg D(x, y))))$, azaz "Létezik olyan pozitív egész x , hogy x prímszám, és minden páros y -ra y nem többszöröse x -nek."

vagyis: "Van olyan x prím, aminek semelyik páros y sem többszöröse." HAMIS)

h) $(\forall x(O(x) \Rightarrow (\forall y(P(y) \Rightarrow \neg D(x, y))))$; **Megoldás:** "Minden pozitív egész x számra abból, hogy x páratlan, következik, hogy minden y pozitív egészre abból, hogy y prímszám, következik, hogy x nem osztja y -t." Vagyis: "Minden páratlan x számra igaz, hogy minden y prímszámra x nem osztója y -nak." — egy kicsit természetesebb megfogalmazáshoz az eredeti logikai formulát célszerűbb formálisan átfogalmazni: $(\forall x(O(x) \Rightarrow (\forall y(P(y) \Rightarrow \neg D(x, y)))) \Leftrightarrow (\forall x(\neg O(x) \vee (\forall y(\neg P(y) \vee \neg D(x, y)))) \Leftrightarrow (\forall x \forall y((\neg O(x) \vee \neg P(y)) \vee \neg D(x, y))) \Leftrightarrow (\forall x \forall y(\neg(O(x) \wedge P(y)) \vee \neg D(x, y))) \Leftrightarrow (\forall x \forall y((O(x) \wedge P(y)) \Rightarrow \neg D(x, y)))$, azaz: "Minden x és minden y pozitív egész számra abból, hogy x páratlan és y prímszám, abból következik, hogy x nem osztja y -t." Erre ellenpélda $x = 1$ és $y = 3$, vagy akár $x = y = 5$ is, ezért HAMIS. (Tagadása: $\neg(\forall x(O(x) \Rightarrow (\forall y(P(y) \Rightarrow \neg D(x, y)))) \Leftrightarrow \neg(\forall x \forall y(\neg(O(x) \wedge P(y)) \vee \neg D(x, y))) \Leftrightarrow (\exists x \exists y \neg(\neg(O(x) \wedge P(y)) \vee \neg D(x, y))) \Leftrightarrow (\exists x \exists y((O(x) \wedge P(y)) \wedge D(x, y)))$, azaz: "Van olyan x és y pozitív egészek, hogy x páratlan, y prím, és x osztója y -nak." IGAZ)

i) $((\exists x(E(x) \wedge P(x))) \wedge (\neg(\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge (\exists y(\neg x = y \wedge E(y) \wedge P(y)))))$). **Megoldás:** Először kicsit írjuk át: $\Leftrightarrow ((\exists x(E(x) \wedge P(x))) \wedge (\neg(\exists x \exists y((E(x) \wedge P(x)) \wedge (\neg x = y) \wedge (E(y) \wedge P(y))))) \Leftrightarrow ((\exists x(E(x) \wedge P(x))) \wedge (\neg(\exists x \exists y(\neg x = y) \wedge ((E(x) \wedge P(x)) \wedge (E(y) \wedge P(y)))))$ "Létezik olyan x pozitív egész szám, ami páros és prím is, de nem igaz az, hogy létezik két különböző x és y pozitív egész szám, hogy mindkettő páros prímszám lenne." IGAZ a pozitív egészek körében kizárólag csak az $x = 2$ az egyedüli páros prímszám, nincs másik. (Ha nem a pozitív egészek lenne az alaphalmaz, akkor $x = 2$ és $y = -2$ két különböző páros prímszám lenne.) Ennek a rövidítése az "egyértelműen létezik" kvantor: $\exists! x(E(x) \wedge P(x))$, azaz: "Pontosan egy olyan pozitív egész x szám létezik, ami páros is és prím is." (Tagadása: $\neg((\exists x(E(x) \wedge P(x))) \wedge (\neg(\exists x \exists y(\neg x = y) \wedge ((E(x) \wedge P(x)) \wedge (E(y) \wedge P(y))))) \Leftrightarrow (\neg(\exists x(E(x) \wedge P(x))) \vee (\exists x \exists y(\neg x = y) \wedge ((E(x) \wedge P(x)) \wedge (E(y) \wedge P(y)))))$, itt érdemes megállni: "vagy nem létezik páratlan prím a pozitív egészek körében, vagy két különböző páratlan prím is létezik a pozitív egészek körében." HAMIS)

