Diszkrét matematika I. feladatok
Komplex számok II
Hatodik alkalom (2025.03.17-21.)

Bemelegítő feladatok

1. Számítsa ki a következő kifejezéseket a trigonometrikus alak felhasználásával:
   a) $(1+i)(1+\sqrt{3}i) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\cdot 2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$;
   b) $i(\sqrt{3}+i) = 1(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})\cdot 2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}) = 2(\cos\frac{4\pi}{6}+i\sin\frac{4\pi}{6})$;
   c) $(1-i)^3 = \Big(\sqrt{2}\big(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\big)\Big)^3 = \sqrt{2}^3(\cos(-3\frac{\pi}{4})+i\sin(-3\frac{\pi}{4})) =$
   $2\sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{4})+i\sin(\frac{5\pi}{4}))$, mivel végül $[0,2\pi)$ intervallumba kell esnie az argumentumnak.

2. Az alábbi geometriai transzformációk a komplex számsík mely műveleteivel írhatóak le:
   a) origó körüli forgatás $\pi/4$-gyel;
   Megoldás: $(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$-vel való szorzás.
   b) origó körüli forgatás $5\pi/6$-tal és 3-szoros nyújtás.
   Megoldás: $3(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}) = (-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i)$-vel szorzás.

Gyakorló feladatok

3. Számítsa ki a következő kifejezéseket a trigonometrikus alak felhasználásával:

a) $$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \frac{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^9}{\left(\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)\right)^7} = \frac{2^{9/2}\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)}{2^{7/2}\left(\cos\frac{-7\pi}{4}+i\sin\frac{-7\pi}{4}\right)} =$$
$$= 2^{(9-7)/2}\left(\cos\frac{(9-(-7))\pi}{4}+i\sin\frac{(9-(-7))\pi}{4}\right) = 2(\cos 4\pi + i\sin 4\pi) = 2 = 2+0i$$

b) $$\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{11}}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{13}} = \frac{(2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}))^{11}}{(2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}))^{13}} = \frac{2^{11}(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})}{2^{13}(\cos\frac{13\pi}{3}+i\sin\frac{13\pi}{3})} =$$
$$= 2^{(11-13)}(\cos(\frac{11}{6}-\frac{13}{3})\pi + i\sin(\frac{11}{6}-\frac{13}{3})\pi) = 2^{-2}(\cos(-\frac{15}{6}\pi)+i\sin(-\frac{15}{6}\pi)) =$$
$$= \frac{1}{4}(\cos(-\frac{5\pi}{2})+i\sin(-\frac{5\pi}{2})) = \frac{1}{4}(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{4}(0+i\cdot(-1)) = -\frac{1}{4}i$$

c) $$\frac{(1-i)^{13}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^5} = \frac{\sqrt{2}^{13}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)^{13}}{2^5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^5} = 2^{\frac{13}{2}-5}(\cos(-\frac{13\pi}{4}-\frac{5\pi}{6})+i\sin(-\frac{13\pi}{4}-\frac{5\pi}{6})) =$$
$$= 2^{\frac{3}{2}}(\cos(-\frac{39\pi}{12}-\frac{10\pi}{12})+i\sin(-\frac{39\pi}{12}-\frac{10\pi}{12})) = 2^{3/2}(\cos(\frac{49\pi}{12})+i\sin(\frac{49\pi}{12})) = 2^{3/2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$$

Nevezetes szögek trigonometrikus értéke

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

4. Vonjon harmadik gyököt a következő számokból:

   a) $1 = (\cos 0 + i \sin 0)$ **Megoldás:** $\left(\cos(k\dfrac{2\pi}{3}) + i\sin(k\dfrac{2\pi}{3})\right)$, $k = 0, 1, 2$;

   b) $-1 = (\cos\pi + i\sin\pi)$ **Megoldás:** $\left(\cos(\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3})\right)$, $k = 0, 1, 2$;

   c) $\dfrac{-4}{(1+i)^2} = \dfrac{4(\cos\pi + i\sin\pi)}{(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}))^2} = \dfrac{4(\cos\pi + i\sin\pi)}{2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})} = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

   Megoldás: $\sqrt[3]{2}\left(\cos(\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3})\right)$, $k = 0, 1, 2$.

