

Analízis II. bizonyítandó tételek

1. A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása lineáris megközelítéssel

Tétel:

Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$.

Ekkor

$$\begin{aligned} f \in D\{a\} &\iff \exists A \in \mathbb{R} \text{ és } \exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0 : \\ f(x) - f(a) &= A(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f), \end{aligned}$$

és $A = f'(a)$.

Bizonyítás:

$\implies :$

$$f \in D\{a\} \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0$$

Ha

$$\varepsilon(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \quad (x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}),$$

akkor $\lim_a \varepsilon = 0$ és

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f),$$

ezért a feltétel az $A = f'(a)$ választással teljesül.

$\Leftarrow :$

TFH $\exists A \in \mathbb{R}$ és $\exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0$, hogy

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Ebből

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \varepsilon(x) \rightarrow A, \quad \text{ha } x \rightarrow a$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A$.

□

2. A szorzatfüggvény deriválása

Tétel:

TFH, $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \text{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ pontban. Ekkor

$$f \cdot g \in D\{a\} \text{ és } (f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

Bizonyítás:

Világos, hogy $a \in \text{int}\mathcal{D}_{f \cdot g}$. Az $f \cdot g$ függvény különbséghányados-függvénye az a pontban

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \stackrel{!}{=} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g(x)}{x - a} = \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \quad (x \in \mathcal{D}_{f \cdot g} \setminus \{a\}). \end{aligned}$$

Mivel $g \in D\{a\}$, ezért $g \in C\{a\}$, tehát $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$. Így

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) + \lim_{x \rightarrow a} f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \\ &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $f, g \in D\{a\}$ és

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

3. A hányadosfüggvény deriválása

Tétel:

TFH, $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \text{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ pontban, és $g(a) \neq 0$. Ekkor

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \text{ es } \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Bizonyítás:

Először igazoljuk, hogy $a \in \text{int}\mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$.

Valóban: $g \in D\{a\} \implies g \in C\{a\}$.

Tehát $g(a) \neq 0 \implies \exists K(a) \subset \mathcal{D}_f : g(x) \neq 0 (\forall x \in K(a)) \implies a \in \text{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$

Az $\frac{f}{g}$ hányadosfüggvény különbséghányados-függvénye a -ban

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} = \frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{x - a} = \\ &= \frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \end{aligned}$$

Mivel $g \in C\{a\} \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \neq 0$, ezért

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} = \\ &= \frac{1}{g(a) \lim_{x \rightarrow a} g(x)} \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \\ &= \frac{1}{g^2(a)} (f'(a)g(a) - f(a)g'(a)). \end{aligned}$$

□

4. A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel

Tétel:

TFH az f függvénynek az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban lokális szélsőértéke van és $f \in D\{a\}$. Ekkor

$$f'(a) = 0$$

Bizonyítás:

TFH f -nek a -ban lokális maximuma van, azaz $\exists r > 0$:

$$\forall x \in (a - r, a + r) : f(x) \leq f(a) \implies f(x) - f(a) \leq 0.$$

Tekintsük az f függvény a -hoz tartozó különbséghányados-függvényét:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}).$$

Ha $a < x < a + r \implies x - a > 0$ és $f(x) - f(a) \leq 0 \implies$

$$\implies \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 \implies \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) \leq 0.$$

Ha $a - r < x < a \implies x - a < 0$ és $f(x) - f(a) \leq 0 \implies$

$$\implies \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \implies \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_-(a) \geq 0.$$

Mivel $f \in D\{a\}$, ezért

$$\underbrace{f'_-(a)}_{\geq 0} = \underbrace{f'_+(a)}_{\leq 0} = f'(a) = 0$$

□

5. A Rolle-féle középértéktétel

Tétel:

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} f \in C[a, b] \\ f \in D(a, b) \\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \implies \exists \xi \in (a, b), \text{ hogy } f'(\xi) = 0.$$

Bizonyítás:

$$f \in C[a, b] \implies (\text{Weierstrass-tétel}) \exists \alpha, \beta \in [a, b] :$$

$$f(\alpha) = \min_{[a, b]} f =: m \quad \text{és} \quad f(\beta) = \max_{[a, b]} f =: M.$$

- 1. eset: $m = M$.

Ekkor f állandó, így $\forall \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

- 2. eset: $m \neq M$.

Mivel $f(a) = f(b)$, ezért α és β közül legalább az egyik (pl. α) (a, b) -be esik.

Ekkor $\xi := \alpha \in \text{int } \mathcal{D}_f = (a, b)$, és f -nek ξ -ben lokális minimuma van.

Mivel $f \in D\{\xi\} \implies$ (az elsőrendű szükséges feltétel) $f'(\xi) = 0$.

