Diszkrét matematika I. feladatok
Kombinatorika I.
Hetedik alkalom (2025.03.24-28.)

Bemelegítő feladatok

1. a) Egy irodalmi esten 5 vers hangzik el. Hányféleképpen követhetik a versek egymást?
   b) Hányféle sorrendben ültethetünk le 6 embert egymás mellé egy padra?
   c) 12 hallgató találkozót beszélt meg egymással. Hányféle sorrendben érhettek oda, ha nem volt köztük kettő olyan, akik egyszerre érkeztek?

   Megoldás: *Független döntések:* Ha egymást követő döntéseket kell hoznunk, és egy adott döntésnél a konkrét választás nem befolyásolja a soron következő döntésben a lehetőségeink számát, akkor független döntésekről beszélünk (akkor is, ha adott lépésben konkrét választási lehetőségek függenek a korábbi döntéseinktől, csak a választási lehetőségek *száma* nem függ a korábbi döntésektől). Ekkor az egymás utáni döntésekben választható lehetőségek száma összeszorzódik. Tehát a döntések/választások abban az értelemben függetlenek egymástól, hogy korábban bárhogyan is választottunk, a következő döntésnél a lehetőségeink *száma* változatlan.
   a) Az elsőként elhangzó vers ötféle lehet, a másodikként elhangzó vers négyféle stb. Ezek független választások (bármi is volt konkrétan az első vers, másodikra mindenképp 4 lehetőség marad), tehát a lehetőségek száma összeszorzódik: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ (öt faktoriális).
   b) (Az embereket mindig megkülönböztetjük egymástól, kivéve, ha a feladat külön jelzi ennek ellenkezőjét.) A pad bal szélére 6 ember közül ültethetünk valakit, ez 6 lehetőség, közvetlenül mellé már csak a maradék 5 közül választhatunk, ami 5 lehetőség stb. Ezek független választások, tehát a lehetőségek száma összeszorzódik: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ (hat faktoriális).
   c) Elsőként 12 hallgató közül érkezik valaki, ez 12 lehetőség, másodikként már csak a maradék 11 hallgató közül valaki, ez 11 lehetőség stb. Ezek független választások, tehát a lehetőségek száma összeszorzódik: $12 \cdot 11 \cdot 10 \ldots \cdot 1 = 12!$ (tizenkettő faktoriális).
   Összefoglalva: n különböző dolog lehetséges sorba rendezéseinek száma: $n!$ (n faktoriális).

2. Hányféleképpen ültethetünk le 6 embert egy kör alakú asztalhoz, ha két ültetést azonosnak tekintünk, ha egymásba forgatással átvihetők?

   Megoldás: Ezt ciklikus permutációnak hívják (mert az elforgatottakat nem különböztetjük meg). Az összes ülésrend 6! volna, ám így minden ciklikus ülésrendet 6-szor számoltunk (ennyi elforgatottja van minden ülésrendnek), így a tehénszabály miatt $6!/6 = 5!$ ülésrend van.

   Másik megoldás: Ültessük le Aladárt valamelyik helyre. Mivel az elforgatottakat azonosnak tekintjük, mindegy, hogy hova, de ettől kezdve az ő helye lesz a viszonyítási pont. A többiek hozzá képest 5! féle sorrendben ülhetnek le.

3. Hány olyan 10 jegyű (nem 0-val kezdődő) szám van, melyben minden számjegy csak egyszer szerepel?

   Megoldás: Az első helyre kilencféle számjegyet írhatunk, mert 0-t nem; a második helyre már írhatunk 0-t, de azt a számjegyet nem, amit az első helyre írtunk, tehát ismét kilencfélét; a harmadik helyre az első két helyre írt számjegyet nem írhatjuk, tehát már csak nyolcféle jegyből választhatunk stb., mindig eggyel csökken a lehetőségeink száma. A választások függetlenek, tehát összesen $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1 = 9 \cdot 9!$ ilyen szám van.

Másik megoldás: Mivel 10 jegyű a szám, minden számjegy pontosan egyszer szerepel. Az első helyre kilencféle számjegyet írhatunk, mert 0-t nem; a maradék kilenc számjegy sorba rendezéseinek száma 9!, összesen tehát $9 \cdot 9!$ ilyen szám van.

