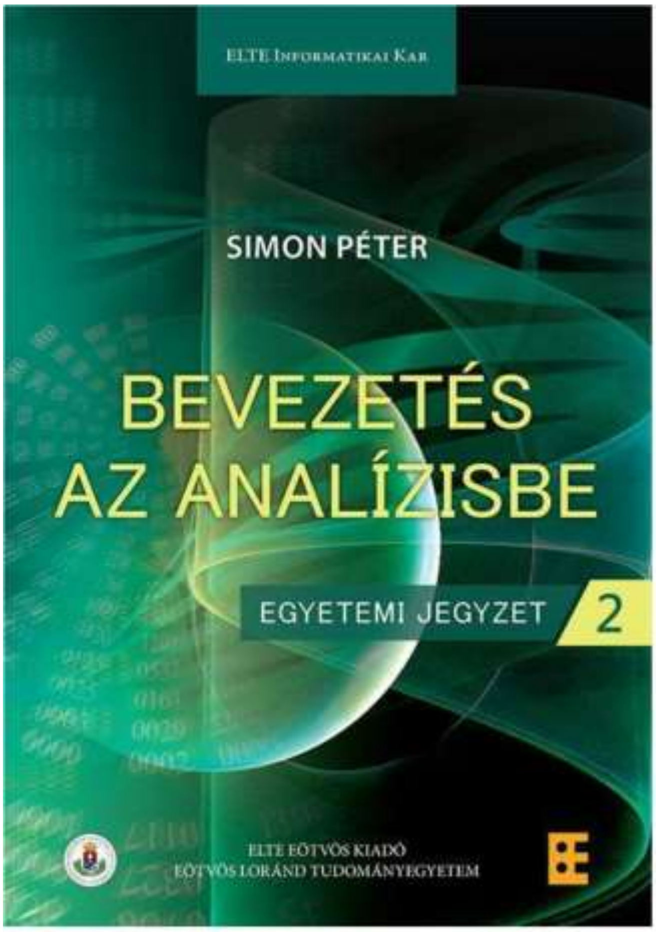
ELTE Informatikai Kar
SIMON PÉTER
BEVEZETÉS AZ ANALÍZISBE
EGYETEMI JEGYZET
2
ELTE EÖTVÖS KIADÓ
EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

Simon Péter

Bevezetés az analízisbe II.

egyetemi jegyzet

Budapest, 2013

A jegyzet az
ELTE IK 2014. évi *Jegyzettámogatási pályázat*
támogatásával készült

Lektorálta: Dr. Kovács Sándor egyetemi adjunktus

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a jegyzet az Eötvös Loránd Tudományegyetem Informatikai Kara által oktatott programtervező informatikus hallgatók számára íródott. Az említett képzés keretében a hallgatók három féléven keresztül hallgatják az *Analízis* című tárgyat. Ennek során megismerkednek az egy- és a többváltozós analízis alapfogalmaival és tételeivel, különös tekintettel az alkalmazási lehetőségekre (pl. a numerikus módszerek, a matematikai modellezés stb. szempontjából). Mindezt olyan szinten és mélységben, ami egy, az informatika matematikai jellegű alkalmazásaiban is eligazodni tudó leendő informatikus szakembertől elvárható. Az új rendszerű, kétlépcsős BSC-MSC oktatási formához igazodó, célzottan megírt segédanyagok nélkülözhetetlenek az eredményes képzéshez. Az ebben a rendszerben folyó oktatás során mára már felgyűlt annyi tapasztalat, amely lehetővé teszi az ilyen, a hallgatók által is eredményesen felhasználható jegyzetek, tankönyvek, példatárak stb. elkészítését. Az említett képzés első két félévének az analízisanyagát tartalmazza a szerző *Bevezetés az analízisbe I* című jegyzete. A jelen jegyzet (amely nagyban támaszkodik az előbb idézett első kötetre) ezt az eddigi hiányt hivatott pótolni az analízis harmadik félévét és az első három félévre épülő, a hallgató választásától függően *Az analízis alkalmazásai,* vagy a *Modellek és algoritmusok* című tárgyakat illetően. A szerző évtizedek óta oktatta-oktatja az analízist ezen a szakterületen, ill. az azt megelőző képzési formában a volt programtervező matematikus hallgatók képzésében. Ennek keretében rengeteg egyéni tapasztalatot is gyűjtött az analízis (és alkalmazásai) oktatási területén, amelyet speciálisan a programtervező informatikus hallgatók analízisoktatási igényeihez igazodva ennek a tankönyvnek a megírása során is maximálisan igyekezett hasznosítani. Egyúttal lehetőséget nyújtva azok számára is, akik a kötelezően előírtakon túli területekre is szeretnének némi betekintést kapni.

Több jegyzet, szakkönyv, monográfia áll azok rendelkezésére (magyar nyelven is), akik esetleg más aspektusból is kíváncsiak a tárgyalt témakörökre, a lehetséges általánosítási lehetőségekre. Számukra a teljesség igénye nélkül az alábbiakban ajánlunk néhány művet:

- Balázs Márton – Kolumbán József: *Matematikai Analízis,* egyetemi tankönyv, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár-Napoca, 1978.

- Járai Antal: *Kalkulus,* egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2013.

- Kósa András: *Útban a felsőbb matematikához,* egyetemi tankönyv, LSI Oktatóközpont, Budapest, 1995.
- Kósa András: *Kezdeti lépések a felsőbb matematikához. 1. Differenciálszámítás,* egyetemi tankönyv, LSI Oktatóközpont, Budapest, 2000.
- Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: *Analízis II,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007.
- Leindler László – Schipp Ferenc: *Analízis 1*, egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.
- Schipp Ferenc: *Analízis I,* egyetemi jegyzet, JPTE, Pécs, 1994.
- Schipp Ferenc: *Analízis II,* egyetemi jegyzet, JPTE, Pécs, 1997.
- Simon Péter: *Fejezetek az analízisből,* egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1997.
- Simon Péter: *Bevezetés az analízisbe I,* egyetemi jegyzet, 2013.
- Szili László: *Analízis feladatokban I,* egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 2005.
- Walter Rudin: *A matematikai analízis alapjai,* egyetemi tankönyv, Műszaki Kiadó, Budapest, 1978.

Köszönettel tartozom feleségemnek, *Dr. S. Gyarmati Erzsébet* egyetemi adjunktusnak, és volt tanítványomnak, *Szarvas Kristóf* doktorandusznak a kézirat lelkiismeretes elolvasásáért, értékes megjegyzéseikért, valamint a sajtóhibák gondos kijavításáért.

A szerző

Budapest, 2013. november.

1. fejezet

A $\mathbf{K}^n$ tér topológiája

1.1. Absztrakt terek

Az $f \in \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ függvények (speciálisan a valós vagy komplex számsorozatok) vizsgálatakor alapvető szerepet játszott az, hogy „mérni" tudtuk két szám „távolságát". Nevezetesen, ha $x, y \in \mathbf{K}$, akkor az x és az y *távolságán* az $|x-y|$ számot értettük. Ez utóbbi látszólag függ a valós vagy komplex számok algebrai struktúrájától, hogy ti. $x, y \in \mathbf{K}$ esetén létezik az $x-y \in \mathbf{K}$ szám, ill., hogy bármely $z \in \mathbf{K}$ számnak értelmeztük a $|z|$ módon jelölt abszolút értékét (amit a valós számok körében bevezetett rendezés segítségével definiáltunk). Ugyanakkor nem nehéz meggondolni, hogy az előbb említett függés valóban csak látszólagos. Ti. ebből a szempontból igazából csak az alábbi tulajdonságok játszanak szerepet: bevezetve a

$$\rho(u,v) := |u-v| \qquad (u,v \in \mathbf{K})$$

jelölést tetszőleges $x, y, z \in \mathbf{K}$ számokra

1^o $\rho(x,y) \geq 0$;

2^o $\rho(x,y) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = y$;

3^o $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

4^o $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

(A 4^o ún. *háromszög-egyenlőtlenség* alkalmazása számos bizonyítás kulcsmozzanata volt.) A $\mathbf{K}$-beli számok távolságának az értelmezéséhez tehát tulajdonképpen nincs szükség sem a test-struktúrára, sem (az $\mathbf{R}$-beli) rendezésre, hanem pl. az előbbi $1^o - 4^o$ összefüggéseknek eleget tevő

$$\rho : \mathbf{K} \times \mathbf{K} \to \mathbf{R}$$

függvény segítségével a $\rho(x,y) := \rho((x,y)) \quad (x, y \in \mathbf{K})$ helyettesítési értéket (nemnegatív számot) nevezhetjük az $x, y \in \mathbf{K}$ számok *távolságának.*

A „távolság" említése nem pusztán formai trükk. Gondoljunk pl. az $\mathbf{R}^2$-ben már a bevezető tanulmányok során megismert euklideszi távolságra, amikor is az $(x, y), (u, v) \in \mathbf{R}^2$ vektorok távolságát a

$$\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$$

nemnegatív számmal mértük. Az itt is megjelenő algebrai struktúra az, ami csupán formai. Az elemi geometriában hamar kidomborodik ui. a tartalmi lényeg, nevezetesen:

i) két vektor távolsága nemnegatív szám;

ii) két vektor távolsága akkor és csak akkor nulla, ha a két vektor azonos;

iii) az egyik vektor távolsága a másiktól ugyanaz, mint a másiknak az előbbitől;

iv) két vektor távolsága nem lehet nagyobb egy harmadik vektortól mért távolságaik összegénél.

Nem nehéz belátni, hogy ezek (az egymástól ugyan nem teljesen független) tulajdonságok azok, amelyek (az előbbiekben a számokkal kapcsolatban megfogalmazottakkal analóg módon) jellemzik az $\mathbf{R}^2$-beli elemek távolságát. Hasonló mondható el akkor is, ha $\mathbf{R}^2$ helyett $\mathbf{R}^3$-at, ill. i) – iv) -ben kétdimenziós vektorok helyett háromdimenziós vektorokat veszünk. Könnyű meggyőződni arról is, hogy $\mathbf{K}$-ban, ill. $\mathbf{R}^2$-ben, vagy $\mathbf{R}^3$-ban nem egyedül a most említett módon mérhetjük az elemek távolságát. Pl., ha $x, y \in \mathbf{K}$ esetén x és y távolságának az

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

nemnegatív számot választjuk, akkor az előbbi $1^o - 4^o$ tulajdonságok triviálisan teljesülnek. Hasonlóan, az $(x, y), (u, v) \in \mathbf{R}^2$ vektorok távolságaként vehetnénk pl. a

$$\max\{|x-u|, |y-v|\}$$

számot.

Konkrét példák sokasága vezet el a távolság-fogalom absztrakciójához, nevezetesen: legyen az $X \neq \emptyset$ egy adott (nem üres) halmaz, és tegyük fel, hogy a

$$\rho : X^2 \to [0, +\infty)$$

függvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a) minden $x \in X$ esetén $\rho(x, x) = 0$;

b) ha $x, y \in X$ és $\rho(x, y) = 0$, akkor $x = y$;

c) bármely $x, y \in X$ választással $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

d) tetszőleges $x, y, z \in X$ elemekkel $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$.

(Valamilyen $(x, y) \in X^2$ esetén a ρ függvény (x, y)-beli helyettesítési értékére a „szabványos" $\rho((x, y))$ szimbólum helyett továbbra is az egyszerűbb $\rho(x, y)$-t használjuk.) Azt mondjuk, hogy ekkor ρ egy *távolságfüggvény* (vagy idegen szóval *metrika*); ha $x, y \in X$, akkor $\rho(x, y)$ az x, y elemek *távolsága*. Az (X, ρ) rendezett párt *metrikus térnek* nevezzük.

1.2. Megjegyzések

i) Az X-beli elemek távolsága tehát egy nemnegatív szám. Bármely elem önmagától vett távolsága *nulla* (ld. a)), továbbá két különböző elem távolsága mindig *pozitív* (ld. b)). A távolság *szimmetrikus*, azaz két elem távolsága független az illető elemek sorrendjétől (ld. c)). A d) tulajdonságot *háromszög-egyenlőtlenségként* fogjuk idézni. Mutassuk meg, hogy a háromszög-egyenlőtlenségből annak az alábbi változata is következik:

$$|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y) \qquad (x, y, z \in X).$$

Ugyanis a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

tehát

$$\rho(x, z) - \rho(y, z) \leq \rho(x, y).$$

Ha itt x-et és y-t felcseréljük, akkor a

$$-(\rho(x, z) - \rho(y, z)) = \rho(y, z) - \rho(x, z) \leq \rho(y, x) = \rho(x, y)$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az utóbbi két becslés egybevetésével kapjuk a jelzett egyenlőtlenséget.

ii) Bármely $X \neq \emptyset$ halmaz esetén megadható $\rho : X^2 \to [0, +\infty)$ távolságfüggvény, ui. a

$$\rho(x, y) := \begin{cases} 0 & (x = y) \\ \\ 1 & (x \neq y) \end{cases} \qquad \big((x, y) \in X^2\big)$$

leképezés nyilván eleget tesz a fenti, a metrikát meghatározó a) – d) axiómáknak. Az így definiált (X, ρ) teret a *diszkrét* jelzővel illetjük.

iii) Megmutatható, hogy az a) – d) axiómák nem függetlenek egymástól, nevezetesen: ha egy $\rho : X^2 \to \mathbf{R}$ függvény rendelkezik az a), b), d) tulajdonságokkal, akkor ρ metrika. Valóban, ha d)-ben y helyébe x-et írunk, akkor a) szerint $0 = \rho(x, x) \leq 2\rho(x, z)$-hez, azaz a bármely $x, z \in X$ esetén fennálló $\rho(x, z) \geq 0$ egyenlőtlenséghez jutunk. A még „hiányzó" szimmetria igazolásához írjunk most d)-ben z helyébe x-et, akkor ismét csak a) miatt

$$\rho(x, y) \leq \rho(y, x) \qquad (x, y \in X)$$

adódik. Innen – x és y felcserélésével – $\rho(y, x) \leq \rho(x, y)$, azaz $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ $(x, y \in X)$ következik. Ezzel együtt célszerű az a) – d) axiómarendszer szerepeltetése (a ρ nemnegativitásával együtt), hiszen a későbbiekben állandóan ezekre történik hivatkozás.

iv) Soroljunk fel néhány példát, amelyek nem csupán az analízisben játszanak fontos szerepet.

1^o Legyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $0 < p < +\infty$, és

$$x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{K}^n$$

esetén definiáljuk az (x, y)-ban a

$$\rho_p : \mathbf{K}^n \times \mathbf{K}^n \to [0, +\infty)$$

függvény helyettesítési értékét a következőképpen:

$$\rho_p(x, y) := \begin{cases} \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p & (p \leq 1) \\ \\ \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} & (p > 1). \end{cases}$$

Terjesszük ki a ρ_p értelmezését $p = \infty := +\infty$-re is az alábbiak szerint:

$$\rho_\infty(x, y) := \max\{|x_i - y_i| : i = 1, ..., n\}.$$

Megmutatható, hogy $(\mathbf{K}^n, \rho_p)$ metrikus tér. (Ennek a bizonyítását nem részletezzük, csupán megjegyezzük, hogy mindez $p = 1$-re és $p = \infty$-re meglehetősen triviális.) A későbbiekben a ρ_∞ metrika mellett a $\mathbf{K}^n$-beli vektorok távolságának a mérésére többnyire a

$$\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}\ ,\ \ \rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \qquad (x, y \in \mathbf{K}^n)$$

metrikákat fogjuk használni. Speciálisan az $n = 1$ esetben

$$\rho_p(x, y) = \begin{cases} |x - y|^p & (p < 1) \\ \\ |x - y| & (p \geq 1) \end{cases} \qquad (x, y \in \mathbf{K}).$$

2^o Az előbbi példa „végtelen dimenziós" változataként tekintsük egy $0 < p < +\infty$ mellett az

$$\ell_p := \left\{(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\right\}$$

halmazokat. Legyen továbbá $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \ell_p$ esetén

$$\rho_p(x,y) := \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^p & (0 < p \leq 1) \\ \\ \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{1/p} & (p > 1). \end{cases}$$

Bebizonyítható, hogy az így definiált ρ_p függvény is metrika, azaz (ℓ_p, ρ_p) metrikus tér. A $p = \infty := +\infty$-re való „kiterjesztést" a következőképpen kapjuk:

$$\ell_\infty := \left\{(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K} : \sup\{|x_n| : n \in \mathbf{N}\} < +\infty\right\}$$

(más szóval az ℓ_∞ szimbólum a korlátos számsorozatok halmazát jelöli), valamint az ℓ_∞-beli $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ elemekre

$$\rho_\infty(x,y) := \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbf{N}\}.$$

A ρ_∞ függvény is metrika, tehát $(\ell_\infty, \rho_\infty)$ is metrikus tér.

3^o Valamilyen $[a,b]$ korlátos és zárt intervallum (tehát $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$) esetén jelöljük $C[a,b]$-vel az $[a,b]$-n értelmezett, valós értékű és folytonos függvények halmazát. Ha $0 < p \leq +\infty$, akkor tekintsük az 1^o, 2^o példák alábbi „folytonos" változatait:

$$\rho_p(f,g) := \begin{cases} \int_a^b |f-g|^p & (0 < p \leq 1) \\ \\ \left(\int_a^b |f-g|^p\right)^{1/p} & (1 < p < +\infty) \\ \\ \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\} & (p = \infty := +\infty) \end{cases}$$

$(f, g \in C[a,b])$. (Emlékeztetünk arra, hogy $|f-g|^p$ bármely $0 < p \in \mathbf{R}$ mellett folytonos függvény, így Riemann szerint integrálható. Továbbá Weierstrass nevezetes tétele alapján az $|f-g|$ folytonos függvénynek van maximuma.)

Az előbbi példákhoz hasonlóan látható be, hogy $(C[a,b], \rho_p)$ is metrikus tér.

v) A iv)-ben definiált valamennyi ρ_p metrika $p \geq 1$ mellett „belefér" egy általános keretbe. Tegyük fel ui., hogy a szóban forgó $X \neq \emptyset$ halmaz *lineáris tér* a $\mathbf{K}$ felett. (Nem fog félreértést okozni, ha az $x, y \in X$ elemek X-beli „összegét" $x + y$-nal, valamilyen $\lambda \in \mathbf{R}$ esetén az x elem (X-beli) λ-szorosát λx-szel, az x inverzét pedig $-x$-szel, továbbá az X-beli nulla-elemet 0-val jelöljük.) Azt mondjuk, hogy a

$$\varphi : X \to [0, +\infty)$$

leképezés *norma*, ha

a) $\varphi(0) = 0$;

b) ha $x \in X$ és $\varphi(x) = 0$, akkor $x = 0$;

c) bármely $\lambda \in \mathbf{K}$, $x \in X$ esetén $\varphi(\lambda x) = |\lambda|\varphi(x)$;

d) tetszőleges $x, y \in X$ elemekre $\varphi(x+y) \le \varphi(x) + \varphi(y)$.

Egy $x \in X$ elem esetén az

$$\|x\| := \varphi(x)$$

nemnegatív számot az x *hosszának* (vagy *normájának*), az $(X, \|.\|)$ rendezett párt pedig *normált térnek* nevezzük. Következésképpen a fenti a) – d) axiómák alakja ezzel a jelöléssel:

a) $\|0\| = 0$;

b) ha $x \in X$ és $\|x\| = 0$, akkor $x = 0$;

c) bármely $\lambda \in \mathbf{K}$, $x \in X$ esetén $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

d) tetszőleges $x, y \in X$ elemekre $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

A d) axiómát szintén *háromszög-egyenlőtlenségként* említjük a későbbiekben.

Ha X jelöli a

$$\mathbf{K}^n \quad (0 < n \in \mathbf{N}) \ , \ \ \ell_p \quad (0 < p \in \mathbf{R}) \ , \ \ C[a,b] \quad (-\infty < a < b < +\infty)$$

halmazok bármelyikét, akkor a vektorok (sorozatok, függvények) szokásos összeadására és számmal való szorzására nézve X lineáris tér a $\mathbf{K}$, ill. az $\mathbf{R}$ felett. Az említett terekben a nulla-elemet 0-val jelölve azt kapjuk továbbá, hogy $1 \le p \le +\infty$ esetén

$$\|x\|_p := \rho_p(x, 0) \quad (x \in X)$$

norma, azaz ilyen p-kre $(\mathbf{K}^n, \|.\|_p)$, $(\ell_p, \|.\|_p)$, $(C[a,b], \|.\|_p)$ normált terek: tehát

$$\|x\|_p = \begin{cases} \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p} & (1 \le p < +\infty) \\ \\ \max\{|x_i| : i = 1, ..., n\} & (p = +\infty) \end{cases} \qquad \Big(x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{K}^n\Big),$$

speciálisan az $n = 1$ esetben

$$\|x\|_p = |x| \qquad (x \in \mathbf{K},\ 1 \le p \le +\infty),$$

$$\|y\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{1/p} & (1 \le p < +\infty) \\ \sup\{|y_i| : i \in \mathbf{N}\} & (p = +\infty) \end{cases} \qquad \big(y = (y_n) \in \ell_p\big),$$

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} & (1 \le p < +\infty) \\ \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\} & (p = +\infty) \end{cases} \qquad \big(f \in C[a,b]\big).$$

Világos, hogy

$$\rho_p(x,y) = \|x-y\|_p \qquad (x,y \in X).$$

Sőt, ha most $(X, \|.\|)$ egy tetszőleges normált teret jelöl, akkor a

$$\rho(x,y) := \|x-y\| \qquad \big((x,y) \in X^2\big)$$

függvény metrika, azaz (X,ρ) metrikus tér: $(X,\rho) \equiv (X, \|.\|)$. Jegyezzük meg, hogy ekkor az i) megjegyzésbeli

$$|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \le \rho(x,y) \qquad (x,y,z \in X)$$

háromszög-egyenlőtlenség az alábbi alakot ölti:

$$\Big|\|x-z\| - \|y-z\|\Big| \le \|x-y\| \qquad (x,y,z \in X).$$

Ha itt $z = 0$, akkor

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \le \|x-y\| \qquad (x,y \in X).$$

vi) Az v) megjegyzésben bevezetett $\|.\|_p$ norma a $p = 2$ esetben ismét csak speciális esete egy tágabb (a lineáris algebrából is jól ismert) normaosztálynak. Legyen ui. X újra egy lineáris tér a $\mathbf{K}$ felett, az

$$s : X^2 \to \mathbf{K}$$

függvényről pedig tegyük fel, hogy

- minden $x, y \in X$ mellett $s(x,y) = \overline{s(y,x)}$ (ahol a $\overline{\xi}$ szimbólum a $\xi \in \mathbf{K}$ szám komplex konjugáltját jelöli);
- bármely $x \in X \setminus \{0\}$ esetén $s(x,x) > 0$;
- ha $x, y \in X$ és $\lambda \in \mathbf{K}$, akkor $s(\lambda x, y) = \lambda s(x,y)$;

- tetszőleges $x, y, z \in X$ elemekre fennáll a következő egyenlőség:

$$s(x+y, z) = s(x, z) + s(y, z).$$

Ha $x, y \in X$, akkor az

$$\langle x, y \rangle := s(x, y)$$

számot az x, y elemek *skaláris szorzatának*, az $(X, \langle . \rangle)$ rendezett párt pedig *skaláris szorzat-térnek* (vagy *euklideszi térnek*) nevezzük. A skaláris szorzatra most bevezetett jelöléssel tehát a fenti axiómák a következő alakúak:

- minden $x, y \in X$ mellett $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
- bármely $x \in X \setminus \{0\}$ esetén $\langle x, x \rangle > 0$;
- ha $x, y \in X$ és $\lambda \in \mathbf{K}$, akkor $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$;
- tetszőleges $x, y, z \in X$ elemekre fennáll a következő egyenlőség:

$$\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Speciálisan tetszőleges $x \in X$ esetén

$$\langle 0, x \rangle = \langle 0+0, x \rangle = \langle 0, x \rangle + \langle 0, x \rangle,$$

amiből

$$\langle 0, x \rangle = 0$$

következik. Mivel

$$\overline{0} = 0 = \overline{\langle 0, x \rangle} = \langle x, 0 \rangle,$$

ezért $\langle x, 0 \rangle = 0$ is igaz. (Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az előbbiekben a 0 szimbólum értelemszerűen hol az X vektortér nullelemét, hol pedig a $\mathbf{K}$-beli nullát jelöli.) Továbbá

$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\langle \lambda y, x \rangle} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\lambda} \cdot \langle x, y \rangle \qquad (x, y \in X, \lambda \in \mathbf{K}).$$

Ha $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (azaz $(X, \langle . \rangle)$ egy ún. *valós euklideszi tér*), akkor

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \text{ ill. } \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle \qquad (x, y \in X, \lambda \in \mathbf{R}).$$

Jelentse pl. X a

$$\mathbf{K}^n \ (1 \le n \in \mathbf{N}) \ , \ \ell_2 \ , \ C[a, b] \ (-\infty < a < b < +\infty)$$

halmazok valamelyikét, és

$$\langle x, y\rangle := \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i & \Big(x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{K}^n\Big) \\ \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y}_n & \Big(x = (x_n), y = (y_n) \in \ell_2\Big) \\ \int_a^b xy & \Big(x, y \in C[a, b]\Big), \end{cases}$$

akkor $(X, \langle .\rangle)$ euklideszi tér, továbbá

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in X).$$

Ez utóbbi egyenlőségnek sokkal általánosabb háttere van, ui. tetszőleges $(X, \langle .\rangle)$ euklideszi tér esetén

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in X)$$

norma. A bizonyítás részleteit újra csak mellőzve annyit jegyezzünk meg, hogy a most definiált normával kapcsolatban a háromszög-egyenlőtlenség igazolásában fontos szerep jut az önmagában is alapvető

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in X)$$

Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségnek. Ezt „lefordítva" az előbb említett euklideszi terekre az alábbi egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2} \qquad (x, y \in \mathbf{K}^n),$$

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2} \qquad (x, y \in \ell_2),$$

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2} \qquad (f, g \in C[a, b]).$$

Jegyezzük meg, hogy az $n = 1$ esetben a $\mathbf{K}^n = \mathbf{K}$-ban az előbb értelmezett skaláris szorzás a következő:

$$\langle x, y\rangle = x\overline{y} \qquad (x, y \in \mathbf{K}),$$

ill. ekkor

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = |x| \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Nem nehéz belátni, hogy a fenti $(\mathbf{K}^n, \|.\|_p)$ $(1 \leq n \in \mathbf{N}, 1 \leq p \leq +\infty)$ normált terek közül $(\mathbf{K}^n, \|.\|_2)$ az egyetlen, amelyre a $\|.\|_p$ normát skaláris szorzás „generálja". Másképp fogalmazva az a tény, hogy egy alkalmas $\langle . \rangle$ skaláris szorzással

$$\|x\|_p = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in \mathbf{K}^n),$$

azzal ekvivalens, hogy $p = 2$. Ha ui. $p = 2$, akkor fentebb láttuk, hogy a $\|.\|_2$ norma skaláris szorzásból származik. Fordítva pedig lássuk be először is az ún. *paralelogramma-szabályt*: tetszőleges $(X, \langle . \rangle)$ euklideszi tér esetén az

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in X)$$

normára

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad (x, y \in X).$$

Ui. a skaláris szorzás fenti axiómáit figyelembe véve

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle =$$

$$2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle =$$

$$2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Ha tehát valamilyen $1 \leq p < +\infty$ mellett egy alkalmas skaláris szorzással

$$\|x\|_p = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in \mathbf{K}^n),$$

akkor (az egyszerűség kedvéért $n = 2$-re részletezve a továbbiakat) az

$$x := (1, 0) \;\;,\;\; y := (0, 1) \in \mathbf{K}^2$$

vektorokra is teljesülnie kell az

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2)$$

egyenlőségnek. Mivel

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = \|(1,1)\|_p^2 + \|(1,-1)\|_p^2 = 2^{1+2/p},$$

és

$$\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2 = \|(1,0)\|_p^2 + \|(0,1)\|_p^2 = 2,$$

ezért a kívánt egyenlőség a következő alakú:

$$2^{1+2/p} = 4.$$

Világos, hogy innen $p = 2$. Továbbá ugyanezekre a vektorokra

$$\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 = \|(1,1)\|_\infty^2 + \|(1,-1)\|_\infty^2 = 2,$$

míg

$$2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2) = 2(\|(1,0)\|_\infty^2 + \|(0,1)\|_\infty^2) = 4.$$

Más szóval a $\|.\|_\infty$ normára nem teljesül a paralelogramma-szabály, ezért $\|.\|_\infty$ nem skaláris szorzásból „származik".

vii) Az (X,ρ), (Y,σ) metrikus terek *szorzatát* az alábbiak szerint értelmezhetjük. Legyen $0 < p \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, és az $X \times Y$-beli (x,y), (u,v) vektorok esetén

$$\rho \times \sigma\Big((x,y),(u,v)\Big) := \begin{cases} \rho^p(x,u) + \sigma^p(y,v) & (0 < p \le 1) \\ \Big(\rho^p(x,u) + \sigma^p(y,v)\Big)^{1/p} & (1 < p \in \mathbf{R}) \\ \max\{\rho(x,u), \sigma(y,v)\} & (p = \infty). \end{cases}$$

Bebizonyítható, hogy $(X \times Y, \rho \times \sigma)$ metrikus tér, azaz $\rho \times \sigma$ metrika. A definíció értelemszerűen terjeszthető ki kettőnél több (véges sok) metrikus tér esetére. Ebben az értelemben a iv) megjegyzés 1^o részében szereplő metrikus terek speciális esetként adódnak, nevezetesen, amikor

$$X := Y := ... := \mathbf{K} \ , \ \rho(a,b) := \sigma(a,b) := ... := |a-b| \qquad (a,b \in \mathbf{K}).$$

A $\rho \times \sigma$ leképezés metrika volta $p = 1, 2, \infty$ esetén egyszerűen ellenőrizhető. Egyéb p-kre is csak a háromszög-egyenlőtlenség igazolása bonyolult. A részletek mellőzésével annyit jegyzünk meg csupán, hogy ez $0 < p < 1$ esetén az

$$(1+x)^p \le 1 + x^p \qquad (\mathbf{R} \ni x \ge 0)$$

becslésen, $p \ge 1$ mellett pedig az ún. *Hölder-egyenlőtlenségen* múlik. Ez utóbbi megfogalmazásához legyen

$$q := \begin{cases} \dfrac{p}{p-1} & (1 < p + \infty) \\ 1 & (p = +\infty) \\ +\infty & (p = 1) \end{cases}$$

(tehát $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$). Ha $0<n\in\mathbf{N}$ és $(x_1,...,x_n),\ (y_1,...,y_n)\in\mathbf{K}^n$, akkor

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leq \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^n |x_k|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{k=0}^n |y_k|^q\right)^{1/q} & (1<p<+\infty) \\ \max\{|y_k| : k=1,...,n\}\cdot\sum_{k=1}^n |x_k| & (p=1) \\ \max\{|x_k| : k=1,...,n\}\cdot\sum_{k=1}^n |y_k| & (p=+\infty). \end{cases}$$

Ha $p=2$, akkor $q=2$, és a fenti egyenlőtlenség a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség speciális esete.

Analóg módon értelmezhetjük az $(X,\|.\|_X)$, $(Y,\|.\|_Y)$ normált terek szorzatát (és értelemszerűen kettőnél több (véges sok) normált tér szorzatát). Tekintsük ui. az

$$X\times Y$$

Descartes-szorzatot, ami a koordinátánkénti (X, ill. Y-beli műveletekre nézve) nyilván lineáris tér $\mathbf{K}$ felett. Legyen

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} := \begin{cases} \left(\|x\|_X^p+\|y\|_Y^p\right)^{1/p} & (1\leq p<+\infty) \\ \max\{\|x\|_X,\|y\|_Y\} & (p=+\infty). \end{cases}$$

Ekkor $(X\times Y,\|.\|_{X\times Y})$ normált tér, a szóban forgó $(X,\|.\|_X)$, $(Y,\|.\|_Y)$ *normált terek szorzata* a $\|.\|_{X\times Y}$ *szorzatnormával.* Nyilvánvaló, hogy az v) megjegyzésbeli

$$(\mathbf{K}^n,\|.\|_p) \qquad (1\leq n\in\mathbf{N},\ 1\leq p\leq+\infty)$$

terek az

$$X:=Y:=...:=\mathbf{K}\ ,\ \ \|a\|_X:=\|a\|_Y:=...:=|a| \qquad (a\in\mathbf{K})$$

speciális esetben adódnak.

Hasonlóan, ha $(X,\langle.\rangle_X)$, $(Y,\langle.\rangle_Y)$ euklideszi terek, akkor az

$$\langle(x,y),(u,v)\rangle := \langle x,u\rangle_X+\langle y,v\rangle_Y \qquad \Big((x,y),(u,v)\in X\times Y\Big)$$

definícióval $(X\times Y,\langle.\rangle)$ euklideszi tér, az $(X,\langle.\rangle_X)$, $(Y,\langle.\rangle_Y)$ *euklideszi terek szorzata* (és itt is értelemszerűen terjeszthető ki a definíció kettőnél több (véges sok) euklideszi tér szorzatának az értelmezésére). A vi) megjegyzésben szereplő

$$(\mathbf{K}^n,\langle.\rangle) \qquad (1\leq n\in\mathbf{N})$$

euklideszi teret nyilván az

$$X:=Y:=...:=\mathbf{K}\ ,\ \ \langle a,b\rangle_X:=\langle a,b\rangle_Y:=...:=a\bar{b} \qquad (a,b\in\mathbf{K})$$

választással kapjuk.

viii) Valamely $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ függvényről tegyük fel, hogy

α) $f(x)\le f(y)\quad (x,y\in[0,+\infty),\ x\le y)$;

β) $f(x)=0 \iff x=0\quad \big(x\in[0,+\infty)\big)$;

γ) $f(x+y)\le f(x)+f(y)\quad \big(x,y\in[0,+\infty)\big)$.

Ekkor bármelyik (X,ρ) metrikus tér esetén (könnyen beláthatóan) az

$$X^2\ni(x,y)\mapsto\sigma(x,y):=f\big(\rho(x,y)\big)$$

leképezés metrika. Valóban, az $\mathcal{R}_f\subset[0,+\infty)$ feltétel miatt minden $x,y\in X$ elempárra $\sigma(x,y)\ge 0$. Továbbá a β) kikötés alapján a $\sigma(x,y)=0$ egyenlőségből $\rho(x,y)=0$ következik. Mivel a ρ függvény metrika, ezért innen $x=y$ adódik. Hasonlóan, ha $x,y\in X$, akkor – lévén a ρ metrika – $\rho(x,y)=\rho(y,x)$, így

$$\sigma(x,y)=f\big(\rho(x,y)\big)=f\big(\rho(y,x)\big)=\sigma(y,x).$$

Végül legyen $x,y,z\in X$, ekkor a ρ-ra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségből

$$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(y,z),$$

amiből az f-re tett monotonitási α) feltételből

$$\sigma(x,y)=f\big(\rho(x,y)\big)\le f\big(\rho(x,z)+\rho(y,z)\big)$$

következik. A γ) feltétel miatt ugyanakkor

$$f\big(\rho(x,z)+\rho(y,z)\big)\le f\big(\rho(x,z)\big)+f\big(\rho(y,z)\big)=\sigma(x,z)+\sigma(y,z),$$

más szóval $\sigma(x,y)\le\sigma(x,z)+\sigma(y,z)$.

ix) Gondoljuk meg, hogy tetszőleges $0<a\in\mathbf{R}$, $r\in(0,1]$ esetén az

- $f(x):=ax\quad(x\ge 0)$;
- $g(x):=\dfrac{x}{1+x}\quad(x\ge 0)$;
- $h(x):=x^r\quad(x\ge 0)$;
- $s(x):=\lg(1+x)\quad(x\ge 0)$;
- $v(x):=\min\{1,x\}\quad(x\ge 0)$

függvények eleget tesznek az előző megjegyzésben megfogalmazott feltételeknek. Ti. a (viii)-beli) β) feltétel teljesülése mindegyik függvény esetén triviális. Az f, h, s, v függvények pedig nyilván monoton növekedőek, ezért ezekre az α) feltétel is igaz. Az utóbbi monotonitási kritérium a g-re vonatkozóan a következőt jelenti:

$$\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y} \qquad (0 \leq x \leq y).$$

Ez („átszorzás" után) azzal ekvivalens, hogy

$$x + xy \leq y + xy,$$

azaz azzal, hogy $x \leq y$. A viii)-beli γ) feltétel az f-re meglehetősen nyilvánvaló. A g-re nézve azt kell hozzá belátni, hogy

$$\frac{x+y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \qquad (0 \leq x, y).$$

Mindez pl. az alábbiak szerint történhet:

$$\frac{x+y}{1+x+y} = \frac{x}{1+x+y} + \frac{y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}.$$

A h függvényre ugyanakkor azt kell megmutatni, hogy

$$(x+y)^r \leq x^r + y^r \qquad (0 \leq x, y).$$

Legyen ehhez rögzített $y \geq 0$ mellett

$$F(x) := x^r - (x+y)^r + y^r \qquad (x \geq 0).$$

Ekkor F folytonos, $F \in D\{x\}$ $(x > 0)$, és

$$F'(x) = r\Big(x^{r-1} - (x+y)^{r-1}\Big) \qquad (x > 0),$$

ahol $0 < r \leq 1$ miatt $-1 < r - 1 \leq 0$. Ezért

$$x^{r-1} - (x+y)^{r-1} \geq 0 \qquad (x \geq 0),$$

amiből $F'(x) \geq 0$ $(x > 0)$ következik. Így az F függvény monoton növekedő. Figyelembe véve, hogy $F(0) = 0$, azt kapjuk, hogy

$$F(x) \geq 0 \qquad (x \geq 0),$$

amiből a bizonyítandó egyenlőtlenség már nyilván következik. Hasonlóan látható be az s függvényre is a viii)-beli γ) feltétel teljesülése. Végül azt kell még megmutatnunk, hogy

$$\min\{1, x+y\} \leq \min\{1, x\} + \min\{1, y\} \qquad (x, y \geq 0).$$

Ha ui. $x \geq 1$, vagy $y \geq 1$, akkor $\min\{1, x\} = 1$, vagy $\min\{1, y\} = 1$, ezért

$$\min\{1, x+y\} \leq 1 \leq \min\{1, x\} + \min\{1, y\}$$

nyilván igaz. Ha viszont $0 \leq x, y < 1$, akkor $\min\{1, x\} = x$, $\min\{1, y\} = y$, és

$$\min\{1, x+y\} = \begin{cases} x+y & (x+y \leq 1) \\ \\ 1 & (x+y > 1) \end{cases} \leq x+y = \min\{1, x\} + \min\{1, y\}.$$

x) Következésképpen, ha (X, ρ) metrikus tér, akkor az

$$a\rho \ \ (a > 0) \ \ , \ \ \frac{\rho}{1+\rho} \ \ , \ \ \sqrt{\rho} \ \ , \ \ \rho^r \quad (0 < r \leq 1),$$

ill. az

$$X^2 \ni (x, y) \mapsto \lg\Big(1 + \rho(x, y)\Big) \ , \ X^2 \ni (x, y) \mapsto \min\{1, \rho(x, y)\}$$

függvények mindegyike metrika. Így pl. igazoltuk azt a fentebb már említett tényt, hogy valós (vagy komplex) számok távolságát a „megszokott" $|x - y|$ $(x, y \in \mathbf{K})$ helyett az

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

számmal is „mérhetnénk". Világos, hogy ebben az értelemben bármely két szám távolsága 1-nél kisebb.

xi) Az előbbi megjegyzés alapján könnyen definiálhatunk távolságot a kibővített

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

valós számhalmaz elemei között. Legyen ui. a $\rho : \overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}} \to [0, +\infty)$ a következő leképezés:

$$\rho(x, y) := \begin{cases} \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|} & (x, y \in \mathbf{R}) \\ \\ \rho(y, x) := 1 & (x \in \mathbf{R}\,,\ y = \pm\infty) \\ \\ \rho(y, x) := 1 & (x = +\infty\,,\ y = -\infty) \\ \\ 0 & (x = y = \pm\infty). \end{cases}$$

A x) megjegyzést figyelembe véve már egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a most definiált ρ függvény metrika.

xii) Hasonlóan, a számsorozatok $X := \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ halmazában az

$$X^2 \ni \big((x_n), (y_n)\big) \mapsto \sup\left\{\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N}\right\}$$

leképezés távolságot definiál.

xiii) Legyen $A \neq \emptyset$, és jelöljük X-szel az A halmazon értelmezett (valós vagy komplex értékű) korlátos függvények halmazát:

$$X := \{f : A \to \mathbf{K} : \sup \mathcal{R}_{|f|} < +\infty\}.$$

Nem nehéz belátni, hogy ekkor a

$$\rho(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in A\} \qquad (f, g \in X)$$

függvény metrika. Ha itt az A a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallummal egyenlő, akkor (ld. 1.2. iv) megjegyzés 3^o példa) $C[a, b] \subset X$, és tetszőleges $f, g \in C[a, b]$ esetén

$$\rho(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} = \rho_\infty(f, g).$$

Más szóval, ha itt $Y := C[a, b]$, akkor ρ_∞ nem más, mint a ρ függvény leszűkítése Y^2-re:

$$\rho_\infty = \rho_{|_{Y^2}}.$$

xiv) Az előbbi megjegyés végén mondottak könnyen általánosíthatók az alábbiak szerint. Tegyük fel ti., hogy adott az (X, ρ) metrikus tér, és $\emptyset \neq Y \subset X$. Ekkor az

$$Y^2 \ni (x, y) \mapsto \sigma(x, y) := \rho(x, y)$$

módon értelmezett $\sigma : Y^2 \to [0, +\infty)$ függvény metrika, azaz (Y, σ) is metrikus tér (az (X, ρ) (metrikus) *altere*).

xv) Az 1.2. iv) megjegyzés 3^o példájában (speciális esetként) szereplő $(C[a, b], \rho_1)$ metrikus tér mintájára „megpróbálkozhatnánk" a Riemann-integrálható $f, g \in R[a, b]$ függvények távolságát is (pl.) a

$$\rho(f, g) := \int_a^b |f - g|$$

integrállal mérni. Könnyen ellenőrizhető ugyanakkor, hogy ez nem metrika, hiszen a $\rho(f, g) = 0 \implies f = g$ következtetés nem teljesül. Pl. az

$$f(x) := 1 \quad , \quad g(x) := \begin{cases} f(x) & (a < x \leq b) \\ \\ 0 & (x = a) \end{cases}$$

függvényekre $\rho(f, g) = 0$ triviálisan igaz, de $f \neq g$. Viszont (a Riemann-integrálható függvényekre vonatkozó tulajdonságok alapján) az is könnyen belátható, hogy a szóban forgó ρ függvényre a metrika axiómái közül csupán a fenti következtetés nem áll fenn.

xvi) A xv) megjegyzésben mondottak motiválják az alábbi értelmezést: tegyük fel, hogy egy $X \neq \emptyset$ halmaz esetén a $\rho : X^2 \to [0, +\infty)$ függvényre bármely $x, y, z \in X$ mellett az alábbiak teljesülnek:

- $\rho(x, x) = 0$;
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Ekkor ρ-t *félmetrikának*, (X, ρ)-t *félmetrikus térnek* nevezzük. Pl. (ld. xv) megjegyzés, az ottani ρ-val) $(R[a, b], \rho)$ félmetrikus tér. Ugyanígy a számsorozatok $X := \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ halmazában valamely rögzített $N \in \mathbf{N}$ mellett az

$$X^2 \ni \Big((x_n), (y_n)\Big) \mapsto \frac{|x_N - y_N|}{1 + |x_N - y_N|}$$

leképezés félmetrika.

xvii) A xvi) megjegyzésre utalva legyen adott az (X, ρ) félmetrikus tér. Azt mondjuk, hogy valamely $x, y \in X$ esetén x ekvivalens y-nal, ha $\rho(x, y) = 0$. A félmetrika tulajdonságai alapján könnyűszerrel ellenőrizhető, hogy így egy $r \subset X^2$ ekvivalencia-relációt definiáltunk:

$$r := \{(x, y) \in X^2 : \rho(x, y) = 0\}.$$

Ha $x \in X$ esetén

$$r_x := \{y \in X : (x, y) \in r\},$$

akkor bármely $x, y \in X$ és $u \in r_x$, $v \in r_y$ mellett $\rho(x, y) = \rho(u, v)$. Továbbá az

$$\mathcal{A} := \{r_x \in \mathcal{P}(X) : x \in X\} \quad , \quad \sigma(r_x, r_y) := \rho(x, y) \qquad (x, y \in X)$$

jelölésekkel $(\mathcal{A}, \sigma)$ metrikus tér.

xviii) Félmetrikákból másképpen is „gyárthatunk" metrikát. Legyen ehhez $\mathcal{I} \neq \emptyset$ egy adott „indexhalmaz", minden $\mathcal{I} \ni \alpha$-ra (X, ρ_α) pedig egy félmetrikus tér. Tegyük fel, hogy bármely $x, y \in X$ esetén

$$\sup\{\rho_\alpha(x, y) : \alpha \in \mathcal{I}\} < +\infty,$$

és a $\rho_\alpha(x, y) = 0$ egyenlőség tetszőleges $\mathcal{I} \ni \alpha$-ra csak $x = y$ $(\in X)$ mellett teljesül. Ekkor a

$$\rho(x, y) := \sup\{\rho_\alpha(x, y) : \alpha \in \mathcal{I}\} \qquad (x, y \in X)$$

utasítással értelmezett $\rho : X^2 \to [0, +\infty)$ függvény metrika. Speciális esetként (a xvi) megjegyzést figyelembe véve) ez a metrika szerepel a xii) megjegyzésben.

1.3. Konvergens sorozatok

Elöljáróban emlékeztetünk arra, hogy mit is értettünk egy $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ számsorozat konvergenciáján. Azt mondtuk, hogy az (x_n) sorozat konvergens, ha egy alkalmas $\alpha \in \mathbf{K}$ mellett bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható az $N \in \mathbf{N}$ „küszöbindex" úgy, hogy

$$(*) \qquad |x_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Beláttuk, hogy tetszőleges $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozathoz legfeljebb egyetlen ilyen α létezhet, amit (ha a szóban forgó sorozat a fentiek értelmében konvergens) az (x_n) határértékének neveztünk, és a

$$\lim x \ , \ \lim(x_n) \ , \ \lim_{n\to\infty} x_n$$

szimbólumok valamelyikével jelöltünk. Azt is írtuk ilyenkor, hogy

$$x_n \to \alpha \qquad (n \to \infty).$$

Vegyük észre, hogy ha $(*)$-ban (a $\mathbf{K}$ halmaz algebrai és rendezési struktúráját is kihasználó) $|x_n - \alpha|$ helyett az x_n, α számok *távolságáról* beszélünk, akkor máris megkapjuk a konvergencia absztrakt definícióját.

Tekintsünk ehhez egy (X, ρ) metrikus teret, és legyen $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ egy, az X elemeiből álló sorozat. Az (X, ρ) (absztrakt) metrikus térben is van értelme annak a kérdésnek, hogy az $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozat és valamely $\alpha \in X$ elem esetén vajon van-e a sorozatnak olyan tagja, amely egy előre adott hibakorlátnál közelebb van az α-hoz. Másképp fogalmazva: legyen $\varepsilon > 0$, és keressünk olyan $N \in \mathbf{N}$ indexet, amelyre $\rho(x_N, \alpha) < \varepsilon$ igaz. Ha a szóban forgó sorozatot valamilyen feladat matematikai modelljében azzal a céllal konstruáltuk, hogy az illető feladat megoldását jelentő α-t a sorozat tagjaival a fenti értelemben közelítsük, akkor az (x_n) sorozat meghatározását *numerikus módszernek* (vagy *közelítő eljárásnak*) nevezzük. Egy ilyen módszerrel szemben természetes követelmény egyrészt az, hogy a $\rho(x_N, \alpha) < \varepsilon$ egyenlőtlenség bármely $\varepsilon > 0$ mellett realizálható legyen. Másrészt logikusnak tűnik az az elvárás is, hogy ha az α-t valamilyen hibahatárnál $(\varepsilon > 0)$ már jobban közelítő tagot találtunk a sorozatban – legyen ez az N-edik „lépésben" kapott x_N –, akkor a további lépések során adódó $x_n \quad (n \geq N)$ tagokra is teljesüljön a $\rho(x_n, \alpha) < \varepsilon$ becslés.

Mindezek a megfontolások motiválták már a számsorozatok körében is a konvergencia definícióját. Az $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozatot *konvergensnek* nevezzük, ha van olyan $\alpha \in X$, amelyre bármely $\varepsilon > 0$ „hibakorlát" mellett egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indexszel igaz a

$$\rho(x_n, \alpha) < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N)$$

becslés.

Ha ilyen α nincs, akkor azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat *divergens*. Világos pl., hogy minden konstans sorozat konvergens, hiszen

$$\alpha \in X,\, x_n = \alpha \qquad (n \in \mathbf{N})$$

esetén bármely $N \in \mathbf{N}$ indexre $\rho(x_n, \alpha) = 0$. Ugyanakkor a diszkrét metrikus térben (ld. 1.2. ii) megjegyzés) valamely $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha *kvázikonstans*, azaz létezik olyan $M \in \mathbf{N}$ természetes szám, hogy

$$x_n = x_M \qquad (n \in \mathbf{N}, n \geq M).$$

Ha ui. egy sorozat ilyen, akkor a konvergencia definíciójában α helyébe x_M-et, tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett pedig N helyébe M-et írva triviálisan fennáll a

$$\rho(x_n, \alpha) = \rho(x_n, x_M) = 0 < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n \geq M)$$

egyenlőtlenség. (Az eddig mondottak ráadásul nyilván igazak minden metrikus térben is.) Fordítva, a fenti konvergenciadefinícióban $\varepsilon := 1/2$-et választva egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$\rho(x_n, \alpha) < 1/2 \qquad (\mathbf{N} \ni n > N)$$

adódik, amiből (figyelembe véve a „diszkrét" ρ metrika definícióját) $\rho(x_n, \alpha) = 0$, azaz

$$x_n = \alpha \qquad (\mathbf{N} \ni n > N)$$

következik.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges (X, ρ) metrikus térben konvergens sorozat esetén a konvergencia definíciójában (ld. fent) szereplő $\alpha \in X$ elem egyértelműen létezik. Más szóval igaz az

1.3.1. Tétel. *Legyen valamilyen (X, ρ) metrikus tér esetén az $x = (x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozat konvergens. Ekkor egyértelműen létezik olyan $\alpha \in X$ elem, amellyel tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett*

$$\rho(x_n, \alpha) < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a tételben említett $X \ni \alpha$-n kívül egy $\beta \in X$ elemre is igaz a konvergencia definíciója: bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $M \in \mathbf{N}$, hogy

$$\rho(x_n, \beta) < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > M).$$

Ekkor a ρ metrikára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt tetszőlegesen választott $n \in \mathbf{N}$, $n > \max\{N, M\}$ indexre

$$\rho(\alpha, \beta) \leq \rho(\alpha, x_n) + \rho(x_n, \beta) < 2\varepsilon.$$

Következésképpen $\rho(\alpha, \beta) < 2\varepsilon$. Mivel itt $\varepsilon > 0$ bármilyen (pozitív) szám lehet, ezért csak $\rho(\alpha, \beta) = 0$ lehetséges. A metrika axiómái szerint innen viszont $\alpha = \beta$ adódik. ■

Ha tehát az $x = (x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozat konvergens, akkor a konvergencia definíciójában szereplő, az előző tétel szerint egyértelműen létező $\alpha \in X$ elemet az illető sorozat *határértékének* nevezzük, és (a számsorozatokkal analóg módon) a

$$\lim x \quad , \quad \lim(x_n) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} x_n$$

szimbólumok valamelyikével jelöljük. Absztrakt esetben is használjuk minderre az

$$x_n \to \alpha \qquad (n \to \infty)$$

jelölést is (amit úgy olvasunk, hogy x_n *tart* α*-hoz, ha* n *tart a végtelenbe*).

Legyen most (ld. 1.2. iv) megjegyzés)

$$1 \le s \in \mathbf{N} \quad , \quad 0 < p \le +\infty \quad , \quad X := \mathbf{K}^s \quad , \quad \rho := \rho_p,$$

és tekintsünk egy

$$x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}^s$$

sorozatot. Ha

$$x_n = (x_{n1}, ..., x_{ns}) \; (\in \mathbf{K}^s) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor minden $i = 1, ..., s$ mellett definiálhatjuk az

$$x^{(i)} := (x_{ni})$$

számsorozatot, az x sorozat i-edik *koordináta-sorozatát.* (Az $x^{(i)}$ sorozat n-edik tagja $(n \in \mathbf{N})$ tehát az x sorozat n-edik tagjának az i-edik koordinátája $(i = 1, ..., s)$.) Ekkor az x *vektorsorozat* konvergenciája az alábbiak szerint „kezelhető" a koordináta-sorozatainak a konvergenciája révén.

1.3.2. Tétel. *Legyen* $1 \le s \in \mathbf{N}$, $0 < p \le +\infty$. *Az* $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}^s$ *sorozat akkor és csak akkor konvergens az előbbi* $(\mathbf{K}^s, \rho_p)$ *metrikus térben, ha minden* $x^{(i)}$ $(i = 1, ..., s)$ *koordináta-sorozata konvergens. Továbbá*

$$\mathbf{K}^s \ni (\alpha_1, ..., \alpha_s) = \lim x \iff \alpha_i = \lim x^{(i)} \quad (i = 1, ..., s).$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy a tételbeli x sorozat konvergens, majd legyen

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_s) \in \mathbf{K}^s$$

a határértéke. Figyelembe véve a ρ_p metrika definícióját (ld. 1.2. iv) megjegyzés) ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot megadva van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\varepsilon > \rho_p(x_n, \alpha) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{s} |x_{ni} - \alpha_i|^p & (p < 1) \\ \\ \left(\sum_{i=1}^{s} |x_{ni} - \alpha_i|^p\right)^{1/p} & (1 \le p < +\infty) \\ \\ \max\{|x_{ni} - \alpha_i| : i = 1, ..., s\} & (p = \infty := +\infty) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Világos, hogy bármely $i = 1, ..., s$ esetén

$$\rho_p(x_n, \alpha) \ge \begin{cases} |x_{ni} - \alpha_i|^p & (0 < p < 1) \\ \\ |x_{ni} - \alpha_i| & (1 \le p \le +\infty) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N,\, p \ge 1)$$

és

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \sqrt[p]{\varepsilon} \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N,\, 0 < p < 1).$$

Mindez pontosan azt jelenti, hogy az $x^{(i)}$ koordináta-sorozat konvergens, és

$$\lim x^{(i)} = \alpha_i \qquad (i = 1, ..., s).$$

Fordítva, most induljunk ki abból, hogy minden $x^{(i)}$ koordináta-sorozat konvergens, legyen

$$\alpha_i := \lim x^{(i)} \qquad (i = 1, ..., s)$$

és

$$\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_s) \in \mathbf{K}^s.$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor minden $i = 1, ..., s$ mellett létezik olyan $N_i \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N_i).$$

Legyen $N := \max\{N_1, ..., N_s\}$, ekkor

$$|x_{ni} - \alpha_i| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N,\, i = 1, ..., s).$$

Ezért

$$\rho_p(x_n, \alpha) = \sum_{i=1}^{s} |x_{ni} - \alpha_i|^p < s \cdot \varepsilon^p \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N,\, 0 < p < 1),$$

$$\rho_p(x_n, \alpha) = \Big(\sum_{i=1}^{s} |x_{ni} - \alpha_i|^p\Big)^{1/p} < s^{1/p} \cdot \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N,\, 1 \le p < +\infty),$$

$$\rho_p(x_n, \alpha) = \max\{|x_{ni} - \alpha_i| : i = 1, ..., s\} < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N,\, p = +\infty)$$

Így minden $0 < p \leq +\infty$ esetén az (x_n) sorozat konvergens a $(\mathbf{K}^s, \rho_p)$ metrikus térben, és $\lim(x_n) = \alpha$. ■

Legyen az (X, ρ) metrikus tér esetén $b \in X$ és $r > 0$, ekkor a

$$K_r(b) := \{x \in X : \rho(x, b) < r\}$$

halmazt a b elem r *sugarú környezetének* nevezzük. Használni fogjuk a $K(b)$ (esetenként a szóban forgó környezetek megkülönböztetésére a $k_r(b)$, ill. a $k(b)$) jelölést is a $K_r(b)$ helyett, ha az adott szituációban a $K_r(b)$ *környezet sugara* (r) nem játszik szerepet. Ebben a terminológiában egy konvergens $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozatra és az $\alpha \in X$ elemre $\alpha = \lim(x_n)$ azt jelenti, hogy bármely $K(\alpha)$ környezethez létezik olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$x_n \in K(\alpha) \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

(Röviden: $x_n \in K(\alpha)$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$) (ahol az „m.m." szimbólum a *majdnem minden* kifejezés rövidítése.) Más szóval, tehát tetszőleges $K(\alpha)$ környezetre az

$$\{n \in \mathbf{N} : x_n \notin K(\alpha)\}$$

halmaz legfeljebb véges. Érdemes külön is felhívni a figyelmet arra, hogy pl. az utóbbi kijelentés nem egyenértékű azzal, hogy bármely $K(\alpha)$ mellett az

$$\{n \in \mathbf{N} : x_n \in K(\alpha)\}$$

halmaz végtelen. Indoklásul elég az

$$x_n := (-1)^n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

számsorozatra gondolni, amikor is (a „szokásos" $\rho(x, y) := |x - y|$ $(x, y \in \mathbf{R})$ metrikával) pl. az $1 \in \mathbf{R}$ akármelyik $K(1)$ környezetére

$$\{n \in \mathbf{N} : x_n \in K(1)\} = \{2k : k \in \mathbf{N}\}$$

végtelen halmaz, de az (x_n) sorozat nem konvergens.

A konvergencia definíciója alapján könnyű meggondolni, hogy ha az $(x_n), (y_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozatokra

$$\{n \in \mathbf{N} : x_n \neq y_n\}$$

legfeljebb véges halmaz, akkor a két sorozat *ekvikonvergens*:

$$(x_n) \text{ konvergens} \iff (y_n) \text{ konvergens.}$$

Ekkor igaz továbbá, hogy ha az (x_n) konvergens, akkor $\lim(x_n) = \lim(y_n)$.

Gyakran hivatkozunk a későbbiekben az alábbi, szintén egyszerűen igazolható állításra: ha az $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozat konvergens, akkor minden $k \in \mathbf{N}$ esetén az

$$y_n := x_{n+k} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

előírással definiált $(y_n) : \mathbf{N} \to X$ (*eltolt*) sorozat is konvergens és $\lim(y_n) = \lim(x_n)$.

1.4. Megjegyzések

i) Az $X := \mathbf{K}$, $\rho(x,y) := |x-y| \quad (x, y \in \mathbf{K})$ választással a fentiekben a számsorozatokra jól ismert konvergenciafogalmat kapjuk: az $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat konvergens (és $\lim(x_n) = \alpha \in \mathbf{K}$), ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén alkalmas $N \in \mathbf{N}$ index mellett

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Ha itt $\alpha = 0$, akkor (x_n)-et *nullasorozatnak* nevezzük.

ii) Világos, hogy egy (X, ρ) metrikus térben az $x_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozat konvergenciája (és $\lim(x_n) = \alpha$) azzal ekvivalens, hogy a $\big(\rho(x_n, \alpha)\big)$ számsorozat nullasorozat.

iii) Valamely $-\infty < a < b < +\infty$ mellett tekintsük az $X := C[a,b]$ halmazt és a ρ_∞ metrikát (ld. 1.2. iv) megjegyzés). Ha az $f_n \in C[a,b] \quad (n \in \mathbf{N})$ (függvény)sorozat konvergens, és

$$f := \lim(f_n) \in C[a,b],$$

akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy minden $n \in \mathbf{N}, n > N$ esetén

$$\rho_\infty(f_n, f) < \varepsilon,$$

azaz

$$\max\{|f_n(x) - f(x)| : a \le x \le b\} < \varepsilon.$$

Nyilvánvaló, hogy ekkor az előbbi n indexekre bármelyik $x \in [a,b]$ helyen

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

igaz. Más szóval tehát ez azt jelenti, hogy az $\big(f_n(x)\big)$ (szám)sorozat konvergens és a határértéke $f(x)$. Világos, hogy ez utóbbi tulajdonság értelmezése nem kötődik a szóban forgó ρ_∞ metrikához: ha $g_n, g \in C[a,b] \quad (n \in \mathbf{N})$, és a $\big(g_n(x)\big)$ sorozat minden

$x \in [a, b]$ esetén konvergál a $g(x)$-hez, akkor a (g_n)-et *pontonként konvergensnek*, a g-t pedig a (g_n) függvénysorozat *határfüggvényének* nevezzük. Sőt, ebből a szempontból az sem lényeges, hogy $C[a, b]$-beli függvényekről van szó: $g_n, g \in C[a, b] \quad (n \in \mathbf{N})$ helyett vehetünk $g_n, g : A \to \mathbf{K} \ (n \in \mathbf{N})$ függvényeket is, ahol $A \neq \emptyset$ adott halmaz. Továbbá a $C[a, b]$ szerepe más szempontból sem lényeges. Az előbbi A mellett jelentse ui. $\mathbf{K}(A)$ az összes

$$h : A \to \mathbf{K}$$

korlátos függvény halmazát. Értelmezzük a

$$\rho : \mathbf{K}(A) \times \mathbf{K}(A) \to [0, +\infty)$$

leképezést a következőképpen:

$$\rho(f, h) := \sup\{|f(x) - h(x)| : x \in A\} \qquad \big(f, h \in \mathbf{K}(A)\big).$$

Ekkor $\big(\mathbf{K}(A), \rho\big)$ metrikus tér. Ha $f_n, f \in \mathbf{K}(A) \quad (n \in \mathbf{N})$, és $\lim (f_n) = f$ (azaz a $\big(\rho(f_n, f)\big)$ számsorozat nullasorozat), akkor a $C[a, b]$-beli konvergenciára tett észrevételhez hasonlóan az (f_n) sorozat pontonként is konvergál az f-hez. Az alábbi egyszerű példa azt mutatja, hogy ez fordítva nem igaz: az $A := (0, 1)$,

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (0 < x < 1/n) \\ & \\ 0 & (1/n \leq x < 1) \end{cases} \qquad (x \in A,\ 0 < n \in \mathbf{N})$$

választással az (f_n) függvénysorozat pontonként nyilván konvergál az

$$f(x) := 0 \qquad (x \in A)$$

függvényhez, de a minden pozitív $\mathbf{N} \ni n$-re fennálló

$$\rho(f_n, f) = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : 0 < x < 1\} = 1$$

egyenlőség miatt (f_n) (a ρ metrika értelmében) nem konvergál az f-hez. A pontonkénti konvergenciától megkülönböztetendő, ezért az $f_n \in \mathbf{K}(A) \quad (n \in \mathbf{N})$ függvénysorozatot *egyenletesen konvergensnek* mondjuk, ha valamely $f \in \mathbf{K}(A)$ függvénnyel

$$\rho(f_n, f) = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Az „egyenletes" jelző arra utal, hogy ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbf{N}$, hogy minden $x \in A$ elemre és bármely $n \in \mathbf{N}, n > N$ indexre

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ezzel szemben a pontonkénti konvergencia esetén az előbbi kijelentésben szereplő N függhet (ε mellett) az $A \ni x$-től is.

iv) Az (X, ρ) metrikus térben legyen adott egy konvergens (x_n) sorozat. Lássuk be, hogy ha $\alpha := \lim(x_n)$, akkor bármely $\beta \in X$ esetén a $\big(\rho(x_n, \beta)\big)$ számsorozat konvergens, és
$$\lim\big(\rho(x_n, \beta)\big) = \rho(\alpha, \beta).$$
Sőt, ha az $(y_n) : \mathbf{N} \to X$ is egy konvergens sorozat és $\beta := \lim(y_n)$, akkor a $\big(\rho(x_n, y_n)\big)$ számsorozat is konvergens, és
$$\lim\big(\rho(x_n, y_n)\big) = \rho(\alpha, \beta).$$
Valóban, a háromszög-egyenlőtlenségnek az 1.2. i) megjegyzésben igazolt változata alapján
$$|\rho(x_n, \beta) - \rho(\alpha, \beta)| \leq \rho(x_n, \alpha) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$
Mivel $\rho(x_n, \alpha) \to 0 \ \ (n \to \infty)$, ezért
$$\rho(x_n, \beta) \to \rho(\alpha, \beta) \qquad (n \to \infty)$$
is azonnal adódik. Hasonlóan, ha $\beta = \lim(y_n)$, akkor
$$\rho(\alpha, \beta) \leq \rho(\alpha, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, \beta) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$
amiből
$$\rho(\alpha, \beta) - \rho(x_n, y_n) \leq \rho(\alpha, x_n) + \rho(y_n, \beta) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$
ill. hasonlóan
$$\rho(x_n, y_n) - \rho(\alpha, \beta) \leq \rho(\alpha, x_n) + \rho(y_n, \beta) \qquad (n \in \mathbf{N})$$
következik. Ezért
$$|\rho(\alpha, \beta) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(\alpha, x_n) + \rho(y_n, \beta) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$
tehát $\rho(x_n, y_n) \to \rho(\alpha, \beta) \ \ (n \to \infty)$.

Speciálisan (ld. 1.2. v) megjegyzés), ha $(X, \|.\|)$ normált tér, és
$$\rho(x, y) := \|x - y\| \qquad (x, y \in X),$$
akkor $\lim(x_n) = \alpha$ esetén (amikor tehát $\|x_n - \alpha\| \to 0 \ \ (n \to \infty)$) tetszőleges $\beta \in X$ elemre
$$\rho(x_n, \beta) = \|x_n - \beta\| \to \rho(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\| \qquad (n \to \infty).$$
Sőt, ha $\lim(y_n) = \beta$, akkor
$$\rho(x_n, y_n) = \|x_n - y_n\| \to \rho(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\| \qquad (n \to \infty).$$

Ha $\beta = 0$, akkor
$$\|x_n\| \to \|\alpha\| \qquad (n \to \infty),$$
ami egyébként a háromszög-egyenlőtlenségből (ld. 1.2. v) megjegyzés) is közvetlenül megkapható:
$$\Big|\|x_n\| - \|\alpha\|\Big| \leq \|x_n - \alpha\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$
Jegyezzük meg, hogy a $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|\alpha\|$ konvergencia miatt az $(\|x_n\|)$ sorozat korlátos, azaz $\sup\{\|x_n\| : n \in \mathbf{N}\} < +\infty$.

A most mondottakat tovább specializálva (ld. 1.2. vi) megjegyzés) tekintsük az $(X, \langle . \rangle)$ euklideszi teret. Ha
$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in X),$$
akkor véve az előbbi (x_n), (y_n) konvergens sorozatokat a következőket mondhatjuk: ha $\alpha := \lim(x_n)$, akkor tetszőleges $\beta \in X$ elemre
$$\langle x_n, \beta\rangle \to \langle \alpha, \beta\rangle \qquad (n \to \infty),$$
ill. $\beta := \lim(y_n)$ esetén
$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle \alpha, \beta\rangle \qquad (n \to \infty).$$
Valóban, a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján (ld. 1.2. vi) megjegyzés)
$$\Big|\langle x_n, \beta\rangle - \langle \alpha, \beta\rangle\Big| = \Big|\langle x_n - \alpha, \beta\rangle\Big| \leq \|x_n - \alpha\| \cdot \|\beta\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$
Hasonlóan,
$$\Big|\langle x_n, y_n\rangle - \langle \alpha, \beta\rangle\Big| = \Big|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, \beta\rangle + \langle x_n, \beta\rangle - \langle \alpha, \beta\rangle\Big| \leq$$
$$\Big|\langle x_n, y_n - \beta\rangle\Big| + \Big|\langle x_n - \alpha, \beta\rangle\Big| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - \beta\| + \|x_n - \alpha\| \cdot \|\beta\| \leq$$
$$C \cdot \|y_n - \beta\| + \|x_n - \alpha\| \cdot \|\beta\| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$
ahol $C := \sup\{\|x_n\| : n \in \mathbf{N}\}$.

v) Vegyük az (X, ρ), (Y, σ) metrikus terek $(X \times Y, \rho \times \sigma)$ szorzatát (ld. 1.2. vii) megjegyzés). Ekkor az 1.3.2. Tétel bizonyításában mondottakkal analóg módon látható be, hogy

- egy $\big((x_n, y_n)\big) : \mathbf{N} \to X \times Y$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha az $(x_n) : \mathbf{N} \to X$, $(y_n) : \mathbf{N} \to Y$ sorozatok konvergensek;

- ha az $\big((x_n, y_n)\big) : \mathbf{N} \to X \times Y$ sorozat konvergens, és valamely $X \times Y \ni (\alpha, \beta)$-ra $\lim\big((x_n, y_n)\big) = (\alpha, \beta)$, akkor $\alpha = \lim(x_n)$, $\beta = \lim(y_n)$.

vi) Azt mondjuk, hogy valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz és az X^2-en értelmezett

$$\rho, \sigma : X^2 \to [0, +\infty)$$

metrikák esetén a ρ és a σ *ekvivalens*, ha alkalmas c, C pozitív számokkal

$$c\cdot \rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq C\cdot \rho(x, y) \qquad (x, y \in X).$$

Könnyű belátni, hogy ha $\mathcal{M}$ jelöli az előbb említett metrikák halmazát, és a ρ, $\sigma \in \mathcal{M}$ elemekre $\rho \sim \sigma$ azt jelenti, hogy a ρ és a σ ekvivalens, akkor az így értelmezett ($\mathcal{M}^2$-beli) $\sim$ reláció ekvivalencia. (Innen ered a fenti *ekvivalens* elnevezés.)

vii) A metrikus terek szorzatával (ld. 1.2. vii) megjegyzés) kapcsolatban bevezetett ρ_p metrikák közül $p \geq 1$ esetén bármelyik kettő ekvivalens. Ugyanez igaz (speciális esetként) a $(\mathbf{K}^n, \rho_p)$ (ld. 1.2. iv) megjegyzés) metrikus terekre is. Az egyszerűség kedvéért mindezt a $(\mathbf{K}^2, \rho_p)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ terekre részletezzük, amikor is az $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbf{K}^2$ vektorokra

$$\rho_p(x, y) = \begin{cases} \Big(|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p\Big)^{1/p} & (1 \leq p < +\infty) \\ \\ \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} & (p = +\infty). \end{cases}$$

Ha ui. $1 \leq p < +\infty$, akkor nyilván

$$\rho_p(x, y) = \Big(|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\rho_\infty(x, y)^p + \rho_\infty(x, y)^p\Big)^{1/p} = 2^{1/p}\cdot \rho_\infty(x, y).$$

Az is világos ekkor, hogy

$$\rho_p(x, y) \geq \begin{cases} |x_1 - y_1| \\ \\ |x_2 - y_2|, \end{cases}$$

így

$$\rho_p(x, y) \geq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = \rho_\infty(x, y).$$

Tehát

$$\rho_\infty(x, y) \leq \rho_p(x, y) \leq 2^{1/p}\cdot \rho_\infty(x, y) \qquad (x, y \in \mathbf{K}^2,\ 1 \leq p < +\infty),$$

ill. általában

$$\rho_\infty(x, y) \leq \rho_p(x, y) \leq n^{1/p}\cdot \rho_\infty(x, y) \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N},\ x, y \in \mathbf{K}^n,\ 1 \leq p < +\infty).$$

Más szóval az előbbi p-kre $\rho_p \sim \rho_\infty$. Mivel a $\sim$ reláció ekvivalencia, innen rögtön az is következik, amit állítottunk:

$$\rho_p \sim \rho_q \qquad (1 \le p,\, q \le +\infty).$$

Jegyezzük meg, hogy a fentiek alapján

$$n^{-1/p}\cdot \rho_p(x,y) \le \rho_q(x,y) \le n^{1/q}\cdot \rho_p(x,y) \qquad (x,y \in \mathbf{K}^n,\, 1 \le p,q < +\infty).$$

viii) Az előbbi megjegyzésben a $p \ge 1$ kikötés nem véletlen. Nem nehéz ui. meggondolni, hogy a vii) megjegyzés érvényét veszti akkor, ha $0 < p < 1$. Pl. a

$$(\mathbf{K}^2, \rho_p) \qquad (0 < p < 1)$$

terek esetén legyen $0 < p < q < 1$, ekkor az

$$x =: (u,0)\ \ (u > 0), \ \ y := (0,0)$$

vektorokra

$$\rho_p(x,y) = u^p \ \ , \ \ \rho_q(x,y) = u^q.$$

Ha $\rho_p \sim \rho_q$ teljesülne, akkor valamilyen $C > 0$ konstanssal

$$u^p \le Cu^q \qquad (u > 0),$$

azaz

$$u^{p-q} \le C \qquad (u > 0)$$

igaz lenne. Mivel

$$u^{p-q} \to +\infty \qquad (0 < u \to 0),$$

ezért az előbbi becslés nyilván nem lehetséges. Így a ρ_p metrika nem ekvivalens ρ_q-val.

ix) Ha (a fentiek szerint) ρ, σ ekvivalens metrikák (valamilyen $X \neq \emptyset$ „alaphalmazon"), akkor tetszőleges $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozatra és $\alpha \in X$ elemre (a vi)-beli jelölésekkel)

$$c\cdot \rho(x_n,\alpha) \le \sigma(x_n,\alpha) \le C\cdot \rho(x_n,\alpha) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért

$$\lim\Big(\rho(x_n,\alpha)\Big) = 0 \iff \lim\Big(\sigma(x_n,\alpha)\Big) = 0.$$

Tehát ekvivalens metrikák esetén egy sorozat konvergenciája és a határértéke nem változik, ha az egyik metrikát a másikkal felcseréljük. Éppen ezért a továbbiakban pl. az

$$X := \mathbf{K}^n \qquad (1 \le n \in \mathbf{N})$$

esetben a $\rho_2, \rho_1, \rho_\infty$ metrikák valamelyikét (többnyire a ρ_2 ún. *euklideszi metrikát*) fogjuk használni.

x) Az előbbi megjegyzés végéhez kapcsolódva tekintsük a

$$(\mathbf{K}^n, \rho_p) \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N},\ p = 1, 2, \infty)$$

metrikus tereket. Ekkor $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbf{K}^n$ és $r > 0$ esetén ezekben a terekben a b vektor r sugarú $K_r(b)$ környezetei (attól függően, hogy $\rho = \rho_1, \rho_2, \rho_\infty$) rendre a következők:

$$K_r^{(1)}(b) := \left\{ x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{K}^n : \sum_{j=1}^{n} |x_j - b_j| < r \right\},$$

$$K_r^{(2)}(b) := \left\{ x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{K}^n : \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - b_j|^2} < r \right\},$$

$$K_r^{(\infty)}(b) := \left\{ x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{K}^n : \max\{|x_j - b_j| : j = 1, ..., n\} < r \right\}.$$

Speciálisan a $\mathbf{K}^n := \mathbf{R}^2$ választással a $b = (b_1, b_2) \in \mathbf{R}^2$ vektor előbbi környezetei geometriailag (az $\mathbf{R}^2$ „síkot" egy derékszögű koordináta-rendszerrel reprezentálva) könnyen ellenőrizhetően a következők:

- $K_r^{(1)}(b)$ egy, a $(b_1 - r, b_2)$, $(b_1, b_2 + r)$, $(b_1 + r, b_2)$, $(b_1, b_2 - r)$ pontok (mint csúcspontok) által meghatározott *rombusz* (csúcsára állított négyzet) belseje,
- $K_r^{(2)}(b)$ egy b középpontú és r sugarú *körlemez* belseje,
- $K_r^{(\infty)}(b)$ pedig egy, a $(b_1 - r, b_2 - r)$, $(b_1 - r, b_2 + r)$, $(b_1 + r, b_2 + r)$, $(b_1 + r, b_2 - r)$ pontok (mint csúcspontok) által meghatározott *négyzet* belseje.

xi) A vi) megjegyzés mintájára azt mondjuk, hogy az X ($\mathbf{K}$ feletti) vektortéren értelmezett

$$\|.\|,\ \|.\|_* : X \to [0, +\infty)$$

normák *ekvivalensek* (erre is a $\|.\| \sim \|.\|_*$ jelölést fogjuk használni), ha alkalmas c, C pozitív konstansokkal

$$c \cdot \|x\| \leq \|x\|_* \leq C \cdot \|x\| \qquad (x \in X).$$

Világos, hogy mindez azzal ekvivalens, hogy a

$$\rho(x, y) := \|x - y\| \ ,\ \ \rho_*(x, y) := \|x - y\|_* \qquad (x, y \in X)$$

metrikák ekvivalensek. A vii) megjegyzésre utalva azt kapjuk, hogy az

$$(X, \|.\|) := (\mathbf{K}^n, \|.\|_p) \qquad (n \in \mathbf{N}, 1 \leq p \leq +\infty)$$

terek esetén

$$\|.\|_p \sim \|.\|_q \qquad (1 \leq p, q \leq +\infty).$$

Speciálisan

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \cdot \|x\|_\infty \qquad (x, y \in \mathbf{K}^n,\ 1 \leq p < +\infty),$$

ill.

$$n^{-1/p} \cdot \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq n^{1/q} \cdot \|x\|_p \qquad (x, y \in \mathbf{K}^n,\ 1 \leq p,\ q < +\infty).$$

Mindez nem „véletlen". Megmutatható ui., hogy ha az X vektortér véges dimenziós, akkor bármely két

$$\|.\|,\ \|.\|_* : X \to [0, +\infty)$$

norma ekvivalens. Megjegyezzük (ld. 1.2. v) megjegyzés), hogy ugyanakkor pl. a

$$(C[0,1], \|.\|_1)\ \ ,\ \ (C[0,1], \|.\|_\infty)$$

tereket tekintve az $\|.\|_1$ norma nem ekvivalens a $\|.\|_\infty$ normával. Ti. legyen pl.

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & (0 \leq x \leq 1/n) \\ \\ 0 & (1/n \leq x \leq 1) \end{cases} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor nyilván $f_n \in C[0,1]$, és

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n| = \int_0^1 (1 - nx)\, dx = \frac{1}{2n}\ \ ,\ \ \|f_n\|_\infty = 1 \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Innen világos, hogy nem létezik olyan $C > 0$ konstans, amellyel

$$\|f_n\|_\infty = 1 \leq C \cdot \|f_n\|_1 = C \cdot \frac{1}{2n} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N})$$

teljesülne.

xii) Nyilvánvaló, hogy valamely metrikus térben egy sorozat konvergens voltát, ill. (konvergencia esetén) a határértékét a sorozat definícióján túl a metrika is erősen „befolyásolja". Könnyen konstruálhatók ui. olyan (X, ρ), (X, σ) metrikus terek, hogy egy alkalmas $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozattal és $\alpha, \beta \in X$, $\alpha \neq \beta$ elemekkel

$$\lim \Big(\rho(x_n, \alpha)\Big) = \lim \Big(\sigma(x_n, \beta)\Big) = 0$$

teljesüljön. Következésképpen ugyanaz a sorozat más-más metrika szerint konvergálhat más-más elemhez. Legyen pl. X a $[0,1]$ intervallumon értelmezett, szakaszonként folytonosan differenciálható $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ függvények halmaza. (Tehát f folytonos, és van a $[0,1]$ intervallumnak olyan $0=x_0<...<x_n=1$ felosztása valamilyen $n\in\mathbf{N}$ mellett, hogy f folytonosan differenciálható az $(x_i,x_{i+1})\quad (i=0,...,n-1)$ intervallumok pontjaiban, továbbá léteznek a véges

$$\lim_{0+0} f' \;,\; \lim_{x_i\pm 0} f' \quad (i=1,...,n-1) \;,\; \lim_{1-0} f'$$

egyoldali határértékek.) Ha

$$\rho(f,g):=\int_0^1 |f-g| \;,\; \sigma(f,g):=|f(0)-g(0)|+\int_0^1\sqrt{|f'-g'|} \qquad (f,g\in X),$$

akkor ρ is és σ is metrika. Legyenek ezek után $f_n,\ f,\ g\in X\quad (0<n\in\mathbf{N})$ a következő függvények:

$$f_n(x):=\begin{cases} nx & (0\le x\le 1/n)\\ \\ 1 & (1/n\le x\le 1)\end{cases}\;,\quad f(x):=1,\quad g(x):=0 \qquad (0\le x\le 1).$$

Mivel

$$\rho(f_n,f)=\int_0^1|f_n-f|=\int_0^{1/n}(1-nx)\,dx=$$
$$\frac{1}{n}-\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2n}\to 0 \qquad (n\to\infty),$$

ezért $\rho(f_n,f)\to 0\quad (n\to\infty)$. Hasonlóan,

$$\sigma(f_n,g)=|f_n(0)-g(0)|+\int_0^1\sqrt{|f_n'-g'|}=|f_n(0)|+\int_0^1\sqrt{|f_n'|}=$$
$$\int_0^{1/n}\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0 \qquad (n\to\infty),$$

így $\sigma(f_n,g)\to 0\quad (n\to\infty)$ is teljesül.

xiii) Világos, hogy tetszőleges (X,ρ) metrikus tér esetén is igaz a számsorozatok körében megismert tény: ha az $(x_n):\mathbf{N}\to X$ sorozat konvergens, akkor tetszőleges (ν_n) indexsorozat esetén az (x_{ν_n}) részsorozat is konvergens, és $\lim(x_n)=\lim(x_{\nu_n})$.

xiv) A számsorozatok körében megismert, a konvergencia és bizonyos műveletek kapcsolatát illető „műveleti szabályok" közül a határérték „linearitását" könnyen kiterjeszthetjük absztrakt sorozatokra is. Legyen ehhez a szóban forgó (X,ρ) metrikus tér normált tér, azaz X lineáris tér a $\mathbf{K}$ test felett, $\|.\|$ norma X-en, és $\rho(x,y)=\|x-y\|\quad (x,y\in X)$.

Ekkor tetszőleges (x_n), $(y_n) : \mathbf{N} \to X$ konvergens sorozatok és minden $\lambda \in \mathbf{K}$ szám esetén az $(x_n + \lambda y_n)$ sorozat is konvergens, és

$$\lim(x_n + \lambda y_n) = \lim(x_n) + \lambda \cdot \lim(y_n).$$

Indoklásképpen elég annyit megjegyezni, hogy ha

$$\alpha := \lim(x_n), \quad \beta := \lim(y_n),$$

akkor

$$\|x_n + \lambda y_n - (\alpha + \lambda\beta)\| \leq \|x_n - \alpha\| + |\lambda| \cdot \|y_n - \beta\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Speciális esetként az

$$1 \leq s \in \mathbf{N} \ , \ 1 \leq p \leq +\infty \ , \ (X, \|.\|) := (\mathbf{K}^s, \|.\|_p)$$

választással kapjuk a konvergens $\mathbf{N} \to \mathbf{K}^s$ vektorsorozatok körében a határértékre vonatkozó linearitást.

1.5. Cauchy-sorozatok

A metrikus terekbeli (absztrakt) sorozatok konvergenciájára adott definíciónkat illetően is elmondható az a „kritika", ami már a számsorozatokkal kapcsolatban is elhangzott. Nevezetesen, hogy az említett definíciónak formálisan megvan az a hátránya, hogy a konvergencia tényének az eldöntéséhez felhasznál egy, a sorozat definíciójában nem szereplő „külső" valamit is, ti. egy (a később határértéknek nevezett) X-beli elemet. Joggal vetődik fel a kérdés, hogy nem lehetne-e a konvergenciának egy olyan „belső" értelmezését, kritériumát megadni, ami kizárólag a sorozat tagjainak a segítségével dönt a szóban forgó sorozat konvergens vagy divergens voltáról. Ez a számsorozatok esetén a Cauchy-feltétel volt.

Ehhez mint (a konvergenciához) szükséges feltételhez absztrakt (metrikus térbeli) sorozatok esetén is könnyen eljuthatunk. Nevezetesen, ha adott az (X, ρ) metrikus tér, és az $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozat konvergens, akkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad (m, n \in \mathbf{N},\ m, n > N).$$

Valóban, ha $\alpha := \lim(x_n)$, akkor az előbbi ε-hoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$\rho(x_k, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (k \in \mathbf{N},\ k > N).$$

Ekkor viszont a háromszög-egyenlőtlenség miatt minden $m, n \in \mathbf{N},\ m, n > N$ esetén

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n\alpha) + \rho(x_m, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

A továbbiakban azt mondjuk, hogy az $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad (m, n \in \mathbf{N},\ m, n > N).$$

A most megfogalmazott feltételt *Cauchy-kritériumként* (vagy *Cauchy-feltételként*) fogjuk idézni.

Amint azt fentebb már említettük, az

$$X := \mathbf{K} \ , \ \ \rho(x, y) := |x - y| \qquad (x, y \in \mathbf{K})$$

speciális esetben – azaz számsorozatokra – az előbb mondottak, azaz a Cauchy-kritérium, elégségesek is ahhoz, hogy az (x_n) sorozat konvergens legyen. Ugyanakkor tetszőleges metrikus térben ez már nem mondható el. Legyen ti.

$$X := \mathbf{Q} \ , \ \ \rho(x, y) := |x - y| \qquad (x, y \in \mathbf{Q}),$$

ill.

$$x_0 := 2 \ , \ \ x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Jól ismert, hogy az így definiált (x_n) számsorozatnak mint a fenti rekurzióval definiált valós számokból álló sorozatnak van határértéke, és az $\sqrt{2}$. Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám mellett egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$|x_n - \sqrt{2}| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N),$$

és $\sqrt{2}$ az egyetlen olyan valós szám, amire ez teljesül. Következésképpen (ld. fent)

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \qquad (m, n \in \mathbf{N},\ m, n > N).$$

Tehát a szóban forgó $(\mathbf{Q}, \rho)$ metrikus térben a most vizsgált (x_n) sorozat Cauchy-sorozat. Ha konvergens lenne, akkor egy $\alpha \in \mathbf{Q}$ (racionális) számmal minden $\varepsilon > 0$ mellett valamilyen $N \in \mathbf{N}$ indexszel

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N)$$

teljesülne. Az előbbiek szerint viszont α csak $\sqrt{2}$ lehetne, ami $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ miatt nem lehetséges.

Különös jelentőséggel bírnak azok a metrikus terek, amelyekben a számsorozatokhoz hasonlóan a Cauchy-kritérium elégséges is az illető sorozat konvergenciájához. Ezekkel kapcsolatos a következő definíció: az (X,ρ) metrikus tér *teljes metrikus tér*, ha a Cauchy-kritériumnak eleget tevő bármely sorozat (azaz minden Cauchy-sorozat) konvergens. Ezek közül számunkra a legfontosabb példaként az 1.2. iv) megjegyzésben definiált $(\mathbf{K}^s,\rho_p)$ terek szolgálnak.

1.5.1. Tétel. *Tetszőleges* $1 \leq s \in \mathbf{N}$, $0 < p \leq +\infty$ *esetén a* $(\mathbf{K}^s,\rho_p)$ *metrikus tér teljes.*

Bizonyítás. Legyen adott egy $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}^s$ sorozat, és tekintsük az 1.3.2. Tétel megfogalmazása előtt definiált

$$x^{(i)} = (x_{ni}) : \mathbf{N} \to \mathbf{K} \qquad (i = 1, ..., s)$$

koordináta-sorozatokat. Az 1.3.2. Tétel bizonyításával analóg módon kapjuk, hogy az (x_n) sorozat akkor és csak akkor Cauchy-sorozat, ha minden koordináta-sorozata, mint számsorozat, Cauchy-sorozat. Ehhez nem kell mást tenni, mint az 1.3.2. Tétel bizonyításában a konvergencia helyett a Cauchy-kritérium definícióját alkalmazni, ill. formálisan α helyett x_m-et, α_i helyett x_{mi}-t írni $(i = 1, ..., s)$ valamilyen $m \in \mathbf{N}$ esetén.

Ha tehát az $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}^s$ sorozat (a $(\mathbf{K}^s,\rho_p)$ metrikus térben) Cauchy-sorozat, akkor minden $x^{(i)} : \mathbf{N} \to \mathbf{K} \quad (i = 1, ..., s)$ koordináta-(szám)sorozat Cauchy-sorozat, következésképpen konvergens. Ezért az 1.3.2. Tétel szerint az (x_n) sorozat is konvergens. ■

A teljes metrikus terekkel kapcsolatban (így speciálisan az előbb vizsgált $(\mathbf{K}^s,\rho_p)$ terekkel kapcsolatban is) az egyik legfontosabb állításunk az alábbi, ún. *fixponttétel.*

1.5.2. Tétel (Banach–Tyihonov–Cacciopoli). *Legyen adott az* (X,ρ) *teljes metrikus tér, valamint az* $f : X \to X$ *leképezés. Tegyük fel, hogy valamilyen* $0 \leq q < 1$ *együtthatóval*

$$\rho\big(f(x), f(y)\big) \leq q\cdot \rho(x,y) \qquad (x, y \in X).$$

Ekkor

i) *egyértelműen létezik olyan* $\alpha \in X$, *amire* $f(\alpha) = \alpha$;

ii) *bármilyen* $x_0 \in X$ *elemet véve az* $x_{n+1} := f(x_n) \quad (n \in \mathbf{N})$ *rekurzióval definiált sorozat konvergens, és* $\lim (x_n) = \alpha$;

iii) *igaz a következő becslés*: $\rho(x_n,\alpha) \leq \dfrac{q^n}{1-q}\cdot \rho(x_0,x_1) \quad (n \in \mathbf{N})$.

Bizonyítás. Teljes indukcióval rögtön adódik, hogy

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \le q^n \cdot \rho(x_0, x_1) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Valóban, $n = 0$-ra mindez triviális, $n \in \mathbf{N}$ esetén pedig

$$\rho(x_{n+1}, x_{n+2}) = \rho\Big(f(x_n), f(x_{n+1})\Big) \le q \cdot \rho(x_n, x_{n+1}).$$

Ha tehát $n \in \mathbf{N}$ olyan, amelyre a szóban forgó

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \le q^n \cdot \rho(x_0, x_1)$$

egyenlőtlenség teljesül, akkor

$$\rho(x_{n+1}, x_{n+2}) \le q \cdot q^n \cdot \rho(x_0, x_1) = q^{n+1} \cdot \rho(x_0, x_1)$$

is igaz. Innen – a háromszög-egyenlőtlenség többszöri alkalmazásával – akármilyen $n, s \in \mathbf{N}$ mellett

$$\rho(x_n, x_{n+s}) \le \sum_{k=n}^{n+s-1} \rho(x_{k+1}, x_k) \le \rho(x_0, x_1) \cdot \sum_{k=n}^{n+s-1} q^k \le \rho(x_0, x_1) \cdot \sum_{k=n}^{\infty} q^k,$$

tehát

$$\rho(x_n, x_{n+s}) \le \rho(x_0, x_1) \cdot \frac{q^n}{1-q}$$

következik. Mivel a (q^n) számsorozat 0-hoz konvergál, ezért (x_n)-re teljesül a Cauchy-kritérium. Ha ui. $\delta > 0$ tetszőlegesen adott, akkor egy $N \in \mathbf{N}$ indexszel

$$q^n < \delta \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Ezért

$$\rho(x_n, x_{n+s}) \le \rho(x_0, x_1) \cdot \frac{\delta}{1-q} \qquad (n, s \in \mathbf{N}, n > N).$$

Legyen $\varepsilon > 0$, és válasszuk az előbbi δ-t úgy, hogy

$$\rho(x_0, x_1) \cdot \frac{\delta}{1-q} < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\rho(x_n, x_{n+s}) < \varepsilon \qquad (n, s \in \mathbf{N}, n > N).$$

Ha tehát $N < k, j \in \mathbf{N}$, és (pl.) $k \le j$, akkor az $s := j - k \in \mathbf{N}$ jelöléssel

$$\rho(x_k, x_j) = \rho(x_k, x_{k+s}) < \varepsilon.$$

Következésképpen az (x_n) sorozat valóban Cauchy-sorozat, így a tér teljessége miatt konvergens.

Legyen $\alpha := \lim(x_n)$. Ekkor ismét a háromszög-egyenlőtlenség alapján bármilyen $n \in \mathbf{N}$ természetes számmal

$$0 \leq \rho\Big(f(\alpha), \alpha\Big) \leq \rho\Big(f(\alpha), f(x_n)\Big) + \rho\Big(f(x_n), \alpha\Big) = \rho\Big(f(\alpha), f(x_n)\Big) + \rho(x_{n+1}, \alpha) \leq$$

$$q \cdot \rho(\alpha, x_n) + \rho(x_{n+1}, \alpha) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ezért $\rho\Big(f(\alpha), \alpha\Big) = 0$, azaz $f(\alpha) = \alpha$.

Ha ez utóbbi egyenlőség valamilyen $\beta \in X$ elemre is fennáll, akkor

$$\rho(\alpha, \beta) = \rho\Big(f(\alpha), f(\beta)\Big) \leq q \cdot \rho(\alpha, \beta),$$

és $0 \leq q < 1$ alapján $\rho(\alpha, \beta) = 0$. Tehát $\alpha = \beta$.

Továbbá, tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ mellett

$$x_{n+s} \to \alpha \qquad (s \to \infty),$$

így (ld. 1.4. iv) megjegyzés) az

$$y_s := \rho(x_n, x_{n+s}) \qquad (s \in \mathbf{N})$$

sorozat konvergens, és a határértéke $\rho(x_n, \alpha)$. Innen a fentieket is figyelembe véve

$$\rho(x_n, \alpha) = \lim_{s \to \infty} y_s \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot \rho(x_0, x_1) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz a tételünk utolsó állítása is adódik. ■

A következő tétel megfogalmazása előtt emlékeztetünk a $(C[a,b], \rho_\infty)$ metrikus térre (ld. 1.2. iv) megjegyzés).

1.5.3. Tétel. *A* $(C[a,b], \rho_\infty)$ *metrikus tér teljes.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(f_n) : \mathbf{N} \to C[a,b]$ (függvény)sorozat (a ρ_∞ metrika értelmében) Cauchy-sorozat. Ez most azt jelenti, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ számot is adunk meg, ehhez találunk olyan $N \in \mathbf{N}$ indexet, hogy

$$\rho_\infty(f_n, f_m) = \max\{|f_n(x) - f_m(x)| : a \leq x \leq b\} < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N},\ n, m > N).$$

Világos, hogy tetszőleges $x \in [a,b]$ esetén egyúttal

$$(*) \qquad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N},\ n, m > N)$$

is teljesül, más szóval az $\big(f_n(x)\big)$ számsorozat Cauchy-sorozat. Létezik tehát az

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in [a,b])$$

határérték. Továbbá $(*)$ miatt

$$(**) \qquad |f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon \qquad (x \in [a,b],\ n \in \mathbf{N},\ n > N).$$

Mutassuk meg, hogy az így definiált

$$f : [a,b] \to \mathbf{R}$$

függvény folytonos, azaz $f \in C[a,b]$. Legyen ehhez valamilyen $\xi \in [a,b]$ mellett $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor az előbbiek szerint bármilyen (rögzített) $n \in \mathbf{N}$, $n > N$ esetén

$$|f(x) - f(\xi)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\xi)| + |f_n(\xi) - f(\xi)| <$$

$$2\varepsilon + |f_n(x) - f_n(\xi)| \qquad (x \in [a,b]).$$

Mivel $f_n \in C[a,b]$, így $f_n \in \mathcal{C}\{\xi\}$ is igaz. Következésképpen létezik olyan $\delta > 0$ szám, amellyel

$$|f_n(x) - f_n(\xi)| < \varepsilon \qquad (x \in [a,b],\ |x - \xi| < \delta).$$

Mindezeket figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy

$$|f(x) - f(\xi)| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \qquad (x \in [a,b],\ |x - \xi| < \delta).$$

Ez nem jelent mást, mint azt, hogy $f \in \mathcal{C}\{\xi\}$. Az itt szereplő ξ tetszőleges eleme volt az $[a,b]$ intervallumnak, ezért $f \in C[a,b]$.

Végül, a $(**)$ becslés szerint (az ottani szereplőkkel)

$$\rho_\infty(f_n, f) = \max\{|f_n(x) - f(x)| : a \le x \le b\} \le \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\ n > N),$$

azaz

$$\rho_\infty(f_n, f) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ez azzal ekvivalens, hogy a $(C[a,b], \rho_\infty)$ metrikus térben az (f_n) sorozat konvergál az f függvényhez. Ezzel beláttuk, hogy a szóban forgó térben minden Cauchy-sorozat konvergens, azaz $(C[a,b], \rho_\infty)$ teljes metrikus tér. ■

1.6. Megjegyzések

i) Mutassuk meg, hogy ha az (X, ρ) metrikus térben valamilyen $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor az (x_n) sorozat konvergens. Legyen ui. a (ν_n) indexsorozat olyan, hogy az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens, ill. legyen $\alpha := \lim(x_{\nu_n})$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$\rho(x_{\nu_n}, \alpha) < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Az (x_n) Cauchy-sorozat lévén olyan $M \in \mathbf{N}$ is megadható, amellyel

$$\rho(x_k, x_j) < \varepsilon \qquad (k, j \in \mathbf{N},\, k, j > M).$$

Ekkor

$$\rho(x_n, \alpha) \leq \rho(x_n, x_{\nu_n}) + \rho(x_{\nu_n}, \alpha) < \rho(x_n, x_{\nu_n}) + \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\nu_n \geq n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért

$$\rho(x_n, x_{\nu_n}) < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > M).$$

Következésképpen

$$\rho(x_n, \alpha) < 2\varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > \max\{N, M\}).$$

Ezért az (x_n) sorozat konvergens, és $\lim(x_n) = \alpha$.

ii) Legyen adott az $(X, \|.\|)$ normált tér (ld. 1.2. v) megjegyzés). Azt mondjuk, hogy ez a tér *teljes* (vagy *Banach-tér*), ha a $\|.\|$ norma által indukált

$$\rho(x, y) := \|x - y\| \qquad (x, y \in X)$$

metrikával az (X, ρ) metrikus tér teljes. Így pl. az 1.5.1. Tételre hivatkozva világos, hogy (ld. 1.2. v) megjegyzés) a

$$(\mathbf{K}^s, \|.\|_p) \qquad (1 \leq s \in \mathbf{N},\, 1 \leq p \leq +\infty)$$

terek valamennyien Banach-terek. Hasonlóan (ld. 1.5.3. Tétel) a $(C[a, b], \|.\|_\infty)$ tér is Banach-tér. A részletek mellőzésével csupán megjegyezzük, hogy az 1.2. v) megjegyzésben bevezetett $(\ell_p, \|.\|_p)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ terek is teljes terek.

iii) Mutassuk meg (ld. 1.2. v) megjegyzés), hogy pl. a $(C[-1,1], \|.\|_1)$ normált tér nem teljes. Ehhez azt kell belátni, hogy létezik olyan $(f_n) : \mathbf{N} \to C[-1,1]$ Cauchy-sorozat, amelyik nem konvergens, azaz: tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_n - f_m| < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N},\ n, m > N),$$

de ugyanakkor nem létezik olyan $f \in C[-1,1]$ függvény, hogy

$$\|f_n - f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_n - f| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

teljesülne. Ilyen sorozat pl. a következő:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & (-1 \le x \le 0) \\ \\ nx & (0 \le x \le 1/n) \\ \\ 1 & (1/n \le x \le 1) \end{cases} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Ha ui. $0 < n, m \in \mathbf{N}$ és (ami nyilván feltehető) $n < m$, akkor

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^{1/m} (m-n)x\,dx + \int_{1/m}^{1/n} (1 - nx)\,dx =$$

$$\frac{m-n}{2m^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{m} - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) < \frac{1}{n}.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor a $1/N < \varepsilon$ egyenlőtlenségnek eleget tevő akármelyik $N \in \mathbf{N}$ indexszel

$$\|f_n - f_m\|_1 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N},\ m > n > N).$$

Más szóval az (f_n) sorozat valóban Cauchy-sorozat.

Tegyük fel indirekt módon, hogy van olyan $f \in C[-1,1]$ függvény, amellyel

$$\|f_n - f\|_1 \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Belátjuk, hogy ekkor szükségszerűen

$$f(\xi) = 0, \quad f(\eta) = 1 \qquad (-1 < \xi < 0 < \eta < 1).$$

Világos, hogy ez a függvény nem folytonos a 0-ban, ezért $f \in C[-1,1]$ (ellentmondásban a feltételezésünkkel) nem lehet igaz. Az előbbi $f(\xi) = 0$ egyenlőséget is indirekt úton igazoljuk. Ha (pl.) $f(\xi) > 0$ (az $f(\xi) < 0$ esetben analóg a bizonyítás), akkor – lévén $f \in \mathcal{C}\{\xi\}$ – van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $(\xi - \delta, \xi + \delta) \subset (-1, 0)$, és

$$f(t) > \frac{f(\xi)}{2} \qquad (\xi - \delta \le t \le \xi + \delta).$$

Ezért tetszőleges $1 \le n \in \mathbf{N}$ mellett

$$\|f_n - f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_n - f| \ge \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} |f_n - f| = \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} |f| \ge$$

$$\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \frac{f(\xi)}{2} = 2\delta \cdot \frac{f(\xi)}{2} = \delta \cdot f(\xi) \ (> 0).$$

Innen nyilvánvaló, hogy $\|f_n - f\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$ nem teljesülhet.

Hasonló meggondolással kapjuk az $f(\eta) = 1$ $(0 < \eta < 1)$ egyenlőséget.

iv) Az 1.4. iii) megjegyzésben a függvénysorozatokra bevezetett *egyenletes konvergencia* fogalmára utalva az 1.5.3. Tétel bizonyításából az is kiderül, hogy folytonos függvényekből álló egyenletesen konvergens függvénysorozat határfüggvénye is folytonos. Az előző megjegyzésben szereplő $f_n \in C[-1, 1]$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$ függvénysorozatra viszont egyszerűen adódik, hogy létezik az

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (-1 \le x \le 0) \\ \\ 1 & (0 < x \le 1) \end{cases}$$

határfüggvény, és $f \notin \mathcal{C}\{0\}$. Ez a példa azt mutatja, hogy a folytonosság minden további nélkül nem „öröklődik" egy pontonként konvergens, folytonos függvényekből álló függvénysorozat határfüggvényére.

v) Azt mondjuk (ld. 1.2. vi) megjegyzés), hogy az $(X, \langle . \rangle)$ euklideszi tér *teljes* (vagy *Hilbert-tér*), ha a $\langle . \rangle$ skaláris szorzás által meghatározott

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \qquad (x \in X)$$

normával $(X, \|.\|)$ Banach-tér. Így pl. (ld. a fenti ii) megjegyzés) a

$$(\mathbf{K}^s, \langle . \rangle) \qquad (1 \le s \in \mathbf{N})$$

tér Hilbert-tér, ahol

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{s} x_i \overline{y}_i \qquad \Big(x = (x_1, ..., x_s),\ y = (y_1, ..., y_s) \in \mathbf{K}^s\Big).$$

Ismét csak a részletek nélkül jegyezzük meg, hogy az $(\ell_2, \langle . \rangle)$ tér is Hilbert-tér, ahol

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y}_n \qquad \Big(x = (x_n), y = (y_n) \in \ell_2\Big).$$

vi) Egy érdekes tulajdonsága a Cauchy-sorozatoknak a következő állítás. Legyen (X, ρ) tetszőleges metrikus tér, és jelöljük $\mathcal{C}$-vel az X-beli Cauchy-sorozatok halmazát. Ekkor bármely két $x = (x_n), y = (y_n) \in \mathcal{C}$ sorozat esetén a $\big(\rho(x_n, y_n)\big)$ számsorozat konvergens. Valóban, ha $m, n \in \mathbf{N}$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség kétszeri alkalmazásával

$$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_n) \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n),$$

azaz

$$\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n)$$

adódik. Innen (m és n felcserélésével)

$$\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n),$$

tehát

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n)$$

következik. Tudjuk, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz megadhatók olyan $N, M \in \mathbf{N}$ indexek, hogy $m, n \in \mathbf{N}, m, n > N$, ill. $m, n > M$ esetén $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2$, ill. $\rho(y_n, y_m) < \varepsilon/2$. Így az $m, n \in \mathbf{N}, m, n > \max\{M, N\}$ választással

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| < \varepsilon.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy a $\mathbf{N} \ni k \mapsto \rho(x_k, y_k)$ számsorozat Cauchy-sorozat, azaz konvergens.

vii) Tekintsük az (X, ρ), (Y, σ) metrikus terek $(X \times Y, \rho \times \sigma)$ szorzatát (ld. 1.2. vii) megjegyzés). Nem nehéz belátni, hogy a szorzat-tér akkor és csak akkor teljes, ha (X, ρ) is és (Y, σ) is teljes. Ui. az 1.4. v) megjegyzés figyelembevételével azt kapjuk, hogy egy $\big((x_n, y_n)\big) : \mathbf{N} \to X \times Y$ sorozat akkor és csak akkor Cauchy-sorozat, ha az $(x_n) : \mathbf{N} \to X$, $(y_n) : \mathbf{N} \to Y$ *koordináta-sorozatok* Cauchy-sorozatok.

viii) Az 1.5.2. Tételben szereplő, a valamilyen $0 \leq q < 1$ együtthatóval a

$$\rho\big(f(x), f(y)\big) \leq q \cdot \rho(x, y) \qquad (x, y \in X)$$

feltételnek eleget tevő $f : X \to X$ függvényt *kontrakciónak,* az

$$f(\alpha) = \alpha$$

egyenlőséget kielégítő α elemet pedig az f *fixpontjának* nevezzük. (Ez az oka az 1.5.2. Tétel *fixpont-tételként* való említésének.)

ix) A fixponttétel (1.5.2. Tétel) i) és ii) pontja egyúttal hatékony algoritmust is kínál a fixpont közelítő meghatározására. Jegyezzük meg, hogy a iii) hibabecslő formulából tetszőleges $0 < m \in \mathbf{N}$ esetén

$$\rho(x_m, \alpha) \leq \frac{q}{1-q} \cdot \rho(x_m, x_{m-1})$$

következik. Alkalmazzuk ui. az említett becslést az

$$y_n := x_{m-1+n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozatra az $n := 1$ választással.

x) Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a fixponttételben (ld. 1.5.2. Tétel) szereplő f leképezésre vonatkozó, a $0 \leq q < 1$ konstanssal teljesülő

$$\rho\Big(f(x), f(y)\Big) \leq q \cdot \rho(x, y) \qquad (x, y \in X)$$

kontrakciós feltétel nem helyettesíthető az alábbival:

$$\rho\Big(f(x), f(y)\Big) < \rho(x, y) \qquad (x, y \in X, x \neq y).$$

Tekintsük ui. az

$$X := \mathbf{R} \ , \ \ \rho(x, y) := |x - y| \qquad (x, y \in \mathbf{R})$$

választással a (teljes) (X, ρ) metrikus teret, és azt az $f : X \to X$ leképezést, amelyre

$$f(x) := \ln\Big(1 + e^x\Big) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor f differenciálható függvény, és

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} < 1 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Alkalmazva a Lagrange-féle középértéktételt azt kapjuk, hogy tetszőleges $x, y \in \mathbf{R}$, $x < y$ esetén egy alkalmas $\xi \in (x, y)$ számmal

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| < |x - y|.$$

Ugyanakkor az f-nek nincs fixpontja. Ha ui. valamilyen $\alpha \in \mathbf{R}$ fixpontja lenne az f-nek, akkor az $\alpha = f(\alpha)$ egyenlőségből az

$$\ln\Big(1 + e^\alpha\Big) = \alpha,$$

vagy – ami ezzel ekvivalens – az

$$1 + e^\alpha = e^\alpha$$

egyenlőséghez jutnánk. Innen viszont $1 = 0$ következne, ami nem igaz.

xi) Bizonyítsuk be az 1.5.2. Tétel következő változatát: egy (X, ρ) teljes metrikus tér és valamilyen $a \in X$, $0 < r \in \mathbf{R}$ esetén legyen

$$Y := \{x \in X : \rho(x, a) \le r\}.$$

Tegyük fel, hogy az $f \in X \to X$ leképezésre az alábbi feltételek teljesülnek:

- $Y \subset \mathcal{D}_f$;
- van olyan $0 \le q < 1$ szám, amellyel minden $x, y \in Y$ mellett

$$\rho\Big(f(x), f(y)\Big) \le q \cdot \rho(x, y);$$

- $\rho\Big(a, f(a)\Big) \le (1-q)r$.

Ekkor egyértelműen létezik egy $\alpha \in Y$ úgy, hogy

a) $f(\alpha) = \alpha$;

b) az $x_0 \in Y, x_{n+1} := f(x_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ rekurzióval értelmezett (x_n) sorozat konvergens, $\lim(x_n) = \alpha$, és

$$\rho(x_n, \alpha) \le \frac{q^n}{1-q} \cdot \rho\Big(x_0, f(x_0)\Big) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Tekintsük ui. azt az (Y, σ) metrikus teret, amelyre

$$\sigma(x, y) := \rho(x, y) \qquad (x, y \in Y)$$

(tehát (ld. 1.2. xiv) megjegyzés) (Y, σ) az (X, ρ) (metrikus) altere). Legyen

$$F(x) := f(x) \qquad (x \in Y),$$

más szóval az F függvény az f leszűkítése az Y halmazra. Lássuk be először is azt, hogy

$$F : Y \to Y,$$

azaz tetszőleges $x \in Y$ esetén $F(x) \in Y$. Ui.

$$\rho\Big(F(x), a\Big) \le \rho\Big(F(x), F(a)\Big) + \rho\Big(F(a), a\Big) =$$

$$\rho\Big(f(x), f(a)\Big) + \rho\Big(f(a), a\Big) \le q \cdot \rho(x, a) + (1-q)r \le qr + (1-q)r = r.$$

Világos, hogy az F leképezés kontrakció, ui.

$$\sigma\Big(F(x), F(y)\Big) = \rho\Big(f(x), f(y)\Big) \leq q\cdot \rho(x,y) = q\cdot \sigma(x,y) \qquad (x,y \in Y).$$

Bebizonyítjuk, hogy az (Y,σ) tér teljes. Legyen ehhez adott az $(x_n) : \mathbf{N} \to Y$ Cauchy-sorozat. Következésképpen tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$\sigma(x_n, x_m) = \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad (n,m \in \mathbf{N},\ n,m > N).$$

Mindez azt jelenti, hogy az (x_n) sorozat egyúttal mint $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ is Cauchy-sorozat (másképp mondva a ρ metrika „szerint" is Cauchy-sorozat). Az (X,ρ) tér feltételezett teljessége miatt tehát létezik olyan $\alpha \in X$, amellyel

$$\rho(x_n, \alpha) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Megmutatjuk, hogy $\alpha \in Y$. Tegyük fel ehhez indirekt úton, hogy $\alpha \notin Y$, azaz

$$\rho(a, \alpha) > r.$$

Ekkor $\lim(x_n) = \alpha$ miatt van olyan $n \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\rho(x_n, \alpha) < \rho(a, \alpha) - r.$$

Ezért (ld. 1.2. i) megjegyzés)

$$\rho(x_n, a) \geq \rho(a,\alpha) - \rho(x_n,\alpha) > \rho(a,\alpha) - (\rho(a,\alpha) - r) = r,$$

ami nyilván ellentmond annak, hogy $x_n \in Y$.

Tehát $\alpha \in Y$, és ezért

$$\sigma(x_n, \alpha) = \rho(x_n, \alpha) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Így az (x_n) sorozat a σ metrika értelmében is konvergál α-hoz.

Alkalmazható ezért az 1.5.2. Tétel az (Y,σ) teljes metrikus térre és az $F : Y \to Y$ kontrakcióra, aminek az „eredménye" éppen a bizonyítandó állításunk.

xii) Az 1.2. iv) megjegyzésre utalva tekintsük a $(\mathbf{K}^2, \rho_\infty)$ teljes metrikus teret. Adott $\eta := (a,b) \in \mathbf{K}^2$ vektor és

$$A := \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^{2\times 2}$$

mátrix segítségével definiáljuk az $f : \mathbf{K}^2 \to \mathbf{K}^2$ függvényt a következőképpen:

$$f(\xi) := A\xi + \eta \qquad (\xi \in \mathbf{K}^2).$$

Belátjuk, hogy

1^o az f függvény akkor és csak akkor kontrakció, ha

$$|\alpha| + |\beta| < 1 \quad , \quad |\gamma| + |\delta| < 1;$$

2^o a $q := \max\{|\alpha| + |\beta|, |\gamma| + |\delta|\}$ számmal tetszőleges $\xi, \omega \in \mathbf{K}^2$ választással

$$\rho_\infty\Big(f(\xi), f(\omega)\Big) \leq q \cdot \rho_\infty(\xi, \omega);$$

3^o bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz megadhatók olyan $\xi, \omega \in \mathbf{K}^2$ vektorok, amelyekkel

$$\rho_\infty\Big(f(\xi), f(\omega)\Big) > (q - \varepsilon) \cdot \rho_\infty(\xi, \omega);$$

4^o ha $q < 1,$ akkor tetszőleges $(x_0, y_0) \in \mathbf{K}^2$ esetén az

$$\begin{aligned} x_{n+1} &:= \alpha x_n + \beta y_n + a \qquad (n \in \mathbf{N}) \\ y_{n+1} &:= \gamma x_n + \delta y_n + b \qquad (n \in \mathbf{N}) \end{aligned}$$

egyenlőségekkel definiált

$$(x_n, y_n) \in \mathbf{K}^2 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

vektorsorozat konvergens, és a

$$(c, d) := \lim \Big((x_n, y_n)\Big)$$

határértékre $f(c, d) = (c, d),$ azaz

$$\begin{aligned} c &:= \alpha c + \beta d + a \\ d &:= \gamma c + \delta d + b; \end{aligned}$$

5^o minden $\mathbf{N} \ni n$-re

$$\max\{|x_n - c|, |y_n - d|\} \leq \frac{q^n}{1 - q} \cdot \max\{|x_0 - x_1|, |y_0 - y_1|\}.$$

Legyen ui. 1^o-ben, ill. 2^o-ben $\xi = (x, y), \omega = (u, v) \in \mathbf{K}^2,$ ekkor

$$f(\xi) = (\alpha x + \beta y + a, \gamma x + \delta y + b) \quad , \quad f(\omega) = (\alpha u + \beta v + a, \gamma u + \delta v + b).$$

Következésképpen a ρ_∞ metrika definíciója miatt (ld. 1.2. iv) megjegyzés)

$$\rho_\infty\Big(f(\xi), f(\omega)\Big) = \max\{|\alpha(x - u) + \beta(y - v)|, |\gamma(x - u) + \delta(y - v)|\} \leq$$

$$\max\{|\alpha| \cdot |x - u| + |\beta| \cdot |y - v|, |\gamma| \cdot |x - u| + |\delta| \cdot |y - v|\} \leq$$

$$\max\{|\alpha|\cdot\rho_\infty(\xi,\omega)+|\beta|\cdot\rho_\infty(\xi,\omega),|\gamma|\cdot\rho_\infty(\xi,\omega)+|\delta|\cdot\rho_\infty(\xi,\omega)\}=q\cdot\rho_\infty(\xi,\omega),$$

ahol

$$q:=\max\{|\alpha|+|\beta|,|\gamma|+|\delta|\}.$$

Ha tehát $|\alpha|+|\beta|<1$ és $|\gamma|+|\delta|<1$, akkor $q<1$, így az f kontrakció. Fordítva, ha ez utóbbi igaz, azaz valamilyen $0\leq\kappa<1$ konstanssal

$$\rho_\infty\Big(f(\xi),f(\omega)\Big)\leq\kappa\cdot\rho_\infty(\xi,\omega)\qquad(\xi,\omega\in\mathbf{K}^2),$$

akkor (pl.) a $|\gamma|+|\delta|\leq|\alpha|+|\beta|$ esetben legyen

$$\xi:=(\operatorname{sign}\alpha,\operatorname{sign}\beta)\ \ ,\ \ \omega:=(0,0).$$

Világos, hogy

$$|\gamma\operatorname{sign}\alpha+\delta\operatorname{sign}\beta|\leq|\gamma|+|\delta|\leq|\alpha|+|\beta|$$

miatt

$$\rho_\infty\Big(f(\xi),f(\omega)\Big)=\max\{|\alpha|+|\beta|,|\gamma\operatorname{sign}\alpha+\delta\operatorname{sign}\beta|\}=$$
$$|\alpha|+|\beta|\leq\kappa\cdot\rho_\infty(\xi,\omega)\leq\kappa<1,$$

így

$$|\gamma|+|\delta|\leq|\alpha|+|\beta|<1.$$

Analóg módon kapjuk $|\gamma|+|\delta|>|\alpha|+|\beta|$ esetén, hogy $|\alpha|+|\beta|<|\gamma|+|\delta|<1$.

3^o-hoz tegyük fel, hogy (pl.)

$$q:=\max\{|\alpha|+|\beta|,|\gamma|+|\delta|\}=|\alpha|+|\beta|>0.$$

(Ha $\max\{|\alpha|+|\beta|,|\gamma|+|\delta|\}=|\gamma|+|\delta|>0$, akkor értelemszerű módosítással mondhatók az alábbiak.) Legyen $\varepsilon>0$, ekkor az előbbi

$$\xi:=(\operatorname{sign}\alpha,\operatorname{sign}\beta)\ \ ,\ \ \omega:=(0,0)$$

vektorokkal

$$\rho_\infty(\xi,\omega)=1,$$

és (ld. fent)

$$\rho_\infty\Big(f(\xi),f(\omega)\Big)=|\alpha|+|\beta|=q\cdot\rho_\infty(\xi,\omega)>(q-\varepsilon)\cdot\rho_\infty(\xi,\omega).$$

(A $q=0$ esetben az utóbbi egyenlőtlenség triviálisan teljesül minden olyan $\xi,\omega\in\mathbf{K}^2$ választással, amikor $\rho_\infty(\xi,\omega)>0$.)

Az állításunk többi része a fixponttétel (ld. 1.5.2. Tétel) speciális esete.

Jegyezzük meg, hogy a fentiek szerint

$$\max\{|\alpha| + |\beta|, |\gamma| + |\delta|\}$$

a lehető legkisebb kontrakciós együttható. Továbbá analóg állítás fogalmazható meg a $(\mathbf{K}^2, \rho_\infty)$ tér helyett valamilyen $2 \le n \in \mathbf{N}$ mellett a $(\mathbf{K}^n, \rho_\infty)$ metrikus teret véve. Ezzel lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatban jutunk a fixponttétel révén közelítő megoldási módszerhez.

xiii) Módosítsuk az előző megjegyzést a ρ_∞ metrika helyett a ρ_1 metrikát véve. Könnyen belátható, hogy a xii) megjegyzésben mondott állítások igazak maradnak, ha 1^o-ben az

$$|\alpha| + |\gamma| < 1 \ \ , \ \ |\beta| + |\delta| < 1$$

feltételt tesszük, 2^o-ben (és a továbbiakban) a

$$q := \max\{|\alpha| + |\gamma|, |\beta| + |\delta|\}$$

együtthatót tekintjük, 5^o-ben pedig azt írjuk, hogy

$$|x_n - c| + |y_n - d| \le \frac{q^n}{1-q} \cdot (|x_0 - x_1| + |y_0 - y_1|) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

xiv) Ha a xii) megjegyzésben ρ_∞ helyett a ρ_2 (euklideszi) metrikát tekintjük, és most a

$$q := \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2}$$

definícióval élünk, akkor a következőket mondhatjuk:

- $q < 1$ esetén a xii) megjegyzésben szereplő f függvény kontrakció;
- igaz marad a xii) megjegyzésbeli 4^o állítás;
- teljesül továbbá a

$$\sqrt{|x_n - c|^2 + |y_n - d|^2} \le \frac{q^n}{1-q} \cdot \sqrt{|x_0 - x_1|^2 + |y_0 - y_1|^2} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

hibabecslés.

Könnyen adható példa annak az illusztrálására, hogy a jelen esetben a $q < 1$ feltétel csak elégséges, de nem szükséges ahhoz, hogy a szóban forgó f leképezés kontrakció legyen.

xv) Legyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ és $1 \leq p \leq +\infty$. Ekkor (ld. 1.2. v) megjegyzés) a $\mathbf{K}^n$-beli $\|.\|_p$ normákra igaz az alábbi határérték-egyenlőség:

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|x\|_p \qquad (x \in \mathbf{K}^n).$$

Valóban, tetszőleges $1 \leq p < +\infty$ és $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{K}^n$ esetén

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n \|x\|_\infty\right)^{1/p} = n^{1/p}\cdot \|x\|_\infty.$$

Ismert, hogy ha $q > 0$ tetszőlegesen adott pozitív szám, akkor

$$\lim_{p\to+\infty} q^{1/p} = 1,$$

speciálisan

$$\lim_{p\to+\infty} n^{1/p} = 1.$$

Ezért

$$n^{1/p}\cdot \|x\|_\infty \to \|x\|_\infty \qquad (p \to +\infty).$$

Innen a közrefogási elv alapján az állításunk már következik.

1.7. Topológiai alapfogalmak

Elöljáróban emlékeztetünk a *környezet* absztrakt fogalmára (ld. 1.3. pont). Legyen ehhez (X, ρ) egy metrikus tér, $a \in X$ és $r > 0$. Ekkor a

$$K_r(a) := k_r(a) := \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$$

halmazt az a pont r sugarú környezetének nevezzük. (Ha egy adott vizsgálódás folyamán érdektelen a környezet r sugara, akkor a „rövidebb" $K(a)$ (időnként a $k(a)$) szimbólumot használjuk.) A továbbiakban többször utalunk arra a nyilvánvaló tényre, hogy $0 < v \leq r$ esetén

$$K_v(a) \subset K_r(a).$$

Nevezzük ezek után valamilyen $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz esetén az $a \in A$ pontot az A halmaz *belső pontjának,* ha egy alkalmas $K(a)$ környezettel

$$K(a) \subset A$$

teljesül. Az ilyen tulajdonságú pontok által alkotott halmaz az A ún. *belseje,* amit az

$$\operatorname{int} A$$

szimbólummal fogunk jelölni. (Esetenként a halmaz jelét zárójelbe tesszük, különösen, ha az illető halmazt egy „hosszabb" szimbólum jelöli.) Nyilván $\operatorname{int} X = X$, míg az $X := \mathbf{R}$, $\rho(x,y) := |x-y| \quad (x,y \in \mathbf{R})$ esetben $\operatorname{int}\{a\} = \emptyset \quad (a \in \mathbf{R})$. Állapodjunk meg abban, hogy

$$\operatorname{int}\emptyset := \emptyset.$$

Tehát bármely $A \subset X$ halmazra

$$\operatorname{int} A \subset A.$$

Könnyű meggondolni ugyanakkor, hogy pl. tetszőleges $K(a)$ környezetre

$$\operatorname{int} K(a) = K(a).$$

Valóban, ha a szóban forgó $K(a)$ környezet sugara r (azaz $K(a) = K_r(a)$), akkor minden $b \in K_r(a)$ esetén a $0 < v < r - \rho(b,a)$ feltételnek eleget tevő v „sugárral"

$$K_v(b) \subset K_r(a).$$

Ha ui. $x \in K_v(b)$, azaz $\rho(x,b) < v$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$\rho(x,a) \le \rho(x,b) + \rho(b,a) < v + \rho(b,a) < r.$$

Ez azt jelenti, hogy $x \in K_r(a)$, tehát a $K_v(b) \subset K_r(a)$ tartalmazás valóban fennáll.

Különösen fontosak a számunkra azok az $A \subset X$ halmazok, amelyekre az előbbiekben a környezetekre kapott egyenlőség teljesül. Nevezetesen, azt mondjuk, hogy az $A \subset X$ halmaz *nyílt,* ha

$$\operatorname{int} A = A.$$

Így speciálisan az $\emptyset$ (az üreshalmaz) nyílt halmaz, ill. az előbbiek szerint bármely környezet is az. Más megfogalmazásban tehát egy $\emptyset \ne A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha az A minden pontja belső pontja az A-nak:

$$a \in A \implies a \in \operatorname{int} A.$$

A fontosságára való tekintettel ismételjük el újra, hogy mit is jelent ez: az

$$\emptyset \ne A \subset X$$

halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha tetszőleges $a \in A$ elemének létezik olyan $K(a)$ környezete, hogy $K(a) \subset A$.

Világos, hogy bármelyik (X,ρ) metrikus tér esetén az X „alaphalmaz" nyílt halmaz. Ha pl. (X,ρ) a diszkrét metrikus tér (ld. 1.2. ii) megjegyzés), amikor is

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & (x = y) \\ \\ 1 & (x \ne y) \end{cases} \qquad (x,y \in X),$$

akkor az X összes részhalmaza nyílt halmaz. Valóban, ekkor (pl.)

$$K_{1/2}(a) = \{a\} \qquad (a \in X),$$

következésképpen tetszőleges $\emptyset \neq A \subset X$ halmazra és $a \in A$ pontra

$$K_{1/2}(a) = \{a\} \subset A.$$

Tehát $a \in \operatorname{int} A$. Egyúttal minden $x \in X$ pontra az (egyelemű) $\{x\}$ halmaz is nyílt. Ha viszont a ρ metrika olyan, hogy bármelyik $a \in X$ elemhez és tetszőleges $r > 0$ számhoz van olyan $a \neq x \in X$, hogy

$$\rho(x, a) < r,$$

akkor az X egyelemű részhalmazai közül egyik sem nyílt. Ti. ebben az esetben (az előbbi jelölésekkel)

$$x \in K_r(a),$$

ezért $x \neq a$ miatt $K_r(a)$ nem lehet részhalmaza az $\{a\}$ halmaznak. Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{int}\{a\} = \emptyset \neq \{a\}$. Ilyen tulajdonságú metrikus terek (egyszerűen igazolható módon) pl. a

$$(\mathbf{K}^n, \rho_p) \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N},\, 1 \leq p \leq +\infty)$$

terek (ld. 1.2. iv) megjegyzés).

A nyílt halmazok egyik fontos tulajdonságát fogalmazzuk meg a következő állításban.

1.7.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy valamilyen $\Gamma \neq \emptyset$ (index)halmaz esetén az $A_\gamma \subset X$ $(\gamma \in \Gamma)$ halmazok valamennyien nyíltak az (X, ρ) metrikus térben. Ekkor*

- *az $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ egyesítésük is nyílt;*
- *ha a Γ halmaz véges, akkor a $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ metszetük is nyílt.*

Bizonyítás. Legyen $a \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$. Ekkor egy $\nu \in \Gamma$ indexszel $a \in A_\nu$. Mivel az A_ν halmaz nyílt, ezért egy alkalmas $K(a)$ környezettel $K(a) \subset A_\nu$. Nyilvánvaló, hogy

$$A_\nu \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma,$$

így egyúttal

$$K(a) \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$$

is teljesül. Más szóval $a \in \operatorname{int}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)$, azaz $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ nyílt halmaz.

Most tegyük fel, hogy a Γ halmaz véges, és legyen $a \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$. Ekkor minden $\gamma \in \Gamma$ mellett $a \in A_\gamma$, következésképpen az A_γ-k feltételezett nyíltsága miatt egy $r_\gamma > 0$ sugárral

$$K_{r_\gamma}(a) \subset A_\gamma.$$

Ha

$$r := \min\{r_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$$

(ami a Γ halmaz végessége miatt egy jól definiált pozitív szám), akkor $r \le r_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma)$ miatt

$$K_r(a) \subset K_{r_\gamma}(a) \subset A_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

így

$$K_r(a) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma.$$

Tehát $a \in \operatorname{int}\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)$, ezért a $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ metszethalmaz nyílt. ∎

Gondoljuk meg, hogy tetszőleges (X, ρ) metrikus térben minden $A \subset X$ halmazra

$$\operatorname{int} A = \bigcup_{T\in\mathcal{A}} T,$$

ahol $\mathcal{A}$ jelöli az X halmaz összes olyan $T \subset X$ nyílt részhalmaza által alkotott halmazrendszert, amelyre $T \subset A$. (Mivel $\emptyset \in \mathcal{A}$, ezért $\mathcal{A} \neq \emptyset$.) Legyen ti. $x \in \bigcup_{T\in\mathcal{A}} T$, ekkor valamilyen $T \in \mathcal{A}$ halmazra $x \in T \subset A$. Mivel T nyílt, ezért egy alkalmas $K(a)$ környezettel $K(a) \subset T$, így $K(a) \subset A$, más szóval $a \in \operatorname{int} A$. Ezzel beláttuk, hogy

$$\bigcup_{T\in\mathcal{A}} T \subset \operatorname{int} A.$$

Fordítva, ha $a \in \operatorname{int} A$, akkor valamilyen $K(a)$ környezettel $K(a) \subset A$. Mivel $K(a)$ nyílt halmaz, ezért $K(a) \in \mathcal{A}$. Következésképpen $K(a) \subset \bigcup_{T\in\mathcal{A}} T$, amiből $a \in K(a)$ alapján $a \in \bigcup_{T\in\mathcal{A}} T$ is következik. Tehát

$$\operatorname{int} A \subset \bigcup_{T\in\mathcal{A}} T,$$

azaz valóban $\operatorname{int} A = \bigcup_{T\in\mathcal{A}} T$.

Az 1.7.1. Tétel (és a most mondottak) miatt az $\operatorname{int} A = \bigcup_{T\in\mathcal{A}} T$ halmaz (mint nyílt halmazok egyesítése) nyílt, és

$$\operatorname{int} A = \bigcup_{T\in\mathcal{A}} T \subset A,$$

hiszen bármelyik $T \in \mathcal{A}$ halmazra $T \subset A$. Az is világos, hogy ha $C \subset X$ olyan nyílt halmaz, amelyre $C \subset A$, akkor $C \subset \operatorname{int} A$, ui. ekkor $C \in \mathcal{A}$. Ezért is szokták az $\operatorname{int} A$ halmazt az A *legbővebb* nyílt részhalmazának nevezni. Speciálisan, ha $A \subset X$ nyílt, akkor $A \in \mathcal{A}$ és $A = \operatorname{int} A$.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy számos esetben nem maguk a szóban forgó nyílt halmazok, hanem azok komplementerei játszanak szerepet az egyes vizsgálódásokban. Következésképpen érdemes ezeket a komplementer halmazokat külön is „kiemelni", ill. elnevezni. Éppen ezért egy (X, ρ) metrikus térben az $A \subset X$ halmazt *zártnak* fogjuk nevezni, ha az $X \setminus A$ (komplementer) halmaz nyílt. Világos ezek után, hogy pl. az $\emptyset$, X halmazok zártak, vagy pl. a diszkrét metrikus térben minden halmaz zárt. Tetszőleges (X, ρ) metrikus térben minden egyelemű halmaz zárt. Legyen ui. $a \in X$, ekkor bármely $b \in X \setminus \{a\}$ elemre $\rho(a, b) > 0$. Ha $0 < v \le \rho(a, b)$ és $x \in K_v(b)$, akkor

$$\rho(a, x) \ge \rho(a, b) - \rho(x, b) > \rho(a, b) - v \ge \rho(a, b) - \rho(a, b) = 0,$$

azaz $\rho(a, x) > 0$. Ez azt jelenti, hogy $x \ne a$, más szóval $x \in X \setminus \{a\}$. Ezért

$$K_v(b) \subset X \setminus \{a\},$$

röviden: az $X \setminus \{a\}$ halmaz nyílt, tehát $\{a\}$ valóban zárt.

Zártak pl. a

$$G_r(a) := \{x \in X : \rho(x, a) \le r\} \qquad (a \in X,\ r > 0)$$

halmazok is. Ha ui. $z \in X \setminus G_r(a)$, akkor $\rho(z, a) > r$. Ezért tetszőleges $0 < s < \rho(z, a) - r$ esetén minden $y \in K_s(z)$ elemre

$$\rho(y, a) \ge \rho(z, a) - \rho(z, y) > \rho(z, a) - s > r,$$

így $y \in X \setminus G_r(a)$. Tehát $K_s(z) \subset X \setminus G_r(a)$, ami azt jelenti, hogy az $X \setminus G_r(a)$ halmaz nyílt.

Nyilvánvaló, hogy az $A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha az $X \setminus A$ (komplementer) halmaz zárt.

Az ismert De Morgan-azonosságokra utalva az 1.7.1. Tételből rögtön következik (valójában annak egy átírása) az alábbi 1.7.2. Tétel:

1.7.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy valamilyen $\Gamma \ne \emptyset$ (index)halmaz esetén az $A_\gamma \subset X$ $(\gamma \in \Gamma)$ halmazok valamennyien zártak az (X, ρ) metrikus térben. Ekkor*

- *a $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ metszetük is zárt;*
- *ha a Γ halmaz véges, akkor az $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ egyesítésük is zárt.*

Tekintsük az (X, ρ) metrikus térben az $A \subset X$ halmazt, és jelöljük $\mathcal{X}$-szel az összes olyan $B \subset X$ zárt halmaz által alkotott halmazrendszert, amelyre $A \subset B$. Világos, hogy $\mathcal{X} \ne \emptyset$, hiszen nyilván $X \in \mathcal{X}$. Az előző tétel szerint az

$$\overline{A} := \bigcap_{B \in \mathcal{X}} B$$

halmaz zárt, és mivel minden $B \in \mathcal{X}$ esetén $A \subset B$, ezért

$$A \subset \overline{A}.$$

Az is világos, hogy ha a $C \subset X$ halmaz zárt és $A \subset C$, akkor $\overline{A} \subset C$, ui. $C \in \mathcal{X}$. (Ezért is szokták az $\overline{A}$ halmazt az A-t lefedő legszűkebb zárt halmazként említeni.) Pl. $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{X} = X$. Ha az $A \subset X$ halmaz zárt, akkor nyilván $A \in \mathcal{X}$, ezért $\overline{A} \subset A$, így $A = \overline{A}$. Következésképpen azt mondhatjuk, hogy az $A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha $A = \overline{A}$.

Legyen $A \subset X$, ekkor az előbbiekben definiált $\overline{A}$ halmazt az A *lezárásának* nevezzük. Azt is mondjuk, hogy $\overline{A}$ az A *lezártja.*

A zárt halmazok (és valójában egyúttal a nyílt halmazok) további jellemzéséhez vezessük be a torlódási pont fogalmát. Legyen ez utóbbihoz az (X, ρ) metrikus tér esetén $A \subset X$ és $\alpha \in X$. Azt mondjuk, hogy az α *torlódási pontja* az A halmaznak, ha minden $K(\alpha)$ környezetre

$$(K(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Más megfogalmazásban tehát ez azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $r > 0$ számhoz létezik olyan $\alpha \neq x \in A$, amelyre $x \in K_r(\alpha)$, azaz $0 < \rho(x, \alpha) < r$.

Legyen a fenti A halmaz esetén

$$A' := \{\alpha \in X : \alpha \text{ torlódási pontja az } A\text{-nak}\}.$$

Ekkor teljesül az

1.7.3. Tétel. *Tetszőleges (X, ρ) metrikus tér, $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz és $\alpha \in X$ esetén fennáll a következő ekvivalencia: $\alpha \in A'$ akkor és csak akkor igaz, ha az α minden $K(\alpha)$ környezetére az $A \cap K(\alpha)$ metszet végtelen halmaz.*

Bizonyítás. Az állítás egyik „iránya" nyilvánvaló: ha az $A \cap K(\alpha)$ metszet minden $K(\alpha)$ környezetre végtelen halmaz, azaz $K(\alpha)$-ban végtelen sok A-beli elem van, akkor ezek között olyan is van, amelyik különbözik α-tól. Így $(K(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap A \neq \emptyset$, következésképpen $\alpha \in A'$.

Most tegyük fel azt, hogy $\alpha \in A'$, és indirekt módon induljunk ki abból, hogy valamilyen $K(\alpha)$ esetén $A \cap K(\alpha)$ véges halmaz. Mivel $\alpha \in A'$, ezért $(K(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap A \neq \emptyset$ (és ez a halmaz is véges). Legyen

$$0 < r < \min\{\rho(x, \alpha) : \alpha \neq x \in A \cap K(\alpha)\}.$$

Világos, hogy $(K_r(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap A = \emptyset$, szemben az $\alpha \in A'$ feltételezésünkkel. ∎

Így pl. akármilyen véges $A \subset X$ halmazra $A' = \emptyset$.

Az alábbi tételben halmazok torlódási pontjait sorozatok segítségével fogjuk jellemezni.

1.7.4. Tétel. *Tekintsük valamilyen (X, ρ) metrikus térben az $\emptyset \neq A \subset X$ halmazt, és legyen $\alpha \in X$. Az α akkor és csak akkor torlódási pontja az A-nak, ha van olyan $(x_n) : \mathbf{N} \to A \setminus \{\alpha\}$ sorozat, amelynek létezik határértéke, és $\lim(x_n) = \alpha$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\alpha \in A'$. Ekkor tetszőleges $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén van olyan $x_n \in A$, hogy $x_n \in K_{1/n}(\alpha) \setminus \{\alpha\}$. Következésképpen $(x_n) : \mathbf{N} \to A \setminus \{\alpha\}$, és

$$0 < \rho(x_n, \alpha) < \frac{1}{n} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Mivel $\lim(1/n) = 0$, ezért mindez azt jelenti, hogy $\lim\Big(\rho(x_n, \alpha)\Big) = 0$, azaz $\lim(x_n) = \alpha$.

Induljunk ki most abból, hogy valamilyen $(x_n) : \mathbf{N} \to A \setminus \{\alpha\}$ sorozatra $\lim(x_n) = \alpha$. Ekkor bármilyen $K(\alpha)$ környezetet is véve létezik olyan $k \in \mathbf{N}$ (sőt, egy küszöbindextől kezdve minden $k \in \mathbf{N}$ ilyen), amelyre $x_k \in K(\alpha)$. Mivel $\mathcal{R}_{(x_n)} \subset A \setminus \{\alpha\}$, így $x_k \neq \alpha$, ezért egyúttal

$$x_k \in (K(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap A$$

is igaz. Következésképpen $\alpha \in A'$. ■

Az előbbi tételben szereplő (x_n) sorozatról az is feltehető, hogy injektív, azaz $x_n \neq x_m$ $(n, m \in \mathbf{N}, n \neq m)$. Ui. a fenti bizonyításban az $\alpha \in A'$ torlódási pontot „előállító" (x_n) sorozat konstrukciójakor a

$$0 < \rho(x_{n+1}, \alpha) < \min\{\rho(x_n, \alpha), 1/(n+1)\} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

egyenlőtlenségnek megfelelően választva a sorozat tagjait, mindez nyilvánvaló.

A torlódási pont fogalma szoros kapcsolatban van a halmazok zártságával. Ezt fejezi ki az

1.7.5. Tétel. *Tetszőleges (X, ρ) metrikus tér és $A \subset X$ esetén az A halmaz akkor és csak akkor zárt, ha $A' \subset A$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az A halmaz zárt és $\alpha \in A'$. Ha $\alpha \notin A$ teljesülne, akkor nyilván $\alpha \in X \setminus A$ is igaz lenne. Mivel az A zárt, ezért az $X \setminus A$ halmaz nyílt. Így alkalmas $K(\alpha)$ környezettel

$$K(\alpha) \subset X \setminus A.$$

Ezért $K(\alpha) \cap A = \emptyset$, ami ellentmond annak, hogy $\alpha \in A'$.

Most azt tegyük fel, hogy $A' \subset A$. Ha A nem lenne zárt, akkor az $X \setminus A$ halmaz nem lenne nyílt. Ez azt jelenti, hogy egy alkalmas $\alpha \in X \setminus A$ pontra $\alpha \notin \operatorname{int}(X \setminus A)$. Tehát minden $K(\alpha)$ környezetre

$$K(\alpha) \not\subset X \setminus A,$$

más szóval valamilyen $x \in K(\alpha)$ elemre $x \in A$. Ha mindezt a

$$K(\alpha) := K_{1/n}(\alpha) \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N})$$

környezetekre alkalmazzuk, akkor egy olyan $(x_n) : \mathbf{N} \to A \setminus \{\alpha\}$ sorozatot kapunk, amelyre

$$\rho(x_n, \alpha) < \frac{1}{n} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Más szóval az (x_n) sorozat konvergens, és $\lim(x_n) = \alpha$. Ezért az 1.7.4. Tétel szerint $\alpha \in A'$. Tehát az $A' \subset A$ feltételezésünk miatt $\alpha \in A$, ami nyilván ellentmond annak, hogy $\alpha \in X \setminus A$. ■

Speciálisan minden véges $A \subset X$ halmaz zárt, ui. (ld. fentebb) $A' = \emptyset \subset A$.

Az előbbiek alapján már egyszerűen belátható a halmazok zártságát konvergens sorozatokkal jellemző alábbi tétel.

1.7.6. Tétel. *Legyen (X, ρ) metrikus tér. Az $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha minden konvergens $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozatra $\lim(x_n) \in A$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először azt, hogy az A halmaz zárt, azaz az előző tétel miatt egyúttal $A' \subset A$, $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ pedig legyen konvergens sorozat, $\alpha := \lim(x_n)$. Ha az $\mathcal{R}_{(x_n)}$ értékkészlethalmaz véges, akkor alkalmas (ν_n) indexsorozattal az (x_{ν_n}) részsorozat konstanssorozat: valamilyen $a \in A$ elemmel $x_{\nu_n} = a \quad (n \in \mathbf{N})$. Mivel

$$\lim(x_n) = \lim(x_{\nu_n}) = a,$$

ezért $\alpha = a \in A$. Ha viszont $\mathcal{R}_{(x_n)}$ végtelen halmaz, akkor tetszőleges $N \in \mathbf{N}$ esetén az

$$\{x_k \in \mathcal{R}_{(x_n)} : k \in \mathbf{N}, k > N\}$$

halmaz is végtelen. Ugyanakkor minden $K(\alpha)$ környezetre egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel $x_k \in K(\alpha) \quad (k \in \mathbf{N}, k > N)$. Következésképpen az

$$\{x_k \in \mathcal{R}_{(x_n)} : k \in \mathbf{N}, k > N\} \cap K(\alpha)$$

halmaz szintén végtelen. Továbbá

$$\{x_k \in \mathcal{R}_{(x_n)} : k \in \mathbf{N}, k > N\} \cap K(\alpha) \subset \mathcal{R}_{(x_n)} \cap K(\alpha) \subset A \cap K(\alpha),$$

ezért $A \cap K(\alpha)$ is végtelen halmaz. Az 1.7.3. Tétel szerint tehát $\alpha \in A'$. Így az $A' \subset A$ feltételből $\alpha \in A$ adódik.

Most tegyük fel azt, hogy tetszőleges konvergens $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozat határértékére $\lim(x_n) \in A$, és lássuk be, hogy az A halmaz zárt. Legyen ehhez $\alpha \in A'$, ekkor az 1.7.4. Tétel szerint egy alkalmas $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozatra $\lim(x_n) = \alpha$. A kiinduló feltételünk szerint ezért $\alpha \in A$, azaz $A' \subset A$, így (ld. 1.7.5. Tétel) az A zárt. ∎

A fentiekben bevezetett nyílt, ill. zárt halmazok mellett fontos szerep jut az ún. kompakt halmazoknak. Ezek értelmezéséhez induljunk ki most is valamilyen (X, ρ) metrikus térből, és legyen $\emptyset \neq A \subset X$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *kompakt,* ha tetszőleges

$$(x_n) : \mathbf{N} \to A$$

sorozathoz létezik olyan (ν_n) indexsorozat, hogy az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens, és $\lim(x_{\nu_n}) \in A$. Világos, hogy ha pl. az $A \subset X$ véges halmaz, akkor az A kompakt. Valóban, ha $(x_n) : \mathbf{N} \to A$, akkor az A végessége miatt léteznie kell olyan $a \in A$ elemnek és olyan (ν_n) indexsorozatnak, hogy

$$x_{\nu_n} = a \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen az (x_{ν_n}) konstanssorozat konvergens, és $\lim(x_{\nu_n}) = a \in A$.

Nem nehéz belátni, hogy minden kompakt halmaz egyúttal zárt is. Ui. a kompaktság előbbi definíciójában szereplő „tetszőleges $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozatok" között ott vannak az A-beli konvergens $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozatok is. Ha tehát az A kompakt, akkor minden konvergens $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozatnak is kell, hogy legyen olyan (x_{ν_n}) konvergens részsorozata, amelyre

$$\lim(x_n) = \lim(x_{\nu_n}) \in A.$$

Ez viszont az 1.7.6. Tétel alapján azt jelenti, hogy az A halmaz zárt.

Nevezzük az $A \subset X$ halmazt *korlátosnak,* ha megadható olyan $\xi \in X$ elem és annak olyan $K(\xi)$ környezete, hogy

$$A \subset K(\xi).$$

Nyilvánvaló, hogy minden környezet korlátos halmaz. Világos továbbá, hogy bármely konvergens $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozat esetén az $\mathcal{R}_{(x_n)}$ értékkészlet korlátos halmaz (röviden: az (x_n) *korlátos sorozat*). Ha ui. $\alpha := \lim(x_n)$, akkor egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$\rho(x_n, \alpha) < 1 \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Legyen

$$v := \max\{1, \rho(x_k, \alpha) : k = 0, ..., N\},$$

akkor minden $r > v$ szám mellett nyilván

$$\rho(x_m, \alpha) < r \qquad (m \in \mathbf{N}),$$

azaz $\mathcal{R}_{(x_n)} \subset K_r(\alpha)$.

Az is eléggé nyilvánvaló, hogy véges sok korlátos halmaz egyesítése is korlátos. Valóban, tegyük fel, hogy $n \in \mathbf{N}$, és az $A_i \subset X \quad (i = 0, ..., n)$ halmazok korlátosak. Tehát alkalmas $a_i \in X$, $r_i > 0$ mellett

$$A_i \subset K_{r_i}(a_i) \qquad (i = 0, ..., n).$$

Ha $\xi := a_0$ és

$$r := \max\{\rho(a_i, \xi) + r_i : i = 0, ..., n\},$$

akkor

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i \subset K_r(\xi).$$

Legyen ui. $x \in \bigcup_{i=0}^{n} A_i$, azaz valamilyen $j = 0, ..., n$ indexre $x \in A_j$. Következésképpen $x \in K_{r_j}(a_j)$, azaz $\rho(x, a_j) < r_j$. Ezért

$$\rho(x, \xi) \leq \rho(x, a_j) + \rho(a_j, \xi) < r_j + \rho(a_j, \xi) \leq r.$$

Ez azt jelenti, hogy $\rho(x, \xi) < r$, más szóval $x \in K_r(\xi)$, tehát $\bigcup_{i=0}^{n} A_i \subset K_r(\xi)$.

Analóg gondolatmenettel láthatók be az alábbi állítások is:

- az $A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor korlátos, ha az A alkalmasan választott véges sok környezet egyesítésének a részhalmaza;
- ha az $A \subset X$ halmaz korlátos, akkor minden $\xi \in X$ elemnek van olyan $K(\xi)$ környezete, hogy $A \subset K(\xi)$.

Mutassuk meg, hogy minden kompakt halmaz korlátos. Indirekt módon gondolkozva ui. tegyük fel, hogy az $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz kompakt, de nem korlátos. Legyen $\xi \in X$ tetszőleges, ekkor az indirekt feltételezésünk miatt

$$A \not\subset K_n(\xi) \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Ezért létezik olyan $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozat, amelyre

$$\rho(x_n, \xi) \geq n \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Egyúttal bármilyen (ν_n) indexsorozatra

$$\rho(x_{\nu_n}, \xi) \geq \nu_n \geq n \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N})$$

is igaz. Az A kompaktsága miatt viszont van olyan (ν_n) indexsorozat is, amelyre (x_{ν_n}) konvergens, így az előbbiek szerint korlátos is: alkalmas $\eta \in X$ elem és $r > 0$ szám mellett $\mathcal{R}_{(x_{\nu_n})} \subset K_r(\eta)$, azaz

$$\rho(x_{\nu_n}, \eta) < r \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen

$$n \leq \rho(x_{\nu_n}, \xi) \leq \rho(x_{\nu_n}, \eta) + \rho(\eta, \xi) < r + \rho(\eta, \xi) \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

ami nyilván nem lehetséges.

Ezzel beláttuk az alábbi állítást:

1.7.7. Tétel. *Bármilyen (X, ρ) metrikus tér és $A \subset X$ kompakt halmaz esetén az A korlátos és zárt.*

Megjegyezzük, hogy az előbbi tétel „megfordítása" nem teljesül: van olyan (X, ρ) metrikus tér és olyan $A \subset X$ halmaz, hogy az A korlátos és zárt, de nem kompakt. Ugyanakkor igaz az

1.7.8. Tétel. *Legyen $1 \leq s \in \mathbf{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, és tekintsük a $(\mathbf{K}^s, \rho_p)$ metrikus teret. Ekkor tetszőleges korlátos és zárt $\emptyset \neq A \subset \mathbf{K}^n$ halmaz kompakt.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy minden $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}^s$ sorozatnak van olyan konvergens (x_{ν_n}) részsorozata, amelyre $\lim(x_{\nu_n}) \in A$. Emlékeztetünk az 1.3.2. Tételre, miszerint (többek között) az $x = (x_n)$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden $x^{(i)}$ $\quad (i = 1, ..., s)$ koordináta-sorozata konvergens. A feltételezésünk szerint az A halmaz korlátos, ezért az (x_n) sorozat is korlátos. Van tehát olyan $r > 0$, amellyel

$$x_n \in K_r(0) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$\|x_n\|_p < r \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A ρ_p metrika definícióját figyelembe véve (ld. 1.2. iv) megjegyzés) innen az is rögtön adódik, hogy

$$|x_{ni}| < r \qquad (n \in \mathbf{N},\, i = 1, ..., s),$$

azaz, hogy minden $x^{(i)}$ $\quad (i = 1, ..., s)$ koordináta-sorozat (mint számsorozat) is korlátos. A jól ismert Bolzano–Weierstrass-kiválasztási tétel alapján ezért létezik olyan $\nu^{(1)}$ indexsorozat, hogy az

$$x^{(1)} \circ \nu^{(1)}$$

részsorozat konvergens. Világos, hogy az $x^{(2)} \circ \nu^{(1)}$ résszorozat is korlátos, ezért van olyan $\nu^{(2)}$ indexsorozat is, amelyre az

$$\left(x^{(2)} \circ \nu^{(1)}\right) \circ \nu^{(2)} = x^{(2)} \circ \left(\nu^{(1)} \circ \nu^{(2)}\right)$$

részsorozat is konvergens. A konstrukciót folytatva végül olyan $\nu^{(i)}$ $(i = 1, ..., s)$ indexsorozatokat kapunk, hogy az

$$x^{(i)} \circ \left(\nu^{(1)} \circ \ldots \circ \nu^{(i)}\right) \qquad (i = 1, ..., s)$$

részsorozatok konvergensek. Legyen

$$\nu := \nu^{(1)} \circ \ldots \circ \nu^{(s)},$$

ekkor a ν sorozat indexsorozat, és minden

$$x^{(i)} \circ \nu \qquad (i = 1, ..., s)$$

sorozat részsorozata a konvergens $x^{(i)} \circ \left(\nu^{(1)} \circ \ldots \circ \nu^{(i)}\right)$ sorozatnak. Így $x^{(i)} \circ \nu$ $(i = 1, ..., s)$ konvergens. Ez az 1.3.2. Tétel szerint azt jelenti, hogy az

$$x \circ \nu : \mathbf{N} \to A$$

részsorozat is konvergens. Mivel az A halmaz zárt, ezért az 1.7.6. Tétel alapján

$$\lim(x \circ \nu) \in A,$$

azaz az A halmaz kompakt. ■

Az előző tétel bizonyítása során az is „kiderült", hogy a $(\mathbf{K}^s, \rho_p)$-beli vektorsorozatokra is igaz a számsorozatok körében megismert Bolzano–Weierstrass-kiválasztási tétel megfelelője, nevezetesen:

1.7.9. Tétel (Bolzano–Weierstrass). *A* $(\mathbf{K}^s, \rho_p)$ $(1 \le s \in \mathbf{N},\ 1 \le p \le +\infty)$ *metrikus térben minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

A továbbiakban a kompaktságnak egy olyan ekvivalens átfogalmazását vizsgáljuk, amelyik számos helyen fontos szerepet játszik. Ehhez vezessük be a nyílt lefedés fogalmát az alábbiak szerint. Tegyük fel, hogy az (X, ρ) metrikus tér és az $A \subset X$ halmaz esetén valamilyen $\Gamma \neq \emptyset$ indexhalmazzal és $T_\gamma \subset X$ $(\gamma \in \Gamma)$ nyílt halmazokkal

$$A \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a

$$\{T_\gamma \in \mathcal{P}(X) : \gamma \in \Gamma\}$$

halmazrendszer egy *nyílt lefedése az A-nak.* Ha itt van a Γ-nak olyan véges $\Gamma_0 \subset \Gamma$ részhalmaza, hogy

$$A \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} T_\gamma$$

is igaz, akkor az A fenti nyílt lefedéséből úgymond *kiválasztható véges lefedés.*

1.7.10. Tétel. *Legyen (X, ρ) metrikus tér, $A \subset X$. Ekkor az A halmaz kompaktságának a szükséges és elégséges feltétele az, hogy az A minden nyílt lefedéséből kiválasztható legyen véges lefedés.*

Bizonyítás. Tegyük fel először azt, hogy az A kompakt, és lássuk be az alábbi lemmát:

Lemma. *Az A tetszőleges $\{T_\gamma \in \mathcal{P}(X) : \gamma \in \Gamma\}$ nyílt lefedése esetén van olyan $r > 0$ szám, hogy bármelyik $a \in A$ pontra egy alkalmas $\gamma \in \Gamma$ indexszel*

$$K_r(a) \subset T_\gamma.$$

Ha ui. ez nem lenne igaz, akkor egy alkalmas $\{T_\gamma \in \mathcal{P}(X) : \gamma \in \Gamma\}$ nyílt lefedéssel bármely $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén valamilyen $A \ni x_n$-re a $K_{1/n}(x_n)$ környezet egyetlen T_γ halmaznak sem lenne részhalmaza. Ekkor viszont az A kompaktsága miatt van olyan (ν_n) indexsorozat, amellyel (x_{ν_n}) konvergens, és

$$a := \lim(x_{\nu_n}) \in A.$$

Mivel $A \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma$, ezért egy $\gamma \in \Gamma$ mellett $a \in T_\gamma$. A T_γ halmaz nyíltsága miatt azonban létezik olyan $\sigma > 0$, hogy $K_\sigma(a) \subset T_\gamma$.

Mutassuk meg, hogy alkalmas $n \in \mathbf{N}$ indexre $K_{1/\nu_n}(x_{\nu_n}) \subset K_\sigma(a)$. Legyen ehhez $0 < n \in \mathbf{N}$ egyelőre tetszőleges, $t \in K_{1/\nu_n}(x_{\nu_n})$. Ekkor

$$\rho(t, a) \leq \rho(t, x_{\nu_n}) + \rho(x_{\nu_n}, a) < \frac{1}{\nu_n} + \rho(x_{\nu_n}, a).$$

Mivel

$$\frac{1}{\nu_n} + \rho(x_{\nu_n}, a) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

ezért valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén $\frac{1}{\nu_n} + \rho(x_{\nu_n}, a) < \sigma$, és így $\rho(t, a) < \sigma$. Tehát valóban $K_{1/\nu_n}(x_{\nu_n}) \subset K_\sigma(a)$. Következésképpen $K_{1/\nu_n}(x_{\nu_n}) \subset T_\gamma$, szemben az (x_n) sorozatra vonatkozó feltételezéssel.

A most belátott lemmát szem előtt tartva tegyük fel indirekt módon, hogy az A halmaz valamilyen $\{T_\gamma \in \mathcal{P}(X) : \gamma \in \Gamma\}$ nyílt lefedéséből nem választható ki véges lefedés. Ha $x_0 \in A$ tetszőleges, akkor az A halmaz nem lehet részhalmaza a $K_r(x_0)$-nak, különben a Lemma alapján lenne olyan $\gamma \in \Gamma$, amellyel $A \subset T_\gamma$. Létezik ezért az A-nak olyan x_1 pontja, amelyik nem eleme $K_r(x_0)$-nak: $\rho(x_0, x_1) \geq r$. Viszont ugyanilyen okoknál fogva $A \subset K_r(x_0) \bigcup K_r(x_1)$ sem teljesülhet, azaz alkalmas $x_2 \in A$ esetén

$$\rho(x_0, x_2) \geq r,\ \rho(x_1, x_2) \geq r.$$

Teljes indukcióval így eljutunk egy olyan $x_n \in A \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozathoz, amelyre

$$\rho(x_n, x_m) \geq r \qquad (n, m \in \mathbf{N}, n \neq m)$$

igaz. Világos, hogy az (x_n) sorozatnak nincs olyan részsorozata, amelyik Cauchy-sorozat lenne. Ezért konvergens részsorozata sincs az (x_n)-nek, ami ellentmond az A kompaktságának.

Ezzel a tételünk szükségesség részét beláttuk. Az elégségesség igazolásához tegyük fel, hogy az A minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges lefedés, és legyen

$$(x_n) : \mathbf{N} \to A$$

tetszőleges. Ha az (x_n) sorozat $\mathcal{R}_{(x_n)}$ értékkészlete véges, akkor van az (x_n) sorozatnak olyan részsorozata, amelyik konstanssorozat, következésképpen konvergens, és a határértéke nyilván A-ban van.

Feltehető tehát, hogy a $B := \mathcal{R}_{(x_n)} \subset A$ halmaz nem véges. A folytatáshoz bizonyítsuk be először azt, hogy a B halmaznak van A-beli torlódási pontja. Ui. a mondottakkal ellentétben tegyük fel, hogy $A \cap B' = \emptyset$. Tehát bármelyik $a \in A$ elem esetén $a \notin B'$, azaz van olyan $K(a)$ környezet, hogy

$$(K(a) \setminus \{a\}) \cap B = \emptyset.$$

Az itt szereplő $K(a)$ környezetek valamennyien nyíltak. Világos továbbá, hogy

$$\{K(a) : a \in A\}$$

nyílt lefedése az A-nak, így egy alkalmas véges $A_0 \subset A$ halmazzal $A \subset \bigcup_{a \in A_0} K(a)$. Egyúttal persze

$$B = B \cap A = \bigcup_{a \in A_0} (K(a) \cap B).$$

Mivel $K(a) \bigcap B \ \ (a \in A_0)$ legfeljebb véges (ti. $K(a) \cap B = \emptyset$ vagy $K(a) \cap B = \{a\}$), ezért innen a B végessége következne, szemben a feltételezéssel.

Tehát van az $\mathcal{R}_{(x_n)}$ halmaznak A-beli torlódási pontja:

$$a \in \mathcal{R}'_{(x_n)} \bigcap A.$$

Így bármilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén létezik olyan $x_{\nu_n} \in A$, hogy

$$\rho(x_{\nu_n}, a) < 1/n.$$

Nyilván feltehetjük, hogy $\nu_n < \nu_{n+1} \quad (0 < n \in \mathbf{N})$, más szóval a (ν_n) sorozat indexsorozat. Tehát $\rho(x_{\nu_n}, a) \to 0 \ \ (n \to \infty)$, így az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens, és $\lim(x_{\nu_n}) = a \in A$, azaz az A halmaz kompakt. ■

1.8. Megjegyzések

i) Tekintsük az (X, ρ) metrikus teret, és legyen

$$\mathcal{T}_\rho(X) := \mathcal{T}_\rho := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ nyílt}\}.$$

Az X nyílt részhalmazai által meghatározott $\mathcal{T}_\rho$ halmazrendszert az (X, ρ) metrikus tér *topológiájának* nevezzük. Ekkor (ld. 1.7.1. Tétel)

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}_\rho$;
- tetszőleges $\Gamma \neq \emptyset$, $A_\gamma \in \mathcal{T}_\rho \quad (\gamma \in \Gamma)$ választással $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \in \mathcal{T}_\rho$;
- ha az előbbi Γ halmaz véges, akkor $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \in \mathcal{T}_\rho$.

Számos esetben a metrikus terekkel kapcsolatos meggondolásokban valójában nem is a metrika, hanem csak a $\mathcal{T}_\rho$ topológia előbb felidézett tulajdonságai játszanak szerepet. Ez az észrevétel módot ad a metrikus tereknél általánosabb absztrakt terek bevezetésére is. Nevezetesen, legyen az X halmaz, a $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer pedig olyan, hogy

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
- bármely $\Gamma \neq \emptyset$, $A_\gamma \in \mathcal{T} \quad (\gamma \in \Gamma)$ esetén $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \in \mathcal{T}$;
- ha az előbbi Γ halmaz véges, akkor $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \in \mathcal{T}$.

Ekkor a $\mathcal{T}$ halmazrendszert *topológiának,* az $(X, \mathcal{T})$ párt pedig *topologikus térnek* nevezzük. Szokás a $\mathcal{T}$ elemeit *nyílt halmazokként* említeni. Világos, hogy pl. $(X, \{\emptyset, X\})$, $(X, \mathcal{P}(X))$ topologikus terek. Speciálisan, ha (X, ρ) metrikus tér, akkor $(X, \mathcal{T}_\rho)$ egyúttal topologikus tér, ahol $\mathcal{T}_\rho$ a ρ *metrika által indukált topológia.*

ii) Tegyük fel, hogy adottak az (X,ρ), (X,σ) metrikus terek, és $\rho \sim \sigma$ (azaz a ρ metrika ekvivalens a σ-val, ld. 1.4. vi) megjegyés). Ekkor könnyen láthatóan

$$\mathcal{T}_\rho(X) = \mathcal{T}_\sigma(X),$$

tehát a két tér topológiája egybeesik, más szóval az X nyílt részhalmazai a két metrika szerint ugyanazok. Valóban, ha a c, $C > 0$ konstansokkal

$$c\cdot \rho(x,y) \le \sigma(x,y) \le C\cdot \rho(x,y) \qquad (x,y \in X),$$

akkor tetszőleges $a \in X$, $r > 0$ esetén a σ szerinti

$$K_r^{(\sigma)}(a) := \{x \in X : \sigma(x,a) < r\}$$

környezetre

$$K_{r/C}^{(\rho)}(a) \subset K_r^{(\sigma)}(a),$$

ahol

$$K_{r/C}^{(\rho)}(a) := \{x \in X : \rho(x,a) < r/C\}.$$

Ha ui. $x \in K_{r/C}^{(\rho)}(a)$, azaz $\rho(x,a) < r/C$, akkor

$$\sigma(x,a) \le C\cdot \rho(x,a) < C\cdot \frac{r}{C} = r,$$

más szóval $x \in K_r^{(\sigma)}(a)$. Ugyanígy kapjuk, hogy

$$K_{cr}^{(\sigma)}(a) \subset K_r^{(\rho)}(a),$$

Legyen $\emptyset \ne A \in X$, $a \in A$, és tegyük fel, hogy egy alkalmas $r > 0$ sugárral

$$K_r^{(\sigma)}(a) \subset A.$$

Ekkor az előbbiek szerint

$$K_{r/C}^{(\rho)}(a) \subset A$$

is igaz, ill.

$$K_r^{(\rho)}(a) \subset A$$

esetén

$$K_{cr}^{(\sigma)}(a) \subset A.$$

Következésképpen az a tény (ld. 1.7. pont), hogy $a \in \operatorname{int} A$, független attól, hogy az (X,ρ), vagy az (X,σ) metrikus térben „vagyunk". Így az $\operatorname{int} A = A$ egyenlőség is pontosan akkor teljesül a ρ metrika értelmében, ha a σ szerint is fennáll. Röviden:

$$A \in \mathcal{T}_\rho(X) \iff A \in \mathcal{T}_\sigma(X).$$

iii) Alkalmazzuk az előző megjegyzést a

$$(\mathbf{K}^n, \rho_p) \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N},\, 1 \leq p \leq +\infty)$$

metrikus terekre. Az 1.4. vii) megjegyzést figyelembe véve ekkor azt mondhatjuk, hogy egy $A \subset \mathbf{K}^n$ halmaz nyíltsága ugyanazt jelenti a ρ_p metrika szerint, mint a ρ_q metrika értelmében $(1 \leq p, q \leq +\infty)$. Éppen ezért (is), amint azt már korábban említettük, a $\mathbf{K}^n$ terekkel kapcsolatos vizsgálódásaink során általában a ρ_2, ρ_1, ρ_∞ metrikák valamelyikét (többnyire ρ_2-t) fogjuk „használni".

iv) A ii) megjegyzésben azt láttuk be, hogy ha az (X, ρ), (X, σ) metrikus terek esetén $\rho \sim \sigma$, akkor tetszőleges $a \in X$ és $r > 0$ esetén megadhatók olyan $u, v > 0$ számok, amelyekkel

$$(*) \qquad K_u^{(\sigma)}(a) \subset K_r^{(\rho)}(a) \subset K_v^{(\sigma)}(a).$$

Speciálisan az $(\mathbf{R}^2, \rho_p)$ $(p = 1, 2, \infty)$ választással az 1.4. x) megjegyzésre hivatkozva azt mondhatjuk, hogy geometriailag a $(*)$ összefüggés a következőt jelenti:

az $a \in \mathbf{R}^2$ középpontú $K_r^{(1)}(a) = K_r^{(\rho_1)}(a)$ $(r > 0)$ rombuszok,
az $a \in \mathbf{R}^2$ középpontú $K_u^{(2)}(a) = K_u^{(\rho_2)}(a)$ $(u > 0)$ körlemezek,
és az $a \in \mathbf{R}^2$ középpontú $K_v^{(\infty)}(a) = K_v^{(\rho_\infty)}(a)$ $(v > 0)$ négyzetek kölcsönösen egymásba illeszthetők.

Jegyezzük meg, hogy

$$K_v^{(\infty)}(a) = K_v^{(\infty)}((a_1, a_2)) = (a_1 - v, a_1 + v) \times (a_2 - v, a_2 + v),$$

ill. általában a $(\mathbf{K}^s, \rho_\infty)$ $(1 \leq s \in \mathbf{N})$ metrikus térben

$$K_r(a) = K_r(a_1) \times \ldots \times K_r(a_s) \qquad (a = (a_1, ..., a_s) \in \mathbf{K}^s,\, r > 0),$$

ahol

$$K_r(a_i) = \{x \in \mathbf{K} : |x - a_i| < r\} \qquad (i = 1, ..., s)$$

az a_i koordináta $\mathbf{K}$-beli r sugarú környezetét jelöli.

v) A zárt halmazok definíciójára tekintettel nyilvánvaló, hogy az ekvivalens metrikákkal kapcsolatban a ii) megjegyzésben a topológiákra kapott egyenlőség igaz marad az egyes metrikákra nézve zárt halmazok által meghatározott halmazrendszerekre is. Ha tehát (X, ρ), (X, σ) olyan metrikus terek, hogy $\rho \sim \sigma$, akkor

$$\mathcal{C}_\rho(X) = \mathcal{C}_\sigma(X),$$

ahol általában egy (X,δ) metrikus tér esetén

$$\mathcal{C}_\delta(X) := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ zárt}\}.$$

Az 1.4. ix) megjegyzésre tekintettel ugyanez mondható el a kompakt halmazokat illetően is. Legyen tehát az előbbi (X,δ) metrikus teret tekintve

$$\mathcal{K}_\delta(X) := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ kompakt}\}.$$

Ekkor a fenti (X,ρ), (X,σ) metrikus terekre, ahol $\rho \sim \sigma$, az adódik, hogy

$$\mathcal{K}_\rho(X) = \mathcal{K}_\sigma(X).$$

Tehát a iii) megjegyzéshez hasonlóan a

$$(\mathbf{K}^n, \rho_p) \qquad (1 \le n \in \mathbf{N},\, 1 \le p \le +\infty)$$

metrikus terekben is egy $A \subset \mathbf{K}^n$ halmaz zártsága, ill. kompaktsága ugyanazt jelenti a ρ_p metrika szerint, mint a ρ_q metrika értelmében $(1 \le p,q \le +\infty)$.

vi) Az (X,ρ), (Y,σ) metrikus terek $(X\times Y, \rho\times\sigma)$ szorzatát véve valamilyen $0 < p \le +\infty$ mellett (ld. 1.2. vii) megjegyzés) egyszerűen adódik, hogy

$$\mathcal{T}_\rho(X) \times \mathcal{T}_\sigma(Y) \subset \mathcal{T}_{\rho\times\sigma}(X \times Y)$$

(és értelemszerűen ugyanez 2-nél több (véges sok) metrikus tér szorzata esetén). Tehát X-beli $A \subset X$ és Y-beli $B \subset Y$ nyílt halmazok $A \times B$ Descartes-szorzata a $\rho \times \sigma$ szorzatmetrika értelmében egy nyílt részhalmaza az $X \times Y$-nak. Speciálisan a $(\mathbf{K},\rho)$ terek „n-szeres szorzatát" véve (ahol $\rho(x,y) := |x-y| \quad (x,y \in \mathbf{K})$) adódnak a $(\mathbf{K}^n,\rho_p) \quad (1 \le n \in \mathbf{N},\, 0 < p \le +\infty)$ terek. Az egyszerűség kedvéért csak $n = 2$-re fogalmazva így azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{T}_\rho(\mathbf{K}) \times \mathcal{T}_\rho(\mathbf{K}) \subset \mathcal{T}_{\rho\times\rho}(\mathbf{K}^2) = \mathcal{T}_{\rho_p}(\mathbf{K}^2).$$

Könnyű ugyanakkor példával illusztrálni azt, hogy az előbbiekben „$\subset$" helyett nem írható egyenlőség. Világos ui., hogy pl.

