DISZKRÉT MATEMATIKA I.
TÉTEL BIZONYÍTÁSOK

MÉRAI LÁSZLÓ

Bevezető

Ez az oktatási segédanyag a *Diszkrét matematika I.* című tantárgy előadásain elhangzott főbb tételek bizonyításait foglalja össze. Elsődleges célja az előadások követésének támogatása, valamint az elhangzottak rendszerezésének és megértésének elősegítése.

Fontos hangsúlyozni, hogy a dokumentum **nem** tekinthető önálló jegyzetnek vagy tankönyvnek. Az itt közölt anyag kizárólag az előadásokkal együtt értelmezhető és használható eredményesen.

A segédanyag folyamatos fejlesztés alatt áll. Amennyiben hibát, elírást vagy pontatlanságot észlel, kérem, jelezzék a `merai@inf.elte.hu` címen.

1. Relációk

1.1. tétel (Relációk kompozíciója asszociatív)**.** *Legyenek X, Y, Z, W adott halmazok és $T \subset X \times Y$, $S \subset Y \times Z$, $R \subset Z \times W$ tetszőleges relációk. Ekkor*

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T). \tag{1}$$

Bizonyítás. Legyen $(x, y) \in (R \circ S) \circ T$. Megmutatjuk, hogy ekkor $(x, y) \in R \circ (S \circ T)$ szintén teljesül.

Valóban, ha $(x, y) \in (R \circ S) \circ T$, akkor a relációk kompozíciójának definíciója szerint létezik olyan $z \in Y$, hogy

$$(x, z) \in T \tag{2}$$

és $(z, y) \in R \circ S$. Hasonlóan, ekkor létezik olyan $w \in Z$, hogy

$$(z, w) \in S \tag{3}$$

és

$$(w, y) \in R. \tag{4}$$

Ekkor a (2) és a (3) alapján $(x, w) \in S \circ T$. Ezt és a (4) felhasználva $(x, y) \in R \circ (S \circ T)$ adódik.

Hasonlóan megmutathatjuk, hogy ha $(x, y) \in R \circ (S \circ T)$ teljesül, akkor szintén $(x, y) \in (R \circ S) \circ T$.

Utolsó frissítés: 2025. május 12.

Ezzel beláttuk, hogy a $R\circ(S\circ T)$ és $R\circ(S\circ T)$ relációk pontosan ugyanazokat a párokat tartalmazzák, tehát megegyeznek. $\square$

1.2. tétel (Kompozíció inverze)**.** *Adott X, Y, Z halmazok esetén legyenek $S \subset X \times Y$ és $R \subset Y \times Z$ relációk. Ekkor*

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Bizonyítás. Adott x, y esetén megmutatjuk, hogy $(x, y) \in (R \circ S)^{-1}$ pontosan akkor teljesül, ha $(x, y) \in S^{-1} \circ R^{-1}$.

Először tegyük fel, hogy $(x, y) \in (R \circ S)^{-1}$. Ekkor az inverz definíciója szerint, $(y, x) \in R \circ S$. Ez utóbbi akkor teljesül, ha létezik olyan z hogy

$$(y, z) \in S \quad \text{és} \quad (z, x) \in R.$$

A relációk inverzének definícióját felhasználva ez ekvivalens azzal, hogy

$$(z, y) \in S^{-1} \quad \text{és} \quad (x, z) \in R^{-1},$$

azaz $(x, y) \in S^{-1} \circ R^{-1}$.