Érdekes feladatok

5. A sík mely geometriai transzformációinak felelnek meg a komplex számok halmazának alábbi leképezései: $z \mapsto 3z$, $z \mapsto (1+i)z$, $z \mapsto (1/2 + i\sqrt{3}/2)z$.

   Megoldás: $z \mapsto 3z$, az origó középpontú 3-szorosra nyújtás: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$.

   $z \mapsto (1+i)z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)z$, ez az origó középpontú nyújtva forgatás: $\sqrt{2}$-szeresre nyújtás és $\dfrac{\pi}{4}$ szögű forgatás (pozitív, azaz az óramutató járásával ellentétes irányban).

   $x + iy \mapsto (1+i)(x+iy) = (x-y) + (x+y)i$, mátrixosan: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$

   $z \mapsto \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z = \left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)z$, ez az origó középpontú $\dfrac{\pi}{3}$ szögű forgatás (az óramutató járásával ellentétes irányban). $x + iy \mapsto \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x+iy) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$, mátrixosan: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$

6. Tekintsük az $R = \{(z^4, z) : z \in \mathbb{C}\}$ relációt a komplex számok halmazán.

   a) Mi lesz $R^{-1}(\{2\})$, $R(\{16\})$, $\mathrm{rng}(R)$, $\mathrm{dmn}(R)$?

   b) Határozza meg az $R^{-1} \circ R$ és $R \circ R^{-1}$ kompozíciókat!

   c) Tekintsük az $R(\{0, 1, 16\})$ halmazt! Véges lesz-e? Ha igen, mennyi lesz $|R(\{0, 1, 16\})|$?

   Megoldás: $wRz \Leftrightarrow w = z^4$ (azaz z a w-nek negyedik gyöke), vagyis ha többértékű hozzárendelésként gondolunk az R relációra, akkor R minden $w \in \mathbb{C}$ komplex számhoz annak mind a négy komplex negyedik gyökét hozzárendeli.

   $zR^{-1}w \Leftrightarrow wRz \Leftrightarrow w = z^4$ (azaz w a z-nek negyedik hatványa), vagyis ha többértékű hozzárendelésként gondolunk az R^{-1} relációra, akkor R^{-1} minden $z \in \mathbb{C}$ komplex számhoz annak negyedik hatványát (ami egyértelmű) rendeli hozzá, azaz ez egy egyértelmű hozzárendelés, vagyis függvény.

   a) Ennek megfelelően: $R^{-1}(\{2\}) = \{2^4\} = \{16\}$, $R(\{16\}) = \{16$ komplex negyedik gyökei$\} = \{2(\cos(k\frac{\pi}{2}) + i\sin(k\frac{\pi}{2})), k = 0, 1, 2, 3\}$, és mivel minden komplex számból vonható negyedik gyök, ezért $\mathrm{dmn}(R) = \mathbb{C}$, és minden komplex számnak létezik negyedik hatványa is, ezért $\mathrm{rng}(R) = \mathrm{dmn}(R^{-1}) = \mathbb{C}$

b) $R^{-1} \circ R = \{(u, w) \mid \exists z \in \mathbb{C} : uRz \wedge zR^{-1}w\} = \{(u, w) \mid \exists z \in \mathbb{C} : u = z^4 \wedge z^4 = w\} = \{(u, w) : u = w\}$, ez az egyenlőség reláció, másképpen fogalmazva az identitásfüggvény, a komplex számok halmazán.

