Taylor-formulák

Multiindex

$n \in \mathbb{N}^+,\ i = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$

i-t **multiindexnek** hívjuk.

Hossza: $|i| = \sum_{k=1}^{n} i_k,$ faktoriális: $i! = \prod_{k=1}^{n} i_k!,$

hatványozás: $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x^i := \prod_{k=1}^{n} x_k^{i_k},$

parciális: $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \partial^i f := \partial_{1\ldots12\ldots2\ldots n\ldots n} f$ az indexben 1 i_1-szer 2 i_2-ször stb.

Lagrange-maradékkal

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ s \in \mathbb{N},\ f \in D^{s+1},\ a \in \mathbb{R}^n,\ 0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ és $[a,\ a+h] := \{a + t \cdot h \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset D_f$

Ekkor $\exists 0 < v < 1 : f(a+h) = \underline{f(a) + \sum_{k=1}^{s} \sum_{i \in \mathbb{N}^n, |i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} \cdot h^i} +$

$\underline{\underline{\sum_{i \in \mathbb{N}^n, |i|=s+1} \frac{\partial^i f(a + v \cdot h)}{i!} \cdot h^i}}$

$(\underline{T_s f(h)\ s\text{-edrendű Taylor-polinom}},\ \underline{\underline{\text{Lagrange-maradéktag}}})$

Megjegyzés: $s = 0$ esetben $f \in D \implies f(a+h) - f(a) = \sum_{i \in \mathbb{N}^n, |i|=1} \partial^i f(a + v \cdot h) \cdot h^i = <\text{grad } f(a + v \cdot h),\ h>$

Peano-maradéktaggal

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ a \in \text{int } D_f,\ s \in \mathbb{N}^+,\ f \in D^s\{a\},\ h \in \mathbb{R}^n,\ a + h \in D_f$

Ekkor $\exists \eta \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \lim_0 \eta = 0$ és

$f(a+h) = T_s f(h) + \underline{\eta(h) \cdot ||h||^s}$

(Peano-maradék)

Megjegyzés: $s=2$ esetben $f \in D^2\{a\} \implies f(a+h) = f(a) + < \text{grad } f(a),\ h > + \frac{1}{2} < f''(a) \cdot h,\ h > + \eta(h) \cdot ||h||^2$

Ahol $f''(a) = (\partial_{ij} f(a))_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) & \dots & \partial_{1n} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) & \dots & \partial_{2n} f(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_{n1} f(a) & \partial_{n2} f(a) & \dots & \partial_{nn} f(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(szimmetrikus deriváltmátrix)

Taylor-Peano speciális eset

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ a \in \text{int } D_f,\ f \in D^2\{a\},\ h \in \mathbb{R}^n,\ a+h \in D_f$

Ekkor $\exists \eta \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \lim\limits_{0} \eta = 0$ és

$f(a+h) = f(a) + < f'(a),\ h > + \frac{1}{2} < f''(a) \cdot h,\ h > + \eta(h) \cdot ||h||^2$

Bizonyítás

$(*)$ Legyen $b \in \mathbb{R}^n,\ g(x) := < b,\ x > \quad (x \in \mathbb{R}^n) \implies$

$g \in D,\ \text{grad } g = g' \equiv b$

(Sidenote: ezt csak a bizonyításban használjuk, egyébként nem kell I guess)

1° ötlet, legyen $g(h) := f(a+h) - f(a) - < f'(a),\ h > - \frac{1}{2} < f''(a) \cdot h,\ h >$

$(*)$ miatt $g \in D$ és $g'(h) = f'(a+h) - f'(a) - f''(a) \cdot h$

2° $g(h) = g(h) - g(0) =$ (Lagrange-k.é.t.) $< g'(v \cdot h),\ h > = < f'(a + v \cdot h) - f'(a) - f''(a) \cdot v \cdot h,\ h > =$ (mert $f' \in D\{a\}$) $< f''(a) \cdot v \cdot h + \theta(v \cdot h) \cdot ||v \cdot h|| - f''(a) \cdot v \cdot h > = < \theta(v \cdot h) \cdot ||v \cdot h||,\ h > =: \eta(h) \cdot ||h||^2, \quad (\lim\limits_{0} \theta = 0,\ h \neq 0)$

$\eta(h) = \frac{< \theta(v \cdot h) \cdot ||v \cdot h||,\ h >}{||h||^2} \implies |\eta(h)| \leq \frac{||\theta(v \cdot h)|| \cdot v \cdot ||h|| \cdot ||h||}{||h||^2} \leq ||\theta(v \cdot h)|| \to 0 \quad (h \to 0) \implies \exists \lim\limits_{0} \eta = 0$

Lagrange-féle középértéktétel

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f \in D,\ a \in \mathbb{R}^n,\ 0 \neq h \in \mathbb{R}^n,\ [a,\ a+h] := \{a + t \cdot h \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset D_f$

Ekkor $\exists 0 < v < 1 : f(a+h) - f(a) = < \text{grad } f(a+v \cdot h),\ h > = < f'(a+v \cdot h),\ h >$

Bizonyítás

1° ötlet, legyen $\varphi(t) = f(a+t \cdot h) \quad (t \in \mathbb{R},\ a+t \cdot h \in D_f) \implies$

$[0,\ 1] \subset D_\varphi,\ 0, 1 \in \text{int } D_\varphi$

$$2^\circ \quad \varphi \in D \text{ ui. } \varphi(t+x) - \varphi(t) = f(a+t \cdot h + x \cdot h) - f(a+t \cdot h) =$$
$$(\text{mert } f \in D) = < f'(a+t \cdot h),\ x \cdot h > + \eta(x \cdot h) \cdot ||x \cdot h|| =$$
$$x \cdot < f'(a+t \cdot h),\ h > \pm\, \eta(x \cdot h) \cdot |x| \cdot ||h|| \implies$$
$$\frac{\varphi(t+x) - \varphi(t)}{x} = < f'(a+t \cdot h) > \pm\, \eta(x \cdot h) \cdot ||h|| \quad (\lim_0 \eta = 0)$$
$$\implies \exists \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(t+x) - \varphi(t)}{x} = < f'(a+t \cdot h) > = \varphi'(t)$$

3° Lagrange $n = 1$-re

$f(a+h) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(v \cdot h) = < f'(a+v \cdot h),\ h >$

A kétszer differenciálható függvények vizsgálatához nem tudom mi kéne