Mivel itt ekvivalens átalakításokat végeztünk, hasonlóan módon megmutatható, hogy $(x, y) \in S^{-1} \circ R^{-1}$ esetén $(x, y) \in (R \circ S)^{-1}$ szintén teljesül. $\square$

1.3. tétel (Ekvivalencia relációk és osztályozás)**.** *Legyen $\sim$ egy X halmazon értelmezett ekvivalencia reláció és $x \in X$ esetén legyen*

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\} \subset X.$$

Ekkor az $\big\{[x] : x \in X\big\}$ egy osztályozás*.*

Megfordítva, tekintsük egy X halmaz $\mathcal{O}$ osztályozását. Ekkor az

$$R = \{(x, y) : \ x \text{ és } y \text{ az } \mathcal{O} \text{ ugyanazon osztályban vannak}\}$$

egy ekvivalencia reláció*.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{O} = \{[x] : x \in X\}$. Megmutatjuk, hogy ez egy osztályozás.

Mivel $\sim$ reflexív, ezért minden $x \in X$ esetén $x \in [x]$, így

$$\cup\{[x] : x \in X\} = X.$$

Szintén megmutatjuk, hogy $\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunktak. Ehhez legyenek $x, y \in X$ olyan elemek, melyekre $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben $[x] = [y]$. Ehhez legyen $z \in [x] \cap [y]$. Ekkor a $[x]$ és $[y]$ halmazok definíciója szerint $z \sim x$ és $z \sim y$. Mivel $\sim$ szimmetrikus, ezért $x \sim z$ is teljesül. Továbbá, mivel $\sim$ tranzitív

$$x \sim z \ \wedge \ z \sim y \implies x \sim y, \tag{5}$$

azaz $x \in [y]$.

Megmutatjuk, hogy nem csak x, hanem $[x]$ összes eleme is eleme az $[y]$ halmaznak. Ehhez legyen $x' \in [x]$, azaz $x' \sim x$. Ekkor ahogy (5)-ben megmutattuk $x \sim y$. Így, mivel $\sim$ tranzitív

$$x' \sim x \ \wedge \ x \sim y \implies x' \sim y,$$

azaz $x' \in [y]$. Ezzel megmutattuk, hogy

$$[x] \subset [y]. \tag{6}$$

Az x és y szerepének felcserélésével ugyanígy kaphatjuk, hogy

$$[y] \subset [x]. \tag{7}$$

Így a (6) és (7) felhasználásával adódik, hogy $[x] = [y]$.

Ezzel megmutattuk, hogy $\mathcal{O}$ valóban egy osztályozás.

A második részhez tegyük fel, hogy $\mathcal{O}$ egy osztályozás. Megmutatjuk, hogy R valóban egy ekvivalenciareláció.

Mivel minden x ugyanabban az osztályban van, mint önmaga, így triviálisan xRx, azaz R reflexív.

Ha xRy, akkor R definíciója szerint x és y ugyanabban az osztályban vannak, így yRx szintén teljesül, azaz R szimmetrikus.

Végül, ha xRy és yRz, akkor mind x, y és z ugyanabban az osztályban vannak, speciálisan xRy, azaz R tranzitív.

□

2. Komplex számok

2.4. tétel (Moivre azonosság)**.** *Legyenek $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok, és tekintsük azok trigonometrikus alakját:*

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

Ekkor

1. $zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$,

2. $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$,

3. $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ *adott* $n \geq 1$ *esetén.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk a szorzásra vonatkozó 1. azonosságot. Ehhez tekintsük a zw szorzatot. Kihasználva, hogy $i^2 = -1$, kapjuk hogy

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)). \end{aligned}$$

Kihasználva a sin és cos függvényekre vonatkozó következő addíciós képleteket:

$$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \quad \sin(\varphi+\psi) = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi,$$

kapjuk, hogy

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)).$$

Ezzel beláttuk az 1. összefüggést.

