Numerikus módszerek 2. **2. ZÁRTHELYI** **2025. május 9.**

Programtervező informatikus Bsc szak, A szakirány

Számolási feladatok:

A számolási feladatok során az f függvény minden esetben a következő:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{2}x^2 - x$$

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	4
$f'(x_i)$	$\frac{\pi}{2}-1$				$\frac{\pi}{2}+3$

1. (10 pont) Határozza meg az f függvényt a $\{0,1,2,3,4\}$ alappontokon interpoló interpolációs polinomot. Nem kell rendezni a polinomot!
Mely alappontok esetén lenne az interpoláció hibája a $[0;4]$ intervallumon a legkisebb? Adja meg az 5 alkalmas alappontot és ezen interpoláció esetén az interpoláció hibáját a $[0;4]$ intervallumon!

Megoldás: Az osztott differencia táblázat

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$\dots$		
0	$\boxed{0}$				
1	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$			
2	0	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{-\frac{1}{2}}$		
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{3}}$	
4	4	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\boxed{0}$

(4 pont)

Az interpolációs polinom Newton-alakja

$$P_4(x) = 0 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{3}x(x-1)(x-2).$$

(1 pont)

A Csebisev-tétel következményeképpen az interpoláció hibája akkor lesz minimális 5 alappont esetén, ha az interpolációs alappontok az 5-ödfokú Csebisev polinomnak a $[0;4]$ intervallumba lineárisan transzformált gyökei.

$$T_5(x) = \cos(5\arccos(x)) = 0$$
$$\arccos(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{10}\pi\right) \quad (k = 0,1,2,3,4)$$

A $\varphi(x) = 2x + 2$ lineáris transzformáció a $[-1;1]$ intervallumot a $[0;4]$ intervallumba képezi, ezért az alábbi $[0;4]$-be transzformált Csebisev gyökökön kell interpolálnunk:

$$\tilde{x}_k = 2 \cdot \cos\left(\frac{2k+1}{10}\pi\right) + 2 \;\; (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

(2 pont)

Másfelől

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\,x\right) + \frac{1}{2}\,x^2 - x \\
f'(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{\pi}{2} + x - 1 \\
f''(x) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1 \\
f'''(x) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \\
f''''(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \\
f^{(5)}(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^5
\end{aligned}$$

Mivel $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \in [-1, 1]$,

$$|f^{(5)}(x)| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^5\right| = \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 =: M_5.$$

(2 pont)

A hibabecslésünk $x \in [0;4]$ esetén tehát a következő:

$$|f(x) - P_5(x)| \leq \frac{M_5}{5!} \cdot \left(\frac{4-0}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} \cdot \frac{2^5}{2^4} = \frac{\pi^5}{2^4 \cdot 5!}.$$

(1 pont)

2. (6 pont) Írja fel az f függvényt a $\{0, 2, 4\}$ alappontokon $2, 1, 2$ multiplicitás értékekkel interpoláló Hermite-interpolációs polinomot. Nem kell a polinomot rendezni!

Megoldás: Az osztott differencia táblázat

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$\ldots$		
0	$\boxed{0}$				
0	0	$\boxed{f'(0) = \frac{\pi}{2} - 1}$			
2	0	0	$\boxed{\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}}$		
4	4	2	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{\pi}{16}}$	
4	4	$f'(4) = \frac{\pi}{2} + 3$	$\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{16}$	$\boxed{0}$

(5 pont)

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakja

$$H_4(x) = 0 + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) x^2 + \frac{\pi}{16}\, x^2(x-2).$$

(1 pont)

3. (9 pont) Írja fel az f függvényt a $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ alappontokon interpoláló a fenti táblázatban megadott Hermite-peremfeltételekkel adott **harmadfokú** S **spline** meghatározásához szükséges egyenletrendszert mátrixos alakban! Határozza meg az S' függvény együtthatóit!
A spline meghatározását csak a globális bázisban fogadjuk el. Az egyenletrendszert **nem kell megoldani**, a megoldást MATLAB segítségével kell megadni a zh második részében. Emiatt kérjük, a feladat megoldását külön lapra írja! Javasoljuk továbbá, hogy erre a lapra írja fel az f az f' függvényt.

Megoldás: A spline-t a globális bázisban felírva:

$$S(x) = p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4 + \beta_1(x-1)_+^3 + \beta_2(x-2)_+^3 + \beta_3(x-3)_+^3$$

Ekkor a deriváltja a következő:

$$S'(x) = 3p_1x^2 + 2p_2x + p_3 + 3\beta_1(x-1)_+^2 + 3\beta_2(x-2)_+^2 + \beta_3(x-3)_+^2$$

(2 pont)

Az interpolációs feltételek a következők:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad S(0) = p_4 = 0\\
&(2) \quad S(1) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{2}\\
&(3) \quad S(2) = 8p_1 + 4p_2 + 2p_3 + p_4 + \beta_1 = 0\\
&(4) \quad S(3) = 27p_1 + 9p_2 + 3p_3 + p_4 + 8\beta_1 + \beta_2 = \frac{1}{2}\\
&(5) \quad S(3) = 64p_1 + 16p_2 + 4p_3 + p_4 + 27\beta_1 + 8\beta_2 + \beta_3 = 4
\end{aligned}$$

(5 pont)

A peremfeltételek pedig:

$$\begin{aligned}
&(5) \quad S'(0) = f'(0) = p_3 = \frac{\pi}{2} - 1\\
&(6) \quad S'(4) = f'(4) = 48p_1 + 8p_2 + p_3 + 27\beta_1 + 12\beta_2 + 3\beta_3 = \frac{\pi}{2} + 3
\end{aligned}$$

(2 pont)

A megoldandó lineáris egyenletrendszer **nem kell megoldani papíron**, a megoldást MATLAB segítségével kell megadni a zh második részében. Emiatt kérjük, a feladat megoldását külön lapra írja! Javasoljuk továbbá, hogy erre a lapra másolja át az f' függvényt is, amelyet az 1. feladatban kiszámított.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 27 & 9 & 3 & 1 & 8 & 1 & 0\\ 64 & 16 & 4 & 1 & 27 & 8 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 48 & 8 & 1 & 0 & 27 & 12 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1\\ p_2\\ p_3\\ p_4\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ \frac{1}{2}\\ 4\\ \frac{\pi}{2}-1\\ \frac{\pi}{2}+3 \end{bmatrix}$$

4. (7 pont) Az $(x_i, f(x_i))$ (ld. fenti táblázatban) pontokhoz

- határozza meg a négyzetesen legjobban közelítő egyenest!
- Adja meg a feladathoz az általánosított értelemben megoldandó lineáris egyenletrendszert.

Megoldás: Az egyenest $p_1(x) = a_1x + a_0$ alakban keressük, ahol az együtthatóknak ki kell elégítenie a Gauss-féle normálegyenleteket:

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}.$$

A mátrixban és a jobb oldali vektorban szereplő mennyiségek kiszámítása után a következőt kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix}$$

(3 pont)

Az 1. egyenlet /2:

$$a_0 + 2a_1 = 1 \iff a_0 = 1 - 2a_1$$

Visszahelyettesítve a 2. egyenletbe:

$$10(1 - 2a_1) + 30a_1 = 18 \iff 10a_1 = 8 \iff a_1 = \frac{4}{5} \iff a_0 = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$$

ezért a négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenlete:

$$p_1(x) = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}$$

(2 pont)

A feladathoz kapcsolódó általánosított értelemben megoldandó lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(2 pont)