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \in \mathcal{T}_{\rho_2}(\mathbf{K}^2),$$

de

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \notin \mathcal{T}_\rho(\mathbf{K}) \times \mathcal{T}_\rho(\mathbf{K}).$$

Különben ui. alkalmas $A, B \in \mathcal{T}_\rho(\mathbf{K})$ halmazokkal

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = A \times B.$$

Mivel $(0,1), (1,0) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ezért szükségszerűen $0 \in A$ és $0 \in B$. Tehát $(0,0) \in A \times B$, amiből a nem igaz $(0,0) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tartalmazás következne.

vii) Az előbbi megjegyzéshez kapcsolódva legyenek adottak az $X, Y \neq \emptyset$ halmazok. Ha $\mathcal{U} \subset X \times Y$, akkor az

$$\mathcal{U}^{(1)} := \{x \in X : \text{ van olyan } y \in Y, \text{ hogy } (x, y) \in \mathcal{U}\},$$
$$\mathcal{U}^{(2)} := \{z \in Y : \text{ van olyan } t \in X, \text{ hogy } (t, z) \in \mathcal{U}\}$$

halmazokat az $\mathcal{U}$ halmaz *vetületeinek* nevezzük. (Értelemszerűen definiáljuk 2-nél több (véges sok) nem üres halmaz Descartes-szorzata esetén a szorzatbeli halmazok vetületeit.) Nyilván $\emptyset^{(1)} = \emptyset^{(2)} = \emptyset$. Ha (X, ρ), (Y, σ) és $(X \times Y, \rho \times \sigma)$ a vi) megjegyzésbeli metrikus tereket, ill. azok szorzatát jelenti, akkor a $\rho \times \sigma$ szorzatmetrika értelmezéséből egyszerűen következik, hogy

$$\mathcal{U}^{(1)} \in \mathcal{T}_\rho(X),\ \mathcal{U}^{(2)} \in \mathcal{T}_\sigma(Y) \qquad \big(\mathcal{U} \in \mathcal{T}_{\rho\times\sigma}(X \times Y)\big).$$

Tehát szavakkal kifejezve ugyanez azt jelenti, hogy a szorzattér tetszőleges nyílt halmazainak a vetületei a megfelelő („tényező") térben nyílt halmazok. Így speciálisan tetszőleges $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $0 < p \leq +\infty$ paraméterekkel a $(\mathbf{K}^n, \rho_p)$ metrikus térben bármelyik $A \subset \mathbf{K}^n$ nyílt halmaz $A^{(i)}$ $(i = 1, ..., n)$ vetületei nyílt (szám)halmazok. Ha pl. az $(\mathbf{R}^n, \rho_\infty)$ teret tekintjük, és

$$\mathcal{U} := K_r(a) \qquad (a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n,\ r > 0),$$

akkor

$$\mathcal{U}^{(i)} = (a_i - r, a_i + r) \qquad (i = 1, ..., n).$$

Ugyanakkor pl. az $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$ metrikus térben az

$$\mathcal{U} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$$

halmaz (könnyen láthatóan) nem nyílt, de az

$$\mathcal{U}^{(1)} = \mathcal{U}^{(2)} = (-2, 2)$$

vetületei nyílt (valós-) számhalmazok (a „szokásos" $\mathbf{R}$-beli $|x - y|$ $(x, y \in \mathbf{R})$ metrikára nézve). Mindez azzal a triviális észrevétellel kapcsolatos, hogy általában egy $\mathcal{U} \subset X \times Y$ halmazra nem igaz az $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(1)} \times \mathcal{U}^{(2)}$ előállítás.

viii) Mutassuk meg, hogy minden (X, ρ) metrikus térben

$$\overline{A} = A \cup A' \qquad (A \subset X)$$

(azaz az A halmaz lezárásának az elemei pontosan az A halmaznak az elemei vagy az A torlódásai pontjai). Egyrészt tudjuk ui., hogy $A \subset \overline{A}$. Másrészt, ha lenne olyan $a \in A'$, amelyre $a \notin \overline{A}$, akkor nyilván $a \in X \setminus \overline{A}$. Az $X \setminus \overline{A}$ halmaz nyílt, következésképpen egy alkalmas $K(a)$ környezetre

$$K(a) \subset X \setminus \overline{A} \subset X \setminus A,$$

amiből

$$A \subset X \setminus K(a)$$

adódik. Így $K(a) \cap A = \emptyset$, ami ellentmond annak, hogy $a \in A'$. Tehát $a \in \overline{A}$, ezért $A' \subset \overline{A}$.

Ezzel beláttuk, hogy $A \cup A' \subset \overline{A}$. Fordítva, ha $b \in \overline{A}$ és $b \notin A \cup A'$, akkor $b \notin A$ és $b \notin A'$, így egy alkalmas $K(b)$ környezettel $K(b) \cap A = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy $A \subset X \setminus K(b)$. Mivel az $X \setminus K(b)$ halmaz zárt, ezért innen és a halmaz lezárásának az értelmezéséből azt kapjuk, hogy

$$\overline{A} \subset X \setminus K(b).$$

Ez $b \in K(b)$ és a feltételezett $b \in \overline{A}$ tartalmazás miatt nyilván lehetetlenség.

ix) Legyen (X, ρ) metrikus tér, $A \subset X$, és az $a \in A$ elemről tegyük fel, hogy $a \notin A'$. Ekkor van olyan $K(a)$ környezet, amelyre

$$K(a) \cap A = \{a\}.$$

Ezért azt mondjuk ekkor, hogy az a elem *diszkrét pontja* (vagy más szóval *izolált pontja*) az A halmaznak. Ha viszont $b \in \overline{A}$, akkor tetszőleges $K(b)$ környezetre

$$K(b) \cap A \neq \emptyset.$$

Ui. az előző megjegyzést figyelembe véve vagy $b \in A$, amikor is $b \in K(b) \cap A$, vagy pedig $b \in A'$, amikor meg $\big(K(b) \setminus \{b\}\big) \cap A \neq \emptyset$ is igaz. Az ilyen b-re ezért azt mondjuk, hogy az A halmaz *érintkezési pontja.*

x) Lássuk be, hogy ha az (X, ρ) metrikus térben adottak az „egymásba skatulyázott" $\emptyset \neq A_n \quad (n \in \mathbf{N})$ kompakt halmazok, azaz

$$A_{n+1} \subset A_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor a $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ metszethalmaz is egy nem üres, kompakt halmaz. Legyen ui. $x_n \in A_n$ $(n \in \mathbf{N})$ tetszőlegesen választva, ekkor $A_n \subset A_0$ és az A_0 halmaz kompaktsága miatt van olyan (ν_n) indexsorozat, amellyel az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens, továbbá $\alpha := \lim(x_{\nu_n}) \in A_0$. Mivel tetszőleges $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$x_{\nu_n} \in A_{\nu_n} \subset A_N \qquad (n \in \mathbf{N},\, \nu_n \geq N),$$

és (ld. 1.7.7. Tétel) A_N zárt, ezért az 1.7.6. Tétel miatt $\alpha \in A_N$. Következésképpen $\alpha \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$.

Ezzel beláttuk, hogy $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. Legyen most

$$y := (y_n) : \mathbf{N} \to \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n,$$

ekkor nyilván $y : \mathbf{N} \to A_0$ is igaz. Az A_0 halmaz kompaktsága alapján egy alkalmas $\nu^{(0)}$ indexsorozattal az $y \circ \nu^{(0)}$ részsorozat konvergens, és

$$\beta := \lim y \circ \nu^{(0)} \in A_0.$$

Ugyanakkor $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subset A_1$ miatt

$$y \circ \nu^{(0)} : \mathbf{N} \to A_1,$$

így az A_1 halmaz kompaktságára hivatkozva van olyan $\nu^{(1)}$ indexsorozat is, hogy az

$$\left(y \circ \nu^{(0)}\right) \circ \nu^{(1)} = y \circ \left(\nu^{(0)} \circ \nu^{(1)}\right)$$

részsorozat is konvergens, és (ld. 1.7.6., 1.7.7. Tételek)

$$\beta = \lim y \circ \left(\nu^{(0)} \circ \nu^{(1)}\right) \in A_1.$$

Ezt az eljárást folytatva (ld. teljes indukció) olyan $\nu^{(n)}$ indexsorozatokat kapunk, hogy az

$$y \circ \left(\nu^{(0)} \circ \ldots \circ \nu^{(n)}\right) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

részsorozatok valamennyien konvergensek, és

$$\beta = \lim y \circ \left(\nu^{(0)} \circ \ldots \circ \nu^{(n)}\right) \in A_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Tehát $\beta \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. Ha most már $\nu : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ az az indexsorozat, amelyre

$$\nu_n := \left(\nu^{(0)} \circ \ldots \circ \nu^{(n)}\right)(n) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(azaz legyen a ν indexsorozat n-edik tagja a $\nu^{(0)} \circ \ldots \circ \nu^{(n)}$ indexsorozat n-edik tagja $(n \in \mathbf{N})$), akkor világos, hogy az y sorozat $y \circ \nu$ résszorozata minden $n \in \mathbf{N}$ esetén részsorozata a konvergens

$$y \circ \left(\nu^{(0)} \circ \ldots \circ \nu^{(n)}\right)$$

sorozatnak is. Ezért $y \circ \nu$ konvergens, és

$$\beta = \lim y \circ \left(\nu^{(0)} \circ \ldots \circ \nu^{(n)}\right) = \lim y \circ \nu \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezzel megmutattuk, hogy a kiindulási $y : \mathbf{N} \to \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ sorozatnak van $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$-ben konvergens részsorozata, más szóval a $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ metszethalmaz kompakt.

xi) Emlékeztetünk a valós számok axiómarendszere kapcsán megismert Cantor-axiómára: legyen (I_n) egymásba skatulyázott zárt intervallumoknak (egy egyébként tetszőleges) sorozata. Ekkor $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Speciálisan, ha az itt szereplő intervallumok korlátosak is, azaz minden $I_n \quad (n \in \mathbf{N})$ kompakt, akkor a Cantor-axióma az előző megjegyzésben szereplő állítás következménye. Ezért az említett megjegyzés tekinthető a Cantor-axióma egyfajta absztrakt változatának.

xii) Tegyük fel, hogy az $A \subset X$ halmaz kompakt az (X, ρ) metrikus térben, $B \subset A$ pedig zárt részhalmaza az A-nak. Ekkor a B halmaz is kompakt. Ti. legyen $(x_n) : \mathbf{N} \to B$ egy tetszőleges sorozat. Mivel egyúttal $(x_n) : \mathbf{N} \to A$, ezért az A kompaktsága miatt egy (ν_n) indexsorozattal az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens, és $\lim(x_{\nu_n}) \in A$. Nyilvánvaló ugyanakkor, hogy egyúttal $(x_{\nu_n}) : \mathbf{N} \to B$, ezért a B zártsága alapján (ld. 1.7.6. Tétel) $\lim(x_{\nu_n}) \in B$ is igaz, így a B kompakt.

xiii) Mutassuk meg, hogy tetszőleges (X, ρ) metrikus térben igaz a kompaktságra vonatkozó alábbi ekvivalencia:

az $A \subset X$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha bármilyen $B \subset A$ végtelen részhalmazára $B' \cap A \neq \emptyset$.

(Más szóval a B-nek van A-beli torlódási pontja. Ha az A véges halmaz, akkor nem lévén végtelen részhalmaza, a most mondott feltétel automatikusan teljesül, következésképpen – amint azt korábban már említettük – az A halmaz kompakt.)

Tegyük fel tehát először azt, hogy az A kompakt, és legyen a $B \subset A$ egy végtelen részhalmaza az A-nak. Ekkor van olyan $(b_n) : \mathbf{N} \to B$ sorozat, hogy

$$(*) \qquad b_n \neq b_m \qquad (n, m \in \mathbf{N},\ n \neq m).$$

Mivel egyúttal $(b_n) : \mathbf{N} \to A$, ezért egy alkalmas (ν_n) indexsorozattal létezik az

$$\alpha := \lim(b_{\nu_n}) \in A$$

határérték. A $(*)$ injektivitás miatt nyilván az is feltehető, hogy

$$b_{\nu_n} \neq \alpha \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezért az 1.7.4. Tétel (és az utána tett megjegyzés) szerint $\alpha \in B'$.

Fordítva, most induljunk ki abból, hogy az A tetszőleges $B \subset A$ végtelen részhalmazára $B' \cap A \neq \emptyset$, és legyen $(x_n) : \mathbf{N} \to A$. Ha itt az $\mathcal{R}_{(x_n)}$ értékkészlet véges, akkor egy alkalmas $a \in A$ elemmel és egy (ν_n) indexsorozattal

$$x_{\nu_n} = a \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ez azt jelenti, hogy az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens, és

$$a = \lim(x_{\nu_n}) \in A.$$

Ha a $B := \mathcal{R}_{(x_n)}$ halmaz végtelen, akkor van olyan $\alpha \in B'$, amelyre $\alpha \in A$, így

$$\Big(K_{1/m}(\alpha) \setminus \{\alpha\}\Big) \cap \mathcal{R}_{(x_n)} \neq \emptyset \qquad (1 \leq m \in \mathbf{N}).$$

Legyen

$$x_{\nu_m} \in \Big(K_{1/m}(\alpha) \setminus \{\alpha\}\Big) \cap \mathcal{R}_{(x_n)} \qquad (1 \leq m \in \mathbf{N}),$$

ekkor nyilván az is feltehető, hogy

$$\nu_m < \nu_{m+1} \qquad (1 \leq m \in \mathbf{N}),$$

azaz, hogy a (ν_n) sorozat indexsorozat. Mivel

$$0 < \rho(x_{\nu_m}, \alpha) < \frac{1}{m} \to 0 \qquad (m \to \infty),$$

ezért az (x_{ν_m}) sorozat konvergens, és

$$\lim(x_{\nu_m}) = \alpha \in A.$$

Összefoglalva azt kaptuk ezzel, hogy az A kompakt halmaz.

xiv) Tekintsük az (X, ρ), (Y, σ) metrikus tereket, és valamilyen $0 < p \leq +\infty$ mellett vegyük az

$$(X \times Y, \rho \times \sigma)$$

szorzatteret (ld. 1.2. vii) megjegyzés). Ekkor

- ha $A \subset X$, $B \subset Y$ kompakt halmazok (a ρ, ill. a σ metrika értelmében), akkor az $A \times B$ halmaz is kompakt (a $\rho \times \sigma$ metrika szerint);
- ha $\mathcal{U} \subset X \times Y$ kompakt halmaz (a $\rho \times \sigma$ metrika szerint), akkor az $\mathcal{U}$ halmaz $\mathcal{U}^{(1)} \subset X, \mathcal{U}^{(2)} \subset Y$ vetületei (ld. vii) megjegyzés) is kompakt halmazok (a ρ, ill. a σ metrikára nézve);
- speciálisan a $(\mathbf{K}^s, \rho_p)$ $(1 \leq s \in \mathbf{N},\, 1 \leq p \leq +\infty)$ metrikus térben bármelyik kompakt $\mathcal{U} \subset \mathbf{K}^s$ halmaz minden vetülete kompakt (szám-)halmaz, ill. $\mathbf{K}$-beli kompakt $A_i \subset \mathbf{K}$ $(i = 1, ..., s)$ halmazok

  $$A_1 \times \ldots \times A_s \subset \mathbf{K}^s$$

  Descartes-szorzata kompakt a ρ_p metrika szerint.

Ha ui.
$$(z_n) = (x_n, y_n) : \mathbf{N} \to A \times B,$$
akkor
$$(x_n) : \mathbf{N} \to A \;\;,\;\; (y_n) : \mathbf{N} \to B.$$
Az A kompaktsága miatt van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy létezik az
$$a := \lim(x_{\nu_n}) \in A$$
határérték. A B kompaktságát figyelembe véve viszont kapunk olyan (μ_n) indexsorozatot is, amellyel a
$$b := \lim(y_{\nu_{\mu_n}}) \in B$$
határérték is létezik. Mivel egyúttal $a = \lim(x_{\nu_{\mu_n}})$, ezért
$$\lim(z_{\nu_{\mu_n}}) = \Big(\lim(x_{\nu_{\mu_n}}), \lim(y_{\nu_{\mu_n}})\Big) = (a, b) \in A \times B,$$
azaz az $A \times B$ halmaz kompakt.

Fordítva, ha $\mathcal{U} \subset X \times Y$ kompakt és
$$(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{U}^{(1)},$$
akkor egy alkalmas
$$(y_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{U}^{(2)}$$
sorozattal
$$(x_n, y_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{U}$$
(és ugyanez „fordítva", ha egy $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{U}^{(2)}$ sorozatból indulunk ki). Ezért van olyan (γ_n) indexsorozat, hogy létezik a
$$\lim(x_{\gamma_n}, y_{\gamma_n}) = (u, v) \in \mathcal{U}$$
határérték, és
$$u = \lim(x_{\gamma_n}) \in \mathcal{U}^{(1)}, \;\; v = \lim(y_{\gamma_n}) \in \mathcal{U}^{(2)}.$$
Tehát az $\mathcal{U}^{(1)}, \mathcal{U}^{(2)}$ vetületek kompakt halmazok.

xv) Az 1.7.10. Tételből speciálisan, az
$$X := \mathbf{R} \;\;,\;\; \rho(x, y) := |x - y| \;\;\; (x, y \in \mathbf{R}) \;\;,\;\; A := [a, b] \;\;\; (a, b \in \mathbf{R},\, a < b)$$
esetben a következőt kapjuk: bárhogyan is adunk meg olyan $\mathbf{R}$-beli nyílt halmazokat, amelyek együttesen, tehát az egyesítésük, lefedi az $[a, b]$ intervallumot, akkor ezek közül a nyílt halmazok közül véges sok is lefedi az $[a, b]$-t (*Borel-lefedési tétel*).

xvi) A xiii) megjegyzést is figyelembe véve a kompaktságot illetően az alábbi ekvivalens megfogalmazásokat kapjuk:

- az A halmaz minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges lefedés;
- az A halmaz minden végtelen részhalmazának van A-beli torlódási pontja;
- tetszőleges A-beli sorozatnak van A-ban konvergens részsorozata.

2. fejezet

Folytonos leképezések

Bevezetésképpen idézzük fel azt, hogy mit is értettünk egy $f \in \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ függvény valamely $a \in \mathcal{D}_f$ pontbeli folytonosságán. Nevezetesen azt mondtuk, hogy az f folytonos az a-ban, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, amellyel

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D}_f,\ |x - a| < \delta).$$

Világos, hogy ebből a szempontból valójában megint csak nem játszik szerepet a $\mathbf{K}$-beli algebrai struktúra (ld. $f(x) - f(a)$ és $x - a$), ill. az $\mathbf{R}$-beli rendezéssel kapcsolatos abszolút érték fogalma, hanem csupán a $\mathbf{K}$-beli távolságfogalom: az $f(x)$ és az $f(a)$, ill. az x és az a távolsága. Következésképpen kézenfekvőnek látszik a folytonosság alábbi absztrakt értelmezése.

Legyenek ehhez adottak az (X, ρ), (Y, σ) metrikus terek, és tekintsük az

$$f \in X \to Y$$

függvényt. Azt mondjuk, hogy az f *folytonos az* $a \in \mathcal{D}_f$ *pontban,* ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$\sigma\Big(f(x), f(a)\Big) < \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D}_f,\ \rho(x, a) < \delta).$$

Mindezt az $f \in \mathcal{C}\{a\}$ szimbólummal fogjuk jelölni. Ha az előbbi definícióban megkövetelt tulajdonság bármely $a \in \mathcal{D}_f$ helyen igaz, akkor röviden azt mondjuk, hogy az f *folytonos,* és erre az $f \in \mathcal{C}$ jelölést használjuk.

Világos, hogy a leképezések folytonosságának ez a definíciója a bevezetésben idézett „elemi" folytonosságfogalom kiterjesztése absztrakt (metrikus terek közötti) függvényekre. Az is nyilvánvaló, hogy a pontbeli folytonosság egy ekvivalens megfogalmazása a környezetek „nyelvén" a következő: $f \in \mathcal{C}\{a\}$ akkor és csak akkor igaz, ha bármely $K(f(a)) \subset Y$ környezethez megadható olyan $k(a) \subset X$ környezet, hogy

$$f[k(a) \cap \mathcal{D}_f] \subset K(f(a)).$$

Ennek alapján nem lesz nehéz belátni a függvények folytonosságára vonatkozó alábbi ekvivalens megfogalmazás érvényességét.

2.1. Tétel. *Tetszőleges* (X,ρ), (Y,σ) *metrikus terek esetén az* $f \in X \to Y$ *függvény akkor és csak akkor folytonos, ha minden* $Z \subset Y$ *nyílt halmazhoz van olyan* $A \subset X$ *nyílt halmaz, hogy* $f^{-1}[Z] = A \cap \mathcal{D}_f$. *Speciálisan, egy* $f : X \to Y$ *függvény akkor és csak akkor folytonos, ha minden* $Z \subset Y$ *nyílt halmaz* $f^{-1}[Z]$ *ősképe nyílt.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az $f \in X \to Y$ függvény folytonos, és $Z \subset Y$ nyílt halmaz. Nyilván feltehető, hogy $Z \neq \emptyset$, hiszen

$$f^{-1}[\emptyset] = \emptyset = \emptyset \cap \mathcal{D}_f,$$

és $A := \emptyset$ nyílt halmaz. Legyen valamilyen $a \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(a) \in Z$ (azaz $a \in f^{-1}[Z]$), ekkor a Z nyíltsága miatt egy alkalmas $K(f(a))$ környezettel

$$K(f(a)) \subset Z.$$

Mivel $f \in \mathcal{C}\{a\}$, ezért van olyan $k(a) \subset X$ környezet, amellyel

$$f[k(a) \cap \mathcal{D}_f] \subset K(f(a)),$$

más szóval

$$k(a) \cap \mathcal{D}_f \subset f^{-1}[K(f(a))] \subset f^{-1}[Z].$$

Az 1.7.1. Tételre hivatkozva a $k(a)$ $(a \in \mathcal{D}_f)$ környezetek nyíltsága alapján azt mondhatjuk, hogy az

$$A := \bigcup_{a \in f^{-1}[Z]} k(a)$$

halmaz nyílt. Ugyanakkor világos, hogy

$$f^{-1}[Z] = A \cap \mathcal{D}_f.$$

Fordítva, ha azt tudjuk, hogy tetszőleges $Z \subset Y$ nyílt halmazra valamilyen $A \subset X$ nyílt halmazzal $f^{-1}[Z] = A \cap \mathcal{D}_f$, akkor minden $a \in \mathcal{D}_f$ és $Z := K(f(a))$ esetén is egy alkalmas $A \subset X$ nyílt halmazzal

$$f^{-1}[K(f(a))] = A \cap \mathcal{D}_f.$$

Mivel $a \in f^{-1}[K(f(a))]$, ezért egyúttal $a \in A$ is igaz. Van tehát olyan $k(a)$ környezet, amelyre $k(a) \subset A$. Így

$$k(a) \cap \mathcal{D}_f \subset f^{-1}[K(f(a))],$$

azaz

$$f[k(a) \cap \mathcal{D}_f] \subset K(f(a)).$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $f \in \mathcal{C}\{a\}$. Mivel itt $a \in \mathcal{D}_f$ tetszőleges volt, ezért $f \in \mathcal{C}$.

Ha a fentiekben $f : X \to Y$, tehát $\mathcal{D}_f = X$, akkor az előbbi Z halmazra

$$f^{-1}[Z] = A \cap \mathcal{D}_f = A \cap X = A$$

nyílt halmaz. ∎

A továbbiakban (külön említés nélkül) (X, ρ), (Y, σ) metrikus tereket jelölnek, és az

$$f \in X \to Y$$

függvényekre vonatkozóan fogalmazunk meg a folytonossággal kapcsolatos állításokat. Ezek közül kiemelt fontosság jutott már az $f \in \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ függvényekkel kapcsolatban is az ún. átviteli elvnek.

2.2. Tétel (átviteli elv). *Legyen* $f \in X \to Y$, $a \in \mathcal{D}_f$. *Ekkor* $f \in \mathcal{C}\{a\}$ *azzal ekvivalens, hogy tetszőleges* $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f$, $\lim(x_n) = a$ *sorozatra az* $\big(f(x_n)\big)$ *sorozat konvergens, és*

$$\lim \big(f(x_n)\big) = f(a).$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $f \in \mathcal{C}\{a\}$. Ekkor az $A := f(a)$-nak bármilyen $K(A) \subset Y$ környezetéhez van olyan $k(a) \subset X$ környezet, hogy

$$f(x) \in K(A) \qquad \big(x \in k(a) \cap \mathcal{D}_f\big).$$

Ha (x_n) egy, a tételben szereplő sorozat, akkor az előbbi $k(a)$ környezethez megadható olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, amellyel

$$x_n \in k(a) \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Következésképpen

$$f(x_n) \in K(A) \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Mindez azt jelenti, hogy az $\big(f(x_n)\big)$ sorozatnak van határértéke, és $\lim (f(x_n)) = f(a)$.

Most induljunk ki abból, hogy bármilyen $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f$, $\lim(x_n) = a$ sorozat esetén az $\big(f(x_n)\big)$ sorozatnak van határértéke, és $\lim\big(f(x_n)\big) = A := f(a)$. Indirekt úton tegyük fel, hogy $f \notin \mathcal{C}\{a\}$. Ekkor egy alkalmas $K(A) \subset Y$ környezettel bármilyen $X \supset k(a)$-t is választunk, valamilyen $x \in k(a) \cap \mathcal{D}_f$ elemmel azt kapjuk, hogy $f(x) \notin K(A)$. Tehát speciálisan tetszőleges $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett a

$$k(a) := k_{1/n}(a)$$

választással egy olyan $x_n \in k_{1/n}(a) \cap \mathcal{D}_f$ elem adódik, amelyre $f(x_n) \notin K(A)$. Mivel

$$\rho(x_n, a) < 1/n \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

ezért $\lim(x_n) = a$. Így a feltételek miatt $\lim\big(f(x_n)\big) = f(a)$. Ez azt jelenti, hogy az előbbi $K(A)$ környezethez lennie kell olyan $M \in \mathbf{N}$ küszöbindexnek, amellyel

$$f(x_n) \in K(A) \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Ez nyilván ellentmond annak, hogy $f(x_n) \notin K(A) \quad (0 < n \in \mathbf{N})$. ∎

Az előbbi átviteli elv felhasználásával a $\mathbf{K} \to \mathbf{K}$ (egyváltozós valós vagy komplex) függvényekhez hasonlóan jutunk az alábbi állításhoz:

2.3. Tétel. *Az eddigi $(X, \rho), (Y, \sigma)$ metrikus terek mellett legyen adott a (Z, δ) metrikus tér is, és tegyük fel, hogy a*

$$g \in X \to Y,\ f \in Y \to Z$$

függvényekre a következők teljesülnek: $a \in \mathcal{D}_g$, $g(a) \in \mathcal{D}_f$, és $g \in \mathcal{C}\{a\}$, $f \in \mathcal{C}\{g(a)\}$. Ekkor az

$$f \circ g \in X \to Z$$

függvény folytonos az a-ban, azaz $f \circ g \in \mathcal{C}\{a\}$.

Bizonyítás. Legyen

$$(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_{f \circ g}$$

olyan sorozat, amelyre létezik a $\lim(x_n) = a$ határérték. Ekkor egyúttal

$$(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_g,$$

így a $g \in \mathcal{C}\{a\}$ feltétel és a 2.2. Tétel miatt

$$\lim\big(g(x_n)\big) = g(a).$$

Mivel

$$\big(g(x_n)\big) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f,$$

ezért az $f \in \mathcal{C}\{g(a)\}$ folytonosság és a 2.2. Tétel alapján

$$\lim\big(f(g(x_n))\big) = \lim\big((f \circ g)(x_n)\big) = f(g(a)) = (f \circ g)(a).$$

Ismét csak a 2.2. Tétel szerint ez pontosan azt jelenti, hogy $f \circ g \in \mathcal{C}\{a\}$. ∎

2.4. Tétel (Weierstrass). *Ha az $f \in X \to Y$ függvény folytonos, és a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány kompakt, akkor az $\mathcal{R}_f$ értékkészlet is kompakt. Speciálisan, ha itt*

$$f \in X \to \mathbf{R},$$

akkor az $\mathcal{R}_f$ értékkészletnek van legkisebb és legnagyobb eleme.

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy véve tetszőleges $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{R}_f$ sorozatot, ehhez létezik olyan (ν_n) indexsorozat, amellyel az (y_{ν_n}) részsorozat konvergens, és $\lim(y_{\nu_n}) \in \mathcal{R}_f$. Az $y_n \in \mathcal{R}_f \quad (n \in \mathbf{N})$ feltételezés miatt alkalmas $x_n \in \mathcal{D}_f$ választással

$$y_n = f(x_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel $\mathcal{D}_f$ kompakt, ezért van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens, és

$$a := \lim(x_{\nu_n}) \in \mathcal{D}_f.$$

Ugyanakkor $f \in \mathcal{C}\{a\}$, így (ld. 2.1. Tétel) létezik a

$$\lim(y_{\nu_n}) = \lim\big(f(x_{\nu_n})\big) = f(a) \in \mathcal{R}_f$$

határérték.

Ha $f \in X \to \mathbf{R}$, azaz $\mathcal{R}_f \subset \mathbf{R}$, akkor az 1.7.7. Tétel alapján az $\mathcal{R}_f$ halmaz korlátos és zárt. Legyen

$$m := \inf \mathcal{R}_f, \ M := \sup \mathcal{R}_f,$$

ekkor $\mathcal{R}_f$ korlátossága miatt $m, M \in \mathbf{R}$. Mutassuk meg, hogy $m, M \in \mathcal{R}_f$. Valóban, a szuprémum tulajdonságait felhasználva van olyan $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{R}_f$ sorozat, amelyre

$$M - \frac{1}{n} < y_n \leq M \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen $\lim(y_n) = M$. Mivel $y_n \in \mathcal{R}_f$, ezért egy alkalmas $x_n \in \mathcal{D}_f$ helyen

$$y_n = f(x_n) \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

A $\mathcal{D}_f$ kompaktsága miatt viszont megadható olyan (ν_n) indexsorozat, hogy létezik az

$$a := \lim(x_{\nu_n}) \in \mathcal{D}_f$$

határérték. Továbbá $f \in \mathcal{C}\{a\}$, így az átviteli elv (ld. 2.2. Tétel) és az 1.7.6. Tétel szerint

$$M = \lim(y_n) = \lim(y_{\nu_n}) = \lim\big(f(x_{\nu_n})\big) = f(a) \in \mathcal{R}_f.$$

Az $m \in \mathcal{R}_f$ állítás ugyanígy adódik. ∎

2.5. Tétel. *Legyen az $f \in X \to Y$ függvény folytonos, invertálható, és az értelmezési tartománya kompakt. Ekkor az f^{-1} inverzfüggvény is folytonos.*

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy tetszőleges $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ esetén

$$f^{-1} \in \mathcal{C}\{y\}.$$

Tegyük fel indirekt módon, hogy ez nem igaz, azaz van olyan

$$y \in \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f,$$

amelyre $f^{-1} \notin \mathcal{C}\{y\}$. Ezért létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy bármilyen $\delta > 0$ esetén egy alkalmas $z \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$, $\sigma(z, y) < \delta$ mellett

$$\rho\Big(f^{-1}(z), f^{-1}(y)\Big) \geq \varepsilon.$$

Speciálisan minden $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén valamilyen $z_n \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$, $\sigma(z_n, y) < 1/n$ helyen

$$\rho\Big(f^{-1}(z_n), f^{-1}(y)\Big) \geq \varepsilon.$$

Jegyezzük meg, hogy $\lim(z_n) = y$. Legyen

$$x_n := f^{-1}(z_n) \in \mathcal{D}_f \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

ekkor a $\mathcal{D}_f$ kompaktsága alapján egy (ν_n) indexsorozattal létezik a

$$\xi := \lim{(x_{\nu_n})} \in \mathcal{D}_f$$

határérték. Továbbá a 2.2. Tétel miatt

$$f(\xi) = \lim\Big(f(x_{\nu_n})\Big) = \lim(z_{\nu_n}) = \lim(z_n) = y,$$

amiből az f invertálhatóságát figyelembe véve $f^{-1}(y) = \xi$ következik. Mindezt összegezve azt kaptuk, hogy

$$\varepsilon \leq \rho\Big(f^{-1}(z_{\nu_n}), f^{-1}(y)\Big) = \rho(x_{\nu_n}, \xi) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

ami nyilván nem lehetséges. ■

A következő tétel megfogalmazásához vezessük be az egyenletes folytonosság fogalmát. Ehhez az alábbi módon juthatunk el. Tekintsünk egy folytonos $f \in X \to Y$ függvényt. Ekkor bármilyen $a \in \mathcal{D}_f$ esetén $f \in \mathcal{C}\{a\}$, következésképpen minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta_a^{(\varepsilon)} > 0$ szám, hogy

$$\sigma\Big(f(x), f(a)\Big) < \varepsilon \qquad \Big(x \in \mathcal{D}_f,\ \rho(x, a) < \delta_a^{(\varepsilon)}\Big).$$

Legyen pl. az

$$X := Y := \mathbf{R},\ \rho(x,y) := \sigma(x,y) := |x-y| \qquad (x,y \in \mathbf{R})$$

esetben

$$f(x) := \frac{1}{x} \qquad (0 < x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor minden $a > 0$ és $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $\delta_a^{(\varepsilon)} > 0$ mellett (könnyen ellenőrizhetően)

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{xa} < \varepsilon \qquad (x > 0, |x-a| < \delta_a^{(\varepsilon)}).$$

Speciálisan az $x := a + \delta_a^{(\varepsilon)}/2$ választással – feltéve, hogy $a\cdot\varepsilon < 1$ –

$$\frac{\delta_a^{(\varepsilon)}}{2xa} = \frac{\delta_a^{(\varepsilon)}}{a(2a+\delta_a^{(\varepsilon)})} < \varepsilon \Longrightarrow 0 < \delta_a^{(\varepsilon)} < \frac{2a^2\cdot\varepsilon}{1-a\cdot\varepsilon} \to 0 \qquad (a \to 0).$$

Innen világos, hogy a jelen példában (adott $\varepsilon > 0$ mellett) nincs olyan $\delta > 0$, amellyel minden $a \in \mathcal{D}_f$ és $x \in \mathcal{D}_f$, $|x-a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Különösen fontosak azok a folytonos függvények, amelyekre akármilyen $\varepsilon > 0$ esetén van olyan „egyenletes" (csak ε-tól függő) $\delta > 0$, hogy minden $\mathcal{D}_f \ni a$-ra

$$\sigma\Big(f(x), f(a)\Big) < \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D}_f,\ \rho(x,a) < \delta).$$

Ezzel kapcsolatos az egyenletes folytonosság definíciója: az $f \in X \to Y$ függvény *egyenletesen folytonos,* ha bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$\sigma\Big(f(x), f(t)\Big) < \varepsilon \qquad (x,t \in \mathcal{D}_f,\ \rho(x,t) < \delta).$$

Világos, hogy ekkor az f folytonos is, de az előző példa azt mutatja, hogy mindez „megfordítva" nem igaz. Ugyanakkor fennáll az alábbi tétel.

2.6. Tétel (Heine). *Tegyük fel, hogy az $f \in X \to Y$ függvény folytonos, és a $\mathcal{D}_f$ halmaz kompakt. Ekkor az f egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Indirekt módon induljunk ki abból, hogy valamilyen $\varepsilon > 0$ mellett bármilyen $\delta > 0$ esetén vannak olyan $x, t \in \mathcal{D}_f$ elemek, amelyekre ugyan $\rho(x,t) < \delta$ igaz, de

$$\sigma\Big(f(x), f(t)\Big) \geq \varepsilon.$$

Speciálisan tetszőleges $1 \leq n \in \mathbf{N}$ indexhez megadhatók olyan $x_n, t_n \in \mathcal{D}_f$ elemek, hogy $\rho(x_n, t_n) < 1/n$ és

$$\sigma\Big(f(x_n), f(t_n)\Big) \geq \varepsilon \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Kaptunk tehát egy-egy

$$(x_n),\ (t_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f$$

sorozatot. A $\mathcal{D}_f$ kompaktsága miatt van olyan (ν_n) indexsorozat, amellyel az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens, és

$$a := \lim (x_{\nu_n}) \in \mathcal{D}_f.$$

Hasonlóan, van olyan (μ_n) indexsorozat is, hogy a $(t_{\nu_{\mu_n}})$ részsorozat is konvergens, és

$$b := \lim (t_{\nu_{\mu_n}}) \in \mathcal{D}_f.$$

Mivel

$$\rho(x_{\nu_{\mu_n}}, t_{\nu_{\mu_n}}) < \frac{1}{\nu_{\mu_n}} \leq \frac{1}{n} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

ezért $\lim(x_{\nu_{\mu_n}}) = \lim(x_{\nu_n}) = a$ alapján (ld. 1.4. iv) megjegyzés)

$$0 \leq \rho(a,b) = \lim \Big(\rho(x_{\nu_{\mu_n}}, t_{\nu_{\mu_n}})\Big) \leq \lim \left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Tehát $\rho(a,b) = 0$, azaz $a = b$, és így az átviteli elv (ld. 2.2. Tétel) szerint

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\nu_{\mu_n}}) = \lim_{n\to\infty} f(t_{\nu_{\mu_n}}),$$

amiből (ld. 1.4. iv) megjegyzés)

$$\lim_{n\to\infty} \sigma\Big(f(x_{\nu_{\mu_n}}), f(t_{\nu_{\mu_n}})\Big) = \sigma\Big(f(a), f(a)\Big) = 0$$

következik. Ez nyilván ellentmond az indirekt feltevésbeli $\sigma\Big(f(x_n), f(t_n)\Big) \geq \varepsilon \quad (n \in \mathbf{N})$ egyenlőtlenségnek. ■

A klasszikus Bolzano-tétel absztrakt megfelelőjének a megfogalmazásához vezessük be a következő fogalmat. Az (X,ρ) metrikus tér $\emptyset \neq A \subset X$ részhalmazát *nem összefüggőnek* nevezzük, ha $A = B \cup C$, ahol

$$B \neq \emptyset,\ C \neq \emptyset,\ B \cap C = \emptyset,$$

és

$$B = A \cap D,\ C = A \cap E$$

alkalmas D, $E \subset X$ nyílt halmazokkal.

Ha az előbbi A halmazra mindez nem igaz, akkor A-t *összefüggőnek* nevezzük. Világos, hogy nyílt A halmaz esetén az A nem összefüggőségének a definíciójában feltehető, hogy a B, C halmazok is nyíltak (és ekkor nincs szükség a D, E halmazokra).

2.7. Lemma. *Legyen* $X := \mathbf{R}$, $\rho(x,y) := |x-y|$ $(x,y \in \mathbf{R})$. *Ekkor egy* $A \subset \mathbf{R}$ *halmaz akkor és csak akkor összefüggő, ha az* A *(valódi) intervallum.*

Bizonyítás. Lássuk be először, hogy minden (valódi) intervallum összefüggő. Ui. különben lenne olyan $A \subset \mathbf{R}$ (valódi) intervallum, amelyre $A = B \cup C$, ahol

$$B \neq \emptyset,\ C \neq \emptyset,\ B \cap C = \emptyset,$$

és

$$B = A \cap D,\ C = A \cap E$$

alkalmas D, $E \subset \mathbf{R}$ nyílt halmazokkal. Legyen $b \in B$, $c \in C$, ekkor $B \cap C = \emptyset$ miatt $b \neq c$, pl. $b < c$. Mivel A intervallum és $b, c \in A$, ezért $[b,c] \subset A$. Továbbá $b \in D$ és D nyílt, ezért alkalmas $b < u < c$ esetén $[b,u] \subset D \cap A = B$. Hasonlóan, van olyan $b < v < c$, hogy $[v,c] \subset C$. Nyilván $u < v$, legyen

$$\beta := \sup\{u \in (b,c) : [b,u] \subset B\}.$$

Ekkor $b < \beta \leq v$ és $\beta \in A$. Ha $\beta \in B$, akkor $[b,\beta] \subset B$, és az előbbi gondolatmenettel kapnánk olyan $w > \beta$ számot, amellyel $[b,w] \subset B$. Ez nyilván ellentmond a β definíciójának. Ezért csak $\beta \in C$ lehetséges, amiből meg az előbbiekhez hasonlóan olyan $z < \beta$ számot kapnánk, hogy $[z,c] \subset C$. A szuprémum tulajdonságai alapján viszont egy alkalmas $z < d < \beta$ számmal $[b,d] \subset B$. Ezért $[z,d] \subset B \cap C = \emptyset$, ami nem lehet. Így $\beta \notin B \cup C = A$, és ez ellentmond annak, hogy $\beta \in A$.

Most lássuk be azt, hogy minden $A \subset \mathbf{R}$ összefüggő halmaz intervallum. Legyen ui.

$$\xi := \inf A,\ \eta := \sup A.$$

Megmutatjuk, hogy $(\xi,\eta) \subset A$, amiből A-ra csak az

$$A = \begin{cases} (\xi,\eta) \\ [\xi,\eta) \\ (\xi,\eta] \\ [\xi,\eta] \end{cases}$$

esetek lehetségesek, azaz A valóban intervallum. A $(\xi,\eta) \subset A$ tartalmazáshoz először is jegyezzük meg, hogy $\xi < \eta$, hiszen $\xi = \eta$ esetén $A = \{\xi\}$ nem lenne összefüggő. Ha viszont $(\xi,\eta) \subset A$ nem lenne igaz, akkor valamilyen $\xi < \omega < \eta$ számra $\omega \notin A$. Ekkor nyilván

$$(*) \qquad A = \Big((-\infty,\omega) \cap A\Big) \bigcup \Big(A \cap (\omega,+\infty)\Big).$$

Az infimum, ill. a szuprémum definíciója miatt

$$B := (-\infty,\omega) \cap A \neq \emptyset,\ C := A \cap (\omega,+\infty) \neq \emptyset.$$

Mivel $(-\infty, \omega)$, $(\omega, +\infty)$ nyílt halmazok és $B \cap C = \emptyset$, ezért $(*)$ azt jelenti, hogy az A halmaz nem össszefüggő. Ez ellentmond a kiinduló feltételnek, így a fenti tulajdonságú ω sem létezik. ■

Mindezt előrebocsátva igaz a

2.8. Tétel (Bolzano). *Tegyük fel, hogy az $f \in X \to Y$ függvény folytonos, és a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány összefüggő. Ekkor az $\mathcal{R}_f$ értékkészlet is összefüggő. Speciálisan, ha $f \in X \to \mathbf{R}$, és valamilyen $a, b \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(a) < 0 < f(b)$, akkor alkalmas $c \in \mathcal{D}_f$ helyen $f(c) = 0$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt módon, hogy $\mathcal{R}_f$ nem összefüggő: $\mathcal{R}_f = B \cup C$, ahol $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$, és

$$B = \mathcal{R}_f \cap D, \; C = \mathcal{R}_f \cap E,$$

ahol a D, $E \subset Y$ halmazok nyíltak. Világos, hogy

$$\mathcal{D}_f = f^{-1}[\mathcal{R}_f] = f^{-1}[B \cup C] = f^{-1}[(\mathcal{R}_f \cap D) \cup (\mathcal{R}_f \cap E)] = f^{-1}[D] \cup f^{-1}[E],$$

ahol (ld. 2.1. Tétel)

$$f^{-1}[D] = U \cap \mathcal{D}_f, \; f^{-1}[E] = V \cap \mathcal{D}_f$$

alkalmas $U, V \subset X$ nyílt halmazokkal. Nyilván igaz, hogy $U \cap \mathcal{D}_f$, $V \cap \mathcal{D}_f$ egyike sem az üreshalmaz, ill. $U \cap \mathcal{D}_f$, $V \cap \mathcal{D}_f$ diszjunktak. Mivel

$$\mathcal{D}_f = (U \cap \mathcal{D}_f) \cup (V \cap \mathcal{D}_f),$$

ezért – szemben a feltétellel – a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány nem összefüggő.

Ha f valós értékű, akkor (ld. 2.7. Lemma) $\mathcal{R}_f$ intervallum. Ha ez tartalmaz negatív számot is ($f(a)$ ilyen), meg pozitív számot is ($f(b)$ ilyen), akkor tartalmazza a nullát is, azaz valamilyen $c \in \mathcal{D}_f$ helyen $f(c) = 0$. ■

Legyen a továbbiakban (egymástól függetlenül) $\mathbf{K}_1 := \mathbf{R}$ vagy $\mathbf{K}_1 := \mathbf{C}$, ill. $\mathbf{K}_2 := \mathbf{R}$ vagy $\mathbf{K}_2 := \mathbf{C}$, $1 \leq s$, $m \in \mathbf{N}$, és tekintsünk egy

$$f \in \mathbf{K}_1^s \to \mathbf{K}_2^m$$

függvényt. Ha $s > 1$, akkor f-et *többváltozós függvénynek* is szokás nevezni. Hasonlóan, ha $m > 1$, akkor f egy ún. *vektorfüggvény.* Tehát $s, m > 1$ esetén a szóban forgó f függvény egy *többváltozós vektorfüggvény.* Legyen $x \in \mathcal{D}_f$ és

$$(y_1, ..., y_m) := f(x).$$

Ha $i = 1, ..., m,$ akkor (az előbbi jelölésekkel) értelmezzük az

$$f_i : \mathcal{D}_f \to \mathbf{K}_2$$

függvényt a következőképpen:

$$f_i(x) := y_i \qquad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Az f_i $(i = 1, ..., m)$ függvényt az f függvény i-edik *koordinátafüggvényének* nevezzük, és erre az

$$f = (f_1, ..., f_m)$$

jelölést használjuk. Tehát $f_i \in \mathbf{K}_1^s \to \mathbf{K}_2$ $(i = 1, ..., m)$, azaz $s > 1$ esetén a koordinátafüggvények többváltozós (valós vagy komplex értékű) függvények.

A $0 < p, q \leq +\infty$ paraméterekkel $\mathbf{K}_1^s$-ben a ρ_p, $\mathbf{K}_2^m$-ben pedig a ρ_q metrikát fogjuk használni, azaz legyen

$$(X, \rho) := (\mathbf{K}_1^s, \rho_p), \ (Y, \sigma) := (\mathbf{K}_2^m, \rho_q).$$

Ekkor a fentiek szerint vizsgálhatjuk az $f \in \mathbf{K}_1^s \to \mathbf{K}_2^m$ függvények (speciálisan tehát az $f_i \in \mathbf{K}_1^s \to \mathbf{K}_2$ $(i = 1, ..., m)$ koordinátafüggvények) folytonosságát. Ebből a szempontból alapvető az alábbi állítás.

2.9. Tétel *Az $f = (f_1, ..., f_m) \in \mathbf{K}_1^s \to \mathbf{K}_2^m$ függvény akkor és csak akkor folytonos valamilyen $a \in \mathcal{D}_f$ helyen, ha minden $i = 1, ..., m$ esetén az f_i koordináta-függvény folytonos az a-ban. Speciálisan az f akkor és csak akkor folytonos, ha minden koordinátafüggvénye folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathcal{D}_f$. Azt kell megmutatnunk, hogy az $f \in \mathcal{C}\{a\}$ folytonosság akkor és csak akkor igaz, ha $f_i \in \mathcal{C}\{a\}$ $(i = 1, ..., m)$. Az átviteli elv (ld. 2.2. Tétel) szerint mindez a következőkkel egyenértékű: tetszőleges $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f$, $\lim(x_n) = a$ sorozatra

$$\lim\Big(f(x_n)\Big) = f(a)$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\lim\Big(f_i(x_n)\Big) = f_i(a) \qquad (i = 1, ..., m).$$

Vegyük észre, hogy az $\Big(f_i(x_n)\Big)$ $(i = 1, ..., m)$ sorozat nem más, mint az $\Big(f(x_n)\Big)$ sorozat i-edik koordináta-sorozata (ld. 1.3. pont), $f_i(a)$ pedig az $f(a)$ helyettesítési érték i-edik koordinátája. Ezért az állításunk az 1.3.2. Tétel egyszerű következménye. ∎

Tegyük fel, hogy valamilyen (X,ρ) metrikus tér és (a $\mathbf{K}$ feletti) Y lineáris tér esetén adott egy $f \in X \to Y$ függvény. Az f gyökhelyeitől különböző $\mathcal{D}_f$-beli elemek halmazának a lezárását, azaz (az Y-ban a nullaelemet 0-val jelölve) az

$$\overline{\{f \neq 0\}} := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

halmazt az f függvény *tartójának* nevezzük. Az angol „support" szó után legyen

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{f \neq 0\}}.$$

Világos, hogy a $\operatorname{supp} f$ halmaz zárt, és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f \setminus \operatorname{supp} f$ helyen $f(x) = 0$. Ugyanakkor előfordulhat, hogy bizonyos $x \in \operatorname{supp} f$ helyeken is $f(x) = 0$. Legyen pl.

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin(1/x) & (0 \neq x \in \mathbf{R}) \\ \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Ekkor az

$$x_n := \frac{2}{(4n+1)\cdot \pi} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozat minden tagjára $f(x_n) \neq 0$, azaz $x_n \in \{f \neq 0\}$ $(n \in \mathbf{N})$. Mivel $x_n \neq x_m$ $(n \neq m \in \mathbf{N})$, és $\lim(x_n) = 0$, ezért $0 \in \overline{\{f \neq 0\}} = \operatorname{supp} f$, ahol $f(0) = 0$.

Ha a $\operatorname{supp} f$ kompakt halmaz, akkor az f egy ún. *kompakt tartójú függvény.* Az ilyen függvények egyik fontos (az alkalmazásokban is gyakran szerepet játszó) tulajdonsága a „lokálisan koncentrált" függvények összegére való felbonthatósága. Ezt fejezi ki a

2.10. Tétel. *Legyen (X,ρ) metrikus tér, Y lineáris tér a $\mathbf{K}$ felett, és tegyük fel, hogy az $f \in X \to Y$ függvény kompakt tartójú. Legyenek továbbá tetszőlegesen adottak a $K(x)$ $(x \in \operatorname{supp} f)$ környezetek. Ekkor egy alkalmas $s \in \mathbf{N}$ mellett léteznek olyan $f_i : X \to Y$ $(i = 0, ..., s)$ függvények, hogy az alábbiak igazak:*

1^o *minden $i = 0, ..., s$ indexre valamilyen $x \in \operatorname{supp} f$ esetén $\operatorname{supp} f_i \subset K(x)$;*

2^o *fennáll a következő egyenlőség:*

$$f = \sum_{i=0}^{s} f_i.$$

Ha a σ normával (Y,σ) metrikus tér, és az előbbi f függvény folytonos, akkor az f fenti felbontásában szereplő f_i $(i = 0, ..., s)$ függvényekről is feltehető, hogy valamennyien folytonosak.

Bizonyítás. Lássuk be először az ún. *egységosztásról* szóló állítást:

Lemma. *Tegyük fel, hogy* (X,ρ) *metrikus tér,* $\emptyset \neq A \subset X$ *kompakt halmaz, és adottak a* $K(x)\quad(x \in A)$ *környezetek. Ekkor egy* $s \in \mathbf{N}$ *indexszel megadhatók a* $\psi_i : X \to [0,1]\quad(i = 0, ..., s)$ *függvények úgy, hogy*

a) *bármilyen* $i = 0, ..., s$ *esetén egy alkalmas* $x \in A$ *ponttal* $\operatorname{supp}\psi_i \subset K(x)$;

b) $\sum_{i=0}^{s} \psi_i(t) = 1\quad(t \in A)$;

c) *mindegyik* $\psi_i\quad(i = 0, ..., s)$ *függvény folytonos.*

Legyen ui. a $\Phi : [0,1] \to [0,1]$ függvény az alábbi módon értelmezve:

$$\Phi(z) := \begin{cases} 1 & (0 \leq z \leq 1/2) \\ 3 - 4z & (1/2 < z \leq 3/4) \\ 0 & (3/4 < z \leq 1). \end{cases}$$

Világos, hogy a Φ (mint egyváltozós valós függvény) folytonos. Ha a $K(x)$ környezet sugara r_x, azaz $K(x) = K_{r_x}(x)\quad(x \in A)$, akkor a

$$\{K_{r_x/2}(x) : x \in A\}$$

halmazrendszer nyilván egy nyílt lefedése a kompakt A halmaznak. Így (ld. 1.7.10. Tétel) létezik olyan $s \in \mathbf{N}$, hogy – megfelelően választva az $x_i \in A\quad(i = 0, ..., s)$ elemeket –

$$A \subset \bigcup_{i=0}^{s} K_{r_i/2}(x_i),$$

ahol $r_i := r_{x_i}\quad(i = 0, ..., s)$. Legyen

$$\varphi_i(t) := \Phi\Big(\rho(t, x_i)/r_i\Big) \qquad (t \in X,\ i = 0, ..., s).$$

Mivel az

$$X \ni t \mapsto \rho(t, x_i)/r_i \qquad (i = 0, ..., s)$$

leképezések folytonosak (ld. 2.1. ii) megjegyzés), ezért (ld. 2.3. Tétel) a φ_i-k $(i = 0, ..., s)$ is folytonosak. A Φ definíciójából rögtön következik, hogy

- $\mathcal{R}_{\varphi_i} \subset [0,1]\ (i = 0, ..., s)$;
- $\varphi_i(t) = 1\quad\Big(t \in K_{r_i/2}(x_i)\quad(i = 0, ..., s)\Big)$;
- $\varphi_i(t) = 0\quad\Big(t \in X,\ \rho(t, x_i) \geq 3r_i/4\quad(i = 0, ..., s)\Big)$.

Az utolsó tulajdonságból nyilvánvaló, hogy

$$\{\varphi_i \neq 0\} \subset K_{3r_i/4}(x_i) \qquad (i = 0, ..., s),$$

amiből

$$\operatorname{supp} \varphi_i = \overline{K_{3r_i/4}(x_i)} \subset K_{r_i}(x_i) \qquad (i = 0, ..., s).$$

Tekintsük ezek után a

$$\psi_0 := \varphi_0 \ , \ \ \psi_k := \varphi_k \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \varphi_i) \qquad (k = 1, ..., s)$$

függvényeket. Ekkor (ld. 2.1. vii) megjegyzés) valamennyi $\psi_i \quad (i = 0, ..., s)$ folytonos. Továbbá $\mathcal{R}_{\psi_i} \subset [0, 1]$, és

$$\operatorname{supp} \psi_i \subset \operatorname{supp} \varphi_i \subset K_{r_i}(x_i) \qquad (i = 0, ..., s).$$

Teljes indukcióval az is rögtön adódik, hogy

$$\sum_{k=0}^{i} \psi_k = 1 - \prod_{j=0}^{i} (1 - \varphi_j) \qquad (i = 0, ..., s).$$

Speciálisan

$$\sum_{k=0}^{s} \psi_k = 1 - \prod_{j=0}^{s} (1 - \varphi_j).$$

Ha $x \in A$, akkor egy alkalmas $i = 0, ..., s$ indexszel $x \in K_{r_i/2}(x_i)$, így $\varphi_i(x) = 1$. Következésképpen

$$\sum_{k=0}^{s} \psi_k(x) = 1 - \prod_{j=0}^{s} \Big(1 - \varphi_j(x)\Big) = 1.$$

Ezzel a Lemmát bebizonyítottuk. A 2.10. Tétel minden állítása (a Lemmabeli jelölésekkel) már nyilván adódik az $A := \operatorname{supp} f$,

$$f_i := f \cdot \psi_i \qquad (i = 0, ..., s)$$

választással (ld. 2.1. vii) megjegyzés). Ha ui. $x \in \mathcal{D}_f \cap (\operatorname{supp} f)$, akkor

$$\sum_{i=0}^{s} f_i(x) = f(x) \cdot \sum_{i=0}^{s} \psi_i(x) = f(x).$$

Ha viszont $x \in \mathcal{D}_f \setminus (\operatorname{supp} f)$, akkor $f(x) = 0$, ezért

$$\sum_{i=0}^{s} f_i(x) = f(x) \cdot \sum_{i=0}^{s} \psi_i(x) = 0 = f(x).$$

Így tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ helyen $\sum_{i=0}^{s} f_i(x) = f(x)$. ■

2.1. Megjegyzések

i) Az ekvivalens metrikákkal kapcsolatban mondottakra utalva (ld. 1.4. vi), vii) megjegyzések) világos a következő. Ha az

$$(X,\rho),\ (X,\rho_*),\ (Y,\sigma),\ (Y,\sigma_*)$$

metrikus tereket illetően

$$\rho \sim \rho_*,\ \sigma \sim \sigma_*,$$

akkor egy $f \in X \to Y$ függvény valamilyen $a \in \mathcal{D}_f$ pontbeli folytonossága (speciálisan az f folytonossága) független attól, hogy az X-ben, ill. az Y-ban a ρ vagy a ρ_*, ill. a σ vagy a σ_* metrika szerint tekintjük az elemek távolságát. Így pl. a 2.9. Tételben is szorítkozhatnánk mind $\mathbf{K}_1$-ben, mind pedig $\mathbf{K}_2$-ben pl. a ρ_2 metrikára.

ii) Az 1.4. iv) megjegyzésben belátott állítás a 2.2. Tétel alapján azt jelenti, hogy tetszőleges (X,ρ) metrikus tér, vagy $(X,\|.\|)$ normált tér, vagy $(X,\langle.\rangle)$ euklideszi tér esetén minden $a \in X$ rögzített elemmel az

$$f(x) := \rho(x,a),\ g(x) := \|x-a\|,\ h(x) := \langle x,a\rangle \qquad (x \in X)$$

függvények folytonosak. Ugyanez mondható el az $(X,\|.\|)$ normált tér vonatkozásában az

$$F(x) := \|x\| \qquad (x \in X)$$

(norma-)függvényről, nevezetesen, hogy az F is folytonos.

iii) Tegyük fel, hogy az (X,ρ), (Y,σ) metrikus terek esetén az $f \in X \to Y$ függvény rendelkezik a következő tulajdonsággal: van olyan $q \geq 0$, hogy

$$\sigma\Big(f(x), f(y)\Big) \leq q \cdot \rho(x,y) \qquad (x, y \in \mathcal{D}_f).$$

Világos, hogy ekkor f-re igaz a 2.6. Tétel előtt megfogalmazott tulajdonság: bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$\sigma\Big(f(x), f(t)\Big) < \varepsilon \qquad (x, t \in \mathcal{D}_f,\ \rho(x,t) < \delta).$$

Valóban, a szóban forgó $\varepsilon > 0$ számhoz pl. minden olyan $\delta > 0$ megfelelő, amelyre $q \cdot \delta < \varepsilon$. Röviden: az f egyenletesen folytonos, így folytonos is. Ilyen függvény pl. a fixponttételben (ld. 1.5.2. Tétel) vizsgált $f : X \to X$ kontrakció. Az utóbbival kapcsolatban megjegyezzük, hogy az említett tételben (az ottani jelölésekkel) szereplő $f(\alpha) = \alpha$ egyenlőség bizonyítása történhet akár az átviteli elv (ld. 2.2. Tétel) alapján is:

$$\alpha = \lim(x_n) = \lim(x_{n+1}) = \lim\Big(f(x_n)\Big) = f(\lim(x_n)) = f(\alpha).$$

iv) Legyenek adottak az (X,ρ), (Y,σ), (Z,δ) metrikus terek, és (valamilyen $0<p\leq+\infty$ paraméter mellett) tekintsük az $(Y\times Z,\sigma\times\delta)$ szorzatteret (ld. 1.2. vii) megjegyzés). Ha
$$f\in X\to Y\times Z$$
egy (absztrakt) vektorfüggvény, akkor az f
$$f_1\in X\to Y,\ f_2\in X\to Z$$
koordinátafüggvényeit a 2.9. Tétel előtt mondottakkal analóg módon értelmezhetjük: ha $x\in\mathcal{D}_f$ és $(y,z):=f(x)\in Y\times Z$, akkor
$$f_1(x):=y,\ f_2(x):=z.$$
Figyelembe véve a $\sigma\times\delta$ szorzatmetrika definícióját azt kapjuk, hogy igaz marad a 2.9. Tétel megfelelője (és értelemszerűen az $(Y\times Z,\sigma\times\delta)$ szorzatnál „többtényezős" szorzat esetén is): $f\in\mathcal{C}\{a\}$ $(a\in\mathcal{D}_f)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f_i\in\mathcal{C}\{a\}$ $(i=1,2)$.

v) Az előbbi megjegyzésben szereplő $(Y\times Z,\sigma\times\delta)$ szorzattér esetén definiáljuk a
$$P_1:Y\times Z\to Y,\ P_2:Y\times Z\to Z$$
vetítéseket (vagy *projekciókat*) a következőképpen:
$$P_1(y,z):=y,\ P_2(y,z):=z \qquad \big((y,z)\in Y\times Z\big).$$
Ekkor a iv) megjegyzésben az $f\in X\to Y\times Z$ függvényre értelmezett f_1, f_2 koordinátafüggvények az alábbi módon írhatók le:
$$f_1=P_1\circ f,\ f_2=P_2\circ f.$$
Figyelembe véve a $\sigma\times\delta$ szorzatmetrika értelmezését, egyszerűen adódik, hogy a P_1, P_2 projekciók folytonosak. Hasonlóan kaphatók meg egy $\mathcal{U}\subset Y\times Z$ halmaz vetületei (ld. 1.8. vii) megjegyzés), mint az $\mathcal{U}$-nak a P_1, P_2 által létesített képhalmazai:
$$\mathcal{U}^{(1)}=P_1[\mathcal{U}],\ \mathcal{U}^{(2)}=P_2[\mathcal{U}].$$
Mindez értelemszerűen terjeszthető ki kettőnél több (véges sok) tér szorzatára. Speciálisan a $(\mathbf{K}^m,\rho_p)$ $(1\leq m\in\mathbf{N},\ 0<p\leq+\infty)$ tereket véve
$$P_i(x)=x_i \qquad (x=(x_1,...,x_s)\in\mathbf{K}^m,\ i=1,...,m)$$
az i-edik projekció. Ha $1\leq s\in\mathbf{N}$ és $f\in\mathbf{K}^s\to\mathbf{K}^m$, akkor (ld. fent)
$$f_i=P_i\circ f \qquad (i=1,...,m)$$
az f függvény i-edik koordinátafüggvénye. Világos továbbá, hogy az $A\subset\mathbf{K}^s$ halmaz akkor és csak akkor korlátos, ha a $P_i[A]$ $(i=1,...,s)$ vetületek valamennyien korlátos (szám) halmazok.

vi) A $\mathbf{K}$ test feletti $(X, \|.\|_\bullet)$, $(Y, \|.\|_*)$ normált terek közötti folytonos leképezések között különös fontosságúak az ún. *korlátos lineáris leképezések.* Nevezetesen, az $f : X \to Y$ függvényt korlátos lineáris leképezésnek nevezzük, ha

- az f *lineáris,* azaz

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda \cdot f(y) \qquad (x, y \in X,\ \lambda \in \mathbf{K}),$$

  és

- van olyan $M \geq 0$ szám, hogy

$$\|f(x)\|_* \leq M \cdot \|x\|_\bullet \qquad (x \in X).$$

(Szokás minden ilyen M számot a szóban forgó f korlátos lineáris leképezés *korlátjaként* említeni.) Ekkor

$$\|f(x) - f(y)\|_* = \|f(x - y)\|_* \leq M \cdot \|x - y\|_\bullet \qquad (x, y \in X)$$

miatt f-re a

$$\rho(x, y) := \|x - y\|_\bullet \ (x, y \in X),\ \sigma(u, v) := \|u - v\|_* \ (u, v \in Y)$$

metrikákkal igaz a iii) megjegyzésben megfogalmazott tulajdonság, ezért minden korlátos lineáris leképezés egyenletesen folytonos. Jelöljük a fenti korlátos lineáris leképezések halmazát az $L(X, Y)$ szimbólummal. Könnyen meggondolható, hogy a „szokásos" függvények közötti műveletekkel az $L(X, Y)$ halmaz is vektortér (lineáris tér) a $\mathbf{K}$ testre vonatkozóan. Sőt, ha $f \in L(X, Y)$ esetén

$$K_f := \{M \geq 0 : \|f(x)\|_* \leq M \cdot \|x\|_\bullet \ (x \in X)\},$$

akkor az

$$L(X, Y) \ni f \mapsto \|f\| := \inf K_f$$

leképezés norma (a $\|.\|_\bullet$, $\|.\|_*$ normák által *indukált norma*). Így $(L(X, Y), \|.\|)$ normált tér. Az is megmutatható, hogy tetszőleges $f \in L(X, Y)$ leképezésre létezik a K_f halmaznak minimuma, így

$$\|f\| = \min K_f,$$

következésképpen

$$\|f(x)\|_* \leq \|f\| \cdot \|x\|_\bullet \qquad (x \in X).$$

Az $\|f\|$ norma tehát egyúttal az $f \in L(X, Y)$ korlátos lineáris leképezés legkisebb korlátja. Mindennek fontos szerepe van pl. a közelítő eljárásokkal kapcsolatos hibabecslésekben: ha egy matematikai modellben az $f \in L(X, Y)$ leképezés helyettesítési értékét kell kiszámítani az $x \in X$ helyen, de x-nek csak valamilyen $\varepsilon > 0$ hibakorlát melletti $z \in X$ közelítését ismerjük (azaz $\|x - z\|_\bullet < \varepsilon$), akkor az ebből „öröklődő" $\|f(x) - f(z)\|_*$ hibára az alábbi becslés következik:

$$\|f(x) - f(z)\|_* = \|f(x - z)\|_* \leq \|f\| \cdot \|x - z\|_\bullet \leq \|f\| \cdot \varepsilon.$$

Legyen pl. valamilyen

$$1 \leq s,\, m \in \mathbf{N},\; 1 \leq p,\, q \leq +\infty$$

esetén (ld. 1.2. v) megjegyzés)

$$(X, \|.\|_\bullet) := (\mathbf{K}^s, \|.\|_p),\; (Y, \|.\|_*) := (\mathbf{K}^m, \|.\|_q),$$

és egy $A \in \mathbf{K}^{m \times s}$ mátrixszal

$$(**) \qquad f_A(x) := Ax \qquad (x \in \mathbf{K}^s).$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ha $p = q = 1$, akkor

$$f_A \in L(\mathbf{K}^s, \mathbf{K}^m).$$

Jegyezzük meg továbbá, hogy ezért, és a $\|.\|_p$, $\|.\|_q$ normák ekvivalenciája miatt (ld. 1.4. xi) megjegyzés) a $\mathbf{K}^s$-en, ill. a $\mathbf{K}^m$-en bevezetett bármelyik $\|.\|_p$, $\|.\|_q$ norma esetén a fenti f_A leképezésre $f_A \in L(\mathbf{K}^s, \mathbf{K}^m)$. Sőt, jól ismert a lineáris algebrából, hogy az $L(\mathbf{K}^s, \mathbf{K}^m)$ halmaz minden eleme „ilyen alakú", azaz tetszőleges $f \in L(\mathbf{K}^s, \mathbf{K}^m)$ függvényhez egyértelműen létezik olyan $A \in \mathbf{K}^{m \times s}$ mátrix, amellyel $(**)$ fennáll: $f = f_A$. Ennek alapján vezessük be az $\|A\|_{(p,q)}$ *mátrixnormát* az alábbiak szerint:

$$\|A\|_{(p,q)} := \|f_A\|.$$

Következésképpen

$$\|Ax\|_q \leq \|A\|_{(p,q)} \cdot \|x\|_p \qquad (x \in \mathbf{K}^s),$$

és egyúttal $M := \|A\|_{(p,q)}$ a legkisebb olyan $M \geq 0$ szám, amellyel

$$\|Ax\|_q \leq M \cdot \|x\|_p \qquad (x \in \mathbf{K}^s).$$

Állapodjunk meg abban, hogy a $p = q$ esetben $\|A\|_{(p,q)}$ helyett $\|A\|_{(p)}$-t írunk. Speciálisan, ha $A = (a_{ik})_{i,k=1}^{m,s}$, akkor jól ismert (de elemi számolással is rövid úton belátható), hogy

$$\|A\|_{(\infty)} = \max\left\{\sum_{k=1}^{s} |a_{ik}| : i = 1, ..., m\right\},$$

$$\|A\|_{(1)} = \max\left\{\sum_{i=1}^{m} |a_{ik}| : k = 1, ..., s\right\}$$

(az A mátrix *sornormája,* ill. *oszlopnormája*), továbbá az $\|A\|_{(2)}$ ún. *spektrálnormára*

$$\|A\|_{(2)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s}|a_{ik}|^2}.$$

Pl. az 1.6. xii) megjegyzésben azt láttuk be, hogy az $s := m := 2$, $p := q := +\infty$ esetben az

$$A := \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^{2\times 2}$$

mátrixszal definiált $(**)$ alakú korlátos lineáris leképezésre a

$$q := \max\{|\alpha| + |\beta|, |\gamma| + |\delta|\} = \|A\|_{(\infty)}$$

számmal

$$\|f(x)\|_\infty \leq q\cdot \|x\|_\infty \qquad (x \in \mathbf{K}^2),$$

és ez a q egyúttal a legkisebb olyan $M \geq 0$ szám, amellyel ebben az esetben az

$$\|f(x)\|_\infty \leq M\cdot \|x\|_\infty \qquad (x \in \mathbf{K}^2)$$

egyenlőtlenség teljesül. Továbbá, ha itt a $p := q := 1$ választással élünk, akkor (ld. 1.6. xiii) megjegyzés) ugyanez mondható el a fenti q helyett a

$$q := \max\{|\alpha| + |\gamma|, |\beta| + |\delta|\} = \|A\|_{(1)}$$

együtthatóval: ez a q a legkisebb olyan $M \geq 0$ szám, hogy

$$\|f(x)\|_1 \leq M\cdot \|x\|_1 \qquad (x \in \mathbf{K}^2).$$

Ugyanakkor (ld. 1.6. xiv) megjegyzés) a $p := q := 2$ paraméterekkel a

$$q := \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2}\ (\geq \|A\|_{(2)})$$

együtthatóval ugyan

$$\|f(x)\|_2 \leq q\cdot \|x\|_2 \qquad (x \in \mathbf{K}^2),$$

de erre a q-ra már nem feltétlenül igaz az előbbiekben említett minimum-tulajdonság.

vii) A $\mathbf{K} \to \mathbf{K}$ (egyváltozós valós vagy komplex) függvények folytonossága és bizonyos függvényműveletek közötti kapcsolat egyszerűen kiterjeszthető (a bizonyításokkal együtt) absztrakt függvényekre. Tegyük fel ehhez, hogy az (X, ρ) metrikus tér mellett adott az $(Y, \|.\|)$ normált tér, és legyen $\sigma(y, z) := \|y - z\| \quad (y, z \in Y)$. Tegyük fel továbbá, hogy az $f,\, g \in X \to Y$ függvényekre

- valamilyen $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ esetén $f, g \in \mathcal{C}\{a\}$, ekkor tetszőleges $\lambda \in \mathbf{K}$ mellett $f + \lambda g \in \mathcal{C}\{a\}$;
- ha $Y := \mathbf{K}$, $\|y\| := |y| \quad (y \in \mathbf{K})$, azaz $f, g \in X \to \mathbf{K}$, és egy $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ helyen $f, g \in \mathcal{C}\{a\}$, akkor $f \cdot g \in \mathcal{C}\{a\}$, ill., ha itt még $g(a) \neq 0$, akkor $f/g \in \mathcal{C}\{a\}$.

Így pl. speciális esetként többváltozós vektorfüggvényekre a következőket mondhatjuk: legyen $1 \leq s, m \in \mathbf{N}$, $1 \leq p, q \leq +\infty$, és tekintsük a $(\mathbf{K}^s, \rho_p)$, $(\mathbf{K}^m, \rho_q)$ tereket. Tegyük fel, hogy az $f,\, g \in \mathbf{K}^s \to \mathbf{K}^m$ függvényekre

- valamilyen $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ esetén $f, g \in \mathcal{C}\{a\}$, ekkor tetszőleges $\lambda \in \mathbf{K}$ mellett $f + \lambda g \in \mathcal{C}\{a\}$;
- ha $m = 1$, azaz $f, g \in \mathbf{K}^s \to \mathbf{K}$, és egy $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ helyen $f, g \in \mathcal{C}\{a\}$, akkor $f \cdot g \in \mathcal{C}\{a\}$, ill., ha itt még $g(a) \neq 0$, akkor $f/g \in \mathcal{C}\{a\}$.

viii) Az approximációelmélet egyik alapkérdése a következő: legyen (X, ρ) metrikus tér, $\emptyset \neq A \subset X$, és tekintsük az

$$f(x) := \inf\{\rho(x, a) : a \in A\} \qquad (x \in X)$$

függvényt. A kérdés az, hogy (adott $x \in X$ elemre) írható-e az előbbi „inf" helyett „min", azaz van-e olyan $a^* \in A$, amelyre

$$f(x) = \rho(x, a^*).$$

Ha igen, akkor az ilyen a^* elemet *extremális elemnek* nevezzük.

Mutassuk meg, hogy az f függvény egyenletesen folytonos. Valóban, ha $x, y \in X$, akkor tetszőleges $a \in A$ esetén

$$f(x) \leq \rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a),$$

amiből az

$$f(x) \leq \rho(x, y) + f(y)$$

egyenlőtlenség triviálisan következik. Így

$$f(x) - f(y) \leq \rho(x, y),$$

ill. x-et és y-t felcserélve

$$f(y) - f(x) \leq \rho(x, y),$$

más szóval

$$|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y) \qquad (x, y \in X).$$

Innen a mondott állítás már nyilvánvaló (ld. iii) megjegyzés).

ix) Bizonyítsuk be, hogy az előbbi megjegyzésben szereplő A halmazra és f függvényre

$$\{x \in X : f(x) = 0\} = \overline{A}.$$

Ha ui. $x \in X$ és

$$f(x) = \inf\{\rho(x, a) : a \in A\} = 0,$$

akkor tetszőleges $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén egy alkalmas $a_n \in A$ elemmel

$$0 \leq \rho(x, a_n) < \frac{1}{n}.$$

Tehát $\lim(a_n) = x$. Ha itt $x \notin A$, akkor az 1.7.4. Tétel miatt $x \in A'$, így (ld. 1.8. viii) megjegyzés) $x \in \overline{A}$. Fordítva, ha $z \in \overline{A}$ és $z \in A$, akkor $f(z) = 0$ (ti. nyilván igaz, hogy $A \subset \{x \in X : f(x) = 0\}$). Ha viszont $z \in \overline{A} \setminus A$, akkor (ld. 1.8. viii) megjegyzés) $z \in A'$, ezért (ld. 1.7.4. Tétel) valamilyen $(a_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozattal $z = \lim(a_n)$. Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy az $a_n \in A$ elemmel

$$\rho(z, a_n) < \varepsilon.$$

Tehát

$$f(z) = \inf\{\rho(z, a) : a \in A\} < \varepsilon,$$

amiből $f(z) = 0$ már következik.

x) A ix) megjegyzéshez hasonlóan kapjuk, hogy ha (X, ρ), (Y, σ) metrikus terek, és az $f : X \to Y$ függvény folytonos, akkor minden $y \in Y$ mellett az

$$X_y := \{x \in X : f(x) = y\}$$

halmaz zárt. Ha ui. $X_y = \emptyset$, akkor a dolog világos, különben az

$$(x_n) : \mathbf{N} \to X_y$$

sorozat legyen konvergens, és $\alpha := \lim(x_n)$. Ekkor a 2.2. Tétel alapján

$$f(\alpha) = \lim\Big(f(x_n)\Big) = \lim(y) = y,$$

tehát $\alpha \in X_y$. Az 1.7.6. Tételre tekintettel ez az X_y halmaz zártságát jelenti. Jegyezzük meg, hogy ugyanez igaz, ha „csak" $f \in X \to Y$, és (az f folytonossága mellett) a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány zárt halmaz. Ekkor értelemszerűen

$$X_y := \{x \in \mathcal{D}_f : f(x) = y\},$$

és $X_y \neq \emptyset$ esetén a fenti konvergens $(x_n) : \mathbf{N} \to X_y \, (\subset \mathcal{D}_f)$ sorozatra (ld. 1.7.6. Tétel)

$$\alpha = \lim(x_n) \in \mathcal{D}_f.$$

Innen a bizonyítás gondolatmenete ugyanaz, mint az előbb.

Speciálisan azt mondhatjuk, hogy az

$$1 \leq s,\, m \in \mathbf{N},\, 0 < p,\, q \leq +\infty,\, (X,\rho) := (\mathbf{K}^s, \rho_p),\, (Y,\sigma) := (\mathbf{K}^m, \rho_q)$$

esetben bármely zárt halmazon értelmezett folytonos $f \in \mathbf{K}^s \to \mathbf{K}^m$ függvényre a zérushelyek

$$\{x \in \mathcal{D}_f : f(x) = 0\}$$

halmaza zárt. (Mindennek pl. az egyenletek közelítő megoldási módszereit illetően van jelentősége.)

xi) Az $f \in \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ függvények határértékének a fogalmát könnyen kiterjeszthetjük absztrakt függvényekre. Legyenek ehhez (X,ρ), (Y,σ) metrikus terek, és tekintsünk egy $f \in X \to Y$ függvényt. Tegyük fel, hogy $a \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor azt mondjuk, hogy *az f függvénynek az a helyen* (vagy *az a-ban*) *van határértéke,* ha létezik olyan $A \in Y$, amelyre tetszőleges $K(A) \subset Y$ környezetet véve megadható az a-nak olyan $k(a) \subset X$ környezete, amellyel

$$f\Big[\Big(k(a) \setminus \{a\}\Big) \cap \mathcal{D}_f\Big] \subset K(A)$$

teljesül. Más szóval tehát

$$f(x) \in K(A) \qquad (a \neq x \in k(a) \cap \mathcal{D}_f).$$

Mutassuk meg, hogy ekkor egyértelműen létezik az az $A \in Y$, amely eleget tesz a fentieknek. Tegyük fel ui., hogy valamilyen $B \in Y$ mellett is tetszőleges $K(B) \subset Y$ környezethez megválasztható a $k^*(a) \subset X$ környezet úgy, hogy

$$f(x) \in K(B) \qquad (a \neq x \in k^*(a) \cap \mathcal{D}_f).$$

Ekkor

$$(*) \qquad f(x) \in K(A) \cap K(B) \qquad \Big(a \neq x \in \Big(k(a) \cap k^*(a)\Big) \cap \mathcal{D}_f\Big)$$

(ahol egyébként a $k(a) \cap k^*(a)$ halmaz is nyilván egy környezete az a-nak). Ha itt (indirekt feltételezéssel élve) $B \neq A$ állna fenn, akkor (a tételbeli) $K(A)$ és a most mondott $K(B)$ környezet nyilván megválasztható úgy, hogy $K(A) \cap K(B) = \emptyset$. Legyen ui. $0 < r < \sigma(A,B)/2$, ekkor minden $y \in K(A) := K_r(A)$ elemre

$$\sigma(y,B) \geq \sigma(A,B) - \sigma(y,A) > \sigma(A,B) - r > r,$$

mivel ez utóbbi azzal ekvivalens, hogy $2r < \sigma(A,B)$, azaz $0 < r < \sigma(A,B)/2$. Tehát $y \notin K(B) := K_r(B)$, így $K(A) \cap K(B) = \emptyset$, ami ellentmond a $(*)$-nak.

xii) Az előbbi megjegyzésre hivatkozva vezessük be a függvényhatárérték fogalmát. Ehhez tegyük fel, hogy az $f \in X \to Y$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}'_f$ helyen létezik határértéke. Ekkor a xi) megjegyzés szerint egyértelműen létező $A \in Y$ elemet az f *függvény a helyen vett* (vagy *a-beli*) *határértékének* nevezzük. Erre az alábbi jelöléseket fogjuk használni:

$$\lim_a f := \lim_{x \to a} f(x) := A.$$

(Esetenként – ha a szóban forgó függvényt „bonyolultabb" szimbólum jelöli – a függvény jelét zárójelbe tesszük, pl. $\lim_a (f \circ g)$.) Időnként azt is írjuk, hogy

$$f(x) \to A \qquad (x \to a),$$

amit úgy olvasunk, hogy „$f(x)$ tart A-hoz, ha x tart a-hoz".

xiii) Az előbbi definícióból eléggé nyilvánvaló, hogy ha $f, g \in X \to Y$, és valamilyen $a \in X$ esetén van olyan $k(a) \subset X$ környezet, hogy

$$\emptyset \neq \mathcal{D} := \Big(k(a) \setminus \{a\}\Big) \cap \mathcal{D}_f = \Big(k(a) \setminus \{a\}\Big) \cap \mathcal{D}_g,$$

és $f(x) = g(x)$ $(x \in \mathcal{D})$, akkor – feltéve, hogy $a \in \mathcal{D}'_f \cap \mathcal{D}'_g$ – a következő mondható: az f függvénynek akkor és csak akkor van határértéke az a helyen, ha a g függvénynek is van az a-ban határértéke, és az utóbbi esetben $\lim_a f = \lim_a g$. Röviden azt mondjuk, hogy a $\lim_a f$ létezése vagy nem létezése az illető függvény *lokális tulajdonsága.* Speciálisan azt kapjuk, hogy a $\lim_a f$ létezése és „milyensége" szempontjából érdektelen az $a \in \mathcal{D}_f$, vagy $a \notin \mathcal{D}_f$ kérdés, ill. az $a \in \mathcal{D}_f$ esetben az $f(a)$ helyettesítési érték.

xiv) (*Átviteli elv.*) Bármilyen $f \in X \to Y$ függvény és $a \in \mathcal{D}'_f$ esetén az f-nek az a helyen akkor és csak akkor létezik határértéke, ha tetszőleges

$$(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, \ \lim(x_n) = a$$

sorozatra az $\Big(f(x_n)\Big)$ sorozatnak van határértéke. Ha létezik az $A := \lim_a f$ határérték, akkor az előbbiekben említett minden (x_n) sorozatra

$$\lim \Big(f(x_n)\Big) = A.$$

Tegyük fel ui. először azt, hogy létezik az $A := \lim_a f$ határérték. Ekkor az A-nak bármilyen $K(A) \subset Y$ környezetéhez van olyan $k(a) \subset X$ környezet, hogy

$$f(x) \in K(A) \qquad \Big(a \neq x \in \mathcal{D}_f \cap k(a)\Big).$$

Ha (x_n) egy, a tételben szereplő sorozat, akkor az előbbi $k(a)$ környezethez megadható olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, amellyel

$$a \neq x_n \in k(a) \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Következésképpen

$$f(x_n) \in K(A) \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Mindez azt jelenti, hogy az $\big(f(x_n)\big)$ sorozatnak van határértéke, és $\lim\big(f(x_n)\big) = A$.

Most tegyük fel azt, hogy minden

$$(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\} \ \ , \ \ \lim(x_n) = a$$

esetén az $\big(f(x_n)\big)$ sorozatnak van határértéke. Mutassuk meg, hogy ekkor akármilyen, a most említett (x_n) sorozatra $\lim\big(f(x_n)\big)$ ugyanaz az Y-beli elem. Valóban, ha $(\tilde{x}_n)$ is egy ilyen sorozat, akkor legyen

$$x_n^* := \begin{cases} x_{n/2} & (n = 2k) \\ \\ \tilde{x}_{(n-1)/2} & (n = 2k+1) \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $(x_n^*) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, és (könnyen láthatóan) létezik a $\lim(x_n^*) = a$ határérték. Következésképpen az $\big(f(x_n^*)\big)$ sorozatnak is van határértéke. Viszont

$$\lim\big(f(x_n^*)\big) = \lim\big(f(x_{2n}^*)\big) = \lim\big(f(x_n)\big) = \lim\big(f(x_{2n+1}^*)\big) = \lim\big(f(\tilde{x}_n)\big),$$

így $\lim\big(f(\tilde{x}_n)\big) = \lim\big(f(x_n)\big)$. Legyen tehát $A := \lim\big(f(x_n)\big)$, ahol (x_n) valamilyen, a tételben szereplő sorozat. Lássuk be, hogy f-nek az a helyen van határértéke, és

$$\lim_a f = A.$$

Indirekt úton ui. tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ekkor egy alkalmas $K(A) \subset Y$ környezettel bármilyen $X \supset k(a)$-t is választunk, valamilyen $a \neq x \in k(a) \cap \mathcal{D}_f$ elemmel azt kapjuk, hogy $f(x) \notin K(A)$. Speciálisan tetszőleges $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett a

$$k(a) := k_{1/n}(a)$$

választással legyen $a \neq x_n \in k_{1/n}(a) \cap \mathcal{D}_f$ egy olyan elem, amelyre $f(x_n) \notin K(A)$. Mivel

$$0 < \rho(x_n, a) < 1/n \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

ezért $\lim(x_n) = a$. Így a feltételek miatt $\lim\big(f(x_n)\big) = A$. Ez azt jelenti, hogy az előbbi $K(A)$ környezethez lennie kell olyan $M \in \mathbf{N}$ küszöbindexnek, amellyel

$$f(x_n) \in K(A) \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Ez nyilván ellentmond annak, hogy $f(x_n) \notin K(A) \quad (0 < n \in \mathbf{N})$.

xv) Mit jelent az, hogy egy $f \in X \to Y$ függvénynek valamilyen $a \in \mathcal{D}'_f$ helyen nincs határértéke? Az utóbbi definíciója alapján azt, hogy bármilyen $A \in Y$ esetén alkalmas $K(A) \subset Y$ környezettel akármilyen $k(a) \subset X$ mellett

$$f\Big[\Big(k(a) \setminus \{a\}\Big) \cap \mathcal{D}_f\Big] \not\subset K(A).$$

Más szóval megadható olyan $a \neq x \in \mathcal{D}_f \cap k(a)$, hogy $f(x) \notin K(A)$. Van tehát olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $\delta > 0$ esetén egy alkalmas $x \in \mathcal{D}_f$, $0 < \rho(x, a) < \delta$ helyen

$$\sigma(f(x), A) \geq \varepsilon.$$

Ezt az információt igen gyakran úgy „használjuk ki", hogy δ helyébe $1/n$-et írva $(0 < n \in \mathbf{N})$ egy $x_n \in \mathcal{D}_f$, $0 < \rho(x_n, a) < 1/n$ elemmel

$$\sigma(f(x_n), A) \geq \varepsilon.$$

(Világos, hogy ekkor $\lim(x_n) = a$, de az A nem határértéke az $\Big(f(x_n)\Big)$ sorozatnak (aminek lehet, hogy nincs is határértéke).)

xvi) Világos, hogy ha $f \in X \to Y$, $a \in \mathcal{D}'_f \cap \mathcal{D}_f$, akkor $f \in \mathcal{C}\{a\}$ azzal ekvivalens, hogy létezik a $\lim_a f$ határérték, és $\lim_a f = f(a)$. Ha viszont $a \in \mathcal{D}_f \setminus \mathcal{D}'_f$ (azaz az a egy ún. *izolált pontja* a $\mathcal{D}_f$-nek), akkor az f „automatikusan" folytonos az a-ban: $f \in \mathcal{C}\{a\}$. Az utóbbi esetben ui. van olyan $v > 0$, amellyel

$$k_v(a) \cap \mathcal{D}_f = \{a\}.$$

Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén bármilyen $0 < \delta < v$ mellett $k_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f = \{a\}$, így

$$\sigma\Big(f(x), f(a)\Big) = \sigma\Big(f(a), f(a)\Big) = 0 < \varepsilon \qquad (x \in k_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f = \{a\}).$$

xvii) Adott (X, ρ), (Y, σ), (Z, δ) metrikus terekre tekintsük (valamilyen $1 \leq p \leq +\infty$ mellett) az

$$(Y \times Z, \sigma \times \delta)$$

szorzatteret (ld. 1.2. vii) megjegyzés). Legyen

$$f = (f_1, f_2) \in X \to Y \times Z,$$

ahol

$$f_1 \in X \to Y \quad , \quad f_2 \in X \to Z$$

az f (absztrakt) vektorfüggvény koordinátafüggvényei (ld. iv) – v) megjegyzések). Ekkor a 2.9. Tétel mintájára (a bizonyításnak az értelemszerű módosításával együtt, akár kettőnél több (véges sok) tér szorzata esetén is) az alábbi állítást kapjuk:

az f függvénynek az $a \in \mathcal{D}'_f$ helyen akkor és csak akkor létezik határértéke, ha léteznek az

$$A_1 := \lim_a f_1,\ A_2 := \lim_a f_2$$

határértékek, amikor is

$$\lim_a f = (A_1, A_2).$$

Legyen pl. $1 \le s,\, m \in \mathbf{N},\, 0 < p,\, q \le +\infty$, és vegyük a

$$(\mathbf{K}^s, \rho_p),\ (\mathbf{K}^m, \rho_q)$$

metrikus tereket, továbbá az

$$f = (f_1, ..., f_m) \in \mathbf{K}^s \to \mathbf{K}^m$$

függvényt és az $a \in \mathcal{D}'_f$ pontot. Ekkor az f függvénynek az a helyen akkor és csak akkor létezik határértéke, ha minden $i = 1, ..., m$ esetén létezik az $A_i := \lim_a f_i$ határérték. Az utóbbi esetben

$$\lim_a f = (A_1, ..., A_m).$$

xviii) Tegyük fel, hogy a xi) – xii) megjegyzésekben az (Y, σ) metrikus tér egyben normált tér: az Y lineáris tér (mint eddig is, most is a $\mathbf{K}$ testre vonatkozóan), $\|.\|$ norma az Y-on, és

$$\sigma(y, z) = \|y - z\| \qquad (y, z \in Y).$$

Ha

$$f, g \in X \to Y,\ \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset,$$

valamint az $a \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)'$ torlódási pontban léteznek az

$$A := \lim_a f,\ B := \lim_a g$$

határértékek, akkor tetszőleges $\lambda \in \mathbf{K}$ esetén az $f + \lambda g$ összegfüggvénynek az a helyen van határértéke, és

$$\lim_a (f + \lambda g) = A + \lambda B.$$

Speciálisan, ha

$$Y := \mathbf{K},\ \|y\| := |y| \qquad (y \in \mathbf{K}),$$

akkor az fg szorzatfüggvénynek az a helyen van határértéke, és

$$\lim_a (fg) = AB.$$

Továbbá, ha itt $B \neq 0,$ akkor az f/g hányadosfüggvénynek is van az a helyen határértéke, és
$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{A}{B}.$$
Mindez az átviteli elv (ld. xiv) megjegyzés) és a számsorozatokra, ill. absztrakt sorozatokra vonatkozó műveleti szabályok (ld. 1.4. xiv) megjegyzés) alapján nyilvánvaló. Így pl. az

$$1 \leq s,\, m \in \mathbf{N},\, 0 < p \leq +\infty,\, 1 \leq q \leq +\infty,\, (X, \rho) := (\mathbf{K}^s, \rho_p),\, (Y, \sigma) := (\mathbf{K}^m, \|.\|_q)$$

választással a
$$h,\, l \in \mathbf{K}^s \to \mathbf{K},\;\; f,\, g \in \mathbf{K}^s \to \mathbf{K}^m$$
(esetenként többváltozós, ill. többváltozós vektor-)függvényekre kapjuk (a fenti feltételek mellett) a határérték és a műveletek kapcsolatát kifejező

$$\lim_a (f + \lambda g) = \lim_a f + \lambda\cdot \lim_a g \;\;,\;\; \lim_a (hl) = \lim_a h\cdot \lim_a l \;\;,\;\; \lim_a \frac{h}{l} = \frac{\lim_a h}{\lim_a l}$$

egyenlőségeket.

xix) Amint azt már korábban is megjegyeztük, a speciális folytonos függvényekkel (kontrakciókkal) kapcsolatos 1.5.2. Tétel mind a gyakorlat, mind pedig az elmélet szempontjából központi jelentőségű (ld. 1.6. viii) – xiv) megjegyzések). Számos hasonló jellegű „fixponttétel" ismert a matematikában, amelyek közül itt most csupán egyet említünk meg (bizonyítás nélkül), amelyik a többváltozós vektorfüggvények analízisében játszik fontos szerepet. Nevezetesen, tekintsük az $(\mathbf{R}^n, \|.\|_p)$ teret valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N},$ $1 \leq p \leq +\infty$ paraméterek mellett. Tegyük fel, hogy adott az $a \in \mathbf{R}^n$ „középpont", az $r > 0$ „sugár", és legyen

$$G := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - a\|_p \leq r\}.$$

Tekintsük továbbá a folytonos
$$f : G \to G$$
függvényt. Ekkor az ún. *Brouwer-fixponttétel* szerint az f-nek van fixpontja, azaz létezik olyan $\alpha \in G,$ amellyel $f(\alpha) = \alpha.$ Speciálisan, ha $n = 1,$ akkor

$$G = [a - r, a + r] =: [u, v],$$

és az állítás egyszerű következménye az (egyváltozós) 2.8. (Bolzano-) Tételnek. Ekkor ui.
$$f : [u, v] \to [u, v],$$

azaz

$$u \le f(x) \le v \qquad (u \le x \le v).$$

Ezért a szintén folytonos

$$g(x) := f(x) - x \qquad (u \le x \le v)$$

függvényre

$$0 \le g(u) = f(u) - u \ , \ g(v) = f(v) - v \le 0.$$

Így a 2.8. Tétel miatt létezik olyan $\alpha \in [u, v]$ amelyre

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = 0,$$

azaz $f(\alpha) = \alpha$.

Megjegyezzük, hogy az $n \ge 2$ esetben a Brouwer-tétel bizonyítása ennél jóval összetettebb.

3. fejezet

Differenciálható leképezések

3.1. A differenciálhatóság fogalma

A továbbiakban adott $1 \leq n,\, m \in \mathbf{N}$ mellett definiálni fogjuk az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ függvények valamilyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontbeli differenciálhatóságát. Ezzel kapcsolatban emlékeztetünk az „egyváltozós" analízisben megismert $n = m = 1$ esetre, azaz, az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egyváltozós valós függvények differenciálhatóságára. Nevezetesen, az f függvény differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ helyen, ha alkalmas $q \in \mathbf{R}$ számmal és $\varepsilon \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvénnyel az alábbiak teljesülnek:

$$f(a+h) - f(a) = qh + \varepsilon(h) \cdot h \qquad (h \in \mathbf{R},\, a+h \in \mathcal{D}_f),$$

és

$$\varepsilon(h) \to 0 \qquad (h \to 0).$$

A fenti definíciónak eleget tevő $f'(a) := q$ szám (az f függvény a-beli deriváltja) egyértelműen létezik.

Legyen az előbbiekben

$$L(x) := qx \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ekkor (ld. 2.1. vi) megjegyzés) az $L : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény korlátos lineáris leképezés, és a differenciálhatóságra vonatkozó fenti formula így (is) írható:

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + \eta(h) \cdot |h| \qquad (h \in \mathbf{R},\, a+h \in \mathcal{D}_f),$$

ahol az $\eta \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre

$$\eta(h) \to 0 \qquad (|h| \to 0).$$

Minden „készen áll" ahhoz, hogy a differenciálhatóság utóbbi definícióját kiterjesszük többváltozós vektorfüggvényekre. Legyen tehát

$$1 \leq n,\, m \in \mathbf{N},\ 1 \leq p,\, q \leq +\infty,$$

és tekintsük az

$$(\mathbf{R}^n, \|.\|_p),\ (\mathbf{R}^m, \|.\|_q)$$

normált tereket (ld. 1.2. v) megjegyzés). Azt mondjuk, hogy az f függvény *differenciálható az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *helyen,* ha van olyan $L \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ korlátos lineáris leképezés és olyan $\eta \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ függvény, hogy

$$(*) \qquad f(a+h)-f(a) = L(h)+\eta(h)\cdot \|h\|_p \qquad (h \in \mathbf{R}^n,\ a+h \in \mathcal{D}_f),$$

ahol

$$\eta(h) \to 0 \qquad (\|h\|_p \to 0).$$

Tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$\|\eta(h)\|_q < \varepsilon \qquad (0 < \|h\|_p < \delta).$$

Mindezt írhatjuk úgy is, hogy

$$\|\eta(h)\|_q \to 0 \qquad (\|h\|_p \to 0).$$

(Emlékeztetünk arra, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ miatt egy $r > 0$ sugárral $K_r(a) \subset \mathcal{D}_f$, ezért

$$a + h \in \mathcal{D}_f \qquad (h \in \mathbf{R}^n,\ \|h\|_p < r),$$

következésképpen $K_r(0) \subset \mathcal{D}_\eta$.) Más szóval

$$\frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|_p} \to 0 \qquad (\|h\|_p \to 0),$$

vagy ami ezzel ekvivalens

$$(*) \qquad \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_q}{\|h\|_p} \to 0 \qquad (\|h\|_p \to 0).$$

Mindezt az $f \in D\{a\}$ jelöléssel juttatjuk kifejezésre. Ha ez minden $a \in \mathcal{D}_f$ esetén teljesül, akkor röviden azt mondjuk, hogy az f függvény *differenciálható,* és erre az $f \in D$ jelölést használjuk.

A fentiekben – ha kell – feltételezhetjük, hogy $\eta(0) = 0$, azaz $\lim_0 \eta = 0$ miatt az η folytonos a 0-ban: $\eta \in \mathcal{C}\{0\}$. Világos ui., hogy $h = 0$ esetén $f(a+h) - f(a) = 0$, és (mint minden lineáris leképezés) $L(0) = 0$, így $\|0\|_p = 0$ miatt $L(0) + \eta(0)\cdot \|0\|_p = 0$ is igaz (függetlenül az $\eta(0)$ helyettesítési értéktől).

Az is könnyen átlátható, hogy a $(*)$ összefüggésben a $h \in \mathbf{R}^n$, $a + h \in \mathcal{D}_f$ feltételezés helyett elegendő azt megkövetelni, hogy valamilyen $r > 0$ mellett a $(*)$ egyenlőség minden olyan $h \in K_r(0)$ esetén fennálljon, amelyre $a + h \in \mathcal{D}_f$. Mivel $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, ezért pl.

eleve van olyan $r > 0$, hogy $K_r(a) \subset \mathcal{D}_f$. Így minden $h \in K_r(0)$ vektorra $a + h \in \mathcal{D}_f$ „automatikusan" igaz.

Jegyezzük meg továbbá, hogy a pontbeli differenciálhatóság most megfogalmazott definíciója csak látszólag függ a $\|.\|_p$, $\|.\|_q$ normáktól. Ui. a $\|.\|_p$, $\|.\|_q$ normák ekvivalenciája miatt (ld. 1.4. xi) megjegyzés) a $(*)$ tulajdonság vagy minden $1 \leq p, q \leq +\infty$ mellett teljesül, vagy egyik mellett sem. Ezért a továbbiakban többnyire a $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ normák valamelyikét fogjuk „használni".

3.1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *függvény valamilyen* $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ *helyen differenciálható. Akkor az ennek a definíciójában szereplő* $L \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ *korlátos lineáris leképezés egyértelműen létezik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az

$$L,\ \tilde{L} \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$$

leképezésekkel, és az

$$\eta,\ \tilde{\eta} \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

függvényekkel

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + \eta(h)\cdot \|h\|_p = \tilde{L}(h) + \tilde{\eta}(h)\cdot \|h\|_p \qquad (h \in \mathbf{R}^n,\ a + h \in \mathcal{D}_f),$$

ahol

$$\eta(h) \to 0\ ,\ \tilde{\eta}(h) \to 0 \qquad (\|h\|_p \to 0).$$

Ekkor az

$$L_* := L - \tilde{L} \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)\ \ ,\ \ p = q = \infty := +\infty$$

jelöléssel

$$\frac{\|L_*(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty} = \|\tilde{\eta}(h) - \eta(h)\|_\infty \leq \|\tilde{\eta}(h)\|_\infty + \|\eta(h)\|_\infty \to 0 \qquad (\|h\|_\infty \to 0)$$

is igaz. Ha $i = 1, ..., n$ és

$$e_i := (0, ..., 0, 1, 0, ...0) \in \mathbf{R}^n$$

(ahol tehát az e_i vektor i-edik koordinátája 1, a többi 0), akkor $\|te_i\|_\infty = |t| \quad (t \in \mathbf{R})$ miatt

$$\frac{\|L_*(te_i)\|_\infty}{\|te_i\|_\infty} = \frac{\|t\cdot L_*(e_i)\|_\infty}{\|te_i\|_\infty} = \|L_*(e_i)\|_\infty \to 0 \qquad (t \to 0).$$

Ez csak úgy lehetséges, ha $L_*(e_i) = 0\ \ (i = 1, ..., n)$, amiből az

$$x = (x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot e_i \in \mathbf{R}^n$$

előállítást figyelembe véve

$$L_*(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot L(e_i) = 0,$$

azaz $L_* \equiv 0$ adódik. Mindez azt jelenti, hogy $L = \tilde{L}$. ∎

Az $f \in D\{a\}$ esetben az előbbi tétel szerint egyértelműen létező $L \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ korlátos lineáris leképezést az f függvény a-beli *deriváltjának* nevezzük, és az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük. Az $L \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ halmaz és az $\mathbf{R}^{m\times n}$ mátrixok kapcsolatára gondolva tehát minden $f \in D\{a\}$ függvény esetén egyértelműen adható meg olyan $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ mátrix, amellyel az $L := f'(a)$ leképezés a következő alakú:

$$L(x) = Ax \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

A most felidézett $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \approx \mathbf{R}^{m\times n}$ megfeleltetés alapján ezért azt is mondjuk (és írjuk), hogy

$$f'(a) := A$$

az f függvény a-beli *deriváltja* vagy *deriváltmátrixa.* Az $f'(a)$ (derivált)mátrixra használatos a *Jacobi-mátrix* elnevezés is. Ha tehát $f \in D\{a\}$, akkor

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \eta(h) \cdot \|h\| \qquad (h \in \mathbf{R}^n,\ a+h \in \mathcal{D}_f),$$

ahol $\eta(h) \to 0 \quad (\|h\| \to 0)$, és $\|.\|$ a $\|.\|_p \quad (1 \le p \le +\infty)$ normák bármelyike lehet. Ha itt $m = 1$, azaz $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, akkor

$$\operatorname{grad} f(a) := f'(a) \in \mathbf{R}^{1\times n} \approx \mathbf{R}^n,$$

azaz ebben az esetben az $f'(a)$ Jacobi-mátrix tekinthető egy $\mathbf{R}^n$-beli vektornak, amit az f függvény a-beli *gradiensének* nevezünk. Ekkor az előbbi $f'(a)h \quad (h \in \mathbf{R}^n)$ mátrix-vektor-szorzat nem más, mint a $\operatorname{grad} f(a)$ és a h vektor „szokásos" ($\mathbf{R}^n$-beli) skaláris szorzata:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j \qquad \Big(u = (u_1, ..., u_n),\ v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbf{R}^n\Big).$$

Ezért

$$f(a+h) - f(a) = \langle \operatorname{grad} f(a), h \rangle + \eta(h) \cdot \|h\| \qquad (h \in \mathbf{R}^n,\ a+h \in \mathcal{D}_f).$$

Speciálisan, ha $n = 1$ is igaz, akkor $\operatorname{grad} f(a) = f'(a) \in \mathbf{R}$, az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egyváltozós valós függvény „klasszikus" a-beli deriváltja.

Ha

$$\mathcal{D} := \{a \in \mathcal{D}_f : f \in D\{a\}\} \neq \emptyset,$$

akkor az

$$\mathcal{D} \ni x \mapsto \operatorname{grad} f(x) \in \mathbf{R}^n$$

függvényt (az f *deriváltfüggvényét*) az f függvény *gradiensének* nevezzük, és a $\operatorname{grad} f$ szimbólummal jelöljük. Tehát

$$\operatorname{grad} f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n.$$

Ha viszont $n = 1$, azaz $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$, akkor

$$f'(a) \in \mathbf{R}^{m\times 1} \approx \mathbf{R}^m,$$

tehát ebben az esetben is az $f'(a)$ Jacobi-mátrix tekinthető egy, de most $\mathbf{R}^m$-beli vektornak, amit az f függvény a-beli *deriváltvektorának* nevezünk. Ekkor

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \eta(h)\cdot|h| \qquad (h \in \mathbf{R},\ a+h \in \mathcal{D}_f).$$

(Az $m = 1$ esetben most is visszakapjuk az egyváltozós valós függvények deriváltját.) Tegyük fel, hogy

$$\mathcal{D} := \{a \in \mathcal{D}_f : f \in D\{a\}\} \neq \emptyset.$$

Ekkor az

$$\mathcal{D} \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbf{R}^m$$

függvény az f *deriváltfüggvénye,* amit az f' szimbólummal jelölünk:

$$f' \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m.$$

Legyen továbbra is $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$, és állapodjunk meg a következőkben: egy $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ mátrix sorvektorait az A_i $(i = 1, ..., m)$ szimbólummal fogjuk jelölni, magát az A mátrixot pedig az A_i-k szerint particionáljuk. Ha tehát $A = \left(a_{ik}\right)_{i,k=1}^{m,n}$ (azaz a_{ik} az A mátrix i-edik sorának a k-adik eleme $(i = 1, ..., m,$ ill. $k = 1, ..., n)$, akkor

$$A_i := (a_{i1}, ..., a_{in}) \in \mathbf{R}^n \qquad (i = 1, ..., m),$$

és

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}.$$

A mátrix-vektor-szorzás értelmezése szerint

$$Ax = \Big(\langle A_1, x\rangle, \ldots, \langle A_m, x\rangle\Big) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

3.1.2. Tétel. *Legyen* $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$. *Az* $f = (f_1, ..., f_m) \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *függvény akkor és csak akkor differenciálható az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *helyen, ha minden* $i = 1, ..., m$ *esetén az* $f_i \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *koordinátafüggvény differenciálható az* a*-ban. Ha* $f \in D\{a\}$, *akkor az* $f'(a)$ *Jacobi-mátrix a következő alakú:*

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \mathrm{grad} f_1(a) \\ \mathrm{grad} f_2(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad} f_m(a) \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $f \in D\{a\}$, és jelöljük az $f'(a) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ Jacobi-mátrix sorvektorait A_i-vel $(i = 1, ..., m)$:

$$f'(a) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}.$$

Ekkor alkalmas

$$\eta = (\eta_1, ..., \eta_m) \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \quad , \quad \eta(h) \to 0 \quad (\|h\|_2 \to 0)$$

függvénnyel

$$f(a+h) - f(a) = \Big(f_1(a+h) - f_1(a), \ldots, f_m(a+h) - f_m(a)\Big) =$$

$$f'(a)h + \eta(h) \cdot \|h\|_2 =$$

$$\Big(\langle A_1, h\rangle, \ldots, \langle A_m, h\rangle\Big) + \Big(\eta_1(h) \cdot \|h\|_2, \ldots, \eta_m(h) \cdot \|h\|_2\Big) \qquad (h \in \mathbf{R}^n,\ a+h \in \mathcal{D}_f).$$

Következésképpen minden $i = 1, ..., m$ mellett az η függvény $\eta_i \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ koordinátafüggvényeivel

$$(*) \qquad f_i(a+h) - f_i(a) = \langle A_i, h\rangle + \eta_i(h) \cdot \|h\|_2 \qquad (h \in \mathbf{R}^n,\ a+h \in \mathcal{D}_f).$$

Mivel a 2.1. xvii) megjegyzés szerint bármely $i = 1, ..., m$ indexre

$$\eta_i(h) \to 0 \qquad (\|h\|_2 \to 0),$$

ezért az előbbi $(*)$ összefüggés azt jelenti, hogy $f_i \in D\{a\}$, és

$$A_i = \mathrm{grad} f_i(a) \qquad (i = 1, ..., m).$$

Most azt tegyük fel, hogy $f_i \in D\{a\}$ $(i = 1, ..., m)$, amikor is valamilyen

$$\eta_i \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \ , \ \eta_i \to 0 \quad (\|h\|_2 \to 0) \qquad (i = 1, ..., m)$$

függvényekkel

$$f_i(a+h) - f_i(a) = \langle \mathrm{grad} f_i(a), h \rangle + \eta_i(h) \cdot \|h\|_2 \qquad (h \in \mathbf{R}^n, \ a+h \in \mathcal{D}_f, \ i = 1, ..., m).$$

Ha tehát

$$A := \begin{bmatrix} \mathrm{grad}\, f_1(a) \\ \mathrm{grad}\, f_2(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\, f_m(a) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times n},$$

akkor az

$$\eta := (\eta_1, ..., \eta_m) \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

függvénnyel

$$f(a+h) - f(a) = Ah + \eta(h) \cdot \|h\|_2,$$

ahol (ld. 2.1. xvii) megjegyzés) $\eta(h) \to 0$ $(\|h\|_2 \to 0)$. Ez azt jelenti, hogy $f \in D\{a\}$, és (ld. 3.1.1. Tétel) $f'(a) = A$. ■

Az előbbi tétel szerint a Jacobi-mátrix „kiszámításához" elegendő a gradiens vektorok „szerkezetét" ismernünk. Ez utóbbihoz induljunk ki (tetszőlegesen adott $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett) egy $h \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényből. Ha $i = 1, ..., n$ és $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathcal{D}_h$, akkor legyen

$$\mathcal{D}_{h,i}^{(a)} := \{t \in \mathbf{R} : (a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n) \in \mathcal{D}_h\}.$$

Értelemszerűen

$$\mathcal{D}_{h,1}^{(a)} := \{t \in \mathbf{R} : (t, a_2, ..., a_n) \in \mathcal{D}_h\}, \ \mathcal{D}_{h,n}^{(a)} := \{t \in \mathbf{R} : (a_1, ..., a_{n-1}, t) \in \mathcal{D}_h\}.$$

Világos, hogy $\mathcal{D}_{h,i}^{(a)} \subset \mathbf{R}$, és $\mathcal{D}_{h,i}^{(a)} \neq \emptyset$, hiszen $a_i \in \mathcal{D}_{h,i}^{(a)}$. Speciálisan, ha $n = 1$, akkor $\mathcal{D}_{h,1}^{(a)} = \mathcal{D}_h$. Legyen ezek után

$$h_{a,i} : \mathcal{D}_{h,i}^{(a)} \to \mathbf{R}$$

az a függvény, amelyre

$$h_{a,i}(t) := h(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n) \qquad \left(t \in \mathcal{D}_{h,i}^{(a)}\right),$$

ahol

$$h_{a,1}(t) = h(t, a_2, ..., a_n) \qquad \left(t \in \mathcal{D}_{h,1}^{(a)}\right)$$

és
$$h_{a,n}(t) = h(a_1, ..., a_{n-1}, t) \qquad \left(t \in \mathcal{D}^{(a)}_{h,n}\right).$$
A $h_{a,i}$ $(i = 1, ..., n)$ *parciális függvények* valamennyien egyváltozós valós függvények:
$$h_{a,i} \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$$
Ha itt $n = 1$, azaz $h \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, akkor nyilván $h_{a,1} = h$.

A fenti jelöléseket megtartva azt mondjuk, hogy a h függvény az a-ban *az i-edik változó szerint parcálisan deriválható* (vagy differenciálható), ha $h_{a,i} \in D\{a_i\}$. Ekkor a
$$\partial_i h(a) := h'_{a,i}(a_i)$$
valós számot a h függvény a-beli, *az i-edik változó szerinti parcális deriváltjának* nevezzük. Következésképpen
$$\partial_i h(a) = \lim_{x \to a_i} \frac{h_{a,i}(x) - h_{a,i}(a_i)}{x - a_i} = \lim_{x \to a_i} \frac{h(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n) - h(a)}{x - a_i} =$$
$$\lim_{t \to 0} \frac{h(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ..., a_n) - h(a)}{t}.$$
Formálisan szólva tehát az i-edik változó szerinti parciális derivált kiszámításakor a h függvény argumentumában (az a_j $(i \neq j = 1, ..., n)$ komponenseket rögzítve) csak „az i-edik változótól való függést" vesszük figyelembe, és az így kapott egyváltozós valós függvényt deriváljuk az a_i helyen.

Tegyük fel, hogy $i = 1, ..., n,$ és a fenti $h \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényre
$$\mathcal{D}_{h,i} := \{a \in \mathcal{D}_h : \text{ létezik a } \partial_i f(a) \text{ parciáis derivált}\} \neq \emptyset.$$
Ekkor a
$$\mathcal{D}_{h,i} \ni x \mapsto \partial_i h(x)$$
függvényt a h függvény *i-edik változó szerinti parciális deriváltfüggvényének* nevezzük, és a $\partial_i h$ szimbólummal jelöljük.

Legyen pl. $n := 2,$ és
$$h(x, y) := x^2 + 2xy^2 + x + 3y + 1 \qquad \left((x, y) \in \mathbf{R}^2\right).$$
Ekkor tetszőleges $a = (u, v) \in \mathbf{R}^2$ esetén
$$\mathcal{D}^{(a)}_{h,i} = \mathbf{R} \qquad (i = 1, 2),$$
és
$$h_{a,1}(t) = h(t, v) = t^2 + 2tv^2 + t + 3v + 1 \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

$$h_{a,2}(t) = h(u,t) = u^2 + 2ut^2 + u + 3t + 1 \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Mivel a $h_{a,1}$, $h_{a,2} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények differenciálhatók, valamint

$$h'_{a,1}(t) = 2t + 2v^2 + 1 \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

$$h'_{a,2}(t) = 4ut + 3 \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ezért léteznek a $\partial_1 h(a)$, $\partial_2 h(a)$ parciális deriváltak, és

$$\partial_1 h(a) = h'_{a,1}(u) = 2u + 2v^2 + 1, \ \partial_2 h(a) = h'_{a,2}(v) = 4uv + 3.$$

3.1.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy valamilyen $1 \le n \in \mathbf{N}$, $h \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ és $a \in \mathcal{D}_h$ esetén $h \in D\{a\}$. Ekkor minden $i = 1,...,n$ mellett a h függvény az i-edik változó szerint parciálisan deriválható az a-ban, és*

$$\operatorname{grad} h(a) = \Big(\partial_1 h(a), \ldots, \partial_n h(a)\Big).$$

Bizonyítás. A $h \in D\{a\}$ feltételezés miatt $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_h$, így egy alkalmas $r > 0$ sugárral $K_r(a) \subset \mathcal{D}_h$. Ha pl. $\mathbf{R}^n$-ben a ρ_∞ metrikát (vagy ami ugyanaz, a $\|.\|_\infty$ normát) tekintjük, akkor (ld. 1.8. vii) megjegyzés)

$$(a_i - r, a_i + r) \subset \mathcal{D}^{(a)}_{h,i} \qquad (i = 1,...,n),$$

más szóval $a_i \in \operatorname{int} \mathcal{D}^{(a)}_{h,i}$ $(i = 1,...,n)$. Továbbá alkalmas $\eta \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvénnyel

$$\eta(x) \to 0 \qquad (\,\|x\|_\infty \to 0),$$

és a

$$(d_1,...,d_n) := \operatorname{grad} h(a)$$

jelöléssel

$$h(a+x) - h(a) = \langle d, x\rangle + \eta(x)\cdot \|x\|_\infty =$$

$$\sum_{j=1}^n d_j x_j + \eta(x)\cdot \|x\|_\infty \qquad (x = (x_1,...,x_n) \in \mathbf{R}^n,\ a + x \in \mathcal{D}_h).$$

Legyen itt valamilyen $i = 1,...,n$ esetén

$$x = (0,\ldots,0,t,0,\ldots,0) \qquad (t \in \mathbf{R},\ a + x \in \mathcal{D}_h)$$

(ahol tehát az x vektor i-edik koordinátája t, a többi nulla), akkor

$$h(a+x) - h(a) = h(a_1,...,a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1},...,a_n) - h(a) =$$

$$= h_{a,i}(a_i + t) - h_{a,i}(a_i) = d_i t + \eta(x)\cdot |t| \qquad (t \in \mathbf{R},\ |t| < r).$$

Mivel

$$\lim_{t\to 0} \eta(0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0) = \lim_{\|x\|_\infty \to 0} \eta(x) = 0,$$

ezért mindez azt jelenti, hogy $h_{a,i} \in D\{a_i\}$, és

$$h'_{a,i}(a_i) = d_i \qquad (i = 1, ..., n).$$

Tehát léteznek a

$$\partial_i h(a) = h'_{a,i}(a_i) = d_i \qquad (i = 1, ..., n)$$

parciális deriváltak, és

$$\operatorname{grad} h(a) = (d_1, ..., d_n) = \Big(\partial_1 h(a), \ldots, \partial_n h(a)\Big).$$

■

Figyelembe véve a 3.1.2. Tételt, a Jacobi-mátrix „szerkezetére" az alábbi állítás adódik.

3.1.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy adott* $1 \le n, m \in \mathbf{N}$ *esetén az*

$$f = (f_1, ..., f_m) \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

függvény differenciálható az $a \in \mathcal{D}_f$ *pontban. Ekkor az* $f'(a)$ *Jacobi-mátrix a következő alakú:*

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \ldots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \ldots & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \ldots & \partial_n f_m(a) \end{bmatrix}.$$

Tehát az $f'(a) \in \mathbf{R}^{m\times n}$ mátrix i-edik sorának a k-adik eleme

$$\partial_k f_i(a) \qquad (i = 1, ..., m;\ k = 1, ..., n).$$

Speciálisan az $n = 1$ esetben

$$\partial_1 f_i(a) = f'_i(a) \qquad (i = 1, ..., m),$$

azaz

$$f'(a) = \Big(f'_1(a), \ldots, f'_m(a)\Big).$$

Például az

$$f(x,y) := (x^2 - y, x + 2y, y^2) \in \mathbf{R}^3 \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big)$$

függvény koordinátafüggvényei

$$f_1(x,y) = x^2 - y,\ f_2(x,y) = x + 2y,\ f_3(x,y) = y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big),$$

amelyek – könnyen belátható módon – differenciálható függvények. Ezért $f \in D$, és

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2y \end{bmatrix} \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big).$$

A 3.1.3. Tétel szerint egy többváltozós függvényt illetően a differenciálhatóság maga után vonja a (minden változó szerinti) parciális differenciálhatóságot. A „fordított" következtetés ugyanakkor csak bizonyos egyéb feltételek esetén igaz. Erről szól a

3.1.5. Tétel. *Legyen* $1 \le n \in \mathbf{N}$, $h \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_h$. *Tegyük fel, hogy valamilyen* $i \in \{1, ..., n\}$ *esetén*

- *egy alkalmas* $r > 0$ *mellett* $K_r(a) \subset \mathcal{D}_h$, *és tetszőleges* $x \in K_r(a)$ *helyen léteznek a* $\partial_j h(x)$ $(i \neq j = 1, ..., n)$ *parciális deriváltak*;
- *mindegyik* $\partial_j h$ $(i \neq j = 1, ..., n)$ *parciális deriváltfüggvény folytonos az* a*-ban*;
- *létezik a* $\partial_i h(a)$ *parciális derivált.*

Ekkor $h \in D\{a\}$, *azaz a* h *függvény differenciálható az* a*-ban.*

Bizonyítás. Nyilván feltehető, hogy $n \ge 2$, és (a formai egyszerűség kedvéért) $i = 1$. Ekkor ($\mathbf{R}^n$-ben a $\|.\|_\infty$ normát vezetve be) minden

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n \ , \ \ \|x\|_\infty < r$$

vektorra a $h(a+x) - h(a)$ különbséget olyan függvényértékek különbségeinek az összegeként fogjuk felírni, ahol az egyes különbségek argumentumaiban csak egyetlen koordinátában van változás. A legegyszerűbb eset az, amikor $n = 2$. Ekkor az

$$A := (a_1, a_2),\ B := (a_1 + x_1, a_2 + x_2),\ C := (a_1 + x_1, a_2)$$

jelölésekkel

$$h(a + x) - h(a) = h(B) - h(A) = h(C) - h(A) + h(B) - h(C).$$

Világos, hogy az itteni $h(C) - h(A)$ első különbségben a h argumentumában az a-nak csak az első komponense változik, ezért ezt a különbséget „kezelhetjük" az a-beli, első változó szerinti paricális deriválhatóság alapján. Ugyanakkor a $h(B) - h(C)$ eltérésben a h argumentuma csak a második koordinátában változik, így ezt a különbséget (a $K_r(a)$-ban feltételezett) második változó szerinti parciális deriválhatóságot figyelembe véve számolhatjuk.

Ezek után legyen most már $n \geq 2$ tetszőleges, amikor is

$$h(a + x) - h(a) = h(a_1 + x_1, a_2 + x_2, ..., a_n + x_n) - h(a_1, a_2, ..., a_n) =$$

$$h(a_1 + x_1, a_2, ..., a_n) - h(a_1, a_2, ..., a_n) + h(a_1 + x_1, a_2 + x_2, ..., a_n + x_n) - h(a_1 + x_1, a_2, ..., a_n),$$

ahol (a parciális differenciálhatóság értelmezéséhez fentebb bevezetett jelölésekkel)

$$h(a_1 + x_1, a_2, ..., a_n) - h(a_1, a_2, ..., a_n) = h_{a,1}(a_1 + x_1) - h_{a,1}(a_1).$$

Mivel feltételeztük, hogy létezik a $\partial_1 h(a) = h'_{a,1}(a_1)$ parciális derivált, ezért egy alkalmas

$$\omega \in \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \omega(t) \to 0 \qquad (t \to 0)$$

függvénnyel

$$h(a_1 + x_1, a_2, ..., a_n) - h(a_1, a_2, ..., a_n) =$$

$$h'_{a,1}(a_1) \cdot x_1 + \omega(x_1) \cdot x_1 = \partial_1 h(a) \cdot x_1 + \omega(x_1) \cdot x_1 \qquad (|x_1| < r).$$

Továbbá (ha $n \geq 3$)

$$h(a_1 + x_1, a_2 + x_2, ..., a_n + x_n) - h(a_1 + x_1, a_2, ..., a_n) =$$

$$h(a_1 + x_1, a_2 + x_2, a_3, ..., a_n) - h(a_1 + x_1, a_2, a_3, ..., a_n) +$$

$$h(a_1 + x_1, a_2 + x_2, a_3 + x_3, ..., a_n + x_n) - h(a_1 + x_1, a_2 + x_2, a_3, ..., a_n),$$

ahol ($|x_1| < r$ mellett) a

$$b := (a_1 + x_1, a_2, a_3, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n$$

jelöléssel

$$h(a_1 + x_1, a_2 + x_2, a_3, ..., a_n) - h(a_1 + x_1, a_2, a_3, ..., a_n) = h_{b,2}(a_2 + x_2) - h_{b,2}(a_2).$$

Mivel a $K_r(a)$ környezet minden $z \in K_r(a)$ pontjában létezik a $\partial_2 h(z)$ parciális derivált, ezért a

$$h_{b,2} : (-r, r) \to \mathbf{R}$$

függvény differenciálható. Az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényekre vonatkozó Lagrange-középértéktétel szerint ezért valamilyen $\xi_2 \in [a_2, a_2 + x_2]$ (vagy $\xi_2 \in [a_2 + x_2, a_2]$) helyen

$$h_{b,2}(a_2 + x_2) - h_{b,2}(a_2) = h'_{b,2}(\xi_2) \cdot x_2 = \partial_2 h(a_1 + x_1, \xi_2, a_3, ..., a_n) \cdot x_2.$$

Hasonlóan, ha $n \geq 4$, akkor

$$h(a_1+x_1,a_2+x_2,a_3+x_3,...,a_n+x_n)-h(a_1+x_1,a_2+x_2,a_3,...,a_n)=$$

$$h(a_1+x_1,a_2+x_2,a_3+x_3,a_4,...,a_n)-h(a_1+x_1,a_2+x_2,a_3,a_4,...,a_n)+$$

$$h(a_1+x_1,a_2+x_2,a_3+x_3,a_4+x_4,...,a_n+x_n)-h(a_1+x_1,a_2+x_2,a_3+x_3,a_4,...,a_n),$$

és az előzőekkel analóg módon kapunk olyan $\xi_3 \in [a_3, a_3+x_3]$ (vagy $\xi_3 \in [a_3+x_3, a_3]$) helyet, amellyel

$$h(a_1+x_1,a_2+x_2,a_3+x_3,a_4,...,a_n)-h(a_1+x_1,a_2+x_2,a_3,a_4,...,a_n)=$$

$$\partial_3 h(a_1+x_1,a_2+x_2,\xi_3,a_4,...,a_n)\cdot x_3.$$

Ezt az eljárást folytatva tehát alkalmas

$$\xi_i \in [a_i, a_i+x_i] \quad (\text{vagy } \xi_i \in [a_i+x_i, a_i]) \qquad (i=2,...,n)$$

helyeken

$$h(a+x)-h(a)=$$

$$\partial_1 h(a)\cdot x_1+\omega(x_1)\cdot x_1+\sum_{i=2}^{n}\partial_i h(a_1+x_1,...,a_{i-1}+x_{i-1},\xi_i,a_{i+1},...,a_n)\cdot x_i=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\partial_i h(a)\cdot x_i+\omega(x_1)\cdot x_1+\sum_{i=2}^{n}\Big(\partial_i h(a_{x,i})-\partial_i h(a)\Big)\cdot x_i,$$

ahol

$$a_{x,i}:=(a_1+x_1,...,a_{i-1}+x_{i-1},\xi_i,a_{i+1},...,a_n) \qquad (i=2,...,n).$$

Feltettük, hogy $\partial_i h \in \mathcal{C}\{a\}$ $(i=2,...,n)$, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $0 < \delta < r$, hogy

$$|\partial_i h(z)-\partial_i h(a)| < \varepsilon \qquad (z \in K_\delta(a),\ i=2,...,n).$$

Mivel

$$\|a_{x,i}-a\|_\infty = \|(x_1,...,x_{i-1},\xi_i-a_i,0,...,0)\|_\infty = \max\{|x_1|,...,|x_{i-1}|,|\xi_i-a_i|\} \leq$$

$$\max\{|x_1|,...,|x_{i-1}|,|x_i|\} \leq \|x\|_\infty \qquad (i=2,...,n),$$

ezért az $\|x\|_\infty < \delta$ választással

$$|\partial_i h(a_{x,i})-\partial_i h(a)| < \varepsilon \qquad (i=2,...,n).$$

Az $\omega(t)\to 0$ $(t\to 0)$ miatt az is feltehető egyúttal, hogy $|\omega(x_1)| < \varepsilon$. Ha tehát

$$\varphi(x):=\Big(\omega(x_1),\partial_2 h(a_{x,2})-\partial_2 h(a),...,\partial_n h(a_{x,n})-\partial_n h(a)\Big) \qquad \Big(x \in K_r(0)\Big),$$

akkor
$$\|\varphi(x)\|_\infty < \varepsilon \qquad \big(x \in K_\delta(0)\big),$$
röviden: $\varphi(x) \to 0 \quad (\|x\|_\infty \to 0)$. Továbbá az
$$A := \Big(\partial_1 h(a), ..., \partial_n h(a)\Big) \in \mathbf{R}^n$$
vektorral
$$h(a+x) - h(a) = \langle A, x\rangle + \langle \varphi(x), x\rangle \qquad \big(x \in K_r(0)\big).$$
Legyen
$$\eta(x) := \langle \varphi(x), x/\|x\|_\infty\rangle \qquad \Big(0 \neq x \in K_r(0)\Big)\ ,\ \ \eta(0) := 0,$$
ekkor
$$h(a+x) - h(a) = \langle A, x\rangle + \eta(x)\cdot \|x\|_\infty \qquad \big(x \in K_r(0)\big),$$
és a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget felhasználva (ld. még 1.4. xi) megjegyzés)
$$|\eta(x)| \le \|\varphi(x)\|_2\cdot \|x/\|x\|_\infty\|_2 \le n\cdot \|\varphi(x)\|_\infty \to 0 \qquad (\|x\|_\infty \to 0)$$
miatt $\eta(x) \to 0 \quad (\|x\|_\infty \to 0)$.

Összegezve a fentieket azt kaptuk, hogy $h \in D\{a\}$, és $h'(a) = \operatorname{grad} h(a) = A$. ■

Azt mondjuk, hogy a 3.1.4. Tételben szereplő
$$f = (f_1, ..., f_m) \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$
függvény *folytonosan differenciálható az* $a \in \mathcal{D}_f$ *pontban,* ha a következők teljesülnek:

- van olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy minden $x \in K(a)$ helyen $f \in D\{x\}$, és
- valamennyi $i = 1, ..., n$ esetén a $\operatorname{grad} f_i$ függvény folytonos az a-ban.

Mindezt az $f \in C^1\{a\}$ szimbólummal fogjuk jelölni. Ha tetszőleges $a \in \mathcal{D}_f$ pontban $f \in C^1\{a\}$, akkor az f-et *folytonosan differenciálhatónak* (vagy *deriválhatónak*) nevezzük, és röviden azt írjuk, hogy $f \in C^1$. Mivel (ld. 3.1.3. Tétel)
$$\operatorname{grad} f_i = (\partial_1 f_i, ..., \partial_n f_i) \qquad (i = 1, ..., m),$$
ezért (ld. 2.9. Tétel) a $\operatorname{grad} f_i$ függvények a-beli folytonossága azzal ekvivalens, hogy
$$\partial_k f_i \in \mathcal{C}\{a\} \qquad (i = 1, ..., m;\ k = 1, ..., n).$$

3.2. Megjegyzések

i) Könnyű meggondolni, hogy tetszőleges $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$, $L \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ és $a \in \mathbf{R}^n$ esetén $L \in D\{a\}$, és $L'(a) = L$. Ui.

$$L(a+x) - L(a) = L(a) + L(x) - L(a) = L(x) + \eta(x) \cdot \|x\| \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

ahol $\eta(t) := 0 \quad (t \in \mathbf{R}^n)$. Nyilván $\eta(x) \to 0 \quad (\|x\| \to 0)$, tehát L-re teljesül az a-beli differenciálhatóság minden feltétele.

ii) A pontbeli differenciálhatóság a többváltozós vektorfüggvények körében is „erősebb" tulajdonság a pontbeli folytonosságnál: ha $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$ és az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ függvény differenciálható valamilyen $a \in \mathcal{D}_f$ helyen, akkor az f az a-ban folytonos. Valóban, pl. a $\|.\| := \|.\|_2$ vektornormával

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \eta(h) \cdot \|h\| \qquad (h \in \mathbf{R}^n,\, a+h \in \mathcal{D}_f),$$

ahol $\eta(h) \to 0 \quad (\|h\| \to 0)$, ezért $\|\eta(h)\| \to 0 \quad (\|h\| \to 0)$, és

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq \|f'(a)\|_{(2,2)} \cdot \|h\| + \|\eta(h)\| \cdot \|h\| \to 0 \qquad (\|h\| \to 0).$$

Így létezik a $\lim_{\|h\| \to 0} f(a+h) = f(a)$ határérték, más szóval létezik a $\lim_a f = f(a)$ határérték, ami a jelen esetben az f függvény a-beli folytonosságát igazolja.

iii) Az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ függvényekre adott differenciálhatósági definíciónk minden további nélkül megfogalmazható normált terek közötti absztrakt függvényekre is. Legyenek ui. adottak az $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ normált terek, és az $f \in X \to Y$ függvény. Ekkor az f-et differenciálhatónak nevezzük valamilyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, ha alkalmas $A \in L(X, Y)$ korlátos lineáris leképezéssel és $\eta \in X \to Y$ függvénnyel

$$f(a+h) - f(a) = A(h) + \eta(h) \cdot \|h\|_X \qquad (h \in X,\, a+h \in \mathcal{D}_f),$$

ahol

$$\eta(h) \to 0 \qquad (\|h\|_X \to 0).$$

Másképp fogalmazva

$$\frac{f(a+h) - f(a) - A(h)}{\|h\|_X} \to 0 \qquad (\|h\|_X \to 0),$$

vagy ami ezzel ekvivalens

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - A(h)\|_Y}{\|h\|_X} \to 0 \qquad (\|h\|_X \to 0).$$

Megmutatható, hogy ekkor egyértelműen létezik ilyen $A \in L(X, Y)$, amelyet az f függvény a-beli *deriváltjának* (vagy *Fréchet-deriváltjának*) nevezünk.

iv) A 3.1.3. Tételre utalva azt mondhatjuk, hogy minden (adott pontban) differenciálható $h \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény ugyanebben a pontban minden változó szerint parciálisan is deriválható. Egy egyszerű példa mutatja azt, hogy mindez fordítva nem igaz. Legyen ui. $n := 2$, és

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & (x = 0 \text{ vagy } y = 0) \\ \\ 0 & (xy \neq 0) \end{cases} \qquad \Big((x,y) \in \mathbf{R}^2\Big).$$

Világos, hogy ez a függvény nem folytonos az $a := (0,0)$-ban, ezért (ld. i) megjegyzés) $f \notin D\{a\}$. Ugyanakkor

$$\mathcal{D}_{f,i}^{(a)} = \mathbf{R} \qquad (i = 1,2),$$

és

$$f_{a,i} \equiv 1 \qquad (i = 1,2).$$

Ezért $f_{a,i} \in D\{0\}$ $(i = 1,2)$, és

$$f'_{a,i}(0) = \partial_i f(0) = 0 \qquad (i = 1,2).$$

v) Tegyük fel, hogy $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$, és $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ esetén

$$\mathcal{D} := \{a \in \mathcal{D}_f : f \in D\{a\}\} \neq \emptyset.$$

Ekkor az

$$\mathcal{D} \ni x \mapsto f'(x)$$

leképezés az f függvény *deriváltfüggvénye* (vagy röviden a *deriváltja*), amit az f' szimbólummal jelölünk. Tehát (az $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \approx \mathbf{R}^{m \times n}$ azonosítással élve)

$$f' \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{m \times n}.$$

Nyilvánvaló, hogy az f' deriváltfüggvény akkor és csak akkor többváltozós vektorfüggvény, azaz $f' \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$ (valamilyen $1 \leq s \in \mathbf{N}$ „kitevővel"), ha $n = 1$, vagy $m = 1$ (és ekkor $s = m$, ill. $s = n$).

vi) A parciális derivált fogalma speciális esete egy általánosabb, ún. iránymenti deriváltnak. Legyen ennek az értelmezéséhez $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $h \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, és $a \in \mathcal{D}_h$. Tegyük fel, hogy valamilyen $e \in \mathbf{R}^n$, $\|e\| = 1$ vektor („irány") esetén (ahol $\|.\|$ a „szokásos" $\|.\|_p$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ normák valamelyike) a

$$\mathcal{D}_{h,e}^{(a)} := \{t \in \mathbf{R} : a + te \in \mathcal{D}_h\}$$

jelöléssel a

$$h_e(t) := h(a + te) \qquad \Big(t \in \mathcal{D}_{h,e}^{(a)}\Big)$$

függvény (azaz „geometriailag" a h-nak az a-n átmenő e irányú egyenesre való leszűkítése) differenciálható a 0-ban. (Világos, hogy $0 \in \mathcal{D}_{h,e}^{(a)}$ minden h függvényre teljesül, ill. $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_h$ esetén $0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{h,e}^{(a)}$ is igaz.) Ekkor a

$$\partial_e h(a) := h_e'(0)$$

számot a h függvény a-beli (az e által meghatározott) *iránymenti deriváltjának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy ha $i = 1, ..., n,$ és

$$e := (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbf{R}^n$$

(ahol tehát az e vektor i-edik koordinátája 1, a többi 0), akkor (ld. 3.1.)

$$h_e(t) = h_{a,i}(a_i + t) \qquad \left(t \in \mathcal{D}_{h,e}^{(a)}\right).$$

Következésképpen $h_e \in D\{0\}$ azzal ekvivalens, hogy $h_{a,i} \in D\{a_i\}$, azaz azzal, hogy létezik a $\partial_i h(a)$ parciális derivált, és

$$\partial_e h(a) = h_e'(0) = h_{a,i}'(a_i) = \partial_i h(a).$$

vii) A parciális differenciálhatóságot (vagy általában az iránymenti deriválhatóságot), ill. a parciális (iránymenti) deriváltakat és parciális deriváltfüggvényeket formálisan többváltozós valós függvényekre értelmeztük. Nyilvánvaló, hogy az említett fogalmak minden további nélkül ugyanúgy definiálhatók $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ függvényekre $m > 1$ esetén is. Sőt, analóg módon értelmezhetjük a „vektorváltozó szerinti" parciális deriváltakat is. Induljunk ki ehhez egy $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ függvényből, ahol $1 \leq m \in \mathbf{N}$ és $2 \leq n \in \mathbf{N}$. Tegyük fel, hogy

$$a = (a_1, ..., a_n) \in \mathcal{D}_f,$$

és legyen most

$$i := (i_1, ..., i_s) \in \{1, ..., n\}^s$$

(*multiindex*), ahol $s \in \{1, ..., n-1\}$, és $i_1 < \ldots < i_s$. Ha

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

akkor az $x = (\xi_1, \xi_2)$ szimbólum jelentse a következőt:

$$\xi_1 := (x_{i_1}, ..., x_{i_s}) \in \mathbf{R}^s, \ \xi_2 := (x_{j_1}, ..., x_{j_{n-s}}) \in \mathbf{R}^{n-s},$$

ahol $j_1 < \ldots < j_{n-s}$, és

$$\{j_1, ..., j_{n-s}\} := \{1, ..., n\} \setminus \{i_1, ..., i_s\}.$$

Legyen ennek megfelelően $a = (u_1, u_2)$, és

$$\mathcal{D}_{f,i}^{(a)} := \{\xi \in \mathbf{R}^s : (\xi, u_2) \in \mathcal{D}_f\}.$$

Látható, hogy $\mathcal{D}_{f,i}^{(a)} \neq \emptyset$, hiszen $u_1 \in \mathcal{D}_{f,i}^{(a)}$. Definiáljuk ezek után az

$$f_{a,i} : \mathcal{D}_{f,i}^{(a)} \to \mathbf{R}^m$$

függvényt a következőképpen:

$$f_{a,i}(\xi) := f(\xi, u_2) \qquad \left(\xi \in \mathcal{D}_{f,i}^{(a)}\right).$$

Azt mondjuk, hogy az f függvény az a-ban *parciálisan deriválható* az i multiindex által a fentiekben meghatározott (vektor)változó szerint, ha $f_{a,i} \in D\{u_1\}$, és ekkor legyen

$$\partial_i f(a) := f'_{a,i}(u_1)$$

az a-beli, az i multiindexnek megfelelő (vektor)változó szerinti *parciális derivált.* Világos, hogy $s = 1$ esetén a „korábbi" parciális deriválhatóságot, ill. parciális deriváltat kapjuk. Mivel

$$f_{a,i} \in \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m,$$

ezért $\partial_i f(a) \in \mathbf{R}^{m \times s}$ (az *a-beli parciális deriváltmátrix*). Ez utóbbi (ld. 3.1.4. Tétel) $f \in D\{a\}$ esetén az $f'(a)$ Jacobi-mátrixnak az i_1-edik, ..., i_s-edik oszlopai által meghatározott részmátrixa. Szokás a fenti

$$x = (\xi_1, \xi_2)$$

felbontásban ξ_1-et az x első (vektor)változójának, ξ_2-t a második (vektor)változójának nevezni. Erre utalva azt is írjuk, hogy

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^{n-s},$$

és a fenti $\partial_i f(a)$ szimbólum helyett a $\partial_{\mathbf{1}} f(a)$-t, a $j := (j_1, ..., j_{n-s})$ multiindex által analóg módon meghatározott $\partial_j f(a) \in \mathbf{R}^{m \times (n-s)}$ helyett pedig a $\partial_{\mathbf{2}} f(a)$ szimbólumot használjuk. Ennek megfelelően az $f \in D\{a\}$ esetben az

$$f'(a) = [\partial_{\mathbf{1}} f(a) \;\; \partial_{\mathbf{2}} f(a)]$$

írásmód utal az $f'(a)$ mátrix particionálására.

viii) Mutassuk meg, hogy ha az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \quad (1 \leq n, m \in \mathbf{N})$ függvényre az $a \in \mathrm{int}\mathcal{D}_f$ helyen $f \in D\{a\}$ igaz, akkor tetszőleges $e \in \mathbf{R}^n$, $\|e\| = 1$ vektorral az

$$f_e(t) := f(a + te) \qquad (t \in \mathbf{R},\, a + te \in \mathcal{D}_f)$$

függvény differenciálható a 0-ban, és (ld. vi) megjegyzés)

$$\partial_e f(a) = f'_e(0) = f'(a)e.$$

Az $m = 1$ esetben tehát

$$\partial_e f(a) = \langle \operatorname{grad} f(a), e\rangle.$$

Ui. az $f \in D\{a\}$ feltételezés miatt $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, amiből $0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f_e}$ is következik. Továbbá alkalmas

$$\eta \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m,\ \eta(x) \to 0 \qquad (\|x\| \to 0)$$

függvénnyel

$$f(a+x) - f(a) = f'(a)x + \eta(x)\cdot \|x\| \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\ a + x \in \mathcal{D}_f),$$

speciálisan

$$f_e(t) - f_e(0) = f(a+te) - f(a) = f'(a)(te) + \eta(te)\cdot \|te\| =$$

$$\Big(f'(a)e\Big)\cdot t + \eta(te)\cdot \|e\|\cdot |t| = \Big(f'(a)e\Big)\cdot t + \eta(te)\cdot |t| \qquad (t \in \mathbf{R},\ a + te \in \mathcal{D}_f).$$

Ha

$$\varphi(t) := \eta(te) \qquad (t \in \mathbf{R},\ a + te \in \mathcal{D}_f),$$

akkor $\varphi(t) \to 0 \quad (|t| \to 0)$, és

$$f_e(t) - f_e(0) = \Big(f'(a)e\Big)\cdot t + \varphi(t)\cdot |t| \qquad (t \in \mathbf{R},\ a + te \in \mathcal{D}_f).$$

Ez pontosan annak a kritériuma, hogy $f_e \in D\{0\}$ és $f'_e(0) = f'(a)e$.

Megjegyezzük, hogy ha

$$\ell := \{a + te \in \mathbf{R}^n : t \in \mathbf{R}\},$$

akkor f_e nem más, mint az f függvény leszűkítése a $\mathcal{D}_f \cap \ell$ halmazra. Ha pl. $n = 2$, vagy $n = 3$, akkor az f függvényt az a-n átmenő és e irányvektorú ℓ *egyenesre* (ill. ennek a $\mathcal{D}_f$-be eső részére) szűkítjük le.

ix) Legyen pl. $n := 2$, $a := (1,2) \in \mathbf{R}^2$, és

$$f(x,y) := x^2 - y^2 + xy + 1 \qquad \Big((x,y) \in \mathbf{R}^2\Big).$$

Mutassuk meg a differenciálhatóság definíciója alapján, hogy $f \in D\{a\}$. Legyen ehhez

$$h = (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ \ ,\ \ 0 < \|h\| := \|h\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2},$$

ekkor

$$f(a+h) - f(a) = f(1+x, 2+y) - f(1,2) =$$

$$= (1+x)^2 - (2+y)^2 + (1+x)(2+y) + 1 = 4x - 3y + x^2 + xy - y^2 =$$

$$\langle (4,-3),(x,y)\rangle + \frac{x^2+xy-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot \sqrt{x^2+y^2} =:$$

$$\langle (4,-3),h\rangle + \eta(h)\cdot \|h\|.$$

Az $f \in D\{a\}$ állításhoz tehát azt kell megmutatni, hogy az

$$\eta(h) := \frac{x^2+xy-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \big(h=(x,y)\in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$$

függvénynek a $(0,0)$-beli határértéke létezik, és az nulla. Mindez nyilván következik az

$$|\eta(h)| \le \frac{x^2+y^2+|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\sqrt{x^2+y^2} \qquad (\|h\|\to 0)$$

becslésből. Ezért $f \in D\{a\}$, és $\operatorname{grad} f(a) = (4,-3)$.

x) Lássuk be, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^4} & \big((x,y)\in \mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}\big) \\ 0 & (x=y=0) \end{cases}$$

függvény differenciálható az $a := (0,0)$-ban. Valóban, a parciális differenciálhatóság értelmezése kapcsán bevezetett jelölésekkel (ld. 3.1.)

$$\mathcal{D}^{(a)}_{f,1} = \{t\in\mathbf{R} : (t,0)\in\mathcal{D}_f\} = \mathcal{D}^{(a)}_{f,2} = \{t\in\mathbf{R} : (0,t)\in\mathcal{D}_f\} = \mathbf{R},$$

és

$$f_{a,1}(t) = f(t,0) = f_{a,2}(t) = f(0,t) = 0 \qquad (t\in\mathbf{R}).$$

Ezért nyilván léteznek a

$$\partial_1 f(a) = \partial_2 f(a) = 0$$

parciális deriváltak. Következésképpen az $f \in D\{a\}$ differenciálhatósághoz azt kell megmutatnunk (ld. 3.1.3. Tétel), hogy $\operatorname{grad} f(a) = (0,0)$, azaz alkalmas $\eta \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvénnyel

$$f(a+h) - f(a) = f(h) = \eta(h)\cdot \|h\|_2 \qquad (a \ne h \in \mathbf{R}),\ \eta(h)\to 0 \quad (\|h\|_2 \to 0).$$

Legyen itt $h=(x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, ekkor

$$f(h) = \frac{x^3y}{x^2+y^4} = \eta(x,y)\cdot \|(x,y)\|_2 = \eta(x,y)\cdot \sqrt{x^2+y^2},$$

amiből a $2|xy| \le x^2 + y^2$ elemi becslés alapján

$$|\eta(x,y)| = \frac{|x^3y|}{(x^2+y^4)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \le$$

$$\frac{x^2\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{2(x^2+y^4)} \le \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \qquad \Big(\|h\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \to 0\Big).$$

Tehát $\eta(h) \to 0 \quad (\|h\|_2 \to 0)$ valóban teljesül, következésképpen $f \in D\{(0,0)\}$ és $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.

xi) Az előző megjegyzéshez hasonlóan kapjuk, hogy ha

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \Big((x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\Big) \\ 0 & (x = y = 0), \end{cases}$$

akkor léteznek a $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$ parciális deriváltak. Gondoljuk meg ugyanakkor, hogy $f \notin D\{(0,0)\}$. Különben ui. most a x) megjegyzésbeli gondolatmenettel annak kellene teljesülnie, hogy

$$\eta(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2} \to 0 \qquad \Big(\sqrt{x^2+y^2} \to 0\Big).$$

Könnyen belátható, hogy ez nem igaz, ti. az $0 \ne y := x \in \mathbf{R}$ választással

$$\eta(x,x) := \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \not\to 0 \qquad (x \to 0).$$

xii) Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & (y \ne x^2) \\ 0 & (x = y = 0) \\ 1 & (y = x^2 \ne 0) \end{cases} \qquad \Big((x,y) \in \mathbf{R}^2\Big).$$

Ekkor tetszőleges $e \in \mathbf{R}^2$, $\|e\| = 1$ esetén létezik a $\partial_e f(0,0)$ iránymenti derivált, de $f \notin D\{(0,0)\}$. Ti. minden ilyen e-hez nyilván van olyan $0 < r \in \mathbf{R}$, hogy

$$f_e(t) = f(te) = 0 \qquad (|t| < r).$$

Innen az f_e függvény 0-beli differenciálhatósága, valamint

$$\partial_e f((0,0)) = f_e'(0) = 0$$

már nyilvánvaló. Ugyanakkor

$$f(t,t^2)=1 \qquad (0\neq t\in\mathbf{R}),$$

így

$$f(t,t^2)\to 1\neq 0=f((0,0)) \qquad (t\to 0)$$

miatt az f függvény nem folytonos a $(0,0)$-ban, tehát (ld. 3.2. ii) megjegyzés) ugyanitt nem is differenciálható.

xiii) A $\partial_i f$, ill. a $\partial_i f(a)$ jelölés mellett használatos még a $\partial_{x_i} f$, ill. a $\partial_{x_i} f(a)$ írásmód, esetenként a $\partial_x f$, $\partial_y f$, ..., ill. a $\partial_x f(a)$, $\partial_y f(a)$, ... is. Az egyváltozós esettel analóg módon írjuk az előbbiek helyett gyakran a következőket:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\;,\;\frac{\partial f}{\partial y},\ldots,$$

stb. Ha pl. $n:=3$, és

$$f(x,y,z):=x^3+y^2z+z^3+xyz \qquad \Big((x,y,z)\in\mathbf{R}^3\Big),$$

akkor

$$\partial_1 f(x,y,z)=\partial_x f(x,y,z)=3x^2+yz,\ \partial_2 f(x,y,z)=\partial_y f(x,y,z)=2yz+xz,$$

$$\partial_3 f(x,y,z)=\partial_z f(x,y,z)=y^2+3z^2+xy \qquad \Big((x,y,z)\in\mathbf{R}^3\Big).$$

xiv) Határozzuk meg azt az $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ differenciálható függvényt, amelyre

$$\partial_x f(x,y)=x^2y,\ \partial_y f(x,y)=\frac{x^3}{3}+1 \qquad \Big((x,y)\in\mathbf{R}^2\Big).$$

A x) megjegyzésben már felidézett jelölésekkel tetszőleges $a=(x,y)\in\mathbf{R}^2$ mellett

$$\mathcal{D}_{f,1}^{(a)}=\{t\in\mathbf{R}:(t,y)\in\mathcal{D}_f\}=\mathcal{D}_{f,2}^{(a)}=\{t\in\mathbf{R}:(x,t)\in\mathcal{D}_f\}=\mathbf{R},$$

és

$$f_{a,1}(t)=f(t,y),\ f_{a,2}(t)=f(x,t) \qquad (t\in\mathbf{R}),$$

ill.

$$f'_{a,1}(t)=\partial_1 f(t,y)=t^2y,\ f'_{a,2}(t)=\partial_2 f(x,t)=\frac{x^3}{3}+1 \qquad (t\in\mathbf{R}).$$

Ezért alkalmas $\varphi,\,\psi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ differenciálható függvényekkel

$$f_{a,1}(t)=f(t,y)=\frac{t^3y}{3}+\varphi(y),\ f_{a,2}(t)=f(x,t)=\frac{x^3t}{3}+t+\psi(x) \qquad (t\in\mathbf{R}).$$

Tehát
$$f(x,y) = f_{a,1}(x) = \frac{x^3y}{3} + \varphi(y) = f_{a,2}(y) = \frac{x^3y}{3} + y + \psi(x).$$
Innen az adódik, hogy
$$\psi(x) = \varphi(y) - y \qquad (x, y \in \mathbf{R}).$$
Világos, hogy ez akkor és csak akkor lehetséges, ha valamilyen $c \in \mathbf{R}$ konstanssal
$$\varphi(y) - y = c = \psi(x) \qquad (x, y \in \mathbf{R}).$$
Más szóval
$$f(x,y) = \frac{x^3y}{3} + y + c \qquad \Big((x,y) \in \mathbf{R}^2\Big).$$

xv) Szoros kapcsolat van az $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ „komplex" függvények, és az $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvények differenciálhatósága között. Tekintsünk ehhez először is egy $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvényt, és definiáljuk az f_1, $f_2 \in \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ függvényeket a következőképpen:
$$f_1(z) := \operatorname{Re} f(z),\ f_2(z) := \operatorname{Im} f(z) \qquad (z \in \mathcal{D}_f).$$
Ekkor
$$f(z) = f_1(z) + \imath f_2(z) \qquad (z \in \mathcal{D}_f),$$
amit röviden az $f = f_1 + \imath f_2$ írásmóddal fogunk jelölni. Világos, hogy ha valamilyen $\emptyset \neq A \subset \mathbf{C}$ halmazzal g, $h : A \to \mathbf{R}$, akkor az
$$f(z) := g(z) + \imath h(z) \qquad (z \in A)$$
definícióval értelmezett $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvényre $f_1 = g$ és $f_2 = h$.

Legyen most $g \in \mathbf{C} \to \mathbf{R}$, ekkor definiálhatunk egy $G \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvényt az alábbiak szerint:
$$G(x,y) := g(x + \imath y) \qquad (x + \imath y \in \mathcal{D}_g).$$
A továbbiakban a G-re is a g szimbólumot fogjuk használni, más szóval egy komplex változós valós értékű függvényt esetenként kétváltozós valós függvényként fogunk tekinteni. Ezért a fenti $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvény $f = f_1 + \imath f_2$ felbontásában szereplő f_1, f_2 függvények is felfoghatók úgy, mint f_1, $f_2 \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ leképezések. Tegyük fel, hogy $f \in D\{a\}$, ahol az $a \in \mathbf{C}$ komplex szám kanonikus előállítása az $a_1 := \operatorname{Re} a$, $a_2 := \operatorname{Im} a$ valós számokkal
$$a = a_1 + \imath a_2.$$
Hasonlóan, legyen $f'(a) = d_1 + \imath d_2$, ahol d_1, $d_2 \in \mathbf{R}$. Ekkor a differenciálhatóság definíciója szerint van olyan
$$\eta = \eta_1 + \imath\eta_2 \in \mathbf{C} \to \mathbf{C},\ \lim_a \eta = 0$$

függvény, amellyel

$$f(a+\delta)-f(a)=f'(a)\cdot\delta+\eta(\delta)\cdot|\delta| \qquad (\delta\in\mathbf{C},\ a+\delta\in\mathcal{D}_f).$$

A $\delta=x+\imath y$ $(x,\ y\in\mathbf{R})$ felbontással tehát azt kapjuk, hogy

$$f_1(a_1+x,a_2+y)+\imath f_2(a_1+x,a_2+y)-\Big(f_1(a_1,a_2)+\imath f_2(a_1,a_2)\Big)=$$

$$(d_1+\imath d_2)\cdot(x+\imath y)+\Big(\eta_1(x,y)+\imath\eta_2(x,y)\Big)\cdot\sqrt{x^2+y^2} \qquad (\delta\in\mathbf{C},\ a+\delta\in\mathcal{D}_f).$$

Az előbbi egyenlőség jobb, ill. bal oldalán a valós, valamint a képzetes részek különválasztásával az előbbi δ-kra azt kapjuk, hogy

$$f_1(a_1+x,a_2+y)-f_1(a_1,a_2)=d_1\cdot x-d_2\cdot y+\eta_1(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}=$$

$$\langle(d_1,-d_2),(x,y)\rangle+\eta_1(x,y)\cdot\|(x,y)\|_2,$$

$$f_2(a_1+x,a_2+y)-f_2(a_1,a_2)=d_2\cdot x+d_1\cdot y+\eta_2(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}=$$

$$\langle(d_2,d_1),(x,y)\rangle+\eta_2(x,y)\cdot\|(x,y)\|_2.$$

Világos, hogy

$$\eta_1(x,y)\to 0,\ \eta_2(x,y)\to 0 \qquad (\|(x,y)\|_2\to 0),$$

ezért (ld. 3.1.) $f_1,\ f_2\in D\{(a_1,a_2)\}$, és

$$\operatorname{grad} f_1(a_1,a_2)=(d_1,-d_2),\ \operatorname{grad} f_2(a_1,a_2)=(d_2,d_1).$$

Továbbá (ld. 3.1.3. Tétel)

$$\partial_1 f_1(a_1,a_2)=d_1,\ \partial_2 f_1(a_1,a_2)=-d_2,\ \partial_1 f_2(a_1,a_2)=d_2,\ \partial_2 f_2(a_1,a_2)=d_1,$$

és

$$f'(a)=\partial_1 f_1(a_1,a_2)-\imath\partial_2 f_1(a_1,a_2)=\partial_2 f_2(a_1,a_2)+\imath\partial_1 f_2(a_1,a_2).$$

Nyilvánvaló, hogy az a gondolatmenet, ami az előbbi következményekre vezetett, meg is „fordítható". Más szóval igaz az alábbi ekvivalencia: az $f\in D\{a\}$ pontbeli differenciálhatóság akkor és csak akkor teljesül, ha $f_1,\ f_2\in D\{(a_1,a_2)\}$, és fennállnak a következő egyenlőségek (*Cauchy–Riemann-egyenletek*):

$$\partial_1 f_1(a_1,a_2)=\partial_2 f_2(a_1,a_2),\ \partial_1 f_2(a_1,a_2)=-\partial_2 f_1(a_1,a_2).$$

4. fejezet

Differenciálható függvények vizsgálata

4.1. Műveletek differenciálható függvényekkel

4.1.1. Tétel. *Legyen* $1 \le n, m \in \mathbf{N}$, $f, g \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, *és tegyük fel, hogy valamilyen* $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ *helyen az* f, g *függvények differenciálhatók:* $f, g \in D\{a\}$. *Ekkor tetszőleges* $c \in \mathbf{R}$ *együtthatóval* $f + cg \in D\{a\}$, *és*

$$(f + cg)'(a) = f'(a) + cg'(a).$$

Bizonyítás. Először is jegyezzük meg, hogy az $f, g \in D\{a\}$ differenciálhatósági feltételezés alapján $a \in (\operatorname{int} \mathcal{D}_f) \cap (\operatorname{int} \mathcal{D}_g)$, ezért egy-egy $r, \delta > 0$ számmal

$$K_r(a) \subset \mathcal{D}_f, \ K_\delta(a) \subset \mathcal{D}_g.$$

Ha $\nu := \min\{r, \delta\}$, akkor $K_\nu(a) \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$, azaz $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) = \operatorname{int} \mathcal{D}_{f+cg}$. Továbbá alkalmas η, $\tilde{\eta} \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ függvényekkel

$$\eta(x) \to 0, \ \tilde{\eta}(x) \to 0 \qquad (\|x\| \to 0),$$

és

$$f(a + x) - f(a) = f'(a)x + \eta(x) \cdot \|x\| \qquad (x \in \mathbf{R}^n, \ a + x \in \mathcal{D}_f),$$
$$g(a + x) - g(a) = g'(a)x + \tilde{\eta}(x) \cdot \|x\| \qquad (x \in \mathbf{R}^n, \ a + x \in \mathcal{D}_g).$$

Ezért

$$(f + cg)(a + x) - (f + cg)(a) = f(a + x) - f(a) + c \cdot \Big(g(a + x) - g(a)\Big) =$$

$$\Big(f'(a) + cg'(a)\Big)x + \varphi(x) \cdot \|x\| \qquad (x \in \mathbf{R}^n, \ a + x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f),$$

ahol

$$\varphi(x) := \eta(x) + c\tilde{\eta}(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\eta \cap \mathcal{D}_{\tilde{\eta}}),$$

és a fentiek szerint $K_\delta(0) \subset \mathcal{D}_\eta \cap \mathcal{D}_{\tilde{\eta}}$. Mivel

$$\|\varphi(x)\| \leq \|\eta(x)\| + |c|\cdot \|\tilde{\eta}(x)\| \qquad \big(x \in K_\delta(0)\big),$$

ezért $\varphi(x) \to 0 \quad (\|x\| \to 0)$. Vegyük figyelembe, hogy

$$f'(a) + cg'(a) \in \mathbf{R}^{m\times n},$$

így az $(f+cg)(a+x) - (f+cg)(a)$ különbség előbbi előállítása éppen azt jelenti, hogy az $f+cg$ függvény differenciálható az a-ban, és $(f+cg)'(a) = f'(a) + cg'(a)$. ∎

4.1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy valamilyen* $1 \leq n \in \mathbf{N}$ *mellett az*

$$f,\, g \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

függvényekre egy $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ *helyen* $f, g \in D\{a\}$. *Ekkor az* fg *szorzatfügggvény is differenciálható az a-ban, azaz* $fg \in D\{a\}$, *és*

$$\operatorname{grad}(fg)(a) = g(a)\cdot \operatorname{grad} f(a) + f(a)\cdot \operatorname{grad} g(a).$$

Bizonyítás. Az $f, g \in D\{a\}$ feltétel miatt $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ és $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_g$. Ezért egy-egy $r, \delta > 0$ számmal

$$K_r(a) \subset \mathcal{D}_f,\ K_\delta(a) \subset \mathcal{D}_g.$$

Ha $\nu := \min\{r, \delta\}$, akkor nyilván

$$K_\nu(a) \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = \mathcal{D}_{fg},$$

azaz $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_{fg}$.

Megadhatók továbbá olyan $\eta,\, \tilde{\eta} \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvények, amelyekkel

$$\eta(x) \to 0,\ \ \tilde{\eta}(x) \to 0 \qquad (\|x\| := \|x\|_2 \to 0),$$

és

$$f(a+x) - f(a) = \langle \operatorname{grad} f(a), x\rangle + \eta(x)\cdot \|x\| \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\, a+x \in \mathcal{D}_f),$$
$$g(a+x) - g(a) = \langle \operatorname{grad} g(a), x\rangle + \tilde{\eta}(x)\cdot \|x\| \qquad (x \in \mathbf{R}^n,\, a+x \in \mathcal{D}_g).$$

Következésképpen

$$(fg)(a+x) - (fg)(a) = \big(f(a+x) - f(a)\big)\cdot g(x+a) + \big(g(a+x) - g(a)\big)\cdot f(a) =$$

$$= \Big(\langle \operatorname{grad} f(a), x\rangle + \eta(x)\cdot \|x\|\Big)\cdot g(x+a) + \Big(\langle \operatorname{grad} g(a), x\rangle + \tilde{\eta}(x)\cdot \|x\|\Big)\cdot f(a) =$$

$$\Big(\langle \operatorname{grad} f(a), x\rangle + \eta(x)\cdot \|x\|\Big)\cdot \Big(g(a) + \langle \operatorname{grad} g(a), x\rangle + \tilde{\eta}(x)\cdot \|x\|\Big)+$$

$$\Big(\langle \operatorname{grad} g(a), x\rangle + \tilde{\eta}(x)\cdot \|x\|\Big)\cdot f(a) =$$

$$(*) \qquad \langle g(a)\cdot \operatorname{grad} f(a) + f(a)\cdot \operatorname{grad} g(a), x\rangle + \varphi(x)\cdot \|x\| \qquad \Big(x \in K_\nu(0)\Big),$$

ahol a φ függvény helyettesítési értékei az $0 \neq x \in K_\nu(0)$ helyeken a következők:

$$\varphi(x) := \eta(x)\cdot \Big(g(a) + \langle \operatorname{grad} g(a), x\rangle + \tilde{\eta}(x)\cdot \|x\|\Big)+$$

$$\tilde{\eta}(x)\cdot \Big(f(a) + \langle \operatorname{grad} f(a), x\rangle\Big) + \frac{\langle \operatorname{grad} f(a), x\rangle\cdot \langle \operatorname{grad} g(a), x\rangle}{\|x\|}.$$

Mivel

$$|\langle \operatorname{grad} f(a), x\rangle| \leq \|\operatorname{grad} f(a)\|\cdot \|x\| \to 0 \qquad (\|x\| \to 0),$$

$$|\langle \operatorname{grad} g(a), x\rangle| \leq \|\operatorname{grad} g(a)\|\cdot \|x\| \to 0 \qquad (\|x\| \to 0),$$

$$\frac{|\langle \operatorname{grad} f(a), x\rangle\cdot \langle \operatorname{grad} g(a), x\rangle|}{\|x\|} \leq \|\langle \operatorname{grad} f(a)\|\cdot \|\operatorname{grad} g(a)\|\cdot \|x\| \qquad (\|x\| \to 0),$$

ezért $\varphi(x) \to 0 \quad (\|x\| \to 0)$. Ebből $(*)$ alapján a bizonyítandó állítás következik. ■

4.1.3. Tétel. *Legyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$, az f, $g \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényekről pedig tegyük fel, hogy az $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban differenciálhatók, és $g(a) \neq 0$. Ekkor az f/g hányadosfüggvény is differenciálható az a-ban, és*

$$\operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)\cdot \operatorname{grad} f(a) - f(a)\cdot \operatorname{grad} g(a)}{g^2(a)}.$$

Bizonyítás. Jegyezzük meg, hogy a 4.1.1., 4.1.2. Tételek bizonyításában látottakkal analóg módon kapjuk, hogy egy alkalmas $\nu > 0$ mellett $K_\nu(a) \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Mivel $g(a) \neq 0$ és a g függvény (differenciálható, ezért) folytonos is az a-ban (ld. 3.2. ii) megjegyzés), a ν-ről az is feltehető, hogy

$$g(x) \neq 0 \qquad \Big(x \in K_\nu(a)\Big).$$

Következésképpen

$$K_\nu(a) \subset \mathcal{D}_f \cap (\{x \in \mathcal{D}_g : g(x) \neq 0\}) = \mathcal{D}_{f/g},$$

így $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f/g}$, speciálisan $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{1/g}$.

Azt fogjuk belátni, hogy $1/g \in D\{a\}$, és

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{\operatorname{grad} g(a)}{g^2(a)}.$$

Innen a 4.1.2. Tétel és $f/g = f\cdot(1/g)$ alapján már következik az állításunk.

Legyen $x \in K_\nu(0)$, ekkor $a + x \in \mathcal{D}_{1/g}$, és

$$\frac{1}{g}(a+x) - \frac{1}{g}(a) = \frac{1}{g(a+x)} - \frac{1}{g(a)} = -\frac{g(a+x)-g(a)}{g(a+x)g(a)} =$$

$$-\frac{g(a+x)-g(a)}{g^2(a)}\cdot \frac{g(a)}{g(a+x)}.$$

Tudjuk (ld. $g \in D\{a\}$), hogy alkalmas

$$\eta \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},\ \eta(x) \to 0 \qquad (\|x\| \to 0)$$

függvénnyel

$$g(a+x) - g(a) = \langle \operatorname{grad} g(a), x\rangle + \eta(x)\cdot \|x\| \qquad \big(x \in K_\nu(0)\big),$$

ezért a

$$d := -\frac{\operatorname{grad} g(a)}{g^2(a)},\ \psi(x) := -\frac{\eta(x)}{g(a)\cdot g(a+x)} \qquad \big(x \in K_\nu(0)\big)$$

jelölésekkel

$$-\frac{g(a+x)-g(a)}{g^2(a)}\cdot \frac{g(a)}{g(a+x)} = -\frac{\langle \operatorname{grad} g(a), x\rangle + \eta(x)\cdot \|x\|}{g^2(a)}\cdot \frac{g(a)}{g(a+x)} =$$

$$\langle d, x\rangle\cdot \frac{g(a)}{g(a+x)} + \psi(x)\cdot \|x\| \qquad \big(x \in K_\nu(0)\big).$$

Legyen

$$\omega(x) := \frac{g(a)}{g(a+x)} - 1 \qquad \big(x \in K_\nu(0)\big),$$

ekkor

$$\langle d, x\rangle\cdot \frac{g(a)}{g(a+x)} = \langle d, x\rangle + \langle d, x\rangle\cdot \omega(x) \qquad \big(x \in K_\nu(0)\big).$$

Ha tehát

$$\varphi(x) := \psi(x) + \frac{\langle d, x\rangle\cdot \omega(x)}{\|x\|} \qquad \big(0 \neq x \in K_\nu(0)\big),$$

akkor

$$\frac{1}{g}(a+x) - \frac{1}{g}(a) = \langle d, x\rangle + \varphi(x)\cdot \|x\| \qquad \big(0 \neq x \in K_\nu(0)\big).$$

Így elegendő már csak azt megmutatnunk, hogy

$$\varphi(x) \to 0 \qquad (\|x\| \to 0).$$

Nyugodtan feltehetjük, hogy $\|.\| := \|.\|_2$, amikor is $|\langle d, x\rangle| \leq \|d\| \cdot \|x\|$ miatt

$$|\varphi(x)| \leq |\psi(x)| + \|d\| \cdot |\omega(x)|,$$

ahol

$$g(a+x) \to g(a) \neq 0 \quad (\|x\| \to 0) \ \ , \ \ \eta(x) \to 0 \quad (\|x\| \to 0)$$

alapján

$$\psi(x) \to 0, \ \omega(x) \to 0 \qquad (\|x\| \to 0).$$

Innen $|\varphi(x)| \to 0 \quad (\|x\| \to 0)$, azaz $\varphi(x) \to 0 \quad (\|x\| \to 0)$ már nyilvánvaló. ■

4.1.4. Tétel. *Adott* $1 \leq n, m, s \in \mathbf{N}$ *mellett tekintsük a*

$$g \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, \ f \in \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^s$$

függvényeket. Tegyük fel, hogy az $a \in \mathcal{D}_g$ *pontban* $g(a) \in \mathcal{D}_f$, *valamint* $g \in D\{a\}$ *és* $f \in D\{g(a)\}$. *Ekkor* $f \circ g \in D\{a\}$, *és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

A bizonyítás előtt jegyezzük meg, hogy a tétel állításában szereplő $f'(g(a)) \cdot g'(a)$ mátrix az $f'(g(a)) \in \mathbf{R}^{s \times m}$ és a $g'(a) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ mátrix szorzata, és mint ilyen, $\mathbf{R}^{s \times n}$-beli. Ezt is „várjuk", hiszen

$$f \circ g \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$$

miatt (ha $f \circ g \in D\{y\}$ valamilyen $y \in \mathcal{D}_{f \circ g}$ helyen) $(f \circ g)'(y) \in \mathbf{R}^{s \times n}$.

Bizonyítás. A differenciálhatósági feltételek miatt $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$, $g(a) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Következésképpen megadhatók olyan $r, \delta > 0$ számok, amelyekkel

$$K_r(a) \subset \mathcal{D}_g, \ K_\delta(g(a)) \subset \mathcal{D}_f.$$

A 3.2. ii) megjegyzés szerint a g függvény folytonos is az a-ban, ezért az előbbi $r > 0$ sugárról az is feltehető, hogy

$$g[K_r(a)] \subset K_\delta(g(a)).$$

Tehát egyúttal $g[K_r(a)] \subset \mathcal{D}_f$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy $K_r(a) \subset \mathcal{D}_{f \circ g}$, más szóval $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f \circ g}$.

