Numerikus módszerek 2.

7. előadás: Hermite-interpoláció

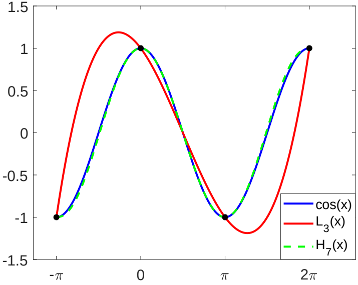
Krebsz Anna

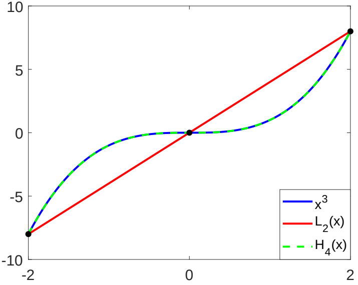
ELTE IK

Tartalomjegyzék

Kérdés

Az $f \in C[a,b]$ függvényt az $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a;b]$ alappontokban interpoláljuk az $L_n \in \mathcal{P}_n$ Lagrange-interpolációs polinomjával. Ha f-nek valamely x_j pontban szélsőértéke vagy inflexiója van, akkor vajon igaz-e ez L_n-re is?





Szélsőértékkel és inflexiós ponttal rendelkező függvények Lagrange- és Hermite-interpolációja.

Definíció: Az Hermite-interpoláció alapfeladata

1. Adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_k \in [a; b]$ különböző alappontok,
2. $m_0, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ multiplicitás értékek és
3. $y_0^{(j)}, y_1^{(j)}, \ldots, y_i^{(j)}, \ldots, y_k^{(j)} \in \mathbb{R}$ függvény- és derivált értékek $(j = 0, \ldots, m_i - 1)$,
4. $m := \sum_{i=0}^{k} m_i - 1$.
5. Olyan $H_m \in P_m$ polinomot keresünk, melyre

$$H_m^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}, \ \ (i = 0, 1, \ldots, k; \ j = 0, \ldots, m_i - 1).$$

A feltételnek eleget tevő polinomot *Hermite-interpolációs polinomnak* nevezzük.

Megj.: Adott az $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ függvény esetén $y_i^{(0)} = f(x_i)$, $y_i^{(j)} = f^{(j)}(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, k; \ j = 0, \ldots, m_i - 1)$.

Tétel: Az Hermite-interpolációs polinom létezése és egyértelműsége

$$\exists!\ H_m \in P_m : \quad H_m^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)} \quad (i = 0, 1, \ldots, k;\ j = 0, \ldots, m_i - 1).$$

Megj.: Ha a függvény- és deriváltértékek hiányosan adottak, akkor hiányos (lakunáris vagy "lyukas") interpolációról beszélünk, mely általában nem oldható meg vagy nem egyértelmű.

Biz.: Az interpolációs polinomot a határozatlan együtthatók módszerével adjuk meg. A polinom alakja $H_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$.

Biz. folyt: Az interpolációs feltételből

$$H_m^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)} \quad (i = 0, 1, \ldots, k;\ j = 0, \ldots, m_i - 1).$$

A LER alakja általánosított Vandermonde mátrix (pl. $m_0 = 3$)

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \ldots & x_0^m \\ 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 & \ldots & mx_0^{m-1} \\ 0 & 0 & 2 & 6x_0 & \ldots & m(m-1)x_0^{m-2} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^m \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & x_k^3 & \ldots & x_k^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0^{(0)} \\ y_0^{(1)} \\ y_0^{(2)} \\ y_1^{(0)} \\ \vdots \\ y_k^{(0)} \end{bmatrix}$$

A továbbiakban belátjuk, hogy a homogén feladat ($y_i^{(j)} = 0$ minden i, j-re) egyértelműen oldható meg, amiből a fenti mátrix determinánsának nem nulla volta következik. Így az Hermite interpolációs feladat egyértelműen oldható meg.

Biz. folyt.: Tekintsük a továbbiakban a homogén feladatot. Belátjuk, hogy ennek egyetlen megoldása a $H_m \equiv 0$ polinom.

