Definiálja a primitív függvényt!

Legyen $I \in \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ egy adott függvény.
AMH a $F : I \to \mathbb{R}$ függvény f primitív függvénye, ha

$$F \in D(I) \quad \text{és} \quad F'(x) = f(x) \qquad (\forall x \in I)$$

Adjon meg olyan függvényt, amelyiknek nincs primitív függvénye!

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ha } x \leq 0 \\ 1, \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Mit jelent egy függvény határozatlan integrálja?

Az I intervallumon értelmezett f függvény primitív függvényeinek a halmazát f határozatlan integráljának nevezzük.
Jelölés:

$$\int f := \int f(x)dx := \{F : I \to \mathbb{R} \mid F \in D \ \text{ és } \ F' = f\}$$

Mit ért a határozatlan integrál linearitásán?

Legyen I nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye és

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx \qquad (x \in I)$$

Mit mond ki a primitív függvényekkel kapcsolatos parciális integrálás tétele?

Legyen I nyílt intervallum.
TFH $f, g \in D(I)$ és az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye I-n.
Ekkor az fg' függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \qquad (x \in I)$$

Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos első helyettesítési szabály?

Legyenek adottak I, J nyílt intervallumok és a $g : I \to \mathbb{R}, f : J \to \mathbb{R}$ függvények.
TFH $g \in D(I), \mathcal{R}_g \subset J$ és az f függvénynek van primitív függvénye.
Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + c \qquad (x \in I)$$

ahol F az f egy primitív függvénye.

Adja meg a következő függvények egy primitív függvényét:

exp

$$\int \exp dx = \exp + C$$

$x^a \qquad (x > 0, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

$\frac{1}{x} \qquad (x > 0)$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

sin

$$\int \sin dx = -\cos x + C$$

cos

$$\int \cos dx = \sin x + C$$

$\frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$