Gyakorló feladatok

2. Az embereket tekintve, jelölje $J(x)$, $B(x)$, $U(x)$, $I(x)$, $E(x)$, $P(x)$, $K(x)$, $N(x)$, $H(x, y)$, illetve $T(x, y)$ rendre azt, hogy x jogász, bíró, ügyeskedő, idős, életerős, politikus, képviselő, nő, illetve hogy x házastársa y -nak, valamint hogy x tiszteli y -t. Formalizáljuk az alábbi állításokat:

(A "néhány" szót mindn esetben a "legalább egy" értelemben használjuk. Ha "legalább kettő" lenne a jelentése, akkor a $\exists x$ helyett $\exists x \exists y(\neg x = y)$ szerepelne. Hasonlóan a "bizonyos valakik"/"vannak olyanok" többes számai se feltétlenül jelentsenek többes számot.)

a) minden bíró jogász; **Megoldás:** $\forall x(B(x) \Rightarrow J(x))$

b) vannak ügyeskedő jogászok; **Megoldás:** $\exists x(J(x) \wedge U(x))$

c) nincs ügyeskedő bíró;

Megoldás: $\neg(\exists x(B(x) \wedge U(x))) \Leftrightarrow (\forall x(\neg B(x) \vee \neg U(x))) \Leftrightarrow (\forall x(B(x) \Rightarrow \neg U(x)))$

d) bizonyos bírók idősek, de életerősek; **Megoldás:** $\exists x(B(x) \wedge E(x))$

e) d bíró sem nem idős, sem nem életerős; **Megoldás:** $B(d) \wedge \neg I(d) \wedge \neg E(d)$

f) a bírók kivételével minden jogász ügyeskedő; **Megoldás:** Ha úgy értjük, hogy a bírók esetleg lehetnek ügyeskedők is: $\forall x(J(x) \Rightarrow (\neg B(x) \Rightarrow U(x))) \Leftrightarrow \forall x((J(x) \wedge \neg B(x)) \Rightarrow U(x))$

Másik értelmű megoldás: Érthetjük úgy is a magyar szöveget, hogy implicite azt is állítja: a bírók pedig semmiképpen sem ügyeskedők, csak az összes többi jogász. Ekkor a kizáró vagy kapcsolat lesz a megoldás: "Minden jogász vagy bíró, vagy ügyeskedő, de nem egyszerre a kettő." Azaz: $\forall x(J(x) \Rightarrow (B(x) \oplus U(x)))$

g) néhány jogász, aki politikus, képviselő is; **Megoldás:** $\exists x(J(x) \wedge P(x) \wedge K(x))$

h) egyetlen képviselő felesége sem idős;

Megoldás: $\forall x \forall y(K(x) \wedge H(x, y) \Rightarrow \neg I(y)) \Leftrightarrow \neg(\exists x \exists y(K(x) \wedge H(x, y) \wedge I(y)))$

i) minden idős képviselő jogász; **Megoldás:** $\forall x((I(x) \wedge K(x)) \Rightarrow J(x))$

j) van olyan nő, aki jogász és képviselő; **Megoldás:** $\exists x(N(x) \wedge J(x) \wedge K(x))$

k) minden olyan nő, aki jogász, tisztel néhány bírót; **Megoldás:**

$\forall x((N(x) \wedge J(x)) \Rightarrow \exists y(B(y) \wedge T(x, y))) \Leftrightarrow \forall x \exists y((N(x) \wedge J(x)) \Rightarrow (B(y) \wedge T(x, y)))$

Ha viszont az lenne, hogy "néhány bírót minden olyan nő, aki jogász, tisztel" az más lenne: $\exists y(B(y) \wedge \forall x((N(x) \wedge J(x)) \Rightarrow T(x, y))) \Leftrightarrow \exists y \forall x(B(y) \wedge ((N(x) \wedge J(x)) \Rightarrow T(x, y)))$

l) bizonyos jogászok csak bírót tisztelnek; **Megoldás:** $\exists x(J(x) \wedge (\forall y(T(x, y) \Rightarrow B(y))))$

m) van olyan bíró, aki tisztel néhány nőt; **Megoldás:** $\exists x(B(x) \wedge \exists y(N(y) \wedge T(x, y)))$

n) bizonyos ügyeskedők egyetlen jogászt sem tisztelnek;