Írjuk fel a g, ill. az f megváltozását az a, ill. a $g(a)$ pont körül a differenciálhatósági feltételeknek megfelelően:

$$g(a+x)-g(a)=g'(a)x+\eta(x)\cdot\|x\| \qquad (x\in\mathbf{R}^n,\ a+x\in\mathcal{D}_g),$$

$$f(g(a)+y)-f(g(a))=f'(g(a))y+\tilde{\eta}(y)\cdot\|y\| \qquad (y\in\mathbf{R}^m,\ g(a)+y\in\mathcal{D}_f),$$

ahol

$$\eta(x)\to\eta(0)=0 \quad (\|x\|\to 0)\ ,\ \ \tilde{\eta}(y)\to\tilde{\eta}(0)=0 \quad (\|y\|\to 0).$$

Speciálisan az

$$y:=g(a+x)-g(a) \qquad \Big(x\in K_r(0)\Big)$$

választással

$$(f\circ g)(a+x)-(f\circ g)(a)=f(g(a+x))-f(g(a))=$$
$$f'(g(a))\Big(g(a+x)-g(a)\Big)+\tilde{\eta}\Big(g(a+x)-g(a)\Big)\cdot\|g(a+x)-g(a)\|=$$
$$f'(g(a))\Big(g'(a)x+\eta(x)\cdot\|x\|\Big)+\tilde{\eta}\Big(g(a+x)-g(a)\Big)\cdot\|g'(a)x+\|x\|\cdot\eta(x)\|=$$
$$f'(g(a))g'(a)x+f'(g(a))\eta(x)\cdot\|x\|+\tilde{\eta}\Big(g(a+x)-g(a)\Big)\cdot\|g'(a)x+\|x\|\cdot\eta(x)\|.$$

Legyen

$$\varphi(x):=f'(g(a))\eta(x)+\frac{\tilde{\eta}\Big(g(a+x)-g(a)\Big)\cdot\|g'(a)x+\|x\|\cdot\eta(x)\|}{\|x\|} \qquad \Big(0\neq x\in K_r(0)\Big),$$

ekkor

$$(f\circ g)(a+x)-(f\circ g)(a)=f'(g(a))g'(a)x+\varphi(x)\cdot\|x\| \qquad \Big(0\neq x\in K_r(0)\Big).$$

Megmutatjuk, hogy $\varphi(x)\to 0 \quad (\|x\|\to 0)$. Ui. $\eta(x)\to 0 \quad (\|x\|\to 0)$ miatt

$$\|f'(g(a))\eta(x)\|\leq q\cdot\|\eta(x)\|\to 0 \qquad (\|x\|\to 0),$$

ahol q jelenti az $f'(g(a))$ mátrix normáját. Továbbá g folytonos (is) az a-ban, ezért

$$g(a+x)-g(a)\to 0 \qquad (\|x\|\to 0),$$

amiből $\tilde{\eta}(y)\to\tilde{\eta}(0)=0 \quad (\|y\|\to 0)$ miatt

$$\tilde{\eta}\Big(g(a+x)-g(a)\Big)\to 0 \qquad (\|x\|\to 0)$$

következik. Végül,

$$\frac{\Big\|\tilde{\eta}\Big(g(a+x)-g(a)\Big)\Big\|\cdot\Big\|g'(a)x+\|x\|\cdot\eta(x)\Big\|}{\|x\|}\leq$$

$$= \frac{\left\|\tilde{\eta}\Big(g(a+x)-g(a)\Big)\right\|\cdot \Big(\left\|g'(a)x\| + \|x\|\cdot \|\eta(x)\right\|\Big)}{\|x\|} \leq$$

$$\left\|\tilde{\eta}\Big(g(a+x)-g(a)\Big)\right\|\cdot \Big(Q + \|\eta(x)\|\Big) \to 0 \qquad (\|x\| \to 0),$$

ahol Q a $g'(a)$ mátrix normáját jelöli. Mindez azt jelenti, hogy

$$\varphi(x) \to 0 \qquad (\|x\| \to 0)$$

valóban teljesül. Ezért az $(f \circ g)(a+x) - (f \circ g)(a)$ megváltozásra kapott előbbi egyenlőség azt jelenti, hogy $f \circ g \in D\{a\}$, és $(f \circ g)'(a) = f'\Big(g(a)\Big)\cdot g'(a)$. ■

4.1.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $1 \leq n \in \mathbf{N}$, *és az* $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *függvény*

a) *invertálható*;

b) $f \in D\{a\}$, *és az* $f'(a)$ *Jacobi-mátrix invertálható*;

c) $b := f(a)$ *belső pontja a* $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ *halmaznak*;

d) *az* f^{-1} *inverzfüggvény folytonos a* b*-ben.*

Ekkor $f^{-1} \in D\{b\}$, *és*

$$\Big(f^{-1}\Big)'(b) = \Big(f'(a)\Big)^{-1}.$$

Bizonyítás. Az $f \in D\{a\}$ feltétel alapján a következőt mondhatjuk:

$$f(a+t) - b = f'(a)t + \eta(t)\cdot \|t\| \qquad (t \in \mathbf{R}^n,\ a+t \in \mathcal{D}_f),$$

ahol

$$\eta \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n,\ \eta(t) \to \eta(0) = 0 \qquad (\|t\| \to 0).$$

Legyen itt $x := a+t,\ y := f(x)$, ekkor

$$f(x) - f(a) = y - b = f'(a)(x-a) + \eta(x-a)\cdot \|x-a\| \qquad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Ha tehát $A := \Big(f'(a)\Big)^{-1}$, akkor tetszőleges $b \neq y \in \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ esetén (az előbbi jelölésekkel)

$$(*) \qquad x-a = f^{-1}(y) - f^{-1}(b) = A(y-b) - A\eta(x-a)\cdot \|x-a\| =$$

$$A(y-b) - A\eta(x-a)\cdot \frac{\|x-a\|}{\|y-b\|}\cdot \|y-b\| =$$

$$= A(y-b) - A\eta\Big(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\Big)\cdot \frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\|}{\|y-b\|}\cdot \|y-b\|.$$

Legyen

$$\Phi(y) := -A\eta\Big(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\Big)\cdot \frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\|}{\|y-b\|} \qquad (b \neq y \in \mathcal{R}_f),$$

ekkor

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(b) = A(y-b) + \Phi(y)\cdot \|y-b\| \qquad (b \neq y \in \mathcal{R}_f).$$

Elegendő már csak azt megmutatni, hogy

$$\Phi(y) \to 0 \qquad (\|y-b\| \to 0).$$

Először is vegyük észre, hogy az η függvény 0-beli folytonossága, és az f^{-1} függvény b-beli folytonossága miatt

$$\eta\Big(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\Big) \to \eta(0) = 0 \qquad (\|y-b\| \to 0),$$

amiből (az A mátrix normáját q-val jelölve)

$$\Big\| - A\eta\Big(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\Big)\Big\| \leq q\cdot \Big\|\eta\Big(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\Big)\Big\|$$

miatt

$$-A\eta\Big(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\Big) \to \eta(0) = 0 \qquad (\|y-b\| \to 0)$$

is következik. Ezért a $\Phi(y) \to 0 \quad (\|y-b\| \to 0)$ állításhoz annyit kell csupán belátnunk, hogy egy alkalmas $r > 0$ mellett valamilyen $C \geq 0$ „korláttal" (a fenti jelölésekkel)

$$\frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\|}{\|y-b\|} \leq C \qquad \Big(b \neq y \in K_r(b)\Big).$$

Ehhez a $(*)$-ot figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy

$$\Big\|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\Big\| \leq$$

$$q\cdot \|y-b\| + q\cdot \Big\|\eta\Big(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\Big)\Big\| \cdot \Big\|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\Big\| \qquad \Big(y \in K_r(b)\Big),$$

ahol az η-ra és az f^{-1}-re vonatkozó folytonossági feltétel alapján az előbbi r-ről azt is feltehetjük, hogy

$$q\cdot \Big\|\eta\Big(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\Big)\Big\| < \frac{1}{2} \qquad \Big(y \in K_r(b)\Big).$$

Így

$$\Big\|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\Big\| \leq q\cdot \|y-b\| + \frac{1}{2}\cdot \Big\|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\Big\| \qquad \Big(y \in K_r(b)\Big).$$

Következésképpen

$$\frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\|}{\|y-b\|} \leq 2q \qquad \Big(b \neq y \in K_r(b)\Big).$$

■

4.2. Megjegyzések

i) Tegyük fel, hogy a 4.1.4. Tételben $1 \le m$ és $n = s = 1$, azaz

$$g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m, \; f \in \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}.$$

Ekkor $f \circ g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, és $g \in D\{a\}$, $f \in D\{g(a)\}$ esetén

$$(f \circ g)'(a) = \langle \operatorname{grad} f(g(a)), g'(a) \rangle.$$

ii) Ellenőrizzük az összetett függvény differenciálhatóságáról, ill. a deriváltjáról a 4.1.4. Tételben mondottakat az alábbi példán:

$$g(t) := (t, t^2) \in \mathbf{R}^2 \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

$$f(x, y) := x + y \qquad \big((x, y) \in \mathbf{R}^2\big).$$

Tehát az $f \circ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény meghatározása révén lássuk be, hogy $f \circ g \in D$, és számítsuk ki $(f \circ g)'(t)$-t $(t \in \mathbf{R})$. Továbbá a $g'(t)$ $(t \in \mathbf{R})$ deriváltvektor, ill. a $\operatorname{grad} f(x, y)$ $\big((x, y) \in \mathbf{R}^2\big)$ gradiens kiszámításával mutassuk meg, hogy $(f \circ g)'(t)$ megegyezik $\langle \operatorname{grad} f(g(t)), g'(t) \rangle$-vel $(t \in \mathbf{R})$. Valóban,

$$(f \circ g)(t) = f(t, t^2) = t + t^2 \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ami – lévén az $f \circ g$ egy másodfokú polinom – differenciálható függvény, és

$$(f \circ g)'(t) = 1 + 2t \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

A 3.1.2., 3.1.5. Tételek miatt $f, g \in D$, és

$$g'(t) = (1, 2t) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ill.

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (1, 1) \qquad \big((x, y) \in \mathbf{R}^2\big).$$

Következésképpen

$$f'(g(t)) \cdot g'(t) = \langle \operatorname{grad} f(g(t)), g'(t) \rangle = \langle (1, 1), (t, 2t) \rangle = t + 2t \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

iii) Legyen

$$f(x, y) := (x - y, 2x + 3y) \in \mathbf{R}^2 \qquad \big((x, y) \in \mathbf{R}^2\big).$$

A 3.1.5. Tétel szerint világos, hogy $f \in D$, és

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\det f'(x,y) = 5 > 0$, ezért az $f'(x,y) \quad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big)$ mátrix invertálható. Azt sem nehéz belátni, hogy

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

bijekció. Valóban, ha $(u,v) \in \mathbf{R}^2$, akkor az

$$x - y = u, \ 2x + 3y = v$$

(lineáris) egyenletrendszer egyértelműen megoldható, így

$$f^{-1}(u,v) = \left(\frac{v+3u}{5}, \frac{v-2u}{5}\right) \qquad \big((u,v) \in \mathbf{R}^2\big).$$

Ismét csak a 3.1.5. Tétel szerint $f^{-1} \in D$ is igaz, és

$$\left(f^{-1}\right)'(u,v) = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

ami könnyen ellenőrizhetően (amint azt a 4.1.5. Tétel alapján „várjuk") az $f'(x,y)$ Jacobi-mátrix inverze.

iv) Egy $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \quad (1 \le n \in \mathbf{N})$ függvény esetén az

$$N_c := \{x \in \mathcal{D}_f : f(x) = c\} \qquad (c \in \mathcal{R}_f)$$

halmazokat az f *nívófelületeinek* nevezzük. Tegyük fel, hogy valamilyen $\mathcal{D}_f \ni a$-ra

$$g \in \mathbf{R} \to N_{f(a)},$$

ahol egy alkalmas $\alpha \in \mathcal{D}_g$ mellett $a = g(\alpha)$. (Ekkor $\mathcal{R}_g$ egy, az $N_{f(a)}$ nívófelületre írt *felületi görbe*.) Lássuk be, hogy ha $f \in D\{a\}$ és $g \in D\{\alpha\}$, akkor a $g'(\alpha)$ deriváltvektor (az említett felületi görbe *érintővektora*) merőleges $\operatorname{grad} f(a)$-ra, azaz

$$\langle \operatorname{grad} f(a), \, g'(\alpha) \rangle = 0.$$

Ti. egyrészt az

$$F(t) := f(g(t)) = f(a) \qquad (t \in \mathcal{D}_g)$$

konstansfüggvényre nyilván $F \in D\{\alpha\}$, és $F'(\alpha) = 0$. Másrész az F-re, mint összetett függvényre alkalmazható a 4.1.4. Tétel, miszerint

$$0 = F'(\alpha) = f'(g(\alpha)) \cdot g'(\alpha) = \langle \operatorname{grad} f(a), \, g'(\alpha) \rangle.$$

v) Az előző megjegyzés illusztrációjaként tekintsük az

$$f(x,y) := x^2 + y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big),\ g(t) := (\sin\, t, \cos\, t) \quad (t \in \mathbf{R})$$

függvényeket, és legyen $a := (0,1)$, $\alpha := 0$. Ekkor a 3. fejezet tételei szerint f, $g \in D$, és

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, 2y) \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big),$$

és

$$g'(t) = (\cos t, -\sin t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Így

$$\operatorname{grad} f(a) = (0,2),\ g'(0) = (1,0).$$

Tehát

$$\langle \operatorname{grad} f(a),\, g'(\alpha)\rangle = \langle (0,2), (1,0)\rangle = 0.$$

vi) A 3.2. viii) megjegyzésben beláttuk, hogy ha az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \quad (1 \le n, m \in \mathbf{N})$ függvényre $f \in D\{a\}$, akkor tetszőleges $e \in \mathbf{R}^n$, $\|e\| = 1$ vektorral az

$$f_e(t) := f(a + te) \qquad (t \in \mathbf{R},\ a + te \in \mathcal{D}_f)$$

függvény differenciálható a 0-ban, és (ld. 3.2. vi) megjegyzés)

$$\partial_e f(a) = f_e'(0) = f'(a)e.$$

Mindez most már egyszerű következménye a 4.1.4. Tételnek, ui. – egyszerűen belátható módon – a

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto a + te \in \mathbf{R}^n$$

függvény differenciálható, és tetszőleges $\mathbf{R} \ni t$-ben a deriváltja a mondott e vektor. Legyen pl.

$$f(x,y) := x^2 - xy + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big),$$

és $e := (1, \sqrt{3})/2 \in \mathbf{R}^2$. Ekkor (ld. 3. fejezet) $f \in D$, és

$$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (2x - y, 2y - x) \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big).$$

Speciálisan az $a := (1,1)$ esetben

$$\operatorname{grad} f(1,1) = (1,1).$$

Ugyanakkor (ld. 3.2. vi) megjegyzés)

$$f_e(t) = f(a + te) = f(1 + t/2, 1 + t\sqrt{3}/2) =$$

$$= (1+t/2)^2 - (1+t/2)(1+t\sqrt{3}/2) + (1+t\sqrt{3}/2)^2 \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

amiből

$$f_e'(t) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2t - \frac{t\sqrt{3}}{2} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Tehát

$$\partial_e f(1,1) = f_e'(0) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \langle\, \mathrm{grad}\, f(1,1), e\rangle = \langle (1,1), (1,\sqrt{3}\rangle/2.$$

vii) Tegyük fel, hogy $1 \le s, n \in \mathbf{N}$, és a

$$g = (g_1, ..., g_n) \in \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^n,\ f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

függvényekre $g \in D\{a\}$, $f \in D\{g(a)\}$. Ekkor

$$\partial_k(f \circ g)(a) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(g(a)) \cdot \partial_k g_j(a) \qquad (k = 1, ..., s).$$

Ui. $f \circ g \in \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}$, és a 4.1.4. Tétel szerint $f \circ g \in D\{a\}$, ezért (ld. 3.1.3. Tétel) léteznek a

$$\partial_k(f \circ g)(a) \qquad (k = 1, ..., s)$$

parciális deriváltak. Továbbá (ld. 4.1.4. Tétel és 3.1.4. Tétel) a

$$d_k := \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(g(a)) \cdot \partial_k g_j(a) \qquad (k = 1, ..., s)$$

jelölésekkel

$$(f \circ g)'(a) = \big(\partial_1(f \circ g)(a), ..., \partial_s(f \circ g)(a)\big),$$

$$f'(g(a)) \cdot g'(a) = \mathrm{grad}\, f(g(a)) \cdot \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(a) & \partial_2 g_1(a) & \dots & \partial_s g_1(a) \\ \partial_1 g_2(a) & \partial_2 g_2(a) & \dots & \partial_s g_2(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_1 g_n(a) & \partial_2 g_n(a) & \dots & \partial_s g_n(a) \end{bmatrix} =$$

$$\big(\partial_1 f(g(a)), \dots, \partial_n f(g(a))\big) \cdot \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(a) & \partial_2 g_1(a) & \dots & \partial_s g_1(a) \\ \partial_1 g_2(a) & \partial_2 g_2(a) & \dots & \partial_s g_2(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_1 g_n(a) & \partial_2 g_n(a) & \dots & \partial_s g_n(a) \end{bmatrix} = (d_1, ..., d_s).$$

Következésképpen

$$\partial_k(f \circ g)(a) = d_k \qquad (k = 1, ..., s).$$

viii) Legyenek az $f, g \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$ függvények differenciálhatók valamilyen $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ helyen, és tekintsük az alábbi módon értelmezett

$$F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ G \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^2$$

függvényeket:

$$F(x,y) := xy \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big),$$

$$G(t) := \big(f(t), g(t)\big) \qquad (t \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g).$$

Ekkor $F \in D$, ti. (eléggé nyilvánvaló módon) léteznek a

$$\partial_1 F(x,y) = y,\ \partial_2 F(x,y) = x \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big)$$

parciális deriváltak, és a $\partial_1 F$, $\partial_2 F$ függvények folytonosak. Ezért (ld. 3.1.5. Tétel) $F \in D$, és

$$\operatorname{grad} F(x,y) = (y,x) \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big).$$

Hasonlóan, a 3.1.2., 3.1.4. Tételekre tekintettel azt mondhatjuk, hogy $G \in D\{a\}$, és

$$G'(a) = \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f(a) \\ \operatorname{grad} g(a) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times n}.$$

Világos, hogy

$$F \circ G = fg,$$

ezért (ld. 4.1.4. Tétel) $fg \in D\{a\}$, és

$$(fg)'(a) = F'(G(a)) \cdot G'(a) = \operatorname{grad} F(f(a), g(a)) \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f(a) \\ \operatorname{grad} g(a) \end{bmatrix} =$$

$$\big(g(a), f(a)\big) \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f(a) \\ \operatorname{grad} g(a) \end{bmatrix} = g(a) \cdot \operatorname{grad} f(a) + f(a) \cdot \operatorname{grad} g(a)$$

(ld. 4.1.2. Tétel).

ix) Az előző megjegyzésben is szereplő f, g és G függvények mellett legyen most

$$F : \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}$$

a következő függvény:

$$F(x,y) := \frac{x}{y} \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})\big).$$

Ekkor (az előbbi megjegyzéshez hasonlóan) $F \in D$, és

$$\operatorname{grad} F(x,y) = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}\right) \qquad \Big((x,y) \in \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})\Big).$$

Tegyük fel továbbá, hogy az $f, g \in D\{a\}$ feltételen túl $g(a) \neq 0$ is igaz. Nyilván $f/g = F \circ G$, így (ld. 4.1.4. Tétel) $f/g \in D\{a\}$, és

$$(f/g)'(a) = F'(G(a)) \cdot G'(a) = \operatorname{grad} F(f(a), g(a)) \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f(a) \\ \operatorname{grad} g(a) \end{bmatrix} =$$

$$\left(\frac{1}{g(a)}, -\frac{f(a)}{g^2(a)}\right) \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f(a) \\ \operatorname{grad} g(a) \end{bmatrix} = \frac{g(a) \cdot \operatorname{grad} f(a) - f(a) \cdot \operatorname{grad} g(a)}{g^2(a)}$$

(ld. 4.1.3. Tétel).

x) Legyen $1 \leq n, s \in \mathbf{N}$. Azt mondjuk, hogy a differenciálható $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény egy *s-edfokú homogén függvény,* ha bármely $\xi \in \mathbf{R}^n$ mellett

$$f(t\xi) = t^s \cdot f(\xi) \qquad (0 < t \in \mathbf{R}).$$

Bizonyítsuk be, hogy ez akkor és csak akkor igaz, ha

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \partial_i f(\xi) = s \cdot f(\xi) \qquad (\xi \in \mathbf{R}^n).$$

Valóban, ha az f függvény s-edfokú homogén függvény, akkor legyen $\xi \in \mathbf{R}^n$ esetén

$$F(t) := \frac{f(t\xi)}{t^s} \qquad (\mathbf{R} \ni t > 0).$$

Ekkor az így értelmezett $F \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható, ui. világos, hogy a

$$g(t) := t\xi, \; h(t) := t^s \qquad (\mathbf{R} \ni t > 0)$$

függvények differenciálhatók, következésképpen (ld. 4.1.4. Tétel) az $f \circ g$ függvény is az. Tehát az

$$F = \frac{f \circ g}{h} \equiv f(\xi)$$

konstansfüggvény mint differenciálható egyváltozós valós függvények hányadosa is differenciálható. Továbbá (ld. 4.1.4. Tétel)

$$0 = F'(t) = \frac{f'(g(t)) \cdot g'(t) \cdot h(t) - f(g(t)) \cdot h'(t)}{h^2(t)} =$$

$$= \frac{f'(t\xi)\cdot \xi\cdot t^s - s\cdot f(t\xi)\cdot t^{s-1}}{t^{2s}} = \frac{t\cdot \langle\, \mathrm{grad}\, f(t\xi), \xi\rangle - s\cdot f(t\xi)}{t^{s+1}} \qquad (\mathbf{R} \ni t > 0).$$

Speciálisan

$$0 = F'(1) = \langle\, \mathrm{grad}\, f(\xi), \xi\rangle - s\cdot f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\cdot \partial_i f(\xi) - s\cdot f(\xi),$$

ami nem más, mint a $(*)$ összefüggés.

Most azt tegyük fel, hogy a differenciálható $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényre igaz a $(*)$ egyenlőség. Ekkor tetszőleges $t > 0$ számmal

$$f(t\xi) = \frac{t}{s}\cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i\cdot \partial_i f(t\xi) = \frac{t}{s}\cdot \langle\, \mathrm{grad}\, f(t\xi), \xi\rangle = \frac{t}{s}\cdot H'(t) \qquad (\xi \in \mathbf{R}^n,\ t > 0),$$

ahol (rögzített $\xi \in \mathbf{R}^n$ vektorral)

$$H(t) := f(t\xi) \qquad (t > 0).$$

Tehát

$$s\cdot H(t) = t\cdot H'(t) \qquad (t > 0).$$

Ha

$$G(t) := \frac{H(t)}{t^s} \qquad (t > 0),$$

akkor a $G : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ függvényre $G \in D$, és

$$G'(t) = \frac{t^s\cdot H'(t) - st^{s-1}\cdot H(t)}{t^{2s}} \qquad (t > 0),$$

azaz

$$G'(t) = \frac{t\cdot H'(t) - s\cdot H(t)}{t^{s+1}} = 0 \qquad (t > 0).$$

Ez azt jelenti, hogy valamilyen $c \in \mathbf{R}$ konstanssal

$$G(t) = c \qquad (t > 0).$$

Ha itt $t = 1$, akkor $c = G(1) = H(1) = f(\xi)$, és

$$G(t) = f(\xi) = \frac{H(t)}{t^s} \qquad (t > 0),$$

azaz

$$H(t) = f(t\xi) = t^s\cdot f(\xi) \qquad (t > 0).$$

xi) Legyen pl.

$$f(\xi) := f(x,y,z) := (x-2y+3z)^2 \qquad \Big(\xi := (x,y,z) \in \mathbf{R}^3\Big).$$

Világos, hogy az f egy másodfokú homogén függvény, ahol $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ esetén

$$\partial_1 f(x,y,z) = \partial_x f(x,y,z) = 2(x-2y+3z),$$

$$\partial_2 f(x,y,z) = \partial_y f(x,y,z) = -4(x-2y+3z),$$

$$\partial_3 f(x,y,z) = \partial_z f(x,y,z) = 6(x-2y+3z).$$

Ezért a x) megjegyzésbeli $(*)$ feltétel a következő:

$$\sum_{i=1}^{3} \xi_i \cdot \partial_i f(\xi) = 2x(x-2y+3z) - 4y(x-2y+3z) + 6z(x-2y+3z) =$$

$$2(x-2y+3z)^2 = 2f(\xi) \qquad \Big(\xi = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3\Big).$$

xii) Tegyük fel, hogy valamilyen $1 \le n, m, s \in \mathbf{N}$ esetén az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ függvényre $f \in D\{a\}$. Ekkor tetszőleges $A \in \mathbf{R}^{s\times m}$ mátrixra az

$$F(x) := Af(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_f)$$

előírással definiált $F \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$ függvény is differenciálható az a-ban, és

$$F'(a) = Af'(a)$$

(azaz az $F'(a)$ Jacobi-mátrix az A mátrix és az $f'(a)$ Jacobi-mátrix szorzata). Ti.

$$F(a+h) - F(a) = A\cdot \Big(f(a+h) - f(a)\Big) = A\cdot \Big(f'(a)h + \eta(h)\cdot \|h\|\Big) =$$

$$\Big(Af'(a)\Big)\cdot h + \omega(h)\cdot \|h\| \qquad (h \in \mathbf{R}^n,\ a+h \in \mathcal{D}_f),$$

ahol $\eta \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $\eta(h) \to 0 \quad (\|h\| \to 0)$, és

$$\omega(h) := A\cdot \eta(h) \qquad (h \in \mathbf{R}^n,\ a+h \in \mathcal{D}_f).$$

Világos, hogy ha $\|.\|$, $\|.\|_*$, $\|.\|_\bullet$ rendre az $\mathbf{R}^n$-beli, $\mathbf{R}^m$-beli, $\mathbf{R}^s$-beli normákat jelöli a „szokásos" $\|.\|_p \quad (1 \le p \le +\infty)$ normák közül, akkor az $\|.\|_\bullet$, $\|.\|_*$ vektornormák által indukált $\|.\|_{(\bullet,*)}$ mátrixnormával

$$\|\omega(h)\|_\bullet = \|A\eta(h)\|_\bullet \le \|A\|_{(\bullet,*)}\cdot \|\eta(h)\|_* \to 0 \qquad (\|x\| \to 0).$$

Más szóval $\omega(h) \to 0 \quad (\|h\| \to 0)$, tehát az előbbieket figyelembe véve kapjuk az állításunkat.

4.3. Többször differenciálható függvények

Az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egyváltozós valós függvények körében „nem okozott gondot" az f függvény 2-szer, 3-szor, ... való differenciálhatóságának az értelmezése. Pl. azt mondtuk, hogy a szóban forgó f-re $f \in D^2\{a\}$, ha $f' \in D\{a\}$, és az utóbbi esetben az $f''(a) := \big(f'\big)'(a)$ deriváltat az f függvény a-beli második deriváltjának neveztük. Megjegyezzük, hogy az előbbi $f' \in D\{a\}$ feltételezésben az is „benne volt", hogy egy alkalmas $r > 0$ mellett $f \in D\{x\} \quad (x \in \mathcal{D}_f,\ |x - a| < r)$.

Vegyük észre, hogy a 2-szer való differenciálhatóságnak ez az értelmezése átvihető az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényekre akkor is, ha $1 < n \in \mathbf{N}$. Ti., ha $f \in D$, akkor

$$f' = \operatorname{grad} f = \Big(\partial_1 f, ..., \partial_n f\Big) \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n,$$

és az $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ típusú vektor-vektor függvények körében értelmeztük a deriválhatóságot. Tehát, az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényre minden további nélkül előírhatjuk, hogy $f' \in D\{a\}$ teljesüljön. Más szóval legyen olyan $r > 0$, amellyel

$$K_r(a) \subset \mathcal{D}_f \ \ , \ \ f \in D\{x\} \qquad \Big(x \in K_r(a)\Big),$$

és

$$f' = \operatorname{grad} f \in D\{a\}.$$

Ekkor

$$f''(a) := (\operatorname{grad} f)'(a) \in \mathbf{R}^{n \times n}.$$

Az is nyilvánvaló azonban, hogy ezen az úton nem tudunk eljutni a 2-nél magasabb rendű deriválhatósághoz, hiszen pl. az $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n \times n}$ típusú függvények differenciálhatóságát nem értelmeztük.

Emlékeztetünk ugyanakkor a 3.1.2. Tételre, hogy az előbbi $f' = \operatorname{grad} f \in D\{a\}$ azzal ekvivalens, hogy

$$\partial_i f \in D\{a\} \qquad (i = 1, ..., n).$$

Éppen ezért az alábbiak szerint definiáljuk egy $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény magasabb rendű differenciálhatóságát. Az értelmezés teljes indukcióval történik, első lépésként a kétszer deriválhatóságot definiálva.

Tegyük fel ehhez, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, azaz egy alkalmas $K(a)$ környezettel $K(a) \subset \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *kétszer differenciálható* (vagy *deriválható*) az a-ban (amit az $f \in D^2\{a\}$ szimbólummal jelölünk), ha minden $x \in K(a)$ esetén $f \in D\{x\}$, és

$$(*) \qquad \partial_i f \in D\{a\} \qquad (i = 1, ..., n).$$

A $(*)$ feltétel alapján (ld. 3.1.3. Tétel) léteznek a

$$\partial_j(\partial_i f)(a) \qquad (i, j = 1, ..., n)$$

parciális deriváltak. Ehhez persze nem szükséges, hogy a $\partial_i f$ $(i = 1, ..., n)$ függvények deriválhatók legyenek az a helyen. Idézzük fel ui. röviden (ld. 3.1.) a parciális differenciálhatóság definícióját. Nevezetesen, adott $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett legyen $h \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, és $j = 1, ..., n$, ill. $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathcal{D}_h$ esetén

$$\mathcal{D}_{h,j}^{(a)} := \{t \in \mathbf{R} : (a_1, ..., a_{j-1}, t, a_{j+1}, ..., a_n) \in \mathcal{D}_h\},$$

valamint

$$h_{a,j} : \mathcal{D}_{h,j}^{(a)} \to \mathbf{R}$$

az a függvény, amelyre

$$h_{a,j}(t) := h(a_1, ..., a_{j-1}, t, a_{j+1}, ..., a_n) \qquad \left(t \in \mathcal{D}_{h,j}^{(a)}\right).$$

Azt mondtuk, hogy a h függvény az a-ban a j-edik változó szerint parciálisan deriválható, ha $h_{a,j} \in D\{a_j\}$. Ekkor a

$$\partial_j h(a) := h'_{a,j}(a_j)$$

valós számot a h függvény a-beli, a j-edik változó szerinti parciális deriváltjának neveztük. Ha itt a (fenti f függvény és $i = 1, ..., n$ mellett) $h := \partial_i f$ írható, akkor az f-et *az i-edik és j-edik változó szerint kétszer parciálisan differenciálhatónak* (vagy *deriválhatónak*) nevezzük az a-ban. A $\partial_j(\partial_i f)(a)$ parciális deriváltat (mint a $\partial_i f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény a-beli, a j-edik változó szerinti parciális deriváltját) a

$$\partial_i \partial_j f(a) := \partial_{ij} f(a) := \partial_j(\partial_i f)(a)$$

szimbólummal jelöljük, és az f függvény *a-beli, i-edik és j-edik változó szerinti másodrendű* (vagy *második*) *parciális deriváltjának* nevezzük. Esetenként használatos $\partial_{ij} f(a)$ helyett a $\partial_{x_i x_j} f(a)$, ill. a $\partial_{xy} f(a), ...$ jelölés is.

Tegyük fel, hogy $i, j = 1, ..., n$, és

$$\mathcal{D} := \{a \in \mathcal{D}_f : \text{ létezik } \partial_{ij} f(a)\} \neq \emptyset,$$

akkor értelmezhetjük a $\partial_{ij} f$-fel jelölt

$$\mathcal{D} \ni x \mapsto \partial_{ij} f(x)$$

függvényt, az *f függvény i-edik és j-edik változó szerinti másodrendű parciális deriváltfüggvényét.* Világos (ld. 3.1.), hogy $\partial_{ij} f = \partial_j(\partial_i f)$. Például, az

$$f(x, y, z) := x^3 + y^2 z + z^3 + xyz \qquad \left((x, y, z) \in \mathbf{R}^3\right)$$

függvényt véve bármelyik $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ pontban

$$\partial_{11}f(x,y,z)=\partial_{xx}f(x,y,z)=6x,\ \partial_{12}f(x,y,z)=\partial_{xy}f(x,y,z)=z,$$

$$\partial_{13}f(x,y,z)=\partial_{xz}f(x,y,z)=y,\ \partial_{22}f(x,y,z)=\partial_{yy}f(x,y,z)=2z,$$

$$\partial_{23}f(x,y,z)=\partial_{yz}f(x,y,z)=2y+x,\ \partial_{33}f(x,y,z)=$$
$$\partial_{zz}f(x,y,z)=6z.$$

Ha tehát a fenti $f\in\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ függvényre $f\in D^2\{a\}$, akkor minden $i,j=1,...,n$ mellett létezik a $\partial_{ij}f(a)$ másodrendű parciális derivált. Az

$$f''(a):=\Big(\partial_{ij}f(a)\Big)_{i,j=1}^{n}=\begin{bmatrix}\partial_{11}f(a) & \partial_{12}f(a) & \dots & \partial_{1n}f(a)\\ \partial_{21}f(a) & \partial_{22}f(a) & \dots & \partial_{2n}f(a)\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ \partial_{n1}f(a) & \partial_{n2}f(a) & \dots & \partial_{nn}f(a)\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{n\times n}$$

mátrixot az f függvény a-beli *második deriváltmátrixának* nevezzük. A későbbiekben tárgyalandó Young-tétel miatt ez egy szimmetrikus mátrix. Például, az előbbiekben szereplő

$$f(x,y,z):=x^3+y^2z+z^3+xyz \qquad \Big((x,y,z)\in\mathbf{R}^3\Big)$$

függvényre

$$f''(1,0,2)=\begin{bmatrix}6 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 12\end{bmatrix}.$$

Értelmezzük most a parciális differenciálhatóságot kettőnél magasabb rendre. Legyen tehát $1\le n$, $f\in\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, és a teljes indukció módszerét alkalmazva tegyük fel, hogy valamilyen

$$1\le s\in\mathbf{N},\ 1\le i_1,...,i_s\le n$$

mellett már definiáltuk a $\partial_{i_1\dots i_s}f$ szimbólummal jelölt s-edrendű parciális deriváltfüggvényt. Ha $a\in\mathcal{D}_f$, és egy $j=1,...,n$ indexre a

$$\partial_{i_1\dots i_s}f\in\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$$

függvény parciálisan differenciálható az a-ban a j-edik változó szerint, akkor legyen

$$\partial_{i_1}...\partial_{i_s}\partial_j f(a):=\partial_{i_1\dots i_s j}f(a):=\partial_j(\partial_{i_1\dots i_s}f)(a)$$

az *f függvény a-beli $(s+1)$-edrendű parciális deriváltja az i_1-edik, ... i_s-edik, j-edik változó szerint.* Ha az ilyen tulajdonságú $a\in\mathcal{D}_f$ pontok $\mathcal{X}$ halmaza nem üres, akkor az

$$\mathcal{X}\ni x\mapsto\partial_{i_1\dots i_s j}f(x)$$

leképezést az f *függvény* (a jelzett változók szerinti) $(s+1)$*-edrendű parciális deriváltfüggvényének* nevezzük. A változók indexeinek a felsorolása helyett továbbra is használhatjuk magukat a változókat jelölő szimbólumokat. Például, a már többször vizsgált

$$f(x,y,z) := x^3 + y^2 + z^3 + xyz \qquad \Big((x,y,z) \in \mathbf{R}^3\Big)$$

függvény esetén harmadrendű parciális deriváltak a következők:

$$\partial_{111} f(x,y,z) = \partial_{xxx} f(x,y,z) = 6\ ,\ \partial_{121} f(x,y,z) = \partial_{xyx} f(x,y,z) = 0,$$

$$\partial_{123} f(x,y,z) = \partial_{xyz} f(x,y,z) = 1 \qquad \Big((x,y,z) \in \mathbf{R}^3\Big).$$

A parciális deriváltak jelölésére is használatosak az alábbi, a *differenciálhányados* szóból a *hányados*ra utaló szimbólumok:

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x},\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x^2 \partial y},\ \ldots$$

Minden készen áll ahhoz, hogy az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $(1 \leq n \in \mathbf{N})$ függvények magasabb rendű differenciálhatóságát definiálhassuk. Az előbbi módszert alkalmazva ui. tegyük fel ehhez, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $1 \leq s \in \mathbf{N}$, továbbá egy alkalmas $K(a)$ környezettel $K(a) \subset \mathcal{D}_f$, és minden $x \in K(a)$ pontban az f függvény s-szer differenciálható: $f \in D^s\{x\}$. Belátható, hogy ekkor a $K(a)$ pontjaiban az f összes s-edrendű parciális deriváltja létezik. Azt mondjuk, hogy *az f függvény az a-ban $(s+1)$-szer differenciálható,* ha minden s-edrendű parciális deriváltfüggvénye differenciálható az a-ban.

Legyen most $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$ és

$$f = (f_1, ..., f_m) \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m,\ a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f,$$

ill. $1 \leq k \in \mathbf{N}$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *k-szor differenciálható az a-ban,* ha

$$f_j \in D^k\{a\} \qquad (j = 1, ..., m).$$

A „szokásos" $f \in D^k\{a\}$ jelölést fogjuk használni. Ha tetszőleges $a \in \mathcal{D}_f$ pontban teljesül, hogy $f \in D^k\{a\}$, akkor az f függvény *k-szor differenciálható*: $f \in D^k$.

Az előbbi $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ függvény *k-szor folytonosan differenciálható az a-ban,* ha egy alkalmas $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezettel

$$f \in D^k\{x\} \qquad \Big(x \in K(a)\Big),$$

és minden f_j $(j = 1, ..., m)$ koordinátafüggvény összes k-adrendű parciális deriváltfüggvénye folytonos az a-ban. Minderre az $f \in \mathcal{C}^k\{a\}$ jelölést alkalmazzuk. Ha $f \in \mathcal{C}^k\{a\}$ minden

$a \in \mathcal{D}_f$ helyen igaz, akkor röviden azt mondjuk, hogy az f függvény *k-szor folytonosan differenciálható,* és ezt az $f \in \mathcal{C}^k$ módon jelöljük.

A magasabb rendű parciális deriváltakkal kapcsolatban joggal merül fel a kérdés, hogy azok kiszámításakor van-e szerepe a változók sorrendjének? A legegyszerűbb „változattal" illusztrálva a kérdést tegyük fel, hogy $2 \leq n \in \mathbf{N}$, és egy $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény esetén valamilyen $a \in \mathcal{D}_f$ helyen léteznek a $\partial_{12}f(a)$, $\partial_{21}f(a)$ másodrendű parciális deriváltak. Igaz-e, hogy $\partial_{12}f(a) = \partial_{21}f(a)$? Az alábbi példa azt mutatja, hogy minden további nélkül ez nem teljesül. Legyen ui.

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x^2+y^2 \neq 0) \\ 0 & (x=y=0) \end{cases} \qquad \Big((x,y) \in \mathbf{R}^2\Big).$$

Megmutatjuk, hogy

$$\partial_{12}f(0,0) = -1 \ , \ \partial_{21}f(0,0) = 1.$$

A $\partial_{12}f(0,0) = 1$ egyenlőség igazolásához induljunk ki a szóban forgó másodrendű parciális derivált definíciójából:

$$\partial_{12}f(0,0) = \partial_2(\partial_1 f)(0,0) \Big(= \partial_y(\partial_x f)(0,0)\Big) = \varphi'(0),$$

ahol

$$\varphi(t) := \partial_1 f(0,t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

A $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény kiszámítását hasonlóan végezhetjük: $\varphi(t) = \psi_t'(0)$, ahol $t \in \mathbf{R}$ esetén

$$\psi_t(\tau) := f(\tau, t) \qquad (\tau \in \mathbf{R}).$$

Ha $t = 0$, akkor $\psi_0(\tau) = 0 \quad (\tau \in \mathbf{R})$, ezért $\varphi(0) = 0$. A $t \neq 0$ esetben viszont

$$\varphi(t) = \psi_t'(0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\psi_t(\tau) - \psi_t(0)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(\tau,t)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{t\cdot(\tau^2 - t^2)}{\tau^2 + t^2} = -t.$$

Tehát

$$\varphi(t) = -t \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

következésképpen $\partial_{12}f(0,0) = \varphi'(0) = -1$. Hasonlóan kapjuk a $\partial_{21}f(0,0) = 1$ egyenlőséget.

Ha viszont az f függvény a szóban forgó a helyen „elég sokszor" differenciálható, akkor a fent említett sorrend elveszti a jelentőségét. Ezzel kapcsolatos az analízis egyik legnevezetesebb állítása, az ún. *Young-tétel.*

4.3.1. Tétel (Young). *Legyen* $2 \le n \in \mathbf{N}$, $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $2 \le s \in \mathbf{N}$, *és* $f \in D^s\{a\}$. *Ekkor tetszőleges* $k_1, \ldots, k_s \in \{1, ..., n\}$ *indexek esetén ezek bármely* $j_1, \ldots, j_s$ *permutációjára*

$$\partial_{k_1 \ldots k_s} f(a) = \partial_{j_1 \ldots j_s} f(a).$$

Bizonyítás. Az s szerinti teljes indukcióra gondolva elegendő az $s = 2$ esettel foglalkoznunk. Ekkor tehát azt kell belátnunk, hogy ha $f \in D^2\{a\}$, akkor

$$\partial_{ij} f(a) = \partial_{ji} f(a) \qquad (i, j = 1, ..., n).$$

Világos, hogy csak az $i \neq j$ eset az „érdekes". Ezen túl (könnyen meggondolhatóan) azt is feltehetjük, hogy $n = 2$. Más szóval az $f \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvényre $a = (a_1, a_2) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D^2\{a\}$, és ennek alapján azt kell bebizonyítanunk, hogy

$$\partial_{12} f(a) = \partial_{21} f(a).$$

Legyen ehhez $r > 0$ olyan, amellyel ($\mathbf{R}^n$-ben a $\|.\| := \|.\|_\infty$ normát választva)

$$K(a) = \{x \in \mathbf{R}^2 : \|x - a\| < r\} \subset \mathcal{D}_f,$$

és vezessük be az alábbi jelölést:

$$\Delta(u, v) := f(a_1 + u, a_2 + v) - f(a_1 + u, a_2) + f(a_1, a_2) - f(a_1, a_2 + v) \qquad \big(u, v \in (-r, r)\big).$$

Ha rögzítjük a $v \in (-r, r)$ számot, akkor a

$$\varphi(u) := f(a_1 + u, a_2 + v) - f(a_1 + u, a_2) \qquad \big(u \in (-r, r)\big)$$

függvénnyel

$$\Delta(u, v) = \varphi(u) - \varphi(0) \qquad \big(u \in (-r, r)\big).$$

Az $f \in D^2\{a\}$ feltétel miatt az előbbi $K_r(a)$ környezettől azt is megkövetelhetjük, hogy egyrészt minden $x \in K_r(a)$ helyen $f \in D\{x\}$ (így egyúttal léteznek a $\partial_1 f(x)$, $\partial_2 f(x)$ parciális deriváltak is), másrészt

$$\partial_1 f,\ \partial_2 f \in D\{a\}.$$

Következésképpen a most definiált $\varphi : (-r, r) \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható, ezért a Lagrange-középértéktétel alapján

$$\varphi(u) - \varphi(0) = \varphi'(\xi) \cdot u \qquad \big(u \in (-r, r)\big),$$

ahol $\xi \in (0, u)$ (vagy $\xi \in (u, 0)$). A parciális deriváltak definíciójára gondolva

$$\varphi'(u) = \partial_1 f(a_1 + u, a_2 + v) - \partial_1 f(a_1 + u, a_2) \qquad \big(u \in (-r, r)\big),$$

így

$$\varphi(u)-\varphi(0)=\Big(\partial_1 f(a_1+\xi,a_2+v)-\partial_1 f(a_1+\xi,a_2)\Big)\cdot u \qquad \Big(u\in(-r,r)\Big).$$

A $\partial_1 f\in D\{a\}$ differenciálhatósági feltételből

$$\operatorname{grad}\partial_1 f(a)=\Big(\partial_{11}f(a),\partial_{12}f(a)\Big),$$

és egy alkalmas

$$\eta\in\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}\ ,\quad \eta(z)\to 0\quad (\|z\|\to 0)$$

függvénnyel

$$\partial_1 f(a_1+\xi,a_2+v)-\partial_1 f(a_1+\xi,a_2)=$$
$$\partial_1 f(a_1+\xi,a_2+v)-\partial_1 f(a_1,a_2)-\Big(\partial_1 f(a_1+\xi,a_2)-\partial_1 f(a_1,a_2)\Big)=$$
$$\langle\operatorname{grad}\partial_1 f(a),(\xi,v)\rangle+\eta(\xi,v)\cdot\|(\xi,v)\|-\langle\operatorname{grad}\partial_1 f(a),(\xi,0)\rangle-\eta(\xi,0)\cdot\|(\xi,0)\|=$$
$$\partial_{12}f(a)\cdot v+\eta(\xi,v)\cdot\|(\xi,v)\|-\eta(\xi,0)\cdot|\xi|.$$

Speciálisan a $0\neq u=v\in(-r,r)$ választással

$$\Delta(u,u)=\varphi(u)-\varphi(0)=\partial_{12}f(a)\cdot u^2+\eta(\xi,u)\cdot\|(\xi,u)\|\cdot u-\eta(\xi,0)\cdot|\xi|\cdot u,$$

amiből

$$\frac{\Delta(u,u)}{u^2}=\partial_{12}f(a)+\eta(\xi,u)\cdot\frac{\|(\xi,u)\|}{u}-\eta(\xi,0)\cdot\frac{|\xi|}{u}$$

következik. Ezért $|\xi|<|u|$ alapján

$$\left|\frac{\Delta(u,u)}{u^2}-\partial_{12}f(a)\right|\le|\eta(\xi,u)|+|\eta(\xi,0)|\to 0\qquad (u\to 0),$$

hiszen $\|(\xi,u)\|,\ \|(\xi,0)\|\le|u|\to 0\quad (u\to 0)$. Azt kaptuk ezzel, hogy

$$(*)\qquad \partial_{12}f(a)=\lim_{u\to 0}\frac{\Delta(u,u)}{u^2}.$$

Legyen most rögzített $u\in(-r,r)$ mellett

$$\psi(v):=f(a_1+u,a_2+v)-f(a_1,a_2+v)\qquad \Big(v\in(-r,r)\Big).$$

Ekkor

$$\Delta(u,v)=\psi(v)-\psi(0)\qquad \Big(v\in(-r,r)\Big).$$

Az előbbiekkel analóg módon azt kapjuk, hogy

$$\psi(v)-\psi(0)=\psi'(\gamma)\cdot v\qquad \Big(v\in(-r,r)\Big),$$

ahol $\gamma \in (0, v)$ (vagy $\gamma \in (v, 0)$). Továbbá

$$\psi'(v) = \partial_2 f(a_1 + u, a_2 + v) - \partial_2 f(a_1, a_2 + v) \qquad \Big(u \in (-r, r)\Big),$$

és

$$\psi(v) - \psi(0) = \Big(\partial_2 f(a_1 + u, a_2 + \gamma) - \partial_2 f(a_1, a_2 + \gamma)\Big)\cdot v \qquad \Big(v \in (-r, r)\Big).$$

A $\partial_2 f \in D\{a\}$ differenciálhatóságból

$$\operatorname{grad} \partial_2 f(a) = \Big(\partial_{21} f(a), \partial_{22} f(a)\Big),$$

és egy alkalmas

$$\kappa \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \ , \ \ \kappa(z) \to 0 \quad (\|z\| \to 0)$$

függvénnyel

$$\partial_2 f(a_1 + u, a_2 + \gamma) - \partial_2 f(a_1, a_2 + \gamma) =$$
$$\partial_2 f(a_1 + u, a_2 + \gamma) - \partial_2 f(a_1, a_2) - \Big(\partial_2 f(a_1, a_2 + \gamma) - \partial_2 f(a_1, a_2)\Big) =$$
$$\langle \operatorname{grad} \partial_2 f(a), (u, \gamma)\rangle + \kappa(u, \gamma)\cdot \|(u, \gamma)\| - \langle \operatorname{grad} \partial_2 f(a), (0, \gamma)\rangle - \kappa(0, \gamma)\cdot \|(0, \gamma)\| =$$
$$\partial_{21} f(a)\cdot u + \kappa(u, \gamma)\cdot \|(u, \gamma)\| - \kappa(0, \gamma)\cdot |\gamma|.$$

A $0 \neq v = u \in (-r, r)$ választással

$$\Delta(v, v) = \psi(v) - \psi(0) = \partial_{21} f(a)\cdot v^2 + \kappa(v, \gamma)\cdot \|(v, \gamma)\|\cdot v - \kappa(0, \gamma)\cdot |\gamma|\cdot v,$$

amiből (az előbbiekkel analóg módon)

$$\left|\frac{\Delta(v, v)}{v^2} - \partial_{21} f(a)\right| \leq$$

$$|\kappa(v, \gamma)|\cdot \frac{\|(v, \gamma)\|}{|v|} + |\kappa(0, \gamma)|\cdot \frac{|\gamma|}{|v|} \leq |\kappa(v, \gamma)| + |\kappa(0, \gamma)| \to 0 \qquad (v \to 0)$$

adódik. Tehát

$$\partial_{21} f(a) = \lim_{v \to 0} \frac{\Delta(v, v)}{v^2},$$

ahol a jobb oldali limesz persze ugyanaz, mint $(*)$-ban. Így $\partial_{21} f(a) = \partial_{12} f(a)$. ■

A továbbiakban az alábbi jelöléseket fogjuk használni (feltételezve egyben az azokban szereplő parciális deriváltak létezését). Legyen

$$1 \leq n,\ k \in \mathbf{N},\ f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},\ a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f,\ j = 1, ..., n,$$

és

$$\partial_j^k f(a) := \partial_{j \ldots j} f(a)$$

(ahol a „$j \dots j$" rövidítés k darab j-t jelöl). Speciálisan $\partial_j^1 f(a) = \partial_j f(a)$. Állapodjunk meg abban, hogy

$$\partial_j^0 f(a) := f(a).$$

Ha $i := (i_1, ..., i_n) \in \mathbf{N}^n$, akkor legyen

$$\partial^i f(a) := \partial_1^{i_1} \dots \partial_n^{i_n} f(a).$$

Részletesen kiírva tehát

$$\partial^i f(a) = \partial_{1\dots1\dots n\dots n} f(a),$$

ahol i_1 darab 1-es, ..., i_n darab n-es szerepel. Például, ha $n := 3$, $i := (2, 0, 1)$,

$$f(x, y, z) := x^3 + y^2 z + z^3 + xyz \qquad \big((x, y, z) \in \mathbf{R}^3\big),$$

akkor

$$\partial^i f(x, y, z) = \partial_1^2 \partial_3 f(x, y, z) = \partial_{113} f(x, y, z) = 0 \qquad \big((x, y, z) \in \mathbf{R}^3\big).$$

Az $i \in \mathbf{N}^n$ *multiindex* esetén az i *hosszát* a következőképpen definiáljuk:

$$|i| := \|i\|_1 = \sum_{j=1}^n i_j.$$

A korábban mondottak szerint pl. $f \in D^{|i|}\{a\}$ elégséges ahhoz, hogy létezzen az $|i|$-edrendű $\partial^i f(a)$ parciális derivált, és ekkor a 4.3.1. Tétel miatt az $|i|$ hosszúságú $1 \dots 1 \dots n \dots n$ jelsorozat (ld. fent) bármely $\nu_1 \dots \nu_{|i|}$ permutációjára

$$\partial^i f(a) = \partial_{1\dots1\dots n\dots n} f(a) = \partial_{\nu_1 \dots \nu_{|i|}} f(a).$$

Legyen továbbá az $i = (i_1, ..., i_n) \in \mathbf{N}^n$ multiindex és az $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ vektor esetén

$$i! := \prod_{j=1}^n i_j! = \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^{i_j} k \ , \ \ x^i := \prod_{j=1}^n x_j^{i_j}$$

az i *faktoriálisa,* ill. az x vektor i kitevős *hatványa.* Nyilvánvaló, hogy ha $n = 1$, akkor $i = i_1 \in \mathbf{N}$, és $|i| = i$, ill. $i! = \prod_{j=1}^i j$, és x^i $(x \in \mathbf{R})$ pedig a „megszokott" hatvány.

Ha $a, b \in \mathbf{R}^n$, akkor az a és b végpontú zárt, ill. $a \neq b$ esetén nyílt *szakaszt* az

$$[a, b] := \{a + t(b - a) \in \mathbf{R}^n : 0 \leq t \leq 1\},$$

ill.

$$(a, b) := \{a + t(b - a) \in \mathbf{R}^n : 0 < t < 1\}$$

módon definiáljuk.

Tekintsük ezek után az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényt, és tegyük fel, hogy valamilyen

$$a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f, \ s \in \mathbf{N}$$

mellett $f \in D^s\{a\}$ (ahol – mint korábban is – a $D^0\{a\} := \mathcal{C}\{a\}$ megállapodással élünk). Ekkor a

$$T_{a,s}f(x) := \sum_{k=0}^{s} \sum_{i \in \mathbf{N}^n, |i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} \cdot (x-a)^i \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

előírással definiált

$$T_{a,s}f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

függvényt az f függvény a-hoz tartozó s-edrendű *Taylor-polinomjának* nevezzük. Világos, hogy $T_{a,0}f \equiv f(a)$, ill. $T_{a,s}f(a) = f(a)$.

4.3.2. Tétel (Taylor-formula). *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényre valamilyen $s \in \mathbf{N}$ mellett $f \in D^{s+1}$ teljesül. Ekkor bármely $[a,b] \subset \mathcal{D}_f$ esetén van olyan $c \in [a,b]$, hogy*

$$f(b) = T_{a,s}f(b) + \sum_{i \in \mathbf{N}^n, |i|=s+1} \frac{\partial^i f(c)}{i!} \cdot (b-a)^i.$$

Bizonyítás. Nyilván feltehető, hogy $a \neq b$, legyen ekkor $h := b - a$, és

$$F(t) := f(a+th) \qquad (t \in \mathbf{R},\, a+th \in \mathcal{D}_f).$$

Az $[a,b] \subset \mathcal{D}_f$ feltétel miatt $[0,1] \subset \mathcal{D}_F$. Mivel a

$$g(t) := a + th \qquad (t \in \mathbf{R},\, a+th \in \mathcal{D}_f)$$

függvényre $g \in D^{s+1}$ triviális módon igaz, ezért a 4.1.4. Tétel (többszöri) alkalmazásával $F = f \circ g \in D^{s+1}$ következik. Ezért a $F \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre alkalmazható az „egyváltozós" Taylor-formula, miszerint egy alkalmas $\xi \in (0,1)$ helyen

$$f(b) = F(1) = \sum_{k=0}^{s} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!}.$$

Elég tehát azt megmutatni, hogy

$$(*) \qquad \frac{F^{(k)}(t)}{k!} = \sum_{i \in \mathbf{N}^n, |i|=k} \frac{\partial^i f(a+th)}{i!} \cdot h^i \qquad (t \in \mathcal{D}_F,\, k = 0, ..., s+1),$$

amiből következően a $c := a + \xi \cdot h$ pont megfelel az állításunknak. Ha itt $k = 0$, akkor

$$\frac{F^{(0)}(t)}{0!} = F(t) = f(a+th) = \sum_{i \in \mathbf{N}^n, |i|=0} \frac{\partial^i f(a+th)}{i!} \cdot h^i \qquad (t \in \mathcal{D}_F)$$

nyilván igaz, ui. $i = (0, \ldots, 0) \in \mathbf{N}^n$ az egyetlen olyan multiindex, amelyre $|i| = 0$, és (ld. fent) $\partial^{(0,\ldots,0)} f(a+th) = f(a+th)$, $h^i = 1$, $i! = 1$. Teljes indukcióval folytatva a bizonyítást tegyük fel, hogy a $(*)$ formula valamilyen $k = 0, ..., s$ esetén igaz, és lássuk be ugyanezt $(k+1)$-re. Ekkor tehát

$$\frac{F^{(k)}}{k!} = \sum_{i \in \mathbf{N}^n, |i|=k} \frac{\partial^i f \circ g}{i!} \cdot h^i,$$

ahol a feltételeink szerint minden itt szereplő i multiindexre $\partial^i f \circ g \in D$. Ezért

$$\frac{F^{(k+1)}(t)}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \cdot \left(\frac{F^{(k)}}{k!}\right)'(t) = \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{i \in \mathbf{N}^n, |i|=k} \frac{\left(\partial^i f \circ g\right)'(t)}{i!} \cdot h^i =$$

$$\frac{1}{k+1} \cdot \sum_{i \in \mathbf{N}^n, |i|=k} \frac{\langle \operatorname{grad} \partial^i f(g(t)), g'(t) \rangle}{i!} \cdot h^i = \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{i \in \mathbf{N}^n, |i|=k} \frac{\langle \operatorname{grad} \partial^i f(a+th), h \rangle}{i!} \cdot h^i =$$

$$\frac{1}{k+1} \cdot \sum_{i \in \mathbf{N}^n, |i|=k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial_j \partial^i f(a+th)}{i!} \cdot h_j h^i.$$

Ha $i \in \mathbf{N}^n$, $|i| = k$ és

$$i^{(j)} := (i_1, \ldots, i_{j-1}, i_j + 1, i_{j+1}, \ldots, i_n) \in \mathbf{N}^n \qquad (j = 1, ..., n),$$

akkor (a 4.3.1. Tételre utalva) nyilván

$$\partial_j \partial^i f(a+th) = \partial^{i^{(j)}} f(a+th) \ , \ |i^{(j)}| = k+1 \ , \ i^{(j)}! = i! \cdot (i_j + 1) \ , \ h_j h^i = h^{i^{(j)}}.$$

Számoljuk össze, hogy egy

$$l = (l_1, ..., l_n) \in \mathbf{N}^n, \ |l| = k+1$$

multiindexet megadva hányféleképpen lehetséges az

$$l = i^{(j)}$$

előállítás alkalmas $i \in \mathbf{N}^n$, $|i| = k$, valamint $j = 1, ..., n$ esetén. Ez nyilván akkor és csak akkor teljesül, ha $l_j > 0$, $i_j = l_j - 1$, és

$$l_\nu = i_\nu \qquad (j \neq \nu = 1, ..., n).$$

Következésképpen

$$\frac{1}{k+1}\cdot \sum_{i\in \mathbf{N}^n, |i|=k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial_j \partial^i f(a+th)}{i!}\cdot h_j h^i = \frac{1}{k+1}\cdot \sum_{l\in \mathbf{N}^n, |l|=k+1} \sum_{j=1, l_j>0}^{n} l_j\cdot \frac{\partial^l f(a+th)}{l!}\cdot h^l.$$

Vegyük figyelembe, hogy minden $l \in \mathbf{N}^n$, $|l| = k+1$ multiindexre

$$k+1 = |l| = \sum_{j=1, l_j>0}^{n} l_j,$$

így

$$\frac{F^{(k+1)}(t)}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}\cdot \sum_{i\in \mathbf{N}^n, |i|=k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial_j \partial^i f(a+th)}{i!}\cdot h_j h^i = \sum_{l\in \mathbf{N}^n, |l|=k+1} \frac{\partial^l f(a+th)}{l!}\cdot h^l.$$

Ez nem más, mint a $(*)$ egyenlőség k helyett $(k+1)$-re. ■

Alkalmazzuk a 4.3.2. Tételt az $s = 0$ esetben:

4.3.3. Tétel (Lagrange). *Legyen adott a differenciálható $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény, és valamilyen $a, b \in \mathbf{R}^n$, $a \neq b$ végpontokkal $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$. Ekkor egy alkalmas $c \in (a, b)$ mellett*

$$f(b) - f(a) = \langle \operatorname{grad} f(c), b-a \rangle.$$

Ui. $T_{a,0}f \equiv f(a)$, és $i \in \mathbf{N}, |i| = 1$ nyilván azzal ekvivalens, hogy egy $j = 1, ..., n$ indexszel

$$i_j = 1,\ i_\nu = 0 \qquad (j \neq \nu = 1, ..., n).$$

Ezért a 4.3.2. Tételben most

$$\sum_{i\in \mathbf{N}, |i|=1} \frac{\partial^i f(c)}{i!}\cdot (b-a)^i = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(c)\cdot (b_j - a_j) = \langle \operatorname{grad} f(c), b-a \rangle.$$

Megjegyezzük, hogy a 4.3.3. Tétel nyilván az egyváltozós valós függvények körében megismert *Lagrange-középértéktétel* többváltozós megfelelője.

A 4.3.2. Tételben szereplő

$$\sum_{i\in \mathbf{N}^n, |i|=s+1} \frac{\partial^i f(c)}{i!}\cdot (b-a)^i$$

összeget *Lagrange-féle maradéktagnak* nevezzük. Az alkalmazások szempontjából rendkívül hasznos ugyanakkor az alábbi, *Peano-maradéktagos Taylor-formula* is.

4.3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényre az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ helyen egy $1 \le s \in \mathbf{N}$ „kitevővel" $f \in D^s\{a\}$. Ekkor van olyan $\eta \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, a $\lim_0 \eta = 0$ feltételnek eleget tevő függvény, amelyre*

$$(**) \qquad f(a+h)-f(a) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{i\in\mathbf{N}^n, |i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} \cdot h^i + \eta(h) \cdot \|h\|^s \qquad (h \in \mathbf{R}^n,\ a+h \in \mathcal{D}_f).$$

Megjegyezzük, hogy a $(**)$ egyenlőség másképp írva a következőképpen szól:

$$\frac{f(x) - T_{a,s}f(x)}{\|x-a\|^s} \to 0 \qquad (\|x-a\| \to 0).$$

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy elegendő olyan $K(0)$ környezetet és $\eta : K(0) \to \mathbf{R}$ függvényt megadni, amelyekkel $\lim_0 \eta = 0$ igaz, és $(**)$ teljesül a $h \in K(0)$ vektorokra.

Bizonyítás. Az $s = 1$ esetben (ld. fent)

$$\sum_{i\in\mathbf{N}, |i|=1} \frac{\partial^i f(a)}{i!} \cdot h^i = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a) \cdot h_j = \langle \operatorname{grad} f(a), h \rangle$$

miatt $(**)$ pontosan az $f \in D\{a\}$ feltételt jelenti. Teljes indukciót alkalmazva tételezzük fel, hogy valamilyen $1 \le s \in \mathbf{N}$ mellett igaz a tételünk. Ha már most $f \in D^{s+1}\{a\}$, akkor van olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy $f \in D^s\{x\}$ $(x \in K(a))$, és $\partial^i f \in D\{a\}$ $(i \in \mathbf{N}^n,\ |i| = s)$. Az utóbbit másképpen megfogalmazva

$$\partial_j f \in D^s\{a\} \qquad (j = 1, ..., n).$$

Legyen

$$g(x) := f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{s+1} \sum_{i\in\mathbf{N}^n, |i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} \cdot (x-a)^i \qquad \big(x \in K(a)\big).$$

Mivel minden $i \in \mathbf{N}^n$ esetén a

$$g_i(x) := (x-a)^i \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

függvényre (könnyen beláthatóan) $g_i \in D^m$ $(m \in \mathbf{N})$ igaz, ezért $g \in D^{s+1}\{a\}$ is teljesül, és

$$\partial^j g(a) = \partial^j f(a) - \sum_{k=1}^{s+1} \sum_{i\in\mathbf{N}^n, |i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} \cdot \partial^j g_i(a) \qquad (j \in \mathbf{N}^n,\ |j| > 0).$$

Az is világos, hogy az előbbi $i \in \mathbf{N}^n$ multiindexekre bármely $j \in \mathbf{N}^n$ és $x \in \mathbf{R}^n$ esetén

$$\partial^j g_i(x) = \begin{cases} i! & (j = i) \\ \\ 0 & (\text{ha valamilyen } l = 1, ..., n \text{ mellett } i_l < j_l) \\ \\ \frac{i!}{j!} \cdot (x-a)^{i-j} & (\text{egyébként}). \end{cases}$$

Következésképpen $\partial^j g_i(a) = 0$, ha $j \neq i$, és $\partial^i g_i(a) = i!$, amiből

$$\partial^j g(a) = 0 \qquad (j \in \mathbf{N}^n,\ |j| = 1, ..., s+1)$$

is rögtön adódik.

Alkalmazzuk a g függvényre a 4.3.3. Tételt. (Mivel $g \in D^{s+1}\{a\}$, ezért a fenti $K(a)$ környezetről az is feltehető, hogy $g \in D^s\{x\}$ $(x \in K(a))$, ahol $s \geq 1$.) Ekkor a $h := x - a$ $(x \in K(a))$ jelöléssel

$$g(x) - g(a) = g(x) = f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{s+1} \sum_{i \in \mathbf{N}^n, |i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} \cdot h^i =$$

$$\langle \operatorname{grad} g(a+th), h \rangle = \sum_{l=1}^{n} \partial_l g(a+th) \cdot h_l,$$

ahol $t \in (0,1)$ egy alkalmasan választott (h-tól függő) szám. Az itt szereplő $l = 1, ..., n$ indexekre $\partial_l g \in D^s\{a\}$, ezért az indukciós feltételt alkalmazva

$$\partial_l g(a+th) = \partial_l g(a+th) - \partial_l g(a) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{i \in \mathbf{N}^n, |i|=k} \frac{\partial^i \partial_l g(a)}{i!} \cdot (th)^i + \eta_l(th) \cdot \|th\|^s$$

adódik, ahol az $\eta_l \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $(l = 1, ..., n)$ függvényekre $\eta_l(z) \to 0$ $(\|z\| \to 0)$. Láttuk, hogy $\partial^j g(a) = 0$ $(j \in \mathbf{N}^n,\ |j| = 1, ..., s+1)$. Ha tehát $i \in \mathbf{N}^n$, $|i| = k = 1, ..., s$, valamint $l = 1, ..., n$, akkor a

$$j := (i_1, \ldots, i_{l-1}, i_l + 1, i_{l+1}, \ldots, i_n)$$

multiindexre $|j| = |i| + 1 \leq s + 1$, így

$$\partial^i \partial_l g(a) = \partial^j g(a) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{s+1} \sum_{i \in \mathbf{N}^n, |i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} \cdot h^i = \sum_{l=1}^{n} \eta_l(th) \cdot \|th\|^s \cdot h_l.$$

Legyen $\eta(0) := 0$ és

$$\eta(h) := \frac{\sum_{l=1}^{n} \eta_l(th)\cdot \|th\|^s\cdot h_l}{\|h\|^{s+1}} \qquad \Big(0 \neq h \in \mathbf{R}^n,\ a+h \in K(a)\Big),$$

ekkor

$$|\eta(h)| \leq \frac{\sum_{l=1}^{n} |\eta_l(th)|\cdot \|h\|^s\cdot \|h\|}{\|h\|^{s+1}} = \sum_{l=1}^{n} |\eta_l(th)| \to 0 \qquad (\|h\| \to 0),$$

így $\eta(h) \to 0 \quad (\|h\| \to 0)$. A nyilvánvaló

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{s+1} \sum_{i \in \mathbf{N}^n, |i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!}\cdot h^i + \eta(h)\cdot \|h\|^{s+1} \quad (h \in \mathbf{R}^n,\ a+h \in K(a))$$

egyenlőség azt mutatja, hogy az állításunk s helyett $(s+1)$-re is igaz. ■

Különösen fontos az előző tétel $s = 2$ esete, amikor is $f \in D^2\{a\}$. Ekkor a

$$\sum_{i \in \mathbf{N}^n, |i|=2} \frac{\partial^i f(a)}{i!}\cdot h^i$$

összegben megjelenő $i \in \mathbf{N}^n$, $|i| = 2$ multiindexek mindegyike csak a következők valamelyike lehet:

$$i = (0, \ldots, 0, 2, 0, \ldots, 0),\ i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0),$$

ahol tehát $s = 1, ..., n$ és

$$i_s = 2,\ i_k = 0 \qquad (s \neq k = 1, ..., n),$$

és ekkor $i! = 2,\ h^i = h_s^2$, vagy $1 \leq j < l \leq n$ és

$$i_j = i_l = 1,\ i_k = 0 \qquad (j,\ l \neq k = 1, ..., n),$$

így $i! = 1,\ h^i = h_j h_l$. Ezért (az utóbbi esetben figyelembe véve a $\partial_{jl} f(a) = \partial_{lj} f(a)$ (ld. 4.3.1. Tétel) egyenlőséget is) azt kapjuk, hogy (a fentebb bevezetett második deriváltmátrixszal)

$$\sum_{i \in \mathbf{N}^n, |i|=2} \frac{\partial^i f(a)}{i!}\cdot h^i = \frac{1}{2}\cdot \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \partial_{jl} f(a)\cdot h_j h_l = \frac{1}{2}\cdot \langle f''(a)h, h\rangle \qquad (h \in \mathbf{R}^n).$$

Következésképpen a 4.3.4. Tétel szerint

$$f(a+h) = f(a) + \langle \operatorname{grad} f(a), h\rangle + \frac{1}{2}\cdot \langle f''(a)h, h\rangle + \eta(h)\cdot \|h\|^2 \qquad (h \in \mathbf{R}^n,\ a+h \in \mathcal{D}_f),$$

ahol $\lim_0 \eta = 0$. A következő jelölést fogjuk használni:

$$Q_a^f(x) := \langle f''(a)x, x\rangle \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

A „szokásos" $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbf{R}^n$ koordinátázást alkalmazva tehát

$$Q_a^f(x)=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\partial_{ik}f(a)x_ix_k \qquad (x\in\mathbf{R}^n).$$

Így végül azt mondhatjuk, hogy

$$f(a+h)-f(a)=\langle\,\mathrm{grad}\,f(a),h\rangle+\frac{1}{2}\cdot Q_a^f(h)+\eta(h)\cdot\|h\|^2 \qquad (h\in\mathbf{R}^n,\ a+h\in\mathcal{D}_f).$$

4.4. Megjegyzések

i) Legyen $a,b\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$, és

$$f(x,t):=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\exp\left(-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}\right) \qquad \Big((x,t)\in\mathbf{R}\times(0,+\infty)\Big).$$

A $\partial_t f$, $\partial_{xx}f$ parciális deriváltfüggvények kiszámításával könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\partial_t f=a^2\cdot\partial_{xx}f$$

(ez a fizika egyik „alapegyenlete", az ún. *hővezetési egyenlet*).

ii) Az előző megjegyzéshez hasonlóan „direkt" számolással kapjuk, hogy ha $b,c\in\mathbf{R}$, akkor az

$$f(x,y,z):=\frac{a\cdot\exp\Big(-c\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big)+b\cdot\exp\Big(c\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$\Big((x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ x>0,\ y>0,\ z>0\Big)$ függvényre

$$\partial_{xx}f+\partial_{yy}f+\partial_{zz}f=c^2\cdot f$$

(ami az ún. *Helmholtz-egyenlet*).

iii) Az $F\in\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, $F\in D^2$ függvény esetén legyen

$$\Delta F:=\sum_{i=1}^n\partial_{ii}F.$$

Legyen továbbá

$$f:(0,+\infty)\to\mathbf{R},\ f\in D^2,\ r(x):=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \qquad \Big(x=(x_1,...,x_n)\in\mathbf{R}^n\Big),$$

akkor az $F := f \circ r$ függvény eleget tesz az alábbi egyenlőségnek:

$$\Delta F = f'' \circ r + \frac{n-1}{r} \cdot f' \circ r.$$

Speciálisan, az

$$F := \frac{1}{r}$$

függvényre az $n = 3$ esetben $\Delta F = 0$ (azaz ekkor F kielégíti az ún. *Laplace-egyenletet*).

iv) Legyen $A = (a_{ik}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ egy szimmetrikus mátrix. Ekkor a

$$Q(x) := \langle Ax, x \rangle \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

leképezést (az A mátrix által meghatározott) *kvadratikus alaknak* nevezzük. Világos, hogy

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \qquad \Big(x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n\Big).$$

Speciálisan, az $n = 2$ esetben $a, b, c \in \mathbf{R}$ és

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

valamint

$$Q(u, v) = \langle A(u, v), (u, v) \rangle =$$
$$\langle (au + bv, bu + cv), (u, v) \rangle = au^2 + 2buv + cv^2 \qquad \Big((u, v) \in \mathbf{R}^2\Big).$$

Legyen pl.

$$Q(u, v) := 2u^2 + 2uv - v^2 \qquad \Big((u, v) \in \mathbf{R}^2\Big),$$

ekkor

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ha $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, és $f \in D^2\{a\}$, akkor (ld. fentebb) Q_a^f egy kvadratikus alak. Mutassuk meg, hogy minden

$$Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

kvadratikus alak folytonos. Valóban, legyen $y \in \mathbf{R}^n$, ekkor tetszőleges $x \in K_1(y)$ vektorra a $\|.\| := \|.\|_2$ vektornorma által indukált $q := \|A\|_{(2)}$ mátrixnormával (ahol $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ a Q-t a fentiek szerint meghatározó szimmetrikus mátrix)

$$|Q(x) - Q(y)| = |\langle Ax, x \rangle - \langle Ay, y \rangle| = |\langle A(x - y), x \rangle + \langle Ay, x - y \rangle| \leq$$
$$|\langle A(x - y), x \rangle| + |\langle Ay, x - y \rangle| \leq$$
$$q \cdot \|x - y\| \cdot (\|x\| + \|y\|) \leq q(1 + 2\|y\|) \cdot \|x - y\|,$$

amiből az y-beli $Q \in \mathcal{C}\{y\}$ folytonosság már nyilván következik.

v) Azt mondjuk, hogy az előbbi Q kvadratikus alak

- *pozitív definit*, ha $Q(x) > 0 \quad (x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\})$;
- *negatív definit*, ha $Q(x) < 0 \quad (x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\})$;
- *pozitív szemidefinit*, ha $Q(x) \geq 0 \quad (x \in \mathbf{R}^n)$;
- *negatív szemidefinit*, ha $Q(x) \leq 0 \quad (x \in \mathbf{R}^n)$;
- *indefinit*, ha van olyan $x \in \mathbf{R}^n$ és $y \in \mathbf{R}^n$, hogy $Q(y) < 0 < Q(x)$.

Minden definit alak tehát egyúttal szemidefinit is. A szemidefinit Q pontosan akkor nem definit, ha van olyan $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, amelyre $Q(x) = 0$. Tekintsük pl. a (ld. iv) megjegyzés)

$$Q(u,v) := 2u^2 + 2uv - v^2 \qquad \big((u,v) \in \mathbf{R}^2\big)$$

kvadratikus alakot. Világos, hogy a Q indefinit, ui. $Q(0,1) = -1 < 0 < Q(1,0) = 2$.

Speciálisan, ha $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, és $f \in D^2\{a\}$, akkor Q_a^f nem más, mint az $f''(a)$ mátrix által meghatározott kvadratikus alak. Tehát ennek a definitsége, ill. a szemidefinitsége a $\partial_{ij} f(a) \quad (i,j = 1,...,n)$ másodrendű parciális deriváltak segítségével dönthető el. Pl. az $n = 1$ esetben nyilván

$$Q_a^f(x) = f''(a) \cdot x^2 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

azaz Q_a^f definitségét az $f''(a)$ előjele határozza meg:

$$Q_a^f \text{ pozitív definit} \iff f''(a) > 0;$$
$$Q_a^f \text{ negatív definit} \iff f''(a) < 0.$$

Ha $f''(a) = 0$, akkor $Q_a^f(x) = 0 \quad (x \in \mathbf{R})$, azaz ekkor Q_a^f egyszerre pozitív és negatív szemidefinit.

vi) Mivel a iv) megjegyzésbeli Q kvadratikus alakra (továbbra is a $\|.\| := \|.\|_2$ normát használva)

$$Q(x) = \|x\|^2 \cdot Q(x/\|x\|) \qquad (x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}),$$

és itt $\|x\|^2 > 0$, valamint $\Big\|x/\|x\|\Big\| = 1$, ezért a $Q(x)$ helyettesítési értékek előjelének a vizsgálatakor elegendő csak az $\|x\| = 1$ feltételnek eleget tevő x-ekre szorítkozni. Mivel a

$$G := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$$

halmaz korlátos és zárt, azaz (ld. 1.7.8. Tétel) kompakt, ezért (ld. 2.4. Tétel) a Q folytonossága (ld. iv) megjegyzés) alapján a

$$\{Q(x) : x \in G\}$$

halmaznak van minimuma is meg maximuma is. Legyenek ezek rendre m, M, ekkor az előbbiek szerint

$$m\cdot\|x\|^2 \le Q(x) \le M\cdot\|x\|^2 \qquad (x\in\mathbf{R}^n).$$

Ez azt jelenti, hogy

a) Q pozitív definit $\iff$ $m>0$;
b) Q negatív definit $\iff$ $M<0$;
c) Q pozitív szemidefinit $\iff$ $m\ge 0$;
d) Q negatív szemidefinit $\iff$ $M\le 0$;
e) Q indefinit $\iff$ $m\cdot M<0$.

vii) Jelöljük a iv)-beli A mátrix esetén d_i-vel $(i=1,...,n)$ az alábbi („bal felső sarok") determinánst:

$$d_i := \det\,(a_{jk})_{j,k=1}^{i}.$$

Ekkor az algebrából ismert *Sylvester-féle kritérium* szerint

1^o Q pozitív definit $\iff$ $d_i>0$ $(i=1,...,n)$;
2^o Q negatív definit $\iff$ $(-1)^j\cdot d_j>0$ $(j=1,...,n)$.

Pl., ha $n=2$, akkor (ld. iv) megjegyzés) alkalmas $a,b,c\in\mathbf{R}$ számokkal

$$A=\begin{bmatrix} a & b\\ b & c\end{bmatrix},$$

valamint

$$Q(u,v)=au^2+2buv+cv^2 \qquad \big((u,v)\in\mathbf{R}^2\big).$$

Ekkor

$$d_1=a\ ,\ \ d_2=ac-b^2,$$

és így

$$Q \text{ pozitív definit } \iff a>0 \text{ és } ac>b^2;$$
$$Q \text{ negatív definit } \iff a<0 \text{ és } ac>b^2.$$

Sőt, ekkor az is igaz, hogy

$$Q \text{ indefinit } \iff ac<b^2.$$

Mindez egyébként elemi úton is könnyen belátható. Valóban, ha pl. Q pozitív definit, akkor

$$Q(u,v)=au^2+2buv+cv^2>0 \qquad \big((u,v)\in\mathbf{R}^2,\ u^2+v^2>0\big).$$

Így $Q(1,0) = a > 0$, továbbá

$$P(u) := Q(u,1) = au^2 + 2bu + c > 0 \qquad (u \in \mathbf{R}).$$

Mivel a P egy valós együtthatós másodfokú pozitív polinom, ezért a d diszkriminánsa szükségszerűen negatív:

$$d = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) < 0,$$

azaz $ac > b^2$. „Fordítva", ha $a > 0$ és $ac > b^2$, akkor tetszőleges $0 \neq u \in \mathbf{R}$ esetén

$$Q(u,0) = au^2 > 0.$$

Ha $0 \neq v \in \mathbf{R}$, akkor a $z := u/v$ $(u \in \mathbf{R})$ jelöléssel (nyilván bármelyik $z \in \mathbf{R}$ szám felírható ilyen alakban)

$$Q(u,v) = v^2 \cdot \left(az^2 + 2bz + c\right) = v^2 \cdot P(z) \qquad (z \in \mathbf{R}).$$

A fentiek szerint a P diszkriminánsa (a) negatív, a főegyütthatója (a) pozitív, ezért $P(z) > 0 \quad (z \in \mathbf{R})$. Következésképpen

$$Q(u,v) = v^2 \cdot P(u/v) > 0 \qquad \left((u,v) \in \mathbf{R}^2,\, v \neq 0\right).$$

Az előbbieket is figyelembe véve ezzel beláttuk, hogy

$$Q(\xi) > 0 \qquad (0 \neq \xi \in \mathbf{R}^2),$$

azaz a Q pozitív definit.

Ugyanígy „intézhető el" a negatív definitségre vonatkozó szükséges és elégséges feltétel.

Tegyük most fel azt, hogy $ac < b^2$. Ha $a = 0$, akkor világos, hogy $b \neq 0$, és

$$Q(1,v) = 2bv + cv^2 = v \cdot (2b + cv) \qquad (v \in \mathbf{R}).$$

Ha $c = 0$ is igaz, akkor $Q(1,v) = 2bv$ $(v \in \mathbf{R})$, így

$$Q(1,-b) = -2b^2 < 0 < Q(1,b) = 2b^2.$$

Ha $c \neq 0$, akkor

$$q := Q(1, b/c) = \frac{3b^2}{c},\ r := Q(1,-b/c) = -\frac{b^2}{c},$$

ahol

$$qr = -\frac{3b^4}{c^2} < 0.$$

Tehát a Q indefinit. Hasonlóan kapjuk ugyanezt, ha a $c = 0$ feltételezésből indulunk ki. Ha viszont $ac \neq 0$, akkor (ld. fent)

$$Q(u, 1) = P(u) \qquad (u \in \mathbf{R}).$$

Mivel a P másodfokú polinom $4(b^2 - ac)$ diszkriminánsa most pozitív, ezért a P-nek van két különböző valós gyöke: α, $\beta \in \mathbf{R}$, pl. $\alpha < \beta$. Jól ismert, hogy ekkor

$$P(t) \cdot P(s) < 0 \qquad (\alpha < t < \beta < s),$$

amiből megint csak az következik, hogy a Q indefinit.

Induljunk ki most abból, hogy a Q indefinit. Ha $a = c = 0$, akkor

$$Q(u, v) = 2buv \qquad \left((u, v) \in \mathbf{R}^2\right)$$

miatt $b \neq 0$, különben $Q \equiv 0$, ami nem indefinit. Ezért $ac = 0 < b^2$. Feltehető tehát, hogy pl. $a \neq 0$ (a $c \neq 0$ eset analóg módon kezelhető). Legyen valamilyen (t, s), $(w, z) \in \mathbf{R}^2$ helyeken

$$Q(t, s) < 0 < Q(w, z).$$

Tudjuk (ld. iv) megjegyzés), hogy a Q folytonos, ezért egy-egy alkalmas $K(t, s)$, $K(w, z)$ környezettel

$$Q(\tilde{t}, \tilde{s}) < 0 < Q(\tilde{w}, \tilde{z}) \qquad \left((\tilde{t}, \tilde{s}) \in K((t, s)), (\tilde{w}, \tilde{z}) \in K((w, z))\right)$$

is igaz. Így feltehetjük, hogy $s \neq 0$ és $z \neq 0$, azaz (ld. fent)

$$Q(t, s) = s^2 \cdot P(t/s) < 0 < z^2 \cdot P(w/z).$$

Ez azt jelenti, hogy a P másodfokú polinomnak van negatív helyettesítési értéke is, meg pozitív helyettesítési értéke is. Ugyanakkor

$$P(u) = a \cdot \left(\left(u + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}\right) \qquad (u \in \mathbf{R}),$$

ezért szükségképpen

$$\frac{ac - b^2}{a^2} < 0,$$

azaz $ac - b^2 < 0$. Más szóval $ac < b^2$.

viii) Valamilyen $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$ mellett tekintsük az

$$f = (f_1, ..., f_m) \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

differenciálható függvényt. Tegyük fel, hogy az $a, b \in \mathbf{R}^n$, $a \neq b$ végpontokkal meghatározott szakaszra $[a, b] \subset \mathcal{D}_f$. Ekkor (ld. 4.3.3. Tétel) minden $i = 1, ..., m$ mellett egy alkalmas $\xi^{(i)} \in (a, b)$ helyen a $h := (h_1, ..., h_n) := b - a$ jelöléssel

$$f_i(b) - f_i(a) = \langle \operatorname{grad} f_i(\xi^{(i)}), h \rangle = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_i(\xi^{(i)}) \cdot h_j,$$

ezért

$$|f_i(b) - f_i(a)| \leq \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(\xi^{(i)})| \cdot |h_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(\xi^{(i)})| \cdot \|h\|_\infty \leq$$

$$\sup \Big\{ \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(x)| : x \in (a, b) \Big\} \cdot \|h\|_\infty.$$

Következésképpen

$$f(b) - f(a) = \Big(\langle \operatorname{grad} f_1(\xi^{(1)}), h \rangle, \ldots, \langle \operatorname{grad} f_m(\xi^{(m)}), h \rangle \Big)$$

miatt

$$\|f(b) - f(a)\|_\infty = \max\{|f_i(b) - f_i(a)| : i = 1, ..., m\} =$$

$$\max\{|\langle \operatorname{grad} f_i(\xi^{(i)}), h \rangle| : i = 1, ..., m\} \leq$$

$$\max \Big\{ \sup \Big\{ \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(x)| : x \in (a, b) \Big\} : i = 1, ..., m \Big\} \cdot \|h\|_\infty =$$

$$\sup \Big\{ \max \Big\{ \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f_i(x)| : i = 1, ..., m \Big\} : x \in (a, b) \Big\} \cdot \|h\|_\infty =$$

$$\sup\{\|f'(x)\|_{(\infty)} : x \in (a, b)\} \cdot \|h\|_\infty.$$

Ha tehát $\mathbf{R}^n$-en is és $\mathbf{R}^m$-en is a $\|.\|_\infty$ vektornormát vezetjük be, akkor az $f'(x)$ $(x \in \mathcal{D}_f)$ Jacobi-mátrix általuk generált $\|f'(x)\|_{(\infty)}$ normáját tekintve a

$$q := \sup\{\|f'(x)\|_{(\infty)} : x \in (a, b)\}$$

szimbólummal

$$\|f(b) - f(a)\|_\infty \leq q \cdot \|b - a\|_\infty.$$

(A Lagrange-középértéktétel „vektorértékű" függvényekre vonatkozó alakja.) Megjegyezzük még, hogy a fentiek szerint az

$$A := \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f_1(\xi^{(1)}) \\ \operatorname{grad} f_2(\xi^{(2)}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\xi^{(m)}) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times n}$$

mátrixszal

$$f(b) - f(a) = A(b - a).$$

ix) Tekintsük az

$$f(x,y) := (xy, x^2y^2) \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big)$$

(könnyen igazolhatóan) differenciálható $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ függvényt. Ekkor

$$f(1,1) - f(0,0) = (1,1),$$

továbbá

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{bmatrix} \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big).$$

Mutassuk meg, hogy a $(0,0)$, $(1,1)$ pontokat összekötő szakaszon nincs olyan (x,y) pont, amellyel

$$f(1,1) - f(0,0) = (1,1) = f'(x,y)\cdot(1,1) = (x+y, 2xy^2 + 2x^2y)$$

teljesülne. Valóban, ellenkező esetben

$$x + y = 1,\ 2xy^2 + 2x^2y = 1$$

állna fenn. Innen $x = y$ miatt

$$2x = 1,\ 4x^3 = 1,$$

ami nem lehetséges, hiszen az első egyenlőségből $x = 1/2$, de

$$4(1/2)^3 = 1/2 \neq 1.$$

x) Ha a 4.3.2. Tételben szereplő f függvényre

$$\partial^i f(\xi) = 0 \qquad (\xi \in \mathcal{D}_f,\ i \in \mathbf{N}^n,\ |i| = s+1),$$

akkor tetszőleges $[a,b] \subset \mathcal{D}_f$ esetén a Lagrange-féle maradéktag nulla, azaz

$$\sum_{i\in\mathbf{N}^n, |i|=s+1} \frac{\partial^i f(c)}{i!}\cdot(b-a)^i = 0,$$

így $f(b) = T_{a,s}f(b)$. Speciálisan, ha $\mathcal{D}_f = \mathbf{R}^n$, akkor bármely $a \in \mathbf{R}^n$ választással

$$f(\xi) = T_{a,s}f(\xi) = \sum_{k=0}^{s} \sum_{i\in\mathbf{N}^n, |i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!}\cdot(\xi-a)^i \qquad (\xi \in \mathbf{R}^n).$$

Ez a helyzet pl. akkor, ha (az egyszerűség kedvéért csak $n = 2$-re fogalmazva) az

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

egy kétváltozós polinom, azaz bizonyos $N \in \mathbf{N}$, $\alpha_{kl} \in \mathbf{R}$ $\quad (k = 0, ..., N)$ számokkal

$$f(x,y) := P(x,y) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} \alpha_{kl} x^k y^l \qquad \Big((x,y) \in \mathbf{R}^2\Big).$$

Világos, hogy a

$$h_{kl}(x,y) := x^k y^l \qquad \Big((x,y) \in \mathbf{R}^2,\ k,\ l = 0, ..., N\Big)$$

függvényekre

$$\partial_1^j h_{kl} = \partial_2^m h_{kl} \equiv 0 \qquad (j, m \in \mathbf{N},\ j > k \text{ vagy } m > l).$$

Innen az is következik, hogy

$$\partial_1^j P = \partial_2^m P \equiv 0 \qquad (j, m \in \mathbf{N},\ \max\{j, m\} > N).$$

Így többek között

$$\partial^i P \equiv 0 \qquad (i \in \mathbf{N}^2,\ |i| > 2N).$$

Ezért tetszőleges $a := (u, v) \in \mathbf{R}^2$ választással

$$P(\xi) = P(x,y) = \sum_{k=0}^{2N} \sum_{i \in \mathbf{N}^n, |i| = k} \frac{\partial^i P(a)}{i!} \cdot (\xi - a)^i =$$

$$\sum_{k=0}^{2N} \sum_{j,m \in \mathbf{N}, j+m=k} \frac{\partial_1^j \partial_2^m P(u,v)}{j! \cdot m!} \cdot (x-u)^j (y-v)^m =$$

$$\sum_{j=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \frac{\partial_1^j \partial_2^m P(u,v)}{j! \cdot m!} \cdot (x-u)^j (y-v)^m =$$

$$\sum_{j=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \alpha_{jm} \cdot (x-u)^j (y-v)^m \qquad \Big(\xi = (x,y) \in \mathbf{R}^2\Big),$$

ahol tehát

$$\alpha_{jm} := \frac{\partial_1^j \partial_2^m P(u,v)}{j! \cdot m!} \qquad (j,\ m = 0, ..., N).$$

Egyszerűen belátható az is, hogy adott $u, v \in \mathbf{R}$ mellett ilyen α_{jm}-ek egyértelműen léteznek. Értelemszerűen terjeszthetők ki a most mondottak 2-nél több változójú polinomokra.

xi) Legyen pl.

$$P(x,y) := 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5 \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big).$$

Ekkor

$$\partial_1 P(x,y) = 4x - y - 6,\ \partial_2 P(x,y) = -x - 2y - 3\ ,\ \ \partial_{11} P(x,y) = 4,$$

$$\partial_{12} P(x,y) = \partial_{21} P(x,y) = -1,\ \partial_{22} P(x,y) = -2 \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big),$$

és az előbbi megjegyzés szerint (az $a := (1,-2)$ választással)

$$P(x,y) = \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} \alpha_{kl}(x-1)^k(y+2)^l \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big)$$

az

$$\alpha_{kl} := \frac{\partial_1^k \partial_2^l P(1,-2)}{k! \cdot l!} \qquad (k,\ l = 0,1,2)$$

együtthatókkal. Tehát

$$\alpha_{00} = P(1,-2) = 5,\ \alpha_{01} = \partial_2 P(1,-2) = 0,;\ \alpha_{02} = \frac{\partial_{22} P(1,-2)}{2} = -1,$$

$$\alpha_{10} = \partial_1 P(1,-2) = 0,\ \alpha_{11} = \partial_{12} P(1,-2) = -1,$$

$$\alpha_{12} = \frac{\partial_{122} P(1,-2)}{2} = 0,\ \alpha_{20} = \frac{\partial_{11} P(1,-2)}{2} = 2,$$

$$\alpha_{21} = \frac{\partial_{112} P(1,-2)}{2} = 0,\ \alpha_{22} = \frac{\partial_{1122} P(1,-2)}{4} = 0.$$

Így

$$P(x,y) = 2(x-1)^2 - (y+2)^2 - (x-1)(y+2) + 5 \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big).$$

xii) Adott $1 \le k, l \in \mathbf{N}$ mellett becsüljük meg az

$$(1+x)^k(1+y)^l \approx 1 + kx + ly \qquad (x, y \in [0,1])$$

közelítés hibáját. Legyen ehhez a 4.3.2. Tételben

$$f(x,y) := (1+x)^k(1+y)^l \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big),$$

és $s := 1,\ a := (0,0),\ b := (x,y)\ \ (x,y \in [0,1])$. Ekkor

$$\partial_1 f(x,y) = k(1+x)^{k-1}(1+y)^l,\ \partial_2 f(x,y) = l(1+x)^k(1+y)^{l-1},$$

$$\partial_{12} f(x,y) = kl(1+x)^{k-1}(1+y)^{l-1},$$

$$\partial_{11}f(x,y)=\begin{cases}0 & (k=1)\\ \\ k(k-1)(1+x)^{k-2}(1+y)^l & (k>1),\end{cases}$$

$$\partial_{22}f(x,y)=\begin{cases}0 & (l=1)\\ \\ l(l-1)(1+x)^{k}(1+y)^{l-2} & (l>1)\end{cases}\qquad \big((x,y)\in\mathbf{R}^2\big).$$

Ezért

$$\partial_1 f(0,0)=k,\ \partial_2 f(0,0)=l,$$

és a $\{(tx,ty): 0\le t\le 1\}$ szakasz alkalmas $c=(u,v)$ pontjával a Lagrange-maradéktagos Taylor-formula alapján

$$f(x,y)=f(0,0)+T_{a,1}f(x,y)+\sum_{i\in\mathbf{N}^n,|i|=2}\frac{\partial^i f(c)}{i!}\cdot(x,y)^i=$$

$$1+\partial_1 f(0,0)\cdot x+\partial_2 f(0,0)\cdot y+\sum_{i\in\mathbf{N}^n,|i|=2}\frac{\partial^i f(c)}{i!}\cdot(x,y)^i=$$

$$1+kx+ly+\frac{1}{2}\cdot\Big(\partial_{11}f(u,v)\cdot x^2+2\partial_{12}f(u,v)\cdot xy+\partial_{22}f(u,v)\cdot y^2\Big).$$

Világos, hogy $x,y\in[0,1]$ esetén $0\le u\le x\le 1$ és $0\le v\le y\le 1$, tehát

$$\Big|(1+x)^k(1+y)^l-(1+kx+ly)\Big|\le$$

$$\frac{1}{2}\cdot\Big(\partial_{11}f(1,1)\cdot x^2+2\partial_{12}f(1,1)\cdot xy+\partial_{22}f(1,1)\cdot y^2\Big)\qquad (x,y\in[0,1]).$$

Így pl.

$$\Big|(1+x)^2(1+y)^2-(1+2x+2y)\Big|\le$$

$$4x^2+8xy+4y^2=4(x+y)^2\qquad (x,y\in[0,1]).$$

Ha itt mondjuk $x=y=0.1$, akkor az $1.1^4\approx 1.4$ közelítés adódik, és a fentiek alapján a következő becslést kapjuk:

$$|1.1^4-1.4|\le 4\cdot 0.2^2=0.16$$

(ahol a pontos értékek: $1.1^4=1.4641$, azaz $|1.1^4-1.4|=0.0641$).

xiii) Mutassuk meg, hogy ha $n\in\mathbf{N}$ és

$$f(x,y):=(x+y)^n\qquad \big((x,y)\in\mathbf{R}^2\big),$$

akkor

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \qquad \big((x,y)\in\mathbf{R}^2\big)$$

(ami nem más, mint a binomiális tétel). Valóban, egyrészt könnyen átláthatóan minden $s\in\mathbf{N}$ mellett $f\in D^s$. Másrészt gondoljuk meg, hogy

$$i\in\mathbf{N}^2,\ |i|\neq n \Longrightarrow \partial^i f(0,0)=0.$$

Legyen ui. $i=(j,m)$ $(j,m\in\mathbf{N})$, ekkor

$$\partial^i f(x,y)=\partial_1^j\partial_2^m f(x,y)=\begin{cases}0 & (j+m>n)\\ \prod_{k=0}^{j+m-1}(n-k)\cdot(x+y)^{n-(j+m)} & (j+m\leq n).\end{cases}$$

Tehát

$$\partial^i f(0,0)=0 \qquad (|i|=j+m>n),$$

ill.

$$\partial^i f(0,0)=\prod_{k=0}^{j+m-1}(n-k)\cdot 0^{n-(j+m)}=0 \qquad (|i|=j+m<n).$$

Továbbá

$$\partial^i f(0,0)=\prod_{k=0}^{n-1}(n-k)=n! \qquad (|i|=j+m=n).$$

Ezért a Lagrange-maradéktagos Taylor-formula (ld. 4.3.2. Tétel) szerint (ld. x) megjegyzés)

$$f(x,y)=T_{(0,0),n}f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i\in\mathbf{N}^2,|i|=k}\frac{\partial^i f(0,0)}{i!}\cdot(x,y)^i=$$

$$\sum_{i\in\mathbf{N}^2,|i|=n}\frac{\partial^i f(0,0)}{i!}\cdot(x,y)^i=\sum_{(j,m)\in\mathbf{N}^2,j+m=n}\frac{\partial_1^j\partial_2^m f(0,0)}{j!m!}\cdot x^j y^m=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot x^k y^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \qquad \big((x,y)\in\mathbf{R}^2\big).$$

xiv A iv) megjegyzés alapján könnyen belátható, hogy a $Q:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ leképezés akkor és csak akkor kvadratikus alak, ha alkalmas $\alpha_i\in\mathbf{R}$ $(i\in\mathbf{N}^n,\ |i|=2)$ együtthatókkal

$$Q(x)=\sum_{i\in\mathbf{N}^n,|i|=2}\alpha_i x^i \qquad (x\in\mathbf{R}^n)$$

(azaz Q egy ún. *homogén másodfokú polinom*).

xv) Mutassuk meg, hogy ha a $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény kvadratikus alak, akkor $Q \in D$, és

$$\operatorname{grad} Q(a) = 2Aa \qquad (a \in \mathbf{R}^n),$$

ahol $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ a

$$Q(x) = \langle Ax, x\rangle \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

értelmezésben szereplő szimmetrikus mátrix. Ui.

$$Q(a+h) - Q(a) = \langle A(a+h), a+h\rangle - \langle Aa, a\rangle = \langle Aa + Ah, a+h\rangle - \langle Aa, a\rangle =$$
$$\langle Aa, h\rangle + \langle Ah, a\rangle + \langle Ah, h\rangle \qquad (a,\ h \in \mathbf{R}^n).$$

Itt az A szimmetriája miatt $\langle Aa, h\rangle = \langle Ah, a\rangle$, ezért

$$Q(a+h) - Q(a) = \langle 2Aa, h\rangle + \langle Ah, h\rangle \qquad (a,\ h \in \mathbf{R}^n).$$

Az

$$\eta(h) := \frac{\langle Ah, h\rangle}{\|h\|_2} \qquad (0 \neq h \in \mathbf{R}^n)$$

jelöléssel egyrészt

$$|\eta(h)| = \frac{|\langle Ah, h\rangle|}{\|h\|_2} \leq \|Ah\|_2 \leq \|A\|_{(2)}\cdot \|h\|_2 \to 0 \qquad (\|h\|_2 \to 0),$$

másrészt

$$Q(a+h) - Q(a) = \langle 2Aa, h\rangle + \eta(h)\cdot \|h\|_2 \qquad (0 \neq h \in \mathbf{R}^2).$$

Mindez együtt azt jelenti, amit állítottunk.

xvi) A 3.2. xv) megjegyzés szerint egy $f = f_1 + \imath f_2 \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ komplex függvényre – feltéve, hogy $f \in D\{a\}$ – fennállnak a Cauchy–Riemann-egyenlőségek:

$$\partial_1 f_1(a_1, a_2) = \partial_2 f_2(a_1, a_2),\ \partial_1 f_2(a_1, a_2) = -\partial_2 f_1(a_1, a_2).$$

Ha itt $f_1,\ f_2 \in D^2\{(a_1, a_2)\}$, akkor a Young-tétel (ld. 4.3.1. Tétel) alkalmazásával azt mondhatjuk, hogy $\partial_{12} f_1(a_1, a_2) = \partial_{21} f_1(a_1, a_2)$, és így

$$\partial_{12} f_1(a_1, a_2) = \partial_2(\partial_1 f_1)(a_1, a_2) = \partial_{22} f_2(a_1, a_2) = \partial_{21} f_1(a_1, a_2) =$$
$$\partial_1(\partial_2 f_1)(a_1, a_2) = -\partial_{11} f_2(a_1, a_2).$$

Innen átrendezéssel az adódik, hogy

$$\partial_{11} f_2(a_1, a_2) + \partial_{22} f_2(a_1, a_2) = 0.$$

Analóg módon jutunk a

$$\partial_{11} f_1(a_1, a_2) + \partial_{22} f_1(a_1, a_2) = 0$$

egyenlőséghez. Ennek alapján azt mondjuk, hogy az $f_1,\ f_2$ függvények (a mondott feltételek mellett) kielégítik az ún. *Laplace-egyenletet.*

4.5. Differenciálható függvények vizsgálata

4.5.1. Lokális szélsőértékek

Amint azt már az „egyváltozós analízisben" is hangsúlyoztuk, a matematikai alkalmazások egyik legfontosabb fejezete a függvények szélsőértékeinek a vizsgálata. A címben szereplő lokális szélsőértékek értelmezése is az egyváltozós esettel analóg módon történhet. Nevezetesen, legyen valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett adott az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ helyen *lokális maximuma* van (más szóval az a pont *lokális maximumhely*), ha egy alkalmas $K(a)$ környezettel fennáll a következő becslés:

$$f(x) \leq f(a) \qquad (x \in K(a) \cap \mathcal{D}_f).$$

Ekkor az $f(a)$ függvényértéket az f *lokális maximumának* nevezzük.

Ha a fenti $a \in \mathcal{D}_f$ helyen az előbbinél többet megkívánó

$$f(x) \leq f(a) \qquad (x \in \mathcal{D}_f)$$

egyenlőtlenség igaz, akkor az f függvénynek az a-ban *abszolút maximuma* van (vagy másképp fogalmazva az a pont *abszolút maximumhelye* f-nek). Ekkor maga az $f(a)$ függvényérték az f *abszolút maximuma.* Világos, hogy az utóbbi esetben az $f(a)$ egyúttal az f lokális maximuma is, ill. ekkor az a pont lokális maximumhely is.

Analóg módon kapjuk a minimumhelyek, ill. minimumok fogalmát. Ha ui. $a \in \mathcal{D}_f$ és egy $K(a)$ környezet esetén igaz az

$$f(x) \geq f(a) \qquad (x \in K(a) \cap \mathcal{D}_f)$$

becslés, akkor az $f(a)$ függvényértéket az f *lokális minimumának,* az a-t pedig az f *lokális minimumhelyének* nevezzük. (Más szóval ekkor az f-nek az a-ban *lokális minimuma van.*)

Hasonlóan, ha

$$f(x) \geq f(a) \qquad (x \in \mathcal{D}_f),$$

akkor az f függvénynek az a-ban *abszolút minimuma* van (az a pont *abszolút minimumhelye* az f-nek), ill. az $f(a)$ függvényérték az f *abszolút minimuma.* Ilyenkor az $f(a)$ nyilván az f lokális minimuma is.

Esetenként azt mondjuk röviden, hogy az f függvénynek az a-ban *lokális szélsőértéke* van (az a pont *lokális szélsőértékhelye* az f-nek), ha az f függvénynek az a-ban lokális maximuma vagy lokális minimuma van. Továbbá az a pont *abszolút szélsőértékhelye* a szóban forgó f-nek (az $f(a)$ függvényérték *abszolút szélsőértéke* az f-nek), ha az a-ban abszolút maximuma vagy abszolút mimimuma van az f függvénynek.

A többváltozós differenciálható függvényekre vonatkozóan is az egyik legismertebb állítás az alábbi tétel, az ún. *elsőrendű szükséges feltétel lokális szélsőértékre*:

4.5.1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *függvénynek valamilyen* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *helyen lokális szélsőértéke van, és* $f \in D\{a\}$. *Ekkor* $f'(a) = 0$.

Megjegyezzük, hogy

$$f'(a) = \operatorname{grad} f(a) = \big(\partial_1 f(a), \ldots, \partial_n f(a)\big),$$

tehát az $f'(a) = 0$ feltétel azt jelenti, hogy

$$\partial_1 f(a) = \ldots = \partial_n f(a) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen pl. az a hely lokális maximumhely (minimumhely esetén analóg a bizonyítás). Van tehát olyan $r > 0$, hogy (az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ feltételt is figyelembe véve) a $K(a) = K_r(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezettel

$$f(x) \leq f(a) \qquad \big(x \in K_r(a)\big).$$

Világos, hogy ($\mathbf{R}^n$-ben a $\|.\| := \|.\|_2$ normát vezetve be) tetszőleges $e \in \mathbf{R}^n$, $\|e\| = 1$ vektorral egyúttal az

$$f_e(t) := f(a + te) \qquad (-r < t < r)$$

függvénynek is lokális maximuma van a 0-ban. Az $f_e \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható a 0-ban (ld. 4.1.4. Tétel), és (az egyváltozós valós függvényekre vonatkozó analóg elsőrendű szükséges feltétel alapján)

$$f_e'(0) = \partial_e f(a) = 0.$$

Más szóval (ld. 3.2. vi) megjegyzés) az f függvénynek az a-ban minden $e \in \mathbf{R}^n$, $\|e\| = 1$ irányvektor esetén az a-beli iránymenti deriváltja nulla. Így speciálisan

$$\partial_j f(a) = 0 \qquad (j = 1, ..., n),$$

amiből az állításunk már a bizonyítás előtt mondottakra utalva nyilvánvaló. ■

Emlékeztetünk arra, hogy már az $n = 1$ esetben láttuk: a 4.5.1.1. Tételbeli $f'(a) = 0$ feltétel csak szükséges, de nem elégséges ahhoz, hogy az f-nek az a-ban lokális szélsőértéke legyen.

A következő állításban elégséges feltételt adunk a lokális szélsőértékekkel kapcsolatban (*másodrendű elégséges feltétel lokális szélsőérték létezésére*):

4.5.1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *függvényre valamilyen* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *helyen az alábbi feltételek teljesülnek:*

a) $f \in D^2\{a\}$;
b) $\operatorname{grad} f(a) = 0$;
c) Q_a^f *pozitív (negatív) definit.*

Ekkor az f-nek az a-ban lokális minimuma (maximuma) van.

Bizonyítás. Mivel $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, ezért egy alkalmas $r > 0$ mellett a $K_r(a)$ környezetre $K_r(a) \subset \mathcal{D}_f$ teljesül. Továbbá a 4.3.4. Tétel bizonyítása után mondottak szerint, a b) feltételt is figyelembe véve, pl. a $\|.\| := \|.\|_2$ választással

$$f(a+h) - f(a) = \langle \operatorname{grad} f(a), h\rangle + \frac{1}{2}\cdot \langle f''(a)h, h\rangle + \eta(h)\cdot \|h\|^2 =$$

$$\frac{1}{2}\cdot \langle f''(a)h, h\rangle + \eta(h)\cdot \|h\|^2 = \frac{1}{2}\cdot Q_a^f(h) + \eta(h)\cdot \|h\|^2 \qquad \big(h \in K_r(0)\big),$$

ahol $\eta(h) \to \eta(0) = 0$ $(\|h\| \to 0)$. A 4.4. vi) megjegyzés alapján – feltéve, hogy a Q_a^f kvadratikus alak pozitív definit (a negatív definit esetben analóg a bizonyítás) – egy alkalmas $m > 0$ számmal

$$Q_a^f(\xi) \geq m\cdot \|\xi\|^2 \qquad (\xi \in \mathbf{R}^n).$$

Ezért

$$f(a+h) - f(a) \geq \left(\frac{m}{2} + \eta(h)\right)\cdot \|h\|^2 \qquad \big(h \in K_r(0)\big).$$

Az $\eta(h) \to 0$ $(\|h\| \to 0)$ feltétel miatt a fenti r „sugárról" az is feltehető, hogy

$$|\eta(h)| < \frac{m}{4} \qquad \big(h \in K_r(0)\big),$$

következésképpen

$$f(a+h) - f(a) \geq \left(\frac{m}{2} - |\eta(h)|\right)\cdot \|h\|^2 \geq$$

$$\left(\frac{m}{2} - \frac{m}{4}\right)\cdot \|h\|^2 = \frac{m}{4}\cdot \|h\|^2 \geq 0 \qquad \big(h \in K_r(0)\big).$$

Tehát

$$f(a+h) \geq f(a) \qquad \big(h \in K_r(0)\big),$$

vagy más szóval

$$f(x) \geq f(a) \qquad \big(x \in K_r(a)\big),$$

azaz az f-nek az a-ban lokális minimuma van. ■

Most is elmondhatjuk, hogy az $n = 1$ esetben láttuk: a 4.5.1.2. Tételben szereplő feltételek csak elégségesek, de nem szükségesek ahhoz, hogy az f-nek az a-ban lokális szélsőértéke legyen.

A továbbiakban kétszer differenciálható függvények körében adunk szükséges feltételt arra, hogy a szóban forgó függvénynek valamilyen pontban lokális szélsőértéke legyen (*másodrendű szükséges feltétel lokális szélsőérték létezésére*):

4.5.1.3. Tétel. *Tekintsük az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényt, és tételezzük fel, hogy az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban igazak az alábbi feltételek:*

a) $f \in D^2\{a\}$;

b) *az f-nek az a-ban lokális minimuma (maximuma) van.*

Ekkor $\operatorname{grad} f(a) = 0$, *és a Q_a^f kvadratikus alak pozitív (negatív) szemidefinit.*

Bizonyítás. A $\operatorname{grad} f(a) = 0$ egyenlőség nyilván következik a 4.5.1.1. Tételből. Továbbá az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ feltevés és a b) feltétel miatt egy alkalmas $r > 0$ mellett a $K_r(a)$ környezettel $K_r(a) \subset \mathcal{D}_f$, és az a-beli lokális minimum létezése mellett (lokális maximum esetén a további gondolatmenet értelemszerűen módosítható)

$$(*) \qquad f(x) \geq f(a) \qquad \Big(x \in K_r(a)\Big).$$

Indirekt módon tegyük fel, hogy a Q_a^f kvadratikus alak nem pozitív szemidefinit, azaz van olyan $h \in \mathbf{R}^n$ hogy $Q_a^f(h) < 0$. Mivel bármelyik Q kvadratikus alakra $Q(0) = 0$, ezért $h \neq 0$. Világos, hogy minden $0 < t < r/\|h\|$ szám esetén $a + th \in K_r(a)$, ezért a 4.5.1.2. Tétel bizonyításában már idézett formula szerint

$$f(a+th) - f(a) = \frac{1}{2} \cdot Q_a^f(th) + \eta(th) \cdot \|th\|^2 =$$

$$\frac{t^2}{2} \cdot \Big(Q_a^f(h) + 2\eta(th) \cdot \|h\|^2\Big) \qquad (0 < t < r/\|h\|),$$

ahol $\eta(\xi) \to \eta(0) = 0 \ \ (\|\xi\| \to 0)$, és így egyúttal $\eta(th) \to 0 \ \ (t \to 0)$. Létezik tehát olyan $0 < \tau < r/\|h\|$, amellyel

$$2|\eta(\tau h)| \cdot \|h\|^2 < -\frac{Q_a^f(h)}{2}.$$

Következésképpen

$$f(a+\tau h) - f(a) < \frac{\tau^2}{2} \cdot \Big(Q_a^f(h) + 2|\eta(\tau h)| \cdot \|h\|^2\Big) < \frac{\tau^2}{2} \cdot \left(Q_a^f(h) - \frac{Q_a^f(h)}{2}\right) = \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{Q_a^f(h)}{2} < 0,$$

azaz $f(a + \tau h) < f(a)$. Ez $a + \tau h \in K_r(a)$ miatt nyilván ellentmond a $(*)$ becslésnek. ■

Amint azt már az előző tételekkel kapcsolatban is említettük, a most bebizonyított másodrendű szükséges feltétel sem elégséges ahhoz, hogy az illető függvénynek az adott helyen lokális szélsőértéke legyen.

4.5.2. Lokális invertálhatóság

Elöljáróban idézzük fel az egyváltozós valós függvényekkel ($\mathbf{R} \to \mathbf{R}$) kapcsolatban tanultakat. Ha $h \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h \in C^1\{a\}$ (azaz a h függvény folytonosan differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_h$ helyen), és $h'(a) \neq 0$, akkor egy alkalmas $r > 0$ mellett $I := (a-r, a+r) \subset \mathcal{D}_h$, valamint (pl.)

$$h'(x) > 0 \qquad (x \in I).$$

Tehát a $h_{|_I}$ leszűkítés szigorúan monoton növő, ezért létezik a $\left(h_{|_I}\right)^{-1}$ inverzfüggvény. Sőt, mivel $h_{|_I}$ folytonos, ezért a $g := \left(h_{|_I}\right)^{-1}$ inverzfüggvény is folytonos, amiből a g differenciálhatósága és

$$g'(x) = \frac{1}{h'(g(x))} \qquad (x \in \mathcal{D}_g)$$

is következett.

A továbbiakban a most megfogalmazott „egyváltozós" állítás megfelelőjét fogjuk vizsgálni többváltozós vektorfüggvényekre.

Legyen ehhez (a továbbiakban is) valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett adott az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ függvény, és az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont. Azt mondjuk, hogy az f függvény *lokálisan invertálható* az a-ban, ha létezik olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy a $g := f_{|_{K(a)}}$ leszűkítés invertálható függvény. Minden ilyen esetben a g^{-1} inverzfüggvényt az f a-beli *lokális inverzének* nevezzük.

4.5.2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ függvény folytonosan differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, és az a-beli Jacobi-mátrixa invertálható. Ekkor az f függvény az a-ban lokálisan invertálható, és az a-beli lokális inverze folytonos.*

Tehát $f \in C^1\{a\}$, és az $f'(a) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ mátrix determinánsa – $\det f'(a)$ – nem nulla. Ekkor alkalmas $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezettel létezik a folytonos $\left(f_{|_{K(a)}}\right)^{-1}$ inverzfüggvény.

Bizonyítás. Könnyen átgondolható, hogy az általánosság csorbítása nélkül feltehetők az alábbiak:

$$a = f(a) = 0 \in \mathbf{R}^n, \ f'(0) = (a_{ik})_{i,k=1}^n \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

pedig az $n \times n$-es egységmátrix:

$$a_{ii} = 1 \ , \ \ a_{ik} = 0 \quad (i, k \in \{1, ..., n\}, i \neq k).$$

Legyen $y \in \mathbf{R}^n$, és

$$\Phi_y(x) := x - f(x) + y =: g(x) + y \qquad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Ekkor nyilván $g \in C^1\{0\}$, és

$$g'(0) = \Theta := (0)_{i,k=1}^n \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

(az $n \times n$-es nullmátrix). Ha tehát

$$g = (g_1, ..., g_n),$$

akkor egy $K_r(a) \subset \mathcal{D}_f \quad (r > 0)$ környezet minden pontjában a g függvény differenciálható, a g_k koordinátafüggvények $\partial_i g_k \quad (i, k = 1, ..., n)$ parciális deriváltfüggvényei valamennyien folytonosak a 0-ban, és

$$\partial_i g_k(0) = 0 \qquad (i, k = 1, ..., n).$$

Válasszuk a $q > 0$ számot úgy, hogy $n \cdot q < 1/2$, ekkor az előbbiek szerint a $K_r(a)$ környezetről az is feltehető, hogy

$$G_r(0) := \overline{K_r(0)} = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_\infty \le r\} \subset \mathcal{D}_f,$$

és

$$|\partial_i g_k(x)| < q \qquad \Big(x \in G_r(0),\, i, k = 1, ..., n\Big).$$

Ezért

$$\|g'(x)\|_{(\infty)} = \max\left\{\sum_{i=1}^n |\partial_i g_k(x)| : k = 1, ..., n\right\} < n \cdot q < \frac{1}{2} \qquad \Big(x \in G_r(0)\Big).$$

A 4.4. viii) megjegyzés alapján így azt mondhatjuk, hogy

$$\|g(x) - g(t)\|_\infty \le$$

$$\sup\Big\{\|g'(\xi)\|_{(\infty)} : \xi \in G_r(0)\Big\} \cdot \|x - t\|_\infty \le \frac{1}{2} \cdot \|x - t\|_\infty \qquad \Big(x, t \in G_r(0)\Big).$$

Tehát egyúttal

$$\|\Phi_y(x) - \Phi_y(t)\|_\infty = \|g(x) - g(t)\|_\infty \le \frac{1}{2} \cdot \|x - t\|_\infty \qquad \Big(y \in \mathbf{R}^n,\, x, t \in G_r(0)\Big),$$

speciálisan tetszőleges $y \in K_{r/2}(0)$ mellett

$$\|\Phi_y(x)\|_\infty \le \|g(x)\|_\infty + \|y\|_\infty = \|g(x) - g(0)\|_\infty + \|y\|_\infty \le$$

$$\frac{1}{2} \cdot \|x\|_\infty + \|y\|_\infty < r \qquad \Big(x \in G_r(0)\Big).$$

Mindez azt jelenti, hogy bármely $y \in K_{r/2}(0)$ esetén a

$$\Phi_y : G_r(0) \to K_r(0) \; \Big(\subset G_r(0) \Big)$$

leképezés kontrakció. Az 1.5.2. Tétel (fixponttétel) alkalmazásával ezért $y \in K_{r/2}(0)$ mellett egyértelműen létezik olyan $x_y \in G_r(0)$, ami fixpontja a Φ_y-nak: $\Phi_y(x_y) = x_y$. Definiálhatunk tehát egy

$$\varphi : K_{r/2}(0) \to G_r(0)$$

leképezést, amelyre

$$\varphi(y) := x_y \qquad \Big(y \in K_{r/2}(0)\Big),$$

azaz

$$\Phi_y(\varphi(y)) = \varphi(y) \qquad \Big(y \in K_{r/2}(0)\Big).$$

Más szóval

$$\Phi_y(\varphi(y)) = \varphi(y) - f(\varphi(y)) + y = g(\varphi(y)) + y = \varphi(y) \qquad \Big(y \in K_{r/2}(0)\Big),$$

amiből

$$f(\varphi(y)) = y \qquad \Big(y \in K_{r/2}(0)\Big)$$

is rögtön következik. Megjegyezzük, hogy az eddigieket figyelembe véve

$$\|\varphi(y)\|_\infty = \|\Phi_y(\varphi(y))\|_\infty < r \qquad \Big(y \in K_{r/2}(0)\Big)$$

miatt

$$\varphi : K_{r/2}(0) \to K_r(0).$$

Világos, hogy $\varphi(0) = 0$, hiszen $\Phi_0(0) = -f(0) + 0 = 0$, azaz $y = 0$-ra a $0 \in G_r(0)$ fixpontja a Φ_0-nak.

Mutassuk meg, hogy a φ függvény folytonos. Ha ui. $y, z \in K_{r/2}(0)$, akkor

$$\varphi(y) = \Phi_y(\varphi(y)) = g(\varphi(y)) + y, \; \varphi(z) = \Phi_z(\varphi(z)) = g(\varphi(z)) + z,$$

amiből

$$\|\varphi(y) - \varphi(z)\|_\infty \le \|g(\varphi(y)) - g(\varphi(z))\|_\infty + \|y - z\|_\infty \le$$
$$\frac{1}{2} \cdot \|\varphi(y) - \varphi(z)\|_\infty + \|y - z\|_\infty,$$

ezért

$$\|\varphi(y) - \varphi(z)\|_\infty \le 2 \cdot \|y - z\|_\infty.$$

Innen már világos, hogy a φ (egyenletesen) folytonos.

Lássuk be, hogy az $U := \mathcal{R}_\varphi$ halmaz nyílt. Legyen ehhez $u \in K_{r/2}(0)$ mellett

$$\xi := \varphi(u) \in U.$$

Ha $\sigma > 0$ és valamilyen $z \in K_r(0)$ esetén $\|\xi - z\|_\infty < \sigma$, azaz $z \in K_\sigma(\xi)$, akkor

$$z \in U \iff z = \varphi(y),$$

ahol $y \in K_{r/2}(0)$. Tehát $z = \Phi_y(z) = g(z) + y$, amiből

$$y = z - g(z)$$

következik. Azt kell megmutatnunk, hogy alkalmas σ-val

$$z - g(z) \in K_{r/2}(0).$$

A fentiek alapján viszont

$$\|z - g(z)\|_\infty = \|z - \xi + \varphi(u) - g(z)\|_\infty = \|z - \xi + g(\varphi(u)) + u - g(z)\|_\infty \leq$$

$$\|z - \xi\|_\infty + \frac{1}{2}\cdot \|\varphi(u) - z\|_\infty + \|u\|_\infty =$$

$$\frac{3\cdot \|z - \xi\|_\infty}{2} + \|u\|_\infty < \frac{3\sigma}{2} + \|u\|_\infty < \frac{r}{2},$$

ha

$$0 < \sigma < \frac{r - 2\cdot \|u\|_\infty}{3}.$$

Ekkor tehát $K_\sigma(\xi) \subset U$. Mivel ez minden $\xi \in U$ esetén igaz, így az U halmaz valóban nyílt.

Tetszőleges $u, v \in U$ esetén alkalmas $y, z \in K_{r/2}$ helyeken $u = \varphi(y)$, $v = \varphi(z)$. Következésképpen

$$f(u) = f(\varphi(y)) = y, \; f(v) = f(\varphi(z)) = z,$$

amiből $u \neq v$ esetén $y \neq z$, és így $f(u) \neq f(v)$ adódik. Ez azt jelenti, hogy az $f_{|_U}$ leszűkítés injektív, és a fenti

$$f(\varphi(y)) = y \qquad \big(y \in K_{r/2}(0)\big)$$

egyenlőség miatt az

$$(f_{|_U})^{-1} = \varphi$$

inverzfüggvény folytonos.

Nyilvánvaló, hogy $0 \in U$, ezért alkalmas $K(0) \subset U$ környezettel az $f_{|_{K(0)}}$ leszűkítés is injektív. Más szóval az f az a-ban lokálisan invertálható, és az $\left(f_{|_{K(0)}}\right)^{-1}$ (lokális) inverzfüggvény a φ egy alkalmas leszűkítése, és mint ilyen, folytonos. ∎

Jegyezzük meg, hogy a fenti bizonyítás szerint

$$\|\varphi(y) - \varphi(z)\|_\infty \leq 2\cdot \|y - z\|_\infty \qquad \big(y, z \in K_{r/2}(0)\big),$$

ill. a $h := \left(f_{|_{K(0)}}\right)^{-1}$ (lokális) inverzfüggvényre

$$h(x) = \varphi(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_h).$$

Ezért a h függvény is eleget tesz az ún. elsőrendű *Lipschitz-feltételnek,* miszerint van olyan $C \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|h(x) - h(z)\|_\infty \leq C \cdot \|x - z\|_\infty \qquad (x \in \mathcal{D}_h).$$

Nevezetesen (pl.) a $C := 2$ választás megfelelő. Röviden azt írjuk, hogy $h \in \mathrm{Lip}(1)$.

4.5.3. Implicitfüggvény

A címben jelzett fogalomhoz mintegy motivációul emlékeztetünk az „alulhatározott" lineáris egyenletrendszerek jól ismert megoldására. Nevezetesen, legyen $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$, $m < n$ esetén adott az

$$A := (\alpha_{ik})_{i,k=1}^{m,n} \in \mathbf{R}^{m \times n}$$

mátrix által meghatározott

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k} y_k &= 0 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{mk} y_k &= 0 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer. Ekkor rögzített $x_1, ..., x_{n-m} \in \mathbf{R}$ értékek mellett a

$$\begin{aligned} \sum_{k=n-m+1}^{n} \alpha_{1k} y_k &= -\textstyle\sum_{k=1}^{n-m} \alpha_{1k} x_k \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ \sum_{k=n-m+1}^{n} \alpha_{mk} y_k &= -\textstyle\sum_{k=1}^{n-m} \alpha_{mk} x_k \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer már annyi egyenletből áll, ahány ismeretlent tartalmaz. Nevezetesen, az egyenletek száma és az $y_{n-m+1}, ..., y_n$ ismeretlenek száma egyaránt m. Ha pl. az utóbbi rendszer determinánsa nem nulla, akkor a Cramer-szabállyal minden $x_1, ..., x_{n-m} \in \mathbf{R}$ „paraméter" esetén egyértelműen kapjuk az $y_{n-m+1}, ..., y_n$ megoldásokat.

A most mondottakat általánosítva induljunk ki az $n, m \in \mathbf{N}$ természetes számokból, ahol $2 \leq n$ és $1 \leq m < n$. Ha

$$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbf{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1, ..., \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m}, \ y := (\xi_{n-m+1}, ..., \xi_n) \in \mathbf{R}^m,$$

és állapodjunk meg abban, hogy mindezt a következőképpen fogjuk jelölni:

$$\xi = (x, y).$$

Röviden szólva (ld. 3.2. vii) megjegyzés) az alábbi azonosítással élünk:

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m.$$

Ha tehát

$$f = (f_1, ..., f_m) \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m,$$

akkor az f-et olyan kétváltozós vektorfüggvénynek tekintjük, ahol az $f(x, y)$ $\Big((x, y) \in \mathcal{D}_f\Big)$ helyettesítési értékben az argumentum első változójára $x \in \mathbf{R}^{n-m}$, a második változójára pedig $y \in \mathbf{R}^m$ teljesül.

Tegyük fel, hogy ebben az értelemben valamilyen $(a, b) \in \mathcal{D}_f$ zérushelye az f-nek:

$$f(a, b) = 0.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy van az a-nak olyan $K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m}$ környezete, a b-nek pedig olyan $K(b) \subset \mathbf{R}^m$ környezete, hogy tetszőleges $x \in K(a)$ esetén egyértelműen létezik olyan $y \in K(b)$, amellyel $f(x, y) = 0$. Definiáljuk ekkor a $g(x) := y$ hozzárendeléssel a

$$g : K(a) \to K(b)$$

függvényt, amikor is

$$f(x, g(x)) = 0 \qquad \Big(x \in K(a)\Big),$$

és minden $x \in K(a)$ mellett az $y = g(x)$ az egyetlen olyan $y \in K(b)$ hely, amelyre

$$f(x, y) = 0.$$

Az előbbi g függvényt az f által (az (a, b) körül) meghatározott *implicitfüggvénynek* nevezzük. Tehát az

$$\begin{aligned} f_1(x_1, ..., x_{n-m}, y_1, ..., y_m) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ f_m(x_1, ..., x_{n-m}, y_1, ..., y_m) &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek minden $x = (x_1, ..., x_{n-m}) \in k(a)$ mellett egyértelműen létezik

$$y = (y_1, ..., y_m) = g(x) \in K(b)$$

megoldása. Nyilván $g(a) = b$.

Ha pl. a bevezetőben említett A mátrixszal

$$f(\xi) := A\xi \qquad (\xi \in \mathbf{R}^n),$$

és

$$A_1 := (\alpha_{ik})_{i=1,k=1}^{m,n-m} \in \mathbf{R}^{m\times(n-m)},\ A_2 := (\alpha_{ik})_{i=1,k=n-m+1}^{m,n} \in \mathbf{R}^{m\times m},$$

valamint

$$(*) \qquad \det A_2 \neq 0,$$

akkor a fent mondottak szerint tetszőleges $K(0) \subset \mathbf{R}^{n-m}$, $K(0) \subset \mathbf{R}^m$ környezetekkel minden $x \in K(0)$ választással egyértelműen van olyan $y \in K(0)$, amellyel $f(x, y) = 0$. Röviden: létezik az f által (a $(0, 0)$ körül) meghatározott implicitfüggvény. Vegyük észre (ld. 3.2. vii) megjegyzés), hogy a $(*)$ feltétel

$$f'(0, 0) = [\partial_{\mathbf{1}} f(0, 0)\ \ \partial_{\mathbf{2}} f(0, 0)] = A = [A_1\ A_2]$$

miatt azt jelenti, hogy

$$\det \partial_{\mathbf{2}} f(0, 0) = \det A_2 \neq 0.$$

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett garantálhatjuk (valamilyen pont körül) implicitfüggvény létezését. Legyen ehhez a fenti

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$$

függvény esetén

$$F(x, y) := (x, f(x, y)) \qquad ((x, y) \in \mathcal{D}_f).$$

Ekkor $F \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, és $f(a, b) = 0$ esetén

$$F(a, b) = (a, 0).$$

Ha $f \in C^1\{(a, b)\}$, akkor – I-vel jelölve az $\mathbf{R}^{(n-m)\times(n-m)}$-beli egységmátrixot, Θ-val pedig az $\mathbf{R}^{(n-m)\times m}$-beli nullmátrixot – valamilyen $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, $f \in D\{(x, y)\}$ esetén (ld. 3.1.2., 3.1.4. Tételek) $F \in D\{(x, y)\}$, és

$$F'(x, y) = \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \partial_{\mathbf{1}} f(x, y) & \partial_{\mathbf{2}} f(x, y) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}.$$

Itt (3.2. vii) megjegyzés)

$$\partial_{\mathbf{1}} f(a, b) \in \mathbf{R}^{m\times(n-m)},\ \partial_{\mathbf{2}} f(a, b) \in \mathbf{R}^{m\times m}$$

az f parciális deriváltmátrixai. Ebből következően nyilván $F \in C^1\{(a,b)\}$ is teljesül. Tehát

$$F'(a,b) = \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \partial_{\mathbf{1}} f(a,b) & \partial_{\mathbf{2}} f(a,b) \end{bmatrix}.$$

Világos, hogy

$$\det F'(a,b) = \det \partial_{\mathbf{2}} f(a,b),$$

ezért $\det \partial_{\mathbf{2}} f(a,b) \neq 0$ esetén

$$\det F'(a,b) \neq 0.$$

Alkalmazható ezért az F-re a 4.5.2.1. Tétel, miszerint az F-nek az (a,b) körül van folytonos lokális inverze. Legyen ez utóbbi a Φ függvény, amikor is

$$\Phi \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n.$$

Nyilván $(a,0) \in \mathcal{D}_\Phi$ és

$$\Phi(a,0) = (a,b).$$

Az $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m$ particionálással tehát

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2),$$

ahol

$$\Phi_1 \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-m}, \ \Phi_2 \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m.$$

Mivel a Φ folytonos, ezért a Φ_1, Φ_2 koordinátafüggvényei is folytonosak.

Azt írhatjuk tehát, hogy tetszőleges $(x,y) \in \mathcal{D}_\Phi$ helyen

$$(x,y) = F(\Phi(x,y)) = F(\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y)) = \Big(\Phi_1(x,y), f(\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y))\Big),$$

amiből $\Phi_1(x,y) = x$, és így

$$(**) \qquad f(x, \Phi_2(x,y)) = y$$

következik. Vegyük figyelembe, hogy a 4.5.2.1. Tétel bizonyítása szerint $\mathcal{D}_\Phi$ nyílt halmaz, ezért $(a,0) \in \mathcal{D}_\Phi$ alapján egy-egy alkalmas $K(a)$, $K(0)$ környezettel $K(a) \times K(0) \subset \mathcal{D}_\Phi$. Így $(**)$-ban y helyébe írható $y := 0$, és ekkor

$$f(x, \Phi_2(x,0)) = 0 \qquad \Big(x \in K(a)\Big).$$

Legyen

$$g(x) := \Phi_2(x,0) \qquad \Big(x \in K(a)\Big).$$

A Φ_2 folytonossága miatt nyilván a g is folytonos. Könnyű továbbá belátni, hogy tetszőleges $x \in K(a)$ esetén

$$t := g(x)$$

az egyetlen olyan $t \in K(0)$, amelyre $f(x,t) = 0$. Ha ui. a $g(x) \neq z \in K(0)$ elem is ilyen, azaz $f(x,z) = 0$, akkor

$$F(x, g(x)) = (x, 0) = (x, f(x, z)) = F(x, z),$$

ami $(x, g(x)) \neq (x, z)$ miatt ellentmond az F függvény (a, b) körüli lokális invertálhatóságának.

Azt kaptuk ezzel, hogy az előbbi g függvény nem más, mint az f által az (a, b) körül meghatározott implicitfüggvény. Más szóval beláttuk a következő tételt:

4.5.3.1. Tétel. *Legyen* $n, m \in \mathbf{N}$, *ahol* $2 \leq n$ *és* $1 \leq m < n$. *Ha az*

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$$

függvényre az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *helyen*

$$f(a, b) = 0,\ f \in C^1\{(a, b)\},\ \det \partial_{\mathbf{2}} f(a, b) \neq 0$$

teljesül, akkor létezik az f *által az* (a, b) *körül meghatározott folytonos implicitfüggvény.*

A 4.5.3. Tétel bizonyítása után mondottak szerint a fenti Φ lokális inverzre

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) \in \operatorname{Lip}(1),$$

azaz alkalmas $C \geq 0$ konstanssal

$$\|\Phi(x,y) - \Phi(u,v)\|_\infty = \left\|\Big(\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y)\Big) - \Big(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)\Big)\right\|_\infty =$$

$$\left\|\Big(x, \Phi_2(x,y)\Big) - \Big(u, \Phi_2(u,v)\Big)\right\|_\infty = \left\|\Big(x - u, \Phi_2(x,y) - \Phi_2(u,v)\Big)\right\|_\infty \leq$$

$$C \cdot \|(x,y) - (u,v)\|_\infty = C \cdot \|(x-u, y-v)\|_\infty \qquad \Big((x,y),\ (u,v) \in \mathcal{D})_\Phi\Big).$$

Speciálisan az $y := v := 0$ választással

$$\left\|\Big(x - u, \Phi_2(x,0) - \Phi_2(u,0)\Big)\right\|_\infty = \left\|\Big(x - u, g(x) - g(u)\Big)\right\|_\infty \leq$$

$$C \cdot \|(x-u, 0)\|_\infty = C \cdot \|x - u\|_\infty \qquad \Big(x, u \in K(a)\Big).$$

Mivel

$$\left\|\Big(x - u, g(x) - g(u)\Big)\right\|_\infty = \max\{\|x-u\|_\infty, \|g(x) - g(u)\|_\infty\},$$

ezért egyúttal

$$\|g(x) - g(u)\|_\infty \leq C \cdot \|x - u\|_\infty \qquad \Big(x, u \in K(a)\Big)$$

is igaz, tehát $g \in \operatorname{Lip}(1)$.

4.5.3.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $n, m \in \mathbf{N}$, $2 \le n$ *és* $1 \le m < n$, *továbbá az*

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$$

függvényre az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *helyen igazak az alábbiak:*

$$f(a, b) = 0,\ f \in C^1\{(a, b)\},\ \det \partial_{\mathbf{2}} f(a, b) \neq 0.$$

Ekkor az f *által az* (a, b) *körül meghatározott* g *implicitfüggvény differenciálható az* (a, b)*-ben, és*

$$g'(a) = -\partial_{\mathbf{2}} f(a, b)^{-1} \cdot \partial_{\mathbf{1}} f(a, b).$$

Jegyezzük meg (ld. 3.2. vii) megjegyzés), hogy

$$\partial_{\mathbf{1}} f(a, b) \in \mathbf{R}^{m \times (n-m)},\ \partial_{\mathbf{2}} f(a, b) \in \mathbf{R}^{m \times m},$$

így $-\partial_{\mathbf{2}} f(a, b)^{-1} \in \mathbf{R}^{m \times m}$, következésképpen

$$-\partial_{\mathbf{2}} f(a, b)^{-1} \cdot \partial_{\mathbf{1}} f(a, b) \in \mathbf{R}^{m \times (n-m)}.$$

Mivel $g \in \mathbf{R}^{n-m} \to \mathbf{R}^m$, ezért $g'(a)$-tól is azt „várjuk", hogy

$$g'(a) \in \mathbf{R}^{m \times (n-m)}$$

legyen.

Bizonyítás. A 4.5.3.1. Tétel szerint alkalmas $K(a)$, $K(b)$ környezetekkel létezik az f által az (a, b) körül meghatározott

$$g \in K(a) \to K(b)$$

implicitfüggvény:

$$f(x, g(x)) = 0 \qquad (x \in K(a)).$$

A most idézett tétel bizonyítása után tett észrevételünket figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy $g \in \operatorname{Lip}(1)$, azaz választhatunk olyan $C \ge 1$ együtthatót, amellyel

$$\|g(x) - g(t)\|_\infty \le C \cdot \|x - t\|_\infty \qquad (x, t \in K(a)).$$

Az $f \in C^1\{(a, b)\}$ feltételt alkalmazva tetszőleges $h \in \mathbf{R}^{n-m}$, $a + h \in K(a)$ esetén azt mondhatjuk, hogy

$$0 = f(a + h, g(a + h)) - f(a, b) = f(a + h, g(a + h)) - f(a, g(a)) =$$

$$f'(a,b)\cdot \Big(h, g(a+h)-g(a)\Big) + \eta\Big(h, g(a+h)-g(a)\Big)\cdot \Big\|\Big(h, g(a+h)-g(a)\Big)\Big\|_\infty,$$

ahol az $\eta \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ függvényre

$$\eta(\xi) \to \eta(0) = 0 \qquad (\|\xi\|_\infty \to 0).$$

Mivel

$$f'(a,b) = [\partial_{\mathbf{1}} f(a,b) \;\; \partial_{\mathbf{2}} f(a,b)],$$

ezért

$$f'(a,b)\cdot \Big(h, g(a+h)-g(a)\Big) = \partial_{\mathbf{1}} f(a,b)\cdot h + \partial_{\mathbf{2}} f(a,b)\cdot \Big(g(a+h)-g(a)\Big).$$

Így az $a+h \in K(a)$ feltételnek eleget tevő $0 \neq h \in \mathbf{R}^{n-m}$ vektorokra bevezetve a

$$\Delta(h) := \frac{\eta\Big(h, g(a+h)-g(a)\Big)\cdot \Big\|\Big(h, g(a+h)-g(a)\Big)\Big\|_\infty}{\|h\|_\infty}$$

jelölést azt kapjuk, hogy

$$(*) \qquad g(a+h)-g(a) = \Big(-\partial_{\mathbf{2}} f(a,b)^{-1}\cdot \partial_{\mathbf{1}} f(a,b)\Big)\cdot h - \partial_{\mathbf{2}} f(a,b)^{-1}\cdot \Delta(h)\cdot \|h\|_\infty.$$

Legyen

$$q := \|\partial_{\mathbf{2}} f(a,b)^{-1}\|_{(\infty)},$$

ekkor

$$\|-\partial_{\mathbf{2}} f(a,b)^{-1}\cdot \Delta(h)\|_\infty \leq q\cdot \|\Delta(h)\|_\infty =$$

$$q\cdot \Big\|\eta\Big(h, g(a+h)-g(a)\Big)\Big\|_\infty \cdot \frac{\Big\|\Big(h, g(a+h)-g(a)\Big)\Big\|_\infty}{\|h\|_\infty}.$$

Itt

$$\Big\|\Big(h, g(a+h)-g(a)\Big)\Big\|_\infty = \max\{\|h\|_\infty, \|g(a+h)-g(a)\|_\infty\} \leq$$

$$\max\{\|h\|_\infty, C\cdot \|h\|_\infty\} = C\cdot \|h\|_\infty.$$

Ezért

$$\|-\partial_{\mathbf{2}} f(a,b)^{-1}\cdot \Delta(h)\|_\infty \leq q\cdot C\cdot \Big\|\eta\Big(h, g(a+h)-g(a)\Big)\Big\|_\infty.$$

Ha most $0 \neq h_k \in \mathbf{R}^{n-m}$ $(k \in \mathbf{N})$ az $a + h_k \in K(a)$ feltételnek eleget tevő olyan vektorsorozat, amelyre $\|h_k\|_\infty \to 0 \quad (k \to \infty)$, akkor a g folytonossága miatt

$$\|g(a+h_k) - g(a)\|_\infty \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

amiből

$$\Big\|\Big(h_k, g(a+h_k) - g(a)\Big)\Big\|_\infty = \max\{\|h_k\|_\infty, \|g(a+h_k) - g(a)\|_\infty\} \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

is következik. Ez azt jelenti, hogy

$$\Big\|\eta\Big(h, g(a+h) - g(a)\Big)\Big\|_\infty \to 0 \qquad (\|h\|_\infty \to 0).$$

Egybevetve az eddig mondottakat tehát

$$-\partial_{\mathbf{2}} f(a,b)^{-1} \cdot \Delta(h) \to 0 \qquad (\|h\|_\infty \to 0),$$

amiből $(*)$ alapján a g implicitfüggvény (a,b)-beli differenciálhatóságával kapcsolatos állításunk is következik. ■

Ha a 4.5.3.2. Tételben szereplő f függvényről $f \in C^1\{(a,b)\}$ helyett a mindenütt (de legalább az (a,b) egy környezetében) való folytonos differenciálhatóságot tételezzük fel, azaz $f \in C^1$, akkor a $\det \partial_{\mathbf{2}} f(a,b) \neq 0$ feltételből egyúttal az (a,b) pont egy alkalmas környezetének minden (x,y) pontjában is

$$\det \partial_{\mathbf{2}} f(x,y) \neq 0$$

teljesül. Következésképpen a

$$g : K(a) \to K(b)$$

implicitfüggvényre is nem csupán az a-ban, hanem (megfelelően választva a $K(a)$ környezetet) minden $x \in K(a)$ helyen $g \in D\{x\}$, és

$$g'(x) = -\partial_{\mathbf{2}} f(x, g(x))^{-1} \cdot \partial_{\mathbf{1}} f(x, g(x)).$$

Az $f \in C^1$ feltételezés miatt (ld. 3.1.) a $\partial_{\mathbf{2}} f$, $\partial_{\mathbf{1}} f$ parciális deriváltmátrixok komponensfüggvényei, azaz a $\partial_i f_k$ $(i = 1, ..., n,$ ill. $k = 1, ..., m)$ függvények valamennyien folytonosak. Ezért a g függvény folytonosságát figyelembe véve a

$$K(a) \ni x \mapsto \partial_i f_k(x, g(x))$$

függvények is folytonosak. Innen már nem nehéz meggondolni (a mátrixok invertálására, ill. szorzására gondolva), hogy a

$$K(a) \ni x \mapsto g'(x) = -\partial_{\mathbf{2}} f(x, g(x))^{-1} \cdot \partial_{\mathbf{1}} f(x, g(x))$$

mátrixfüggvény minden komponensfüggvénye – azaz a g' Jacobi-mátrixfüggvény minden komponensfüggvénye – is folytonos az $x \in K(a)$ helyeken. Röviden: a g folytonosan differenciálható: $g \in C^1$.

Foglaljuk össze a most mondottakat egyetlen állításban (az *implicitfüggvény-tételben*):

4.5.3.3. Tétel. *Legyen* $n, m \in \mathbf{N}$, $2 \leq n$ *és* $1 \leq m < n$, *továbbá az*

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$$

függvényről tételezzük fel az alábbiakat: $f \in C^1$, *és az* $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *helyen*

$$f(a, b) = 0, \ \det \partial_{\mathbf{2}} f(a, b) \neq 0.$$

Ekkor alkalmas $K(a)$, $K(b)$ *környezetekkel az* f *által az* (a, b) *körül meghatározott* $g : K(a) \to K(b)$ *implicitfüggvény folytonosan differenciálható, és*

$$g'(x) = -\partial_{\mathbf{2}} f(x, g(x))^{-1} \cdot \partial_{\mathbf{1}} f(x, g(x)) \qquad \big(x \in K(a)\big).$$

4.5.4. Inverzfüggvény-tétel

A 4.5.2.1. Tételben beláttuk, hogy ha $1 \leq n \in \mathbf{N}$, és az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ függvény folytonosan differenciálható egy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, valamint $\det f'(a) \neq 0$, akkor az f függvény lokálisan invertálható az a-ban, és az a-beli lokális inverze folytonos. Az implicitfüggvényről a 4.5.3. pontban kapott eredményeket felhasználva nem nehéz megmutatni, hogy ha a szóban forgó lokális inverzfüggvényt h-val jelöljük, akkor $h \in D\{f(a)\}$, és

$$h'(f(a)) = \big(f'(a)\big)^{-1}.$$

Legyen ui. $b := f(a)$, és

$$F(u, v) := f(v) - u \qquad (u \in \mathbf{R}^n, \, v \in \mathcal{D}_f).$$

Ekkor $(b, a) \in \mathcal{D}_F$, és $F(b, a) = 0$. Világos továbbá, hogy $F \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, ill. (ld. 3.1.2., 3.1.4. Tételek) minden olyan $v \in \mathcal{D}_f$ esetén, amelyre $f \in D\{v\}$, egyúttal $F \in D\{(u, v)\}$ $(u \in \mathbf{R}^n)$, és – I-vel jelölve az $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$-beli egységmátrixot –

$$F'(u, v) = [\partial_{\mathbf{1}} F(u, v) \ \ \partial_{\mathbf{2}} F(u, v)] = [-I \ \ f'(v)].$$

Ezért $F \in C^1\{(b, a)\}$, valamint

$$\det \partial_{\mathbf{2}} F(b, a) = \det f'(a) \neq 0.$$

A 4.5.3.2. Tétel szerint ezért alkalmas $K(b)$, $K(a)$ környezetekkel létezik az F által a (b, a) körül meghatározott

$$g : K(b) \to K(a)$$

implicitfüggvény, amelyre $g \in D\{b\}$, és

$$g'(b) = -\partial_2 F(b,a)^{-1} \cdot \partial_1 F(b,a) = -\big(f'(a)\big)^{-1} \cdot (-I) = \big(f'(a)\big)^{-1}.$$

A g függvényre tehát

$$F(x, g(x)) = f(g(x)) - x = 0 \qquad \big(x \in K(b)\big),$$

azaz

$$f(g(x)) = x \qquad \big(x \in K(b)\big)$$

teljesül, és minden $x \in K(b)$ esetén az $y = g(x) \in K(a)$ az egyetlen olyan y elem a $K(a)$-ban, amellyel $F(x, y) = 0$. A 4.5.2.1. Tételből tudjuk, hogy az f-nek van az a-ban lokális inverze (a bevezetőben ezt a lokális inverzfüggvényt jelöltük h-val). A 4.5.2.1. Tétel bizonyításából az is kiderült, hogy a $\mathcal{D}_h$ értelmezési tartomány nyílt halmaz. Így nyilván feltehető, hogy $K(b) \subset \mathcal{D}_h$. Mivel

$$f(h(x)) = x \qquad \big(x \in K(b)\big),$$

ezért $g(x) = h(x)$ $\big(x \in K(b)\big)$, amiből a g-ről mondottak miatt $h \in D\{b\}$, és

$$h'(b) = g'(b) = \big(f'(a)\big)^{-1}$$

következik.

A 4.5.3.3. Tétel megfogalmazása előtt mondottakat (analóg módon) figyelembe véve kapjuk a fentiekből az *inverzfüggvény-tételt*:

4.5.4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $1 \le n \in \mathbf{N}$, *az* $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *függvény folytonosan differenciálható, és az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban az* $f'(a)$ *Jacobi-mátrixra* $\det f'(a) \neq 0$ *teljesül. Ekkor alkalmas* $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ *környezettel az* $f_{|K(a)}$ *leszűkítés invertálható, a* $h := \big(f_{|K(a)}\big)^{-1}$ *lokális inverzfüggvény folytonosan differenciálható, és*

$$h'(x) = \big(f'(h(x))\big)^{-1} \qquad (x \in \mathcal{D}_h).$$

Legyen továbbra is $0 < n \in \mathbf{N}$. Azt mondjuk, hogy az

$$f = (f_1, ..., f_n) \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

függvény egy ún. *egyszerű függvény,* ha $\mathcal{D}_f \subset \mathbf{R}^n$ intervallum, és egy $k = 1, ..., n$ indexszel

$$f_i(x) = f_i(x_1, ..., x_n) = x_i \qquad (x \in \mathcal{D}_f,\ k \neq i = 1, ..., n).$$

Így pl. az

$$f(t) := t \qquad (t \in \mathbf{R}^n)$$

identitásfüggvény is egyszerű függvény. Világos (ld. 3.1.2. Tétel), hogy a fenti f egyszerű függvény differenciálhatósága ekvivalens az f_k koordinátafüggvény differenciálhatóságával. Ui. bármely $i = 1, ..., n$ mellett az

$$\mathbf{R}^n \ni (x_1, ..., x_n) \mapsto \varphi(x_1, ..., x_n) := x_i$$

leképezésre nyilván léteznek és folytonosak a

$$\partial_j \varphi(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 0 & (j \neq i) \\ \\ 1 & (j = i) \end{cases} \qquad (j = 1, ..., n)$$

parciális deriváltfüggvények, ezért alkalmazható a 3.1.5. Tétel. Ha tehát a szóban forgó f egyszerű függvény differenciálható, akkor (ld. 3.1.4. Tétel)

$$f'(a) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \partial_1 f_k(a) & \dots & \partial_{k-1} f_k(a) & \partial_k f_k(a) & \partial_{k+1} f_k(a) & \dots & \partial_n f_k(a) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{(1)} \\ \vdots \\ e^{(k-1)} \\ \operatorname{grad} f_k(a) \\ e^{(k+1)} \\ \vdots \\ e^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n},$$

ahol

$$e^{(1)} := (1, 0, \dots, 0),\ e^{(2)} := (0, 1, \dots, 0),\ \dots\ ,\ e^{(n)} := (0, 0, \dots, 1) \in \mathbf{R}^n$$

(kanonikus bázisvektorok). Innen az is nyilvánvaló, hogy

$$\det f'(a) \neq 0 \iff \partial_k f_k(a) \neq 0.$$

Speciálisan, ha $n = 2$, akkor az $f \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ egyszerű függvények a következő alakúak:

$$f(x, y) = (x, g(x, y)) \qquad ((x, y) \in \mathcal{D}_f),$$

vagy

$$f(x, y) = (h(x, y), y) \qquad ((x, y) \in \mathcal{D}_f)$$

valamilyen g, $h \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvényekkel. Tehát $f \in D \iff g \in D$ (vagy $h \in D$), és $f \in D$ esetén

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \partial_1 g(x, y) & \partial_2 g(x, y) \end{bmatrix}, \ \det f'(x, y) = \partial_2 g(x, y) \qquad \big((x, y) \in \mathcal{D}_f\big),$$

vagy

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} \partial_1 h(x, y) & \partial_2 h(x, y) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \det f'(x, y) = \partial_1 h(x, y) \qquad \big((x, y) \in \mathcal{D}_f\big).$$

Tegyük fel, hogy $2 \leq n \in \mathbf{N}$. Ekkor a $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ függvényt *csereoperátornak* nevezzük, ha alkalmas $i, j = 1 ..., n$ indexekkel $i < j$, és

$$T_{ij}(x_1, ..., x_n) := T(x_1, ..., x_n) :=$$

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n) \qquad \big((x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n\big).$$

(Tehát a T_{ij} az argumentumának az i-edik és a j-edik koordinátáját felcseréli.) Az egyszerű függvényekkel kapcsolatban már idézett tételek szerint $T_{ij} \in D$, és

$$T'_{ij} = \begin{bmatrix} e^{(1)} \\ \vdots \\ e^{(i-1)} \\ e^{(j)} \\ e^{(i+1)} \\ \vdots \\ e^{(j-1)} \\ e^{(i)} \\ e^{(j+1)} \\ \vdots \\ e^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n}.$$

Ha $n = 2$, akkor egyetlen csereoperátor létezik, nevezetesen a T_{12}, amikor is

$$T_{12}(x, y) = (y, x) \qquad \big((x, y) \in \mathbf{R}^2\big),$$

és

$$T'_{12}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2},$$

és

$$\det T'_{12}(x,y) = -1 \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big).$$

A továbbiakban megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett az $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ típusú vektor-vektor függvények „lokálisan" előállíthatók véges sok egyszerű függvény és csereoperátor kompozíciójaként.

4.5.4.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy $2 \le n \in \mathbf{N}$, az $f = (f_1, ..., f_n) \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ függvény folytonosan differenciálható, és az $a \in \mathcal{D}_f$ helyen $\det f'(a) \ne 0$. Ekkor megadható egy $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, véges sok egyszerű függvény és véges sok csereoperátor úgy, hogy ezek alkalmasan vett kompozíciójának a $K(a)$-ra való leszűkítése megegyezik $f_{|_{K(a)}}$-val.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért csak $n = 2$ esetén részletezzük a bizonyítást. Ekkor valamilyen folytonosan differenciálható g, $h \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvényekkel $f = (g, h)$, és

$$\det f'(a) = \det \begin{bmatrix} \partial_1 g(a) & \partial_2 g(a) \\ \partial_1 h(a) & \partial_2 h(a) \end{bmatrix} \ne 0.$$

Ezért (pl.) $\partial_2 g(a) \ne 0$. Megmutatjuk, hogy alkalmas G, $L \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvényekre az

$$F(x,y) := \big(G(x,y), y\big) \qquad \big((x,y) \in \mathcal{D}_G\big),$$

$$H(x,y) := \big(x, L(x,y)\big) \qquad \big((x,y) \in \mathcal{D}_H\big)$$

egyszerű leképezésekkel egy $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezetben

$$f(x,y) = H\Big(F\big(T_{12}(x,y)\big)\Big) \qquad \big((x,y) \in K(a)\big).$$

(Ha a $\partial_1 g(a) \ne 0$ kezdeti feltételezéssel élünk, akkor a T_{12} leképezés „kihagyható".) Tehát azt „várjuk", hogy

$$f(x,y) = \big(g(x,y), h(x,y)\big) = H\big(F(y,x)\big) = H\big(G(y,x), x\big) =$$

$$(*) \qquad \Big(G(y,x), L\big(G(y,x), x\big)\Big) \qquad \big((x,y) \in K(a)\big).$$

Más szóval

$$G(y,x) = g(x,y) \qquad \big((x,y) \in K(a)\big),$$

és (ennek alapján is)

$$L\Big(g(x,y),x\Big)=h(x,y)\qquad \Big((x,y)\in K(a)\Big).$$

Tekintsük a

$$\Phi(u,v):=\Big(g(u,v),u\Big)\qquad \Big((u,v)\in \mathcal{D}_f\Big)$$

függvényt. Ekkor $\Phi\in C^1$, és

$$\Phi'(u,v)=\begin{bmatrix}\partial_1 g(u,v) & \partial_2 g(u,v)\\ 1 & 0\end{bmatrix}\qquad \Big((u,v)\in \mathcal{D}_f\Big),$$

tehát

$$\det\Phi'(a)=\det\begin{bmatrix}\partial_1 g(a) & \partial_2 g(a)\\ 1 & 0\end{bmatrix}=-\partial_2 g(a)\neq 0.$$

Ezért az inverzfüggvény-tétel (ld. 4.5.4.1. Tétel) szerint a Φ függvény az a-ban lokálisan invertálható: a $b:=g(a)$ jelöléssel a $\Phi(a)=(b,a_1)$ pontnak egy alkalmas $K(b,a_1)$ környezetével létezik a

$$\Psi: K(b,a_1)\to \mathbf{R}^2$$

lokális inverz. Így

$$\Phi(\Psi(\xi))=\xi\qquad \Big(\xi\in K(b,a_1)\Big).$$

Azt is tudjuk az idézett tételből, hogy az $\mathcal{R}_\Psi$ értékkészlet nyílt halmaz, ezért $\Psi(b,a_1)=a$ miatt a $K(a)$ környezetről az is feltehető, hogy $K(a)\subset\mathcal{R}_\Psi$. Legyen

$$L(u,v):=h\Big(\Psi(u,v)\Big)\qquad \Big((u,v)\in K(b,a_1)\Big),$$

ekkor

$$L\Big(g(x,y),x\Big)=L\Big(\Phi(x,y)\Big)=h\Big(\Psi(\Phi(x,y)\Big)=h(x,y)\qquad \Big((x,y)\in K(a)\Big).$$

Ha tehát

$$G(s,t):=g(t,s)\qquad \Big((t,s)\in K(a)\Big),$$

akkor fennáll a $(*)$ egyenlőség.

A fentiekkel analóg a bizonyítás gondolatmenete, ha a $\partial_1 h(a)\neq 0$ vagy a $\partial_2 h(a)\neq 0$ feltételből indulunk ki. ■

4.5.5. Feltételes szélsőérték

Már az elemi matematikából jól ismert az alábbi feladat: az egységnyi kerületű téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a területe? Jelöljük ehhez a szóban forgó téglalapok (egymásra merőleges) oldalainak a hosszát x-szel és y-nal. Ekkor a kérdéses téglalap területe xy, következésképpen a feladat matematikai modellje így szól: határozzuk meg az xy szorzat maximumát, ha $x > 0$, $y > 0$, és $2x + 2y = 1$.

Az illusztráció kedvéért most elfeledve az elemi megoldást, legyen

$$f(x,y) := xy,\ g(x,y) := 2x + 2y - 1 \qquad \Big((x,y) \in \mathbf{R}^2\Big).$$

Világos, hogy nem az f függvény maximumát keressük (ami egyébként sem létezik), hanem az

$$f_{|\{g=0\}}$$

leszűkítésnek keressük a legnagyobb értékét. Erre a függvényre viszont nem alkalmazhatók a 4.5.1. pont tételei, ui. könnyen láthatóan a

$$\mathcal{D}_{f_{|\{g=0\}}} = \{g = 0\}$$

halmaznak egyetlen pontja sem belső pontja. Ugyanakkor a feladat most attól egyszerű, hogy (ld. 4.6. xiii) megjegyzés) a

$$h(x) := \frac{1}{2} - x \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvénnyel

$$\{g = 0\} = \operatorname{graf} h.$$

Röviden: a h függvény a g által meghatározott implicitfüggvény. Ezért az $f_{|\{g=0\}}$ függvény vizsgálata ugyanazt jelenti, mint a $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény vizsgálata, ahol

$$\Phi(x) := f(x, h(x)) = x\cdot (1/2 - x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A (differenciálható) Φ függvényre aztán már alkalmazhatók a szélsőérték-számítással kapcsolatban tanultak.

A fenti rövid bevezetőben említett feladat általánosításából adódóan az alábbi értelmezést tesszük. Legyen $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$, $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$, és

$$f : U \to \mathbf{R},\ g : U \to \mathbf{R}^m.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g = 0$ *feltételre vonatkozóan feltételes lokális (abszolút) maximuma (minimuma) van* a

$$c \in \{g = 0\} := \{\xi \in U : g(\xi) = 0\}$$

pontban, ha az

$$\tilde{f}(\xi) := f(\xi) \qquad (\xi \in \{g = 0\})$$

függvénynek a c-ben lokális (abszolút) maximuma (minimuma) van. Feltesszük természetesen, hogy

$$\{g = 0\} \neq \emptyset.$$

A korábbiakkal összhangban használjuk az $f(c)$-re a *feltételes lokális (abszolút) maximum (minimum), ill. szélsőérték,* továbbá c-re a *feltételes lokális (abszolút) maximumhely (minimumhely), ill. szélsőértékhely* elnevezést is.

Ha tehát az f-nek a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokális szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre nézve, akkor egy alkalmas $K(c)$ környezettel

$$f(\xi) \leq f(c) \qquad \big(\xi \in \{g = 0\} \cap K(c)\big)$$

(ha maximumról van szó), ill.

$$f(\xi) \geq f(c) \qquad \big(\xi \in \{g = 0\} \cap K(c)\big)$$

(ha minimumról van szó) teljesül.

Első állításként a feltételes lokális szélsőértékekre vonatkozó ún. *elsőrendű szükséges feltételt* tárgyaljuk.

4.5.5.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$, $m < n$, $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}^m$. Ha $f \in D$, $g \in C^1$, az f-nek a $c \in \{g = 0\}$ helyen feltételes lokális szélsőértéke van a $g = 0$ feltételre vonatkozóan, továbbá a $g'(c)$ mátrix rangja megegyezik m-mel, akkor létezik olyan $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektor, hogy*

$$\operatorname{grad}(f + \lambda g)(c) = 0.$$

Megjegyezzük, hogy a tételben szereplő λg függvényen a következőt értjük:

$$(\lambda g)(\xi) := \langle \lambda, g(\xi) \rangle \qquad (\xi \in U).$$

Más szóval a $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$, $g = (g_1, ..., g_m)$ koordinátázással

$$(\lambda g)(\xi) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\xi) \qquad (\xi \in U).$$

Bizonyítás. A tételben szereplő rangfeltétel azt jelenti, hogy a $g'(c) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ Jacobi-mátrixnak van olyan $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$ részmátrixa, amelyre $\det A \neq 0$. Ha az A-t a $g'(c)$ mátrix

j_1-edik, ..., j_m-edik oszlopa határozza meg, akkor az $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m$ felbontást úgy képzeljük el, hogy

$$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) = (x, y) \in \mathbf{R}^n,$$

ahol (növekvő sorrendben írva az elemeket)

$$\{i_1, ..., i_{n-m}\} := \{1, ..., n\} \setminus \{j_1, ..., j_m\},$$

és

$$x := (\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_{n-m}}) \in \mathbf{R}^{n-m}, \ y := (\xi_{j_1}, ..., \xi_{j_m}) \in \mathbf{R}^m.$$

Legyen ennek megfelelően $c = (a, b)$. Ekkor tehát $\det \partial_{\mathbf{2}} g(a, b) \neq 0$. Mivel $g(a, b) = 0$, ezért alkalmazható a 4.5.3.3. Tétel: alkalmas $K(a) \subset \mathbf{R}^{n-m}$, $K(b) \subset \mathbf{R}^m$ környezetekkel létezik a g függvény által az (a, b) körül meghatározott $h : K(a) \to K(b)$ folytonosan differenciálható implicitfüggvény (ld. 4.6. xiii) megjegyzés):

$$\Big(K(a) \times K(b)\Big) \bigcap \{g = 0\} = \{(x, h(x)) \in U : x \in K(a)\},$$

és

$$h'(x) = -\Big(\partial_{\mathbf{2}} g(x, h(x))\Big)^{-1} \cdot \partial_{\mathbf{1}} g(x, h(x)) \qquad \Big(x \in K(a)\Big).$$

A feltételeink szerint egy alkalmas $K(c) \subset U$ környezettel (pl.)

$$f(\xi) \leq f(c) \qquad \Big(\xi \in K(c) \cap \{g = 0\}\Big).$$

Nyilván feltehető, hogy

$$K(a) \times K(b) \subset K(c),$$

ezért a

$$\Phi(x) := f(x, h(x)) \qquad \Big(x \in K(a)\Big)$$

függvényre $\Phi \in \mathbf{R}^{n-m} \to \mathbf{R}$, és

$$\Phi(x) \leq f(c) = \Phi(a) \qquad \Big(x \in K(a)\Big).$$

Más szóval a Φ függvénynek az a-ban lokális maximuma van. Világos ugyanakkor, hogy a Φ differenciálható, ezért (ld. 4.5.1.1. Tétel)

$$\Phi'(a) = \operatorname{grad} \Phi(a) = 0.$$

A

$$\varphi(x) := (x, h(x)) \qquad \Big(x \in K(a)\Big)$$

függvénnyel $\Phi = f \circ \varphi$, és (ld. 3.1.2., 3.1.4. Tételek) $\varphi \in D$, valamint I-vel jelölve az $\mathbf{R}^{(n-m)\times(n-m)}$-beli egységmátrixot

$$\varphi'(x) = \begin{bmatrix} I \\ h'(x) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times(n-m)} \qquad \Big(x \in K(a)\Big).$$

Következésképpen (ld. 4.1.4. Tétel)

$$0 = \Phi'(a) = f'(\varphi(a))\cdot \varphi'(a) = f'(a, h(a))\cdot \begin{bmatrix} I \\ h'(a) \end{bmatrix} = f'(c)\cdot \begin{bmatrix} I \\ h'(a) \end{bmatrix} =$$

$$\partial_{\mathbf{1}} f(c) + \partial_{\mathbf{2}} f(c)\cdot h'(a) = \partial_{\mathbf{1}} f(c) - \partial_{\mathbf{2}} f(c)\cdot \left(\partial_{\mathbf{2}} g(c)\right)^{-1}\cdot \partial_{\mathbf{1}} g(c) = \partial_{\mathbf{1}} f(c) + \lambda\cdot \partial_{\mathbf{1}} g(c),$$

ahol

$$\lambda := -\partial_{\mathbf{2}} f(c)\cdot \left(\partial_{\mathbf{2}} g(c)\right)^{-1} \in \mathbf{R}^m.$$

Tehát (a $\partial_{\mathbf{1}}$ értelmezéséből)

$$(*) \qquad \partial_{i_k} f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l\cdot \partial_{i_k} g_l(c) = 0 \qquad (k = 1, ..., n-m).$$

A λ vektor definíciójából „átszorzással" azt kapjuk, hogy

$$\partial_{\mathbf{2}} f(c) + \lambda\cdot \partial_{\mathbf{2}} g(c) = 0,$$

azaz (a $\partial_{\mathbf{2}}$ értelmezésének megfelelően)

$$(**) \qquad \partial_{j_k} f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l\cdot \partial_{j_k} g_l(c) = 0 \qquad (k = 1, ..., m).$$

A $(*)$, $(**)$ formulák együtt nyilván azt jelentik, hogy

$$\partial_k f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l\cdot \partial_k g_l(c) = 0 \qquad (k = 1, ..., n),$$

más szóval

$$\operatorname{grad}(f + \lambda g)(c) = \left(\partial_1 f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l\cdot \partial_1 g_l(c), ..., \partial_n f(c) + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l\cdot \partial_n g_l(c)\right) = 0.$$

■

A feltételes lokális szélsőértékekre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel tehát ugyanolyan jellegű, mint a feltétel nélküli esetben, csak a szóban forgó f függvény helyett (egy alkalmas $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektorral) az $F := f + \lambda g$ függvényre vonatkozóan. Ez az analógia – mint látni fogjuk – megmarad a másodrendű feltételeket illetően is. Ezek megfogalmazásához vezessük be a következő definíciót. Legyen (a 4.5.5.1. Tétel jelölései mellett) adott a $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ kvadratikus alak, a $B \in \mathbf{R}^{m\times n}$ mátrix, és tekintsük az alábbi halmazt:

$$\mathcal{A}_B := \{x \in \mathbf{R}^n : B\cdot x = 0\}.$$

Feltesszük, hogy $m < n$, és a B mátrix rangja m. Ekkor azt mondjuk, hogy a Q kvadratikus alak a B-re nézve

i) *feltételesen pozitív definit*, ha $Q(x) > 0 \quad (0 \neq x \in \mathcal{A}_B)$;

ii) *feltételesen negatív definit*, ha $Q(x) < 0 \quad (0 \neq x \in \mathcal{A}_B)$;

iii) *feltételesen pozitív szemidefinit*, ha $Q(x) \geq 0 \quad (x \in \mathcal{A}_B)$;

iv) *feltételesen negatív szemidefinit*, ha $Q(x) \leq 0 \quad (x \in \mathcal{A}_B)$.

Ezek után a feltételes szélsőértékekre vonatkozó ún. *másodrendű elégséges feltétel* a következőképpen szól:

4.5.5.2. Tétel. *Az $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$, $m < n$ paraméterek mellett legyen adott az $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, és tekintsük az $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}^m$ függvényeket. Feltesszük, hogy $f, g \in D^2$, $c \in \{g = 0\}$, a $g'(c)$ mátrix rangja m, továbbá valamilyen $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektorral az $F := f + \lambda g$ függvényre*

1^o $\operatorname{grad} F(c) = 0$;

2^o *a Q_c^F kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) definit.*

Ekkor az f-nek a c-ben a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma (maximuma) van.

Emlékeztetünk arra (ld. 4.3.), hogy

$$Q_c^F(x) := \langle F''(c) \cdot x, x \rangle \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a Q_c^F kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív definit. (A negatív definit eset az alábbiak értelemszerű módosításával kezelhető.) Indirekt módon tegyük fel továbbá azt, hogy az f-nek a c-ben a $g = 0$ feltételre vonatkozóan nincs feltételes lokális minimuma. Ekkor egy alkalmas $c \neq \xi_k \in \{g = 0\} \quad (k \in \mathbf{N})$ sorozattal $\lim(\xi_k) = c$, és

$$f(\xi_k) < f(c) \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Legyen

$$\zeta_k := \frac{\xi_k - c}{\|\xi_k - c\|} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

ekkor $\|\zeta_k\| = 1 \ (k \in \mathbf{N})$, és a Bolzano–Weirstrass-kiválasztási tétel (ld. 1.7.9. Tétel) miatt van olyan (ν_k) indexsorozat, amellyel a (ζ_{ν_k}) részsorozat konvergens: létezik a

$$h := \lim(\zeta_{\nu_k})$$

határérték. Az 1.4. iv) megjegyzés szerint

$$\|h\| = \lim(\|\zeta_{\nu_k}\|) = 1.$$

A g függvény differenciálható lévén, speciálisan $g \in D\{c\}$, ezért egy alkalmas

$$\eta \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \quad , \quad \lim_0 \eta = 0$$

függvénnyel

$$g(x) - g(c) = g(x) = g'(c) \cdot (x - c) + \eta(x - c) \cdot \|x - c\| \qquad (x \in U).$$

Következésképpen

$$0 = g(\xi_{\nu_k}) - g(c) = g'(c) \cdot (\xi_{\nu_k} - c) + \eta(\xi_{\nu_k} - c) \cdot \|\xi_{\nu_k} - c\| \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

más szóval

$$0 = g'(c) \cdot \frac{\xi_{\nu_k} - c}{\|\xi_{\nu_k} - c\|} + \eta(\xi_{\nu_k} - c) = g'(c) \cdot \zeta_{\nu_k} + \eta(\xi_{\nu_k} - c) \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Így

$$0 = \lim_{k\to\infty} \Big(g'(c) \cdot \zeta_{\nu_k} + \eta(\xi_{\nu_k} - c)\Big) = \lim_{k\to\infty} \Big(g'(c) \cdot \zeta_{\nu_k}\Big) + \lim_{k\to\infty} \eta(\xi_{\nu_k} - c) = g'(c) \cdot h.$$

Tehát $g'(c) \cdot h = 0$, ahol $\|h\| = 1$ miatt $h \neq 0$, ami a Q_c^F kvadratikus alakra vonatkozó feltételes pozitív definitség szerint azt jelenti, hogy

$$Q_c^F(h) > 0.$$

Alkalmazzuk most már a 4.3.4. Tételt, ill. a bizonyítása után a kétszer való differenciálhatóság feltétele mellett megfogalmazott speciális esetét az F függvényre:

$$0 > f(\xi_{\nu_k}) - f(c) = F(\xi_{\nu_k}) - F(c) =$$

$$\langle \operatorname{grad} F(c), \xi_{\nu_k} - c \rangle + \frac{1}{2} \cdot Q_c^F(\xi_{\nu_k} - c) + \omega(\xi_{\nu_k} - c) \cdot \|\xi_{\nu_k} - c\|^2 =$$

$$\frac{1}{2} \cdot Q_c^F(\xi_{\nu_k} - c) + \omega(\xi_{\nu_k} - c) \cdot \|\xi_{\nu_k} - c\|^2 \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

ahol az $\omega \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényre

$$\lim_0 \omega = 0.$$

Innen (egy osztás után) azt kapjuk, hogy

$$0 > \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_c^F(\xi_{\nu_k} - c)}{\|\xi_{\nu_k} - c\|^2} + \omega(\xi_{\nu_k} - c) = \frac{1}{2} \cdot Q_c^F(\zeta_{\nu_k}) + \omega(\xi_{\nu_k} - c) \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

A 4.4. iv) megjegyzés értelmében (miszerint minden kvadratikus alak folytonos) az előbbi becslésből határátmenet útján (ld. 2.2. Tétel)

$$0 \geq \frac{1}{2} \cdot \lim_{k\to\infty} Q_c^F(\zeta_{\nu_k}) + \lim_{k\to\infty} \omega(\xi_{\nu_k} - c) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{k\to\infty} Q_c^F(\zeta_{\nu_k}) = \frac{1}{2} \cdot Q_c^F(h) > 0$$

következik, ami nyilvánvaló ellentmondás. ■

A továbbiakban a feltételes szélsőértékekre vonatkozó *másodrendű szükséges feltételt* vizsgáljuk.

4.5.5.3. Tétel. *Legyen* $1 \leq n, m \in \mathbf{N}$, $m < n$, *és az* $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ *nyílt halmazon legyenek adottak az* $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}^m$ *függvények. Feltesszük, hogy* f, $g \in D^2$, $c \in \{g = 0\}$, *a* $g'(c)$ *mátrix rangja* m, *és az* f*-nek a* c*-ben a* $g = 0$ *feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma (maximuma) van. Ekkor létezik egy olyan* $\lambda \in \mathbf{R}^m$ *vektor, amellyel az* $F := f + \lambda g$ *függvényre az alábbiak teljesülnek:*

1^o $\operatorname{grad} F(c) = 0$;

2^o *a* Q_c^F *kvadratikus alak a* $g'(c)$ *mátrixra nézve feltételesen pozitív (negatív) szemidefinit.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az f-nek a c-ben a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma van. (A tételt a maximumra vonatkozó esetben analóg módon bizonyíthatjuk be.) A 4.5.5.1. Tétel alapján létezik egy $\lambda \in \mathbf{R}^m$ vektor, amellyel az 1^o állítás teljesül. A rangfeltétel miatt továbbá a $g'(c)$ mátrixnak van olyan $m \times m$-es részmátrixa, amelyiknek a determinánsa nem nulla. Megfelelően választva az $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m$ particionálást (ld. a 4.5.5.1. Tétel bizonyítása) $c = (a, b)$, és feltehető, hogy

$$\det \partial_{\mathbf{2}} g(c) = \det \partial_{\mathbf{2}} g(a, b) \neq 0.$$

Alkalmazható ezért a 4.5.3.3. Tétel, miszerint alkalmas $K(a)$, $K(b)$ környezetekkel létezik a g által meghatározott $h : K(a) \to K(b)$ implicitfüggvény:

$$g(x, h(x)) = 0 \qquad \big(x \in K(a)\big),$$

amikor is

$$\big(K(a) \times K(b)\big) \cap \{g = 0\} = \operatorname{graf} h.$$

A minimumfeltétel miatt az előbbi $K(a)$-ról egyúttal az is feltehető, hogy

$$f(x, h(x)) \geq f(a, h(a)) = f(a, b) \qquad \big(x \in K(a)\big).$$

Következésképpen a 4.3.4. Tétel alapján az $a+y \in K(a)$ feltételnek eleget tevő $y \in \mathbf{R}^{n-m}$ vektorokkal

$$0 \le f(a+y, h(a+y)) - f(a, h(a)) = F(a+y, h(a+y)) - F(a, h(a)) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot Q_c^F(y, h(a+y) - h(a)) + \omega(y, h(a+y) - h(a)) \cdot \|(y, h(a+y) - h(a))\|^2,$$

ahol $\omega \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, és $\lim_0 \omega = 0$. A $h \in D\{a\}$ differenciálhatóság miatt egy alkalmas $\eta \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $\lim_0 \eta = 0$ függvénnyel

$$h(a+y) - h(a) = h'(a) \cdot y + \eta(y) \cdot \|y\|.$$

Legyen itt $e \in \mathbf{R}^{n-m}$, $\|e\| = 1$ adott vektor. Ha $\sigma > 0$, és $K(a) = K_\sigma(a)$, akkor (pl.) az $r := \sigma/2$ választással minden $-r < t < r$ esetén az $y := te$ vektorokra $a + te \in K(a)$. Így $0 < |t| < r$ mellett

$$0 \le F(a+te, h(a+te)) - F(a, h(a)) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot Q_c^F(te, h'(a) \cdot te + \eta(te) \cdot \|te\|) + \omega(te, h(a+te) - h(a)) \cdot \|(te, h'(a) \cdot te + \eta(te) \cdot \|te\|)\|^2 =$$

$$\frac{t^2}{2} \cdot \left(Q_c^F(e, h'(a) \cdot e + \eta(te)) + \omega(te, h(a+te) - h(a)) \cdot \|(e, h'(a) \cdot e + \eta(te))\|^2 \right).$$

Tehát a

$$z := (e, h'(a) \cdot e), \;\; s(t) := (0, \eta(te)) \qquad (0 < |t| < r)$$

vektorokkal az előbbiekre tekintettel

$$0 \le Q_c^F(z + s(t)) + \omega(te, h(a+te) - h(a)) \cdot \|z + s(t)\|^2,$$

ahol

$$Q_c^F(z + s(t)) = Q_c^F(z) + Q_c^F(s(t)) + 2 \cdot \langle F''(c) \cdot z, s(t) \rangle.$$

Világos, hogy $\lim_{t \to 0} s(t) = 0$, amiből a Q_c^F folytonossága (ld. 4.4. iv) megjegyzés), és az

$$|\langle F''(c) \cdot z, s(t) \rangle| \le \|F''(c) \cdot z\|_2 \cdot \|s(t)\|_2 \qquad (0 < |t| < r)$$

becslés alapján

$$\lim_{t \to 0} Q_c^F(s(t)) = \lim_{t \to 0} \langle F''(c) \cdot z, s(t) \rangle = 0$$

következik. Ezért, és

$$\lim_{t \to 0} \left(\omega(te, h(a+te) - h(a)) \cdot \|(e, h'(a) \cdot e + \eta(te))\|^2 \right) = 0$$

miatt $Q_c^F(z) \ge 0$.