A 2. összefüggés megmutatásához legyen

$$v = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi))$$

a 2. egyenletének jobb oldala. Az összefüggés bizonyításához meg kell mutatni, hogy $v = z/w$, azaz $w \cdot v = z$. Azonban az 1. összefüggés szerint

$$\begin{aligned} w \cdot v &= |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \cdot \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)) \\ &= |z|(\cos\psi + i\sin\psi) \cdot (\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)) \\ &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z. \end{aligned}$$

A 3. összefüggést n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n = 1$ közvetlenül adódik. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz az állítás, megmutatjuk, hogy $n = k + 1$ esetén is teljesül az összefüggés. Valóban, az 1. összefüggést használva,

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z \cdot z^k = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)|z|^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi) \\ &= |z|^{k+1}(\cos\Big((k+1)\varphi\Big) + i\sin\Big((k+1)\varphi\Big). \end{aligned}$$

□

2.5. tétel (Gyökvonás komplex számok körében)**.** *Legyen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ trigonometrikus alakkal. Ekkor a*

$$z^n = w, \quad z \in \mathbb{C} \tag{8}$$

egyenlet megoldásai:

$$z_k = |w|^{1/n}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k): \quad \varphi_k = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Bizonyítás. Adott $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esetén keressük azokat a $z \in \mathbb{C}$ számokat, melyekre (8) teljesül. Mivel $w \neq 0$, ezért z sem lehet 0. Tekintsük ezek trigonometrikus alakját.

$$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi), \quad z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ekkor a megoldások megtalálásához a $|z|$ és φ értékeit kel megtalálni.

A (8) egyenlet és a 2.4. tétel szerint

$$|z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = |w|(\cos\psi + i\sin\psi). \tag{9}$$

Ekkor a két oldal abszolút értékét összehasonlítva kapjuk

$$|z|^n = |w| \Rightarrow |z| = |w|^{1/n}.$$

Továbbá, a (9) egyenletből

$$\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = \cos\psi + i\sin\psi,$$

azaz

$$n\varphi = \psi + 2k\pi$$

valamely k egész szám esetén. Leosztva n-nel, kapjuk, hogy

$$\varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Vegyük észre, hogy ezek $k = 0, 1, \dots, n-1$ esetén mind különböznek, azonban ha k n-nél nagyobb, akkor a szögfüggvények 2π szerinti periodikussága miatt nem kapunk újabb z_k megoldást. □

3. Kombinatorika

3.6. tétel (Ismétlés nélküli permutáció)**.** *Adott egy n elemű halmaz. A halmaz elemeit $n!$ módon tudjuk sorrendbe tenni.*

Bizonyítás. Az első helyre n módon tudunk elemet választani, a másodikra $n-1$ módon, …, az n-edik helyre pedig 1 módon tudunk választani. Így a *második szorzat szabály* szerint összesen $n \cdot (n-1) \cdots 1 = n!$ módon tudjuk az elemeket sorrendbe rendezni. □

3.7. tétel (Ismétléses permutáció)**.** *Adott k_1 darab 1. típusú elem, k_2 darab 2. típusú, …, k_ℓ darab ℓ-edik típusú elem. Ha az azonos típusú elemek között nem teszünk különbséget, akkor ezeket*

$$\frac{(k_1 + \cdots + k_\ell)!}{k_1! \cdots k_\ell!}$$

módon tudjuk sorba állítani.

Bizonyítás. Ha minden elem megkülönböztethető, akkor azokat $(k_1 + \cdots + k_\ell)!$ módon tudjuk sorrendbe állítani. Ha viszont az azonos típusú elemeket nem különböztetjük meg, akkor egy-egy lehetőséget többször számoltunk. Nevezetesen annyiszor, ahányszor a k_1 darab 1. típusú elemet sorrendbe tudjuk rakni *és* a k_2 darab 2. típusú elemet sorrendbe tudjuk rakni *és* …. Ezt összesen $k_1! \cdots k_\ell!$ módon tudjuk megtenni a 3.6 és a *szorzás szabály* szerint. Így a *osztás szabály* szerint, ezzel leosztva megkapjuk a kívánt mennyiséget. □

