

1.) A 32 lapos kártyacsomagból kihúzzunk 7 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között mind a négy szín előfordul? (1 pont)

- **4-1-1-1 eloszlás:** 1 színből 4 lapot, a többi 3 színből 1-1 lapot húzzunk.

$$E_1 = \binom{4}{1} \binom{8}{4} \binom{8}{1}^3 = 4 \cdot 70 \cdot 512 = 143360$$

- **3-2-1-1 eloszlás:**

$$E_2 = \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{8}{3} \binom{8}{2} \binom{8}{1}^2 = 4 \cdot 3 \cdot 56 \cdot 28 \cdot 64 = 1204224$$

- **2-2-2-1 eloszlás:**

$$E_3 = \binom{4}{1} \binom{8}{1} \binom{8}{2}^3 = 4 \cdot 8 \cdot 28^3 = 32 \cdot 21952 = 702464$$

$$P = \frac{\binom{4}{1} \binom{8}{4} \binom{8}{1}^3 + \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{8}{3} \binom{8}{2} \binom{8}{1}^2 + \binom{4}{1} \binom{8}{1} \binom{8}{2}^3}{\binom{32}{7}} \approx 0,6091$$

2.) Egy urnában K fehér és M fekete golyó van. Visszatevés nélkül kihúztunk n golyót, s ebből k lett fehér és $n - k$ fekete. Mi a valószínűsége, hogy az első húzás eredménye fehér golyó volt, ha a golyók számozottak? (2 pont)

Mivel a golyók sorszámozottak (megkülönböztethetőek), és a húzás teljesen véletlenszerű, a kihúzott k fehér golyó egyforma eséllyel helyezkedhet el a húzási sorrend bármelyik pozíciójában.

$$P = \frac{k}{n}$$

- 3.) Aladár és Béla pingpongoznak. Minden labdamenetet, egymástól függetlenül, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel Aladár, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel Béla nyer meg. A jelenlegi állás 20:19 Béla javára. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a meccset mégis Aladár nyeri meg? (Az nyer, akinek sikerül legalább két pontos előny mellett legalább 21 pontot szerezni.) (3 pont)

Két dolognak kell teljesülnie ahhoz, hogy Aladár nyerjen:

1. **Játékban kell maradnia:** Meg kell nyernie a következő labdamenetet, különben Béla 21:19-re győz. Ennek valószínűsége $p = \frac{1}{3}$. Ha ez sikerül, az állás **20:20**.
2. **Meg kell nyernie a meccset egyenlő állásról:** 20:20-ról 2 pont különbséggel kell nyerni. Jelöljük x -szel annak a valószínűségét, hogy Aladár nyer egyenlő állásról.

A következő két labdamenetben 3 dolog történhet:

- Aladár megnyeri mindkettőt (nyer): p^2
- Béla megnyeri mindkettőt (veszít): q^2
- Mindketten nyernek 1-1 pontot, és újra egyenlő (az esély újra x lesz): $2pq$

Ebből felírhatunk egy egyenletet x -re:

$$x = p^2 + 2pq \cdot x$$

$$x(1 - 2pq) = p^2 \Rightarrow x = \frac{p^2}{1 - 2pq}$$

Helyettesítsük be a számokat ($p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$):

$$x = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{1}{5}$$

Tehát egyenlőről 20% esélye van nyerni. De ne feledjük, előbb ki kellett egyenlítenie! A teljes valószínűség:

$$P(\text{Aladár nyer}) = p \cdot x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

- 4.) $2N$ darab molekula mindegyike egymástól függetlenül, véletlenszerűen kerül N darab térrész valamelyikébe. Mennyi a valószínűsége, hogy mindegyik térrészben lesz legalább egy molekula?

A kedvező eset az, amikor **egyik térrész sem üres**.

$$P = \frac{\sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{N}{i} (N-i)^{2N}}{N^{2N}}$$