Vegyük figyelembe (ld. 4.5.3.3. Tétel), hogy

$$h'(a) = -\Big(\partial_{\mathbf{2}} g(c)\Big)^{-1} \cdot \partial_{\mathbf{1}} g(c),$$

ezért

$$h'(a) \cdot e = -\Big(\partial_{\mathbf{2}} g(c)\Big)^{-1} \cdot \partial_{\mathbf{1}} g(c) \cdot e.$$

A

$$g'(c) = [\partial_{\mathbf{1}} g(c) \;\; \partial_{\mathbf{2}} g(c)]$$

felbontásból

$$g'(c) \cdot z = g'(c) \cdot (e, h'(a) \cdot e) =$$

$$g'(c) \cdot \Big(e, -\Big(\partial_{\mathbf{2}} g(c)\Big)^{-1} \cdot \partial_{\mathbf{1}} g(c) \cdot e\Big) = \partial_{\mathbf{1}} g(c) \cdot e - \partial_{\mathbf{2}} g(c) \cdot \Big(\partial_{\mathbf{2}} g(c)\Big)^{-1} \cdot \partial_{\mathbf{1}} g(c) \cdot e =$$

$$\partial_{\mathbf{1}} g(c) \cdot e - \partial_{\mathbf{1}} g(c) \cdot e = 0.$$

Ha $0 \neq \xi \in \mathbf{R}^n$, és $g'(c) \cdot \xi = 0$, akkor a $\xi = (u, v) \quad (u \in \mathbf{R}^{n-m}, \, v \in \mathbf{R}^m)$ előállítással

$$0 = g'(c) \cdot \xi = \partial_{\mathbf{1}} g(c) \cdot u + \partial_{\mathbf{2}} g(c) \cdot v,$$

azaz

$$v = -\Big(\partial_{\mathbf{2}} g(c)\Big)^{-1} \cdot \partial_{\mathbf{1}} g(c) \cdot u = h'(a) \cdot u.$$

Mivel $\xi \neq 0$, ezért $u \neq 0$ is igaz. Van tehát olyan $0 \neq c \in \mathbf{R}$ szám, amellyel $\|cu\| = 1$. Következésképpen az $e := c \cdot u$ választással $e \in \mathbf{R}^{n-m}$, $\|e\| = 1$, és

$$z := c\xi = (e, h'(a) \cdot e).$$

Tehát

$$0 \leq Q_c^F(z) = c^2 \cdot Q_c^F(\xi),$$

aminek alapján persze $Q_c^F(\xi) \geq 0$ is igaz.

Összefoglalva a fentieket az adódott, hogy minden olyan $0 \neq \xi \in \mathbf{R}^n$ vektorra, amelyikre $g'(c) \cdot \xi = 0$, egyúttal $Q_c^F(\xi) \geq 0$. Mindez azt jelenti, hogy a Q_c^F kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve feltételesen pozitív szemidefinit. ∎

Jegyezzük meg, hogy a fenti gondolatmenettel a 4.5.5.2. Tételre is adható egy „direkt" bizonyítás. Tegyük fel ui., hogy az említett tételben (az egyéb feltételek mellett) a Q_c^F kvadratikus alak a $g'(c)$ mátrixra nézve (pl.) feltételesen pozitív definit. Ekkor az előbbi bizonyításból (az ottani jelölésekkel)

$$f(a + te, h(a + te)) - f(a, h(a)) = F(a + te, h(a + te)) - F(a, h(a)) =$$

$$\frac{t^2}{2} \cdot \Big(Q_c^F(z + s(t)) + \omega(te, h(a + te) - h(a)) \cdot \|z + s(t)\|^2\Big) =$$

$$= \frac{t^2}{2}\cdot\left(Q_c^F(z)+Q_c^F(s(t))+2\cdot\langle F''(c)\cdot z, s(t)\rangle+\omega(te, h(a+te)-h(a))\cdot\|z+s(t)\|^2\right)=$$

$$\frac{t^2}{2}\cdot\left(Q_c^F(z)+\Delta_e(t)\right) \qquad (0<|t|<r),$$

ahol $|t|<r$ esetén

$$\Delta_e(t) := Q_c^F(s(t))+2\cdot\langle F''(c)\cdot z, s(t)\rangle+\omega(te, h(a+te)-h(a))\cdot\|z+s(t)\|^2.$$

Mivel $z\neq 0$, így a Q_c^F pozitív definitsége miatt $Q_c^F(z)>0$. Ugyanakkor (az előbbi bizonyításban mondottakra utalva) $\lim_{t\to 0}\Delta_e(t)=0$, ezért a szóban forgó (és e-től független) $r>0$ megválasztható úgy is, hogy

$$|\Delta_e(t)|<\frac{Q_c^F(z)}{2} \qquad (|t|<r),$$

amiből

$$f(a+te, h(a+te))-f(a,h(a))\geq\frac{t^2\cdot Q_c^F(z)}{4}>0 \qquad (0<|t|<r)$$

következik. Innen már nyilvánvaló, hogy a $K(c):=K_r(a)\times K(b)$ környezettel

$$f(\xi)-f(c)\geq 0 \qquad \left(\xi\in K(c)\cap\{g=0\}\right),$$

azaz az f-nek a c-ben a $g=0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális minimuma van.

4.5.6. Paraméteres integrál

Valamilyen kompakt $[a,b]$ intervallum $(a,b\in\mathbf{R},\ a<b)$ és $\emptyset\neq U\subset\mathbf{R}^n$ $(1\leq n\in\mathbf{N})$ nyílt halmaz esetén tekintsük az

$$f: U\times[a,b]\to\mathbf{R}$$

függvényt. Ha $x\in U$, akkor legyen $f_x:[a,b]\to\mathbf{R}$ az a függvény, amelyre

$$f_x(t):=f(x,t) \qquad (t\in[a,b]).$$

Tegyük fel, hogy minden $x\in U$ esetén az f_x függvény Riemann-integrálható: $f_x\in R[a,b]$, legyen ekkor

$$F(x):=\int_a^b f_x=\int_a^b f(x,t)\,dt \qquad (x\in U).$$

Az így definiált $F:U\to\mathbf{R}$ függvényt az f által meghatározott *paraméteres integrálnak* nevezzük.

Világos, hogy $\mathcal{D}_f = U \times [a,b] \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Vezessük be $\mathbf{R}^n$-en is és $\mathbf{R}^{n+1}$-en is a $\|.\| := \|.\|_\infty$ normát (ld. 1.2. v) megjegyzés). Nem fog félreértést okozni, ha $\xi \in \mathbf{R}^n$ és $\eta \in \mathbf{R}^{n+1}$ esetén egyaránt a $\|\xi\|$, $\|\eta\|$ jelölést használjuk. Így pl. nyilvánvaló, hogy az $(x,t) \in U \times [a,b]$ vektorra

$$\|(x,t)\| = \max\{\|x\|, |t|\}.$$

Továbbá, ha az $f : U \times [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, akkor tetszőleges $x \in U$ mellett az $f_x : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény is folytonos. Ui., ha $\tau \in [a,b]$, akkor $f \in \mathcal{C}\{(x,\tau)\}$ miatt bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, amellyel

$$|f(y,t) - f(x,\tau)| < \varepsilon \qquad \Big((y,t) \in U \times [a,b],\ \|(y,t) - (x,\tau)\| < \delta\Big).$$

Ha itt $y := x$, akkor $\|(x,t) - (x,\tau)\| = \|(0, t-\tau)\| = |t-\tau|$, ezért

$$|f(x,t) - f(x,\tau)| = |f_x(t) - f_x(\tau)| < \varepsilon \qquad (t \in [a,b],\ |t-\tau| < \delta),$$

azaz $f_x \in \mathcal{C}\{\tau\}$. Következésképpen $f_x \in C[a,b]$, ezért $f_x \in R[a,b]$ $(x \in U)$, tehát létezik a fenti F paraméteres integrál.

4.5.6.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy adott az $[a,b]$ $(a, b \in \mathbf{R},\ a < b)$ kompakt intervallum, $1 \le n \in \mathbf{N}$, és $\emptyset \ne U \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz. Ekkor tetszőleges folytonos $f : U \times [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény esetén az*

$$F(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt \qquad (x \in U)$$

paraméteres integrálra az alábbiak igazak:

1^o *az F függvény folytonos;*

2^o *ha valamilyen $i = 1, ..., n$ indexre létezik és folytonos a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvény, akkor létezik a $\partial_i F$ parciális deriváltfüggvény is, és*

$$\partial_i F(x) = \int_a^b \partial_i f(x,t)\,dt \qquad (x \in U);$$

3^o *ha az f folytonosan differenciálható, azaz $f \in C^1$, akkor $F \in C^1$.*

Bizonyítás. Legyen $x \in U$, ekkor az U halmaz nyíltsága miatt egy alkalmas $r > 0$ számmal

$$G_r := \{y \in U : \|x - y\| \le r\} \subset U.$$

A G_r halmaz könnyen láthatóan zárt, ezért az

$$A := G_r \times [a,b]$$

halmaz is zárt. Mivel az A nyilván korlátos, így kompakt. A Heine-tétel (ld. 2.6. Tétel) alapján az $f_{|A}$ leszűkítés egyenletesen folytonos, tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(\xi) - f(\zeta)| < \varepsilon \qquad (\xi, \zeta \in A, \|\xi - \zeta\| < \delta).$$

Speciálisan minden $y \in G_r$, $\|x - y\| < \delta$ és $t \in [a, b]$ esetén a $\xi := (x, t)$, $\zeta := (y, t) \in A$ pontokban

$$\|\xi - \zeta\| = \|(x, t) - (y, t)\| = \|x - y\| < \delta,$$

így

$$|f(x, t) - f(y, t)| < \varepsilon.$$

Következésképpen

$$|F(y) - F(x)| \leq \int_a^b |f(y, t) - f(x, t)|\, dt \leq (b - a) \cdot \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy $F \in \mathcal{C}\{x\}$. Mivel az x az U halmaz bármelyik eleme lehetett, ezért az F függvény folytonos.

Ezzel az 1^o állítást beláttuk. A 2^o bizonyítása is hasonlóan történhet. Legyen tehát $i = 1, ..., n$, és tegyük fel, hogy létezik a folytonos $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvény. Ekkor minden $x \in U$ az 1^o bizonyításában szereplő $r > 0$ számmal

$$F(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n) - F(x_1, ..., x_n) =$$

$$\int_a^b \Big(f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n, t) - f(x_1, ..., x_n, t) \Big)\, dt \qquad (|h| \leq r).$$

Az egyváltozós valós függvényekre vonatkozó Lagrange-középértéktétel (ld. 4.3.3. Tétel az $n = 1$ esetben), ill. a $\partial_i f$ függvény értelmezése (ld. 3.) alapján egy (h-tól függő) $\theta \in (0, 1)$ számmal

$$f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n, t) - f(x_1, ..., x_n, t) =$$

$$\partial_i f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + \theta \cdot h, x_{i+1}, ..., x_n, t) \cdot h =: \partial_i f(\tilde{x}, t) \cdot h.$$

Az 1^o állítás bizonyításában bevezetett A halmazra mondottakat az f helyett a $\partial_i f$-re alkalmazva bármilyen $\varepsilon > 0$ mellett kapunk olyan $\delta > 0$ számot, amellyel

$$|\partial_i f(\tilde{x}, t) - \partial_i f(x, t)| < \varepsilon \qquad (|h| < \delta,\ t \in [a, b]).$$

Legyen most már $0 < |h| < \delta$, ekkor a fentiek szerint

$$\left| \frac{F(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n) - F(x_1, ..., x_n)}{h} - \int_a^b \partial_i f(x, t)\, dt \right| =$$

$$\left| \int_a^b \Big(\partial_i f(\tilde{x}, t) - \partial_i f(x, t) \Big)\, dt \right| \leq \int_a^b \Big| \partial_i f(\tilde{x}, t) - \partial_i f(x, t) \Big|\, dt \leq (b - a) \cdot \varepsilon.$$

Ezért létezik a

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_1,...,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},...,x_n)-F(x_1,...,x_n)}{h} = \int_a^b \partial_i f(x,t)\,dt$$

határérték, ami a 2^o állítás bizonyítását jelenti.

Ha $f \in C^1$, akkor (ld. 3.) valamennyi $i=1,...,n$ esetén létezik és folytonos a $\partial_i f$ függvény. Ezért (ld. 2^o) léteznek a $\partial_i F \quad (i=1,...,n)$ parciális deriváltfüggvények is, mint a $\partial_i f$-ek paraméteres integráljai. Így 1^o szerint a $\partial_i F \quad (i=1,...,n)$ függvények folytonosak. Innen (ld. 3.1.5. Tétel) a 3^o állítás már következik. ■

4.5.7. Vonalintegrál

Tegyük fel, hogy valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett a folytonosan differenciálható $\varphi \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ függvény $\mathcal{D}_\varphi$ értelmezési tartománya kompakt intervallum. Ekkor a φ-t ($\mathbf{R}^n$-beli) *sima útnak nevezzük.*

Legyen most $a,b \in \mathbf{R}$, $a<b$, és a $\varphi:[a,b]\to\mathbf{R}^n$ függvényről tegyük fel a következőket: a φ folytonos, és van olyan

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_s = b$$

felosztása az $[a,b]$-nek (valamilyen $1 \leq s \in \mathbf{N}$ esetén), hogy tetszőleges $k=0,...,s-1$ indexre a

$$\varphi_{|[x_k,x_{k+1}]}$$

leszűkítés sima út. Ekkor a φ egy ún. *szakaszonként sima út,* amit a továbbiakban röviden csak *útként* fogunk említeni. Világos, hogy minden sima út egyúttal út is.

Ha $a,b \in \mathbf{R}$, $a<b$, és $\varphi:[a,b]\to\mathbf{R}^n$ egy út, akkor a $\varphi(a)$ helyettesítési érték a szóban forgó út *kezdőpontja,* a $\varphi(b)$ pedig a *végpontja.* Azt mondjuk, hogy a φ út *zárt,* ha $\varphi(a)=\varphi(b)$. Valamilyen $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^n$ halmaz esetén az *A-ban haladó* φ útról beszélünk, ha $\mathcal{R}_\varphi \subset A$. Ha itt $\varphi:[a,b]\to A$, $u,v\in A$, és

$$\varphi(a)=u,\ \varphi(b)=v,$$

akkor az A-ban haladó φ út *összeköti* az u-t a v-vel (vagy más szóval az u,v pontok az *A-ban összeköthetők*).

Tekintsük a $\varphi:[a,b]\to\mathbf{R}^n$, $\psi:[c,d]\to\mathbf{R}^n$ utakat, és tegyük fel, hogy $\varphi(b)=\psi(c)$. Legyen ekkor a $\varphi\vee\psi$ út a következőképpen értelmezve (a φ, ψ utak *egyesítése*):

$$\varphi\vee\psi(t) := (\varphi\vee\psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t) & (a \leq t \leq b) \\ \\ \psi(t+c-b) & (b \leq t \leq b+d-c). \end{cases}$$

A teljes indukció módszerére gondolva világos, hogy mikor és hogyan értelmezzük kettőnél több, mondjuk $\varphi_0, ..., \varphi_m$ $(1 \le m \in \mathbf{N})$ út $\varphi_0 \vee \ldots \vee \varphi_m$ egyesítését. Ha tehát a fenti φ függvénnyel és az $x_0, ..., x_s$ osztópontokkal

$$\psi_k := \varphi_{|[x_k, x_{k+1}]} \qquad (k = 0, ..., s-1)$$

sima út, akkor

$$\varphi = \psi_0 \vee \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_{s-1}.$$

Az előbbi φ út $\tilde{\varphi}$ *ellentettjét* az alábbi módon definiáljuk:

$$\tilde{\varphi}(t) := \varphi(b + a - t) \qquad (a \le t \le b).$$

Nyilvánvaló, hogy a fenti $\varphi \vee \psi$, $\tilde{\varphi}$ leképezések is utak, továbbá $\tilde{\varphi}(a) = \varphi(b)$ és $\tilde{\varphi}(b) = \varphi(a)$. (Tehát a $\tilde{\varphi}$ út kezdőpontja a φ út végpontjával, a végpontja pedig a φ kezdőpontjával egyezik meg. Ezért is szokták a $\tilde{\varphi}$ utat a φ-vel ellentétes irányítású útnak nevezni.)

Legyenek adottak az $u, v \in \mathbf{R}^n$ pontok, és legyen

$$\varphi_{uv}(t) := u + t(v - u) \qquad (0 \le t \le 1).$$

Ekkor a φ_{uv} egy sima út, az u-t és a v-t összekötő *szakasz,* amelynek a $\varphi_{uv}(0) = u$ a kezdőpontja, a $\varphi_{uv}(1) = v$ pedig a végpontja. Ha $1 \le s \in \mathbf{N}$ és $u_0, ..., u_s \in \mathbf{R}^n$, akkor a

$$\varphi_{u_0 u_1} \vee \varphi_{u_1 u_2} \vee \ldots \vee \varphi_{u_{s-1} u_s}$$

utat *töröttvonalnak* nevezzük.

Szoros kapcsolat van az $\mathbf{R}^n$-beli halmazok összefüggősége és az előbb értelmezett $\mathbf{R}^n$-beli utak között. Idézzük fel ehhez röviden azt, hogy mit is jelent egy $\mathbf{R}^n$-beli nyílt halmaz összefüggősége (ld. 2. fejezet): az $\emptyset \ne A \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmazt összefüggőnek nevezzük, ha nem létezik olyan $A = B \cup C$ felbontás, amelyben a $B, C \subset \mathbf{R}^n$ halmazok egyike sem az üres halmaz, továbbá mindkettő nyílt, és $B \cap C = \emptyset$. Ekkor röviden azt fogjuk mondani, hogy az A *tartomány.*

4.5.7.1. Tétel. *Legyen $1 \le n \in \mathbf{N}$, $\emptyset \ne A \subset \mathbf{R}^n$ nyílt. Az A halmaz akkor és csak akkor tartomány, ha tetszőleges $u, v \in A$ pontok összeköthetők az A-ban.*

Bizonyítás. Tegyük fel először azt, hogy az A tartomány, és legyen tetszőleges $u \in A$ pont esetén $A_u \subset A$ az a halmaz, amelyik az u-val (A-ban) összeköthető összes A-beli pontból áll. Azt kell belátnunk, hogy $A_u = A$. Mutassuk meg ehhez először is azt, hogy az

A_u, $A \setminus A_u$ halmazok nyíltak. Ha ui. $v \in A_u$, akkor $v \in A$, így az A nyíltsága miatt egy alkalmas $r > 0$ mellett

$$K_r(v) \subset A.$$

Nyilvánvaló, hogy minden $w \in K_r(v)$ pontra a φ_{vw} szakasz a $K_r(v)$-ben (és ezért egyúttal az A-ban) összeköti a v-t a w-vel. Ha tehát a φ út az A-ban összeköti a v-t az u-val, akkor világos, hogy a $\varphi \vee \varphi_{vw}$ út az A-ban összeköti az u-t a w-vel. Következésképpen $w \in A_u$, azaz

$$K_r(v) \subset A_u.$$

Hasonlóan, ha $A \setminus A_u \neq \emptyset$ és $z \in A \setminus A_u$, akkor egy alkalmas $\rho > 0$ sugárral $K_\rho(z) \subset A$. Legyen $y \in K_\rho(z)$. Ha az y az A-ban összeköthető lenne az u-val (mondjuk egy φ út segítségével), akkor a $\varphi \vee \varphi_{yz}$ út az A-ban összekötné a z-t az u-val, ami $z \notin A_u$ miatt nem igaz. Ezért

$$K_\rho(z) \subset A \setminus A_u.$$

Mivel az A_u, $A \setminus A_u$ halmazok nyilván diszjunktak, és

$$A = A_u \cup (A \setminus A_u),$$

ezért az A összefüggősége miatt $A_u = \emptyset$ vagy $A \setminus A_u = \emptyset$. Ugyanakkor $u \in A_u$, hiszen az u-t önmagával (az A-ban) a φ_{uu} (egy pontból álló) szakasz összeköti. Tehát $A \setminus A_u = \emptyset$, azaz $A_u = A$.

Most induljunk ki abból, hogy az A bármely két pontja összeköthető az A-ban, és tegyük fel indirekt módon, hogy az A halmaz nem összefüggő. Ezért létezik olyan $A = B \cup C$ felbontása az A-nak, hogy a $B, C \subset \mathbf{R}^n$ halmazok egyike sem az üres halmaz, mindkettő nyílt, és $B \cap C = \emptyset$. Legyen ekkor $b \in B$, $c \in C$, és a φ olyan A-beli út, amely összeköti a b-t a c-vel. Világos, hogy $\mathcal{R}_\varphi \subset A$ miatt

$$\mathcal{R}_\varphi = \Big(B \cap \mathcal{R}_\varphi\Big) \bigcup \Big(C \cap \mathcal{R}_\varphi\Big) =: R_1 \cup R_2,$$

ahol $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, $b \in R_1$, $c \in R_2$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathcal{R}_\varphi$ értékkészlet nem összefüggő. Viszont a 2.7. Lemma szerint a $\mathcal{D}_\varphi$ halmaz – lévén intervallum – összefüggő, így a 2.8. Tétel alapján a folytonos φ függvény $\mathcal{R}_\varphi$ értékkészlete is összefüggő, szemben az előbb mondottakkal. ■

Ha $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n) : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ egy út, akkor az utóbbi definíciója miatt egy alkalmas

$$a = x_0 < x_1 \ldots < x_s = b$$

felosztással (valamilyen $1 \leq s \in \mathbf{N}$ esetén) minden $k = 0, ..., s-1$ indexre

$$\varphi_{i_{|_{[x_k, x_{k+1}]}}} \in C^1[x_k, x_{k+1}] \qquad (i = 1, ..., n).$$

Egyúttal léteznek a véges

$$\lim_{x_0+0} \varphi_i' \ , \ \lim_{x_k \pm 0} \varphi_i' \quad (k = 1, ..., s-1) \ , \ \lim_{x_s - 0} \varphi_i'$$

jobb, ill. bal oldali határértékek. Ez azt jelenti, hogy ha $i = 1, ..., n,$ és a (véges)

$$\varphi_i'(x_k) \qquad (k = 0, ..., s)$$

értékeket tetszőlegesen definiáljuk, akkor egy szakaszonként folytonos függvényt kapunk, amit szintén φ_i'-vel jelölünk. Legyen ennek megfelelően

$$\varphi' := (\varphi_1', ..., \varphi_n').$$

Vezessük be $\mathbf{R}^n$-ben a $\|.\| := \|.\|_2$ euklideszi normát (ld. 1.2. v) megjegyzés), akkor az előbbiek értelmében az

$$[a, b] \ni t \mapsto \|\varphi'(t)\|$$

leképezés egy szakaszonként folytonos (és így pl. Riemann-integrálható) függvény. (Megjegyezzük, hogy a Riemann-integrállal kapcsolatban tanultak alapján pl. az $\int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt$ integrál független attól, hogy a fentiekben hogyan értelmeztük az (esetleges) töréspontokban a $\varphi'(x_k) \quad (k = 0, ..., s)$ értékeket.)

Az előbbi $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ út és egy $\tau = \{t_0, ..., t_m\}$,

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$

felosztással (valamilyen $1 \leq m \in \mathbf{N}$ indexre) legyen

$$\ell_\varphi(\tau) := \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)\|.$$

Az $\mathbf{R}^n$-beli háromszög-egyenlőtlenség alapján egyszerűen meggondolható, hogy ha az előbbi τ mellett a $\sigma \subset [a, b]$ felosztás finomítása a τ-nak (azaz $\tau \subset \sigma$), akkor igaz az alábbi monotonitási tulajdonság:

$$\ell_\varphi(\tau) \leq \ell_\varphi(\sigma).$$

Mutassuk meg, hogy az

$$\{\ell_\varphi(\tau) : \tau \subset [a, b] \text{ felosztás}\}$$

halmaz korlátos. Ehhez az előbbiek szerint feltehető, hogy a szóban forgó $\tau = \{t_0, ..., t_m\}$ felosztások olyanok, hogy

$$\varphi_{|_{[t_k, t_{k+1}]}} \in C^1[t_k, t_{k+1}] \qquad (k = 0, ..., m-1).$$

Következésképpen (ld. 4.4. viii) megjegyzés) egy alkalmas $q > 0$ konstanssal

$$\|\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{m-1} |\varphi_k(t_{j+1}) - \varphi_k(t_j)|^2} \leq q \cdot (t_{j+1} - t_j) \qquad (j = 0, ..., m-1).$$

Tehát

$$\ell_\varphi(\tau) \leq q \cdot \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) = q \cdot (b - a).$$

Legyen ezek után

$$\ell_\varphi := \sup\{\ell_\varphi(\tau) : \tau \subset [a, b] \text{ felosztás}\}$$

a φ út *hossza* (vagy *ívhossza*). Speciálisan, ha $u, v \in \mathbf{R}^n$, és $\varphi := \varphi_{uv}$, akkor tetszőleges

$$\tau = \{t_0, ..., t_m\} \subset [0, 1]$$

felosztásra

$$\ell_{\varphi_{uv}}(\tau) = \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_{uv}(t_{j+1}) - \varphi_{uv}(t_j)\| = \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) \cdot \|v - u\| = \|v - u\|$$

(a szóban forgó „szakasz" (euklideszi) hossza).

4.5.7.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $1 \leq n \in \mathbf{N}$. *Ekkor tetszőleges* $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *út esetén*

$$\ell_\varphi = \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt.$$

Bizonyítás. A tétel megfogalmazása előtt mondottakra hivatkozva egy alkalmas

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_s = b \qquad (1 \leq s \in \mathbf{N})$$

felosztással

$$\psi_k := \varphi_{|_{[x_k, x_{k+1}]}} \in C^1[x_k, x_{k+1}] \qquad (k = 0, ..., s-1)$$

sima út. Továbbá az $\ell_\varphi(\tau)$-k fentebbi monotonitási tulajdonsága alapján az

$$\ell_\varphi = \sup\{\ell_\varphi(\tau) : \tau \subset [a, b] \text{ felosztás}\}$$

értelmezésben szereplő τ felosztásokról feltehető, hogy „elég finomak", nevezetesen $x_0, ..., x_s \in \tau$. Ezért

$$\ell_\varphi = \sum_{k=0}^{m-1} \ell_{\psi_k}.$$

Mivel

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \|\psi_k'(t)\|\, dt,$$

ezért a továbbiakban az is feltehető, hogy a φ sima út, azaz $\varphi \in C^1[a,b]$.

Legyen $\tau = \{t_0, ..., t_m\} \subset [a,b]$ egy felosztás, ekkor a Lagrange-középértéktétel szerint minden $i = 1, ..., n$ esetén alkalmas $\xi_{ij} \in (t_j, t_{j+1})$ $(j = 0, ..., m-1)$ helyekkel

$$\ell_\varphi(\tau) = \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)\| = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(t_{j+1}) - \varphi_i(t_j)|^2} =$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big(\varphi_i'(\xi_{ij})\cdot (t_{j+1} - t_j)\Big)^2} = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big(\varphi_i'(\xi_{ij})\Big)^2}\cdot (t_{j+1} - t_j) =$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \|\Phi_j\|\cdot (t_{j+1} - t_j),$$

ahol

$$\Phi_j := \Big(\varphi_1'(\xi_{1j}), ..., \varphi_n'(\xi_{nj})\Big)\ (\in \mathbf{R}^n) \qquad (j = 0, ..., m-1).$$

Ugyanakkor a τ felosztásra vonatkozó $s(\|\varphi'\|, \tau)$ alsó közelítő összeg a $\|\varphi'\|$ függvény folytonossága miatt egy-egy megfelelő $\eta_j \in [t_j, t_{j+1}]$ $(j = 0, ..., m-1)$ választással (ld. 2.4. Tétel) a következő alakban írható fel:

$$s(\|\varphi'\|, \tau) = \sum_{j=0}^{m-1} \inf\{\|\varphi'(t)\| : t \in [t_j, t_{j+1}]\}\cdot (t_{j+1} - t_j) = \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi'(\eta_j)\|\cdot (t_{j+1} - t_j).$$

A háromszög-egyenlőtlenségre hivatkozva azt mondhatjuk, hogy

$$\Big|\|\Phi_j\| - \|\varphi'(\eta_j)\|\Big| \le \|\Phi_j - \varphi'(\eta_j)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big(\varphi_i'(\xi_{ij}) - \varphi_i'(\eta_j)\Big)^2} \qquad (j = 0, ..., m-1).$$

A φ' függvény folytonos, ezért minden $i = 1, ..., n$ esetén a φ_i' koordinátafüggvények is folytonosak. A Heine-tétel (ld. 2.6. Tétel) szerint tehát egyenletesen folytonosak. Így bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha a τ felosztás

$$\max\{t_{j+1} - t_j : j = 0, ..., m-1\}$$

finomsága a δ-nál kisebb, akkor minden $i = 1, ..., n$ mellett

$$\Big|\varphi_i'(\xi_{ij}) - \varphi_i'(\eta_j)\Big| < \varepsilon \qquad (j = 0, ..., m-1).$$

Innen az adódik, hogy ilyen τ felosztásokra

$$\Big|\|\Phi_j\| - \|\varphi'(\eta_j)\|\Big| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2} = \sqrt{n}\cdot \varepsilon \qquad (j = 0, ..., m-1).$$

Következésképpen ekkor

$$\ell_\varphi(\tau) \leq \Big|\ell_\varphi(\tau) - s(\|\varphi'\|, \tau)\Big| + s(\|\varphi'\|, \tau) \leq$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \Big|\|\Phi_j\| - \|\varphi'(\eta_j)\|\Big|\cdot (t_{j+1} - t_j) + s(\|\varphi'\|, \tau) \leq$$

$$\sqrt{n}\cdot \varepsilon\cdot \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) + s(\|\varphi'\|, \tau) = \sqrt{n}\cdot \varepsilon\cdot (b-a) + s(\|\varphi'\|, \tau) \leq$$

$$\sqrt{n}\cdot \varepsilon\cdot (b-a) + \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt.$$

Ezért az ℓ_φ ívhossz definíciójára tekintettel

$$\ell_\varphi \leq \sqrt{n}\cdot \varepsilon\cdot (b-a) + \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt,$$

és – lévén itt $\varepsilon > 0$ tetszőleges –

$$\ell_\varphi \leq \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt.$$

Ha a fentiekben a τ felosztásra vonatkozó alsó közelítő összeg helyett az $S(\|\varphi'\|, \tau)$ felső közelítő összeget tekintjük, akkor analóg módon alkalmas $\zeta_j \in [t_j, t_{j+1}]$ $\quad (j = 0, ..., m-1)$ helyekkel

$$S(\|\varphi'\|, \tau) = \sum_{j=0}^{m-1} \sup\{\|\varphi'(t)\| : t \in [t_j, t_{j+1}]\}\cdot (t_{j+1} - t_j) = \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi'(\zeta_j)\|\cdot (t_{j+1} - t_j).$$

Továbbá (az előbbiek szerinti) „elég finom" τ felosztásokra

$$\Big|\|\Phi_j\| - \|\varphi'(\zeta_j)\|\Big| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2} = \sqrt{n}\cdot \varepsilon \qquad (j = 0, ..., m-1),$$

és

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt \leq S(\|\varphi'\|, \tau) \leq \Big|S(\|\varphi'\|, \tau) - \ell_\varphi(\tau)\Big| + \ell_\varphi(\tau) \leq$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \Big|\|\Phi_j\| - \|\varphi'(\zeta_j)\|\Big|\cdot (t_{j+1} - t_j) + \ell_\varphi(\tau) \leq$$

$$\leq \sqrt{n}\cdot \varepsilon\cdot \sum_{j=0}^{m-1}(t_{j+1}-t_j)+\ell_\varphi(\tau)\leq \sqrt{n}\cdot \varepsilon\cdot (b-a)+\ell_\varphi.$$

Tehát

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\|\,dt \leq \ell_\varphi,$$

azaz $\int_a^b \|\varphi'(t)\|\,dt = \ell_\varphi$. ■

Ha adott egy

$$\varphi=(\varphi_1,...,\varphi_n):[a,b]\to \mathbf{R}^n$$

út, valamint egy folytonos

$$f=(f_1,...,f_n)\in \mathbf{R}^n\to \mathbf{R}^n$$

függvény, akkor $\mathcal{R}_\varphi\subset \mathcal{D}_f$ esetén az $f\circ\varphi$ függvény az $[a,b]$-n van definiálva. Következésképpen (a φ' fenti értelmezését szem előtt tartva)

$$\langle f\circ\varphi,\varphi'\rangle:[a,b]\to \mathbf{R}.$$

A φ tulajdonságai miatt az

$$\langle f\circ\varphi,\varphi'\rangle=\sum_{i=1}^n (f_i\circ\varphi)\cdot \varphi_i'$$

függvény szakaszonként folytonos, és ezért

$$\langle f\circ\varphi,\varphi'\rangle\in R[a,b].$$

Legyen

$$\int_\varphi f:=\int_a^b \langle f\circ\varphi,\varphi'\rangle$$

az f függvény vonalintegrálja a φ úton:

$$\int_\varphi f=\sum_{i=1}^n\int_a^b (f_i\circ\varphi)\cdot \varphi_i'.$$

Ha tehát egy alkalmas

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_s=b \qquad (1\leq s\in \mathbf{N})$$

felosztással

$$\psi_k:=\varphi_{|_{[x_k,x_{k+1}]}}\in C^1[x_k,x_{k+1}] \qquad (k=0,...,s-1)$$

sima út, akkor

$$\int_\varphi f=\sum_{k=0}^{s-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\langle f\circ\varphi,\varphi'\rangle=\sum_{k=0}^{s-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\langle f\circ\psi_k,\psi_k'\rangle=\sum_{k=0}^{s-1}\int_{\psi_k} f.$$

Pl. az $n = 1$, $u, v \in \mathbf{R}$, $u < v$, és a $\varphi := \varphi_{uv}$, azaz a

$$\varphi(t) = u + t(v - u) \qquad (0 \le t \le 1)$$

választással (helyettesítéssel integrálva)

$$\int_\varphi f = \int_0^1 f(u + t(v - u))\, dt = \int_u^v f.$$

Így a most bevezetett vonalintegrál a Riemann-integrál egyfajta általánosításának is tekinthető.

A következő tételben a vonalintegrál definíciójából közvetlenül leszűrhető tulajdonságokat foglaljuk össze.

4.5.7.3. Tétel. *Legyen* $1 \le n \in \mathbf{N}$, $\emptyset \ne \mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$, *és tegyük fel, hogy az*

$$f, g : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^n$$

függvények folytonosak. Ekkor

a) *tetszőleges* $\mathcal{D}$*-ben haladó* φ *út és* $\alpha \in \mathbf{R}$ *szám esetén*

$$\int_\varphi (f + \alpha \cdot g) = \int_\varphi f + \alpha \cdot \int_\varphi g;$$

b) *ha a* φ, ψ *utak* $\mathcal{D}$*-beliek, és létezik a* $\varphi \vee \psi$ *egyesítésük, akkor*

$$\int_{\varphi \vee \psi} f = \int_\varphi f + \int_\psi f;$$

c) *bármilyen* $\mathcal{D}$*-beli* φ *út* $\tilde{\varphi}$ *ellentettjére*

$$\int_{\tilde{\varphi}} f = - \int_\varphi f;$$

d) *minden* $\mathcal{D}$*-ben haladó* φ *útra*

$$\left| \int_\varphi f \right| \le \max\{\|f(x)\| : x \in \mathcal{R}_\varphi\} \cdot \ell_\varphi.$$

Bizonyítás. Az a) állítás bizonyításához legyen $\mathcal{D}_\varphi = [a, b]$, ekkor

$$\int_\varphi (f + \alpha \cdot g) = \int_a^b \langle (f + \alpha \cdot g) \circ \varphi, \varphi' \rangle = \int_a^b \langle f \circ \varphi, \varphi' \rangle + \alpha \cdot \int_a^b \langle g \circ \varphi, \varphi' \rangle = \int_\varphi f + \alpha \cdot \int_\varphi g.$$

Ha az a)-beli φ mellett $\psi : [c,d] \to \mathcal{D}$ is egy sima út és $\varphi(b) = \psi(c)$, akkor

$$\varphi \vee \psi(t) := \begin{cases} \varphi(t) & (a \le t \le b) \\ \\ \psi(t+c-b) & (b \le t \le b+d-c), \end{cases}$$

tehát

$$\int_{\varphi\vee\psi} f = \int_a^{b+d-c} \langle f \circ (\varphi \vee \psi), (\varphi \vee \psi)' \rangle =$$

$$\int_a^b \langle f \circ (\varphi \vee \psi), (\varphi \vee \psi)' \rangle + \int_b^{b+d-c} \langle f \circ (\varphi \vee \psi), (\varphi \vee \psi)' \rangle =$$

$$\int_a^b \langle f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \, dt + \int_b^{b+d-c} \langle f(\psi(t+c-b)), \psi'(t+c-b) \rangle \, dt =$$

$$\int_a^b \langle f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \, dt + \int_c^d \langle f(\psi(t)), \psi'(t) \rangle \, dt =$$

$$\int_a^b \langle f \circ \varphi, \varphi' \rangle + \int_c^d \langle f \circ \psi, \psi' \rangle = \int_\varphi f + \int_\psi f,$$

ami a b) állítás igazolását jelenti.

A c)-t illetően ismét helyettesítéssel integrálva azt mondhatjuk, hogy

$$\int_{\tilde{\varphi}} f = \int_a^b \langle f \circ \tilde{\varphi}, (\tilde{\varphi})' \rangle = \int_a^b \langle f(\varphi(a+b-t)), -\varphi'(a+b-t) \rangle \, dt =$$

$$-\int_b^a \langle f(\varphi(t)), -\varphi'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \langle f(\varphi(t)), -\varphi'(t) \rangle \, dt = -\int_a^b \langle f \circ \varphi, \varphi' \rangle = -\int_\varphi f.$$

Végül a d) bizonyításához alkalmazzuk a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget és a 4.5.7.2. Tételt:

$$\left| \int_\varphi f \right| = \left| \int_a^b \langle f \circ \varphi, \varphi' \rangle \right| \le \int_a^b |\langle f \circ \varphi, \varphi' \rangle| \le \int_a^b \|f \circ \varphi\| \cdot \|\varphi'\| =$$

$$\int_a^b \|f(\varphi(t))\| \cdot \|\varphi'(t)\| \, dt \le \max\{\|f(x)\| : x \in \mathcal{R}_\varphi\} \cdot \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt =$$

$$\max\{\|f(x)\| : x \in \mathcal{R}_\varphi\} \cdot \ell_\varphi$$

(ahol az előbbi maximum az $\mathcal{R}_\varphi$ halmaz kompaktsága és az $\mathcal{D} \ni x \mapsto \|f(x)\|$ függvény folytonossága miatt létezik (ld. 2.4. Tétel)). ∎

Tegyük most fel, hogy a $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$ halmaz tartomány, az

$$f = (f_1, ..., f_n) : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^n$$

függvény pedig folytonos. Ha az $F : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható és

$$\operatorname{grad} F = f,$$

akkor az F-et az f *primitív függvényének* nevezzük. A 3.1.3. Tétel miatt ehhez tehát az szükséges, hogy

$$\partial_i F = f_i \qquad (i = 1, ..., n).$$

Ha az f-ről a folytonosság helyett (az „erősebb") differenciálhatóságot tételezzük fel, akkor nyilván $F \in D^2$, ezért a Young-tétel (ld. 4.3.1. Tétel) szerint $\partial_{ij} F = \partial_{ji} F \quad (i, j = 1, ..., n)$, és így

$$\partial_j f_i = \partial_i f_j \qquad (i, j = 1, ..., n).$$

Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben az f függvény $f'(a)$ Jacobi-mátrixa (ld. 3.1.4. Tétel) minden $a \in \mathcal{D}$ pontban szimmetrikus. Ez utóbbi feltétel tehát szükséges ahhoz, hogy a szóban forgó differenciálható f függvénynek legyen primitív függvénye.

Világos, hogy ha az F primitív függvénye az f-nek, akkor tetszőleges $c \in \mathbf{R}$ konstanssal az $F + c$ függvény is az. Megmutatjuk, hogy ekkor „más" primitív függvénye nincs az f-nek.

4.5.7.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy $1 \le n \in \mathbf{N}$, és a $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$ tartományon értelmezett folytonos $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^n$ függvénynek az $F, G : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ függvények mindketten primitív függvényei. Ekkor az $F - G$ konstansfüggvény.*

Bizonyítás. Legyen $H := F - G$, és rögzítsünk egy $u \in \mathcal{D}$ pontot. Ekkor (ld. 4.5.7.1. Tétel) minden $v \in \mathcal{D}$ esetén van olyan

$$\varphi : [a, b] \to \mathcal{D}$$

út, amelyre $\varphi(a) = u$ és $\varphi(b) = v$. Legyen továbbá $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_s = b$ egy olyan felosztás (valamilyen $1 \le s \in \mathbf{N}$) mellett), hogy

$$\psi_k := \varphi_{|[x_k, x_{k+1}]} \in C^1[x_k, x_{k+1}] \qquad (k = 0, ..., s-1).$$

Ekkor a $H \circ \varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ folytonos függvényre minden $k = 0, ..., s-1$ esetén

$$H \circ \varphi \in D\{t\} \qquad (x_k < t < x_{k+1}),$$

valamint (ld. 4.1.4. Tétel)

$$(H \circ \varphi)'(t) = (H \circ \psi_k)'(t) = \langle \operatorname{grad} H(\psi_k(t)), \psi_k'(t) \rangle =$$

$$\langle \operatorname{grad} F(\psi_k(t)), \psi_k'(t) \rangle - \langle \operatorname{grad} G(\psi_k(t)), \psi_k'(t) \rangle =$$

$$\langle f(\psi_k(t)), \psi_k'(t)\rangle - \langle f(\psi_k(t)), \psi_k'(t)\rangle = 0 \qquad (x_k < t < x_{k+1}).$$

Következésképpen a $H \circ \varphi$ függvény minden (x_k, x_{k+1}) $(k = 0, ..., s-1)$ intervallumon állandó. Mivel a $H \circ \varphi$ folytonos az $[a, b]$ intervallumon, ezért a $H \circ \varphi$ függvény szükségszerűen konstansfüggvény. Így

$$H \circ \varphi(a) = H(\varphi(a)) = H(u) = H \circ \varphi(b) = H(\varphi(b)) = H(v),$$

azaz $H \equiv H(u)$. ■

4.5.7.5. Tétel (Newton–Leibniz). *Legyen* $1 \leq n \in \mathbf{N}$, *a* $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$ *halmaz tartomány, és tegyük fel, hogy az* $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^n$ *folytonos függvénynek van primitív függvénye. Ekkor tetszőleges* $\varphi : [a, b] \to \mathcal{D}$ *út esetén az* f *bármelyik* F *primitív függvényével*

$$\int_\varphi f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Bizonyítás. A tételbeli szereplőkkel legyen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_s = b$ olyan felosztás (ahol $1 \leq s \in \mathbf{N}$), amellyel

$$\psi_k := \varphi_{|_{[x_k, x_{k+1}]}} \in C^1[x_k, x_{k+1}] \qquad (k = 0, ..., s-1).$$

Ekkor az $F \circ \psi_k : [x_k, x_{k+1}] \to \mathbf{R}$ függvény (ld. 4.1.4. Tétel) primitív függvénye az

$$\langle f \circ \psi_k, \psi_k'\rangle : [x_k, x_{k+1}] \to \mathbf{R}^n \qquad (k = 0, ..., s-1)$$

függvénynek. Az egyváltozós valós függvényekre vonatkozó ismert Newton–Leibniz-tétel miatt tehát

$$\int_{\psi_k} f = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \langle f \circ \psi_k, \psi_k'\rangle = F \circ \psi_k(x_{k+1}) - F \circ \psi_k(x_k) =$$
$$F(\psi_k(x_{k+1})) - F(\psi_k(x_k)) \qquad (k = 0, ..., s-1),$$

és így (az $F(\psi_j(x_{j+1})) = F(\psi_{j+1}(x_{j+1}))$ $(j = 0, ..., s-2)$ egyenlőségeket is figyelembe véve)

$$\int_\varphi f = \sum_{k=0}^{s-1} \int_{\psi_k} f = \sum_{k=0}^{s-1} \Big(F(\psi_k(x_{k+1})) - F(\psi_k(x_k))\Big) =$$
$$F(\psi_{s-1}(x_s)) - F(\psi_0(x_0)) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

■

Világos, hogy ha az előző tételben szereplő φ út zárt, akkor $\int_\varphi f = 0$. A továbbiakban megmutatjuk, hogy (egy tartományon értelmezett folytonos függvény esetén) a tartományban haladó zárt utakra vett vonalintegrálok zérus volta nem csupán szükséges, hanem elégséges feltétele is annak, hogy a szóban forgó függvénynek legyen primitív függvénye.

4.5.7.6. Tétel. *Legyen valamilyen* $1 \le n \in \mathbf{N}$ *esetén adott a* $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$ *tartomány és az* $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^n$ *folytonos függvény. Tegyük fel, hogy minden* $\mathcal{D}$*-ben haladó zárt* φ *útra* $\int_\varphi f = 0$*. Ekkor az* f*-nek van primitív függvénye.*

Bizonyítás. Mutassuk meg először is azt, hogy ha a $\mathcal{D}$-beli

$$\varphi : [a,b] \to \mathcal{D},\ \psi : [c,d] \to \mathcal{D}$$

utakra $\varphi(a) = \psi(c)$ és $\varphi(b) = \psi(d)$ azaz a φ, ψ utak ugyanazt a (kezdő)pontot és (vég)pontot kötik össze a $\mathcal{D}$-ben, akkor

$$\int_\varphi f = \int_\psi f.$$

Valóban, ekkor a $\varphi \vee \widetilde{\psi}$ nyilván egy zárt út a $\mathcal{D}$-ben, ezért a tétel feltételei (és a 4.5.7.3. Tétel) miatt

$$0 = \int_{\varphi \vee \widetilde{\psi}} f = \int_\varphi f + \int_{\widetilde{\psi}} f = \int_\varphi f - \int_\psi f.$$

Mindezek alapján egy rögzített $u \in \mathcal{D}$ pont esetén értelmezhetjük az

$$F(x) := \int_\varphi f \qquad (x \in \mathcal{D})$$

függvényt, ahol a φ tetszőleges olyan út a $\mathcal{D}$-ben, amelyik az $x \in \mathcal{D}$ pontot összeköti az u-val. (Ilyen út a 4.5.7.1. Tétel szerint minden $x \in \mathcal{D}$ ponthoz létezik.) Belátjuk, hogy $F \in D$, és $\operatorname{grad} F = f$. Legyen ehhez $x \in \mathcal{D}$, ill. φ az előbbi út. A $\mathcal{D}$ halmaz – tartomány lévén – nyílt, ezért egy alkalmas $r > 0$ sugárral

$$K_r(x) \subset \mathcal{D}.$$

Válasszuk a $0 \ne h \in \mathbf{R}^n$ vektort úgy, hogy $y := x + h \in K_r(x)$ (azaz $\|h\| < r$), ekkor a $\mathcal{D}$-beli $\varphi \vee \varphi_{xy}$ út nyilván összeköti az u-t az y-nal. Így (ld. 4.5.7.3. Tétel)

$$F(x+h) - F(x) = \int_{\varphi \vee \varphi_{xy}} f - \int_\varphi f = \int_\varphi f + \int_{\varphi_{xy}} f - \int_\varphi f = \int_{\varphi_{xy}} f =$$

$$\int_0^1 \langle f(\varphi_{xy}(t)), \varphi_{xy}'(t) \rangle \, dt = \int_0^1 \langle f(x+th), h \rangle \, dt =$$

$$\langle f(x), h \rangle + \int_0^1 \Big(\langle f(x+th) - f(x), h \rangle \Big) \, dt.$$

Ezért az

$$\eta(h) := \frac{1}{\|h\|} \cdot \int_0^1 \Big(\langle f(x+th) - f(x), h \rangle \Big) \, dt \qquad (0 < \|h\| < r)$$

jelöléssel

$$F(x+h)-F(x)=\langle f(x),h\rangle+\eta(h)\cdot\|h\| \qquad (0<\|h\|<r).$$

Az f függvény folytonos, speciálisan $f\in\mathcal{C}\{x\}$, ezért minden $\varepsilon>0$ számhoz az előbbi $r>0$ sugárról az is feltehető, hogy

$$\|f(\xi)-f(x)\|<\varepsilon \qquad \Big(\xi\in K_r(x)\Big).$$

Ha tehát $0<\|h\|<r$, akkor bármelyik $t\in[0,1]$ szám esetén

$$\xi:=x+th\in K_r(x),$$

hiszen $\|\xi-x\|=\|th\|=t\cdot\|h\|\le\|h\|<r$, és így

$$\|f(x+th)-f(x)\|<\varepsilon.$$

A Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget alkalmazva ezért azt kapjuk, hogy

$$|\eta(h)|=\frac{1}{\|h\|}\cdot\left|\int_0^1\Big(\langle f(x+th)-f(x),h\rangle\Big)\,dt\right|\le\frac{1}{\|h\|}\cdot\int_0^1\Big|\langle f(x+th)-f(x),h\rangle\Big|\,dt\le$$

$$\frac{1}{\|h\|}\cdot\int_0^1\|f(x+th)-f(x)\|\cdot\|h\|\,dt=\int_0^1\|f(x+th)-f(x)\|\,dt\le\varepsilon.$$

Ezzel beláttuk, hogy

$$\lim_{\|h\|\to0}\eta(h)=0,$$

ami a differenciálhatóság definíciója (ld. 3.1.) alapján azt jelenti, hogy $F\in D\{x\}$, és $\operatorname{grad}F(x)=f(x)$. Mivel itt $x\in\mathcal{D}$ tetszőleges volt, ezért $F\in D$, és $\operatorname{grad}F=f$. Röviden: az F primitív függvénye az f-nek. ■

Azt mondjuk, hogy a $\emptyset\ne\mathcal{D}\subset\mathbf{R}^n$ nyílt halmaz *csillagtartomány,* ha van olyan $u\in\mathcal{D}$, hogy tetszőleges $x\in\mathcal{D}$ pontot a φ_{ux} szakasz a $\mathcal{D}$-ben összeköt az u-val. (Geometriailag szólva az

$$[u,x]:=\mathcal{R}_{\varphi_{ux}}=\{u+t(x-u):0\le t\le1\}$$

szakasz részhalmaza a $\mathcal{D}$-nek.) A fenti tulajdonságú $u\in\mathcal{D}$ pontot *csillagpontnak* nevezzük. Nyilván minden csillagtartomány a fenti értelemben tartomány is.

4.5.7.7. Tétel. *Tekintsük a $\mathcal{D}\subset\mathbf{R}^n$ $(1\le n\in\mathbf{N})$ csillagtartományon értelmezett folytonosan differenciálható $f:\mathcal{D}\to\mathbf{R}^n$ függvényt. Tegyük fel, hogy minden $x\in\mathcal{D}$ esetén az $f'(x)$ Jacobi-mátrix szimmetrikus. Ekkor az f-nek van primitív függvénye.*

Bizonyítás. Legyen az $u = (u_1, ..., u_n) \in \mathcal{D}$ csillagpont esetén

$$F(x) := \int_{\varphi_{ux}} f \qquad (x \in \mathcal{D}).$$

Meg fogjuk mutatni, hogy az így definiált F primitív függvénye az f-nek. Legyen ehhez $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{D}$ tetszőleges, ekkor (az f „szokásos" $f_1, ..., f_n$ koordinátafüggvényeivel)

$$F(x) = \int_0^1 \langle f(\varphi_{ux}(t)), \varphi'_{ux}(t)\rangle \, dt =$$

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i(u + t(x-u)) \cdot (x_i - u_i) \, dt = \int_0^1 \Psi(x,t) \, dt \qquad (x \in \mathcal{D}),$$

ahol

$$\Psi(x,t) := \sum_{i=1}^n f_i(u + t(x-u)) \cdot (x_i - u_i) \qquad (x \in \mathcal{D}, t \in [0,1]).$$

Az f-re tett feltételek alapján világos, hogy az előbbi

$$\Psi : \mathcal{D} \times [0,1] \to \mathbf{R}$$

függvény folytonosan differenciálható, ezért a paraméteres integrálokra vonatkozó 4.5.6.1. Tétel szerint az F függvény is folytonosan differenciálható, és

$$\partial_j F(x) = \partial_{x_j} F(x) = \int_0^1 \partial_{x_j} \Psi(x,t) \, dt \qquad (j = 1, ..., n).$$

Ha

$$g(x,t) := u + t(x-u), \; h_i(x,t) := x_i - u_i \qquad (x \in \mathcal{D}, t \in [0,1], i = 1, ..., n),$$

akkor

$$\Psi = \sum_{i=1}^n f_i \circ g \cdot h_i.$$

Ezért (ld. 4.1. pont)

$$\operatorname{grad} \Psi = \sum_{i=1}^n \Big(\operatorname{grad}(f_i \circ g) \cdot h_i + (f_i \circ g) \cdot \operatorname{grad} h_i \Big),$$

ahol $i = 1, ..., n$ esetén

1^o $\operatorname{grad}(f_i \circ g) = (\operatorname{grad} f_i \circ g) \cdot g'$;

2^o $\operatorname{grad} h_i = e_i := (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbf{R}^n$ (az 1-es az i-edik koordináta).

Következésképpen (ld. 4.2. vii) megjegyzés) a g függvény $g_1, ..., g_n$ koordinátafüggvényeivel

$$\partial_j(f_i \circ g)(x,t) = \sum_{l=1}^{n} \partial_l f_i(g(x,t)) \cdot \partial_j g_l(x,t) =$$

$$\langle \operatorname{grad} f_i(g(x,t)), te_j \rangle = t \cdot \partial_j f_i(g(x,t)) \qquad (j = 1, ..., n),$$

így

$$\partial_{x_j} \Psi(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \Big(t \cdot \partial_j f_i(g(x,t)) \cdot (x_i - u_i) + f_i(g(x,t)) \cdot \partial_{x_j} h_i(x,t) \Big) =$$

$$t \cdot \sum_{i=1}^{n} \partial_j f_i(u + t(x-u)) \cdot (x_i - u_i) + f_j(u + t(x-u)) \qquad (x \in \mathcal{D}, t \in [0,1], j = 1, ..., n).$$

Az f Jacobi-mátrixának a szimmetriája miatt (ld. 3.1.4. Tétel)

$$\partial_j f_i = \partial_i f_j \qquad (i, j = 1, ..., n),$$

ezért

$$\partial_{x_j} \Psi(x,t) = t \cdot \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_j(u + t(x-u)) \cdot (x_i - u_i) + f_j(u + t(x-u)) =$$

$$t \cdot \langle \operatorname{grad} f_j(u + t(x-u)), x - u \rangle + f_j(u + t(x-u)) \qquad (x \in \mathcal{D}, t \in [0,1], j = 1, ..., n).$$

Legyen most (rögzített $x \in \mathcal{D}$ és $j = 1, ..., n$ mellett)

$$\phi(t) := f_j(u + t(x-u)) \qquad (t \in [0,1]),$$

ekkor a $\phi : [0,1] \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható, és (ld. 4.1.)

$$\phi'(t) = \langle \operatorname{grad} f_j(u + t(x-u)), x - u \rangle \qquad (t \in [0,1]).$$

Ezzel a jelöléssel tehát

$$\partial_{x_j} \Psi(x,t) = t \cdot \phi'(t) + f_j(u + t(x-u)) \qquad (x \in \mathcal{D}, t \in [0,1]),$$

és (parciálisan integrálva)

$$\int_0^1 t \cdot \phi'(t)\, dt = t \cdot \phi(t)_{|t=1} - t \cdot \phi(t)_{|t=0} - \int_0^1 \phi(t)\, dt = \phi(1) - \int_0^1 f_j(u + t(x-u))\, dt =$$

$$f_j(x) - \int_0^1 f_j(u + t(x-u))\, dt \qquad (x \in \mathcal{D}).$$

Összegezve a fentieket végül az adódik, hogy minden $j = 1, ..., n$ indexre

$$\partial_j F(x) = \int_0^1 \partial_{x_j} \Psi(x,t)\, dt =$$

$$f_j(x) - \int_0^1 f_j(u + t(x-u))\, dt + \int_0^1 f_j(u + t(x-u))\, dt = f_j(x) \qquad (x \in \mathcal{D}),$$

azaz $\operatorname{grad} F = f$. ■

4.6. Megjegyzések

i) Ha $n = 1$, akkor – ahogyan azt már korábban is megjegyeztük – a Q_a^f kvadratikus alak definitsége $f''(a)$ előjelétől függ. Így pl. a másodrendű elégséges feltétel (ld. 4.5.1.2. Tétel) (az egyváltozós valós függvényekkel kapcsolatban tanultak alapján „ismerősen") a következőképpen hangzik: $f'(a) = 0$, és $f''(a) \neq 0$. Az $f''(a) > 0$ esetben lokális minimuma, $f''(a) < 0$ esetén pedig lokális maximuma van az f függvénynek az a helyen.

ii) A másodrendű szükséges feltétel (ld. 4.5.1.3. Tétel) más „olvasatban" azt jelenti, hogy ha a Q_a^f indefinit, akkor az f-nek az a helyen nincs lokális szélsőértéke.

iii) Egy $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ differenciálható függvény esetén az

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathcal{D}_f : f'(x) = 0\}$$

halmaz elemeit az f *stacionárius pontjainak* nevezzük. Ha $\mathcal{L}$ jelöli az f lokális szélsőértékhelyeinek a halmazát, akkor az elsőrendű szükséges feltétel (ld. 4.5.1.1. Tétel) szerint

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{S}.$$

Ha $f \in D^2$ és $a \in \mathcal{S}$, akkor három eset lehetséges:

1^o a-ban teljesül a másodrendű elégséges feltétel (ld. 4.5.1.2. Tétel). Ekkor $a \in \mathcal{L}$;

2^o a-ban nem teljesül a másodrendű szükséges feltétel (ld. 4.5.1.3. Tétel). Ekkor $a \notin \mathcal{L}$;

3^o a-ban nem teljesül a másodrendű elégséges feltétel (ld. 4.5.1.2. Tétel), de teljesül a másodrendű szükséges feltétel (ld. 4.5.1.3. Tétel). Ekkor akár $a \in \mathcal{L}$, akár pedig $a \notin \mathcal{L}$ is előfordulhat. Tehát az idézett tételek segítségével ebben az esetben nem lehet eldönteni azt, hogy az a lokális szélsőértékhelye-e az f függvénynek, vagy sem.

iv) Az előbbi megjegyzés 3^o esetében a lokális szélsőérték definíciója alapján deríthetjük ki azt, hogy a kérdéses helyen van-e lokális szélsőérték. Ehhez segít az említett definíció tagadásának a megfogalmazása: $a \in \mathcal{D}_f$ nem lokális szélsőértékhelye az f függvénynek, ha bármely $\delta > 0$ számhoz vannak olyan $x, y \in \mathcal{D}_f$ elemek, amelyekre

$$\|x - a\| < \delta,\ \|y - a\| < \delta,$$

és

$$f(x) > f(a),\ f(y) < f(a).$$

Speciálisan, ha $f(a) = 0$, akkor $f(y) < 0 < f(x)$, azaz ilyenkor az f az a tetszőleges környezetében előjelet vált.

v) Nyilvánvaló, hogy ha $a \in \mathcal{D}_f$ abszolút szélsőértékhelye az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvénynek, akkor az f-nek az a-ban egyúttal lokális szélsőértéke is van, így – az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, $f \in D\{a\}$ feltételek mellett – grad $f(a) = 0$. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy az abszolút szélsőértékhelyek „felderítésekor" a

$$\{t \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f : f \in D\{t\},\, f'(t) \neq 0\}$$

halmaz elemeit figyelmen kívül hagyhatjuk. (Jegyezzük meg (amint azt $n = 1$-re már láttuk), hogy $a \in \mathcal{D}_f \setminus \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ esetén az a-ra nézve a 4.5.1. pont tételei nem alkalmazhatók.)

vi) Az előbbi megjegyzésekhez kapcsolódva legyen egy $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény esetén

$$\mathcal{D}_f^{(1)} := \{t \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f : f \in D\{t\},\, f'(t) = 0\},$$

$$\mathcal{D}_f^{(2)} := \{t \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f : f \notin D\{t\}\},\ \mathcal{D}_f^{(3)} := \mathcal{D}_f \setminus \operatorname{int} \mathcal{D}_f,$$

és tegyük fel, hogy az f-nek az $a \in \mathcal{D}_f$ helyen abszolút szélsőértéke van. Ekkor

$$a \in \mathcal{D} := \mathcal{D}_f^{(1)} \cup \mathcal{D}_f^{(2)} \cup \mathcal{D}_f^{(3)}.$$

Legyen

$$\mathcal{I} := \left\{ i \in \{1, 2, 3\} : \mathcal{D}_f^{(i)} \neq \emptyset \right\},$$

és

$$M_i := \sup\{f(t) \in \mathbf{R} :\ t \in \mathcal{D}_f^{(i)}\},\ m_i := \inf\{f(t) \in \mathbf{R} :\ t \in \mathcal{D}_f^{(i)}\} \qquad (i \in \mathcal{I}).$$

Amennyiben az a-ban abszolút maximumról van szó, akkor

$$f(a) = \max\{f(x) \in \mathbf{R} : x \in \mathcal{D}\} = \max\{M_i \in \mathbf{R} : i \in \mathcal{I}\},$$

ha pedig abszolút minimumról, akkor

$$f(a) = \min\{f(x) \in \mathbf{R} : x \in \mathcal{D}\} = \min\{m_i \in \mathbf{R} : i \in \mathcal{I}\}.$$

Az M_i szuprémumok, ill. az m_i infimumok meghatározása gyakran újabb („kevesebb változós") függvények abszolút szélsőértékeinek a kiszámítását jelentik.

vii) Érdemes megemlíteni, hogy ha az a-ban abszolút maximuma van az f függvénynek, és valamilyen $\mathcal{I} \ni i$-re (ld. vi) megjegyzés) $a \in \mathcal{D}_f^{(i)}$, akkor nyilvánvaló módon

$$M_i = \max\{f(t) \in \mathbf{R} : t \in \mathcal{D}_f^{(i)}\}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy ha az a-ban abszolút minimuma van az f-nek, és egy $\mathcal{I} \ni i$-re $a \in \mathcal{D}_f^{(i)}$, akkor

$$m_i = \min\{f(t) \in \mathbf{R} : t \in \mathcal{D}_f^{(i)}\}.$$

Ugyanakkor könnyű megadni olyan f-et, amelynek pl. létezik abszolút maximuma, de nem minden $\mathcal{I} \ni i$ esetén van az $\{f(t) \in \mathbf{R} : t \in \mathcal{D}_f^{(i)}\}$ halmaznak legnagyobb eleme. (Azaz van olyan $i \in \mathcal{I}$, hogy az M_i definíciójában a *sup* helyett nem írható *max.*) Ilyen függvény pl. a következő:

$$f(x) := \begin{cases} \sin x & (x \leq 0) \\ \\ \dfrac{1}{n+2} \cdot \Big(\dfrac{x}{n+1} + n\Big) & (n \leq x < n+1,\, n \in \mathbf{N}). \end{cases}$$

Világos, hogy $\max \mathcal{R}_f = 1$, $\mathcal{D}_f^{(2)} = \mathbf{N}$, és az

$$\Big\{f(t) \in \mathbf{R} : t \in \mathcal{D}_f^{(2)}\Big\} = \Big\{\frac{n}{n+1} \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N}\Big\}$$

halmaznak nincs legnagyobb eleme.

viii) A fentiek illusztrálására tekintsük az alábbi feladatot: legyen

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy \qquad \Big((x,y) \in \mathbf{R}^2\Big).$$

Határozzuk meg

a) az f lokális szélsőértékeit;

b) a $\mathcal{D}_g := \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq u \leq 2,\, 0 \leq v \leq 2u\}$,

$$g(x,y) := f(x,y) \qquad \Big((x,y) \in \mathcal{D}_g\Big)$$

függvény abszolút szélsőértékeit!

(Geometriailag a $\mathcal{D}_g$ halmaz a „koordinátasíkon" egy zárt háromszöglemez, amelynek a csúcspontjai: $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,4)$. A g függvény folytonos, a $\mathcal{D}_g$ halmaz korlátos és zárt, azaz kompakt, ezért (ld. 2.4. Tétel) léteznek a $\max \mathcal{R}_g$, $\min \mathcal{R}_g$ abszolút szélsőértékek.)

Mivel nyilván $f \in D^2$, így az a) esetben alkalmazhatók a tételeink. Az elsőrendű szükséges feltétel (ld. 4.5.1.1. Tétel) segítségével számítsuk ki az

$$\mathcal{S} := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)\}$$

halmaz elemeit (az f stacionárius pontjait):

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) \qquad \Big((x,y) \in \mathbf{R}^2\Big),$$

azaz $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ pontosan akkor stacionárius pont, ha

$$3x^2 - 3y = 3y^2 - 3x = 0.$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai: $x = y = 0$ és $x = y = 1$, következésképpen

$$\mathcal{S} = \{(0,0), (1,1)\}.$$

A másodrendű szükséges, ill. elégséges feltétel (ld. 4.5.1.2., 4.5.1.3. Tételek) vizsgálatához számítsuk ki az f másodrendű parciális deriváltjait:

$$\partial_{xx} f(x,y) = 6x,\ \partial_{xy} f(x,y) = -3,\ \partial_{yy} f(x,y) = 6y \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big).$$

Ezért

$$f''(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix},\ f''(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big).$$

A 4.4. vii) megjegyzés szerint tehát $Q^f_{(0,0)}$ indefinit, míg $Q^f_{(1,1)}$ pozitív definit. Így az előbb említett tételek alapján azt mondhatjuk, hogy az f-nek a $(0,0)$-ban nincs lokális szélsőértéke, az $(1,1)$-ben viszont lokális minimuma van:

$$f(1,1) = -1.$$

Ezzel az a) feladatot megoldottuk. A b)-hez a vi)-beli jelöléseket használva azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{D}^{(1)}_g = \{(1,1)\},\ \mathcal{D}^{(2)}_g = \emptyset,\ \mathcal{D}^{(3)}_g = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3,$$

ahol

$$\mathcal{H}_1 := \{(x,0) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 2\},\ \mathcal{H}_2 := \{(2,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le y \le 4\},$$
$$\mathcal{H}_3 := \{(x,2x) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 2\}.$$

Ha $(x,0) \in \mathcal{H}_1$, akkor $g(x,0) = x^3 \quad (0 \le x \le 2)$, ezért

$$\max\{g(x,0) \in \mathbf{R} : (x,0) \in \mathcal{H}_1\} = 8 = g(2,0),$$

$$\min\{g(x,0) \in \mathbf{R} : (x,0) \in \mathcal{H}_1\} = 0 = g(0,0).$$

Ha $(2,y) \in \mathcal{H}_2$, akkor $g(2,y) = y^3 - 6y + 8 \quad (0 \le y \le 4)$. Legyen

$$h(y) := g(2,y) \qquad (0 \le y \le 4),$$

ekkor $h \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h \in D\{y\}$ és $h'(y) = 3y^2 - 6 \quad (0 < y < 4)$, ezért

$$\mathcal{D}^{(1)}_h = \{\sqrt{2}\},\ \mathcal{D}^{(2)}_h = \emptyset,\ \mathcal{D}^{(3)}_h = \{0,4\}.$$

Mivel
$$h(\sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2},\ h(0) = 8,\ h(4) = 48,$$
így
$$\max\{g(2,y) \in \mathbf{R} : (2,y) \in \mathcal{H}_2\} =$$
$$\max\{h(y) \in \mathbf{R} : 0 \leq y \leq 4\} = 48 = g(2,4),$$
és
$$\min\{g(2,y) \in \mathbf{R} : (2,y) \in \mathcal{H}_2\} =$$
$$\min\{h(y) \in \mathbf{R} : 0 \leq y \leq 4\} = 8 - 4\sqrt{2} = g(2,\sqrt{2}).$$
Ha $(x, 2x) \in \mathcal{H}_3$, akkor $g(x, 2x) = 9x^3 - 6x^2 \quad (0 \leq x \leq 2)$. Legyen most
$$H(x) := 9x^3 - 6x^2 \qquad (0 \leq x \leq 2),$$
ekkor $H \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $H \in D\{x\}$ és $H'(x) = 27x^2 - 12x \quad (0 < x < 2)$, ezért
$$\mathcal{D}_H^{(1)} = \{4/9\},\ \mathcal{D}_H^{(2)} = \emptyset,\ \mathcal{D}_H^{(3)} = \{0, 2\}.$$
Az előzőekhez hasonlóan
$$H(4/9) = -32/81,\ H(0) = 0,\ H(2) = 48,$$
tehát
$$\max\{g(x,2x) \in \mathbf{R} :\ (x,2x) \in \mathcal{H}_3\} =$$
$$\max\{H(x) \in \mathbf{R} :\ 0 \leq x \leq 2\} = 48 = g(2,4),$$
és
$$\min\{g(x,2x) \in \mathbf{R} :\ (x,2x) \in \mathcal{H}_3\} = \min\{H(x) \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 2\} =$$
$$-32/81 = g(4/9, 8/9).$$
Összefoglalva az eddigieket, a következőt mondhatjuk (a jelöléseket illetően ld. vi) megjegyzés) :
$$M_1 = m_1 = g(1,1) = -1,$$
és
$$M_3 = \max\{g(x,y) \in \mathbf{R} : (x,y) \in \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3\} = g(2,4) = 48,$$
$$m_3 = \min\{g(x,y) \in \mathbf{R} : (x,y) \in \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3\} =$$
$$g(4/9, 8/9) = -32/81.$$
Így a g függvény abszolút maximuma 48, amit a $(2,4)$ helyen vesz fel, míg az abszolút minimuma az $(1,1)$-ben felvett -1.

ix) Legyen

$$f(x,y) := x^4 + y^2,\ g(x,y) := x^3 + y^2 \qquad ((x,y) \in \mathbf{R}^2).$$

Könnyű megmutatni, hogy az f-nek a $(0,0)$-ban abszolút minimuma van, a g-nek viszont a $(0,0)$-ban nincs lokális szélsőértéke. Ugyanakkor a $Q^f_{(0,0)}$, $Q^g_{(0,0)}$ kvadratikus alakok pozitív szemidefinitek, de nem pozitív definitek. Valóban, az f-re vonatkozó első állítás

$$f(x,y) \geq 0 \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2),\ f(0,0) = 0$$

miatt nyilvánvaló. Mivel $g(0,0) = 0$, és

$$g(x,0) = \begin{cases} x^3 > 0 & (x > 0) \\ \\ x^3 < 0 & (x < 0), \end{cases}$$

ezért az $a := (0,0)$ pont tetszőleges $K_r(a)$ $(r > 0)$ környezetét is véve

$$g(r/2,0) > 0,\ g(-r/2,0) < 0.$$

Világos, hogy $(-r/2,0)$, $(r/2,0) \in K_r(a)$, ezért a g-nek az $a := (0,0)$ helyen nincs lokális szélsőértéke.

A szóban forgó kvadratikus alakok meghatározásához számítsuk ki az f, g függvények parciális deriváltjait:

$$\partial_1 f(x,y) = 4x^3,\ \partial_2 f(x,y) = \partial_2 g(x,y) = 2y,\ \partial_1 g(x,y) = 3x^2,$$

$$\partial_{11} f(x,y) = 12x^2,\ \partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = \partial_{12} g(x,y) = \partial_{21} g(x,y) = 0,$$

$$\partial_{22} f(x,y) = \partial_{22} g(x,y) = 2 \qquad ((x,y) \in \mathbf{R}^2).$$

Innen

$$Q(x,y) := Q^f_{(0,0)}(x,y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \partial_{ik} f(0,0) =$$

$$Q^g_{(0,0)}(x,y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \partial_{ik} g(0,0) = 2y^2 \qquad ((x,y) \in \mathbf{R}^2),$$

és erre a kvadratikus alakra nyilván igazak az állításunk második felében mondottak: $Q \geq 0$, de pl. $Q(1,0) = 0$ miatt a Q nem pozitív definit.

x) Tekintsük az

$$f(x,y) := (x-y)\cdot(x-y^3) \qquad ((x,y) \in \mathbf{R}^2)$$

függvényt. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $e = (u,v) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vektorral az

$$f_e(t) := f(te) = f(tu,tv) = (u-v)\cdot(ut^2 - v^3t^4) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

egyváltozós valós függvénynek a 0-ban lokális szélsőértéke van, de az f-nek a $(0,0)$-ban nincs lokális szélsőértéke. Koordinátageometriai szóhasználattal élve az f_e az f-nek a $(0,0)$ „origón" átmenő, e irányvektorú

$$\ell_e := \{te \in \mathbf{R}^2 : t \in \mathbf{R}\}$$

egyenesre való $f_{|\ell_e}$ leszűkítésével azonosítható:

$$f_{|\ell_e}(x,y) = f_e(t) \qquad \Big((x,y) = (tu,tv) \in \ell_e \ \ (t \in \mathbf{R})\Big).$$

Az f_e függvény (polinom lévén) végtelen sokszor deriválható, és

$$f_e'(t) = (u-v)\cdot(2ut - 4v^3t^3) \ \ , \ \ f_e''(t) = (u-v)\cdot(2u - 12v^3t^2) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ezért

$$f_e'(0) = 0 \ \ , \ \ f_e''(0) = (u-v)\cdot 2u.$$

Ha tehát $(u-v)\cdot u \neq 0$, akkor $f_e''(0) \neq 0$, következésképpen (az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények lokális szélsőértékére vonatkozó másodrendű elégséges feltétel alapján) az f_e-nek a 0-ban lokális szélsőértéke van. Ha $u - v = 0$, akkor $f_e \equiv 0$, ha pedig $u = 0$, akkor

$$f_e(t) = (vt)^4 \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Mindkét utóbbi esetben az f_e-nek a 0-ban nyilván lokális minimuma van.

Viszont $f(0,0) = 0$, és

$$f(x,0) = x^2 > 0 \quad (0 < x \in \mathbf{R}),$$

$$f(z,2z) = -z^2(1 - 8z^2) < 0 \quad (0 < z < 1/\sqrt{8}),$$

amiből világos, hogy az f-nek a $(0,0)$-ban nincs lokális szélsőértéke.

A fenti példa azt mutatja, hogy (pl.) egy kétváltozós valós függvény szélsőérték-vizsgálata általában nem „helyettesíthető" egyváltozós valós függvények szélsőérték-vizsgálatával.

xi) A gyakorlatban az egyik legtöbbször alkalmazott közelítő eljárás a *legkisebb négyzetek módszere.* Valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett legyenek ehhez adottak az

$$x_i \in \mathbf{R}, \ x_i \neq x_j \qquad (i,j = 0,...,n, \ i \neq j)$$

„alappontok", továbbá az

$$y_i \in \mathbf{R} \qquad (i = 0,...,n)$$

számok. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbf{R}$ paramétereket úgy, hogy

$$\sum_{i=0}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 = \min\left\{\sum_{i=0}^{n}(\alpha x_i + \beta - y_i)^2 \in \mathbf{R} : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\right\}$$

teljesüljön. Adott $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ esetén legyen

$$f_{\alpha,\beta}(t) := \alpha \cdot t + \beta \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

A koordinátageometria nyelvén szólva $f_{\alpha,\beta}$ egy egyenes. Olyan $f_{a,b}$ függvényt keresünk tehát, amelyre

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(f_{a,b}(x_i) - y_i\Big)^2 = \min\left\{\sum_{i=0}^{n}\Big(f_{\alpha,\beta}(x_i) - y_i\Big)^2 \in \mathbf{R} : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\right\}.$$

(A numerikus analízisben szokásos megfogalmazást használva a fenti kritériumnak megfelelő egyenest „illesztünk" az $(x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2 \quad (i = 0, ..., n)$ pontokhoz.)

A feladatnak egy másik „geometriai" interpretációja a következő. Tekintsük az

$$\mathbf{x} := (x_0, ..., x_n),\ \mathbf{y} := (y_0, ..., y_n),\ \mathbf{z} := (1, ..., 1) \in \mathbf{R}^{n+1}$$

vektorokat, és definiáljuk az $A \subset \mathbf{R}^{n+1}$ halmazt (alteret) az alábbiak szerint:

$$A := \{\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{z} : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}.$$

Ekkor a

$$\rho(\mathbf{y}, A) := \inf\{\|\xi - \mathbf{y}\|_2 : \xi \in A\}$$

számot az $\mathbf{y}$ vektor és az A halmaz „távolságának" nevezzük (a $\|.\|_2$ norma szerint). Ha van olyan $\zeta \in A$, amellyel $\zeta = a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{z}$ és

$$\rho(\mathbf{y}, A) = \|\zeta - \mathbf{y}\|_2,$$

akkor ζ egy ún. *extremális eleme* az A-nak. Mivel

$$\|\xi - \mathbf{y}\|_2^2 = \sum_{i=0}^{n}(\alpha x_i + \beta - y_i)^2 \qquad \Big(\xi = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{z} \in A \ \ (\alpha, \beta \in \mathbf{R})\Big),$$

ezért a feladatban keresett $a, b \in \mathbf{R}$ meghatározása ugyanaz, mint a $\zeta = a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{z}$ extremális pont kiszámítása. (A megoldás során – bizonyítás nélkül – felhasználjuk, hogy a szóban forgó extremális pont, azaz a keresett minimum létezik.)

Legyen most már

$$F(\alpha, \beta) := \sum_{i=0}^{n}(\alpha x_i + \beta - y_i)^2 \qquad \Big((\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2\Big),$$

ekkor a feladat az F függvény abszolút minimumának (vagy minimumainak) a meghatározása (feltételezve ez utóbbi(ak) létezését). Világos, hogy $F \in D^2$, és

$$\partial_1 F(\alpha,\beta) = 2\cdot \sum_{i=0}^{n} x_i\cdot(\alpha x_i + \beta - y_i),\ \partial_2 F(\alpha,\beta) = 2\cdot \sum_{i=0}^{n}(\alpha x_i + \beta - y_i),$$

ezért az

$$R := \sum_{i=0}^{n} x_i^2,\ S := \sum_{i=0}^{n} x_i,\ T := \sum_{i=0}^{n} x_i\cdot y_i,\ V := \sum_{i=0}^{n} y_i$$

jelölésekkel az F függvény stacionárius pontjait (ld. iii) megjegyzés) az

$$\begin{aligned} R\cdot\alpha + S\cdot\beta &= T \\ S\cdot\alpha + (n+1)\cdot\beta &= V \end{aligned}$$

(α-ra és β-ra vonatkozó) lineáris egyenletrendszerből számíthatjuk ki. A számtani, ill. a négyzetes közép közti egyenlőtlenség alapján az előbbi lineáris egyenletrendszer determinánsa, azaz $(n+1)\cdot R - S^2 > 0$, így egyértelműen létezik olyan $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, amelyik stacionárius pontja az F-nek. Mivel feltételeztük, hogy az F-nek létezik abszolút minimuma, ezért a keresett a, b paraméterek az előbbi stacionárius pont koordinátái. Megjegyezzük, hogy

$$\partial_{11}F(\alpha,\beta) = 2R,\ \partial_{22}F(\alpha,\beta) = 2(n+1),\ \partial_{12}F(\alpha,\beta) = \partial_{21}F(\alpha,\beta) = 2S,$$

következésképpen

$$Q^F_{(a,b)}(\alpha,\beta) = 2R\cdot\alpha^2 + 4S\cdot\alpha\cdot\beta + 2(n+1)\cdot\beta^2 \qquad \Big((\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2\Big).$$

A vii) megjegyzés, $2R > 0$, és $(n+1)\cdot R > S^2$ miatt $Q^F_{(a,b)}$ pozitív definit.

xii) A 4.5.3. pontban adott $n, m \in \mathbf{N}$, $2 \le n$ és $1 \le m < n$ esetén az

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m$$

felbontáshoz (és az említett pont tételeihez) az alábbi módon jutottunk el: ha

$$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbf{R}^n,$$

akkor legyen

$$x := (\xi_1, ..., \xi_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m},\ y := (\xi_{n-m+1}, ..., \xi_n) \in \mathbf{R}^m,$$

és mindezt a következőképpen jelöltük:

$$\xi = (x, y).$$

Ennek alapján az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ függvényeket „kétváltozós"

$$f \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$$

függvényekként tekintettük, ahol az „első" változó $\mathbf{R}^{n-m}$-beli, a „második" pedig $\mathbf{R}^m$-beli. Eljárhatunk azonban mindezt általánosítva, a 3.2. vii) megjegyzés szellemében is. Legyenek ehhez adottak az $1 \leq i_1 < ... < i_m \leq n$ indexek. Jelöljük az

$$\{1, ..., n\} \setminus \{i_1, ..., i_m\}$$

halmaz elemeit (növekvő sorrendben) $l_1, ..., l_{n-m}$-mel. Ha $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbf{R}^n$, akkor tekintsük az

$$x_k := \xi_{l_k} \quad (k = 1, ..., n-m), \; y_j := \xi_{i_j} \quad (j = 1, ..., m)$$

koordinátákkal definiált

$$x := (x_1, ..., x_{n-m}) \in \mathbf{R}^{n-m}, \; y := (y_1, ..., y_m) \in \mathbf{R}^m$$

vektorokat. Állapodjunk meg abban, hogy mindezt szintén a

$$\xi = (x, y)$$

szimbólummal juttatjuk kifejezésre. Például

$$n := 4, \; m := 2, \; i_1 := 1, \; i_2 := 3$$

esetén a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathbf{R}^4$ vektorra $\xi = (x, y)$, ahol

$$x = (\xi_2, \xi_4), \; y = (\xi_1, \xi_3).$$

Világos, hogy a 4.5.3. pontban mondottak minden további nélkül igazak maradnak ebben a „változatban" is. Így pl. a 4.5.3.3. Tétel feltételei mellett azt mondhatjuk, hogy az $(a, b) \in \mathcal{D}_f$ pont körül (ahol $f(a, b) = 0$) az

$$\begin{array}{rcl} f_1(\xi_1, ..., \xi_n) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(\xi_1, ..., \xi_n) & = & 0 \end{array}$$

egyenletrendszerből a ξ_{i_j} $(j = 1, ..., m)$ változók kifejezhetők a ξ_{l_k} $(k = 1, ..., n-m)$ változók implicitfüggvényeként.

xiii) Az előbbi megjegyzésben említett $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ függvény esetén legyen

$$\{f = 0\} := \{\xi \in \mathcal{D}_f : f(\xi) = 0\}.$$

Ekkor a 4.5.3.3. Tételben szereplő $g : K(a) \to K(b)$ implicitfüggvényre a következő igaz:

$$\Big(K(a) \times K(b)\Big) \bigcap \{f = 0\} = \{(x, g(x)) \in \mathbf{R}^n : x \in K(a)\}.$$

Geometriai szóhasználattal élve

$$\operatorname{graf} g := \{(x, g(x)) \in \mathbf{R}^n : x \in K(a)\}$$

(a g függvény „grafikonja", ami a függvény definíciója miatt persze maga a g függvény), tehát az előbbi egyenlőség így néz ki:

$$\Big(K(a) \times K(b)\Big) \bigcap \{f = 0\} = \operatorname{graf} g.$$

xiv) Ha a 4.5.3.3. Tételben $m = 1$, azaz $f \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, akkor $\partial_{\mathbf{2}} f(x, g(x)) \in \mathbf{R}$, ezért a

$$g \in \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$$

implicitfüggvényre

$$g'(x) = \operatorname{grad} g(x) = -\frac{\partial_{\mathbf{1}} f(x, g(x))}{\partial_{\mathbf{2}} f(x, g(x))} \qquad \Big(x \in K(a)\Big).$$

Itt a $\partial_{\mathbf{2}} f$ szimbólum az f függvénynek azt a $\partial_i f$ parciális deriváltját jelenti, ahol $i = 1, ..., n$, és a

$$f(\xi_1, ..., \xi_n) = 0$$

egyenletből a ξ_i változót fejeztük ki a többi változó segítségével. Ennek megfelelően $\partial_{\mathbf{1}} f$ egy olyan (gradiens)vektor(függvény), amelynek az egyes komponensei a $\partial_j f$-ek $(i \neq j = 1, ..., n)$. Így

$$\partial_j g(x) = -\frac{\partial_j f(x, g(x))}{\partial_i f(x, g(x))} \qquad (x \in K(a),\, i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j).$$

Legyen pl.

$$f \in \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},\ f \in C^1,$$

és valamilyen $(a, b, c) \in \mathcal{D}_f$ helyen $f(a, b, c) = 0$. Tegyük fel, hogy a

$$(b, c),\ \ (a, c),\ \ (a, b) \in \mathbf{R}^2$$

pontok egy-egy alkalmas $K_1,\ K_2,\ K_3 \subset \mathbf{R}^2$ környezetében léteznek az

$$f(\varphi_1(y, z), y, z) = 0 \qquad \Big((y, z) \in K_1\Big),$$

$$f(x, \varphi_2(x,z), z) = 0 \qquad \big((x,z) \in K_2\big),$$
$$f(x, y, \varphi_3(x,y)) = 0 \qquad \big((x,y) \in K_3\big)$$

egyenlőségeknek eleget tevő, az f által a 4.5.3.3. Tétel szerint meghatározott folytonosan differenciálható

$$\varphi_i : K_i \to \mathbf{R} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

implicitfüggvények. Ekkor az előbb mondottakra tekintettel

$$\partial_1\varphi_1(b,c) = -\frac{\partial_2 f(a,b,c))}{\partial_1 f(a,b,c)},\ \partial_2\varphi_2(a,c) = -\frac{\partial_3 f(a,b,c))}{\partial_2 f(a,b,c)},$$

és

$$\partial_1\varphi_3(b,c) = -\frac{\partial_1 f(a,b,c))}{\partial_3 f(b,c)}.$$

Következésképpen

$$\partial_1\varphi_1(b,c)\cdot \partial_2\varphi_2(a,c)\cdot \partial_1\varphi_3(a,b) = -1.$$

A termodinamika megfelelő fejezetében a fenti egyenlőséget *Clapeyron-egyenletnek* nevezik: az ideális gázokra vonatkozó gáztörvény szerint – p-vel a gáz nyomását, V-vel a térfogatát, T-vel az abszolút hőmérsékletét, m-mel a (mól)mennyiségét jelölve – az R egyetemes gázállandóval

$$pV - mRT = 0.$$

Innen formálisan

$$p = \frac{mRT}{V},\ V = \frac{mRT}{p},\ T = \frac{pV}{mR},$$

ezért

$$\partial_V p = \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{mRT}{V^2},\ \partial_T V = \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{mR}{p},\ \partial_p T = \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{mR}.$$

Tehát

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot \frac{\partial V}{\partial T}\cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{mRT}{V^2}\cdot \frac{mR}{p}\cdot \frac{V}{mR} = -\frac{mRT}{pV} = -1.$$

(Bármennyire is „csábító" az előbbi szorzatra 1-et „kihozni" a ∂p, ∂V, ∂T szimbólumokkal való „egyszerűsítéssel", formálisan és helytelenül törtek számlálójaként, ill. nevezőjeként tekintve rájuk.)

xv) Alkalmazzuk a 4.5.3.3. Tételt az alábbi esetben:

$$f(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbf{R}^2\big).$$

Világos, hogy $f \in C^1$. Az említett tételben most $n = 2$, $m = 1$, így a „szokásos"

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

felbontással élünk, és g implicitfüggvényként egy $g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egyváltozós valós függvényt „várunk". Ha az

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

egyenletből az „igazi" második változót (amit most y-nal jelöltünk) akarjuk kifejezni a „maradék", azaz az „igazi" első változó (x) implicitfüggvényeként egy $(a, b) \in \{f = 0\}$ pont alkalmas környezetében, akkor a

$$\partial_{\mathbf{2}} f(a, b) = \partial_2 f(a, b) \neq 0$$

feltételt kell biztosítani. Mivel

$$\partial_1 f(x, y) = 2x, \ \partial_2 f(x, y) = 2y,$$

ill.

$$(a, b) \in \{f = 0\} \iff a^2 + b^2 = 1,$$

ezért az

$$a^2 + b^2 = 1, \ \partial_2 f(a, b) = 2b \neq 0 \ \ (\text{azaz } b \neq 0)$$

esetben „működik" a 4.5.3.3. Tétel. Ekkor tehát alkalmas $0 < r, \sigma$ választással az $(a - r, a + r)$, $(b - \sigma, b + \sigma)$ környezetekkel

$$\partial_2 f(x, y) = 2y \neq 0 \qquad \big(x \in (a - r, a + r), \ y \in (b - \sigma, b + \sigma)\big),$$

és létezik a

$$g : (a - r, a + r) \to (b - \sigma, b + \sigma)$$

implicitfüggvény:

$$f(x, g(x)) = x^2 + g^2(x) - 1 = 0 \qquad \big(x \in (a - r, a + r)\big).$$

Ha pl. $b > 0$, akkor a fenti $2y \neq 0$ $\big(y \in (b - \sigma, b + \sigma)\big)$ kikötés miatt $b - \sigma > 0$, és így $\mathcal{R}_g \subset (0, +\infty)$. Ezért

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \big(x \in (a - r, a + r)\big).$$

Megjegyezzük, hogy geometriailag az $\{f = 0\}$ halmaz a koordinátasíkon egy origó középpontú és 1 sugarú körvonal. A $b \neq 0$ feltétel azt jelenti, hogy a kérdéses (a, b) pont vagy a „felső" félsíkban $(b > 0)$, vagy az „alsó" félsíkban $(b < 0)$ van. A $\partial_2 f(a, b) = 0$ esetben viszont az $(a, b) = (\pm 1, 0)$ pont az első koordinátatengelyre esik. Ekkor bármilyen $r > 0$, $\sigma > 0$ számok és g függvény esetén (ld. xiii) megjegyzés) (pl.)

$$\big((a - r, a + r) \times (b - \sigma, b + \sigma)\big) \cap \{f = 0\} =$$

$$= \Big((1-r, 1+r) \times (-\sigma, \sigma)\Big) \cap \{f = 0\} \neq \operatorname{graf} g.$$

Valóban, könnyen ellenőrizhetően alkalmas $u, v \in \mathbf{R}$, $v \neq 0$ mellett

$$(u, v),\ (u, -v) \in A := \Big((1-r, 1+r) \times (-\sigma, \sigma)\Big) \cap \{f = 0\},$$

amiből nyilvánvaló, hogy A nem függvény(grafikon).

xvi) Mutassuk meg pl., hogy van olyan $g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g \in C^1$ függvény, amely eleget tesz az

$$x^2 - x + g^2(x) + g(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_g)$$

egyenlőségnek. Legyen ehhez

$$f(x, y) := x^2 - x + y^2 + y \qquad \Big((x, y) \in \mathbf{R}^2\Big).$$

Világos, hogy $f \in C^1$, $f(0, 0) = 0$, és

$$\partial_1 f(x, y) = 2x - 1,\ \partial_2 f(x, y) = 2y + 1 \qquad \Big((x, y) \in \mathbf{R}^2\Big)$$

miatt $\partial_2 f(0, 0) = 1 \neq 0$. Ezért alkalmazható a 4.5.3.3. Tétel, miszerint egy-egy alkalmas $r > 0$ és $\sigma > 0$ számmal létezik az f által a $(0, 0)$ pont körül meghatározott

$$g : (-r, r) \to (-\sigma, \sigma)$$

implicitfüggvény, amelyre $g \in C^1$, és

$$f(x, g(x)) = x^2 - x + g^2(x) + g(x) = 0 \qquad \Big(x \in (-r, r)\Big).$$

Továbbá

$$g'(x) = -\frac{\partial_1 f(x, g(x))}{\partial_2 f(x, g(x))} = \frac{1 - 2x}{2g(x) + 1} \qquad \Big(x \in (-r, r)\Big).$$

xvii) Nem nehéz meggondolni a következőket: ha a 4.5.3.3. Tételben vagy a 4.5.4.1. Tételben $f \in C^1$ helyett azt tesszük fel valamilyen $1 \leq k \in \mathbf{N}$ mellett, hogy $f \in C^k$, akkor a g implicit függvényre, vagy a h lokális inverzre is $g \in C^k$, ill. $h \in C^k$ teljesül.

xviii) A 4.5.5.1. Tételbeli $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{R}^m$ vektor koordinátáit *Lagrange-multiplikátoroknak* nevezzük. Ha

$$F := f + \lambda g = f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot g_k,$$

akkor az említett tétel (az elsőrendű szükséges feltétel) így szól:

$$\operatorname{grad} F(c) = 0.$$

Ez „megegyezik" a feltétel nélküli lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétellel (ld. 4.5.1.1. Tétel), azzal a különbséggel, hogy azt (formálisan) nem az f függvényre, hanem az F-re alkalmazzuk. Az itt szereplő F függvény az ún. *Lagrange-függvény.*

xix) Az előbbi megjegyzésben szereplő $\operatorname{grad} F(c) = 0$ egyenlet (egyenletrendszer) részletesebben kiírva a következőt jelenti:

$$\partial_j f(c_1, ..., c_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \partial_j g_k(c_1, ..., c_n) = 0 \qquad (j = 1, ..., n).$$

Ez n darab egyenlet az összesen $m + n$ darab $\lambda_1, ..., \lambda_m$, $c_1, ..., c_n$ ismeretlenre. A „hiányzó" m darab egyenletet a $g(c) = 0$-ból adódó

$$g_l(c_1, ..., c_n) = 0 \qquad (l = 1, ..., m)$$

egyenletrendszer szolgáltatja.

xx) A 4.5.5.1. Tételben a

$$g'(c) = \begin{bmatrix} \operatorname{grad} g_1(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} g_m(a) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times n}$$

mátrix rangjára vonatkozó feltétel azt jelenti, hogy a $\operatorname{grad} g_j(c)$ $(j = 1, ..., m)$ vektorok lineárisan függetlenek. Továbbá megadható $g'(c)$-nek m darab oszlopa úgy, hogy az ezek által meghatározott mátrix invertálható. Ezeknek az oszlopoknak az indexeit jelöltük az említett tétel bizonyításában rendre $j_1, ..., j_m$-mel. Ha $m = 1$, akkor a rangfeltétel azt jelenti, hogy a $\operatorname{grad} g(c) \in \mathbf{R}^n$ vektor nem a nulla-vektor.

xxi) A 4.5.5.1. Tételben az $m < n$ feltételezéssel éltünk. Maga a feltételes szélsőértékfogalom megengedi az $m = n$ esetet is. Ekkor a szóban forgó tételben $g'(c) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, és a $\operatorname{rang} g'(c) = m = n$ *rangfeltétel* jelentése az, hogy a

$$g'(c) = \begin{bmatrix} \operatorname{grad} g_1(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} g_n(a) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

Jacobi-mátrix invertálható. Tehát a $\operatorname{grad} g_k(a) \in \mathbf{R}^n$ $(k = 1, ..., n)$ vektorok lineárisan függetlenek, más szóval bázist alkotnak az $\mathbf{R}^n$-ben. Következésképpen (egyértelműen) léteznek olyan $\lambda_j \in \mathbf{R}$ $(j = 1, ..., n)$ számok, amelyekkel

$$-\operatorname{grad} f(c) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \operatorname{grad} g_j(c),$$

azaz a $\lambda := (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ vektorral $\operatorname{grad}(f + \lambda g)(c) = 0$. Röviden: ekkor is igaz a 4.5.5.1. Tétel, de az állítása triviális.

xxii) A feltételes abszolút szélsőérték „kezelése" a feltétel nélküli esettel analóg módon történhet.

xxiii) Legyen pl. $n := 2$, $m := 1$, és

$$f(x, y) := 2x + 3y,\ g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad ((x, y) \in \mathbf{R}^2).$$

Ekkor alkalmas $\lambda \in \mathbf{R}$ számmal és az

$$F(x, y) := 2x + 3y + \lambda\cdot (x^2 + y^2 - 1) \qquad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

függvénnyel az elsőrendű szükséges feltétel szerint

$$\begin{aligned} \partial_1 F(x, y) &= 2 + 2\lambda x &&= 0 \\ \partial_2 F(x, y) &= 3 + 2\lambda y &&= 0 \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 &&= 0 \end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai:

$$x_1 := \frac{2}{\sqrt{13}},\ y_1 := \frac{3}{\sqrt{13}},\ \lambda_1 := -\frac{\sqrt{13}}{2},$$

ill.

$$x_2 := -\frac{2}{\sqrt{13}},\ y_1 := -\frac{3}{\sqrt{13}},\ \lambda_1 := \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

A

$$g'(x_i, y_i) = \operatorname{grad} g(x_i, y_i) = 2(x_i, y_i) \qquad (i = 1, 2)$$

mátrix rangja nyilván 1. Továbbá a

$$h := (x, y),\ c^{(i)} := (x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2 \qquad (i = 1, 2)$$

jelölésekkel

$$Q^F_{c^{(i)}}(x, y) = \left\langle \begin{bmatrix} 2\lambda_i & 0 \\ 0 & 2\lambda_i \end{bmatrix} h, h \right\rangle = 2\lambda_i(x^2 + y^2),$$

azaz a $Q^F_{c^{(1)}}$ nyilván negatív, a $Q^F_{c^{(2)}}$ pedig pozitív definit. Ezért a másodrendű elégséges feltétel is teljesül, így az f-nek a $c^{(1)}$ helyen feltételes lokális maximuma, a $c^{(2)}$ pontban pedig feltételes lokális minimuma van. A $\{g = 0\}$ halmaz kompakt lévén, az előbbi feltételes lokális szélsőértékek egyúttal feltételes abszolút szélsőértékek is. Mivel $\operatorname{grad} g(x, y) = (0, 0) \iff x = y = 0$, és $(0, 0) \notin \{g = 0\}$, ezért a $\{g = 0\}$ halmaznak nincs olyan pontja, ahol ne teljesülne a g'-vel kapcsolatos rangfeltétel. (Geometriailag a $\{g = 0\}$ halmaz a koordinátasíkon egy origó középpontú, 1 sugarú körvonal. Ennek az (x, y) pontjaiban kerestük a $2x + 3y$ kifejezés szélsőértékeit.)

xxiv) Tekintsük az

$$f(x,y) := x \quad , \quad g(x,y) := x^3 - y^2 \qquad ((x,y) \in \mathbf{R}^2)$$

függvényeket, és határozzuk meg az f feltételes lokális szélsőértékeit a $g = 0$ feltételre vonatkozóan. Legyen $\lambda \in \mathbf{R}$, és

$$F(x,y) := f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y) = x + \lambda \cdot (x^3 - y^2) \qquad ((x,y) \in \mathbf{R}^2).$$

A 4.5.5.1 Tétel alkalmazásához a

$$\begin{aligned} \partial_1 F(x,y) &= 1 + 3\lambda x^2 = 0 \\ \partial_2 F(x,y) &= -2\lambda y = 0 \\ g(x,y) &= x^3 - y^2 = 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell először is megoldani. Mivel az első egyenlet szerint a λ nem lehet nulla, ezért a második egyenletből $y = 0$, így (ld. harmadik egyenlet) $x = 0$, ami viszont az első egyenlet szerint nem lehet. Ezért a szóban forgó egyenletrendszernek nincs megoldása. Ugyanakkor a

$$\{g = 0\} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^3 = y^2\}$$

halmaz (x,y) pontjaiban nyilván $x \geq 0$, így

$$f(x,y) = x \geq 0 \qquad ((x,y) \in \{g = 0\}).$$

Mivel $(0,0) \in \{g = 0\}$ és $f(0,0) = 0$, ezért az $f_{|_{\{g=0\}}}$ leszűkített függvénynek a $(0,0)$-ban minimuma van. Következésképpen az f-nek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan a $(0,0)$-ban minimuma van.

xxv) Az előző megjegyzéshez hasonlóan vizsgáljuk az alábbi f függvény feltételes szélsőértékeit a $g = 0$ feltételre nézve, ha

$$f(x,y) := x^3, \; g(x,y) := y - x^2 \qquad ((x,y) \in \mathbf{R}^2).$$

Első lépésként most az

$$F(x,y) := x^3 + \lambda \cdot (y - x^2) \qquad ((x,y) \in \mathbf{R}^2)$$

függvénnyel a

$$\begin{aligned} \partial_1 F(x,y) &= 3x^2 - 2\lambda x = 0 \\ \partial_2 F(x,y) &= \lambda = 0 \\ g(x,y) &= y - x^2 = 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell vizsgálni. Világos, hogy ennek egyetlen megoldása van, mégpedig:

$$x = y = \lambda = 0.$$

Mivel

$$\operatorname{grad} g(x, y) = (-2x, 1)_{|x=y=0} = (0, 1) \neq 0,$$

ezért a $(0, 0)$ pontban teljesül a 4.5.5.1. Tételbeli rangfeltétel. Ez az említett tétel (elsőrendű szükséges feltétel) szerint azt jelenti, hogy az f-nek a $c := (0, 0)$ pontban a $g = 0$ feltételre nézve lehet lokális szélsőértéke. A 4.5.5.2. Tétel alkalmazásához számítsuk ki a Q_c^F kvadratikus alakot:

$$\partial_{11}F(x, y) = 6x - 2\lambda_{|x=y=\lambda=0} = 0 \ \ , \ \ \partial_{11}F(c) = \partial_{21}F(c) = \partial_{22}F(c) = 0.$$

Következésképpen $Q_c^F \equiv 0$, így a Q_c^F nem definit, de (pl.) pozitív szemidefinit (ezért feltételesen is az). A másodrendű elégséges feltétel (ld. 4.5.5.2. Tétel) tehát nem „működik", de a másodrendű szükséges feltétel (ld. 4.5.5.3. Tétel) igen. Mindez együtt azt jelenti, hogy az f-nek a c-ben a $g = 0$ feltételre vonatkozóan lehet lokális szélsőértéke, de hogy van-e vagy nincs, azt az említett tételek segítségével nem lehet eldönteni. Ugyanakkor

$$(x, y) \in \{g = 0\} = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : v = u^2\} \iff y = x^2.$$

Világos, hogy tetszőleges $K(0, 0)$ környezetet véve vannak olyan

$$(x, y),\ (u, v) \in K(0, 0) \cap \{g = 0\}$$

pontok, amelyekre $x > 0$ és $u < 0$. Következésképpen

$$f(x, y) = x^3 > 0,\ f(u, v) = u^3 < 0,$$

ami $(0, 0) \in K(0, 0) \cap \{g = 0\}$ és $f(0, 0) = 0$ miatt azt mutatja, hogy az f-nek a $(0, 0)$-ban a $g = 0$ feltételre nézve nincs lokális szélsőértéke.

xxvi) Az előző megjegyzések mintájára legyen most

$$f(x, y) := 2x + 3y,\ g(x, y) := x^2 - y^3 \qquad ((x, y) \in \mathbf{R}^2),$$

ill. valamilyen $\lambda \in \mathbf{R}$ mellett

$$F(x, y) := 2x + 3y + \lambda \cdot (x^2 - y^3) \qquad ((x, y) \in \mathbf{R}^2).$$

Ekkor a 4.5.5.1. Tétel szellemében a

$$\begin{aligned} \partial_1 F(x, y) &= 2 + 2\lambda x = 0 \\ \partial_2 F(x, y) &= 3 - 3\lambda y^2 = 0 \\ g(x, y) &= x^2 - y^3 = 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell először is megoldanunk: $x = -1$, $y = 1$, $\lambda = 1$. Mivel

$$\operatorname{grad} g(x, y) = (2x, -3y^2)_{|x=-1, y=1} = (2, -3) \neq 0,$$

ezért a $c := (-1, 1)$ pontban teljesül a 4.5.5.1. Tételben megfogalmazott rangfeltétel. A 4.5.5.2. Tétel alkalmazásához számítsuk ki a Q_c^F kvadratikus alakot:

$$\partial_{11}F(c) = 2,\ \partial_{12}F(c) = \partial_{21}F(c) = 0,\ \partial_{22}F(c) = -6,$$

így

$$Q_c^F(x, y) = 2x^2 - 6y^2 \qquad ((x, y) \in \mathbf{R}^2).$$

Világos, hogy a Q_c^F kvadratikus alak nem definit, hiszen

$$Q_c^F(0, 1) = -6 < 0 < 2 = Q_c^F(1, 0).$$

Legyen ugyanakkor

$$\mathcal{A} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \langle \operatorname{grad} g(c), (x, y)\rangle = 0\},$$

amikor is

$$(x, y) \in \mathcal{A} \iff 2x - 3y = 0.$$

Ezért $(x, y) \in \mathcal{A}$ esetén $2x = 3y$, következésképpen $2x^2 = 9y^2/2$, és

$$Q_c^F(x, y) = \frac{9y^2}{2} - 6y^2 = -\frac{3y^2}{2} < 0 \qquad ((0, 0) \neq (x, y) \in \mathcal{A}).$$

A Q_c^F kvadratikus alak tehát feltételesen negatív definit a $\operatorname{grad} g(c)$-re nézve, amiből (ld. 4.5.5.2. Tétel) az következik, hogy az f függvénynek a $(-1, 1)$ pontban a $g = 0$ feltételre nézve feltételes lokális maximuma van.

xxvii) Határozzuk meg az f függvény feltételes lokális szélsőértékeit a $g = 0$ feltételre vonatkozóan, ha

$$f(x, y, z) := xy + yz \qquad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3),$$

és a

$$g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 - 2,\ g_2(x, y, z) := y + z - 2 \qquad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3)$$

koordinátafüggvényekkel $g = (g_1, g_2)$. Most tehát (a 4.5.5.1., 4.5.5.2., 4.5.5.3. Tételekben) $n = 3$ és $m = 2$. A feladatnak megfelelő F Lagrange-függvény (ld. xviii) megjegyzés) alkalmas λ_1, $\lambda_2 \in \mathbf{R}$ multiplikátorokkal

$$F(x, y, z) := f(x, y, z) + \lambda_1 \cdot g_1(x, y, z) + \lambda_2 \cdot g_2(x, y, z) =$$

$$= xy + yz + \lambda_1 \cdot (x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2 \cdot (y + z - 2) \qquad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3)$$

A 4.5.5.1. Tételbeli elsőrendű szükséges feltétel szerinti egyenletrendszer most a következő:

$$\begin{aligned} \partial_1 F(x, y) &= y + 2\lambda_1 x = 0 \\ \partial_2 F(x, y) &= x + z + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \partial_3 F(x, y) &= y + \lambda_2 = 0 \\ g_1(x, y) &= x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ g_2(x, y) &= y + z - 2 = 0. \end{aligned}$$

Innen („kiküszöbölésekkel") azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{4\lambda_1^2 - 4\lambda_1 - 1}{1 + 4\lambda_1^2}, \; y = -2\lambda_1 \cdot \frac{4\lambda_1^2 - 4\lambda_1 - 1}{1 + 4\lambda_1^2}.$$

Ezt behelyettesítve a negyedik egyenletbe az adódik, hogy

$$\left(\frac{4\lambda_1^2 - 4\lambda_1 - 1}{1 + 4\lambda_1^2}\right)^2 + 4\lambda_1^2 \cdot \left(\frac{4\lambda_1^2 - 4\lambda_1 - 1}{1 + 4\lambda_1^2}\right)^2 = 2,$$

amiből meg átrendezés után

$$(4\lambda_1^2 - 1) \cdot (4\lambda_1^2 - 8\lambda_1 + 1) = 0$$

következik. Két eset lehetséges (ezek közül csak az elsőt részletezzük a továbbiakban):

1^o $4\lambda_1^2 - 1 = 0$, azaz $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ vagy $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$;

2^o $4\lambda_1^2 - 8\lambda_1 + 1 = 0$, amikor is $\lambda_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ vagy $\lambda_1 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$.

Az 1^o esetben a szóban forgó egyenletrendszer alábbi megoldásai adódnak (a szóbajöhető feltételes szélsőértékhelyet $c = (x, y, z)$-vel jelölve):

$$x = 1, \; y = -1, \; z = 3, \; \lambda_1 = 1/2, \; \lambda_2 = 1,$$

$$x = -1, \; y = 1, \; z = 1 \; \lambda_1 = 1/2, \; \lambda_2 = -1,$$

$$x = 1, \; y = 1, \; z = 1, \; \lambda_1 = -1/2, \; \lambda_2 = -1,$$

$$x = -1, \; y = -1, \; z = 3, \; \lambda_1 = -1/2, \; \lambda_2 = 1.$$

Mivel

$$g'(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3),$$

ezért $x \neq 0$ vagy $y \neq 0$ esetén a $g'(x, y, z)$ Jacobi-mátrix rangja nyilván 2, azaz a fenti pontokban teljesül a 4.5.5.1. Tételbeli rangfeltétel. Számítsuk ki az F Lagrange-függvény másodrendű parciális deriváltjait:

$$\partial_{11}F(c) = \partial_{22}F(c) = 2\lambda_1, \ \partial_{33}F(c) = 0,$$

$$\partial_{12}F(c) = \partial_{21}F(c) = 1, \ \partial_{13}F(c) = \partial_{31}F(c) = 0,$$

$$\partial_{23}F(c) = \partial_{32}F(c) = 1.$$

Tehát

$$F''(c) = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3),$$

amiből

$$Q_c^F(u, v, w) = \langle F''(c)(u, v, w), (u, v, w) \rangle =$$

$$2(\lambda_1 u^2 + \lambda_1 v^2 + vw + uv) \qquad ((u, v, w) \in \mathbf{R}^3).$$

Legyen most

$$\mathcal{A} := \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : g'(c)(u, v, w) = (0, 0)\},$$

ekkor

$$(u, v, w) \in \mathcal{A} \iff 2xu + 2yv = v + w = 0.$$

Ha pl.

$$x = 1, \ y = -1, \ z = 3, \ \lambda_1 = 1/2, \ \lambda_2 = 1,$$

akkor

$$(u, v, w) \in \mathcal{A} \iff 2u - 2v = v + w = 0,$$

azaz $u = v$, és $w = -v = -u$. Ezért

$$Q_c^F(u, v, w) = Q_c^F(u, u, -u) = 2u^2 > 0 \qquad ((0, 0, 0) \neq (u, v, w) \in \mathcal{A}),$$

más szóval a $Q^F_{(1,-1,3)}$ kvadratikus alak feltételesen pozitív definit a $g''(1, -1, 3)$ mátrixra nézve. Ezért (ld. 4.5.5.2. Tétel) az f-nek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan az $(1, -1, 3)$-ban feltételes lokális minimuma van. (Hasonlóan „intézhetők el" az egyéb esetek is.) Megjegyezzük, hogy geometriailag a $\{g_1 = 0\} \subset \mathbf{R}^3$ halmaz egy hengerfelület, amelynek a tengelye a harmadik koordinátatengely, a sugara pedig $\sqrt{2}$. Hasonlóan, a $\{g_2 = 0\} \subset \mathbf{R}^3$ halmaz egy sík, amelyik átmegy a $(0, 0, 2)$, $(0, 2, 0)$ pontokon, és párhuzamos az első koordinátatengellyel. Következésképpen a $\{g = 0\} = \{g_1 = 0\} \cap \{g_2 = 0\}$ halmaz egy ellipszis az említett hengerfelületen, amit abból az előbbi sík metsz ki. Ennek az ellipszisnek az (x, y, z) pontjaiban kerestük az $xy + yz$ kifejezés szélsőértékeit.

xxviii) A 4.5.2.1. Tétel bizonyításából az is kiderül, hogy igaz a *nyílt leképezések tétele*: tegyük fel, hogy $1 \leq n \in \mathbf{N}$, az $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ függvény folytonosan differenciálható, és $\det f'(x) \neq 0 \quad (x \in \mathcal{D}_f)$. Ekkor az f egy ún. *nyílt leképezés,* azaz tetszőleges $A \subset \mathcal{D}_f$ nyílt halmaz esetén az $f[A]$ képhalmaz is nyílt. (Emlékeztetünk arra, hogy a differenciálhatósági feltétel egyúttal azt is magában foglalja, hogy a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány nyílt halmaz.)

xxix) Adott $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén tekintsük a $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ utat (ld. 4.5.7.), és egy $\tau = \{t_0, ..., t_m\}$,

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$

felosztással (valamilyen $1 \leq m \in \mathbf{N}$ indexre) legyen

$$\ell_\varphi(\tau) := \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)\|,$$

ahol $\|.\| := \|.\|_2$. Ha

$$u_j := \varphi(t_j) \qquad (j = 0, ..., m),$$

akkor (az ívhossz definíciója, vagy a 4.5.7.2. Tétel alapján) világos, hogy az előbbi $\ell_\varphi(\tau)$ nem más, mint a

$$\psi_\tau(t) := u_j + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \cdot (u_{j+1} - u_j) \qquad (t \in [t_j, t_{j+1}], j = 0, ..., m-1)$$

töröttvonal (ld. 4.5.7.) ℓ_{ψ_τ} hossza. Geometriai megfontolásból

$$\psi_\tau(t_j) = \varphi(t_j) \qquad (j = 0, ..., m)$$

alapján azt mondjuk, hogy a ψ_τ a *φ-be írt töröttvonal.* Az ℓ_φ értelmezése szerint (ld. 4.5.7.) tehát az ívhossz a szóban forgó útba írt töröttvonalak hosszának a szuprémuma.

xxx) Legyen $u \in \mathbf{R}^2, r > 0$, és $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ a következő leképezés:

$$\varphi(t) := u + r \cdot (\cos t, \sin t) \qquad (t \in [0, 2\pi]).$$

Ekkor az előbbi megjegyzés jelöléseivel

$$\|\varphi(t) - u\| = r \cdot \|(\cos t, \sin t)\| =$$

$$r \cdot \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = r \qquad (t \in [0, 2\pi]).$$

Más szóval az $\mathcal{R}_\varphi$ értékkészlet egy u középpontú és r sugarú körvonal. Nyilvánvaló, hogy a φ zárt sima út (az említett kör egy paraméterezése). Továbbá tetszőlegesen vett $\tau \subset [0, 2\pi]$ felosztás esetén (ld. xxix) megjegyzés) ψ_τ (a geometria nyelvén fogalmazva) az illető körbe írt *sokszög.* Ezért ℓ_φ (a körvonal hossza) a körbe írt sokszögek hosszának a szuprémuma, ahol a 4.5.7.2. Tétel alapján

$$\ell_\varphi = \int_0^{2\pi} \|\varphi'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \|r\cdot(-\sin t, \cos t)\|\,dt =$$

$$\int_0^{2\pi} r\cdot\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2r\pi.$$

xxxi) Tegyük fel, hogy $1 \le n \in \mathbf{N}$ és $\emptyset \ne A \subset \mathbf{R}^n$. Ha $u, v \in A$, akkor az u, v pontokat az A-ban *körökkel összeköthetőnek* nevezzük, ha megadhatók az a_i pontok és a $K(a_i)$ $(i = 1, ..., s)$ környezetek (valamilyen $s \in \mathbf{N}$ esetén) úgy, hogy

1^o $K(a_i) \subset A$ $(i = 0, ..., s)$;

2^o $a_{j+1} \in K(a_j)$ $(j = 0, ..., s-1)$;

3^o $u \in K(a_0)$, $v \in K(a_s)$.

A 4.5.7.1. Tétel bizonyításában követett gondolatmenettel belátható, hogy ha az A tartomány, akkor bármely két pontja összeköthető az A-ban körökkel. Ti. legyen tetszőleges $u \in A$ pont esetén most $A_u \subset A$ az a halmaz, amelyik az u-val (az A halmazban) körökkel összeköthető összes A-beli pontból áll. Ekkor $u \in A_u$ miatt $A_u \ne \emptyset$, továbbá a körökkel összeköthetőség definíciója miatt az A_u nyílt is. De az $A \setminus A_u$ halmaz is nyílt. Ha ui. $A \setminus A_u \ne \emptyset$ és $z \in A \setminus A_u$, akkor $z \in A$, ezért egy $r > 0$ mellett $K_r(z) \subset A$. Legyen $y \in K_r(z)$. Ha az y az A-ban körökkel összeköthető lenne az u-val, akkor könnyen beláthatóan ugyanez teljesülne a z-re is, ami nem igaz. Tehát $y \in A \setminus A_u$, így $K_r(z) \subset A \setminus A_u$. Mivel az A_u, $A \setminus A_u$ halmazok nyilván diszjunktak, és

$$A = A_u \cup (A \setminus A_u),$$

ezért az A összefüggősége és $A_u \ne \emptyset$ miatt $A \setminus A_u = \emptyset$, azaz $A_u = A$.

Ugyanakkor minden $K(a) \subset \mathbf{R}^n$ környezetre annak akármilyen két $x, y \in K(a)$ pontjához „megszerkeszthető" olyan $\psi := \varphi_{u_0u_1} \vee \varphi_{u_1u_2} \vee \ldots \vee \varphi_{u_{s-1}u_s}$ töröttvonal, amelyik a $K(a)$-ban összeköti az x-et az y-nal, és mindegyik itt szereplő $\varphi_{u_iu_{i+1}}$ $(i = 0, ..., s-1)$ szakasz valamelyik „koordinátatengellyel párhuzamos", azaz az u_i, u_{i+1} pontoknak legfeljebb egy kivételével minden koordinátájuk ugyanaz. Az előbbiek szerint tehát ugyanez igaz egy tartomány bármelyik két pontjára is.

xxxii) A 4.5.7.7. Tétel feltételei mellett (amikor is $1 \le n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$ csillagtartomány, az $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^n$ függvény folytonosan differenciálható, az $f'(v)$ Jacobi-mátrix pedig minden $v \in \mathcal{D}$ esetén szimmetrikus) az f-nek van primitív függvénye. A Newton–Leibniz-tétel (ld. 4.5.7.5. Tétel) szerint ekkor minden, a $\mathcal{D}$-ben haladó zárt út mentén az f vonalintegrálja nulla. Következésképpen a 4.5.7.6. Tétel bizonyítása alapján tetszőlegesen rögzített $u \in \mathcal{D}$ ponttal az

$$F(v) := \int_\varphi f \qquad (v \in \mathcal{D})$$

függvény primitív függvénye az f-nek, ahol a φ bármilyen $\mathcal{D}$-ben haladó, a v-t az u-val összekötő út lehet. Speciálisan, ha $n = 2$ és $I, J \subset \mathbf{R}$ egy-egy nyílt intervallum, akkor az $I \times J$ halmaz („téglalap") nyilván csillagtartomány (ld. 4.5.7.). Ha a

$$g, h : I \times J \to \mathbf{R}$$

(kétváltozós valós) függvények folytonosan differenciálhatók, és

$$\partial_1 h = \partial_2 g,$$

akkor (ld. 3.1.4. Tétel) az

$$f := (g, h)$$

(kétváltozós vektor)függvény is folytonosan differenciálható, és az

$$f' = \begin{bmatrix} \partial_1 g & \partial_2 g \\ \partial_1 h & \partial_2 h \end{bmatrix}$$

Jacobi-mátrix(függvény) szimmetrikus. Ezért az előbb mondottak szerint tetszőleges $\tau \in I$, $\xi \in J$ mellett az $u := (\tau, \xi)$ választással a fenti F függvény primitív függvénye az f-nek. Ha $x \in I$, $y \in J$, és $v = (x, y)$, akkor a $w := (x, \xi)$ ponttal és a

$$\varphi_{uw}(t) = u + t(w - u) = \big(\tau + t(x - \tau), \xi\big) \qquad (t \in [0, 1])$$

„vízszintes",

$$\varphi_{wv}(t) = w + t(v - w) = \big(x, \xi + t(y - \xi)\big) \qquad (t \in [0, 1])$$

„függőleges" szakaszokkal legyen (ld. 4.5.7.)

$$\varphi := \varphi_{uw} \vee \varphi_{wv}.$$

Tehát (ld. 4.5.7.3. Tétel) ezen a φ „lépcsőn" integrálva a Riemann-integrálokkal kapcsolatos helyettesítéses integrálással

$$F(v) = F(x, y) = \int_{\varphi_{uw} \vee \varphi_{wv}} f = \int_{\varphi_{uw}} f + \int_{\varphi_{wv}} f =$$

$$\int_0^1 \langle f(\varphi_{uw}(t)), \varphi'_{uw}(t) \rangle \, dt + \int_0^1 \langle f(\varphi_{wv}(t)), \varphi'_{wv}(t) \rangle \, dt =$$

$$= \int_0^1 \langle f(\tau + t(x-\tau), \xi), (x-\tau, 0)\rangle\, dt + \int_0^1 \langle f(x, \xi + t(y-\xi)), (0, y-\xi\rangle\, dt =$$

$$\int_0^1 (x-\tau)\cdot g(\tau + t(x-\tau), \xi)\, dt + \int_0^1 (y-\xi)\cdot h(x, \xi + t(y-\xi))\, dt =$$

$$\int_\tau^x g(z, \xi)\, dz + \int_\xi^y h(x, \zeta)\, d\zeta.$$

Megjegyezzük, hogy az $s := (\tau, y)$ ponttal az előbbi φ „lépcső" helyett választhattuk volna a

$$\psi := \varphi_{us} \vee \varphi_{sv}$$

„lépcsőt" is, amikor végeredményül az

$$F(x, y) = \int_\psi f = \int_{\varphi_{us}} f + \int_{\varphi_{sv}} f = \int_\xi^y h(\tau, \zeta)\, d\zeta + \int_\tau^x g(z, y)\, dz$$

előállítást kapjuk.

xxxiii) A fizika terminológiájával élve egy $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^3$ tartomány esetén az

$$f = (f_1, f_2, f_3) : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^3$$

folytonosan differenciálható függvény egy *erőteret* ír le. Jól ismert pl., hogy ha mondjuk az origóban elhelyezünk egy $m > 0$ tömegű pontot, akkor a Newton-féle gravitációs törvény szerint az origótól különböző $\xi \in \mathbf{R}^3$ pontban lévő egységnyi tömegű pontra gyakorolt erő nagysága (a $q > 0$ gravitációs állandóval) $qm/\|\xi\|^2$, az iránya pedig a ξ-vel ellentétes. Ezért ezt az ún. *gravitációs erőteret* az

$$f(\xi) := -qm\cdot \frac{\xi}{\|\xi\|^3} \qquad (0 \neq \xi \in \mathbf{R}^3)$$

függvény írja le.

A $\mathcal{D}$-beli φ utak (pályák) mentén az $\int_\varphi f$ vonalintegrál az erőtér *munkája* a φ úton. Ha az f-nek van primitív függvénye, akkor az F primitív függvényt *potenciálnak,* az erőteret pedig *konzervatívnak* nevezik. Ilyen erőtér pl. a fenti gravitációs erőtér, hiszen az

$$F(\xi) := qm\cdot \frac{1}{\|\xi\|} \qquad (0 \neq \xi \in \mathbf{R}^3)$$

függvény (könnyen ellenőrizhetően) differenciálható, és

$$\operatorname{grad} F(\xi) = -qm\cdot \frac{\xi}{\|\xi\|^3} \qquad (0 \neq \xi \in \mathbf{R}^3).$$

Konzervatív erőtérben az előbbi $\int_\varphi f$ integrál, azaz az erőtér munkája a 4.5.7.5. Tétel értelmében a potenciál megváltozásával egyenlő a φ út kezdő- és végpontja között, tehát a kezdő- és végponton túl független magától az úttól. A 4.5.7.7. Tételre tekintettel ez a helyzet, ha a $\mathcal{D}$ csillagtartomány, az

$$f' = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 \\ \partial_1 f_3 & \partial_2 f_3 & \partial_3 f_3 \end{bmatrix}$$

Jacobi-mátrix(függvény) pedig szimmetrikus.

Emlékeztetünk arra, hogy ha a $g \in \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ függvény differenciálható, akkor a

$$\operatorname{rot} g := (\partial_2 g_3 - \partial_3 g_2, \partial_3 g_1 - \partial_1 g_3, \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1)$$

(vektor)függvényt a g *rotációjának* nevezik. Ezért a fenti f' akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $\operatorname{rot} f \equiv 0$. A $\operatorname{rot} f$ vektor(függvény) a „felelős" az erőtérbeli örvényekért, ezért $\operatorname{rot} f \equiv 0$ esetén *örvénymentes erőtérről* beszélünk.

xxxiv) Legyen

$$f(x,y) := \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \qquad \left((0,0) \neq (x,y) \in \mathbf{R}^2\right)$$

és

$$\varphi(t) := (\cos t, \sin t) \qquad (t \in [0, 2\pi]).$$

Ekkor

$$\int_\varphi f = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\right) dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi,$$

azaz $\int_\varphi f \neq 0$. Mivel a φ zárt út a $\mathcal{D}_f$-ben, ezért a 4.5.7.5. Tétel miatt az f-nek nincs primitív függvénye. Ugyanakkor $f \in C^1$, és az

$$f_1(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad , \quad f_2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \left((0,0) \neq (x,y) \in \mathbf{R}^2\right)$$

koordinátafüggvényekre minden $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbf{R}^2$ helyen

$$\partial_2 f_1(x,y) = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\partial_1 f_2(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tehát $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$, azaz az

$$f' = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{bmatrix}$$

Jacobi-mátrix(függvény) szimmetrikus. Ezzel együtt nem alkalmazható a 4.5.7.7. Tétel, ui. a

$$\mathcal{D}_f = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

halmaz nem csillagtartomány. Valóban, ha az $u \in \mathcal{D}_f$ pont csillagpont lenne, akkor értelemszerűen $u \neq (0,0)$, így $-u \in \mathcal{D}_f$. Az origó, azaz a $(0,0)$ pont viszont rajta van az $u, -u$ pontokat összekötő szakaszon, de $(0,0) \notin \mathcal{D}_f$.

Vegyük azonban észre, hogy ha

$$\mathcal{D}_1 := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\},\ \mathcal{D}_2 := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x < 0\},$$

$$\mathcal{D}_3 := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\},\ \mathcal{D}_4 := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y < 0\},$$

akkor az $f_{|\mathcal{D}_i}$ $(i = 1,2,3,4)$ leszűkítések mindegyikének van primitív függvénye, mivel a $\mathcal{D}_i$-k már csillagtartományok. Így pl. az

$$F(x,y) := \operatorname{arctg}(y/x) \qquad ((x,y) \in \mathcal{D}_1)$$

függvény primitív függvénye az $f_{|\mathcal{D}_1}$-nek, hiszen (ld. 4.1.4. Tétel) $F \in D$, és tetszőleges $(x,y) \in D_1$ helyeken

$$\partial_1 F(x,y) = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} = f_1(x,y),$$

$$\partial_2 F(x,y) = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = f_2(x,y).$$

Tehát $\operatorname{grad} F(\xi) = f(\xi)$ $(\xi \in \mathcal{D}_1)$. Ugyanígy kapjuk a

$$G(x,y) := \operatorname{arctg}(y/x) \qquad ((x,y) \in \mathcal{D}_2)$$

függvénnyel, hogy $G \in D$, és $\operatorname{grad} G(\zeta) = f(\zeta)$ $(\zeta \in \mathcal{D}_2)$. Ha

$$H(x,y) := -\operatorname{arctg}(x/y) \qquad ((x,y) \in \mathcal{D}_3),$$

$$L(x,y) := -\operatorname{arctg}(x/y) \qquad ((x,y) \in \mathcal{D}_4),$$

akkor a fentiekkel analóg módon adódik, hogy $H, L \in D$, és

$$\operatorname{grad} H(\xi) = f(\xi) \ (\xi \in \mathcal{D}_3)\ ,\ \operatorname{grad} L(\zeta) = f(\zeta) \ (\zeta \in \mathcal{D}_4).$$

xxxv) Legyen valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén $\emptyset \neq \mathcal{G} \subset \mathbf{R}^n$. Geometriai szóhasználattal élve a $\mathcal{G}$ halmazt *görbének* nevezzük, ha van olyan $\mathbf{R}^n$-beli φ út, amelyik injektív, és $\mathcal{R}_\varphi = \mathcal{G}$. A $\mathcal{G}$ halmaz *zárt görbe,* ha létezik olyan $\varphi : [a,b] \to \mathcal{G}$ zárt út, hogy $\mathcal{R}_\varphi = \mathcal{G}$, és a $\varphi_{|[a,b)}$ leszűkítés injektív. A φ függvény (mindkét esetben) a szóban forgó görbe egy *paraméterezése.* Ha pl. $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ egy folytonosan differenciálható függvény, akkor a

$$\mathcal{G}_f := \{(x,f(x))\in\mathbf{R}^2 : x\in[a,b]\}$$

halmaz (azaz valójában az f függvény) egy $\mathbf{R}^2$-beli görbe (*függvénygörbe*). Ti. világos, hogy az előbbi értelemben a

$$\varphi(t) := (t,f(t)) \qquad (t\in[a,b])$$

leképezés a $\mathcal{G}_f$ paraméterezése.

Tegyük fel, hogy a $\varphi:[a,b]\to\mathcal{G}$ mellett a $\psi:[c,d]\to\mathcal{G}$ is paraméterezése a $\mathcal{G}$ görbének. Tehát a φ,ψ függvények kompakt intervallumon értelmezett folytonos és injektív függvények. Ezért az inverzeik is folytonosak, így pl. a

$$\psi^{-1}:\mathcal{G}\to[c,d]$$

leképezés folytonos bijekció. Következésképpen a

$$g_{\varphi\psi} := \psi^{-1}\circ\varphi : [a,b]\to[c,d]$$

egyváltozós valós függvény is (intervallumok közötti) folytonos bijekció. Jól ismert, hogy ekkor a $g_{\varphi\psi}$ szigorúan monoton (növő vagy fogyó) leképezés. Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$\varphi=\psi\circ g_{\varphi\psi}.$$

Ha pl. adottak az $u,v\in\mathbf{R}^n$ pontok és

$$\mathcal{G}_{uv} := \{u+t(v-u) : 0\le t\le 1\},$$

akkor a $\mathcal{G}_{uv}$ halmaz az előbbi értelemben egy görbe (szakasz), ui. a

$$\varphi_{uv}(t)=u+t(v-u) \qquad (0\le t\le 1)$$

(sima) út (ld. 4.7.5.) a $\mathcal{G}_{uv}$ paraméterezése. Hasonlóan, ha adottak az $u_0,...,u_s\in\mathbf{R}^n$ (valamilyen $2\le s\in\mathbf{N}$ mellett) páronként különböző pontok, és az

$$\{u_i+t(u_{i+1}-u_i) : 0<t<1\} \qquad (i=0,...,s-1)$$

halmazok („nyílt szakaszok") páronként diszjunktak, akkor a

$$\mathcal{G} := \bigcup_{i=0}^{s-1}\mathcal{G}_{u_iu_{i+1}}$$

halmaz is egy görbe (töröttvonal). Valóban, a

$$\varphi_{u_0u_1}\vee\varphi_{u_1u_2}\vee\ldots\vee\varphi_{u_{s-1}u_s}$$

út könnyen beláthatóan a $\mathcal{G}$ paraméterezése. Ha itt az $u_0, ..., u_{s-1}$ pontok páronként különbözők, és $u_s = u_0$, akkor az előbbi $\mathcal{G}$ halmaz egy sokszög.

Ugyanígy pl. a

$$\mathcal{G} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

halmaz (kör) egy zárt görbe. Legyen ehhez

$$\varphi(t) := (\cos t, \sin t) \qquad (t \in [0, 2\pi]),$$

akkor a φ zárt út, és $\mathcal{R}_\varphi = \mathcal{G}$. Továbbá

$$\varphi(t) \neq \varphi(s) \qquad (t, s \in [0, 2\pi), t \neq s),$$

azaz a $\varphi_{|[0,2\pi)}$ leszűkítés injektív. Ha ui.

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t) = (\cos s, \sin s) = \varphi(s)$$

lenne, akkor a

$$\cos t = \cos s, \ \sin t = \sin s$$

egyenlőségekből

$$\cos t - \cos s = -2 \cdot \sin((t + s)/2) \cdot \sin((t - s)/2) = 0,$$

$$\sin t - \sin s = 2 \cdot \cos((t + s)/2) \cdot \sin((t - s)/2) = 0$$

következne. Mivel $0 < |t - s|/2 < \pi$, ezért $\sin((t - s)/2) \neq 0$. Így az első egyenlőségből $\sin((t + s)/2) = 0$ adódik, azaz $t + s = 2\pi$. Ekkor viszont $\cos((t + s)/2) = -1 \neq 0$, ami ellentmond a második egyenlőségnek.

xxxvi) Valamely $\mathcal{G} \subset \mathbf{R}^n$ görbe (ld. xxxv) megjegyzés) $|\mathcal{G}|$ ívhosszát értelmezhetjük a φ paraméterezése révén a φ út ℓ_φ hosszaként (ld. 4.5.7.):

$$|\mathcal{G}| := \ell_\varphi = \sup\{\ell_\varphi(\tau) : \tau \subset [a, b] \text{ felosztás}\},$$

ahol – emlékeztetőül – a $\tau = \{t_0, ..., t_m\} \subset [a, b]$ felosztással (alkalmas $1 \leq m \in \mathbf{N}$ indexszel)

$$\ell_\varphi(\tau) := \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)\|,$$

és (ld. 4.5.7.2. Tétel)

$$\ell_\varphi = \int_a^b \|\varphi'\|.$$

Az előbbi, az ívhosszra vonatkozó „integrálformula" fizikai interpretációja ($n = 3$ esetén) a következő. Képzeljük el, hogy a $\mathcal{G}$ görbét egy mozgó pont írja le (a pont a $\mathcal{G}$ „pályán" mozog). Ha $t, t+\delta \in [a,b]$ $(\mathbf{R} \ni \delta \neq 0)$, akkor a $\varphi(t+\delta) - \varphi(t)$ különbség az illető pont elmozdulása a t és a $t+\delta$ időpont között. Következésképpen a

$$\frac{\varphi(t+\delta) - \varphi(t)}{\delta}$$

hányados az említett elmozdulás közbeni átlagsebesség. Ez annál „jobban" jellemzi a mozgást a t időpillanatban, minél kisebb (a t-hez képesti) $|\delta|$ eltelt idő. Ezért a mozgás „pillanatnyi sebessége" a matematikai modellben – feltéve, hogy $\varphi \in D\{t\}$ – a

$$\varphi'(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\varphi(t+\delta) - \varphi(t)}{\delta}$$

derivált. A pillanatnyi sebesség nagysága $\|\varphi'(t)\|$. Ha a mozgás „egyenes vonalú", azaz valamilyen $u \in \mathbf{R}^3$ kezdőponttal és $v \in \mathbf{R}^3$ végponttal

$$\mathcal{G} = \mathcal{R}_\varphi = [u,v] = \{u + t(v-u) : t \in [0,1]\}$$

(szakasz), akkor

$$|\mathcal{G}| = \int_0^1 \|\varphi'(t)\|\, dt = \|v-u\| = \|\varphi(1) - \varphi(0)\|.$$

Ezért az ívhosszra vonatkozó fenti integrálformula a Newton–Leibniz-tétel illusztrálásának is tekinthető.

Speciálisan, ha $f \in C^1[a,b]$, akkor (ld. fent) a $\mathcal{G}_f$ (függvény)görbe ívhosszára a

$$\varphi(t) := (t, f(t)) \qquad (t \in [a,b])$$

paraméterezés segítségével

$$\varphi'(t) = (1, f'(t)) \qquad (t \in [a,b])$$

alapján megkapjuk az ismert

$$|\mathcal{G}_f| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

formulát.

xxxvii) A $|\mathcal{G}|$ definíciója (ld. xxxvi) megjegyzés) látszólag függ a $\mathcal{G}$ görbe paraméterezésétől, de valójában attól független. Legyen ui. a $\psi : [c,d] \to \mathcal{G}$ út is egy paraméterezése a $\mathcal{G}$-nek, akkor ((ld. xxxv) megjegyzés) a

$$g_{\varphi\psi} : [a,b] \to [c,d]$$

bijekcióval $\varphi = \psi \circ g_{\varphi\psi}$. A $g_{\varphi\psi}$ függvény szigorúan monoton, legyen pl. növő, következésképpen a $g_{\varphi\psi}^{-1}$ inverzfüggvény is szigorúan monoton növő. Ha tehát

$$\mu = \{x_0, ..., x_m\} \subset [c, d]$$

(valamilyen $1 \leq m \in \mathbf{N}$ esetén) felosztása a $[c, d]$ intervallumnak, akkor

$$\ell_\psi(\mu) = \sum_{j=0}^{m-1} \|\psi(x_{j+1}) - \psi(x_j)\| = \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi(g_{\varphi\psi}^{-1}(x_{j+1})) - \varphi(g_{\varphi\psi}^{-1}(x_j))\| =$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)\| = \ell_\varphi(\tau),$$

ahol $t_j := g_{\varphi\psi}^{-1}(x_j)$ $(j = 0, ..., m)$ és $\tau := \{t_0, ..., t_m\}$ $(\subset [a, b])$. Ezért

$$\ell_\psi(\mu) \in \{\ell_\varphi(\tau) : \tau \subset [a, b] \text{ felosztás}\},$$

amiből

$$\sup\{\ell_\psi(\mu) : \mu \subset [c, d] \text{ felosztás}\} \leq \sup\{\ell_\varphi(\tau) : \tau \subset [a, b] \text{ felosztás}\}$$

következik. Nyilván analóg módon kapjuk az előbbi becslés fordítottját is, így a fenti két szuprémum egyenlő. Ez azt jelenti, hogy a $|\mathcal{G}|$ ívhossz független a $\mathcal{G}$ paraméterezéseitől.

Legyen pl. $u, v \in \mathbf{R}^n, u \neq v,$ és tekintsük a

$$\mathcal{G}_{uv} = \{u + t(v - u) : 0 \leq t \leq 1\}$$

szakaszt a

$$\varphi_{uv}(t) = u + t(v - u) \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

paraméterezéssel. Ekkor tetszőleges $\tau = \{t_0, ..., t_m\} \subset [0, 1]$ felosztással

$$\ell_{\varphi_{uv}}(\tau) = \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_{uv}(t_{j+1}) - \varphi_{uv}(t_j)\| = \sum_{j=0}^{m-1} \|u + t_{j+1}(v - u) - (u + t_j(v - u))\| =$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \|(t_{j+1} - t_j)(v - u)\| = \|v - u\| \cdot \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) = \|v - u\|.$$

Következésképpen

$$|\mathcal{G}_{uv}| = \sup\{\ell_{\varphi_{uv}}(\tau) : \tau \subset [0, 1] \text{ felosztás}\} = \|v - u\|.$$

xxxviii) Ha $\varphi : [a,b] \to \mathcal{G}$ a $\mathcal{G} \subset \mathbf{R}^n$ görbe paraméterezése (ld. xxxv) megjegyzés) és

$$\|\varphi'(t)\| > 0 \qquad (t \in [a,b]),$$

akkor a

$$g(x) := \int_a^x \|\varphi'(t)\|\, dt \qquad (a \le x \le b)$$

függvény (az integrálfüggvény tulajdonságai alapján) differenciálható, és

$$g'(x) = \|\varphi'(x)\| > 0 \qquad (a \le x \le b).$$

(A $g(x)$ $(a \le x \le b)$ helyettesítési érték nem más, mint a

$$\mathcal{G}_x := \{(t, \varphi(t)) \in \mathcal{G} : a \le t \le x\}$$

„ívdarab" $|\mathcal{G}_x|$ hossza, mivel a $\varphi_{|[a,x]}$ leszűkítés nyilván paraméterezése a $\mathcal{G}_x$-nek.) Így (ld. xxxvi) megjegyzés) a

$$g : [a,b] \to [0, |\mathcal{G}|]$$

függvény szigorúan monoton növő bijekció, továbbá a

$$g^{-1} : [0, |\mathcal{G}|] \to [a,b]$$

inverzfüggvény folytonosan differenciálható, és

$$\left(g^{-1}\right)' = \frac{1}{g' \circ g^{-1}} = \frac{1}{\|\varphi'\| \circ g^{-1}}.$$

Ezért a

$$\Gamma := \varphi \circ g^{-1} : [0, |\mathcal{G}|] \to \mathcal{G}$$

leképezés is a $\mathcal{G}$ paraméterezése, amit a szóban forgó görbe *természetes paraméterezésének* (más szóval *ívhossz szerinti paraméterezésének*) nevezünk. Ha $s \in [0, |\mathcal{G}|]$, és a φ függvény differenciálható a $t := g^{-1}(s)$ helyen, akkor (ld. 4.1.4. Tétel) $\Gamma \in D\{s\}$, továbbá

$$\Gamma'(s) = \frac{\varphi'(g^{-1}(s))}{g'(g^{-1}(s))} = \frac{\varphi'(t)}{g'(t)} = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|},$$

tehát $\|\Gamma'(s)\| = 1$. Következésképpen a $0 \le s \le |\mathcal{G}|$ helyeken

$$\int_0^s \|\Gamma'(z)\|\, dz = \int_0^s 1\, dz = s.$$

Jegyezzük meg, hogy ha $\varphi \in C^2[a,b]$, akkor $\Gamma \in C^2[0, |\mathcal{G}|]$, és az előbbi

$$\Gamma' = \frac{\varphi'}{\|\varphi'\|} \circ g^{-1}$$

egyenlőség alapján

$$\Gamma'' = \left(\frac{\varphi''\cdot \|\varphi'\| - \varphi'\cdot \|\varphi'\|'}{\|\varphi'\|^2}\right) \circ g^{-1}\cdot \frac{1}{\|\varphi'\| \circ g^{-1}} = \left(\frac{\varphi''\cdot \|\varphi'\| - \varphi'\cdot \|\varphi'\|'}{\|\varphi'\|^3}\right) \circ g^{-1}.$$

Itt a $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ koordinátafüggvényes felírás után

$$\|\varphi'\| = \sqrt{(\varphi_1')^2 + \ldots + (\varphi_n')^2},$$

amiből

$$\|\varphi'\|' = \frac{\varphi_1'\cdot \varphi_1'' + \ldots + \varphi_n'\cdot \varphi_n''}{\sqrt{(\varphi_1')^2 + \ldots + (\varphi_n')^2}} = \frac{\langle \varphi', \varphi''\rangle}{\|\varphi'\|}$$

következik. Tehát

$$\Gamma'' = \left(\frac{\varphi''\cdot \|\varphi'\|^2 - \langle \varphi', \varphi''\rangle\cdot \varphi'}{\|\varphi'\|^4}\right) \circ g^{-1}.$$

Mindezt figyelembe véve bármely $s \in [0, |\mathcal{G}|]$ pontban

$$\langle \Gamma'(s), \Gamma''(s)\rangle = \left\langle \frac{\varphi'}{\|\varphi'\|}, \frac{\varphi''\cdot \|\varphi'\|^2 - \langle \varphi', \varphi''\rangle\cdot \varphi'}{\|\varphi'\|^4} \right\rangle \circ g^{-1}(s) =$$

$$\frac{\langle \varphi', \varphi''\rangle\cdot \|\varphi'\|^2 - \langle \varphi', \varphi''\rangle\cdot \langle \varphi', \varphi'\rangle}{\|\varphi'\|^5} \circ g^{-1}(s) = \frac{\langle \varphi', \varphi''\rangle - \langle \varphi', \varphi''\rangle}{\|\varphi'\|^3} \circ g^{-1}(s) = 0,$$

azaz a $\Gamma'(s)$, $\Gamma''(s)$ vektorok merőlegesek egymásra.

xxxix) A fentiekben bevezetett görbefogalmat „tágítva" *görbének* nevezhetnénk mindazon $\mathcal{G} \subset \mathbf{R}^n$ halmazokat, amelyek előállnak valamilyen kompakt $[a, b]$ intervallumon értelmezett $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ függvény értékkészleteként: $\mathcal{G} = \mathcal{R}_\varphi$. Valójában ekkor helyesebb a $\mathcal{G}$ helyett a φ-t görbének nevezni. Azt mondjuk, hogy az utóbbi *rektifikálható* (van ívhossza), ha az előbbiekben (ld. xxxvi) megjegyzés) szereplő

$$\sup\{\ell_\varphi(\tau) : \tau \subset [a, b] \text{ felosztás}\}$$

véges, azaz a φ-be írt töröttvonalak (poligonok) hossza egy közös korlát alatt marad. Láttuk, hogy ez a helyzet akkor, ha a $\mathcal{G}$-nek van olyan paraméterezése, amelyik út, más szóval minden út rektifikálható. Könnyű példával illusztrálni azt, hogy általában viszont ez nem így van, azaz a most mondott értelemben nem minden görbe rektifikálható. Legyen ui.

$$f(x) := \begin{cases} x\cdot \sin(1/x) & (0 < x \leq 1) \\ 0 & (x = 0), \end{cases}$$

és
$$\varphi(t) := (t, f(t)) \qquad (t \in [0,1]).$$
Ez a φ nem rektifikálható. Valóban, adott $2 \le m \in \mathbf{N}$ esetén az
$$x_0 := 0,\ x_k := \frac{2}{(2(m-k)+1)\cdot \pi} \quad (k = 1, ..., m),\ x_{m+1} := 1$$
osztópontokkal
$$f(x_k) = \frac{2}{(2(m-k)+1)\cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{2(m-k)+1}{2} \cdot \pi\right) =$$
$$(-1)^{m-k} \cdot \frac{2}{(2(m-k)+1)\cdot \pi} \qquad (k = 1, ..., m).$$
Következésképpen a $\tau_m := \{x_0, ..., x_{m+1}\}$ felosztásra
$$\ell_\varphi(\tau_m) = \sum_{k=0}^{m} \|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)\| \ge \sum_{k=1}^{m-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \ge$$
$$\frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1}{2(m-k)-1} + \frac{1}{2(m-k)+1}\right) \ge \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{j=1}^{2m-1} \frac{1}{j} \to +\infty \qquad (m \to \infty).$$
Tehát $\lim_{m\to\infty} \ell_\varphi(\tau_m) = +\infty$, ezért
$$\sup\{\ell_\varphi(\tau) : \tau \subset [0,1] \text{ felosztás}\} = +\infty.$$

Világos, hogy $\varphi \notin D\{0\}$. Ugyanakkor a nem rektifikálhatóságon az sem „segít", ha a
$$\psi(t) := (t^2, f(t^2)) \qquad (t \in [0,1])$$
differenciálható paraméterezést tekintjük (nyilván $\mathcal{R}_\varphi = \mathcal{R}_\psi$, és a ψ-be beírt poligonok ugyanazok, mint a φ-be beírtak). Mivel
$$g(x) := f(x^2) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(1/x^2) & (0 < x \le 1) \\ 0 & (x = 0), \end{cases}$$
ezért
$$g'(0) = \lim_{y\to 0} \frac{g(y) - g(0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{g(y)}{y} = \lim_{y\to 0} \Big(y \cdot \sin(1/y^2)\Big) = 0,$$
valamint
$$g'(x) = 2x \cdot \sin(1/x^2) - \frac{2}{x} \cdot \cos(1/x^2) \qquad (0 < x \le 1).$$

„Látszik", hogy a g' nem korlátos, így a $\|\psi'\|$ sem az, tehát $\|\psi'\| \notin R[0,1]$. (Ezért „szóba sem jöhet" a 4.5.7.2. Tétel.)

A görbefogalom előbbi kiterjesztésével kapcsolatban végül az alábbiakat jegyezzük még meg. Nevezetesen, ha az utak segítségével értelmezett görbékhez képest a szóban forgó $\mathcal{G} \subset \mathbf{R}^n$ „görbe" paraméterezéséről „semmit", vagy csupán a folytonosságot tételezzük fel, akkor a szemléletünktől igencsak „elütő" $\mathcal{G}$-k is adódhatnak. Így pl. Peano mutatta meg, hogy létezik olyan $\varphi : [0,1] \to [0,1]^2$ folytonos leképezés, amelyre $\mathcal{G} := \mathcal{R}_\varphi = [0,1]^2$. (Ez a φ az ún. *Peano-görbe.*)

XL) Az utakhoz (ld. 4.5.7.) hasonlóan értelmezzük a komplex utakat is. Nevezetesen, valamilyen $[a,b]$ (kompakt) intervallum esetén a folytonosan differenciálható $\varphi : [a,b] \to \mathbf{C}$ függvényt (komplex) *sima útnak* nevezzük. Ha a $\varphi : [a,b] \to \mathbf{C}$ függvény folytonos, és megadható az $[a,b]$ intervallumnak olyan $a = x_0 < x_1 < ... < x_s = b$ felosztása (valamilyen $1 \leq s \in \mathbf{N}$ esetén), amelyre nézve a φ függvénynek valamennyi $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, ..., s-1)$ osztásintervallumra való leszűkítése (komplex) sima út, akkor azt mondjuk, hogy a φ *szakaszonként sima út.* Az egyéb elnevezések (kezdőpont, végpont, zárt út, ívhossz, tartomány, csillagtartomány) is analóg módon „vihetők át" a komplex esetre.

Legyen az $f \in \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ (komplex) függvény folytonos, és tegyük fel, hogy a φ szakaszonként sima (komplex) út $\mathcal{D}_f$-beli, azaz $\mathcal{R}_\varphi \subset \mathcal{D}_f$. Ekkor a

$$g := (f \circ \varphi) \cdot \varphi' : [a,b] \to \mathbf{C}$$

függvény szakaszonként folytonos, és ugyanígy szakaszonként folytonosak (ld. 3.2. XV) megjegyzés) a

$$g_1 := \operatorname{Re} g : [a,b] \to \mathbf{R},\ g_2 := \operatorname{Im} g : [a,b] \to \mathbf{R}$$

függvények is. Ezért Riemann-integrálhatók is, így van értelme az alábbi definíciónak:

$$\int_\varphi f := \int_a^b (f \circ \varphi) \cdot \varphi' := \int_a^b g_1 + \imath \cdot \int_a^b g_2$$

(az f függvény (komplex) *vonalintegrálja* a φ úton). Ha tehát

$$f = f_1 + \imath \cdot f_2,\ \varphi = \varphi_1 + \imath \cdot \varphi_2,$$

akkor

$$g = (f_1 \circ \varphi + \imath \cdot f_2 \circ \varphi) \cdot (\varphi_1' + \imath \cdot \varphi_2') =$$

$$(f_1 \circ \varphi) \cdot \varphi_1' - (f_2 \circ \varphi) \cdot \varphi_2' + \imath \cdot \Big((f_1 \circ \varphi) \cdot \varphi_2' + (f_2 \circ \varphi) \cdot \varphi_1' \Big),$$

azaz

$$g_1 = (f_1 \circ \varphi) \cdot \varphi_1' - (f_2 \circ \varphi) \cdot \varphi_2',\ g_2 = (f_1 \circ \varphi) \cdot \varphi_2' + (f_2 \circ \varphi) \cdot \varphi_1'.$$

Következésképpen

$$\int_\varphi f = \int_a^b f(\varphi(t))\cdot \varphi'(t)\,dt =$$

$$\int_a^b \Big(f_1(\varphi(t))\cdot \varphi_1'(t) - f_2(\varphi(t))\cdot \varphi_2'(t)\Big)\,dt + \imath\cdot \int_a^b \Big(f_1(\varphi(t))\cdot \varphi_2'(t) + f_2(\varphi(t))\cdot \varphi_1'(t)\Big)\,dt.$$

Világos, hogy a

$$\Phi_\varphi := (\varphi_1, \varphi_2) : [a,b] \to \mathbf{R}^2$$

függvény szakaszonként sima út az $\mathbf{R}^2$-ben. Hasonlóan (a $\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2$ azonosítást figyelembe véve) az

$$F := (f_1, -f_2) \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ G := (f_2, f_1) \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

függvények is folytonos vektor-vektor függvények. Az előbbiek szerint tehát

$$\int_\varphi f = \int_a^b \langle F(\Phi_\varphi(t)), \Phi_\varphi'(t)\rangle\,dt + \imath\cdot \int_a^b \langle G(\Phi_\varphi(t)), \Phi_\varphi'(t)\rangle\,dt =$$

$$\int_{\Phi_\varphi} (f_1, -f_2) + \imath\cdot \int_{\Phi_\varphi} (f_2, f_1).$$

Ha $\Psi = \Psi_1 + \imath\cdot \Psi_2$ primitív függvénye az $f = f_1 + \imath\cdot f_2$ függvénynek, azaz $\Psi \in D$, és (ld. Cauchy–Riemann-egyenlőségek (3.2. xv) megjegyzés))

$$\Psi' = \partial_1\Psi_1 + \imath\cdot \partial_1\Psi_2 = \partial_2\Psi_2 - \imath\cdot \partial_2\Psi_1 = f_1 + \imath\cdot f_2,$$

akkor

$$\partial_1\Psi_1 = f_1 = \partial_2\Psi_2,\ \partial_1\Psi_2 = f_2 = -\partial_2\Psi_1.$$

Következésképpen

$$\Psi_1' = \operatorname{grad}\Psi_1 = (f_1, -f_2),\ \Psi_2' = \operatorname{grad}\Psi_2 = (f_2, f_1),$$

más szóval az

$$(f_1, -f_2),\ (f_2, f_1)$$

(vektor)függvények mindegyikének van primitív függvénye, és ezek rendre Ψ_1, Ψ_2. Alkalmazható ezért a „valós" vonalintegrálokra vonatkozó Newton–Leibniz-formula (ld. 4.5.7.5. Tétel), miszerint

$$\int_{\Phi_\varphi} (f_1, -f_2) = \Psi_1(\varphi_1(b), \varphi_2(b)) - \Psi_1(\varphi_1(a), \varphi_2(a)),$$

$$\int_{\Phi_\varphi} (f_2, f_1) = \Psi_2(\varphi_1(b), \varphi_2(b)) - \Psi_2(\varphi_1(a), \varphi_2(a)).$$

Így

$$\int_\varphi f = \Psi_1(\Phi_\varphi(b)) - \Psi_1(\Phi_\varphi(a)) + \imath\cdot\Big(\Psi_2(\Phi_\varphi(b)) - \Psi_2(\Phi_\varphi(a))\Big) =$$

$$\Psi_1(\Phi_\varphi(b)) + \imath\Psi_2(\Phi_\varphi(b)) - \Big(\Psi_1(\Phi_\varphi(a)) + \imath\cdot\Psi_2(\Phi_\varphi(a))\Big) = \Psi(b) - \Psi(a),$$

ami nem más, mint a Newton–Leibniz-formula a komplex vonalintegrálokra.

Az előbb már idézett Cauchy–Riemann-egyenlőségeket figyelembe véve könnyen adódik, hogy ha $f \in D$, akkor az

$$(f_1, -f_2) \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ (f_2, f_1) \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

függvények is differenciálhatóak, és az $(f_1, -f_2)'$, $(f_2, f_1)'$ Jacobi-mátrix(függvények) szimmetrikusak:

$$(f_1, -f_2)' = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ -\partial_1 f_2 & -\partial_2 f_2 \end{bmatrix},\ (f_2, f_1)' = \begin{bmatrix} \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \\ \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \end{bmatrix}.$$

Ha még az f' deriváltfüggvény folytonos is, azaz az f függvény folytonosan differenciálható, akkor ugyanez igaz az $(f_1, -f_2), (f_2, f_1)$ függvényekre is. Sőt, ha $\mathcal{D}_f$ csillagtartomány, akkor az

$$(f_1, -f_2),\ (f_2, f_1) \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

vektor-vektor függvények csillagtartományon értelmezett, folytonosan differenciálható függvények. Alkalmazhatók ezért a 4.5.7.4., 4.5.7.7. Tételek: ha a $\mathcal{D}_f$-beli φ út zárt, akkor

$$\int_{\Phi_\varphi} (f_1, -f_2) = \int_{\Phi_\varphi} (f_2, f_1) = 0.$$

Az $\int_\varphi f$ komplex vonalintegrál fenti előállítását figyelembe véve ezért $\int_\varphi f = 0$ is igaz.

A részletek mellőzésével csupán megjegyezzük, hogy az így kapott „komplex" tétel messzemenően általánosítható (ez az ún. *Cauchy-alaptétel*), amely joggal tekinthető a komplex függvényekkel kapcsolatos vizsgálódások kiindulópontjának. A most említett alaptétel az előbb „levezetett" speciális esetéhez képest kettős értelemben jelent általánosítást: elhagyható a derivált folytonosságára vonatkozó feltétel, továbbá a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány alakját illetően a csillagtartománynál jóval általánosabb szerkezetű halmazok is megengedhetők (ezek az ún. *egyszeresen összefüggő tartományok*).

5. fejezet

Többváltozós függvények Riemann-integrálja

5.1. A határozott integrál fogalma

A továbbiakban legyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ egy adott természetes szám. Ekkor $\mathbf{R}^n$-beli *intervallumon* az

$$I := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

Descartes-szorzatot értjük, ahol $a_i,\, b_i \in \mathbf{R}$, $a_i < b_i$ $(i = 1, ..., n)$. Világos, hogy $n = 1$ esetén a „szokásos" (korlátos és zárt) $\mathbf{R}$-beli intervallumot, $n = 2$-re a koordinátasíkon a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapot, $n = 3$-ra pedig a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben a koordinátasíkokkal párhuzamos oldallapú téglatestet kapunk. Az is könnyen belátható, hogy az $\mathbf{R}^n$-ben a $\|.\|_p$ normák közül $(1 \leq p \leq +\infty$, ld. 1.2. v) megjegyzés) bármelyiket is vezetve be, az I halmaz korlátos és zárt, azaz kompakt, amelynek az $\operatorname{int} I$ belseje (ld. 1.7.):

$$\operatorname{int} I = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$$

$\mathbf{R}^n$-beli *nyílt intervallum.* A

$$d_I := \sup\{\|x - y\|_2 : x, y \in I\} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)^2}$$

szám az I intervallum *átmérője,*

$$|\operatorname{int} I| := |I| := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

pedig az $\operatorname{int} I$, ill. az I *mértéke.* Nyilván $|I| \leq d_I^n$.

Tehát $n = 1$ esetén
$$|I| = b_1 - a_1$$
az $I \subset \mathbf{R}$ intervallum *hossza,* $n = 2$-re
$$|I| = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$$
az $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbf{R}^2$ téglalap *területe,* ha pedig $n = 3,$ akkor
$$|I| = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3)$$
az $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbf{R}^3$ téglatest *térfogata.*

Emlékeztetünk arra, hogy egy $[a, b] \subset \mathbf{R}$ kompakt intervallum felosztásán olyan véges $\tau \subset [a, b]$ halmazt értettünk, amelyre $a, b \in \tau$. Továbbá, ha valamilyen $k \in \mathbf{N}$ mellett $\tau = \{x_0, ..., x_k\},$ akkor mindig azzal a formai feltételezéssel éltünk, hogy
$$a = x_0 < x_1 < ... < x_k = b.$$
Ha az előbbi τ felbontás esetén
$$I_j := [x_j, x_{j+1}] \qquad (j = 0, ..., k - 1),$$
akkor az
$$\mathcal{F}(\tau) := \{I_j : j = 0, ..., k - 1\}$$
halmaz elemei a τ felosztás által meghatározott ún. osztásintervallumok.

Legyen ezek után
$$\tau_i = \{x_{i0}, ..., x_{ik_i}\} \subset [a_i, b_i] \qquad (k_i \in \mathbf{N},\ i = 1, ..., n)$$
egy-egy felosztása a szóban forgó $[a_i, b_i]$ intervallumoknak. Ekkor a
$$\tau := \tau_1 \times \ldots \times \tau_n \subset I$$
halmazt az I intervallum *felosztásának* nevezzük. Az
$$I_{j_1} \times \ldots \times I_{j_n} \qquad (I_{j_s} \in \mathcal{F}(\tau_s),\ s = 1, ..., n)$$
(a fenti értelemben nyilvánvalóan) intervallumok a τ felosztás által meghatározott *osztásintervallumok.* Ezek halmazára is (az $n = 1$ esettel analóg módon) az $\mathcal{F}(\tau)$ jelölést fogjuk használni. A $\tau \subset I$ felosztás *finomsága* a
$$\delta_\tau := \sup\{d_J : J \in \mathcal{F}(\tau)\}$$

nemnegatív szám. Világos, hogy az $\operatorname{int} J \quad (J \in \mathcal{F}(\tau))$ halmazok (az osztásintervallumok belsejei) páronként diszjunktak, és

$$|I| = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} |J|.$$

Azt mondjuk, hogy a $\tau \subset I$ felosztás *finomítása* a $\mu \subset I$ felosztásnak, ha $\mu \subset \tau$. Ha tehát

$$\mu = \mu_1 \times \ldots \times \mu_n, \; \tau = \tau_1 \times \ldots \times \tau_n,$$

akkor $\mu_k \subset \tau_k \quad (k = 1, ..., n)$. Továbbá bármely $J \in \mathcal{F}(\mu)$ osztásintervallumhoz létezik olyan véges $\mathcal{A}_J \subset \mathcal{F}(\tau)$ halmaz (azaz véges sok, a τ által meghatározott osztásintervallum), amellyel

$$J = \bigcup_{L \in \mathcal{A}_J} L,$$

és az itt szereplő L intervallumokra $\operatorname{int} L \cap \operatorname{int} \tilde{L} = \emptyset \quad (L,\, \tilde{L} \in \mathcal{A}_J,\; L \neq \tilde{L})$. Következésképpen

$$|J| = \sum_{L \in \mathcal{A}_J} |L|.$$

A fenti $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallum és egy $f : I \to \mathbf{R}$ korlátos függvény esetén tetszőleges $\tau \subset I$ felosztást véve definiáljuk az $m_J,\, M_J \in \mathbf{R} \quad (J \in \mathcal{F}(\tau))$ számokat a következőképpen:

$$m_J := m_J(f) := \inf\{f(x) : x \in J\}, \; M_j := M_J(f) := \sup\{f(x) : x \in J\}.$$

Ekkor

$$s(f, \tau) := \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} m_J \cdot |J|$$

az f függvénynek a τ felosztáshoz tartozó *alsó összege,*

$$S(f, \tau) := \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} M_J \cdot |J|$$

pedig az f függvénynek a τ felosztáshoz tartozó *felső összege.* Világos, hogy bármely $\tau \subset I$ felosztás esetén

$$s(f, \tau) \leq S(f, \tau).$$

5.1.1. Tétel. *Legyen adott az $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallumon az $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ korlátos függvény. Ekkor tetszőleges τ, $\mu \subset I$ felosztások esetén*

1^o $s(f, \tau) \leq S(f, \mu)$;

2^o *ha a τ finomabb a μ-nél, akkor $s(f, \mu) \leq s(f, \tau)$ és $S(f, \mu) \geq S(f, \tau)$.*

Bizonyítás. Legyen $\mu,\,\tau \subset I$ egy-egy felosztás, $\mu \subset \tau$. Ekkor bármelyik $J \in \mathcal{F}(\mu)$ osztásintervallumhoz (ld. fent) megadható az $\mathcal{A}_J \subset \mathcal{F}(\tau)$ véges halmaz úgy, hogy

$$J = \bigcup_{L\in\mathcal{A}_\mathcal{J}} L,$$

$\operatorname{int} L \cap \operatorname{int} \tilde{L} = \emptyset \quad (L,\, \tilde{L} \in \mathcal{A}_J,\ L \neq \tilde{L})$, és ekkor $|J| = \sum_{L\in\mathcal{A}_J} |L|$. Az infimum, ill. a szuprémum tulajdonságai alapján azt mondhatjuk, hogy

$$m_J \leq m_L,\ M_J \geq M_L \qquad (L \in \mathcal{A}_J).$$

Ezért

$$m_J\cdot |J| = \sum_{L\in\mathcal{A}_J} m_J\cdot |L| \leq \sum_{L\in\mathcal{A}_\mathcal{J}} m_L\cdot |L|,$$

$$M_J\cdot |J| = \sum_{L\in\mathcal{A}_J} M_J\cdot |L| \geq \sum_{L\in\mathcal{A}_\mathcal{J}} M_L\cdot |L|,$$

amiből

$$\mathcal{F}(\tau) = \bigcup_{J\in\mathcal{F}(\mu)} \mathcal{A}_J$$

alapján

$$s(f,\mu) = \sum_{J\in\mathcal{F}(\mu)} m_J\cdot |J| \leq \sum_{J\in\mathcal{F}(\mu)} \sum_{L\in\mathcal{A}_J} m_L\cdot |L| = \sum_{K\in\mathcal{F}(\tau)} m_K\cdot |K| = s(f,\tau),$$

$$S(f,\mu) = \sum_{J\in\mathcal{F}(\mu)} M_J\cdot |J| \geq \sum_{J\in\mathcal{F}(\mu)} \sum_{L\in\mathcal{A}_J} M_L\cdot |L| = \sum_{K\in\mathcal{F}(\tau)} M_K\cdot |K| = S(f,\tau).$$

Ezzel a 2^o állítást beláttuk. Legyenek most $\tau, \mu \subset I$ tetszőleges felosztások, ill.

$$\gamma := \tau \cup \mu.$$

Világos, hogy a γ halmaz is felosztása az I-nek, és mind a τ-nak, mind pedig a μ-nek finomítása: $\tau \subset \gamma$, ill. $\mu \subset \gamma$. Így az előzőek szerint

$$s(f,\tau) \leq s(f,\gamma) \leq S(f,\gamma) \leq S(f,\mu),$$

ami az 1^o állítás bizonyítását jelenti. ■

Jelöljük az I intervallum felosztásainak a halmazát $\mathcal{F}_I$-vel. Az előbbi tétel alapján tehát (az abban szereplő f függvényre) az

$$\{s(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_I\}$$

halmaz felülről korlátos, és minden $\mu \in \mathcal{F}_I$ felosztásra az utóbbi halmaznak az $S(f,\mu)$ felső összeg egy felső korlátja. Ezért

$$I_*(f) := \sup \{s(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_I\} \le S(f,\mu) < +\infty.$$

Hasonlóan, az

$$\{S(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_I\}$$

halmaz alulról korlátos, aminek minden $\mu \in \mathcal{F}_I$ felosztásra az $s(f,\mu)$ alsó összeg egy alsó korlátja. Így

$$I^*(f) := \inf \{S(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_I\} \ge s(f,\mu) > -\infty.$$

Következésképpen $I_*(f)$, $I^*(f) \in \mathbf{R}$, és

$$I_*(f) \le I^*(f).$$

Az $I_*(f)$ számot az f függvény *Darboux-féle alsó integráljának,* az $I^*(f)$-et pedig az f függvény *Darboux-féle felső integráljának* nevezzük. A fentiek szerint tetszőleges $\tau, \mu \in \mathcal{F}_I$ felosztásokra

$$s(f,\tau) \le I_*(f) \le I^*(f) \le S(f,\mu).$$

Azt mondjuk, hogy az f függvény *Riemann-integrálható,* ha $I_*(f) = I^*(f)$. Ekkor az

$$\int_I f := \int_I f(x)\,dx := \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,...,x_n)\,dx_1 ... dx_n := I_*(f) = I^*(f)$$

számot az f függvény *Riemann-integráljának* (vagy más szóval *határozott integráljának*) nevezzük.

Az előbbiekben értelmezett Riemann-integrálható függvények halmazát az $R(I)$ szimbólummal fogjuk jelölni. Ha pl. valamilyen $c \in \mathbf{R}$ konstanssal

$$f(x) := c \qquad (x \in I),$$

akkor nyilván minden $\tau \in \mathcal{F}_I$ felosztásra

$$m_J = M_J = c \qquad (J \in \mathcal{F}(\tau)).$$

Így

$$s(f,\tau) = S(f,\tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} c \cdot |J| = c \cdot |I|,$$

ezért $I_*(f) = I^*(I) = c \cdot |I|$. Következésképpen $f \in R(I)$, és $\int_I f = c \cdot |I|$.

Legyen az $f : I \to \mathbf{R}$ függvény korlátos, $\tau \in \mathcal{F}_I$. Az

$$\omega(f,\tau) := S(f,\tau) - s(f,\tau)$$

számot az f függvény τ által meghatározott *oszcillációs összegének* nevezzük. Világos, hogy

$$I^*(f) - I_*(f) \leq \omega(f, \tau).$$

Az alsó, felső összegek definíciója szerint

$$\omega(f, \tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} (M_J - m_J) \cdot |J|,$$

ahol a J intervallumon vett $M_J - m_J$ *oszcillációról* a következőt mondhatjuk:

$$M_J - m_J = \sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in J\} = \sup\{f(x) - f(t) : x, t \in J\}.$$

Valóban,

$$M_J = \sup\{f(u) : u \in J\}, \ m_J = \inf\{f(v) : v \in J\}$$

miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén egy-egy alkalmas $u, v \in J$ helyen

$$f(u) > M_J - \varepsilon, \ f(v) < m_J + \varepsilon,$$

így $f(u) - f(v) > M_J - m_J - 2\varepsilon$. Ha tehát

$$\alpha := \sup\{f(x) - f(t) : x, t \in J\},$$

akkor $\alpha > M_J - m_J - 2\varepsilon$. Mivel itt $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ezért $\alpha \geq M_J - m_J$. Ugyanakkor

$$f(x) \leq M_J, \ f(t) \geq m_J \qquad (x, t \in J),$$

amiből $f(x) - f(t) \leq M_J - m_J$ következik. Innen világos, hogy $\alpha \leq M_J - m_J$ is igaz, más szóval $\alpha = M_J - m_J$. Azt kell már csak megjegyeznünk, hogy a

$$\sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in J\} = \sup\{f(x) - f(t) : x, t \in J\}$$

egyenlőség triviálisan teljesül, hiszen tetszőleges $x, t \in J$ helyeken vagy az

$$|f(x) - f(t)| = f(x) - f(t),$$

vagy pedig az

$$|f(x) - f(t)| = f(t) - f(x)$$

egyenlőség áll fenn.

