elso gyak vegen volt valami amit kihagytunk szoval most az jon sajnos szerencsere

2/i

$$f(x) := \frac{x+2}{x^2-9} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}, a := -1),$$

$$\lim_{x\to-1} \frac{\frac{x+2}{x^2-9} - \frac{1}{-8}}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{\frac{8x+16+x^2-9}{8x^2-72}}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{x^2+8x-7}{(x+1)(8x^2-72)} = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(x+7)}{(x+1)(8x^2-72)} = \lim_{x\to-1} \frac{x+7}{8x^2-72} = \frac{6}{-64} = \frac{3}{-32}$$

kiderult hogy fontos lenne pl ZH-n felirni a kovetkezot mindet:

$$f \in D\{-1\} \text{ es } f'(-1) = -\frac{3}{32}; \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \exists \text{ erinto itt, melynek egyenlete: } y = f(-1) + f'(-1) \cdot (x+1) = \frac{1}{8} - \frac{3}{32}(x+1) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow y = -\frac{3}{32}x - \frac{1}{8} - \frac{3}{32} \Longleftrightarrow y = -\frac{3}{32}x - \frac{7}{32}(x \in \mathbb{R})$$

2/j

$$f(x) = \begin{cases} x^4\left(\sqrt{2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad \text{és } a := 0$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4\left(\sqrt{2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x^3\left(\sqrt{2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

mivel korlatos, hiaba oszcillal mert egy $\left[-1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right]$ intervallumba kerul es ha emiatt letezik hatarertek es $= 0$

formalisabban: $|x^3 \cdot \left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)| \le |x^3| \ \left(|\sqrt{2}| \ |\sin\left(\frac{1}{x}\right)|\right) = |x|^3 \ \left(\sqrt{2} + 1\right) < \varepsilon$

vagy valami hasonlo

most extraba kiszamoljuk minden a pontban

$$f \in D\{0\} \text{ es } f'(0) = 0;$$

1. eset $(\forall x \in \mathbb{R})$

$$f'(x) = \left[x^4\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right)\right]' =$$

csak egy barati emlekezteto hogy ez a jeloles nagyon helytelen de mi most jol megallapodunk hogy megis jo

$$= 4x^3 \cdot \left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right) + x^4 \cdot \sin'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' = 4x^3\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right) + x^4\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$4x^3\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right) - x^2\cos\frac{1}{x}$$

valalmi ilyesmit mondott: “ez gyakran elofordul mert nem mukodik jo ez valami ‘jo ellenpeldas tipus’”

errol volt szo:

$$f(x) = x^{\alpha} \cdot \sin \frac{1}{x^{\beta}}$$

na hat vegre jon a harmadik gyakorlat anyaga

3

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{ha} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

kulonveszzuk a nulla es nem nulla eseteket

1. eset: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

eloszor megallapitom hogy derivalhato

oda kell irni “(lasd muveleti szabalyok)” es akkor megusszuk a magyarazkodast

$$f'(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{(x)'\left(1+e^{\frac{1}{x}} - x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)\right)}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1+e^{\frac{1}{x}} + x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1+e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

2. eset $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

jobb/bal oldalra bontom

- $$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$$
- $\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = +0 = 0 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists f'_{+}(0) = 0$

$f \notin D\{0\}$

4

$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + bx + x, & \text{ha } x \in (-\infty, 0) \\ e^x, & \text{ha } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

ZH-n altalaban nem szoktak olyat kerni hogy itt egy szuper trivialis kifejezes es derivald, mert akkor tul konnyu lenne. kb a derivalasi szabalyok 70%at szamonkerik, azt pedig ugy kivitelezik hogy telerakjak minden szarral szoval tudni kell a derivalttablazatot kivulrol mese nincs

ha felrajzoljuk a grafikont (de ha nem is) akkor latjuk hogy nullaban van egy torespont

nullanal $y = e^x$-t vesz fel, 0 elott pedig parabola van szoval azt rajzolom/kepzelem el valahogy. majd kesobb kiderul hogy konvex vagy konkav vagy pozitiv vagy negativ a parabola, most senkit sem erdekel

az szokott lenni a feladat hogy keress egy kifejezest hogy derivalhato lehessen. ez azt jelenti hogy folytonosnak kene lennie mivel a folytonossag feltetele a derivalhatosagnak. ezutan jo lenne ha a nullapontban a felerintok megegyeznenek

