10. gyakorlat

Definíció: Jobb oldali hatványfüggvény

$$(x - x_k)_+^\ell := \begin{cases} (x - x_k)^\ell & \text{ha } x \geq x_k \\ 0 & \text{ha } x < x_k \end{cases}$$

Tétel: Globális spline bázis

1. Az $1, x, \dots, x^\ell, (x - x_1)_+^\ell, \dots, (x - x_{n-1})_+^\ell$ függvényrendszer lineárisan független $S_\ell(\Omega_n)$-en.

2. Bármely $S \in S_\ell(\Omega_n)$ egyértelműen előállítható a fenti rendszerrel.

3. $\dim S_\ell(\Omega_n) = n + \ell$

Megjegyzés

Ezek annyiban térnek el az eddigi feladatoktól, hogy most minden intervallumra külön felírt P_i függvény helyett egy globális bázist használunk, a lineáris kombinációs együtthatókra fogjuk felírni a LER-t.

1. feladat

Írjuk át a 8. gyakorlat 5. feladat b) részének megoldásában az $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \ x \in [-1; 1]$ másodfokú spline interpolációjaként felírt spline-t globális bázisba!

2. feladat

Legyen $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \ x \in [-1; 1]$. Interpoláljuk a függvényt a $-1, 0, 1$ alappontokon a tanult globális bázisban (egyoldali hatványfüggvényekkel) másodfokú spline-nal $f'(-1) = 0$ peremfeltétellel.

3. feladat

Legyen $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \ x \in [0; 4]$. Interpoláljuk a függvényt a $0, 1, 2, 3, 4$ alappontokon a harmadfokú spline-nal, periodikus peremfeltétellel a tanult globális bázisban (egyoldali hatványfüggvényekkel).

a) Készítsük el a LER-t a feladat megoldásához,

b) majd oldjuk meg Matlabbal és rajzoljuk fel a spline-t és a függvényt.

Definíció: A legkisebb négyzetek módszerének alapfeladata

Adottak az $x_1, \ldots, x_N \in [a;b]$ különböző alappontok, $y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}$ függvényértékek vagy mérési eredmények. Olyan $p_n \in P_n$ polinomot keresünk ($n+1 \leq N$, általában $N \gg n$), melyre

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - p_n(x_i))^2 \text{ minimális.}$$

A p_n polinomot *négyzetesen legjobban közelítő polinomnak* nevezzük.

Definíció: Legkisebb négyzetek módszere

1. Írjuk fel a $p_n(x_i) = y_i$, $(i = 1, \ldots, N)$ LER-t mátrix alakban, ahol

$$p_n(x) := a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0.$$

2. Vezessük be hozzá a következő jelöléseket:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_N & \ldots & x_N^n \end{bmatrix}_{N\times(n+1)} \qquad a := \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{n+1\times 1} \qquad y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}_{N\times 1} .$$

3. A kapott $A \cdot a = y$ LER klasszikus értelemben nem oldható meg, hiszen $N > n+1$ esetén több egyenletünk van, mint ismeretlenünk.

4. Túlhatározott eset általánosított megoldásra a Gauss-féle normálegyenleteket kapjuk:

$$a^+ = A^+ y = (A^T A)^{-1} \cdot A^T y \quad \Leftrightarrow \quad A^T A \cdot a^+ = A^T y.$$

5. A szimmetrikus LER alakja:

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \cdots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \cdots & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n y_i \end{bmatrix} .$$

Ennek a LER-nek a megoldása lesz a négyzetesen legjobban közelítő polinom együtthatói. (ld. előadás, hogy miért)

4. feladat

Közelítsük a koordinátarendszer $(-1;1), (0;2), (1;2)$ pontjait négyzetesen legjobban közelítő

a) elsőfokú polinommal,

b) másodfokú polinommal,

c) harmadfokú polinommal.

1. megoldás

Mivel $x \in [-1;0]$ esetén
$$S(x) = P_1(x),$$
ezért a spline alakja globális bázisban:
$$S(x) = P_1(x) + \beta(x-0)_+^2.$$
Azaz $x \in [0;1]$ esetén
$$P_2(x) = S(x) = P_1(x) + \beta(x-0)_+^2,$$
így
$$P_2(x) - P_1(x) = (-x^2+2x) - (x^2+2x) = -2x^2 = \beta(x-0)_+^2 \quad \Rightarrow \beta = -2.$$
Tehát
$$S(x) = x^2 + 2x - 2(x-0)_+^2.$$

Megjegyzés

Ebben a feladatban egy intervallumonként ismert spline-nak egy másik alakját írtuk fel globális bázis elemekkel. Tehát itt nem a spline tulajdonságok ellenőrzése volt a feladat.

2. megoldás

Megjegyzés

Amikor egy feladat azt kéri, hogy írjuk fel a spline-t globális bázisban, akkor általában erre a megoldási módra gondol, nem az előzőre.

A spline alakja globális bázisban:
$$S(x) = ax^2 + bx + c + \beta(x-0)_+^2$$
$$S'(x) = 2ax + b + 2\beta(x-0)_+$$

Megjegyzés

Ebben az esetben csak az interpolációs és peremfeltételeket kell felírnunk, hiszen a globális bázis használata biztosítani fogja a spline feltételeket.