A következő állításban az oszcillációs összegek segítségével szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy egy korlátos $f : I \to \mathbf{R}$ függvény Riemann-integrálható legyen.

5.1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $f : I \to \mathbf{R}$ *függvény korlátos. Ekkor a következő ekvivalencia igaz:* $f \in R(I)$ *akkor és csak akkor igaz, ha tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *számhoz van olyan* $\tau \in \mathcal{F}_I$ *felosztás, amellyel* $\omega(f,\tau) < \varepsilon$.

Bizonyítás. Ha $f \in R(I)$, akkor $I_*(f) = I^*(f)$. Figyelembe véve a Darboux-féle alsó, ill. felső integrál definícióját azt mondhatjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén egy-egy alkalmas $\nu, \mu \in \mathcal{F}_I$ felosztással

$$s(f,\nu) > I_*(f) - \varepsilon/2, \; S(f,\mu) < I^*(f) + \varepsilon/2.$$

Legyen $\tau := \nu \cup \mu$, ekkor (ld. 5.1.1. Tétel)

$$s(f,\tau) \geq s(f,\nu) > I_*(f) - \varepsilon/2, \; S(f,\tau) \leq S(f,\mu) < I^*(f) + \varepsilon/2.$$

Innen az következik, hogy

$$\omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) < I^*(f) - I_*(f) + \varepsilon = \varepsilon,$$

hiszen azt tettük fel, hogy $f \in R(I)$, azaz $I^*(f) = I_*(f)$.

Most induljunk ki abból, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\tau \in \mathcal{F}_I$ felosztás, amellyel $\omega(f,\tau) < \varepsilon$. Mivel

$$0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq \omega(f,\tau) < \varepsilon,$$

ezért csak $I^*(f) - I_*(f) = 0$, azaz $I^*(f) = I_*(f)$ lehetséges. Ez éppen azt jelenti, hogy $f \in R(I)$. ∎

Az ún. közelítő összegek fogalmának az értelmezéséhez induljunk ki ismét egy korlátos $f : I \to \mathbf{R}$ függvényből, és tekintsük a $\tau \in \mathcal{F}_I$ felosztást. Ekkor tetszőleges $y_J \in J$ $(J \in \mathcal{F}(\tau))$ választással legyen

$$\sigma(f,\tau,y) := \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} f(y_J) \cdot |J|,$$

ahol y az alábbi „vektor":

$$y := (y_J, J \in \mathcal{F}(\tau)).$$

Ez utóbbi $\sigma(f,\tau,y)$ összeget az f függvény (integrál) *közelítő összegének* nevezzük. Legyen továbbá

$$\hat{\tau} := \{(y_J, J \in \mathcal{F}(\tau)) : \; y_J \in J \;\; (J \in \mathcal{F}(\tau))\}.$$

Nyilvánvaló, hogy bármelyik $\tau \in \mathcal{F}_I$ felosztásra

$$s(f,\tau) \leq \sigma(f,\tau,y) \leq S(f,\tau) \qquad (y \in \hat{\tau}).$$

A szuprémum és az infimum tulajdonságai alapján könnyen belátható ugyanakkor, hogy minden $\tau \in \mathcal{F}_I$ és $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $u \in \hat{\tau}$, hogy

$$\sigma(f, \tau, u) < s(f, \tau) + \varepsilon,$$

ill. van olyan $z \in \hat{\tau}$, amellyel

$$\sigma(f, \tau, z) > S(f, \tau) - \varepsilon.$$

5.1.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $f : I \to \mathbf{R}$ *függvény korlátos. Ekkor:*

a) *tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *számhoz van olyan* $\delta > 0$, *hogy*

$$|s(f, \tau) - I_*(f)| < \varepsilon, \ |S(f, \tau) - I^*(f)| < \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_I, \ \delta_\tau < \delta);$$

b) *ha* $q \in \mathbf{R}$, *akkor az* $f \in R(I)$, $\int_I f = q$ *kijelentés azzal ekvivalens, hogy bármilyen* $\varepsilon > 0$ *számhoz létezik olyan* $\delta > 0$, *amellyel*

$$|\sigma(f, \tau, y) - q| < \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_I, \ \delta_\tau < \delta, \ y \in \hat{\tau}).$$

Bizonyítás. Legyen $C > 0$ olyan szám, hogy

$$|f(x)| \leq C \qquad (x \in I).$$

Tegyük fel, hogy $\mu, \tau \in \mathcal{F}_I$ egy-egy felosztása az I-nek, és legyen

$$\gamma := \tau \cup \mu \in \mathcal{F}_I.$$

Bontsuk fel az $s(f, \tau)$-t definiáló összeget az alábbi módon:

$$s(f, \tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} m_J \cdot |J| = \sum_{J \in A} m_J \cdot |J| + \sum_{J \in B} m_J \cdot |J|,$$

ahol A azoknak a $J \in \mathcal{F}(\tau)$ intervallumoknak a halmaza, amelyekre $J \cap \mu = \emptyset$, ill. $B := \mathcal{F}(\tau) \setminus A$. Ekkor $J \in \mathcal{F}(\gamma) \quad (J \in A)$, ill. a

$$B_K := \{L \in \mathcal{F}(\gamma) : L \subset K\} \qquad (K \in B)$$

halmazokkal

$$\bigcup_{L \in B_K} L = K \qquad (K \in B).$$

Következésképpen

$$|s(f, \tau) - s(f, \gamma)| = s(f, \gamma) - s(f, \tau) =$$

$$= \sum_{K\in B} \sum_{L\in B_K} m_L\cdot |L| - \sum_{K\in B} m_K\cdot |K| =$$

$$\sum_{K\in B} \sum_{L\in B_K} m_L\cdot |L| - \sum_{K\in B} m_K\cdot \sum_{L\in B_K} |L| =$$

$$\sum_{K\in B} \sum_{L\in B_K} (m_L - m_K)\cdot |L| \leq 2C\cdot \sum_{K\in B} \sum_{L\in B_K} \cdot |L| =$$

$$2C\cdot \sum_{K\in B} |K| \leq 2CN_\mu\cdot \delta_\tau^n,$$

hiszen a B számossága nyilván nem lehet nagyobb az $\mathcal{F}(\mu)$ halmaz N_μ-vel jelölt számosságánál.

Tehát

$$s(f,\tau) \geq s(f,\gamma) - 2CN_\mu\cdot \delta_\tau^n.$$

Analóg módon kapjuk (a fenti gondolatmenet értelemszerű módosításával), hogy

$$S(f,\tau) \leq S(f,\gamma) + 2CN_\mu\cdot \delta_\tau^n.$$

Mivel

$$I_*(f) = \sup\{s(f,\nu) : \nu \in \mathcal{F}_I\},\ I^*(f) = \inf\{S(f,\nu) : \nu \in \mathcal{F}_I\},$$

ezért bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén a fenti $\mu \in \mathcal{F}_I$ felosztás megválasztható úgy, hogy

$$I_*(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\mu) \leq s(f,\gamma) \leq S(f,\gamma) \leq S(f,\mu) < I^*(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen ezzel a μ-vel a $\tau \in \mathcal{F}_I$ felosztás olyan „finom", amelyre még az is igaz, hogy $2CN_\mu\cdot \delta_\tau^n < \varepsilon/2$, azaz

$$\delta_\tau < \delta := \left(\frac{\varepsilon}{4CN_\mu}\right)^{1/n}.$$

Ekkor

$$I_*(f) \geq s(f,\tau) > s(f,\gamma) - \frac{\varepsilon}{2} > I_*(f) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = I_*(f) - \varepsilon.$$

Így

$$I_*(f) \geq s(f,\tau) > I_*(f) - \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_I,\ \delta_\tau < \delta).$$

Ugyanezzel a meggondolással kapjuk az

$$I^*(f) \leq S(f,\tau) < I^*(f) + \varepsilon \qquad (\tau \in \mathcal{F}_I,\ \delta_\tau < \delta)$$

egyenlőtlenségeket, amivel a tétel a)-beli állítását beláttuk.

Ha most $f \in R(I)$ és $q := \int_I f$, akkor $I_*(f) = I^*(f) = \int_I f$, ill. a tétel a) része alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett egy alkalmas $\delta > 0$ számmal

$$\left| s(f,\tau) - \int_I f \right| = |s(f,\tau) - I_*(f)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|S(f,\tau)-\int_I f\right| = |S(f,\tau)-I^*(f)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\tau\in\mathcal{F}_I,\, \delta_\tau<\delta).$$

Ugyanakkor

$$s(f,\nu)\le\sigma(f,\nu,y)\le S(f,\nu) \qquad (\nu\in\mathcal{F}_I,\, y\in\hat{\nu})$$

és

$$s(f,\nu)\le\int_I f\le S(f,\nu) \qquad (\nu\in\mathcal{F}_I),$$

ezért

$$|\sigma(f,\tau,y)-q| = \left|\sigma(f,\tau,y)-\int_I f\right| \le S(f,\tau)-s(f,\tau)\le$$

$$\left|S(f,\tau)-\int_I f\right| + \left|s(f,\tau)-\int_I f\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \qquad (\tau\in\mathcal{F}_I,\, \delta_\tau<\delta,\, y\in\hat{\tau}).$$

„Fordítva", most azt tegyük fel b)-ben, hogy a korlátos $f : I \to \mathbf{R}$ függvényről a következőt tudjuk: van olyan $q\in\mathbf{R}$, hogy bármely $\varepsilon>0$ esetén alkalmas $\delta>0$ számmal tetszőleges $\tau\in\mathcal{F}_I$, $\delta_\tau<\delta$ felosztásra és $y\in\hat{\tau}$ vektorra $|\sigma(f,\tau,y)-q|<\varepsilon$, azaz

$$q+\varepsilon>\sigma(f,\tau,y)>q-\varepsilon.$$

Speciálisan (a tétel megfogalmazása előtt mondottakat is figyelembe véve) az is igaz, hogy

$$q+\varepsilon>s(f,\tau)>q-\varepsilon \quad \text{és} \quad q-\varepsilon<S(f,\tau)>q+\varepsilon \qquad (\tau\in\mathcal{F}_I,\, \delta_\tau<\delta),$$

így

$$\omega(f,\tau)=S(f,\tau)-s(f,\tau)<2\varepsilon \qquad (\tau\in\mathcal{F}_I,\, \delta_\tau<\delta).$$

Ez azt jelenti (ld. 5.1.2. Tétel), hogy $f\in R(I)$. Ezért (pl.) $\int_I f = I_*(f)$ miatt az előbbi $\varepsilon>0$ számhoz a tétel a) állítása alapján alkalmas $\tilde{\delta}>0$ mellett

$$\left|s(f,\tau)-\int_I f\right|<\varepsilon \qquad (\tau\in\mathcal{F}_I,\, \delta_\tau<\tilde{\delta}).$$

Ha tehát $\tau\in\mathcal{F}_I$, $\delta_\tau<\min\{\delta,\tilde{\delta}\}$, akkor

$$\left|q-\int_I f\right| \le |q-s(f,\tau)| + \left|s(f,\tau)-\int_I f\right| < 2\varepsilon.$$

Az itt szereplő $\varepsilon>0$ tetszőleges lévén, az következik, hogy $q-\int_I f=0$, azaz $q=\int_I f$. ■

A „többváltozós" Riemann-integrál is rendelkezik az „egydimenziós" esetben megismert monotonitási tulajdonsággal. Ezt fejezi ki az alábbi tétel.

5.1.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f \in R(I)$. *Ekkor:*

a) $|f| \in R(I)$, *és* $|\int_I f| \le \int_I |f|$;

b) *ha* $g \in R(I)$ *és* $f(x) \le g(x) \quad (x \in I)$, *akkor* $\int_I f \le \int_I g$;

c) *ha* $f \in R(I)$, *és valamilyen* $0 \le c \in \mathbf{R}$ *számmal* $|f(x)| \le c \quad (x \in I)$, *akkor*

$$\left|\int_I f\right| \le c \cdot |I|.$$

Bizonyítás. Az 5.1.2. Tétel miatt bármely $\varepsilon > 0$ mellett van olyan $\tau \in \mathcal{F}_I$, amelyre $\omega(f,\tau) < \varepsilon$. Mivel tetszőleges $I \in \mathcal{F}(\tau)$ esetén

$$\sup\left\{\Big||f(x)| - |f(t)|\Big| : x,t \in I\right\} \le \sup\{|f(x) - f(t)| : x,t \in I\},$$

ezért

$$\omega(|f|,\tau) = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \sup\{||f(x)| - |f(t)|| : x,t \in I\} \cdot |I| \le$$

$$\sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \sup\{|f(x) - f(t)| : x,t \in I\} \cdot |I| = \omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Tehát (ld. 5.1.2. Tétel) $|f| \in R(I)$. Továbbá $-f \in R(I)$, hiszen nyilvánvalóan

$$\omega(-f,\tau) = \omega(f,\tau) < \varepsilon,$$

így $(-f)$-re is alkalmazható az 5.1.2. Tétel. Gondoljuk meg, hogy

$$\int_I (-f) = -\int_I f.$$

Valóban, bármely $\mu \in \mathcal{F}_I$ felosztásra

$$s(-f,\mu) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} \inf\{-f(x) : x \in J\} \cdot |J| =$$

$$-\sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} \sup\{f(x) : x \in J\} \cdot |J| = -S(f,\tau),$$

következésképpen

$$\int_I (-f) = \sup\{s(-f,\mu) : \mu \in \mathcal{F}_I\} = \sup\{-S(f,\mu) : \mu \in \mathcal{F}_I\} =$$

$$-\inf\{S(f,\mu) : \mu \in \mathcal{F}_I\} = -\int_I f.$$

Ugyanakkor

$$-f,\, f \leq |f|,$$

amiből az előbbiek és b) alapján

$$\pm \int_I f \leq \int_I |f|,$$

azaz $|\int_I f| \leq \int_I |f|$ adódik.

A b) állítás bizonyításához legyen $\mu \in \mathcal{F}_I$, ekkor

$$s(f,\mu) = \sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \inf\{f(x) : x \in I\} \cdot |I| \leq$$

$$\sum_{I \in \mathcal{F}(\tau)} \inf\{g(x) : x \in I\} \cdot |I| = s(g,\mu) \leq I_*(g) = \int_I g.$$

Következésképpen

$$\int_I f = I_*(f) = \sup\{s(f,\mu) : \mu \in \mathcal{F}_I\} \leq \int_I g.$$

Mivel a c)-beli feltételek mellett a $g(x) := c \quad (x \in I)$ szereposztással nyilván $|f| \leq g$, ezért az előbbiek szerint (az integrál fogalmának a bevezetésekor mondott példára utalva)

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f| \leq \int_I g = c \cdot |I|.$$

■

Ha tehát $0 \leq g \in R(I)$, akkor $\int_I g \geq 0$. Ekkor ui. az előző tétel b) állításában az $f \equiv 0$ függvényre nyilván $f \in R(I)$, és $\int_I f = 0$.

A következőkben a Riemann-integrál *intervallum szerinti additivitását* vizsgáljuk. Legyen ehhez adott a bevezetőben említett, az $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbf{R}$ függvény. Ha $J \subset I$ is intervallum (az I részintervalluma), akkor tekintsük az

$$f_J(x) := f(x) \qquad (x \in J)$$

hozzárendeléssel definiált $f_J : J \to \mathbf{R}$ függvényt. Más szóval legyen $f_J := f_{|J}$. Ha $f_J \in R(J)$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény a J *intervallumon* (Riemann szerint) *integrálható*, és ezt röviden így jelöljük: $f \in R(J)$. Állapodjunk meg még a következő jelölésben: ha $f \in R(J)$, akkor

$$\int_J f := \int_J f_J$$

az f függvénynek a J-n vett *integrálja.*

Az $I \subset \mathbf{R}^n$ *intervallumokra való felbontásán* olyan $\{J_k : k = 1, ..., N\}$ halmazrendszert értünk, amelyre az alábbiak igazak:

- $0 < N \in \mathbf{N}$, és minden $k = 1, ..., N$ esetén $J_k \subset I$ intervallum;
- $(\mathrm{int}\, J_k) \cap (\mathrm{int}\, J_l) = \emptyset \quad (k \neq l = 1, ..., N)$;
- $I = \bigcup_{k=1}^{N} J_k$.

Ha pl. $\tau \in \mathcal{F}_I$, akkor az $\mathcal{F}(\tau)$ halmaz elemei (az osztásintervallumok) nyilván az I egy intervallumokra való felbontását adják.

5.1.5. Tétel. *Legyen* $f \in R(I)$. *Ekkor:*

a) *tetszőleges* $J \subset I$ *részintervallum esetén* $f \in R(J)$;

b) *az* I *intervallum bármilyen* $\{J_k : k = 1, ..., N\}$ *intervallumokra való felbontására*

$$\int_I f = \sum_{k=1}^{N} \int_{J_k} f.$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

intervallumnak valamilyen

$$J = [c_1, d_1] \times \ldots \times [c_n, d_n]$$

részintervallumát alkalmas

$$[c_i, d_i] \subset [a_i, b_i] \qquad (i = 1, ..., n)$$

intervallumokkal. Az 5.1.2. Tétel miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan

$$\tau = \tau_1 \times \ldots \times \tau_n \in \mathcal{F}_I$$

felosztás, amellyel $\omega(f, \tau) < \varepsilon$. Legyen

$$\mu_i := \tau_i \cup \{c_i, d_i\} \qquad (i = 1, ..., n),$$

és

$$\gamma := \mu_1 \times \ldots \times \mu_n \in \mathcal{F}_I.$$

Ekkor nyilván $\tau \subset \gamma$, ezért (ld. 5.1.1. Tétel)

$$\omega(f, \gamma) \leq \omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

Ha

$$\gamma_J := \gamma \cap J,$$

akkor nyilván $\gamma_J \in \mathcal{F}_J$, és

$$\omega(f_{|_J}, \gamma_j) \le \omega(f, \gamma) < \varepsilon.$$

Ismét az 5.1.2. Tételt alkalmazva innen $f_{|_J} \in R(J)$, azaz $f \in R(J)$ már következik.

Legyen most $\{J_k : k = 1, ..., N\}$ egy tetszőleges intervallumokra való felbontása az I-nek. Ekkor a) szerint $f \in R(J_k)$ $(k = 0, ..., N)$. Vegyük minden itt szereplő J_k intervallumnak egy-egy felosztását: $\tau^{(k)} \in \mathcal{F}_{J_k}$ $(k = 1, ..., N)$. Tehát

$$\tau^{(k)} = \tau_1^{(k)} \times \ldots \times \tau_n^{(k)} \qquad (k = 1, ..., N),$$

ahol minden $k = 1, ..., N$ esetén

$$\tau_j^{(k)} \subset [a_j, b_j] \qquad (j = 1, ..., n)$$

egy felosztása a szóban forgó $[a_j, b_j]$ intervallumnak. Ha

$$\tau_j := \bigcup_{k=1}^{N} \tau_j^{(k)} \qquad (j = 1, ..., n),$$

akkor τ_j nyilván egy felosztása az $[a_j, b_j]$ $(j = 1, ..., n)$ intervallumnak, legyen

$$\tau := \tau_1 \times \ldots \times \tau_n \in \mathcal{F}_I.$$

Világos, hogy a

$$\mu^{(k)} := J_k \cap \tau \in \mathcal{F}_{J_k} \qquad (k = 1, ..., N)$$

felosztásokra $\tau^{(k)} \subset \mu^{(k)}$ $(k = 1, ..., N)$, így (ld. 5.1.1. Tétel)

$$\sum_{k=0}^{N} s(f_{|_{J_k}}, \tau^{(k)}) \le \sum_{k=1}^{N} s(f_{|_{J_k}}, \mu^{(k)}) = s(f, \tau) \le I_*(f) = \int_I f.$$

Innen

$$\sum_{k=1}^{N} I_*(f_{|_{J_k}}) = \sum_{k=1}^{N} \int_{J_k} f = \sum_{k=1}^{N} \sup\left\{s\left(f_{|_{J_k}}, \tau^{(k)}\right) : \tau^{(k)} \in \mathcal{F}_{J_k}\right\} \le \int_I f$$

adódik. Analóg módon kapjuk (a felső összegek szerepeltetésével) a

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{J_k} f \ge \int_I f$$

becslést is, azaz a b) állításban szereplő egyenlőséget. ■

Speciálisan, ha $f \in R(I)$ és $\tau \in \mathcal{F}_I$, akkor

$$\int_I f = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} \int_J f.$$

5.1.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f : I \to \mathbf{R}$ függvényre az alábbiak teljesülnek: van az I intervallumnak olyan $\{J_k : k = 1, ..., N\}$ intervallumokra való felbontása, hogy minden $k = 1, ..., N$ esetén $f \in R(J_k)$. Ekkor $f \in R(I)$.*

Bizonyítás. Az 5.1.2. Tétel szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett van olyan $\tau^{(k)} \in \mathcal{F}_{J_k}$ felosztás, hogy

$$\omega(f_{|J_k}, \tau^{(k)}) < \frac{\varepsilon}{N} \qquad (k = 1, ..., N).$$

A $\tau^{(k)}$ $(k = 1, ..., N)$ felosztások segítségével tekintsük az 5.1.5. Tétel bizonyításában értelmezett $\tau \in \mathcal{F}_I$ felosztást, valamint a

$$\mu^{(k)} := J_k \cap \tau \in \mathcal{F}_{J_k} \qquad (k = 1, ..., N)$$

felosztásokat. Ekkor $\tau^{(k)} \subset \mu^{(k)}$ $(k = 1, ..., N)$ miatt

$$\omega(f_{|J_k}, \mu^{(k)}) \leq \omega(f_{|J_k}, \tau^{(k)}) < \frac{\varepsilon}{N} \qquad (k = 1, ..., N).$$

Világos ugyanakkor, hogy

$$\omega(f, \tau) = \sum_{k=1}^{N} \omega(f_{|J_k}, \mu^{(k)}) < N \cdot \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon.$$

Az 5.1.2. Tétel alapján tehát $f \in R(I)$. ■

A továbbiakban belátjuk, hogy a Riemann-integrálhatóság, ill. maga a Riemann-integrál a „többváltozós" esetben is rendelekezik azzal a tulajdonsággal, miszerint „érzéketlen" a szóban forgó függvény véges halmazon való „viselkedésére". Más szóval, ha egy Riemann-integrálható függvényt egy véges halmazon (tetszőlegesen) megváltoztatunk, akkor az így kapott „új" függvény is Riemann-integrálható lesz, és a (Riemann-)integrálja ugyanaz marad, mint a kiindulási függvényé. Tehát, ha egy intervallumon értelmezett két (valós értékű) függvény legfeljebb véges sok helyen különbözik egymástól, akkor vagy mindkettő integrálható (és ekkor az integráljuk megegyezik), vagy egyikük sem integrálható.

5.1.7. Tétel. *Tekintsük az I intervallumon az $f, g : I \to \mathbf{R}$ korlátos függvényeket. Tegyük fel, hogy az $A := \{x \in I : f(x) \neq g(x)\}$ halmaz véges. Ekkor:*

a) $f \in R(I) \iff g \in R(I)$;

b) *ha* $f \in R(I)$, *akkor* $\int_I f = \int_I g$.

Bizonyítás. Lássuk be az állításainkat először abban az esetben, amikor az A halmaz 1 elemű: valamilyen $c \in I$ elemmel $A = \{c\}$. Ha $f \in R(I)$, akkor (ld. 5.1.2. Tétel) bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\tau \in \mathcal{F}_I$ felosztás, amellyel

$$\omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

Mindezt figyelembe véve legyen egy tetszőleges $K \subset I$ intervallum esetén

$$o_K(g) := \sup\{|g(x) - g(t)| : x, t \in K\},$$

$$o_K(f) := \sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in K\} \qquad (K \in \mathcal{F}(\tau)),$$

ekkor a következőket mondhatjuk:

$$\omega(g, \tau) = \sum_{K \in \mathcal{F}(\tau)} o_K(g) \cdot |K| =$$

$$\sum_{K \in \mathcal{F}(\tau),\, c \notin K} o_K(g) \cdot |K| + \sum_{K \in \mathcal{F}(\tau),\, c \in K} o_K(g) \cdot |K| =$$

$$\sum_{K \in \mathcal{F}(\tau),\, c \notin K} o_K(f) \cdot |K| + \sum_{K \in \mathcal{F}(\tau),\, c \in K} o_K(g) \cdot |K| =$$

$$\omega(f, \tau) + \sum_{K \in \mathcal{F}(\tau),\, c \in K} \Big(o_K(g) - o_K(f)\Big) \cdot |K|.$$

A feltételeink szerint az f, g függvények korlátosak, ezért egy alkalmas $C > 0$ számmal

$$|f(x)|,\ |g(x)| < C \qquad (x \in I).$$

Világos ugyanakkor, hogy $o_K(g),\, o_K(f) \leq 2C \ \ (K \in \mathcal{F}(\tau))$, így

$$\omega(g, \tau) \leq \omega(f, \tau) + \sum_{K \in \mathcal{F}(\tau),\, c \in K} \Big(o_K(g) + o_K(f)\Big) \cdot |K| < \varepsilon + 4C \cdot \sum_{K \in \mathcal{F}(\tau),\, c \in K} |K| \leq$$

$$\varepsilon + 4C \cdot 2^n \cdot \delta_\tau^n.$$

A τ felosztásról azt is feltehetjük, hogy $4C \cdot 2^n \cdot \delta_\tau^n < \varepsilon$, ui. különben „tovább finomítva" a τ-t (tehát alkalmasan választott véges sok I-beli ponttal bővítve) ezt elérhetjük, miközben az $\omega(f, \tau)$ oszcillációs összeg legfeljebb csökken. Így végül oda jutunk, hogy $\omega(g, \tau) < 2\varepsilon$, ami az 5.1.2. Tétel szerint a g függvény Riemann-integrálhatóságát jelenti. Mivel az f és a g felcserélésével az $\Longleftrightarrow$ ekvivalencia fordított irányát kapjuk, ezért az a) állítást (1 elemű A esetén) beláttuk.

Legyen továbbra is a fenti A halmaz 1 elemű halmaz, és lássuk be b)-t. Ha $\tau \in \mathcal{F}_I$, akkor az 5.1.5. Tétel szerint

$$\int_I g = \sum_{K \in \mathcal{F}(\tau)} \int_K g = \sum_{K \in \mathcal{F}(\tau),\, c \notin K} \int_K g + \sum_{K \in \mathcal{F}(\tau),\, c \in K} \int_K g =$$

$$= \sum_{K\in\mathcal{F}(\tau)\, c\notin K} \int_K f + \sum_{K\in\mathcal{F}(\tau),\, c\in K} \int_K g = \int_I f + \sum_{K\in\mathcal{F}(\tau),\, c\in K} \left(\int_K g - \int_K f\right).$$

Ezért (ld. 5.1.4. Tétel)

$$\left|\int_I g - \int_I f\right| \leq \sum_{K\in\mathcal{F}(\tau),\, c\in K} \left(\int_K |g| + \int_K |f|\right) \leq 2C\cdot \sum_{K\in\mathcal{F}(\tau),\, c\in K} |K| \leq 2^{n+1}\cdot C\cdot \delta_\tau^n.$$

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén a τ felosztásról nyilván feltehető, hogy $2^{n+1}\cdot C\cdot \delta_\tau^n < \varepsilon$. Következésképpen $|\int_I g - \int_I f| < \varepsilon$, ami csak úgy lehetséges, hogy $\int_I g = \int_I f$.

Ezzel „elintéztük" az 1 elemű A halmazokat. Általában legyen az A elemeinek a száma $1 \leq N \in \mathbf{N}$, és alkalmazzuk a teljes indukciót. Az $N = 1$ esetben az előbb láttuk be a tételt. Tegyük fel, hogy valamilyen $1 \leq N \in \mathbf{N}$ esetén már igaz az állításunk minden olyan A halmazra, amelyik legfeljebb N elemű. Ha most a tételbeli A elemszáma $N+1$, akkor legyen valamilyen $c \in A$ segítségével

$$\tilde{A} := A \setminus \{c\}.$$

Ekkor $\tilde{A}$ elemszáma N, így a

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in I \setminus \tilde{A}) \\ \\ g(x) & (x \in \tilde{A}) \end{cases}$$

függvényre $h \in R(I)$ és $\int_I h = \int_I f$. Világos, hogy

$$\{x \in I : g(x) \neq h(x)\} = \{c\},$$

ami 1 elemű halmaz. Ezért az indukciós feltétel alapján $h \in R(I)$, és

$$\int_I g = \int_I h = \int_I f.$$

∎

A következő tételben kiderül, hogy a folytonosság „erősebb" tulajdonság a Riemann-integrálhatóságnál. Ezzel kapcsolatban emlékeztetünk arra, hogy pl. az

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (0 < x \leq 1) \\ \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

függvényre $f \in R[0,1] \setminus C[0,1]$.

5.1.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy az I intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbf{R}$ függvény folytonos. Ekkor $f \in R(I)$.*

Bizonyítás. Ha az $f : I \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, akkor – lévén az I intervallum kompakt – a 2.6. Tétel miatt az f egyenletesen folytonos. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén megadható olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{|I|} \qquad (x, t \in I,\ \|x - t\|_2 < \delta).$$

Ha tehát a $\tau \in \mathcal{F}_I$ felosztásra $\delta_\tau < \delta$ teljesül, akkor bármelyik $J \in \mathcal{F}(\tau)$ osztásintervallumra $d_J < \delta$, így

$$\sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in J\} \leq \frac{\varepsilon}{|I|}.$$

Következésképpen

$$\omega(f, \tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} \sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in J\} \cdot |J| \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{|I|} \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} |J| = \frac{\varepsilon}{|I|} \cdot |I| = \varepsilon.$$

Ezért az 5.1.2. Tétel miatt $f \in R(I)$. ∎

Az előző tétel előtt idézett egyszerű példa azt mutatja, hogy egy Riemann-integrálható függvény „bőven" lehet nem folytonos. Ugyanakkor a továbbiakban megmutatjuk, hogy minden Riemann-integrálható függvény bizonyos értelemben „majdnem" folytonos. Ennek a pontos megfogalmazásához vezessük be a Lebesgue szerint nullamértékű halmaz fogalmát. Legyen ui. $A \subset \mathbf{R}^n$. Ekkor azt mondjuk, hogy az A halmaz *nullamértékű,* ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható $I_k \subset \mathbf{R}^n$ $(k \in \mathbf{N})$ intervallumoknak egy olyan sorozata, hogy

$$A \subset \textstyle\bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \quad \text{és} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Egyszerűen belátható: az $\mathbf{R}^n$ minden, legfeljebb megszámlálható részhalmaza nullamértékű. Sőt, ha $X_k \subset \mathbf{R}^n$ $(k \in \mathbf{N})$ nullamértékű, akkor az $\bigcup_{k=0}^{\infty} X_k$ halmaz is nullamértékű. Az is egyszerűen adódik, hogy a nullamértékűség előbbi definíciójában (ha adott esetben szükség van rá) nyugodtan feltehető, hogy a szóban forgó I_k $(k \in \mathbf{N})$ intervallumok mindegyike nyílt. Világos továbbá, hogy egy nullamértékű halmaz minden részhalmaza is nullamértékű.

Könnyű meggondolni azt is, hogy egy I intervallum nem nullamértékű, de az I „határa", azaz az $I \setminus \operatorname{int} I$ halmaz nullamértékű. Ha ui. $n = 1$, amikor is $I = [a, b]$ $(a, b \in \mathbf{R},$ $a < b)$, akkor az $I \setminus \operatorname{int} I = \{a, b\}$ határ véges halmaz, ezért nullamértékű. Ha $n \geq 2$ és $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, akkor

$$I \setminus \operatorname{int} I = U_1 \cup U_2,$$

ahol

$$U_1 := \bigcup_{j=1}^{n} U_{1j} := \bigcup_{j=1}^{n} [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{j-1}, b_{j-1}] \times \{a_j\} \times [a_{j+1}, b_{j+1}] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

$$U_2 := \bigcup_{j=1}^{n} U_{2j} := \bigcup_{j=1}^{n} [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{j-1}, b_{j-1}] \times \{b_j\} \times [a_{j+1}, b_{j+1}] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

Az itt szereplő U_{1j}, U_{2j} $(j = 1, ..., n)$ halmazok mindegyike nullamértékű. Ui. tetszőleges $q > 0$ mellett pl.

$$U_{1j} \subset [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{j-1}, b_{j-1}] \times [a_j, a_j + q] \times [a_{j+1}, b_{j+1}] \times \ldots \times [a_n, b_n] =: I_q,$$

és az I_q intervallum mértéke:

$$|I_q| = q \cdot \prod_{j \neq k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

Ha $\varepsilon > 0$, akkor alkalmas $q > 0$ számmal nyilván „elérhető", hogy $q \cdot \prod_{j \neq k=1}^{n} (b_k - a_k) < \varepsilon$.

Ezek után a Riemann-integrálhatóság *Lebesgue-kritériuma* a következőképpen szól:

5.1.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $I \subset \mathbf{R}^n$ *intervallumon értelmezett* $f : I \to \mathbf{R}$ *függvény korlátos, és legyen az* f *szakadási helyeinek a halmaza*

$$\mathcal{A}_f := \Big\{x \in I : f \notin \mathcal{C}\{x\}\Big\}.$$

Ekkor az f *Riemann-integrálhatósága, azaz* $f \in R(I)$ *azzal ekvivalens, hogy az* $\mathcal{A}_f$ *halmaz nullamértékű.*

Bizonyítás. Induljunk ki először abbból, hogy $f \in R(I)$. Ha $a \in I$, és valamilyen $J \subset \mathbf{R}^n$ intervallum esetén $a \in \operatorname{int} J$, akkor legyen

$$O_J f := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in J \cap I\}$$

(az f *oszcillációja* a J intervallumon). Az f függvény a-beli *lokális oszcillációját* a következőképpen értelmezzük:

$$\Delta_a f := \inf\{O_J f : J \subset \mathbf{R}^n \text{ intervallum}, \ a \in \operatorname{int} J\}.$$

Mutassuk meg, hogy

$$f \in \mathcal{C}\{a\} \iff \Delta_a f = 0.$$

Ha ui. $f \in \mathcal{C}\{a\}$, akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (x \in I, \ \|x - a\|_2 < \delta).$$

Ezért

$$|f(x) - f(y)| \leq$$
$$|f(x) - f(a)| + |f(a) - f(y)| < 2\varepsilon \qquad (x, y \in I, \|x - a\|_2, \|y - a\|_2 < \delta).$$

Így minden olyan $J \subset \mathbf{R}^n$ intervallumra, amelyre $a \in \operatorname{int} J$ és $d_J < \delta$, igaz, hogy

$$|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon,$$

amiből $O_J f \leq 2\varepsilon$ következik. Ez azt jelenti, hogy $(0 \leq)\Delta_a f \leq 2\varepsilon$. Mindez csak úgy lehetséges, ha $\Delta_a f = 0$.

Ha most azt tesszük fel, hogy $\Delta_a f = 0$, akkor az infimum tulajdonságait figyelembe véve bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz találunk olyan $J \subset \mathbf{R}^n$ intervallumot, amellyel $a \in \operatorname{int} J$, és $O_J f < \varepsilon$. Tehát

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad (x, y \in J \cap I),$$

speciálisan

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (x \in J \cap I).$$

Mivel $a \in \operatorname{int} J$, ezért van olyan $\delta > 0$, hogy $x \in J \quad (x \in I,\ \|x - a\|_2 < \delta)$. Így

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (x \in I, \|x - a\|_2 < \delta),$$

azaz $f \in \mathcal{C}\{a\}$.

A lokális oszcilláció és a pontbeli folytonosság kapcsolatáról most belátott ekvivalencia alapján

$$\mathcal{A}_f = \Big\{x \in I : \Delta_x f > 0\Big\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big\{x \in I : \Delta_x f > 1/k\Big\} =: \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Az $\mathcal{A}_f$ halmaz nullamértékűségéhez ezért elegendő azt megmutatni, hogy az

$$A_\delta := \Big\{x \in I : \Delta_x f > \delta\Big\} \qquad (\delta > 0)$$

halmazok nullamértékűek. Legyen $\sigma > 0$, amikor is az 5.1.2. Tétel alapján egy alkalmas $\tau \in \mathcal{F}_I$ felosztással $\omega(f, \tau) < \sigma$. Ekkor tetszőleges $\delta > 0$ mellett (az 5.1.7. Tétel bizonyítása során bevezetett jelöléssel)

$$\sigma > \omega(f, \tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} o_J(f) \cdot |J| \geq \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, A_\delta \cap \operatorname{int} J \neq \emptyset} o_J(f) \cdot |J|.$$

Világos, hogy minden $J \in \mathcal{F}(\tau)$, $A_\delta \cap \operatorname{int} J \neq \emptyset$ osztásintervallum esetén $o_J(f) \geq \delta$, ezért

$$\sigma > \delta \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, A_\delta \cap \operatorname{int} J \neq \emptyset} |J|.$$

Más szóval

$$\sum_{J\in\mathcal{F}(\tau),\, A_\delta\cap \operatorname{int} J\neq\emptyset} |J| < \frac{\sigma}{\delta}.$$

Legyen itt valamilyen $\varepsilon > 0$ mellett a $\sigma > 0$ olyan, hogy $\sigma/\delta < \varepsilon/2$. Nyilván

$$A_\delta \subset \left(\bigcup_{J\in\mathcal{F}(\tau),\, A_\delta\cap \operatorname{int} J\neq\emptyset} J\right) \bigcup \left(\bigcup_{J\in\mathcal{F}(\tau)} (J\setminus \operatorname{int} J)\right),$$

ahol az 5.1.9. Tétel előtt mondottak szerint minden $J\setminus \operatorname{int} J \quad (J\in\mathcal{F}(\tau))$ halmaz, és így az $\bigcup_{J\in\mathcal{F}(\tau)}(J\setminus \operatorname{int} J)$ halmaz is nullamértékű. Ezért alkalmas $K_j\subset \mathbf{R}^n \quad (j\in\mathbf{N})$ intervallumsorozattal

$$\bigcup_{J\in\mathcal{F}(\tau)} (J\setminus \operatorname{int} J) \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j,$$

és $\sum_{j=0}^{\infty}|K_j| < \varepsilon/2$. Mindezeket egybevetve

$$A_\delta \subset \left(\bigcup_{J\in\mathcal{F}(\tau),\, A_\delta\cap \operatorname{int} J\neq\emptyset} J\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} K_j\right),$$

és

$$\sum_{J\in\mathcal{F}(\tau),\, A_\delta\cap \operatorname{int} J\neq\emptyset} |J| + \sum_{j=0}^{\infty}|K_j| < \varepsilon.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az A_δ halmaz nullamértékű.

Most tegyük fel azt, hogy az $\mathcal{A}_f$ halmaz nullamértékű. Legyen adott az $\varepsilon > 0$ szám, ekkor egy alkalmas $L_k\subset\mathbf{R}^n \quad (k\in\mathbf{N})$ intervallumsorozattal

$$\mathcal{A}_f \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \operatorname{int} L_k,\ \sum_{k=0}^{\infty}|L_k| < \frac{\varepsilon}{4C},$$

ahol $C>0$, és $|f(x)|\le C \quad (x\in I)$. Ha $x\in I\setminus\mathcal{A}_f$, azaz $f\in\mathcal{C}\{x\}$, akkor van olyan $I_x\subset\mathbf{R}^n$ intervallum, amelyre $x\in \operatorname{int} I_x$, és

$$O_{I_x} f = \sup\{|f(t)-f(y)| : t,\, y\in I_x\cap I)\} < \frac{\varepsilon}{2\cdot |I|}.$$

Világos, hogy

$$I \subset \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \operatorname{int} L_k\right) \bigcup \left(\bigcup_{x\in I\setminus\mathcal{A}_f} \operatorname{int} I_x\right).$$

Az 1.7.10. Tételt alkalmazva kapunk olyan véges $A \subset \mathbf{N}$, $B \subset I \setminus \mathcal{A}_f$ halmazokat, amelyekkel

$$I \subset \left(\bigcup_{k \in A} \operatorname{int} L_k \right) \bigcup \left(\bigcup_{x \in B} \operatorname{int} I_x \right).$$

Ha

$$I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

$$L_k = [a_{1k}, b_{1k}] \times \ldots \times [a_{nk}, b_{nk}] \qquad (k \in A),$$

$$I_x = [a_{1x}, b_{1x}] \times \ldots \times [a_{nx}, b_{nx}] \qquad (x \in B),$$

és

$$\gamma_j := \{a_j, b_j\} \bigcup \left(\bigcup_{k \in A} \{a_{jk}, b_{jk}\} \cap [a_j, b_j] \right) \qquad (j = 1, ..., n),$$

$$\mu_j := \{a_j, b_j\} \bigcup \left(\bigcup_{x \in B} \{a_{jx}, b_{jx}\} \cap [a_j, b_j] \right) \qquad (j = 1, ..., n),$$

továbbá

$$\tau_j := \gamma_j \cup \mu_j \qquad (j = 1, ..., n),$$

akkor legyen

$$\tau := \tau_1 \times \ldots \times \tau_j \in \mathcal{F}_I.$$

Világos, hogy bármelyik $J \in \mathcal{F}(\tau)$ osztásintervallumra egy-egy alkalmas $k \in A$, vagy $x \in B$ mellett $J \subset L_k$, vagy $J \subset I_x$ (esetleg mindkét tartalmazás igaz). Ha $k \in A$ és $J \subset L_k$, akkor $o_J(f) \leq 2C$. Ha pedig $x \in B$ és $J \subset I_x$, akkor $o_J(f) \leq \varepsilon/(2 \cdot |I|)$. Ezért a τ-hoz tartozó $\omega(f, \tau)$ oszcillációs összegről az alábbiakat mondhatjuk:

$$\omega(f, \tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} o_J(f) \cdot |J| \leq$$

$$\sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, \exists k \in A: J \subset L_k} o_J(f) \cdot |J| + \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, \exists x \in B: J \subset I_x} o_J(f) \cdot |J| \leq$$

$$2C \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, \exists k \in A: J \subset L_k} |J| + \frac{\varepsilon}{2 \cdot |I|} \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau),\, \exists x \in B: J \subset I_x} |J| \leq$$

$$2C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |L_k| + \frac{\varepsilon}{2 \cdot |I|} \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} |J| \leq 2C \cdot \frac{\varepsilon}{4C} + \frac{\varepsilon}{2 \cdot |I|} \cdot |I| = \varepsilon.$$

Az 5.1.2. Tétel alapján tehát azt mondhatjuk, hogy $f \in R(I)$. ■

5.2. Megjegyzések

i) Valamilyen $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallum és egy $0 \leq f : I \to \mathbf{R}$ korlátos függvény esetén az $s(f,\tau)$, $S(f,\tau)$ $(\tau \in \mathcal{F}_I)$ alsó, felső összegek a *függvény alatti*

$$\mathcal{S} := \{(x,y) \in \mathbf{R}^{n+1} : x \in I,\, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

halmazba beírt, ill. *körülírt* ún. *téglányösszegek.* Az f nemnegatívitását elvetve az $s(f,\tau)$, $S(f,\tau)$ összegeket *előjeles téglányösszegekként* szokás emlegetni.

ii) Ha az $f : I \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, akkor minden $\tau \in \mathcal{F}_I$ felosztás és $J \in \mathcal{F}(\tau)$ esetén a 2.4. Tétel értelmében vannak olyan $\xi_J, \eta_J \in J$ helyek, hogy

$$m_J = f(\xi_J),\ M_J = f(\eta_J).$$

Tehát, ha $\xi := (\xi_J, J \in \mathcal{F}(\tau)) \in \hat{\tau}$, $\eta := (\eta_J, J \in \mathcal{F}(\tau)) \in \hat{\tau}$, akkor

$$s(f,\tau) = \sigma(f,\tau,\xi),\ S(f,\tau) = \sigma(f,\tau,\eta).$$

iii) Legyen adott a $\Phi : \mathcal{F}_I \to \mathbf{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy $\delta_\tau \to 0$ esetén a Φ-nek *van határértéke,* ha létezik olyan $\alpha \in \mathbf{R}$ szám, amelyre minden $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $0 < \delta$-val

$$|\Phi(\tau) - \alpha| < \varepsilon \qquad \big(\tau \in \mathcal{F}_I,\, \delta_\tau < \delta\big).$$

Nem nehéz belátni, hogy ekkor egyetlen ilyen α van, amit a Φ *határértékének* (vagy *limeszének*) nevezünk, és a $\lim \Phi$ $\Big($vagy a $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \Phi(\tau)\Big)$ szimbólummal jelölünk.

iv) Ha például $f : I \to \mathbf{R}$ egy korlátos függvény, akkor

$$\Phi_1(\tau) := s(f,\tau),\ \Phi_2(\tau) := S(f,\tau) \qquad \big(\tau \in \mathcal{F}_I\big),$$

$$\Phi_3(\tau) := \sigma(f,\tau,y) \qquad \big(\tau \in \mathcal{F}_I,\, y \in \hat{\tau}\big)$$

az előző megjegyzésben említett (speciális) függvények. Az 5.1.3. Tétel szerint bármilyen korlátos $f : I \to \mathbf{R}$ függvény esetén léteznek a $\lim \Phi_i$ $(i = 1,2)$ határértékek, és

$$\lim \Phi_1 = \lim_{\delta_\tau \to 0} s(f,\tau) = I_*(f),\ \lim \Phi_2 = \lim_{\delta_\tau \to 0} S(f,\tau) = I^*(f).$$

Ha $f \in R(I)$, akkor (tetszőleges $y \in \hat{\tau}$ $(\tau \in \mathcal{F}_I)$ választással) létezik a $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \sigma(f,\tau,y)$ határérték is, és

$$\lim \Phi_3 = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma(f,\tau,y) = \lim_{\delta_\tau \to 0} s(f,\tau) = \lim_{\delta_\tau \to 0} S(f,\tau) = \int_I f.$$

Sőt, a $\lim \Phi_3 = \int_I f$ egyenlőség az 5.1.3. Tétel szerint y-ban „egyenletesen" teljesül, azaz a iii) megjegyzésben mondott határérték-definícióban szereplő δ csak (az ottani) ε-tól függ, y-tól $(y \in \hat{\tau}$ $(\tau \in \mathcal{F}_I))$ nem.

v) A fentiek tükrében az 5.1.2. Tétel egy átfogalmazása a következő. Legyen az $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallumon adott az $f : I \to \mathbf{R}$ korlátos függvény. Ekkor

$$f \in R(I) \iff \lim_{\delta_\tau \to 0} \omega(f, \tau) = 0.$$

Ui. $\lim_{\delta_\tau \to 0} \omega(f, \tau) = 0$ esetén tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\tau \in \mathcal{F}_I$, amellyel $\omega(f, \tau) < \varepsilon$. Ez az 5.1.2. Tétel értelmében azt jelenti, hogy $f \in R(I)$. Ha az utóbbiból indulunk ki, akkor a iv) megjegyzés szerint

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s(f, \tau) = \lim_{\delta_\tau \to 0} S(f, \tau) = \int_I f.$$

Világos, hogy ekkor

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \omega(f, \tau) = \lim_{\delta_\tau \to 0} \Big(S(f, \tau) - s(f, \tau)\Big) = \lim_{\delta_\tau \to 0} S(f, \tau) - \lim_{\delta_\tau \to 0} s(f, \tau) = 0$$

is igaz.

vi) Tegyük fel, hogy az előbbi $f : I \to \mathbf{R}$ korlátos függvényre és egy $\tau_n \in \mathcal{F}_I \quad (n \in \mathbf{N})$ felosztás-sorozatra léteznek a (közös)

$$q := \lim \Big(s(f, \tau_n)\Big) = \lim \Big(S(f, \tau_n)\Big) \in \mathbf{R}$$

(„közönséges" sorozat-) határértékek. Ekkor $f \in R(I)$, továbbá $\int_I f = q$. Ui.

$$s(f, \tau_n) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f, \tau_n) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

amiből a feltételezésünk miatt szükségszerűen

$$I_*(f) = I^*(f) = q$$

következik. Sőt, az ilyen $(\tau_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{F}_I$ sorozat létezése szükséges is ahhoz, hogy a szóban forgó f függvény Riemann-integrálható legyen. Valóban, ha $f \in R(I)$, akkor

$$\int_I f = I_*(f) = \sup\{s(f, \tau) : \tau \in \mathcal{F}_I\} = I^*(f) = \inf\{S(f, \tau) : \tau \in \mathcal{F}_I\}$$

alapján minden $n \in \mathbf{N}$ esetén léteznek olyan $\mu_n, \, \nu_n \in \mathcal{F}_I$ felosztások, amelyekkel

$$\int_I f - \frac{1}{n+1} < s(f, \mu_n) \leq \int_I f \leq S(f, \nu_n) < \int_I f + \frac{1}{n+1}.$$

Legyen $\tau_n := \mu_n \cup \nu_n \ \ (n \in \mathbf{N})$. Ekkor (ld. 5.1.1. Tétel)

$$\int_I f - \frac{1}{n+1} < s(f, \mu_n) \leq s(f, \tau_n) \leq$$

$$S(f,\tau_n) \le S(f,\nu_n) < \int_I f + \frac{1}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

amiből a $\lim\big(s(f,\tau_n)\big)$, $\lim\big(S(f,\tau_n)\big)$ határértékek létezése, ill. az

$$\int_I f = \lim\big(s(f,\tau_n)\big) = \lim\big(S(f,\tau_n)\big)$$

egyenlőség már nyilvánvaló.

vii) Nem nehéz belátni, hogy ha $0 \le f \in R(I)$ és $\int_I f = 0$, akkor $f(d) = 0$ minden olyan $d \in I$ pontban, ahol az f folytonos. Ha ui. egy ilyen d esetén $f(d) \ne 0$, azaz $f(d) > 0$ lenne, akkor a folytonosság definíciója alapján a következő is igaz lenne: egy alkalmas $J \subset I$ intervallummal $d \in J$, és

$$f(x) > \frac{f(d)}{2} \qquad (x \in J).$$

Ez azt jelenti, hogy az 5.1.4., 5.1.5. Tételek szerint

$$0 = \int_I f \ge \int_J f \ge \int_J (f(d)/2) = \frac{f(d)}{2} \cdot |J| > 0,$$

ami nyilvánvaló ellentmondás.

viii) Az 5.1.9. Tétel alapján könnyen adódik a következő becslés: tetszőleges $0 < f \in R(I)$ esetén $\int_I f > 0$. Ui. az 5.1.4. Tétel szerint $\int_I f \ge 0$. Ha $\int_I f = 0$ lenne, akkor az előző megjegyzésből $f(d) = 0 \quad (d \in I,\ f \in \mathcal{C}\{d\})$ következik. A Lebesgue-kritérium (ld. 5.1.9. Tétel) miatt a szakadási helyek $\mathcal{A}_f$ halmaza nullamértékű, ezért $\mathcal{A}_f \ne I$. Tehát létezik az előbbi tulajdonságú d pont, azaz ahol $f(d) = 0$. Ez nyilván ellentmond az $f > 0$ feltételnek.

ix) A Lebesgue-kritériumból (ld. 5.1.9. Tétel) azonnal következik, hogy ha $J, I \subset \mathbf{R}^n$ intervallumok, $g \in R(J)$, valamint $f : I \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, és $\mathcal{R}_g \subset I$, akkor $f \circ g \in R(J)$. Ui. (ld. 2.4. Tétel) az f korlátos, ezért az $f \circ g$ is korlátos. Továbbá (ld. 2.3. Tétel) $f \circ g \in \mathcal{C}\{x\}$ minden olyan $x \in J$ helyen, ahol $g \in \mathcal{C}\{x\}$. Mivel (ld. 5.1.9. Tétel) az $\mathcal{A}_g$ halmaz nullamértékű, ezért $\mathcal{A}_{f\circ g} \subset \mathcal{A}_g$ miatt az $\mathcal{A}_{f\circ g}$ is nullamértékű.

x) A „szokásos" szóhasználattal az 5.1.9. Tételre hivatkozva azt mondjuk, hogy minden $f \in R(I)$ függvény *majdnem mindenütt folytonos* (röviden: $f \in \mathcal{C}\{x\} \quad (\text{m.m.}\, x \in I)$).

xi) Legyen adott az $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallumon az $f : I \to \mathbf{R}$ folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy a

$$\operatorname{graf} f := \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^{n+1} : x \in I\}$$

halmaz (mint az $\mathbf{R}^{n+1}$ egy részhalmaza) nullamértékű. Ehhez emlékeztetünk arra (ld. 2.6. Tétel), hogy az f egyenletesen folytonos. Ha tehát a $\delta > 0$ tetszőlegesen adott szám, akkor van olyan $\tau \in \mathcal{F}_I$ felosztás, hogy

$$|f(x) - f(y)| < \delta \qquad (x, y \in J \in \mathcal{F}(\tau)).$$

Speciálisan $M_J - m_J < \delta$, ahol (ld. 2.4. Tétel)

$$M_J := \max\{f(x) : x \in J\},\ m_J := \min\{f(x) : x \in J\},$$

és nyilván

$$f(x) \in [m_J, M_J] \qquad \big(x \in J \in \mathcal{F}(\tau)\big).$$

Legyen

$$J_\delta := J \times [m_J, M_J] \subset \mathbf{R}^{n+1} \qquad \big(J \in \mathcal{F}(\tau)\big).$$

Ekkor minden ilyen J_δ halmaz $\mathbf{R}^{n+1}$-beli intervallum,

$$\operatorname{graf} f \subset \bigcup_{J \in \mathcal{F}(\tau)} J_\delta,$$

és

$$\sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} |J_\delta| = 2\delta \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} |J| = 2\delta \cdot |I|.$$

Ezért bármilyen $\varepsilon > 0$ mellett a δ-t úgy választva, hogy a $2\delta \cdot |I| < \varepsilon$ becslés teljesüljön, a $J_\delta \quad (J \in \mathcal{F}(\tau))$ (véges sok) intervallum lefedi $\operatorname{graf} f$-et, és

$$\sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} |J_\delta| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\operatorname{graf} f$ halmaz nullamértékű.

5.3. Az integrál kiszámítása

5.3.1. Függvényműveletek és integrál

Bevezetésképpen az integrálás és bizonyos függvényműveletek kapcsolatát vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy Riemann-integrálható függvények lineáris kombinációja is integrálható, és az integrálja a szóban forgó függvények integráljainak a lineáris kombinációja. Világos, hogy ebből a szempontból elegendő az alábbi tételt belátni.

5.3.1.1. Tétel. *Az $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallumon értelmezett tetszőleges $f,\, g \in R(I)$ függvények és $\lambda \in \mathbf{R}$ szám esetén $f + \lambda\cdot g \in R(I)$, továbbá*

$$\int_I (f + \lambda\cdot g) = \int_I f + \lambda\cdot \int_I g.$$

Bizonyítás. Legyenek valamilyen $J \subset \mathbf{R}^n$ intervallum esetén $h,\, H : J \to \mathbf{R}$ korlátos függvények. Ekkor

$$m_J(h) + m_J(H) \le h(x) + H(x) = \Big(h + H\Big)(x) \le M_J(h) + M_J(H) \qquad (x \in J)$$

miatt nyilván

$$m_J(h) + m_J(H) \le m_J(h + H),\; M_J(h) + M_J(H) \ge M_J(h + H).$$

Mindezt előrebocsátva bármely $\tau \in \mathcal{F}_I$ felosztással azt mondhatjuk, hogy

$$s(f,\tau) + s(g,\tau) = \sum_{J\in\mathcal{F}(\tau)} m_J(f)\cdot |J| + \sum_{J\in\mathcal{F}(\tau)} m_J(g)\cdot |J| =$$

$$\sum_{J\in\mathcal{F}(\tau)} \Big(m_J(f) + m_J(g)\Big)\cdot |J| \le \sum_{J\in\mathcal{F}(\tau)} m_J(f + g)\cdot |J| = s(f + g, \tau).$$

Innen tetszőleges $\mu \in \mathcal{F}_I$ felosztás mellett azt kapjuk (ld. 5.1.1. Tétel), hogy

$$s(f,\tau) + s(g,\mu) \le s(f,\tau\cup\mu) + s(g,\tau\cup\mu) \le s(f + g, \tau\cup\mu) \le I_*(f + g).$$

Tehát bármilyen $\tau,\, \mu \in \mathcal{F}_I$ felosztásokat is véve

$$s(f,\tau) \le I_*(f + g) - s(g,\mu),$$

következésképpen

$$\int_I f = I_*(f) = \sup\{s(f,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_I\} \le I_*(f + g) - s(g,\mu).$$

Más szóval

$$s(g,\mu) \le I_*(f + g) - \int_I f,$$

amiből meg

$$\int_I g = I_*(g) = \sup\{s(g,\mu) : \mu \in \mathcal{F}_I\} \le I_*(f + g) - \int_I f$$

következik. Összefoglalva mindezt oda jutunk, hogy

$$\int_I f + \int_I g \le I_*(f + g).$$

Ugyanígy kapjuk az

$$\int_I f + \int_I g \geq I^*(f+g)$$

becslést is, amiből

$$\int_I f + \int_I g \leq I_*(f+g) \leq I^*(f+g) \leq \int_I f + \int_I g$$

adódik. Világos tehát, hogy $I_*(f+g) = I^*(f+g)$, azaz $f+g \in R(I)$, és

$$\int_I f + \int_I g = I_*(f+g) = I^*(f+g) = \int_I (f+g).$$

Most mutassuk meg, hogy $\lambda g \in R(I)$, és $\int_I (\lambda g) = \lambda \cdot \int_I g$. Legyen ehhez $J \subset \mathbf{R}^n$ egy intervallum, valamint $h : J \to \mathbf{R}$ egy korlátos függvény. Ekkor

$$\inf\{(\lambda h)(x) = \lambda h(x) : x \in J\} = \begin{cases} \lambda \cdot \inf\{h(x) : x \in J\} & (\lambda \geq 0) \\ \\ \lambda \cdot \sup\{h(x) : x \in J\} & (\lambda < 0), \end{cases}$$

ill.

$$\sup\{(\lambda h)(x) = \lambda h(x) : x \in J\} = \begin{cases} \lambda \cdot \sup\{h(x) : x \in J\} & (\lambda \geq 0) \\ \\ \lambda \cdot \inf\{h(x) : x \in J\} & (\lambda < 0). \end{cases}$$

Ezért bármely $\tau \in \mathcal{F}_I$ felosztás esetén

$$s(g, \tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} \inf\{(\lambda g)(x) : x \in J\} \cdot |J| =$$

$$\begin{cases} \lambda \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} \inf\{g(x) : x \in J\} \cdot |J| = \lambda \cdot s(g, \tau) & (\lambda \geq 0) \\ \\ \lambda \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} \sup\{g(x) : x \in J\} \cdot |J| = \lambda \cdot S(g, \tau) & (\lambda < 0), \end{cases}$$

ill.

$$S(g, \tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} \sup\{(\lambda g)(x) : x \in J\} \cdot |J| =$$

$$\begin{cases} \lambda \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} \sup\{g(x) : x \in J\} \cdot |J| = \lambda \cdot S(g, \tau) & (\lambda \geq 0) \\ \\ \lambda \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} \inf\{g(x) : x \in J\} \cdot |J| = \lambda \cdot s(g, \tau) & (\lambda < 0). \end{cases}$$

Következésképpen

$$I_*(\lambda g) = \sup\{s(\lambda g, \tau) : \tau \in \mathcal{F}_I\} =$$

$$\begin{cases} \lambda\cdot \sup\{s(g,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_I\} = \lambda\cdot I_*(g) & (\lambda \geq 0) \\ \\ \lambda\cdot \inf\{S(g,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_I\} = \lambda\cdot I^*(g) & (\lambda < 0), \end{cases}$$

ill.

$$I^*(\lambda g) = \inf\{S(\lambda g,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_I\} =$$

$$\begin{cases} \lambda\cdot \inf\{S(g,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_I\} = \lambda\cdot I^*(g) & (\lambda \geq 0) \\ \\ \lambda\cdot \sup\{s(g,\tau) : \tau \in \mathcal{F}_I\} = \lambda\cdot I_*(g) & (\lambda < 0). \end{cases}$$

Mivel $I_*(g) = I^*(g) = \int_I g$, így az előbbi egyenlőségekből

$$I_*(\lambda g) = I^*(\lambda g) = \lambda\cdot \int_I g$$

adódik. Tehát $\lambda g \in R(I)$, és

$$\int_I (\lambda g) = I_*(\lambda g) = I^*(\lambda g) = \lambda\cdot \int_I g.$$

Összegezve a fentieket azt mondhatjuk, hogy $f + \lambda g \in R(I)$, és

$$\int_I (f + \lambda g) = \int_I f + \int_I (\lambda g) = \int_I f + \lambda\cdot \int_I g.$$

■

Riemann-integrálható függvények szorzatáról a következő mondható:

5.3.1.2. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallum, és $f,\, g \in R(I)$. Ekkor $fg \in R(I)$.*

Bizonyítás. Tetszőleges $J \subset I$ intervallum és $x, t \in J$ esetén

$$|(fg)(x) - (fg)(t)| =$$

$$|f(x)g(x) - f(t)g(t)| = |f(x)(g(x) - g(t)) - (f(t) - f(x))g(t)| \leq$$

$$|f(x)|\cdot |g(x) - g(t)| + |f(t) - f(x)|\cdot |g(t)| \leq C\cdot (|g(x) - g(t)| + |f(t) - f(x)|)$$

(ahol $C > 0$ közös korlátja az $f,\, g$ függvényeknek, azaz $|f(z)|,\, |g(z)| \leq C \quad (z \in I)$). Ezért

$$o_J(fg) = \sup\{|(fg)(x) - (fg)(t)| : x, t \in J\} \leq$$

$$C\cdot \Big(\sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in J\} + \sup\{|g(x) - g(t)| : x, t \in J\}\Big) = C\cdot \Big(o_J(f) + o_J(g)\Big).$$

Ennek alapján tetszőleges $\tau \in \mathcal{F}_I$ felosztásra

$$\omega(fg,\tau) = \sum_{J\in\mathcal{F}(\tau)} o_J(fg)\cdot |J| \le$$

$$C\cdot \left(\sum_{J\in\mathcal{F}(\tau)} o_J(f)\cdot |J| + \sum_{J\in\mathcal{F}(\tau)} o_J(g)\cdot |J|\right) = C\cdot \Big(\omega(f,\tau)+\omega(g,\tau)\Big).$$

A feltételeink szerint $f,\, g \in R(I)$, ezért (ld. 5.1.2. Tétel) bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz megadhatók olyan $\mu,\, \nu \in \mathcal{F}_I$ felosztások, amelyekkel

$$\omega(f,\mu) < \frac{\varepsilon}{2C},\ \omega(g,\nu) < \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Legyen $\tau := \mu \cup \nu$, ekkor (ld. 5.1.1. Tétel) a fentiek szerint

$$\omega(fg,\tau) \le C\cdot \Big(\omega(f,\tau)+\omega(g,\tau)\Big) \le C\cdot \Big(\omega(f,\mu)+\omega(g,\nu)\Big) \le C\cdot \frac{2\varepsilon}{2C} = \varepsilon.$$

Ez az 5.1.2. Tétel alapján (szükséges és) elégséges ahhoz, hogy $fg \in R(I)$. ■

5.3.1.3. Tétel. *Ha $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallum, $f,\, g \in R(I)$, és valamilyen $r > 0$ konstanssal*

$$|g(x)| \ge r \qquad (x \in I),$$

akkor $f/g \in R(I)$.

Bizonyítás. Lássuk be először, hogy $1/g \in R(I)$, amiből az 5.3.1.2. Tétel és az

$$\frac{f}{g} = f\cdot \frac{1}{g}$$

egyenlőség alapján $f/g \in R(I)$ már következni fog. Legyen ehhez $J \subset I$ intervallum. Ekkor akármilyen $x,t \in J$ esetén

$$\left|\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(t)\right| =$$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(t)}\right| = \frac{|g(t)-g(x)|}{|g(x)g(t)|} \le \frac{1}{r^2}\cdot |g(t)-g(x)|,$$

így

$$o_J(1/g) = \sup\{|(1/g)(x) - (1/g)(t)| : x,t \in J\} \le$$

$$\frac{1}{r^2}\cdot \sup\{|g(x)-g(t)| : x,t \in J\} = \frac{1}{r^2}\cdot o_J(g).$$

Innen tetszőleges $\tau \in \mathcal{F}_I$ mellett

$$\omega(1/g, \tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} o_J(1/g) \cdot |J| \leq \frac{1}{r^2} \cdot \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} o_J(g) \cdot |J| = \frac{\omega(g, \tau)}{r^2}.$$

A feltétel szerint $g \in R(I)$, ezért (ld. 5.1.2. Tétel) minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\tau \in \mathcal{F}_I$ felosztás, amellyel $\omega(g, \tau) < r^2 \cdot \varepsilon$. Tehát az előbbieket figyelembe véve

$$\omega(1/g, \tau) < \frac{r^2 \cdot \varepsilon}{r^2} = \varepsilon,$$

ami az 5.1.2. Tétel alapján azt jelenti, hogy $1/g \in R(I)$. ∎

Az integrál „monotonitása" (ld. 5.1.5. Tétel) és a szorzatfüggvény integrálhatósága (ld. 5.3.1.2. Tétel) alapján jutunk az alábbi, ún. *középértéktételhez.*

5.3.1.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy valamilyen $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallumra, és a korlátos $f, g : I \to \mathbf{R}$ függvényekre $f,\ g \in R(I)$, $g \geq 0$. Ekkor:*

a) *az $m := \inf \mathcal{R}_f$, $M := \sup \mathcal{R}_f$ jelölésekkel*

$$m \cdot \int_I g \leq \int_I fg \leq M \cdot \int_I g;$$

b) *ha az f függvény folytonos, akkor létezik olyan $\xi \in I$, amellyel*

$$\int_I fg = f(\xi) \cdot \int_I g.$$

Bizonyítás. Először is jegyezzük meg, hogy (ld. 5.3.1.2. Tétel) $fg \in R(I)$. Tetszőleges $x \in I$ helyen nyilván

$$mg(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq Mg(x),$$

azaz $mg \leq fg \leq Mg$. Az 5.3.1. Tétel szerint $mg,\ Mg \in R(I)$, és

$$\int_I mg = m \cdot \int_I g, \quad \int_I Mg = M \cdot \int_I g.$$

Az 5.1.5. Tételt alkalmazva ezért azt kapjuk, hogy

$$m \cdot \int_I g = \int_I mg \leq \int_I fg \leq \int_I Mg = M \cdot \int_I g,$$

ami az a) állítás.

Ha $\int_I g = 0$, akkor a) alapján $\int_a^b fg = 0$, így ekkor bármely $\xi \in I$ választással

$$0 = \int_I fg = f(\xi) \cdot \int_I g = 0.$$

Feltehető tehát, hogy $\int_I g \neq 0$, amikor is (ld. 5.1.4. Tétel) $\int_I g > 0$. Ezért az a)-beli egyenlőtlenségeket így is írhatjuk:

$$m \leq \lambda := \frac{\int_I fg}{\int_I g} \leq M.$$

Ha az f függvény folytonos, akkor (ld. 2.4., 2.8. Tételek) $\mathcal{R}_f = [m, M]$, ezért $\lambda \in \mathcal{R}_f$. Van tehát olyan $\xi \in I$, hogy $\lambda = f(\xi)$. Ez a b) állítás. ■

5.3.2. Szukcesszív integrálás

A továbbiakban a „többváltozós" Riemann-integrál egyik leggyakrabban alkalmazott tulajdonságával, az ún. *szukcesszív integrálással* foglalkozunk. Legyen ehhez $2 \leq n \in \mathbf{N}$, és (ld. 3.2. vii) megjegyzés)

$$i := (i_1, ..., i_s) \in \{1, ..., n\}^s$$

egy multiindex, ahol $s \in \{1, ..., n-1\}$, ill. $i_1 < \ldots < i_s$. Ha

$$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbf{R}^n,$$

akkor a $\xi = (x, y)$ szimbólum jelentse a következőt:

$$x := (\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_s}) \in \mathbf{R}^s, \ y := (\xi_{j_1}, ..., \xi_{j_{n-s}}) \in \mathbf{R}^{n-s},$$

ahol $j_1 < \ldots < j_{n-s}$, és

$$\{j_1, ..., j_{n-s}\} := \{1, ..., n\} \setminus \{i_1, ..., i_s\}.$$

Ennek megfelelően felosztjuk az $\mathbf{R}^n$ teret az

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^{n-s}$$

alakban, és minden $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényt $f \in \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^{n-s} \to \mathbf{R}$ „kétváltozós" függvényként tekintünk, ahol az f függvény $f(x, y)$ $\Big((x, y) \in \mathcal{D}_f\Big)$ helyettesítési értékeiben az (x, y) vektor első komponense $\mathbf{R}^s$-beli, a második pedig $\mathbf{R}^{n-s}$-beli. Hasonlóan, ha

$$I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbf{R}^n$$

intervallum, akkor legyen

$$I = I_1 \times I_2,$$

ahol

$$I_1 := [a_{i_1}, b_{i_1}] \times \ldots \times [a_{i_s}, b_{i_s}],\ I_2 := [a_{j_1}, b_{j_1}] \times \ldots \times [a_{j_{n-s}}, b_{j_{n-s}}]$$

$\mathbf{R}^s$-beli, ill. $\mathbf{R}^{n-s}$-beli intervallumok.

Mindezt figyelembe véve legyen

$$f : I_1 \times I_2 \to \mathbf{R}$$

adott „kétváltozós" függvény, és tetszőleges $x \in I_1$, $y \in I_2$ esetén tekintsük az

$$f_x : I_2 \to \mathbf{R},\ f^y : I_1 \to \mathbf{R}$$

függvényeket, ahol

$$f_x(z) := f(x,z) \quad (z \in I_2),\ f^y(t) := f(t,y) \quad (t \in I_1).$$

Ha az f korlátos, akkor nyilván az f_x, f^y $(x \in I_1,\ y \in I_2)$ függvények is korlátosak. Következésképpen vehetjük azokat az

$$\mathbf{m}_f : I_1 \to \mathbf{R},\ \mathbf{M}_f : I_1 \to \mathbf{R},\ \mathbf{m}^f : I_2 \to \mathbf{R},\ \mathbf{M}^f : I_2 \to \mathbf{R}$$

függvényeket, amelyeket az alábbi módon értelmezünk:

$$\mathbf{m}_f(x) := I_*(f_x) \quad (x \in I_1),\ \mathbf{M}_f(x) := I^*(f_x) \quad (x \in I_1),$$

$$\mathbf{m}^f(y) := I_*(f^y) \quad (y \in I_2),\ \mathbf{M}^f(y) := I^*(f^y) \quad (y \in I_2).$$

A most bevezetett jelölésekkel a *szukcesszív integrálás* tétele a következőképpen szól:

5.3.2.1. Tétel (Fubini). *Tegyük fel, hogy* $f \in R(I)$. *Ekkor*

$$\mathbf{m}_f,\ \mathbf{M}_f \in R(I_1);\ \mathbf{m}^f,\ \mathbf{M}^f \in R(I_2),$$

és

$$\int_{I_1} \mathbf{m}_f = \int_{I_1} \mathbf{M}_f = \int_{I_2} \mathbf{m}^f = \int_{I_2} \mathbf{M}^f = \int_I f.$$

Bizonyítás. Legyen $J = J_1 \times J_2 \subset I$ egy részintervalluma az I-nek. Ekkor nyilván

$$m_J(f) = \inf\{f(t,z) : (t,z) \in J\} \le \inf\{f(x,z) : z \in J_2\} = m_{J_2}(f_x) \qquad (x \in J_1).$$

Ezért tetszőleges $\tau = \tau_1 \times \tau_2 \subset I = I_1 \times I_2$ felosztásra (ahol tehát $\tau_1 \subset I_1$, $\tau_2 \subset I_2$ bármilyen felosztások lehetnek), és $J_1 \in \mathcal{F}(\tau_1)$ osztásintervallumra

$$\mathbf{m}_f(x) \geq s(f_x, \tau_2) = \sum_{J_2 \in \mathcal{F}(\tau_2)} m_{J_2}(f_x) \cdot |J_2| \geq \sum_{J_2 \in \mathcal{F}(\tau_2)} m_{J_1 \times J_2}(f) \cdot |J_2| \qquad (x \in J_1).$$

Innen

$$I_*(\mathbf{m}_f) \geq s(\mathbf{m}_f, \tau_1) \geq \sum_{J_1 \in \mathcal{F}(\tau_1)} \sum_{J_2 \in \mathcal{F}(\tau_2)} m_{J_1 \times J_2}(f) \cdot |J_2| \cdot |J_1| = s(f, \tau),$$

tehát (a τ-ban szuprémumot véve)

$$I_*(\mathbf{m}_f) \geq I_*(f) = \int_I f$$

következik. Ugyanígy kapjuk az

$$I^*(\mathbf{m}_f) \leq I^*(f) = \int_I f$$

egyenlőtlenséget, amiből

$$\int_I f \leq I_*(\mathbf{m}_f) \leq I^*(\mathbf{m}_f) \leq \int_I f$$

miatt $I_*(\mathbf{m}_f) = I^*(\mathbf{m}_f) = \int_I f$ következik. Ez nem más, mint az $\mathbf{m}_f$-re vonatkozó állításunk.

A tétel többi állítása analóg módon látható be. ■

Világos, hogy ha az $f : I \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, akkor tetszőleges $x \in I_1$, $y \in I_2$ mellett az f_x, f^y függvények is folytonosak. Következésképpen (ld. 5.1.8. Tétel) $f_x \in R(I_2)$ és $f^y \in R(I_1)$. Ezért azt írhatjuk, hogy

$$\mathbf{m}_f(x) = \mathbf{M}_f(x) = \int_{I_2} f_x \quad (x \in I_1); \ \mathbf{m}^f(y) = \mathbf{M}^f(y) = \int_{I_1} f^y \quad (y \in I_2).$$

Más szóval a „hagyományos" jelölésekkel

$$\mathbf{m}_f(x) = \mathbf{M}_f(x) = \int_{I_2} f(x,y)\, dy \qquad (x \in I_1),$$

és

$$\mathbf{m}^f(y) = \mathbf{M}^f(y) = \int_{I_1} f(x,y)\, dx \qquad (y \in I_2),$$

azaz az előbb belátott 5.3.2.1. Tétel szerint

$$\int_{I_1 \times I_2} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Formálisan megfogalmazva tehát egy kétváltozós folytonos függvény integrálját kiszámíthatjuk úgy is, hogy az egyik változót először (tetszőlegesen) rögzítjük, és a másik változó szerint integrálunk, majd az így kapott (a rögzített változótól függő) integrált integráljuk. (Innen ered a *szukcesszív* (egymás utáni) jelző.) Nyilván ugyanez mondható el általában minden olyan $f \in R(I)$ függvényről, amelyre $f_x \in R(I_2)$, $f^y \in R(I_1)$ $\quad (x \in I_1,\ y \in I_2)$ teljesül. Az alábbi példa azt mutatja, hogy ez nem minden $f \in R(I)$ esetén igaz. Legyen ui.

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & (x = 0,\ y \in \mathbf{Q} \cap [0,1]) \\ \\ 1 & (x = 0,\ y \notin \mathbf{Q} \cap [0,1]) \\ \\ 0 & ((x,y) \in (0,1] \times [0,1]). \end{cases}$$

Ekkor $f_0 \notin R[0,1]$, hiszen az f_0 az ún. Dirichlet-függvény, amelyről mindez jól ismert az $n = 1$ esetből. Gondoljuk meg ugyanakkor, hogy $f \in R([0,1] \times [0,1])$. Ha ui. $0 < \varepsilon < 1$ tetszőlegesen adott, akkor a

$$\tau := \{0, \varepsilon, 1\} \times \{0, 1\} \in \mathcal{F}_{[0,1]\times[0,1]}$$

felosztással nyilván

$$\omega(f,\tau) = o_J(f) \cdot |J| + o_L(f) \cdot |L| = o_J(f) \cdot |J| = |J| = \varepsilon,$$

ahol

$$J := [0,\varepsilon] \times [0,1] \ \ , \ \ L := [\varepsilon, 1] \times [0,1].$$

Ezért (ld. 5.1.2. Tétel) $f \in R([0,1] \times [0,1])$.

5.3.3. Integrálás normáltartományon

Legyen az 5.3.2.1. Tételben $s = n-1$, azaz az $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ alakban valamilyen $k = 1, ..., n$ mellett a

$$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) = (x, y) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$$

előállításra

$$x = (\xi_1, ..., \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, ..., \xi_n) \in \mathbf{R}^{n-1},\ y = \xi_k \in \mathbf{R}.$$

Továbbá $I = I_1 \times I_2$, ahol tehát $I_1 \subset \mathbf{R}^{n-1}$, $I_2 = [a,b] \subset \mathbf{R}$ egy-egy intervallum. Tegyük fel, hogy adottak a

$$g,\ h : I_1 \to I_2$$

folytonos függvények, és

$$g(x) \leq h(x) \qquad (x \in I_1).$$

Ekkor az

$$\mathcal{N} := \{(x,y) \in I : x \in I_1,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}\ (\subset I)$$

halmaz egy ún. *normáltartomány.* Speciálisan minden $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallum is egy normáltartomány (a $g \equiv a$, ill. $h \equiv b$ konstansfüggvényekkel). Tételezzük fel továbbá, hogy az $f : \mathcal{N} \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, és legyen

$$F(\xi) := \begin{cases} 0 & (\xi \in I \setminus \mathcal{N}) \\ \\ f(x) & (\xi \in \mathcal{N}). \end{cases}$$

Lássuk be, hogy $F \in R(I)$, és

$$\int_{\mathcal{N}} f := \int_I F = \int_{I_1} \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

(ahol $g(x) = h(x)$ esetén $\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy := 0$). Valóban, az 5.3.2.1. Tétel jelöléseivel most (pl.) tetszőleges $x \in I_1$ mellett az

$$I_2 \ni y \mapsto F_x(y) = F(x,y)$$

függvény leszűkítése a $[g(x), h(x)]$ intervallumra folytonos, és

$$F_x(y) = 0 \qquad (y \in I_2 \setminus [g(x), h(x)] = [a, g(x)) \cup (h(x), b]).$$

Ezért az F_x szakaszonként folytonos, így $F_x \in R(I_2)$, és

$$\mathbf{m}_F(x) = \int_{I_2} F_x = \int_a^{g(x)} F_x + \int_{g(x)}^{h(x)} F_x + \int_{h(x)}^{b} F_x = \int_{g(x)}^{h(x)} F_x = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy.$$

Az is világos, hogy $F \in \mathcal{C}\{z\}$ $\big(z \in I \setminus (\operatorname{graf} g \cup \operatorname{graf} h)\big)$. Legyen ui. $z = (u,v)$, ahol $u \in I_1$, $v \in I_2$. Ha $g(u) < v < h(u)$, akkor a g, h függvények folytonossága miatt alkalmas $\delta > 0$ számmal és $L \subset \mathbf{R}^{n-1}$ intervallummal $u \in \operatorname{int} L$, és

$$g(x) < v - \delta < v + \delta < h(x) \qquad (x \in L \cap I_1).$$

Más szóval

$$J := (L \times [v - \delta, v + \delta]) \cap I \subset \mathcal{N},$$

tehát $F_{|_J} = f_{|_J}$. Mivel $(\operatorname{int} L) \times (v - \delta, v + \delta)$ nyilván egy környezete a z-nek, ezért $f \in \mathcal{C}\{z\}$ miatt $F \in \mathcal{C}\{z\}$. A $v \in [a, g(u)) \cup (h(u), b]$ esetben hasonlóan kapjuk a z-nek egy olyan K környezetét, amelyre $K \cap I \subset I \setminus \mathcal{N}$. Ekkor $F_{|_K} \equiv 0$, amiből $F \in \mathcal{C}\{z\}$ már következik.

Tudjuk (ld. 5.2. xi) megjegyzés), hogy a $\operatorname{graf} g \cup \operatorname{graf} h$ halmaz nullamértékű, ezért az 5.3.2.1. Tétel szerint $F \in R(I)$, és

$$\int_I F = \int_{I_1} \mathbf{m}_F = \int_{I_1} \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Ha $n=2$, akkor $I_1,\ I_2 \subset \mathbf{R}$, és az alábbi normáltartományokról lehet szó:

$$\mathcal{N}_{21} := \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : u \in I_1,\ g(u) \le v \le h(u)\},$$

$$\mathcal{N}_{22} := \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : v \in I_2,\ g(v) \le u \le h(v)\}.$$

Ennek megfelelően

$$\int_{\mathcal{N}_{21}} f = \int_{I_1} \left(\int_{g(u)}^{h(u)} f(u,v)\,dv \right) du,\ \int_{\mathcal{N}_{22}} f = \int_{I_2} \left(\int_{g(v)}^{h(v)} f(u,v)\,du \right) dv.$$

Hasonlóan, ha $n=3$, akkor $I_1 \subset \mathbf{R}^2$, $I_2 \subset \mathbf{R}$, és

$$\mathcal{N}_{31} := \{(u,v,z) \in \mathbf{R}^3 : (u,v) \in I_1,\ g(u,v) \le z \le h(u,v)\},$$

$$\mathcal{N}_{32} := \{(u,v,z) \in \mathbf{R}^2 : (u,z) \in I_1,\ g(u,z) \le v \le h(u,z)\},$$

$$\mathcal{N}_{33} := \{(u,v,z) \in \mathbf{R}^3 : (v,z) \in I_1,\ g(v,z) \le u \le h(v,z)\},$$

továbbá

$$\int_{\mathcal{N}_{31}} f = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(u,v,z)\,du\,dv \right) dz,\ \int_{\mathcal{N}_{32}} f = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(u,v,z)\,du\,dz \right) dv,$$

$$\int_{\mathcal{N}_{33}} f = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(u,v,z)\,dv\,dz \right) du.$$

5.3.4. Integráltranszformáció

A helyettesítéssel való integrálást illetően idézzük fel az $f \in R[a,b]$ függvényekre vonatkozó „egyváltozós" állítást. Legyen tehát valamilyen kompakt $[\alpha,\beta]$ intervallum esetén adott a $\varphi \in C^1[\alpha,\beta]$ függvény. Tegyük fel, hogy $\mathcal{R}_\varphi = [a,b]$, ahol $a := \varphi(\alpha)$, $b := \varphi(\beta)$. Ekkor tetszőleges $f \in C[a,b]$ függvényre

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi'.$$

Ha $\varphi'(x) > 0$ $(x \in [\alpha,\beta])$, akkor a φ függvény szigorúan monoton növő, következésképpen az $a = \varphi(\alpha) < b = \varphi(\beta)$, és az $\mathcal{R}_\varphi = [a,b]$ feltételek „automatikusan" teljesülnek. Megjegyezzük, hogy ha $\varphi'(x) < 0$ $(x \in [\alpha,\beta])$, akkor a φ függvény szigorúan monoton fogyó, így az előbbi jelölésekkel $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$, és $\mathcal{R}_\varphi = [b,a]$. Ezért $f \in C[b,a]$ esetén

$$\int_b^a f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi',$$

azaz
$$\int_a^b f := -\int_b^a f = -\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\cdot\varphi',$$
amiből formálisan
$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\cdot(-\varphi') = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\cdot|\varphi'|$$
adódik. Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy ha $\varphi'(x)\neq 0\ \ (x\in[\alpha,\beta])$ (azaz a φ' Darboux-tulajdonsága miatt $\varphi'(x)>0\ \ (x\in[\alpha,\beta])$, vagy $\varphi'(x)<0\ \ (x\in[\alpha,\beta])$), akkor
$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\cdot|\varphi'|.$$

A fentiek „többváltozós" megfelelője jóval bonyolultabb. A helyettesítéssel való integrálás (vagy más kifejezéssel az *integráltranszformáció*) egyik változatának a megfogalmazásához legyen $2\leq n\in\mathbf{N}$, $\emptyset\neq U\subset\mathbf{R}^n$ és $\emptyset\neq V\subset\mathbf{R}^n$ egy-egy nyílt halmaz, a $\varphi: U\to V$ egy folytonosan differenciálható bijekció, amelyre
$$\det\varphi'(x)\neq 0 \qquad (x\in U).$$
Jelöljük a továbbiakban az ilyen φ-k halmazát $\mathcal{C}(U,V)$-vel. Tekintsünk ezek után egy kompakt tartójú (ld. 2.) folytonos $f: V\to\mathbf{R}$ függvényt, amelyről feltesszük, hogy
$$\operatorname{supp} f\subset V.$$
Az ilyen f függvények összességét $\mathcal{K}(V)$-vel fogjuk jelölni. Ha $\varphi\in\mathcal{C}(U,V)$, akkor könnyen beláthatóan
$$(f\circ\varphi)\cdot|\det\varphi'|\in\mathcal{K}(U).$$

Legyen $f\in\mathcal{K}(V)$, és
$$F(x) := \begin{cases} f(x) & (x\in V)\\ \\ 0 & (x\in\mathbf{R}^n\setminus V).\end{cases}$$
Mutassuk meg, hogy az F függvény folytonos. Valóban, ha $x\in V$, akkor – lévén a V halmaz nyílt – egy alkalmas $K(x)$ környezetre $K(x)\subset V$. Ezért
$$F_{|_{K(x)}} = f_{|_{K(x)}},$$
és így az f feltételezett folytonossága miatt $F\in\mathcal{C}\{x\}$. Ha viszont $x\in\mathbf{R}^n\setminus V$, akkor a $\operatorname{supp} f\subset V$ tartalmazást figyelembe véve $x\in\mathbf{R}^n\setminus\operatorname{supp} f$. A $\operatorname{supp} f$ kompakt, tehát (ld. 1.7.7. Tétel) zárt is. Más szóval az $\mathbf{R}^n\setminus\operatorname{supp} f$ halmaz nyílt. Van tehát olyan $K(x)$ környezet, amelyre $K(x)\subset\mathbf{R}^n\setminus\operatorname{supp} f$. Bármely $t\in K(x)$ elemre két eset lehetséges:

a) $t \in V$, ekkor $t \notin \operatorname{supp} f$ következtében $F(t) = f(t) = 0$;

b) $t \notin V$, amikor $F(t) = 0$.

Így $F_{|_{K(x)}} \equiv 0$, amiből $F \in \mathcal{C}\{x\}$ már nyilvánvaló. Világos, hogy $\operatorname{supp} F = \operatorname{supp} f$ $(\subset V)$. Ezért f-ről – a folytonosság és a $\operatorname{supp} f \subset V$ tartalmazás mellett – akár azt is feltehetjük, hogy $\mathcal{D}_f = \mathbf{R}^n$. Tudjuk (ld. 1.7.7. Tétel), hogy a $\operatorname{supp} f$ korlátos is. Ezért létezik olyan $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallum, amellyel $\operatorname{supp} f \subset I$. Az előbbi F függvénnyel a $F_{|_I}$ leszűkítés is nyilván folytonos, következésképpen (ld. 5.1.8. Tétel) $F_{|_I} \in R(I)$. Egyszerűen belátható továbbá, hogy az $\int_I F_{|_I}$ integrál nem függ az I-től: ha a $J \subset \mathbf{R}^n$ intervallumra is igaz, hogy $\operatorname{supp} f \subset J$, akkor $\int_I F_{|_I} = \int_J F_{|_J}$. Van értelme tehát az alábbi definíciónak:

$$\int_{\mathbf{R}^n} f := \int_V f := \int_I F_{|_I}$$

(az f (Riemann-) *integrálja*), ahol az I egy előbbi tulajdonságú (tetszőleges) intervallum.

5.3.4.1. Tétel. *Legyen* $2 \le n \in \mathbf{N}$, $\emptyset \ne U \subset \mathbf{R}^n$ *és* $\emptyset \ne V \subset \mathbf{R}^n$ *egy-egy nyílt halmaz,* $\varphi \in \mathcal{C}(U, V)$. *Ekkor bármely* $f \in \mathcal{K}(V)$ *függvényre*

$$\int_V f = \int_U (f \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'|.$$

Bizonyítás. Először is gondoljuk meg, hogy elegendő a tétel alábbi „lokális" változatát belátnunk: minden $y \in V$ pontnak van olyan $K(y)$ környezete, hogy az állításunk minden olyan folytonos $g \in \mathcal{K}(V)$ függvényre igaz, amelyre $\operatorname{supp} g \subset K(y)$, amikor is

$$\int_V g = \int_U (g \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'| \qquad \big(\varphi \in \mathcal{C}(U, V)\big).$$

Ekkor ui. a $\{K(y) : y \in V\}$ halmazrendszer egy nyílt lefedése a kompakt $\operatorname{supp} f$ halmaznak. Ezért (ld. 2.10. Tétel) létezik olyan $s \in \mathbf{N}$ index, valamint vannak olyan $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $(i = 0, ..., s)$ folytonos függvények, hogy

$$f = \sum_{i=0}^{s} f_i,$$

és minden $i = 0, ..., s$ indexre valamilyen $y \in V$ elemmel

$$\operatorname{supp} f_i \subset K(y).$$

Ha tehát igaz a tétel fent megfogalmazott lokális változata, akkor (ld. 5.3.1.1. Tétel)

$$\int_V f = \sum_{i=0}^{s} \int_V f_i = \sum_{i=0}^{s} \int_U (f_i \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'| = \int_U \Big(\sum_{i=0}^{s} f_i\Big) \circ \varphi \cdot |\det \varphi'| = \int_U (f \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'|.$$

Legyen $\emptyset \neq W \subset \mathbf{R}^n$ is nyílt halmaz, $\psi \in \mathcal{C}(V,W)$, és tegyük fel, hogy a tétel állítása mellett

$$\int_W F = \int_V (F \circ \psi) \cdot |\det \psi'|$$

igaz minden $F \in \mathcal{K}(W)$ függvényre. Ekkor

$$\int_W G = \int_U G \circ (\psi \circ \varphi) \cdot |\det (\psi \circ \varphi)'|$$

is igaz, hacsak $G \in \mathcal{K}(W)$. Ui. a feltételek miatt (ld. még 4.1.4. Tétel)

$$\int_W G = \int_V (G \circ \psi) \cdot |\det \psi'| = \int_U \Big(\big((G \circ \psi) \cdot |\det \psi'| \big) \circ \varphi \Big) \cdot |\det \varphi'| =$$

$$\int_U \Big(\big((G \circ \psi) \circ \varphi \big) \cdot (|\det \psi'| \circ \varphi) \Big) \cdot |\det \varphi'| = \int_U \Big(G \circ (\psi \circ \varphi) \Big) \cdot |\det (\psi \circ \varphi)'|.$$

Most mutassuk meg, hogy a tételünk igaz akkor, ha a φ függvény csereoperátor (ld. 4.5.). A „technikai" egyszerűség érdekében ezt csak $n = 2$ esetén részletezzük. Ekkor tehát $\varphi = T_{12} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, azaz

$$\varphi(x,y) = (y,x) \qquad \Big((x,y) \in U := \mathbf{R}^2 \Big).$$

Legyen az $a > 0$ olyan szám, amellyel

$$\operatorname{supp} f \subset [-a,a] \times [-a,a],$$

ekkor $\operatorname{supp}(f \circ \varphi) \subset [-a,a] \times [a,a]$, és a szukcesszív integrálás (ld. 5.3.2.1. Tétel) szerint

$$\int_{\mathbf{R}^2} (f \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'| = \int_{\mathbf{R}^2} f \circ \varphi = \int_{[-a,a]^2} f \circ \varphi =$$

$$\int_{-a}^{a} \left(\int_{-a}^{a} f(y,x)\, dx \right) dy = \int_{-a}^{a} \left(\int_{-a}^{a} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{[-a,a]^2} f = \int_{\mathbf{R}^2} f.$$

Lássuk be, hogy a tételünk igaz akkor is, ha a φ egyszerű leképezés (ld. 4.5.). Legyen továbbra is $n = 2$, ekkor alkalmas I, $J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumokkal és egy $s : I \times J \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvénnyel (pl.)

$$\varphi(x,y) = \Big(s(x,y), y \Big) \qquad \Big((x,y) \in I \times J \Big).$$

Mivel

$$\varphi'(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_1 s(x,y) & \partial_2 s(x,y) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Big((x,y) \in I \times J \Big),$$

ezért

$$\det \varphi'(x,y) = \partial_1 s(x,y) \neq 0 \qquad \big((x,y) \in I \times J\big).$$

Tehát tetszőleges $y \in J$ esetén (ld. 5.3.2.) az

$$I \ni x \mapsto s^y(x) := s(x,y)$$

függvényre

$$\big(s^y\big)'(x) = \partial_1 s(x,y) \neq 0 \qquad (x \in I).$$

A deriváltfüggvények Darboux-tulajdonsága szerint

$$\big(s^y\big)'(x) > 0 \quad (x \in I) \ \text{ vagy } \ \big(s^y\big)'(x) < 0 \quad (x \in I),$$

azaz az s^y függvény szigorúan monoton, az értékkészlete pedig egy I_y nyílt intervallum. Így

$$V = \mathcal{R}_\varphi = \bigcup_{y \in J} (I_y \times \{y\}).$$

A feltételek miatt $\operatorname{supp} f$ egy kompakt részhalmaza a V-nek, ezért egy-egy megfelelő kompakt $K,\, L \subset \mathbf{R}$ intervallummal $L \subset J$ és $\operatorname{supp} f \subset K \times L$. Továbbá minden $y \in L$ mellett az

$$f^y(x) := f(x,y) \quad (x \in I_y)$$

egyváltozós valós függvény folytonos, és kompakt tartójú. Ez azt jelenti, hogy alkalmasan választott $a_y,\, b_y \in I_y,\ a_y < b_y$ számokkal

$$\operatorname{supp} f^y \subset [a_y, b_y] \subset K.$$

Következésképpen (ld. 5.3.2.1. Tétel)

$$\int_V f = \int_{K \times L} f = \int_L \left(\int_K f(x,y)\,dx \right) dy = \int_L \left(\int_{a_y}^{b_y} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Tegyük fel, hogy $y \in L$, és

$$\big(s^y\big)'(x) = \partial_1 s(x,y) > 0 \qquad (x \in I),$$

azaz az s^y függvény szigorúan monoton fogyó. (A $\partial_1 s(x,y) < 0$ $(x \in I)$ esetben a továbbiak értelemszerűen módosíthatók.) Legyenek az $\alpha_y,\, \beta_y \in I$ olyan számok, hogy

$$s^y(\alpha_y) = s(\alpha_y, y) = a_y,\ s^y(\beta_y) = s(\beta_y, y) = b_y.$$

Így alkalmazható az $n = 1$ esetre fentebb idézett helyettesítéses integrálás „szabálya":

$$\int_{a_y}^{b_y} f(x,y)\,dx = \int_{\alpha_y}^{\beta_y} f\big(s^y(t), y\big) \cdot \big(s^y\big)'(t)\,dt = \int_{\alpha_y}^{\beta_y} f(s(t,y), y) \cdot \partial_1 s(t,y)\,dt.$$

Ezért az előbbiekre tekintettel

$$\int_V f = \int_L \left(\int_{\alpha_y}^{\beta_y} f(s(t,y),y)\cdot \partial_1 s(t,y)\,dt\right) dy = \int_L \left(\int_{\alpha_y}^{\beta_y} f\big(\varphi(t,y)\big)\cdot |\det \varphi'(t,y)|\,dt\right) dy.$$

Mivel $(f\circ\varphi)\cdot|\det\varphi'| \in \mathcal{K}(I\times J)$, ezért a $\operatorname{supp}\big((f\circ\varphi)\cdot|\det\varphi'|\big)$ kompakt részhalmaza az $I\times J$-nek. Így (a φ függvény, valamint az előbbi L intervallum definíciója alapján) valamilyen kompakt $T\subset I$ intervallummal $\operatorname{supp}\big((f\circ\varphi)\cdot|\det\varphi'|\big)\subset T\times L$, és $[\alpha_y,\beta_y]\subset T$ $(y\in L)$. Ismét alkalmazva az előbb idézett szukcesszív integrálást, ezzel azt kapjuk, hogy

$$\int_V f =$$

$$\int_L \left(\int_{\alpha_y}^{\beta_y} f\big(\varphi(t,y)\big)\cdot |\det \varphi'(t,y)|\,dt\right) dy = \int_L \left(\int_T f\big(\varphi(t,y)\big)\cdot |\det \varphi'(t,y)|\,dt\right) dy =$$

$$\int_T \left(\int_L f\big(\varphi(t,y)\big)\cdot |\det \varphi'(t,y)|\,dy\right) dt =$$

$$\int_{T\times L} f\big(\varphi(t,y)\big)\cdot |\det \varphi'(t,y)|\,dt\,dy = \int_{I\times J} (f\circ\varphi)\cdot|\det\varphi'|.$$

A fentieket figyelembe véve a bizonyítás befejezéséül elegendő már csak a 4.5.4.2. Tételre hivatkozni. ■

5.3.5. Jordan-mérték

Az alábbiakban (általában a bizonyítási részletek mellőzésével) egy rövid áttekintést adunk az ún. Jordan-mértékről, és ennek alapján a Riemann-integrál fogalmának egy lehetséges kiterjesztéséről. Mindennek az eredményeként eléggé általános feltételek mellett megfogalmazunk egy, az integráltranszformációval kapcsolatos állítást.

Ehhez először is valamilyen $1\le n\in\mathbf{N}$ mellett tekintsük az $f\in\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ függvényt. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{D}_f\subset\mathbf{R}^n$ értelmezési tartomány korlátos halmaz. Ekkor van olyan $I\subset\mathbf{R}^n$ intervallum, amellyel $\mathcal{D}_f\subset I$, legyen (ld. 5.3.4.)

$$F_I(x) := \begin{cases} f(x) & (x\in\mathcal{D}_f) \\ \\ 0 & (x\in I\setminus\mathcal{D}_f). \end{cases}$$

Nem nehéz meggondolni, hogy ha $F_I\in R(I)$, akkor minden olyan $J\subset\mathbf{R}^n$ intervallumra, amelyre $\mathcal{D}_f\subset J$, szintén $F_J\in R(J)$, és $\int_I F_I = \int_J F_J$. Ez ad értelmet az alábbi definíciónak:

az f függvény (Riemann-) *integrálható,* ha egy alkalmas $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallummal $\mathcal{D}_f \subset I$, és $F_I \in R(I)$. Az utóbbi esetben

$$\int_{\mathcal{D}_f} f := \int_I F_I$$

az f (Riemann-, vagy másképp határozott) *integrálja.*

Világos, hogy ha a $\mathcal{D}_f$ intervallum, akkor visszakapjuk az integrálhatóság, ill. az integrál „eredeti" definícióját. Speciálisan, ha $\mathcal{D}_f$ normáltartomány, és az f folytonos, akkor (ld. 5.3.3.) az f integrálható.

Könnyen kiterjeszthetjük a fenti értelmezést olyan $f \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényekre is, amelyekre esetleg a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány nem korlátos, de a $\operatorname{supp} f$ halmaz pl. kompakt: ekkor az előbbi $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallumtól azt követeljük meg, hogy $\operatorname{supp} f \subset I$.

Legyen az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^n$ halmaz korlátos,

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ \\ 0 & (x \in \mathbf{R}^n \setminus A) \end{cases}$$

az A *karakterisztikus függvénye.* Azt mondjuk, hogy az A halmaz *Jordan-mérhető,* ha a χ_A függvény integrálható, amikor is a

$$\mu(A) := \int_{\mathbf{R}^n} \chi_A$$

nemnegatív szám az A halmaz *Jordan-mértéke.* Nyilvánvaló, hogy minden $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallum Jordan-mérhető, és $\mu(I) = |I|$. Ha pl. az $A := \mathcal{N}$ egy normáltartomány (ld. 5.3.3.), akkor – lévén az $f := \chi_{\mathcal{N}}$ jelöléssel az $f_{|\mathcal{N}} \equiv 1$ függvény folytonos – az $\mathcal{N}$ Jordan-mérhető, és (az 5.3.3. pontbeli jelölésekkel)

$$\mu(\mathcal{N}) = \int_{\mathbf{R}^n} \chi_{\mathcal{N}} = \int_{I_1} \Big(h(x) - g(x)\Big) dx.$$

Pl. az $n = 2$ esetben az

$$\mathcal{N} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [-1, 1],\, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$$

halmaz (félkörlemez) normáltartomány, ahol

$$g(x) := 0,\ h(x) := \sqrt{1 - x^2} \qquad (-1 \leq x \leq 1).$$

Ezért

$$\mu(\mathcal{N}) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t))\, dt = \frac{\pi}{2}$$

(a félkörlemez „jól ismert" területe). Ugyanakkor az

$$A := \{x \in [0,1] : x \in \mathbf{Q}\}$$

halmaz (a $[0,1]$-beli racionális számok halmaza) nem Jordan-mérhető, ui. (pl.) az $I := [0,1]$ választással az

$$F(x) := \begin{cases} \chi_A(x) = 1 & (x \in A) \\ \\ 0 & (x \in [0,1] \setminus A) \end{cases}$$

függvény a Dirichlet-függvény, ami nem Riemann-integrálható.

Tetszőleges véges $A \subset \mathbf{R}^n$ halmaz Jordan-mérhető, és $\mu(A) = 0$. Valóban, az A nyilván korlátos. Ha $I \subset \mathbf{R}^n$ olyan intervallum, amelyre $A \subset I$, akkor az

$$F(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ \\ 0 & (x \in I \setminus A) \end{cases}$$

függvény csak a (véges) A halmaz pontjaiban különbözik az I-n értelmezett $f \equiv 0$ függvénytől. Tehát (ld. 5.1.7. Tétel) az F integrálható, azaz az A Jordan-mérhető, és

$$\mu(A) = \int_{\mathbf{R}^n} \chi_A = \int_I F = \int_I f = 0.$$

Vizsgáljuk meg „topológiailag" azt, hogy mit is jelent egy korlátos $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^n$ halmaz Jordan-mérhetősége, ill. a Jordan-mértéke. Legyen ehhez $I \subset \mathbf{R}^n$ olyan intervallum, amelyre $A \subset I$, és tekintsük az

$$F(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ \\ 0 & (x \in I \setminus A) \end{cases}$$

függvényt. Ha $\tau \in \mathcal{F}_I$ egy felosztása az I intervallumnak (ld. 5.1.), akkor az

$$m_J := \inf\{F(x) : x \in J\},\ M_J := \sup\{F(x) : x \in J\}$$

jelölésekkel az

$$s(F,\tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} m_j \cdot |J|,\ S(F,\tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} M_j \cdot |J|$$

az F függvénynek a τ-hoz tartozó alsó, ill. felső összege (ld. 5.1). Ha $J \in \mathcal{F}(\tau)$ egy osztásintervallum, akkor nyilvánvaló, hogy

$$m_J = \begin{cases} 0 & (J \not\subset A) \\ \\ 1 & (J \subset A) \end{cases},\ M_J = \begin{cases} 1 & (J \cap A \neq \emptyset) \\ \\ 0 & (J \cap A = \emptyset). \end{cases}$$

Legyen

$$A(\tau) := \{J \in \mathcal{F}(\tau) : J \subset A\}, \ B(\tau) := \{K \in \mathcal{F}(\tau) : K \cap A \neq \emptyset\},$$

ekkor $A(\tau) \subset B(\tau)$, és

$$\bigcup_{J \in A(\tau)} J \subset A \subset \bigcup_{K \in B(\tau)} K,$$

továbbá

$$s(F, \tau) = \sum_{J \in A(\tau)} |J|, \ S(F, \tau) = \sum_{K \in B(\tau)} |K|.$$

Tehát az $I_*(F)$, $I^*(F)$ Darboux-integrálokról a következőket mondhatjuk:

$$I_*(F) = \sup\{s(F, \tau) : \tau \in \mathcal{F}_I\} = \sup\Big\{\sum_{J \in A(\tau)} |J| : \tau \in \mathcal{F}_I\Big\},$$

$$I^*(F) = \inf\{S(F, \tau) : \tau \in \mathcal{F}_I\} = \inf\Big\{\sum_{K \in B(\tau)} |K| : \tau \in \mathcal{F}_I\Big\}.$$

Ha $\tau \in \mathcal{F}_I$, akkor a $\sum_{J \in A(\tau)} |J|$ összeg véges sok olyan intervallum mértékének (hosszának, területének, térfogatának, ...) az összege (vagy nulla, ha $A(\tau) = \emptyset$), amelyek egyesítése részhalmaza az A-nak. Az itt szereplő J intervallumok olyanok, hogy

$$(\operatorname{int} J) \cap (\operatorname{int} L) = \emptyset \qquad (J,\ L \in A(\tau),\ J \neq L)$$

(az $A(\tau)$ elemei páronként „lényegében" diszjunktak). Jelöljük a továbbiakban $\mathcal{B}_A$-val az összes olyan U halmaz alkotta halmazrendszert, ahol az U véges sok, páronként lényegében diszjunkt $J \subset A$ intervallumból áll. Minden ilyen U esetén legyen

$$|U| := \sum_{J \in U} |J|.$$

Könnyen belátható, hogy

$$I_*(F) = \mu_*(A) := \sup\{|U| : U \in \mathcal{B}_A\}$$

az A halmaz ún. (Jordan szerinti) *belső mértéke.*

Hasonlóan, legyen $\mathcal{K}_A$ az összes olyan V halmaz alkotta halmazrendszer, ahol a V halmaz véges sok $\mathbf{R}^n$-beli intervallum egyesítése, és $A \subset \bigcup_{K \in V} K$. Ha $V \in \mathcal{K}_A$, akkor legyen

$$|V| := \sum_{K \in V} |K|.$$

Azt sem nehéz belátni, hogy

$$I^*(F) = \mu^*(A) := \inf\{|V| : V \in \mathcal{K}_A\}$$

az A halmaz ún. (Jordan szerinti) *külső mértéke.* Tehát az A halmaz akkor és csak akkor Jordan-mérhető, ha $I_*(F) = I^*(F)$, azaz, ha $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. Az utóbbi esetben

$$\mu(A) = \int_I F = I_*(F) = I^*(F),$$

más szóval

$$\mu(A) = \mu_*(A) = \mu^*(A).$$

Világos, hogy általában minden korlátos $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^n$ halmazra

$$0 \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A).$$

Ezért $\mu^*(A) = 0$ esetén $\mu_*(A) = 0$, így az A Jordan-mérhető, és $\mu(A) = 0$.

Jegyezzük meg az alábbiakat: ha $U \in \mathcal{B}_A$ és $J \in U$, akkor $J \subset A$ miatt egyúttal $\operatorname{int} J \subset A$, így $\operatorname{int} J \subset \operatorname{int} A$, ahol $|J| = |\operatorname{int} J|$. Ha $\delta > 0$, akkor nyilván van olyan $\tilde{J} \subset \operatorname{int} J$ intervallum, amelyre

$$|J| - |\tilde{J}| < \delta.$$

Legyen (az előbb mondottaknak megfelelően)

$$\widetilde{U} := \{\tilde{J} : J \in U\},$$

ekkor

$$\bigcup_{\tilde{J}\in\widetilde{U}} \tilde{J} \subset \bigcup_{J\in U} J \subset A,\ \tilde{J} \cap \tilde{L} = \emptyset \quad (\tilde{J},\, \tilde{L} \in \tilde{U},\, \tilde{J} \neq \tilde{L}),\ |U| - |\tilde{U}| < k\cdot \delta.$$

(Itt a $k \in \mathbf{N}$ az U halmazt alkotó intervallumok száma.) Az is nyilvánvaló tehát, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett van olyan $\delta > 0$, amellyel $|U| - |\tilde{U}| < \varepsilon$. Mindebből már egyszerűen következik az, hogy

$$\mu_*(A) = \sup\{|U| : U \in \widetilde{\mathcal{B}}_A\},$$

ahol $\widetilde{\mathcal{B}}_A$ az összes olyan U halmazból álló halmazrendszer, ahol az U véges sok, páronként lényegében diszjunkt $J \subset \operatorname{int} A$ intervallum egyesítése.

Valamilyen (X, ρ) metrikus tér és $A \subset X$ halmaz esetén (ld. 1.7.) az

$$\hat{A} := \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$$

halmazt az A *határának* nevezzük. Ha $x \in X$, akkor $x \in \hat{A}$ azzal ekvivalens, hogy bármilyen $K(x)$ környezetre

$$K(x) \cap A \neq \emptyset \ \text{ és } \ K(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

Pl. (ld. 1.2. iv) megjegyés) az $(X, \rho) := (\mathbf{R}, \rho_1)$ esetben az $A := [a, b] \quad (a,\, b \in \mathbf{R},\, a < b)$ intervallum határa:

$$\hat{A} = \{a, b\}.$$

Hasonlóan, ha $(X,\rho) := (\mathbf{R}^2, \rho_2)$, akkor az $A := K_1((0,0))$ körlemez határa az

$$\hat{A} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

körvonal. Az is egyszerűen adódik, hogy az

$$(X,\rho) := (\mathbf{R}^n, \rho_p) \qquad (1 \le n \in \mathbf{N},\ 1 \le p \le +\infty)$$

választással az

$$I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

intervallumra

$$\hat{I} = \bigcup_{i=1}^{n} \Big([a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times \{a_i, b_i\} \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

(azaz az I intervallum végpontjai $(n = 1)$, az I téglalap kerülete $(n = 2)$, az I téglatest felülete $(n = 3)$, ...)

Ha az $\emptyset \ne A \subset \mathbf{R}^n$ korlátos halmaz, és $U \in \widetilde{\mathcal{B}}_A$, $V \in \mathcal{K}_A$, akkor

$$\bigcup_{J \in U} J \subset \operatorname{int} A \subset A \subset \bigcup_{K \in V} K.$$

Mivel az értelmezéseink szerint az „intervallum" zárt halmaz, és a V véges, ezért (ld. 1.7.2. Tétel) $\bigcup_{K \in V} K$ zárt halmaz. Következésképpen $\overline{A} \subset \bigcup_{K \in V} K$, így $\hat{A} \subset \bigcup_{K \in V} K$. Továbbá $\bigcup_{J \in U} J \subset \operatorname{int} A$ miatt

$$\hat{A} \subset \bigcup_{K \in V} K \setminus \bigcup_{J \in U} J.$$

Ha az A halmaz Jordan-mérhető, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az előbbi U, V halmazok megválaszthatók úgy, hogy

$$|V| - \mu(A) < \varepsilon/2,\ \mu(A) - |U| < \varepsilon/2.$$

Így

$$|V| - |U| = |V| - \mu(A) + \Big(\mu(A) - |U|\Big) < \varepsilon.$$

Könnyű meggondolni, hogy az $\bigcup_{K \in V} K \setminus \bigcup_{J \in U} J$ halmaz véges sok, páronként lényegében diszjunkt intervallum egyesítése, amelyek mértékeinek az összege $|V| - |U|$. Az előbbiek szerint tehát (Jordan-)mérhető A halmaz esetén az A határát, $\hat{A}$-t bármilyen $\varepsilon > 0$ szám mellett le tudjuk fedni véges sok olyan intervallummal, amelyek összmértéke ε-nál kisebb. Ez azt jelenti, hogy $\mu^*(\hat{A}) = 0$, így $\hat{A}$ Jordan-mérhető, és $\mu(\hat{A}) = 0$.

Nem nehéz belátni, hogy mindez fordítva is igaz, más szóval: a korlátos $\emptyset \ne A \subset \mathbf{R}^n$ halmaz akkor és csak akkor Jordan-mérhető, ha az $\hat{A}$ halmaz is az és $\mu(\hat{A}) = 0$. Pl. az 5.2.

xi) megjegyzésben egy $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbf{R}$ folytonos függvényről valójában azt láttuk be, hogy a

$$\operatorname{graf} f := \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^{n+1} : x \in I\}$$

halmaz ($\mathbf{R}^{n+1}$-beli) Jordan-mértéke nulla. (Nyilván minden Jordan szerint mérhető és nulla Jordan-mértékű halmaz Lebesgue-értelemben (ld. 5.1.) nullamértékű halmaz.)

A Jordan-mérhetőség, ill. a Jordan-mérték karakterisztikus tulajdonsága a következő: ha valamilyen $k \in \mathbf{N}$ mellett az $A_0, ..., A_k \subset \mathbf{R}^n$ halmazok valamennyien Jordan-mérhetők, akkor az $A := \bigcup_{i=0}^k A_i$ halmaz is Jordan-mérhető. Ha még az A_i-k lényegében páronként diszjunktak, azaz

$$(\operatorname{int} A_i) \cap (\operatorname{int} A_j) = \emptyset \qquad (i \neq j = 0, ..., k),$$

akkor

$$\mu\Big(\bigcup_{i=0}^{k} A_i\Big) = \sum_{i=0}^{k} \mu(A_i)$$

(a Jordan-mérték *additív*). Jegyezzük meg, hogy ha $A \subset \mathbf{R}^n$ Jordan-mérhető, akkor a belseje, $\operatorname{int} A$ is az, és

$$\mu(\operatorname{int} A) = \mu(A).$$

Jordan-mérhető A, B, A_0, ..., $A_k \subset \mathbf{R}^n$ $(k \in \mathbf{N})$ halmazokra az

$$A \setminus B, \ \bigcap_{i=0}^{k} A_i$$

halmazok is Jordan-mérhetők. Ha itt $A \subset B$, akkor

$$\mu(A) \leq \mu(B), \ \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

A későbbiek szempontjából alapvető fontosságú a következő állítás:

5.3.5.1. Tétel. *Legyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$, a $g \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ pedig egy nyílt halmazon értelmezett, folytonosan differenciálható függvény, az $A \subset \mathcal{D}_g$ Jordan-mérhető, kompakt halmaz. Ekkor*

a) *a $g[\hat{A}]$ képhalmaz is Jordan-mérhető, és $\mu(g[\hat{A}]) = 0$;*

b) *ha $g[\operatorname{int} A] \subset \operatorname{int}(g[A])$, akkor a $g[A]$ képhalmaz Jordan-mérhető;*

c) *ha $\det g'(x) \neq 0$ $(x \in \mathcal{D}_g)$, akkor a $g[A]$ képhalmaz Jordan-mérhető.*

Tudjuk (ld. 2.4. Tétel), hogy a $g[A]$ is kompakt. Az inverzfüggvény-tétel (ld. 4.5.4.1. Tétel) alapján a c)-beli feltételből következik a b)-beli feltétel. Ha ez utóbbi igaz, akkor

$$\widehat{g[A]} \subset g[\hat{A}],$$

ezért a) szerint $\mu(\widehat{g[A]}) = 0$, azaz $g[A]$ Jordan-mérhető.

Tekintsük az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^n$ Jordan szerint mérhető halmazt. Azt mondjuk, hogy a

$$\mathcal{P} := \{A_0, ..., A_k\}$$

halmazrendszer egy *felbontása* az A-nak, ha $k \in \mathbf{N}$, és az alábbiak teljesülnek:

- $A_i \ \ (i = 0, ..., k)$ Jordan-mérhető;
- $(\operatorname{int} A_i) \cap (\operatorname{int} A_j) = \emptyset \ \ (i \neq j = 0, ..., k)$;
- $\bigcup_{i=0}^{k} A_i = A$.

Ha az $f : A \to \mathbf{R}$ függvény korlátos, akkor legyen az előbbi $\mathcal{P}$ mellett

$$m_i := \inf\{f(x) : x \in A_i\}, \ M_i := \sup\{f(x) : x \in A_i\} \qquad (i = 0, ..., k),$$

és

$$s(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{k} m_i \cdot \mu(A_i), \ S(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=0}^{k} M_i \cdot \mu(A_i)$$

a $\mathcal{P}$-hez tartozó *alsó összeg* és *felső összeg.* Azt mondjuk, hogy a

$$\mathcal{Q} = \{B_0, ..., B_j\} \qquad (j \in \mathbf{N})$$

felbontás egy *finomítása* a $\mathcal{P}$-nek, ha minden $i = 0, ..., j$ indexre van olyan $l = 0, ..., k$, hogy $B_i \subset A_l$. Ekkor

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{Q}), \ S(f, \mathcal{P}) \geq S(f, \mathcal{Q}).$$

Az 5.1.1. Tételhez hasonlóan látható be, hogy az A tetszőleges $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$ felbontásaira

$$s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{R}).$$

Következésképpen $\mathcal{F}(A)$-val jelölve az A felbontásainak a halmazát azt kapjuk, hogy az

$$I_*(f) := \sup\{s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathcal{F}(A)\}, \ I^*(f) := \inf\{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathcal{F}(A)\}$$

Darboux-féle *alsó integrál,* ill. *felső integrál* véges, valamint

$$I_*(f) \leq I^*(f).$$

Az f függvényt (Riemann-) *integrálhatónak* nevezzük, ha $I_*(f) = I^*(f)$, ekkor

$$\int_A f := \int_A f(x)\, dx := I_*(f) = I^*(f)$$

az f függvény (Riemann-)*integrálja.* Jelöljük az ilyen függvények összességét az $R(A)$ szimbólummal. Világos, hogy ha $f,\, g \in R(A)$, és $f \leq g$, akkor $\int_A f \leq \int_A g$. Továbbá $f \equiv 1$ esetén $\int_A f = \mu(A)$.

Az előbbi $\mathcal{P} = \{A_0, ..., A_k\} \in \mathcal{F}(A)$ felbontás esetén a

$$\delta_{\mathcal{P}} := \max\{\sup\{\|x - y\| : x, y \in A_i\} : i = 0, ..., k\}$$

szám a $\mathcal{P}$ felbontás *finomsága.* Igaz marad az 5.1.3. Tétel alábbi megfelelője:

5.3.5.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^n$ Jordan-mérhető halmazon adott az $f : A \to \mathbf{R}$ korlátos függvény. Ekkor:*

a) *tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy*

$$|s(f,\mathcal{P}) - I_*(f)| < \varepsilon,\ |S(f,\mathcal{P}) - I^*(f)| < \varepsilon \qquad (\mathcal{P} \in \mathcal{F}(A),\, \delta_{\mathcal{P}} < \delta);$$

b) *az f függvény akkor és csak akkor integrálható, ha létezik olyan $q \in \mathbf{R}$ szám, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett egy alkalmas $\delta > 0$ számmal*

$$\Big|\sum_{i=0}^{k} f(\xi_i)\cdot \mu(A_i) - q\Big| < \varepsilon$$

igaz minden $\mathcal{P} = \{A_0, ..., A_k\} \in \mathcal{F}(A),\, \xi_i \in A_i \quad (i = 0, ..., k)$ esetén, hacsak $\delta_{\mathcal{P}} < \delta$.

Ha $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(A)$, akkor

$$\omega(f,\mathcal{P}) := S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P})$$

a $\mathcal{P}$ felbontáshoz tartozó *oszcillációs összeg.* Világos, hogy az 5.1.2. Tétel „átvihető" a most értelmezett Jordan-mérték szerinti integrálra. Nevezetesen, igaz az

5.3.5.3. Tétel. *Tetszőleges $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^n$ Jordan-mérhető halmaz és $f : A \to \mathbf{R}$ korlátos függvény esetén az f akkor és csak akkor integrálható, ha bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(A)$ felbontás, hogy $\omega(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$.*

Innen (ld. 5.1.4. Tétel) rögtön következik, hogy $f \in R(A)$ esetén $|f| \in R(A)$, és

$$\Big|\int_A f\Big| \leq \int_A |f|.$$

Speciálisan, ha valamilyen $C \geq 0$ korláttal $|f(x)| \leq C \quad (x \in A)$, akkor

$$\Big|\int_A f\Big| \leq C\cdot \mu(A).$$

Az 5.1.8. Tétel alábbi változata is adódik az oszcillációs összegekkel való jellemzésből:

5.3.5.4. Tétel. *Ha az $f : A \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^n$ halmaz kompakt és Jordan-mérhető, akkor az f integrálható.*

Annyit kell csupán megjegyeznünk, hogy tetszőleges $\mathcal{P} = \{A_0, ..., A_k\}$ felbontásra az $\overline{A}_i$ halmazokra (az A kompaktsága miatt) $\overline{A}_i \subset A$ teljesül, így $\overline{A}_i \quad (i = 0, ..., k)$ is kompakt. A 2.4. Tétel miatt ezért léteznek olyan $\xi_i,\, \eta_i \in \overline{A}_i \quad (i = 0, ..., k)$ pontok, hogy

$$f(\xi_i) = \max\{f(x) : x \in \overline{A}_i\} = \sup\{f(x) : x \in A_i\} = M_i \qquad (i = 0, ..., k),$$

$$f(\eta_i) = \min\{f(x) : x \in \overline{A}_i\} = \inf\{f(x) : x \in A_i\} = m_i \qquad (i = 0, ..., k).$$

Ezért

$$\omega(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{k} \Big(f(\xi_i) - f(\eta_i)\Big)\cdot \mu(A_i).$$

Az f egyenletes folytonossága (ld. 2.6. Tétel) szerint minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon \qquad (u,\, v \in A,\, \|u - v\| < \delta).$$

Nem nehéz meggondolni ugyanakkor, hogy az előbbi $\mathcal{P} = \{A_0, ..., A_k\} \in \mathcal{F}(A)$ felbontás megválasztható úgy, hogy $\delta_{\mathcal{P}} < \delta$, amikor is

$$\omega(f, \mathcal{P}) \leq \varepsilon\cdot \sum_{i=0}^{k} \mu(A_i) = \varepsilon\cdot \mu(A).$$

Az integrál linearitása az 5.3.1.1. Tétellel analóg módon „intézhető el": ha $f,\, g \in R(A)$ és $\lambda \in \mathbf{R}$, akkor $f + \lambda\cdot g \in R(A)$, valamint

$$\int_A (f + \lambda\cdot g) = \int_A f + \lambda\cdot \int_A g.$$

Az 5.1.5. Tétel megfelelője is igaz marad az alábbi értelemben. A megfogalmazáshoz állapodjunk meg a következőkben: ha $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^n$, $f : A \to \mathbf{R}$, és $\emptyset \neq B \subset A$, akkor az $f \in R(B)$ szimbólum jelentse azt, hogy $f_{|B} \in R(B)$ (az f függvény *integrálható a B halmazon*). Ha $f \in R(B)$, akkor legyen $\int_B f := \int_B f_{|B}$ (az f *integrálja a B-n*).

5.3.5.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^n$ Jordan-mérhető halmazon adott az $f \in R(A)$ függvény. Ekkor az A tetszőleges $\mathcal{P} = \{A_0, ..., A_k\} \in \mathcal{F}(A)$ $(k \in \mathbf{N})$ felbontása esetén $f \in R(A_i)$ $(i = 0, ..., k)$, és*

$$\int_A f = \sum_{i=0}^{k} \int_{A_i} f.$$

A helyettesítéssel való integrálás (integráltranszformáció) (ld. 5.3.4.1. Tétel) egy kiterjesztett változata az

5.3.5.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy a nyílt halmazon értelmezett $g \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ függvény folytonosan differenciálható és injektív, valamint $\det g'(x) \neq 0$ $(x \in \mathcal{D}_g)$. Legyen továbbá az $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_g$ halmaz Jordan-mérhető és kompakt, az $f : g[A] \to \mathbf{R}$ függvény pedig integrálható. Ekkor az*

$$A \ni x \mapsto f(g(x) \cdot |\det g'(x)|$$

függvény is integrálható, és

$$\int_A f(g(x)) \cdot |\det g'(x)| \, dx = \int_{g[A]} f.$$

Megjegyezzük, hogy az 5.3.5.1. Tétel szerint a $g[A]$ képhalmaz Jordan-mérhető.

Könnyű egy példával illusztrálni (már $n = 1$ esetén is), hogy itt a g injektivitása (legalább az $\operatorname{int} A$ halmazon) lényeges. Ugyanakkor a $\det g'(x) \neq 0$ $(x \in \mathcal{D}_g)$ feltétel elhagyható. Ez részben következik az alábbi, ún. Sard-tételből:

5.3.5.7. Tétel. *Legyen a nyílt halmazon definiált $g \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ függvény folytonosan differenciálható, $B := \{x \in \mathcal{D}_g : \det g'(x) = 0\}$, $A \subset \mathcal{D}_g$ kompakt halmaz. Ekkor a $g[A \cap B]$ képhalmaz Jordan-mérhető, és $\mu(g[A \cap B]) = 0$.*

Mindezeket felhasználva belátható az integráltranszformációval kapcsolatos következő, eléggé általános feltételek melletti állítás:

5.3.5.8. Tétel. *Tekintsük a nyílt halmazon értelmezett és folytonosan differenciálható $g \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ függvényt. Tegyük fel, hogy az $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_g$ halmaz Jordan-mérhető és kompakt, továbbá az A belsejére való $g_{|\mathrm{int}\, A}$ leszűkítés injektív függvény. Ekkor:*

a) *a $g[A]$ képhalmaz kompakt, Jordan-mérhető halmaz;*

b) *az $f : g[A] \to \mathbf{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor integrálható, ha az*

$$A \ni x \mapsto f(g(x)) \cdot |\det g'(x)|$$

függvény is integrálható;

c) *ha a b)-beli f függvény integrálható, akkor*

$$\int_A f(g(x)) \cdot |\det g'(x)|\, dx = \int_{g[A]} f.$$

5.4. Megjegyzések

i) Legyen $2 \leq n \in \mathbf{N}$, és az $I \subset \mathbf{R}^n$ intervallum esetén tekintsük az 5.3.2. pontban a valamilyen $s = 1, ..., n-1$ mellett az $I_1 \subset \mathbf{R}^s$, $I_2 \subset \mathbf{R}^{n-s}$ intervallumokkal bevezetett $I = I_1 \times I_2$ felbontást. Ha $f : I \to \mathbf{R}$ egy korlátos függvény, akkor az

$$f_x(z) := f(x, z) \quad (z \in I_2),\ f^y(t) := f(t, y) \quad (t \in I_1)$$

jelölésekkel vegyük az

$$m_f(x) := I_*(f_x),\ M_f(x) := I^*(f_x) \qquad (x \in I_1),$$

$$m^f(y) := I_*(f^y),\ M^f(y) := I^*(f^y) \qquad (y \in I_2)$$

Darboux-féle alsó (felső) integrálfüggvényeket. Az 5.3.2.1. Tétel szerint – feltéve, hogy $f \in R(I)$ – $m_f,\ M_f \in R(I_1),\ m^f,\ M^f \in R(I_2)$, és

$$\int_I f = \int_{I_1} m_f = \int_{I_1} M_f = \int_{I_2} m^f = \int_{I_2} M^f.$$

Világos, hogy $m_f \leq M_f$ és $m^f \leq M^f$, így (ld. 5.3.1.1. Tétel)

$$0 \leq M_f - m_f \in R(I_1),\ 0 \leq M^f - m^f \in R(I_2),$$

és

$$\int_{I_1} (M_f - m_f) = \int_{I_2} (M^f - m^f) = 0.$$

Innen az következik (ld. 5.2. vii) megjegyzés), hogy

$$(M_f - m_f)(x) = M_f(x) - m_f(x) = (M^f - m^f)(y) = M^f(y) - m^f(y) = 0$$

minden olyan $x \in I_1$ és $y \in I_2$ helyen, ahol $M_f - m_f \in \mathcal{C}\{x\}$ és $M^f - m^f \in \mathcal{C}\{y\}$. Ha tehát $x \in I_1$, és $M_f - m_f \in \mathcal{C}\{x\}$, akkor

$$M_f(x) = I^*(f_x) = m_f(x) = I_*(f_x),$$

azaz $I^*(f_x) = I_*(f_x)$. Más szóval azt kaptuk, hogy $f_x \in R(I_2)$. Hasonlóan, ha $y \in I_2$, és $M^f - m^f \in \mathcal{C}\{y\}$, akkor $f^y \in R(I_1)$. Az 5.1.9. Tételt (Lebesgue-kritérium), valamint az 5.2. x) megjegyzést figyelembe véve $M_f - m_f$ és $M^f - m^f$ majdnem mindenütt folytonos, azaz egy-egy nullamértékű $A \subset I_1$ és $B \subset I_2$ halmazzal

$$f_x \in R(I_2) \quad (x \in I_1 \setminus A),\ f^y \in R(I_1) \quad (y \in I_2 \setminus B).$$

Tehát

$$m_f(x) = M_f(x) = \int_{I_2} f(x,z)\,dz \qquad (x \in I_1 \setminus A),$$

$$m^f(y) = M^f(y) = \int_{I_1} f(t,y)\,dt \qquad (y \in I_2 \setminus B).$$

Speciálisan, ha $A = B = \emptyset$, azaz minden $x \in I_1$ és $y \in I_2$ esetén a

$$I_2 \ni z \mapsto f(x,z),\ I_1 \ni t \mapsto f(t,y)$$

függvények integrálhatók, akkor az 5.3.2.1. Tételben azt írhatjuk, hogy

$$\int_I f = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

ii) Tekintsük az 5.3.3. pontbeli

$$\mathcal{N} := \{(x,y) \in \mathbf{R}^n : x \in I_1,\ g(x) \le y \le h(x)\}$$

normáltartományt, ahol tehát $2 \le n \in \mathbf{N}$, $I_1 \subset \mathbf{R}^{n-1}$ intervallum, $g, h : I_1 \to \mathbf{R}$ folytonos függvények, és $g \le h$. Tegyük fel, hogy az $f : \mathcal{N} \to \mathbf{R}$ függvény integrálható, és minden $x \in I_1$ esetén létezik a

$$\varphi(x) := \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$$

integrál. Ekkor az így definiált $\varphi : I_1 \to \mathbf{R}$ függvény integrálható, és

$$\int_{\mathcal{N}} f = \int_{I_1} \varphi(x)\, dx.$$

Valóban, legyen $I_2 \subset \mathbf{R}$ olyan (kompakt) intervallum, hogy $\mathcal{N} \subset I := I_1 \times I_2$, és

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in \mathcal{N}) \\ \\ 0 & (x \in I \setminus \mathcal{N}). \end{cases}$$

Az f integrálhatósága azt jelenti, hogy $F \in R(I)$, és

$$\int_{\mathcal{N}} f = \int_I F.$$

Ha $x \in I_1$, akkor

$$F_x(y) := F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \big(g(x) \le y \le h(x)\big) \\ \\ 0 & \big(y \in I_2 \setminus [g(x), h(x)]\big). \end{cases}$$

Feltettük, hogy a

$$[g(x), h(x)] \ni y \mapsto f(x,y) \qquad (x \in I_1)$$

függvény integrálható, amiből $F_x \in R(I_2)$ és

$$\int_{I_2} F_x(y)\, dy = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy = \varphi(x) \qquad (x \in I_1)$$

már egyszerűen következik. Az 5.3.2.1. Tétel és az előző megjegyzésben mondottak alapján tehát $\varphi \in R(I_1)$, és

$$\int_{\mathcal{N}} f = \int_I F = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} F_x(y)\, dy \right) dx = \int_{I_1} \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{I_1} \varphi(x)\, dx.$$

iii) Az 5.3.5.1. Tétel a) állításának a bizonyítása történhet pl. a következőképpen. Ehhez először is vegyük észre, hogy ha (az említett tételbeli szereplőkkel) az $A \subset \mathcal{D}_g$ halmaz kompakt, akkor az $\hat{A}$ határ is kompakt. Ui. $\hat{A} = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$ zárt halmaz, és $\overline{A} = A$ miatt $\hat{A} \subset A$, ezért az $\hat{A}$ korlátos is. Legyen $z \in \hat{A}$ tetszőleges, ekkor ($\overline{A} = A \subset \mathcal{D}_g$ miatt $\hat{A} \subset \mathcal{D}_g$ alapján) egy alkalmas $K(z)$ környezettel $K(z) \subset \mathcal{D}_g$. Nyilván

$$\hat{A} \subset \bigcup_{z \in \hat{A}} K(z)$$

egy nyílt lefedése az $\hat{A}$-nak, így (ld. 1.7.10. Tétel) létezik véges sok $z_0, ..., z_s \in \hat{A}$ (valamilyen $s \in \mathbf{N}$ mellett) úgy, hogy

$$\hat{A} \subset \bigcup_{i=0}^{s} K(z_i).$$

Innen az is világos, hogy megadható véges sok $I_j \subset \mathcal{D}_g \quad (j = 0, ..., p)$ (ahol $p \in \mathbf{N}$) intervallum, amelyekkel

$$\hat{A} \subset \bigcup_{j=0}^{p} I_j.$$

A feltételek szerint az A Jordan-mérhető, ezért $\mu(\hat{A}) = 0$, következésképpen

$$\mu(\hat{A} \cap I_j) = 0 \qquad (j = 0, ..., p).$$

Így tetszőleges $\delta > 0$ és $j = 0, ..., p$ mellett véges sok $I_{jk} \quad (k = 0, ..., p_j)$ (ahol $p_j \in \mathbf{N}$) intervallummal

$$\hat{A} \cap I_j \subset \bigcup_{k=0}^{p_j} I_{jk}, \; \sum_{k=0}^{p_j} |I_{jk}| < \delta.$$

Itt nyilván feltehető, hogy minden $j = 0, ..., p$ esetén

$$I_{jk} \subset I_j \qquad (k = 0, ..., p_j),$$

különben az I_{jk}-kat „kicserélhetjük" $I_{jk} \cap I_j$-kre. Sőt, az is feltehető, hogy az I_{jk}-k „közel kockák", azaz van olyan (legfeljebb az n-től függő) $q > 0$ konstans, hogy a

$$d_{jk} := \max\{\|x - y\| : x, y \in I_{jk}\}$$

átmérővel minden $j = 0, ..., p,$ indexre

$$|I_{jk}| \geq q \cdot d_{jk}^n \qquad (k = 0, ..., p_j).$$

A 4.4. viii) megjegyzést alkalmazva kapunk olyan $C > 0$ konstanst, amellyel

$$\|g(x) - g(y)\| \leq C \cdot \|x - y\| \qquad (x, \, y \in I_j, \, j = 0, ..., p).$$

Ezért könnyen beláthatóan a $g[I_{jk}] \quad (j = 0, ..., p)$ képhalmaz lefedhető egy olyan L_{jk} intervallummal, amelyre

$$|L_{jk}| \leq \tilde{C} \cdot |I_{jk}| \qquad (k = 0, ..., p_j)$$

(ahol a $\tilde{C} > 0$ konstans legfeljebb a C-től és n-től függ). Összefoglalva tehát azt mondhatjuk, hogy

$$g[\hat{A}] = \bigcup_{j=0}^{p} g[\hat{A} \cap I_j] \subset \bigcup_{j=0}^{p} \bigcup_{k=0}^{p_j} g[I_{jk}] \subset \bigcup_{j=0}^{p} \bigcup_{k=0}^{p_j} L_{jk},$$

és

$$\sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{p_j} |L_{jk}| \leq \tilde{C} \cdot \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{p_j} |I_{jk}| \leq \tilde{C} \cdot \delta \cdot \sum_{j=0}^{p} 1 = (p+1) \cdot \tilde{C} \cdot \delta.$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor válasszuk a fenti δ-t úgy, hogy $(p+1) \cdot \tilde{C} \cdot \delta < \varepsilon$, amikor is

$$\sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{p_j} |L_{jk}| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mu^*(g[\hat{A}]) = 0$, azaz $g[\hat{A}]$ Jordan-mérhető, és $\mu(g[\hat{A}]) = 0$.

iv) Alkalmazzuk az 5.3.5.6. Tételt az $f \equiv 1$ függvényre. Ekkor az adódik, hogy a nyílt halmazon értelmezett $g \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $g \in C^1$, $\det g'(x) \neq 0 \quad (x \in \mathcal{D}_g)$ függvénnyel a kompakt, Jordan-mérhető $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_g$ halmazra $g[A]$ is Jordan-mérhető, és

$$\mu(g[A]) = \int_A |\det g'(x)| \, dx.$$

Az inverzfüggvény-tételt (ld. 4.5.4.1. Tétel) figyelembe véve itt g kicserélhető g^{-1}-re (ld. 4.6. xxviii) megjegyzés), amikor azt kapjuk (A-t egyúttal felcserélve $g[A]$-val), hogy

$$\mu(A) = \int_{g[A]} \left| \det \left(g^{-1} \right)'(x) \right| dx.$$

Speciálisan, ha a g leképezés lineáris (ld. 2.1. vi) megjegyzés), azaz valamilyen nem szinguláris $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$ mátrixszal

$$g(x) = M \cdot x \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

akkor $g' \equiv M$, ezért tetszőleges kompakt, Jordan-mérhető $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^n$ halmazra

$$\mu(g[A]) = |\det M| \cdot \mu(A).$$

v) Ha $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^n$ Jordan-mérhető, akkor az $n = 1,\ 2,\ 3$ esetekben a $\mu(A)$ Jordan-mértékre a „szokásos" elnevezés rendre az A *hossza, területe, térfogata.* Az 5.3.5.8. Tétel feltételei mellett az ottani g függvénnyel ekkor a $g[A]$ képhalmaznak is van hossza, területe, térfogata.

vi) Legyen $n = 2$, és tekintsük a $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,

$$g(u,v) := (u\cdot \cos v, u\cdot \sin v) \qquad \Big((u,v) \in \mathbf{R}^2\Big)$$

leképezést (*síkbeli polárkoordináta-transzformáció*). Világos, hogy $g \in C^1$, továbbá (ld. 3.1.4. Tétel)

$$g'(u,v) = \begin{bmatrix} \cos v & -u\cdot \sin v \\ \sin v & u\cdot \cos v \end{bmatrix}, \ \det g'(u,v) = u \qquad \Big((u,v) \in \mathbf{R}^2\Big).$$

Az is könnyen belátható, hogy bármilyen

$$\emptyset \neq A \subset \mathbf{R} \times [0, 2\pi]$$

kompakt, Jordan-mérhető halmaz esetén a g függvény $g_{|\mathrm{int}\, A}$ leszűkítése injektív. Ha tehát az $f : g[A] \to \mathbf{R}$ függvény integrálható, akkor (ld. 5.3.5.8. Tétel) a $g[A]$ képhalmaz is kompakt, Jordan-mérhető, és

$$\int_A |u|\cdot f(u\cdot \cos v, u\cdot \sin v)\, du\, dv = \int_{g[A]} f(x,y)\, dx\, dy.$$

Ez a helyzet pl. akkor, ha az f függvény folytonos (ld. 5.3.5.4. Tétel). Ha mondjuk $A := [0,1] \times [0, 2\pi]$, akkor

$$g[A] = K_1 := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

ezért

$$\int_{K_1} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u\cdot f(u\cdot \cos v, u\cdot \sin v)\, du\, dv.$$

Speciálisan az $f \equiv 1$ függvényre (ld. 5.3.2.)

$$\int_{K_1} f(x,y)\, dx\, dy = \mu(K_1) = \int_0^1 u \left(\int_0^{2\pi} dv\right) du = 2\pi\cdot \int_0^1 u\, du = \pi$$

(a K_1 körlemez területe).

vii) Az előbbi megjegyzés „térbeli" megfelelője a $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$g(u,v,w) := (u\cdot \sin w\cdot \cos v, u\cdot \sin w\cdot \sin v, u\cdot \cos w) \qquad \Big((u,v,w) \in \mathbf{R}^3\Big)$$

térbeli polárkoordináta-transzformáció. Nyilván $g \in C^1$, és (ld. 3.1.4. Tétel)

$$g'(u,v) = \begin{bmatrix} \sin w\cdot \cos v & -u\cdot \sin w\cdot \sin v & u\cdot \cos w\cdot \cos v \\ \sin w\cdot \sin v & u\cdot \sin w\cdot \cos v & u\cdot \cos w\cdot \sin v \\ \cos w & 0 & -u\cdot \sin w \end{bmatrix} \qquad \Big((u,v) \in \mathbf{R}^3\Big),$$

valamint

$$\det g'(u,v,w) = \cos w\cdot\Big(-u^2\cdot\sin^2 v\cdot\sin w\cdot\cos w - u^2\cdot\cos^2 v\cdot\sin w\cdot\cos w\Big)-$$

$$u\cdot\sin w\Big(u\cdot\sin^2 w\cdot\cos^2 v + u\cdot\sin^2 w\cdot\sin^2 v\Big) =$$

$$-u^2\cdot\sin w\cdot\cos^2 w - u^2\cdot\sin^3 w = -u^2\cdot\sin w \qquad \Big((u,v,w)\in\mathbf{R}^3\Big).$$

Ha

$$\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$$

kompakt, Jordan-mérhető halmaz, akkor a $g_{|\mathrm{int}\,A}$ leszűkítés injektív. Ezért (ld. 5.3.5.8. Tétel) a $g[A]$ képhalmaz is kompakt, Jordan-mérhető, és integrálható $f: g[A]\to\mathbf{R}$ függvény esetén (pl. (ld. 5.3.5.4. Tétel), ha az f folytonos)

$$\int_A u^2\cdot f(u\cdot\sin w\cdot\cos v, u\cdot\sin w\cdot\sin v, u\cdot\cos w)\cdot\sin w\,du\,dv\,dw =$$

$$\int_{g[A]} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Legyen $A := [0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$, ekkor

$$g[A] = G_1 := \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq 1\},$$

és

$$\int_{G_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u^2\cdot f(u\cdot\sin w\cdot\cos v, u\cdot\sin w\cdot\sin v, u\cdot\cos w)\cdot\sin w\,du\,dv\,dw.$$

Az $f\equiv 1$ esetben (ld. 5.3.2.)

$$\int_{G_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \mu(G_1) = \int_0^1 u^2\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin w\,dw\right)dv\right)du =$$

$$2\pi\cdot\int_0^1 u^2\left(\int_0^{\pi}\sin w\,dw\right)du = 4\pi\cdot\int_0^1 u^2\,du = \frac{4\pi}{3}$$

(a G_1 gömb térfogata).

viii) Legyen most $g\in\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$,

$$g(u,v,w) := (u\cdot\cos v, u\cdot\sin v, w) \qquad \Big((u,v,w)\in\mathbf{R}^3\Big)$$

(*hengerkoordináta-transzformáció*). Ekkor nyilván $g\in C^1$, és (ld. 3.1.4. Tétel)

$$g'(u,v) = \begin{bmatrix}\cos v & -u\cdot\sin v & 0\\ \sin v & u\cdot\cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \Big((u,v)\in\mathbf{R}^3\Big),$$

továbbá

$$\det g'(u,v,w) = u \qquad \Big((u,v) \in \mathbf{R}^3\Big).$$

Ha

$$\emptyset \neq A \subset \mathbf{R} \times [0, 2\pi] \times \mathbf{R}$$

tetszőleges kompakt, Jordan-mérhető halmaz, akkor egyszerűen ellenőrizhető, hogy a $g_{|\mathrm{int}\, A}$ leszűkítés injektív. Így (ld. 5.3.5.8. Tétel) a $g[A]$ képhalmaz is kompakt, Jordan-mérhető, és integrálható $f : g[A] \to \mathbf{R}$ függvényre (ilyen pl. (ld. 5.3.5.4. Tétel) minden folytonos függvény)

$$\int_A u\cdot f(u\cdot \cos v, u\cdot \sin v, w)\, du\, dv\, dw = \int_{g[A]} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

Pl. az $A := [0,1] \times [0, 2\pi] \times [0,1]$ halmazzal

$$g[A] = H_1 := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\,; 0 \leq z \leq 1\},$$

és

$$\int_{H_1} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 u\cdot f(u\cdot \cos v, u\cdot \sin v, w)\, du\, dv\, dw.$$

Az $f \equiv 1$ esetben (ld. 5.3.2.)

$$\int_{H_1} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \mu(H_1) = \int_0^1 u \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 dw\right) dv\right) du =$$

$$2\pi\cdot \int_0^1 u\, du = \pi$$

(a H_1 henger térfogata).

ix) Tekintsük az $I := [-1,1] \times [0,1]$ intervallumon értelmezett

$$f(x,y) := \begin{cases} x & (y \in \mathbf{Q}) \\ \\ 0 & (y \notin \mathbf{Q}) \end{cases} \qquad \Big((x,y) \in I\Big)$$

függvényt. Ekkor minden $y \in [0,1]$ esetén az

$$f^y(x) = f(x,y) \qquad (x \in [-1,1])$$

függvényre $f^y \in R[-1,1]$, és (ld. 5.3.2.)

$$m^f(y) = \int_{-1}^1 f^y(x)\, dx = 0.$$

Valóban, ha $y \in [0,1] \cap \mathbf{Q}$, akkor

$$f^y(x) = f(x,y) = x \qquad (x \in [-1,1]),$$

tehát f^y – folytonos függvény lévén – Riemann-integrálható, és

$$m^f(y) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0.$$

Ha viszont $y \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}$, akkor

$$f^y(x) = f(x,y) = 0 \qquad (x \in [-1,1]),$$

így triviális módon $f^y \in R[-1,1]$, és

$$m^f(y) = \int_{-1}^{1} 0\,dx = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $m^f \equiv 0 \in R[0,1]$ és

$$\int_0^1 m^f(y)\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\right) dy = 0.$$

Ugyanakkor $f \notin R(I)$. Ha ui. $f \in R(I)$ teljesülne, akkor az előbbiek és az 5.3.2.1. Tétel szerint

$$\int_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\right) dy = 0$$

lenne. Viszont $x \in [-1,1]$ esetén az

$$f_x(y) = f(x,y) \qquad (y \in [0,1])$$

függvényre $f_0 \equiv 0$, ha pedig $x \neq 0$, akkor

$$f_x(y) = \begin{cases} x & (y \in [0,1] \cap \mathbf{Q}) \\ \\ 0 & (y \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}). \end{cases}$$

Ezért

$$m_f(x) = I_*(f_x) = \begin{cases} 0 & (x \in [0,1]) \\ \\ x & (x \in [-1,0]). \end{cases}$$

Következésképpen az m_f függvény monoton, így $m_f \in R[-1,1]$, és (ld. 5.3.2.1. Tétel)

$$0 = \int_I f = \int_{-1}^{1} m_f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x\,dx = -\frac{1}{2},$$

ami nyilvánvaló ellentmondás.

x) A következő példa mintegy „erősíti" az előbbi megjegyzésben tárgyaltakat. Legyen ehhez $x \in [0,1] \cap \mathbf{Q}$, ekkor egyértelműen léteznek olyan $p_x,\, q_x \in \mathbf{N}$ számok, amelyek relatív prímek, és

$$x = \frac{p_x}{q_x}.$$

Ezt előrebocsátva definiáljuk az $f : [0,1]^2 \to \mathbf{R}$ függvényt az alábbi módon:

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & (x, y \in [0,1] \cap \mathbf{Q},\, q_x = q_y) \\ \\ 0 & (\text{különben}) \end{cases} \qquad \big((x,y) \in [0,1]^2\big).$$

Tetszőleges $\tau \in \mathcal{F}_{[0,1]^2}$ felosztás és $J \in \mathcal{F}(\tau)$ osztásintervallum esetén megadhatók olyan $x, y \in [0,1] \cap \mathbf{Q}$ számok, amelyekre $q_x = q_y$, és $(x,y) \in J$. Valóban, ha $J_1,\, J_2 \subset \mathbf{R}$ intervallumok, és $J = J_1 \times J_2$, akkor válasszuk a p prímszámot úgy, hogy $1/p < \min\{|J_1|, |J_2|\}$. Ekkor alkalmas $r, s = 1, ..., p-1$ számokkal $x := r/p \in J_1$ és $y := s/p \in J_2$. Világos, hogy $(x,y) \in J$, és $q_x = q_y = p$. Mindez azt jelenti, hogy

$$M_J := \sup\{f(\xi) : \xi \in J\} = 1.$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$m_J := \inf\{f(\xi) : \xi \in J\} = 0,$$

következésképpen

$$s(f,\tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} m_J \cdot |J| = 0, \;\; S(f,\tau) = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} M_J \cdot |J| = \sum_{J \in \mathcal{F}(\tau)} |J| = 1.$$

Más szóval

$$I_*(f) = 0 < 1 = I^*(f),$$

ezért $f \notin R([0,1]^2)$. Ugyanakkor bármilyen $y \in [0,1]$ esetén az $f^y : [0,1] \to \mathbf{R}$,

$$f^y(x) = f(x,y) \qquad (x \in [0,1])$$

függvényről (ld. 5.3.2.) a következőket mondhatjuk: ha $y \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}$, akkor $f^y \equiv 0$. Ha viszont $y \in [0,1] \cap \mathbf{Q}$, akkor az $A_y := \{x \in [0,1] : q_x = q_y\}$ jelöléssel

$$f^y(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A_y) \\ \\ 0 & (x \in [0,1] \setminus A_y). \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy az A_y halmaz véges, hiszen

$$A_y \subset \{k/q_y : k = 0, ..., q_y\}.$$

Ezért minden $y \in [0,1]$ mellett $f^y \in R[0,1]$, és

$$m_f(y) = \int_0^1 f^y(x)\,dx = 0.$$

Így $m^f \in R[0,1]$, és $\int_0^1 m^f(y)\,dy = 0$, tehát „végrehajtható" az

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy = 0$$

szukcesszív integrálás. Ugyanígy kapjuk, hogy létezik az

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx = 0$$

szukcesszív integrál is, azaz

$$(*) \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Ez a példa azt mutatja, hogy a többváltozós függvények Riemann-integrálhatósága, ill. integrálja nem egyszerűen az „egyváltozós" eset iterálásával adódik.

xi) Az előző megjegyzésben kapott $(*)$ egyenlőség (dacára annak, hogy az f nem integrálható a $[0,1]^2$ négyzeten) nem „véletlen". Megmutatható ui. (az egyszerűség kedvéért csak $n=2$-re megfogalmazva), hogy igaz a következő állítás: ha I, $J \subset \mathbf{R}$ kompakt intervallumok, az $f : I \times J \to \mathbf{R}$ függvény korlátos, és minden $x \in I$, $y \in J$ esetén léteznek az

$$m_f(x) = \int_J f(x,z)\,dz, \; m^f(y) = \int_I f(t,y)\,dt$$

integrálok, akkor $m_f \in R(I)$, $m^f \in R(J)$, és $\int_I m_f(x)\,dx = \int_J m^f(y)\,dy$, azaz

$$\int_I \left(\int_J f(x,y)\,dy\right) dx = \int_J \left(\int_I f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Ui. vegyük pl. a J intervallumnak egy $\tau \in \mathcal{F}_J$ felosztását, és válasszuk a $\xi_L \in L$ $\big(L \in \mathcal{F}(\tau)\big)$ helyeket tetszőlegesen, valamint legyen $\xi := (\xi_L, L \in \mathcal{F}(\tau))$. Ekkor

$$\sigma(m^f,\tau,\xi) := \sum_{L\in\mathcal{F}(\tau)} m^f(\xi_L)\cdot|L| = \sum_{L\in\mathcal{F}(\tau)} \left(\int_I f(x,\xi_L)\,dx\right)\cdot|L| =$$

$$\int_I \left(\sum_{L\in\mathcal{F}(\tau)} f(x,\xi_L)\cdot|L|\right) dx = \int_I F_{\tau,\xi}(x)\,dx,$$

ahol

$$F_{\tau,\xi}(x) := \sum_{L\in\mathcal{F}(\tau)} f(x,\xi_L)\cdot|L| \qquad (x \in I).$$

Ha most $\tau_n \in \mathcal{F}_J \ \ (n \in \mathbf{N})$ egy olyan felosztássorozat, amelyre

$$\delta_{\tau_n} := \max\{|L| : L \in \mathcal{F}(\tau_n)\} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

akkor (ld. 5.1.3. Tétel) minden $x \in I$ mellett

$$F_n(x) := F_{\tau_n,\xi}(x) \to \int_J f(x,y)\,dy = m_f(x) \qquad (n \to \infty).$$

Tehát (ld. 1.4. iii) megjegyzés) az $F_n \ \ (n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat pontonként konvergál az m_f függvényhez. Legyen $C \geq 0$ egy korlátja az f függvénynek, azaz $|f(\eta)| \leq C$ $(\eta \in I \times J)$, akkor nyilván igaz, hogy

$$|F_n(x)| \leq C \cdot \sum_{L \in \mathcal{F}(\tau_n)} |L| = C \cdot |J| \qquad (x \in I,\, n \in \mathbf{N}).$$

Röviden szólva: az $F_n \in R(I) \ \ (n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat egyenletesen korlátos. Az ún. Arzèla-tétel szerint tehát egyrészt az $\int_I F_n \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozat konvergens bármilyen, a $\delta_{\tau_n} \to 0 \quad (n \to \infty)$ feltételnek eleget tevő $\tau_n \in \mathcal{F}_J \quad (n \in \mathbf{N})$ felosztássorozat és tetszőleges $\xi_L \in L \in \mathcal{F}(\tau_n) \quad (n \in \mathbf{N})$ mellett. Ezért nyilván egyértelműen létezik olyan $q \in \mathbf{R}$ szám, hogy $\lim_{n\to\infty} \int_I F_n = q$ (az előbb említett τ_n-ek és ξ_L-ek tetszőleges megválasztásával). Következésképpen (ld. 5.1.3. Tétel) a fentiek szerint a

$$\sigma(m^f, \tau_n, \xi) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozat is ugyanilyen értelemben konvergens, azaz $m^f \in R(J)$, és

$$\int_J m^f(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \sigma(m^f, \tau_n, \xi) = \lim_{n\to\infty} \int_I F_n.$$

Ugyanígy kapjuk azt is, hogy $m_f \in R(I)$. Másrészt az Arzèla-tétel azt is kimondja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_I F_n = \int_I \lim_{n\to\infty} F_n = \int_I m_f = \int_I \left(\int_J f(x,y)\,dy\right) dx,$$

így $\int_J m^f = \int_I m_f$, azaz

$$\int_J \left(\int_I f(x,y)\,dx\right) dx = \int_I \left(\int_J f(x,y)\,dy\right) dx.$$

xii) Az előbbi megjegyzésben említett Arzèla-tétel a következőképpen szól: tegyük fel, hogy valamilyen kompakt $[a,b] \subset \mathbf{R}$ intervallum esetén adottak az

$$f_n \in R[a,b] \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(Riemann-integrálható) függvények, és valamilyen $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvénnyel minden $x \in [a,b]$ esetén létezik a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

határérték (röviden szólva tehát az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergál az f függvényhez: $f = \lim_{n\to\infty} f_n$). Tegyük fel továbbá, hogy az (f_n) sorozat *egyenletesen korlátos,* azaz alkalmas $C \geq 0$ konstanssal

$$|f_n(x)| \leq C \qquad (n \in \mathbf{N},\, x \in [a,b]).$$

Ekkor az integrálok $\left(\int_a^b f_n\right)$ sorozata konvergens. Ha $f \in R[a,b]$, akkor

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Az utóbbi egyenlőség másképp fogalmazva azt jelenti, hogy az említett feltételek mellett a „határátmenet és az integrálás felcserélhető":

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n).$$

Az alábbi egyszerű példa arra figyelmeztet, hogy az egyenletes korlátosság feltétele általában nem hagyható el. Legyen ui. $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén

$$f_n(x) := \begin{cases} n & (0 < x < 1/n) \\ & \\ 0 & (x = 0 \text{ vagy } 1/n \leq x \leq 1). \end{cases}$$

Ekkor $f_n \in R[0,1]$, $\int_0^1 f_n = 1$ $(0 < n \in \mathbf{N})$, és könnyen beláthatóan

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (0 \leq x \leq 1).$$

Tehát $f \in R[0,1]$, de

$$\int_0^1 f = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n.$$

Az $f \in R[a,b]$ feltétel sem teljesül „automatikusan". Legyen ui. most

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \{r_0, ..., r_n\}) \\ & \\ 0 & (x \notin \{r_0, ..., r_n\}) \end{cases} \qquad (x \in [0,1],\, n \in \mathbf{N}),$$

ahol az (r_k) sorozat a $[0,1]$-beli racionális számok sorozata. Ekkor $f_n \in R[0,1]$ és $\int_0^1 f_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$, tehát létezik az integrálsorozat $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0$ határértéke, azonban az

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ & \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases} \qquad (x \in [0,1])$$

határfüggvény (a jól ismert Dirichlet-függvény) nem Riemann-integrálható.

xiii A xi) megjegyzésben az f korlátossága (az Arzèla-tétel alkalmazhatóságához) lényeges szerepet játszik. Ui. az alábbi egyszerű példa azt mutatja, hogy a x) megjegyzésbeli $(*)$ egyenlőség nem korlátos f-re nem feltétlenül igaz, még akkor sem, ha a benne szereplő integrálok léteznek. Tekintsük ti. az

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & (xy = 0) \\ \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} & (xy \neq 0) \end{cases} \qquad \big((x,y) \in [0,1]^2\big)$$

(nyilván nem korlátos) függvényt. Ekkor minden $x \in [0,1]$ mellett az

$$f_x(y) = f(x,y) \qquad (y \in [0,1])$$

függvényre $f_x \in R[0,1]$, hiszen $f_0 \equiv 0$, ha pedig $x \in (0,1]$, akkor

$$f_x(y) = \begin{cases} 0 & (y = 0) \\ \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} & (y \neq 0) \end{cases} \qquad (y \in [0,1])$$

(és a $[0,1] \ni z \mapsto \dfrac{x^2 - z^2}{(x^2+z^2)^2}$ függvény folytonos, így integrálható is a $[0,1]$ intervallumon).