A másik kompozíció nem lesz függvény: $R \circ R^{-1} = \{(u, w) \mid \exists z \in \mathbb{C} : uR^{-1}z \wedge zRw\} = \{(u, w) \mid \exists z \in \mathbb{C} : u^4 = z \wedge z = w^4\} = \{(u, w) : u^4 = w^4\}$, mivel két komplex szám akkor áll relációban $R \circ R^{-1}$ szerint, ha van olyan komplex szám, aminek mindketten negyedik gyökei, de minden nemnulla komplex számnak négy különböző negyedik gyöke van, amik egy origó körüli körbe írt négyzet négy csúcsát alkotják (más szavakkal egymásnak egyedik egységgyökszörösei). $w(R \circ R^{-1})z \Leftrightarrow (w = z) \vee (w = -z) \vee (w = iz) \vee (w = -iz)$

c) A $0 \in \mathbb{C}$ számnak csak saját maga a negyedik gyöke, $1 \in \mathbb{C}$ negyedik gyökei a komplex negyedik egységgyökök (azaz $1, -1, i, -i$), $16 \in \mathbb{C}$ negyedik gyökei $2, -2, 2i, -2i$. Ennek megfelelően $R(\{0, 1, 16\}) = \{0, 1, -1, i, -i, 2, -2, 2i, -2i\}$ véges halmaz, $|R(\{0, 1, 16\})| = 9$.

Beadandó házi feladatok

7. Számítsa ki a következő kifejezéseket a trigonometrikus alak felhasználásával

   a) $(1 - i)^2(1 - \sqrt{3}i)$; b) $\dfrac{(\sqrt{3} + i)^5}{-1 - i}$; c) $(1 - i)^{100}$.

   Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat). (**részenként 1/3 pont**)

8. Számítsa ki a $(\sqrt{3} + i)^5/(1 - i)^7$ komplex szám harmadik gyökeit!

   Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat). (**1 pont**)

9. Tekintsük az $R = \{(z^3, z) : z \in \mathbb{C}\}$ relációt a komplex számok halmazán. Mi lesz $R^{-1}(\{1\})$, $R(\{8\})$, $(R \circ R)(\{-1\})$?

   Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat). (**részenként 1/3 pont**)

További gyakorló feladatok otthonra

10. Legyenek z és w különböző komplex számok. Írjuk fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát.

    Megoldás: Két, helyvektorral megadott pont szakaszának felezőpontja a két helyvektor összegének a fele (ez a vektorösszeadás "paralelogramma-szabályának" lerajzolásából látható). A komplex számsík $x + iy$ pontja azonosítható az origóból az (x, y) koordinátájú pontba mutató helyvektorra, és a komplex számok összeadása pont a vektorösszeadás. Ezért a z és w számokat összekötő szakasz felezőpontja a $\frac{z+w}{2}$ szám.
    A két szabályos háromszög legyen az $A = z$, $B = w$, és C, illetve az $A = z$, $B = w$, és D pontokkal megadott háromszög. Két pont "összekötő vektora" a két helyvektor (illetve itt két komplex szám) különbsége: $\overrightarrow{AB} = B - A = w - z$, $\overrightarrow{AC} = C - A$, $\overrightarrow{AD} = D - A$. Mivel szabályos háromszögekről van szó, ezért $\overrightarrow{AC}$ vektor az $\overrightarrow{AB}$ vektornak $60° = \dfrac{\pi}{3}$ szögű elforgatottja. Ezt a forgatást a komplex számsíkon a $(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ egységnyi abszolútértékű számmal való szorzás valósítja meg: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = (w - z)(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

Tehát $C = A + \overrightarrow{AC} = z + (w - z)(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.
Hasonlóan $\overrightarrow{AD}$ vektor az $\overrightarrow{AB}$ vektornak $-60^\circ = \dfrac{5\pi}{3}$ szögű elforgatottja. Ezt a forgatást a komplex számsíkon a $(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$ egységnyi abszolútértékű számmal való szorzás valósítja meg: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = (w - z)(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$.
Tehát $D = A + \overrightarrow{AD} = z + (w - z)(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$.
Tetszőleges háromszög súlypontjának helyvektora az origóból a három csúcsba mutató vektorok összegének harmada. Most már ezt is ki tudjuk számolni erre a két háromszögre...

