

Diszkrét matematika I. feladatok

Gráfok I.

Kilencedik alkalom (2025.04.14-04.25.)

Bemelegítő feladatok

1. Rajzolja le az összes, páronként nem izomorf 3-, 4-, illetve 5-csúcsú egyszerű gráfot. Hány összefüggő van közöttük?
2. Lehet-e egy 7-pontú egyszerű gráf fokszámsorozata
 - a) 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1;
 - b) 6, 3, 3, 3, 3, 2, 0;
 - c) 5, 5, 5, 2, 2, 2, 1;
 - d) 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2?

Gyakorló feladatok

3. Van-e olyan (legalább kétpontú) gráf, melyben minden pont foka különböző?
4. Mutassa meg, hogy tetszőleges gráfban a páratlan fokú pontok száma páros!
5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráfnak kevesebb éle van, mint pontja, akkor van elsőfokú pontja.
6. Igaz-e, hogy ha egy gráf bármely két pontja között van séta, akkor út is van?

Érdekes feladatok

7. Mutassuk meg, hogy ha egy $2n$ -csúcsú gráf minden pontjának foka legalább n , akkor a gráf összefüggő! Mi történik, ha $n - 1$ -fokú pontokat is megengedünk?
8. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf minden pontjának fokszáma legalább 2, akkor a gráf tartalmaz kört.
9. Az n hosszúságú 0–1 sorozatok legyenek egy gráf csúcsai. A gráfban két csúcs pontosan akkor van éllel összekötve, ha a megfelelő sorozatok pontosan egy helyen különböznek. Rajzolja fel a gráfokat $n = 2$ és 3 esetén. Legalább hány élet kell a gráfból törölni, hogy ne legyen a maradékban kör?

Beadandó házi feladatok

10. Lehet-e egy egyszerű gráf fokszámsorozata a következő: 7, 6, 6, 5, 3, 3, 2, 2. Ha igen, mutasson rá példát, ha nem, indokoljon! **(1 pont)**
11. Hány olyan 3-, 4-, illetve 5-csúcsú gráf van, amely izomorf a komplementerével? **(1 pont)**
12. Igaz-e, hogy vagy G , vagy a komplementere biztosan összefüggő? **(1 pont)**

Gráf komplementere: Egy $G = (V, E)$ egyszerű gráf komplementere az a $H = (V, F)$ gráf, ahol $\{u, v\} \in E \iff \{u, v\} \notin F$.