Ezért $\int_0^1 f_0 = 0$ és

$$\int_0^1 f_x(y)\,dy = \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \frac{1}{x^2}\cdot \int_0^1 \frac{1-(y/x)^2}{(1+(y/x)^2)^2}\,dy =$$

$$\frac{1}{x}\cdot \int_0^{1/x} \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{1}{x}\cdot \left(\int_0^{1/x} \frac{2}{(1+t^2)^2}\,dt - \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\,dt \right) \qquad (0 < x \leq 1).$$

Az

$$\int \frac{1}{1+z^2}\,dz = \operatorname{arctg} z, \int \frac{2}{(1+z^2)^2}\,dz = \operatorname{arctg} z + \frac{z}{1+z^2} \qquad (z \in \mathbf{R})$$

primitív függvények és a Newton–Leibniz-formula felhasználásával

$$\int_0^1 f_x(y)\,dy =$$

$$\frac{1}{x}\cdot \left(\operatorname{arctg}(1/x) + \frac{1}{x^2}\cdot \frac{1}{1+1/x^2} - \operatorname{arctg}(1/x) \right) = \frac{1}{1+x^2} \qquad (0 < x \leq 1).$$

Tehát

$$m_f(x) = \int_0^1 f_x(y)\,dy = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \dfrac{1}{1+x^2} & (0 < x \leq 1), \end{cases}$$

amiből $m_f \in R[0,1]$, és

$$\int_0^1 m_f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$$

következik. Ha most $y \in [0,1]$, akkor $f^0 \equiv 0$, a $0 < y \leq 1$ esetben pedig

$$f^y(x) = f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x \neq 0) \end{cases} \qquad (x \in [0,1]).$$

Más szóval

$$f^y(x) = -\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad (x, y \in (0,1]).$$

Innen a fentiek alapján világos, hogy

$$m^f(y) = \int_0^1 f^y(x)\,dx = -m_f(y) = \begin{cases} 0 & (y = 0) \\ -\dfrac{1}{1+y^2} & (0 < y \leq 1) \end{cases}$$

és

$$\int_0^1 m^f(y)\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Megjegyezzük, hogy a

$$g(x,y) := \begin{cases} 0 & (xy = 0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} & (xy \neq 0) \end{cases} \qquad \big((x,y) \in [0,1]^2\big)$$

nem korlátos függvényre ugyanakkor

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\,dx\right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\,dy\right) dx.$$

Ui.

$$\int_0^1 g_x(y)\,dy = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{x+y}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y/x}} =$$

$$\frac{x}{\sqrt{x}} \cdot \int_0^{1/x} \frac{dt}{\sqrt{1+t}}\,dt = 2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} \qquad (0 < x \leq 1).$$

Következésképpen

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 g_x(y)\,dy\right) dx = \int_0^1 (2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x})\,dx = \frac{8}{3}\cdot(\sqrt{2}-1),$$

és a nyilvánvaló szimmetriaokok miatt

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 g_x(y)\,dx\right) dy = \int_0^1 (2\sqrt{y+1} - 2\sqrt{y})\,dy = \frac{8}{3}\cdot(\sqrt{2}-1).$$

xiv) Képzeljük el, hogy (ld. vii) megjegyzés) a

$$G_1 := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1\}$$

gömböt valamilyen anyag tölti ki. Legyen ez utóbbinak a $\rho : G_1 \to [0,+\infty)$ függvény a sűrűségfüggvénye, ahol a ρ-ról feltételezzük, hogy folytonos. Emlékeztetünk arra, hogy ha valamilyen $q > 0$ számmal $\rho \equiv q$, akkor tetszőleges $V \subset G_1$ téglatest esetén a V-ben lévő anyag T_V tömege $|V|\cdot q$, ahol $|V|$ a szóban forgó téglatest térfogata. (Megjegyezzük, hogy nem foglalkozunk a „sűrűség", ill. a „tömeg" egzakt fizikai értelmezésével. Elfogadjuk, hogy a G_1-ben, ill. a V-ben lévő anyagnak van tömege, és az utóbbi $|V|\cdot q$, továbbá azonos sűrűség esetén a nagyobb térfogatú test tömege nagyobb, mint egy kisebb térfogatú test tömege, valamint azonos térfogatú testek esetén a nagyobb sűrűségű test tömege a nagyobb.) Ha a ρ függvény nem állandó, akkor az $A \subset \mathbf{R}^3$, $A \cap G_1 \neq \emptyset$ halmazokra bevezetett

$$m_A := \inf\{\rho(\xi) : \xi \in A \cap G_1\},\ M_A := \sup\{\rho(\xi) : \xi \in A \cap G_1\}$$

jelölésekkel nyilván

$$m_V\cdot|V| \le T_V \le M_V\cdot|V|.$$

Legyen ezek után $I := [-1,1]^3$, ekkor az I olyan intervallum (téglatest), amelyre $G_1 \subset I$. Terjesszük ki a ρ függvényt az I-re a „szokásos" módon:

$$\tilde{\rho}(\xi) := \begin{cases} \rho(\xi) & (\xi \in G_1) \\ \\ 0 & (\xi \in I \setminus G_1). \end{cases}$$

Vegyük az I valamilyen $\tau \in \mathcal{F}_I$ felosztását, ekkor az

$$s(\tilde{\rho},\tau) = \sum_{V\in\mathcal{F}(\tau),\, V\subset G_1} m_V\cdot|V|,\ S(\tilde{\rho},\tau) = \sum_{V\in\mathcal{F}(\tau),\, V\cap G_1\neq\emptyset} M_V\cdot|V|$$

alsó, felső összegekkel a G_1 gömb $\mathcal{M}_{G_1}$ tömegére

$$s(\tilde{\rho},\tau) \le \mathcal{M}_{G_1} \le S(\tilde{\rho},\tau).$$

A vii) megjegyzés szerint a ρ függvény integrálható, és az $\int_{G_1} \rho$ szám az egyetlen, amelyik minden $\tau \in \mathcal{F}_I$ esetén az $s(\tilde{\rho}, \tau)$, $S(\tilde{\rho}, \tau)$ összegek közé esik. Ezért az előbbieket figyelembe véve a „fizikai" elvárásoknak megfelelőnek tűnik az a matematikai definíció, hogy

$$\mathcal{M}_{G_1} := \int_{G_1} \rho$$

a G_1 gömb (pontosabban a benne lévő anyag) *tömege*. Ennek megfelelően általában is azt mondjuk, hogy ha adott egy $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^3$ „test", amit egy $\rho : A \to [0, +\infty)$ sűrűségű anyag tölt ki, továbbá $\rho \in R(A)$, akkor a szóban forgó testnek van tömege $(\mathcal{M}_A)$, és az

$$\mathcal{M}_A := \int_A \rho.$$

(Hangsúlyozni kell, hogy nem „kiszámoltuk" az illető test tömegét, hanem – a gyakorlati tapasztalatokkal összhangban – matematikailag „deklaráltuk" azt.) Legyen pl. a fenti G_1 esetén az őt kitöltő anyag olyan, amelynek a sűrűsége egyenesen arányos a gömb középpontjától vett távolsággal. Ez matematikailag azt jelenti, hogy valamilyen $\lambda > 0$ számmal

$$\rho(\xi) = \lambda \cdot \|\xi\|_2 \qquad (\xi \in G_1).$$

Világos, hogy a ρ függvény folytonos (ld. 2.1. ii) megjegyzés), továbbá a vii) megjegyzést figyelembe véve

$$\mathcal{M}_{G_1} = \int_{G_1} \rho(\xi)\, d\xi = \int_{G_1} \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lambda \cdot \int_{G_1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz =$$

$$\lambda \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u^2 \cdot \rho(u \cdot \sin w \cdot \cos v, u \cdot \sin w \cdot \sin v, u \cdot \cos w) \cdot \sin w\, du\, dv\, dw,$$

ahol az $(u, v, w) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ helyeken

$$\rho(u \cdot \sin w \cdot \cos v, u \cdot \sin w \cdot \sin v, u \cdot \cos w) =$$

$$u \cdot \sqrt{\sin^2 w \cdot \cos^2 v + \sin^2 w \cdot \sin^2 v + \cos^2 w} = u.$$

Innen az 5.3.2. pont alapján azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{M}_{G_1} = \lambda \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u^3 \cdot \sin w\, du\, dv\, dw = \lambda \cdot \int_0^1 u^3 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin w\, dw \right) dv \right) du =$$

$$\lambda \cdot 2\pi \cdot \left(\int_0^1 u^3 du \right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin w\, dw \right) = \lambda \cdot \pi.$$

xv) Tegyük fel, hogy valamilyen $1 \leq m \in \mathbf{N}$ esetén a $P_i := (x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{R}^3$ $(i = 1, ..., m)$ helyek mindegyikében elhelyezünk egy $m_i > 0$ $(i = 1, ..., m)$ tömegű pontot. Ekkor az így kapott $(P_i, i = 1, ..., m)$ (diszkrét) pontrendszer $S = (x_s, y_s, z_s) \in \mathbf{R}^3$ súlypontján azt a pontot értettük, amelyre

$$x_s := \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{s} m_i \cdot x_i, \; y_s := \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{s} m_i \cdot y_i, \; z_s := \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{s} m_i \cdot z_i,$$

ahol $m := \sum_{i=1}^{s} m_i$ a pontrendszer össztömege. Ennek megfelelően (az előző megjegyzés szellemében) egy $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^3$ test és az azt kitöltő $\rho : A \to [0, +\infty)$ sűrűségű anyag esetén a test $S = (x_s, y_s, z_s) \in \mathbf{R}^3$ *súlypontja* az a pont, amelyre a test

$$\mathcal{M}_A = \int_A \rho \;\; (> 0)$$

tömegével

$$x_s := \frac{1}{\mathcal{M}_A} \cdot \int_A x \cdot \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \; y_s := \frac{1}{\mathcal{M}_A} \cdot \int_A y \cdot \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$z_s := \frac{1}{\mathcal{M}_A} \cdot \int_A z \cdot \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

(feltéve, hogy az összes itt szereplő integrál létezik). Hasonlóan definiáljuk a súlypont fogalmát „lemezek" esetén is. Nevezetesen, ha $\emptyset \neq B \subset \mathbf{R}^2$, és a B-t (lemezt) egy $\rho : B \to [0, +\infty)$ sűrűségű anyag tölti ki, akkor a B lemez $S = (x_s, y_s) \in \mathbf{R}^2$ súlypontja:

$$x_s := \frac{1}{\mathcal{M}_B} \cdot \int_B x \cdot \rho(x, y) \, dx \, dy, \; y_s := \frac{1}{\mathcal{M}_B} \cdot \int_B y \cdot \rho(x, y) \, dx \, dy,$$

ahol

$$\mathcal{M}_B = \int_B \rho \;\; (> 0)$$

a lemez tömege. (Most is feltételezzük, hogy az összes itteni integrál létezik.) Legyen pl. (ld. vi) megjegyzés)

$$B := \{(x, y) \in \mathbf{R} \times [0, +\infty) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(félkörlemez), és valamilyen $\lambda > 0$ együtthatóval

$$\rho(\xi) = \lambda \cdot \|\xi\|_2 \qquad (\xi \in B).$$

Ekkor a vi) megjegyzés alapján (azt most értelemszerűen a szóban forgó félkörlemezre adaptálva)

$$\mathcal{M}_B = \lambda \cdot \int_B \rho(x, y) \, dx \, dy = \lambda \cdot \int_B \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy =$$

$$\lambda \cdot \int_0^1 \int_0^\pi u^2 \cdot \sqrt{\cos^2 v + \sin^2 v} \, du \, dv = \lambda \cdot \int_0^1 u^2 \left(\int_0^\pi dv \right) du =$$

$$= \pi\cdot \lambda\cdot \int_0^1 u^2 du = \frac{\pi\cdot \lambda}{3}.$$

Továbbá

$$x_s = \frac{3}{\pi\cdot \lambda}\cdot \int_B x\cdot \rho(x,y)\, dx\, dy = \frac{3}{\pi}\cdot \int_B x\cdot \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy =$$

$$\frac{3}{\pi}\cdot \int_0^1 \int_0^\pi u^3\cdot \cos v\, du\, dv = \frac{3}{\pi}\cdot \int_0^1 u^3 \left(\int_0^\pi \cos v\, dv\right) du = \frac{3}{\pi}\cdot \frac{1}{4}\cdot 0 = 0$$

(ami a szimmetriaviszonyok alapján nem „meglepő"). Ugyanakkor

$$y_s = \frac{3}{\pi\cdot \lambda}\cdot \int_B y\cdot \rho(x,y)\, dx\, dy = \frac{3}{\pi}\cdot \int_B y\cdot \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy =$$

$$\frac{3}{\pi}\cdot \int_0^1 \int_0^\pi u^3\cdot \sin v\, du\, dv = \frac{3}{\pi}\cdot \int_0^1 u^3 \left(\int_0^\pi \sin v\, dv\right) du = \frac{3}{\pi}\cdot \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{3}{2\pi}.$$

xvi) A mechanikában tanultak alapján egy m tömegű tömegpontnak a tőle r távolságban lévő tengelyre vonatkozóan az ún. tehetetlenségi nyomatéka $m\cdot r^2$. Ebből kiindulva (az előző megjegyzések szellemében) vezessük be a tehetetlenségi nyomaték általános fogalmát az alábbiak szerint. Tegyük fel ehhez, hogy adott az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^3$ test, amit a $\rho : A \to [0, +\infty)$ sűrűségű anyag tölt ki. Legyen adott továbbá valamilyen $0 \neq e \in \mathbf{R}^3$ irányvektor és egy $a \in \mathbf{R}^3$ pont esetén a

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto a + t\cdot e \in \mathbf{R}^3$$

hozzárendeléssel definiált ℓ egyenes („tengely"). Egy $\xi \in \mathbf{R}^3$ pontnak az ℓ tengelytől mért távolságát jelöljük $r(\xi)$-vel. Tehát

$$r_\ell(\xi) := \inf\{\|\xi - (a + t\cdot e)\|_2 : t \in \mathbf{R}\}.$$

Ekkor a szóban forgó testnek az ℓ tengelyre vonatkozó *tehetetlenségi nyomatékán* a

$$\Theta_\ell := \int_A r_\ell^2(\xi)\cdot \rho(\xi)\, d\xi$$

integrált értjük (feltéve, hogy ez az integrál létezik). Speciálisan, az ℓ_i-vel jelölt $(i = 1, 2, 3)$ koordinátatengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékokat a következőképpen számíthatjuk ki. Most tehát $a := (0, 0, 0)$, és rendre

$$e_1 := (1, 0, 0),\ e_2 := (0, 1, 0),\ e_3 := (0, 0, 1).$$

Világos, hogy tetszőleges $\xi = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ mellett

$$r_{\ell_1}^2(x,y,z) = y^2 + z^2,\ r_{\ell_2}^2(x,y,z) = x^2 + z^2,\ r_{\ell_3}^2(x,y,z) = x^2 + y^2,$$

azaz

$$\Theta_{\ell_1} = \int_A (y^2+z^2)\cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\Theta_{\ell_2} = \int_A (x^2+z^2)\cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\Theta_{\ell_3} = \int_A (x^2+y^2)\cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Legyen pl.

$$A := G_1 := \{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1\}$$

(gömb), és valamilyen $\rho_0 > 0$ konstanssal $\rho \equiv \rho_0$. Ekkor a nyilvánvaló szimmetriaviszonyok alapján

$$\Theta_{\ell_1} = \Theta_{\ell_2} = \Theta_{\ell_3},$$

és (pl.) (ld. vii) megjegyzés)

$$\Theta_{\ell_3} = \int_{G_1} (x^2+y^2)\cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\rho_0\cdot \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u^2\cdot (u^2\cdot \sin^2 w\cdot \cos^2 v + u^2\cdot \sin^2 w\cdot \sin^2 v)\cdot \sin w\,du\,dv\,dw =$$

$$\rho_0\cdot \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u^4\cdot \sin^3 w\,du\,dv\,dw = 2\pi\rho_0\cdot \left(\int_0^1 u^4\,du\right)\cdot\left(\int_0^{\pi}\sin^3 w\,dw\right) =$$

$$\frac{2\pi\rho_0}{5}\cdot \int_0^{\pi}\sin^3 w\,dw = \frac{2\pi\rho_0}{5}\cdot\int_0^{\pi}(\sin w)\cdot(1-\cos^2 w)\,dw =$$

$$\frac{2\pi\rho_0}{5}\cdot(2-2/3) = \frac{8\pi\rho_0}{15} = \frac{2M}{5},$$

ahol a G_1 gömb $4\pi/3$ térfogatával

$$M := \frac{4\pi}{3}\cdot \rho_0$$

a gömb tömege.

xvii) Mutassuk meg, hogy létezik az

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

improprius integrál. Legyen ehhez

$$I_r := \int_0^r e^{-x^2}dx \qquad (r>0),$$

ekkor azt kell megmutatnunk, hogy létezik a

$$\lim_{r\to+\infty} I_r = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

határérték. Az 5.3.2.1. Tétel alapján világos, hogy az $N_r := [0, r]^2$ jelöléssel („négyzettel")

$$I_r^2 = \left(\int_0^r e^{-x^2} dx\right) \cdot \left(\int_0^r e^{-y^2} dy\right) = \int_{N_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

Ha

$$K_r := \{(u, v) \in [0, +\infty)^2 : u^2 + v^2 \le r^2\}$$

(„negyedkörlemez"), akkor $K_r \subset N_r$, és

$$x^2 + y^2 > r^2 \qquad \big((x, y) \in N_r \setminus K_r\big).$$

Következésképpen (ld. 5.3.5.5. Tétel)

$$0 \le \int_{N_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy - \int_{K_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy =$$

$$\int_{N_r\setminus K_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \le e^{-r^2} \cdot r^2 \to 0 \qquad (r \to +\infty).$$

Az $\int_{K_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \quad (r > 0)$ integrál kiszámítására alkalmazzuk a síkbeli polártranszformációt (ld. vi) megjegyzés):

$$\int_{K_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^r \int_0^{\pi/2} u\cdot e^{-(u^2\cdot\cos^2 v + u^2\cdot\sin^2 v)}\, du\, dv =$$

$$\int_0^r u\cdot e^{-u^2} \left(\int_0^{\pi/2} dv\right) du = \frac{\pi}{4}\cdot \int_0^r 2u\cdot e^{-u^2}\, du = \frac{\pi}{4}\cdot (1 - e^{-r^2}),$$

amiből

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{K_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \frac{\pi}{4}$$

adódik. Az előzményeket is figyelembe véve tehát létezik a

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{N_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \frac{\pi}{4}$$

határérték is, így

$$\lim_{r\to+\infty} I_r = \lim_{r\to+\infty} \sqrt{\int_{N_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

is.

xviii) Legyen adott az $[a, b] \subset \mathbf{R}$ $(a, b \in \mathbf{R},\ a < b)$ kompakt intervallum, továbbá egy $0 \leq f : [a, b] \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, és tekintsük az

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [a, b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

halmazt (a függvény(grafikon) alatti síkidomot). A $\rho : A \to [0, +\infty)$, $\rho \equiv 1$ sűrűségű homogén anyaggal kitöltött lemez súlypontjaként definiálhatjuk az A halmaznak az $S := (x_s, y_s) \in \mathbf{R}^2$ súlypontját:

$$x_s := \frac{1}{|A|} \cdot \int_A x \, dx \, dy, \ y_s := \frac{1}{|A|} \cdot \int_A y \, dx \, dy,$$

ahol

$$|A| := \mu(A) = \int_A 1 \, dx \, dy$$

az A területe („tömege"). Feltesszük, hogy $|A| > 0$. Ekkor (ld. 5.3.3.)

$$y_s = \frac{1}{|A|} \cdot \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} y \, dy \right) dx = \frac{1}{2 \cdot |A|} \cdot \int_a^b f^2(x) \, dx = \frac{1}{2\pi \cdot |A|} \cdot \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

Jól ismert, hogy az f függvénynek (az X tengely körüli) „megforgatásával" létrejövő

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \in [a, b],\ y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$$

forgástest $|V|$ térfogata:

$$|V| = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

Következésképpen

$$|V| = |A| \cdot (2\pi \cdot y_s).$$

Itt $2\pi \cdot y_s$ annak a körnek a kerülete, amelyet az S súlypontnak az X tengely körüli megforgatásával kapunk (Guldin-tétel).

xix) Az 5.3.2.1. Tétel (Fubini) egy kiterjesztése a következő. Legyenek $\emptyset \neq A,\ B \subset \mathbf{R}^n$ kompakt, Jordan-mérhető halmazok, $f : A \times B \to \mathbf{R}$ korlátos függvény, $x \in A$, $y \in B$ esetén

$$f_x(z) := f(x, z) \quad (z \in B), \ f^y(t) := f(t, y) \quad (t \in A),$$

és

$$m_f(x) := I_*(f_x), \ M_f(x) := I^*(f_x), \ m^f(y) := I_*(f^y), \ M^f(y) := I^*(f^y).$$

Ha $f \in R(A \times B)$, akkor m_f, $M_f \in R(A)$, m^f, $M^f \in R(B)$, és

$$\int_{A \times B} f = \int_A m_f = \int_A M_f = \int_B m^f = \int_B M^f.$$

Speciálisan, ha az f folytonos, akkor

$$m_f(x) = M_f(x) = \int_B f(x,z)\,dz,\ m^f(y) = M^f(y) = \int_B f(t,y)\,dt \quad (x \in A,\ y \in B)$$

és

$$\int_{A\times B} f = \int_A \Big(\int_B f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_B \Big(\int_A f(x,y)\,dx\Big)\,dy.$$

(Megjegyezzük, hogy az „igazi" Fubini-tétel ennél sokkal általánosabb érvényű az ún. Lebesgue-integrálható, ill. az absztrakt integrálható függvények elméletében.)

xx) Az előző megjegyzésbeli $\emptyset \neq A,\ B \subset \mathbf{R}^n$ kompakt, Jordan-mérhető halmazokkal tekintsük a folytonos $g : A \times B \to \mathbf{R}$ függvényt. Könnyen belátható, hogy ekkor a

$$\varphi(y) := \int_A g(t,y)\,dt \quad (y \in B),\ \psi(x) := \int_B g(x,z)\,dz \quad (x \in A)$$

függvények (egyenletesen) folytonosak. Valóban, az $A \times B$ halmaz is kompakt lévén, a Heine-tétel (ld. 2.6. Tétel) miatt a g egyenletesen folytonos. Ezért (pl. a φ-re fogalmazva a továbbiakat) tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|g(\xi) - g(\eta)| < \varepsilon \qquad (\xi, \eta \in A \times B,\ \|\xi - \eta\|_\infty < \delta).$$

Ha itt $\xi = (t,y),\ \eta = (t,z) \quad (t \in A,\ y,z \in B)$, akkor $\|y - z\|_\infty < \delta$ esetén egyúttal $\|\xi - \eta\|_\infty < \delta$, következésképpen

$$|g(t,y) - g(t,z)| < \varepsilon.$$

Így

$$|\varphi(y) - \varphi(z)| = \left|\int_A g(t,y)\,dt - \int_A g(t,z)\,dt\right| =$$

$$\left|\int_A \big(g(t,y) - g(t,z)\big)\,dt\right| \leq \int_A |g(t,y) - g(t,z)|\,dt \leq \varepsilon\cdot \mu(A).$$

xxi) Legyen adott valamilyen kompakt $[a,b]$ intervallum $(a,b \in \mathbf{R},\ a < b)$ és $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$ kompakt, Jordan-mérhető halmaz esetén az

$$f : [a,b] \times U \to \mathbf{R}$$

függvény. Tegyük fel, hogy minden $t \in [a,b]$ esetén az $f_t : U \to \mathbf{R}$,

$$f_t(y) := f(t,y) \qquad (y \in U)$$

függvény integrálható: $f_t \in R(U)$, legyen ekkor

$$F(t) := \int_U f(t,y)\,dy := \int_U f_t \qquad (t \in [a,b])$$

(paraméteres integrál). Ha pl. az f folytonos függvény, akkor (ld. xx) megjegyzés) az $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ létezik, és folytonos. Továbbá, ha létezik és folytonos a $\partial_1 f$ parciális deriváltfüggvény, akkor létezik az F' deriváltfüggvény is, és

$$F'(t) = \int_U \partial_1 f(t,y)\, dy \qquad (t \in [a,b]),$$

azaz a mondott feltételek mellett a $\partial_1 \ldots$ és az $\int_U \ldots$ „operátorok" felcserélhetők. Ui. a xix) megjegyzést az $A := [a,t]$ $(a \le t \le b)$, $B := U$ halmazokkal, és f helyett a $\partial_1 f$ függvénnyel alkalmazva azt írhatjuk, hogy

$$\varphi(t) := \int_a^t \left(\int_U \partial_1 f(\tau,y)\, dy\right) d\tau = \int_U \left(\int_a^t \partial_1 f(\tau,y)\, d\tau\right) dy,$$

ahol a Newton–Leibniz-szabály alapján

$$\int_a^t \partial_1 f(\tau,y)\, d\tau = f(t,y) - f(a,y) \qquad (y \in U).$$

Következésképpen

$$\varphi(t) = \int_U f(t,y)\, dy - \int_U f(a,y)\, dy = F(t) - \int_U f(a,y)\, dy \qquad (t \in [a,b]).$$

A xx) megjegyzés szerint a

$$\Phi(t) := \int_U \partial_1 f(t,y)\, dy \qquad (t \in [a,b])$$

függvény folytonos. A φ tehát egy folytonos függvény integrálfüggvénye:

$$\varphi(t) = \int_a^t \Phi(\tau)\, d\tau \qquad (t \in [a,b]),$$

ezért $\varphi \in D$, és

$$\varphi'(t) = \Phi(t) = \int_U \partial_1 f(t,y)\, dy \qquad (t \in [a,b]).$$

Mivel $F = \varphi + \int_U f(a,y)\, dy$, így $F \in D$, és

$$F'(t) = \varphi'(t) = \int_U \partial_1 f(t,y)\, dy \qquad (t \in [a,b]).$$

Innen a $\partial_1 f$ folytonossága és a xx) megjegyzés miatt az is következik, hogy az F' deriváltfüggvény folytonos, azaz az F folytonosan deriválható.

xxii) A folytonosság és az integrálhatóság kapcsolatára vonatkozik a következő állítás: legyen $\emptyset \ne A \subset \mathbf{R}^n$ korlátos, Jordan-mérhető halmaz, az $f : A \to \mathbf{R}$ függvényről tegyük fel, hogy korlátos. Legyen továbbá a

$$D := \{x \in A : f \notin \mathcal{C}\{x\}\}$$

halmaz Jordan-mérhető, és $\mu(D) = 0$. Ekkor $f \in R(A)$. Megjegyezzük, hogy az állítás „megfordítása" nem igaz, elég csak a jól ismert Riemann-függvényre gondolni:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \\ \frac{1}{q_x} & (x \in \mathbf{Q}) \end{cases} \qquad (x \in [0,1]),$$

ahol a q_x $(x \in [0,1] \cap \mathbf{Q})$ jelentését illetően ld. x) megjegyzés). Ekkor $f \in R[0,1]$ (és $\int_0^1 f = 0$), de a $D = [0,1] \cap \mathbf{Q}$ halmaz nem Jordan-mérhető.

xxiii) Tegyük fel, hogy az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^n$ korlátos halmaz Jordan-mérhető, az $f,\, g : A \to \mathbf{R}$ függvények korlátosak, valamint az

$$\{f \neq g\} := \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$$

halmaz is Jordan-mérhető, és $\mu(\{f \neq g\}) = 0$. Ekkor $f \in R(A)$ esetén $g \in R(A)$ is igaz, és $\int_A f = \int_A g$. Ez a helyzet pl. akkor, ha az $\{f \neq g\}$ halmaz véges (ld. 5.1.7. Tétel).

xxiv) Tekintsük a folytonosan differenciálható

$$\Phi : [0,1]^2 \to \mathbf{R}^3$$

leképezést ($\mathbf{R}^3$-beli *felületek* ún. *Gauss-féle paraméterezését*). Ilyen pl. a

$$\Phi(x,y) := \Big(\sin(\pi y)\cdot\cos(2\pi x), \sin(\pi y)\cdot\sin(2\pi x), \cos(\pi y)\Big) \qquad \Big((x,y) \in [0,1]^2\Big)$$

leképezés, amelyre az $\mathcal{R}_\Phi$ értékkészlet (felület) egy (origó középpontú, egységsugarú) gömbfelület. Tegyük fel, hogy adottak a folytonosan differenciálható

$$u,\, v : [0,1] \to [0,1]$$

függvények, és a

$$\varphi(t) := \Phi(u(t), v(t)) \qquad (t \in [0,1])$$

függvény egy $\mathcal{G} \subset \mathbf{R}^3$ görbe paraméterezése (ld. 4.6. xxxv) megjegyzés). Ekkor nyilván $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_\Phi$ (a $\mathcal{G}$ egy ún. *felületi görbe*). Ha $t_0 \in [0,1]$ és

$$\tau := (u(t_0), v(t_0)),\ P := \Phi(\tau),$$

akkor $\varphi(t_0) = P$ miatt $P \in \mathcal{G}$ (a szóban forgó görbe a P-n áthaladó felületi görbe). A

$$\varphi'(t_0) \in \mathbf{R}^3$$

vektor a $\mathcal{G}$ felületi görbe P-beli *érintővektora,* ahol a 4.1.4. Tétel alapján

$$\varphi'(t) = \Phi'(u(t), v(t)) \cdot \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} =$$

$$u'(t) \cdot \partial_1 \Phi(u(t), v(t)) + v'(t) \cdot \partial_2 \Phi(u(t), v(t)) \qquad (t \in [0, 1]).$$

Tehát

$$\varphi'(t_0) = u'(t_0) \cdot \partial_1 \Phi(\tau) + v'(t_0) \cdot \partial_2 \Phi(\tau).$$

Ha itt a $\partial_1 \Phi(\tau)$, $\partial_2 \Phi(\tau)$ vektorok nem párhuzamosak, akkor az

$$\mathcal{S}_P := \{\Phi(\tau) + c \cdot \partial_1 \Phi(\tau) + d \cdot \partial_2 \Phi(\tau) : c, d \in \mathbf{R}\}$$

síkot feszítik ki (a felület P-beli *érintősíkját*), aminek egy normálvektora a

$$\partial_1 \Phi(\tau) \times \partial_2 \Phi(\tau)$$

vektoriális szorzat. Tegyük fel, hogy a $\varphi'(t_0)$ vektor nem a nullavektor, ekkor az

$$e_P := \{\varphi(t_0) + q \cdot \varphi'(t_0) : q \in \mathbf{R}\}$$

halmaz egy P-n átmenő egyenes (a $\mathcal{G}$ felületi görbe P-beli *érintője*). Világos, hogy $e_P \subset \mathcal{S}_P$.

Számítsuk ki az előbbi $\mathcal{G}$ felületi görbe ívhosszát (ld. 4.6. xxxv) megjegyzés):

$$|\mathcal{G}| = \int_0^1 \|\varphi'(t)\| \, dt = \int_0^1 \|u'(t) \cdot \partial_1 \Phi(u(t), v(t)) + v'(t) \cdot \partial_2 \Phi(u(t), v(t))\| \, dt.$$

Ha a Φ-t a Φ_1, Φ_2, Φ_3 koordinátafüggvényeivel tekintjük, azaz $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, akkor

$$\partial_1 \Phi = (\partial_1 \Phi_1, \partial_1 \Phi_2, \partial_1 \Phi_3), \; \partial_2 \Phi = (\partial_2 \Phi_1, \partial_2 \Phi_2, \partial_2 \Phi_3).$$

Ezért tetszőleges $t \in [0, 1]$ helyen a $\tau_t := (u(t), v(t))$ rövidítéssel

$$\|u'(t) \cdot \partial_1 \Phi(u(t), v(t)) + v'(t) \cdot \partial_2 \Phi(u(t), v(t))\|^2 =$$

$$\Big(u'(t) \cdot \partial_1 \Phi_1(\tau_t) + v'(t) \cdot \partial_2 \Phi_1(\tau_t)\Big)^2 +$$

$$\Big(u'(t) \cdot \partial_1 \Phi_2(\tau_t) + v'(t) \cdot \partial_2 \Phi_2(\tau_t)\Big)^2 +$$

$$\Big(u'(t) \cdot \partial_1 \Phi_3(\tau_t) + v'(t) \cdot \partial_2 \Phi_3(\tau_t)\Big)^2.$$

Tehát az

$$E(\xi) := \|\partial_1 \Phi(\xi)\|^2, \; G(\xi) := \|\partial_2 \Phi(\xi)\|^2, \; F(\xi) := \langle \partial_1 \Phi(\xi), \partial_2 \Phi(\xi) \rangle \quad (\xi \in [0, 1]^2)$$

jelölésekkel

$$\|u'(t)\cdot \partial_1\Phi(u(t),v(t)) + v'(t)\cdot \partial_2\Phi(u(t),v(t))\|^2 =$$

$$E(\tau_t)\cdot u'(t)^2 + 2F(\tau_t)\cdot u'(t)\cdot v'(t) + G(\tau_t)\cdot v'(t)^2 \qquad (t\in[0,1]),$$

és így

$$|\mathcal{G}| = \int_0^1 \sqrt{E(\tau_t)\cdot u'(t)^2 + 2F(\tau_t)\cdot u'(t)\cdot v'(t) + G(\tau_t)\cdot v'(t)^2}\,dt.$$

Az E, F, G függvények az ún. *Gauss-féle főmennyiségek.* Ha

$$\mathcal{A}(\xi) := \begin{bmatrix} E(\xi) & F(\xi) \\ F(\xi) & G(\xi) \end{bmatrix} \qquad (\xi\in[0,1]^2),$$

akkor (feltéve, hogy a $\partial_1\Phi(\tau_t), \partial_2\Phi(\tau_t)$ vektorok nem párhuzamosak) a

$$Q_t(\zeta) := \langle \mathcal{A}(\tau_t)\cdot \zeta, \zeta\rangle \qquad (\zeta\in\mathbf{R}^2)$$

kvadratikus alak minden $t\in[0,1]$ esetén pozitív definit (ld. 4.4. iv) – vii) megjegyzések). Valóban, a $\partial_1\Phi(\tau_t)$, $\partial_2\Phi(\tau_t)$ vektorok nem párhuzamosak, így $\partial_1\Phi(\tau_t)$ nem a nullavektor, ezért egyrészt $E(\tau_t) = \|\partial_1\Phi(\tau_t)\|^2 > 0 \quad (t\in[0,1])$. Másrészt az előbbi „nem párhuzamossági" feltétel szerint nincs olyan $\lambda\in\mathbf{R}$ együttható, amellyel $\partial_2\Phi(\tau_t) = \lambda\cdot \partial_1\Phi(\tau_t)$ (vagy fordítva), következésképpen a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$|F(\tau_t)| = |\langle \partial_1\Phi(\tau_t), \partial_2\Phi(\tau_t)\rangle| <$$

$$\|\partial_1\Phi(\tau_t)\|\cdot \|\partial_2\Phi(\tau_t)\| = \sqrt{E(\tau_t)\cdot G(\tau_t)},$$

amiből

$$E(\tau_t)\cdot G(\tau_t) - F^2(\tau_t) > 0 \qquad (t\in[0,1])$$

következik. Az ismert Sylvester-kritérium alapján (ld. 4.4. vii) megjegyzés) mindez azt jelenti, hogy a Q_t pozitív definit. A Q_t felhasználásával

$$E(\tau_t)\cdot u'(t)^2 + 2F(\tau_t)\cdot u'(t)\cdot v'(t) + G(\tau_t)\cdot v'(t)^2 = Q_t(u'(t), v'(t)) \qquad (t\in[0,1])$$

(*első alapforma*), továbbá a fenti felületi görbe ívhossza:

$$|\mathcal{G}| = \int_0^1 \sqrt{Q_t(u'(t), v'(t))}\,dt.$$

xxv) Az előző megjegyzésbeli Gauss-féle paraméterezés mellett az $\mathbf{R}^3$-beli ún. felületek „kezelése" az *Euler–Monge-féle megadással* is lehetséges. Tekintsünk ehhez egy

$$f : [0,1]^2 \to \mathbf{R}$$

folytonosan differenciálható függvényt, és legyen

$$\Phi(x,y) := (x,y,f(x,y)) \qquad \Big((x,y)\in[0,1]^2\Big).$$

Ekkor a Φ az

$$\mathcal{F}_f := \{(x,y,f(x,y))\in\mathbf{R}^3 : (x,y)\in[0,1]^2\}$$

felület *explicit* Euler–Monge-paraméterezése. (Valójában $\mathcal{F}_f$ maga az f függvény.) Ha az

$$F\in\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$$

függvény folytonosan differenciálható, és valamilyen $(a,b,c)\in\mathcal{D}_F$ helyen

$$F(a,b,c)=0,\ \partial_3F(a,b,c)\neq 0,$$

akkor az implicitfüggvény-tétel (ld. 4.5.3.3. Tétel) szerint létezik folytonosan differencálható $f:K(a,b)\to\mathbf{R}$ implicit függvény:

$$F(x,y,f(x,y))=0 \quad \Big((x,y)\in K(a,b)\Big),\ f(a,b)=c.$$

(Nyilván nem jelenti az általánosság megszorítását a $\mathcal{D}_f=[0,1]^2$ feltételezés.) Ekkor az előbbi $\mathcal{F}_f$ felület egy ún. *szintfelület,* amit általában valamilyen $\zeta\in\mathcal{R}_F$ esetén az

$$\{F=\zeta\} := \{\xi\in\mathcal{D}_F : F(\xi)=\zeta\}$$

halmazként értelmezünk. Speciálisan, ha

$$F(x,y,z) := f(x,y)-z \qquad \Big((x,y)\in[0,1]^2, z\in\mathbf{R}\Big),$$

akkor $\{F=0\}=\mathcal{F}_f$.

Ha $\mathcal{G}\subset\{F=\zeta\}$ valamilyen felületi görbe (ld. 4.6. xxxv) megjegyzés), aminek a

$$\varphi:[0,1]\to\mathcal{G}$$

egy paraméterezése, akkor

$$F(\varphi(t))=\zeta \qquad (t\in[0,1]),$$

következésképpen (ld. 4.1.4. Tétel)

$$0=(F\circ\varphi)'(t)=\langle \operatorname{grad} F(\varphi(t)),\varphi'(t)\rangle \qquad (t\in[0,1]).$$

Más szóval a $\operatorname{grad} F(\varphi(t))$, $\varphi'(t)$ $(t\in[0,1])$ vektorok merőlegesek egymásra.

xxvi) Tegyük fel, hogy a $\Phi : [0,1]^2 \to \mathbf{R}^3$ függvény folytonosan differenciálható (felület), és a $\partial_1\Phi(u,v)$, $\partial_2\Phi(u,v)$ vektorok egyetlen $(u,v) \in [0,1]^2$ esetén sem párhuzamosak. Tekinstük a $[0,1]^2$ „négyzet" egy $\tau \subset [0,1]^2$ felosztását (ld. 5.1.), legyen az $ABCD$ téglalap egy osztásintervallum. Ekkor a $\Phi(A)$, $\Phi(B)$, $\Phi(C)$, $\Phi(D)$ felületi pontok által meghatározott paralelogramma területe (a vektorok vektoriális szorzása alapján) a következő:

$$t_{ABCD} = \|(\Phi(D) - \Phi(A)) \times (\Phi(B) - \Phi(A))\| \approx$$

$$\|(\partial_2\Phi(A)\cdot |AD|) \times (\partial_1\Phi(A)\cdot |AB|)\| = \|\partial_1\Phi(A) \times \partial_2\Phi(A)\|\cdot |ABCD|,$$

ahol $|AD|$, ill. $|AB|$ az AD és az AB szakasz hosszát, $|ABCD| = |AD|\cdot |AB|$ pedig a jelzett osztásintervallum (téglalap) területét jelöli. A

$$\sum_{ABCD\in\tau} t_{ABCD} \approx \sum_{ABCD\in\tau} \|\partial_1\Phi(A) \times \partial_2\Phi(A)\|\cdot |ABCD|$$

közelítéssel az utóbbi összeg nem más, mint a $\|\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi\|$ függvénynek a τ felosztáshoz tartozó (Riemann-féle) integrálközelítő összege (ld. 5.1.). Ezért (a részletek mellőzésével) „logikusnak" látszik a szóban forgó felület *felszínét* a következő kettős integrálként definiálni:

$$\Upsilon_\Phi := \int_{[0,1]^2} \|\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi\|.$$

Az itt szereplő integrandust az alábbiak szerint tudjuk kiszámolni:

$$\|\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi\|^2 = \|\partial_1\Phi\|^2\cdot \|\partial_2\Phi\|^2\cdot \sin^2\alpha,$$

ahol az α a $\partial_1\Phi$, $\partial_2\Phi$ függvények aktuális helyettesítési értékei által bezárt szög. Tehát

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{\langle\partial_1\Phi, \partial_2\Phi\rangle^2}{\|\partial_1\Phi\|^2\cdot \|\partial_2\Phi\|^2},$$

ezért (ld. xxiv) megjegyzés) a Gauss-féle főmennyiségekkel

$$\|\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi\| = \sqrt{\|\partial_1\Phi\|^2\cdot \|\partial_2\Phi\|^2 - \langle\partial_1\Phi, \partial_2\Phi\rangle^2} = \sqrt{EG - F^2},$$

és

$$\Upsilon_\Phi = \int_{[0,1]^2} \sqrt{EG - F^2}.$$

Ha pl. $R > 0$ és

$$\Phi(u,v) := R\cdot \Big(\sin(\pi v)\cdot \cos(2\pi u), \sin(\pi v)\cdot \sin(2\pi u), \cos(\pi v)\Big) \qquad \Big((u,v) \in [0,1]^2\Big)$$

(amikor is $\mathcal{R}_\Phi \subset \mathbf{R}^3$ egy R sugarú gömb), akkor tetszőleges $(u,v) \in [0,1]^2$ helyen

$$\partial_1\Phi(u,v) = 2\pi R\cdot \sin(\pi v)\cdot \Big(-\sin(2\pi u), \cos(2\pi u), 0\Big),$$

$$\partial_2\Phi(u,v) = \pi R\cdot \Big(\cos(\pi v)\cdot \cos(2\pi u), \cos(\pi v)\cdot \sin(2\pi u), -\sin(\pi v)\Big),$$

valamint (könnyen ellenőrizhetően)

$$\partial_1\Phi(u,v) \times \partial_2\Phi(u,v) =$$

$$2\pi^2 R^2\cdot \sin(\pi v)\cdot \Big(-\sin(\pi v)\cdot \cos(2\pi u), -\sin(\pi v)\cdot \sin(2\pi u), -\cos(\pi v)\Big).$$

Ezért

$$\|\partial_1\Phi(u,v) \times \partial_2\Phi(u,v)\| = 2\pi^2 R^2\cdot \sin(\pi v) \qquad \Big((u,v)\in[0,1]^2\Big),$$

amiből

$$\Upsilon_\Phi = 2\pi^2 R^2\cdot \int_{[0,1]^2} \sin(\pi v)\, du\, dv = 2\pi^2 R^2\cdot \int_0^1 \sin(\pi v)\, dv = 4\pi R^2.$$

Ha a felület (explicit) Euler–Monge-módon van megadva (ld. xxv) megjegyzés), azaz valamilyen folytonosan differenciálható $f:[0,1]^2\to\mathbf{R}$ függvénnyel

$$\Phi(u,v) := (u,v,f(u,v)) \qquad \Big((u,v)\in[0,1]^2\Big),$$

akkor

$$\partial_1\Phi = (1,0,\partial_1 f),\ \partial_2\Phi = (0,1,\partial_2 f),$$

és így

$$\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi = (1,0,\partial_1 f)\times(0,1,\partial_2 f) = (-\partial_1 f, -\partial_2 f, 1),$$

és az illető felület felszíne:

$$\Upsilon_\Phi = \int_{[0,1]^2} \sqrt{1+(\partial_1 f)^2+(\partial_2 f)^2}.$$

Megjegyezzük, hogy az itt szereplő $[0,1]^2$ „paramétertartomány" helyett vehetnénk más „szerkezetű" halmazokat is, pl. téglalapokat vagy kompakt tartományokat. Legyen pl. $0\le h\in C^1[a,b]$, és tekintsük a h „megforgatásával" létrejövő

$$\mathcal{F} := \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : a\le x\le b,\ y^2+z^2 = h^2(x)\ \ (y,z\in\mathbf{R})\}$$

forgásfelületet. Világos, hogy az utóbbi negyedrészét az

$$f(u,v) := \sqrt{h^2(u)-v^2} \qquad \Big(a\le u\le b;\ 0\le v\le h(u)\Big)$$

függvénnyel paraméterezhetjük explicit Euler–Monge-módon. Ekkor az előbbi (u,v) helyeken

$$\partial_1 f(u,v) = \frac{h(u)\cdot h'(u)}{\sqrt{h^2(u)-v^2}},\ \partial_2 f(u,v) = -\frac{v}{\sqrt{h^2(u)-v^2}},$$

következésképpen (a paraméteres integrállal kapcsolatos 4.5.6.1. Tételt és (ld. 5.3.3.) a normáltartományon való integrálásra vonatkozó formulát is felhasználva) a jól ismert

$$\Upsilon_\Phi = 4\cdot \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \int_0^{h(u)-\varepsilon} \sqrt{1+\frac{h^2(u)\cdot (h'(u))^2+v^2}{h^2(u)-v^2}}\, du\, dv =$$

$$4\cdot \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b h(u)\cdot \sqrt{1+(h'(u))^2}\cdot \left(\int_0^{h(u)-\varepsilon} \frac{dv}{\sqrt{h^2(u)-v^2}}\, dv\right) du =$$

$$4\cdot \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b h(u)\cdot \sqrt{1+(h'(u))^2}\cdot \arcsin\frac{h(u)-\varepsilon}{h(u)}\, du =$$

$$4\cdot \int_a^b h(u)\cdot \sqrt{1+(h'(u))^2}\cdot \arcsin 1\, du = 2\pi\cdot \int_a^b h(u)\cdot \sqrt{1+(h'(u))^2}\, du$$

„képlet" adódik.

Érdemes megjegyezni, hogy az előbbi $\mathcal{F}$ forgásfelület egy másik lehetséges paraméterezése a

$$\Phi(u,v) := (u, h(u)\cdot \cos v, h(u)\cdot \sin v) \qquad \big((u,v)\in[a,b]\times[0,2\pi]\big)$$

függvény is. Ekkor

$$\partial_1\Phi(u,v) = (1, h'(u)\cdot \cos v, h'(u)\cdot \sin v),$$

$$\partial_2\Phi(u,v) = (0, -h(u)\cdot \sin v, h(u)\cdot \cos v) \qquad \big((u,v)\in[a,b]\times[0,2\pi]\big),$$

amiből

$$\partial_1\Phi(u,v)\times\partial_2\Phi(u,v) =$$

$$h(u)\cdot (h'(u), -\cos v, -\sin v) \qquad \big((u,v)\in[a,b]\times[0,2\pi]\big),$$

és így

$$\|\partial_1\Phi(u,v)\times\partial_2\Phi(u,v)\| = h(u)\cdot \sqrt{(h'(u))^2+\cos^2 v+\sin^2 v} =$$

$$h(u)\cdot \sqrt{1+(h'(u))^2} \qquad \big((u,v)\in[a,b]\times[0,2\pi]\big)$$

következik. Tehát (ld. 5.3.2.1. Tétel)

$$\int_{[a,b]\times[0,2\pi]} \|\partial_1\Phi(u,v)\times\partial_2\Phi(u,v)\|\, du\, dv =$$

$$\int_{[a,b]\times[0,2\pi]} h(u)\cdot \sqrt{1+(h'(u))^2}\, du\, dv = \int_a^b h(u)\cdot \sqrt{1+(h'(u))^2}\left(\int_0^{2\pi} dv\right) du =$$

$$2\pi\cdot \int_a^b h(u)\cdot \sqrt{1+(h'(u))^2}\, du.$$

Az implicit Euler–Monge-megadás esetén az illető felületet „paraméterező" f egy folytonosan differenciálható $F \in \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ függvény által meghatározott implicitfüggvény, így (ld. 4.5.3.3. Tétel) az $(u,v) \in [0,1]^2$ helyeken

$$\partial_1 f(u,v) = -\frac{\partial_1 F(u,v,f(u,v))}{\partial_3 F(u,v,f(u,v))},\ \partial_2 f(u,v) = -\frac{\partial_2 F(u,v,f(u,v))}{\partial_3 F(u,v,f(u,v))}.$$

Ezért

$$\Upsilon_\Phi = \int_{[0,1]^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial_1 F(u,v,f(u,v))}{\partial_3 F(u,v,f(u,v))}\right)^2 + \left(\frac{\partial_2 F(u,v,f(u,v))}{\partial_3 F(u,v,f(u,v))}\right)^2}\, du\, dv =$$

$$\int_{[0,1]^2} \frac{\|\operatorname{grad} F(u,v,f(u,v))\|}{|\partial_3 F(u,v,f(u,v))|}\, du\, dv.$$

6. fejezet

Függvénysorozatok, függvénysorok

6.1. Konvergencia, határfüggvény

A függvénysorozatok fogalmával részben találkoztunk már korábban is: az (f_n) sorozatot *függvénysorozatnak* nevezzük, ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén az f_n függvény. A továbbiakban mindig azzal a feltételezéssel élünk, hogy valamilyen $\emptyset \neq X, Y$ halmazokkal

$$f_n \in X \to Y \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

és egy $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$ halmazzal

$$\mathcal{D}_{f_n} = \mathcal{D} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Pl. a

$$h_n(t) := t^n \qquad (t \in \mathcal{D} := \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

függvények egy (h_n) függvénysorozatot határoznak meg.

Tegyük fel, hogy a szóban forgó (f_n) függvénysorozatra még az is igaz, hogy az Y vektortér (a $\mathbf{K}$ felett). Ekkor definiálható az (f_n) függvénysorozat által meghatározott $\sum(f_n)$ *függvénysor*:

$$\sum(f_n) := \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right).$$

A $\sum(f_n)$ függvénysor tehát nem más, mint az

$$F_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

részletösszegfüggvények által meghatározott (F_n) függvénysorozat. Így pl. az előbbi

$$h_n(t) := t^n \qquad (t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

függvények esetén $\sum(h_n) = (H_n)$, ahol

$$H_n(t) := \sum_{k=0}^{n} h_k(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k = \begin{cases} n+1 & (t=1) \\ \\ \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t} & (t \neq 1) \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Tekintsük az (f_n) függvénysorozatot, ahol tehát $f_n \in X \to Y \quad (n \in \mathbf{N})$, és

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_{f_n} = \mathcal{D}_{f_m} \qquad (n, m \in \mathbf{N}).$$

Ha „mérni" tudjuk az Y halmaz elemeinek az egymástól vett távolságát, azaz valamilyen

$$\sigma : Y \times Y \to [0, +\infty)$$

metrikával az (Y, σ) metrikus térről van szó, akkor van értelme a következő kérdésnek: egy $x \in \mathcal{D}$ elem esetén konvergens-e a helyettesítési értékeknek az $\big(f_n(x)\big)$ sorozata? Ha igen, akkor azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *konvergens* az x helyen. A

$$\mathcal{D}_0 := \Big\{t \in \mathcal{D} : \big(f_n(t)\big) \text{ konvergens}\Big\}$$

halmaz az (f_n) függvénysorozat *konvergenciatartománya.* Ha $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$, akkor az

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_0)$$

definícióval értelmezett $f : \mathcal{D}_0 \to Y$ függvény az (f_n) függvénysorozat *határfüggvénye.* A $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ esetben azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *pontonként konvergens.* Pl. az előbbi (h_n) függvénysorozattal $\mathcal{D}_0 = (-1, 1]$, és

$$h(t) := \begin{cases} 0 & (-1 < t < 1) \\ \\ 1 & (t = 1) \end{cases}$$

a (h_n) sorozat határfüggvénye.

Megjegyezzük, hogy ha $Z := \mathcal{D}_0 \neq \emptyset$, akkor az X-et Z-re, az f_n függvényeket pedig az $f_{n_{|Z}}$ $(n \in \mathbf{N})$ leszűkítésekre cserélve egy pontonként konvergens függvénysorozatot kapunk. Ezért esetenként (hacsak más szempontok nem mondanak ennek ellent) nyugodtan élhetünk a $\mathcal{D}_0 = X$ feltételezéssel.

Ha tehát a fenti (f_n) függvénysorozatra $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$, és f jelöli az (f_n) határfüggvényét, akkor tetszőleges $x \in \mathcal{D}_0$ és $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N_{x,\varepsilon} \in \mathbf{N}$, hogy

$$\sigma\Big(f_n(x), f(x)\Big) < \varepsilon \qquad (N_{x,\varepsilon} < n \in \mathbf{N}).$$

Hangsúlyozni kell, hogy az itt szereplő $N_{x,\varepsilon}$ küszöbindex általában függ az x-től is, és az ε-tól is. Elképzelhető ugyanakkor, hogy bizonyos esetekben bármilyen $\varepsilon > 0$ mellett olyan (csak ε-tól függő) $N := N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ is megadható, amelyik az előbbi becslésben egy $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_o$ halmaz mellett független az $x \in A$ elemtől. Ekkor azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat az A halmazon *egyenletesen konvergál* az f függvényhez, azaz: minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$(*) \qquad \sigma\Big(f_n(x), f(x)\Big) < \varepsilon \qquad (x \in A,\, N < n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy ekkor minden $\emptyset \neq B \subset A$ halmaz esetén is az (f_n) sorozat egyenletesen konvergál a B-n az f-hez. Ha az egyenletes konvergencia definíciójában $A = \mathcal{D}_0$ írható, akkor egyszerűen azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *egyenletesen konvergens.*

Nyilvánvaló, hogy ha valamilyen $\emptyset \neq A \subset X$ halmazzal és egy $f : A \to Y$ függvénnyel a $(*)$ tulajdonság igaz, akkor minden $x \in A$ elemre létezik a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ határérték. Következésképpen $A \subset \mathcal{D}_0$. Világos továbbá, hogy akármilyen véges $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_0$ halmaz esetén az (f_n) függvénysorozat az A halmazon egyenletesen konvergens, hiszen (a fenti jelölésekkel) ekkor az

$$N := \max\{N_{x,\varepsilon} : x \in A\}$$

indexszel $n > N$ esetén egyúttal $n > N_{x,\varepsilon}$ $(x \in A)$ is fennáll, ezért nyilván $(*)$ is igaz.

Az alábbi egyszerű példa azt mutatja, hogy mindez nem csupán véges A esetén fordulhat elő, ill. lehetséges, hogy valamilyen végtelen A halmazon sem egyenletes a konvergencia. Legyen ui. $X := Y := \mathbf{R}$, $\sigma(u, v) := |u - v|$ $(u, v \in \mathbf{R})$, és

$$g_n(x) := (x + 1/n)^2 \qquad (0 < n \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R}).$$

Mivel tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} (x + 1/n)^2 = x^2 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ezért $\mathcal{D}_0 = \mathbf{R}$, és

$$g(x) := x^2 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

a (g_n) függvénysorozat határfüggvénye. A most definiált függvénysorozat tehát pontonként konvergens. Mutassuk meg, hogy ugyanakkor nem egyenletesen konvergens. Valóban,

$$\sigma\Big(g_n(n), g(n)\Big) = |g_n(n) - g(n)| = 2 + 1/n^2 > 2 \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

ezért (pl.) $\varepsilon := 1$ esetén nyilván nincs olyan $N \in \mathbf{N}$ index, hogy

$$|g_n(x) - g(x)| < 1 \qquad (x \in \mathbf{R},\, N < n \in \mathbf{N})$$

teljesüljön. Ha viszont az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ halmaz korlátos, akkor a (g_n) sorozat az A-n egyenletesen konvergens. Ekkor ti.

$$|g_n(x) - g(x)| = \left|\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\right| \leq \frac{2C+1}{n} \qquad (x \in A,\, 0 < n \in \mathbf{N}),$$

ahol a $C > 0$ szám az A halmaz (egy) korlátja: $|a| \leq C \quad (a \in A)$. Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra megválaszthatjuk az $N \in \mathbf{N}$ „küszöböt" úgy, hogy $(2C+1)/N < \varepsilon$ igaz legyen, amikor is

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon \qquad (x \in A,\, N < n \in \mathbf{N}).$$

Tegyük fel, hogy az (Y, σ) metrikus tér teljes. Ekkor a fenti (f_n) függvénysorozatra az $x \in \mathcal{D}_0$ feltétel (azaz az $\big(f_n(x)\big)$ sorozat konvergenciája) azzal ekvivalens, hogy az $\big(f_n(x)\big)$ Cauchy-sorozat: tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N_{x,\varepsilon} \in \mathbf{N}$, hogy

$$\sigma\big(f_n(x), f_m(x)\big) < \varepsilon \qquad (N_{x,\varepsilon} < n,\, m \in \mathbf{N}).$$

Hasonlóan, ha az (Y, σ) teljes metrikus tér, és $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_0$, akkor könnyen beláthatóan az (f_n) függvénysorozatnak az A halmazon való egyenletes konvergenciája a következővel ekvivalens: minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható egy $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$(**) \qquad \sigma\big(f_n(x), f_m(x)\big) < \varepsilon \qquad (x \in A,\, N < n,\, m \in \mathbf{N}).$$

Valóban, ha fennáll az említett egyenletes konvergencia, akkor a szóban forgó $0 < \varepsilon$-hoz találunk olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexet, hogy az f határfüggvénnyel

$$\sigma\big(f_n(x), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x \in A,\, N < n \in \mathbf{N}).$$

Tehát

$$\sigma\big(f_n(x), f_m(x)\big) \leq$$

$$\sigma\big(f_n(x), f(x)\big) + \sigma\big(f_m(x), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (x \in A,\, N < n,\, m \in \mathbf{N}).$$

Fordítva, ha valamilyen $\emptyset \neq A \subset Y$ halmazzal $(**)$ igaz, akkor minden $x \in A$ esetén az $\big(f_n(x)\big)$ sorozat – Cauchy-sorozat lévén az (Y, σ) teljes metrikus térben – konvergens, legyen

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Mivel (ld. 6.4. iv) megjegyzés) $(**)$-ban rögzített $N < n \in \mathbf{N}$ és $x \in A$ mellett

$$\lim_{m \to \infty} \sigma\big(f_n(x), f_m(x)\big) = \sigma\big(f_n(x), f(x)\big),$$

ezért $\sigma\Big(f_n(x), f_m(x)\Big) < \varepsilon$ $(N < m \in \mathbf{N})$ miatt

$$\sigma\Big(f_n(x), f(x)\Big) \leq \varepsilon \qquad (x \in A,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Ez nyilván ugyanazt jelenti, mint a $(*)$ becslés.

A függvénysorok „nyelvén" megfogalmazva a pontonkénti, ill. az egyenletes konvergencia a következőképpen fogalmazható meg. Tegyük fel ehhez először is azt, hogy $(Y, \|.\|)$ a $\mathbf{K}$ feletti normált tér, és

$$\sigma(u, v) := \|u - v\| \qquad (u, v \in Y).$$

Legyen $X \neq \emptyset$, és a $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$ halmazzal adott az $f_n : \mathcal{D} \to Y$ $(n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat. Ekkor a $\sum(f_n)$ függvénysor x-beli konvergenciája azt jelenti, hogy a részletösszegek $\Big(\sum_{k=0}^n f_k\Big)$ sorozata konvergens az x helyen, azaz a $\Big(\sum_{k=0}^n f_k(x)\Big)$ sorozat konvergens. Nem fog félreértést okozni, ha az ilyen $x \in \mathcal{D}$ elemek összességét fogjuk most $\mathcal{D}_0$-val jelölni (a $\sum(f_n)$ függvénysor *konvergenciatartománya*). Tehát $\mathcal{D}_0$ nem más, mint a $\Big(\sum_{k=0}^n f_k\Big)$ függvénysorozat konvergenciatartománya. Ha $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$, akkor legyen

$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_0)$$

a szóban forgó függvénysor *összegfüggvénye.* Pl. a bevezetésben említett

$$h_n(t) := t^n \qquad (t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

függvényekkel

$$\sum_{k=0}^{n} h_k(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k = \begin{cases} n+1 & (t = 1) \\ \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t} & (t \neq 1) \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N})$$

miatt a $\sum(h_n)$ függvénysor konvergenciatartománya a $(-1, 1)$ intervallum, a H összegfüggvénye pedig a

$$H(x) := \frac{1}{1-x} \qquad (-1 < x < 1)$$

függvény.

Legyen a fenti $\sum(f_n)$ függvénysor esetén

$$F_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

az n-edik részletösszegfüggvény. Ha tehát a $\sum(f_n)$ függvénysor valamilyen $x \in \mathcal{D}$ helyen konvergens, akkor az $\Big(F_n(x)\Big)$ sorozat konvergens. Ezért ez utóbbi Cauchy-sorozat, ami a következőt jelenti: tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N_{x,\varepsilon} \in \mathbf{N}$, hogy

$$\sigma\Big(F_n(x), F_m(x)\Big) = \|F_n(x) - F_m(x)\| =$$

$$(***)\qquad \left\|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right\| < \varepsilon \qquad (N_{x,\varepsilon} < n,\ m \in \mathbf{N},\ n < m).$$

Ha az $(Y, \|.\|)$ tér teljes (azaz Banach-tér), akkor a $(***)$ feltétel szükséges és elégséges ahhoz, hogy a $\sum(f_n)$ függvénysor az x helyen konvergens legyen.

Jegyezzük meg, hogy ha $(***)$-ban $m := n+1$ áll, akkor

$$\|f_{n+1}(x)\| < \varepsilon \qquad (N_{x,\varepsilon} < n \in \mathbf{N})$$

adódik, azaz a szóban forgó függvénysor x-beli konvergenciájának szükséges feltételeként kapjuk azt, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Ha (továbbra is) F jelöli a $\sum(f_n)$ függvénysor összegfüggvényét, akkor

$$F(x) = \lim_{k\to\infty} F_k(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_0).$$

Következésképpen minden rögzített $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$F(x) - F_n(x) = \lim_{m\to\infty} F_m(x) - F_n(x) = \lim_{m\to\infty} \Big(F_m(x) - F_n(x)\Big) \qquad (x \in \mathcal{D}_0).$$

Vegyük észre, hogy az $n < m \in \mathbf{N}$ indexekre

$$F_m(x) - F_n(x) = \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_0),$$

ezért az $F - F_n$ függvény annak a $\sum(\varphi_k)$ függvénysornak az összegfüggvénye, amelyre

$$\varphi_k(x) := \begin{cases} 0 & (k \le n) \\ \\ f_k(x) & (k \ge n+1) \end{cases} \qquad (x \in \mathcal{D},\ k \in \mathbf{N}).$$

Legyen

$$\mathcal{D}_0 \ni x \mapsto \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

a $\sum(f_n)$ függvénysor n-edik *maradékszelet-függvénye,* amit a $\sum_{k>n}(f_k)$ szimbólummal fogunk jelölni. Mivel az előbbiek szerint

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = F(x) - F_n(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_0,\ n \in \mathbf{N}),$$

és $\lim_{n\to\infty}\Big(F(x)-F_n(x)\Big)=0\ \ (x\in\mathcal{D}_0)$, ezért

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)=0 \qquad (x\in\mathcal{D}_0).$$

Azt mondjuk, hogy a $\sum(f_n)$ függvénysor az $x\in\mathcal{D}$ helyen *abszolút konvergens,* ha a $\sum(\|f_k(x)\|)$ (szám)sor konvergens, azaz a $\Big(\sum_{k=0}^{n}\|f_k(x)\|\Big)$ sorozat konvergens. Ez a számsorozatokra vonatkozó Cauchy-kritériumot figyelembe véve azzal ekvivalens, hogy bármilyen $\varepsilon>0$ szám esetén egy $N_{x,\varepsilon}\in\mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$\sum_{k=n+1}^{m}\|f_k(x)\|<\varepsilon \qquad (N_{x,\varepsilon}<n,\, m\in\mathbf{N},\, n<m).$$

Mivel a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(t)\right\|\le\sum_{k=n+1}^{m}\|f_k(t)\| \qquad (t\in\mathcal{D},\, n,\, m\in\mathbf{N},\, n<m),$$

ezért a fentiek szerint azt mondhatjuk tehát, hogy ha az $(Y,\|.\|)$ Banach-tér, a $\sum(f_n)$ függvénysor az $x\in\mathcal{D}$ helyen abszolút konvergens, akkor a $\sum(f_n)$ függvénysor az x-ben konvergens is. Mindez „fordítva" nem igaz, elég csak a numerikus sorokkal kapcsolatban jól ismert példát felidézni: a $\sum\Big((-1)^n/n\Big)$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens.

Ha az előbbi $\sum(f_n)$ függvénysor egy $\emptyset\ne A\subset\mathcal{D}$ halmaz minden pontjában abszolút konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum(f_n)$ az A *halmazon abszolút konvergens.* Ha itt $A=\mathcal{D}$ írható, akkor a szóban forgó függvénysor *abszolút konvergens.*

Tekintsük továbbra is a fenti $\sum(f_n)$ függvénysort. Ha $\emptyset\ne A\subset\mathcal{D}$, és a részletösszeg-függvényeknek a $(\sum_{k=0}^{n} f_k)$ sorozata az A-n egyenletesen konvergens, akkor azt fogjuk mondani, hogy a $\sum(f_n)$ függvénysor az A halmazon *egyenletesen konvergens.* Ez tehát azt jelenti, hogy létezik olyan $F:A\to Y$ függvény, és tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $N\in\mathbf{N}$, amellyel

$$\left\|F(x)-\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right\|<\varepsilon \qquad (x\in A,\, N<n\in\mathbf{N}).$$

Ha az $(Y,\|.\|)$ tér teljes, akkor (a függvénysorozatokkal kapcsolatban mondottak szerint) mindez azzal ekvivalens, hogy bármilyen $\varepsilon>0$ esetén egy alkalmas $N\in\mathbf{N}$ természetes számmal

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right\|<\varepsilon \qquad (x\in A,\, N<n,\, m\in\mathbf{N},\, n<m)$$

(*egyenletes Cauchy-kritérium*). Az $A=\mathcal{D}$ esetben azt mondjuk, hogy a szóban forgó függvénysor *egyenletesen konvergens.*

Jegyezzük meg most is, hogy (a pontonkénti konvergenciához hasonlóan) tetszőleges $(Y, \|.\|)$ normált tér esetén az előbbi egyenletes konvergencia szükséges feltételeként azt kapjuk, hogy az A halmazon az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az $(A$-n) azonosan nulla függvényhez.

Világos, hogy ha a $\sum(f_n)$ függvénysor az A halmazon egyenletesen konvergens, akkor a maradékszelet-függvények $\left(\sum_{k>n}(f_k)\right)$ sorozata is az A-n egyenletesen konvergál nullához (azaz az A halmazon azonosan nulla függvényhez). Tehát bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right\| < \varepsilon \qquad (x \in A,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Innen az is rögtön következik, hogy

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right\| : x \in A,\ N < n \in \mathbf{N} \right\} \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

Fentebb láttuk, hogy a

$$h_n(t) := t^n \qquad (t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

függvénysorozat esetén a $\sum(h_n)$ függvénysor konvergenciatartománya a $(-1, 1)$ intervallum, a H összegfüggvénye pedig a

$$H(t) = \frac{1}{1-t} \qquad (-1 < t < 1)$$

függvény. A szóban forgó $\sum(h_n)$ függvénysor nem egyenletesen konvergens. Ui. most (mint a későbbi példákban is, ha külön nem is mondjuk) $X := Y := \mathbf{R}$, és $\|u\| := |u| \quad (u \in \mathbf{R})$, továbbá az $(Y, \|.\|)$ tér teljes, ezért az egyenletes konvergencia a következőt jelentené: minden $\varepsilon > 0$ esetén valamilyen $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} x^k \right| < \varepsilon \qquad (|x| < 1,\ N < n,\ m \in \mathbf{N},\ n < m).$$

Speciálisan az $m := n + 1$ választással

$$\left| x^{n+1} \right| < \varepsilon \qquad (|x| < 1,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Így pl. minden $\varepsilon > 0$ mellett az

$$(1 - 1/n)^{n+1} < \varepsilon \qquad (N < n \in \mathbf{N})$$

becslésnek is teljesülnie kellene egy $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel. Viszont az $\Big((1-1/n)^{n+1}\Big)$ számsorozat (monoton nőve) konvergál az $1/e$-hez, ezért innen $1/e \le \varepsilon$ következne. Ez nyilván nem lehetséges, ha $0<\varepsilon<1/e$.

Gondoljuk meg ugyanakkor, hogy bármilyen $0<\delta<1$ esetén az előbbi $\sum(h_n)$ függvénysor egyenletesen konvergens a $[-\delta,\delta]$ intervallumon. Ui.

$$\left|H(x)-\sum_{k=0}^{n} h_k(x)\right| = \left|\frac{1}{1-x}-\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \le \frac{\delta^{n+1}}{1-\delta} \qquad (x\in[-\delta,\delta],\, n\in\mathbf{N}).$$

Ha $\varepsilon>0$ tetszőleges, akkor $\delta^n \to 0$ $(n\to\infty)$ alapján van olyan $N\in\mathbf{N}$, hogy

$$0<\delta^{n+1}<(1-\delta)\cdot\varepsilon \qquad (N<n\in\mathbf{N}).$$

Ezért egyúttal

$$\left|H(x)-\sum_{k=0}^{n} h_k(x)\right| < \varepsilon \qquad (x\in[-\delta,\delta],\, N<n\in\mathbf{N}).$$

A szóban forgó $\sum(h_n)$ függvénysor $\sum_{k>n}(h_k)$ maradékszelet-függvényei a következők:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} h_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x} \qquad (-1<x<1,\, n\in\mathbf{N}).$$

Az előbb mondottak ennek alapján is könnyűszerrel megkaphatók.

6.1.1. Tétel (Weierstrass). *Tegyük fel, hogy $\emptyset \ne X$, $\emptyset \ne \mathcal{D} \subset X$, $(Y,\|.\|)$ Banach-tér, és adott az $f_n:\mathcal{D}\to Y$ $(n\in\mathbf{N})$ függvények által meghatározott $\sum(f_n)$ függvénysor. Legyen továbbá valamilyen $\emptyset \ne A\subset\mathcal{D}$ halmazzal és egy (a_n) számsorozattal*

$$\sup\{\|f_n(x)\| : x\in A\} \le a_n \qquad (n\in\mathbf{N}),$$

ahol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$. Ekkor a $\sum(f_n)$ függvénysor az A halmazon egyenletesen és abszolút konvergens.

Bizonyítás. Az alábbi becslés a tétel feltételei alapján nyilvánvaló:

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right\| \le \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k(x)\| \le \sum_{k=n+1}^{m} a_k \qquad (x\in A,\, n,\, m\in\mathbf{N},\, n<m).$$

Ha $\varepsilon>0$ egy pozitív szám, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ feltételezés miatt van olyan $N\in\mathbf{N}$, amellyel

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k < \varepsilon \qquad (n,\, m\in\mathbf{N},\, n<m),$$

ezért

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k(x)\| < \varepsilon \qquad (x \in A,\, n,\, m \in \mathbf{N},\, n < m).$$

A 6.1. Tétel megfogalmazása előtt mondottakra tekintettel ebből az következik, hogy a $\sum(f_n)$ függvénysor az A halmazon egyenletesen és abszolút konvergens. ■

Speciálisan, ha $1 \leq s \in \mathbf{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, és $(Y, \|.\|) := (\mathbf{K}^s, \|.\|_p)$, (ld. 1.2. v) megjegyzés), akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup\{\|f_n(x)\|_p : x \in A\} < +\infty$$

feltétel elegendő ahhoz, hogy a $\sum(f_n)$ függvénysor egyenletesen konvergens legyen az A halmazon. Ha itt $s = 1$, azaz $f_n \in X \to \mathbf{K}$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor az előbbi feltétel azt jelenti, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup\{|f_n(x)| : x \in A\} < +\infty.$$

Így pl. a már többször vizsgált

$$h_n(t) := t^n \qquad (t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

függvénysorozattal legyen $0 < \delta < 1$ és $A := [-\delta, \delta]$, amikor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup\{|h_n(t)| : t \in A\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sup\{|t^n| : t \in [-\delta, \delta]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n < +\infty.$$

Tehát (amint azt korábban már „kiszámoltuk") a szóban forgó $\sum(h_n)$ függvénysor a $[-\delta, \delta]$ intervallumon egyenletesen konvergens.

6.1.2. Tétel (Dirichlet). *Legyen $\emptyset \neq X$, $(Y, \|.\|)$ Banach-tér, $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$, és az*

$$f_n : \mathcal{D} \to Y,\ g_n : \mathcal{D} \to [0, +\infty) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekkel tekintsük a $\sum(f_n g_n)$ függvénysort. Tegyük fel, hogy a $\sum(f_n)$ függvénysor egyenletesen korlátos egy $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}$ halmazon, azaz valamilyen $C \geq 0$ számmal

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right\| \leq C \qquad (x \in A,\, n \in \mathbf{N}),$$

a (g_n) függvénysorozat pedig monoton fogyó az A-n, tehát

$$g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \qquad (x \in A,\, n \in \mathbf{N}),$$

és egyenletesen konvergál a $g(x) := 0$ $(x \in A)$ függvényhez. Ekkor a $\sum(f_n g_n)$ függvénysor az A halmazon egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. Tetszőleges $n, m \in \mathbf{N}$, $n < m$ és $x \in A$ esetén az

$$F_k := \sum_{j=0}^{k} f_j \qquad (j \in \mathbf{N})$$

részletösszegfüggvényekkel az ún. *Abel-átalakítás* segítségével a következőket mondhatjuk:

$$\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) g_k(x) = \sum_{k=n+1}^{m} \Big(F_k(x) - F_{k-1}(x)\Big) \cdot g_k(x) = \sum_{k=n+1}^{m} F_k(x) g_k(x) - \sum_{k=n}^{m-1} F_k(x) g_{k+1}(x) =$$

$$F_m(x) g_m(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} \Big(g_k(x) - g_{k+1}(x)\Big) \cdot F_k(x) - F_n(x) g_{n+1}(x),$$

így

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) g_k(x) \right\| \leq \|F_m(x)\| \cdot g_m(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} \Big(g_k(x) - g_{k+1}(x)\Big) \cdot \|F_k(x)\| + \|F_n(x)\| \cdot g_{n+1}(x) \leq$$

$$C \cdot \left(g_m(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} \Big(g_k(x) - g_{k+1}(x)\Big) + g_{n+1}(x) \right) =$$

$$C \cdot \Big(g_m(x) + g_{n+1}(x) - g_m(x) + g_{n+1}(x) \Big) = 2C \cdot g_{n+1}(x).$$

Mivel a (g_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az azonosan nulla függvényhez az A halmazon, ezért bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$0 \leq g_n(x) < \varepsilon \qquad (x \in A,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) g_k(x) \right\| \leq 2C \cdot \varepsilon \qquad (x \in A,\ N < n, m \in \mathbf{N},\ n < m),$$

azaz a $\sum(f_n g_n)$ függvénysor rendelkezik az egyenletes Cauchy-tulajdonsággal, tehát (az $(Y, \|.\|)$ tér teljessége miatt) az A halmazon egyenletesen konvergens. ■

Jegyezzük meg speciális esetként: ha a $\sum(f_n)$ függvénysor eleget tesz a 6.1.2. Tételbeli feltételeknek, akkor tetszőleges monoton fogyó (λ_n) nulla(szám-)sorozat esetén a $\sum(\lambda_n f_n)$ sor egyenletesen konvergens (az említett tételben szereplő A halmazon).

6.1.3. Tétel (Abel). *Az* $\emptyset \neq X$, $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$ *halmazokkal és az* $(Y, \|.\|)$ *Banach-térrel legyenek adottak az*

$$f_n : \mathcal{D} \to Y,\ g_n : \mathcal{D} \to \mathbf{R} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvények. Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}$, *és a* $\sum(f_n)$ *függvénysor egyenletesen konvergens az* A *halmazon, a* (g_n) *függvénysorozat pedig monoton és egyenletesen korlátos az* A*-n, tehát*

$$g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \qquad (x \in A,\ n \in \mathbf{N}),$$

vagy

$$g_{n+1}(x) \geq g_n(x) \qquad (x \in A,\ n \in \mathbf{N}),$$

és egy $C \geq 0$ *számmal*

$$|g_n(x)| \leq C \qquad (x \in A,\ n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a $\sum(f_n g_n)$ *függvénysor az* A *halmazon egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás. A $\sum(f_n)$ sornak az A halmazon feltételezett egyenletes konvergenciája miatt minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+s} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{s} f_{n+k}(x)\right| < \varepsilon \qquad (x \in A,\ N < n \in \mathbf{N},\ s \in \mathbf{N}).$$

Legyen

$$\varphi_{kn} := f_{n+k},\ \psi_{kn} := g_{n+k} \qquad (1 \leq k \in \mathbf{N}),$$

ekkor a

$$\Phi_{0n} \equiv 0,\ \Phi_{kn} := \sum_{j=1}^{k} \varphi_{jn} \qquad (1 \leq k \in \mathbf{N})$$

jelölésekkel a 6.1.2. Tétel bizonyításában már alkalmazott Abel-átalakítással

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+s} f_k(x) g_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{s} \varphi_{kn}(x)\psi_{kn}(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{s} \Big(\Phi_{kn}(x) - \Phi_{k-1n}(x)\Big)\psi_{kn}(x)\right| =$$

$$\left|\sum_{k=1}^{s} \Phi_{kn}(x)\psi_{kn}(x) - \sum_{k=0}^{s-1} \Phi_{kn}(x)\psi_{k+1n}(x)\right| =$$

$$\left|\Phi_{sn}(x)\psi_{sn}(x) + \sum_{k=1}^{s-1} \Phi_{kn}(x)\Big(\psi_{kn}(x) - \psi_{k+1n}(x)\Big)\right| \leq$$

$$|\Phi_{sn}(x)|\cdot|\psi_{sn}(x)| + \sum_{k=1}^{s-1} |\Phi_{kn}(x)|\cdot|\psi_{kn}(x) - \psi_{k+1n}(x)| \qquad (x \in A,\, n, s \in \mathbf{N}).$$

Mivel

$$|\Phi_{kn}(x)| < \varepsilon \qquad (x \in A,\, N < n \in \mathbf{N},\, k \in \mathbf{N}),$$

ezért

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+s} f_k(x) g_k(x)\right| \le C\cdot\varepsilon + \varepsilon\cdot\left|\sum_{k=1}^{s-1}\Big(\psi_{kn}(x) - \psi_{k+1n}(x)\Big)\right| =$$

$$C\cdot\varepsilon + \varepsilon\cdot|\psi_{sn}(x) - \psi_{1n}(x)| \le 3C\cdot\varepsilon \qquad (x \in A,\, N < n \in \mathbf{N},\, s \in \mathbf{N}).$$

Ez nem más, mint az A halmazon való egyenletes Cauchy-kritérium, amiből az $(Y, \|.\|)$ tér teljessége miatt a bizonyítandó állításunk már következik. ■

6.2. Megjegyzések

i) Tegyük fel, hogy $X \neq \emptyset$, $(Y, \|.\|)$ normált tér, és a $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$ halmazon értelmezett $f_n : \mathcal{D} \to Y \quad (n \in \mathbf{N})$ függvények által meghatározott $\sum(f_n)$ függvénysor valamilyen $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}$ halmazon egyenletesen konvergens. Legyen

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in A).$$

Ekkor tetszőleges $g : A \to \mathbf{K}$ korlátos függvény esetén a $\sum(gf_n)$ függvénysor is egyenletesen konvergens az A halmazon, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(x) f_n(x) = g(x) F(x) \qquad (x \in A).$$

Ui. tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$ amellyel

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - F(x)\right| < \varepsilon \qquad (x \in A,\, N < n \in \mathbf{N}).$$

Ha $C \ge 0$ jelöli a g függvény (egy) korlátját, azaz $|g(x)| \le C \quad (x \in A)$, akkor

$$\left|\sum_{k=0}^{n} g(x) f_k(x) - g(x) F(x)\right| = |g(x)|\cdot\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - F(x)\right| \le$$

$$C\cdot\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - F(x)\right| \le C\cdot\varepsilon \qquad (x \in A,\, N < n \in \mathbf{N}),$$

ami nyilván a $\sum(gf_n)$ függvénysor egyenletes konvergenciáját jelenti.

Nyilván ugyanez mondható el függvénysorok helyett függvénysorozatokra is.

ii) Az i) megjegyzésben szereplő $\sum(f_n)$ függvénysor mellett legyen adott most még egy $g_n : \mathcal{D} \to Y \quad (n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat is, és tegyük fel, hogy valamilyen $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}$ halmazon a $\sum(f_n)$, $\sum(g_n)$ függvénysorok egyenletesen konvergensek. Ekkor bármilyen $\lambda \in \mathbf{K}$ együtthatóval a $\sum(f_n + \lambda g_n)$ függvénysor is egyenletesen konvergens az A halmazon. Legyen ui.

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),\ G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \qquad (x \in A).$$

Ekkor akármilyen $\varepsilon > 0$ számot is megadva találunk olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexet, hogy

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - F(x)\right| < \varepsilon,\ \left|\sum_{k=0}^{n} g_k(x) - G(x)\right| < \varepsilon \qquad (x \in A,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \Big(f_k(x) + \lambda g_k(x)\Big) - \Big(F(x) + \lambda G(x)\Big)\right| \leq$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - F(x)\right| + |\lambda|\cdot\left|\sum_{k=0}^{n} g_k(x) - G(x)\right| \leq (1 + |\lambda|)\cdot\varepsilon \qquad (x \in A,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Ez nem más, mint a $\sum(f_n + \lambda g_n)$ sor egyenletes konvergenciája az A-n.

Ugyanez analóg módon igaz függvénysorok helyett függvénysorozatokra is.

iii) A 6.1.1. (Weierstrass-) Tétel nyilvánvaló következményeként kapjuk az alábbi állítást: ha a (λ_n) számsorozat által meghatározott $\sum(\lambda_n)$ sor abszolút konvergens, azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty,$$

akkor az

$$f_n(x) := \sin(nx),\ g_n(x) := \cos(nx) \qquad (x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N})$$

függvényekkel definiált

$$\sum \Big(\lambda_n \sin(nx)\Big) := \sum(\lambda_n f_n),\ \sum \Big(\lambda_n \cos(nx)\Big) := \sum(\lambda_n g_n)$$

szinusz-sor, ill. *koszinusz-sor* a

$$|\lambda_n f_n(x)|,\ |\lambda_n g_n(x)| \leq |\lambda_n| \qquad (x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N})$$

becslések miatt egyenletesen (és abszolút) konvergens.

iv) A 6.1.3. Tétel bizonyítását a maradékszelet-függvények segítségével a következőképpen is végezhetnénk. Vezessük be ehhez a következő jelöléseket:

$$\Delta_n(x) := \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \qquad (x \in A,\, n \in \mathbf{N}),$$

$$S_n := \sup\{\|\Delta_k(x)\| : x \in A,\, n \leq k \in \mathbf{N}\} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor az (S_n) sorozat 0-hoz konvergál, továbbá a már többször alkalmazott Abel-átalakítással tetszőleges $x \in A$, $n, m \in \mathbf{N}$, $n < m$ esetén

$$\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)g_k(x) = \sum_{k=n+1}^{m} \Big(\Delta_k(x) - \Delta_{k+1}(x)\Big)g_k(x) =$$

$$\sum_{k=n+1}^{m} \Delta_k(x)g_k(x) - \sum_{k=n+1}^{m} \Delta_{k+1}(x)g_k(x) = \sum_{k=n+1}^{m} \Delta_k(x)g_k(x) - \sum_{k=n+2}^{m+1} \Delta_k(x)g_{k-1}(x) =$$

$$\Delta_{n+1}(x)g_{n+1}(x) + \sum_{k=n+2}^{m} \Delta_k(x)\Big(g_k(x) - g_{k-1}(x)\Big) - \Delta_{m+1}(x)g_m(x).$$

Ezért az előbbi $x \in A$, $n, m \in \mathbf{N}$, $n < m$ mellett

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)g_k(x) \right\| \leq$$

$$\|\Delta_{n+1}(x)\| \cdot |g_{n+1}(x)| + \left| \sum_{k=n+2}^{m} \|\Delta_k(x)\| \cdot \Big(g_k(x) - g_{k-1}(x)\Big) \right| + \|\Delta_{m+1}(x)\| \cdot |g_m(x)| \leq$$

$$S_n \cdot \left(2C + \left| \sum_{k=n+2}^{m} \Big(g_k(x) - g_{k-1}(x)\Big) \right| \right) = S_n \cdot \Big(2C + \Big|g_m(x) - g_{n+1}(x)\Big|\Big) \leq 4C \cdot S_n.$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám, akkor egy $N \in \mathbf{N}$ indexszel $S_n < \varepsilon \quad (N < n \in \mathbf{N})$, így egyúttal

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)g_k(x) \right\| \leq 4C \cdot \varepsilon \qquad (x \in A,\, n, m \in \mathbf{N},\, n < m),$$

ami a tételünk bizonyítását jelenti.

v) Vegyük észre, hogy a 6.1.3. (Abel-) Tétel következik a 6.1.2. (Dirichlet-) Tételből. Valóban, a 6.1.3. Tételbeli jelölésekkel – lévén a (g_n) (valós értékű függvényekből álló) függvénysorozat monoton és egyenletesen korlátos az A halmazon – létezik a

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x) \qquad (x \in A)$$

határfüggvény. Világos, hogy a $(g_n - g)$ függvénysorozat az A halmazon egyenletesen konvergál az (A-n) azonosan nulla függvényhez, és vagy a $(g_n - g)$ sorozat, vagy pedig a $(g - g_n)$ sorozat monoton fogyó. Továbbá

$$|g(x)| = \lim_{n\to\infty} |g_n(x)| \le C \qquad (x \in A),$$

ezért (ld. i) megjegyzés) a $\sum(gf_n)$ függvénysor egyenletesen konvergens. Ugyanakkor

$$\sum(f_n g_n) = \sum\Big(f_n(g_n - g)\Big) + \sum(gf_n),$$

vagy

$$\sum(f_n g_n) = \sum(gf_n) - \sum\Big(f_n(g - g_n)\Big).$$

Az itt szereplő $\sum\Big(f_n(g_n - g)\Big)$ sor (vagy a $\sum\Big(f_n(g - g_n)\Big)$ sor) a 6.1.2. Tétel szerint egyenletesen konvergens az A halmazon, így (ld. ii) megjegyzés) a $\sum(f_n g_n)$ sor is az.

vi) A 6.1.2. Tétel bizonyítása után (annak speciális eseteként) már megjegyeztük, hogy ha a $\sum(f_n)$ függvénysor az említett tételben szereplő A halmazon egyenletesen korlátos, akkor tetszőleges monoton fogyó (λ_n) nulla(szám)sorozat esetén a $\sum(\lambda_n f_n)$ sor egyenletesen konvergens az A halmazon. Az egyik „legismertebb" ilyen sort kapjuk az $X := Y := \mathcal{D} := \mathbf{R}$, $\|y\| := |y| \quad (y \in \mathbf{R})$,

$$f_n(x) := \sin(nx) \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

választással. Nevezetesen, bármilyen monoton fogyó (λ_n) nulla(szám)sorozat esetén a

$$\sum\Big(\lambda_n \sin(nx)\Big) = \sum(\lambda_n f_n)$$

szinusz-sor minden olyan $[u, v] \subset \mathbf{R}$ korlátos és zárt intervallumon egyenletesen konvergens, amelyre $2k\pi \notin [u, v] \quad (k \in \mathbf{Z})$ teljesül. A sin függvény 2π szerinti periodicitását figyelembe véve ui. nyilván elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor $[u, v] \subset (0, 2\pi)$. A 6.1.2. Tétel szerint a szóban forgó szinusz-sor $[u, v]$-n való egyenletes konvergenciájához elegendő azt megmutatnunk, hogy alkalmas (legfeljebb az $[u, v]$-től függő) $C \ge 0$ konstanssal

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| \le C \qquad (x \in [u, v],\, 1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Ehhez $\sin(x/2) > 0 \ (x \in [u, v])$ alapján tekintsük az alábbi átalakítást:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| = \frac{1}{\sin(x/2)} \cdot \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \cdot \sin(x/2)\right| =$$

$$\frac{1}{2\sin(x/2)} \cdot \left|\sum_{k=1}^{n} \Big(\cos\Big((k - 1/2)x\Big) - \cos\Big((k + 1/2)x\Big)\right| =$$

$$= \frac{\left|\cos(x/2) - \cos\Big((n+1/2)x\Big)\right|}{2\sin(x/2)} \le \frac{1}{q} =: C \qquad (x \in [u,v],\ 1 \le n \in \mathbf{N}),$$

ahol (pl.)

$$q := \min\{\sin(x/2) : x \in [u,v]\}.$$

Mivel

$$f_n(2k\pi) = \sin(2kn\pi) = 0 \qquad (k, n \in \mathbf{N}),$$

ezért az előbbiekből nyilván következik, hogy a szóban forgó $\sum\Big(\lambda_n \sin(nx)\Big)$ szinusz-sor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén konvergens.

Ha a fentiekben „sin" helyett cos-t írunk, akkor analóg módon kapjuk a $\sum\Big(\lambda_n \cos(nx)\Big)$ koszinusz-sor egyenletes konvergenciáját az $[u,v]$ halmazon.

vii) Emlékeztetünk a hatványsor fogalmára: legyen valamilyen $a \in \mathbf{K}$ *középpont* és egy $(a_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ *együttható-sorozat* esetén

$$f_n(x) := a_n(x-a)^n \qquad (x \in \mathbf{K},\ n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a

$$\sum\Big(a_n(x-a)^n\Big) := \sum(f_n)$$

függvénysort neveztük *hatványsornak.* Megmutattuk, hogy

- ha $0 \ne z \in \mathbf{K}$, és a z helyen a fenti hatványsor konvergens, akkor minden $x \in \mathbf{K}$, $|x| < |z|$ esetén az x-ben abszolút konvergens.

Továbbá (ld. Cauchy–Hadamard-tétel) egyértelműen létezik olyan $0 \le r \le +\infty$ (*konvergenciasugár*), amellyel az alábbiak igazak:

- ha $r > 0$, akkor minden $0 < \delta < r$ számra $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \delta^n < +\infty$;
- a $\sum\Big(a_n(x-a)^n\Big)$ hatványsor $\mathcal{D}_0$ konvergenciatartományára a $0 < r < +\infty$ esetben

$$K_r(a) = \{x \in \mathbf{K} : |x-a| < r\} \subset \mathcal{D}_0 \subset \overline{K_r(a)} = \{x \in \mathbf{K} : |x-a| \le r\},$$

  és bármely $x \in K_r(a)$ pontban a $\sum\Big(a_n(x-a)^n\Big)$ sor abszolút konvergens;
- ha $r = +\infty$, akkor $\mathcal{D}_0 = \mathbf{K}$, és a szóban forgó hatványsor minden $x \in \mathbf{K}$ helyen abszolút konvergens;
- az $r = 0$ esetben $\mathcal{D}_0 = \{a\}$.

Nyilvánvaló, hogy $a \in \mathcal{D}_0$ mindig igaz, és az a-ban a fenti hatványsor összege a_0. Mutassuk meg, hogy minden

$$\emptyset \neq A \subset K_r(a) \quad (0 < r < +\infty), \text{ ill. } \emptyset \neq A \subset \mathbf{K} \quad (r = +\infty)$$

kompakt halmazon a $\sum \Big(a_n(x-a)^n\Big)$ hatványsor egyenletesen konvergens. Legyen ehhez

$$\delta := \sup\{|x-a| : x \in A\},$$

ekkor $|x-a| \leq r$ $(x \in A)$ miatt $\delta \leq r$. Lássuk be, hogy $\delta < r$. Ha ui. $\delta = r$ lenne, akkor egy alkalmas $x_n \in A$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozattal $\lim_{n\to\infty} |x_n - a| = r$ teljesülne. Az A kompaktsága miatt viszont egy (ν_n) indexsorozattal az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens lenne, és $\alpha := \lim_{n\to\infty} x_{\nu_n} \in A$, amiből $\alpha \in K_r(a)$ $(0 < r < +\infty)$, ill. $\alpha \in \mathbf{K}$ $(r = +\infty)$ következik. Így $|\alpha - a| < r$, de ugyanakkor $|\alpha - a| = \lim_{n\to\infty} |x_{\nu_n} - a| = r$, ami nyilván ellentmondás. Tehát $\delta < r$, és $A \subset \overline{K_\delta(a)}$, továbbá $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \delta^n < +\infty$. Ha $x \in \overline{K_\delta(a)}$, akkor

$$|a_n(x-a)^n| = |a_n| \cdot |x-a|^n \leq |a_n| \cdot \delta^n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \delta^n < +\infty$ alapján alkalmazható a Weierstrass-kritérium (ld. 6.1.1. Tétel): a $\sum \Big(a_n(x-a)^n\Big)$ hatványsor egyenletesen konvergens a $\overline{K_\delta(a)}$ halmazon, így az A-n is.

viii) Tegyük most fel, hogy $a_n, a \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, és a $\sum \Big(a_n(x-a)^n\Big)$ hatványsor r konvergenciasugara egy pozitív szám. Lássuk be, hogy

- ha a szóban forgó $S := \sum \Big(a_n(x-a)^n\Big)$ hatványsor konvergens az $a + r$ helyen, akkor bármilyen $a - r < b < a$ esetén az S egyenletesen konvergens a $[b, a + r]$ intervallumon;
- ha az S konvergens az $a - r$ helyen, akkor bármilyen $a < c < a + r$ mellett az S egyenletesen konvergens az $[a - r, c]$ intervallumon;
- ha az S konvergens az $a-r$, $a+r$ helyeken, akkor az S egyenletesen konvergens.

Tegyük fel ui., hogy az S konvergens az $a + r$ helyen, és $a - r < b < a$. Ekkor tetszőleges $x \in [a, a + r]$, $n \in \mathbf{N}$ választással

$$a_n(x-a)^n = a_n r^n \cdot \left(\frac{x-a}{r}\right)^n.$$

Tehát a

$$c_n := a_n r^n, \; g_n(x) := \left(\frac{x-a}{r}\right)^n \qquad (x \in [a, a+r], \, n \in \mathbf{N})$$

jelölésekkel az $[a, a+r]$ intervallumon $S = \sum(c_n g_n)$. A feltételeink szerint a $\sum(c_n)$ (szám)sor konvergens, a (g_n) függvénysorozat pedig nyilván monoton fogyó, és

$$0 \leq g_n(x) \leq 1 \qquad (x \in [a, a+r],\, n \in \mathbf{N}).$$

A 6.1.3. Tétel szerint ezért az S hatványsor az $[a, a+r]$ intervallumon egyenletesen konvergens. A vii) megjegyzés alapján ugyanez igaz a $[b, a]$ intervallumra is, amiből nyilván adódik már az S egyenletes konvergenciája a $[b, a+r] = [b, a] \cup [a, a+r]$ intervallumon.

Az állításunk második része analóg módon „intézhető" el, a harmadik pedig az első kettőből és a $\mathcal{D}_0 \subset [a-r, a+r]$ tartalmazásból következik.

ix) Ha $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$ és (Y, σ) egy metrikus tér, akkor az $f_n : \mathcal{D} \to Y \quad (n \in \mathbf{N})$ függvények által meghatározott (f_n) függvénysorozat konvergenciája (feltéve, hogy a $\mathcal{D}_0$ konvergenciahalmaz nem az üreshalmaz) nyilván azzal ekvivalens, hogy az $f : \mathcal{D}_0 \to Y$ határfüggvénnyel az

$$X \ni x \mapsto d_n(x) := \sigma\Big(f_n(x), f(x)\Big) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvénysorozat konvergál a ($\mathcal{D}_0$-on) azonosan nulla függvényhez. Speciálisan, ha $(Y, \sigma) \equiv (Y, \|.\|)$ normált tér, akkor az

$$X \ni x \mapsto \|f_n(x) - f(x)\| \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvénysorozatról van szó. Hasonlóan, ha $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_0$, akkor az (f_n) sorozatnak az A-n való egyenletes konvergenciája azt jelenti, hogy az előbb értelmezett (d_n) függvénysorozat az A-n egyenletesen konvergál az $A \ni x \mapsto 0$ függvényhez.

x) Tegyük fel, hogy valamilyen $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset X$ halmazokkal adott a $g : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ függvény, és legyen egy $\varepsilon > 0$ szám mellett

$$H_\varepsilon(g) := \{(x, y) \in \mathcal{D} \times \mathbf{R} : x \in \mathcal{D},\, f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}.$$

Világos, hogy

$$\operatorname{graf} g = \Big\{\Big(x, g(x)\Big) \in \mathcal{D} \times \mathbf{R} : x \in \mathcal{D}\Big\} \subset H_\varepsilon(g).$$

Ha az $f_n : \mathcal{D} \to \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$ függvények által meghatározott (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ függvényhez, akkor a következőt mondhatjuk: minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$\operatorname{graf} f_n \subset H_\varepsilon(f) \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Ui. az egyenletes konvergencia miatt egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathcal{D},\, N < n \in \mathbf{N}),$$

vagy ami most ugyanazt jelenti

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon, \text{ azaz } \big(x, f_n(x)\big) \in H_\varepsilon(f) \qquad (x \in \mathcal{D},\, N < n \in \mathbf{N}).$$

Ha itt $X = \mathbf{R}$, akkor $H_\varepsilon(f)$ a koordinátasíkon egy, a $\operatorname{graf} f$ köré „rajzolt" 2ε „szélességű" sávszerű síkidom. Az egyenletes konvergencia tehát ebben az esetben (geometriailag) a következőképpen jellemezhető: a $\operatorname{graf} f_n$ (függvény)grafikonok a $\operatorname{graf} f$ köré „rajzolt" bármilyen sávszerű síkidomban vannak egy alkalmas N indextől kezdve.

xi) Tekintsük az

$$f_n(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (0 < x < 1/n) \\ 0 & (1/n \le x < 1) \end{cases} \qquad (0 < n \in \mathbf{N})$$

definícióval (a $(0, 1)$ intervallumon) értelmezett (f_n) függvénysorozatot. Ha

$$f(x) := 0 \qquad (0 < x < 1),$$

akkor nyilván

$$|f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{n} \qquad (x \in (0, 1),\, 0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén az $1/N < \varepsilon$ feltételnek eleget tevő bármelyik $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in (0, 1),\, N < n \in \mathbf{N}).$$

Tehát az (f_n) függvénysorozat egyenletesen (és nyilván abszolút) konvergens. Ugyanakkor bármilyen, az

$$|f_n(x)| \le a_n \qquad (x \in (0, 1), n \in \mathbf{N})$$

egyenlőtlenség szerint választott (a_n) sorozatra világos, hogy

$$a_n \ge 1/n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezért $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, más szóval nem alkalmazható a Weierstrass-kritérium (ld. 6.1.1. Tétel).

xii) Tekintsük valamilyen $X \neq \emptyset$ halmaz és (Y, σ) metrikus tér esetén az

$$f_n : X \to Y \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvények által alkotott (f_n) függvénysorozatot. Tegyük fel, hogy az (f_n) sorozat egyenletesen konvergens, és minden f_n *korlátos függvény,* azaz egy $a_n \in Y$ elemnek egy alkalmas $K_{r_n}(a_n)$ környezetével (ahol $r_n > 0$)

$$\mathcal{R}_{f_n} \subset K_{r_n}(a_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor az (f_n) függvénysorozat *egyenletesen korlátos,* más szóval van olyan $a \in Y$ elem és olyan $K(a)$ környezet, hogy

$$\mathcal{R}_{f_n} \subset K(a) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Valóban, legyen az (f_n) határfüggvénye az $f : X \to Y$ függvény. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, amellyel

$$\sigma\Big(f_n(x), f(x)\Big) < 1 \qquad (N \leq n \in \mathbf{N}).$$

Speciálisan

$$\sigma\Big(f(x), a_N\Big) \leq \sigma\Big(f(x), f_N(x)\Big) + \sigma\Big(f_N(x), a_N\Big) < 1 + r_N \qquad (x \in X).$$

(Ez egyúttal azt is jelenti, hogy az f határfüggvény korlátos.) Innen

$$\sigma\Big(f_n(x), a_N\Big) \leq \sigma\Big(f_n(x), f(x)\Big) + \sigma\Big(f(x), a_N\Big) < 2 + r_N \qquad (N \leq n \in \mathbf{N},\, x \in X)$$

következik. Ugyanakkor a

$$\delta := \max\{r_k + \sigma(a_k, a_N) : k = 0, ..., N-1\}$$

jelöléssel

$$\sigma\Big(f_k(x), a_N\Big) \leq$$
$$\sigma\Big(f_k(x), a_k\Big) + \sigma(a_k, a_N) \leq r_k + \sigma(a_k, a_N) \leq \delta \qquad (k = 0, ..., N-1,\, x \in X).$$

Ha már most $r > 0$ és $r > \max\{\delta, 2 + r_N\}$, akkor

$$\sigma\Big(f_n(x), a_N\Big) < r \qquad (n \in \mathbf{N},\, x \in X),$$

azaz

$$\mathcal{R}_{f_n} \subset K(a_N) := K_r(a_N) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Megjegyezzük, hogy (könnyen beláthatóan) egy korlátos $g : X \to Y$ függvény esetén bármilyen $b \in Y$ elemhez van olyan $K(b)$ környezet, amellyel

$$\mathcal{R}_g \subset K(b).$$

Ha $Y := \mathbf{K}$, $\sigma(u, v) := |u - v|$ $(u, v \in \mathbf{K})$, akkor az f_n-ek korlátossága azt jelenti, hogy

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in X\} < +\infty \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor tehát a fentiek szerint – feltéve, hogy az $f_n : X \to \mathbf{K}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvények alkotta (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens –

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in X,\, n \in \mathbf{N}\} < +\infty.$$

Másképp fogalmazva van olyan $r > 0$, amellyel

$$|f_n(x)| \leq r \qquad (x \in X,\, n \in \mathbf{N}).$$

Ha $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ az (f_n) sorozat határfüggvénye, akkor (amint az az előbbiekből szintén kiderült) az f is korlátos:

$$\sup\{|f(x)| : x \in X\} < +\infty,$$

azaz egy $C > 0$ konstanssal

$$|f(x)| \leq C \qquad (x \in X).$$

xiii) A ii) megjegyzés szerint egyenletesen konvergens függvénysorozatok összege (ha ez utóbbi egyáltalán képezhető) szintén egyenletesen konvergens. Az alábbi egyszerű példa azt mutatja, hogy az „összeg" helyett ugyanez „szorzatra" általában nem várható. Legyen ui.

$$f_n(x) := g_n(x) := x + \frac{1}{n} \qquad (x \in \mathbf{R},\, 1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a $h(x) := x$ $(x \in \mathbf{R})$ függvénnyel

$$|f_n(x) - h(x)| = |g_n(x) - h(x)| = \frac{1}{n} \qquad (x \in \mathbf{R},\, 1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Ha tehát $\varepsilon > 0$, akkor az $1/N < \varepsilon$ feltételnek eleget tevő bármelyik $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$|f_n(x) - h(x)| = |g_n(x) - h(x)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathbf{R},\, N < n \in \mathbf{N}),$$

azaz az (f_n), (g_n) függvénysorozatok egyenletesen konvergensek. Ugyanakkor (ld. 6.1.) az

$$(f_n g_n)(x) = (x + 1/n)^2 \qquad (x \in \mathbf{R},\, 1 \leq n \in \mathbf{N})$$

szorzat-sorozat csak pontonként, de nem egyenletesen konvergens.

xiv) Legyenek adottak az $X \neq \emptyset$ halmaz esetén az

$$f_n,\, g_n : X \to \mathbf{K} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

korlátos függvények által meghatározott egyenletesen konvergens (f_n), (g_n) függvénysorozatok. Ekkor az $(f_n g_n)$ szorzat-sorozat is egyenletesen konvergens.

Ui. a xii) megjegyzés szerint valamilyen $C > 0$ korláttal

$$|f_n(x)|,\, |g_n(x)| \leq C \qquad (x \in X,\, n \in \mathbf{N}).$$

Az

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x) \qquad (x \in X)$$

határfüggvényekkel tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén egy $N \in \mathbf{N}$ „küszöbbel"

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon \qquad (x \in X,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Mivel az f, g függvények is korlátosak, ezért feltehető, hogy az előbbi C-vel

$$|f(x)|,\ |g(x)| \leq C \qquad (x \in X)$$

is teljesül. Mindezeket figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy

$$|(f_n g_n)(x) - (fg)(x)| = |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| =$$

$$\left|\Big(f_n(x) - f(x)\Big)g_n(x) - f(x)\Big(g(x) - g_n(x)\Big)\right| \leq$$

$$\Big|f_n(x) - f(x)\Big|\cdot |g_n(x)| + |f(x)|\cdot \Big|g_n(x) - g(x)\Big| \leq$$

$$C\cdot \Big(|f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|\Big) < 2C\cdot \varepsilon \qquad (x \in X).$$

Ezért az $(f_n g_n)$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az fg szorzatfüggvényhez.

xv) A vi) megjegyzésben vizsgált $\sum \Big(\lambda_n \sin(nx)\Big)$ alakú szinusz-sorok „emblematikus" speciális esete a $\sum \Big(\sin(nx)/n\Big)$ sor. Tudjuk (ld. vi) megjegyzés), hogy ez a szinusz-sor minden $x \in \mathbf{R}$ helyen konvergens, és ha $[u, v] \subset (0, 2\pi)$, akkor egyenletesen konvergens az $[u, v]$ intervallumon. Bizonyítsuk be, hogy egyenletesen korlátos is, nevezetesen

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| < 1 + \pi \qquad (x \in \mathbf{R},\ 1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

A periodicitás, ill. $\sin 0 = 0$ miatt nyilván elegendő az állítást a $(0, 2\pi)$ intervallum pontjaira megmutatni. Ha $0 < x < 2\pi$, akkor tetszőleges $0 < n \in \mathbf{N}$, $n \leq [1/x]$ esetén (ahol $[\alpha] \in \mathbf{Z}$ jelöli az $\alpha \in \mathbf{R}$ szám egészrészét: $\alpha - 1 < [\alpha] \leq \alpha$)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|\sin(kx)|}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{kx}{k} = nx \leq 1.$$

Ha $m := [1/x] < n \in \mathbf{N}$, akkor (Abel-átalakítással)

$$\sin(x/2)\cdot \left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin(kx)\cdot \sin(x/2)}{k}\right| =$$

$$\frac{1}{2}\cdot \left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\cos\Big((k-1/2)x\Big) - \cos\Big((k+1/2)x\Big)}{k}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \left| \sum_{k=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\cdot \cos\Big((k+1/2)x\Big) + \frac{\cos\Big((n+1/2)x\Big)}{n} - \frac{\cos\Big((m+1/2)x\Big)}{m+1} \right| \leq$$

$$\frac{1}{2}\cdot \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m+1}\right) = \frac{1}{m+1}.$$

Így

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \frac{1}{(m+1)\cdot \sin(x/2)}.$$

Ha $0 < x \leq \pi$, akkor $0 < x/2 \leq \pi/2$, ezért a $\sin_{|[0,\pi/2]}$ függvény konkávitása alapján

$$\frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{x}.$$

Következésképpen

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \frac{\pi}{(m+1)x} < \pi,$$

és

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin(kx)}{k} \right| + \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| < 1 + \pi.$$

Ha $\pi < x < 2\pi$, akkor $0 < 2\pi - x < \pi$, és

$$\sin(kx) = -\sin\Big(k(2\pi - x)\Big) \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

miatt az állításunk nyilván adódik az $x \in (0, \pi]$ esetből.

xvi) Ha az előző megjegyzésben követett gondolatmenetet a $\lambda_n := 1/n \quad (1 \leq n \in \mathbf{N})$ együttható-sorozat helyett tetszőleges monoton fogyó $\lambda_n \geq 0 \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatra követjük, akkor $0 < x < \pi$, ill. $0 < n \leq [1/x]$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\cdot \sin(kx) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} kx\cdot \lambda_k \leq \max\{k\cdot \lambda_k : k = 1, ..., n\}\cdot nx.$$

Tegyük fel, hogy

$$C := \sup\{k\cdot \lambda_k : 0 < k \in \mathbf{N}\} < +\infty.$$

Ekkor

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\cdot \sin(kx) \right| \leq C\cdot nx \leq C.$$

Továbbá az $m := [1/x] < n \in \mathbf{N}$ indexekre

$$\sin(x/2)\cdot \left| \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k\cdot \sin(kx) \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left|\sum_{k=m+1}^{n-1}(\lambda_k-\lambda_{k+1})\cdot\cos\Big((k+1/2)x\Big)+\lambda_n\cdot\cos\Big((n+1/2)x\Big)-\lambda_{m+1}\cdot\cos\Big((m+1/2)x\Big)\right| \le$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=m+1}^{n-1}(\lambda_k-\lambda_{k+1})+\lambda_n+\lambda_{m+1}\right)=\lambda_{m+1}.$$

Tehát

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k\cdot\sin(kx)\right| \le \frac{\lambda_{m+1}}{\sin(x/2)} \le \pi\cdot\frac{\lambda_{m+1}}{x} = \pi\cdot\frac{(m+1)\cdot\lambda_{m+1}}{(m+1)\cdot x} \le C\cdot\pi.$$

Ezért (ld. xv) megjegyzés)

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot\sin(kx)\right| \le C\cdot(1+\pi) \qquad (1\le n\in\mathbf{N},\, x\in\mathbf{R}).$$

xvii) A 6.1.2. (Dirichlet-)Tétel kiterjeszthető az alábbi értelemben: (az egyéb feltételek mellett) a (g_n) függvénysorozatról elég azt feltenni, hogy egyenletesen konvergál a $g(x) := 0 \quad (x \in A)$ függvényhez, és *egyenletesen korlátos változású,* azaz a

$$\Delta g_n(x) := \|g_n(x) - g_{n+1}(x)\| \qquad (x\in\mathcal{D},\, n\in\mathbf{N})$$

jelöléssel a $\sum(\Delta g_n)$ függvénysor az A-n egyenletesen konvergens. Ekkor ui. (a 6.1.2. Tétel bizonyításában használt jelölésekkel)

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\cdot g_k(x)\right\| \le$$

$$C\cdot\Big(\|g_m(x)\| + \sum_{k=n+1}^{m}\|g_k(x)-g_{k+1}(x)\| + \|g_{m+1}(x)\|\Big) \to 0 \qquad (x\in A,\, n,\, m\to\infty),$$

és ez a 0-hoz való konvergencia a feltételek miatt az A-n egyenletes.

Így pl., ha a (λ_n) nulla(szám-)sorozat *korlátos változású,* azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n-\lambda_{n+1}| < +\infty,$$

akkor a $\sum(\lambda_n\cdot f_n)$ függvénysor egyenletesen konvergens az A-n. (Világos, hogy pl. minden monoton fogyó nullasorozat korlátos változású.)

xviii) Tekintsük az

$$s_n(x) := \sin(nx),\ c_n(x) := \cos(nx) \qquad (x\in\mathbf{R},\, n\in\mathbf{N})$$

függvénysorozatokat, amelyeknek a konvergenciahalmazait jelöljük rendre a $\mathcal{D}_{(s)}$, $\mathcal{D}_{(c)}$ szimbólumokkal. Nyilván igaz, hogy

$$k\pi \in \mathcal{D}_{(s)} \quad (k \in \mathbf{Z}),\ 2j\pi \in \mathcal{D}_{(c)} \quad (j \in \mathbf{Z}).$$

Mutassuk meg, hogy

$$\mathcal{D}_{(s)} = \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\},\ \mathcal{D}_{(c)} = \{2j\pi : j \in \mathbf{Z}\}.$$

Ehhez az előbbiek, és a $\sin$, $\cos$ függvények 2π szerinti periodicitása miatt nyilván elég azt belátni, hogy

$$\mathcal{D}_{(s)} \bigcap \Big((0, 2\pi) \setminus \{\pi\}\Big) = \mathcal{D}_{(c)} \bigcap (0, 2\pi) = \emptyset.$$

Ha ui. $\pi \neq x \in (0, 2\pi)$, és a $\Big(\cos(nx)\Big)$ sorozat konvergens, akkor a

$$\cos\Big((n+1)x\Big) = \cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x \qquad (n \in \mathbf{N})$$

összefüggésből

$$\sin(nx) = \frac{\cos(nx)\cos x - \cos\Big((n+1)x\Big)}{\sin x} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz a $\Big(\sin(nx)\Big)$ sorozat konvergenciája, azaz $x \in \mathcal{D}_{(s)}$ következik. Továbbá az

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \cos(nx),\ \beta := \lim_{n\to\infty} \sin(nx)$$

jelölésekkel

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \cos\Big((n+1)x\Big) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x\Big) = \alpha\cdot \cos x - \beta\cdot \sin x$$

miatt

$$\beta = \frac{\alpha\cdot \cos x - \alpha}{\sin x}.$$

Az is igaz ekkor, hogy

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \cos(2nx) = \lim_{n\to\infty} \Big(2\cos^2(nx) - 1\Big) = 2\alpha^2 - 1.$$

Ugyanígy kapjuk a β létezéséből kiindulva, hogy az α is létezik, azaz $x \in \mathcal{D}_{(c)}$, és

$$\alpha = \frac{\beta - \beta\cdot \cos x}{\sin x}.$$

Mivel
$$\sin^2(nt)+\cos^2(nt)=1 \qquad (t\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{N}),$$
ezért
$$\alpha^2+\beta^2=1.$$
Továbbá
$$\beta=\lim_{n\to\infty}\sin(2nx)=2\cdot\lim_{n\to\infty}\sin(nx)\cos(nx)=2\alpha\beta.$$
Tehát vagy $\beta=0$, amiből a fentiek szerint $\alpha=0$ adódik, ellentmondva az $\alpha^2+\beta^2=1$ egyenlőségnek, vagy $\alpha=1/2$, amiből meg az $\alpha=2\alpha^2-1$ egyenlőség alapján a lehetetlen $\alpha=-1/2$ következne. Ezért ilyen x nem létezik.

6.3. Folytonosság, integrálhatóság, deriválhatóság

Legyenek adottak a $\emptyset\neq\mathcal{D}\subset X$ halmazok, továbbá az (Y,ρ) metrikus tér, és az
$$f_n:\mathcal{D}\to Y \qquad (n\in\mathbf{N})$$
függvények esetén tekintsük az (f_n) függvénysorozatot. Tegyük fel, hogy az (f_n) sorozat $\mathcal{D}_0$ konvergenciahalmaza nem az üreshalmaz, $f:\mathcal{D}_0\to Y$ pedig az illető függvénysorozat határfüggvénye. Azt fogjuk vizsgálni, hogy az f_n $(n\in\mathbf{N})$ függvényekre fennálló bizonyos tulajdonságok „öröklődnek-e" az f határfüggvényre. Az említett tulajdonságokat illetően a folytonosság, integrálhatóság, deriválhatóság fognak a vizsgálódásaink középpontjában állni. Az utóbbi kettővel kapcsolatban az is egy „izgalmas" kérdés lesz, hogy ha (pl.) az f_n $(n\in\mathbf{N})$ függvények valamennyien differenciálhatók, és ugyanez igaz az f határfüggvényre is, akkor fennáll-e az
$$f'=\lim_{n\to\infty}f_n'$$
egyenlőség? Ugyanez másképpen írva: igaz-e, hogy
$$\Big(\lim_{n\to\infty}f_n\Big)'=\lim_{n\to\infty}f_n',$$
azaz, hogy a differenciál- és a limesz-operátor felcserélhető?

Hasonlóan, ha egy kompakt $[a,b]$ intervallum esetén $f_n\in R[a,b]$ $(n\in\mathbf{N})$, és az (f_n) sorozat f határfüggvényére is igaz, hogy $f\in R[a,b]$, akkor teljesül-e az
$$\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$$
egyenlőség? Más szóval
$$\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n?$$

(Ez a határátmenet és az integrálás felcserélhetőségét jelentené.)

Az alábbi nagyon egyszerű példák azt mutatják, hogy a fenti kérdésekre minden további nélkül nem lehet igennel felelni. Legyen ui.

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & (0 \le x < 1/n) \\ \\ 0 & (1/n \le x \le 1) \end{cases} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy $f_n \in C[0,1]$ $(n \in \mathbf{N})$, az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergens, és az f határfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ \\ 0 & (0 < x \le 1). \end{cases}$$

Az is nyilvánvaló, hogy $f \notin \mathcal{C}\{0\}$.

Legyen most (ld. 5.4. xii) megjegyzés) valamilyen $a_n \in \mathbf{R}$ $(0 < n \in \mathbf{N})$ számsorozat mellett

$$f_n(x) := \begin{cases} a_n & (0 < x < 1/n) \\ \\ 0 & \big(x \in [0,1] \setminus (0, 1/n)\big) \end{cases} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor

$$f_n \in R[0,1],\ \int_0^1 f_n = \frac{a_n}{n} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

továbbá minden $x \in [0,1]$ helyen könnyen átláthatóan

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Tehát az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergens, és az f határfüggvénye a ($[0,1]$ intervallumon) az $f \equiv 0$ függvény. Így $f \in R[0,1]$, és $\int_0^1 f = 0$. Ugyanakkor az

$$a_n := n \qquad (0 < n \in \mathbf{N})$$

esetben az integrálok $\left(\int_0^1 f_n\right)$ sorozata konvergens, de

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \lim(1) = 1 \ne 0 = \int_0^1 f = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Az

$$a_n := (-1)^n \cdot n \qquad (0 < n \in \mathbf{N})$$

választással az $\left(\int_0^1 f_n\right) = \big((-1)^n\big)$ sorozat nem konvergens.

Amint azt már korábban is megjegyeztük (ld. 5.4. xii) megjegyzés), az f határfüggvényre az sem teljesül „automatikusan", hogy integrálható. Legyen ui. az (r_k) sorozat a $[0,1]$-beli racionális számok sorozata, és

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \{r_0, ..., r_n\}) \\ \\ 0 & (x \notin \{r_0, ..., r_n\}) \end{cases} \qquad (x \in [0,1],\, n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $f_n \in R[0,1]$ és $\int_0^1 f_n = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$, tehát létezik az integrálsorozat $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0$ határértéke, azonban az

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases} \qquad (x \in [0,1])$$

határfüggvény (a jól ismert Dirichlet-függvény) nem Riemann-integrálható.

A differenciálhatóságot illetően tekintsük a következő függvénysorozatot:

$$f_n(x) := |x|^{1+1/n} \qquad (x \in \mathbf{R},\, 0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $f_n \in D \quad (0 < n \in \mathbf{N})$, de az

$$f(x) := |x| \qquad (x \in \mathbf{R})$$

határfüggvény nem deriválható a 0-ban.

A folytonosság, az integrálhatóság, ill. a differenciálhatóság és a határátmenet „felcserélhetőségének" a kérdésével analóg probléma a „kétféle" határátmenet felcserélhetősége. Nevezetesen, ha az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergens, és (megfelelő kiindulási paraméterek mellett) léteznek a

$$c_n := \lim_{x\to a} f_n(x) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(függvény)határértékek, akkor igaz-e, hogy az f határfüggvénynek is van határértéke az a-ban? „Ráadásul" van-e határértéke a (c_n) sorozatnak, és ha igen, akkor vajon fennáll-e a

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} c_n$$

egyenlőség? Más szóval ez utóbbi azt jelentené, hogy

$$\lim_{x\to a} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Az első idevágó tételünkben ezzel a kérdéssel foglalkozunk.

6.3.1. Tétel. *Tekintsük az* (X, ρ), (Y, σ) *metrikus tereket, és az*

$$f_n : X \to Y \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekből álló (f_n) *függvénysorozatot. Tegyük fel, hogy az* (Y, σ) *tér teljes, továbbá az* (f_n) *sorozat egyenletesen konvergál az* $f : X \to Y$ *határfüggvényhez, és egy* $a \in X$ *helyen minden* $n \in \mathbf{N}$ *mellett léteznek a*

$$c_n := \lim_{x \to a} f_n(x) \ (\in Y)$$

határértékek. Ekkor

- *a* (c_n) *sorozat konvergens;*
- *létezik a* $\lim_{x \to a} f(x)$ *határérték, és* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to \infty} c_n$.

Bizonyítás. Az egyenletes konvergencia miatt bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$\sigma\Big(f_n(x), f(x)\Big) < \varepsilon \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Ezért a háromszög-egyenlőtlenség kétszeri alkalmazásával

$$\sigma(c_n, c_m) \leq \sigma\Big(c_n, f_n(x)\Big) + \sigma\Big(f_n(x), f_m(x)\Big) + \sigma\Big(f_m(x), c_m\Big) \qquad (x \in X,\ n, m \in \mathbf{N}).$$

Ha tehát $N < n, m \in \mathbf{N}$, akkor

$$\sigma(c_n, c_m) < \varepsilon + \sigma\Big(c_n, f_n(x)\Big) + \sigma\Big(f_m(x), c_m\Big) \qquad (x \in X).$$

Az előbbi $N < n, m \in \mathbf{N}$ indexekkel a

$$c_n = \lim_{x \to a} f_n(x),\ c_m = \lim_{x \to a} f_m(x)$$

egyenlőségek alapján létezik olyan $\delta > 0$, amellyel

$$\sigma\Big(c_n, f_n(x)\Big) < \varepsilon,\ \sigma\Big(f_m(x), c_m\Big) < \varepsilon \qquad \Big(x \in X,\ 0 < \rho(x, a) < \delta)\Big).$$

Ha tehát a fentiekben szereplő $x \in X$ elemet így választjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\sigma(c_n, c_m) < 3\varepsilon \qquad (N < n, m \in \mathbf{N}).$$

Ez azt jelenti, hogy a (c_n) sorozat Cauchy-sorozat, ezért az (Y, σ) tér teljessége miatt konvergens.

Legyen $c := \lim_{n \to \infty} c_n$. Ha $x \in X$, akkor az előbbi ε-nal és N-nel

$$\sigma\Big(f(x), c\Big) \leq \sigma\Big(f(x), f_n(x)\Big) + \sigma\Big(f_n(x), c_n\Big) + \sigma(c_n, c) <$$

$$\varepsilon + \sigma\Big(f_n(x), c_n\Big) + \sigma(c_n, c) \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Mivel $c = \lim_{n\to\infty} c_n$, ezért létezik olyan $M \in \mathbf{N}$, hogy

$$\sigma(c_n, c) < \varepsilon \qquad (M < n \in \mathbf{N}),$$

így

$$\sigma\Big(f(x), c\Big) < 2\varepsilon + \sigma\Big(f_n(x), c_n\Big) \qquad (x \in X,\ \max\{N, M\} < n \in \mathbf{N}).$$

Rögzítsünk egy, az előbbi $\max\{N, M\} < n$ feltételnek eleget tevő $n \in \mathbf{N}$ indexet, ekkor a $c_n = \lim_{x\to a} f_n(x)$ egyenlőségre utalva találunk olyan $\delta > 0$ számot, amellyel

$$\sigma\Big(f_n(x), c_n\Big) < \varepsilon \qquad \Big(x \in X,\ 0 < \rho(x, a) < \delta\Big).$$

Összefoglalva a most mondottakat oda jutunk, hogy

$$\sigma\Big(f(x), c\Big) < 3\varepsilon \qquad \Big(x \in X,\ 0 < \rho(x, a) < \delta\Big),$$

ami pontosan azt jelenti, hogy létezik a $\lim_{x\to a} f(x) = c$ határérték. ■

Fogalmazzuk át az előbbi tételünket a függvénysorok „nyelvére":

6.3.2. Tétel. *Tekintsük az (X, ρ) metrikus teret, az $(Y, \|.\|)$ Banach-teret, és a*

$$g_n : X \to Y \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvények által meghatározott $\sum(g_n)$ függvénysort. Tegyük fel, hogy a $\sum(g_n)$ sor egyenletesen konvergál a $G : X \to Y$ összegfüggvényhez, és egy $a \in X$ helyen minden $n \in \mathbf{N}$ mellett léteznek a

$$d_n := \lim_{x\to a} g_n(x)\ (\in Y)$$

határértékek. Ekkor

- *a $\sum(d_n)$ sor konvergens;*
- *létezik a $\lim_{x\to a} G(x)$ határérték, és $\lim_{x\to a} G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$.*

Valóban, ha most

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} g_k \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f := G$ függvényhez. Továbbá (ld. 2.1. xviii) megjegyzés) léteznek a

$$c_n := \lim_{x\to a} f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lim_{x\to a} g_k(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

határértékek. Ezért a 6.3.1. Tétel miatt egyrészt létezik a

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} d_k$$

határérték, röviden szólva tehát a $\sum(d_n)$ sor konvergens. Másrészt ugyancsak a 6.3.1. Tétel szerint az $f = G$ függvénynek az a-ban van határértéke, és

$$\lim_{x\to a} G(x) = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} d_k = \sum_{n=0}^{\infty} d_n.$$

A 6.3.2. Tétel feltételei mellett tehát

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to a} g_n(x),$$

azaz a $\lim_{x\to a} \ldots$ határátmenet és a $\sum_{n=0}^{\infty} \ldots$ szummázás felcserélhető.

A folytonosság és a határátmenet kapcsolatát illetően a követezőket mondhatjuk:

6.3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy adottak az* (X, ρ), $(Y\ \sigma)$ *metrikus terek, és az*

$$f_n : X \to Y \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvények által meghatározott (f_n) *függvénysorozat, amelyik egyenletesen konvergens. Legyen a határfüggvénye az* $f : X \to Y$ *függvény. Ha* $a \in X$, *és* $f_n \in \mathcal{C}\{a\}$ $(n \in \mathbf{N})$, *akkor* $f \in \mathcal{C}\{a\}$. *Speciálisan, ha itt minden* f_n $(n \in \mathbf{N})$ *függvény folytonos, akkor az* f *határfüggvény is folytonos.*

Bizonyítás. Az egyenletes konvergencia feltétele szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\sigma\Big(f_n(x), f(x)\Big) < \varepsilon \qquad (x \in X,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Ugyanakkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján minden $n \in \mathbf{N}$ indexre

$$\sigma\Big(f(x), f(a)\Big) \le \sigma\Big(f(x), f_n(x)\Big) + \sigma\Big(f_n(x), f_n(a)\Big) + \sigma\Big(f_n(a), f(a)\Big) \qquad (x \in X),$$

ezért

$$\sigma\Big(f(x), f(a)\Big) < 2\varepsilon + \sigma\Big(f_n(x), f_n(a)\Big) \qquad (x \in X,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Legyen a továbbiakban egy $N < n \in \mathbf{N}$ index rögzítve. Mivel $f_n \in \mathcal{C}\{a\}$, ezért egy alkalmas $\delta > 0$ esetén

$$\sigma\Big(f_n(x), f_n(a)\Big) < \varepsilon \qquad \Big(x \in X,\ \rho(x,a) < \delta\Big),$$

amiből
$$\sigma\Big(f(x), f(a)\Big) < 3\varepsilon \qquad \Big(x \in X,\ \rho(x,a) < \delta\Big),$$
azaz az f függvény a-beli folytonossága következik. ■

Megjegyezzük, hogy ha az előbbi tételben szereplő $a \in X$ izolált pontja az X-nek, azaz egy alkalmas $r > 0$ mellett $K_r(a) = \{a\}$, akkor az f határfüggvény a-beli folytonossága „automatikusan" teljesül. Ha viszont az a torlódási pontja az X-nek, akkor az $f \in \mathcal{C}\{a\}$ feltétel azzal ekvivalens, hogy létezik a $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (függvény)határérték. Hasonlóan, az $f_n \in \mathcal{C}\{a\}$ feltétel azt jelenti, hogy léteznek a $\lim_{x\to a} f_n(x) = f_n(a)$ $(n \in \mathbf{N})$ (függvény)határértékek. Ha az (Y, σ) tér teljes, akkor a 6.3.1. Tétel alkalmazható, miszerint
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to a} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a).$$

A 6.3.2. Tételhez hasonlóan fogalmazzuk át az előbbi állításunkat is a függvénysorok esetére.

6.3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy adott az (X, ρ) metrikus tér, és az $(Y \|.\|)$ normált tér, továbbá a*
$$g_n : X \to Y \qquad (n \in \mathbf{N})$$
függvények által meghatározott $\sum(g_n)$ függvénysor, amelyik egyenletesen konvergens. Legyen az összegfüggvénye a $G : X \to Y$ függvény. Ha $a \in X$, és $g_n \in \mathcal{C}\{a\}$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor $G \in \mathcal{C}\{a\}$. Speciálisan, ha itt minden g_n $(n \in \mathbf{N})$ függvény folytonos, akkor a G összegfüggvény is folytonos.

Legyen ui.
$$f_n := \sum_{k=0}^{n} g_k \qquad (n \in \mathbf{N}),$$
ekkor az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál a G-hez. Mivel (ld. 2.1. vii) megjegyzés) $f_n \in \mathcal{C}\{a\}$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért a 6.3.3. Tétel szerint $G \in \mathcal{C}\{a\}$ is igaz.

A 6.3.3. Tételben (az egyéb feltételek mellett) az egyenletes konvergencia értelemszerűen elégséges ahhoz, hogy a határfüggvény folytonos legyen. Bizonyos esetekben azonban ez a feltétel szükséges is. Igaz ui. a következő állítás:

6.3.5. Tétel (Dini). *Tegyük fel, hogy az (X, ρ) metrikus tér kompakt (azaz az X halmaz kompakt), az*
$$f_n : X \to \mathbf{R} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvények folytonosak, az (f_n) függgvénysorozat pontonként konvergál az ugyancsak folytonos $f : X \to \mathbf{R}$ határfüggvényhez, és az (f_n) sorozat monoton növő, azaz

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \qquad (x \in X,\, n \in \mathbf{N}),$$

vagy monoton fogyó, azaz

$$f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \qquad (x \in X,\, n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. Legyen pl. az (f_n) sorozat monoton fogyó. (A monoton növő esetet analóg módon „kezelhetjük".) Ekkor a

$$g_n := f_n - f : X \to [0, +\infty) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(ld. 2.1. vii) megjegyzés) folytonos függvények által alkotott (g_n) függvénysorozat is nyilván monoton fogyó, és

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0 \qquad (x \in X).$$

Következésképpen minden $\varepsilon > 0$ számhoz és $x \in X$ elemhez létezik olyan (ε-tól is függő) $N_x \in \mathbf{N}$ index, amellyel $g_{N_x}(x) < \varepsilon$. A folytonosság miatt viszont van az x-nek olyan $K(x)$ környezete, hogy egyúttal

$$g_{N_x}(t) < \varepsilon \qquad \big(t \in K(x)\big)$$

is igaz. Világos, hogy $X = \bigcup_{x\in X} K(x)$, amiből az X kompaktsága és az 1.7.10. Tétel miatt egy $s \in \mathbf{N}$ és $x_0, ..., x_s \in X$ mellett

$$X = \bigcup_{i=0}^{s} K(x_i).$$

Ha $z \in X$, akkor valamilyen $j = 0, ..., s$ esetén $z \in K(x_j)$, így $g_{N_{x_j}}(z) < \varepsilon$. Legyen

$$N := \max\{N_{x_i} : i = 0, ..., s\},$$

és $N < n \in \mathbf{N}$. Ekkor $N_{x_j} < n$, és a (g_n) sorozat monoton fogyása alapján

$$0 \leq g_n(z) \leq g_{N_{x_j}}(z) < \varepsilon.$$

Tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett az előbb definiált N küszöbindexszel

$$0 \leq g_n(z) < \varepsilon \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Ezért a (g_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az (X-en) azonosan nulla függvényhez, ami nyilván ekvivalens a Dini-tétel állításával. ∎

Fogalmazzuk meg a Dini-tételt a függvénysorok esetére is:

6.3.6. Tétel (Dini). *Legyen az (X, ρ) metrikus tér kompakt, a*

$$h_n : X \to [0, +\infty) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvények folytonosak, és a $\sum(h_n)$ függvénysor pontonként konvergáljon az ugyancsak folytonos $H : X \to [0, +\infty)$ összegfüggvényhez. Ekkor a $\sum(h_n)$ függvénysor egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. Az

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} h_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

folytonos függvényekből (ld. 2.1. vii) megjegyzés) álló (részletösszeg-)függvénysorozat nyilván monoton növő, és pontonként konvergál a H összegfüggvényhez. Tehát a 6.3.5. Tétel szerint az (f_n) sorozat – és így a $\sum(h_n)$ függvénysor – egyenletesen konvergens. Világos, hogy ugyanez igaz akkor is, ha a fenti h_n $(n \in \mathbf{N})$ függvényekre

$$h_n : X \to (-\infty, 0] \qquad (n \in \mathbf{N})$$

teljesül (amikor is az előbbi (f_n) függvénysorozat monoton fogyó). ∎

A továbbiakban a Riemann-integrálhatóság és a határátmenet kapcsolatával foglalkozunk.

6.3.7. Tétel. *Tekintsük a kompakt $[a, b]$ $(a, b \in \mathbf{R},\ a < b)$ intervallumon értelmezett $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvényekből álló (f_n) függvénysorozatot, amelyikről tegyük fel, hogy egyenletesen konvergens. Ha $f_n \in R[a, b]$ $(n \in \mathbf{N})$, és f jelöli az (f_n) sorozat határfüggvényét, akkor $f \in R[a, b]$, az integrálok $\left(\int_a^b f_n\right)$ sorozata konvergens, és*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám, ekkor egy $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in [a, b],\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Ezért bármilyen $J \subset [a, b]$ intervallum esetén

$$|f(u) - f(v)| \le |f(u) - f_n(u)| + |f_n(u) - f_n(v)| + |f_n(v) - f(v)| <$$

$$2\varepsilon + |f_n(u) - f_n(v)| \qquad (u, v \in J,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen

$$o_J(f) := \sup\{|f(u) - f(v)| : u, v \in J\} \leq$$

$$2\varepsilon + \sup\{|f_n(u) - f_n(v)| : u, v \in J\} = 2\varepsilon + o_J(f_n) \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Tehát bármilyen $\tau \subset [a,b]$ felosztásra

$$\omega(f,\tau) = \sum_{J\in\mathcal{F}(\tau)} o_J(f)\cdot |J| \leq \sum_{J\in\mathcal{F}(\tau)} 2\varepsilon\cdot |J| + \sum_{J\in\mathcal{F}(\tau)} o_J(f_n)\cdot |J| =$$

$$2(b-a)\cdot \varepsilon + \omega(f_n,\tau) \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Legyen az $N < n \in \mathbf{N}$ rögzítve, ekkor $f_n \in R[a,b]$ miatt van olyan $\tau \subset [a,b]$ felosztás, hogy $\omega(f_n,\tau) < \varepsilon$. Így $\omega(f,\tau) < (2(b-a)+1)\cdot \varepsilon$ ami (szükséges és) elegendő ahhoz, hogy $f \in R[a,b]$.

Ha $N < n \in \mathbf{N}$, akkor

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\, dx \leq \int_a^b \varepsilon = (b-a)\cdot \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$. ■

A 6.3.7. Tétel „függvénysoros" alakja a következő

6.3.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy a kompakt* $[a,b]$ $(a,b \in \mathbf{R},\ a < b)$ *intervallumon értelmezett* $g_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ *függvényekből álló* $\sum(g_n)$ *függvénysor egyenletesen konvergens. Ha* $g_n \in R[a,b]$ $(n \in \mathbf{N})$, *és* G *jelöli a* $\sum(g_n)$ *sor összegfüggvényét, akkor* $G \in R[a,b]$, *az integrálok alkotta* $\sum\left(\int_a^b g_n\right)$ *sor konvergens, valamint*

$$\int_a^b G = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n.$$

Indoklásképpen elegendő az

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} g_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekre alkalmazni a Riemann-integrálhatóság linearitására vonatkozó ismert állítást: $f_n \in R[a,b]$, és

$$\int_a^b f_n = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b g_k \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál a G-hez, ezért a 6.3.5. Tétel alapján azt mondhatjuk, hogy $G \in R[a,b]$ és

$$\int_a^b G = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b g_k,$$

Tehát a $\sum \left(\int_a^b g_n \right)$ sor konvergens, és

$$\int_a^b G = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b g_n.$$

Most vizsgáljuk meg a differenciálhatóság és a határátmenet viszonyát.

6.3.9. Tétel. *Legyen az $I \subset \mathbf{R}$ korlátos, nyílt intervallum, az $f_n : I \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvényekről pedig tegyük fel, hogy valamennyien differenciálhatók, a deriváltakból álló (f_n') függvénysorozat pedig egyenletesen konvergens. Ha van olyan $a \in I$, hogy az $\big(f_n(a)\big)$ (helyettesítési értékekből álló) sorozat konvergens, akkor*

- *az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens;*
- *ha f jelöli az (f_n) sorozat határfüggvényét, akkor $f \in D$, és*

$$f' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

Bizonyítás. Legyen $b \in I$, és vezessük be a következő jelöléseket:

$$\Phi_{bn}(x) := \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} & (x \neq b) \\ f_n'(b) & (x = b) \end{cases} \qquad (x \in I,\, n \in \mathbf{N}).$$

A Φ_{bn}-ek valamennyien folytonosak. Ez ui. a b-től különböző helyeken az f_n-ek folytonossága alapján a műveleti szabályok és a folytonosság kapcsolatából következik. A b helyen pedig a

$$\lim_{x\to b} \Phi_{bn}(x) = \lim_{x\to b} \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} = f_n'(b) = \Phi_{bn}(b) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

egyenlőségből. Azt sem nehéz belátni, hogy a (Φ_{bn}) függvénysorozat egyenletesen konvergens. Ti. legyen ehhez $n, m \in \mathbf{N}$, $b \neq x \in I$, ekkor a Lagrange-középértéktétel szerint egy alkalmas, b és x közötti ξ_{nm}-mel

$$\frac{\big(f_n(x) - f_m(x)\big) - \big(f_n(b) - f_m(b)\big)}{x - b} = (f_n - f_m)'(\xi_{nm}) = f_n'(\xi_{nm}) - f_m'(\xi_{nm}).$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$|\Phi_{bn}(x) - \Phi_{bm}(x)| = \begin{cases} |f_n'(\xi_{nm}) - f_m'(\xi_{nm})| & (b \neq x \in I) \\ \\ |f_n'(b) - f_m'(b)| & (x = b) \end{cases} \qquad (n, m \in \mathbf{N}).$$

A feltételeink szerint az (f_n') sorozat egyenletesen konvergens, ezért minden $\varepsilon > 0$ mellett egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indexszel

$$|f_n'(t) - f_m'(t)| < \varepsilon \qquad (t \in I,\ N < n, m \in \mathbf{N}).$$

Innen világos, hogy

$$|\Phi_{bn}(x) - \Phi_{bm}(x)| < \varepsilon \qquad (x \in I,\ N < n, m \in \mathbf{N}),$$

azaz a (Φ_{bn}) függvénysorozatra teljesül az egyenletes Cauchy-kritérium. Röviden szólva tehát a (Φ_{bn}) sorozat valóban egyenletesen konvergens. Legyen

$$\Phi_b := \lim_{n\to\infty} \Phi_{bn},$$

ami a 6.3.3. Tétel alapján folytonos.

Vegyük észre, hogy

$$f_n(x) = (x-a)\cdot \Phi_{an}(x) + f_n(a) \qquad (x \in I,\ n \in \mathbf{N}).$$

Tehát a

$$g(x) := x - a,\ h_n(x) := f_n(a) \qquad (x \in I,\ n \in \mathbf{N})$$

függvényekkel

$$(f_n) = (g\Phi_{an}) + (h_n).$$

Az I intervallum korlátossága miatt a g függvény korlátos, ezért (ld. 6.2. i) megjegyzés) a $(g\Phi_{an})$ sorozat egyenletesen konvergens. Nyilván ugyanez igaz a (h_n) (konstans)sorozatra is, amiből (ld. 6.2. ii) megjegyzés) az (f_n) függvénysorozat egyenletes konvergenciája már következik.

A (Φ_{bn}) $(b \in I)$ sorozat definíciója alapján most már világos, hogy

$$\Phi_b(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_{bn}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} & (x \neq b) \\ \\ \lim_{n\to\infty} f_n'(b) & (x = b) \end{cases} \qquad (x \in I,\ n \in \mathbf{N}).$$

Láttuk, hogy a Φ_b függvény folytonos, így létezik a

$$\Phi_b(b) = \lim_{n\to\infty} f_n'(b) = \lim_{x\to b} \Phi_b(x) = \lim_{x\to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

határérték. Ez azt jelenti, hogy $f \in D\{b\}$, és

$$f'(b) = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{n \to \infty} f_n'(b) \qquad (b \in I).$$

■

Azt mondhatjuk tehát, hogy a 6.3.7. Tétel feltételei mellett

$$\Big(\lim_{n \to \infty} f_n\Big)' = \lim_{n \to \infty} f_n'.$$

A „korábbiaknak" megfelelően adjuk meg itt is az előző tétel megfelelőjét függvénysorokra:

6.3.10. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $I \subset \mathbf{R}$ korlátos és nyílt intervallumon értelmezett $g_n : I \to \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$ függvények mindannyian differenciálhatók, a deriváltakból álló $\sum(g_n')$ függvénysor pedig egyenletesen konvergens. Ha van olyan $a \in I$, hogy a $\sum \big(g_n(a)\big)$ (helyettesítési értékekből álló) sor konvergens, akkor*

- *a $\sum(g_n)$ függvénysor egyenletesen konvergens;*
- *ha G jelöli az $\sum(g_n)$ sor összegfüggvényét, akkor $G \in D$, és*

$$G' = \sum_{n=0}^{\infty} g_n'.$$

Ui. a differenciálhatóság, ill. a derivált linearitása miatt az

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} g_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvények differenciálhatók, és

$$f_n' = \sum_{k=0}^{n} g_k' \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Tehát a deriváltakból álló (f_n') függvénysorozat egyenletesen konvergens, továbbá az $\big(f_n(a)\big)$ sorozat is konvergens. Így alkalmazható a 6.3.7. Tétel, miszerint a $\sum(g_n) = (f_n)$ függvénysor egyenletesen konvergál a G függvényhez, $G \in D$, és

$$G' = \lim_{n \to \infty} f_n' = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} g_k' = \sum_{n=0}^{\infty} g_n'.$$

6.4. Megjegyzések

i) Legyen

$$f_n(x) := x^n \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor jól ismert, hogy a $\sum(f_n)$ hatványsor konvergenciasugara 1, és

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (-1 < x < 1)$$

az összegfüggvénye. Továbbá (ld. 6.2. vii) megjegyzés) tetszőleges $0 < q < 1$ esetén a szóban forgó hatványsor egyenletesen konvergens a $[0, q]$ intervallumon. Következésképpen (ld. 6.3.8. Tétel)

$$\int_0^q f(x)\,dx = \int_0^q \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-q) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^q x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n},$$

azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-q}\right) \qquad (0 < q < 1).$$

Speciálisan a $q := 1/2$ választással

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n} = \ln 2.$$

ii) Az $S := \sum\Big(a_n(x-a)^n\Big)$ hatványsor legyen valós együtthatós, és tegyük fel, hogy az r konvergenciasugara pozitív szám. Legyen továbbá

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad \Big(x \in (a-r, a+r)\Big)$$

az S összegfüggvénye. Bebizonyítottuk (ld. 6.2. viii) megjegyzés), hogy ha a szóban forgó hatványsor konvergens az $a+r$ helyen, akkor bármilyen $a - r < b < a$ esetén az S egyenletesen konvergens a $[b, a+r]$ intervallumon. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik a

$$\lim_{x\to a+r} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

határérték (*Abel folytonossági tétele*). Ha ui.

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad \Big(x \in (a-r, a+r]\Big),$$

akkor a fenti $[b, a+r]$ intervallumon való egyenletes konvergencia miatt – lévén az S-et definiáló függvények (polinomok) folytonosak – a 6.3.3. Tétel szerint az F folytonos. Következésképpen

$$\lim_{x\to a+r} F(x) = F(a+r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Viszont $F_{|(a-r,a+r)} = f$, így létezik a

$$\lim_{x\to a+r} f(x) = \lim_{x\to a+r} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

határérték is, ami az állításunk bizonyítását jelenti. A 6.2. viii) megjegyzés alapján analóg folytonossági tulajdonság fogalmazható meg az $a-r$ végpontban is. Ha pedig az S hatványsor az $a+r$, $a-r$ pontok mindegyikében konvergens, akkor az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \qquad \big(x \in [a-r, a+r]\big)$$

módon értelmezett („új") összegfüggvényről azt mondhatjuk, hogy folytonos.

iii) A ii) megjegyzésben szereplő valós együtthatós $S := \sum \big(a_n(x-a)^n\big)$ hatványsorról tegyük fel, hogy az $a+r$ helyen divergens. Ekkor tetszőleges $a-r < b < a$ esetén az S nem egyenletesen konvergens a $[b, a+r)$ intervallumon. Legyen ui.

$$F_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k \qquad (x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N})$$

az S hatványsor n-edik részletösszegfüggvénye. Ekkor (mivel az F_n-ek polinomok) minden F_n folytonos. Következésképpen léteznek a

$$c_n := \lim_{x\to a+r} F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

határértékek. Ha az S, azaz az (F_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens lenne valamilyen $a-r < b < a$ esetén a $[b, a+r)$ intervallumon, akkor a 6.3.1. Tétel értelmében létezne a (véges)

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k r^k$$

határérték. Más szóval a $\sum(a_n r^n)$ sor konvergens lenne, azaz az S is konvergens lenne az $a+r$ pontban, ami a feltételezésünk szerint nem igaz.

Ugyanez mondható el akkor is, ha az S-ről azt tesszük fel, hogy az $a-r$ végpontban divergens.

iv) Ha most

$$g_n(x) := \frac{x^n}{n} \qquad (x \in \mathbf{R},\ 0 < n \in \mathbf{N}),$$

akkor a g_n-ek által meghatározott $\sum(g_n)$ hatványsor konvergenciasugara a jól ismert Cauchy–Hadamard-tétel szerint 1. Legyen

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad (-1 < x < 1).$$

A 6.2. viii) megjegyzés szerint minden $0 < b < 1$ esetén a $\sum(g_n)$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[-b, b]$ intervallumon, így természetesen a $(-b, b)$ nyílt intervallumon is. Mivel

$$g_n \in D,\ g_n'(x) = x^{n-1} \qquad (x \in \mathbf{R},\ 1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

és a $\sum(g_n')$ hatványsor is egyenletesen konvergens a $(-b, b)$ intervallumon, ezért (ld. 6.3.10. Tétel) $g \in D(-b, b)$, és

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (-b < x < b).$$

Mivel itt $0 < b < 1$ tetszőleges volt, ezért az előbbiek nyilván teljesülnek az egész $(-1, 1)$ intervallumon is. Tehát $g \in D$, és

$$g'(x) = \frac{1}{1-x} \qquad (-1 < x < 1).$$

(Megjegyezzük, hogy a hatványsorok összegfüggvényének a differenciálhatóságát, ill. a tagonkénti deriválhatóságot már a hatványsorok bevezetésekor, a $\mathbf{K} \to \mathbf{K}$ függvények tárgyalásakor is (más úton) beláttuk.)

Ha

$$G(x) := \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \qquad (-1 < x < 1),$$

akkor $G \in D$ és $G' = g'$. Következésképpen van olyan $c \in \mathbf{R}$, amellyel $g = G + c$. Vegyük észre, hogy $0 = g(0) = G(0) + c = c$, ezért $g = G$, azaz

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \qquad (-1 < x < 1)$$

(ld. i) megjegyzés). Ugyanakkor a $\sum\left((-1)^n/n\right)$ sor – a Leibniz-sorokra vonatkozó ugyancsak ismert állítás alapján – konvergens. Így a ii) megjegyzés szerint létezik a

$$\lim_{x \to -1} g(x) = \lim_{x \to -1} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

határérték. Más szóval

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \qquad (-1 \le x < 1),$$

és az itt szerplő hatványsor minden $0 < b < 1$ esetén egyenletesen konvergens a $[-1, b]$ intervallumon (ld. 6.2. viii) megjegyzés), de a $\sum(1/n)$ harmonikus sor divergenciája miatt nem egyenletesen konvergens (ld. iii) megjegyzés).

v) Tekintsük az alábbi függvénysorozatot:

$$g_n(x) := \begin{cases} 1 & (1/n \le x < 1) \\ nx & (|x| \le 1/n) \\ -1 & (-1 < x \le -1/n) \end{cases} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Legyen továbbá

$$f_n(x) := \int_0^x g_n(t)\,dt \qquad (|x| < 1,\ 0 < n \in \mathbf{N}),$$

ekkor

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^2/2 & (|x| \le 1/n) \\ 1/(2n) + x - 1/n & (1/n < x < 1) \\ 1/(2n) - x - 1/n & (-1 < x \le -1/n) \end{cases} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy $f_n \in D$, $f_n' = g_n$ $(0 < n \in \mathbf{N})$, továbbá az (f_n') függvénysorozat pontonként konvergál a

$$g(x) := \begin{cases} 1 & (0 < x < 1) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (-1 < x < 0) \end{cases}$$

függvényhez. Az is könnyen ellenőrizhető, hogy az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az

$$f(x) := |x| \qquad (|x| < 1)$$

függvényhez, ahol tehát $f \notin D\{0\}$.

vi) A Dini-tételben (ld. 6.3.5. Tétel) lényeges az (X, ρ) tér kompaktsága. Tekintsük ui. az

$$f_n(x) := \frac{1}{1+nx} \qquad (n \in \mathbf{N},\, 0 < x < 1)$$

függvénysorozatot. Világos, hogy az (f_n) sorozat monoton fogyó módon konvergál pontonként az

$$f(x) := 0 \qquad (0 < x < 1)$$

függvényhez. Ugyanakkor ez a konvergencia nem egyenletes, hiszen

$$f_n(1/n) = \frac{1}{2} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

(Megjegyezzük, hogy a „szokásos" $\rho(x,y) := |x-y| \quad (0 < x, y < 1)$ metrikával a $\big((0,1), \rho\big)$ metrikus tér nem kompakt.)

vii) A 6.3.5. Tétel egy másik lehetséges bizonyítása a következő. Legyen pl. az (f_n) sorozat monoton növő (a monoton fogyó esetre hasonló a gondolatmenet). Ha most

$$(0 \leq)\; g_n := f - f_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor a (g_n) (folytonos függvényekből (ld. 2.1. vii) megjegyzés) álló) függvénysorozat nyilván monoton fogyó, és

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0 \qquad (x \in X).$$

Azt kell megmutatnunk, hogy a (g_n) sorozat egyenletesen konvergál az (X-en) azonosan nulla függvényhez: minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy

$$0 \leq g_n(x) < \varepsilon \qquad (x \in X,\, N < n \in \mathbf{N}).$$

Mivel a (g_n) sorozat monoton fogyó, ezért ez azzal ekvivalens, hogy bármely $\varepsilon > 0$ mellett egy alkalmas $n \in \mathbf{N}$ indexszel

$$g_n(x) < \varepsilon \qquad (x \in X).$$

Indirekt gondolkodva tegyük fel, hogy ez utóbbi nem igaz. Más szóval van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy valamilyen $x_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozattal

$$g_n(x_n) \geq \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Az X halmaz kompakt, ezért (ld. 1.7.) az $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ sorozatnak van konvergens részsorozata, azaz létezik egy (ν_n) indexsorozat, amellyel az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens. Legyen

$$a := \lim_{n\to\infty} x_{\nu_n}.$$

A g_n-ek folytonossága és az átviteli elv (ld. 2.2. Tétel) szerint

$$g_k(a) = \lim_{n\to\infty} g_k\Big(x_{\nu_n}\Big) \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ugyanakkor tetszőleges $k \in \mathbf{N}$ esetén egy megfelelő $N \in \mathbf{N}$ indexre

$$\nu_n > k \qquad (N < n \in \mathbf{N}),$$

így a (g_n) monotonitásából

$$g_k\Big(x_{\nu_n}\Big) \geq g_{\nu_n}\Big(x_{\nu_n}\Big) \geq \varepsilon \qquad (N < n \in \mathbf{N})$$

következik. Ezért

$$g_k(a) = \lim_{n\to\infty} g_k\Big(x_{\nu_n}\Big) \geq \varepsilon \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

ami nyilván ellentmond a $\lim_{k\to\infty} g_k(a) = 0$ egyenlőségnek.

viii) A 6.3.3. Tételben az egyenletes konvergencia „túl erős" feltétel ahhoz, hogy a határfüggvény folytonos legyen. Az „enyhítéshez" vezessük be az ún. kváziegyenletes konvergencia fogalmát. Legyenek ehhez (X,ρ), (Y,σ) metrikus terek, $f_n : X \to Y$ $(n \in \mathbf{N})$ pedig egy függvénysorozat. Azt mondjuk, hogy az (f_n) sorozat *kváziegyenletesen konvergál* az $f : X \to Y$ függvényhez, ha

- minden $x \in X$ esetén $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, és
- tetszőleges $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbf{N}$ számokhoz létezik véges sok $N < n_0, ..., n_s \in \mathbf{N}$ index (valamilyen $s \in \mathbf{N}$ mellett) úgy, hogy bármilyen $x \in X$ helyen egy $i_x = 0, ..., s$ esetén
$$\sigma\Big(f_{n_{i_x}}(x), f(x)\Big) < \varepsilon.$$

Legyen pl.

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & (0 < x < 1/n) \\ \\ 0 & (1/n < x < 1) \end{cases} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor az (f_n) pontonként konvergál az $f(x) := 0$ $(0 < x < 1)$ függvényhez, de a konvergencia nem kváziegyenletes. Ui. bármilyen $0 < \varepsilon < 1$ és $n, N \in \mathbf{N}$, $N < n$ esetén az $x := (1-\varepsilon)/(2n)$ jelöléssel $f_n(x) > \varepsilon$.

Ugyanakkor világos, hogy ha egy (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens, akkor kváziegyenletesen is. Az alábbi példa azt mutatja viszont, hogy a kváziegyenletes konvergencia kevesebbet kívánó feltétel egy (f_n) függvénysorozatot illetően, mint az egyenletes konvergencia. Legyen ui.

$$f_n(x) := \begin{cases} 2nx & (0 \leq x \leq 1/(2n)) \\ \\ 2 - 2nx & (1/(2n) < x \leq 1/n) \\ \\ 0 & (1/n < x \leq 1) \end{cases} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor az $f(x) := 0$ $(0 \le x \le 1)$ függvénnyel

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (0 \le x \le 1).$$

A nyilvánvaló $f_n(1/2n) = 1$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$ egyenlőség miatt az (f_n) sorozat nem egyenletesen konvergens. Nem nehéz azonban meggondolni, hogy kváziegyenletesen konvergens. Legyen ti. $0 < \varepsilon < 1$, $N \in \mathbf{N}$, továbbá

$$q_n := \frac{\varepsilon}{2n} \ , \ v_n := \frac{2-\varepsilon}{2n} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Ha $N < M \in \mathbf{N}$ és

$$x \in [0,1] \setminus [q_M, v_M],$$

akkor $f_M(x) < \varepsilon$. Legyen $R \in \mathbf{N}$ olyan, hogy $1/R < q_M$, amikor is

$$f_R(x) = 0 \qquad (x \in [q_M, v_M]).$$

Tehát az $n_0 := M$, $n_1 := R$ választással

$$0 \le f_{n_0}(x) < \varepsilon \text{ vagy } 0 \le f_{n_1}(x) < \varepsilon \qquad (x \in [0,1]).$$

ix) Mutassuk meg, hogy *a 6.3.3. Tétel állításai igazak maradnak akkor is, ha az egyenletes konvergencia helyett az ott szereplő (f_n) függvénysorozat kváziegyenletes konvergenciáját tételezzük fel.*

Ti. (az említett tétel jelöléseivel) legyen $\varepsilon > 0$, ekkor $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$ miatt van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\sigma\Big(f_n(a), f(a)\Big) < \varepsilon/3 \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

A kváziegyenletes konvergencia alapján viszont megadhatók az $N < n_0, ..., n_s \in \mathbf{N}$ indexek (ahol $s \in \mathbf{N}$) úgy, hogy minden $x \in X$ elemre egy $i_x = 0, ..., s$ esetén

$$\sigma\Big(f_{n_{i_x}}(x), f(x)\Big) < \varepsilon/3.$$

Ugyanakkor a feltételeink szerint $f_{n_i} \in \mathcal{C}\{a\}$, ezért van olyan $\delta_i > 0$ $(i = 0, ..., s)$ szám, hogy

$$\sigma\Big(f_{n_i}(x), f_{n_i}(a)\Big) < \varepsilon/3 \qquad (x \in X,\ \rho(x,a) < \delta_i).$$

Ha

$$\delta := \min\{\delta_i : i = 0, ..., s\},$$

akkor nyilván

$$\sigma\Big(f_{n_i}(x), f_{n_i}(a)\Big) < \varepsilon \qquad \Big(x \in K_\delta(a),\ i = 0, ..., s\Big).$$

Tehát

$$\sigma\Big(f(x), f(a)\Big) \le$$

$$\sigma\Big(f(x), f_{n_{i_x}}(x)\Big) + \sigma\Big(f_{n_{i_x}}(x), f_{n_{i_x}}(a)\Big) + \sigma\Big(f_{n_{i_x}}(a), f(a)\Big) < \varepsilon \qquad \Big(x \in K_\delta(a)\Big),$$

így $f \in \mathcal{C}\{a\}$.

x) Sőt, bizonyos feltételek mellett a ix) megjegyzésben mondottak meg is „fordíthatók", nevezetesen, igaz az ún. Arzelà-tétel: *ha az* (X, ρ) *tér kompakt, a folytonos*

$$f_n : X \to Y \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvényekből álló (f_n) *függvénysorozat pontonként konvergál az ugyancsak folytonos* $f : X \to Y$ *függvényhez, akkor a konvergencia szükségképpen kváziegyenletes.*

Ui. legyen $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbf{N}$. Ha $x \in X$, akkor $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ miatt egy alkalmas $n_x \in \mathbf{N}$ mellett

$$\sigma\Big(f_{n_x}(x), f(x)\Big) < \varepsilon/3.$$

Nyilván feltehető, hogy $N < n_x$. Az f_n-ek és az f folytonossága miatt minden $x \in X$ elemnek van olyan $K(x)$ környezete, amelyben

$$\sigma\Big(f_{n_x}(t), f_{n_x}(x)\Big) < \varepsilon/3,\ \sigma\Big(f(t), f(x)\Big) < \varepsilon/3 \qquad (t \in K(x)),$$

következésképpen

$$\sigma\Big(f_{n_x}(t), f(t)\Big) \leq$$

$$\sigma\Big(f_{n_x}(t), f_{n_x}(x)\Big) + \sigma\Big(f_{n_x}(x), f(x)\Big) + \sigma\Big(f(x), f(t)\Big) < \varepsilon \qquad (t \in K(x)).$$

Világos, hogy $X = \bigcup_{x\in X} K(x)$, ezért az X kompaktsága és az 1.7.10. Tétel alapján alkalmas $s \in \mathbf{N}$ és $x_0, ..., x_s \in X$ paraméterekkel $X = \bigcup_{i=0}^{s} K(x_i)$. Ha viszont $z \in X$, akkor valamilyen $i = 0, ..., s$ indexszel $z \in K(x_i)$, tehát az előbbiekre tekintettel

$$\sigma\Big(f_{n_{x_i}}(z), f(z)\Big) < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy a kváziegyenletes konvergencia definíciójában az

$$n_i := n_{x_i} \qquad (i = 0, ..., s)$$

választás megfelelő. Más szóval az (f_n) sorozat kváziegyenletesen konvergens.

xi) Az 1.2. vi) megjegyzésben vizsgált $\sum\Big(\lambda_n \sin(nx)\Big)$ szinusz-sor tetszőleges monoton fogyó (λ_n) nulla(szám)sorozat esetén minden olyan korlátos és zárt $[u, v] \subset \mathbf{R}$ intervallumon egyenletesen konvergens , amelyre $2k\pi \notin [u, v] \quad (k \in \mathbf{Z})$ teljesül. Mivel az $\mathbf{R} \ni x \mapsto \sin(nx) \quad (n \in \mathbf{N})$ függvények folytonosak, ezért (ld. 6.3.3. Tétel) az előbbi $[u, v]$ intervallumokkal az

$$f_{uv}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin(nx) \qquad (x \in [u, v])$$

összegfüggvények is folytonosak. Így pl. az

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \qquad (0 < x < 2\pi)$$

függvény folytonos, hiszen tetszőleges $0 < a < 2\pi$ esetén a

$$\lambda_n := 1/n \quad (0 < n \in \mathbf{N}),\ 0 < u < a < v < 2\pi$$

választással $a \in (u,v)$, $f_{uv} \in \mathcal{C}\{a\}$, és $f_{|_{[u,v]}} = f_{uv}$.

xii) Tekintsük az

$$f_n(x) := \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

függvények által meghatározott $\sum(f_n)$ függvénysort. Lássuk be, hogy a $\sum(f_n)$ (abszolút) konvergens, de a konvergencia nem egyenletes. Ui. $f_n(0) = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$ miatt a szóban forgó függvénysor nyilván konvergens a 0-ban (és az összege is 0). Ha $0 \neq x \in \mathbf{R}$, akkor $1 + x^2 > 1$ miatt a $\sum\Big(1/(1+x^2)^n\Big)$ végtelen sor egy konvergens mértani sor, és így

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = x^2 + 1.$$

Tehát létezik az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ x^2 + 1 & (0 \neq x \in \mathbf{R}) \end{cases}$$

összegfüggvény. Világos, hogy $f \notin \mathcal{C}\{0\}$, ezért az $f_n \quad (n \in \mathbf{N})$ függvények folytonossága és a 6.3.4. Tétel miatt a $\sum(f_n)$ függvénysor nem egyenletesen konvergens.

Ez utóbbi következtetés könnyen megkapható „elemi" úton (tehát az idézett 6.3.4. Tétel nélkül) is. Ui.

$$\Delta_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) =$$

$$x^2 \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^k} = \frac{1}{(1+x^2)^n} \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N}),$$

így

$$\Delta_n(1/\sqrt{n}) = \frac{1}{(1+1/n)^n} \to \frac{1}{e} \qquad (n \to \infty).$$

Innen világos, hogy a maradékszelet-függvények (Δ_n) sorozata nem konvergál egyenletesen az azonosan nulla függvényhez.

Jegyezzük meg, hogy (pl. az ismert Bernoulli-egyenlőtlenség miatt)

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{n} \qquad (x \in \mathbf{R},\, 0 < n \in \mathbf{N}),$$

ezért az (f_n) sorozat egyenletesen konvergál az azonosan nulla függvényhez. Ez a példa is azt mutatja, hogy ez utóbbi csak szükséges, de nem elégséges feltétele a $\sum(f_n)$ függvénysor egyenletes konvergenciájának.

xiii) Tegyük fel, hogy az (a_n), (b_n) valós számokból álló sorozatok által meghatározott $\sum(a_n)$, $\sum(b_n)$ végtelen sorok konvergensek. Legyen $\sum(c_n)$ a Cauchy-szorzatuk, azaz

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A $\sum(a_n)$ sor feltételezett konvergenciája azt jelenti, jogy a $\sum(a_n x^n)$ hatványsor az 1-ben konvergens. Következésképpen minden olyan $x \in \mathbf{R}$ helyen abszolút konvergens, amelyre $|x| < 1$. Tehát a most mondott hatványsor r konvergenciasugarára $r \geq 1$ teljesül. Legyen

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (-r < x < r).$$

Ha $r = 1$, akkor az Abel-folytonossági tétel (ld. ii) megjegyzés) szerint létezik a

$$\lim_{x \to 1} A(x) = A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

határérték. Ha viszont $r > 1$, akkor az A függvény folytonossága miatt teljesül ugyanez. Mindez analóg módon elmondható a $\sum(b_n)$ sorral kapcsolatban is: valamilyen $\tilde{r} \geq 1$ mellett létezik a

$$B(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad (-\tilde{r} < x < \tilde{r})$$

összegfüggvény, és a

$$\lim_{x \to 1} B(x) = B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

határérték. Ha $r_* := \min\{r, \tilde{r}\}$, akkor a hatványsorokra vonatkozó ismert szorzás-tétel szerint létezik a

$$C(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = A(x) \cdot B(x) \qquad (-r_* < x < r_*)$$

összegfüggvény is. Ha tehát a $\sum(c_n)$ sor konvergens, akkor az előbbiekhez hasonlóan $r_* \geq 1$ miatt létezik a

$$\lim_{x \to 1} C(x) = C := \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

határérték. Mivel

$$\lim_{x \to 1} C(x) = \lim_{x \to 1} A(x) \cdot \lim_{x \to 1} B(x),$$

ezért ezzel a következő állítást láttuk be: ha a $\sum(a_n)$, $\sum(b_n)$ végtelen sorokkal együtt a $\sum(c_n)$ Cauchy-szorzatuk is konvergens, és

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \; B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \; C := \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

akkor $C = A\cdot B$. Emlékeztetünk arra, hogy ha a $\sum(a_n)$, $\sum(b_n)$ sorok abszolút konvergensek, akkor a $\sum(c_n)$ Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens, és $C = A\cdot B$. Az utóbbi egyenlőség tehát az előbbiek fényében nem „véletlen".

xiv) Legyen $r \in [0,1)$, és

$$f_n(x) := r^n\cdot \cos(nx) \qquad (x \in \mathbf{R},\ 0 < n \in \mathbf{N}).$$

Mivel $|f_n(x)| \leq r^n$ $(x \in \mathbf{R},\ 0 < n \in \mathbf{N})$, és $\sum_{n=1}^{\infty} r^n < +\infty$, ezért a Weiertsrass-kritérium (ld. 6.1.1. Tétel) miatt a $\sum(f_n)$ függvénysor egyenletesen konvergens. Mutassuk meg, hogy

$$P_r(x) := \frac{1-r^2}{1-2r\cdot \cos x + r^2} = 1 + 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty} r^n\cdot \cos(nx) \qquad (x, r \in \mathbf{R},\ 0 \leq r < 1).$$

(A most definiált P_r $(0 \leq r < 1)$ függvény a matematika számos fejezetében fontos szerepet játszó ún. *Poisson-magfüggvény.*)

Ui. egyrészt a szóban forgó paraméterekkel nyilván $1 - 2r\cdot \cos x + r^2 \neq 0$, másrészt

$$(1 - 2r\cdot \cos x + r^2)\cdot \Big(1 + 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty} r^n\cdot \cos(nx)\Big) =$$

$$1 - 2r\cdot \cos x + r^2 + 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty} r^n\cdot \cos(nx) - 4\cdot \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1}\cdot \cos x\cdot \cos(nx) + 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2}\cdot \cos(nx),$$

ahol

$$\cos x\cdot \cos(nx) = \frac{1}{2}\cdot \Big(\cos\big(n-1)x\big) + \cos\big(n+1)x\big)\Big).$$

Ezért

$$4\cdot \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1}\cdot \cos x\cdot \cos(nx) = 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1}\Big(\cos\big((n-1)x\big) + \cos\big((n+1)x\big)\Big) =$$

$$2\cdot \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+2} \cos(nx) + 2\cdot \sum_{n=2}^{\infty} r^n \cos(nx).$$

Így

$$(1 - 2r\cdot \cos x + r^2)\cdot \Big(1 + 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty} r^n\cdot \cos(nx)\Big) =$$

$$1 - 2r\cdot \cos x + r^2 + 2r\cdot \cos x - 2r^2 = 1 - r^2.$$

Világos, hogy minden $r \in [0,1)$ paraméterrel a P_r függvény folytonos. Továbbá a 6.3.8. Tételt felhasználva azt mondhatjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cdot \cos x + r^2}\, dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big(1 + 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot \cos(nx)\Big)\, dx = 2\pi + 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx = 2\pi.$$

xv) Lássuk be, hogy *létezik olyan folytonos* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *függvény, amelyik egyetlenegy* $a \in \mathbf{R}$ *helyen sem differenciálható.*

Legyen ehhez a $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ az a 2 szerint periodikus folytonos függvény, amelyre

$$\varphi(x) := \begin{cases} x & (0 \le x \le 1) \\ \\ 2 - x & (1 \le x \le 2). \end{cases}$$

Világos, hogy $0 \le \varphi(x) \le 1 \ \ (x \in \mathbf{R})$. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a φ függvény eleget tesz a

$$|\varphi(x) - \varphi(t)| \le |x - t| \qquad (x, t \in \mathbf{R})$$

Lipschitz-feltételnek. Ha

$$f_n(x) := \varphi(4^n \cdot x) \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N}),$$

akkor az f_n is folytonos, és

$$0 \le f_n(x) \le 1 \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N}).$$

Ha tehát $\lambda_n > 0 \quad (n \in \mathbf{N})$, és $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < +\infty$, akkor a Weierstrass-kritérium (ld. 6.1.1. Tétel) és a 6.3.4. Tétel alapján az

$$f := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n f_n$$

függvény folytonos. Megmutatjuk, hogy az f egyetlen $a \in \mathbf{R}$ pontban sem differenciálható.

Ha ui. $m \in \mathbf{N}$, akkor legyen

$$\delta_m := \begin{cases} \dfrac{1}{2\cdot 4^m} \\ \\ \text{vagy} \\ \\ -\dfrac{1}{2\cdot 4^m}, \end{cases}$$

annak megfelelően választva a $\pm$ előjeleket, hogy $4^m \cdot a$ és $4^m \cdot (a + \delta_m)$ ugyanazon két szomszédos egész szám közé essen. Más szóval

$$4^m \cdot a \in [q, q + 1/2)$$

(ahol $q \in \mathbf{Z}$) esetén $\delta_m = 1/(2\cdot 4^m)$, míg ha

$$4^m\cdot a \in [q+1/2, q+1),$$

akkor $\delta_m = -1/(2\cdot 4^m)$. Ekkor a

$$\gamma_{nm} := f_n(a+\delta_m) - f_n(a) \qquad (n, m \in \mathbf{N})$$

jelöléssel egyrészt

$$\gamma_{nm} = \varphi(4^n\cdot a + 4^n\cdot \delta_m) - \varphi(4^n\cdot a) = 0 \qquad (n, m \in \mathbf{N},\ m < n),$$

hiszen ekkor $4^n\cdot \delta_m$ páros egész szám, ezért a 2 szerinti periodicitás alapján

$$\varphi(4^n\cdot a + 4^n\cdot \delta_m) = \varphi(4^n\cdot a).$$

Másrészt tetszőleges $m \in \mathbf{N}$ mellett $4^m\cdot (a+\delta_m)$, $4^m\cdot a$ ugyanazon két szomszédos egész közé esnek, amelyek között a φ egy ± 1-meredekségű szakasz. Tehát

$$|\gamma_{mm}| = \Big|f_m(a+\delta_m) - f_m(a)\Big| =$$

$$\Big|\varphi\Big(4^m\cdot (a+\delta_m)\Big) - \varphi(4^m\cdot a)\Big| = |4^m\cdot a + \delta_m) - 4^m\cdot a| = 4^m\cdot |\delta_m|.$$

A Lipschitz-feltétel miatt $|\gamma_{nm}| \le 4^n\cdot |\delta_m|$ $(n, m \in \mathbf{N})$. Következésképpen azt írhatjuk, hogy

$$\left|\frac{f(a+\delta_m) - f(a)}{\delta_m}\right| = \left|\sum_{n=0}^{m} \lambda_n\cdot \frac{\gamma_{nm}}{\delta_m}\right| \ge 4^m\cdot \lambda_m - \sum_{n=0}^{m-1} 4^n\cdot \lambda_n.$$

Legyen itt pl. valamilyen $1/2 < q < 1$ mellett $\lambda_n := q^n$ $(n \in \mathbf{N})$, amikor is

$$\left|\frac{f(a+\delta_m) - f(a)}{\delta_m}\right| \ge (4q)^m - \frac{(4q)^m - 1}{4q-1} =$$

$$(4q)^m\cdot \frac{4q-2}{4q-1} + \frac{1}{4q-1} \to +\infty \qquad (m \to \infty).$$

Figyelembe véve, hogy nyilván $\lim_{m\to\infty} \delta_m = 0$, azt kaptuk, hogy az f függvény a-hoz tartozó differenciahányados-függvényének az a-ban nincs véges határértéke, röviden: $f \notin D\{a\}$.

xvi) Adott $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén legyen $f_n, f \in R[a,b]$ $(n \in \mathbf{N})$, ahol az (f_n) függvénysorozat egyenletesen korlátos, azaz valamilyen $C \ge 0$ konstanssal

$$|f_n(x)| \le C \qquad (x \in [a,b],\ n \in \mathbf{N}).$$

Az f korlátossága miatt egyúttal az is feltehető, hogy

$$|f(x)| \leq C \qquad (x \in [a,b]).$$

Tegyük fel továbbá, hogy minden $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ intervallumra az (f_n) sorozat az $[\alpha,\beta]$-n egyenletesen konvergál az f-hez. Ekkor az $\left(\int_a^b f_n\right)$ integrálsorozat konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Ti., ha $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ és $n \in \mathbf{N}$, akkor

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b f_n - \int_\alpha^\beta f_n + \int_\alpha^\beta f_n - \int_\alpha^\beta f + \int_\alpha^\beta f - \int_a^b f\right| =$$

$$\left|\int_a^\alpha f_n + \int_\beta^b f_n + \int_\alpha^\beta f_n - \int_\alpha^\beta f - \int_a^\alpha f - \int_\beta^b f\right| \leq$$

$$\int_a^\alpha |f_n| + \int_\beta^b |f_n| + \left|\int_\alpha^\beta f_n - \int_\alpha^\beta f\right| + \int_a^\alpha |f| + \int_\beta^b |f| \leq$$

$$2C(\alpha - a + b - \beta) + \left|\int_\alpha^\beta f_n - \int_\alpha^\beta f\right|.$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám, akkor az $[\alpha,\beta]$ intervallum nyilván megválasztható úgy, hogy

$$2C(\alpha - a + b - \beta) < \varepsilon.$$

Ekkor a 6.3.8. Tétel értelmében van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$\left|\int_\alpha^\beta f_n - \int_\alpha^\beta f\right| < \varepsilon \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Mindez azt jelenti, hogy

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| < 2\varepsilon \qquad (N < n \in \mathbf{N}),$$

amiből az állításunk már következik.

Megjegyezzük, hogy az egyenletes konvergenciával kapcsolatos feltétel helyett elegendő azt feltenni, hogy az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergál az f-hez. Ez az ún. Arzelà-tétel (ld. 5.4. xii) megjegyzés) (aminek a bizonyítása jóval nehezebb a fentieknél).

xvii) Legyen (X, ρ), (Y, σ) egy-egy metrikus tér, és tekintsük az $f_n : X \to Y \quad (n \in \mathbf{N})$ függvényekből álló (f_n) függvénysorozatot. Azt mondjuk, hogy az (f_n) sorozat *egyenlő mértékben egyenletesen folytonos,* ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, amellyel

$$\sigma\Big(f_n(x), f_n(y)\Big) < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\ x,\ y \in X,\ \rho(x,y) < \delta).$$

Világos, hogy ekkor minden $n \in \mathbf{N}$ esetén az f_n függvény egyenletesen folytonos. Mutassuk meg, hogy *ha az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergál az*

$$f : X \to Y$$

függvényhez, és az (f_n) sorozat egyenlő mértékben egyenletesen folytonos, akkor az f függvény egyenletesen folytonos.

Valóban, ha $\varepsilon > 0$, és $\delta > 0$ egy, az egyenlő mértékben egyenletes folytonosság definíciójában szereplő pozitív szám, akkor $x, y \in X$, $\rho(x,y) < \delta$ esetén

$$\sigma\Big(f_n(x), f_n(y)\Big) < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y),$$

ezért (ld. 1.4. iv) megjegyzés)

$$\sigma\Big(f(x), f(y)\Big) = \lim_{n\to\infty} \sigma\Big(f_n(x), f_n(y)\Big) \le \varepsilon.$$

Ez nem más, mint az f függvény egyenletes folytonosságának a definíciója.

xviii) Tegyük fel, hogy az előző megjegyzésben szereplő (f_n) sorozat tagjai eleget tesznek az egyenletes Lipschitz-feltételnek: egy alkalmas $C \ge 0$ konstanssal

$$\sigma\Big(f_n(x), f_n(y)\Big) \le C \cdot \rho(x,y) \qquad (n \in \mathbf{N},\ x, y \in X).$$

Nyilvánvaló, hogy ekkor az (f_n) sorozat egyenlő mértékben egyenletesen folytonos.

xix) A xv) megjegyzésbeli (X, ρ), (Y, σ) metrikus terek, és az $f_n : X \to Y \quad (n \in \mathbf{N})$ függvényekkel tegyük fel, hogy *az X kompakt, az f_n-ek valamennyien folytonosak, továbbá az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens. Gondoljuk meg, hogy ekkor az (f_n) sorozat egyenlő mértékben egyenletesen folytonos.*

Ha ui. $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ az (f_n) sorozat határfüggvénye, akkor a 6.3.3. Tétel miatt az f folytonos, tehát a Heine-tétel (ld. 2.6. Tétel) szerint egyenletesen folytonos. Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta > 0$, hogy

$$\sigma\Big(f(x), f(y)\Big) < \varepsilon/3 \qquad (x, y \in X,\ \rho(x,y) < \delta).$$

Az egyenletes konvergencia alapján ugyanakkor létezik egy $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex is, amellyel

$$\sigma\Big(f_n(x), f(x)\Big) < \varepsilon/3 \qquad (x \in X,\ N < n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen tetszőleges $x, y \in X$, $\rho(x,y) < \delta$ és $N < n \in \mathbf{N}$ választással

$$\sigma\Big(f_n(x), f_n(y)\Big) \leq \sigma\Big(f_n(x), f(x)\Big) + \sigma\Big(f(x), f(y)\Big) + \sigma\Big(f(y), f_n(y)\Big) < \varepsilon.$$

Viszont az f-hez hasonlóan az $f_0, ..., f_N$ függvények is egyenletesen folytonosak, ezért az előbbi ε mellett minden $i = 0, ..., N$ indexhez megválasztható a $\delta_i > 0$ úgy, hogy

$$\sigma\Big(f_i(x), f_i(y)\Big) < \varepsilon \qquad (x, y \in X,\ \rho(x,y) < \delta_i).$$

Ha már most a fenti δ-ra az is teljesül, hogy

$$0 < \delta < \min\{\delta_i : i = 0, ..., N\}$$

(ami feltehető), akkor

$$\sigma\Big(f_n(x), f_n(y)\Big) < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\ x, y \in X,\ \rho(x,y) < \delta).$$

xx) Nem nehéz belátni, hogy az előbbi megjegyzésben kapott állítás „fordítottja" is igaz. Nevezetesen, *legyenek adottak az* (X, ρ), (Y, σ) *metrikus terek, az*

$$f_n : X \to Y \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvények legyenek folytonosak, és tegyük fel, hogy az X *kompakt, az* (f_n) *függvénysorozat egyenlő mértékben egyenletesen folytonos és pontonként konvergens. Ekkor az* (f_n) *sorozat egyenletesen konvergens.*

Legyen ui.

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in X),$$

ekkor a xvii) megjegyzés szerint az f határfüggvény egyenletesen folytonos. Tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ hogy

$$\sigma\Big(f(x), f(y)\Big) < \varepsilon/3 \qquad (x, y \in X,\ \rho(x,y) < \delta).$$

Az egyenlő mértékben egyenletes folytonosság alapján az előbbi δ-ról az is feltehető, hogy

$$\sigma\Big(f_n(x), f_n(y)\Big) < \varepsilon/3 \qquad \Big(x \in X,\ y \in K_\delta(x),\ n \in \mathbf{N}\Big).$$

Ugyanakkor a pontonkénti konvergencia miatt minden $x \in X$ elemhez (és az előbbi ε-hoz) létezik olyan $N_x \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy

$$\sigma\Big(f_n(x), f(x)\Big) < \varepsilon/3 \qquad (x \in X,\ N_x < n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy $X = \bigcup_{x\in X} K_\delta(x)$, így az X kompaktságát figyelembe véve (ld. 1.7.10. Tétel) alkalmas $s \in \mathbf{N}$, $x_0, ..., x_s \in X$ mellett

$$X = \bigcup_{i=0}^{s} K_\delta(x_i).$$

Legyen $N := \max\{N_{x_i} : i = 0, ..., s\}$. Ha $z \in X$, akkor valamilyen $i = 0, ..., s$ indexszel $z \in K_\delta(x_i)$, és $N < n \in \mathbf{N}$ esetén egyúttal $n > N_{x_i}$. Ezért azt mondhatjuk, hogy

$$\sigma\Big(f_n(z), f(z)\Big) \leq \sigma\Big(f_n(z), f(x_i)\Big) + \sigma\Big(f(x_i), f(z)\Big) \leq$$

$$\sigma\Big(f_n(z), f_n(x_i)\Big) + \sigma\Big(f_n(x_i), f(x_i)\Big) + \sigma\Big(f(x_i), f(z)\Big) < \varepsilon,$$

amiből

$$\sigma\Big(f_n(z), f(z)\Big) < \varepsilon \qquad (z \in X,\ N < n \in \mathbf{N})$$

adódik. Ezért az (f_n) sorozat egyenletesen konvergál az f-hez.

xxi) Tegyük fel, hogy az $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumon értelmezett

$$f_n : I \to \mathbf{R} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvények folytonosan differenciálhatók, és az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergál egy differenciálható $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényhez. Ekkor tetszőleges $u, v \in I$, $u < v$ esetén létezik olyan $a \in [u, v]$, valamint olyan (ν_n) indexsorozat, hogy az $\Big(f'_{\nu_n}(a)\Big)$ sorozat konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} f'_{\nu_n}(a) = f'(a).$$

Ui. vezessük be a következő jelölést: ha $g : I \to \mathbf{R}$, $x, y \in I$, $x < y$ és $J := [x, y]$, akkor legyen

$$\Delta_J(g) := \frac{g(y) - g(x)}{y - x}.$$

Ha $J_0 := [u, v]$, akkor az

$$f(u) = \lim_{n\to\infty} f_n(u),\ f(v) = \lim_{n\to\infty} f_n(v)$$

egyenlőségek miatt egy alkalmas $\nu_0 \in \mathbf{N}$ indexszel

$$\Big|\Delta_{J_0}(f) - \Delta_{J_0}(f_{\nu_0})\Big| < 1.$$

A Lagrange-középértéktétel szerint létezik olyan $\xi_0 \in \operatorname{int} J_0$, amellyel

$$\Delta_{J_0}(f_{\nu_0}) = f'_{\nu_0}(\xi_0).$$

Legyen most $J_1 \subset J_0$ olyan kompakt intervallum, amelyre $|J_1| < 1/2$ és $\xi_0 \in \operatorname{int} J_1$, valamint

$$\sup\{|f'_{\nu_0}(x) - f'_{\nu_0}(t)| : x, t \in J_1\} < 1.$$

(Megjegyezzük, hogy az f'_{ν_0} folytonossága miatt ilyen J_1 valóban létezik.) Válasszuk a $\nu_0 < \nu_1 \in \mathbf{N}$ indexet úgy, hogy

$$\Big|\Delta_{J_1}(f) - \Delta_{J_1}(f_{\nu_1})\Big| < \frac{1}{2}.$$

Az eljárást folytatva (ld. teljes indukció) kapjuk az egymásba skatulyázott J_n kompakt intervallumoknak és $\xi_n \in \operatorname{int} J_n \quad (n \in \mathbf{N})$ pontoknak egy-egy sorozatát úgy, hogy

$$|J_n| < \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbf{N}),\ \xi_{n-1} \in \operatorname{int} J_n \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

és egy (ν_n) indexsorozattal

$$\Delta_{J_n}(f_{\nu_n}) = f'_{\nu_n}(\xi_n),\ \Big|\Delta_{J_n}(f) - \Delta_{J_n}(f_{\nu_n})\Big| < \frac{1}{2^n} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

valamint

$$\sup\{|f'_{\nu_{n-1}}(x) - f'_{\nu_{n-1}}(t)| : x, t \in J_n\} < \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

A Cantor-tételt alkalmazva adódik olyan $a \in J_0$ pont, hogy $a \in J_n \quad (n \in \mathbf{N})$. Mivel $|J_n| \to 0 \quad (n \to \infty)$, ezért egyetlen ilyen $a \in J_0$ van, és

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_{J_n}(f) = f'(a).$$

Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty} f'_{\nu_n}(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} \Delta_{J_n}(f_{\nu_n}) = f'(a).$$

Mivel $\xi_{n-1}, a \in \operatorname{int} J_n \ (1 \leq n \in \mathbf{N})$, ezért

$$|f'_{\nu_{n-1}}(\xi_{n-1}) - f'_{\nu_{n-1}}(a)| < \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

így

$$|f'_{\nu_{n-1}}(a) - f'(a)| \leq |f'_{\nu_{n-1}}(a) - f'_{\nu_{n-1}}(\xi_{n-1})| + |f'_{\nu_{n-1}}(\xi_{n-1}) - f'(a)| <$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} + |f'_{\nu_{n-1}}(\xi_{n-1}) - f'(a)| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

xxii) Tekintsük az

$$f_n(x) := \frac{x}{1+nx^2} \qquad (x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N})$$

differenciálható egyváltozós valós függvényekből álló (f_n) sorozatot. Világos, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := 0 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Sőt, az (f_n) sorozat egyenletesen is konvergens. Ui. tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $x \in \mathbf{R}$ esetén egyrészt

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{1+nx^2} \le |x| < \varepsilon \qquad (|x| < \varepsilon,\ n \in \mathbf{N}),$$

másrészt

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{1+nx^2} \le \frac{|x|}{1+n|x|\cdot\varepsilon} \le \frac{1}{n\cdot\varepsilon} \qquad (|x| \ge \varepsilon,\ 1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Válasszuk az $N \in \mathbf{N}$ indexet úgy, hogy $1/(N\cdot\varepsilon) < \varepsilon$, azaz legyen $N > 1/\varepsilon^2$. Ekkor

$$|f_n(x)| < \varepsilon \qquad (x \in \mathbf{R},\ N < n \in \mathbf{N}),$$

ami az (f_n) sorozat egyenletes konvergenciáját jelenti.
Ugyanakkor

$$f_n'(x) = \frac{1+nx^2-2nx^2}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} \qquad (x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 0 = f'(x) \qquad (0 \ne x \in \mathbf{R}),$$

de

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = 1 \ne 0 = f'(0).$$

Megjegyezzük, hogy az (f_n') sorozat nem egyenletesen konvergens, hiszen

$$f_n'\Big(1/\sqrt{2n}\Big) = \frac{1-n/(2n)}{(1+n/(2n))^2} = \frac{2}{9} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

xxiii) Mutassuk meg, hogy *ha az* (X,ρ), (Y,σ) *metrikus terek és a folytonos*

$$f_n : X \to Y \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvények esetén az (f_n) *függvénysorozat egyenletesen konvergál az* $f : X \to Y$ *függvényhez, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big)$$

teljesül minden konvergens $(x_n) : \mathbf{N} \to X$ *sorozatra.*

Legyen ui. $\varepsilon > 0$, ekkor egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$\sigma\Big(f_n(x), f(x)\Big) < \varepsilon/2 \qquad (x \in X,\, N < n \in \mathbf{N}).$$

Ha $\alpha := \lim_{n\to\infty} x_n$, akkor az $N < n \in \mathbf{N}$ indexekre

$$\sigma\Big(f_n(x_n), f(\alpha)\Big) \le \sigma\Big(f_n(x_n), f(x_n)\Big) + \sigma\Big(f(x_n), f(\alpha)\Big) < \varepsilon/2 + \sigma\Big(f(x_n), f(\alpha)\Big).$$

Tudjuk (ld. 6.3.3. Tétel), hogy az f függvény folytonos, speciálisan $f \in \mathcal{C}\{\alpha\}$. Ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv (ld. 2.2. Tétel) alapján

$$\lim_{n\to\infty} \sigma\Big(f(x_n), f(\alpha)\Big) = 0,$$

azaz egy alkalmas $M \in \mathbf{N}$ esetén

$$\sigma\Big(f(x_n), f(\alpha)\Big) < \varepsilon/2 \qquad (M < n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen az $R := \max\{N, M\}$ jelöléssel

$$\sigma\Big(f_n(x_n), f(\alpha)\Big) < \varepsilon \qquad (R < n \in \mathbf{N}).$$

Jegyezzük meg, hogy ha

$$f_n(x) := \frac{1}{1+nx} \qquad (0 < x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N}),$$

akkor egyrészt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (0 < x \in \mathbf{R}),$$

de láttuk már korábban, hogy az (f_n) függvénysorozat nem egyenletesen konvergens. Másrészt bármilyen

$$x_n > 0 \quad (n \in \mathbf{N}),\ \alpha := \lim_{n\to\infty} x_n > 0$$

esetén

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(\alpha) = 0.$$

Ui. valamilyen $N \in \mathbf{N}$ természetes számmal

$$x_n > \alpha/2 \qquad (N < n \in \mathbf{N}),$$

így

$$0 < f_n(x_n) = \frac{1}{1+nx_n} \le \frac{1}{1+n\alpha/2} \to 0 \qquad (N < n \to \infty).$$

Ez a példa azt mutatja, hogy a jelen megjegyzés elején tárgyalt állítás nem „megfordítható".

xxiv) Ha $a_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, és a $\sum(a_n)$ sor konvergens, akkor az Abel-folytonossági tétel (ld. ii) megjegyzés) szerint létezik a

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

határérték. Ennek alapján azt mondjuk, hogy a $(b_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozat által meghatározott $\sum(b_n)$ végtelen sor *Abel-szummábilis,* ha a $\sum(b_n x^n)$ hatványsor konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon, és létezik a véges

$$B := \lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

határérték. Az így definiált B szám a $\sum(b_n)$ sor *Abel-szummája.* Ha tehát egy $\sum(a_n)$ végtelen sor konvergens, akkor Abel-szummábilis, és az Abel-szummája megegyezik a „közönséges" $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ összeggel. Ugyanakkor mindez „fordítva" nem igaz. Tekintsük ui. a $\sum\Big((-1)^n \cdot x^{n+1}\Big)$ hatványsort. A Cauchy–Hadamard-tétel szerint ennek a sornak a konvergenciasugara 1, így létezik az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} \qquad (-1 < x < 1)$$

összegfüggvény. A hatványsorok deriválása alapján az f differenciálható, és

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n = \frac{1}{(1+x)^2} \qquad (-1 < x < 1).$$

A $\sum\Big((-1)^n \cdot (n+1)x^n\Big)$ hatványsor tehát konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon, és létezik a

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}$$

határértéke. Más szóval tehát a fentiek szerint a „közönséges" (azaz Cauchy-) értelemben divergens $\sum\Big((-1)^n \cdot (n+1)\Big)$ sor Abel-szummábilis, és az Abel-szummája $1/4$.