1. eset: $x \in (-\infty, 0)$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

derivalhato mindenhol

$$f \in D\{x\}, \quad f'(x) = 2ax + b$$

2. eset: $x \in (0, +\infty)$

$$f(x) = e^x = \exp(x)$$

mindenhol derivalhato ez is

$$f \in D\{x\}, \quad f'(x) = e^x$$

ez eddig 1-1 pontot er ZH-n

3. eset: $x = 0$

most jon a lenyeg

megallapitjuk hogy elagazasos fuggveny eseten a fuggvenyt differencialhato a valtas eseten ha folytonos es $f'_-(0) = f'_+(0)$

$$\lim_{x \to 0-0} (ax^2 + bx + c) = 0 \Longrightarrow f \in C\{a\} \Longleftrightarrow c = 1 \text{ es } a + b \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to 0-0} (e^x) = 1$$

$$f'_-(0) = 2ax + b \text{ nezzuk meg } x = 0 - 0\text{-ban} = b$$

$$f'_+(0) = e^x \text{ nezzuk meg } x = 0 + 0\text{-ban} = e^0 = 1$$

ezert az a feltetel hogy $b = 1$ es $a \in \mathbb{R}$

tehat

$$f \in D\{a\} \Longleftrightarrow a \in \mathbb{R}, b = 1, c = 1 \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + 1 \\ e^x \end{cases}$$

es akkor ez mar derivalhato lesz

irjuk fel a derivaltat

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 1, & \text{ha} < 0 \\ 1, & \text{ha} = 0 \\ e^x, & \text{ha} > 0 \end{cases}$$

2

hagyjuk el az ln-t mert ugy latvanyosabb es nehezebb

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\left(x^2+1\right)^5} \qquad (x > -1)$$

erinto az $a = 0$ pontban

eloszor is

$$\forall x \in (-1; +\infty) : f \in D\{x\}(\text{lasd miveleti szabalyok})$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\left(x^2+1\right)^5}\right)'$$

ez az egyik eljaras de tudunk most jobbat

menobb megoldas:

akarhanyszor hatvanyok vannak akkor az ln leegyszerusiti ezeket. ez logaritmikus derivalas. szetszedi oket ugy hogy konnyebb legyen dolgozni. pont ezt meg meg lehetne csinalni nelkule is de igy konnyebb

$$\ln f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\left(1+x^2\right)^5}$$

$$\ln f(x) = \ln\left(\sqrt{x+1} - \ln\left(x^2+1\right)^5\right) = \frac{1}{2}\ln(x+1) - 5\ln\left(x^2+1\right)$$

es most derivaljuk

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot 1 - 5 \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{10x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \left[\frac{1}{2(x+1)} - \frac{10x}{x^2+1}\right]$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\left(x^2+1\right)^5} \cdot \left[\frac{1}{2(x+1)} - \frac{10x}{x^2+1}\right]$$

$$f'(0) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{0}{1}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = 1$$

erinto $a = 0$-ban:

$$y := f(0) + f'(0) \cdot x = 1 + \frac{1}{2}x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

5

$$f(x) = \sqrt{e^{2x-1}+1}(x \in \mathbb{R})$$

invertalhato? inverze differencialhato? szamold ki $\sqrt{2}$ helyen

$$f \in D\{\mathbb{R}\} \quad \text{(lasd elemi muveletek)}$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{e^{2x-1}+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{e^{2x+1}+1}} \cdot \left(e^{2x-1}+1\right)' = \frac{e^{2x-1} \cdot 2^x}{2\sqrt{e^{2x-1}+1}} = \frac{e^{2x-1}}{\sqrt{e^{x-1}}+1} > 0$$

tehat szigoruan monoton no $\mathbb{R}$-en $\Longrightarrow f$ invertalhato (injektiv)

idezzuk fel a tetelt:

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyilt intervalllum, es $f : I \to \mathbb{R}$

TFH
- (a) f szigoruan monoton es folytonos I-n
- (b) egy $a \in I$ pontban $f \in D\{a\}$ es $f'(a) \neq 0$

Ekkor az f^{-1} inverz fuggveny derivalhato a $b := f(a)$ pontban, es

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$$

olyan mint ha azt mondanam hogy az inverz derivaltja az a derivalt inverze, csak az egyik a ponton van a-n masik a b-n

mivel megallapitottuk hogy derivalhato $\mathbb{R}$-n ezert fix folytonos is es igy teljesulnek a feltetlek

$$f'\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)\right)}$$

itt

$$f^{-1}\left(\sqrt{2}\right) = x \Longleftrightarrow \sqrt{2} = f(x) = \sqrt{e^{2x-1}+1} \Longleftrightarrow 2 = e^{2x-1}+1$$

$$e^{2x-1} = 1 = e^0 \Longleftrightarrow 2x-1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2} \Longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$f^{-1}\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}$$

tetelt folytatva:

$$\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{e^{2x-1}+1}}{e^{2x-1}}$$

hazibol barmit kerdezhet

gyakorlobol:
- 1 - d,e
- 3 - c
- 6 - d

50 derivalt kell jovohetre papiron. A canvasra feltoltott Gyemidovics peldatar segit (ugyanebben a commitban lesz)