11. A komplex számsíkon egy négyzet középpontja a $K = 1 + 2i$ illetve egyik csúcsa az $A = 5 + 4i$ komplex számnak megfelelő pontban van. Határozza meg a négyzet többi csúcsának megfelelő komplex számokat.

    Megoldás: A többi csúcs B, C és D. Tudjuk, hogy a középpontból a csúcsokba mutató vektorok egymás derékszöggel való elforgatottjai, a derékszögű forgatást az i-vel való szorzás valósítja meg: $\overrightarrow{KB} = i \cdot \overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KC} = i \cdot \overrightarrow{KB} = i^2 \cdot \overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KD} = i \cdot \overrightarrow{KC} = -i \cdot \overrightarrow{KA}$.

    $$\overrightarrow{KA} = A - K = 4 + 2i$$

    így $\overrightarrow{KB} = i \cdot (4 + 2i) = -2 + 4i$, $\overrightarrow{KC} = -(4 + 2i) = -4 - 2i$, $\overrightarrow{KD} = -i \cdot (4 + 2i) = 2 - 4i$.
    Tehát:
    $B = K + \overrightarrow{KB} = (1 + 2i) + (-2 + 4i) = -1 + 6i$
    $C = K + \overrightarrow{KC} = (1 + 2i) + (-4 - 2i) = -3$
    $D = K + \overrightarrow{KD} = (1 + 2i) + (2 - 4i) = 3 - 2i$

12. Vonjon négyzetgyököt a következő számokból:

    a) $3 - 4i$; **Megoldás:** $3 - 4i = 5(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ahol $\tan\alpha = -4/3$ és α a negyedik síknegyedben van, azaz $\alpha = \arctan(-4/3) \approx -17,7^\circ$. De ez a közelítő szögérték nem megfelelő, ha precíz eredményt akarunk! Viszont elővéve a függvénytáblázatot: $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$ és $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$. Ha α a negyedik síknegyedben van, akkor a felének a koszinusza pozitív, szinusza negatív. Ezt kihasználva $3 - 4i$ két négyzetgyöke: $w_{1,2} = \pm\sqrt{5}(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}) = \pm 5^{1/4}\left(\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}} - i\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}\right)$. Ez a legutolsó alak már *NEM* trigonometrikus alak, hanem bonyolultan írt algebrai alak. Mivel $\cos\alpha = 3/5$, ezt beírva: $w_1 = \sqrt{5\dfrac{1 + 3/5}{2}} - i\sqrt{5\dfrac{1 - 3/5}{2}} = \sqrt{\dfrac{5 + 3}{2}} - i\sqrt{\dfrac{5 - 3}{2}} = 2 - i$, és $w_2 = -w_1 = -2 + i$.

    b) $2i$; **Megoldás:** $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ két négyzetgyöke $w_{1,2} = \pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Itt a $\pm$ váltja ki az argumentum $\alpha + k \cdot \frac{2\pi}{2} = \alpha + k \cdot \pi$, $k = 0, 1$ két esetét, de a $w_2 = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ NEM triginometrikus alak! Ha trigonometrikus alak kell, akkor $w_2 = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4} + \pi) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \pi)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

c) $z=(1-i)^3/(1-\sqrt{3}i)^5$ **Megoldás:** $z=\dfrac{\left(\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)\right)^3}{\left(2\left(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)\right)^5}$

$$z=\frac{2^{3/2}\left(\cos(-\frac{3\pi}{4})+i\sin(-\frac{3\pi}{4})\right)}{2^5\left(\cos(-\frac{5\pi}{3})+i\sin(-\frac{5\pi}{3})\right)}=2^{3/2-5}\left(\cos(-\frac{32\pi}{12})+i\sin(-\frac{32\pi}{12})\right)$$

