

A koordináta-függvények szerepe a differenciálhatóságban

Legyen $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \text{int } Df$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ ($f_i \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$). Ekkor

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad f \in D\{a\} &\iff \forall i = 1, \dots, m : f_i \in D\{a\} \\ 2^\circ \quad f \in D\{a\} &\implies f'(a) = \begin{bmatrix} \text{grad } f_1(a) \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(a) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bizonyítás

Deriválhatóság definíciójából

$$\begin{aligned} \implies \quad f(a+h) - f(a) &= A \cdot h + \eta(h) \cdot \|h\| \iff \forall i = 1, \dots, m : \\ f_i(a+h) - f_i(a) &= \langle d_i, h \rangle + \eta_i(h) \cdot \|h\| \\ \text{ahol } A = f'(a) &= \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}, \text{ és } \eta = (\eta_1, \dots, \eta_m), \\ \lim_0 \eta_i &= 0 \implies f_i \in D\{a\} \text{ és } f'_i(a) = \text{grad } f_i(a) = d_i \\ &\iff \text{Visszafelé ugyanezt csináljuk.} \end{aligned}$$

A Jacobi-mátrix kiszámítása

A Jacobi-mátrix a parciális deriváltakból áll. Ha deriválható a függvény, akkor ez a derivált-mátrix.

$$f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, f \in D\{a\} \implies$$

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \dots & \partial_n f_m(a) \end{bmatrix}$$