Tegyük fel indirekt, hogy létezik legalább két különböző $H_1 \neq H_2$ interpolációs polinom, melyek a homogén feladat megoldásai és vizsgáljuk az eltérés polinomot $R := H_1 - H_2$.

$$R^{(j)}(x_i) = H_1^{(j)}(x_i) - H_2^{(j)}(x_i) = 0$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k;\ j = 0, \ldots, m_i - 1)$$

Multiplicitással számolva R-nek $\sum_{i=0}^{k} m_i = m + 1$ db gyöke van, de m-edfokú polinom, tehát $R \equiv 0$. Ellentmondásra jutottunk, tehát a homogén LER-nek egyértelműen van megoldása, így az inhomogénnek is. $\square$

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

Emlékeztető: A hibaformulák következménye

Ha $f \in C^{n+1}[a;b]$ és $x \in [a;b]$, akkor $\exists\, \xi_x \in [a;b]$:

$$f[x, x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}.$$

Köv.: Azonos alappontok esetén az osztott differencia nem számolható, de a következmény alapján deriválható függvény esetén határátmenettel definiálható.

$$f[x_i, x_i] := \lim_{x \to x_i} f[x_i, x] = \lim_{x \to x_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i} = f'(x_i)$$

Több azonos alappont esetén ugyanígy járunk el.

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

Definíció: Osztott differenciák azonos alappontok esetén

1. Az *elsőrendű osztott differenciák*:

$$f[x_i, x_i] := f'(x_i), \ \ (i = 0, 1, \ldots, k).$$

2. A *j-edrendű osztott differenciák*:

$$f[\underbrace{x_i}_{0.}, \underbrace{x_i}_{1.}, \ldots, \underbrace{x_i}_{j.}] := \frac{f^{(j)}(x_i)}{j!},$$

$$(i = 0, 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, m_i - 1).$$

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

Az Hermite-interpolációs polinom felírásának menete:

1. Osztott differencia táblázatot készítünk, melyben minden alappontot annyiszor veszünk fel, amennyi a multiplicitása.
2. A 2. oszlopba beírjuk a függvényértékeket.
3. Az azonos alappontokhoz tartozó k-adrendű osztott differenciák helyére beírjuk az $\frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$ értékeket.
4. A táblázat többi részét hagyományos módon számoljuk.
5. A főátlóbeli elemek segítségével a szokásos módon felírjuk a Newton-alakot. A Newton-bázisban az alappontokat sorba vesszük.

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

Példa: Osztott differencia táblázat: $m_0 = 1$, $m_1 = 2$, $m_2 = 3$

x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$				
x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$f[x_0, x_1, x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_1, x_2]$	$\dots$		
x_2	$f(x_2)$	$f'(x_2)$	$f[x_1, x_2, x_2]$	$\dots$	$\dots$	
x_2	$f(x_2)$	$f'(x_2)$	$f''(x_2)/2$	$\dots$	$\dots$	$f[x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, x_2]$

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

$$\begin{aligned}
H_5(x) = {} & f(x_0) \\
& + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) \\
& + f[x_0, x_1, x_1] \cdot (x - x_0)(x - x_1) \\
& + f[x_0, x_1, x_1, x_2] \cdot (x - x_0)(x - x_1)^2 \\
& + f[x_0, x_1, x_1, x_2, x_2] \cdot (x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2) \\
& + f[x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, x_2] \cdot (x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)^2
\end{aligned}$$

Példa: Hermite-interpolációra

Készítsük el az $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ függvényt interpoláló harmadfokú Hermite-interpolációs polinomját, melynek alappontjai: $-1, 0, 1$ és multiplicitás értékei: $1, 2, 1$.

A polinom segítségével közelítsük az $f\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ értékét!

Megoldás:

A függvényértékek: $0, 1, 0$, a hiányzó deriváltérték: $f'(0) = 0$.