$z=2^{7/2}\left(\cos(-\frac{8\pi}{12})+i\sin(-\frac{8\pi}{12})\right)=2^{7/2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$. Ebből már könnyen vonunk négyztgyököt: $w_{1,2}=\pm 2^{7/4}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, ahol w_2 trigonometrikus alakja természetesen nem $w_2=-w_1$, hanem $w_2=2^{7/4}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

13. Oldja meg a következő másodfokú egyenletet: $(2+i)z^2-(5-i)z+(2-2i)=0$.

Megoldás: Megoldóképlettel: $z_{1,2}=\dfrac{5-i\pm\sqrt{(-5+i)^2-4(2+i)(2-2i)}}{2(2+i)}$, ahol a gyök előtti $\pm$ jelzi, hogy mindkét komplex négyzetgyök használandó. $(-5+i)^2-4(2+i)(2-2i)=24-10i-4(6-2i)=-2i=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, ennek a két négyzetgyöke közül az egyik $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-1+i$, a másik pedig $\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)=1-i$. Tehát $z_{1,2}=\dfrac{5-i\pm(1-i)}{4+2i}$, azaz

$z_1=\dfrac{6-2i}{4+2i}\cdot\dfrac{4-2i}{4-2i}=\dfrac{24-4-8i-12i}{4^2+2^2}=\dfrac{20-20i}{20}=1-i$, és

$z_2=\dfrac{4}{4+2i}\cdot\dfrac{4-2i}{4-2i}=\dfrac{16-8i}{4^2+2^2}=\dfrac{16}{20}-\dfrac{8}{20}i=\dfrac{4}{5}+\dfrac{2}{5}i.$

14. Vonjon harmadik gyököt a következő számokból

c) $2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2^3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Megoldás: $\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3})\right)$, $k=0,1,2$

d) $\dfrac{3+4i}{1+i}$ **Megoldás:** Mivel $3+4i$ trigonometrikus alakjában nem tudunk precíz szögértéket megadni, ezért célszerűbb algebrai alakkal kiszámolni a törtet: $\dfrac{3+4i}{1+i}=\dfrac{3+4i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{7+i}{2}$, viszont ennek sem szép az argumentuma. $z=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i=\sqrt{12,5}\,(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, ahol $\tan\alpha=1/7$, és α az első síknegyedbe esik, tehát $\alpha=\arctan(1/7)$. Ezt a szöget kell harmadolni...

15. Vonjon negyedik gyököt a következő számból: $\dfrac{-4}{(2+i)^3}$. **Megoldás:** Megint az a gond, hogy a nevezőnek nem nevezetes szög az argumentuma, így először algebrai alakkal érdemesebb vacakolni: $(2+i)^3=8+3\cdot 4i+3\cdot 2i^2+i^3=8-6+12i-i=2+11i$, ezután a tört: $\dfrac{-4}{(2+i)^3}=$

$\frac{-4}{2+11i} \cdot \frac{2-11i}{2-11i} = \frac{-8+44i}{2^2+11^2} = \frac{-8+44i}{125} = -\frac{8}{125} + \frac{44}{125}i = r \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ahol $r = \sqrt{8^2+44^2}/125 = \sqrt{64+1936}/125 = \sqrt{2000}/125 = 20\sqrt{5}/125 = 4\sqrt{5}/25$, és az α argumentum a második síknegyedbe esik, és $\tan\alpha = -8/44 = -2/11$, azaz $\alpha = \arctan(-7/11) + \pi$.
A negyedik gyökök: $r^{1/4} \cdot \left(\cos(\frac{\alpha}{4} + k\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\alpha}{4} + k\frac{\pi}{2})\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.