3.8. tétel (Ismétlés nélküli variáció)**.** *Adott egy n elemű halmaz. A halmazból k-szor választunk úgy, hogy a választás sorrendje számít, egy elemet egyszer választhatunk. Ezt $n!/(n-k)!$ módon tudjuk megtenni.*

Bizonyítás. Az első helyre n módon tudunk elemet választani, a másodikra $n-1$ módon, …, a k-adik helyre pedig $n-k+1$ módon tudunk választani. Így a *második szorzat szabály* szerint összesen $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = n!/(n-k)!$ módon tudunk választani. □

3.9. tétel (Ismétléses variáció)**.** *Adott egy n elemű halmaz. A halmazból k-szor választunk úgy, hogy a választás sorrendje számít, egy elemet többször is választhatunk. Ezt n^k módon tudjuk megtenni.*

Bizonyítás. Az első esetben n módon tudunk választani, a második esetben n módon tudunk választani,... Így a *szorzás szabály* szerint összesen n^k módon tudunk választani. $\square$

3.10. tétel (Ismétlés nélküli kombináció)**.** *Adott egy n elemű halmaz. A halmazból k-szor választunk úgy, hogy a választás sorrendje nem számít, egy elemet csak egyszer választhatunk. Ezt $\binom{n}{k}$ módon tudjuk megtenni.*

Bizonyítás. Először válasszunk ki k darab elemet úgy, hogy a sorrend *számít.* Ezt $\frac{n!}{(n-k)!}$ módon tudjuk megtenni. Azonban, ha a sorrend nem számít, egy lehetőséget annyiszor számoltunk, ahány módon sorrendbe tudjuk rakni a kiválasztott k elemet, ez $k!$ Így az *osztás szabály* szerint $\frac{n!}{(n-k)!k!}$. $\square$

3.11. tétel (Ismétléses kombináció)**.** *Adott egy n elemű halmaz. A halmazból k-szor választunk úgy, hogy a választás sorrendje nem számít, egy elemet többször is választhatunk. Ezt $\binom{n+k-1}{k}$ módon tudjuk megtenni.*

Bizonyítás. Egy adott választást reprezentálhatunk egy 0–1 sorozattal a következő módon. A sorozatban pontosan k darab 0 és $n-1$ darab 1 szerepel a következő módon: először szerepeljen annyi 0, ahányszor az 1. elemet választottuk, majd egy 1 és annyi 0, ahányszor a 2. elemet választottuk,... Így minden egyes választás pontosan meghatároz egy sorozatot. Az ilyen 0–1 sorozat hossza $k+n-1$. Annyi ilyen típusú sorozat van, ahányféleképpen ki tudunk választani a $k+n-1$ pozícióból k darabot, ahová a 0-át írjuk (és a maradék helyekre az 1-eket). Ezt $\binom{k+n-1}{k}$ módon tudjuk megtenni. $\square$

3.12. tétel (Binomiális tétel)**.** *Adott $n \geq 1$ egész esetén*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \\ &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

Bizonyítás. Tekintsük a

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{-szer}}. \tag{10}$$

Amikor a zárójeleket felbontjuk $a^{n-i}b^i$ alakú szorzatok keletkeznek. Ez a tag annyiszor jelenik meg, ahányféleképpen ki tudunk választani a (10) szorzatban i tényezőt, ahonnan a b tagot választjuk, és a maradék $n-i$ tényezőből az a tagot választjuk. Mivel a sorrend nem számít, ezt összesen $\binom{n}{i}$ módon tudjuk megtenni. $\square$

3.13. tétel (Pascal-háromszög)**.** *Adott n, i nemnegatív egészek esetén, ha $n \geq i$, akkor*

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}.$$

Bizonyítás. Adott $n+1$ elemből szeretnénk $i+1$-et kiválasztani. Kétféleképpen számláljuk le ezek lehetőségeit.

Először közvetlenül kiválasztunk $n+1$ elemből $i+1$-et. Ezt $\binom{n+1}{i+1}$ módon tudjuk megtenni.