Harmadik megoldás: 10 számjegy összes lehetséges sorbarendezéseinek száma $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, de ezen sorrendek között ott vannak azok, amik számunkra nem megfelelőek azért, mert 0-val kezdődnek. Az ilyen, számunkra rossz sorrendek száma $9! = 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, mert a 0 után a maradék 9 számjegyet kell sorbarendezni. Az összes $10! = 10 \cdot 9!$ lehetőségből ki kell hagyni a számunkra rossz 9! lehetőséget, azaz összesen marad $10! - 9! = 10 \cdot 9! - 9! = (10-1) \cdot 9! = 9 \cdot 9!$ lehetőség.

4. Egy futóversenyen 15 tanuló vesz részt. Hányféleképpen alakulhat az első 3 hely sorsa, ha tudjuk hogy nem lesz holtverseny?

   Megoldás: Első helyre a 15 tanuló közül bárki befuthat, második helyre a maradék 14 tanuló közül bárki, harmadik helyre a maradék 13 tanuló közül bárki. Bár az, hogy a második helyre konkrétan kik futhatnak be, az függ attól, hogy ki lett az első (ő nem lehet egyúttal második is), de az, hogy mindig 14 lehetőség marad a második kiválasztására, az nem függ attól, hogy ki lett az első. Ilyen érteleben függetlenek az egymás utáni döntések (a harmadik döntés is ilyen értelemben független az elző két döntésől). Ezért $15 \cdot 14 \cdot 13 = \dfrac{15!}{12!}$ lehetőség van.

   Másik megoldás: A 15 tanuló összes lehetséges sorrendje 15!, de ekkor a harmadik utáni helyezések közötti különbségeket is megszámoltuk. A negyedik-tizenötödik helyezések sorrendjére 12! lehetőségünk van, a 15!-ban minden számunkra releváns sorrendet 12!-szor számoltunk, így tehénszabállyal az első 3 helyezés lehetséges sorrendjeinek száma: $\dfrac{15!}{12!} = 15 \cdot 14 \cdot 13$.

Gyakorló feladatok

5. Hányféle sorrendben léphet be egy szobába 3 férfi és 7 nő? És ha az azonos nemű emberek között nem teszünk különbséget?

   Megoldás: 10 ember lehetséges sorrendjeinek száma 10! (az, hogy férfi vagy nő, már benne van az emberek egyedi megkülönböztetésében, pluszban már nem kell számolni vele).

   Megoldás a második kérdésre: Először megszámoljuk a sorrendeket úgy, mintha különbözőnek tekintenénk az embereket: 10!. Ha a férfiakat mégsem különböztetjük meg egymástól, akkor az imént minden sorrendet annyiszor számoltunk, ahányféleképpen a férfiak egymás között sorba állhatnak: 3!-féleképpen. Így a tehénszabály értelmében ezzel el kell osztanunk az összes sorrendek számát. Ugyanígy a nők egymás közti lehetséges sorrendjeinek számával, azaz 7!-sal is osztanunk kell, tehát a megoldás $\dfrac{10!}{3! \cdot 7!}$, mivel a nők sorba rendezése és a férfiak sorba rendezése egymástól független.

   Másik megoldás a második kérdésre: Eldöntjük, hogy a 10 hely közül melyik lesz az a 3, amikor férfi lép be, vagyis kiválasztunk a 10 helyből 3-at, ez $\dbinom{10}{3}$ lehetőség. Természetesen ugyanazt a megoldást kaptuk, mint az előbb, hiszen definíció szerint $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!}$. Ugyanezt kaptuk volna, ha a nők helyét választjuk ki: $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!}$. Ez is mutatja a binomiális együtthatókról tanult azonosságot: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

6. Hányféleképpen helyezhetünk el 12 embert 3 szobába, ha az első 3, a második 4, a harmadik 5 ágyas?

   Megoldás: A feladat szövegének kétféle értelmezése lehetséges.

   a) Ha egy szobán belül az ágyakat különbözőnek tekintjük, akkor valójában csak azt kell eldöntenünk, hogy ki melyik ágyra kerül. Ez pontosan ugyanaz a feladat, mintha sorba kellene állítanunk az embereket (ki kerül az 1. ágyra, ki kerül a 2. ágyra, és így tovább), tehát a válasz 12!.

   b) Ha egy szobán belül az ágyakat egyformának tekintjük, akkor azt kell kiválasztanunk, hogy a 12 ember közül melyik 3 kerül az első szobába, ez $\binom{12}{3}$ lehetőség; a maradék 9 ember közül melyik 4 kerül a második szobába, ez $\binom{9}{4}$ lehetőség; a megmaradt 5 ember helye már egyértelmű. Ezek független döntések, tehát a lehetőségek száma összeszorzódik: $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4}$. A binomiális együtthatókat a definíció szerint kifejtve $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} \cdot \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!}$.

