Diszkrét matematika 1

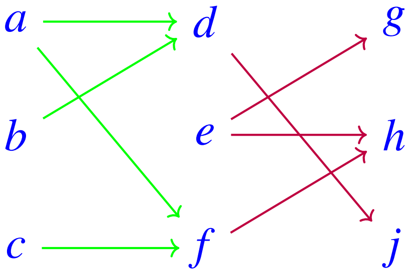
Relációk

Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

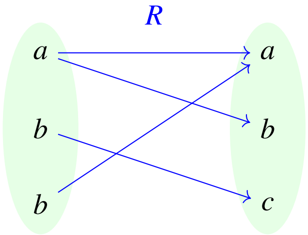
2025 tavasz

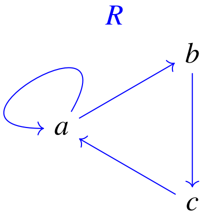
Relációk.



Relációk tulajdonságai, példa

Legyen R a következő reláció:





- **szimmetrikus**, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$ $\times$
- **reflexív**, ha $\forall x \in X : xRx$ $\times$
- **tranzitív**, ha $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ $\times$

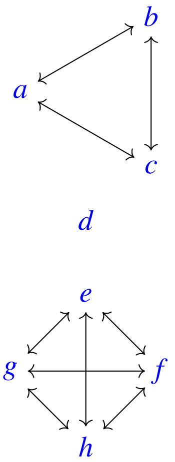
Speciális relációk

Ekvivalencia reláció, osztályozás 1

Halmaz elemeit csoportosítjuk, a csoporton belül az elemeket azonosnak tekintjük

Példa

- egyetemi hallgatók osztályozása évfolyam szerint
- cég dolgozóinak osztályozása beosztás szerint
- sík egyeneseinek irányonkénti osztályozása



R reláció hurokélek nélkül

Definíció

Egy R reláció ekvivalencia reláció, ha reflexív, tranzitív és szimmetrikus.

Példa

- $H_1 \sim H_2$, ha H_1 és H_2 évfolyamtársak
- $M_1 \sim M_2$, ha M_1 és M_2 beosztása megegyezik
- $\ell_1 \sim \ell_2$, ha ℓ_1 és ℓ_2 párhuzamosak

Ekvivalencia reláció, osztályozás 2

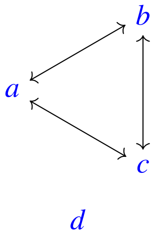
Definíció

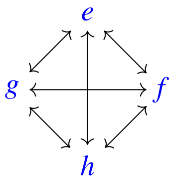
Egy X halmaz részhalmazainak $\mathcal{O}$ rendszerét **osztályozásnak** nevezzük, ha

- $\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunkt nemüres halmazok;
- $\cup\mathcal{O} = X$.

Példa

- hallgatók:
  $\{$1. évf. hallgatók, 2. évf. hallgatók, 3. évf. hallgatók$\}$
- dolgozók: $\{$fejlesztők, marketing, tesztelők, HR, $\ldots\}$
- egyenesek lehetséges irányai





R reláció hurokélek nélkül

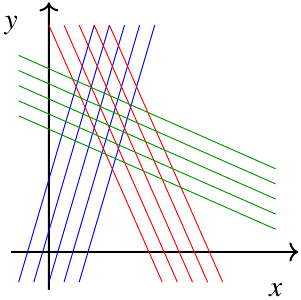
Ekvivalencia reláció és osztályozás 3

Definíció

Legyen $\sim$ egy ekvivalencia reláció az X halmazon. Tetszőleges $x \in X$ esetén az

$$\tilde{x} = [x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

halmazt az x ekvivalencia osztályának nevezzük.



Példa

- $\{[\ell] : \ell$ a sík egyenese$\}$ az irányok halmaza.

Tétel

- Egy X halmazon értelmezett $\sim$ ekvivalencia reláció esetén $\{[x] : x \in X\}$ egy osztályozás.
- Tekintsük egy X halmaz $\mathcal{O}$ osztályozását. Ekkor az

$$R = \{(x, y) : \ x \text{ és } y \text{ ugyanazon } \mathcal{O} \text{ osztályban vannak}\}$$

egy ekvivalencia reláció.

Ekvivalencia reláció $\Rightarrow$ osztályozás

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{O} = \{[x] : x \in X\}$ ahol $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$

- 1. feltétel: $\cup\mathcal{O} = X$.
  Mivel $\sim$ reflexív $\Rightarrow$ $x \in [x]$ $\Rightarrow$ $\cup\{[x] : x \in X\} = X$.

- 2. feltétel: $\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunktak.
  - Tegyük fel hogy $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Megmutatjuk, hogy $[x] = [y]$.
  - Legyen $z \in [x] \cap [y]$. Akkor (definíció szerint) $z \sim x$ és $z \sim y$.
  - Mivel $\sim$ szimmetrikus $\Rightarrow$ $x \sim z$.
  - Mivel $\sim$ tranzitív, ezért $x \sim z$ és $z \sim y$ $\Rightarrow$ $x \sim y$, azaz $x \in [y]$.
  - Ha $x' \in [x]$, akkor $x' \sim x$ és a tranzitivitás miatt $\Rightarrow$ $x' \sim y$, azaz $x' \in [y]$.
  - Tehát $[x] \subset [y]$.
  - x és y szerepének felcserélésével $[y] \subset [x]$, azaz $[x] = [y]$.