Másrészt esetszétválasztással is megszámláljuk a lehetőségeket aszerint, hogy az utolsó, $n+1$-edik elemet kiválasztjuk-e.

Ha *kiválasztjuk*, akkor a maradék n elemből még i elemet kell kiválasztani. Ezt $\binom{n}{i}$ módon tudjuk megtenni.

Ha az utolsó elemet *nem* választjuk ki, akkor a maradék n elemből még $i+1$-et kell kiválasztani, ezt $\binom{n}{i+1}$ módon tudjuk megtenni.

Mivel minden lehetőséget itt pontosan egyszer vettünk figyelembe, így összesen ezt

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1}$$

módon tudjuk megtenni.

$\square$

3.14. tétel (Binomiális együtthatók szimmetriája)**.** *Minden n, k nemnegatív egészre*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Bizonyítás. Tekintsük az n különböző elemet és színezzük ki k elemet kékre és a maradék $n-k$ elemet pirosra. Hányféleképpen tudjuk ezt megtenni? Ezen lehetőségeket kétféleképpen számláljuk le.

Először leszámláljuk a lehetséges eseteket aszerint, hogy hányféleképpen tudjuk a kékre színezendő elemeket kiválasztani. Ez $\binom{n}{k}$.

Másrészről leszámolhatjuk ezt aszerint is, hogy hányféleképpen tudunk $n-k$ elemet pirosra kiszínezni. Ezt $\binom{n}{n-k}$ módon tudjuk megtenni. Mivel a ugyanazt a jelenséget számoltuk le kétféleképpen, ezért a két mennyiségnek meg kell egyezni.

$\square$

4. Gráfelmélet

4.15. tétel (Kézfogás szabály)**.** *Minden $G = (V, E)$ gráfra*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Bizonyítás. Számoljuk meg az *illeszkedő*

$$\{(v, e) \in V \times E : v \in e\}$$

pont-él párokat kétféleképpen.

Adott $v \in V$ esetén $\sum_{e\in E} |\{(v,e) \in V \times E : v \in e\}|$ a v-re illeszkedő élek számát adja, azaz a v fokszámát. Így

$$\sum_{v\in V}\sum_{e\in E} |\{(v,e) \in V \times E : v \in e\}| = \sum_{v\in V} d(v). \tag{11}$$

Másrészről adott $e \in E$ esetén $\sum_{v\in V} |\{(v,e) \in V \times E : v \in e\}|$ az e élre illeszkedő csúcsok számát adja, ami minden esetben 2. Így

$$\sum_{e\in E}\sum_{v\in V} |\{(v,e) \in V \times E : v \in e\}| = \sum_{e\in E} 2 = 2|E|. \tag{12}$$

Mivel mind a (11) mind a (12) esetén ugyanazt számoltuk meg, ezért a két mennyiségnek meg kell egyeznie. □

4.16. tétel (Fákra vonatkozó 4 ekvivalens állítás)**.** *Egy G gráfra a következők ekvivalensek*

(1) G fa, azaz összefüggő és körmentes.
(2) G összefüggő, de bármely él elhagyásával kapott részgráf már nem.
(3) ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor v-ből v'-be pontosan egy út vezet.
(4) G-nek nincs köre, de bármely él hozzáadásával kapott gráfban már van.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy (1)$\Longrightarrow$ (2)$\Longrightarrow$ (3)$\Longrightarrow$ (4)$\Longrightarrow$ (1).

1. rész: (1)$\Longrightarrow$ (2)

G összefüggősége következik a fa definíciójából.

A másik rész megmutatásához, tegyük fel, hogy az e él (v és v' között) elhagyásával a gráf *összefüggő* marad. Ekkor létezik v és v' között séta, mely nem tartalmazza az e élt. Ekkor a sétához az e élt hozzáadva kapunk egy v-ből induló zárt sétát v'-n keresztül. Ekkor ez a zárt séta tartalmaz kört, ami ellentmond a G körmentességének.