   Másik megoldás: Először különbözőnek tekintjük az ágyakat, vagyis beszámozzuk őket 1-12-ig úgy, hogy az $1-3$. sorszámú ágyak az első szobában, a $4-7$. sorszámú ágyak a második szobában, a $8-12$. sorszámú ágyak a harmadik szobában legyenek. Ekkor 12! féleképpen helyezhetjük el az embereket. (Ez eddig ugyanaz, mint a feladat szövegének **a)** értelmezése szerinti megoldás.)

   Valójában azonban (a feladat szövegének **b)** értelmezése szerint) az $1-3$. sorszámú ágyakra (az első szobába) elhelyezett emberek egymás közti sorrendje nem számít, ezért azzal a tehénszabály értelmében le kell osztanunk. Hasonlóan a $4-7$. sorszámú ágyakra, vagyis a második szobába helyezettekével, illetve a harmadik szobába helyezettekével is. Összesen tehát $\frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!}$.

7. Egy urnában hat golyó van sorra 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokkal számozva. Egymás után négy golyót kihúzva visszatevés nélkül

   a) hányféle sorrend lehetséges; b) hányféle sorrend lehetséges, amikor az első húzás 1-es;
   c) hányféle sorrend lehetséges, amikor az utolsó húzás páros?

   Megoldás: a) A feladat szövege értelmében („egymás után”) számít a húzások sorrendje. Az első húzásnál hatféle golyó közül húzunk, a másodiknál már csak ötféle közül stb., ezek független események, tehát $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.

   b) Elsőre mindenképpen 1-est húzunk, ez 1 lehetőség. Másodikra a megmaradt 5 golyó közül húzunk, harmadikra már csak 4 közül, negyedikre 3 közül, összesen $5 \cdot 4 \cdot 3$ lehetőség.

c) Most nem az első golyó kihúzásától indulva számolunk, hanem az utolsóétól. (Ha zavaró ez a megfogalmazás: húzzuk ki a golyókat, és írjuk fel sorban, hogy miket húztunk. Így négy hosszúságú karaktersorozatokat kapunk, most már ezeket számoljuk meg. A karaktereket tetszőleges sorrendben vizsgálhatjuk.) Három darab páros szám van, tehát az utolsó golyó háromféle lehet. Miután az utolsó golyót fixáltuk, most már számolhatjuk elölről: az első golyót most már csak ötféle golyó közül húzzuk, a másodikat négyféléből, a harmadikat háromféléből. Ez összesen $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ lehetőség.

Érdekes feladatok

8. a) Hány n hosszú $0-1$ sorozat van? **Megoldás:** Egymás után hozunk döntéseket, hogy 0 vagy 1 legyen az adott helyen. Minden döntésünk az előzőektől függetlenül kétféle, tehát $2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$ féle ilyen sorozat van.

   b) Hány $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ függvény van? **Megoldás:** A $\{0,1\}^n = \{0,1\} \times \dots \times \{0,1\}$ DesCartes-szorzathalmaz elemei n-hosszú $0-1$-sorozatok, amelyekből az előző részfeladat szerint pontosan 2^n darab van. Ha ezeket felsoroljuk, f függvény ezek mindegyikéhez (egymástól függetlenül) rendel egy 0 vagy 1 értéket, azaz ezen függvényértékek sorozata egy 2^n hosszúságú $0-1$- sorozat, ami az előzőek szererint $2^{(2^n)}$ féle lehet. Minden ilyen függvényérték-sorozat egyértelműen megadja az f függvényt, két különböző ilyen sorozat két különböző függvényt jelent, és ugyanaz a sorozat nem származhat két különböző függvényből, azaz a függvények száma is ennyi: $2^{(2^n)} = 2^{2^n}$ (ez a zárójelezés az alapértelmezése a hatvány a hatványon kifejezéseknek).

   c) Hány $f : \{0,1\} \to \{0,1\}^m$ függvény van? **Megoldás:** $f(0)$ és $f(1)$ értékét kell eldöntenünk, mindkettő (egymástól függetlenül) a $\{0,1\}^m$ halmaz 2^m féle elemének bármelyike lehet, azaz két egymás utáni független döntéssel: $2^m \cdot 2^m = (2^m)^2 = 2^{2m}$ féle ilyen függvény van.

   d) Általában egy n változós m értékű *Boole függvényen* egy $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ függvényt értünk. Hány ilyen függvény van?