Interpolációs feltételek:

$$\begin{aligned} S(-1) &= \ a - b + c = -1 \\ S(0) &= \ c = 0 \\ S(1) &= \ a + b + c + \beta = 1 \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $c = 0$ és $b = a + 1$ Peremfeltétel:

$$S'(-1) = \ -2a + b = 0$$

Melyből az következik, hogy

$$\begin{aligned} 0 = -2a + b = -2a + (a+1) \quad &\Rightarrow a = 1, b = 2 \\ \Rightarrow 1 = a + b + c + \beta = 1 + 2 + \beta = 1 \quad &\Rightarrow \beta = -2 \end{aligned}$$

Tehát a keresett spline:

$$S(x) = x^2 + 2x - 2(x-0)^2_+$$

(Látható, hogy ugyan azt kaptuk, mint az előző feladatnál.)

Megjegyzés

Ezt a globális bázisban megadott spline-t is fel lehet írni intervallumonkénti polinom alakban, csak az egyoldali hatványfüggvények definícióját kell pontosan ismerni hozzá.

3. megoldás

a) A spline alakja:

$$\begin{aligned} S(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d + \beta_1(x-1)^3_+ + \beta_2(x-2)^3_+ + \beta_3(x-3)^3_+ \\ S'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c + 3\beta_1(x-1)^2_+ + 3\beta_2(x-2)^2_+ + 3\beta_3(x-3)^2_+ \\ S''(x) &= 6ax + 2b + 6\beta_1(x-1)_+ + 6\beta_2(x-2)_+ + 6\beta_3(x-3)_+ \end{aligned}$$

(7 ismeretlen)

Megjegyzés

Annyi jobboldali hatványfüggvény kell, ahány függvényre bontanánk szét a spline-t minusz egy, az $x_1, \ldots, x_{n-1}$ alappontokhoz tartozóak.

Interpolációs feltétel:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \ S(0) = d = 0\\
&(2)\ \ S(1) = a + b + c + d = 1\\
&(3)\ \ S(2) = 8a + 4b + 2c + d + \beta_1 \cdot 1^3 = 0\\
&(4)\ \ S(3) = 27a + 9b + 3c + d + \beta_1 \cdot 2^3 + \beta_2 \cdot 1^3 = -1\\
&(5)\ \ S(4) = 64a + 16b + 4c + d + \beta_1 \cdot 3^3 + \beta_2 \cdot 2^3 + \beta_3 = 0
\end{aligned}$$

Periodikus peremfeltétel:

$$\begin{aligned}
&(6)\ \ S'(0) = S'(4): &c = 3a \cdot 4^2 + 2b \cdot 4 + c + 3\beta_1 \cdot 3^2 + 3\beta_2 \cdot 2^2 + 3\beta_3 \cdot 1^2\\
&(7)\ \ S''(0) = S''(4): &2b = 6a \cdot 4 + 2b + 6\beta_1 \cdot 3 + 6\beta_2 \cdot 2 + 6\beta_3 \cdot 1
\end{aligned}$$

melyekből következik, hogy

$$\begin{aligned}
&(6)\ \ 48a + 8b + 27\beta_1 + 12\beta_2 + 3\beta_3 = 0\\
&(7)\ \ 24a + 18\beta_1 + 12\beta_2 + 6\beta_3 = 0
\end{aligned}$$

Ez LER-ként felírva:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 27 & 9 & 3 & 1 & 8 & 1 & 0\\ 64 & 16 & 4 & 1 & 27 & 8 & 1\\ 48 & 8 & 0 & 0 & 27 & 12 & 3\\ 24 & 0 & 0 & 0 & 18 & 12 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ -1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Lásd: gyakorlathoz kapcsolódó gyak10.mlx fájl.

4. megoldás

a) Keresett polinom alakja: $P_1(x) = p_1x + p_0$.

Ebből felírt LER:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0\\ p_1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 2 \end{bmatrix}$$

Ez nem megoldható. $rang(A) = 2$, túlhatározott eset.

$$N = 3,\ \ \sum x_i = 0,\ \ \sum x_i^2 = 2,\ \ \sum y_i = 5,\ \ \sum x_iy_i = 1$$

Így:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Amely megoldása: $p_0 = \frac{5}{3}, p_1 = \frac{1}{2}$. Tehát: $P_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{3}$.

b) Klasszikus értelemben megoldható LER $\rightarrow$ interpoláció.

Keresett polinom alakja: $P_2(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$.

Ebből felírt LER:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ez megoldható és ennek megoldása: $p_2 = -\frac{1}{2}, p_1 = \frac{1}{2}, p_0 = 2$. Tehát a keresett polinom: $P_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$ (Ez át fog menni a pontokon.)

c) Keresett polinom alakja: $P_2(x) = p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0$.

Ebből felírt LER ($Ax^+ = b$ alakú):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$rang(A) = 3$, alulhatározott eset, azaz végtelen sok megoldás van.

x^+ a legkisebb normájú megoldás

$$AA^Ty = b \text{ és } x^+ = A^Ty$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Gauss eliminációt használva számoljuk ki az y-t:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3/4 & 1 & 7/4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 8/3 & -1/3 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$y_3 = -\frac{1}{8},\ y_2 = \frac{5}{2},\ y_1 = -\frac{3}{8}$$

És így

$$x^+ = A^T y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Tehát a keresett polinom: $P_3(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + 2$.