2. rész: (2)$\Longrightarrow$ (3)

Mivel G összefüggő, ezért létezik v és v' között séta, így út is. Indirekt tegyük fel, hogy több út is létezik. Legyenek ezek

$$v = v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1} = v'$$

illetve

$$v = u_0, f_1, u_1, f_2, \ldots, u_\ell, f_\ell, u_{\ell+1} = v',$$

ahol a $v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_\ell \in V$ és $e_1 \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_\ell \in E$. Legyen r az első pont, ahol a két út szétválik:

$$r = \min\{i : v_i \neq u_i\}.$$

Mivel $v_0 = v = u_0$ és a két út nem egyforma, ilyen $r \geq 1$ szám létezik. Legyen továbbá v_s az az első pont, ahol a két út újra találkozik:

$$s = \min\{i > r : v_i = u_j \text{ valamely } j > r\}.$$

Mivel $v_{k+1} = v' = u_{\ell+1}$, ilyen s egész szintén létezik. Ekkor a

$$v_{r-1}, e_r, v_r, \ldots, v_s = u_j, f_{j-1}, \ldots, u_{r-1} = v_{r-1}$$

egy kör.

3. rész: (3)$\Longrightarrow$ (4)

Tegyük fel, hogy a (4) állítás valamelyik része nem teljesül. Ekkor megmutatjuk, hogy a (3) sem teljesül.

Először tegyük fel, hogy G-nek van köre. Ekkor a körön két irányban haladva két tetszőleges pont között, a gráfban az adott pontok között több út is van.

Másrészről, tegyük fel, hogy nincs köre, és az $e = \{v, v'\}$ él hozzáadásával sem keletkezik kör. Ekkor az eredeti gráfban v és v' között nem volt út, hiszen csak azt egészíthette volna ki körré az e él.

4. rész: (4)$\Longrightarrow$ (1)

Elég megmutatni, hogy G összefüggő. Indirekt tegyük fel, hogy nem az, speciálisan léteznek olyan v, v' csúcsok, hogy közöttük nincs séta. Ekkor az $e = \{v, v'\}$ és behúzásával a gráfban keletkezik egy kör, legyen ez

$$v', e, v, e_1, v_1, \ldots, e_k, v'.$$

Ekkor a $v, e_1, v_1, \ldots, e_k, v'$ egy út v és v' között az eredeti gráfban, ami ellentmond a feltevésünknek. □

4.17. tétel (Minden fának van levele)**.** *Legyen $G = (V, E)$ egy körmentes nemüres ($E \neq \emptyset$) véges gráf. Ekkor $\exists v \in V : d(v) = 1$.*

Bizonyítás. Mivel $E \neq \emptyset$, így G-ben van út. Tekintünk egy *maximális* hosszúságú utat, legyen ez

$$v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k$$

G körmentes, így v_k-nak nem lehetnek szomszédjai a korábbi $v_0, \ldots, v_{k-2}$ csúcsok, továbbá a maximalitás miatt v_k-nak nem lehet szomszédja olyan $v \in V$ csúcs, ami különbözik a $v_0, \ldots, v_{k-2}$ csúcsoktól. Azaz v_k-nak egyedül v_{k-1} a szomszédja, speciálisan $d(v_k) = 1$. □

4.18. tétel (Fák élszáma)**.** *Legyen G egyszerű n csúcsú gráf. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) G fa, azaz összefüggő és körmentes.
(2) G körmentes és $n-1$ éle van.
(3) G összefüggő és $n-1$ éle van.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy (1)$\Longrightarrow$ (2)$\Longrightarrow$ (3)$\Longrightarrow$ (1)

1. rész: (1)$\Longrightarrow$ (2)

Az n csúcsszám szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

Ha $n = 2$, akkor az állítás triviálisan igaz. Tegyük most fel fel, hogy az állítás teljesül $k < n$ csúcsú gráfokra. Megmutatjuk, hogy ekkor n csúcsú gráfokra is teljesül az állítás.