Megoldás: $\exists x(U(x) \wedge (\forall y(J(y) \Rightarrow \neg T(x, y))))$

o) d bíró egyetlen ügyeskedőt sem tisztel; **Megoldás:** $B(d) \wedge (\forall x(U(x) \Rightarrow \neg T(d, x)))$

p) vannak jogászok és ügyeskedők is, akik tisztelik d bírót;

Megoldás: $\exists x \exists y(J(x) \wedge U(y) \wedge T(x, d) \wedge T(y, d))$.

Itt most semmi sem zárja ki, hogy a d bírót tisztelő jogász és ügyeskedő ugyanaz a személy legyen. Ha ezt is beleértjük abba megfogalmazásba, hogy "és ügyeskedők is" — akkor: $\exists x \exists y(\neg x = y \wedge J(x) \wedge U(y) \wedge T(x, d) \wedge T(y, d))$.

q) csak bírók tisztelnek bírót; **Megoldás:** $\forall x \forall y((T(x, y) \wedge B(y)) \Rightarrow B(x))$

r) minden bíró csak bírót tisztel; **Megoldás:** $\forall x \forall y((B(x) \wedge T(x, y)) \Rightarrow B(y))$

s) minden nős képviselő életerős; **Megoldás:** $\forall x((K(x) \wedge (\exists y(N(y) \wedge H(x, y)))) \Rightarrow E(x))$

t) azok a jogászok, akiknek életerős feleségük van, mind képviselők.

Megoldás: $\forall x((J(x) \wedge (\exists y(H(x, y) \wedge N(y) \wedge E(y)))) \Rightarrow K(x))$

3. Az embereket tekintve, jelölje $N(x)$ illetve $G(x, y)$ azt, hogy x nő illetve x gyereke y -nak. Definiáljuk formulával az alábbi kapcsolatokat: x az y -nak fia, lánya, szülője, apja, anyja, unokája, nagyszülője, nagyapja, nagyanyja, apai nagyapja, anyai nagyapja, apai nagyanyja, anyai nagyanyja, testvére, fivére, nővére, féltestvére, unokatestvére, nagybátyja, nagynénje, unokaöccse, unokahúga.

Megoldás:

