Analízis 1., 2. zárthelyi dolgozat, 2025.05.16.

1. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1} \frac{7\cdot(-2)^n - (-2)^{2n-1}}{5^n}$$

végtelen sor? Ha igen, számítsa ki az összegét! *(5 pont)*

Megoldás:

- $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{7\cdot(-2)^n - (-2)^{2n-1}}{5^n} = \sum_{n=1}\left(7\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$
- $\displaystyle\left|-\frac{2}{5}\right| < 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} 7\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^n = 7\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n = 7\cdot\frac{-2/5}{1-(-2/5)} = -2$
- $\displaystyle\left|\frac{4}{5}\right| < 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{4/5}{1-4/5} = 2$
- A sor konvergens, mert előáll két konvergens sor összegeként. A sor összege:
  $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7\cdot(-2)^n - (-2)^{2n-1}}{5^n} = 7\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = -2+2 = 0$$

2. Konvergensek-e az alábbi végtelen sorok?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n+2025}$, *(4 pont)*

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}\sqrt{\frac{2n^3+3^n}{5n^4+4^n}}$, *(4 pont)*

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}\frac{(3n)!}{(n!)^3}$. *(4 pont)*

Megoldás:

(a) A szükséges feltétel alapján:

$$\lim\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n+2025} = \lim\frac{\left(\left(1+\frac{-1/3}{n}\right)^n\right)^2\cdot\left(1+\frac{-1/3}{n}\right)^{2025}}{\left(\left(1+\frac{2/3}{n}\right)^n\right)^2\cdot\left(1+\frac{2/3}{n}\right)^{2025}} = e^{-2}\neq 0 \implies$$

$\implies$ a sor divergens

(b) A Cauchy-féle gyökkritérium alapján:

$$\lim\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\sqrt{\sqrt[n]{\frac{2n^3+3^n}{5n^4+4^n}}} = \lim\sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt[n]{2\cdot\frac{n^3}{3^n}+1}}{\sqrt[n]{5\cdot\frac{n^4}{4^n}+1}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \implies$$

$\implies$ a sor (abszolút) konvergens

(c) A d'Alembert-féle hányadoskritérium alapján:

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3}\cdot\frac{(n!)^3}{(3n)!} = \lim\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} = \lim\frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2} =$$

$= 9 > 1 \implies$ a sor divergens

3. Határozza meg a

$$\sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}} \cdot (3x-1)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát! *(8 pont)*

Megoldás:

- Átalakítás: $\dfrac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}} \cdot (3x-1)^n = \dfrac{3^n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}} \cdot \left(x - \dfrac{1}{3}\right)^n$
- Konvergenciasugár (Cauchy–Hadamard tétel alapján):

$$\lim \sqrt[n]{\left|\frac{3^n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}\right|} = \lim \frac{3}{\sqrt{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}} = 3 \implies R = \frac{1}{3}$$

- Ha $\left|x - \dfrac{1}{3}\right| < \dfrac{1}{3} \iff 0 < x < \dfrac{2}{3}$, a hatványsor abszolút konvergens,

  ha $\left|x - \dfrac{1}{3}\right| > \dfrac{1}{3} \iff x < 0$ vagy $x > \dfrac{2}{3}$, a hatványsor divergens
- $x = \dfrac{2}{3}$ esetén $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}} \sim \sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, összehasonlító kritérium alapján:

$$\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}} \geq \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n^{1/2}} \geq 0 \quad (n \geq 1) \implies \text{divergens}$$

- $x = 0$ esetén $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}$, Leibniz-kritérium alapján:

$$\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}} \geq 0, \text{ monoton csökkenő, } \lim \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}} = 0 \implies \text{konvergens}$$

- Konvergenciahalmaz: $\left[0, \dfrac{2}{3}\right)$

4. Számítsa ki a következő határértékeket!

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x-2}-x}{\sqrt{x+3}-2}$, *(4 pont)*

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-\cos^2 x}{\sin(2x)-x}$, *(4 pont)*

Megoldás:

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x-2}-x}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x-2-x^2}{x+3-4} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{3x-2}+x} = \lim_{x\to 1} \frac{-x^2+3x-2}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{3x-2}+x} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)(x-2)}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{3x-2}+x} = \lim_{x\to 1}(2-x) \cdot \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{3x-2}+x} = 2$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-\cos^2 x}{\sin(2x)-x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{e^{2x}-1}{x} + \dfrac{1-\cos^2 x}{x}}{\dfrac{\sin(2x)}{x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot \dfrac{e^{2x}-1}{2x} + \dfrac{\sin^2 x}{x}}{2 \cdot \dfrac{\sin(2x)}{2x} - 1} = \frac{2+0}{2-1} = 2,$$

mivel $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ és $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, ha $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

5. Adja meg az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 5x + 6}, & \text{ha } x < 2 \text{ vagy } 2 < x < 3, \\ \dfrac{\sin(x^2 - 9)}{x - 3}, & \text{ha } x > 3, \\ 1, & \text{ha } x = 2 \text{ vagy } x = 3 \end{cases}$$

függvény folytonossági és szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait! *(7 pont)*

Megoldás:

- $f \in C\left(\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}\right)$
- $x = 2$ pontban: $f(2) = 1$,

  $$\lim_{x \to 2 \pm 0} f(x) = \lim_{x \to 2 \pm 0} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2 \pm 0} \frac{x(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 2 \pm 0} \frac{x(x-1)}{(x-2)} = \pm\infty,$$

  tehát f-nek itt másodfajú szakadása van
- $x = 3$ pontban: $f(3) = 1$,

  $$\lim_{x \to 3 - 0} f(x) = \lim_{x \to 3 - 0} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 3 - 0} \frac{x(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 3 - 0} \frac{x(x-1)}{(x-2)} = 6,$$

  $$\lim_{x \to 3 + 0} f(x) = \lim_{x \to 3 + 0} \frac{\sin(x^2 - 9)}{x - 3} = \lim_{x \to 3 + 0} \frac{\sin(x^2 - 9)}{x^2 - 9} \cdot \frac{x^2 - 9}{x - 3} =$$

  $$= \lim_{x \to 3 + 0} \frac{\sin(x^2 - 9)}{x^2 - 9} \cdot (x + 3) = 1 \cdot 6 = 6,$$

  tehát $\exists \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6 \in \mathbb{R}$, de $f(3) \neq 6$, f-nek itt megszüntethető szakadása van