Ehhez legyen G egy n csúcsú fa. Mivel körmentes, ezért létezik olyan v csúcsa, ami elsőfokú. Legyen G' a G-nek az a részgráfja, amit a v csúcs illetve a rá illeszkedő él elhagyásával kapunk. Ekkor G' egy $n-1$ csúcsú fa. Ekkor az indukció szerint élszáma $n-1-1 = n-2$. Így G élszáma $n-1$.

2. rész: (2)$\Longrightarrow$ (3)

Azt kell megmutatnunk, hogy G összefüggő. Hasonlóan, n szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n = 2$, akkor az állítás igaz. Legyen most G egy n csúcsú körmentes gráf $n-1$ éllel. Mivel G körmentes, van olyan v csúcsa, mely elsőfokú. Legyen G' az a részgráf, melyet a v és a rá illeszkedő $e = \{v, v'\}$ él elhagyásával kapunk. Ekkor G' egy körmentes, $n-1$ csúcsú, $n-2$ élű gráf. Indukció szerint összefüggő. Megmutatjuk, hogy ekkor G is összefüggő. Ehhez legyen u, u' a G két csúcsa. Ha $u, u' \neq v$, akkor azok benne vannak a G' gráfban, így van közöttük séta G'-ban, speciálisan G-ben is. Legyen most $u' = v$. Mivel v' a G' gráfban is benne van, így van séta u és v' között G'-ben. A sétához hozzáadva az e élt, ez egy séta lesz u és v között.

3. rész: (3)$\Longrightarrow$ (1)

Legyen G egy összefüggő, $n-1$ élű gráf. Ha G körmentes, akkor fa is. Ha van benne kör, akkor a körön él elhagyásával keletkező részgráf még mindig összefüggő. Folytassuk ezt, amíg egy körmentes, n csúcsú de összefüggő T részgráfot kapunk. Akkor T egy fa. Legyen továbbá ℓ az elhagyott élek száma. Ekkor T-nek n csúcsa és $n-1-\ell$ éle van. Azonban mivel T fa, így az (1)$\Longrightarrow$ (2) szerint T-nek $n-1$ éle van, azaz $\ell = 0$. Tehát, nem kellett élt elhagyni G-ből a körmentesség eléréséhez. □

4.19. tétel (Euler zárt séta létezése)**.** *Egy véges gráfban pontosan akkor van zárt Euler-séta, ha*

(1) izolált csúcsoktól eltekintve összefüggő;
(2) minden csúcs foka páros.

Bizonyítás. A két feltétel nyilván szükséges feltétel. Tekintsük ugyanis a gráf egy

$$v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{k-1}, v_{k-1}, e_k, v_0$$

zárt Euler sétáját. Ekkor, ha u_1 és u_2 nem izolált csúcsok, azaz illeszkednek rájuk élek, akkor mind u_1, mind u_2 fel van sorolva a zárt Euler sétában, így azon haladva van közöttük séta.

Másrészről, adott v csúcs minden előfordulása esetén a sétában kettővel járul hozzá a fokszámához. Mivel a séta Euler séta, így minden él fel van sorolva, így v fokszáma páros lesz.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a feltételek teljesülnek. Adunk egy algoritmust, ami keres a gráfban egy zárt Euler sétát.

Ehhez legyen v egy tetszőleges nem izolált csúcs. Induljunk el a v csúcsból csak korábban még nem látogatott éleken keresztül. Amíg nem érkezünk vissza v-be, addig lesz lehetőségünk a sétát folytatni, mert minden csúcs foka páros. Legyen ez a

$$v, e_1, v_1, \ldots, e_{\ell-1}, v_{\ell-1}, e_\ell, v$$

séta.