x az y -nak fia: $\neg N(x) \wedge G(x, y)$

x az y -nak lánya: $N(x) \wedge G(x, y)$
 x az y -nak szülője: $G(y, x)$
 x az y -nak apja: $G(y, x) \wedge \neg N(x)$
 x az y -nak anyja: $G(y, x) \wedge N(x)$
 x az y -nak unokája: $\exists z(G(x, z) \wedge G(z, y))$
 x az y -nak nagyszülője: $\exists z(G(y, z) \wedge G(z, x))$
 x az y -nak nagyapja: $\exists z(G(y, z) \wedge G(z, x) \wedge \neg N(x))$
 x az y -nak nagyanyja: $\exists z(G(y, z) \wedge G(z, x) \wedge N(x))$
 x az y -nak apai nagyapja: $\exists z(\neg N(z) \wedge G(y, z) \wedge G(z, x) \wedge \neg N(x))$
 x az y -nak anyai nagyapja: $\exists z(N(z) \wedge G(y, z) \wedge G(z, x) \wedge \neg N(x))$
 x az y -nak apai nagyanyja: $\exists z(\neg N(z) \wedge G(y, z) \wedge G(z, x) \wedge N(x))$
 x az y -nak anyai nagyanyja: $\exists z(N(z) \wedge G(y, z) \wedge G(z, x) \wedge N(x))$
 x az y -nak testvére: $(\neg x = y) \wedge (\exists z \exists w((\neg z = w) \wedge G(x, w) \wedge G(x, z) \wedge G(y, w) \wedge G(y, z)))$
(nem csak féltestvére, és nem is saját maga)
 x az y -nak fivére: $(\neg x = y) \wedge (\exists z \exists w((\neg z = w) \wedge G(x, w) \wedge G(x, z) \wedge G(y, w) \wedge G(y, z))) \wedge \neg N(x)$
 x az y -nak nővére: $(\neg x = y) \wedge (\exists z \exists w((\neg z = w) \wedge G(x, w) \wedge G(x, z) \wedge G(y, w) \wedge G(y, z))) \wedge N(x)$
 x az y -nak féltestvére: $(\neg x = y) \wedge (\exists z(G(x, z) \wedge G(y, z)))$
 x az y -nak unokatestvére: $\exists u \exists v \exists z((\neg u = v) \wedge G(u, z) \wedge G(v, z) \wedge G(x, u) \wedge G(y, v))$
(Itt feltételezzük, hogy z két gyerekének nincs közös gyereke, ami lehetséges, de törvénytelen.
Ha ezt külön ki kellene zárni, akkor még bele kellene írni, hogy x nem gyereke v -nek, és y nem gyereke u -nak.)
 x az y -nak nagybátyja (azaz van egy z testvére x -nek, akinek y a gyereke, és x nem nő):
 $\neg N(x) \wedge (\exists z((\neg x = z) \wedge (\exists u \exists v((\neg u = v) \wedge G(x, u) \wedge G(x, v) \wedge G(z, u) \wedge G(z, v))) \wedge G(y, z)))$
 x az y -nak nagynénje:
 $N(x) \wedge (\exists z((\neg x = z) \wedge (\exists u \exists v((\neg u = v) \wedge G(x, u) \wedge G(x, v) \wedge G(z, u) \wedge G(z, v))) \wedge G(y, z)))$
 x az y -nak unokaöccse (azaz van egy z testvére y -nak, akinek x a gyereke, és x nem nő):
 $\neg N(x) \wedge (\exists z((\neg y = z) \wedge (\exists u \exists v((\neg u = v) \wedge G(y, u) \wedge G(y, v) \wedge G(z, u) \wedge G(z, v))) \wedge G(x, z)))$
 x az y -nak unokahúga:
 $N(x) \wedge (\exists z((\neg y = z) \wedge (\exists u \exists v((\neg u = v) \wedge G(y, u) \wedge G(y, v) \wedge G(z, u) \wedge G(z, v))) \wedge G(x, z)))$

Érdekes feladatok

4. Egy táncmulatságon fiúk és lányok táncolnak. Jelölje $T(L, F)$, hogy az L lány táncolt az F fiúval. Mit jelentenek az alábbi formulák? Döntsük el, hogy melyik következik a másiktól. (Egy formulából következik egy másik formula, ha valahányszor az egyik igaz, a másik is.) Melyik a legerősebb, ill. leggyengébb állítás?

$$\begin{array}{lll}
 \exists L \forall F T(L, F), & \forall F \exists L T(L, F), & \exists F \forall L T(L, F), \\
 \text{a)} & \forall L \exists F T(L, F), & \forall L \forall F T(L, F), & \exists L \exists F T(L, F);
 \end{array}$$

$$\text{b)} \quad \neg \exists L \exists F T(L, F), \quad \forall F \exists L \neg T(L, F), \quad \forall L \exists F \neg T(L, F), \quad \forall L \forall F \neg T(L, F)$$

5. Legyenek A, B, C predikátumok. Igazolja a következő állítások igazak:

a) $A \wedge A \Leftrightarrow A$ és $A \vee A \Leftrightarrow A$

Megoldás: Ha az A IGAZ, akkor $A \wedge A$ is IGAZ és $A \vee A$ is IGAZ. Ha pedig az A HAMIS, akkor $A \wedge A$ is HAMIS és $A \vee A$ is HAMIS.

b) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ és $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$

Megoldás: Nyolc lehetőségünk van (A, B, C) állítások igazságértékére: (I, I, I) , (I, I, H) , (I, H, I) , (H, I, I) , (H, H, I) , (H, I, H) , (I, H, H) , (H, H, H) . Ezt a nyolc lehetőséget kell megnézni, hogy melyik esetben milyen igazságértéket vesz fel $A \wedge (B \wedge C)$ és milyen igazságértéket $(A \wedge B) \wedge C$, és mindkettő csak (I, I, I) esetben lesz igaz, a többi esetben mindkettő hamis. Hasonlóan $A \vee (B \vee C)$ is, és $(A \vee B) \vee C$ is csak (H, H, H) esetben hamis, a többi hét esetben mindkettő igaz.

c) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ és $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Megoldás: Az előző részfeladathoz hasonlóan a nyolc lehetőséget kell végigvizsgálni.

d) $A \oplus B \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

Megoldás: Itt négy lehetőséget kell csak végigvizsgálni.

Beadandó házi feladatok

6. Jelölje $P(p)$, hogy a p egy pont, $L(\ell)$, hogy az ℓ egy egyenes, $I(p, \ell)$, hogy a p pont rajta van az ℓ egyenesen. Mit jelentenek az alábbi formulák? Döntse el a formulák igazságértékét! Írja le a formulák tagadását! **(részenként 1/3 pont)**

a) $\forall \ell \exists p I(p, \ell)$

b) $\exists \ell \forall p I(p, \ell)$

c) $\forall p_1 \forall p_2 \exists \ell I(p_1, \ell) \wedge I(p_2, \ell)$

d) $\forall \ell_1 \forall \ell_2 \exists p I(p, \ell_1) \wedge I(p, \ell_2)$

e) $\forall \ell \exists p \neg I(p, \ell)$

f) $\forall \ell \forall p (\neg I(p, \ell) \Rightarrow \exists \ell' I(p, \ell') \wedge (\forall p' I(p', \ell) \Rightarrow \neg I(p', \ell')))$

Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat).

7. A ?? feladat jelöléseivel formalizálja az alábbi állításokat! **(részenként 1/3 pont)**

a) vannak idős képviselők;

b) minden életerős politikus házasságban;

c) vannak idős politikusok;

d) bizonyos férfiak, akik bírók, életerősek is;

e) minden ügyeskedő bírósági elnök házasságban;

f) vannak olyan idős bírók, akiknek politikus férjük van.

Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat).

További feladatok otthoni gyakorlásra

8. Az embereket tekintve, jelölje $N(x)$ illetve $G(x, y)$ azt, hogy x nő illetve x gyereke y -nak. Definiáljuk formulával az alábbi kapcsolatokat: x az y -nak fia, lánya, szülője, apja, anyja, unokája, nagyszülője, nagyapja, nagyanyja, apai nagyapja, anyai nagyapja, apai nagyanyja, anyai nagyanyja, testvére, fivére, nővére, féltestvére, unokatestvére, nagybátyja, nagynénje, unokaöccse, unokahúga.

Megoldás:

x az y -nak fia: $\neg N(x) \wedge G(x, y)$

x az y -nak lánya: $N(x) \wedge G(x, y)$

x az y -nak szülője: $G(y, x)$

x az y -nak apja: $G(y, x) \wedge \neg N(x)$

x az y -nak anyja: $G(y, x) \wedge N(x)$

x az y -nak unokája: $\exists z(G(x, z) \wedge G(z, y))$

x az y -nak nagyszülője: $\exists z(G(y, z) \wedge G(z, x))$

x az y -nak nagyapja: $\exists z(G(y, z) \wedge G(z, x) \wedge \neg N(x))$

x az y -nak nagyanyja: $\exists z(G(y, z) \wedge G(z, x) \wedge N(x))$

x az y -nak apai nagyapja: $\exists z(\neg N(z) \wedge G(y, z) \wedge G(z, x) \wedge \neg N(x))$

x az y -nak anyai nagyapja: $\exists z(N(z) \wedge G(y, z) \wedge G(z, x) \wedge \neg N(x))$

x az y -nak apai nagyanyja: $\exists z(\neg N(z) \wedge G(y, z) \wedge G(z, x) \wedge N(x))$

x az y -nak anyai nagyanyja: $\exists z(N(z) \wedge G(y, z) \wedge G(z, x) \wedge N(x))$

x az y -nak testvére: $(\neg x = y) \wedge (\exists z \exists w((\neg z = w) \wedge G(x, w) \wedge G(x, z) \wedge G(y, w) \wedge G(y, z)))$
(nem csak féltestvére, és nem is saját maga)

x az y -nak fivére: $(\neg x = y) \wedge (\exists z \exists w((\neg z = w) \wedge G(x, w) \wedge G(x, z) \wedge G(y, w) \wedge G(y, z))) \wedge \neg N(x)$

x az y -nak nővére: $(\neg x = y) \wedge (\exists z \exists w((\neg z = w) \wedge G(x, w) \wedge G(x, z) \wedge G(y, w) \wedge G(y, z))) \wedge N(x)$

x az y -nak féltestvére: $(\neg x = y) \wedge (\exists z(G(x, z) \wedge G(y, z)))$

x az y -nak unokatestvére: $\exists u \exists v \exists z((\neg u = v) \wedge G(u, z) \wedge G(v, z) \wedge G(x, u) \wedge G(y, v))$