   Megoldás: Általában az $f : A \longrightarrow B$ függvények száma $|B|^{|A|}$, hiszen A minden eleméhez B elemei közül pontosan egyet rendelünk, és ez bármelyik lehet (ismétléses variáció), tehát $|A|$ db helyen választunk, minden alkalommal $|B|$ db lehetőség közül, a többi választástól függetlenül. (Ez az első három részfeladat megoldására is használható.)

   d) rész megoldása: Most az A halmaz elemei az n hosszúságú $(0,1)$ vektorok, tehát $|A| = 2^n$, B halmaz elemei az m hosszúságú $(0,1)$ vektorok, tehát $|B| = 2^m$, így az $A \longrightarrow B$ függvények száma $(2^m)^{2^n} = 2^{m \cdot 2^n}$.

9. Hány hatjegyű számra igaz, hogy
   a) a szomszédos számjegyei különböznek; b) minden jegye különbözõ;
   c) pontosan egy jegye 0, d) van 0 a jegyei között?

   Megoldás: a) Az első számjegy nem lehet 0, csak az $1, \dots, 9$ számjegyek valamelyike, tehát 9 féle. A második számjegy már lehet 0 is, de nem lehet az a jegy, amit az első helyre írtunk, vagyis szintén 9 féle lehet. A többi jegyre is igaz, hogy mindig csak a közvetlenül előtte leírt számjegy nem lehet, vagyis mindig 9 lehetőség van. Ez összesen $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^6$.

   b) Az első számjegy nem lehet 0, csak az $1, \dots, 9$ számjegyek valamelyike, tehát 9 féle. A második számjegy már lehet 0 is, de nem lehet az a jegy, amit az első helyre írtunk, vagyis szintén 9 féle lehet. A harmadik számjegy nem lehet sem az első, sem a második helyre leírt számjegy, vagyis már csak 8 féle lehet. Minden jegynél eggyel csökken a lehetőségek száma, összesen $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 9 \cdot \frac{9!}{4!}$.

Másik megoldás b) részre: A 3. feladat megoldásából kiindulva: már megmutattuk, hogy ilyen feltétellel 10 jegyű szám $9 \cdot 9!$ van. Ezekből az utolsó 4 jegy levágásával a feltételnek megfelelő hatjegyű számot kapunk. Tehát a $9 \cdot 9!$ minden megfelelő hatjegyű számot annyiszor számol meg, ahányféleképpen az utolsó 4 jegyet sorba tudjuk rendezni, vagyis a megoldás tehénszabállyal $\frac{9 \cdot 9!}{4!} = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

c) Kezdjük a 0 helyének kiválasztásával! Erre 5 lehetőségünk van. A maradék 5 hely mindegyikére 9 féle számjegy kerülhet, összesen tehát $5 \cdot 9^5$ ilyen szám van.

d) Az összes lehetőség számából vonjuk ki a kedvezőtlen lehetőségek számát. Összesen $9 \cdot 10^5$ hatjegyű szám van. Kedvezőtlen, ha nincs benne 0, ekkor a hat hely mindegyikére 9 féle számjegy kerülhet, tehát 9^6 ilyen szám van. A kedvező lehetőségeink száma (amikor tehát szerepel 0 számjegyek között): $9 \cdot 10^5 - 9^6$.

Beadandó házi feladatok

10. a) Egy bonbonos dobozban 12 darab, csupa különböző ízű bonbon van. Hányféleképpen tudunk közülük négyet kivenni, ha a bonbonok sorrendje számít?

    b) Hányféleképpen tudunk egy asztalon sorba állítani 6 karamellás, 2 kávés és 4 pisztáciás bonbont?

    Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat). (**részenként 1/2 pont**)

11. a) 10-szer feldobunk egy a) pénzérmét b) dobókockát. Hányféle dobássorozat alakulhat ki?

    b) Hányféleképpen lehet 20 hallgató között 6 különböző könyvet szétosztani, ha egy hallgató több könyvet is kaphat?

    Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat). (**részenként 1/2 pont**)

12. Legyen $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $Y = \{a, b, c\}$. Adja meg a következő értékeket:

    a) Legyen $R \subset X \times Y$ egy reláció az X és Y halmaz között. Legfeljebb hány párt tartalmazhat az R reláció? (**1/6 pont**)

    b) Legyen $S \subset X \times X$ egy reláció az X halmazon. Legfeljebb hány párt tartalmazhat az S reláció? (**1/6 pont**)

    c) Összesen hányféle reláció lehet az X és Y halmazok között? (**1/3 pont**)

    d) Összesen hányféle reláció lehet az X halmazon? (**1/3 pont**)

    Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat).