Guldin-tétel

Legyen $f : [a,\ b] \to [0,\ +\infty),\ f \in C,\ A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

$\rho : A \to [0,\ +\infty),\ \rho \equiv 1$

$|A| = \displaystyle\int_A 1\ dxdy = \text{a graf } f$ alatti terület

A súlypont (valamiért csak a második koordinátát nézzük):

$y_s = \frac{1}{|A|} \displaystyle\int_A y\ dxdy = \frac{1}{|A|} \int_a^b (\int_0^{f(x)} y\ dy)dx = \frac{1}{2 \cdot |A|} \int_a^b f^2(x)\ dx = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot |A|} \cdot \underbrace{\pi \int_a^b f^2}_{=:V}$

Ahol V az f függvény x tengely körüli megforgatásából keletkező test térfogata.

Az előző egyenletet átrendezve:

$V = \underbrace{2 \cdot \pi \cdot y_s}_{y_s \text{ sugarú kör területe}} \cdot |A|$

Felület

(Fáj a szívem, hogy Simon nagy fível jelölte és így nem tudok varphi-t használni)

Gauss-féle paraméterezés (ezt fogjuk használni később)

Legyen $\phi \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \phi \in C^1$ $(\text{azaz } \phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3),\ \partial_k \phi_j \in C\ (j = 1, 2, 3,\ k = 1, 2))$

Legyen $I \subset \mathbb{R}^2$ kompakt intervallum és tegyük fel, hogy $I \subset D_\phi$. Ekkor

$\phi[I]$ a **felület**.

Euler-Monge-féle paraméterezés

$I \subset \mathbb{R}^2$ kompakt intervallum, $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g \in C^1,\ I \subset D_g$ és

$\phi(u, v) = (u, v, g(u, v)) \quad ((u, v) \in I)$

$n_\phi =$ Hf

Felszín

$$\phi' = \begin{bmatrix} \partial_1\phi_1 & \partial_2\phi_1 \\ \partial_1\phi_2 & \partial_2\phi_2 \\ \partial_1\phi_3 & \partial_2\phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1\phi & \partial_2\phi \end{bmatrix}$$

Azaz $\partial_1\phi, \partial_2\phi \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Feltesszük, hogy $\forall(u,v) \in I$ esetén $\partial_1\phi(u,v) \nparallel \partial_2\phi(u,v)$

Ekkor $n_\phi(u,v) \coloneqq \partial_1\phi(u,v) \times \partial_2\phi(u,v) \neq 0$

Sidenote

$\xi \coloneqq (x,y,z),\ \mu \coloneqq (a,b,c),\ \xi,\mu \in \mathbb{R}^3$ vektorok vektoriális szorzata:

$$\xi \times \mu = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} \qquad (\underline{i}, \underline{j}, \underline{k} \text{ a bázisvektorok})$$

Definíció alapján $\xi \times \mu = \|\xi\| \cdot \|\mu\| \cdot \sin\alpha \cdot n$ (α a vektorok által bezárt szög, n a vektorokra merőleges egységvektor)

$\xi \times \mu$ merőleges ξ-re és μ-re is

ξ és μ kifeszítenek egy paralelogrammát, a területe:

$\|\xi \times \mu\|_2 = \|\xi\|_2 \cdot \|\mu\|_2 \cdot \sin\alpha$

End of sidenote

Tehát, ha $n_\phi = \partial_1\phi \times \partial_2\phi$, akkor merőleges a deriváltak által kifeszített síkra, a $\phi[I]$ felület felületi normálisa.

$\tau \subset I$ felosztás, $ABCD \in \mathcal{F}(\tau)$

$(\phi(A)\phi(B)\phi(C)\phi(D))$ felületet akarjuk közelíteni pici paralelogrammákkal.

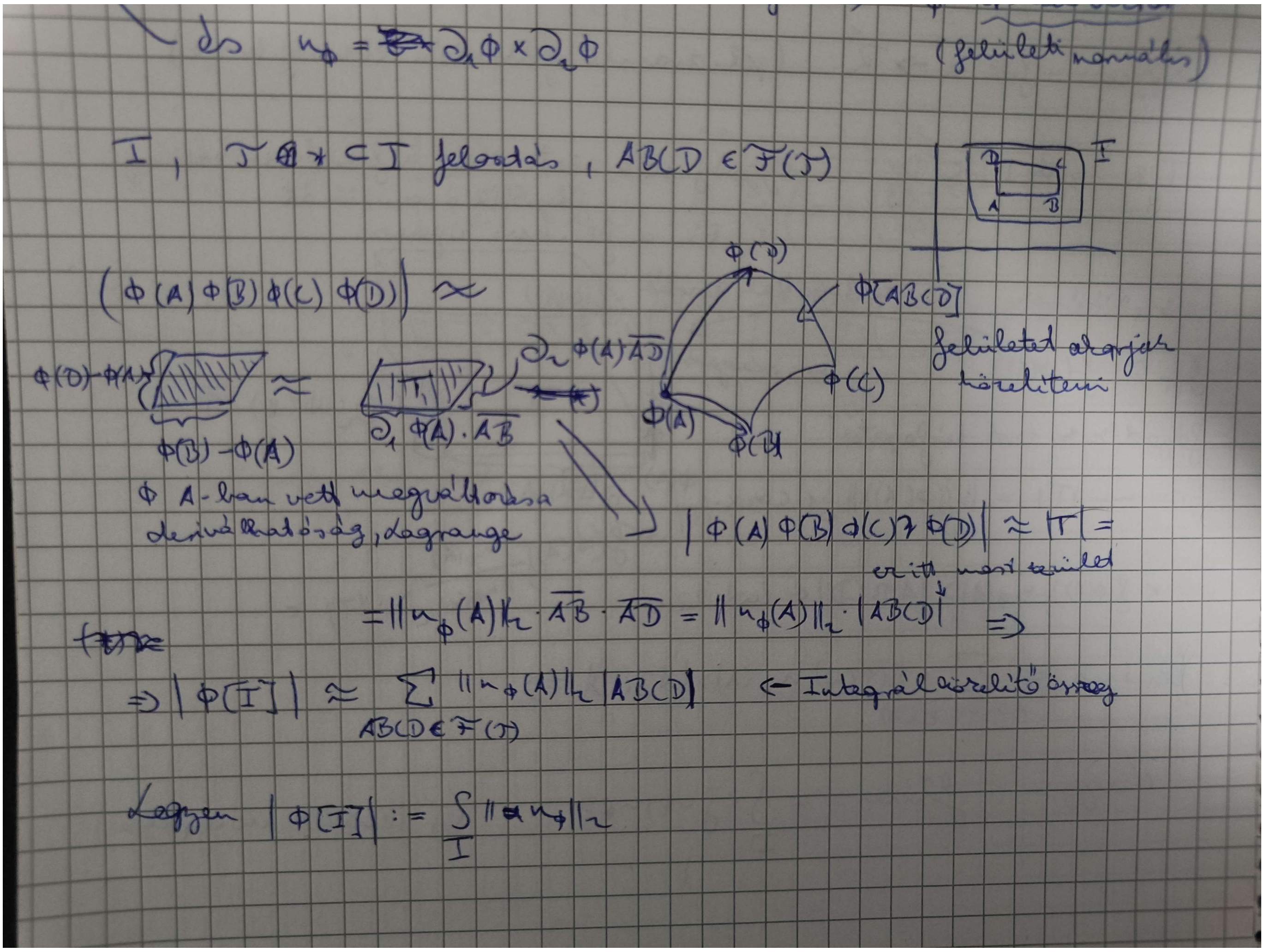
A $\phi(D) - \phi(A)$ és a $\phi(B) - \phi(A)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe $\approx$ $\partial_1\phi(A) \cdot \overline{AB}$ és $\partial_2\phi(A) \cdot \overline{AD}$ által kifeszített paralelogramma területe, ez legyen $|T|$

$|\phi(A)\phi(B)\phi(C)\phi(D)| \approx |T| = \|n_\phi(A)\|_2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} = \|n_\phi(A)\|_2 \cdot |ABCD| \implies$

$|\phi[I]| \approx \displaystyle\sum_{ABCD \in \mathcal{F}(\tau)} \|n_\phi(A)\|_2 \cdot |ABCD|$

Ami egy integrál közelítőösszeg, tehát

$$|\phi[I]| := \int_I \|n_\phi\|_2$$



Példa:

$f : [a,\ b] \to [0,\ +\infty),\ f \in C^1$, forgásfelület

$$\phi(u,v) := (u, f(u)\cdot\cos v, f(u)\cdot\sin v) \quad (a \le u \le b,\ 0 \le v \le 2\pi)$$

$$\partial_1\phi(u,v) = (1, f'(u)\cdot\cos v, f'(u)\cdot\sin v)$$

$$\partial_2\phi(u,v) = (0, -f(u)\cdot\sin v, f(u)\cdot\cos v)$$

$$n_\phi(u,v) = \partial_1\phi(u,v) \times \partial_2\phi(u,v) = (f(u)\cdot f'(u)\cdot\cos^2 v + f(u)\cdot f'(u)\cdot\sin^2 v, -f(u)\cdot\cos v, -f(u)\cdot\sin v) = f(u)(f'(u), -\cos v, -\sin v) \implies$$

$$\|n_\phi(u,v)\|_2 = f(u)\cdot\sqrt{1+(f'(u))^2}$$

felszín $= \int_{[a,b]\times[0,2\pi]} n_\phi(u,v)\, dudv = 2\pi \cdot \int_a^b f \cdot \sqrt{1+(f')^2}$

Fluxus, felületi integrál

Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (pl áramló folyadék sebesség függvénye)

Tegyük fel, hogy $\phi[I] \subset D_f$ egység idő alatt ezen a felületen mennyi folyadék áramlik át

Az előzőhöz hasonlóan tekintsük a $\partial_1\phi(A) \cdot \overline{AB}$ és $\partial_2\phi(A) \cdot \overline{AD}$ által kifeszített paralelogrammát és területét $\left(|T|\right)$

A paralelogramma minden pontjához vegyük fel a ponthoz tartozó f értéket is, az így kialakuló test térfogatát szeretnénk közelíteni

Legyen m a test magassága és α $f(\phi(A))$ és m által bezárt szög

$f_{\big|T} \approx f(\phi(A)) \approx m \cdot |T| = \|f(\phi(A))\|_2 \cdot 1 \cdot \cos\alpha \cdot |T| = < f(\phi(A)), \frac{n_\phi(A)}{\|n_\phi(A)\|_2} > \cdot |T| = < f(\phi(A)), n_\phi(A) > \cdot |ABCD|$

fluxus $\approx \sum_{ABCD \in \mathcal{F}(\tau)} < f(\phi(A)), n_\phi(A) > \cdot |ABCD|$

Ami egy integrál közelítőösszeg, tehát

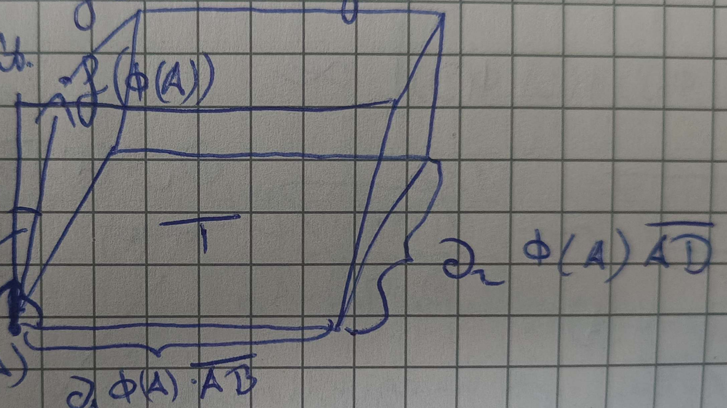
fluxus = $\int_\phi f := \int_I < f \circ \phi, n_\phi >$ (az f függvénynek a ϕ felületre vonatkozó felületi integrálja)

Df   egység idő alatt ezen a felületen mennyi folyadék áramlik át

Ez a fluxus iguess

térfogattal közelít.

m = magasság



fogata

$\Phi(A))\|_2 \cdot 1 \cdot \cos\alpha \cdot |T|$

$= \left\langle f(\Phi(A)), \frac{n_{\Phi(A)}}{\|n_{\Phi(A)}\|_2} \right\rangle \cdot |T| =$

$|ABCD| \leftarrow$ ind. közi

$\langle f(\Phi(A)), n_{\Phi}(A)\rangle\, |ABCD| \Rightarrow$

$F(J)$