(Hf) a) Korlátos-e az alábbi halmaz? Adja meg a $\sup A$ és $\inf A$ eredményét!

$$A := \left\{ \frac{1}{x^2} \;\middle|\; 0 < x \leq 1 \right\}$$

Megoldás.

– A halmaz alulról korlátos, mert minden eleme pozitív. Másrészt,

$$0 < x \leq 1 \implies 0 < x^2 \leq 1 \implies 1 \leq \frac{1}{x^2}.$$

Tehát 1 is alsó korlát, ami A-beli elem, ha $x=1$. Ezért

$$\underline{\inf A = \min A = 1}$$

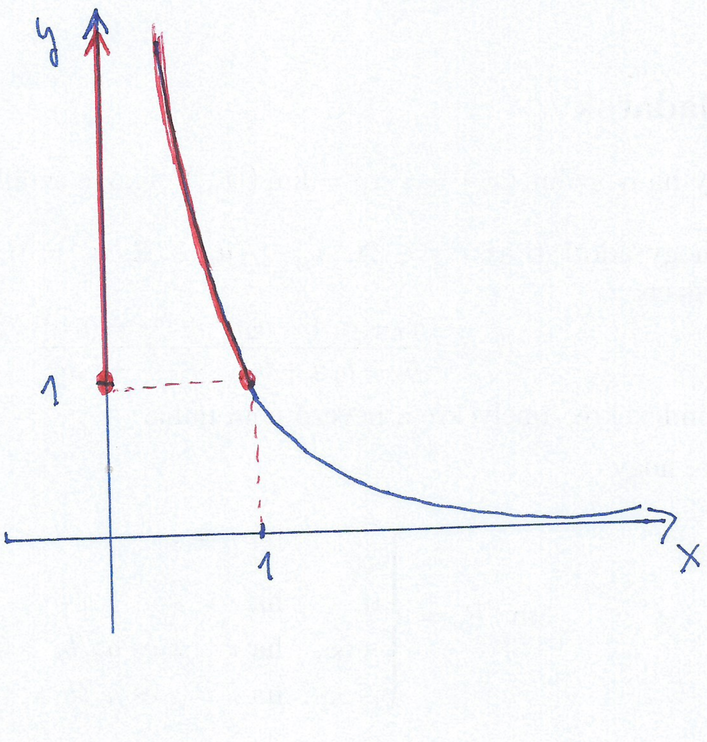
– A halmaz nem korlátos felülről, hiszen

$$\forall K > 0\text{-hoz } \exists x \in (0,1] : \frac{1}{x^2} > K$$

Ilyen x szám létezik, hiszen ha $0 < x < \frac{1}{\sqrt{K}} \implies x^2 < \frac{1}{K} \implies \frac{1}{x^2} > K.$

Ezért $\underline{\sup A = +\infty \text{ és } \nexists \max A}$.

A kapott eredmények az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $(x \in (0,1])$ függvény grafikonjáról is leolvashatók:



(Hf) b) Korlátos-e az alábbi halmaz? $\sup A$, $\inf A$?

$$A=\left\{\frac{2n+1}{3n+2} \;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\}$$

<u>Megoldás</u>. Alakítsuk át a kifejezést:

$$\frac{2n+1}{3n+2} = 2\cdot\frac{n+\frac12}{3n+2} = \frac23\cdot\frac{3n+\frac32}{3n+2} = \frac23\,\frac{3n+2-\frac12}{3n+2} = \frac23\left(1-\frac{\frac12}{3n+2}\right) =$$

$$= \frac23-\frac{1}{9n+6}$$

– A halmaz alulról korlátos, mert minden eleme pozitív. Másrészt az átalakításból látható, hogy a kifejezés akkor a legkisebb, amikor $\frac{1}{9n+6}$ a legnagyobb, azaz amikor $9n+6$ a legkisebb.
Ez akkor történik, ha $n=0$. Tehát

$$\frac{2n+1}{3n+2}=\frac23-\frac{1}{9n+6}\geq\frac23-\frac{1}{9\cdot 0+6}=\frac23-\frac16=\frac12.$$

Így $\frac12$ alsó korlát, ami A-beli elem, ha $n=0$. Ezért

$$\underline{\inf A=\min A=\frac12}$$

– A halmaz felülről korlátos, mert $\frac{1}{9n+6}\geq 0$, és így

$$\frac{2n+1}{3n+2}=\frac23-\frac{1}{9n+6}\leq\frac23. \quad (n\geq 0)$$

Így $\frac23$ felső korlát, de bármely nála kisebb szám nem lehet felső korlát, azaz

$$\forall\varepsilon>0\text{-hoz } \exists n\in\mathbb{N}:\ A\ni\frac23-\frac{1}{9n+6}>\frac23-\varepsilon.$$

Valóban, minden rögzített $\varepsilon>0$ szám esetén.

$$\frac23-\frac{1}{9n+6}>\frac23-\varepsilon \iff \varepsilon>\frac{1}{9n+6} \iff 9n+6>\frac1\varepsilon \iff$$

$$\iff 9n>\frac1\varepsilon-6 \iff n>\frac{1}{9\varepsilon}-\frac23$$

és ilyen $n\in\mathbb{N}$ mindig létezik. Ezért.

$$\underline{\sup A=\frac23 \quad \text{és} \quad \nexists \max A.}$$

(Hf) c) Korlátos-e az alábbi halmaz? $\sup A$, $\inf A = ?$

$$A = \left\{ \frac{5x+7}{2x+1} \;\middle|\; x \in [0, \infty) \right\}$$

Megoldás. Alakítsuk át a kifejezést:

$$\frac{5x+7}{2x+1} = 5 \cdot \frac{x+\frac{7}{5}}{2x+1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2x+\frac{14}{5}}{2x+1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2x+1+\frac{9}{5}}{2x+1} = \frac{5}{2}\left(1+\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2x+1}\right) =$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2x+1}.$$

– A halmaz alulról korlátos, mert $\frac{1}{2x+1} \geq 0$, és így

$$\frac{5x+7}{2x+1} = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2x+1} \geq \frac{5}{2} \quad (x \geq 0).$$

Így $\frac{5}{2}$ alsó korlát, de bármely nála nagyobb szám nem lehet alsó korlát, azaz $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, x \geq 0$: $A \ni \frac{5}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2x+1} < \frac{5}{2} + \varepsilon$

Valóban, minden rögzített $\varepsilon > 0$ szám esetén

$\frac{5}{2} + \frac{9}{2} \frac{1}{2x+1} < \frac{5}{2} + \varepsilon \iff \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2x+1} < \varepsilon \iff 2x+1 > \frac{9}{2\varepsilon} \iff$

$2x > \frac{9}{2\varepsilon} - 1 \iff x > \frac{9}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$ és ilyen $x \geq 0$ szám mindig létezik. Ezért $\underline{\inf A = \frac{5}{2}}$ és $\nexists \min A$

– A halmaz felülről korlátos, mert az átalakításból látható, hogy a kifejezés akkor a legnagyobb, amikor $\frac{1}{2x+1}$ a legnagyobb, azaz amikor $2x+1$ a legkisebb. Ez akkor történik, ha $x = 0$.

Tehát $\frac{5x+7}{2x+1} = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2x+1} \leq \frac{5}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 0 + 1} = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = 7.$

Így 7 felső korlát, ami A-beli elem, ha $x = 0$. Ezért

$\underline{\sup A = \max A = 7.}$