Tegyük fel, hogy a fenti módszerrel kaptunk egy zárt sétát a gráfban. Ha ez a gráf összes élét tartalmazza, akkor készen vagyunk.

Ellenkező esetben legyen $e = \{u_1, u_2\}$ olyan éle a gráfnak, amit nem tartalmaz a séta. Ha például u_1 rajta van a sétán, akkor a u_1-ből elindulva az e élen keresztül hasonló módon kaphatunk egy másik zárt sétát. Ezt az eredeti sétával kiegészítve egy hosszabb sétát kapunk.

Ha u_1 nincs rajta a sétán, akkor az összefüggőség miatt van

$$v, f_1, w_1, f_2, \ldots, w_{t-1}, f_t, u_1$$

séta v-ből u_1-be. Legyen

$$i = \min\{j : e_j \neq f_j\}$$

és tekintsük a v_{i-1} csúcsot. Ekkor erre a csúcsra illeszkedik az eredeti zárt sétával nem lefedett él. Ezen hasonlóan elindulva kaphatunk egy v_{i-1} csúcsra illeszkedő zárt sétát. Ezt az eredeti zárt sétával kiegészítve egy nagyobb zárt sétát kapunk.

Az eljárást folytatva végül egy zárt Euler sétát kapunk. □

4.20. tétel (Dirac tétele)**.** *Legyen $G = (V, E)$ egy véges, egyszerű gráf $n = |V| \geq 3$ csúccsal. Ha minden $v \in V$ csúcsra $d(v) \geq n/2$, akkor G-ben létezik Hamilton-kör.*

Bizonyítás. A tételt adott n csúcsszám esetén indirekt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy adott n esetén a tétel nem igaz, azaz léteznek olyan n-csúcsú gráfok, melyek kielégítik a tétel feltételeit, de nem tartalmaznak Hamilton-kört. Tekintsük ezen gráfok közül azt a G gráfot, melynek maximális élszáma van.

A maximalitás miatt, ha behúzunk egy eddig nem létező $\{v, v'\}$ élt, akkor az így kapott gráfban már *van* Hamilton-kör. Azaz, az eredeti gráfban létezik a v és v' csúcsok között Hamilton-*út*. Legyen ez az út

$$v = v_0, v_1, \ldots, v_{n-2}, v_{n-1} = v'.$$

Megmutatjuk, hogy

$$\exists i : \{v_i, v'\} \in E \ \wedge \{v_{i+1}, v\} \in E. \tag{13}$$

Először bebizonyítjuk a (13) állítást, majd később annak segítségével befejezzük a tétel bizonyítását is.

A (13) állítás bizonyítása. Tegyük fel, hogy nincs ilyen v_i csúcs. Legyen

$$\mathcal{V}_1 = \{u \in V : v \text{ és } u \text{ szomszédosak}\}, \quad \mathcal{V}_2 = \{u \in V : v' \text{ és } u \text{ szomszédosak}\}.$$

Nyilván $|\mathcal{V}_1| = d(v) \geq n/2$ és $|\mathcal{V}_2| = d(v') \geq n/2$. Az indirekt feltétel szerint

$$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset.$$

Továbbá $v, v' \notin \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$, így

$$n - 2 \geq |\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2| = |\mathcal{V}_1| + |\mathcal{V}_2| \geq n/2 + n/2 = n,$$

így ellentmondásra jutottunk, ami bizonyítja a (13) állítást.

A (13) állítás segítségével már befejezhetjük a tétel bizonyítását is. A (13) állítás szerint tekintsük a v_i és v_{i+1} csúcsokat. Segítségükkel konstruálunk a gráfban egy Hamilton-*kört*. Legyen ez

$$v = v_0, v_1, \ldots, v_i, v', v_{n-2}, v_{n-3}, \ldots, v_{i+1}, v.$$

□