□

6. A Lagrange-féle középértéktétel

Tétel:

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} f \in C[a, b] \\ f \in D(a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \xi \in (a, b), \text{ hogy } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bizonyítás:

Az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon átmenő szelő egyenesének az egyenlete:

$$y = h_{a,b}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

igazoljuk, hogy az

$$F(x) := f(x) - h_{a,b}(x) \quad (x \in [a, b])$$

függvény kielégíti a Rolle-féle középértéktétel feltételeit.

Valóban, f és $h_{a,b}$ mindketten folytonosak $[a, b]$ -n és deriválhatók (a, b) -n, ezért a különbségük, F szintén rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Továbbá

$$F(a) = f(a) - h_{a,b}(a) = f(a) - f(a) = 0,$$

$$F(b) = f(b) - h_{a,b}(b) = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a) \right) = 0,$$

tehát $F(a) = F(b)$ is teljesül. A Rolle-féle tétel alapján tehát van olyan $\xi \in (a, b)$ pont, amelyre

$$F'(\xi) = f'(\xi) - h'_{a,b}(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

következésképpen

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

7. A Cauchy-féle középértéktétel

Tétel:

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ekkor

$$\left. \begin{array}{l} f, g \in C[a, b] \\ f, g \in D(a, b) \\ \forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0 \end{array} \right\} \implies \exists \xi \in (a, b), \text{ hogy } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Bizonyítás:

A Rolle-tételből következik, hogy $g(a) \neq g(b)$.

Valóban, $g(a) = g(b)$ -ből az következne, hogy g deriváltja nulla az (a, b) intervallum legalább egy pontjában, amit kizártunk.

Legyen

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) \quad (x \in [a, b])$$

Az F függvény folytonos $[a, b]$ -n, deriválható (a, b) -n és $F(a) = F(b) = 0$. Így a Rolle-tétel szerint létezik olyan $\xi \in (a, b)$, amelyre $F'(\xi) = 0$. Ekkor

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(\xi).$$

Mivel a feltételeink szerint $g'(\xi) \neq 0$, ezért azt kapjuk, hogy

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

□

8. Nyílt intervallumon értelmezett deriválható függvények esetében a monotonitás és a derivált kapcsolata.

Tétel:

Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum.

TFH $f \in D(a, b)$. Ekkor

1. $f \nearrow [\searrow] (a, b)$ -n $\iff f' \geq 0$ [$f' \leq 0$] (a, b) -n;
2. ha $f' > 0$ [$f' < 0$] (a, b) -n $\implies f \uparrow [\downarrow] (a, b)$ -n.

Bizonyítás:

1.

\implies :

Ha $f \nearrow (a, b)$ -n és $t \in (a, b)$ egy tetszőleges pont, akkor

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} \geq 0 \quad (t < x < b),$$

hiszen $x - t > 0$ és a monotonitás miatt $f(x) - f(t) \geq 0$. Mivel $f \in D\{t\}$, így

$$f'(t) = f'_+(t) = \lim_{x \rightarrow t+0} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \geq 0.$$

\Leftarrow :

Ha $\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0$, akkor legyen $x, y \in (a, b)$, $x < y$ két tetszőleges pont.

Ekkor $f \in C[x, y]$, $f \in D(x, y)$, és így a Lagrange-féle középértéktétel szerint

$$\exists \xi \in (x, y) : \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \geq 0 \implies f(x) \leq f(y).$$

Ezért $f \nearrow (a, b)$ -n.

Az állítás hasonlóan igazolható monoton csökkenő függvények esetén is.

2.

Alkalmazzunk "éles" egyenlőtlenségeket 1.-ben a \Leftarrow irányban.

□

9. A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel.

Tétel:

Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

TFH

- $f \in D(a, b)$
- egy $c \in (a, b)$ pontban $f'(c) = 0$
- az f' deriváltfüggvény előjelet vált c -ben.

Ekkor

1. ha az f függvénynek c -ben $(-, +)$ előjelváltása van, akkor c az f függvénynek szigorú lokális minimumhelye.
2. ha az f függvénynek c -ben $(+, -)$ előjelváltása van, akkor c az f függvénynek szigorú lokális maximumhelye.

Bizonyítás:

Az állítás azonnal következik a monotonitás és a derivált kapcsolatáról szóló tételből, hiszen ha az f függvénynek c -ben $(-, +)$ előjelváltása van, akkor

$\exists \delta > 0$ úgy hogy

$f' < 0$ $(c - \delta, c)$ -n és

$f' > 0$ $(c, c + \delta)$ -n

Ezért

$f \downarrow (c - \delta, c]$ -n, és

$f \uparrow [c, c + \delta)$ -n.

Emiatt $\forall x \in (c - \delta, c + \delta) : f(x) > f(c)$, tehát c az f függvénynek szigorú lokális minimumhelye.

Az állítás hasonlóan igazolható $(+, -)$ előjelváltás esetén.

