Kvadratikus alak

Legyen $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus, ekkor $Q(x) := < B \cdot x,\ x > \quad (x \in \mathbb{R}^n)$ függvényt **kvadratikus alak**nak hívjuk.

Tulajdonságai:

$Q \in D$ és $Q'(x) = 2 \cdot B \cdot x$

$Q \in D \implies Q \in C$

$E := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| = 1\}$ E korlátos és zárt (kompakt) $\implies$ (Weierstrass) $\exists m := \min\limits_{x\in E} Q(x),\ \exists M := \max\limits_{x \in E} Q(x)$

Tegyük fel, hogy $0 \neq x \in \mathbb{R}^n \implies \frac{x}{||x||} \in E \implies m \leq Q(\frac{x}{||x||}) = \frac{1}{||x||^2} \cdot Q(x) \leq M \iff m \cdot ||x||^2 \leq Q(x) \leq M \cdot ||x||^2$

Q pozitív [negatív] **definit**, ha $Q(x) > 0\ [< 0] \quad (0 \neq x \in \mathbb{R}^n)$

Q pozitív [negatív] **szemidefinit**, ha $Q \geq 0\ [\leq 0]$

Ha egyik sem, akkor **indefinit**

Sylvester-kritérium

Legyen $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n,\ k = 1, \ldots, n : d_k := det(a_{ij})_{i,j=1}^k$ (sordetermináns)

Ekkor

$$a) \quad Q \text{ pozitív definit} \iff d_k > 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$$
$$b) \quad Q \text{ negatív definit} \iff (-1)^k \cdot d_k > 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$$