hf megnezni miert $\frac{\sin x}{x} = 1$ bizonyitani nem kell de majd hasznalni igen

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

ez az $\frac{1}{a}$ csak negyzettel erdemes megjegyezni

cos hatvanysora az az exponencialis csak a paros tagoknak mas az elojele

megjegyzesek:

- 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ha $x \approx 0$ akkor $\frac{\sin}{x} \approx 1$

de ha atszorzok x-el, ($\sin \approx x$) akkor $\sin x$ kozelit x-hez
sot, ez felirhato ugy hogy $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$. ezzel ugyanaz van leirva, ez pedig $\sin'(x)$. azt pedig tudjuk hogy $\sin'(0) = \cos(0) = 1$

ahol ez az 1 az erintonek a meredekseget a nulla pontban ha felrajzoljuk a sin-t akkor latszik hogy nullaban $y = x$ egyenes az erinto

ez azt fejezi ki hogy az origo koruli x-ek majdnem olyan mint egy egyenes, origo kivul ez nem igaz.

mi az x? sin hatvanysora ($x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$) ugy indul hogy x. az az elso tag, tehat ha linearisan kozelitek elso fokon akkor csak az van ott

- 2

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

ha $x \approx 0 \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} \approx 1$

ha atrendezem akkor $e^x \approx x + 1$

masreszt mi a lim?

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^0}{x - 0}$$

ez pedig nem mas mint $\exp'(0)$, amirol pedig tudjuk hogy a derivaltja onmaga

$$\exp'(0) = \exp(0) = 1$$

az erintojenek az egyenlete itt $y = e^x$

null pontban ez 1. Az egyenete

$$y = F(a) + f'(a) \cdot (x - a) \qquad \text{ha } f \in D\{a\}$$

$$y = e^0 + 1(x - 0)$$

$$y = 1 + x$$

ez pedig pont a kozelitesbol adodott egyenes tehat az megint az adott pontban a legjobban kozelito linearis fuggveny tehat ha x kozel van az origohoz akkor pontos, ha nem nem

ennek a hatvanysora

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

megint latszik hogy az elso tagok $1 + x$, tehat innen is latszik a kozelites

feladatok

2/a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0$$

ha a kapott lim egy veges szam akkor a fuggveny differencialhato tehat $f \in D\{a\}$ es $f'(a) = 0$

egyezmenyes jeloles:

$$(c)' = 0 \qquad (\forall c \in \mathbb{R})$$

2/b

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0-0} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0+0} (1) = 1 \end{cases}$$

esetrebontom bal es jobb oldali hatarertekre

- balrol $x \to 0 - 0$ akkor $-x$ lesz a szamlaloban es igy az eredmeny $\lim -1 = -1 = f'_b(0)$ (ahol a b bal oldali derivaltat jelol)
- jobbrol $x \to 0 + 0$ akkor $\frac{x}{x}$ igy $\lim(1) = 1 = f'_j(0)$

lehetne + es - jelolni b es j helyett

az kovetkezik hogy abs fugveny nem differerncialhato a nulla pontban mert a ketto hatarertek nem egyezik meg. nem tudunk huzni erintot. van baloldali felerinto -1 meredekseggel, jobbrol 1, de nullaban nincs. erre mondjuk hogy hegyes, nem sima. innen intuicioban latszik hogy olyan fuggveny ahol eles torespontok vannak akkor ordibal hogy abban a pontban nem lehet derivalni mert mindig ket erintoje lesz

2/c

tetszoleges a pontban a derivaltja

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} = \frac{0}{0}$$

ha polinomnak veges helye 0 a hatarerteke, akkor a polinomnak gyoke az a szam, ami azt jelenti hogy oszthato a nevezovel. ezt kihasznalva

$$\lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x^3 + x^2 a + x a^2 + 3)}{x - a} =$$

x nem 0 ezert oszthato ez

$$= a^3 + a^3 + a^3 + a^3 = 4a^3 \in \mathbb{R} \Rightarrow f \in D\{a\} \text{ es } f'(a) = 4a^3 (\forall a \in \mathbb{R})$$

minden x-hez ahol a fuggvenyt derivalhato hozzarendelem a derivaltjat

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto f'(x) = 4x^3, \text{roviden } \left(x^4\right)' = 4x^3 (\forall x \in \mathbb{R})$$

2/d

mindenhol ertelmes kiveve nullat, terjunk el annyit hogy ne csak pozitivat nezzunk hanem $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

rovid szabaly:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

felfoghattam volna hatvanyfuggvenykent is es akkor

$$\frac{1}{x} = x^{-1} \to \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

2/i

mindig meg kell nezni ki a felelos a nullaert ha $\frac{0}{0}$, es azt kell kiemelni. ha az leegyszerusodik akkor nagy esellyel nyertunk

$$\lim_{x \to -1} \frac{\frac{x+2}{x^2-9} - \frac{1}{-8}}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{\frac{8x+16+x^2-9}{8x^2-72}}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2+8x-7}{(x+1)(8x^2-72)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x+7)}{(x+1)(8x^2-72)} = \lim_{x \to -1} \frac{x+7}{8x^2-72} = \frac{6}{-64} = \frac{3}{-32}$$

2/e

emlkezteto hogy csak akkor nezhetjuk a fuggvenyt ha van kornyezete, nullaban azert nem ertelmes vagyis azert van kikotve mert nullaban nem tudok lejjebb menni a kornyezettel a definicio szerint

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{(x-a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2/f

ez az esetet ugy hivjak hogy visszatero pont. a gyokfuggveny is ilyen

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \nexists$$

2/g

itt a hatvaysor kiirasa helyett az a trukk hogy $h = x - a \to 0$ es onnan kihozhatjuk az elso feladatban levo nevezetes azonossagot

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \qquad (h = x - a)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{e^a \cdot e^{x-a} - e^a}{h} = \lim_{x \to a} e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{h} = \lim_{x \to a} e^a \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^a \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^a \cdot 1 = e^a$$

2/h

hatvanysort megint el lehet kerulni a h trukkel. itt viszont mivel nincs multiplikativ tulajdonsaga a sinnek ezert addicios teteleket hasznalni

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \qquad (h = x - a)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h + a) - \sin a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h \cos a + \sin a \cos h - \sin a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h \cos a + \sin a(\cos h - 1)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\cos a \cdot \frac{\sin h}{h} - \sin a \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) = \lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a$$