Diszkrét matematika I.

3. Zh – keddi feladatsor

(2025. tavasz)

1. a) Igaz-e, hogy bárhogyan adunk meg 7 különböző természetes számot, mindig lesz köztük 3, melyeknek az összege osztható 3-mal? Ha igaz, bizonyítsd, ha nem igaz, adj ellenpéldát! **(3p)**

Megoldás: IGAZ. Skatulya-elv segítségével belátható, ha jól választjuk a skatulyákat: három skatulya legyen, az egyikben a hárommal maradékosan osztva 1 maradékot adó számok, a másikban a hárommal maradékosan osztva 2 maradékot adó számok, a harmadikban a hárommal (maradék nélkül) osztható számok. Hét szám esetén nem lehet, hogy mindegyik skatulyában legfeljebb kettő-kettő legyen. És ha van három szám, aminek ugyanaz a 3-mal vett osztási maradéka, akkor ezek összege osztható hárommal.

b) Az e-mail szerver 3 különböző e-mailt továbbít 3 különböző címzettnek. Mindhárom címzett egy-egy levelet kapott, mindhárom levél meg is érkezett, azonban egyik sem a megfelelő címzetthez. Hányféleképpen lehetséges ez? **(3p)**

Megoldás: Az összes lehetséges permutáció ($3! = 6$) közül most azok a ,,rosszak", amikél legalább az egyik levél a megfelelő címzetthez jutott el. Háromféleképpen lehet tehát ,,rossz" egy perutáció: 1. ha az első címzett a neki címzett levelet kapta (ilyenből $2! = 2$ van), 2. ha a második címzett a neki címzett levelet kapta (ilyenből is $2! = 2$ van), és 3. ha a harmadik címzett a neki címzett levelet kapta (ilyenből is $2! = 2$ van). Ezen három ,,rossz" est közül bármelyik kettő egyszerre is teljesülhet (de akkor a harmadik is automatikusan teljesül: ha pl. az első két címzett is a aját levelét kapta, akkor a harmadiknak is a saját levele jut), így bármely kétszeres metszet és a háromszoros metszet is csak azt az egyetlen sorrendet tartalmazza, amikor mindenki a saját levelét kapta. Logikai szitaformula segítségével (ahol H az összes permutációk halmaza, A_i azon permutációk halmaza, ahol i-edik címzett a saját levelét kapja) tehát: $|H|-|A_1|-|A_2|-|A_2|+|A_1\cap A_2|+|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3| = 3!-2!-2!-2!+1!+1!+1!-0! = 6-2-2-2+1+1+1-1 = 2$.

Másik megoldás: Az első címzett nem a neki címzett levelet kapta, tehát vagy a 2. vagy a 3. címzettét. Ez két lehetőség, esetszétválasztással: Az első esetben a másik két címzett számára az 1. és a 3. levél megy, de a 3. címzettnek sem szabad a saját levelét kapnia, azaz ő csak az 1. levelét kaphatja (és így a 2. címzett a 3. levelet). Hasolóan a második esetben is csak egyféleképpen alakulhat a további két levél sorsa. Azaz $1 + 1 = 2$ lehetőség van.

2. Egy teázóban kínai zöld tea, kínai fekete tea, tajvani zöld tea, indiai fekete tea, matcha tea és ceyloni fekete tea kapható.

a) Hányféleképpen rendelhetünk 4 csésze teát, ha a csészék egyformák? **(2p)**

Megoldás: A csészék egyformák, tehát nem számít a sorrend. Tehát a 6 féle teából választunk összesen 4-et, de egyféléből többet is választhatunk, viszont a sorrend nem számít, csak az, hogy melyik fajtából hány csészével rendelünk. Ez ismétléses kombináció: $\binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4}$.

b) Hányféleképpen rendelhetünk 4 csésze teát, ha a csészék egyformák, és mindenképpen szeretnénk 2 ceylonit? **(2p)**

Megoldás: Mivel nem számít a sorrend (gyformák a csészék), gondolhatjuk úgy,h az első két csészébe ceylonit kérünk, és a maradék két csészébe tetszőlegesen. Azaz most a 6 féle teából választunk összesen kettőt, de egyféléből többet is választhatunk, viszont a sorrend nem számít, csak az, hogy melyik fajtából hány csészével rendelünk. Ez ismétléses kombináció: $\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2}$.

c) Hányféleképpen tölthet ki a pincér 9 csésze teát, ha a csészék különböző mintájúak? **(2p)**

Megoldás: Ha különbözők a csészék, akkor „számít a sorrend”, vagyis van értelme „első csészéről”, „második csészéről” és így tovább beszéli. A pincér 6 féle teát tölthet az első csészébe is, hatfélét a másodikba is, és így tovább, egymás utáni független döntések: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^9$ (vagy akinek úgy jobban tetszik: ismétléses variáció).

d) Hányféleképpen tölthet ki a pincér 9 csésze teát, ha a csészék különböző mintájúak, és mindenképpen tölt két ceylonit? **(2p)**

Megoldás: Az előbb kiszámolt 6^9 összes lehetőség között rosszak azok, amikor egyáltalán nem tölt ceylonit (vagyis mind a kilenc csészét csak ötféle tea közül választva tölti meg, ilyenből 5^9 féle lehetőség van), és rossz az is, amikor pontosan egy ceylonit tölt. Ez utóbbi esetben $\binom{9}{1} = 9$ féleképpen dőlhet el, hogy melyik legyen az az egy csésze, amibe ceyloni kerül, és a többi 8 csészét csak a maradék ötféle tea közül töltheti meg 5^8 féleképpen (egymás utáni független döntések, azaz összesen $9 \cdot 5^8$ lehetőség van rá). A kétféle rossz kizárja egymást, nem kell a metszettel törődni, a lehetséges kitöltések száma tehát: $6^9 - 5^9 - 9 \cdot 5^8 = 6^9 - 14 \cdot 5^8$.

3. a) Hány $f : \{0, 1, \ldots 9\} \to \{0, 1, \ldots, 14\}$ függvény létezik? **(3p)**

Megoldás: Egymástól függetlenül eldöntendő, hogy f milyen értéket vesz fel 0, 1, 2, …, 9 számokra: $f(0)$ is 15-féle lehet, $f(1)$ is 15-féle lehet, és így tovább: azaz $15 \cdot 15 \cdots 15 \cdot 15 = 15^{10}$ féle ilyen függvény van.

b) Hány $f : \{0, 1, \ldots 9\} \to \{0, 1, \ldots, 14\}$ *szigorúan monoton* függvény létezik? **(3p)**

Megoldás: Ha szigorúan monoton a függvény, akkor vagy szigorúan monoton növő, vagy szigorúan monoton fogyó. Mindkét esetben biztosan injektív, hiszen $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$, illetve $f(x) > f(y)$, de nem lehet $f(x) = f(y)$. Azaz a függvény értékkészlete egy pontosan 10-elemű részhalmaza $\{0, 1, \ldots, 14\}$ halmaznak. Ha már megvan az értékkészlet, akkor ennek a 10 számnak a szigorúan monoton növekvő sorozata és a szigorúan monoton csökkenő sorozata ad egy-egy ilyen függvényt. (Az $f(0), f(1), \ldots, f(9)$ sorozat egyértelműen meghatározza az f függvényt, és az f függvény is egyértelműen meghatározza ezt a sorzatot.) Tehát $\binom{15}{10} + \binom{15}{10} = 2 \cdot \binom{15}{10}$ ilyen függvény van.