(Itt feltételezzük, hogy z két gyerekének nincs közös gyereke, ami lehetséges, de törvénytelen. Ha ezt külön ki kellene zárni, akkor még bele kellene írni, hogy x nem gyereke v -nek, és y nem gyereke u -nak.)

x az y -nak nagybátyja (azaz van egy z testvére x -nek, akinek y a gyereke, és x nem nő):

$\neg N(x) \wedge (\exists z((\neg x = z) \wedge (\exists u \exists v((\neg u = v) \wedge G(x, u) \wedge G(x, v) \wedge G(z, u) \wedge G(z, v))) \wedge G(y, z)))$

x az y -nak nagynénje:

$N(x) \wedge (\exists z((\neg x = z) \wedge (\exists u \exists v((\neg u = v) \wedge G(x, u) \wedge G(x, v) \wedge G(z, u) \wedge G(z, v))) \wedge G(y, z)))$

x az y -nak unokaöccse (azaz van egy z testvére y -nak, akinek x a gyereke, és x nem nő):

$\neg N(x) \wedge (\exists z((\neg y = z) \wedge (\exists u \exists v((\neg u = v) \wedge G(y, u) \wedge G(y, v) \wedge G(z, u) \wedge G(z, v))) \wedge G(x, z)))$

x az y -nak unokahúga:

$N(x) \wedge (\exists z((\neg y = z) \wedge (\exists u \exists v((\neg u = v) \wedge G(y, u) \wedge G(y, v) \wedge G(z, u) \wedge G(z, v))) \wedge G(x, z)))$

9. Formalizáljuk az alábbi állításokat:

a) Márta nem szőke; **Megoldás:** $\neg \text{Szőke}(\text{Márta})$

b) nem igaz, hogy Mátyás nem elég virtuóz; **Megoldás:** $\neg(\neg \text{Elég virtuóz}(\text{Mátyás}))$

c) esik az eső, de meleg van, bár a nap is elbújt, és az idő is későre jár; **Megoldás:**
 $(\text{esik az eső}) \wedge (\text{meleg van}) \wedge (\text{a nap elbújt}) \wedge (\text{az idő későre jár})$

d) Éva vagy Pisti ott volt; **Megoldás:** $(\text{Éva ott volt}) \vee (\text{Pisti ott volt})$

e) ha a hegy nem megy Mohamedhez, Mohamed megy a hegyhez; **Megoldás:**
 $\neg(\text{A hegy Mohamedhez megy.}) \Rightarrow (\text{Mohamed a hegyhez megy.})$

f) elmegyünk kirándulni, ha nem esik az eső, és a szél sem fúj; **Megoldás:**

$(\neg(\text{esik az eső}) \wedge \neg(\text{fúj a szél})) \Rightarrow \text{elmegyünk kirándulni}$

(Azért jegyezzük meg, hogy a hétköznapi szóhasználatban pont nem ezt szoktuk így kifejezni: Ez formálisan akkor is igaz értéket vesz fel, ha esetleg akkor is elmennénk kirándulni, amikor esik az eső, vagy fúj a szél, csak az számít, hogy mindenképpen elmenjünk akkor, ha nem esik és nem fúj. De ilyet *pongyola módon* akkor szoktunk mondani, ha úgy értjük: *Csak akkor* megyünk kirándulni, ha nem esik az eső, és a szél sem fúj. De az formálisan pont ellenkező irányú implikáció lenne: $(\text{elmegyünk kirándulni} \Rightarrow \neg(\text{esik az eső}) \wedge \neg(\text{fúj a szél}))$. Vagy érthetjük úgy is, hogy *Akkor és csak akkor* megyünk kirándulni, ha nem esik az eső, és a szél sem fúj. Ez pedig ekvivalencia lenne: $(\neg(\text{esik az eső}) \wedge \neg(\text{fúj a szél})) \Leftrightarrow \text{elmegyünk kirándulni}$)