Paraméteres integrál

$\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $-\infty < a < b < +\infty,\ f : U \times [a,\ b] \to \mathbb{R}$

Azaz $f \in \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},\ D_f \ni \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}) =: (x,\ t) \quad (x \in U,\ t \in [a,\ b])$

Legyen $||.|| := ||.||_\infty$ $\mathbb{R}^{n+1}$-ben és $\mathbb{R}^n$-ben is, így $||\xi|| = \max\{||x||,\ |t|\}$

Legyen $x \in U,\ f_x : [a,\ b] \to \mathbb{R},\ f_x(t) := f(x, t) \quad (t \in [a,\ b])$

Tegyük fel, hogy $\forall x \in U : f_x \in R[a,\ b]$

Ekkor $F(x) := \displaystyle\int_a^b f_x =: \int_a^b f(x,\ t)\ dt$ függvényt **paraméteres integrál**nak nevezzük.

Pl. $f \in C \implies \forall x \in U : f_x \in C[a,\ b] \implies \exists F : U \to \mathbb{R}$

Folytonossága és differenciálhatósága

Tegyük fel, hogy $f \in C$. Ekkor

$$a) \quad F \in C$$

$$b) \quad i \in \{1, \ldots, n\},\ \exists \partial_i f \in C \implies \exists \partial_i F,\ \partial_i F(x) = \int_a^b \partial_i f(x,\ t) dt \quad (x \in U)$$

$$c) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \exists \partial_i f \in C \implies F \in D$$

Bizonyítás

$a)$ Legyen $r > 0$ olyan, hogy $G := \{z \in U \mid ||z - x|| \leq r\} \subset U$ (x zárt környezete)

G korlátos és zárt, tehát kompakt. $G \times [a,\ b]$ is kompakt.

Heine-tétel szerint folytonos függvény, kompakt halmazon egyenletesen folytonos, azaz

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall \alpha, \beta \in G \times [a,\ b],\ ||\alpha - \beta|| < \delta : |f(\alpha) - f(\beta)| < \varepsilon$

Speciálisan legyen $\alpha := (x,\ t),\ \beta := (y,\ t)$

Így $||\alpha - \beta|| = ||(x - y,\ 0)|| = ||x - y|| < \delta \implies |f(x,\ t) - f(y,\ t)| < \varepsilon$

Most tekintsük F-et

$\forall x, y \in U : |F(x) - F(y)| = | \int_a^b [f(x,\ t) - f(y,\ t)]dt| \leq \int_a^b |f(x,\ t) - f(y,\ t)|dt \leq (b-a) \cdot \varepsilon$ ha $||x-y|| < \delta$

Tehát $|F(x) - F(y)| \leq (b-a) \cdot \varepsilon \implies F \in C\{x\}$, mivel ez minden x-re teljesül, ezért $F \in C$

$b)$ Például legyen $i = 1,\ x \in U$

A továbbiakban $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $z \coloneqq (x_2, \ldots, x_n)$

$F(x_1 + h,\ z) - F(x) = \int_a^b [f(x_1 + h,\ z,\ t) - f(x_1,\ z,\ t)]dt =$

(Lagrange-k.é.t. miatt valamely $0 < v < 1$-re) $= \int_a^b \partial_1 f(x_1 + v \cdot h,\ z,\ t) \cdot h\ dt$

$\implies \frac{F(x_1, + v \cdot h,\ z) - F(x_1,\ z)}{h} = \int_a^b \partial_1 f(x_1 + v \cdot h,\ z,\ t)dt = \int_a^b [\partial_1 f(x_1 + v \cdot h,\ z,\ t) - \partial_1 f(x_1,\ z,\ t)]dt + \int_a^b \partial_1 f(x_1,\ z,\ t)dt \implies$

$\Delta(h) \coloneqq \frac{F(x_1 + h,\ z) - F(x_1,\ z)}{h} - \int_a^b \partial_1 f(x_1,\ z,\ t)dt =$
$\int_a^b [\partial_1 f(x_1 + v \cdot h,\ z,\ t) - \partial_1 f(x_1,\ z,\ t)]\ dt$

Most a bizonyítás $a)$ részét ismételjük meg $f \longleftrightarrow \partial_1 f$-el, azaz:

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 : \forall\ \alpha, \beta \in G \times [a,\ b],\ ||\alpha - \beta|| < \delta : |f(\alpha) - f(\beta)| < \varepsilon$

Speciálisan legyen $\alpha \coloneqq (x_1 + v \cdot h,\ z,\ t)$ és $\beta = (x_1,\ z,\ t)$.

Ekkor $||\alpha - \beta|| = ||(v \cdot h,\ 0,\ 0)|| = |v \cdot h| \leq |h| < \delta \implies |\partial_1 f(x_1 + v \cdot h,\ z,\ t) - \partial_1 f(x_1,\ z,\ t)| < \varepsilon \implies \exists \lim\limits_{h \to 0} \Delta(h) = 0$

$c)$ Tehát $\forall i = 1, \ldots, n : \exists \partial_i f \in C$ a $b)$ rész miatt $\implies \partial_i F \in C$ és a deriválás és parciális deriválás kapcsolatáról szóló 2. tétel szerint ekkor $F \in D$