Hasonlóan, a nyilván divergens $\sum\Big((-1)^n\Big)$ sor is Abel-szummábilis, és az Abel-szummája $1/2$ (amit jóval korábban már Euler is „kiszámolt"). Ui. a $\sum\Big((-1)^n \cdot x^n\Big)$ hatványsor a $(-1, 1)$ intervallumon konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \qquad (-1 < x < 1).$$

Következésképpen létezik a

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

határérték.

6.5. Fourier-sorok

A továbbiakban a $\sum(f_n)$ függvénysort *trigonometrikus sornak* nevezzük, ha

$$f_0(x) := \alpha_0 \ , \ \ f_n(x) := \alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx) \qquad (1 \le n \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{R}),$$

ahol adottak az $\alpha_k \in \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$ és a $\beta_j \in \mathbf{R}$ $(1 \le j \in \mathbf{N})$ *együtthatók.* Használni fogjuk minderre a

$$\sum \Big(\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx)\Big)$$

szimbólumot is. Ilyen sor volt (ld. 6.2. vi) megjegyzés) pl. a $\sum \Big(\sin(nx)/n\Big)$ sor. Világos (ld. 6.1.1. Tétel), hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n| + |\beta_n|) < +\infty$$

esetén

$$|\cos(nx)|, \ \ |\sin(nx)| \le 1 \qquad (n \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{R})$$

miatt a $\sum \Big(\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx)\Big)$ trigonometrikus sor egyenletesen (és abszolút) konvergens. Ugyanakkor az előbbi $\sum \Big(\sin(nx)/n\Big)$ sor pontonként konvergens (ld. 6.2. vi) megjegyzés), habár most

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n| + |\beta_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = +\infty.$$

A szóban forgó $\sum \Big(\alpha_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx)\Big)$ trigonometrikus sor

$$S_n(x) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx)\Big) \qquad (x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N})$$

részletösszeg-függvényei *trigonometrikus polinomok.* Ha $n \in \mathbf{N}$ és

$$\mathcal{T}_n := \{\mathbf{R} \ni x \mapsto \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx)\Big) : \alpha_0, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbf{R}\}$$

a *legfeljebb n-edrendű trigonometrikus polinomok halmaza*, akkor $S_n \in \mathcal{T}_n$ $(n \in \mathbf{N})$.

Legyen

$$c_0(x) := 1,\ c_n(x) := \cos(nx),\ s_n(x) := \sin(nx) \qquad (x \in \mathbf{R},\ 1 \le n \in \mathbf{N}),$$

és

$$\mathcal{R} := \{c_0, c_n, s_n : 1 \le n \in \mathbf{N}\}$$

az ún. *trigonometrikus rendszer.*

6.5.1. Lemma. *A trigonometrikus rendszer ortogonális a következő értelemben: bármely 2π-hosszúságú korlátos és zárt $I \subset \mathbf{R}$ intervallumra*

$$\int_I \varphi(x)\cdot \psi(x)\,dx = \begin{cases} 0 & (\varphi \neq \psi) \\ 2\pi & (\varphi = \psi = c_0) \\ \pi & (\varphi = \psi \neq c_0) \end{cases} \qquad (\varphi,\, \psi \in \mathcal{R}).$$

Bizonyítás. Az $\mathcal{R}$ elemeinek a 2π szerinti periodicitása miatt nyilván feltehető, hogy (pl.) $I = [0, 2\pi]$. Ekkor:

$$\int_0^{2\pi} c_0^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} 1\,dx = 2\pi;$$

$$\int_0^{2\pi} c_n^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\,dx + \int_0^{2\pi} \cos(2nx)\,dx\right) = \pi \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N});$$

$$\int_0^{2\pi} s_n^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\,dx - \int_0^{2\pi} \sin(2nx)\,dx\right) = \pi \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N});$$

$$\int_0^{2\pi} s_n(x)\cdot c_k(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(kx)\,dx =$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\big((n+k)x\big) + \sin\big((n-k)x\big)}{2}\,dx =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\int_0^{2\pi} \sin\big((n+k)x\big)\,dx + \int_0^{2\pi} \sin\big((n-k)x\big)\,dx\right) = 0 \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N},\, k \in \mathbf{N}),$$

ui. $n = k$ esetén

$$\int_0^{2\pi} \sin\big((n-k)x\big)\,dx = \int_0^{2\pi} 0\,dx = 0$$

és

$$\int_0^{2\pi} \sin\big((n+k)x\big)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(2nx)\,dx = 0,$$

míg $n \neq k$ mellett alkalmas $1 \leq m,\, r \in \mathbf{N}$ paraméterekkel

$$\int_0^{2\pi} \sin\Big((n+k)x\Big)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\,dx = 0 =$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(rx)\,dx = \pm \int_0^{2\pi} \sin\Big((n-k)x\Big)\,dx.$$

■

Az előbbi lemma felhasználásával lássuk be, hogy egyenletesen konvergens trigonometrikus sorok együtthatói „kiszámíthatók" a sor összegfüggvényének a segítségével.

6.5.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum \Big(\alpha_n\cdot \cos(nx) + \beta_n\cdot \sin(nx)\Big)$ *trigonometrikus sor egyenletesen konvergens, legyen*

$$f(x) := \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\alpha_n\cdot \cos(nx) + \beta_n\cdot \sin(nx)\Big) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot \cos(nx)\,dx \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot \sin(nx)\,dx \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Bizonyítás. A 6.3.8. Tétel és a 6.5.1. Lemma értelmében

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \alpha_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\alpha_n\cdot \int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx + \beta_n\cdot \int_0^{2\pi} \sin(nx)\,dx\Big) =$$

$$\int_0^{2\pi} \alpha_0\,dx = 2\pi\cdot \alpha_0,$$

amiből a tétel első egyenlősége már nyilván következik. Hasonlóan (ld. még 1.2. i) megjegyzés) $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cdot \cos(nx)\,dx =$$

$$\alpha_0\cdot \int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\cdot \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cdot \cos(nx)\,dx + \beta_k\cdot \int_0^{2\pi} \sin(kx)\cdot \cos(nx)\,dx\right) =$$

$$= \alpha_n\cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\, dx = \pi\cdot \alpha_n,$$

és

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cdot \sin(nx)\, dx =$$

$$\alpha_0\cdot \int_0^{2\pi} \sin(nx)\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k\cdot \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cdot \sin(nx)\, dx + \beta_k\cdot \int_0^{2\pi} \sin(kx)\cdot \sin(nx)\, dx\right) =$$

$$\beta_n\cdot \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\, dx = \pi\cdot \beta_n,$$

amiből az állításunk többi része is nyilvánvaló. ∎

Az előző tétel szerint tehát egy egyenletesen konvergens trigonometrikus sor összegfüggvénye (egyértelműen) meghatározza a sor együtthatóit. Világos, hogy a szóban forgó összegfüggvény 2π szerint periodikus. Legyen $R_{2\pi}$ az összes olyan 2π szerint periodikus $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény által alkotott halmaz, amelyre $f \in R[0, 2\pi]$ (valójában $f_{|[0,2\pi]} \in R[0, 2\pi]$) teljesül. A periodicitás miatt nyilvánvaló, hogy ekkor tetszőleges 2π-hosszúságú kompakt $I \subset \mathbf{R}$ intervallumra is (az előbbi értelemben) $f \in R(I)$. (A későbbiekben az $I := [-\pi, \pi]$ intervallum fordul elő a legtöbbször.)

A 6.5.2. Tételbeli összegfüggvény a 6.3.4. Tétel alapján folytonos is, hiszen az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \cos(nx),\ \mathbf{R} \ni x \mapsto \sin(nx) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvények valamennyien folytonosak. Legyen $C_{2\pi}$ az olyan 2π szerint periodikus egyváltozós $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ valós függvények halmaza, amelyekre az f folytonos. Ekkor $C_{2\pi} \subset R_{2\pi}$, továbbá (a szokásos függvényműveletekkel) $C_{2\pi}$, $R_{2\pi}$ lineáris terek (vektorterek) az $\mathbf{R}$-re vonatkozóan, a $C_{2\pi}$ altere az $R_{2\pi}$-nek. Továbbá bármely $f \in R_{2\pi}$ függvény az $f_{|[0,2\pi]} \in R[0, 2\pi]$ integrálhatóság miatt korlátos, azaz

$$\sup\{|f(x)| : x \in \mathbf{R}\} = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 2\pi]\} < +\infty.$$

A fentiekre utalva vezessük be az alábbi fogalmakat: valamilyen $f \in R_{2\pi}$ esetén legyen

$$a_0(f) := a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_n(f) := a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cdot \cos(nx)\, dx \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}),$$

$$b_n(f) := b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cdot \sin(nx)\, dx \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}),$$

$$Sf := \sum \Big(a_n\cdot \cos(nx) + b_n\cdot \sin(nx)\Big),$$

$$S_nf(x) := a_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k\cdot \cos(kx) + b_k\cdot \sin(kx)\Big) \qquad (n \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor az Sf trigonometrikus sor az f függvény *Fourier-sora,* az együtthatói az f függvény *Fourier-együtthatói,* az S_nf $(n \in \mathbf{N})$ trigonometrikus polinom pedig az f függvény n-edik *Fourier-részletösszege.* (A már többször említett 2π-szerinti periodicitásra utalva a Fourier-együtthatók definíciójában bármilyen 2π-hosszúságú $I \subset \mathbf{R}$ kompakt intervallum esetén $\int_I \ldots$ is írható $\int_0^{2\pi} \ldots$ helyett. Általában itt is az $I = [-\pi, \pi]$ intervallum szerepel majd a továbbiakban.)

Mindennek alapján a 6.5.2. Tétel a következőképpen fogalmazható meg: ha a

$$\sum \Big(\alpha_n\cdot \cos(nx) + \beta_n\cdot \sin(nx)\Big)$$

trigonometrikus sor egyenletesen konvergens, és

$$f(x) := \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\alpha_n\cdot \cos(nx) + \beta_n\cdot \sin(nx)\Big) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

az összegfüggvénye, akkor $f \in C_{2\pi}$, és a szóban forgó trigonometrikus sor az f függvény Fourier-sora. Azt is mondjuk ilyenkor, hogy az f függvény *Fourier-sorba fejthető.*

Legyen most $f \in R_{2\pi}$, és tegyük fel, hogy az Sf Fourier-sor egyenletesen konvergens. Ha az Sf trigonometrikus sor összegfüggvényét g-vel jelöljük, akkor joggal vetődik fel a kérdés: mi köze van egymáshoz az f és a g függvénynek. Mivel $g \in C_{2\pi}$, ezért eleve induljunk ki egy $f \in C_{2\pi}$ függvényből. A 6.5.2. Tétel miatt $Sf = Sg$, azaz

$$a_0(f) = a_0(g),\ a_n(f) = a_n(g),\ b_n(f) = b_n(g) \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Ha $h := f - g$, akkor egyrészt $h \in C_{2\pi}$, másrész a Fourier-együtthatók definíciója alapján rögtön adódik az, hogy

$$a_0(h) = a_0(f) - a_0(g) = 0,$$

és

$$a_n(h) = a_n(f) - a_n(g) = 0,\ \ b_n(h) = b_n(f) - b_n(g) = 0 \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Meg fogjuk mutatni, hogy mindebből $h \equiv 0$ következik, azaz $f = g$. Ehhez szükségünk lesz az alábbi, önmagában is érdekes és fontos állításra.

6.5.3. Tétel. *Ha a $h \in C_{2\pi}$ függvény valamennyi Fourier-együtthatója nulla, akkor a h az azonosan nulla függvény.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt módon, hogy valamilyen $a \in \mathbf{R}$ esetén $h(a) \neq 0$. Ha

$$H(x) := \frac{2}{h(a)}\cdot h(x + a) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor $H \in C_{2\pi}$, $H(0) = 2$, és könnyen ellenőrizhetően

$$a_0(H) = a_n(H) = b_n(H) = 0 \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Mivel $h \equiv 0 \iff H \equiv 0$, ezért „nyugodtan" feltehetjük a továbbiakban, hogy $a = 0$ és $h(0) > 1$. Figyelembe véve, hogy a h függvény folytonos, van olyan $0 < \delta < \pi/2$, amellyel

$$h(x) > 1 \qquad (|x| \le \delta).$$

Vegyük észre, hogy bármilyen

$$T(x) := \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(\alpha_k \cdot \cos(kx) + \beta_k \cdot \sin(kx)\Big) \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

trigonometrikus polinomra

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot T(x)\, dx =$$

$$\alpha_0 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(x)\, dx + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot \cos(kx)\, dx + \beta_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot \sin(kx)\, dx\right) =$$

$$(*) \qquad 2\pi \cdot \alpha_0 \cdot a_0(h) + \pi \cdot \sum_{k=1}^{n} \Big(\alpha_k \cdot a_k(h) + \beta_k \cdot b_k(h)\Big) = 0.$$

Meg fogjuk mutatni, hogy ennek ellenére egy alkalmas T trigonometrikus polinomra

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cdot T(x)\, dx \ne 0.$$

Legyen ehhez

$$T_n(x) := \Big(\cos x + 1 - \cos\delta\Big)^n \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N}).$$

Teljes indukcióval könnyen ellenőrizhető, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ esetén a T_n függvény egy trigonometrikus polinom. Továbbá

$$\cos x + 1 - \cos\delta \ge 1 \qquad (|x| \le \delta),$$

valamint bármilyen $\delta < \tau < \pi/2$ választással

$$q_\tau := \max\{|\cos x + 1 - \cos\delta| : x \in [-\pi, -\tau] \cup [\tau, \pi]\} < 1,$$

$$|\cos x + 1 - \cos\delta| \le 1 \qquad (x \in [-\tau, -\delta] \cup [\delta, \tau]).$$

Ekkor a

$$J_1 := [-\pi, -\tau], \quad J_2 := [-\tau, -\delta], \quad J_3 := [-\delta, \delta], \quad J_4 := [\delta, \tau], \quad J_5 := [\tau, \pi]$$

intervallumokkal minden $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cdot T_n(x)\,dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{5}\int_{J_i} h(x)\cdot T_n(x)\,dx\right| \geq$$

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} h(x)\cdot T_n(x)\,dx\right| - \sum_{3\neq i=1}^{5}\int_{J_i} \left|h(x)\cdot T_n(x)\right|dx.$$

Az előzményekre tekintettel itt a

$$C := \max\{|h(x)| : |x| \leq \pi\} \ (< +\infty)$$

jelöléssel

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} h(x)\cdot T_n(x)\,dx\right| = \int_{-\delta}^{\delta} h(x)\cdot T_n(x)\,dx \geq \int_{-\delta}^{\delta} 1\,dx = 2\delta,$$

$$\int_{J_1} \left|h(x)\cdot T_n(x)\right|dx,\ \int_{J_5} \left|h(x)\cdot T_n(x)\right|dx \leq C\cdot q_\tau^n\cdot \pi,$$

$$\int_{J_2} \left|h(x)\cdot T_n(x)\right|dx,\ \int_{J_4} \left|h(x)\cdot T_n(x)\right|dx \leq C\cdot (\tau-\delta).$$

Következésképpen

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cdot T_n(x)\,dx\right| \geq 2\delta - \Big(2C\cdot q_\tau^n\cdot \pi + 2C\cdot (\tau-\delta)\Big).$$

A τ (az eddigieken túl) nyilván megválasztható úgy, hogy

$$2C\cdot (\tau-\delta) < \delta/2$$

teljesüljön. Ekkor

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cdot T_n(x)\,dx\right| > 3\delta/2 - 2C\cdot q_\tau^n\cdot \pi.$$

Mivel $0 < q_\tau < 1$, ezért $q_\tau^n \to 0$ $(n \to \infty)$. Így létezik olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$2C\cdot q_\tau^N\cdot \pi < \delta/2,$$

amikor is

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cdot T_N(x)\,dx\right| > \delta.$$

Tehát $\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cdot T_N(x)\,dx \neq 0$, azaz a $T := T_N$ választás ellentmond a $(*)$ egyenlőségnek. ■

Minden készen áll ahhoz, hogy az előzményekre is tekintettel megfogalmazhassuk az alábbi tételt.

6.5.4. Tétel. *Ha az $f \in C_{2\pi}$ függvény Fourier-sora egyenletesen konvergens, akkor az Sf Fourier-sor összegfüggvénye megegyezik az f-fel, azaz*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)\Big) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ez a helyzet akkor, ha az $f \in C_{2\pi}$ függvényre

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(|a_n| + |b_n|\Big) < +\infty$$

teljesül. Ekkor ui. a Weierstrass-tétel (ld. 6.1.1. Tétel) szerint az Sf Fourier-sor egyenletesen konvergens. Az együtthatókra most megfogalmazott abszolút konvergenciához eljuthatunk a szóban forgó függvényre vonatkozó alkalmas feltételek mellett. Egy ilyen feltételt tartalmaz a következő tétel.

6.5.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f \in C_{2\pi}$ függvényre az alábbiak teljesülnek: $F := f_{|_{[0,2\pi]}} \in D^2[0,2\pi]$, és $F'' \in R[0,2\pi]$. Ekkor az Sf Fourier-sor egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $1 \le n \in \mathbf{N}$, ekkor (kétszeri parciális integrálással)

$$\pi \cdot a_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx = \int_0^{2\pi} F(x) \cdot \cos(nx)\, dx =$$

$$-\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} F'(x) \cdot \sin(nx)\, dx =$$

$$\frac{F'(2\pi) - F'(0)}{n^2} - \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} F''(x) \cdot \cos(nx)\, dx.$$

Az F'' függvény Riemann-integrálható, ezért

$$C := \int_0^{2\pi} |F''(x)|\, dx < +\infty.$$

Így

$$|\pi \cdot a_n(f)| \le \frac{|F'(2\pi)| + |F'(0)|}{n^2} + \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} |F''(x)|\, dx = \frac{|F'(2\pi)| + |F'(0)|}{n^2} + \frac{C}{n^2},$$

tehát

$$|a_n(f)| \le \frac{|F'(2\pi)| + |F'(0)| + C}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Analóg módon járhatunk el a „szinuszos" együtthatók becslésénél:

$$\pi\cdot b_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\cdot \sin(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} F(x)\cdot \sin(nx)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} F'(x)\cdot \cos(nx)\,dx =$$

$$-\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} F''(x)\cdot \sin(nx)\,dx,$$

és innen

$$|b_n(f)| \le \frac{C}{\pi}\cdot \frac{1}{n^2} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Mindebből már nyilvánvaló, hogy

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(|a_n| + |b_n|\Big) < +\infty.$$

■

Tekintsük pl. azt az $f \in C_{2\pi}$ függvényt, amelyre

$$f(x) := \frac{(x-\pi)^2}{2} \qquad (x \in [0, 2\pi]).$$

Ekkor az f páros függvény, ezért tetszőleges $1 \le n \in \mathbf{N}$ esetén az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto f(x)\cdot \sin(nx)$$

függvény páratlan. Ezért

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin(nx)\,dx = \pi\cdot b_n = 0,$$

azaz $b_n = 0$ $(1 \le n \in \mathbf{N})$. Ugyanakkor

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{4\pi}\cdot \int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\,dx = \frac{\pi^2}{6},$$

valamint az $1 \le n \in \mathbf{N}$ indexekre (parciálisan integrálva)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot \int_0^{2\pi} f(x)\cdot \cos(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cdot \cos(nx)\,dx = \frac{2}{n^2}.$$

Tehát

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(|a_n| + |b_n|\Big) = \frac{\pi^2}{6} + 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Következésképpen a 6.5.4. Tétel miatt

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

speciálisan

$$\frac{\pi^2}{6} + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{(x-\pi)^2}{2} \qquad (x \in [0, 2\pi]).$$

Ha itt $x = 0$-t írunk, akkor

$$\frac{\pi^2}{6} + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{2},$$

amiből rögtön adódik a (nem triviális) sorösszeg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Emlékeztetünk az 1.2. vi) megjegyzésre, miszerint (pl.) a $\sum\Big(\sin(nx)/n\Big)$ trigonometrikus sor (többek között) minden kompakt $[u, v] \subset (0, 2\pi)$ intervallumon egyenletesen konvergens. Vegyük észre, hogy az egyenletesen konvergens $\sum\Big(\cos(nx)/n^2\Big)$ sor tagonkénti deriválásával a $\sum\Big(-\sin(nx)/n\Big)$ sort kapjuk. Következésképpen (ld. 6.3.10. Tétel) az

$$f_{uv}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \qquad \Big(x \in (u, v)\Big)$$

jelöléssel

$$f'_{uv}(x) = \frac{x-\pi}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \qquad \Big(x \in (u, v)\Big).$$

Mivel itt $[u, v] \subset (0, 2\pi)$ tetszőleges volt, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2} \qquad (0 < x < 2\pi).$$

Válasszuk az $x := \pi/2$-t, ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4},$$

más szóval a π alábbi előállítását kapjuk:

$$\pi = 4\cdot\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Ha tehát $f \in R_{2\pi}$ és

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \\ \dfrac{\pi - x}{2} & (0 < x < 2\pi), \end{cases}$$

akkor

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy a $\sum \Big(\sin(nx)/n\Big)$ trigonometrikus sor az előbbi f függvény Fourier-sora. Valóban, az f páratlan függvény, ezért $a_n(f) = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$. Továbbá (parciális integrálással)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot \sin(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)\cdot \sin(nx)\,dx =$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\cdot \sin(nx)\,dx = \frac{1}{n} \qquad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

Legyen $f \in R_{2\pi}$, $n \in \mathbf{N}$, ekkor az f Fourier-részletösszegei a következők:

$$S_0(f) \equiv a_0,$$

ill. $1 \le n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$S_n f(x) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot \cos(kt)\,dt\cdot \cos(kx) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot \sin(kt)\,dt\cdot \sin(kx)\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot \sum_{k=1}^{n}\Big(\cos(kt)\cdot \cos(kx) + \sin(kt)\cdot \sin(kx)\Big)\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\Big(k(x-t)\Big)\right)dt.$$

Ha tehát

$$D_0(z) := \frac{1}{2},\; D_n(z) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kz) \qquad (1 \le n \in \mathbf{N},\, z \in \mathbf{R}),$$

akkor

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot D_n(x-t)\,dt \qquad (n \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R}).$$

A most definiált $D_n \quad (n \in \mathbf{N})$ függvény az n-edik *Dirichlet-magfüggvény.* Világos, hogy minden D_n páros függvény, periodikus 2π szerint, és bármilyen 2π-hosszúságú kompakt $I \subset \mathbf{R}$ intervallumra

$$\int_I D_n = \int_I \frac{1}{2}\,dz + \sum_{k=1}^{n}\int_I \cos(kz)\,dz = \int_I \frac{1}{2}\,dz = \pi \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Nem nehéz „zárt" alakra hozni a szóban forgó magfüggvényeket. Ha ui. $0 < z < 2\pi$ és $1 \le n \in \mathbf{N}$, akkor

$$\sin(z/2)\cdot D_n(z) = \frac{\sin(z/2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sin(z/2)\cdot \cos(kz) =$$

$$\frac{\sin(z/2)}{2} + \frac{1}{2}\cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\Big((k+1/2)z\Big) - \sin\Big((k-1/2)z\Big) \right) =$$

$$\frac{\sin(z/2)}{2} + \frac{\sin\Big((n+1/2)z\Big) - \sin(z/2)}{2} = \frac{\sin\Big((n+1/2)z\Big)}{2}.$$

Innen az következik, hogy

$$D_n(z) = \frac{\sin\Big((n+1/2)z\Big)}{2\cdot \sin(z/2)} \qquad (0 < z < 2\pi).$$

Tehát a D_n definíciójából adódóan a

$$\frac{\sin\Big((n+1/2)0\Big)}{2\cdot \sin(0/2)} := D_n(0) = \frac{1}{2} + n$$

megállapodással tetszőleges $f \in R_{2\pi}$ függvényre az alábbi integrál-előállítást kapjuk a Fourier-részletösszegekre:

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cdot \frac{\sin\Big((n+1/2)(x-t)\Big)}{2\cdot \sin\Big((x-t)/2\Big)}\, dt \qquad (1 \le n \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R}).$$

Ezért akármilyen $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén (a 2π szerinti periodicitást is figyelembe véve)

$$S_n f(x) - \alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Big(f(t) - \alpha\Big)\cdot \frac{\sin\Big((n+1/2)(x-t)\Big)}{2\cdot \sin\Big((x-t)/2\Big)}\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x-2\pi}^{x} \Big(f(x-t) - \alpha\Big)\cdot \frac{\sin\Big((n+1/2)t\Big)}{\sin\Big(t/2\Big)}\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(f(x-t) - \alpha\Big)\cdot \frac{\sin\Big((n+1/2)t\Big)}{\sin\Big(t/2\Big)}\, dt =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Big(f(x+2t) - \alpha\Big)\cdot \frac{\sin\Big((2n+1)t\Big)}{\sin t}\, dt \qquad (1 \le n \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R}).$$

Ha (az előbbi paraméterekkel)

$$f_{x\alpha}(t) := \begin{cases} \dfrac{f(x+2t)-\alpha}{\sin t} & (t \neq k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})) \\ \\ 0 & (t = k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})) \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

akkor

$$S_n f(x) - \alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f_{x\alpha}(t)\cdot \sin\Big((2n+1)t\Big)\,dt.$$

Tegyük fel, hogy $f_{x\alpha} \in R[0,\pi]$, ekkor az

$$F_{x\alpha}(t) := \begin{cases} f_{x\alpha}(t) & (0 \le t \le \pi) \\ \\ 0 & (\pi < t \le 2\pi) \end{cases}$$

függvény is Riemann-integrálható, és így az előbbiek szerint az $S_n f(x) - \alpha$ eltérés az $F_{x\alpha}$ függvénynek egy („szinuszos") Fourier-együtthatója:

$$S_n f(x) - \alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_{x\alpha}(t)\cdot \sin\Big((2n+1)t\Big)\,dt = b_{2n+1}(F_{x\alpha}).$$

Ez a helyzet pl. akkor, ha $f \in D\{x\}$, és $\alpha := f(x)$. Ui. tetszőleges $0 < t < \pi$ helyen

$$f_{x\alpha}(t) = \frac{f(x+2t)-f(x)}{\sin t} =$$

$$\frac{f(x+2t)-f(x)}{2t}\cdot \frac{2t}{\sin t} \to 2f'(x) \qquad (t \to +0),$$

és hasonlóan

$$f_{x\alpha}(t) = -\frac{f(x+2(t-\pi))-f(x)}{\sin(t-\pi)} =$$

$$-\frac{f(x+2(t-\pi))-f(x)}{2(t-\pi)}\cdot \frac{2(t-\pi)}{\sin(t-\pi)} \to -2f'(x) \qquad (t \to \pi-0).$$

Mivel bármely $[u,v] \subset (0,\pi)$ esetén nyilván $f_{x\alpha} \in R[u,v]$, ezért a fentiek alapján valóban igaz, hogy $f_{x\alpha} \in R[0,\pi]$.

Meg fogjuk mutatni, hogy $g \in R_{2\pi}$ esetén $b_n(g) \to 0 \ (n \to \infty)$, ezért az f-re tett előbbi feltételek mellett az f Fourier-sora konvergens az x-ben, és

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cdot \cos(kx) + b_k\cdot \sin(kx)\Big) = \lim_{n\to\infty} S_n f(x) = \alpha.$$

Speciálisan, ha $f \in D\{x\}$, akkor

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cdot \cos(kx) + b_k\cdot \sin(kx)\Big) = f(x).$$

Mindez következik az alábbi, ún. Riemann–Lebesgue-lemmából:

6.5.6. Tétel. *Tetszőleges $f \in R_{2\pi}$ függvény esetén*

$$\lim_{n\to\infty} a_n(f) = \lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0.$$

A bizonyítás előtt az alábbi általánosabb érvényű észrevételeket tesszük. Legyen ui. valamilyen $f,\ g \in R_{2\pi}$ függvények esetén

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx,$$

és

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx}.$$

Ekkor a $\|.\|$ „majdnem" norma, ti. könnyen ellenőrizhetően a norma követelményei közül csak az nem teljesül, hogy $\|f\| = 0$ esetén $f \equiv 0$. (Megjegyezzük, hogy amennyiben $R_{2\pi}$ helyett $C_{2\pi}$-re szorítkozunk, akkor ez utóbbi tulajdonság is igaz.) Azt mondjuk, hogy a $\varphi_n \in R_{2\pi}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvények egy $\Phi := \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ *ortonormált rendszert* alkotnak (röviden: a Φ egy ONR), ha

$$\langle \varphi_n, \varphi_k\rangle = \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ \\ 1 & (n = k) \end{cases} \qquad (n, k \in \mathbf{N}).$$

A 6.5.1. Lemma alapján világos, hogy a

$$\varphi_n := \begin{cases} \dfrac{c_0}{\sqrt{2\pi}} & (n = 0) \\ \dfrac{c_k}{\sqrt{\pi}} & (n = 2k-1\ \ (1 \le k \in \mathbf{N})) \\ \dfrac{s_k}{\sqrt{\pi}} & (n = 2k\ \ (1 \le k \in \mathbf{N})) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

előírással definiált

$$\left\{\frac{c_0}{\sqrt{2\pi}}, \frac{c_1}{\sqrt{\pi}}, \frac{s_1}{\sqrt{\pi}}, \frac{c_2}{\sqrt{\pi}}, \frac{s_2}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\}$$

egy ONR (*ortonormált trigonometrikus rendszer*).

Ha $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ egy tetszőleges ONR az $R_{2\pi}$-ben, és $f \in R_{2\pi}$, akkor legyen

$$\hat{f}(k) := \langle f, \varphi_k\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\cdot \varphi_k(x)\,dx \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

és

$$\Phi_n f := \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(k) \cdot \varphi_k \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Speciálisan, a fenti ortonormált trigonometrikus rendszert véve tetszőleges $k = 1, 2, ...$ indexekre

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \sqrt{2\pi} \cdot a_0(f),$$

$$\hat{f}(2k-1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(kx)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(kx)\, dx = \sqrt{\pi} \cdot a_k(f),$$

$$\hat{f}(2k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\, dx = \sqrt{\pi} \cdot b_k(f),$$

és

$$\Phi_{2n} f = S_n f \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Adott $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ ONR mellett vezessük be az $R_{2\pi}$ (mint vektortér) alábbi altereit:

$$\mathcal{L}_n(\Phi) := \left\{ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k : \alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbf{R} \right\} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor igaz a matematika egyik legismertebb erdeménye, az ún. *Bessel-azonosság*:

6.5.7. Tétel. *Legyen* $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ *tetszőleges ONR az* $R_{2\pi}$*-ben. Ekkor minden* $f \in R_{2\pi}$ *függvény és* $n \in \mathbf{N}$ *index esetén létezik a*

$$\Delta_n(f) := \min\{\|f - \psi\| : \psi \in \mathcal{L}_n(\Phi)\}$$

minimum, és

$$\Delta_n(f) = \|f - \Phi_n f\| = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}(k)|^2}.$$

Bizonyítás. A fentiek igazolása egy „rutin" számolás eredménye. Ui. a $\|.\|$ definícióját és a φ_k-k ortonormáltságát figyelembe véve (a $\langle , \rangle$ „szorzásban" tagonként szorozva) könnyen ellenőrizhető, hogy bármilyen $\alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbf{R}$ együtthatók mellett

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \left\langle f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\rangle =$$

$$\langle f - \Phi_n f, f - \Phi_n f \rangle + \sum_{k=0}^{n} \left(\alpha_k - \hat{f}(k)\right) \cdot \left(\alpha_k - \hat{f}(k)\right) =$$

$$\|f-\Phi_n f\|^2+\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k-\hat{f}(k)|^2,$$

amiből a tételbeli minimum létezése már nyilvánvaló. Hasonlóan csak „ki kell számolni", hogy

$$\|f-\Phi_n f\|^2=\langle f-\Phi_n f, f-\Phi_n f\rangle=\langle f,f\rangle-\sum_{k=0}^{n}\hat{f}(k)\cdot\hat{f}(k)=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}|\hat{f}(k)|^2.$$

■

Mivel $\|.\|\geq 0$, ezért a Bessel-azonosságból (az ottani szereplőkkel)

$$\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}|\hat{f}(k)|^2=\|f-\Phi_n f\|^2\geq 0 \qquad (n\in\mathbf{N}),$$

azaz

$$\sum_{k=0}^{n}|\hat{f}(k)|^2\leq\|f\|^2 \qquad (n\in\mathbf{N}).$$

Tekintettel arra, hogy ebben a becslésben az n tetszőleges természetes szám lehet, máris megkapjuk az ún. *Bessel-egyenlőtlenséget*:

6.5.8. Tétel. *Bármilyen $R_{2\pi}$-beli $\Phi=\{\varphi_0,\varphi_1,\ldots\}$ ONR és $f\in R_{2\pi}$ függvény esetén*

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2\leq\|f\|^2.$$

Innen az is rögtön következik, hogy $\lim_{n\to\infty}\hat{f}(n)=0$. Ha itt az ortonormált trigonometrikus rendszert választjuk, akkor az előbbieket figyelembe véve adódik a Riemann–Lebesgue-lemma (ld. 6.5.6. Tétel) állítása.

Tegyük fel, hogy a 6.5.7. Tételben szereplő Φ ONR egyúttal egy ún. *zárt rendszer* is, azaz bármilyen $f\in R_{2\pi}$ függvény és $\varepsilon>0$ szám esetén van olyan $N\in\mathbf{N}$ és olyan $\psi\in\mathcal{L}_N(\Phi)$ „Φ-polinom", hogy

$$\|f-\psi\|<\varepsilon.$$

Világos, hogy ekkor $\Delta_N(f)\leq\|f-\psi\|$ miatt egyúttal $\Delta_N(f)<\varepsilon$ is igaz. Ugyanakkor az is nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{L}_n(\Phi)\subset\mathcal{L}_{n+1}(\Phi) \qquad (n\in\mathbf{N}),$$

következésképpen a $\left(\Delta_n(f)\right)$ sorozat monoton fogyó. Azt kaptuk ezzel, hogy

$$\Delta_n(f)<\varepsilon \qquad (N<n\in\mathbf{N}),$$

röviden: $\lim_{n\to\infty} \Delta_n(f) = 0$. Figyelembe véve a 6.5.7. Tételt innen az következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \Phi_n f\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}(k)|^2} = 0,$$

speciálisan

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}(k)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|^2.$$

Foglaljuk össze egy állításban a most mondottakat.

6.5.9. Tétel. *Ha az $R_{2\pi}$-beli $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ ONR zárt rendszer, akkor tetszőleges $f \in R_{2\pi}$ függvény esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \Phi_n f\| = 0,$$

és fennáll az ún. Parseval-egyenlőség:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|^2.$$

Megjegyezzük, hogy esetenként egy ONR zártságának a bizonyítása jóval összetettebb az eddigieknél. Belátható pl., hogy ha a Φ az ortonormált trigonometrikus rendszer, akkor zárt rendszer is, következésképpen

$$|\hat{f}(0)|^2 = 2\pi \cdot |a_0(f)|^2,$$

$$|\hat{f}(2k-1)|^2 = \pi \cdot |a_k(f)|^2 = \pi \cdot |a_k|^2 \qquad (1 \leq k \in \mathbf{N}),$$

$$|\hat{f}(2k|^2) = \pi \cdot |b_k(f)|^2 = \pi \cdot |b_k|^2 \qquad (1 \leq k \in \mathbf{N})$$

alapján azt kapjuk, hogy bármilyen $f \in R_{2\pi}$ függvényre

$$2 \cdot |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

6.6. Megjegyzések

i) Mutassuk meg, hogy a 6.5.3. Tétel bizonyításában kulcsszerepet játszó

$$T_n(x) := \Big(\cos x + 1 - \cos\delta\Big)^n \qquad (x \in \mathbf{R},\, n \in \mathbf{N})$$

függvények trigonometrikus polinomok, nevezetesen alkalmas

$$\alpha_{nk},\, \beta_{nk} \in \mathbf{R} \qquad (k = 0, ..., n \in \mathbf{N})$$

együtthatókkal

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \Big(\alpha_{nk}\cdot \cos(kx) + \beta_{nk}\cdot \sin(kx)\Big) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ez ui. $n = 0,\, 1$ esetén nyilvánvaló. Ugyanakkor ha valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ „kitevőre" T_n az előbbi alakú, akkor a $\gamma := 1 - \cos\delta$ jelöléssel

$$T_{n+1}(x) = T_n(x)\cdot (\cos x + 1 - \cos\delta) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \Big(\alpha_{nk}\cdot \gamma\cdot \cos(kx) + \beta_{nk}\cdot \gamma\cdot \sin(kx)\Big) + \sum_{k=0}^{n} \Big(\alpha_{nk}\cdot \cos(kx)\cdot \cos x + \beta_{nk}\cdot \sin(kx)\cdot \cos x\Big).$$

Viszont tetszőleges $k = 1, ..., n$ és $x \in \mathbf{R}$ mellett

$$\cos(kx)\cdot \cos x = \frac{\cos\Big((k+1)x\Big) + \cos\Big((k-1)x\Big)}{2},$$

$$\sin(kx)\cdot \cos x = \frac{\sin\Big((k+1)x\Big) + \sin\Big((k-1)x\Big)}{2},$$

amit behelyettesítve a $T_{n+1}(x)$ előbbi előállításába már „leolvashatók" azok az

$$\alpha_{n+1k},\, \beta_{n+1k} \in \mathbf{R} \qquad (k = 0, ..., n \in \mathbf{N})$$

együtthatók, amelyekkel

$$T_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \Big(\alpha_{n+1k}\cdot \cos(kx) + \beta_{n+1k}\cdot \sin(kx)\Big) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

ii) Legyen $f \in R_{2\pi}$, ekkor a Bessel-egyenlőtlenség szerint

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(|a_k|^2 + |b_k|^2\Big) < +\infty.$$

Ezért a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k| + |b_k|}{k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < +\infty.$$

Így pl. a $\sum \big(\sin(kx)/\ln k\big)$ trigonometrikus sor nem Fourier-sora egyetlen $f \in R_{2\pi}$ függvénynek sem, ui.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k} = +\infty.$$

(Megjegyezzük, miszerint annak az eldöntése, hogy egy adott trigonometrikus sor Fourier-sor-e, általában nem egyszerű feladat.)

iii) Részben az előbbi megjegyzéshez kapcsolódik a következő állítás: *tetszőleges $f \in R_{2\pi}$ függvény „szinuszos" Fourier-együtthatóival a $\sum (b_k/k)$ sor konvergens, és*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \cdot f(x)\, dx.$$

Ui. tetszőleges $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\, dx.$$

Tudjuk (ld. 6.2. vi) megjegyzés), hogy a $\sum \big(\sin(kx)/k\big)$ sor minden $[u, v] \subset (0, 2\pi)$ intervallumon egyenletesen konvergens, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} \qquad (0 < x < 2\pi),$$

továbbá (ld. 6.2. xv) megjegyzés)

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| < 1 + \pi \qquad (x \in \mathbf{R},\ 1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Ezért (ld. 6.4. xvi) megjegyzés)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\, dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \frac{\pi - x}{2}\, dx.$$

Tehát létezik a $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(b_k/k)$ határérték, más szóval a $\sum(b_k/k)$ sor konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)\cdot f(x)\,dx.$$

Legyen pl.

$$f(x):=x^3\qquad(0\le x\le 2\pi),$$

ekkor

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^3\cdot\sin(kx)\,dx=\frac{12}{k^3}-\frac{8\pi^2}{k}\qquad(1\le k\in\mathbf{N}),$$

így (ld. 1.5.)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}=12\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}-8\pi^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=12\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}-\frac{4\pi^4}{3}=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^3\cdot(\pi-x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi\cdot\frac{16\pi^4}{4}-\frac{32\pi^5}{5}\right)=-\frac{6\pi^4}{5}.$$

Következésképpen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{4\pi^4}{3}-\frac{6\pi^4}{5}\right)=\frac{\pi^4}{90}.$$

iv) Adott $f\in R_{2\pi}$ függvény és $t\in\mathbf{R}$ szám esetén számítsuk ki az

$$f_t(x):=f(x+t)\qquad(x\in\mathbf{R})$$

(nyilván $R_{2\pi}$-beli) függvény Fourier-együtthatóit:

$$a_0(f_t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_t(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+t)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=a_0(f);$$

$$a_n(f_t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_t(x)\cdot\cos(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x+t)\cdot\cos(nx)\,dx=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\cos\Big(n(x-t)\Big)\,dx=$$

$$\frac{\cos(nt)}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\cos(nx)\,dx+\frac{\sin(nt)}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\sin(nx)\,dx=$$

$$a_n(f)\cdot\cos(nt)+b_n(f)\cdot\sin(nt)\qquad(1\le n\in\mathbf{N});$$

$$b_n(f_t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_t(x)\cdot\sin(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x+t)\cdot\sin(nx)\,dx=$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin\Big(n(x-t)\Big)\,dx =$$

$$\frac{\cos(nt)}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx - \frac{\sin(nt)}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx =$$

$$b_n(f) \cdot \cos(nt) - a_n(f) \cdot \sin(nt) \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

v) Alkalmazzuk az előző megjegyzésbeli f_t függvényre a iii) megjegyzést: tetszőleges $f \in R_{2\pi}$ függvény esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k \cdot \cos(kt) - a_k \cdot \sin(kt)}{k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \cdot f(x+t)\,dx \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

A ii) megjegyzés és a Weierstrass-kritérium (6.1.1. Tétel) szerint az előbbi egyenlőség bal oldalán álló sor (t-ben) egyenletesen (és abszolút) konvergens. Ha itt $t = 0$-t írunk, akkor megkapjuk a iii) megjegyzésben szereplő egyenlőséget.

vi) Legyen most $f \in C_{2\pi}$, és

$$F(x) := \int_0^x \Big(f(y) - a_0\Big)\,dy \qquad (x \in [0, 2\pi]).$$

Ekkor $F \in D$ és $F' = f - a_0$. Továbbá $F(2\pi) = F(0) = 0$, ezért van olyan $C_{2\pi}$-beli függvény, amelynek a $[0, 2\pi]$-re való leszűkítése megegyezik az F-fel. Parciális integrálással

$$a_0(F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x)\,dx =$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \cdot \Big(f(x) - a_0\Big)\,dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \cdot f(x)\,dx + \pi \cdot a_0,$$

valamint $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén

$$a_n(F) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cdot \cos(nx)\,dx = -\frac{1}{\pi \cdot n} \int_0^{2\pi} \Big(f(x) - a_0\Big) \cdot \sin(nx)\,dx = -\frac{b_n(f)}{n}$$

és

$$b_n(F) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cdot \sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi \cdot n} \int_0^{2\pi} \Big(f(x) - a_0\Big) \cdot \cos(nx)\,dx = \frac{a_n(f)}{n}.$$

Az előző megjegyzés vége szerint tehát az SF Fourier-sor egyenletesen konvergens, ezért a 6.5.4. Tétel alapján

$$F(x) = \pi \cdot a_0 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t \cdot f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cdot \sin(kx) - b_k \cdot \cos(kx)}{k} \qquad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Ha tehát $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$, akkor a fentieket és a Newton–Leibniz-formulát alkalmazva

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = a_0\cdot(\beta-\alpha) + F(\beta) - F(\alpha) =$$

$$a_0\cdot(\beta-\alpha) + \sum_{k=1}^\infty \int_\alpha^\beta \Big(a_k\cdot\cos(kx) + b_k\cdot\sin(kx)\Big)\,dx.$$

Vegyük észre, hogy ez nem más, mint az f Fourier-sorának a tagonkénti integrálja az $[\alpha,\beta]$ intervallumon.

vii) Láttuk (ld. 1.2. vi) megjegyzés), hogy tetszőleges monoton fogyó $\lambda_n \ge 0 \quad (n \in \mathbf{N})$, $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$ sorozatra a $\sum\Big(\lambda_n\cdot\sin(nx)\Big)$ szinusz-sor egyenletesen konvergens (pl.) minden $[u,v] \subset (0,2\pi)$ intervallumon. Ezért létezik az

$$f(x) := \sum_{n=0}^\infty \lambda_n\cdot\sin(nx) \qquad (0 \le x \le 2\pi)$$

összegfüggvény, amelyik az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \lambda_n\cdot\sin(nx) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvények folytonossága és a 6.3.4. Tétel miatt minden $a \in (0,2\pi)$ helyen folytonos. Mutassuk meg, hogy $f \in R[0,2\pi]$ esetén

$$Sf = \sum\Big(\lambda_n\cdot\sin(nx)\Big),$$

azaz a szóban forgó szinusz-sor az f függvény Fourier-sora. Ehhez elég azt belátni, hogy bármilyen $1 \le k \in \mathbf{N}$ esetén a

$$\sum\Big(\lambda_n\cdot\sin(nx)\cdot\sin(kx)\Big)$$

szinusz-sor egyenletesen konvergens. Legyen ui. $0 < x < \pi$ és $n, m \in \mathbf{N}$, $m < n$, ekkor (ld. 1.2. xvi) megjegyzés)

$$\left|\sum_{j=m}^n \lambda_j\cdot\sin(jx)\cdot\sin(kx)\right| = |\sin(kx)|\cdot\left|\sum_{j=m}^n \lambda_j\cdot\sin(jx)\right| \le \frac{kx\cdot\lambda_m}{\sin(x/2)} \le \pi\cdot k\cdot\lambda_m.$$

Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám, akkor egy alkalmasan választott $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel $\lambda_m < \varepsilon \quad (N < m \in \mathbf{N})$, és így

$$\left|\sum_{j=m}^n \lambda_j\cdot\sin(jx)\cdot\sin(kx)\right| \le \pi\cdot k\cdot\varepsilon \qquad (m,\, n \in \mathbf{N},\, N < m < n,\, x \in [0,\pi]).$$

Innen ugyanez következik már (ld. 1.2. xv) megjegyzés) minden $x \in [0, 2\pi]$ mellett is. Ezért (ld. 6.3.8. Tétel) a 6.5.1. Lemma alapján

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot \sin(kx)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cdot \sin(kx)\,dx =$$

$$\lambda_k \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(kx)\,dx = \lambda_k \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Speciálisan, ha itt

$$(*) \qquad C := \sup\{n\cdot \lambda_n : n \in \mathbf{N}\} < +\infty,$$

akkor (ld. 1.2. xvi) megjegyzés)

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \sin(kx)\right| \leq C\cdot (1+\pi) \qquad (0 \leq x \leq 2\pi),$$

azaz az f függvény korlátos. Így $f \in C(0, 2\pi)$ miatt $f \in R[0, 2\pi]$.

Jegyezzük meg, hogy a $(*)$ feltétel „túl erős". A Lebesgue-integrálelmélet keretein belül belátható ui., hogy a monoton fogyóan 0-hoz tartó (λ_n) sorozatra vonatkozó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} < +\infty$$

nagyságrendi feltétel is elegendő (és szükséges) ahhoz, hogy a $\sum \Big(\lambda_n \cdot \sin(nx)\Big)$ szinuszsor egy (Lebesgue-)integrálható függvény Fourier-sora legyen.

viii) Ha a nemnegatív számokból álló (λ_n) számsorozat monoton fogyó és $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, akkor a fentiek szerint létezik a (nyilván 2π szerint periodikus)

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot \sin(nx) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvény, amelyre $f \in \mathcal{C}\{a\}$ $(2k\pi \neq a \in \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{Z}))$. Nem nehéz belátni, hogy igaz az alábbi ekvivalencia:

$$f \in C_{2\pi} \iff \sum \Big(\lambda_n \cdot \sin(nx)\Big) \text{ egyenletesen konvergens } \iff \lim_{n\to\infty} n\cdot \lambda_n = 0.$$

Tegyük fel ui. először azt, hogy $\lim_{n\to\infty} n\cdot \lambda = 0$. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett valamilyen $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$n\cdot \lambda_n < \varepsilon \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Legyen $p, q \in \mathbf{N}$, $N < p < q$, és $0 < x \leq \pi$, amikor is az $m := [1/x]$ jelöléssel $p < m < q$ esetén (ha $m \leq p$, vagy $m \geq q$, akkor értelemszerűen módosítható a folytatás)

$$\left|\sum_{k=p}^{q} \lambda_k \cdot \sin(kx)\right| \leq \left|\sum_{k=p}^{m} \lambda_k \cdot \sin(kx)\right| + \left|\sum_{k=m+1}^{q} \lambda_k \cdot \sin(kx)\right|.$$

Innen (ld. 1.2. xvi) megjegyzés)

$$\left|\sum_{k=p}^{q} \lambda_k \cdot \sin(kx)\right| \leq x \cdot \sum_{k=p}^{m} k \cdot \lambda_k + \frac{\lambda_{m+1}}{\sin(x/2)} \leq mx \cdot \varepsilon + \frac{\pi \cdot \lambda_{m+1}}{x} \leq$$

$$\varepsilon + \pi \cdot (m+1) \cdot \lambda_{m+1} < (\pi + 1) \cdot \varepsilon,$$

továbbá a $\sum \Big(\lambda_n \cdot \sin(nx)\Big)$ sor egyenletes konvergenciája már következik. Ezért (ld. 6.3.4. Tétel) $f \in C_{2\pi}$.

Most induljunk ki abból, hogy $f \in C_{2\pi}$. Ekkor (ld. vii) megjegyzés)

$$Sf = \sum \Big(\lambda_n \cdot \sin(nx)\Big),$$

így (ld. vi) megjegyzés) tagonkénti integrálással

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \cdot \Big(1 - \cos(kx)\Big)}{k} = \int_0^x f(t)\, dt \to 0 \qquad (x \to 0).$$

Ha itt $1 \leq m \in \mathbf{N}$ és $x := \pi/m$, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \cdot \Big(1 - \cos(kx)\Big)}{k} \geq \sum_{m/2 \leq k \leq m} \frac{\lambda_k \cdot \Big(1 - \cos(kx)\Big)}{k} \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{\pi}{m} \cdot \lambda_m = \lambda_m,$$

következésképpen az f folytonossága miatt

$$(0 \leq)\; m \cdot \lambda_m \leq m \cdot \int_0^{\pi/m} f(t)\, dt \leq \pi \cdot \max\{|f(u)| : 0 \leq u \leq \pi/m\} \to 0 \qquad (m \to \infty),$$

így $\lim_{m\to\infty} m \cdot \lambda_m = 0$.

ix) A nevezetes (ld. 1.5.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2} \qquad (0 < x < 2\pi)$$

sorfejtés alapján könnyűszerrel megkaphatjuk bizonyos függvények Fourier-sorfejtését. Legyen pl. $f \in R_{2\pi}$ az a függvény, amelyre

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (-\pi < x \leq 0) \\ \\ \pi & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$$

(„négyszögjel"). Ekkor

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \pi\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(kx)\,dx = \int_0^{\pi}\cos(kx)\,dx = 0 \qquad (1 \le k \in \mathbf{N}),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(kx)\,dx = \int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx =$$

$$\frac{(-1)^{k+1}+1}{k} = \begin{cases} 2/k & (k \;\text{páratlan}) \\ 0 & (k \;\text{páros}) \end{cases} \qquad (1 \le k \in \mathbf{N}).$$

Ezért

$$Sf = \frac{\pi}{2} + \sum\left(\frac{2\cdot\sin\big((2j+1)x\big)}{2j+1}\right).$$

A $0 < x < \pi$ esetben $0 < 2x < 2\pi$, így

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{2n} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{n} = \frac{\pi-2x}{4}.$$

Innen világos, hogy az Sf Fourier-sor az x-ben konvergens, és

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{2\cdot\sin\big((2j+1)x\big)}{2j+1} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot\sin(nx)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot\sin(2nx)}{2n} =$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi - x - \frac{\pi-2x}{2} = \pi = f(x).$$

Ha $-\pi < z < 0$, akkor $\pi < z + 2\pi < 2\pi$, és

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nz)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\big(n(z+2\pi)\big)}{n} = \frac{\pi-(z+2\pi)}{2} = -\frac{z+\pi}{2},$$

valamint $0 < 2z + 2\pi < 2\pi$, és

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nz)}{2n} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\big(n(2z+2\pi)\big)}{n} = \frac{\pi-(2z+2\pi)}{4} = -\frac{2z+\pi}{4},$$

Tehát az Sf Fourier-sor a z-ben is konvergens, és

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{2\cdot\sin\big((2j+1)z\big)}{(2j+1)} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot\sin(nz)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot\sin(2nz)}{2n} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - z - \pi + \frac{2z+\pi}{2} = 0 = f(z).$$

Végül $y = 0$ vagy $y = \pi$ esetén

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\cdot \sin\Big((2j+1)y)\Big)}{2j+1} = \frac{\pi}{2} = \frac{f(y+0)+f(y-0)}{2}.$$

Az $x := \pi/2$ helyettesítéssel (ld. 1.5.) újra csak

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

adódik.

x) Az előbbi megjegyzésben mondottakhoz hasonlóan „intézhető el" annak az $f \in R_{2\pi}$ függvénynek a Fourier-sorbafejtése, amelyre

$$f(x) := x \qquad (-\pi < x \le \pi)$$

(„fésűjel"):

$$2\cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \sin(kx) = x \qquad (0 \le |x| < \pi).$$

xi) Tekintsük most azt az $f \in C_{2\pi}$ függvényt, amelyre

$$f(x) = \begin{cases} \pi\cdot x/2 & (0 \le x \le \pi) \\ \\ \pi\cdot(2\pi - x)/2 & (\pi < x \le 2\pi) \end{cases}$$

(„fűrészfog-jel"). Ekkor

$$f(x) = \frac{\pi^2}{4} - 2\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\Big((2k+1)x\Big)}{(2k+1)^2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Speciálisan az $x = 0$ választással

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

ami persze

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4}\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4}\cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

alapján is következik.

xii) Ha $f \in R_{2\pi}$ és $x,\ \alpha \in \mathbf{R},\ 1 \le n \in \mathbf{N}$, akkor (ld. 1.5)

$$S_n f(x) - \alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(f(x+2t)-\alpha\Big)\cdot\frac{\sin\Big((2n+1)t\Big)}{\sin t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ldots + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\ldots,$$

ahol (t helyett $(\pi - t)$-t írva) helyettesítéssel integrálva

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\Big(f(x+2t)-\alpha\Big)\cdot\frac{\sin\Big((2n+1)t\Big)}{\sin t}\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\Big(f(x-2t)-\alpha\Big)\cdot\frac{\sin\Big((2n+1)t\Big)}{\sin t}\,dt.$$

Ezért

$$S_n f(x) - \alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\Big(f(x+2t)+f(x-2t)-2\alpha\Big)\cdot\frac{\sin\Big((2n+1)t\Big)}{\sin t}\,dt.$$

Így pl. az $\alpha := f(x)$ választással

$$S_n f(x) - \alpha =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\Big(f(x+2t)-f(x)+f(x-2t)-f(x)\Big)\cdot\frac{\sin\Big((2n+1)t\Big)}{\sin t}\,dt =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{f(x+2t)-f(x)}{2t}+\frac{f(x-2t)-f(x)}{2t}\right)\cdot\frac{2t}{\sin t}\cdot\sin\Big((2n+1)t\Big)\,dt.$$

Innen az 1.5-ben látottakkal analóg módon kapjuk azt, hogy ha az f függvény az x pontban jobbról is és balról is deriválható, akkor

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cdot\cos(kx)+b_k\cdot\sin(kx)\Big) = f(x).$$

Ha az előbbi x-beli jobb-bal oldali deriválhatóság nem teljesül, akkor pl. a következőt mondhatjuk. Tegyük fel, hogy léteznek a (véges)

$$f(x+0) := \lim_{x<u\to x} f(u),\ f(x-0) := \lim_{x>v\to x} f(v)$$

jobb, ill. bal oldali határértékek. Írjuk a fenti α helyébe az

$$\alpha := \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

átlagot, ekkor

$$S_n f(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{f(x+2t)-f(x+0)}{2t}+\frac{f(x-2t)-f(x-0)}{2t}\right)\cdot\frac{2t}{\sin t}\cdot\sin\Big((2n+1)t\Big)\,dt.$$

Tegyük fel továbbá, hogy szintén léteznek a véges

$$\lim_{x<u\to x}\frac{f(u)-f(x+0)}{u-x},\ \lim_{x>v\to x}\frac{f(v)-f(x-0)}{v-x}$$

„kvázi" jobb, ill. bal oldali deriváltak. Ekkor a fentiekhez hasonlóan azt mondhatjuk, hogy

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cdot\cos(kx)+b_k\cdot\sin(kx)\Big)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

xiii) A most mondott konvergencia-feltételben (is) a Rieman–Lebesgue-lemma (ld. 6.5.6. Tétel) játszott alapvető szerepet (ld. 6.5.), miszerint tetszőleges $f\in R_{2\pi}$ függvény esetén

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(nx)\,dx=0,\ \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(nx)\,dx=0.$$

A részletek mellőzésével jegyezzük meg, hogy az előbbi határérték-egyenlőségek sokkal általánosabb formában is igazak. Nevezetesen, bármilyen kompakt $[u,v]\subset[a,b]$ intervallumokkal

$$\lim_{\mu\to+\infty}\int_u^v f(x)\cdot\cos(\mu x)\,dx=0,\ \lim_{\mu\to+\infty}\int_u^v f(x)\cdot\sin(\mu x)\,dx=0.$$

Sőt, az itt szereplő mindkét egyenlőség az $[u,v]$-kre nézve „egyenletesen" teljesül, azaz bármilyen $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $\gamma>0$ „küszöb", hogy minden $[u,v]\subset[a,b]$ intervallumra

$$\left|\int_u^v f(x)\cdot\cos(\mu x)\,dx\right|<\varepsilon,\ \left|\int_u^v f(x)\cdot\sin(\mu x)\,dx\right|<\varepsilon\qquad(\gamma<\mu\in\mathbf{R}).$$

xiv) A korábban (pl. a xii) megjegyzésben) említett „konvergenciakritériumok" mellett számos egyéb elégséges feltétel ismert arra vonatkozóan, hogy egy függvény Fourier-sora valamilyen pontban konvergáljon, esetenként a kérdéses függvény helyettesítési értékéhez. Ezzel kapcsolatban jegyezzük meg, hogy az utóbbi konvergenciához az illető függvény pontbeli folytonossága általában nem elegendő. Du Bois Reymond volt az első, aki kimutatta, hogy van olyan folytonos függvény, amelyiknek a Fourier-sora egy alkalmas pontban divergens. Később Fejér Lipót világhírű magyar matematikus volt az, aki (a róla elnevezett *Fejér- (trigonometrikus) polinomok* segítségével) konstruktív úton (és lényegesen egyszerűbben) látta be ugyanezt. Az is kiderült ebből a konstrukcióból, hogy az így megalkotott folytonos függvény Fourier-sora egy kontinuum számosságú halmazon divergál. Természetes módon vetődött fel az a kérdés, hogy a „divergencia-halmazokat" meddig lehet „növelni"? Meglehetősen hosszú folyamat végén Carleson svéd matematikus mutatta ki azt, hogy egy, a $C_{2\pi}$-nél, sőt, az $R_{2\pi}$-nél is lényegesen bővebb függvényhalmaz elemeinek a Fourier-sora egy nullamértékű halmaz kivételével minden pontban konvergál a szóban forgó függvény helyettesítési értékeihez. (Emlékeztetünk a nullamértékű halmaz fogalmára: az $A \subset \mathbf{R}$ halmaz ilyen, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik intervallumoknak egy olyan (I_n) sorozata, hogy $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$, és $\sum_{n=0}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$.) Az ún. *Carleson-tétel* a XX. századi matematika egyik legfontosabb és legmélyebb eredménye.

xv) Vegyük észre, hogy a 6.5.3. Tétel bizonyítása során (az ottani jelölésekkel) a $h \in C_{2\pi}$ feltétel helyett az indirekt bizonyítási eljárásban csak annyit használtunk ki, hogy $h \in \mathcal{C}\{a\}$. Következésképpen, ha az említett tételben $h \in C_{2\pi}$ helyett azt tesszük fel, hogy $h \in R_{2\pi}$, akkor $h(a) = 0$ adódik minden olyan $a \in \mathbf{R}$ helyen, ahol $h \in \mathcal{C}\{a\}$. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle feltételéből tudjuk (ld. 5.1.9. Tétel), hogy majdnem minden $a \in \mathbf{R}$ ilyen. Más szóval, ha $h \in R_{2\pi}$ és az f függvény minden Fourier-együtthatója nulla, akkor van olyan nullamértékű $A \subset \mathbf{R}$ halmaz, amellyel $h(a) = 0 \quad (a \in \mathbf{R} \setminus A)$. Az is világos továbbá, hogy ha $f \in R_{2\pi}$, és az Sf Fourier-sor egyenletesen konvergens, akkor $x \in \mathbf{R}$, $f \in \mathcal{C}\{x\}$ esetén

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)\Big) = f(x).$$

xvi) A 6.5.4., 6.5.9. Tételek azt mutatják, hogy egy függvény Fourier-sorának a konvergenciáját a pontonkénti konvergencia mellett „érdemes" pl. az egyenletes konvergencia értelmében, vagy a 6.5.6. Tétel megfogalmazása után bevezetett $\|.\|$ „majdnem" norma szerint is, stb. vizsgálni. „Izgalmas" kérdés, hogy ezek a konvergenciafajták milyen viszonyban vannak egymással? A különböző „kiértékelési" eljárások, módszerek részletezése messze vezetne, ezért itt csupán megemlítjük Fejér Lipót egyik nevezetes tételét (ami a maga idejében egyúttal új irányt szabott a Fourier-sorok vizsgálatának). Nevezetesen, ha $f \in C_{2\pi}$, és

$$\sigma_n f := \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} S_k f \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor a $\big(\sigma_n(f)\big)$ függvénysorozat (az ún. *Fejér-közepek* sorozata) egyenletesen konvergál az f-hez:

$$\lim_{n \to \infty} \max\{|\sigma_n f(x) - f(x)| : x \in \mathbf{R}\} = 0.$$

Tekintettel arra, hogy az Sf Fourier-sor, azaz az $(S_n f)$ részletösszeg-sorozat valamilyen x pontbeli konvergenciája maga után vonja a $\big(\sigma_n f(x)\big)$ sorozat konvergenciáját és a

$$\lim_{n \to \infty} S_n f(x) = \lim_{n \to \infty} \sigma_n f(x)$$

egyenlőséget, a következőt mondhatjuk: ha $f \in C_{2\pi}$, $x \in \mathbf{R}$, és az Sf Fourier-sor az x-ben konvergens, akkor

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)\Big) = f(x).$$

xvii) Az ismert

$$e^{\imath y} = \cos y + \imath \cdot \sin y \qquad (y \in \mathbf{R}),$$

ill.

$$\cos y = \frac{e^{\imath y} + e^{-\imath y}}{2}, \ \sin y = -\imath \cdot \frac{e^{\imath y} - e^{-\imath y}}{2} \qquad (y \in \mathbf{R})$$

Euler-összefüggések alapján írjuk fel egy $f \in R_{2\pi}$ függvény

$$S_n f(x) \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R})$$

Fourier-részletösszegeit az alábbi formában:

$$S_n f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)\Big) =$$

$$a_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cdot \left(e^{\imath kx} + e^{-\imath kx}\right) - \imath \cdot b_k \cdot \left(e^{\imath kx} - e^{-\imath kx}\right)\right) =$$

$$a_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left((a_k - \imath \cdot b_k) \cdot e^{\imath kx} + (a_k + \imath \cdot b_k) \cdot e^{-\imath kx}\right) =$$

$$a_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (a_k - \imath \cdot b_k) \cdot e^{\imath kx} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=-n}^{-1} (a_{-k} - \imath \cdot b_{-k}) \cdot e^{\imath kx}.$$

Ha tehát

$$\gamma_k := \begin{cases} a_0 & (k = 0) \\ \dfrac{a_k - \imath \cdot b_k}{2} & (k = 1, ..., n) \\ \dfrac{a_{-k} - \imath \cdot b_{-k}}{2} & (k = -n, ..., -1), \end{cases}$$

akkor

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \cdot e^{\imath kx} \qquad (n \in \mathbf{N},\, x \in \mathbf{R}).$$

Továbbá a

$$2 \cdot |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(|a_n|^2 + |b_n|^2\Big) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx$$

Parseval-egyenlőség (ld. 6.5.) szerint

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\gamma_k|^2 := |\gamma_0|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_{-k}|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|^2 =$$

$$|a_0|^2+2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|^2 = |a_0|^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k-\imath\cdot b_k|^2 = |a_0|^2+\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2+|b_k|^2) =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\Big(2|a_0|^2+\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2+|b_k|^2)\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx.$$

xviii) Állapodjunk meg abban, hogy ha valamilyen kompakt $[u,v]\subset\mathbf{R}$ intervallum esetén $g,\, h\in R[u,v]$, akkor a

$$g+\imath h:[u,v]\to\mathbf{C}$$

(komplex értékű) függvény *Riemann-integrálján* az

$$\int_u^v(g+\imath h) := \int_u^v g+\imath\cdot\int_u^v h$$

(komplex) számot értjük. Ezzel a megállapodással (ld. előző megjegyzés) az a_k, b_k-k definíciója alapján

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cdot\Big(\cos(kt)-\imath\cdot\sin(kt)\Big)\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cdot e^{-\imath kt}\,dt \qquad (k=-n,\ldots,n).$$

Vegyük észre, hogy a 6.5.1. Lemmára tekintettel (könnyen ellenőrizhetően)

$$(*)\qquad \int_0^{2\pi}e^{\imath kt}\cdot e^{-\imath jt}\,dt = \begin{cases}0 & (k\neq j)\\ \\ 2\pi & (k=j)\end{cases} \qquad (k,\, j\in\mathbf{Z}).$$

Bővítsük ki az $R_{2\pi}$ függvényosztály értelmezését a következőképpen: legyen $\mathcal{R}_{2\pi}$ az összes olyan $g+\imath h$ alakú függvény által alkotott halmaz, ahol $g,\, h\in R_{2\pi}$. Ekkor az

$$\langle F,G\rangle := \int_0^{2\pi}F(x)\cdot\overline{G(x)}\,dx \qquad (F,\, G\in\mathcal{R}_{2\pi})$$

definícióval „majdnem" skaláris szorzást adtunk meg (ahol a „felülhúzás" a komplex konjugálást jelöli),

$$\|F\| := \sqrt{\langle F,F\rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi}|F(x)|^2\,dx} \qquad (F\in\mathcal{R}_{2\pi})$$

pedig „majdnem" norma (ahol tehát csupán az $\|F\| = 0 \Longrightarrow F \equiv 0$ következtetés nem teljesül a norma axiómái közül). Ha

$$e_k(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\imath kt} \qquad (k \in \mathbf{Z},\, t \in \mathbf{R}),$$

akkor az $\mathcal{R}_{2\pi}$-beli $\{e_k : k \in \mathbf{Z}\}$ függvényrendszer egy ONR (*komplex ortonormált trigonometrikus rendszer*),

$$\widehat{F}(k) := \langle F, e_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} F(t) \cdot \overline{e_k(t)}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} F(t) \cdot e^{-\imath kt}\, dt \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

az $F \in \mathcal{R}_{2\pi}$ függvény (komplex) *Fourier-együtthatói,*

$$S_n F := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{F}(k) \cdot e_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

pedig az n-edik (komplex) *Fourier-részletösszege* az F-nek. Ha tehát a $g, h \in R_{2\pi}$ valós értékű függvényekkel $F = g + \imath h \in \mathcal{R}_{2\pi}$, akkor

$$\widehat{F}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \Big(g(t) + \imath h(t)\Big)\, dt = \sqrt{2\pi} \cdot \Big(a_0(g) + \imath a_0(h)\Big),$$

ill. $1 \leq k \in \mathbf{N}$ esetén

$$\widehat{F}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \Big(g(t) + \imath h(t)\Big) \cdot \Big(\cos(kt) - \imath \sin(kt)\Big)\, dt =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \Big(a_k(g) + b_k(h) + \imath \cdot \Big(a_k(h) - b_k(g)\Big)\Big).$$

Mivel

$$\overline{\widehat{F}(j)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \overline{F(t)} \cdot e^{\imath jt}\, dt = \widehat{\overline{F}}(-j) \qquad (j \in \mathbf{Z}),$$

ezért

$$\widehat{F}(-k) = \overline{\widehat{\overline{F}}(k)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \Big(a_k(g) - b_k(h) - \imath \cdot \Big(a_k(h) + b_k(g)\Big)\Big) \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Mindezt összegezve a Parseval-egyenlőség alapján azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{F}(k)|^2 := |\widehat{F}(0)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{F}(-k)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{F}(k)|^2 =$$

$$2\pi \cdot (|a_0(g)|^2 + |a_0(h)|^2) + \pi \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \Big(|a_k(g)|^2 + |a_k(h)|^2\Big) =$$

$$\int_0^{2\pi} g^2(t)\, dt + \int_0^{2\pi} h^2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} |F(t)|^2\, dt.$$

xix) A trigonometrikus rendszer mellett számos egyéb ortonormált rendszer játszik fontos szerepet a matematikában, az alkalmazásokban. Ezek közül (a számítógépes „kezelhetőség" szempontjából is) az egyik „legnépszerűbb" a Walsh-féle ONR. Legyen ehhez az $r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ az az 1 szerint periodikus függvény, amelyre

$$r(x) := \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1/2) \\ \\ -1 & (1/2 \le x < 1). \end{cases}$$

Ekkor az

$$r_n(x) := r(2^n \cdot x) \qquad (n \in \mathbf{N},\ x \in [0,1])$$

függvényrendszer az ún. *Rademacher-rendszer.* Világos, hogy

$$r_n(x) = \begin{cases} 1 & (k/2^n \le x < (2k+1)/2^{n+1}) \\ \\ -1 & ((2k+1)/2^{n+1} \le x < (k+1)/2^n) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N},\ x \in [0,1]).$$

(Geometriailag szólva tehát a $[0,1]$ intervallumot 2^n egyenlő hosszúságú zárt intervallumra bontva, mindegyik részintervallum első felében az r_n függvény 1-et, a másik felében pedig -1-et vesz fel.)

Könnyű meggondolni, hogy a Rademacher-rendszer rendelkezik a következő tulajdonsággal: bármilyen $\emptyset \ne \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ véges indexhalmazra

$$\int_0^1 \prod_{k \in \mathcal{N}} r_k(x)\, dx = 0.$$

Valóban, ha az $\mathcal{N}$ 1 elemű, akkor az

$$\int_0^1 r_k(x)\, dx = 0 \qquad (k \in \mathbf{N})$$

egyenlőség triviális. Különben legyen $n := \max \mathcal{N}$, ekkor minden $j = 0, ..., n-1$ esetén a

$$g := \prod_{n \ne k \in \mathcal{N}} r_k$$

függvény állandó az $I_j := [j/2^n, (j+1)/2^n)$ intervallumon, nevezetesen $g_{|I_j} = \pm 1$. Ezért

$$\int_0^1 \prod_{k \in \mathcal{N}} r_k(x)\, dx = \int_0^1 g(x) \cdot r_n(x)\, dx = \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{I_j} g(x) \cdot r_n(x)\, dx =$$

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} \left(\pm \int_{I_j} r_n(x)\, dx \right) = 0.$$

Mindez azt jelenti, hogy a Rademacher-függvények véges szorzataiból álló függvényrendszer ortogonális az

$$\langle f, h\rangle := \int_0^1 f(x)\cdot h(x)\,dx \qquad (f,\, h \in R[0,1])$$

„majdnem" skaláris szorzásra nézve. Az említett rendszer normált is, ui. (az előbbi jelöléssel) nyilván

$$\Big\langle \prod_{k\in\mathcal{N}} r_k, \prod_{k\in\mathcal{N}} r_k\Big\rangle = \sqrt{\int_0^1 \Big|\prod_{k\in\mathcal{N}} r_k(x)\Big|^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 1\,dx} = 1.$$

A szóban forgó véges szorzatok (amik nyilván egy megszámlálható halmazt alkotnak) többféleképpen is sorozatba rendezhetők. Tekintsük pl. az $n \in \mathbf{N}$ természetes szám

$$n = \sum_{k=0}^{p} n_k\cdot 2^k$$

diadikus kifejtését, ahol $p \in \mathbf{N}$ és $n_k \in \{0,1\}$ $(k = 0, ..., p)$ alkalmasan választott (de egyértelműen létező) paraméterek. Legyen ekkor

$$w_n := \prod_{k=0}^{p} r_k^{n_k}.$$

Egyszerűen belátható, hogy a fenti véges $\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ halmazhoz egyértelműen megadható olyan $n \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\prod_{k\in\mathcal{N}} r_k = w_n.$$

Legyen ui. $\mathcal{N} = \{j_0, ..., j_s\}$ esetén (ahol $s \in \mathbf{N}$ és $j_0 < ... < j_s$)

$$n := \sum_{i=0}^{s} 2^{j_i},$$

amikor is nyilván $\prod_{k\in\mathcal{N}} r_k = w_n$. A w_n $(n \in \mathbf{N})$ ONR az ún. *Walsh–Paley-rendszer.* Ha $f \in R[0,1]$, akkor az

$$\hat{f}(k) := \int_0^1 f(x)\cdot w_k(x)\,dx \qquad (k \in \mathbf{N})$$

szám az f függvény k-adik *Walsh–Fourier-együtthatója,* a

$$Wf := \sum \Big(\hat{f}(n)\cdot w_n\Big)$$

függvénysor az f *Walsh–Fourier-sora,* a

$$W_n f := \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(k) \cdot w_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

függvény („Walsh-polinom") pedig az f függvény n-edik *Walsh–Fourier-részletösszege.* Következésképpen $x \in [0,1]$, $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$W_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(k) \cdot w_k(x) = \int_0^1 f(t) \cdot \sum_{k=0}^{n} w_k(t) \cdot w_k(x)\, dt = \int_0^1 f(t) \cdot D_n(t,x)\, dt,$$

ahol

$$D_n(u,v) := \sum_{k=0}^{n} w_k(u) \cdot w_k(v) \qquad (n \in \mathbf{N},\ u,\ v \in [0,1])$$

az n-edik *Walsh–Dirichlet-magfüggvény.* Ez utóbbiak egyik nevezetes tulajdonsága, hogy ha $n \in \mathbf{N}$ és $x \in [0,1)$, akkor

$$D_{2^n-1}(t,x) = \begin{cases} 2^n & (t \in I_n(x)) \\ \\ 0 & (t \notin I_n(x)) \end{cases} \qquad (t \in [0,1)),$$

ahol

$$I_n(x) := [k/2^n, (k+1)/2^n) \qquad (k = 0, ..., 2^n - 1)$$

az az (egyértelműen létező) intervallum, amelyre $x \in [k/2^n, (k+1)/2^n)$. Így

$$W_{2^n-1} f(x) = 2^n \cdot \int_{I_n(x)} f(t)\, dt = \frac{1}{|I_n(x)|} \cdot \int_{I_n(x)} f(t)\, dt,$$

ami nem más, mint az f függvénynek az $I_n(x)$ intervallumra vonatkozó integrálközepe. Ebből kifolyólag $f \in \mathcal{C}\{x\}$ esetén

$$W_{2^n-1} f(x) \to f(x) \qquad (n \to \infty).$$

xx) A 6.5.7. Tételben, ill az előtte bevezetett fogalmakra utalva az említett tételbeli vizsgálódások messze általánosíthatók. Legyen ui. az X lineáris tér (vektortér) a $\mathbf{K}$ testre vonatkozóan, az

$$X \times X \ni (u,v) \mapsto \langle u,v \rangle \in \mathbf{K}$$

leképezés (a korábban már többször mondott értelemben) „majdnem" skaláris szorzás. Legyen továbbá

$$\|u\| := \sqrt{\langle u,u \rangle} \qquad (u \in X)$$

(„majdnem" norma). Azt mondjuk, hogy valamilyen $\emptyset \neq \mathcal{N} = \{0, 1, ...\} \subset \mathbf{N}$ indexhalmaz mellett a $\varphi_n \in X \quad (n \in \mathcal{N})$ elemek az X-ben egy $\Phi := \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ *ortonormált rendszert* alkotnak (röviden: a Φ egy ONR), ha

$$\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ \\ 1 & (n = k) \end{cases} \qquad (n, k \in \mathcal{N}).$$

Ha $f \in X$, akkor legyen

$$\hat{f}(k) := \langle f, \varphi_k \rangle \qquad (k \in \mathcal{N}),$$

és

$$\Phi_n f := \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(k) \cdot \varphi_k \qquad (n \in \mathcal{N}).$$

A $\sum \left(\hat{f}(k) \cdot \varphi_k \right)$ sor (vagy összeg) az f elem (absztrakt) Φ-Fourier-sora, az $\hat{f}(k)$ $(k \in \mathcal{N})$ valós vagy komplex szám a k-adik *Fourier-együtthatója*, $\Phi_n f \ (n \in \mathcal{N})$ pedig az n-edik *Fourier-részletösszege.* Ha

$$\mathcal{L}_n(\Phi) := \left\{ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k : \alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbf{K} \right\} \qquad (n \in \mathcal{N}),$$

akkor minden további nélkül igaz marad az absztrakt *Bessel-azonosság* (ld. 6.5.7. Tétel): *bármely $f \in X$ és $n \in \mathcal{N}$ esetén létezik a*

$$\Delta_n(f) := \min\{\|f - \psi\| : \psi \in \mathcal{L}_n(\Phi)\}$$

minimum, és

$$\Delta_n(f) = \|f - \Phi_n f\| = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}(k)|^2}.$$

Teljesül továbbá a *Bessel-egyenlőtlenség,* miszerint *akármilyen $f \in X$ elemre*

$$\sum_{k \in \mathcal{N}} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Ha pedig a Φ ONR *zárt rendszer,* azaz minden $f \in X$ és $\varepsilon > 0$ szám esetén létezik olyan $N \in \mathcal{N}$ és olyan $\psi \in \mathcal{L}_N(\Phi)$, hogy $\|f - \psi\| < \varepsilon$, akkor *tetszőleges $f \in X$ mellett $\mathcal{N} = \mathbf{N}$ esetén*

$$\lim_{n \to \infty} \|f - \Phi_n f\| = 0,$$

ha pedig valamilyen $N \in \mathbf{N}$ indexszel $\mathcal{N} = \{0, ..., N\}$, akkor

$$\Phi_N f = f.$$

Fennáll továbbá az ún. Parseval-egyenlőség:

$$\sum_{k \in \mathcal{N}} \hat{f}(k)|^2 = \|f\|^2.$$

xxi) Az előző megjegyzéshez kapcsolódva említsünk meg röviden egy, a gyakorlat számára is fontos speciális esetet, az ún. *diszkrét Fourier-transzformációt.* Legyen ehhez adott az $1 \leq N \in \mathbf{N}$ természetes szám, és legyen az X az összes, a

$$D := \{0, 1, ..., N-1\}$$

halmazon értelmezett $f : D \to \mathbf{K}$ függvény által alkotott halmaz. Ekkor (a „szokásos" függvényműveletekkel) az X lineáris tér a $\mathbf{K}$ felett (ami valójában nem más, mint a $\mathbf{K}^N$ tér), az

$$X \times X \ni (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle := \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot \overline{g(k)}$$

leképezés pedig skaláris szorzás. Következésképpen

$$X \ni f \mapsto \|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |f(k)|^2} \qquad (f \in X)$$

norma. Ha

$$\varphi_k(x) := \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot e^{2\pi\imath \cdot kx/N} \qquad (x \in X,\ k = 0, ..., N-1),$$

akkor

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \frac{1}{N} \cdot \sum_{x=0}^{N-1} e^{2\pi\imath \cdot (k-j)x/N} = \begin{cases} 0 & (k \neq j) \\ \\ 1 & (k = j) \end{cases} \qquad (k,\ j = 0, ..., N-1).$$

Más szóval: a $\Phi := \{\varphi_k : k = 0, ..., N-1\}$ egy (véges) ONR, amit *diszkrét trigonometrikus rendszerként* szokás említeni. Ez a rendszer zárt is, ami most azt jelenti, hogy bázist alkot az X-ben. Ez utóbbihoz lássuk be először is azt, hogy a Φ lineárisan független rendszer. Valóban, ha valamilyen $\alpha_k \in \mathbf{K}$ $(k = 0, ..., N-1)$ együtthatókkal

$$g := \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \cdot \varphi_k \equiv 0,$$

akkor az ortonormáltság miatt

$$0 = \langle g, \varphi_j \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \cdot \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \alpha_j \cdot \langle \varphi_j, \varphi_j \rangle = \alpha_j \qquad (j = 0, ..., N-1).$$

Mivel az $X \cong \mathbf{K}^N$ megfeleltetés miatt az X egy N dimenziós vektortér, a Φ rendszer pedig N elemű, ezért a Φ valóban bázis az X-ben.

Legyen $f \in X$, ekkor

$$\hat{f}(k) = \langle f, \varphi_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{s=0}^{N-1} f(s) \cdot e^{-2\pi\imath \cdot ks/N} \qquad (k = 0, ..., N-1)$$

az f (vektor) k-adik *diszkrét Fourier-együtthatója,* az

$$S_m f(x) := \sum_{k=0}^{m} \hat{f}(k) \cdot \varphi_k(x) =$$

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{m} \sum_{s=0}^{N-1} f(s) \cdot e^{-2\pi\imath k\cdot(s-x)/N} \qquad (x \in X,\, m = 0, ..., N-1)$$

összegek pedig az f *diszkrét Fourier-részletösszegei.* A Φ bázis volta miatt az előbbi f-hez egyértelműen léteznek olyan $\alpha_k \in \mathbf{K}$ $(k = 0, ..., N-1)$ együtthatók, amelyekkel

$$f = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \cdot \varphi_k.$$

Ha $j = 0, ..., N-1$, akkor

$$\hat{f}(j) = \langle f, \varphi_j \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \cdot \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \alpha_j \cdot \langle \varphi_j, \varphi_j \rangle = \alpha_j,$$

így

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(k) \cdot \varphi_k(x) = S_{N-1} f(x) \qquad (x \in X).$$

Világos, hogy a fentiekben szereplő összes diszkrét Fourier-együttható kiszámítása azok definíciója alapján N^2 nagyságrendű műveletet igényel. Ugyanakkor a modern matematika egyik legfontosabb algoritmusával, az ún. *gyors Fourier-transzformációval* (az angol nyelvű rövidítéssel *FFT-algoritmussal*) az N^2 nagyságrendű számolási igény lecsökkenthető $N \cdot \ln N$ nagyságrendre.

xxii) A 6.5.7. Tétel bizonyítása érdekében bevezetett

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx \qquad (f,\, g \in R_{2\pi})$$

„majdnem" skaláris szorzásra utalva a következőket mondhatjuk. Először is (ahogyan ezt már korábban is megjegyeztük) ezzel a szorzással $(C_{2\pi}, \langle , \rangle)$ egy euklideszi tér. Ha $f,\, g \in C_{2\pi}$, és $\langle f, g \rangle = 0$, akkor (geometriai szóhasználattal élve) azt mondjuk, hogy az f, g függvények *merőlegesek* egymásra. Ezzel a terminológiával tehát a 6.5.3. Tétel a következőképpen fogalmazható meg: ha a $h \in C_{2\pi}$ függvény a trigonometrikus rendszer minden elemére merőleges, akkor $h \equiv 0$. Más szóval, a trigonometrikus rendszer nem bővíthető $C_{2\pi}$-beli függvényekkel úgy, hogy a kibővített függvényrendszer továbbra is ortonormált legyen. Így ebben az értelemben a trigonometrikus rendszer *teljes,* ezért szokás a 6.5.3. Tételt *teljességi tételként* is emlegetni.

7. fejezet

Differenciálegyenletek

7.1. Bevezető feladatok

7.1.1. Függőleges hajítás

Egy m tömegű rakétát v_0 kezdősebességgel függőlegesen fellövünk. Tegyük fel, hogy a mozgás során a rakétára mindössze két erő hat: a nehézségi erő (jelöljük α -val a nehézségi gyorsulást) és a pillanatnyi sebesség négyzetével arányos súrlódási erő (az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen β). Mennyi ideig emelkedik a rakéta?

Ha $v \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jelenti a sebesség-idő függvényt, akkor – feltételezve, hogy $v \in D$, $\mathcal{D}_v$ intervallum és $0 \in \mathcal{D}_v$ – a feladat matematikai modellje a következő (ld. a fizika Newton-féle mozgástörvényeit): adott m, α, β pozitív számok mellett olyan v függvényt keresünk, amelyre

$$(1) \qquad mv'(t) = -m\alpha - \beta v^2(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_v).$$

Azt a $T \in \mathcal{D}_v$ „pillanatot" kell meghatározni, amelyre $v(T) = 0$. Világos, hogy (1) ekvivalens a következővel:

$$(2) \qquad v'(t) = -\alpha \left(1 + \frac{\beta}{m\alpha} v^2(t)\right) \qquad (t \in \mathcal{D}_v).$$

Emlékeztetünk arra, hogy $(\mathrm{arctg})'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ $(t \in \mathbf{R})$, tehát bármely $c > 0$ állandóval a $\varphi(t) := \mathrm{arctg}(ct)$ $(t \in \mathbf{R})$ függvényre (az összetett függvény deriválási szabálya szerint)

$$\varphi'(t) = \frac{c}{1 + (ct)^2} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Speciálisan a $c := \sqrt{\beta/m\alpha}$ választással

$$\varphi'(t) = \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\beta}{m\alpha} \cdot t^2} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ha tehát F jelöli azt az összetett függvényt, amelyre

$$F(t) := \varphi\big(v(t)\big) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v(t)\right) \qquad (t \in \mathcal{D}_v),$$

akkor

$$F'(t) = \varphi'\big(v(t)\big) \cdot v'(t) = \sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot \frac{v'(t)}{1 + \frac{\beta}{m\alpha} \cdot v^2(t)} \qquad (t \in \mathcal{D}_v).$$

Következésképpen a (2) egyenlőséget figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$F'(t) = -\sqrt{\frac{\beta\alpha}{m}} \qquad (t \in \mathcal{D}_v). \tag{3}$$

Legyen

$$G(t) := -\sqrt{\frac{\beta\alpha}{m}} \cdot t \qquad (t \in \mathcal{D}_v),$$

ekkor $G'(t) = -\sqrt{\frac{\beta\alpha}{m}}$ $(t \in \mathcal{D}_v)$. A (3)-ból az következik tehát, hogy $F'(t) = G'(t)$, azaz

$$(F-G)'(t) = 0 \qquad (t \in \mathcal{D}_v). \tag{4}$$

Mivel a v függvény $\mathcal{D}_v$ értelmezési tartománya nyílt intervallum, ezért ugyanez teljesül az $F - G$ függvényre is. Így (4) miatt alkalmas $\kappa \in \mathbf{R}$ konstanssal $F - G \equiv \kappa$. Más szóval igaz az alábbi egyenlőség:

$$\varphi\big(v(t)\big) = -\sqrt{\frac{\beta\alpha}{m}} \cdot t + \kappa \qquad (t \in \mathcal{D}_v).$$

A $v(0) = v_0$ *kezdeti feltétel* miatt

$$\kappa = \varphi\big(v(0)\big) = \varphi(v_0) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0\right),$$

ezért

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v(t)\right) = -\sqrt{\frac{\beta\alpha}{m}} \cdot t + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0\right) \qquad (t \in \mathcal{D}_v). \tag{5}$$

A $v(T) = 0$ egyenlőségből és (5)-ből (a $t := T$ helyettesítéssel – figyelembe véve, hogy $\text{arctg}(0) = 0$) – az adódik, hogy

$$T = \sqrt{\frac{m}{\beta\alpha}} \cdot \text{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}} \cdot v_0\right).$$

7.1.2. Radioaktív bomlás

Képzeljük el, hogy valamely (pl. radioaktív) anyag bomlik. A bomlási sebesség egyenesen arányos a még fel nem bomlott anyag mennyiségével. A bomlás kezdetétől számítva mennyi idő alatt „feleződik meg" az anyag (azaz bomlik el a fele)?

Jelöljük m-mel ($\mathbf{R} \ni m > 0$) az anyag eredeti mennyiségét, $\phi(t)$-vel a $t\,(\in \mathbf{R})$ időpillanatban még el nem bomlott anyag mennyiségét. A $\phi \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényről tegyük fel, hogy differenciálható. Ekkor a bomlási sebességet matematikailag a következőképpen „foghatjuk meg". Legyen $t, \Delta t \in \mathbf{R}$, $\Delta t > 0$. A $[t, t+\Delta t]$ időintervallumban elbomlott anyag mennyisége nem más, mint $\phi(t) - \phi(t+\Delta t)$. Az „átlagos bomlási sebesség" tehát a vizsgált időintervallumban

$$\frac{\phi(t) - \phi(t+\Delta t)}{\Delta t} = -\frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t}.$$

Ez az átlagos bomlási sebesség annál jobban jellemzi a t pillanatbeli helyzetet, minél kisebb a Δt változás. Matematikailag tehát jól modellezi a „bomlási sebességet" a t pillanatban a

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi(t) - \phi(t+\Delta t)}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = -\phi'(t)$$

határérték, azaz a ϕ függvény t-beli deriváltja. A feladatbeli arányossági tényezőt jelöljük α-val (ahol tehát $0 < \alpha \in \mathbf{R}$). Ekkor a matematikai modellünk a következő:

$$\phi'(t) = -\alpha\phi(t) \qquad (t \in \mathbf{R}). \tag{6}$$

Világos, hogy $\phi(0) = m$ (*kezdeti feltétel*). Azt a T időpontot keressük (ez az ún. *felezési idő*), amikor $\phi(T) = m/2$. Figyelembe véve a logaritmusfüggvényre vonatkozó jól ismert $\ln'(x) = 1/x \quad (x > 0)$ deriválási szabályt, azt kapjuk az

$$F(t) := \ln\big(\phi(t)\big) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

függvényre, hogy

$$F'(t) = \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

A (6) egyenlőségből tehát

$$F'(t) = -\alpha = G'(t) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol most

$$G(t) := -\alpha t \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

A 7.1.1. feladatban látottakkal analóg módon innen az következik, hogy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ konstans mellett

$$\ln\Big(\phi(t)\Big) = -\alpha t + c \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ugyanez másképp kifejezve $\phi(t) = e^{c} \cdot e^{-\alpha t}$ $(t \in \mathbf{R})$. Mivel $\phi(0) = m$, ezért $c = \ln m$, tehát

$$\phi(t) = me^{-\alpha t} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

A T definíciója alapján

$$\phi(T) = me^{-\alpha T} = \frac{m}{2},$$

azaz $e^{-\alpha T} = 1/2$. Innen

$$T = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

7.1.3. Rezgések

Tegyük fel, hogy egy egyenes mentén mozgó m tömegű tömegpontra az alábbi erők hatnak:

a) *az egyenes valamely pontjához viszonyított elmozdulással arányos, az illető pontba mutató „visszatérítő" erő;*

b) *a pillanatnyi sebességgel arányos „fékező" erő;*

c) *az előbbiektől (de az időtől nem feltétlenül) független „külső" erő.*

Írjuk le a tömegpont mozgását, ha ismerjük a megfigyelés kezdetekor elfoglalt helyzetét és az akkori sebességét!

Jelöljük az a)-beli elmozdulás-idő függvényt s-sel, az ezzel kapcsolatos arányossági tényező legyen $0 < \alpha \in \mathbf{R}$. A b)-beli arányossági tényező legyen $0 \leq \beta \in \mathbf{R}$, a c)-beli erő pedig $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, s \in D^2$ és $s_0 := s(0)$, $s_0' := s'(0)$ adottak (a megfigyelés kezdetekor észlelt helyzet, ill. sebesség). A Newton-féle mozgástörvényeket alkalmazva az alábbi matematikai modell („egyenlet") adódik:

$$ms''(t) = F(t) - \alpha s(t) - \beta s'(t) \qquad (t \in \mathbf{R}), \tag{7}$$

ahol $s(0) = s_0$, $s'(0) = s_0'$ (*kezdeti feltételek*).

Vizsgáljuk először a (7) egyenletnek azt a speciális esetét, amikor $F \equiv 0$ (*homogén egyenlet*), azaz (ekvivalens módon mindjárt átalakítva)

$$s''(t) + \frac{\beta}{m} s'(t) + \frac{\alpha}{m} s(t) = 0 \qquad (t \in \mathbf{R}). \tag{8}$$

Könnyen látható, hogy a (8) egyenlőségnek alkalmas q valós vagy (nem valós) komplex számmal a $\varphi(t) := e^{qt}$ $(t \in \mathbf{R})$ függvény eleget tesz. Ui. a $\varphi'(t) = qe^{qt}$, $\varphi''(t) = q^2e^{qt}$ $(t \in \mathbf{R})$ deriváltakat behelyettesítve (8)-ba azt kapjuk, hogy

$$\left(q^2 + \frac{\beta}{m}q + \frac{\alpha}{m}\right) \cdot e^{qt} = 0 \qquad (t \in \mathbf{R}). \tag{9}$$

A (9) egyenlőség (és így a (8) is) pontosan akkor teljesül, ha a q szám eleget tesz a

$$q^2+\frac{\beta}{m}q+\frac{\alpha}{m} = 0 \tag{10}$$

másodfokú egyenletnek. A (10) megoldásai a következők:

$$q_1 := \frac{-\beta/m + \sqrt{(\beta/m)^2 - 4\alpha/m}}{2},\ q_2 := \frac{-\beta/m - \sqrt{(\beta/m)^2 - 4\alpha/m}}{2}.$$

Vegyük észre, hogy ha $q := q_1 = q_2$, azaz, ha $(\beta/m)^2 = 4\alpha/m$, akkor a $\varphi(t) := te^{qt}$ $(t \in \mathbf{R})$ függvény is kielégíti (8)-at. Valóban, ekkor

$$\varphi'(t) = e^{qt} + qte^{qt},\ \varphi''(t) = 2qe^{qt} + q^2te^{qt} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

miatt a most mondottak azzal ekvivalensek, hogy

$$2qe^{qt} + q^2te^{qt} + \frac{\beta}{m}\left(e^{qt} + qte^{qt}\right) + \frac{\alpha}{m}te^{qt} =$$

$$\left(\left(q^2 + \frac{\beta}{m}q + \frac{\alpha}{m}\right)t + 2q + \frac{\beta}{m}\right) \cdot e^{qt} = 0 \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Mivel q megoldása (10)-nek, ezért $q^2 + \beta q/m + \alpha/m = 0$. Ugyanakkor a $(\beta/m)^2 = 4\alpha/m$ feltételezés miatt $q = -\beta/(2m)$, azaz $2q + \dfrac{\beta}{m} = 0$ is igaz.

Legyen tehát

$$\varphi_1(t) := \begin{cases} e^{q_1t} & (q_1 \neq q_2) \\ e^{qt} & (q := q_1 = q_2) \end{cases},\ \varphi_2(t) := \begin{cases} e^{q_2t} & (q_1 \neq q_2) \\ te^{qt} & (q := q_1 = q_2) \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ekkor a φ_1, φ_2 függvények eleget tesznek (8)-nak. Az is nyilvánvaló, hogy a fenti φ_1, φ_2 függvényekkel együtt azok akármilyen lineáris kombinációja is kielégíti a (8) egyenlőséget („egyenletet").

Világos, hogy a kitűzött feladat megoldása szempontjából csak valós értékű függvények jöhetnek szóba. Az előbbiekben szereplő q valós szám, ezért a neki „megfelelő" φ_1, φ_2 függvények is valós értékűek. Ugyanezt mondhatjuk akkor is, ha a $q_1 \neq q_2$ számok valósak.

Ha viszont $(\beta/m)^2 < 4\alpha$, akkor $q_1 \neq q_2$ nem valós komplex számok. Legyen ekkor (alkalmas $u \in \mathbf{R}$ és $0 \neq v \in \mathbf{R}$ számokkal)

$$q_1 = u + \imath v,\ q_2 = u - \imath v,$$

továbbá

$$\varphi_1(t) := e^{ut}\cdot \cos(vt),\ \varphi_2(t) := e^{ut}\cdot \sin(vt) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az így definiált („módosított") φ_1, φ_2 függvények (amelyek már valós értékűek) szintén eleget tesznek a (8) előírásnak.

Ha már most $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, és a φ_1, φ_2 függvények az előbbiekben definiált valós megoldásai a (8) egyenletnek, akkor a

$$c_1\cdot \varphi_1 + c_2\cdot \varphi_2$$

(valós) lineáris kombináció is megoldása a (8)-nak. (Később majd az is kiderül, hogy a (8) egyenlet összes valós megoldása ilyen alakú.) Speciálisan, ha $\beta = 0$ (a *csillapítás nélküli,* vagy más szóval a *harmonikus rezgés* esete), akkor $u = 0$, és $v = \sqrt{\alpha/m}$, ill.

$$s(t) = c_1\cdot \cos(vt) + c_2\cdot \sin(vt) = c\cdot \sin(vt + \delta) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

(valamilyen $c \in \mathbf{R}$ *amplitúdóval* és $\delta \in \mathbf{R}$ *fázisszöggel*).

Tekintsük tehát a (8) homogén egyenlet fenti φ_1, φ_2 (valós) ún. *alaprendszerét,* és tegyük fel, hogy az F függvény nem az azonosan nulla függvény (azaz a (7) egy ún. *inhomogén egyenlet*). Ekkor alkalmas g, h kétszer differenciálható függvényekkel az

$$S(t) := g(t)\varphi_1(t) + h(t)\varphi_2(t) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

függvény eleget tesz a (7) inhomogén egyenletnek (az *állandók variálásának a módszere*). Ui. bármely $t \in \mathbf{R}$ helyen

$$S'(t) = g'(t)\varphi_1(t) + g(t)\varphi_1'(t) + h'(t)\varphi_2(t) + h(t)\varphi_2'(t),$$

$$S''(t) = g''(t)\varphi_1(t) + 2g'(t)\varphi_1'(t) + g(t)\varphi_1''(t) + h''(t)\varphi_2(t) + 2h'(t)\varphi_2'(t) + h(t)\varphi_2''(t),$$

amiből

$$S''(t) + \frac{\beta}{m}S'(t) + \frac{\alpha}{m}S(t) =$$

$$g(t)\left(\varphi_1''(t) + \frac{\beta}{m}\varphi_1'(t) + \frac{\alpha}{m}\varphi_1(t)\right) + h(t)\left(\varphi_2''(t) + \frac{\beta}{m}\varphi_2'(t) + \frac{\alpha}{m}\varphi_2(t)\right) +$$

$$+\frac{\beta}{m}\left[\varphi_1(t)g'(t) + \varphi_2(t)h'(t)\right] + \left[\varphi_1'(t)g'(t) + \varphi_2'(t)h'(t)\right] +$$

$$+\left[\varphi_1(t)g'(t) + \varphi_2(t)h'(t)\right]' =$$

$$= \frac{\beta}{m}\left[\varphi_1(t)g'(t) + \varphi_2(t)h'(t)\right] + \left[\varphi_1'(t)g'(t) + \varphi_2'(t)h'(t)\right] +$$
$$+ \left[\varphi_1(t)g'(t) + \varphi_2(t)h'(t)\right]'.$$

Így az

$$S''(t) + \frac{\beta}{m}S'(t) + \frac{\alpha}{m}S(t) = \frac{F(t)}{m} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

egyenlőség teljesül, hacsak pl. a g, h függvények minden $\mathbf{R} \ni t$-re eleget tesznek a

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1(t)g'(t) + \varphi_2(t)h'(t) & = & 0 \\ \varphi_1'(t)g'(t) + \varphi_2'(t)h'(t) & = & \frac{F(t)}{m} \end{array} \tag{11}$$

egyenletrendszernek. Adott $t \in \mathbf{R}$ mellett a $g'(t), h'(t)$ „ismeretlenekre" vonatkozó (11) lineáris egyenletrendszer determinánsa a következő:

$$W(t) := \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}$$

(a φ_1, φ_2 rendszer ún. *Wronski-determinánsa*). Közvetlen számolással könnyen ellenőrizhető, hogy $W(t) \neq 0 \quad (t \in \mathbf{R})$.

Azt kaptuk tehát, hogy (11) minden $\mathbf{R} \ni t$-re (ld. pl. Cramer-szabály) egyértelműen megoldható, a $g', h' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deriváltfüggvények pedig folytonosak. Így (ld. Newton–Leibniz-tétel) a szóban forgó g és h valóban létezik (és valós függvény). Ezért a (7) inhomogén egyenlet egy lehetséges (és mint később látni fogjuk az összes valós) megoldását a következő alakban kapjuk: tetszőleges $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ együtthatókkal

$$s(t) = (g(t) + c_1)\cdot \varphi_1(t) + (h(t) + c_2)\cdot \varphi_2(t) =$$
$$\begin{cases} (g(t) + c_1)\cdot e^{q_1 t} + (h(t) + c_2)\cdot e^{q_2 t} & (q_1 \neq q_2 \in \mathbf{R}) \\ (g(t) + c_1)\cdot e^{qt} + (h(t) + c_2)\cdot te^{qt} & (q := q_1 = q_2) \\ (g(t) + c_1)\cdot e^{ut}\cdot \cos(vt) + (h(t) + c_2)\cdot e^{ut}\cdot \sin(vt) & (q_1 \neq q_2 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}) \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Az

$$s(0) = s_0,\ s'(0) = s_0'$$

kezdeti feltételeknek megfelelő c_1, c_2 együtthatók kiszámítása

$$g(0) = h(0) = g'(0) + h'(0) = 0$$

miatt $q_1 \neq q_2$ esetén a

$$\begin{array}{ll} c_1 + c_2 & = 0 \\ q_1 c_1 + q_2 c_2 & = s_0' \end{array} \quad \text{vagy} \quad \begin{array}{ll} c_1 & = 0 \\ uc_1 + vc_2 & = s_0' - g'(0), \end{array}$$

ha pedig $q := q_1 = q_2$, akkor a

$$\begin{aligned} c_1 \quad &= s_0 \\ qc_1 + c_2 \quad &= s_0' - g'(0), \end{aligned}$$

egyenletrendszerből történhet.

7.2. Megjegyzések

i) Alakítsuk át a 7.1.3. pontban szereplő (7) egyenlőséget a következőképpen. Legyen először is

$$z := (s, s') : \mathcal{D}_s \to \mathbf{R}^2,$$

ill.

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha/m & \beta/m \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2},\ b := (0, F/m) : \mathcal{D}_s \to \mathbf{R}^2.$$

Ekkor $z \in D$, és

$$\begin{cases} z' = Az + b \\ \\ z(0) = (s_0, s_0'). \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy az így (ekvivalens módon) átalakított feladat ugyanolyan „szerkezetű", mint a 7.1.1. pontbeli (2), ill. a 7.1.2. pontban tárgyalt (6) egyenlet, csak a keresett z függvény nem valós értékű, hanem egyváltozós vektorfüggvény.

ii) Illusztrációképpen (a részletek mellőzésével) felsorolunk néhány olyan gyakorlati feladatot, amelynek a matematikai modellje a 7.1. pontban tárgyalt feladatokhoz hasonló „egyenletek" megoldására vezet.

1^o Forgásfelület alakú tükörről a forgástengellyel párhuzamosan érkező fénysugarak a visszaverődés után egy ponton mennek át. Metsszük el a szóban forgó felületet egy, a forgástengelyen áthaladó síkkal, és határozzuk meg a metszetgörbét.

2^o A vízszintessel α szöget $(0 < \alpha < \pi/2)$ bezáró sík felületre egy testet helyezünk, amely a nehézségi erő hatására lefelé csúszik. A mozgást a „szokásos" súrlódási erő (amely tehát egyenesen arányos a felületre merőleges nyomóerővel) és a lehelyezéshez képesti elmozdulással egyenesen arányos visszatérítő erő akadályozza. Modellezzük egy megfelelő kezdetiérték-problémával a test mozgását.

3^o Egy testet valamekkora kezdősebességgel elhajítunk, mégpedig a vízszintessel α szöget $(0 < \alpha < \pi/2)$ bezáró irányban. Tételezzük fel, hogy mozgás közben a testre a nehézségi erőn kívül a mindenkori sebességgel arányos fékező erő hat. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy (a kezdeti helyzethez képest) mikor lesz a test a legmagasabban és mekkora ez a magasság.

4^o Egy folyóban a víz állandó sebességgel áramlik. A folyó egyik partjáról egy kutya a másik parton vele szemközt álló gazdájához akar átúszni. A kutya vízben való úszási sebességének a nagysága állandó, úszás közben mindig a gazdája felé igyekszik. Írjuk le azt a „pályát", amit a kutya mozgás közben megtesz.

5^o Egy forgástest alakú, homogén anyageloszlású oszlop vízszintes fedőlapját valamekkora függőleges irányú erő terheli. Az oszlopot úgy akarjuk megtervezni, hogy a fedőlappal párhuzamos összes keresztmetszetben ugyanakkora nyomás keletkezzen. Adjuk meg a forgástest felületéből a forgástengelyen átmenő sík által kimetszett görbét.

6^o Tegyük fel, hogy egy áramkörben csak (sorba kapcsolt) ohmos és induktív ellenállás van (RL-kör). Az áramkört (időtől függő) feszültség alá helyezve a körben folyó áram erőssége is függ az időtől. Határozzuk meg az áramerősség-idő függvényt.

7.3. Speciális differenciálegyenletek

7.3.1. Szeparábilis differenciálegyenlet

A 7.1.1. pontban vizsgált feladat egy speciális szeparábilis differenciálegyenlet. Ez utóbbi meghatározásához tegyük fel, hogy I és J egyaránt egy-egy nyílt intervallum,

$$g : I \to \mathbf{R},\ h : J \to \mathbf{R}$$

pedig folytonos függvények. A h függvényről feltesszük továbbá azt is, hogy bármely $x \in \mathcal{D}_h$ helyen $h(x) \neq 0$. Tekintsük ezek után a következő feladatot: adjunk meg olyan $\varphi \in I \to J$ differenciálható függvényt, amelyre $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum, és

$$(*) \qquad \varphi'(t) = g(t)\cdot h(\varphi(t)) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ezt a feladatot *szeparábilis* (vagy más szóval *szétválasztható változójú*) *differenciálegyenletnek nevezzük.* (Gyakran csak magát a $(*)$ egyenlőséget hívják így.) Ha van ilyen φ függvény, akkor a szeparábilis differenciálegyenlet *megoldható.* Ekkor minden, a $(*)$-nak eleget tevő φ függvény a szóban forgó szeparábilis differenciálegyenlet (egy) *megoldása.*

Ha adottak a $\tau \in I, \xi \in J$ értékek, és a fenti φ függvénytől azt is megköveteljük, hogy

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi,\ \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor az így kiegészített feladatot *kezdetiérték-problémának* (az illető szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának) nevezzük.

7.3.1.1. Tétel. *Tetszőleges szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és bármilyen φ, ψ megoldásaira*

$$\varphi(t) = \psi(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. A tétel megfogalmazása előtti jelöléseket fogjuk használni. Mivel a h függvény sehol sem nulla, ezért (a φ-ről feltételezve, hogy megoldása a tételben szereplő szeparábilis differenciálegyenletnek) az előbbi $(*)$ egyenlőség így is írható:

$$(**) \qquad \frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum. A feltételeink szerint a $g : I \to \mathbf{R}$ és az $1/h : J \to \mathbf{R}$ nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvény, így léteznek olyan

$$G : I \to \mathbf{R},\ H : J \to \mathbf{R}$$

differenciálható függvények (primitív függvények), amelyekre $G' = g$ és $H' = 1/h$. Vegyük észre, hogy az összetett függvény deriválásával kapcsolatos tétel szerint $(**)$ a következőt jelenti:

$$(H \circ \varphi)'(t) = G'(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$(H \circ \varphi - G)'(t) = 0 \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha tehát a φ megoldása a szóban forgó szeparábilis differenciálegyenletnek, akkor van olyan $c \in \mathbf{R}$, hogy

$$H(\varphi(t)) - G(t) = c \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Az $1/h$ függvény nyilván nem vesz fel 0-t a J intervallum egyetlen pontjában sem, így ugyanez igaz a H' függvényre is. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonsága miatt tehát a H' állandó előjelű. Következésképpen a H szigorúan monoton függvény, amiért invertálható. A H^{-1} inverz függvény segítségével ezért azt kapjuk, hogy

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + c) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha $\tau \in I$, $\xi \in J$, és a φ megoldás eleget tesz a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdeti feltételnek is, akkor $\xi = H^{-1}(G(\tau) + c)$, azaz $H(\xi) = G(\tau) + c$, ill.

$$c = H(\xi) - G(\tau),$$

és így

$$\varphi(t) = H^{-1}\Big(G(t) + H(\xi) - G(\tau)\Big) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Jegyezzük meg, hogy ha a fentiekben G, H helyett más primitív függvényeket választunk (legyenek ezek $\widetilde{G}$, $\widetilde{H}$), akkor alkalmas $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ konstansokkal

$$\widetilde{G} = G + \alpha,\ \widetilde{H} = H + \beta,$$

és

$$\widetilde{H}(\varphi(t)) - \widetilde{G}(t) = H(\varphi(t)) - G(t) + \beta - \alpha = \tilde{c} \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

adódik valamilyen $\tilde{c} \in \mathbf{R}$ konstanssal. Ezért

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t) + \tilde{c} - \beta + \alpha) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol (a $t := \tau$ helyettesítés után)

$$H(\xi) - G(\tau) = \tilde{c} - \beta + \alpha,$$

amiből megint csak

$$\varphi(t) = H^{-1}\Big(G(t) + H(\xi) - G(\tau)\Big) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

következik. Ez azt jelenti, hogy a fentiekben mindegy, hogy melyik G, H primitív függvényekből indulunk ki. Más szóval, ha a ψ függvény is megoldása a vizsgált kezdetiérték-problémának, akkor

$$\psi(t) = H^{-1}\Big(G(t) + H(\xi) - G(\tau)\Big) \qquad (t \in \mathcal{D}_\psi).$$

Mivel a $\mathcal{D}_\varphi$, $\mathcal{D}_\psi$ értelmezési tartományok mindegyike egy-egy τ-t tartalmazó nyílt intervallum, ezért $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$ is ilyen intervallum, és

$$\psi(t) = \varphi(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Elegendő már csak azt belátnunk, hogy a tételben említett kezdetiérték-problémának van megoldása. Tekintsük ehhez azokat a G, H primitívfüggvényeket, amelyekre

$$H(\xi) = G(\tau) = 0,$$

és legyen

$$F(x, y) := H(y) - G(x) \qquad (x \in I,\ y \in J).$$

Ekkor az $F : I \times J \to \mathbf{R}$ függvényre léteznek és folytonosak a

$$\partial_1 F(x, y) = -G'(x) = -g(x),\ \partial_2 F(x, y) = H'(y) = \frac{1}{h(y)} \qquad (x \in I,\ y \in J)$$

parciális deriváltfüggvények. A 3.1.5. Tétel értelmében tehát az F függvény folytonosan differenciálható,

$$F(\tau, \xi) = H(\xi) - G(\tau) = 0,$$

továbbá

$$\partial_2 F(\tau,\xi) = H'(\xi) = \frac{1}{h(\xi)} \neq 0.$$

Ezért az F-re alkalmazható az implicitfüggvény-tétel (ld. 4.5.3.3. Tétel), miszerint alkalmas $K(\tau) \subset I$, $K(\xi) \subset J$ környezetekkel létezik az F által a (τ,ξ) körül meghatározott

$$\varphi : K(\tau) \to K(\xi)$$

folytonosan differenciálható implicitfüggvény, amelyre $\varphi(\tau) = \xi$, és

$$\varphi'(t) = -\frac{\partial_1 F(t,\varphi(t))}{\partial_2 F(t,\varphi(t))} = g(t)\cdot h(\varphi(t)) \qquad \big(t \in K(\tau)\big).$$

Röviden: a φ implicitfüggvény megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. ∎

7.3.2. Egzakt differenciálegyenlet

Az egzakt differenciálegyenletek értelmezéséhez legyenek ismét adottak az I, J nyílt intervallumok, és tekintsük a

$$g : I \times J \to \mathbf{R}\ ,\ h : I \times J \to \mathbf{R}$$

kétváltozós folytonos valós függvényeket. Tegyük fel továbbá, hogy a h függvény sehol sem vesz fel nullát, azaz $0 \notin \mathcal{R}_h$. Olyan differenciálható $\varphi \in I \to J$ függvényt (*megoldást*) keresünk, amelyre $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt részintervalluma az I-nek, és

$$(*) \qquad \varphi'(x) = -\frac{g(x,\varphi(x))}{h(x,\varphi(x))} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Azt mondjuk, hogy a most megfogalmazott feladat *egzakt differenciálegyenlet,* ha az

$$I \times J \ni (x,y) \mapsto \big(g(x,y), h(x,y)\big) \in \mathbf{R}^2$$

leképezésnek van primitív függvénye. Ez utóbbi követelmény azt jelenti, hogy egy alkalmas differenciálható $G : I \times J \to \mathbf{R}$ függvénnyel

$$\operatorname{grad} G = (\partial_1 G, \partial_2 G) = (g,h).$$

Ha $\tau \in I, \xi \in J$, és a fenti φ függvénytől azt is elvárjuk, hogy

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi\ ,\ \ \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor az így kibővített feladatot most is *kezdetiérték-problémának* (az illető egzakt differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának) nevezzük.

7.3.2.1. Tétel. *Bármilyen egzakt differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és van olyan* ψ *megoldása, amellyel minden* φ *megoldásra*

$$\varphi(t) = \psi(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Valóban, az egzakt egyenlet megfogalmazásakor használt jelölésekkel a $(*)$ egyenlőség $0 \notin \mathcal{R}_h$ miatt azzal ekvivalens, hogy

$$g(x,\varphi(x)) + h(x,\varphi(x))\cdot \varphi'(x) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha van ilyen φ függvény, akkor az

$$F(x) := G(x,\varphi(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyváltozós valós függvény differenciálható, és tetszőleges $x \in \mathcal{D}_\varphi$ helyen

$$F'(x) = \Big\langle \operatorname{grad} G(x,\varphi(x)), \Big(1,\varphi'(x)\Big)\Big\rangle =$$

$$g(x,\varphi(x)) + h(x,\varphi(x))\cdot \varphi'(x) = 0.$$

A $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum, ezért az F konstans függvény, azaz létezik olyan $c \in \mathbf{R}$, amellyel

$$G(x,\varphi(x)) = c \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Amennyiben a φ-től azt is megköveteljük, hogy adott $\tau \in I$, $\xi \in J$ mellett tegyen eleget a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdetiérték-feltételnek is, akkor

$$c = G(\tau,\xi)$$

következik. Mivel a G-ről feltehetjük, hogy $G(\tau,\xi) = 0$, ezért a szóban forgó kezdetiérték-probléma (feltételezett) φ megoldása eleget tesz a

$$(**) \qquad G(x,\varphi(x)) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenletnek.

Világos, hogy a $(**)$ egyenlőség szerint a fenti φ nem más, mint egy, a G által meghatározott implicitfüggvény. Más szóval a szóban forgó kezdetiérték-probléma minden megoldása (ha létezik) a fenti $(**)$ implicitfüggvény-egyenletből határozható meg. Ugyanakkor a feltételek alapján $G \in C^1$, $G(\tau,\xi) = 0$, továbbá

$$\partial_2 G(\tau,\xi) = h(\tau,\xi) \neq 0,$$

ezért a G-re (a (τ,ξ) helyen) teljesülnek az implicitfüggvény-tétel (ld. 4.5.3.3. Tétel) feltételei. Következésképpen van olyan differenciálható $\psi \in I \to J$ függvény, amelyre $\mathcal{D}_\psi \subset I$ nyílt intervallum, $\tau \in \mathcal{D}_\psi$, $G(x,\psi(x)) = 0$ $(x \in \mathcal{D}_\psi)$, $\psi(\tau) = \xi$, és

$$\psi'(x) = -\frac{\partial_1 G(x,\psi(x))}{\partial_2 G(x,\psi(x))} = -\frac{g(x,\psi(x))}{h(x,\psi(x))} \qquad (x \in \mathcal{D}_\psi).$$

A ψ függvény tehát megoldása a szóban forgó egzakt differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának. ∎

7.3.3. Lineáris differenciálegyenlet

A radioaktív bomlást leíró 7.1.2. feladat egy speciális lineáris differenciálegyenlet. Legyen ez utóbbi megfogalmazásához az $I \subset \mathbf{R}$ egy nyílt intervallum, a $g, h : I \to \mathbf{R}$ függvények pedig legyenek folytonosak, és tekintsük az alábbi feladatot: olyan differenciálható $\varphi \in I \to \mathbf{R}$ függvényt keresünk, amelyre $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum, és

$$(*) \qquad \varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ezt a feladatot (néha csak magát a $(*)$ egyenlőséget) *lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük. Minden ilyen φ függvény a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet *megoldása.*

Ha valamilyen $\tau \in I, \xi \in \mathbf{R}$ mellett a fenti φ függvényre azt is biztosítanunk kell, hogy

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \ \varphi(\tau) = \xi,$$

akkor az illető lineáris differenciálegyenletre vonatkozó *kezdetiérték-problémáról* beszélünk.

Tegyük fel, hogy a fenti lineáris differenciálegyenletnek a θ függvény is és a ψ függvény is megoldása, és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$. Ekkor

$$(\theta - \psi)'(t) = g(t) \cdot \Big(\theta(t) - \psi(t)\Big) \qquad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Vegyük észre, hogy a $\theta - \psi$ függvény megoldása annak a lineáris differenciálegyenletnek, amelyben $h \equiv 0$:

$$(**) \qquad \varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ez utóbbi feladatot *homogén lineáris differenciálegyenletnek* fogjuk nevezni. (Ennek megfelelően a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet *inhomogén,* ha a benne szereplő h függvény vesz fel 0-tól különböző értéket is.)

7.3.3.1. Tétel. *Minden lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldható, és tetszőleges* φ, ψ *megoldásaira*

$$\varphi(t) = \psi(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Bizonyítás. Az előbbi jelöléseket használva legyen a $G : I \to \mathbf{R}$ olyan függvény, amelyik differenciálható, és $G' = g$ (a g-re tett feltételek miatt ilyen G primitív függvény van). Ekkor a

$$\varphi_0(t) := e^{G(t)} \qquad (t \in I)$$

(csak pozitív értékeket felvevő) függvény megoldása az előbb említett homogén lineáris differenciálegyenletnek. Erről egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk:

$$\varphi_0'(t) = G'(t)\cdot e^{G(t)} = g(t)\cdot \varphi_0(t) \qquad (t \in I).$$

Tegyük fel most, hogy a $\chi \in I \to \mathbf{R}$ függvény megoldása a szóban forgó $(**)$ homogén lineáris differenciálegyenletnek:

$$\chi'(t) = g(t)\cdot \chi(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Ekkor a differenciálható

$$\frac{\chi}{\varphi_0} : \mathcal{D}_\chi \to \mathbf{R}$$

függvényre azt kapjuk, hogy bármelyik $t \in I$ helyen

$$\left(\frac{\chi}{\varphi_0}\right)'(t) = \frac{\chi'(t)\cdot \varphi_0(t) - \chi(t)\cdot \varphi_0'(t)}{\varphi_0^2(t)} = \frac{g(t)\cdot \chi(t)\cdot \varphi_0(t) - \chi(t)\cdot g(t)\cdot \varphi_0(t)}{\varphi_0^2(t)} = 0,$$

azaz (lévén a $\mathcal{D}_\chi$ nyílt intervallum) egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ számmal

$$\frac{\chi(t)}{\varphi_0(t)} = c \qquad (t \in \mathcal{D}_\chi).$$

Más szóval, az illető homogén lineáris differenciálegyenlet bármelyik $\chi \in I \to \mathbf{R}$ megoldása a következő alakú:

$$\chi(t) = c\varphi_0(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\chi),$$

ahol $c \in \mathbf{R}$. Nyilván minden ilyen χ függvény – könnyen ellenőrizhető módon – megoldása a mondott $(**)$ homogén lineáris differenciálegyenletnek. (Ezzel ezeknek a megoldását el is „intéztük", így a továbbiakban már elég csak az inhomogén egyenletekre szorítkoznunk.)

Ha tehát a fenti (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek a θ függvény is és a ψ függvény is megoldása, és $\mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$, akkor a tételünk megfogalmazása előtt mondottakat figyelembe véve egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ együtthatóval

$$\theta(t) - \psi(t) = c\varphi_0(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\theta \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Mutassuk meg, hogy van olyan differenciálható $m : I \to \mathbf{R}$ függvény, hogy az $m\cdot \varphi_0$ függvény megoldása a most vizsgált (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek (*az állandók variálásának a módszere*). Ehhez azt kell „biztosítani", hogy

$$(m\cdot \varphi_0)' = g\cdot m\cdot \varphi_0 + h,$$

azaz

$$m'\cdot \varphi_0 + m\cdot \varphi_0' = m'\cdot \varphi_0 + m\cdot g\cdot \varphi_0 = g\cdot m\cdot \varphi_0 + h.$$

Kézenfekvő átalakítás után innen szükséges feltételként az adódik az m-re, hogy

$$m' = \frac{h}{\varphi_0}.$$

Ilyen m függvény valóban létezik, mivel a $h/\varphi_0 : I \to \mathbf{R}$ folytonos leképezésnek van primitív függvénye. Továbbá – az előbbi rövid számolás „megfordításából" – azt is beláthatjuk, hogy a h/φ_0 függvény bármelyik m primitív függvényét véve az $m\cdot\varphi_0$ függvény megoldása a lineáris differenciálegyenletünknek.

Összefoglalva az eddigieket azt mondhatjuk, hogy a fenti lineáris differenciálegyenletnek van megoldása, és tetszőleges $\varphi \in I \to \mathbf{R}$ megoldása

$$\varphi(t) = m(t)\cdot\varphi_0(t) + c\cdot\varphi_0(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

alakú, ahol az m egy tetszőleges primitív függvénye a h/φ_0 függvénynek. Sőt, az is kiderül, hogy akármilyen $c \in \mathbf{R}$ és $J \subset I$ nyílt intervallum esetén a

$$\varphi(t) := m(t)\cdot\varphi_0(t) + c\cdot\varphi_0(t) \qquad (t \in J)$$

függvény megoldás. Ezt megint csak egy egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetjük:

$$\varphi'(t) = m'(t)\cdot\varphi_0(t) + \Big(c + m(t)\Big)\cdot\varphi_0'(t) =$$

$$\frac{h(t)}{\varphi_0(t)}\cdot\varphi_0(t) + \Big(c + m(t)\Big)\cdot g(t)\cdot\varphi_0(t) = g(t)\cdot\varphi(t) + h(t) \qquad (t \in J).$$

Megjegyezzük, hogy ha a fenti m helyett a h/φ_0 függvénynek egy másik, mondjuk $\tilde{m}$ primitív függvényét vesszük, akkor valamilyen $\alpha \in \mathbf{R}$ konstanssal $\tilde{m} = m + \alpha$, következésképpen

$$\varphi(t) = \tilde{m}(t)\cdot\varphi_0(t) + c\cdot\varphi_0(t) = m(t)\cdot\varphi_0(t) + (c+\alpha)\cdot\varphi_0(t) \qquad (t \in J).$$

Az előbbieket figyelembe véve ez azt jelenti, hogy a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet megoldásainak a fenti „előállítását" illetően mindegy, hogy a h/φ_0 függvény melyik primitív függvényét tekintjük.

Speciálisan az „egész" I intervallumon értelmezett

$$\psi_c := m(t)\cdot\varphi_0(t) + c\cdot\varphi_0(t) \qquad (c \in \mathbf{R},\, t \in I)$$

megoldások olyanok, hogy bármelyik φ megoldásra egy alkalmas $c \in \mathbf{R}$ mellett

$$\varphi(t) = \psi_c(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz a $J := \mathcal{D}_\varphi$ jelöléssel $\varphi = \psi_{c_{|J}}$.

Ha $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{R}$, és a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdetiérték-feladatot kell megoldanunk, akkor a

$$\xi = \varphi(\tau) = \psi_c(\tau) = m(\tau)\cdot \varphi_0(\tau) + c\cdot \varphi_0(\tau)$$

egyenlőségből a

$$c := \frac{\xi - m(\tau)\cdot \varphi_0(\tau)}{\varphi_0(\tau)}$$

választással a szóban forgó kezdetiérték-probléma $\psi_c : I \to \mathbf{R}$ megoldását kapjuk. Mivel a fentiek alapján ennek minden φ, ψ megoldására $\varphi = \psi_{c_{|\mathcal{D}_\varphi}}$ és $\psi = \psi_{c_{|\mathcal{D}_\psi}}$, ezért egyúttal az is teljesül, hogy $\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi)$. ■

7.4. Megjegyzések

i) A 7.3.1.1. Tétel bizonyítása szerint az abban szereplő kezdetiérték-probléma φ megoldásaira (az ottani jelölésekkel) a $H(\xi) = G(\tau) = 0$ esetben

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t)) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi).$$

ii) A 7.1.1. pontban említett „rakétás" feladat esetén (a feladat jelöléseivel) az

$$I := J := \mathbf{R},\ g(x) := -\alpha,\ h(y) := 1 + \frac{\beta y^2}{m\alpha} \qquad (x, y \in \mathbf{R})$$

választással egy szeparábilis differenciálegyenlethez jutunk. Legyen $\tau := 0$, $\xi := v_0$, ekkor a

$$G(x) := -\alpha x\ ,\ H(y) := \sqrt{\frac{m\alpha}{\beta}}\cdot \left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}}\cdot y - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}}\cdot v_0\right) \qquad (x, y \in \mathbf{R})$$

függvények eleget tesznek a 7.3.1.1. Tétel bizonyításában mondottaknak. Legyen U az a nyílt intervallum, amelynek az x pontjaira

$$\left|\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}}\cdot x + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}}\cdot v_0\right| < \frac{\pi}{2},$$

ekkor

$$H^{-1}(x) = \sqrt{\frac{m\alpha}{\beta}}\cdot \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}}\cdot x + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}}\cdot v_0\right) \qquad (x \in U).$$

Következésképpen

$$\varphi(x) = H^{-1}(-\alpha x) = \sqrt{\frac{m\alpha}{\beta}}\cdot \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta}{m\alpha}}\cdot v_0 - \sqrt{\frac{\beta\alpha}{m}}\cdot x\right) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

iii) Válasszuk a 7.3.1.1. Tétel bizonyításában a G-t és a H-t úgy, hogy $H(\xi) = G(\tau) = 0$. Ekkor $c = 0$, és (ld. i) megjegyzés)

$$\varphi(x) = H^{-1}(G(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Itt a H függvény szigorúan monoton, és a $\mathcal{D}_H = J$ értelmezési tartomány nyílt intervallum, ezért az $\mathcal{R}_H$ értékkészlet is nyílt intervallum. Így a $H^{-1} \circ G$ függvény értelmezési tartománya, azaz a

$$G^{-1}[\mathcal{D}_{H^{-1}} \cap \mathcal{R}_G] = G^{-1}[\mathcal{R}_H \cap \mathcal{R}_G] = G^{-1}[\mathcal{R}_H] \cap G^{-1}[\mathcal{R}_G] = G^{-1}[\mathcal{R}_H] \cap I$$

halmaz is nyílt. Mivel $G(\tau) = H(\xi) = 0$, ezért $\tau \in G^{-1}[\mathcal{R}_H \cap \mathcal{R}_G]$, tehát van olyan $\tilde{I} \subset G^{-1}[\mathcal{R}_H \cap \mathcal{R}_G]$ nyílt intervallum, amelyik tartalmazza a τ-t. Legyen $\mathcal{I}$ az ilyen intervallumok halmazrendszere, és

$$I^* := \bigcup_{\tilde{I} \in \mathcal{I}} \tilde{I}.$$

Ekkor I^* is egy τ-t tartalmazó nyílt intervallum, és $I^* \subset G^{-1}[\mathcal{R}_H \cap \mathcal{R}_G]$ (a „legbővebb" a fenti tulajdonságú $\tilde{I}$ intervallumok között). Értelmezzük a $\Phi : I^* \to \mathbf{R}$ függvényt a

$$\Phi(x) := H^{-1}(G(x)) \qquad (x \in I^*)$$

előírással. A h-ra tett feltételek miatt $H^{-1} \in D$, így $H^{-1} \circ G \in D$, ezért a Φ is differenciálható, és

$$\Phi'(x) = \left(H^{-1}\right)'\left(G(x)\right) \cdot G'(x) = \frac{g(x)}{H'\left(H^{-1}(G(x)\right)} =$$

$$h\left(H^{-1}(G(x))\right) \cdot g(x) = h(\Phi(x)) \cdot g(x) \qquad (x \in I^*).$$

Következésképpen a Φ függvény megoldása az illető szeparábilis differenciálegyenletnek. Sőt, a nyilvánvaló

$$\Phi(\tau) = H^{-1}(G(\tau)) = H^{-1}(0) = \xi$$

egyenlőséget is figyelembe véve a Φ megoldása a szóban forgó szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának is. Ez utóbbinak bármely φ megoldásáról a 7.3.1.1. Tétel bizonyítása alapján azt mondhatjuk, hogy

$$\mathcal{D}_\varphi \subset I^*, \ \varphi(x) = \Phi(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

röviden $\varphi = \Phi_{|\mathcal{D}_\varphi}$. Ezért a Φ függvényt a most vizsgált kezdetiérték-probléma *teljes megoldásának* nevezzük.

iv) Tekintsük a szeparábilis egyenlet definíciójában a $J := \mathbf{R}$ intervallumon értelmezett $h(x) := 1 \quad (x \in J)$ függvényt, akkor megoldásként olyan $\varphi \in I \to J$ függvényt keresünk, amelyik differenciálható a $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallumon, és

$$\varphi'(x) = g(x) \cdot h(\varphi(x)) = g(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Más szóval a $\mathcal{D}_\varphi = I$ speciális esetben a φ egy primitív függvénye a g-nek.

v) Az előbbi megjegyzés mintegy „ellenpontjaként" legyen a szeparábilis differenciálegyenlet definíciójában a g egy konstansfüggvény (azaz $I := \mathbf{R}$, és egy alkalmas $\mathbf{R} \ni c$-vel $g(x) = c \quad (x \in \mathbf{R})$). Az ennek megfelelő szeparábilis egyenletet *autonóm differenciálegyenletnek* nevezzük. (Ilyen pl. a 7.1.1. pontban megoldott rakétás példa.) Elemi számolással igazolható, hogy ekkor (a 7.3.1.1. Tétel bizonyításában használt jelölésekkel) $\mathcal{D}_{H^{-1} \circ G}$ egy τ-t tartalmazó nyílt intervallum. Továbbá az illető szeparábilis differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma teljes megoldása (ld. iii) megjegyzés) a $\Phi := H^{-1} \circ G$ függvény. Mivel $G(x) = c(x - \tau) \quad (x \in \mathbf{R})$, ezért

$$\Phi(x) = H^{-1}\Big(c(x - \tau)\Big) \qquad (x \in \mathcal{D}_{H^{-1} \circ G}).$$

Speciálisan, a $c := 0$ választással a

$$\Phi(x) = H^{-1}(0) = \xi \qquad (x \in \mathcal{D}_{H^{-1} \circ G} = \mathbf{R})$$

konstansfüggvényhez jutunk.

vi) A 7.3.1.1. Tétel bizonyításában (azaz a szeparábilis differenciálegyenletek megoldásában) szereplő H^{-1} inverzfüggvény explicit megadása a gyakorlatban többnyire komoly nehézségekbe ütközik. Gyakran azonban (ld. pl. a 7.1.1. rakétás feladatot) nem is a megoldásra, hanem olyan paraméterre vagyunk kíváncsiak (mint pl. az említett feladatban az emelkedési idő), amely a megoldás explicit ismerete nélkül is meghatározható.

vii) Esetenként „első ránézésre" nem tűnik fel, hogy egy szeparábilis differenciálegyenlettel van dolgunk egy feladat kapcsán. Keressünk pl. olyan, nyílt intervallumon értelmezett differenciálható $\varphi \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt, amelyre

$$\varphi'(x) = \varphi(x) - x \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha itt (egy pillanatra feltételezve, hogy van ilyen φ) bevezetjük a

$$\psi(x) := \varphi(x) - x \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

függvényt, akkor a

$$\psi'(x) = \psi(x) - 1 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

„egyenletet" kell megoldanunk. Világos, hogy (pl.) a

$$g(x) := 1,\ h(z) := z - 1 \qquad \Big(x \in I := \mathbf{R},\, z \in J := (1, +\infty)\Big)$$

választással egy, a ψ-re vonatkozó szeparábilis differenciálegyenlethez jutottunk. Mivel

$$\int \frac{dt}{t-1} = \ln(t-1) + c \qquad (c \in \mathbf{R},\, t > 1),$$

ezért a

$$G(x) := x,\ H(z) := \ln(z-1) \qquad (x \in \mathbf{R},\, z > 1)$$

függvényekkel a 7.3.1.1. Tétel bizonyítása szerint alkalmas $c \in \mathbf{R}$ konstanssal

$$H\Big(\psi(t)\Big) - G(t) = \ln\Big(\psi(t) - 1\Big) - t = c \qquad (t \in \mathcal{D}_\psi).$$

Innen

$$\psi(t) = e^{t+c} + 1 \qquad (t \in \mathcal{D}_\psi),$$

és így

$$\varphi(x) = e^{x+c} + x + 1 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha pl. a $\varphi(0) = 2$ kezdetiérték-problémát tűzzük ki, akkor

$$2 = \varphi(0) = e^c + 1 \Longrightarrow c = 0,$$

azaz

$$\varphi(x) = e^x + x + 1 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

viii) A 7.3.1.1. Tétel bizonyítása során egyúttal egy módszert („képletet") is adtunk a

$$\varphi'(t) = g(t) \cdot h(\varphi(t)) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

szeparábilis egyenletre vonatkozó $\varphi(\tau) = \xi$ kezdetiérték-probléma megoldására. Ennek a kulcsmozzanata a G, H primitív függvények meghatározása:

$$G(x) = \int_\tau^x g(t)\, dt,\ H(y) = \int_\xi^y \frac{dt}{h(t)} \qquad (x \in I,\, y \in J),$$

amiből aztán a φ-re vonatkozó

$$H\Big(\varphi(x)\Big) = \int_\xi^{\varphi(x)} \frac{dt}{h(t)} = G(x) = \int_\tau^x g(t)\, dt \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz az

$$\int_\xi^{\varphi(x)} \frac{dt}{h(t)} = \int_\tau^x g(t)\, dt \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

implicit egyenlet adódott. Ha a szóban forgó egyenletet a (szigorúan véve kifogásolható, de szemléletes)

$$\frac{d\varphi}{dt} = g(t)\cdot h(\varphi(t))$$

alakban írjuk, akkor az alábbi formalizmus honosodott meg:

$$\frac{d\varphi}{h(\varphi)} = g(t)dt,$$

amiből mindkét oldalt „integrálva" az

$$\int \frac{d\varphi}{h(\varphi)} = \int g(t)dt$$

formális egyenlőség adódik.

ix) A 7.3.2. pontbeli

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x,\varphi(x))}{h(x,\varphi(x))} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőséget (egzakt differenciálegyenletet) gyakran a következő (hasonlóan joggal kifogásolható, de szemléletes) formában írják fel:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{g(x,\varphi)}{h(x,\varphi)},$$

amiből „átrendezéssel"

$$g(x,\varphi)dx + h(x,\varphi)d\varphi = 0$$

adódik. (Ennek az egyenlőségnek a bal oldalát szokták *teljes differenciálnak* is nevezni.) Természetesen pusztán formai „manipulációról" van szó, de állapodjunk meg abban, hogy az előbbi szimbólum („egyenlet") ugyanazt fogja jelenteni, mint az egzakt egyenletet meghatározó egyenlőség. Így pl. az

$$(x^2 - \varphi)\, dx - x\, d\varphi = 0$$

egyenleten a fenti megállapodásunk szerint a

$$\varphi'(x) = -\frac{\varphi(x) - x^2}{x} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőséget értjük. Ha itt pl. $I := (0, +\infty)$, $J := \mathbf{R}$,

$$g(x,y) := y - x^2 \;\;,\;\; h(x,y) := x \qquad \big((x,y) \in I \times J\big),$$

akkor az így definiált g, h függvények differenciálhatók, $0 \notin \mathcal{R}_h$, és könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a szóban forgó

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x, \varphi(x))}{h(x, \varphi(x))} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlet egzakt, azaz a $(g, h) : I \times J \to \mathbf{R}^2$ leképezésnek van primitív függvénye. Ilyen ui. pl. a

$$G(x, y) := xy - \frac{x^3}{3} \qquad \big((x, y) \in I \times J\big)$$

függvény. Az egyenletünk megoldásait tehát az

$$x \cdot \varphi(x) - \frac{x^3}{3} = c \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőségből nyerjük alkalmas $\mathcal{R}_G \ni c$-vel. (Nem nehéz meggondolni, hogy a jelen esetben $\mathcal{R}_G = \mathbf{R}$, így bármely $c \in \mathbf{R}$ választható.) Ezért mondjuk a

$$\varphi(x) := \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)$$

függvény megoldása az egyenletünknek, amit egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetünk:

$$\varphi'(x) = \frac{2x}{3} - \frac{c}{x^2} = -\frac{\varphi(x) - x^2}{x} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big).$$

Ha valamilyen $\varphi(\tau) = \xi$ kezdeti feltételt is kitűzünk, akkor a feladat pontos megfogalmazása során a $\tau \in I$, $\xi \in J$ feltételre is ügyelnünk kell. A példaként most megoldott egzakt egyenlet mellett tekintsük pl. a $\varphi(-1) = 0$ kezdeti feltételt. Ekkor az előbbi I intervallum helyett legyen $I := (-\infty, 0)$, a fenti g, h függvényeket pedig értelmezzük ugyanazzal az előírással, de a $(0, +\infty) \times \mathbf{R}$ helyett a $(-\infty, 0) \times \mathbf{R}$ halmazon. Az előbbi számolás formális megismétlésével az új egzakt egyenlet

$$\varphi(x) := \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \qquad \big(x \in (-\infty, 0)\,,\ c \in \mathbf{R}\big)$$

megoldásait kapjuk. Ezek közül a kezdeti feltételnek is az tesz eleget, amelyre

$$\varphi(-1) = 1/3 - c = 0,$$

azaz, amikor $c = 1/3$. A kezdetiérték-probléma (egy) megoldása tehát a

$$\varphi(x) := \frac{x^3 + 1}{3x} \qquad \big(x \in (-\infty, 0)\big)$$

függvény.

x) Minden szeparábilis egyenlet (ld. 7.3.1.) egzakt is, ui. egyrészt (a 7.3.1. pontbeli jelölésekkel, ill. feltételekkel)

$$\varphi'(x) = g(x) \cdot h(\varphi(x)) = -\frac{g(x)}{1/h(\varphi(x))} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Másrészt bármilyen $\tau \in I$, $\xi \in J$ esetén a

$$G(x,y) := -\int_\tau^x g(t)\,dt + \int_\xi^y \frac{1}{h(t)}\,dt \qquad (x \in I,\ y \in J)$$

függvényre $G \in D$, és $\operatorname{grad} G = (-g, 1/h)$ igaz. Ezért (ld. 7.3.2.1. Tétel bizonyítása) a szóban forgó szeparábilis egyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldását a

$$G(x,\varphi(x)) = -\int_\tau^x g(t)\,dt + \int_\xi^{\varphi(x)} \frac{dt}{h(t)} = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenletből nyerjük, ami ugyanaz, mint a szeparábilis esetre vonatkozó implicit egyenlet (ld. vii) megjegyzés):

$$\int_\xi^{\varphi(x)} \frac{dt}{h(t)} = \int_\tau^x g(t)\,dt \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

xi) Az egzakt differenciálegyenlet definíciójában szereplő $\operatorname{grad} G = (g,h)$ feltételből (ld. 7.3.2. pont) a

$$\partial_1 G = g\ ,\ \partial_2 G = h$$

egyenlőségek következnek. Ha $g,\ h \in D$, akkor $G \in D^2$, így a Young-tétel (ld. 4.3.1. Tétel) miatt

$$\partial_{12} G = \partial_2 g = \partial_{21} G = \partial_1 h,$$

azaz ekkor a $\partial_2 g = \partial_1 h$ feltétel teljesülése szükséges az „egzaktsághoz". Sőt, a 4.5.7.7. Tétel értelmében elégséges is, és ekkor pl. (ld. 4.6. xxxii) megjegyzés) a $\tau \in I, \xi \in J$ kezdeti feltételekkel

$$G(x,y) = \int_\tau^x g(z,\xi)\,dz + \int_\xi^y h(\tau,\zeta)\,d\zeta \qquad (x \in I, y \in J).$$

xii) Ha $g,\ h \in D$, de a xi)-beli

$$\partial_2 g = \partial_1 h$$

feltétel nem teljesül, akkor esetenként alkalmas ekvivalens átalakításokkal a feladat „egzakt alakra hozható". Ezek közül az átalakítások közül az ún. *multiplikátor módszer* a következőt jelenti. Tegyük fel, hogy a $\mu : I \times J \to \mathbf{R}$ differenciálható függvény (pl.) minden helyen pozitív. Ekkor (ld. 7.3.2.) a

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x,\varphi(x))}{h(x,\varphi(x))} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőség nyilván ekvivalens a

$$\varphi'(x) = -\frac{g(x,\varphi(x))\cdot \mu(x,\varphi(x))}{h(x,\varphi(x))\cdot \mu(x,\varphi(x))} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőséggel, azaz a g, h függvények „kicserélhetők" a $g\cdot \mu$, $h\cdot \mu$ függvényekre. Ekkor az egzaktságnak a xi) megjegyzésben megfogalmazott szükséges feltételéhez a

$$\partial_2(g\cdot \mu) = g\cdot \partial_2\mu + \mu\cdot \partial_2 g = \partial_1(h\cdot \mu) = h\cdot \partial_1\mu + \mu\cdot \partial_1 h$$

egyenlőségeknek kell teljesülniük. Mindez valójában egy „parciális differenciálegyenlet" a μ-re nézve, amelynek a megoldása általában lényegesen bonyolultabb feladat, mint az eredeti. Számunkra elegendő viszont csupán egyetlen ilyen μ-t kiszámítani, ami gyakran könnyen vezet célhoz abban a speciális esetben, amikor a μ függvény valójában egyváltozós: alkalmas $m \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ differenciálható függvénnyel az alábbiak egyike valósul meg:

$$\mu(x,y) = \begin{cases} m(x) \\ \\ m(y) \\ \\ m(x*y) \end{cases} \qquad (x\,,\,y\,,\,x*y \in \mathcal{D}_m)$$

(ahol a $*$ szimbólum az összeadás, kivonás, szorzás vagy osztás valamelyikét jelöli). Tekintsük pl. (a ix) megjegyzésbeli formalizmussal) a

$$(3x + 6x\varphi + 3\varphi^2)\,dx + (2x^2 + 3x\varphi)\,d\varphi = 0$$

feladatot, amit „teljessé" téve legyen pl. $I := J := (0,+\infty)$, ill.

$$g(x,y) := 3x + 6xy + 3y^2,\ h(x,y) := 2x^2 + 3xy \qquad ((x,y) \in I \times J).$$

Ekkor g, $h \in D\,, 0 \notin \mathcal{R}_h$, de

$$\partial_2 g(x,y) = 6x + 6y \neq \partial_1 h(x,y) = 4x + 3y \qquad ((x,y) \in I \times J).$$

Úgy tűnik, hogy az egyenletünk nem egzakt, de pl. az

$$m(x) := x \qquad (x \in (0,+\infty))$$

függvény egy megfelelő *multiplikátor*. Valóban, a (formálisan x-szel való szorzás után adódó)

$$(3x^2 + 6x^2\varphi + 3x\varphi^2)\,dx + (2x^3 + 3x^2\varphi)\,d\varphi = 0$$

egyenlet már egzakt, és ekvivalens a kiindulásival. Ekkor tehát

$$\tilde{g}(x,y) := 3x^2 + 6x^2 y + 3xy^2,\ \tilde{h}(x,y) := 2x^3 + 3x^2 y \qquad ((x,y) \in I \times J),$$

és

$$\partial_2\tilde{g}(x,y) = 6x^2 + 6xy = \partial_1\tilde{h}(x,y),$$

a

$$G(x,y) := x^3 + 2x^3y + \frac{3x^2y^2}{2} \qquad ((x,y) \in I \times J)$$

függvényre pedig $G \in D$ és $\operatorname{grad} G = (\tilde{g}, \tilde{h})$ teljesül. A kiindulási egyenletünk φ megoldásait ezért az

$$x^3 + 2x^3\cdot\varphi(x) + \frac{3x^2\cdot\varphi^2(x)}{2} = c \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi,\ c \in \mathcal{R}_G)$$

egyenlőségből kapjuk. Oldjuk meg pl. a fenti egyenletre vonatkozó $\varphi(1) = 2$ kezdetiérték-problémát. Ekkor

$$c = 1 + 2\cdot\varphi(1) + \frac{3\cdot\varphi^2(1)}{2} = 11,$$

tehát egy megoldás a

$$3x^2\cdot\varphi^2(x) + 4x^3\cdot\varphi(x) + 2x^3 - 22 = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőségből számítható:

$$\varphi(x) = \frac{-2x^2 + \sqrt{4x^4 - 6x^3 + 66}}{3x} \qquad (0 < x < 2).$$

xiii) A 7.3.3.1. Tétel bizonyítása alapján a

$$\varphi'(t) = g(t)\cdot\varphi(t) + h(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-probléma megoldására „megoldóképletet" is felírhatunk. Legyen ui. (az említett tételbizonyítás jelöléseivel)

$$G(x) := \int_\tau^x g(t)\,dt \ , \ m(x) := \int_\tau^x \frac{h(t)}{\varphi_0(t)}\,dt \qquad (x \in I),$$

ekkor $\varphi_0(\tau) = e^{G(\tau)} = e^0 = 1$, $m(\tau) = 0$, és a szóban forgó kezdetiérték-probléma „teljes" megoldását jelentő

$$\psi(x) := m(x)\cdot\varphi_0(x) + c\cdot\varphi_0(x) \qquad (x \in I)$$

függvényben

$$c := \frac{\xi - m(\tau)\cdot\varphi_0(\tau)}{\varphi_0(\tau)} = \xi.$$

Következésképpen

$$\psi(x) = \Big(m(x)+\xi\Big)\cdot \varphi_0(x) = \left(\int_\tau^x \frac{h(t)}{\varphi_0(t)}\,dt+\xi\right)\cdot e^{\int_\tau^x g(t)\,dt} =$$

$$\left(\int_\tau^x h(t)\cdot e^{-\int_\tau^t g(y)\,dy}dt+\xi\right)\cdot e^{\int_\tau^x g(t)\,dt} \qquad (x\in I).$$

xiv) A 7.3.3.1. Tétel bizonyításából a következők is kiderültek: legyen

$$\mathcal{M} := \{\varphi : I\to \mathbf{R} : \varphi'(t) = g(t)\cdot \varphi(t)+h(t) \ \ (t\in I)\},$$

$$\mathcal{M}_h := \{\varphi : I\to \mathbf{R} : \varphi'(t) = g(t)\cdot \varphi(t) \ \ (t\in I)\}.$$

Ekkor

$$\mathcal{M}_h = \{c\cdot \varphi_0 : c\in \mathbf{R}\}$$

(azaz algebrai nyelven mondva $\mathcal{M}_h$ egy 1 dimenziós vektortér), és

$$\mathcal{M} = m\cdot \varphi_0 + \mathcal{M}_h := \{\varphi + m\cdot \varphi_0 : \varphi\in \mathcal{M}_h\}.$$

Itt $m\cdot \varphi_0$ helyébe bármelyik $\psi\in\mathcal{M}$ (ún. *partikuláris megoldás*) írható, így

$$\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h = \{\varphi+\psi : \varphi\in\mathcal{M}_h\}.$$

xv) Világos, hogy a vii) megjegyzésben vizsgált

$$\varphi'(x) = \varphi(x) - x \quad (x\in\mathcal{D}_\varphi) \ \ , \ \ \varphi(0)=2$$

egyenlet egy lineáris differenciálegyenlet. Valóban, a

$$g(x) := 1,\ h(x) := -x \qquad (x\in I := \mathbf{R})$$

választással a 7.3.3. pontbeli

$$\varphi'(t) = g(t)\cdot \varphi(t) + h(t) \qquad (t\in\mathcal{D}_\varphi)$$

feladathoz jutunk. Ekkor (ld. xiii) megjegyzés)

$$\varphi(x) = \left(\int_\tau^x h(t)\cdot e^{-\int_\tau^t g(y)\,dy}dt+\xi\right)\cdot e^{\int_\tau^x g(t)\,dt} =$$

$$\left(\int_0^x (-t)\cdot e^{-\int_0^t dy}dt+2\right)\cdot e^{\int_0^x dt} = \left(\int_0^x (-t)\cdot e^{-t}dt+2\right)\cdot e^x =$$

$$\Big(xe^{-x}+e^{-x}-1+2\Big)\cdot e^x = e^x+x+1 \qquad (x\in\mathbf{R}).$$

xvi) Bizonyos esetekben alkalmas helyettesítés révén egy adott probléma „átalakítható" lineáris differenciálegyenletté. Tekintsük pl. a következő feladatot: legyen $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, $g, h : I \to \mathbf{R}$ egy-egy folytonos függvény, $\alpha \in \mathbf{R}$, és adjunk meg olyan differenciálható $\varphi \in I \to (0, +\infty)$ függvényt, amelyre a $\mathcal{D}_\varphi$ értelmezési tartomány az I egy nyílt részintervalluma, és

$$\varphi'(x) = g(x)\cdot \varphi(x) + h(x)\cdot \Big(\varphi(x)\Big)^{\alpha} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ezt a feladatot *Bernoulli-féle differenciálegyenletnek* nevezzük. Minden olyan φ függvény, amelyik eleget tesz a most mondott feltételeknek, az illető Bernoulli-egyenlet *megoldása.* Mivel az $\alpha \in \{0, 1\}$ vagy a $h \equiv 0$ választással egy-egy lineáris differenciálegyenletet kapunk, ezért feltehetjük, hogy $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, és $\mathcal{R}_h \neq \{0\}$. Ekkor a fenti, a φ-re vonatkozó egyenlőség nyilván ekvivalens az $(1 - \alpha)\cdot \Big(\varphi(x)\Big)^{-\alpha}$-val való beszorzás után kapott

$$(1 - \alpha)\cdot \varphi'(x)\cdot \Big(\varphi(x)\Big)^{-\alpha} = (1 - \alpha)\cdot g(x)\cdot \Big(\varphi(x)\Big)^{1-\alpha} + (1 - \alpha)\cdot h(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőséggel. Ha tehát

$$\psi := \varphi^{1-\alpha} \;\;, \;\; \tilde{g} := (1 - \alpha)\cdot g, \; \tilde{h} := (1 - \alpha)\cdot h,$$

akkor $\varphi := \psi^{\frac{1}{1-\alpha}}$, és

$$\psi'(x) = \tilde{g}(x)\cdot \psi(x) + \tilde{h}(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\psi = \mathcal{D}_\varphi).$$

Más szóval a $\psi\,(> 0)$ függvény megoldása egy lineáris differenciálegyenletnek.

Oldjuk meg pl. a

$$\varphi'(x) + \varphi(x) = -\frac{1}{\varphi(x)} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenletet, amikor is $\alpha = -1$. A $\psi := \varphi^2$ „helyettesítés" után

$$\psi' + 2\psi = -2.$$

A xiii) megjegyzésbeli „megoldóképlet" szerint a

$$\tau \in \mathcal{D}_\varphi, \; \xi := \psi(\tau) = \varphi^2(\tau)$$

kezdeti feltételekkel

$$\psi(x) = \left(\xi - 2\cdot \int_\tau^x e^{2\cdot \int_\tau^t ds}\, dt\right)\cdot e^{-2\cdot \int_\tau^x dt} = \left(\xi - 2\cdot \int_\tau^x e^{2(t-\tau)}\, dt\right)\cdot e^{-2(x-\tau)} =$$

$$\Big(\xi - e^{2(x-\tau)} + 1\Big)\cdot e^{-2(x-\tau)} = (\xi + 1)\cdot e^{-2(x-\tau)} - 1 = \gamma e^{-2x} - 1 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

ahol $\gamma := (\xi + 1)\cdot e^{2\tau}$, és az $a := \ln\sqrt{\gamma}$ jelöléssel pl. $\mathcal{D}_\varphi := (-\infty, a)$. Következésképpen

$$\varphi(x) = \sqrt{\gamma e^{-2x} - 1} \qquad (x < a).$$

7.5. Közönséges differenciálegyenletek

7.5.1. A differenciálegyenlet fogalma

Ha azt a kérdést vetjük fel, hogy mi a közös az előző pontokban vizsgált feladatokban, akkor a következőket mondhatjuk: mindegyikben egy olyan „egyenletet" kellett megoldani, amelyben az „ismeretlen" egy differenciálható függvény; a szóban forgó egyenletben szerepelt a keresett függvény első deriváltja; mindegyik egyenlet „explicit" volt az említett deriváltfüggvényre nézve; a keresett függvénynek mindezeken túl bizonyos kezdeti feltételnek is eleget kellett tennie. Mindezek (a kissé „pongyolán", de szemléletesen megfogalmazott elvárások) „benne vannak" az alábbi, eléggé tág keretek között megfogalmazott értelmezésben.

Legyen $0 < n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbf{R}^n$ pedig egy nyílt és összefüggő halmaz (ld. 2. fejezet), röviden: $\mathbf{R}^n$-beli *tartomány* (ld. 4.5.7.) Tegyük fel, hogy az

$$f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$$

függvény folytonos, és tűzzük ki az alábbi feladat megoldását:

határozzunk meg olyan $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt, amelyre igazak a következő állítások:

i) $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum;

ii) $\varphi \in D$;

iii) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

A most megfogalmazott feladatot *explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek* (esetenként röviden *differenciálegyenletnek*) fogjuk nevezni, és a *d.e.* rövidítéssel idézni.

Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ elemek, akkor a fenti φ függvény i), ii) és iii) mellett tegyen eleget a

iv) $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$

kikötésnek is. Az így „kibővített" feladatot *kezdetiérték-problémának* (vagy röviden *Cauchy-feladatnak*) nevezzük, és a továbbiakban minderre a *k.é.p.* rövidítést fogjuk használni. Az i), ii), iii) feltételeknek (ill. az i), ii), iii), iv) feltételeknek) eleget tevő bármelyik φ függvényt a *d.e.* (ill. a *k.é.p.*) *megoldásának* nevezzük.

A fenti definícióban szereplő f függvény az illető differenciálegyenlet ún. *jobb oldala.* A korábban már többször említett $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^{n+1}$ azonosítás miatt valójában $I \times \Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$, így $f \in \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ egy $n+1$ változós vektorfüggvényként is felfogható.

Világos, hogy az előző pontokban szereplő (szeparábilis, egzakt, lineáris) differenciálegyenletek mindegyike egy-egy explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenlet, ill. a velük kapcsolatban megfogalmazott kezdeti feltételekkel együtt egy-egy kezdetiérték-probléma

(Cauchy-feladat). A szeparábilis esetben (ld. 7.3.1.) $n := 1$, továbbá az $I, J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumokkal és a

$$g : I \to \mathbf{R},\ h : J \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvényekkel

$$f(x,y) := g(x) \cdot h(y) \qquad \big((x,y) \in \Omega := I \times J\big).$$

Hasonlóan, az egzakt differenciálegyenleteket illetően (ld. 7.3.2.) is $n := 1$, és az $I, J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumok, valamint a

$$g : I \times J \to \mathbf{R},\ h : I \times J \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

folytonos függvények megadásával

$$f(x,y) := -\frac{g(x,y)}{h(x,y)} \qquad \big((x,y) \in \Omega := I \times J\big).$$

Ugyanígy a lineáris differenciálegyenletek esetén (ld. 7.3.3.) $n := 1$, és az $I \subset \mathbf{R}$ egy nyílt intervallum, valamint a $g, h : I \to \mathbf{R}$ folytonos függvények segítségével

$$f(x,y) := g(x) \cdot y + h(x) \qquad \big((x,y) \in \Omega := I \times \mathbf{R}\big).$$

Speciálisan, a Bernoulli-féle differenciálegyenlet (ld. 7.4. xvi) megjegyzés) a $g,\ h : I \to \mathbf{R}$ folytonos függvényekkel és az $\alpha \in \mathbf{R}$ paraméterrel az

$$f(x,y) := g(x) \cdot y + h(x) \cdot y^{\alpha} \qquad \big((x,y) \in \Omega := I \times (0, +\infty)\big)$$

választással adódik. A 7.1.3. (rezgések) feladata a 7.2. i) megjegyzés alapján az $n := 2$ esetbe „fér bele" az alábbiak szerint (a szóban forgó feladat jelöléseivel, ill. valamilyen $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallummal):

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha/m & \beta/m \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2},\ b := (0, F/m) : I \to \mathbf{R},$$

és

$$f(x,y) := Ay + b(x) \qquad \big((x,y) \in \Omega := I \times \mathbf{R}^2\big).$$

Ha a fenti *d.e.* jobb oldalának nevezett f függvény koordinátafüggvényeit a szokásos módon az $f_1, ..., f_n$, szimbólumokkal jelöljük: $f = (f_1, ..., f_n)$, akkor a feladatnak nevet adó

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_{\varphi})$$

egyenlőség részletesebben („koordinátás" alakban) kiírva a következőt jelenti:

$$\begin{aligned}\varphi_1'(x) &= f_1(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))\\ &\vdots\\ \varphi_n'(x) &= f_n(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).\end{aligned}$$

Ezért $n > 1$ esetén „differenciálegyenlet" helyett *differenciálegyenlet-rendszert* is szokás mondani. Ilyen pl. az előbbi, a rezgésekre vonatkozó feladat.

Ha egy differenciálegyenletnek (kezdetiérték-problémának) van megoldása, akkor a „megoldás" definíciója szerint egyúttal végtelen sok megoldása van. Valóban, ha a φ egy megoldás, akkor bármely $J \subset \mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum $(\tau \in J)$ esetén a

$$\psi(x) := \varphi(x) \qquad (x \in J)$$

függvény is nyilván megoldás. A következő példa azt mutatja, hogy két megoldás nem feltétlenül van olyan viszonyban, mint az előbbi φ és ψ, ti., hogy

$$\varphi(x) = \psi(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

Legyen ui. a *d.e.* jobb oldala az

$$f(x, y) := \sqrt{|y|} \qquad (x \in I := \mathbf{R},\ y \in \Omega := \mathbf{R})$$

függvény, és tekintsük a $\tau := \xi := 0$ választásnak megfelelő *k.é.p.*-t. A $\varphi \equiv 0$ függvény ennek triviális módon megoldása. De (amint arról egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk) a

$$\psi(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} & (x \geq 0) \\[2ex] -\dfrac{x^2}{4} & (x < 0) \end{cases}$$

függvény is megoldás. Az is nyilvánvaló, hogy $\varphi(x) \neq \psi(x) \quad (x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$.

Az előbbiekre is utalva vezessük be az alábbi definíciót: azt mondjuk, hogy a szóban forgó kezdetiérték-probléma *egyértelműen oldható meg*, ha tetszőleges φ, ψ megoldásai esetén

$$\varphi(x) = \psi(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi).$$

(Mivel $\tau \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$, ezért $\mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$ egy (τ-t tartalmazó) nyílt intervallum.) Legyen ekkor $\mathcal{M}$ a szóban forgó *k.é.p.* megoldásainak a halmaza, és

$$J := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_\varphi.$$

Világos, hogy a J egy τ-t tartalmazó nyílt intervallum, és $J \subset I$. Az egyértelmű megoldhatóság értelmezése miatt definiálhatjuk a $\Phi : J \to \Omega$,

$$\Phi(x) := \varphi(x) \qquad (\varphi \in \mathcal{M}\ ,\ x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

függvényt. Eléggé nyilvánvaló, hogy $\Phi(\tau) = \xi$, $\Phi \in D$, és

$$\Phi'(x) = f(x, \Phi(x)) \qquad (x \in J).$$

Ez azt jelenti, hogy $\Phi \in \mathcal{M}$, és (ld. a $\mathcal{D}_\Phi = J$ definícióját) bármelyik $\varphi \in \mathcal{M}$ esetén

$$\varphi(x) = \Phi(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

röviden: $\varphi = \Phi_{|\mathcal{D}_\varphi}$. A Φ függvényt a kezdetiérték-probléma *teljes megoldásának* nevezzük.

A fenti gondolatmenetet mintegy „megfordítva" nyilván az egyértelműség egy, az előbbivel ekvivalens meghatározásához jutunk. Nevezetesen, ha az illető kezdetiérték-problémának van olyan Φ megoldása, hogy a szóban forgó *k.é.p.* minden φ megoldására $\mathcal{D}_\varphi \subset \mathcal{D}_\Phi$, és az $x \in \mathcal{D}_\varphi$ helyeken $\varphi(x) = \Phi(x)$ (azaz $\varphi = \Phi_{|\mathcal{D}_\varphi}$), akkor az illető feladat egyértelműen oldható meg, és a Φ a teljes megoldása.

Ha egy kezdetiérték-problémát illetően csak annyit követelünk meg, hogy egy alkalmas Φ megoldásával minden φ megoldása esetén

$$\varphi(x) = \Phi(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\Phi)$$

teljesüljön, akkor a kezdetiérték-probléma *lokálisan egyértelműen* oldható meg. A fenti

$$f(x, y) := \sqrt{|y|} \qquad \left((x, y) \in \mathbf{R}^2\right)$$

függvény, mint jobb oldal által meghatározott differenciálegyenletre vonatkozó $\tau := \xi := 0$ *k.é.p.* az előbbiek szerint lokálisan sem egyértelműen oldható meg. Mutassuk meg viszont, hogy a

$$\tau := 0,\ 0 \neq \xi \in \mathbf{R}$$

választásnak megfelelő *k.é.p.* ugyan nem egyértelműen, de lokálisan egyértelműen megoldható. Legyen ui. $\xi > 0$ (a $\xi < 0$ eset analóg módon kezelhető), ekkor egyszerű számolással igazolható, hogy a

$$\varphi(x) := \begin{cases} \left(\frac{x}{2} + \sqrt{\xi}\right)^2 & (x \geq -2\sqrt{\xi}) \\ 0 & (x < -2\sqrt{\xi}) \end{cases},\ \psi(x) := \begin{cases} \left(\frac{x}{2} + \sqrt{\xi}\right)^2 & (x \geq -2\sqrt{\xi}) \\ -(\frac{x}{2} + \sqrt{\xi})^2 & (x < -2\sqrt{\xi}) \end{cases}$$

függvények megoldásai a szóban forgó feladatnak. Mivel

$$\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_\psi = \mathbf{R},\ \varphi(x) \neq \psi(x) \qquad \left(\mathbf{R} \ni x < -2\sqrt{\xi}\right),$$

ezért a nem egyértelműséget beláttuk.

A lokális egyértelműség igazolásához tegyük fel, hogy a $\varphi \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény megoldása a kezdetiérték-problémának, azaz a $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum, $0 \in \mathcal{D}_\varphi$, $\varphi \in D$, $\varphi(0) = \xi$, és

$$\varphi'(x) = \sqrt{|\varphi(x)|} \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Mivel $\varphi(0) = \xi > 0$, ezért van olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$\varphi(x) > 0 \qquad (|x| < \delta).$$

Következésképpen $|x| < \delta$ esetén

$$1 = \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}} = 2\left(\sqrt{\varphi}\right)'(x),$$

azaz $\left(\sqrt{\varphi}\right)'(x) = 1/2$. Innen a $\varphi(0) = \xi$ egyenlőség figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{2} + \sqrt{\xi}\right)^2 \qquad (|x| < \delta).$$

A

$$\Phi(x) := \left(\frac{x}{2} + \sqrt{\xi}\right)^2 \qquad (|x| < \delta)$$

választással tehát teljesül a lokális egyértelműség kritériuma.

Ezzel egyúttal azt is beláttuk, hogy a lokális egyértelműség kevesebbet kívánó követelmény, mint az egyértelműség. Ugyanakkor igaz az alábbi állítás:

7.5.1.1. Tétel. *Ha egy differenciálegyenletre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma lokálisan egyértelműen megoldható, akkor a szóban forgó differenciálegyenletre vonatkozó minden kezdetiérték-probléma egyértelműen oldható meg.*

Bizonyítás. A *k.é.p.* definíciójában szereplő jelölésekkel tekintsük a

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

„egyenletet", és indirekt módon tegyük fel, hogy valamilyen $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ esetén a $\varphi(\tau) = \xi$ egyenlőséggel megfogalmazott *k.é.p.* nem egyértelműen oldható meg. Ez azt jelenti, hogy van két olyan ψ, ω megoldása, hogy egy $a \in \mathcal{D}_\psi \cap \mathcal{D}_\omega$ helyen

$$\psi(a) \neq \omega(a).$$

Emlékeztetünk arra, hogy a $\mathcal{D}_\psi \cap \mathcal{D}_\omega$ egy nyílt intervallum, és $\tau \in \mathcal{D}_\psi \cap \mathcal{D}_\omega$. Nyilván feltehetjük, hogy pl. $\tau < a$ (a $\tau > a$ eset hasonlóan „kezelhető"). Legyen ekkor

$$c := \inf\{x \in (\tau, a) : \psi(x) \neq \omega(x)\}.$$

Könnyű meggondolni, hogy ekkor $d := \psi(c) = \omega(c)$, hiszen különben $\tau < c$, és a ψ, ω függvények folytonossága alapján egy $\tau < x < c$ helyen $\psi(x) \neq \omega(x)$ teljesülne. Ez nyilván ellentmondana a c definíciójának. Tekintsük most már a $\varphi(c) = d$ kezdetiérték-problémát. Ha $J \subset \mathcal{D}_\psi \cap \mathcal{D}_\omega$ olyan nyílt intervallum, amelyre $c \in J$, akkor a

$$\tilde{\psi}(x) := \psi(x),\ \tilde{\omega}(x) := \omega(x) \qquad (x \in J)$$

függvények nyilván megoldásai a most mondott kezdetiérték-problémának. Ugyanakkor a c definíciójára tekintettel tetszőleges $J \ni z > c$ esetén van olyan $t \in (c, z)$, amelyre

$$(*) \qquad \tilde{\psi}(t) \neq \tilde{\omega}(t).$$

Márpedig a tételünk feltétele miatt a $\varphi(c) = d$ *k.é.p.* lokálisan egyértelműen oldható meg, azaz valamilyen Φ megoldásával

$$\tilde{\psi}(x) = \Phi(x) = \tilde{\omega}(x) \qquad (x \in \mathcal{D} := \mathcal{D}_{\tilde{\psi}} \cap \mathcal{D}_{\tilde{\omega}} \cap \mathcal{D}_\Phi).$$

Az itt szereplő $\mathcal{D}$ egy c-t tartalmazó nyílt intervallum, ezért az előbbi z-ről feltehető, hogy $z \in \mathcal{D}$. Következésképpen a $(*)$-ban szereplő t-re is teljesülnie kellene annak, hogy $\tilde{\psi}(t) = \Phi(t) = \tilde{\omega}(t)$, ami nyilván ellentmond a $(*)$-nak. ∎

Az egyértelmű, ill. a lokálisan egyértelmű megoldhatóság definíciója értelmében a 7.3.1.1., 7.3.3.1. Tételekben azt láttuk be, hogy tetszőleges szeparábilis, ill. lineáris differenciálegyenletre vonatkozó *k.é.p.* egyértelműen oldható meg (és a bizonyítások során a teljes megoldásokat is előállítottuk). Hasonlóan, a 7.3.2.1. Tétel szerint minden egzakt differenciálegyenletre vonatkozó *k.é.p.* lokálisan egyértelműen, és így a 7.5.1.1. Tételre tekintettel egyértelműen oldható meg.