Az osztott differenciák táblázata:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$\dots$
-1	$\boxed{0}$			
0	1	$\frac{1-0}{0-(-1)} = \boxed{1}$		
0	1	$f'(0) = 0$	$\frac{0-1}{0-(-1)} = \boxed{-1}$	
1	0	$\frac{0-1}{1-0} = -1$	$\frac{-1-0}{1-0} = -1$	$\frac{-1-(-1)}{1-0} = \boxed{0}$

Példa Hermite-interpolációra

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-bázisa:

$$1,\ (x+1),\ (x+1)(x-0),\ (x+1)(x-0)^2.$$

Az osztott differencia táblázatból látjuk, hogy a harmadfokú Hermite-interpolációs polinom a függvény szimmetriája miatt másodfokú lesz:

$$\begin{aligned} H_3(x) &= 0 + 1\cdot(x+1) + (-1)\cdot x(x+1) = \\ &= [-x+1]\,(x+1) + 0 = 1 - x^2. \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ közelítése:}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx H_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Tétel: Hibaformula

1. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges,
2. $[a; b]$ az $x_0, x_1, \ldots, x_k$ és x által kifeszített intervallum,
3. továbbá $f \in C^{m+1}[a; b]$.

Ekkor

1. $\exists\, \xi_x \in [a; b]$, melyre

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!} \cdot \Omega_m(x).$$

2. Hibabecslés

$$|f(x) - H_m(x)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \cdot |\Omega_m(x)|,$$

$$M_{m+1} := \|f^{(m+1)}\|_\infty, \quad \Omega_m(x) := \prod_{i=0}^{k}(x - x_i)^{m_i}.$$

Hibaformula biz.: Ugyanúgy, mint az interpolációnál, de a többszörös gyököket figyelni kell a Rolle-tétel alkalmazása során.

1. Ha $x = x_i$ valamely i-re, akkor az állítás trivi.
2. Tegyük fel, hogy $x \neq x_i$ minden i-re és definiáljuk a következő függvényt

$$G_x(z) := f(z) - H_m(z) - \frac{\Omega_m(z)}{\Omega_m(x)} \cdot (f(x) - H_n(x))\,.$$

Ekkor

$$G_x^{(j)}(x_i) = 0 \;\; (i = 0, 1, \ldots, k;\, j = 0, \ldots, m_i - 1) \;\text{ és }\; G_x(x) = 0,$$

tehát G_x-nek legalább $\sum_{i=0}^{k} m_i + 1 = m + 2$ db gyöke van $[a; b]$-n multiplicitással számolva, ezek közül $k + 2$ db különböző.

Biz. folyt.: A Rolle-tétel miatt a szomszédos gyökök között van G'_x-nak gyöke, így G'_x-nak legalább legalább $k+1$ db különböző gyöke van az alappontok között, a többszörös gyökök multiplicitása pedig eggyel csökken. Tehát

$$(k+1)+\sum_{i=0}^{k}(m_i-1)=\sum_{i=0}^{k}m_i=m+1$$

db gyöke van $[a;b]$-n multiplicitással számolva.

Hasonlóan végiggondolva igazolható, hogy G''_x-nak legalább m db gyöke. Így $G_x^{(m+1)}$-nak legalább 1 db gyöke van $[a;b]$-n, jelöljük ξ_x-szel.

Biz. folyt.: Írjuk fel, hogy $G_x^{(m+1)}$-nak ξ_x gyöke

$$0 = G_x^{(m+1)}(\xi_x) = f^{(m+1)}(\xi_x) - \underbrace{H_m^{(m+1)}(\xi_x)}_{=0} - \frac{(m+1)!}{\Omega_m(x)} \cdot (f(x) - H_m(x))$$

$$\Rightarrow \quad f^{(m+1)}(\xi_x) = \frac{(m+1)!}{\Omega_m(x)} \cdot (f(x) - H_m(x))$$

Átrendezve

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!} \cdot \Omega_m(x).$$

$\square$

Példa: hibabecslésre

Az $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ függvényre korábban meghatározott harmadfokú Hermite-interpolációs polinom esetében becsüljük a polinom hibáját az $x = \frac{1}{2}$ pontban és a $[-1; 1]$ intervallumon.