Ekvivalencia reláció $\Leftarrow$ osztályozás

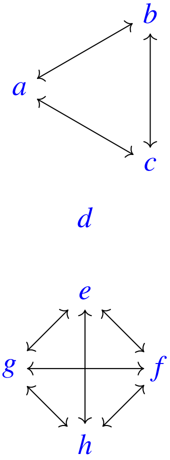
Bizonyítás. Legyen $R = \{(x,y) :\ x$ és y ugyanazon $\mathcal{O}$ osztályban vannak$\}$

- reflexivitás: Minden x ugyanabban az osztályban van, mint saját maga: xRx.

  Továbbá, mivel $\cup\mathcal{O} = X$, így minden x benne van valamely osztályban.

- szimmetrikusság: ha xRy, akkor x és y ugyanabban az osztályban vannak, speciálisan yRx.

- tranzitivitás Ha xRy és yRz, akkor mind x és y, mind y és z ugyanabban az osztályban vannak, speciálisan x és z is ugyanabban az osztályán vannak, azaz xRz. $\square$



R reláció hurokélek nélkül

Példák

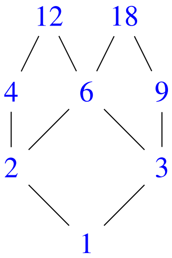
alaphalmaz	reláció	osztályozás
$\mathbb{R}$	$x \sim y$ ha $x = y$	$\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$, 'azonosság'
$\mathbb{R}$	$x \sim y$, ha $\lvert x\rvert = \lvert y\rvert$	$\{\{\pm x\} : x \in \mathbb{R}\}$, 'abszolút érték'
sík egyenesei	$\ell_1 \sim \ell_2$, ha $\ell_1 \lvert\lvert \ell_2$	irányok
sík szakaszai	$c_1 \sim c_2$, ha $\mathrm{len}(c_1) = \mathrm{len}(c_2)$	egybevágóság
$\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$	$(a, b) \sim (c, d)$, ha $ad = bc$	$\mathbb{Q}$: $r = a/b$

Részbenrendezés

Szeretnénk a $\leq$, $\subset$, $|$ (osztója) relációkat általánosítani.

Definíció

- Egy R reláció részbenrendezés, ha
  reflexív; tranzitív és antiszimmetrikus.
- Ha valamely $x, y \in X$ párra $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$, akkor x és y összehasonlítható.
- Ha minden (x, y) pár összehasonlítható (azaz $\preceq$ dichotóm), akkor $\preceq$ rendezés.



oszthatósági reláció.

$(\leq, \mathbb{R})$

Példa

- $(\mathbb{N}, |)$, $(2^X, \subset)$, $(\mathbb{R}^5$ alterei, altér reláció$)$: részbenrendezés
- $(\leq, \mathbb{R})$: rendezés

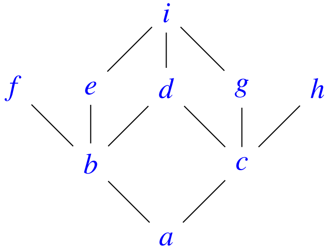
Részbenrendezés, speciális elemek

Legyen $\preceq$ egy részbenrendezés az X halmazon.

- legkisebb elem: $x \in X : \forall y \in X\ x \preceq y$
- legnagyobb elem: $x \in X : \forall y \in X\ y \preceq x$
- minimális elem: $x \in X : \neg\exists y \in X\ y \preceq x$
- maximális elem: $x \in X : \neg\exists y \in X\ x \preceq y$

Példa

- legkisebb elem: a
- legnagyobb elem: nincs
- minimális elem: a
- maximális elem: f, i, h



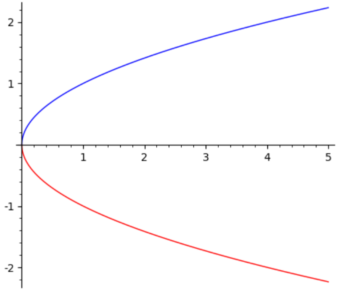
Függvények

Definíció

Legyen $f \subset X \times Y$ egy (binér) reláció. Ha egyelemű halmaz képe legfeljebb egyelemű, azaz

$$xfy \wedge xfz \Rightarrow y = z,$$

akkor az f-et **függvénynek** hívjuk.
Speciálisan az xfy helyett a $f(x) = y$ használjuk.



Példa

- $(x^2, x) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nem függvény
- $(x, \sqrt{x}) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ és $(x, -\sqrt{x}) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ függvények.
- Legyen $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Ekkor $\{(\mathbf{v}, M\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2\}$ egy függvény.
- Legyen $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Ekkor $\{(M\mathbf{v}, \mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2\}$ függvény $\iff \det M \neq 0$.
- Legyen $R \subset X \times Y$ egy reláció.
  Ekkor $\{(A, R(A)) : A \subset X\} \subset 2^X \times 2^Y$ egy függvény.