□

10. A konvexitás jellemzése a deriváltfüggvénnyel.

Tétel:

TFH $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f \in D(I)$. Ekkor

$$f \text{ konvex } I\text{-n} \iff f' \nearrow I\text{-n.}$$

Bizonyítás:

\implies :

Legyen

$u, v \in I$

$u < v$ tetszőleges

$x \in (u, v)$ is tetszőleges

TFH f konvex I -n. Ekkor

$$f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u) \quad \text{és} \quad f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - v) + f(v)$$

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(x) - f(v)}{x - v}$$

Vegyük itt az $x \rightarrow u$ ill. az $x \rightarrow v$ határátmenetet:

$$f'(u) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq f'(v)$$

Tehát $f' \nearrow I$ -n.

\Longleftarrow :

TFH $f' \nearrow I$ -n.

Legyen

$u, v \in I$

$u < v$ tetszőleges

$x \in (u, v)$ is tetszőleges

Ekkor a Lagrange-féle középértéktétel szerint

$\exists \xi_1 \in (u, x)$ és $\exists \xi_2 \in (x, v)$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \quad \text{és} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(v) - f(x)}{v - x}$$

Mivel $f' \nearrow I$ -n, ezért $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ vagyis

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(v) - f(x)}{v - x} \iff f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u)$$

Tehát f konvex I -n.

□

11. A véges pontbeli $\frac{0}{0}$ határérték esetre vonatkozó L'Hospital-szabály.

Tétel:

Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$ és $f, g \in D(a, b)$.

TFH

- $\exists \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0$
- $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- $\exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$

Ekkor

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Bizonyítás:

1. eset $a > -\infty$ (véges)

Legyen $A := \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$, azaz

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in (a, a + \delta) \subset (a, b) : \frac{f'(y)}{g'(y)} \in K_\varepsilon(A)$$

Igazoljuk hogy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a + \delta) \subset (a, b) : \frac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A)$$

Legyen

$$f(a) := 0 \quad \text{és} \quad g(a) := 0$$

Ekkor a $\lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0$ feltételből következik, hogy $f, g \in C[a, a + \delta)$

Legyen most $x \in (a, a + \delta)$ tetszőleges pont. A Cauchy-féle középértéktétel feltételei az f és a g függvényre az $[a, x]$ intervallumon teljesülnek. Így $\exists \varepsilon_x \in (a, x)$, amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon_x)}{g'(\varepsilon_x)} \in K_\varepsilon(A)$$

Tehát $\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g}$ és $\lim_{a+0} \frac{f}{g} = A$

2. eset $a = -\infty$

nem bizonyítjuk.

□

12. A Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.

Tétel:

Legyen $n \in \mathbb{N}$

TFH $f \in D^{n+1}(K(a))$

Ekkor $\forall x \in K(a)$ ponthoz \exists olyan a és x közé eső ξ szám, hogy

$$f(x) - T_{a,n}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Bizonyítás:

Cauchy-féle középértéktétellel.

Legyen

$$F(x) := f(x) - T_{a,n}f(x) \quad (x \in K(a))$$

A $T_{a,n}f$ polinom definíciójából következik, hogy

$$F^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) - (T_{a,n}f)^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Továbbá, $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$, hiszen $(T_{a,n}f)^{(n+1)} \equiv 0$, mert $T_{a,n}f$ egy legfeljebb n -edfokú polinom.

Másrészt, legyen $G(x) := (x-a)^{n+1} \quad (x \in K(a))$.

Ekkor

$$\forall x \in K(a) :$$

$$G'(x) = (n+1)(x-a)^n,$$

$$G''(x) = n(n+1)(x-a)^{n-1},$$

...

$$G^{(n)}(x) = (n+1)!(x-a),$$

amiből következik, hogy

$$G^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad \text{és} \quad G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

TFH $x \in K(a)$ és például $x > 0$.

Az F és G függvényekre az $[a, x]$ intervallumon alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel:

$$\exists \xi_1 \in (a, x) : \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f(x) - T_{a,n}f(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

A Cauchy-féle középértéktételt most az F' és a G' függvényekre az $[a, \xi_1]$ intervallumon alkalmazzuk:

$$\exists \xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a, x) : \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}$$

Ha a fenti gondolatmenetet n -szer megismételjük, akkor a k -dik lépésben ($k = 1, 2, \dots, n$) :

$$\exists \xi_{k+1} \in (a, \xi_k) \subset (a, x) :$$

$$\frac{F^{(k+1)}(\xi_{k+1})}{G^{(k+1)}(\xi_{k+1})} = \frac{F^{(k)}(\xi_k) - F^{(k)}(a)}{G^{(k)}(\xi_k) - G^{(k)}(a)} = \frac{F^{(k)}(\xi_k)}{G^{(k)}(\xi_k)}.$$

az n számú lépés után kapott egyenlőségeket egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - T_{a,n}(f, x)}{(x - a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \dots = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!},$$

hiszen $\forall x \in K(a) : F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}$ és $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$.

A konstrukcióból látható, hogy ξ_{n+1} az a pont és x között van, ezért a $\xi := \xi_{n+1}$ választással a bizonyítandó állítást kapjuk.

□