1.

vektornormák

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ leképezést vektornormának nevezzük, ha

1. $\|x\| \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n)$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |v_k|$$

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2}$$

$$\|v\|_\infty = \max_{k=1}^{n} |v_k|$$

$p \geq 1$ esetén

$$\|v\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

mátrixnormák

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ leképezést mátrixnormának nevezzük, ha

1. $\|A\| \geq 0 \quad (\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n})$
2. $\|A\| = 0 \iff A = 0$
3. $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n})$
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n})$
4. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n})$

$$\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{i=1}^{n} \lambda_i (A^T A)} = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

2. kondíciószám, érzékenység

$$\operatorname{cond}_1(A) = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|$$

$$\operatorname{cond}_2(A) = \rho(A) \cdot \rho(A^{-1})$$

3. iterációk

$$\|B\| < 1 \Longrightarrow x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \quad \text{konvergál} \quad \forall x^0\text{-ra}$$

$$\rho(B) < 1 \Longleftrightarrow x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \quad \text{konvergál} \quad \forall x^0\text{-ra}$$

Jacobi

$$x^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{B_J}x^{(k)} + \underbrace{D^{-1}b}_{c_J}$$

koordinátás

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(\sum_{j=1\ j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right)$$

csillapított Jacobi

$$x^{(k+1)} = \underbrace{[(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)]}_{B_{J(\omega)}}x^{(k)} + \underbrace{\omega D^{-1}b}_{c_{J(\omega)}}$$

koordinátás

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}} \cdot \left(\sum_{j=1\ j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right)$$

Gauss-Seidel

$$x^{(k+1)} = \underbrace{-(L+D)^{-1}U}_{B_S}x^{(k)} + \underbrace{(L+D)^{-1}b}_{c_S}$$

paraméteres

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right)$$

Richardson

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(I-pA)}_{B_{R(p)}}x^{(k)} + \underbrace{pb}_{c_{R(p)}}$$

paraméteres

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right)$$

ILU

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(P^{-1}Q)}_{B_{ILU}}x^{(k)} + \underbrace{P^{-1}b}_{c_{ILU}}$$