(Hf) 1. Igazolja, hogy az alábbi végtelen sorok konvergensek, és határozza meg az összegüket!

a) $\sum\limits_{n=3}\left(\frac{5}{2^n}+\frac{1}{3^{2n}}\right)=\sum\limits_{n=3}\left(5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right)$

A sor előáll két konvergens mértani sor lineáris kombinációjaként. Azért konvergensek, mert hányadosuk abszolút értéke kisebb, mint 1.

Így a sor konvergens, és

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\left(5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right)=5\cdot\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n=$$

$$=5\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{n+3}=5\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{9^3}\left(\frac{1}{9}\right)^n=$$

$$=\frac{5}{2^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{9^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n=\frac{5}{2^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{9^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=$$

$$=\frac{5}{2^3}\cdot 2+\frac{1}{9^3}\cdot\frac{9}{8}=\frac{5}{2^2}+\frac{1}{9^2\cdot 8}=\frac{811}{648}.$$

b) $\sum\limits_{n=1}\frac{1}{n^2+4n+3}=\sum\limits_{n=1}\frac{1}{(n+1)(n+3)}=\sum\limits_{n=1}\left(\frac{1/2}{n+1}-\frac{1/2}{n+3}\right)=\sum\limits_{n=1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right],$

hiszen $\frac{1}{(n+1)(n+3)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+3}=\frac{A(n+3)+B(n+1)}{(n+1)(n+3)}=\frac{(A+B)n+3A+B}{(n+1)(n+3)}\Rightarrow$

$\Rightarrow 1=\underbrace{(A+B)}_{=0}\cdot n+\underbrace{3A+B}_{=1}\Rightarrow A=-B\to -3B+B=1\to -2B=1\to B=-\frac{1}{2}, A=\frac{1}{2}$

Ezért ha S_n a fenti sor n-dik részletösszege, akkor

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\dots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\underset{=}{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\underset{=}{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{6}+\cancel{\frac{1}{5}}-\frac{1}{7}+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{n-1}-\cancel{\frac{1}{n+1}}+\frac{1}{n}-\underset{=}{\frac{1}{n+2}}+\cancel{\frac{1}{n+1}}-\underset{=}{\frac{1}{n+3}}\Big]=$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{n+3}}_{\to 0}\Big]\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12}$$

Ezért a sor konvergens, és összege $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}=\frac{5}{12}$.

Hf

2. Konvergencia szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorokat:

a) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{n^2-1}{3n^2+1}$, a sor divergens, mert generáló sorozata <u>nem</u> tart nullához. Valóban

$$a_n = \frac{n^2-1}{3n^2+1} = \frac{1-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1-0}{3+0} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

b) $\sum\limits_{n=1} \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n-1}$, a sor divergens, mert generáló sorozata <u>nem</u> tart nullához. Valóban

$$a_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n-1} = \left(\frac{1+3/n}{1+1/n}\right)^{n-1} = \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\left(\frac{1+3/n}{1+1/n}\right)^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e^3}{e}\left(\frac{1+0}{1+0}\right)^{-1} = e^2 \neq 0.$$

c) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{n^2+n-1}{\sqrt{n^4+1}-n^3+n^5}$, alkalmazzuk a köv. becslést!

$$\frac{n^2+n-1}{\sqrt{n^4+1}-n^3+n^5} \le \frac{n^2+n}{\sqrt{n^4+1}-n^3+n^5} \le \left(\sqrt{n^4+1}\ge 0\right) \le \frac{n^2+n}{n^5-n^3} \overset{(n\ge 1)}{\le} \frac{n^2+n^2}{n^5-n^3} =$$

$$= \frac{2n^2}{n^5-n^3} = \frac{2}{n^3-n} = \frac{4}{2n^3-2n} = \frac{4}{n^3+n^3-2n} = \frac{4}{n^3+n(n^2-2)} \le$$

$$\le \left(n^2-2\ge 0,\ \text{ha } \underline{n\ge 2}\right) \le \frac{4}{n^3} \le \frac{4}{n^2}$$

Mivel a $\sum\limits_{n=1} \dfrac{4}{n^2}$ sor konvergens $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4}{n^2} = 4\cdot\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2} = 4\cdot\dfrac{\pi^2}{6} < +\infty\right)$, így a majoráns kritérium szerint a sor konvergens.

d) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$, tudjuk, hogy $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Ezért $\exists n_0\in\mathbb{N}$, hogy $1\le\sqrt[n]{n}<2$, ha $n>n_0$.

Így $\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{n\cdot n^{1/n}} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}} > \dfrac{1}{n\cdot 2}$, ha $n>n_0$.

Mivel a $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{2n}$ sor divergens $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2}(+\infty) = +\infty\right)$, ezért a minoráns kritérium szerint a sor divergens.