1) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 6 jegyű szám jegyei mind különbözőek?

$$\frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{9 \cdot 10^5}$$

2) Hányféleképpen lehet 8 bástyát letenni egy sakktáblára, hogy ne üssék egymást?

$$8!$$

3) 2 számozott érmével dobunk, majd még annyi érmével, ahány fejet az első két érmével kaptunk. Mik lesznek az eseménytér elemei?

$$\Omega = \{\{I, I\}, \{F, I, I\}, \{F, I, F\}, \{I, F, I\}, \{I, F, F\}, \{F, F, I, I\}, \{F, F, I, F\}, \{F, F, F, I\}, \{F, F, F, F\}\}$$

4) Legyen A,B,C három esemény. Írjuk fel annak az eseménynek a valószínűségét, hogy közülük

a.) pontosan k

$$P(\text{pontosan 1}) = P\left(\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)\right)$$

$$P(\text{pontosan 2}) = P\left(\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right)\right)$$

$$P(\text{pontosan 3}) = P(A \cap B \cap C)$$

altalanosan:

$$\text{legyen } A_1, ..., A_n \text{ esemenyek}$$

$$P(\text{pontonsan k}) = P\left(\bigcup_{i_1, ..., i_k} \left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right) - \left(\bigcup_{l \notin \{i_1, ..., i_k\}} A_l\right)$$

b.) legfeljebb k esemény következik be (k = 1, 2, 3)).

$$P(\text{legfeljebb 1}) = P(\text{pontosan 0 vagy 1}) =$$

$$= P\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup P\left(\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)\right)$$

$$\vdots$$

5) A német labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 20 mezőnyjátékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találomra történik a szétosztás a két 10-es csoportba, hogy Schweinsteiger és Özil egymás ellen játszik?

$$P = \frac{\binom{18}{9}}{\binom{20}{10}}$$

6) De Méré problémája, 1654.

De Méré lovag nagy szerencsejátékos volt, az alábbi két kérdéssel fordult Pascal-hoz:

- Ha egy kockát 4-szer feldobunk, akkor mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy hatos dobás lesz?
- Ha két kockát 24-szer feldobunk, mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy dupla hatos lesz?

a.) Számítsuk ki a két valószínűség pontos értékét!

$$P(\text{elso}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,5177469136$$

$$P(\text{masodik}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,4914038761$$

b.) A két valószínűség miért van közel egymáshoz?

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{3} \cdot 6}$$

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{\frac{2}{1} \cdot 36}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2} \cdot n} \underset{n \to \infty}{\to} \frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}$$

7) Mintavétel: Adott N különböző termék, amik között van M selejtes. Veszünk n elemű mintát

Mennyi a valószínűsége, hogy az n termékből pontosan k selejtest sikerült kiválasztanunk?

a.) visszatevés nélkül;

$$P = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

b.) visszatevéssel.

$$P = \frac{\binom{n}{k} M^k (N-M)^{n-k}}{N^n}$$

8) A $(0, 1)$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott pont segítségével 3 részre. Mennyi a valószínűsége, hogy

a.) mindhárom szakasz hossza rövidebb $\frac{1}{2}$-nél;

$$P = \frac{1}{4}$$

b.) a 3 szakaszból háromszög alkotható;

$$P = \frac{1}{4}$$

c.) a legrövidebb szakasz hossza rövidebb $\frac{1}{5}$-nél?

$$\ldots$$

9) Ha egy magyarkártya-csomagból visszatevés nélkül húzunk 3 lapot, akkor mi annak a valószínűsége, hogy

a.) pontosan

$$P(\text{pontosan 1 piros}) = \frac{\binom{8}{1}\binom{24}{2}}{\binom{32}{3}}$$

b.) legalább egy piros színű lapot húzunk? És mi a helyzet visszatevéses esetben?

$$P(\text{legalább 1 piros}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\binom{8}{i}\binom{24}{3-i}}{\binom{32}{3}}$$

c.) visszatevéssel

$$P(\text{pontosan 1 visszatevéssel}) = \frac{\binom{3}{1}8^1(32-8)^{3-2}}{32^3} = \frac{\binom{3}{1}8 \cdot 24^2}{32^3}$$

$$P(\text{legalább 1 visszatevéssel}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\binom{3}{i}8^i 24^{3-i}}{32^3}$$