

Mikor mondjuk azt, hogy egy függvény n -szer ($2 \leq n \in \mathbb{N}$) differenciálható egy pontban?

TFH $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ és egy $n = 2, 3, \dots$ -re \exists az $f^{(n-1)}$ deriváltfüggvény.

AMH az f n -szer deriválható az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban (jelölése: $f \in D^n\{a\}$), ha

- $\exists r > 0 : f \in D^{n-1}(K_r(a))$, és
- az $f^{(n-1)}$ függvény deriválható a -ban, azaz $f^{(n-1)} \in D\{a\}$.

Legyen ekkor

$$f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)})'(a)$$

az f függvény a -beli n -edik deriváltja.

Írja le a $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabályt!

Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$ és $f, g \in D(a, b)$.

TFH

- $\exists \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0$
- $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- $\exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$

Ekkor

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Írja le a $\frac{+\infty}{+\infty}$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabályt!

Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$ és $f, g \in D(a, b)$.

TFH

- $\exists \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = +\infty$
- $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- $\exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$

Ekkor

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Mi a kapcsolat a hatványsor összegfüggvénye és a hatványsor együtthatói között?

TFH a $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-a)^k$ ($x \in \mathbb{R}$) hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét.

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D^{\infty}\{x\}$, és bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)\alpha_k(x-a)^{k-n}$$

Ha $x = a$, akkor

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Hogyan definiálja egy függvény Taylor-sorát?

Ha a $f \in D^{\infty}\{a\}$, akkor a

$$T_a f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsort az f függvény $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ ponthoz tartozó Taylor-sorának, a sor n -edik részletösszegét, azaz a

$$T_{a,n} f(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

polinomot az f függvény $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ ponthoz tartozó n -edik Taylor-polinomjának nevezzük.

Az f függvény $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát f Maclaurin-sorának is nevezzük.

Fogalmazza meg a Taylor-formula Lagrange maradéktaggal néven tanult tételt!

Legyen $n \in \mathbb{N}$

TFH $f \in D^{n+1}(K(a))$

Ekkor $\forall x \in K(a)$ ponthoz \exists olyan a és x közé eső ξ szám, hogy

$$f(x) - T_{a,n} f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Milyen elégséges feltételt ismer a Taylor-sornak a generáló függvényhez való konvergenciájával kapcsolatban?

Legyen $f \in D^{\infty}(K(a))$

TFH

$$\exists M > 0 : |f^{(n)}(x)| \leq M (\forall x \in K(a), \forall n \in \mathbb{N})$$

Ekkor f -nek az a ponthoz tartozó Taylor-sora a $K(a)$ halmazon előállítja az f függvényt, vagyis fennáll az

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (x \in K(a))$$

egyenlőség

Írja fel az $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ($x \in \mathbb{R}, |x| < 1$) függvény Taylor-sorát!

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

Írja fel az $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ($x \in \mathbb{R}, |x| < 1$) függvény Taylor-sorát!

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$