Megoldás: A függvény deriváltjai:

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad f''(x) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

$$f'''(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad f^{(4)}(x) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

A derivált becslése:

$$M_4 = \max\left(|f^{(4)}(\xi)| : \xi \in [-1; 1]\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = \frac{\pi^4}{16}.$$

Példa hibabecslésre

Az $\Omega_3(x)$ függvény

$$\Omega_3(x) = (x+1)x^2(x-1) = x^2(x^2-1) = x^4 - x^2,$$

$$\Omega_3\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{16}.$$

Hibabecslés az $x = \frac{1}{2}$ pontban

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - H_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}\right| \leq \frac{M_4}{4!} \cdot \left|\Omega_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| =$$

$$= \frac{\frac{\pi^4}{16}}{24} \cdot \frac{3}{16} = \frac{\pi^4}{2^{11}} \approx 0.0476.$$

Példa hibabecslésre

Vizsgáljuk $\Omega_3(x)$ szélsőértékeit $[-1;1]$-n.

$$\Omega_3'(x) = 4x^3 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Omega_3(0) = 0$$

$$\Omega_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$$

$$\Omega_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

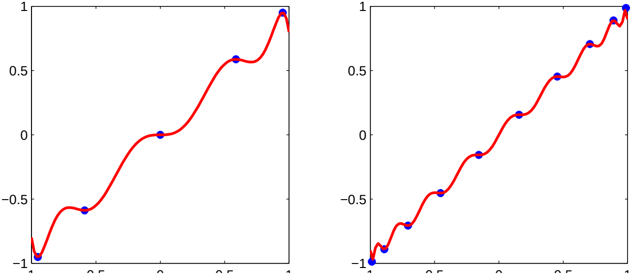
Hibabecslés $x \in [-1;1]$ esetén

$$|f(x) - H_3(x)| \leq \frac{M_4}{4!} \cdot |\Omega_3(x)| \leq \frac{\frac{\pi^4}{16}}{24} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi^4}{1536} \approx 0.0634.$$

Az Hermite-interpoláció speciális esetei:

1. $\forall\, m_i = 1$: Lagrange-interpoláció.
2. $k = 0, m_0 = m + 1$: m-edfokú Taylor-polinom.
3. $\forall\, m_i = 2$: Fejér–Hermite-interpoláció, $m = 2k + 1$.
4. $\forall\, m_i = 2$ és $H'_m(x_i) = 0$: Fejér-féle lépcsőparabola.
   A Fejér-féle lépcsőparabolához csak a $k + 1$ db függvényértékekre van szükség, $2k + 1$-edfokú polinom lesz, szemben a Lagrange-interpolációs polinom k fokszámával.

A Csebisev-polinom gyökeire felírva a Fejér-féle lépcsőparabolát, egyenletesen konvergál az interpolációs polinomsorozat a függvényhez.



A lépcsőparabola szemléletése 5 illetve 10 Csebisev alapponton.

Tétel: A Fejér–Hermite-alappolinomok

1. Az elsőfajú Fejér–Hermite-alappolinomok:

$$A_i(x) := [1 - 2(x - x_i) \cdot \ell_i'(x_i)] \cdot \ell_i^2(x), \quad (i = 0, \ldots, k).$$

2. A másodfajú Fejér–Hermite-alappolinomok:

$$B_i(x) := (x - x_i) \cdot \ell_i^2(x), \quad (i = 0, \ldots, k).$$

Egyik biz.: Egyik megoldás, hogy belátjuk

$$A_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad A_i'(x_j) = 0 \text{ és}$$
$$B_i(x_j) = 0, \quad B_i'(x_j) = \delta_{ij}.$$

