

# Diszkrét matematika I. feladatok

## Halmazok

Második alkalom (2025.02.17-21.)

### Bemelegítő feladatok

1. Legyenek  $x = \{\text{alma, szilva}\}$  és  $y = \{\text{kutya, macska}\}$  halmazok. Az alábbi halmazok közül melyekre igaz, hogy  $x$  eleme,  $x$  részhalmaza,  $x$  se nem eleme, se nem részhalmaza:  $\{\{x\}, y\}$ ,  $x$ ,  $\{\emptyset\} \cap x$ ,  $\{x\} \setminus \{\{x\}\}$ ,  $\{x\} \cup x$ ,  $\{x\} \cup \{\emptyset\}$ ?

2. Keressen olyan  $A, B, C$  halmazokat, melyekre egyszerre teljesülnek a következők:

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset.$$

3. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést:  $(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C)$ .

### Gyakorló feladatok

4. Bizonyítsa be logikai formulák segítségével a következő azonosságokat:

$$\text{a) } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \quad \text{b) } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \text{c) } A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

5. Bizonyítsa be a következő azonosságokat az előző feladat segítségével!

- a)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ ;
- b)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;
- c)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

### Érdekes feladatok

6. Fejezze ki a  $\Delta$  és  $\cap$  segítségével a következő halmazokat:  $A \setminus B$  és  $A \cup B$ .

7. Bizonyítsa be a következő azonosságokat.

- a)  $A \Delta \emptyset = A$
- b)  $A \Delta A = \emptyset$
- c)  $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
- d)  $A \Delta (A \Delta B) = B$

### Beadandó házi feladatok

8. Léteznek-e olyan  $A, B, C$  halmazok, melyekre egyszerre teljesülnek a következők (**részenként 1 pont**):

$$\text{a) } A \Delta B \neq \emptyset, \quad (A \cup B) \setminus C = \emptyset, \quad C \setminus A \neq \emptyset$$

b)  $A \cup \overline{B} \neq \emptyset, \quad B \setminus \overline{C} = \emptyset, \quad A \cup C = \emptyset$

Ha igen, mutasson példát, ha nem, indokoljon!

9. Legyenek  $A$  és  $B$  nemüres halmazok. Bizonyítsa a következő egyenlőségeket (**részenként 1/2 pont**):

a)  $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$

b)  $(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{B}$