Másik biz.: Levezetjük az alappolinomok képleteit.
Tudjuk, hogy az A_i alappolinomok és deriváltjaik az $i \neq j$ esetben nulla értéket vesznek fel, ezért A_i-nek az x_j $(j \neq i)$ pontok kétszeres gyökei. Az $\ell_i^2(x)$ polinom (fokszáma $2n$) ezt teljesíti, tehát egy lineáris polinomot kell csak meghatároznunk. A következő alakban keressük:

$$A_i(x) := (a_i x + b_i) \cdot \ell_i^2(x), \quad (i = 0, \ldots, k).$$

Adjuk meg a_i, b_i értékét, hogy kielégítse a következő tulajdonságokat:

$$A_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad A_i'(x_j) = 0.$$

Másik biz. folyt.:

$$i \neq j: \quad A_i(x_j) = (a_i x_j + b_i) \cdot \ell_i^2(x_j) = 0$$

$$i = j: \quad A_i(x_i) = (a_i x_i + b_i) \cdot \ell_i^2(x_i) = a_i x_i + b_i = 1 \quad \Rightarrow \quad a_i x_i + b_i = 1$$

$$A_i'(x) = a_i \ell_i^2(x) + (a_i x + b_i) \cdot 2\ell_i(x)\ell_i'(x)$$

$$i \neq j: \quad A_i'(x_j) = a_i \ell_i^2(x_j) + (a_i x_j + b_i) \cdot 2\ell_i(x_j)\ell_i'(x_j) = 0$$

$$i = j: \quad A_i'(x_i) = a_i \ell_i^2(x_i) + \underbrace{(a_i x_i + b_i)}_{=1} \cdot 2\ell_i(x_i)\ell_i'(x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_i + 2\ell_i'(x_i) = 0$$

Innen $a_i = -2\ell_i'(x_i)$ és $b_i = 1 - a_i x_i = 1 + 2\ell_i'(x_i)x_i$, tehát a lineáris tényező

$$a_i x + b_i = -2\ell_i'(x_i) \cdot x + 1 + 2\ell_i'(x_i)x_i = 1 - 2\ell_i'(x_i) \cdot (x - x_i).$$

Másik biz. folyt: Az B_i alappolinomokat a fenti meggondoláshoz hasonlóan

$$B_i(x) := (c_i x - d_i) \cdot \ell_i^2(x), \ \ (i = 0, \ldots, k)$$

alakban keressük. Felhasználva a Lagrange-alappolinomok tulajdonságait, adjuk meg c_i, d_i értékét, hogy kielégíti a következő tulajdonságokat:

$$i \neq j: \quad B_i(x_j) = (c_i x_j + d_i) \cdot \ell_i^2(x_j) = 0$$

$$i = j: \quad B_i(x_i) = (c_i x_i + d_i) \cdot \ell_i^2(x_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_i x_i + d_i = 0$$

$$B_i'(x) = c_i \ell_i^2(x) + (c_i x + d_i) \cdot 2\ell_i(x)\ell_i'(x)$$

$$i \neq j: \quad B_i'(x_j) = c_i \ell_i^2(x_j) + (c_i x_j + d_i) \cdot 2\ell_i(x_j)\ell_i'(x_j) = 0$$

$$i = j: \quad B_i'(x_i) = c_i \ell_i^2(x_i) + \underbrace{(c_i x_i + d_i)}_{=0} \cdot 2\ell_i(x_i)\ell_i'(x_i) = 1 \quad \Rightarrow \quad c_i = 1$$

Innen $c_i = 1$ és $d_i = -c_i x_i = 1 - x_i$, tehát a lineáris tényező

$$c_i x + d_i = x - x_i.$$

Lagrange-alak:

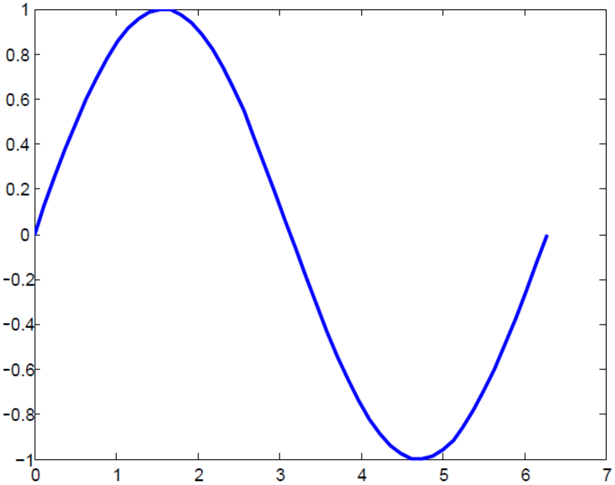
1. A Fejér–Hermite-interpoláció Lagrange-alakja:

$$H_{2k+1}(x) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i) \cdot A_i(x) + \sum_{i=0}^{k} f'(x_i) \cdot B_i(x).$$

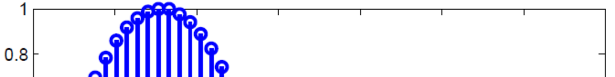
2. A Fejér-féle lépcsőparabolák Lagrange-alakja:

$$H_{2k+1}(x) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i) \cdot A_i(x).$$

Biz.: Az alappolinomok tulajdonságaiból trivi.

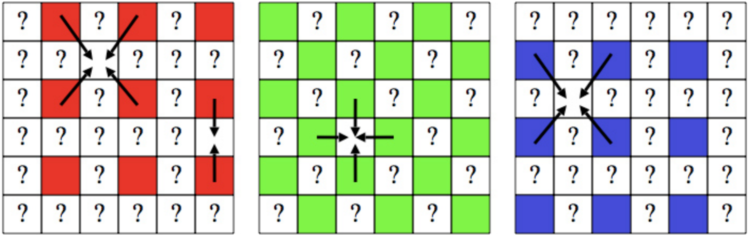


Eredeti folytonos jel



Képméretezés: nagyítás

- Az eredeti méretű kép pixeleinek helyei és értékei adják az interpolációs feladat alappontjait és értékeit.
- Komolyabb képszerkesztő alkalmazásokban (pl. GIMP), az interpoláció típusa beállítható képméretezéskor.



Interpolációs sémák

Definíció: Interpolációs spline

Tekintsük az $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ felosztást, ahol
$I_k := [x_{k-1}; x_k]$ részintervallum $(k = 1, \ldots, n)$.
Az $S_\ell : [a; b] \to \mathbb{R}$ függvényt *ℓ-edfokú spline*-nak nevezzük, ha

1. $S_\ell\big|_{I_k} \in P_\ell \;\; (k = 1, \ldots, n)$
2. $S_\ell \in C^{(\ell-1)}[a; b]$.
3. Az S_ℓ spline-t *interpolációs spline*-nak nevezzük, ha $S_\ell(x_i) = f(x_i) \;\; (i = 0, \ldots, n)$.

Megj.: Négyzetesen legjobban közelítő spline is konstruálható a B-spline bázis segítségével a Hilbert-térbeli közelítés elmélete alapján. Ekkor az S_f négyzetesen közelítő spline az $\int_a^b (f - S_f)^2$ integrált minimalizálja.

A továbbiakban háromféle spline megadással foglalkozunk.

1. Részintervallumonként választunk bázist.

$$p_k(x) := \sum_{j=0}^{\ell} a_j^{(k)} \cdot (x - x_{k-1})^k \ \ (x \in I_k)$$

2. Spline bázissal dolgozunk $[a; b]$-n, melyet a hatványfüggvényrendszerrel és az egyoldalú hatványfüggvénnyel adunk meg.

$$1, x, \ldots, x^{\ell}, (x - x_1)_+^{\ell}, \ldots, (x - x_{n-1})_+^{\ell}$$

   Ebben a bázisban írjuk fel a spline-t.

3. B-spline-okkal adjuk meg.

$\ell = 1$: **elsőfokú spline megadása (szakaszonkénti lineáris interpoláció)**

$$p_k(x) := a_1^{(k)}(x - x_{k-1}) + a_0^{(k)} \quad (x \in I_k)$$

Írjuk fel az interpolációs feltételeket az I_k részintervallum két szélére.

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= a_0^{(k)} = f(x_{k-1}) \\ p_k(x_k) &= a_1^{(k)}(x_k - x_{k-1}) + a_0^{(k)} = f(x_k) \\ &\Rightarrow a_1^{(k)} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f[x_{k-1}, x_k] \end{aligned}$$

Az interpolációs feltételből a folytonosság is következik.
Ha LER-t írnánk fel az $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}$ értékere, akkor az 2×2-es blokkokra szétbomlik.

Spline megadása intervallumonként

$\ell = 2$: **másodfokú spline megadása** A polinom alakja:

$p_k(x) := a_2^{(k)}(x - x_{k-1})^2 + a_1^{(k)}(x - x_{k-1}) + a_0^{(k)} \ \ (x \in I_k)$.

- Látjuk, hogy az ismeretlenek száma: $3n$,
- a feltételek száma: interpolációs feltétel minden részintervallum két szélére: $2n$ feltétel,
- minden belső osztópontra a folytonos diff-hatóság: $n - 1$ feltétel.

Összesen: $3n - 1$ feltétel, vagyis az egyértelműséghez hiányzik egy feltétel. Ezt peremfeltételként szokás megadni:

$$S_2'(a) = f'(a) \text{ vagy } S_2'(b) = f'(b).$$

A feladat szétbomlik n db Hermite-interpolációs feladattá. A LER-rel történő megadáskor elölről meghatározott spline esetén alsóháromszögű LER-t kell megoldani.

Másodfokú spline megadása Hermite-interpolációval
$S_2'(a) = f'(a) =: m_1$ adott.

$$p_1(x) := a_2^{(1)}(x - x_0)^2 + a_1^{(1)}(x - x_0) + a_0^{(1)} \;\; (x \in I_1)$$

$$\begin{aligned}
p_1(x_0) &= a_0^{(1)} = f(x_0) \\
p_1'(x_0) &= a_1^{(1)} = f'(x_0) = m_1 \\
p_1(x_1) &= a_2^{(1)}(x_1 - x_0)^2 + a_1^{(1)}(x_1 - x_0) + a_0^{(1)} = f(x_1) \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$a_2^{(1)} = \frac{f(x_1) - f(x_0) - m_1(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)^2} = \frac{f[x_0, x_1] - m_1}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_0, x_1]$$

Másodfokú spline megadása intervallumonként

A következő I_2 intervallumra az $S_2'(x_1)$ értékével tudunk továbblépni.

$$\begin{aligned} S_2'(x_1) &= p_1'(x_1) = 2a_2^{(1)}(x_1 - x_0) + a_1^{(1)} = \\ &= 2(f[x_0, x_1] - m_1) + f'(x_0) = 2f[x_0, x_1] - m_1 =: m_2 \end{aligned}$$

Az I_2 részintervallumra a következő feltételeket kapjuk:

$$\begin{aligned} p_2(x_1) &= a_0^{(2)} = f(x_1) \\ p_2'(x_1) &= a_1^{(2)} = m_2 \\ p_2(x_2) &= a_2^{(2)}(x_2 - x_1)^2 + a_1^{(2)}(x_2 - x_1) + a_0^{(2)} = f(x_2). \end{aligned}$$

Másodfokú spline megadása intervallumonként

Az algoritmus: Balról meghatározott spline esetén

A polinom alakja az $I_k := [x_{k-1}; x_k]$ intervallumon:

$$p_k(x) := a_2^{(k)}(x - x_{k-1})^2 + a_1^{(k)}(x - x_{k-1}) + a_0^{(k)} \ \ (x \in I_k)$$

Az együtthatók a következő algoritmussal állíthatók elő:

$$\begin{aligned} m_1 &:= f'(x_0) \\ k = 1, \ldots, n: \quad a_0^{(k)} &:= f(x_{k-1}) \\ a_1^{(k)} &:= m_k \\ a_2^{(k)} &:= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - m_k}{x_k - x_{k-1}} \\ m_{k+1} &:= 2f[x_{k-1}, x_k] - m_k \end{aligned}$$

Köszönöm a figyelmet!