7.5.1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$ *nyílt intervallum,* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *tartomány, és az* $f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ *folytonos függvény, mint jobb oldal által meghatározott differenciálegyenletre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható. Ekkor minden* $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ *esetén a* $\varphi(\tau) = \xi$ *kezdetiérték-probléma* φ *teljes megoldása rendelkezik az alábbi tulajdonsággal: bármilyen kompakt* $Q \subset I \times \Omega$ *halmazhoz léteznek olyan* $u, v \in \mathcal{D}_\varphi$, $u < \tau < v$ *helyek, amelyekre* $(u, \varphi(u)), (v, \varphi(v)) \notin Q$.

A tételben szereplő tulajdonság alapján azt mondjuk, hogy a φ megoldás *határtól határig terjed.*

Bizonyítás. Indirekt úton induljunk ki abból, hogy valamilyen, a tételben jelzett *k.é.p.* teljes megoldására nem igaz a határtól határig terjedés. Jelöljük φ-vel ezt a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdeti feltételnek eleget tevő teljes megoldást. Ekkor van olyan $Q \subset I \times \Omega$ kompakt halmaz, hogy (pl.)

$$(x, \varphi(x)) \in Q \qquad (\tau < x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Mivel a Q korlátos halmaz, ezért

$$a := \sup \mathcal{D}_\varphi = \sup\{x \in \mathcal{D}_\varphi : x > \tau\} < +\infty.$$

Ha Q_1 a Q-beli pontok első koordinátái által alkotott halmaz, akkor a Q_1 is (mint valós számhalmaz) kompakt, és $\{x \in \mathcal{D}_\varphi : x > \tau\} \subset Q_1 \subset I$. Tehát $a \in Q_1$, így $a \in I$. A Weierstrass-tétel (ld. 2.4. Tétel) alapján létezik az

$$M := \max\{\|f(u, v)\|_\infty : (u, v) \in Q\}$$

maximum, ezért (ld. 4.4. viii) megjegyzés)

$$\|\varphi(t) - \varphi(x)\|_\infty \leq \sup\{\|\varphi'(z)\|_\infty : \tau < z \in \mathcal{D}_\varphi\} \cdot |t - x| =$$

$$\sup\{\|f(z, \varphi(z))\|_\infty : \tau < z \in \mathcal{D}_\varphi\} \cdot |t - x| \leq M \cdot |t - x| \qquad (\tau < t,\, x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Ha tehát $\tau < x_k \in \mathcal{D}_\varphi$ $(k \in \mathbf{N})$ és $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, akkor

$$\|\varphi(x_k) - \varphi(x_j)\|_\infty \leq M \cdot |x_k - x_j| \to 0 \qquad (k, j \to \infty)$$

miatt a $\varphi(x_k)$ $(k \in \mathbf{N})$ sorozat konvergens. Ezért létezik a

$$b := \lim_{x \to a-0} \varphi(x)$$

bal oldali (véges) határérték. Speciálisan $b = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k)$, így a Q-beli vektorokból álló $(x_k, \varphi(x_k))$ $(k \in \mathbf{N})$ sorozat is konvergens,

$$\lim_{k\to\infty} (x_k, \varphi(x_k)) = (a, b) \in Q.$$

Következésképpen $Q \subset I \times \Omega$ miatt $b \in \Omega$. A tétel feltételei szerint van olyan differenciálható $\psi \in I \to \Omega$ függvény, amelyik a szóban forgó differenciálegyenletre vonatkozó $\psi(a) = b$ kezdetiérték-probléma megoldása. A $\mathcal{D}_\psi \subset I$ értelmezési tartomány egy a-t tartalmazó nyílt intervallum. Legyen

$$\Phi(x) := \begin{cases} \varphi(x) & (x \in \mathcal{D}_\varphi) \\ \\ \psi(x) & (a \leq x \in \mathcal{D}_\psi). \end{cases}$$

Világos, hogy a $\mathcal{D}_\Phi$ értelmezési tartomány egy nyílt részintervalluma az I-nek, $\tau \in \mathcal{D}_\Phi$, és $\Phi(\tau) = \varphi(\tau) = \xi$. Továbbá a

$$\lim_{x\to a-0} \Phi(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = b = \Phi(a) = \psi(a) = \lim_{x\to a+0} \psi(x) = \lim_{x\to a+0} \Phi(x)$$

egyenlőségek alapján létezik a $\lim_{x\to a}\Phi(x)=\Phi(a)$ határérték, így $\Phi\in\mathcal{C}\{a\}$.

Mutassuk meg, hogy $\Phi\in D$, és

$$\Phi'(x)=f(x,\Phi(x)) \qquad (x\in\mathcal{D}_\Phi).$$

Ez $x\neq a$ esetén a Φ definíciója alapján nyilvánvaló. A $\Phi\in D\{a\}$ differenciálhatóság igazolásához legyenek az f, φ, ψ, Φ függvények koordinátafüggvényei rendre az f_i, φ_i, ψ_i, Φ_i $(i=1,...,n)$ (egyváltozós valós) függvények. Ekkor

$$\Phi_i'(x)=\begin{cases}\varphi_i'(x)=f_i(x,\varphi(x)) & (\mathcal{D}_\Phi\ni x<\tau)\\[2ex] \psi_i'(x)=f_i(x,\psi(x)) & (\tau<x\in\mathcal{D}_\Phi).\end{cases}$$

A 3.1.2. Tétel értelmében azt kell megmutatnunk, hogy léteznek a (véges)

$$\lim_{x\to a}\frac{\Phi_i(x)-\Phi_i(a)}{x-a} \qquad (i=1,...,n)$$

határértékek. Az ismert L'Hospital-tétel szerint (és az f_i-k, valamint a Φ_i-k folytonossága miatt) viszont

$$\lim_{x\to a-0}\frac{\Phi_i(x)-\Phi_i(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-0}\frac{\varphi_i(x)-\varphi_i(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-0}\varphi_i'(x)=$$

$$\lim_{x\to a-0}f_i(x,\varphi(x))=\lim_{x\to a}f_i(x,\Phi(x))=f_i(a,\Phi(a))=f_i(a,b),$$

és

$$\lim_{x\to a+0}\frac{\Phi_i(x)-\Phi_i(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+0}\frac{\psi_i(x)-\psi_i(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+0}\psi_i'(x)=$$

$$\lim_{x\to a+0}f_i(x,\psi(x))=\lim_{x\to a}f_i(x,\Phi(x))=f_i(a,\Phi(a))=f_i(a,b),$$

amiből $\Phi\in D\{a\}$, és a

$$\Phi'(a)=f(a,b)=f(a,\Phi(a))$$

egyenlőség már következik.

Mindezeket figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy a Φ függvény is megoldása a τ, ξ paraméterekkel megfogalmazott kiindulási kezdetiérték-problémának. Ugyanakkor a $\mathcal{D}_\Phi$ értelmezési tartomány bővebb halmaz, mint a teljes megoldás $\mathcal{D}_\varphi$ értelmezési tartománya, ami nyilván nem lehetséges. ■

7.5.2. Egzisztencia, unicitás

Az előzőekben definiáltuk a *d.e.* és a *k.é.p.* fogalmát, értelmeztük ezek megoldását, az egyértelműen, ill. a lokálisan egyértelműen való megoldhatóságot, az előbbivel kapcsolatban a teljes megoldást. Speciális esetekben meg is oldottunk a gyakorlat számára is fontos speciális kezdetiérték-problémákat, kimutattuk ezek egyértelmű megoldhatóságát, esetenként elő is állítva a teljes megoldást. Tisztáztuk a lokálisan egyértelmű és az egyértelmű megoldhatóság viszonyát. A továbbiakban megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett egy *k.é.p.* mindig megoldható (egzisztencia-tétel), sőt, mint kiderül, a tett feltételek teljesülése esetén egyértelműen (unicitás-tétel). Elöljáróban megjegyezzük, hogy az alábbiakban megfogalmazandó tételek (bár a gyakorlat számára is számos esetben jól használhatók, de) sokkal általánosabb állításoknak a speciális esetei. Ez utóbbiak tárgyalása meghaladná ennek a jegyzetnek a kereteit.

Induljunk ki tehát a 7.5.1. pontban megfogalmazott feladatból: legyen $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett az $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbf{R}^n$ egy tartomány, az $f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ függvény pedig legyen folytonos. Adott $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ esetén olyan differenciálható $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt keresünk, amelyre a $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum, $\varphi(\tau) = \xi$, és

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Az f függvényről feltesszük, hogy minden kompakt $\emptyset \neq Q \subset \Omega$ halmazhoz létezik olyan $L_Q \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L_Q \cdot \|y - z\|_\infty \qquad (t \in I,\ y,\ z \in Q).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény (a *d.e.* jobb oldala) eleget tesz a *Lipschitz-feltételnek.* Minden ilyen L_Q számot *Lipschitz-konstansként* fogunk emlegetni.

7.5.2.1. Tétel (Picard–Lindelöf). *Tegyük fel, hogy egy differenciálegyenlet jobb oldala eleget tesz a Lipschitz-feltételnek. Ekkor a szóban forgó differenciálegyenletre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma megoldható.*

Bizonyítás. A tétel megfogalmazása előtti jelölésekkel legyenek a valamilyen $\tau \in I$, $\xi \in \Omega$ paraméterekkel kitűzött *k.é.p.* esetén a δ_1, $\delta_2 > 0$ olyan számok, hogy

$$I_* := [\tau - \delta_1, \tau + \delta_2] \subset I,$$

és tekintsük az alábbi függvényhalmazt:

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \to \Omega : \psi \text{ folytonos}\}.$$

Az $\mathcal{F}$ halmaz (ld. 1.5.3. Tétel) a

$$\rho(\phi, \psi) := \max\{\|\phi(x) - \psi(x)\|_\infty : x \in I_*\} \qquad (\phi,\, \psi \in \mathcal{F})$$

távolságfüggvénnyel teljes metrikus tér. Ha $\mathcal{X}$ jelöli a $g : I_* \to \mathbf{R}^n$ függvények összességét, akkor definiáljuk a $T : \mathcal{F} \to \mathcal{X}$ leképezést a következőképpen (a $\psi \in \mathcal{F}$ függvény esetén a „szabványos" $T(\psi)$ szimbólum helyett $T\psi$-vel jelölve a T-nek a ψ helyen vett helyettesítési értékét):

$$T\psi(x) := \xi + \int_\tau^x f(t, \psi(t))\, dt \in \mathbf{R}^n \qquad (\psi \in \mathcal{F},\, x \in I_*).$$

Ha az f függvény koordinátafüggvényeit a „szokásos" $f_1, ..., f_n$ szimbólumokkal jelöljük, akkor a ψ, f függvények (és egyúttal az f_i-k) folytonossága miatt a

$$I_* \ni t \mapsto f_i(t, \psi(t)) \in \mathbf{R} \qquad (i = 1, ..., n)$$

függvények folytonosak. Következésképpen (minden $x \in I_*$ esetén) van értelme a

$$d_i := \int_\tau^x f_i(t, \psi(t))\, dt \qquad (i = 1, ..., n)$$

integráloknak, és így a

$$\xi + \int_\tau^x f(t, \psi(t))\, dt := (\xi_1 + d_1, ..., \xi_n + d_n)$$

„integrálvektornak". Továbbá az integrálfüggvények jól ismert tulajdonságai miatt a fenti $T\psi$ függvény folytonos, minden $x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)$ helyen differenciálható, és

$$(T\psi)'(x) = f(x, \psi(x)).$$

Belátjuk, hogy az I_* alkalmas megválasztásával minden $\psi \in \mathcal{F}$ függvényre $T\psi \in \mathcal{F}$, azaz $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$. Ehhez azt kell biztosítani, hogy

$$\xi + \int_\tau^x f(t, \psi(t))\, dt \in \Omega \qquad (x \in I_*)$$

teljesüljön. Válasszuk ehhez először is a $\mu > 0$ számot úgy, hogy a

$$K_\mu := \{y \in \mathbf{R}^n : \|y - \xi\|_\infty \le \mu\} \subset \Omega$$

tartalmazás fennálljon (ilyen μ az Ω nyíltsága miatt létezik), és legyen

$$M := \max\{|f(x, y)| : x \in I_*,\, y \in K_\mu\}$$

(ami meg az f folytonossága és a 2.4. Tétel miatt létezik). A jelzett $T\psi \in \mathcal{F}$ tartalmazás nyilván teljesül, ha

$$\max\left\{\left|\int_\tau^x f_i(t, \psi(t))\, dt\right| : i = 1, ..., n\right\} \le \mu \qquad (x \in I_*).$$

Módosítsuk most már az $\mathcal{F}$ definícióját úgy, hogy

$$\mathcal{F} := \{\psi : I_* \to K_\mu : \psi \text{ folytonos}\},$$

ekkor az előbbi maximum nyilván becsülhető $M\cdot\delta$-val, ahol

$$\delta := \max\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Így $M\cdot\delta \le \mu$ esetén a fenti $T\psi$ is $\mathcal{F}$-beli. (Ha a kiindulásul választott δ_1, δ_2-re $M\cdot\delta > \mu$, akkor írjunk a δ_1, δ_2 helyébe olyan „új" $0 < \tilde{\delta}_1$, $\tilde{\delta}_2$-t, hogy

$$[\tau - \tilde{\delta}_1, \tau + \tilde{\delta}_2] \subset [\tau - \delta_1, \tau + \delta_2],$$

és $M\cdot\max\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2\} \le \mu$ legyen. Az I_* helyett az $\tilde{I}_* := [\tau - \tilde{\delta}_1, \tau + \tilde{\delta}_2]$ intervallummal az „új" M az előzőnél legfeljebb kisebb lesz, így az $M\cdot\max\{\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2\} \le \mu$ becslés nem „romlik" el.)

Ezzel értelmeztünk egy $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ leképezést, amelyre tetszőleges ψ, $\phi \in \mathcal{F}$ mellett

$$\rho(T\psi, T\phi) = \max\{\|T\psi(x) - T\phi(x)\|_\infty : x \in I_*\} =$$

$$\max\left\{\max\left\{\left|\int_\tau^x (f_i(t, \psi(t)) - f_i(t, \phi(t))\, dt\right| : i = 1, ..., n\right\} : x \in I_*\right\} \le$$

$$\max\left\{\left|\int_\tau^x \max\{|f_i(t, \psi(t)) - f_i(t, \phi(t))| : i = 1, ..., n\}\, dt\right| : x \in I_*\right\} =$$

$$\max\left\{\left|\int_\tau^x \|f(t, \psi(t)) - f(t, \phi(t))\|_\infty\, dt\right| : x \in I_*\right\}.$$

A Lipschitz-feltétel miatt a $Q := K_\mu$ (nyilván kompakt) halmazhoz van olyan $L_Q \ge 0$ konstans, amellyel

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \le L_Q\cdot \|y - z\|_\infty \qquad (t \in I,\ y,\ z \in Q),$$

speciálisan

$$\|f(t, \psi(t)) - f(t, \phi(t))\|_\infty \le L_Q\cdot \|\psi(t) - \phi(t)\|_\infty \le L_Q\cdot \rho(\psi, \phi) \qquad (t \in I_*).$$

Ezért

$$\rho(T\psi, T\phi) \le L_Q\cdot \delta\cdot \rho(\psi, \phi).$$

Tehát a T leképezés $L_Q\cdot\max\{\delta_1, \delta_2\} < 1$ esetén kontrakció. Válasszuk így a δ_1, δ_2-t, (ezt – az „eddigi" I_*-ot legfeljebb újra szűkítve – megtehetjük), és alkalmazzuk a fixponttételt (ld. 1.5.2. Tétel), miszerint van olyan $\psi \in \mathcal{F}$, amelyre $T\psi = \psi$. Legyen

$$\varphi(x) := \psi(x) \qquad \Big(x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)\Big).$$

A T definíciója szerint

$$\varphi(x) = \xi + \int_\tau^x f(t, \varphi(t))\, dt \qquad \big(x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)\big).$$

Ez azt jelenti, hogy a φ függvény egy folytonos függvény integrálfüggvénye, ezért $\varphi \in D$, és

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \qquad \big(x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)\big).$$

Világos, hogy $\varphi(\tau) = \xi$, más szóval a φ megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának.

■

A továbbiakban kiderül, hogy a fenti Picard–Lindelöf-egzisztenciatételben szereplő Lipschitz-feltétel nem csupán a kezdetiérték-problémák megoldhatóságát, hanem azok egyértelmű megoldhatóságát is biztosítja. Ehhez fel fogjuk használni az alábbi, önmagában is érdekes állítást.

7.5.2.2. Lemma (Peano-egyenlőtlenség). *Legyen adott egy, a $J \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumon értelmezett $\omega : I \to [0, +\infty)$ folytonos függvény, és tegyük fel, hogy a $\tau \in I$ ponttal, és valamilyen A, $B \in [0, +\infty)$ együtthatókkal*

$$\omega(x) \leq A \cdot \left| \int_\tau^x \omega(t)\, dt \right| + B \qquad (x \in J).$$

Ekkor

$$\omega(x) \leq B \cdot e^{A \cdot |x - \tau|} \qquad (x \in J).$$

Speciálisan, a $B := 0$ esetben, amikor is

$$\omega(x) \leq A \cdot \left| \int_\tau^x \omega(t)\, dt \right| \qquad (x \in J)$$

azt kapjuk, hogy $\omega \equiv 0$.

Bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy

$$\omega(x) \leq B \cdot e^{A(x - \tau)} \qquad (\tau \leq x \in J).$$

(Az $I \ni x < \tau$ helyekre vonatkozó becslés analóg módon igazolható.) Mivel $A = 0$ esetén az állítás ugyanaz, mint a feltétel, ezért a továbbiakban már feltehetjük, hogy $A > 0$. Legyen

$$F(x) := \left(\int_\tau^x \omega(t)\, dt \right) \cdot e^{-A(x - \tau)} \qquad (\tau \leq x \in J).$$

Ekkor $F \in D$, és az ω-ra megfogalmazott feltételek miatt

$$F'(x) = \omega(x)\cdot e^{-A(x-\tau)} - A\cdot\left(\int_\tau^x \omega(t)\,dt\right)\cdot e^{-A(x-\tau)} \leq$$

$$B\cdot e^{-A(x-\tau)} = G'(x) \qquad (\tau \leq x \in J),$$

ahol

$$G(x) := -\frac{B}{A}\cdot e^{-A(x-\tau)} \qquad (x \in J).$$

Következésképpen

$$(F-G)'(x) \leq 0 \qquad (\tau \leq x \in J),$$

amiből az $F-G$ monoton csökkenése adódik. Így

$$F(\tau) - G(\tau) = \frac{B}{A} \geq F(x) - G(x) = \left(\int_\tau^x \omega(t)\,dt\right)\cdot e^{-A(x-\tau)} + \frac{B}{A}\cdot e^{-A(x-\tau)},$$

azaz

$$B\cdot e^{A(x-\tau)} \geq A\cdot\left(\int_\tau^x \omega(t)\,dt\right) + B \geq \omega(x) \qquad (\tau \leq x \in J).$$

■

A fenti lemma segítségével már könnyen be tudjuk látni az alábbi *unicitási tételt.*

7.5.2.3. Tétel (unicitás). *A 7.5.2.1. Tétel feltételei mellett az abban szereplő tetszőleges kezdetiérték-probléma egyértelműen oldható meg.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (a 7.5.2.1. Tétel bizonyításában használt jelölésekkel) a φ függvény megoldása a $\varphi(\tau) = \xi$ feltétel által előírt kezdetiérték-problémának. Tehát a $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallumon differenciálható φ-re

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

Mivel a

$$\mathcal{D}_\varphi \ni t \mapsto f(t, \varphi(t))$$

függvény folytonos, ezért $\varphi \in C^1$, és a Newton–Leibniz-formulából

$$\varphi(x) = \varphi(\tau) + \int_\tau^x \varphi'(t)\,dt = \xi + \int_\tau^x f(t, \varphi(t))\,dt \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

következik. Hasonlóan, ha a ψ is a szóban forgó *k.é.p.* megoldása, akkor

$$\psi(x) = \xi + \int_\tau^x f(t, \psi(t))\,dt \qquad (x \in \mathcal{D}_\psi),$$

és így (a τ-t tartalmazó) $J := \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$ nyílt intervallumon

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_\tau^x \Big(f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\Big)\, dt \qquad (x \in J).$$

Legyen a $J_0 \subset J$ olyan kompakt intervallum, amely a belsejében tartalmazza a τ-t. Ekkor az előbbiek alapján

$$\omega(x) := \|\varphi(x) - \psi(x)\|_\infty \le \left| \int_\tau^x \|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\|_\infty \, dt \right| \qquad (x \in J_0).$$

A 2.4. Tétel szerint a J_0 halmaz kompaktsága, és a φ, ψ függvények folytonossága miatt a

$$Q := \{\varphi(x),\, \psi(x) : x \in J_0\}$$

halmaz kompakt. Ezért egy alkalmas L_Q Lipschitz-konstanssal

$$\omega(x) \le L_Q \cdot \left| \int_\tau^x \|\varphi(t) - \psi(t)\|_\infty \, dt \right| = L_Q \cdot \left| \int_\tau^x \omega(t)\, dt \right| \qquad (x \in J_0).$$

Teljesülnek tehát a 7.5.2.2. Lemma feltételei az $A := L_Q$, $B := 0$ konstansokkal, így $\omega(x) = 0 \quad (x \in J_0)$. Tekintettel arra, hogy itt a J_0 tetszőleges kompakt részintervalluma volt a J-nek, egyúttal az is következik, hogy $\omega(x) = 0 \quad (x \in J)$. Ezért $\varphi(x) = \psi(x)$ $(x \in J)$, ami a *k.é.p.* egyértelmű megoldhatóságát jelenti. ∎

7.6. Megjegyzések

i) A *d.e.* 7.5.1. pontbeli definíciója értelmében $n = 1$ esetén az egyenlet jobb oldala egy folytonos $f : I \times \Omega \to \mathbf{R}$ függvény, ahol az $\Omega \subset \mathbf{R}$ halmaz egy tartomány. Az $\mathbf{R}$-beli tartományok pontosan az $\mathbf{R}$-beli nyílt intervallumok, így (lévén az $I \subset \mathbf{R}$ is egy nyílt intervallum) az $I \times \Omega \subset \mathbf{R}^2$ geometriailag egy nyílt téglalap a koordinátasíkon. Ha a $\varphi \in I \to \Omega$ függvény egy megoldása az f által meghatározott differenciálegyenletnek, akkor

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A $\varphi'(x)$ derivált (jelen esetben) a $\varphi \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény x-beli érintőjének az iránytangense, más szóval az

$$(1, \varphi'(x)) = (1, f(x, \varphi(x)) \in \mathbf{R}^2$$

vektor az $\mathbf{R}^2$-beli $\operatorname{graf}\varphi$ (függvény)görbe $(x, \varphi(x))$ pontbeli érintőjének (egy) irányvektora. Képzeljük el, hogy az $I \times \Omega$ téglalap minden $P \in I \times \Omega$ pontjában „megrajzoljuk" az $(1, f(P))$ vektort. Ekkor egy ún. *iránymezőt* kapunk. Ha tehát a *d.e.* megoldható, a φ függvény pedig egy megoldása, akkor a $\operatorname{graf}\varphi$ görbe minden $P \in \operatorname{graf}\varphi$ pontban az iránymezőhöz, azaz az $(1, f(P))$ vektorhoz „simul".

ii) Emlékeztetünk a függvény definíciójára, miszerint a függvény (mint speciális reláció) rendezett párok halmaza. Ezt figyelembe véve nem nehéz meggondolni, hogy a *k.é.p.* egyértelmű megoldhatóságának a definíciója a következőképpen is megadható: a szóban forgó *k.é.p.* egyértelműen oldható meg, ha az összes megoldásának az uniója is függvény. Az $n = 1$ esetben ez geometriailag az alábbiakat jelenti: ha a koordinátasíkon $\mathcal{A}$ jelenti egy *k.é.p.* összes megoldásának az egyesítésével előálló halmazt, akkor tetszőleges, az első koordinátatengelyre merőleges egyenes az $\mathcal{A}$ halmazt legfeljebb egy pontban metszi.

iii) A feladatgyűjteményekben az „oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket" címszó után általában csak az általunk adott definícióban szereplő

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőséget („egyenletet") (*k.é.p.* esetén ezt, és a $\varphi(\tau) = \xi$ előírást) szokták megadni.

iv) A *d.e.* definíciójában szereplő *explicit* szó arra utal, hogy a

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőség egyik oldalán egyedül a keresett φ függvény $\mathcal{D}_\varphi \ni x$-beli deriváltja áll. Ha a *d.e.* általunk adott meghatározásában az f jobb oldal helyett pl. egy

$$F : I \times \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

folytonos függvényből indulnánk ki, és a nyílt intervallumon értelmezett differenciálható $\varphi \in I \to \mathbf{R}^n$ függvénytől az

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenlőség teljesülését kívánnánk meg, akkor egy ún. *implicit elsőrendű közönséges differenciálegyenlethez* jutnánk. Legyen pl. $n := 1$, $I := \Omega := \mathbf{R}$, és

$$F(x, y, z) := x(z^2 - 1) - 2yz \qquad \Big((x, y, z) \in I \times \Omega \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3\Big).$$

Ekkor tehát olyan $\varphi : J \to \mathbf{R}$ differenciálható függvényt keresünk, amelyre $J \subset I$ nyílt intervallum, és

$$x \cdot \Big((\varphi'(x))^2 - 1\Big) - 2\varphi(x) \cdot \varphi'(x) = 0 \qquad (x \in J).$$

Ilyen φ pl. bármely $p \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ esetén a következő:

$$\varphi(x) := \frac{x^2}{2p} - \frac{p}{2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Az *elsőrendű* jelző a *d.e.* definíciójában azt mutatja, hogy a *d.e.* megoldásának csak az első deriváltjára tettünk előírást. Végül a differenciálegyenlet *közönséges,* mert benne egyváltozós függvényt keresünk, amelynek a „közönséges" deriváltját illetően fogalmaztunk meg elvárásokat, szemben pl. a *rezgő húr* problémájára vonatkozó matematikai modellel. Nevezetesen, amikor a két végén kifeszített homogén, rezgő húr alakjának a meghatározása a feladat. Feltesszük, hogy az $l(>0)$ hosszúságú húr transzverzális síkrezgést végez. Megfelelő koordináta-rendszert választva a húr alakját egy $u \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvény írja le. Ha $u \in D^2$, akkor (fizikai megfontolások alapján) egy q együtthatóval

$$\partial_{22}u = q \cdot \partial_{11}u,$$

ami egy (speciális) *parciális differenciálegyenlet.* Megadva a húr kezdeti alakját és a sebességét ($u(x,0)$-t, ill. $\partial_2 u(x,0)$-t $\quad (x \in [0,l])$), az u függvény meghatározható.

v) A Picard–Lindelöf-tétel (ld. 7.5.2.1. Tétel) bizonyítása szerint (az ottani jelölésekkel) a

$$T\phi(x) := \xi + \int_\tau^x f(t,\phi(t))\,dt \in \mathbf{R}^n \qquad \Big(\phi \in \mathcal{F},\, x \in [\tau-\delta_1, \tau+\delta_2]\Big)$$

definícióval értelmezett $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ kontrakció ψ fixpontját az I_* intervallum J-vel jelölt belsejére leszűkítve kapjuk a szóban forgó *k.é.p* (egy) φ megoldását:

$$\varphi(x) = \xi + \int_\tau^x f(t,\varphi(t))\,dt \qquad \Big(x \in (\tau-\delta_1, \tau+\delta_2)\Big).$$

A fixponttételben (ld. 1.5.2. Tétel) szereplő algoritmus szerint a

$$\psi_0(x) := \xi,\ \psi_{k+1}(x) := T\psi_k(x) =$$
$$\xi + \int_\tau^x f(t,\psi_k(t))\,dt \quad \Big(x \in [\tau-\delta_1, \tau+\delta_2],\, k \in \mathbf{N}\Big)$$

függvénysorozat a

$$\rho(\phi,\chi) := \max\{\|\phi(x)-\chi(x)\|_\infty : x \in [\tau-\delta_1, \tau+\delta_2]\} \qquad (\phi,\, \chi \in \mathcal{F})$$

metrika értelmében konvergál a ψ-hez:

$$\rho(\psi_k,\psi) = \max\{\|\psi_k(x)-\psi(x)\|_\infty : x \in [\tau-\delta_1, \tau+\delta_2]\} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Következésképpen tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$\max\{\|\psi_k(x)-\psi(x)\|_\infty : x \in [\tau-\delta_1, \tau+\delta_2]\} < \varepsilon \qquad (N < k \in \mathbf{N}).$$

Így

$$|\psi_{ki}(x) - \psi^{(i)}(x)| < \varepsilon \qquad \Big(N < k \in \mathbf{N},\, x \in [\tau-\delta_1, \tau+\delta_2],\, i = 1,...,n\Big)$$

(ahol a ψ_{ki}-k és a $\psi^{(i)}$-k rendre a ψ_k-k és a ψ koordinátafüggvényeit jelölik). Azt mondhatjuk tehát, hogy a (ψ_k) függvénysorozat egyenletesen konvergál a ψ-hez (ld. 1.4. iii) megjegyzés).

vi) Az v) megjegyzésbeli jelölésekkel a

$$\varphi_0(x) := \xi,\ \varphi_{k+1}(x) := \xi + \int_\tau^x f(t, \varphi_k(t))\, dt \qquad \Big(x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2),\ k \in \mathbf{N}\Big)$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál a *k.é.p.* egy φ megoldásához (*szukcesszív approximáció*). A 7.5.2.1., 7.5.2.3. Tételek bizonyításából az is kiderül, hogy a

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)),\ \varphi(\tau) = \xi$$

egyenlőségek teljesülése azzal ekvivalens, hogy

$$\varphi(x) = \xi + \int_\tau^x f(t, \varphi(t))\, dt \qquad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)),$$

azaz, hogy a φ eleget tesz egy ún. *integrálegyenletnek*. Ugyanez „koordinátás" alakban (a $\varphi = \big(\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(n)}\big)$, ill. az $f = (f_1, ..., f_n)$ koordinátafüggvényes jelöléssel)

$$\varphi^{(i)}(x) = \xi_i + \int_\tau^x f_i(t, \varphi(t))\, dt \qquad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2),\ i = 1, ..., n).$$

A fixponttétel hibabecslő formulája szerint az is igaz, hogy (továbbra is a 7.5.2.1. Tétel bizonyításának a jelöléseivel)

$$\left|\varphi_{ki}(x) - \varphi^{(i)}(x)\right| \le \frac{(L_Q\cdot \delta)^k}{1 - L_Q\cdot \delta}\cdot \left|\varphi_{0i}(x) - \varphi^{(i)}(x)\right| \le \frac{(L_Q\cdot \delta)^k}{1 - L_Q\cdot \delta}\cdot \left|\int_\tau^x f_i(t, \xi)\, dt\right| \le$$

$$\frac{M\cdot \delta}{1 - L_Q\cdot \delta}\cdot (L_Q\cdot \delta)^k \qquad (x \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2),\ i = 1, ..., n),$$

ahol $\delta := \max\{\delta_1, \delta_2\}$.

vii) Tekintsük pl. a

$$\varphi'(x) = \varphi(x) + x \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),\ \varphi(0) = 0$$

kezdetiérték-problémát (ami valójában egy lineáris differenciálegyenletre vonatkozó *k.é.p.*, így az alábbi számolás eredménye a 7.3.3. pont alapján is ellenőrizhető). Ekkor tehát az

$$f(x, y) := x + y \qquad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

függvény, mint jobb oldal által meghatározott differenciálegyenletről van szó, továbbá $\tau := \xi := 0$. Világos, hogy a 7.5.2. pontbeli Lipschitz-feltétel pl. az $L_Q := 1$ választással minden kompakt $\emptyset \ne Q \subset \Omega$ halmaz esetén teljesül. A $\mu := 1$, $M := 2$, $\delta_1 := \delta_2 := 1/2$ választással $\psi_0(x) = 0$, ill.

$$\psi_{k+1}(x) = \int_0^x (t + \psi_k(t))\, dt = \frac{x^2}{2} + \int_0^x \psi_k(t)\, dt \qquad (|x| < 1/2,\ k \in \mathbf{N}).$$

Ezért

$$\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} \quad , \quad \psi_2(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{t^2}{2}\, dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

$$\psi_3(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \qquad (|x| < 1/2).$$

Innen teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$\psi_k(x) = \sum_{j=2}^{k+1} \frac{x^j}{j!} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N},\ |x| < 1/2),$$

tehát minden $(-1/2, 1/2) \ni x$-re

$$\psi_k(x) \to \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} - x - 1 = e^x - x - 1 \qquad (k \to \infty).$$

Ezért az

$$(-1/2, 1/2) \ni x \mapsto e^x - x - 1$$

függvény megoldása a szóban forgó kezdetiérték-problémának. Egyszerű számolással meggyőződhetünk arról is, hogy a

$$\varphi(x) := e^x - x - 1 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvény a teljes megoldás.

viii) Legyen az előbbi v), ill. vi) megjegyzésben az $f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ jobb oldal olyan, hogy $\Omega := \mathbf{R}^n$, és (a 7.5.2.1. Tétel egyéb feltételein kívül) valamilyen α, β pozitív együtthatókkal

$$\|f(x,y)\|_\infty \leq \alpha \cdot \|y\|_\infty + \beta \qquad (x \in I,\ y \in \mathbf{R}^n).$$

Ekkor az f által meghatározott differenciálegyenletre vonatkozó bármelyik *k.é.p.* teljes megoldása az I-n van értelmezve. Világos ui., hogy ekkor az v) megjegyzésbeli (ψ_k) függvénysorozat tetszőleges olyan kompakt $I_* \subset I$ intervallumon értelmezhető, amelyik a belsejében tartalmazza a τ-t. Legyen tehát

$$\psi_0(x) := \xi,\ \psi_{k+1}(x) := \xi + \int_\tau^x f(t, \psi_k(t))\, dt \qquad (x \in I_*,\ k \in \mathbf{N}).$$

Belátjuk, hogy a $q := \|\xi\|_\infty + \beta \cdot |I_*|$ konstanssal

$$\|\psi_k(x)\|_\infty \leq q \cdot e^{\alpha \cdot |x-\tau|} \qquad (k \in \mathbf{N},\ x \in I_*).$$

Valóban, a $k = 0$-ra mindez $\psi_0 \equiv \xi$ miatt triviálisan igaz. Ha viszont valamilyen $k \in \mathbf{N}$ mellett fennáll, akkor

$$\|\psi_{k+1}(x)\|_\infty \le \|\xi\|_\infty + \left|\int_\tau^x \|f(t,\psi_k(t))\|_\infty \, dt\right| \le$$

$$\|\xi\|_\infty + \left|\int_\tau^x (\alpha\cdot \|\psi_k(t))\|_\infty + \beta) \, dt\right| \le$$

$$q + \alpha\cdot q\cdot \left|\int_\tau^x e^{\alpha\cdot|t-\tau|} \, dt\right| = q\cdot e^{\alpha\cdot|x-\tau|} \qquad (x \in I_*).$$

Tehát $k+1$ esetén is fennáll a szóban forgó becslés, így (ld. teljes indukció) minden természetes $k \in \mathbf{N}$ számra is. Ennek alapján azt mondhatjuk, hogy

$$\|\psi_k(x) - \xi\|_\infty \le \mu := \|\xi\|_\infty + \max\left\{q\cdot e^{\alpha\cdot|t-\tau|} : t \in I_*\right\} \qquad (x \in I_*),$$

más szóval (a 7.5.2.1. Tétel bizonyításában szereplő jelöléssel)

$$\psi_k : I_* \to K_\mu \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Tekintsük ezek után a 7.5.2.1. Tétel bizonyításában említett $L := L_{K_\mu} > 0$ Lipschitz-konstanst, és mutassuk meg, hogy

$$\|\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)\|_\infty \le \frac{M\cdot L^k}{(k+1)!}\cdot |x-\tau|^{k+1} \qquad (k \in \mathbf{N},\, x \in I_*).$$

Ha ui. itt $k = 0$, akkor

$$\psi_1(x) = \xi + \int_\tau^x f(t,\xi) \, dt \qquad (x \in I_*)$$

miatt

$$\|\psi_1(x) - \psi_0(x)\|_\infty = \max\left\{\left|\int_\tau^x f_i(t,\xi) \, dt\right| : i = 1, ..., n\right\} \le M\cdot |x-\tau| \qquad (x \in I_*).$$

Ez a bizonyítandó egyenlőtlenség $k = 0$-ra. Ha ez utóbbi valamilyen $k \in \mathbf{N}$ esetén igaz, akkor

$$\psi_{k+2}(x) - \psi_{k+1}(x) = \int_\tau^x \Big(f(t,\psi_{k+1}(t)) - f(t,\psi_k(t))\Big) \, dt$$

alapján

$$\|\psi_{k+2}(x) - \psi_{k+1}(x)\|_\infty \le \left|\int_\tau^x \|f(t,\psi_{k+1}(t)) - f(t,\psi_k(t))\|_\infty \, dt\right| \le$$

$$L\cdot \left|\int_\tau^x \|\psi_{k+1}(t) - \psi_k(t)\|_\infty \, dt\right| \le \frac{M\cdot L^{k+1}}{(k+1)!}\cdot \left|\int_\tau^x |t-\tau|^{k+1} \, dt\right| =$$

$$= \frac{M\cdot L^{k+1}}{(k+2)!}\cdot |x-\tau|^{k+2} \qquad (x \in I_*).$$

Ezzel a teljes indukcióra hivatkozva a jelzett egyenlőtlenséget beláttuk. Következésképpen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)\|_\infty \le M\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k}{(k+1)!}\cdot |x-\tau|^{k+1} \le$$

$$\frac{M}{L}\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L\cdot |I_*|)^{k+1}}{(k+1)!} < +\infty \qquad (x \in I_*).$$

Így a függvénysorok egyenletes konvergenciájára vonatkozó Weierstrass-kritériumot (ld. 6.1.1. Tétel) alkalmazva azt mondhatjuk, hogy a $\sum(\psi_{k+1} - \psi_k)$ függvénysor egyenletesen konvergens. Nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{k=0}^{s} (\psi_{k+1} - \psi_k) = \psi_{s+1} - \psi_0 \qquad (s \in \mathbf{N})$$

miatt egyúttal a (ψ_k) függvénysorozat is egyenletesen konvergens, legyen

$$\psi(x) := \lim_{k\to\infty} \psi_k(x) \qquad (x \in I_*)$$

a határfüggvénye. A 6.3.3. Tétel értelmében a ψ függvény folytonos. Ha

$$\Theta(x) := \xi + \int_\tau^x f(t,\psi(t))\,dt \qquad (x \in I_*),$$

akkor tetszőleges $x \in I_*$ helyen

$$\|\Theta(x) - \psi(x)\|_\infty \le \|\Theta(x) - \psi_{k+1}(x)\|_\infty + \|\psi_{k+1}(x) - \psi(x)\|_\infty \le$$

$$\left|\int_\tau^x \|f(t,\psi(t)) - f(t,\psi_k(t))\|_\infty\,dt\right| + \|\psi_{k+1}(x) - \psi(x)\|_\infty \le$$

$$L\cdot \left|\int_\tau^x \|\psi(t) - \psi_k(t)\|_\infty\,dt\right| + \|\psi_{k+1}(x) - \psi(x)\|_\infty \le$$

$$L\cdot |I_*|\cdot \max\{\|\psi(t) - \psi_k(t)\|_\infty : t \in I_*\} + \|\psi(x) - \psi_{k+1}(x)\|_\infty \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Azt kaptuk ezzel, hogy

$$\psi(x) = \Theta(x) = \xi + \int_\tau^x f(t,\psi(t))\,dt \qquad (x \in I_*).$$

A vi) megjegyzésben mondottak szerint tehát a

$$\varphi(x) := \psi(x) \qquad (x \in \operatorname{int} I_*)$$

függvény megoldása a kezdetiérték-problémának. Mivel az $I_* \subset I$ akármilyen kompakt intervallum lehetett, ezért az illető *k.é.p.* teljes megoldása az I-n van értelmezve.

ix) Tegyük fel, hogy a *d.e.* jobb oldalára (ld. 7.5.1.), tehát az $f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ függvényre a következők igazak: az $I \times \Omega$ halmaz konvex, azaz tetszőleges $u,\, v \in I \times \Omega$ esetén

$$[u, v] := \{u + t(v - u) : 0 \leq t \leq 1\} \subset I \times \Omega,$$

az f a második (vektor) változója szerint parciálisan deriválható (ld. 3.2. vii) megjegyzés), valamint

$$q := \sup\{\|\partial_{\mathbf{2}} f(x, y)\|_{(\infty)} : (x, y) \in I \times \Omega\} < +\infty.$$

Ekkor (ld. 4.4. viii) megjegyzés)

$$\|f(x, y) - f(x, z)\|_\infty \leq q \cdot \|y - z\|_\infty \qquad (x \in I,\ y,\ z \in \Omega).$$

Világos, hogy ekkor tetszőleges $\emptyset \neq Q \subset \Omega$ kompakt halmazra az $L_Q := q$ választással egy (Q-tól független) Lipschitz-konstanst kapunk (ld. 7.5.2.). Ezért azt mondjuk, hogy az f-re teljesül az *egyenletes Lipschitz-feltétel.*

x) Mutassuk meg, hogy az

$$f(x, y) := \sqrt{|y|} \qquad \big((x, y) \in \mathbf{R}^2\big)$$

függvény nem tesz eleget a Lipschitz-feltételnek. Ti. legyen $Q := [0, 1]$. Ha létezne ehhez a kompakt Q halmazhoz L_Q Lipschitz-konstans, akkor tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ és $y,\, z \in Q$ esetén

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |\sqrt{y} - \sqrt{z}| = \frac{|y - z|}{\sqrt{y} + \sqrt{z}} \leq L_Q \cdot |y - z|$$

teljesülne. Ha itt $y \neq z$, akkor

$$L_Q \geq \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{z}}.$$

Speciálisan a $0 < y < 1,\ z := 0$ választással

$$L_Q \geq \frac{1}{\sqrt{y}} \to +\infty \qquad (y \to 0),$$

azaz ilyen $L_Q \geq 0$ szám nem létezik.

xi) Tegyük fel, hogy $n = 1$, és a

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi),\ \varphi(\tau) = \xi$$

k.é.p. esetén van (a τ körül) hatványsorba fejthető megoldás. Létezik tehát olyan φ függvény, amelyre a fentieken túl egy alkalmas $0 < r \in \mathbf{R}$ szám és $\alpha_k \in \mathbf{R} \quad (k \in \mathbf{N})$ együtthatók mellett

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot (x-\tau)^k \qquad (|x-\tau| < r).$$

Ha a

$$(\tau - r, \tau + r) \ni x \mapsto f(x, \varphi(x))$$

függvény is (a τ körül) hatványsorba fejthető, akkor valamilyen $\beta_k \in \mathbf{R} \quad (k \in \mathbf{N})$ együtthatókkal és egy $0 < \tilde{r} \in \mathbf{R}$ számmal

$$f(x, \varphi(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cdot (x-\tau)^k \qquad (|x-\tau| < \tilde{r}).$$

Mivel

$$\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \alpha_{k+1} \cdot (x-\tau)^k \qquad (|x-\tau| < r),$$

ezért az $R := \min\{r, \tilde{r}\}$ jelöléssel

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \alpha_{k+1} \cdot (x-\tau)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cdot (x-\tau)^k \qquad (|x-\tau| < R).$$

Innen

$$(k+1) \cdot \alpha_{k+1} = \beta_k \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

amiből sok esetben az α_k-k meghatározhatók (*hatványsor-módszer*).

Oldjuk meg pl. ennek az eljárásnak a segítségével a

$$\varphi'(x) = 3x^2 \cdot \varphi(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi), \ \varphi(0) = 1$$

kezdetiérték-problémát. Ekkor tehát

$$f(x, y) := 3x^2 y \qquad \big((x, y) \in \mathbf{R}^2\big).$$

Ha (egyelőre csak feltételezve) a φ megoldásra létezik a

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot x^k \qquad (|x| < r)$$

hatványsorfejtés, akkor

$$1 = \varphi(0) = \alpha_0,$$

és

$$f(x,\varphi(x)) = 3x^2\cdot \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 3\alpha_k\cdot x^{k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} 3\alpha_{k-2}\cdot x^k \qquad (|x| < r).$$

Következésképpen

$$\beta_k := \begin{cases} 0 & (k = 0,\, 1) \\ \\ 3\alpha_{k-2} & (2 \le k \in \mathbf{N}). \end{cases}$$

Így

$$\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\cdot \alpha_{k+1}\cdot x^k = \sum_{k=2}^{\infty} 3\alpha_{k-2}\cdot x^k \qquad (|x-\tau| < r).$$

Ezért $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, és

$$(k+1)\cdot \alpha_{k+1} = 3\alpha_{k-2} \qquad (2 \le k \in \mathbf{N}).$$

Innen teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$\alpha_k = \begin{cases} 0 & (\text{a 3 nem osztója a } k\text{-nak}) \\ \\ (k/3)! & (\text{a 3 osztója a } k\text{-nak}) \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ez azt jelenti, hogy (az $r = +\infty$ választással)

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{3j}}{j!} = e^{x^3} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy ez a φ függvény megoldás (sőt, a teljes megoldása a feladatnak).

xii) A vi) megjegyzésbeli szukcesszív approximáció és az előző megjegyzésben említett hatványsor-módszer a kezdetiérték-problémák közelítő megoldására vonatkozó ún. *analitikus módszerek* közé tartoznak. A *diszkrét módszerek* legismertebb (és egyben az egyik legegyszerűbb) változata az *Euler-módszer*. Tekintsük ehhez $n = 1$ esetén a 7.5.2.1. Tétel feltételei mellett a

$$\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi) \quad , \quad \varphi(\tau) = \xi$$

kezdetiérték-problémát. Ha a φ egy megoldása, akkor alkalmas $h \neq 0$ *lépésköz*, valamint $N \in \mathbf{N}$ mellett legyen

$$x_i := \tau + ih,\ \varphi_i := \varphi(x_i) \qquad (i = 0, ..., N).$$

Ekkor (a differenciálhatóság definíciója alapján)

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \varphi'(x_i)\cdot h + \eta_i(h)\cdot h = \varphi_i + f(x_i,\varphi_i)\cdot h + \eta_i(h)\cdot h \qquad (i = 0, ..., N-1),$$

ahol az $\eta_i \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre $\lim_{x \to x_i} \eta_i(x) = 0$. Definiáljuk a φ_i egy y_i *közelítését* az alábbi séma szerint:

$$y_0 := \xi,\ y_{i+1} := y_i + f(x_i, y_i) \cdot h \qquad (i = 0, ..., N-1),$$

feltételezve, hogy $(x_i, y_i) \in \mathcal{D}_f$ $(i = 0, ..., N)$. A 7.5.2.1. Tétel bizonyításában bevezetett jelölésekkel ez teljesül, ha $M \cdot \max\{\delta_1, \delta_2\} \leq \mu$, és $x := X_N \in (\tau - \delta_1, \tau + \delta_2)$. Ui. (teljes indukcióval)

$$|y_i - \xi| \leq Mi \cdot |h| \leq M \cdot |x - \tau| \leq M \cdot \max\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Legyen

$$\Delta_i := \varphi_i - y_i \qquad (i = 0, ..., N),$$

ekkor

$$\Delta_{i+1} = \varphi_{i+1} - y_{i+1} = \varphi_{i+1} - y_i - f(x_i, y_i) \cdot h =$$
$$\varphi_{i+1} - \varphi_i + \Delta_i - f(x_i, y_i) \cdot h = \Delta_i + \eta_i(h) \cdot h \qquad (i = 0, ..., N-1),$$

ahol egy $z_i \in (x_i, x_{i+1})$ (vagy $z_i \in (x_{i+1}, x_i)$) mellett

$$\eta_i(h) = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i - \varphi'(x_i) \cdot h}{h} = \varphi'(z_i) - \varphi'(x_i).$$

Ha itt $\varphi \in D^2$ (ez a helyzet pl. akkor, ha $f \in D$), akkor van olyan $u_i \in (x_i, z_i)$ (vagy $u_i \in (z_i, x_i)$), amellyel

$$|\varphi'(z_i) - \varphi'(x_i)| = |\varphi''(u_i)| \cdot |z_i - x_i|.$$

Tegyük fel, hogy

$$q := \sup\{|\varphi''(t)| : \tau \leq t \leq x\} < +\infty,$$

amikor is

$$|\varphi'(z_i) - \varphi'(x_i)| \leq q \cdot |h| \qquad (i = 0, ..., N-1).$$

Így

$$|\Delta_{i+1}| \leq |\Delta_i| + qh^2 \qquad (i = 0, ..., N-1),$$

amiből $\Delta_0 = 0$ alapján az $x := x_N$ jelöléssel

$$\Delta_N \leq Nqh^2 = \frac{q \cdot |x - \tau|^2}{N}$$

következik. Innen már világos, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $M \in \mathbf{N}$, amellyel

$$|y_N - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad (M < N \in \mathbf{N}),$$

röviden: az Euler-módszer *konvergens.*

xiii) Nem nehéz meggondolni, hogy az eddig mondottak érvényben maradnak akkor is, ha (a *d.e.*, ill. a *k.é.p.* definíciójától kezdve) $\mathbf{R}^n$ helyett mindenütt $\mathbf{C}^n$-et (vagy egybefoglalva a két esetet $\mathbf{K}^n$-et) írunk.

7.7. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Tegyük fel, hogy valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ természetes szám és egy nyílt $I \subset \mathbf{R}$ intervallum esetén adottak a folytonos

$$a_{ik} : I \to \mathbf{R} \quad (i, k = 1, ..., n),\ b = (b_1, ..., b_n) : I \to \mathbf{R}^n$$

függvények, és tekintsük az

$$I \ni x \mapsto A(x) := \Big(a_{ik}(x)\Big)_{i,k=1}^{n} \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

mátrixfüggvényt. Ha

$$f(x, y) := A(x)\cdot y + b(x) \qquad \Big((x, y) \in I \times \mathbf{K}^n\Big),$$

akkor az f függvény, mint jobb oldal (ld. 7.5.1. pont, ill. 7.6. xiii) megjegyzés) által meghatározott

$$\varphi'(x) = A(x)\cdot \varphi(x) + b(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

differenciálegyenletet *lineáris differenciálegyenletnek* ($n > 1$ esetén *lineáris differenciál-egyenlet-rendszernek*) nevezzük. Ekkor tehát az $x \in \mathcal{D}_\varphi$ helyeken a koordinátafüggvényeivel felírt $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n) \in I \to \mathbf{K}^n$ megoldásra

$$\varphi_1'(x) = \textstyle\sum_{k=1}^n a_{1k}(x)\cdot \varphi_k(x) + b_1(x)$$

$$\varphi_2'(x) = \textstyle\sum_{k=1}^n a_{2k}(x)\cdot \varphi_k(x) + b_2(x)$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n'(x) = \textstyle\sum_{k=1}^n a_{nk}(x)\cdot \varphi_k(x) + b_n(x).$$

Világos, hogy az $n = 1$ esetben „visszakapjuk" a 7.3.3. pontban szereplő lineáris differenciálegyenletet.

Legyenek a fentieken túl adottak még a $\tau \in I$, $\xi \in \mathbf{C}^n$ értékek, és vizsgáljuk a $\varphi(\tau) = \xi$ kezdetiérték-problémát. Ha $I_* \subset I$ a τ-t a belsejében tartalmazó kompakt intervallum, akkor (ld. 2.4. Tétel)

$$\sup\{|a_{ik}(x)| : x \in I_*\} < +\infty \qquad (i,\ k = 1, ..., n),$$

ezért

$$q := \sup\{\|A(x)\|_{(\infty)} : x \in I_*\} < +\infty.$$

Következésképpen

$$\|f(x, y) - f(x, z)\|_\infty = \|A(x)\cdot (y - z)\|_\infty \leq$$

$$= \|A(x)\|_{(\infty)} \cdot \|y-z\|_\infty \leq q \cdot \|y-z\|_\infty \qquad (x \in I_*,\, y,\, z \in \mathbf{K}^n).$$

Ez azt jelenti, hogy ha az előbbiekben az I-t „kicseréljük" az I_* intervallum J belsejére, az f-et pedig leszűkítjük a $J \times \mathbf{K}^n$ halmazra, akkor teljesül a Lipschitz-feltétel (ld. 7.5.2.). Továbbá (ld. 7.5.2.1., 7.5.2.3. Tételek) az így kapott $\varphi(\tau) = \xi$ kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható. Mivel (ld. 2.4. Tétel) a

$$\beta := \sup\{\|b(x)\|_\infty : x \in I_*\} \; (< +\infty)$$

jelöléssel

$$\|f(x,y)\|_\infty = \|A(x) \cdot y + b(x)\|_\infty \leq \|A(x) \cdot y\|_\infty + \|b(x)\|_\infty \leq$$

$$\|A(x)\|_{(\infty)} \cdot \|y\|_\infty + \|b(x)\|_\infty \leq q \cdot \|y\|_\infty + \beta \qquad (x \in I_*,\, y \in \mathbf{K}^n),$$

ezért (ld. 7.6. viii) megjegyzés) az előbb említett *k.é.p.* teljes megoldása a J intervallumon van értelmezve. Legyen ez a megoldás a φ_J függvény, és definiáljuk a $\varphi : I \to \mathbf{K}^n$ leképezést az alábbiak szerint:

$$\varphi(x) := \varphi_J(x) \qquad (x \in I),$$

ahol a J egy olyan kompakt $I_* \subset I$ intervallum belseje, amelyre $x \in J$. Az eddigiek alapján nyilvánvaló, hogy $\varphi \in D$,

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \qquad (x \in I) \;\;,\;\; \varphi(\tau) = \xi,$$

és az „eredeti" lineáris differenciálegyenletre (-rendszerre) vonatkozó *k.é.p.* bármilyen ψ megoldására $\psi = \varphi_{|\mathcal{D}_\psi}$ teljesül. Röviden szólva tehát az „eredeti" *k.é.p.* egyértelműen megoldható, a teljes megoldása pedig az I intervallumon van értelmezve.

Azt mondjuk, hogy a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet *homogén,* ha $b \equiv 0$. Ekkor tehát a

$$\varphi'(x) = A(x) \cdot \varphi(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

differenciálegyenletről van szó, vagy „koordinátás" alakban a

$$\varphi_1'(x) = \textstyle\sum_{k=1}^n a_{1k}(x) \cdot \varphi_k(x)$$

$$\varphi_2'(x) = \textstyle\sum_{k=1}^n a_{2k}(x) \cdot \varphi_k(x)$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n'(x) = \textstyle\sum_{k=1}^n a_{nk}(x) \cdot \varphi_k(x).$$

differenciálegyenlet-rendszerről. Értelemszerűen az illető lineáris differenciálegyenlet *inhomogén,* ha valamilyen $x \in I$ helyen $b(x) \neq 0 \; (\in \mathbf{K}^n)$. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\mathcal{M}_h := \{\psi : I \to \mathbf{K}^n : \psi \in D,\, \psi' = A \cdot \psi\},$$

$$\mathcal{M} := \{\psi : I \to \mathbf{K}^n : \psi \in D,\ \psi' = A\cdot \psi + b\}.$$

A lineáris differenciálegyenletek „alaptétele" a következő

7.7.1. Tétel. *A 7.7. pont bevezetésében mondott feltételek mellett*

1^o *az* $\mathcal{M}_h$ *halmaz* n *dimenziós lineáris tér a* $\mathbf{K}$*-ra vonatkozóan;*

2^o *tetszőleges* $\psi \in \mathcal{M}$ *esetén*

$$\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h := \{\psi + \chi : \chi \in \mathcal{M}_h\};$$

3^o *ha a* $\phi_k = (\phi_{k1}, ..., \phi_{kn})$ $(k = 1, ..., n)$ *függvények bázist alkotnak az* $\mathcal{M}_h$*-ban, akkor léteznek olyan* $g_k : I \to \mathbf{K}$ $(k = 1, ..., n)$ *differenciálható függvények, amelyekkel*

$$\psi := \sum_{k=1}^{n} g_k\cdot \phi_k \in \mathcal{M}.$$

Bizonyítás. Az 1^o állítás bizonyításához mutassuk meg először is azt, hogy bármilyen ψ, $\varphi \in \mathcal{M}_h$ és $c \in \mathbf{K}$ esetén $\psi + c\cdot \varphi \in \mathcal{M}_h$. Valóban, az elemi deriválási szabályok miatt

$$(\psi + c\cdot \varphi)' = \psi' + c\cdot \varphi' = A\cdot \psi + c\cdot A\cdot \varphi = A\cdot (\psi + c\cdot \varphi),$$

amiből a mondott állítás az $\mathcal{M}_h$ definíciója alapján nyilvánvaló. Tehát az $\mathcal{M}_h$ lineáris tér a $\mathbf{K}$ felett.

Most megmutatjuk, hogy ha $m \in \mathbf{N}$, és (a tétel jelöléseivel) $\chi_1, ..., \chi_m \in \mathcal{M}_h$ tetszőleges függvények, akkor az alábbi ekvivalencia igaz: a $\chi_1, ..., \chi_m$ függvények akkor és csak akkor alkotnak lineárisan független rendszert az $\mathcal{M}_h$ vektortérben, ha bármilyen $\tau \in I$ esetén a $\chi_1(\tau)..., \chi_m(\tau)$ vektorok lineárisan függetlenek a $\mathbf{K}^n$-ben. Az ekvivalencia „egyik fele" meglehetősen nyilvánvaló: ha a $\chi_1, ..., \chi_m$-ek lineárisan összefüggnek, akkor alkalmas $c_1, ..., c_m \in \mathbf{K}$, $|c_1| + ... + |c_m| > 0$ együtthatókkal

$$\sum_{k=1}^{m} c_k\cdot \chi_k \equiv 0\ (I \to \mathbf{K}^n).$$

Speciálisan minden $\tau \in I$ helyen is

$$\sum_{k=1}^{m} c_k\cdot \chi_k(\tau) = 0\ (\in \mathbf{K}^n).$$

Így a $\chi_1(\tau)..., \chi_m(\tau)$ vektorok összefüggő rendszert alkotnak a $\mathbf{K}^n$-ben.

Fordítva, legyen $\tau \in I$, és tegyük fel, hogy a $\chi_1(\tau)..., \chi_m(\tau)$ vektorok összefüggnek. Ekkor az előbbi (nem csupa nulla) $c_1, ..., c_m \in \mathbf{K}$ együtthatókkal

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \cdot \chi_k(\tau) = 0.$$

Már „tudjuk", hogy

$$\phi := \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot \chi_k \in \mathcal{M}_h,$$

ezért az így definiált $\phi : I \to \mathbf{K}^n$ függvény megoldása a

$$\varphi' = A \cdot \varphi, \ \varphi(\tau) = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának. Világos ugyanakkor, hogy a $\Psi \equiv 0$ függvény is a most mondott *k.é.p.* megoldása az I-n. Azt is tudjuk azonban, hogy (ld. fent) ez a *k.é.p.* (is) egyértelműen oldható meg, ezért $\phi \equiv \Psi \equiv 0$. Tehát a $\chi_1, ..., \chi_m$ függvények is összefüggnek.

Ezzel egyúttal azt is beláttuk, hogy az $\mathcal{M}_h$ vektortér véges dimenziós, és a $\dim \mathcal{M}_h$ dimenziója legfeljebb n.

Tekintsük most a

$$\varphi' = A \cdot \varphi, \ \varphi(\tau) = e_i \qquad (i = 1, ..., n)$$

kezdetiérték-problémákat, ahol az $e_i \in \mathbf{K}^n$ $(i = 1, ..., n)$ vektorok a $\mathbf{K}^n$ tér „szokásos" (kanonikus) bázisvektorait jelölik. (Tehát az e_i vektor i-edik komponense 1, a többi 0.) Ha $\chi_i : I \to \mathbf{K}^n$ jelöli az említett *k.é.p.* teljes megoldását, akkor a

$$\chi_i(\tau) = e_i \qquad (i = 1, ..., n)$$

vektorok lineárisan függetlenek. Így az előbbiek alapján a $\chi_1, ..., \chi_n$ függvények is azok. Tehát az $\mathcal{M}_h$ dimenziója legalább n, azaz a fentiekre tekintettel $\dim \mathcal{M}_h = n$.

A 2^o állítás igazolásához legyen $\chi \in \mathcal{M}_h$. Ekkor $\psi + \chi \in D$, és

$$(\psi + \chi)' = \psi' + \chi' = A \cdot \psi + b + A \cdot \chi = A \cdot (\psi + \chi) + b,$$

amiből $\psi + \chi \in \mathcal{M}$ következik. Ha most egy $\varphi \in \mathcal{M}$ függvényből indulunk ki, és $\chi := \varphi - \psi$, akkor $\chi \in D$, és

$$\chi' = \varphi' - \psi' = A \cdot \varphi + b - (A \cdot \psi + b) = A \cdot (\varphi - \psi) = A \cdot \chi,$$

amiből $\chi \in \mathcal{M}_h$ adódik. Tehát $\varphi = \psi + \chi$ a 2^o-ben mondott előállítása a φ függvénynek.

A tétel 3^o részének a bizonyítása érdekében vezessük be az alábbi jelöléseket, ill. fogalmakat. A

$$\phi_k = (\phi_{k1}, ..., \phi_{kn}) \qquad (k = 1, ..., n)$$

bázisfüggvények mint oszlopvektor-függvények segítségével tekintsük a $\Phi : I \to \mathbf{K}^{n\times n}$ mátrixfüggvényt:

$$\Phi := [\phi_1 \dots \phi_n] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \dots & \phi_{n1} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \dots & \phi_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_{1n} & \phi_{2n} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}.$$

Legyen a Φ mátrixfüggvény $\Phi' : I \to \mathbf{K}^{n\times n}$ deriváltja az alábbiak szerint definiálva:

$$\Phi' := [\phi_1' \dots \phi_n'] = \begin{bmatrix} \phi_{11}' & \phi_{21}' & \dots & \phi_{n1}' \\ \phi_{12}' & \phi_{22}' & \dots & \phi_{n2}' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_{1n}' & \phi_{2n}' & \dots & \phi_{nn}' \end{bmatrix}.$$

Ekkor könnyen belátható, hogy

$$\Phi' = A\cdot \Phi.$$

Továbbá tetszőleges $g_1, ..., g_n : I \to \mathbf{K}$ differenciálható függvényekkel a

$$g := (g_1, ..., g_n) : I \to \mathbf{K}^n$$

vektorfüggvény differenciálható,

$$\psi := \sum_{k=1}^{n} g_k\cdot \phi_k = \Phi\cdot g,$$

és (könnyen ellenőrizhetően)

$$\psi' = \Phi'\cdot g + \Phi\cdot g' = (A\cdot \Phi)\cdot g + \Phi\cdot g'.$$

A $\psi \in \mathcal{M}$ tartalmazás nyilván azzal ekvivalens, hogy

$$\psi' = (A\cdot \Phi)\cdot g + \Phi\cdot g' = A\cdot \psi + b = A\cdot (\Phi\cdot g) + b = (A\cdot \Phi)\cdot g + b,$$

következésképpen azzal, hogy

$$\Phi\cdot g' = b.$$

A 2^o pont alapján tetszőleges $x \in I$ helyen a $\phi_1(x), ..., \phi_n(x)$ vektorok lineárisan függetlenek, azaz a $\Phi(x)$ mátrix nem szinguláris (invertálható). A mátrixok inverzének a kiszámítása alapján egyszerűen adódik, hogy a

$$\Phi^{-1}(x) := \Big(\Phi(x)\Big)^{-1} \qquad (x \in I)$$

definícióval értelmezett

$$\Phi^{-1} : I \to \mathbf{K}^{n\times n}$$

mátrixfüggvény komponens-függvényei is folytonosak. Ezért a

$$(h_1, ..., h_n) := \Phi^{-1} \cdot b : I \to \mathbf{K}^n$$

függvény is folytonos. Olyan folytonosan differenciálható $g : I \to \mathbf{K}^n$ függvényt keresünk tehát, amelyikre $g' = \Phi^{-1} \cdot b$, azaz

$$g_i' = h_i \qquad (i = 1, ..., n).$$

Ilyen g_i létezik, nevezetesen a (folytonos) h_i $(i = 1, ..., n)$ függvény bármelyik primitív függvénye ilyen. ■

Az előbbi tétel értelmében tehát egy lineáris differenciálegyenlet „megoldása" azzal ekvivalens, hogy meghatározzuk az $\mathcal{M}_h$ vektortér egy bázisát, és az említett tétel 3^o pontja alapján egy $\psi \in \mathcal{M}$ megoldást. Következésképpen a megoldás „kulcsmozzanata" a szóban forgó bázis megadása. Ez általában nem könnyű feladat, „univerzális" módszer nem is adható rá. Némileg egyszerűsödik a helyzet akkor, ha az egyenletet meghatározó mátrixfüggvény konstansfüggvény. Ez azzal ekvivalens, hogy az abban szereplő komponensfüggvények mindegyike konstansfüggvény.

Legyenek tehát most adottak valamilyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett az $a_{ik} \in \mathbf{R}$ $(i, k = 1, ..., n)$ számok, az $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumon értelmezett $b : I \to \mathbf{R}^n$ folytonos függvény, és legyen

$$A := (a_{ik})_{i,k=1}^n \in \mathbf{R}^{n \times n}.$$

Tekintsük az

$$f(x, y) := A \cdot y + b(x) \qquad \big((x, y) \in I \times \mathbf{K}^n\big)$$

függvény által meghatározott *állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletet.* Tegyük fel, hogy van olyan nem szinguláris $T \in \mathbf{K}^{n \times n}$ mátrix, amellyel a $T^{-1}AT$ mátrix diagonális (az A diagonalizálható): alkalmas $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{K}$ számokkal

$$\Lambda := T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

(Jól ismert, hogy ha pl. az A szimmetrikus, akkor az előbbi értelemben diagonalizálható.) Ha a T mátrix oszlopvektorai a $t_1, ..., t_n \in \mathbf{K}^n$ (a T invertálhatósága miatt lineárisan független) vektorok, azaz

$$T = [t_1 \dots t_n],$$

akkor

$$AT = [At_1 \dots At_n] = T\Lambda = [\lambda_1 \cdot t_1 \dots \lambda_n \cdot t_n]$$

miatt

$$A\cdot t_i = \lambda_i\cdot t_i \qquad (i = 1, ..., n).$$

Mivel $t_i \neq 0 \ (\in \mathbf{K}^n)$ $(i = 1, ..., n)$, ezért mindez röviden azt jelenti, hogy a $\lambda_1, ..., \lambda_n$ számok az A mátrix sajátértékei, a $t_1, ..., t_n$ vektorok pedig rendre a megfelelő sajátvektorok. Lévén a t_i-k lineárisan függetlenek, az A-ra vonatkozó feltételünk úgy fogalmazható, hogy van a $\mathbf{K}^n$-ben (az A sajátvektoraiból álló) sajátvektorbázis.

A homogén egyenlet tehát a következőképpen írható fel:

$$\varphi' = A\cdot \varphi = T\Lambda T^{-1}\cdot \varphi,$$

amiből

$$(T^{-1}\varphi)' = \Lambda\cdot (T^{-1}\varphi)$$

következik. Vegyük észre, hogy ha $\varphi \in \mathcal{M}_h$, akkor a $\psi := T^{-1}\varphi$ függvény megoldása a Λ diagonális mátrix által meghatározott állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletnek. Ez utóbbit a 7.7.1. Tétel alapján nem nehéz megoldani. Legyenek ui. a

$$\psi_i : I \to \mathbf{K}^n \qquad (i = 1, ..., n)$$

függvények a következők:

$$\psi_i(x) := e^{\lambda_i\cdot x}\cdot e_i \qquad (x \in I,\ i = 1, ..., n).$$

Világos, hogy $\psi_i \in D$, és

$$\psi_i'(x) = \lambda_i\cdot e^{\lambda_i\cdot x}\cdot e_i = e^{\lambda_i\cdot x}\cdot (\Lambda\cdot e_i) = \Lambda\cdot \left(e^{\lambda_i\cdot x}\cdot e_i\right) = \Lambda\cdot \psi_i(x) \qquad (x \in I,\ i = 1, ..., n).$$

Más szóval a ψ_i-k valóban megoldásai a Λ által meghatározott homogén lineáris differenciálegyenletnek. Mivel bármely $\tau \in I$ esetén a

$$\psi_i(\tau) = e^{\lambda_i\cdot \tau}\cdot e_i \qquad (i = 1, ..., n)$$

vektorok nyilván lineárisan függetlenek, ezért a 7.7.1. Tétel bizonyításában mondottak szerint a ψ_i $(i = 1, ..., n)$ függvények lineárisan függetlenek. Ha

$$\phi_i := T\cdot \psi_i \qquad (i = 1, ..., n),$$

akkor nyilván a ϕ_i-k is lineárisan függetlenek,

$$\phi_i(x) = T\cdot \left(e^{\lambda_i\cdot x}\cdot e_i\right) = e^{\lambda_i x}\cdot T\cdot e_i = e^{\lambda_i x}\cdot t_i \qquad (x \in I,\ i = 1, ..., n),$$

és minden $i = 1, ..., n$ indexre

$$\phi_i' = T\cdot \psi_i' = T\cdot (\Lambda\psi_i) = (T\Lambda)\cdot \psi_i = (AT)\cdot \psi_i = A\cdot (T\cdot \psi_i) = A\cdot \phi_i.$$

Tehát $\phi_i \in \mathcal{M}_h$ $(i = 1, ..., n)$ egy bázis.

Ezzel beláttuk az alábbi tételt:

7.7.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy valamilyen* $1 \leq n \in \mathbf{N}$ *esetén az* $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ *mátrix diagonalizálható. Legyenek a sajátértékei* $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{K}$, *egy-egy megfelelő sajátvektora pedig* $t_1, ..., t_n \in \mathbf{K}^n$. *Ekkor a*

$$\varphi' = A\cdot \varphi$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek a

$$\phi_i(x) := e^{\lambda_i x}\cdot t_i \qquad (x \in \mathbf{R},\ i = 1, ..., n)$$

függvények lineárisan független megoldásai.

7.8. Megjegyzések

i) A 7.7. pontban vizsgált lineáris differenciálegyenleteket illetően a homogén egyenlet teljes megoldásainak az $\mathcal{M}_h$ vektorterében minden bázist az illető egyenlet *alaprendszerének* nevezünk. Ha $\phi_1, ..., \phi_n \in \mathcal{M}_h$ egy alaprendszer, akkor a

$$\Phi := [\phi_1, \ldots, \phi_n] : I \to \mathbf{K}^{n\times n}$$

mátrixfüggvény (ld. 7.7.1. Tétel bizonyítása) a szóban forgó lineáris differenciálegyenlet (egy) ún. *alapmátrixa.* Tehát

$$\mathcal{M}_h = \left\{\sum_{k=1}^{n} c_k\cdot \phi_k : c_1, ..., c_n \in \mathbf{K}\right\} = \{\Phi\cdot c : c \in \mathbf{K}^n\}.$$

ii) A 7.7.1. Tételben szereplő

$$\mathcal{M} = \psi + \mathcal{M}_h$$

előállításban minden $\psi \in \mathcal{M}$ függvényt *partikuláris megoldásként* említünk.

iii) Az előző megjegyzésben említett partikuláris megoldás

$$\psi = \Phi\cdot g$$

alakban való előállítására (alkalmas $g : I \to \mathbf{K}^n$ differenciálható függvénnyel) a 7.7.1. Tétel bizonyításában „bemutatott" módszer az *állandók variálása.* Az elnevezés mögött az húzódik meg, hogy egy alaprendszer elemeinek a konstans együtthatós lineáris kombinációi a homogén egyenlet teljes megoldásait szolgáltatják, míg az együtthatókat (helyről helyre) változtatva („variálva"), azaz alkalmas együtthatófüggvényeket véve egy partikuláris megoldást kapunk.

iv) A lineáris differenciálegyenletekre belátott 7.7.1. Tétel alapján tetszőleges $\phi_1, ..., \phi_n$ alaprendszer és $\psi \in \mathcal{M}$ partikuláris megoldás (ld. i), ii) megjegyzések) esetén

$$\mathcal{M} = \left\{\psi + \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \phi_k : c_1, ..., c_n \in \mathbf{K}\right\}.$$

Ha Φ egy alapmátrix, akkor a iii) megjegyzést is figyelembe véve ugyanez a következőképpen írható:

$$\mathcal{M} = \{\psi + \Phi \cdot c : c \in \mathbf{K}^n\} = \{\Phi \cdot g + \Phi \cdot c : c \in \mathbf{K}^n\}.$$

Így a szóban forgó lineáris differenciálegyenletre vonatkozó tetszőleges, a $\varphi(\tau) = \xi$ egyenlőségnek eleget tevő *k.é.p.* teljes megoldása valamilyen $c \in \mathbf{K}^n$ vektorral

$$\varphi = \Phi(c + g).$$

Itt

$$\xi = \varphi(\tau) = \Phi(\tau) \cdot c + \Phi(\tau) \cdot g(\tau),$$

ahol a 7.7.1. Tétel bizonyítása szerint a g függvényről, mint primitív függvényről, feltehető, hogy $g(\tau) = 0$. Következésképpen

$$c = \Big(\Phi(\tau)\Big)^{-1} \cdot \xi.$$

Ezzel az említett *k.é.p.* megoldására az alábbi „képlet" adódott:

$$\varphi = \Phi \cdot \Big(g + \Big(\Phi(\tau)\Big)^{-1} \cdot \xi\Big).$$

v) Tekintsük az $n = 2$ esetet, amikor is valamilyen $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ számokkal

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy ez a mátrix pontosan akkor nem diagonalizálható, ha

$$(a - d)^2 + 4bc = 0 \quad \text{és} \quad |b| + |c| > 0.$$

Ekkor egyetlen sajátértéke van az A-nak, nevezetesen

$$\lambda := \frac{a + d}{2},$$

legyen t_1 egy hozzá tartozó sajátvektor:

$$0 \neq t_1 \in \mathbf{R}^2, \; At_1 = \lambda t_1.$$

Egyszerű számolással igazolható olyan $t_2 \in \mathbf{R}^2$ vektor létezése, amelyik lineárisan független a t_1-től, és

$$At_2 = t_1 + \lambda t_2.$$

Ha a $T \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ mátrix oszlopvektorai rendre a t_1, t_2 vektorok, azaz $T := [t_1\ t_2]$, akkor

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ezt felhasználva könnyen belátható, hogy a

$$\phi_1(x) := e^{\lambda x}\cdot t_1,\ \phi_2(x) := e^{\lambda x}\cdot (t_2 + xt_1) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvénypár egy alaprendszer. Valóban, $\Phi_i \in \mathcal{M}_h\ \ (i = 1, 2)$, mert

$$\phi_1'(x) = \lambda e^{\lambda x}\cdot t_1 = e^{\lambda x}\cdot At_1 = A(e^{\lambda x}\cdot t_1) = A\phi_1(x),$$

$$\phi_2'(x) = \lambda e^{\lambda x}\cdot t_2 + e^{\lambda x}\cdot t_1 + \lambda e^{\lambda x}x\cdot t_1 = e^{\lambda x}\Big((t_1 + \lambda\cdot t_2) + \lambda x\cdot t_1\Big) =$$

$$e^{\lambda x}(At_2 + xAt_1) = A\Big(e^{\lambda x}(t_2 + x\cdot t_1)\Big) = A\phi_2(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel a $\phi_1(0) = t_1$, $\phi_2(0) = t_2$ vektorok lineárisan függetlenek, ezért (ld. 7.7.1. Tétel bizonyítása) a ϕ_1, ϕ_2 függvények is lineárisan függetlenek.

vi) A lineáris differenciálegyenlet-rendszerek megoldását illusztrálandó oldjuk meg azt az egyenletet, amelyre

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ b(x) := (e^x, 0) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Olyan $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbf{R} \to \mathbf{K}^2$ differenciálható függvényt keresünk tehát, amelyre egy $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumbeli x-ekre

$$\begin{aligned} \varphi_1'(x) &= \varphi_1(x) + 2\varphi_2(x) + e^x \\ \varphi_2'(x) &= 2\varphi_1(x) + \varphi_2(x). \end{aligned}$$

Az A mátrix sajátértékei (a P karakterisztikus polinomjának a gyökei) a

$$P(x) = (1 - x)^2 - 4 = 0 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

egyenlet megoldásai:

$$\lambda_1 := 3,\ \lambda_2 := -1,$$

a megfelelő sajátvektorok pedig (pl.)

$$t_1 := (1, 1),\ t_2 := (1, -1).$$

Ezek nyilván lineárisan függetlenek, így egy alapmátrix:

$$\Phi(x) := \begin{bmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ e^{3x} & -e^{-x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Az állandók variálásaként olyan differenciálható $g = (u, v) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ függvényt keresünk, amelyikre $\Phi g' = \Phi(u', v') = b$, azaz bármely $\mathbf{R} \ni x$-re

$$\begin{aligned} e^{3x} \cdot u'(x) + e^{-x} v'(x) &= e^x \\ e^{3x} \cdot u'(x) - e^{-x} \cdot v'(x) &= 0. \end{aligned}$$

Innen

$$u'(x) = \frac{1}{2} e^{-2x}\ ,\ v'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

azaz (pl.)

$$u(x) := -\frac{1}{4} e^{-2x}\ ,\ v(x) = \frac{1}{4} e^{2x} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

adódik. Egy Φg partikuláris megoldás tehát a következő:

$$\Phi g(x) = (0, -e^x/2) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A szóban forgó feladat (teljes) megoldásai ezért a

$$\varphi(x) = \Phi(x) \cdot (\alpha, \beta) + (0, -e^x/2) =$$

$$(\alpha e^{3x} + \beta e^{-x}, \alpha e^{3x} - \beta e^{-x} - e^x/2) \qquad (x \in \mathbf{R}, \alpha, \beta \in \mathbf{K})$$

függvények. Más szóval

$$\varphi_1(x) = \alpha e^{3x} + \beta e^{-x},\ \varphi_2(x) = \alpha e^{3x} - \beta e^{-x} - e^x/2 \qquad (x \in \mathbf{R},\ \alpha, \beta \in \mathbf{K}).$$

Ha pl. a $\varphi(0) = (1, 1/2)$ kezdetiérték-problémát tűzzük ki, akkor a megfelelő α, β együtthatókat az

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha - \beta - 1/2 &= 1/2 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből nyerjük: $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Így a *k.é.p.* teljes megoldása:

$$\varphi(x) = \left(e^{3x}, e^{3x} - e^x/2\right) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

vii) Ha most pl. (továbbra is az $n = 2$ esetben) az

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix által meghatározott homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert akarjuk megoldani, akkor a $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ megoldásra a

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= 3\varphi_1 + \varphi_2 \\ \varphi_2' &= -\varphi_1 + \varphi_2 \end{aligned}$$

egyenlőségnek kell teljesülni. Az v) megjegyzést figyelembe véve az A nem diagonalizálható. A P karakterisztikus polinomja:

$$P(x) = (3-x)(1-x) + 1 = (x-2)^2 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

az A egyetlen sajátértéke a 2. Ismét csak az v) megjegyzésre hivatkozva (pl.)

$$t_1 := (1, -1),\ t_2 := (1, 0),$$

ezért egy alapmátrix:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} e^{2x} & (1+x)\cdot e^{2x} \\ -e^{2x} & -x\cdot e^{2x} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ezért (ld. v) megjegyzés) a most vizsgált homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer (teljes) megoldásai az alábbi függvények:

$$\varphi(x) = \Phi(x)\cdot(\alpha, \beta) = e^{2x}\cdot\Big(\alpha + \beta(1+x), -\alpha - \beta x\Big) \qquad (x \in \mathbf{R},\ \alpha, \beta \in \mathbf{K}),$$

azaz

$$\varphi_1(x) = e^{2x}\cdot(\alpha + \beta + \beta x)\ \ ,\ \ \varphi_2(x) = -e^{2x}\cdot(\alpha + \beta x) \qquad (x \in \mathbf{R},\ \alpha, \beta \in \mathbf{K}).$$

viii) Az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerekkel kapcsolatos 7.7.2. Tételben a diagonalizálható együtthatójú $A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ mátrix esetén adtunk „megoldóképletet", a fenti v) megjegyzésben ezt kiegészítettük tetszőleges (konstans) $A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ mátrixra (tehát akkor, ha $n = 2$). Röviden vázoljuk az utóbbi megjegyzés kiterjesztését tetszőleges $1 \leq n \in \mathbf{N}$ mellett. Legyen ehhez $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, ekkor a mátrixok Jordan-alakra való transzformálásáról szóló (nem triviális) tételt felhasználva a következő mondható. Tegyük fel, hogy az A-nak k darab ($\mathbf{N} \ni k \leq n$) páronként különböző sajátértéke van:

$$\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbf{K}.$$

Ha $\lambda \in \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$, akkor a $t_1, ..., t_m \in \mathbf{K}^n$ vektorok (valamilyen $1 \leq m \in \mathbf{N}$ mellett) a λ-hoz tartozó *vektorszériát* alkotnak, ha

$$t_1 \neq 0,\ At_1 = \lambda t_1,\ At_{l+1} = \lambda t_{l+1} + t_l \qquad (l = 1, ..., m-1).$$

Belátható, hogy van a $\mathbf{K}^n$ térnek olyan

$$t_{jsl} \qquad (j=1,...,k\ ;\ s=1,...,\nu_j\ ;\ l=1,...,\nu_{sj})$$

bázisa, hogy minden $j=1,...,k\ ;\ s=1,...,\nu_j$ esetén a

$$t_{jsl} \qquad (l=1,...,\nu_{sj})$$

vektorok a λ_j-hez tartozó vektorszériát alkotnak. Itt ν_j a λ_j-hez tartozó

$$\{t \in \mathbf{K}^n : At = \lambda_j t\}$$

sajátaltér dimenziója, $\sum_{s=1}^{\nu_j} \nu_{sj}$ pedig a λ_j multiplicitása az A karakterisztikus polinomjában $(j=1,...,k)$. Ha $\mathbf{I} \in \mathbf{K}^{n\times n}$ jelöli az $\mathbf{I}x := x \quad (x \in \mathbf{K}^n)$ feltételnek eleget tevő egységmátrixot, és μ_j a λ_j multiplicitása az A minimálpolinomjában $(j=1,...,k)$, akkor a

$$t_{jsl} \qquad (l=1,...,\nu_{sj}\ ;\ s=1,...,\nu_j)$$

vektorok bázist alkotnak a

$$\{t \in \mathbf{K}^n : (A-\lambda_j \mathbf{I})^{\mu_j}\cdot t = 0\}$$

altérben.

Egyszerű számolással igazolható, hogy a fenti vektorszériák segítségével definiált

$$\phi_{M\lambda}(x) := e^{\lambda x}\cdot \sum_{j=1}^{M} \frac{x^{M-j}}{(M-j)!}\cdot t_j \qquad (x \in \mathbf{R}\ ,\ M=1,...,m)$$

függvények az A által meghatározott homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásai:

$$\phi'_{M\lambda}(x) = e^{\lambda x}\cdot \sum_{j=1}^{M-1} \frac{x^{M-j-1}}{(M-j-1)!}\cdot t_j + \lambda\cdot e^{\lambda x}\cdot \sum_{j=1}^{M} \frac{x^{M-j}}{(M-j)!}\cdot t_j =$$

$$e^{\lambda x}\cdot \sum_{j=2}^{M} \frac{x^{M-j}}{(M-j)!}\cdot t_{j-1} + \lambda\cdot e^{\lambda x}\cdot \sum_{j=2}^{M} \frac{x^{M-j}}{(M-j)!}\cdot t_j + \lambda\cdot e^{\lambda x}\cdot \frac{x^{M-1}}{(M-1)!}\cdot t_1 =$$

$$e^{\lambda x}\cdot \sum_{j=2}^{M} \frac{x^{M-j}}{(M-j)!}\cdot (t_{j-1}+\lambda t_j) + \lambda\cdot e^{\lambda x}\cdot \frac{x^{M-1}}{(M-1)!}\cdot t_1 =$$

$$e^{\lambda x}\cdot \sum_{j=2}^{M} \frac{x^{M-j}}{(M-j)!}\cdot At_j + e^{\lambda x}\cdot \frac{x^{M-1}}{(M-1)!}\cdot At_1 = A\phi_{M\lambda}(x).$$

Ha a $\mathbf{K}^n$ egy bázisát alkotó, az előbb említett vektorszériák mindegyikére elkészítjük ezeket a függvényeket, akkor a szóban forgó homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer egy alaprendszeréhez jutunk.

Az $n=2$ esetben nyilván az v) megjegyzésben mondottakról van szó.

ix) A 7.7.2. Tétel feltételei mellett tegyük fel, hogy a $\lambda \in \mathbf{K}$ szám az $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ (diagonalizálható) együtthatómátrixnak egy sajátértéke, a $t_\lambda \in \mathbf{K}^n$ vektor pedig egy λ-hoz tartozó sajátvektora. Ha a λ valós, azaz $\lambda \in \mathbf{R}$, akkor nyilván a t_λ vektor is választható „valósnak", azaz feltehető, hogy $t_\lambda \in \mathbf{R}^n$. Ebben az esetben a λ-nak a 7.7.1. Tétel szerint megfelelő

$$\phi_\lambda(x) := e^{\lambda x}\cdot t_\lambda \qquad (x \in \mathbf{R})$$

bázisfüggvény is „valós", tehát $\phi_\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$.

Ha viszont a λ (nem valós) komplex szám, azaz

$$\lambda = u + \imath v \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$$

(alkalmas $u \in \mathbf{R}$ és $0 \neq v \in \mathbf{R}$ számokkal), akkor – lévén az A karakterisztikus polinomja valós együtthatós – az A-nak egyúttal a $\overline{\lambda} = u - \imath v$ (komplex konjugált) is (ugyanannyiszoros) sajátértéke. Hasonlóan, ha a

$$t_\lambda = S_\lambda + \imath Y_\lambda \in \mathbf{K}^n$$

vektor (alkalmas $S_\lambda, Y_\lambda \in \mathbf{R}^n$ vektorokkal) az A-nak a λ-hoz tartozó sajátvektora, akkor a $\overline{t}_\lambda = S_\lambda - \imath Y_\lambda$ vektor a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátvektor. Továbbá a megfelelő bázisfüggvények a következők:

$$\phi_\lambda(x) := e^{\lambda x}\cdot t_\lambda,\ \phi_{\overline{\lambda}}(x) := e^{\overline{\lambda} x}\cdot \overline{t}_\lambda \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Rövid számolással ellenőrizhető, hogy

$$\phi_{\overline{\lambda}}(x) = \overline{\phi_\lambda(x)} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel a homogén egyenlet (teljes) megoldásainak az $\mathcal{M}_h$ halmaza a $\mathbf{K}$ felett vektortér, ezért a

$$\frac{\phi_\lambda + \overline{\phi_\lambda}}{2} = \operatorname{Re}\phi_\lambda,\ \frac{\phi_\lambda - \overline{\phi_\lambda}}{2\imath} = \operatorname{Im}\phi_\lambda$$

függvények is $\mathcal{M}_h$-beliek. Világos, hogy

$$e^{\lambda x} = e^{ux}\cdot\Big(\cos(vx) + \imath\sin(vx)\Big) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

miatt

$$\phi_{\lambda,r}(x) := \operatorname{Re}\phi_\lambda(x) = e^{ux}\cdot\Big(\cos(vx)\cdot S_\lambda - \sin(vx)\cdot Y_\lambda\Big) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

$$\phi_{\lambda,i}(x) := \operatorname{Im}\phi_\lambda(x) = e^{ux}\cdot\Big(\sin(vx)\cdot S_\lambda + \cos(vx)\cdot Y_\lambda\Big) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy $\phi_{\lambda,r}(0) = S_\lambda$, $\phi_{\lambda,i}(0) = Y_\lambda$. A t_λ, $t_{\overline{\lambda}}$ sajátvektorok lineárisan függetlenek, ezért az S_λ, Y_λ vektorok is lineárisan függetlenek, következésképpen (ld. 7.7.1.

Tétel bizonyítása) a $\phi_{\lambda,r}$, $\phi_{\lambda,i}$ függvények is (az $\mathcal{M}_h$-ban) lineárisan függetlenek. Így a 7.7.2. Tételbeli alaprendszerben a ϕ_λ, $\phi_{\overline{\lambda}}$ függvényeket kicserélve a $\phi_{\lambda,r}$, $\phi_{\lambda,i}$ függvényekre, továbbra is alaprendszert kapunk. Ha ezt a cserét megtesszük az A minden nem valós sajátértéke esetén, akkor egy olyan alaprendszerhez jutunk, amelyikben már minden bázisfüggvény $I \to \mathbf{R}^n$-beli. Ezeknek a valós együtthatós lineáris kombinációi szolgáltatják a szóban forgó homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer valós komponensű megoldásait.

x) Az előző megjegyzésben mondottakra példaként tekintsük az

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix által meghatározott homogén lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszert. A $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ teljes megoldásra most tehát

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= 4\varphi_1 - \varphi_2 \\ \varphi_2' &= 5\varphi_1 + \varphi_2 \end{aligned}$$

teljesül. Az A sajátértékei:

$$\lambda := 3 + 2\imath, \ \overline{\lambda} = 3 - 2\imath,$$

azaz (a ix) megjegyzés jelöléseivel) $u = 3$, $v = 2$, egy-egy sajátvektor pedig rendre

$$t_\lambda := (1, 1 - 2\imath), \ \bar{t}_\lambda = (1, 1 + 2\imath).$$

Ezért (továbbra is a ix) megjegyzés jelöléseivel)

$$S_\lambda = (1, 1), \ Y_\lambda = (0, -2),$$

és

$$\phi_{\lambda,r}(x) = e^{3x} \cdot \Big(\cos(2x) \cdot (1,1) - \sin(2x) \cdot (0,-2) \Big) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

$$\phi_{\lambda,i}(x) = e^{3x} \cdot \Big(\sin(2x) \cdot (1,1) + \cos(2x) \cdot (0,-2) \Big) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Így a valós értékű teljes megoldásokat az $x \in \mathbf{R}$ helyeken (tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ együtthatókkal) az alábbiak szerint kapjuk:

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \alpha \cdot \phi_{\lambda,r}(x) + \beta \cdot \phi_{\lambda,i}(x) =$$

$$\alpha \cdot e^{3x} \cdot \Big(\cos(2x) \cdot (1,1) - \sin(2x) \cdot (0,-2) \Big) + \beta \cdot e^{3x} \cdot \Big(\sin(2x) \cdot (1,1) + \cos(2x) \cdot (0,-2) \Big),$$

tehát „koordinátánként" felírva

$$\varphi_1(x) = e^{3x} \cdot \Big(\alpha \cdot \cos(2x) + \beta \cdot \sin(2x) \Big),$$

$$\varphi_2(x) = e^{3x} \cdot \Big((\alpha - 2\beta) \cdot \cos(2x) + (2\alpha + \beta) \cdot \sin(2x) \Big).$$

xi) A mátrixok Jordan-alakra való transzformálhatóságát felhasználva a diagonalizálható együttható-mátrixú homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldására vonatkozó módszer (ld. 7.7.2. Tétel) kiterjeszthető tetszőleges $A \in \mathbf{K}^{n\times n}$ együtthatómátrix esetére. Legyen ehhez először is

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n},\ A^k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=1}^{n} \in \mathbf{K}^{n\times n} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

ahol

$$a_{ij}^{(0)} := \begin{cases} 1 & (i=j) \\ \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \qquad (i,j = 1,...,n).$$

(Tehát $I_n := A^0$ az $\mathbf{K}^{n\times n}$-beli egységmátrix.) Ekkor nyilván

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot a_{sj}^{(k)} \qquad (k \in \mathbf{N},\ i,j = 1,...,n),$$

és

$$\left|a_{ij}^{(k)}\right| \leq \|A^k\|_{(\infty)} \qquad (k \in \mathbf{N},\ i,j = 1,...,n).$$

Teljes indukcióval könnyen adódik, hogy

$$\|A^k\|_{(\infty)} \leq \|A\|_{(\infty)}^k \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ti. ez $k = 0$-ra nyilvánvaló, ha pedig valamilyen $k \in \mathbf{N}$ mellett igaz, akkor

$$\|A^{k+1}x\|_\infty = \|A(A^k x)\|_\infty \leq \|A\|_{(\infty)}\cdot \|A^k x\|_\infty \leq$$

$$\|A\|_{(\infty)}\cdot \|A^k\|_{(\infty)}\cdot \|x\|_\infty \leq \|A\|_{(\infty)}\cdot \|A\|_{(\infty)}^k\cdot \|x\|_\infty =$$

$$\|A\|_{(\infty)}^{k+1}\cdot \|x\|_\infty \qquad (x \in \mathbf{R}^n),$$

amiből $\|A^{k+1}\|_{(\infty)} \leq \|A\|_{(\infty)}^{k+1}$ már következik. Ezért

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_{ij}^{(k)}|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|_{(\infty)}^k}{k!} < +\infty \qquad (i,j = 1,...,n),$$

azaz léteznek a

$$c_{ij} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{k!} \in \mathbf{R} \qquad (i,j = 1,...,n)$$

összegek. Legyen

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} := (c_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbf{R}^{n\times n}.$$

Nem nehéz ezek után belátni, hogy ha

$$F(t) := \left(\gamma_{ij}(t)\right)_{i,j=1}^{n} := e^{t\cdot A} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

akkor az így értelmezett

$$\gamma_{ij} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad (i, j = 1, ..., n)$$

komponensfüggvények valamennyien differenciálhatók (röviden: $F \in D$), és az

$$F'(t) := \left(\gamma'_{ij}(t)\right)_{i,j=1}^{n} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

megállapodással

$$F'(t) = A\cdot e^{t\cdot A} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ui. egyrészt

$$\gamma_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{k!}\cdot t^k \qquad (t \in \mathbf{R},\ i, j = 1, ..., n),$$

azaz a γ_{ij}-k hatványsorok összegfüggvényei. Ezért $\gamma_{ij} \in D$ $(i, j = 1, ..., n)$, és

$$\gamma'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{(k-1)!}\cdot t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\cdot a_{ij}^{(k+1)}}{k!} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Az $F'(t) = A\cdot e^{t\cdot A}$ $(t \in \mathbf{R})$ egyenlőség azzal ekvivalens, hogy

$$\gamma'_{ij}(t) = \left(A\cdot e^{t\cdot A}\right)_{ij} \qquad (i, j = 1, ..., n),$$

ami

$$\left(A\cdot e^{t\cdot A}\right)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot \left(e^{t\cdot A}\right)_{sj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{sj}^{(k)}}{k!}\cdot t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\cdot \sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot a_{sj}^{(k)} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^{(k+1)}}{k!}\cdot t^k = \gamma'_{ij}(t)$$

miatt világos.

Megjegyezzük, hogy ha $m \in \mathbf{N}$, akkor ugyanígy kapjuk a fentiek kiterjesztését: minden komponensfüggvény m-szer differenciálható (röviden: $F \in D^m$), és az

$$F^{(m)}(t) := \left(\gamma_{ij}^{(m)}(t)\right)_{i,j=1}^{n} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

megállapodással

$$F^{(m)}(t) = A^m \cdot e^{t\cdot A} = e^{t\cdot A} \cdot A^m \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Arról sem nehéz meggyőződni, hogy az e^A mátrix invertálható, és

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}.$$

Valóban, az abszolút konvergens végtelen sorok Cauchy-szorzásával minden egyes $i, j = 1, ..., n$ indexre

$$\left(e^A \cdot e^{-A}\right)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{is}^{(k)}}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot a_{sj}^{(k)}}{k!} \right) =$$

$$\sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{a_{is}^{(l)}}{l!} \cdot \frac{(-1)^{k-l} \cdot a_{sj}^{(k-l)}}{(k-l)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l! \cdot (k-l)!} \cdot \sum_{s=1}^{n} a_{is}^{(l)} \cdot a_{sj}^{(k-l)} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l! \cdot (k-l)!} \cdot (A^l \cdot A^{k-l})_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l! \cdot (k-l)!} \cdot (A^k)_{ij}.$$

Ha itt $k > 0$, akkor a binomiális tétel szerint

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l! \cdot (k-l)!} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \cdot (-1)^l = \frac{(1-1)^k}{k!} = 0,$$

ezért

$$\left(e^A \cdot e^{-A}\right)_{ij} = (A^0)_{ij} = (I_n)_{ij} \qquad (i, j = 1, ..., n),$$

röviden: $e^A \cdot e^{-A} = I_n$.

Tegyük fel, hogy a fenti A mátrix mellett adott egy $B \in \mathbf{K}^{n\times n}$ mátrix is, amelyik felcserélhető az A-val: $AB = BA$. Ekkor (pl. teljes indukcióval könnyen adódóan)

$$(A + B)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} A^l B^{k-l} \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$\left((A+B)^k\right)_{ij} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \left(A^l B^{k-l}\right)_{ij} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \sum_{s=1}^{n} a_{is}^{(l)} \cdot b_{sj}^{(k-l)} \qquad (i, j = 1, ..., n).$$

Ezt szem előtt tartva belátjuk, hogy

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B.$$

Ha ui. $A^k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=1}^{n}$, $B^k = \left(b_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=1}^{n}$ $(k \in \mathbf{N})$, akkor tetszőleges $i, j = 1, ..., n$ esetén

$$\left(e^A \cdot e^B\right)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{is}^{(k)}}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{sj}^{(k)}}{k!} \right) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{a_{is}^{(l)}}{l!} \cdot \frac{b_{sj}^{(k-l)}}{(k-l)!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \cdot \sum_{s=1}^{n} a_{is}^{(l)} \cdot b_{sj}^{(k-l)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left((A+B)^k \right)_{ij} = \left(e^{A+B}\right)_{ij}.$$

Ha valamilyen $1 \le k \in \mathbf{N}$ esetén $\lambda_1, ..., \lambda_k$ jelöli az $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ páronként különböző (valamennyi) sajátértékét, akkor (a mátrixok Jordan-alakra transzformálhatóságáról szóló ismert tétel alapján) létezik olyan nem szinguláris $T \in \mathbf{K}^{n \times n}$ mátrix, amellyel

$$\Lambda := T^{-1} A T = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & A_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & A_k \end{bmatrix}.$$

Itt a „$\dots$" helyén 0-k állnak, valamint

$$A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^{n_i \times n_i},$$

ahol n_i $(i = 1, ..., k)$ a λ_i multiplicitása az A mátrix minimálpolinomjában (Jordan-blokk). (Speciálisan, $A(-A) = (-A)A$ miatt a $\Theta_n := (0)_{i,j=1}^{n} \in \mathbf{K}^{n \times n}$ nullmátrixszal

$$e^A \cdot e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^{\Theta_n} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Theta_n^i}{i!} = I_n + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Theta_n^i}{i!} = I_n,$$

ezért innen is következik az előbb belátott $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$ egyenlőség.)

Világos, hogy a

$$\Psi(x) := e^{x \cdot \Lambda} = \begin{bmatrix} e^{x \cdot A_1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & e^{x \cdot A_2} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & e^{x \cdot A_k} \end{bmatrix} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

mátrixfüggvény alapmátrixa a $\psi' = \Lambda \psi$ egyenletnek, ahol az előzményekre tekintettel

$$e^{x \cdot A_j} = e^{\lambda_j x \cdot I_j} \cdot e^{x \cdot (A_j - \lambda_j \cdot I_j)} \qquad (x \in \mathbf{R},\ j = 1, ..., k).$$

A lineáris algebrából ismert Caley–Hamilton-tétel szerint minden mátrix karakterisztikus polinomja annullálja a szóban forgó mátrixot, ezért $(A_j - \lambda_j \cdot I_j)^{n_j} = \Theta_{n_j}$, és így tetszőleges $n_j \leq s \in \mathbf{N}$ esetén is az $(A_j - \lambda_j \cdot I_j)^s$ mátrix a ($\mathbf{K}^{n_j \times n_j}$-beli) nullmátrix. Következésképpen

$$e^{x \cdot A_j} = e^{\lambda_j x \cdot I_j} \cdot \sum_{s=0}^{n_j - 1} \frac{(A_j - \lambda_j \cdot I_j)^s}{s!} \qquad (x \in \mathbf{R},\ j = 1, ..., k).$$

Mivel a

$$\varphi' = A\varphi = T\Lambda T^{-1}\varphi$$

egyenlet azzal ekvivalens, hogy

$$\left(T^{-1}\varphi\right)' = \Lambda\left(T^{-1}\varphi\right),$$

ezért a

$$\Phi(x) := T \cdot \Psi(x) = T \cdot e^{x \cdot \Lambda} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

mátrxifüggvény alapmátrixa a vizsgált $\varphi' = A\varphi$ egyenletnek. Innen már egyszerűen adódik, hogy létezik ennek az egyenletnek olyan alaprendszere, amelyiknek a tagjai az alábbi alakúak:

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto e^{\lambda_i x} \cdot R_i(x) \qquad (i = 1, ..., k),$$

ahol az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto R_i(x) \in \mathbf{K}^n \qquad (i = 1, ..., k)$$

függvények minden komponensfüggvénye egy legfeljebb $(n_i - 1)$-edfokú polinom (ld. viii) megjegyzés).

7.9. Magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek

A 7.1.3. pontban vizsgált feladat, a rezgések matematikai modellje egy speciális, ún. másodrendű lineáris differenciálegyenlet. Mindezt az alábbi, általános feladatba ágyazhatjuk bele.

Legyen $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, az

$$a_k : I \to \mathbf{R} \quad (k = 0, ..., n-1), \ c : I \to \mathbf{R}$$

függvényekről pedig tegyük fel, hogy folytonosak. Olyan $\varphi \in I \to \mathbf{K}$ függvényt keresünk, amelyikre

i) $\mathcal{D}_\varphi \subset I$ nyílt intervallum;

ii) $\varphi \in D^n$;

iii) $\varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

Ezt a feladatot röviden *n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük. Minden olyan φ függvény, amelyik eleget tesz az előbbi kívánalmaknak, az illető differenciálegyenlet (egy) *megoldása.*

Ha $a_n : I \to \mathbf{K} \setminus \{0\}$ is egy folytonos függvény, akkor a iii)-beli egyenlőség helyett gyakran az alábbit követelik meg:

iii)* $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$.

Ez nyilván csak formai átalakítása a most megfogalmazott feladatnak (amelyek megadásakor sokszor csak a iii) vagy a iii)* egyenlőséget írják fel).

Tegyük fel, hogy a fentieken túl adottak még a $\tau \in I$, $\xi_0, ..., \xi_{n-1} \in \mathbf{K}$ számok. Ha az előbbi φ megoldástól azt is elvárjuk, hogy

iv) $\tau \in \mathcal{D}_\varphi$, $\varphi^{(k)}(\tau) = \xi_k \ \ (k = 0, ..., n-1)$,

akkor a szóban forgó n-edrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó *kezdetiérték-problémáról* beszélünk.

Világos, hogy $n = 1$ esetén a 7.3.3. pontban vizsgált lineáris differenciálegyenletről van szó, ezért a továbbiakban nyugodtan feltehetjük már, hogy $n \geq 2$.

Az *átviteli elv* segítségével a most megfogalmazott feladat visszavezethető a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek vizsgálatára. (A későbbiekben szereplő állítások is részben ennek az elvnek a segítségével láthatók majd be.) Vezessük be ui. az alábbi jelöléseket: legyen $2 \leq n \in \mathbf{N}$ és

$$b_i := \begin{cases} 0 & (i = 1, ..., n-1) \\ c & (i = n), \end{cases} \quad , \ a_{ik} := \begin{cases} 0 & (i = 1, ..., n-1 \text{ és } k \neq i+1) \\ 1 & (i = 1, ..., n-1 \text{ és } k = i+1) \\ -a_{k-1} & (i = n \text{ és } k = 1, ..., n). \end{cases}$$

Tekintsük az

$$f(x, y) := A(x) \cdot y + b(x) \qquad (x \in I, \ y \in \mathbf{K}^n)$$

függvény (mint jobb oldal) által meghatározott lineáris differenciálegyenlet-rendszert, ahol

$$A := (a_{ik})_{i,k=1}^{n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & ... & -a_{n-1} \end{bmatrix} : I \to \mathbf{R}^{n \times n},$$

és

$$b := (b_1, ..., b_n) : I \to \mathbf{R}^n.$$

Ha tehát a

$$\psi = (\psi_1, ..., \psi_n) \in I \to \mathbf{K}^n$$

differenciálható függvény ez utóbbi lineáris differenciálegyenlet-rendszernek (egy) megoldása, akkor $\mathcal{D}_\psi \subset I$ nyílt intervallum, és bármely $x \in \mathcal{D}_\psi$ esetén

$$(*) \qquad \begin{cases} \psi_i'(x) = \psi_{i+1}(x) \quad (i = 1, ..., n-1) \\ \\ \psi_n'(x) = \sum_{k=1}^n a_{k-1}(x) \cdot \psi_k(x) + c(x). \end{cases}$$

Ennek alapján eléggé nyilvánvaló az alábbi állítás.

7.9.1. Tétel (átviteli elv). *Ha a φ függvény megoldása a fenti n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek, akkor az*

$$I \ni x \mapsto \psi(x) := \Big(\varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)\Big) \in \mathbf{K}^n$$

függvényre igazak a $(*)$ egyenlőségek. Fordítva, ha a $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n)$ függvény eleget tesz a $(*)$-nak, akkor a $\varphi := \psi_1$ (első) komponensfüggvény megoldása a szóban forgó n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek. Ha adottak a $\tau \in I$, $\xi_0, ..., \xi_{n-1} \in \mathbf{K}$ kezdeti értékek, és a φ megoldása a

$$\varphi^{(k)}(\tau) = \xi_k \qquad (k = 0, ..., n-1)$$

kezdetiérték-problémának, akkor a $(*)$ lineáris differenciálegyenlet-rendszer előbbi ψ megoldása kielégíti a $\psi(\tau) = (\xi_0, ..., \xi_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$ kezdeti feltételt.

A 7.7. pontban mondottak alapján tudjuk, hogy a $(*)$ lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma megoldható, és a teljes megoldása az I intervallumon van értelmezve. Ezért az előbbi átviteli elv alapján azt mondhatjuk, hogy a most vizsgált n-edrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó bármelyik kezdetiérték-probléma is megoldható, és van az I-n értelmezett megoldása. Ennek fényében vezessük be az alábbi jelöléseket: legyen most

$$\mathcal{M}_h := \left\{ \varphi : I \to \mathbf{K} : \varphi \in D^n,\ \varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = 0 \right\}.$$

Az $\mathcal{M}_h$ függvényhalmaz tehát nem más, mint a

$$c(x) := 0 \qquad (x \in I)$$

esetnek megfelelő *homogén n-edrendű lineáris differenciálegyenlet* I intervallumon értelmezett megoldásainak a halmaza. Legyen továbbá

$$\mathcal{M} := \left\{\varphi : I \to \mathbf{K} : \varphi \in D^n,\ \varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = c\right\}$$

a kiindulási n-edrendű lineáris differenciálegyenlet I-n értelmezett megoldásainak a halmaza. Az utóbbival kapcsolatban már nyilván feltehető, hogy valamilyen $x \in I$ helyen $c(x) \neq 0$, azaz az illető egyenlet *inhomogén.* Ekkor a 7.9.1. Tétel (átviteli elv), és a 7.7.1. Tétel alapján a következőket mondhatjuk.

7.9.2. Tétel. *A* 7.9. *pontban definiált n-edrendű lineáris differenciálegyenletet illetően*

1^o *az* $\mathcal{M}_h$ *halmaz* n *dimenziós lineáris tér a* $\mathbf{K}$*-ra vonatkozóan*;

2^o *tetszőleges* $\omega \in \mathcal{M}$ *esetén*

$$\mathcal{M} = \omega + \mathcal{M}_h := \{\omega + \chi : \chi \in \mathcal{M}_h\};$$

3^o *ha a* $\varphi_1, ..., \varphi_n$ *függvények bázist alkotnak az* $\mathcal{M}_h$*-ban, akkor léteznek olyan differenciálható* $g_k : I \to \mathbf{K}$ $(k = 1, ..., n)$ *függvények, amelyekkel*

$$\omega := \sum_{k=1}^{n} g_k \cdot \varphi_k \in \mathcal{M}.$$

Bizonyításképpen elegendő annyit megjegyezni, hogy az $\mathcal{M}_h$-beli $\varphi_1, ..., \varphi_m : I \to \mathbf{K}$ $(1 \leq m \in \mathbf{N})$ függvények akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha a

$$\hat{\varphi}_j := \left(\varphi_j, \varphi_j', ..., \varphi_j^{(n-1)}\right) : I \to \mathbf{K}^n \qquad (j = 1, ..., m)$$

(vektor)függvények is azok. Ha $\phi_1, ..., \phi_n \in \mathcal{M}_h$ bázis, akkor minden ilyen bázist (most is) *alaprendszernek,* a 7.9.2. Tétel 2^o állításában szereplő ω függvényt pedig *partikuláris megoldásnak* nevezünk. Egy partikuláris megoldásnak a 7.9.2. Tétel 3^o állítása szerinti előállítását az *állandók variálásaként* említjük.

Tegyük fel tehát, hogy a $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \mathcal{M}_h$ alaprendszer, ekkor a

$$\hat{\varphi}_j := \left(\varphi_j, \varphi_j', ..., \varphi_j^{(n-1)}\right) \qquad (j = 1, ..., n)$$

függvények alaprendszert alkotnak az átviteli elvből adódó $(*)$ lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozóan. Más szóval a

$$\Phi := [\hat{\varphi}_1 \dots \hat{\varphi}_n] = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} : I \to \mathbf{K}^{n \times n}$$

mátrixfüggvény alapmátrixa a $(*)$-rendszernek. Innen tudjuk (ld. 7.7.), hogy a

$$g = (g_1, ..., g_n) : I \to \mathbf{K}^n$$

jelöléssel a $\Phi\cdot g$ függvény pontosan akkor partikuláris megoldása a $(*)$-nak (alkalmas differenciálható $g_1, ..., g_n : I \to \mathbf{K}$ függvényekkel), ha $\Phi\cdot g' = b = (0, ..., 0, c)$. Ez azt jelenti, hogy a $\Phi\cdot g$ függvény első komponense, azaz az

$$\omega := \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \cdot g_k$$

függvény akkor és csak akkor partikuláris megoldása a most vizsgált n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek, ha

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1\cdot g_1' + \varphi_2\cdot g_2' + \ldots + \varphi_n\cdot g_n' & = & 0 \\ \varphi_1'\cdot g_1' + \varphi_2'\cdot g_2' + \ldots + \varphi_n'\cdot g_n' & = & 0 \\ \vdots \qquad \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}\cdot g_1' + \varphi_2^{(n-2)}\cdot g_2' + \ldots + \varphi_n^{(n-2)}\cdot g_n' & = & 0 \\ \varphi_1^{(n-1)}\cdot g_1' + \varphi_2^{(n-1)}\cdot g_2' + \ldots + \varphi_n^{(n-1)}\cdot g_n' & = & c. \end{array}$$

Ennek a $(g_1', ..., g_n'$ függvényekre mint „ismeretlenekre" vonatkozó) lineáris (függvény)egyenletrendszernek a determinánsa (determináns-függvénye), azaz a

$$W(x) := \det \left(\varphi_i^{(k-1)}(x) \right)_{k,i=1}^{n}$$

leképezés (az ún. *Wronski-determináns*) a $\hat{\varphi}_1, ..., \hat{\varphi}_n$ függvények lineáris függetlensége miatt egyetlen $x \in I$ helyen sem válik nullává (ld. 7.7.1. Tétel bizonyítása). Ezért a $g_1', ..., g_n'$ függvényeket meghatározva egy-egy primitív függvénykeresés után kapjuk a $g_1, ..., g_n$ együtthatófüggvényeket.

Elegendő tehát az $\mathcal{M}_h$ egy bázisát meghatározni. Ez általában (amint azt már a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek kapcsán említettük) elég „reménytelen" feladat, általános módszer nem is adható. Ezért csak abban az esetben tesszük ezt meg, ha a szóban forgó n-edrendű lineáris differenciálegyenletet meghatározó a_k $(k = 0, ..., n-1)$ együtthatófüggvények mindegyike konstansfüggvény (az aktuális konstanst is $\mathbf{R} \ni a_k$-val jelölve). (Ez az ún. *állandó együtthatós* eset.) Tekintsük ehhez a

$$P(x) := x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \qquad (x \in \mathbf{K})$$

n-edfokú polinomot, a differenciálegyenlet *karakterisztikus polinomját.* Tegyük fel, hogy a P gyöktényezős előállítása a következő:

$$P(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - \lambda_j)^{\nu_j} \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

ahol $1 \leq k \in \mathbf{N}$ és $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbf{K}$ jelöli a P összes, páronként különböző gyökét, $1 \leq \nu_j \in \mathbf{N}$ pedig a λ_j gyök multiplicitását $(j = 1, ..., k)$. Mutassuk meg, hogy a

$$\varphi_{jl}(x) := x^l \cdot e^{\lambda_j x} \qquad (x \in I,\ j = 1, ..., k \text{ és } l = 0, ..., \nu_j - 1)$$

függvények valamennyien $\mathcal{M}_h$-beliek. Erről egyszerű behelyettesítéssel győződhetünk meg. Legyen ehhez ui.

$$\Delta_{ki} := \begin{cases} 1 & (i \leq k) \\ \\ 0 & (i > k) \end{cases} \qquad (i \in \mathbf{N}),$$

ekkor (a deriváltakra vonatkozó ismert „binomiális" formula szerint)

$$\varphi_{jl}^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{l} \Delta_{ki} \binom{k}{i} l(l-1)...(l-i+1)x^{l-i} \cdot \lambda_j^{k-i} \cdot e^{\lambda_j x} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Azt kell megmutatnunk, hogy

$$\varphi_{jl}^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_{jl}^{(k)}(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A fenti egyenlőség bal oldala a $\varphi_{jl}^{(k)}(x)$ deriváltakra kiszámított formula alapján a következő:

$$e^{\lambda_j x} \cdot \left(\sum_{i=0}^{l} \binom{n}{i} l(l-1)...(l-i+1)x^{l-i} \cdot \lambda_j^{n-i} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \sum_{i=0}^{l} \Delta_{ki} \binom{k}{i} l(l-1)...(l-i+1)x^{l-i} \cdot \lambda_j^{k-i} \right) =$$

$$= e^{\lambda_j x} \cdot \left(\sum_{i=0}^{l} l(l-1)...(l-i+1)x^{l-i} \cdot \left(\binom{n}{i} \cdot \lambda_j^{n-i} + \sum_{k=i}^{n-1} a_k \binom{k}{i} \cdot \lambda_j^{k-i} \right) \right) =$$

$$e^{\lambda_j x} \cdot \left(\sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} x^{l-i} \cdot \left(n(n-1)...(n-i+1) \cdot \lambda_j^{n-i} + \sum_{k=i}^{n-1} a_k \cdot k(k-1)...(k-i+1) \cdot \lambda_j^{k-i} \right) \right) =$$

$$e^{\lambda_j x} \cdot \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} x^{l-i} \cdot P^{(i)}(\lambda_j) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel $l \leq \nu_j - 1$ és a λ_j a P-nek ν_j-szeres gyöke, ezért bármelyik $i = 0, ..., l$ esetén $P^{(i)}(\lambda_j) = 0$, amiből az állításunk már következik.

Ennél több is igaz, nevezetesen bebizonyítjuk az alábbi állítást:

7.9.3. Tétel. *A fentiekben definiált $\varphi_{jl}(x)$ $(j = 1, ..., k$ és $l = 0, ..., \nu_j - 1)$ függvények a szóban forgó állandó együtthatós n-edrendű lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerét alkotják.*

Bizonyítás. Elöljáróban jegyezzük meg, hogy az állításunkban szereplő (és a tétel megfogalmazása előtt mondottak szerint $\mathcal{M}_h$-beli) φ_{jl}-ek száma

$$\sum_{j=1}^{k} \nu_j = n,$$

hiszen a P karakterisztikus polinom n-edfokú. A 7.9.2. Tétel szerint az $\mathcal{M}_h$ vektortér n dimenziós, így azt kell csupán belátnunk, hogy a φ_{jl}-ek lineárisan függetlenek. Ez azt jelenti, hogy ha valamilyen $c_{jl} \in \mathbf{K}$ $(j = 1, ..., k$ és $l = 0, ..., \nu_j - 1)$ együtthatókkal

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{\nu_j-1} c_{jl} \cdot \varphi_{jl}(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor a c_{jl}-ek valamennyien nullák. Vegyük észre, hogy az előbbi egyenlőség részletesen kiírva a következőt jelenti:

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{l=0}^{\nu_j-1} c_{jl} \cdot x^l \right) \cdot e^{\lambda_j x} = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

azaz a

$$P_j(x) := \sum_{l=0}^{\nu_j-1} c_{jl} \cdot x^l \qquad (x \in \mathbf{R},\ j = 1, ..., k)$$

polinomokkal

$$\sum_{j=1}^{k} P_j(x) \cdot e^{\lambda_j x} = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy az

$$e_\lambda(x) := e^{\lambda x} \qquad (x \in \mathbf{K},\ \lambda \in \mathbf{K})$$

függvények *polinomiálisan függetlenek*, azaz, ha $1 \leq m \in \mathbf{N}$, és valamilyen (páronként különböző) $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbf{K}$ számok, valamint $Q_1, ..., Q_m$ polinomok esetén

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j(x) \cdot e_{\lambda_j}(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor $Q_j \equiv 0$ $(j = 1, ..., m)$. Speciálisan $P_j \equiv 0$ $(j = 1, ..., m)$, ami nyilván azzal ekvivalens, hogy minden $j = 1, ..., k$ mellett

$$c_{jl} = 0 \qquad (l = 0, ..., \nu_j - 1).$$

Ha a fentiekben $m = 1$, azaz

$$Q_1(x) \cdot e_{\lambda_1}(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor $e_{\lambda_1}(x) \neq 0 \ \ (x \in \mathbf{R})$ miatt $Q_1 \equiv 0$. A teljes indukcióra hivatkozva tegyük fel, hogy a bizonyítandó polinomiális függetlenség egy $2 \leq m \in \mathbf{N}$ esetén az „$(m-1)$-re" igaz: ha valamilyen $S_1, ..., S_{m-1}$ polinomokkal és páronként különböző $\gamma_1, ..., \gamma_{m-1} \in \mathbf{K}$ számokkal

$$\sum_{j=1}^{m-1} S_j(x) \cdot e_{\gamma_j}(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

akkor $S_j \equiv 0 \ \ (j = 1, ..., m-1)$. Legyen továbbá (a fenti szereplőkkel)

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j(x) \cdot e_{\lambda_j}(x) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az itteni Q_j-k között a Q_m maximális fokszámú, legyen a fokszáma p, továbbá $N := p+1$. Az előbbi egyenlőségből

$$\sum_{j=1}^{m-1} Q_j \cdot e_{\mu_j} = -Q_m$$

következik, ahol $\mu_j := \lambda_j - \lambda_m \ (\neq 0) \ \ (j = 0, ..., m-1)$. Mivel $Q_m^{(N)} \equiv 0$, ezért

$$\sum_{j=1}^{m-1} \left(Q_j \cdot e_{\mu_j} \right)^{(N)} \equiv 0,$$

ahol tetszőleges $j = 1, ..., m-1$ esetén

$$\left(Q_j \cdot e_{\mu_j} \right)^{(N)} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} Q_j^{(k)} \cdot \mu_j^{N-k} \cdot e_{\mu_j}.$$

Tehát

$$\sum_{j=1}^{m-1} \left(Q_j \cdot e_{\mu_j} \right)^{(N)} = \sum_{j=1}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} Q_j^{(k)} \cdot \mu_j^{N-k} \right) \cdot e_{\mu_j} =: \sum_{j=1}^{m-1} R_j \cdot e_{\mu_j}.$$

Legyen alkalmas $\alpha_{js}, \beta_{js} \in \mathbf{K} \quad (s = 0, ..., p_j \ (\in \mathbf{N}))$ paraméterekkel

$$Q_j(x) = \sum_{s=0}^{p_j} \alpha_{js} \cdot x^s, \ R_j(x) = \sum_{k=0}^{p_j} \binom{N}{k} Q_j^{(k)}(x) \cdot \mu_j^{N-k} = \sum_{s=0}^{p_j} \beta_{js} \cdot x^s \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Az indukciós feltevésünk alapján azt mondhatjuk, hogy

$$R_j \equiv 0 \qquad (j = 1, ..., m-1),$$

azaz, az $R_j \ \ (j = 1, ..., m-1)$ polinomok minden együtthatója nulla:

$$\beta_{js} = 0 \qquad (s = 0, ..., p_j).$$

Világos, hogy

$$0 = \beta_{jp_j} = \mu_j^N \cdot \alpha_{jp_j},$$

amiből $\mu_j \neq 0$ miatt $\alpha_{jp_j} = 0$ következik. Továbbá

$$0 = \beta_{jp_j-1} = \mu_j^N \cdot \alpha_{jp_j-1} + N \cdot p_j \cdot \alpha_{jp_j} \cdot \mu_j^{N-1} = \mu_j^N \cdot \alpha_{jp_j-1},$$

és így $\alpha_{jp_j-1} = 0$. Analóg módon folytatva kapjuk az együttható-összehasonlításból és a $\beta_{jp_j-s} = 0 \quad (s = 0, ..., p_j)$ egyenlőségekből rendre azt, hogy $\alpha_{js} = 0 \quad (s = 0, ..., p_j)$, tehát, hogy $Q_j \equiv 0 \quad (j = 1, ..., m)$. ■

A 7.9.2. Tételben szereplő partikuláris megoldásnak az állandók variálásával való előállítása (bár elvben mindig célhoz vezet) esetenként meglehetősen fáradságos (sok számolást igénylő) feladat. Ezért „megbecsülendők" azok a módszerek, amelyek révén (az illető egyenlettől függően) más úton juthatunk el egy partikuláris megoldáshoz. Ez a más út gyakran a

$$\varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

állandó együtthatós feladat jobb oldala, azaz a c függvény speciális „szerkezete" révén lehetséges. Pl. számos olyan $\mathcal{F}$ függvényosztály különíthető el ebből a szempontból úgy, hogy $c \in \mathcal{F}$ esetén „előre lehet tudni" olyan ω partikuláris megoldásról, amelyre $\omega \in \mathcal{F}$. Ilyen $\mathcal{F}$ függvényosztály az ún. kvázipolinomok halmaza. Egy $f : \mathbf{R} \to \mathbf{K}$ függvényt *kvázipolinomnak* nevezünk, ha valamilyen R (algebrai) polinom és $\lambda \in \mathbf{K}$ szám mellett

$$f(x) = R(x) \cdot e_\lambda(x) = R(x) \cdot e^{\lambda x} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Meg fogjuk mutatni, hogy ha a szóban forgó állandó együtthatós magasabb rendű lineáris differenciálegyenletnek a jobb oldala kvázipolinom, akkor az egyenletnek van kvázipolinom partikuláris megoldása. Ez utóbbi meghatározása pedig időnként lényegesen kevesebb számolással (pl. együttható-összehasonlítással) történhet, mint ugyanez az állandók variálásának a módszerével.

7.9.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbf{R}$, *és valamilyen* $r \in \mathbf{N}$ *mellett a* $\lambda \in \mathbf{K}$ *szám a*

$$P(x) := x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x^k \qquad (x \in \mathbf{K})$$

polinomnak r*-szeres gyöke. Ha a* Q *polinom fokszáma* $m \in \mathbf{N}$, *akkor van olyan, legfeljebb* m*-edfokú* R *polinom, hogy az*

$$\omega(x) := x^r \cdot R(x) \cdot e^{\lambda x} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

kvázipolinomra

$$\omega^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \omega^{(k)}(x) = Q(x) \cdot e^{\lambda \cdot x} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Bizonyítás. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $r = 0$, azaz $P(\lambda) \neq 0$. Ekkor (a keresett R polinommal)

$$\omega = R \cdot e_\lambda.$$

Legyen $a_n := 1$, amikor is azt kell belátnunk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (R \cdot e_\lambda)^{(k)} = Q \cdot e^\lambda.$$

A „binomiális szabályt" alkalmazva

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (R \cdot e_\lambda)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} R^{(j)} \cdot \lambda^{k-j} \cdot e_\lambda = Q \cdot e^\lambda.$$

Ezért a kívánt R polinom létezése a következő egyenlőséggel ekvivalens:

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} R^{(j)} \cdot \lambda^{k-j} = Q.$$

Világos, hogy ennek az egyenlőségnek mindkét oldalán egy-egy polinom áll, így együttható-összehasonlítással azt kell belátnunk, hogy alkalmasan választott $\alpha_j \in \mathbf{R} \quad (j = 0, ..., m)$ számokkal az

$$R(x) := \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \cdot x^j \qquad (x \in \mathbf{K})$$

polinom eleget tesz a $(*)$ egyenlőségnek. Legyen ehhez a Q algebrai alakja a $\beta_j \in \mathbf{R}$ $(j = 0, ..., m)$ együtthatókkal az alábbi:

$$Q(x) := \sum_{j=0}^{m} \beta_j \cdot x^j \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Ekkor a $(*)$ bal oldalán a főegyüttható (a legnagyobb fokszámú hatvány együtthatója) a következő:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \alpha_m \cdot \lambda^k = \alpha_m \cdot P(\lambda),$$

így az $\alpha_m \cdot P(\lambda) = \beta_m$ egyenlőségnek kell teljesülni. Mivel most $P(\lambda) \neq 0$, ezért az

$$\alpha_m := \frac{\beta_m}{P(\lambda)}$$

választás megfelelő. Az α_m ismeretében az α_{m-1} meghatározása $(*)$ alapján a

$$\beta_{m-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k\cdot \alpha_{m-1}\cdot \lambda^k + \sum_{k=1}^{n} k\cdot a_k\cdot m\cdot \alpha_m\cdot \lambda^{k-1} = P(\lambda)\cdot \alpha_{m-1} + m\cdot \alpha_m\cdot P'(\lambda)$$

egyenlőségből történhet:

$$\alpha_{m-1} = \frac{\beta_{m-1} - m\cdot \alpha_m\cdot P'(\lambda)}{P(\lambda)}.$$

Az eljárást analóg módon folytatva kapjuk a keresett R polinom többi együtthatóját is.

Legyen most $r = 1$, azaz $P(\lambda) = 0$ és $P'(\lambda) \neq 0$. Ekkor (az előbbi jelöléseket megtartva)

$$\omega(x) := x\cdot R(x)\cdot e^{\lambda x} = S(x)\cdot e^{\lambda x} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol

$$S(x) := \sum_{j=0}^{m} \alpha_j\cdot x^{j+1} = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_{j-1}\cdot x^j \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Most is a $(*)$ egyenlőségnek kell fennállnia, azzal a különbséggel, hogy abban az R polinom helyébe az S-et írjuk:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} S^{(j)}\cdot \lambda^{k-j} = Q.$$

Vegyük észre, hogy itt a bal oldali polinom legfeljebb $(m+1)$-edfokú, de a főegyütthatója a fentiek szerint:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot \alpha_m\cdot \lambda^k = \alpha_m\cdot P(\lambda) = 0.$$

Ezért valójában a bal oldal is legfeljebb m-edfokú. Ezután ismét csak együttható-összehasonlítással azt kapjuk, hogy

$$\beta_m = \sum_{k=0}^{n} a_k\cdot \alpha_{m-1}\cdot \lambda^k + \sum_{k=1}^{n} k\cdot a_k\cdot (m+1)\cdot \alpha_m\cdot \lambda^{k-1} =$$

$$P(\lambda)\cdot \alpha_{m-1} + (m+1)\cdot \alpha_m\cdot P'(\lambda) = (m+1)\cdot \alpha_m\cdot P'(\lambda),$$

következésképpen

$$\alpha_m = \frac{\beta_m}{(m+1)\cdot P'(\lambda)}.$$

Az előbbiekhez hasonlóan aztán

$$\beta_{m-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k\cdot \alpha_{m-2}\cdot \lambda^k + \sum_{k=1}^{n} k\cdot a_k\cdot m\cdot \alpha_{m-1}\cdot \lambda^{k-1} =$$

$$P(\lambda)\cdot \alpha_{m-2} + m\cdot \alpha_{m-1}\cdot P'(\lambda) = m\cdot \alpha_{m-1}\cdot P'(\lambda),$$

ezért

$$\alpha_{m-1} = \frac{\beta_{m-1}}{m\cdot P'(\lambda)},$$

és így tovább.

Analóg módon kapjuk az R polinom együtthatóit az $r = 2, 3, ...$ esetekben is. ∎

7.10. Megjegyzések

i) A fentiekben vizsgált magasabb rendű lineáris differenciálegyenlet speciális esete egy sokkal általánosabb „egyenletosztálynak". Legyen ui. az $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum,

$$F \in I \times \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}$$

folytonos függvény. Azt mondjuk, hogy a differenciálható $\varphi \in I \to \mathbf{K}$ függvény megoldása az F által meghatározott *explicit n-edrendű közönséges differenciálegyenletnek*, ha a $\mathcal{D}_\varphi$ értelmezési tartomány nyílt intervallum, továbbá minden $x \in \mathcal{D}_\varphi$ esetén $\Big(x, \varphi(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)\Big) \in \mathcal{D}_F$, és

$$\varphi^{(n)}(x) = F\Big(x, \varphi(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)\Big) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A 7.9. pontbeli jelölésekkel az

$$F(x, y_1, ..., y_n) := c(x) - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}(x)\cdot y_k \qquad (x \in I,\ (y_1, , ..., y_n) \in \mathbf{K}^n)$$

választással nyilván egy n-edrendű lineáris differenciálegyenlethez jutunk.

Világos, hogy ha a fenti $F \in I \times \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}$ függvénnyel

$$f(x, y) := \Big(y_2, ..., y_n, F(x, y_1, ..., y_n)\Big) \qquad (x \in I,\ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{K}^n,\ (x, y) \in \mathcal{D}_F),$$

akkor az F által az előbbi értelemben meghatározott differenciálegyenlet φ megoldásával a

$$(\varphi, \varphi', ..., \varphi^{(n-1)}) : \mathcal{D}_\varphi \to \mathbf{K}^n$$

függvény megoldása az f (mint jobb oldal) által meghatározott explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek (ld. 7.5.1.). „Fordítva", ha ez utóbbinak a $(\psi_1, ..., \psi_n)$ megoldása, akkor a $\varphi := \psi_1$ függvény eleget tesz a fenti n-edrendű egyenletnek.

ii) Egy ún. *implicit n-edrendű közönséges differenciálegyenlethez* jutunk, ha valamilyen

$$G \in \mathbf{K}^{n+2} \to \mathbf{K}$$

folytonos függvény esetén olyan $\varphi \in \mathbf{R} \to \mathbf{K}$, $\varphi \in D^n$ függvényt keresünk, amelyikre a következő feltételek teljesülnek: a $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum, minden $\mathcal{D}_\varphi \ni x$-re $\Big(x, \varphi(x), ..., \varphi^{(n)}(x)\Big) \in \mathcal{D}_G$, és

$$G\Big(x, \varphi(x), ..., \varphi^{(n)}(x)\Big) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

iii) A 7.9.3. Tétel alapján kapott

$$\varphi_{jl}(x) := x^l \cdot e^{\lambda_j x} \qquad (x \in I,\ j = 1, ..., k\ ;\ l = 0, ..., \nu_j - 1)$$

alaprendszerben a φ_{jl} $(l = 0, ..., \nu_j - 1)$ függvények valós értékűek, ha a szóban forgó n-edrendű lineáris differenciálegyenlet P karakterisztikus polinomjában a λ_j gyök valós szám. Ha viszont valamilyen $j = 1, ..., k$ esetén a λ_j gyök nem valós komplex szám, akkor a következőket mondhatjuk. Legyen ekkor

$$\lambda_j = u_j + \imath v_j,$$

ahol $u_j \in \mathbf{R}$ és $0 \neq v_j \in \mathbf{R}$. Mivel a P polinom valós együtthatós, ezért a

$$\overline{\lambda}_j = u - \imath v$$

komplex konjugált is ν_j-szeres gyöke a P-nek. Ez azt jelenti, hogy a fenti alaprendszerben a

$$\hat{\varphi}_{jl}(x) := x^l \cdot e^{\overline{\lambda}_j x} = \overline{\varphi_{jl}(x)} \qquad (x \in I,\ l = 0, ..., \nu_j - 1)$$

függvények is szerepelnek. Tudjuk (ld. 7.9.2. Tétel), hogy az $\mathcal{M}_h$ halmaz vektortér a $\mathbf{K}$-ra nézve, ezért

$$\phi_{jl} := \frac{\varphi_{jl} + \hat{\varphi}_{jl}}{2} = \operatorname{Re} \varphi_{jl},\ \hat{\phi}_{jl} := \frac{\varphi_{jl} - \hat{\varphi}_{jl}}{2\imath} = \operatorname{Im} \varphi_{jl} \in \mathcal{M}_h,$$

ahol tetszőleges $l = 0, ..., \nu_j - 1$ mellett

$$\phi_{jl}(x) = \operatorname{Re} \varphi_{jl}(x) = \operatorname{Re}\left(x^l \cdot e^{\lambda_j x}\right) = \operatorname{Re}\left(x^l \cdot e^{u_j x + \imath \cdot v_j x}\right) =$$

$$\operatorname{Re}\left(x^l \cdot e^{u_j x} \cdot (\cos(v_j x) + \imath \cdot \sin(v_j x)\right) = x^l \cdot e^{u_j x} \cdot \cos(v_j x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

és (analóg számolás után)

$$\hat{\phi}_{jl}(x) = x^l \cdot e^{u_j x} \cdot \sin(v_j x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Könnyen belátható, hogy ha a fenti φ_{jl}, $\tilde{\varphi}_{jl}$ (összesen $2\nu_j$ darab) függvényt kicseréljük a ϕ_{jl}, $\hat{\phi}_{jl}$ (ugyancsak $2\nu_j$ darab) függvényre, akkor továbbra is lineárisan független függvényrendszert kapunk. Ha ezt a cserét a P polinom minden nem valós gyökével kapcsolatban megtesszük, akkor az $\mathcal{M}_h$ egy valós értékű függvényekből álló bázisát kapjuk, azaz egy valós függvényekből álló alaprendszert.

iv) A 7.9.2. Tétel, ill. az előző megjegyzés illusztrálására tekintsük a 7.1.3. pontban tárgyalt rezgésekre vonatkozó (az ottani jelölésekkel felírt)

$$ms''(t) = F(t) - \alpha\cdot s(t) - \beta\cdot s'(t) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletet. A 7.9. pontbeli „standard" alakban felírva ugyanez:

$$s''(t) + \frac{\beta}{m}\cdot s'(t) + \frac{\alpha}{m}\cdot s(t) = \frac{F(t)}{m} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Ennek a karakterisztikus polinomja a következő:

$$P(x) := x^2 + \frac{\beta}{m}\cdot x + \frac{\alpha}{m} \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

amelynek a gyökei:

$$\lambda_{1,2} := \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4m\alpha}}{2m}.$$

Az alábbi esetek lehetségesek:

A) $\beta^2 - 4m\alpha = 0$, amikor is a

$$\lambda := -\frac{\beta}{2m}$$

az egyetlen kétszeres (valós) gyöke a P-nek. Ekkor (ld. 7.9.2. Tétel) a

$$\varphi(x) := e^{\lambda x},\ \psi(x) := x\cdot e^{\lambda x} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvénypár egy (valós értékű) alaprendszer.

B) $\beta^2 - 4m\alpha > 0$, ekkor a P-nek két darab egyszeres, valós gyöke van:

$$\lambda := \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4m\alpha}}{2m},\ \mu := \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4m\alpha}}{2m}.$$

Egy (valós) alaprendszer most

$$\varphi(x) := e^{\lambda x},\ \psi(x) := e^{\mu x} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

C) $\beta^2 - 4m\alpha < 0$, ekkor a P-nek két darab egyszeres, nem valós gyöke van:

$$\lambda := \frac{-\beta + i\sqrt{4m\alpha - \beta^2}}{2m},\ \ \mu := \frac{-\beta - i\sqrt{4m\alpha - \beta^2}}{2m}.$$

Ebben az esetben egy valós értékű alaprendszer az

$$u := -\frac{\beta}{2m},\ v := \frac{\sqrt{4m\alpha - \beta^2}}{2m}$$

jelölésekkel a következő:

$$\varphi(x) := e^{ux}\cdot \cos(vx),\ \psi(x) := e^{ux}\cdot \sin(vx) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A fizika „nyelvén" fogalmazva az F/m függvény (a differenciálegyenlet jobb oldala) a „kényszer" (kényszererő). Ha nincs kényszer, azaz $F \equiv 0$, akkor $\beta > 0$ esetén *csillapított rezgőmozgásról*, a $\beta = 0$ esetben pedig *harmonikus rezgőmozgásról* beszélünk. Ez utóbbi nyilván a C) esetbe tartozik, amikor a megoldás (az $\omega_0 := \sqrt{\alpha/m}$ *sajátfrekvenciával* és alkalmas γ, $\delta \in \mathbf{R}$ együtthatókkal):

$$s(x) = \gamma\cdot \cos(\omega_0 x) + \delta\cdot \sin(\omega_0 x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A kezdeti feltételeket (ld. 7.1.3.) figyelembe véve

$$s(0) = \gamma = s_0,\ s'(0) = \delta\omega_0 = s_0',$$

azaz

$$s(x) = s_0\cdot \cos(\omega_0 x) + \frac{s_0'}{\omega_0}\cdot \sin(\omega_0 x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Elemi trigonometrikus összefüggések révén egy alkalmas $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ *fázisszög* segítségével $s(x)$ így is írható:

$$s(x) = \sqrt{s_0^2 + \left(\frac{s_0'}{\omega_0}\right)^2}\cdot \sin(\omega_0 x + \theta_0) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

v) A tényleges kényszerrezgések között különösen érdekes a periodikus külső kényszer esete:

$$F(x) := A\cdot \sin(\omega x + \theta) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol $A > 0$ (*amplitúdó*), $\omega > 0$ (*kényszerfrekvencia*), és $\theta \in [0, 2\pi)$. Tekintsünk most el a csillapítástól, azaz legyen $\beta := 0$. Ekkor is a iv) megjegyzésbeli C) esettel állunk szemben, így egy (valós) alaprendszer az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \cos(\omega_0 x),\ \mathbf{R} \ni x \mapsto \sin(\omega_0 x)$$

függvényrendszer. Az általános C) esethez képest ekkor viszont egyszerűen megadhatunk egy partikuláris megoldást is. Ez ui. könnyen ellenőrizhetően

C1) $\omega \neq \omega_0$ esetén pl. az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}\cdot \sin(\omega x + \theta),$$

C2) $\omega = \omega_0$ (*rezonancia*) esetén pedig pl. az

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto -\frac{q}{2\omega} x\cdot \cos(\omega x + \theta)$$

függvény, ahol $q := A/m$. Valóban, ha $\omega \neq \omega_0$, akkor egy $\gamma \in \mathbf{R}$ együtthatóval a

$$\varphi_\gamma(x) := \gamma\cdot \sin(\omega x + \theta) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvény akkor és csak akkor partikuláris megoldás, ha

$$\varphi_\gamma''(x) + \omega_0^2\cdot \varphi_\gamma(x) = -\gamma\cdot \omega^2\cdot \sin(\omega x + \theta) + \omega_0^2\cdot \gamma\cdot \sin(\omega x + \theta) =$$

$$q\cdot \sin(\omega x + \theta) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Mindez azzal egyenértékű, hogy

$$\gamma\cdot (\omega_0^2 - \omega^2) = q,$$

azaz, hogy $\gamma = q/(\omega_0^2 - \omega^2)$.

Ha viszont $\omega = \omega_0$, akkor egy $\gamma \in \mathbf{R}$ együtthatóval a

$$\varphi_\gamma(x) := \gamma\cdot x\cdot \cos(\omega x + \theta) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvényre kell, hogy fennálljon a

$$\varphi_\gamma''(x) + \omega_0^2\cdot \varphi_\gamma(x) =$$

$$-2\gamma\cdot \omega\cdot \sin(\omega x + \theta) - \gamma\cdot x\cdot \omega^2\cdot \cos(\omega x + \theta) + \gamma\cdot x\cdot \omega^2\cdot \cos(\omega x + \theta) =$$

$$-2\gamma\cdot \omega\cdot \sin(\omega x + \theta) = q\cdot \sin(\omega x + \theta) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

egyenlőség. Ezért $\gamma = -q/(2\omega)$.

Az $\omega_0 \neq \omega$ feltétel mellett tehát

$$s(x) = \gamma\cdot \cos(\omega_0 x) + \delta\cdot \sin(\omega_0 x) + \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}\cdot \sin(\omega x + \theta) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol a γ, δ együtthatókat az

$$s(0) = \gamma + \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}\cdot \sin\theta = s_0,\ s'(0) = \delta\omega_0 + \frac{q\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\cdot \cos\theta = s_0'$$

egyenlőségekből kapjuk. Így a C1) esetben

$$s(x) = \left(s_0 - \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2}\cdot \sin\theta\right)\cdot \cos(\omega_0 x) + \frac{1}{\omega_0}\left(s_0' - \frac{q\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\cdot \cos\theta\right)\cdot \sin(\omega_0 x) +$$

$$+ \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega x + \theta) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A harmonikus rezgéshez hasonlóan alkalmas $r>0$ és $\theta_0\in[0,2\pi)$ segítségével most is felírhatjuk $s(x)$-et a következő alakban:

$$s(x)=r\cdot\sin(\omega_0x+\theta_0)+\frac{q}{\omega_0^2-\omega^2}\cdot\sin(\omega x+\theta)\qquad(x\in\mathbf{R}),$$

ami nem más, mint két harmonikus rezgés összege.

Ha $\omega_0=\omega$, akkor

$$s(x)=\gamma\cdot\cos(\omega x)+\delta\cdot\sin(\omega x)-\frac{q}{2\omega}x\cdot\cos(\omega x+\theta)\qquad(x\in\mathbf{R}),$$

és

$$s(0)=s_0=\gamma,\ s'(0)=\delta\omega-\frac{q}{2\omega}\cos\theta=s_0'.$$

Tehát a C2) esetben

$$s(x)=s_0\cdot\cos(\omega x)-\frac{q}{2\omega}x\cdot\cos(\omega x+\theta)+\frac{1}{\omega}\cdot\Big(s_0'+\frac{q}{2\omega}\cdot\cos\theta\Big)\cdot\sin(\omega x)\qquad(x\in\mathbf{R}),$$

azaz megfelelően választott $r>0$ és $\theta_0\in[0,2\pi)$ paraméterekkel

$$s(x)=r\cdot\sin(\omega x+\theta_0)-\frac{q}{2\omega}x\cdot\cos(\omega x+\theta)\qquad(x\in\mathbf{R}).$$

Az ω sajátfrekvenciájú harmonikus rezgésre ekkor nem egy harmonikus rezgés, hanem az

$$x\mapsto-\frac{q}{2\omega}x\cdot\cos(\omega x+\theta)$$

aperiodikus mozgás szuperponálódik.

vi) Tekintsük egy

$$\varphi''+a_1\cdot\varphi'+a_0\cdot\varphi=0$$

homogén másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet

$$W:=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\ \varphi_1' & \varphi_2'\end{vmatrix}=\varphi_1\cdot\varphi_2'-\varphi_2\cdot\varphi_1'$$

Wronski-determinánsát, ahol a φ_1, φ_2 függvények egy alaprendszert alkotnak. Ekkor

$$W'=\varphi_1\cdot\varphi_2''-\varphi_2\cdot\varphi_1''=\varphi_2\cdot(a_1\cdot\varphi_1'+a_0\cdot\varphi_1)-\varphi_1\cdot(a_1\cdot\varphi_2'+a_0\cdot\varphi_2)=-a_1W,$$

azaz a W megoldása a $-a_1$ függvény (mint jobb oldal) által meghatározott homogén lineáris differenciálegyenletnek (ld. 7.3.3.). Ez utóbbit a 7.3.3. pont alapján meg tudjuk oldani, így a W meghatározható: bármely $\tau\in I$ esetén a $\xi:=W(\tau)$ jelöléssel

$$(*)\qquad W(x)=\xi\cdot e^{\int_\tau^x a_1(t)\,dt}\qquad(x\in I).$$

Vegyük észre, hogy ha (pl.) $\varphi_1(x) \neq 0 \ (x \in I)$, akkor

$$\varphi_2' = \frac{\varphi_1'}{\varphi_1} \cdot \varphi_2 + \frac{W}{\varphi_1}.$$

A φ_2 függvény tehát megoldása annak a lineáris differenciálegyenletnek, amelyiknek a jobb oldala az

$$(**) \qquad I \times \mathbf{R} \ni (x,y) \mapsto \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} \cdot y + \frac{W(x)}{\varphi_1(x)}$$

függvény. Belátható, hogy ha $\tau \in I$, $\xi \neq 0$, és W eleget tesz a $(*)$ egyenlőségnek, akkor a $(**)$ függvény által meghatározott lineáris differenciálegyenlet tetszőleges ψ megoldását véve $\psi \in \mathcal{M}_0$. Valóban,

$$\psi' = \frac{\varphi_1'}{\varphi_1} \cdot \psi + \frac{W}{\varphi_1}$$

miatt

$$\psi'' = \frac{\varphi_1'' \cdot \varphi_1 - (\varphi_1')^2}{\varphi_1^2} \cdot \psi + \left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_1} \cdot \psi + \frac{W}{\varphi_1} \right) \cdot \frac{\varphi_1'}{\varphi_1} + \frac{W' \cdot \varphi_1 - W \cdot \varphi_1'}{\varphi_1^2} =$$

$$\frac{\varphi_1'' \cdot \varphi_1 - (\varphi_1')^2}{\varphi_1^2} \cdot \psi + \left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_1} \right)^2 \cdot \psi + \frac{W'}{\varphi_1} =$$

$$-\frac{(a_1 \cdot \varphi_1' + a_0 \cdot \varphi_1) \cdot \varphi_1 + (\varphi_1')^2}{\varphi_1^2} \cdot \psi + \left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_1} \right)^2 \cdot \psi + \frac{W'}{\varphi_1} =$$

$$-\frac{a_1 \cdot \varphi_1' + a_0 \cdot \varphi_1}{\varphi_1} \cdot \psi + \frac{W'}{\varphi_1}.$$

Tehát

$$\psi'' + a_1 \cdot \psi' + a_0 \cdot \psi = -\frac{a_1 \cdot \varphi_1' + a_0 \cdot \varphi_1}{\varphi_1} \cdot \psi + \frac{W'}{\varphi_1} + a_1 \cdot \left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_1} \cdot \psi + \frac{W}{\varphi_1} \right) + a_0 \cdot \psi =$$

$$\frac{W' + a_1 \cdot W}{\varphi_1} = \frac{-a_1 \cdot W + a_1 \cdot W}{\varphi_1} = 0.$$

Továbbá

$$\widehat{W} := \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi \\ \varphi_1' & \psi' \end{vmatrix} = \varphi_1 \cdot \psi' - \psi \cdot \varphi_1' = \varphi_1 \cdot \left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_1} \cdot \psi + \frac{W}{\varphi_1} \right) - \psi \cdot \varphi_1' = W.$$

Tudjuk, hogy $W(x) \neq 0 \ (x \in I)$, ezért $\widehat{W}(x) \neq 0 \ (x \in I)$ is igaz. Ez azt jelenti, hogy a φ_1, ψ függvények bázist alkotnak az $\mathcal{M}_0$-ban. Következésképpen a φ_1 ismeretében a fentiek szerint meghatározható egy alaprendszer.

vii) Az előző megjegyzésben mondottak illusztrálásául tekintsük az

$$a_1(x) := -\frac{2x}{x^2+1},\ a_0(x) := \frac{2}{x^2+1} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)$$

együtthatófüggvényeket, amikor tehát olyan $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{K},\ \varphi \in D^2$ függvényt keresünk, amelyikre

$$\varphi''(x) - \frac{2x}{x^2+1} \cdot \varphi'(x) + \frac{2}{x^2+1} \cdot \varphi(x) = 0 \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big).$$

Legyen $\tau := 1,\ \xi := 1,$ ekkor a vi) megjegyzés szerint

$$W(x) = e^{\int_1^x \frac{2t}{t^2+1}\,dt} = \frac{1+x^2}{2} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big).$$

„Ránézésre" látszik, hogy a

$$\varphi_1(x) := x\ (\neq 0) \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)$$

függvény megoldása a szóban forgó másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek. A vi)-beli $(**)$-nak megfelelő jobb oldal ezért a következő:

$$(0, +\infty) \times \mathbf{R} \ni (x, y) \mapsto \frac{1}{x} \cdot y + \frac{1+x^2}{2x},$$

így a vi)-ban említett ψ függvényre

$$\psi'(x) = \frac{1}{x} \cdot \psi(x) + \frac{1+x^2}{2x} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)$$

teljesül. Ilyen ψ pl. (ld. 7.3.3.):

$$\psi(x) = \left(\int_1^x \frac{1+t^2}{2t} \cdot e^{-\int_1^t ds/s}\,dt\right) \cdot e^{\int_1^x dt/t} = \left(\int_1^x \frac{1+t^2}{2t^2}\,dt\right) \cdot x =$$

$$\frac{x^2-1}{2} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big).$$

Más szóval az $\mathcal{M}_0$ halmaz bármelyik φ eleme alkalmas $\alpha,\ \beta \in \mathbf{K}$ együtthatókkal az alábbi alakú:

$$\varphi(x) = \alpha \cdot x + \beta \cdot (x^2 - 1) \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big).$$

viii) A 7.9.4. Tétel kvázipolinom jobb oldal esetén „garantálja" olyan partikuláris megoldás létezését, amelyik szintén kvázipolinom. Legyen pl. szó arról az állandó együtthatós inhomogén másodrendű lineáris differenciálegyenletről, amelyiket az

$$a_1 := -3,\ a_0 := 2,\ c(x) := x^2 \cdot e^x \qquad (x \in \mathbf{R})$$

„bemenő" paraméterek határoznak meg. A keresett $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi \in D^2$ függvényre (megoldásra) tehát az alábbi egyenlőségnek kell fennállnia:

$$\varphi''(x) - 3\varphi'(x) + 2\varphi(x) = x^2 \cdot e^x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A 7.9.4. Tétel jelöléseivel élve most

$$Q(x) := x^2 \quad (x \in \mathbf{R}),\ \lambda := 1.$$

A P karakterisztikus polinom:

$$P(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ennek a λ egyszeres gyöke. Így a 7.9.4. Tételben $r = 1$, és alkalmas $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ együtthatókkal

$$R(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A keresett ω kvázipolinom partikuláris megoldás ezért a következő:

$$\omega(x) = x \cdot (\alpha x^2 + \beta \cdot x + \gamma) \cdot e^x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ helyen

$$\omega'(x) = (3\alpha \cdot x^2 + 2\beta \cdot x + \gamma) \cdot e^x + x \cdot (\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma) \cdot e^x,$$

$$\omega''(x) = (6\alpha \cdot x + 2\beta) \cdot e^x + 2(3\alpha \cdot x^2 + 2\beta \cdot x + \gamma) \cdot e^x + x \cdot (\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma) \cdot e^x,$$

ezért az

$$\omega''(x) - 3\omega'(x) + 2\omega(x) =$$
$$\Big(-3\alpha \cdot x^2 + (6\alpha - 2\beta) \cdot x + 2\beta - \gamma \Big) \cdot e^x = x^2 \cdot e^x \quad (x \in \mathbf{R})$$

egyenlőségből

$$-3\alpha = 1,\ 6\alpha - 2\beta = 0,\ 2\beta - \gamma = 0$$

következik. Innen $\alpha = -1/3$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$, az ω partikuláris megoldás pedig:

$$\omega(x) = -\frac{x}{3} \cdot (x^2 + 3x + 6) \cdot e^x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

A $\varphi \in \mathcal{M}$ megoldások tehát:

$$\varphi(x) = u \cdot e^x + v \cdot e^{2x} - \frac{x}{3} \cdot (x^2 + 3x + 6) \cdot e^x \qquad (x \in \mathbf{R},\ u, v \in \mathbf{K}).$$

ix) Világos, hogy minden polinom egyúttal kvázipolinom is. Érdemes megjegyezni, hogy ha a 7.9.4. Tételben $\lambda = 0$, és $P(0) \neq 0$, akkor a szóban forgó tételben $r = 0$, azaz van polinom megoldása az illető differenciálegyenletnek. Ennek a fokszáma legfeljebb annyi, mint a (tételbeli) Q polinomé.

x) Tegyük fel, hogy a 7.9.4. Tételben szereplő állandó együtthatós n-edrendű lineáris differenciálegyenlet jobb oldalán kvázipolinom helyett olyan $c : \mathbf{R} \to \mathbf{K}$ függvény áll, amelyik az alábbi alakú: valamilyen m-edfokú $(m \in \mathbf{N})$ valós együtthatós Q polinommal és a δ, $\varepsilon \in \mathbf{R}$ paraméterekkel

$$c(x) := e^{\delta x}\cdot Q(x)\cdot \sin(\varepsilon x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor

$$c(x) = Q(x)\cdot e^{\delta x}\cdot \frac{e^{\imath\varepsilon x} - e^{-\imath\varepsilon x}}{2\imath} = \frac{1}{2\imath}\cdot Q(x)\cdot e^{(\delta+\imath\varepsilon)x} - \frac{1}{2\imath}\cdot Q(x)e^{(\delta-\imath\varepsilon)x},$$

ami nem más, mint két kvázipolinom összege. Tudjuk (ld. 7.9.4. Tétel), hogy ha $\delta + \imath\varepsilon$ az egyenlet P karakterisztikus polinomjának r-szeres gyöke $(r \in \mathbf{N})$, akkor egy alkalmas, legfeljebb m-edfokú R polinommal a

$$\varphi(x) := x^r\cdot R(x)\cdot e^{(\delta+\imath\varepsilon)x} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvényre

$$L_\varphi(x) := \varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\cdot \varphi^{(k)}(x) = \frac{1}{2\imath}\cdot Q(x)\cdot e^{(\delta+\imath\varepsilon)x} =$$

$$\frac{1}{2\imath}\cdot Q(x)\cdot e^{\delta x}\cdot \Big(\cos(\varepsilon x) + \imath\sin(\varepsilon x)\Big) \qquad x \in \mathbf{R}).$$

Mivel

$$\overline{L_\varphi(x)} = \overline{\varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\cdot \varphi^{(k)}(x)} = \overline{\varphi}^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\cdot \overline{\varphi}^{(k)}(x) = L_{\overline{\varphi}}(x) =$$

$$\overline{\frac{1}{2\imath}\cdot Q(x)\cdot e^{(\delta+\imath\varepsilon)x}} = -\frac{1}{2\imath}\cdot Q(x)\cdot e^{(\delta-\imath\varepsilon)x} =$$

$$-\frac{1}{2\imath}\cdot Q(x)\cdot e^{\delta x}\cdot \Big(\cos(\varepsilon x) - \imath\sin(\varepsilon x)\Big) \qquad x \in \mathbf{R}),$$

ezért

$$L_\varphi(x) + L_{\overline{\varphi}}(x) = L_{\varphi+\overline{\varphi}}(x) = e^{\delta x}\cdot Q(x)\cdot \sin(\varepsilon x) = c(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

azaz $\varphi+\overline{\varphi} \in \mathcal{M}$. A $\psi := \varphi+\overline{\varphi}$ függvényről nem nehéz megmutatni, hogy valamilyen, legfeljebb m-edfokú valós együtthatós R_1, R_2 polinomokkal

$$\psi(x) = x^r\cdot e^{\delta x}\cdot \Big(R_1(x)\cdot \cos(\varepsilon x) + R_2(x)\cdot \sin(\varepsilon x)\Big) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

alakú. Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha a c definíciójában sin helyett cos-t írunk.

Így pl. (egy $q > 0$ mellett) az

$$F(x) := q\cdot \sin(\omega x) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

külső erőnek megfelelő csillapítatlan ($\beta = 0$) kényszerrezgés esetén (ld. v) megjegyzés)

$$\delta = 0,\ Q(x) = q \quad (x \in \mathbf{R}),\ \varepsilon = \omega,$$

a karakterisztikus polinom pedig $P(x) := x^2 + \omega_0^2 \quad (x \in \mathbf{R})$. Az $\omega \neq \omega_0$ (ld. v) megjegyzés C1) eset) azt jelenti, hogy a $\delta + \imath\varepsilon = \imath\omega$ nem gyöke a P-nek, azaz $r = 0$, így van

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \alpha_1\cdot \cos(\omega x) + \alpha_2\cdot \sin(\omega x)$$

($\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbf{R}$) alakú megoldás, ahol (behelyettesítéssel)

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \frac{\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Ha viszont $\omega = \omega_0$ (ld. v) megjegyzés C2) eset), akkor az $\imath\omega$ egyszeres gyöke a P-nek ($r = 1$), következésképpen alkalmas $\alpha_3,\ \alpha_4 \in \mathbf{R}$ együtthatókkal

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto x\cdot \Big(\alpha_3 \cos(\omega x) + \alpha_4\cdot \sin(\omega x)\Big)$$

megoldás. Ismét egy egyszerű behelyettesítés után

$$\alpha_4 = 0,\ \alpha_3 = -\frac{q}{2\omega}$$

adódik.

xi) Nyilvánvaló, hogy ha a szóban forgó

$$\varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\cdot \varphi^{(k)} = c$$

n-edrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet c jobb oldala kvázipolinomok összege:

$$c = \sum_{j=0}^{s} c_j$$

(ahol $s \in \mathbf{N}$, a $c_0, ..., c_s$ függvények pedig kvázipolinomok), akkor van olyan partikuláris megoldás, amelyik ugyancsak kvázipolinomok összege. Nevezetesen, legyen ψ_j ($j = 0, ..., s$) olyan kvázipolinom, amelyik megoldása a

$$\varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\cdot \varphi^{(k)} = c_j$$

egyenletnek. Ekkor a $\psi := \sum_{j=0}^{s} \psi_j$ függvény megoldása a

$$\varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = c$$

feladatnak, hiszen

$$\psi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \psi^{(k)} = \sum_{j=0}^{s} \psi_j^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \sum_{j=0}^{s} \psi_j^{(k)} =$$

$$\sum_{j=0}^{s} \left(\psi_j^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \psi_j^{(k)} \right) = \sum_{j=0}^{s} c_j = c.$$

xii) Amint azt korábban már megjegyeztük, a nem állandó együtthatós magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek megoldása jóval bonyolultabb feladat, mint az állandó együtthatós eset. Különösen így van ez, ha a szóban forgó egyenlet nem is lineáris. Az $n = 2$ esetben illusztrálva mindezt legyen a $G \in \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ egy folytonos függvény, és keressünk olyan $\varphi \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi \in D^2$ függvényt (ld. i) megjegyzés), amelyikre a $\mathcal{D}_\varphi$ nyílt intervallum, minden $\mathcal{D}_\varphi \ni x$-re $\Big(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)\Big) \in \mathcal{D}_G$, és

$$G\Big(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)\Big) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_G).$$

Azt mondjuk, hogy ez a másodrendű differenciálegyenlet *hiányos*, ha egy alkalmas $H \in \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ folytonos függvénnyel

$$G(x, y, z, v) = H(x, z, v) \qquad \Big(y \in \mathbf{R},\ (x, z, v) \in \mathcal{D}_H\Big),$$

vagy

$$G(x, y, z, v) = H(y, z, v) \qquad \Big(x \in \mathbf{R},\ (y, z, v) \in \mathcal{D}_H\Big).$$

Az első esetben a (feltételezett) φ megoldásra

$$(1^o) \qquad H\Big(x, \varphi'(x), \varphi''(x)\Big) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

a második esetben

$$(2^o) \qquad H\Big(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)\Big) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$$

teljesül.

Ha az (1^o)-ben $\phi := \varphi'$, akkor

$$H\Big(x, \phi(x), \phi'(x)\Big) = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\phi = \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz a ϕ egy (implicit) elsőrendű közönséges differenciálegyenlet megoldása. A korábbi ismereteink alapján ezt sok esetben meg tudjuk oldani, amiből a φ függvény már könnyen meghatározható.

Legyen pl.

$$H(x,z,v) := v + \frac{z}{x+1} \qquad \Big((x,z,v) \in (-1,+\infty) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}\Big),$$

ekkor

$$\varphi''(x) + \frac{\varphi'(x)}{x+1} = 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi),$$

azaz

$$\phi'(x) = -\frac{1}{x+1} \cdot \phi(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\phi).$$

Ez egy homogén lineáris differenciálegyenlet, amelyiknek a (teljes) megoldásai (ld. 7.1.3.):

$$\phi(x) = \frac{\alpha}{x+1} \qquad \Big(x \in (-1,+\infty),\ \alpha \in \mathbf{R}\Big).$$

A

$$\varphi'(x) = \frac{\alpha}{x+1} \qquad \Big(x \in (-1,+\infty)\Big)$$

egyenlőségből

$$\varphi(x) = \alpha \cdot \ln(x+1) + \beta \qquad \Big(x \in (-1,+\infty),\ \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}\Big).$$

A (2^o) esetben tegyük fel, hogy $\varphi'(x) \neq 0 \quad (x \in \mathcal{D}_\varphi)$, ekkor a φ invertálható, és $\varphi^{-1} \in D$. Legyen

$$\psi := \varphi' \circ \varphi^{-1},$$

így

$$\psi' = \frac{\varphi'' \circ \varphi^{-1}}{\varphi' \circ \varphi^{-1}},$$

azaz

$$\varphi'' \circ \varphi^{-1} = \psi' \cdot \varphi' \circ \varphi^{-1} = \psi' \cdot \psi.$$

A (2^o) egyenlőség az $x := \varphi^{-1}(t) \quad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}})$ helyettesítéssel tehát a következő:

$$(2^{oo}) \qquad H\Big(t, \psi(t), \psi'(t)\psi(t)\Big) = 0 \qquad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}),$$

ami ismét csak egy (implicit) elsőrendű közönséges differenciálegyenlet. A ψ megoldás ismeretében a φ függvény a $\varphi' = \psi \circ \varphi$ elsőrendű explicit közönséges differenciálegyenletből számítható ki.

Tekintsük pl. a

$$H(y,z,v) := yv - 2z^2 + 2z \qquad \Big((y,z,v) \in \mathbf{R}^3\Big)$$

függvényt, azaz, amikor

$$\varphi(x)\cdot \varphi''(x) = 2\Big(\varphi'(x)\Big)^2 - 2\varphi'(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_\varphi).$$

A $\psi := \varphi' \circ \varphi^{-1}$ helyettesítéssel (feltételezve, hogy a (2^{oo})-höz vezető feltételek teljesülnek) a (2^{oo}) egyenlőség a következő:

$$t\cdot \psi'(t)\cdot \psi(t) = 2\psi^2(t) - 2\psi(t) \qquad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}).$$

Tegyük fel, hogy $0 \notin \mathcal{R}_\psi$, ekkor az előbbi egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$t\cdot \psi'(t) = 2\psi(t) - 2 \qquad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}).$$

Innen egy alkalmas $\mathbf{R} \ni \alpha$-val

$$\psi(t) = 1 + \alpha^2\cdot t^2 \qquad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}),$$

tehát a φ-t a

$$\varphi'(x) = \psi\Big(\varphi(x)\Big) = 1 + \alpha^2\cdot \varphi^2(x) \qquad (t \in \mathcal{D}_\varphi)$$

egyenletből határozhatjuk meg: $\varphi(x) = x + \gamma \quad (x, \gamma \in \mathbf{R})$, vagy

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha}\cdot \mathrm{tg}\,(\alpha\cdot x + \beta) \qquad \left(\alpha \neq 0,\, \beta \in \mathbf{R},\, \alpha\cdot x + \beta \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big)\right).$$

xiii) Adott $1 \le n \in \mathbf{N}$, $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbf{R}$, $a_n := 1$ mellett legyen

$$P(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

és vezessük be az alábbi differenciáloperátort:

$$\widehat{P}(f) := \sum_{k=0}^{n} a_k\cdot f^{(k)} \qquad (f \in D^n).$$

Világos, hogy a 7.9. pontban tárgyalt n-edrendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletben szereplő

$$\varphi^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\cdot \varphi^{(k)} = 0$$

egyenlőség röviden így írható: $\widehat{P}(\varphi) = 0$. Emlékeztetünk továbbá a $\lambda \in \mathbf{K}$ paraméterrel definiált

$$e_\lambda(x) := e^{\lambda x} \qquad (x \in \mathbf{K})$$

exponenciális függvényre, ill. egy $f : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ függvény esetén az f leképezés

$$f_{(\lambda)}(t) := f(t + \lambda) \qquad (t \in \mathbf{K})$$

eltoltjára.

Mutassuk meg először is, hogy ha valamilyen $1 \le m \in \mathbf{N}$ és $b_0, ..., b_{m-1} \in \mathbf{R}$, $b_m := 1$ esetén adott a

$$Q(x) := \sum_{k=0}^{m} b_k x^k \qquad (x \in \mathbf{K})$$

polinom is, akkor

$$\widehat{PQ}(f) = \widehat{P}(\widehat{Q}(f)) \qquad (f \in D^{n+m}).$$

Ui. egyrészt

$$(PQ)(x) = P(x) \cdot Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_k b_j x^{k+j} \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

másrészt

$$\widehat{P}(\widehat{Q}(f)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \left(\widehat{Q}(f)\right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j f^{(j)}\right)^{(k)} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_k b_j \cdot f^{(k+j)} = \widehat{PQ}(f) \qquad (f \in D^{n+m}).$$

Azt sem nehéz belátni, hogy tetszőleges $\lambda \in \mathbf{K}$ és $f : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$, $f \in D^n$ esetén

$$\widehat{P}(f \cdot e_\lambda) = e_\lambda \cdot \widehat{P}_{(\lambda)}(f).$$

Valóban,

$$\widehat{P}(f \cdot e_\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \left(f \cdot e_\lambda\right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} \cdot \lambda^{k-j} \cdot e_\lambda.$$

Ugyanakkor

$$P_{(\lambda)}(x) = P(x + \lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x + \lambda)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j \cdot \lambda^{k-j} \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

amiből az állításunk már nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy a fenti P polinomnak a $\mu \in \mathbf{K}$ szám ν-szörös gyöke (valamilyen $1 \leq \nu \in \mathbf{N}$ mellett), azaz egy alkalmas R polinommal

$$P(x) = (x-\mu)^{\nu} \cdot R(x) \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

és $R(\mu) \neq 0$. Legyen továbbá

$$h_j(x) := x^j \qquad (x \in \mathbf{K},\ j \in \mathbf{N}).$$

Ekkor világos, hogy

$$P_{(\mu)} = h_{\nu} \cdot R_{(\mu)},$$

így az előbbiek szerint minden $j = 0, ..., \nu - 1$ kitevővel

$$\widehat{P}(h_j \cdot e_{\mu}) = e_{\mu} \cdot \widehat{P}_{(\mu)}(h_j) = e_{\mu} \cdot \widehat{R}_{(\mu)}\Big(\widehat{h}_{\nu}(h_j)\Big) = e_{\mu} \cdot \widehat{R}_{(\mu)}\Big(h_j^{(\nu)}\Big) = 0,$$

hiszen $j < \nu$ miatt $h_j^{(\nu)} \equiv 0$. Következésképpen a $h_j \cdot e_{\mu}$ $(j = 0, ..., \nu - 1)$ függvények a $\widehat{P}(\varphi) = 0$ homogén egyenlet megoldásai (ld. 7.9.3. Tétel).

Legyen most Q is egy polinom, $\lambda \in \mathbf{K}$, és valamilyen $r \in \mathbf{N}$ kitevővel

$$P(x) = (x-\lambda)^{r} \cdot T(x) \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

ahol a T polinomra $T(\lambda) \neq 0$ (röviden: a λ szám a P-nek r-szeres gyöke). Tegyük fel, hogy az R polinom fokszáma legfeljebb annyi, mint a Q fokszáma, és tekintsük a

$$\varphi := h_r \cdot R \cdot e_{\lambda}$$

függvényt. Mikor igaz (ld. 7.9.4. Tétel), hogy

$$\widehat{P}(\varphi) = Q \cdot e_{\lambda}$$

teljesül? A fentiek alapján azt mondhatjuk, hogy

$$\widehat{P}(\varphi) = e_{\lambda} \cdot \widehat{P}_{(\lambda)}(h_r \cdot R),$$

ahol $P_{(\lambda)} = h_r \cdot T_{(\lambda)}$. Következésképpen

$$\widehat{P}_{(\lambda)}(h_r \cdot R) = \widehat{h}_r\Big(\widehat{T}_{(\lambda)}(h_r \cdot R)\Big) = \Big(\widehat{T}_{(\lambda)}(h_r \cdot R)\Big)^{(r)}.$$

Írjuk fel a $T_{(\lambda)}$ polinomot egy S polinom segítségével az alábbi alakban:

$$T_{(\lambda)}(x) = T(x+\lambda) = T(\lambda) + x \cdot S(x) \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Tehát $T_{(\lambda)} = T(\lambda) + h_1 \cdot S$. Mindezek alapján azt kapjuk, hogy

$$Q \cdot e_\lambda = \widehat{P}(h_r \cdot R \cdot e_\lambda) = e_\lambda \cdot \left(\widehat{T}_{(\lambda)}(h_r \cdot R)\right)^{(r)} = e_\lambda \cdot \left(T(\lambda) \cdot h_r \cdot R + (\widehat{S}(h_r \cdot R))'\right)^{(r)} =$$

$$e_\lambda \cdot \left(T(\lambda) \cdot (h_r \cdot R)^{(r)} + (\widehat{S}(h_r \cdot R))^{(r+1)}\right),$$

azaz

$$T(\lambda) \cdot (h_r \cdot R)^{(r)} + (\widehat{S}(h_r \cdot R))^{(r+1)} = Q.$$

Ha itt (alkalmas $\alpha_0, ..., \alpha_m, \beta_0, ..., \beta_m \in \mathbf{R}$ együtthatókkal)

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \cdot x^k, \ R(x) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k \cdot x^k \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

akkor

$$(h_r \cdot R)(x) = \beta_m \cdot x^{m+r} + \dots \qquad (x \in \mathbf{K}),$$

amiből

$$(h_r \cdot R)^{(r)}(x) = (m+r) \cdot \ldots \cdot (m+1) \cdot \beta_m \cdot x^m + \ldots = \frac{(m+r)!}{m!} \cdot \beta_m \cdot x^m + \ldots \quad (x \in \mathbf{K}).$$

Így (együttható-összehasonlítással)

$$\frac{(m+r)!}{m!} \cdot \beta_m \cdot T(\lambda) = \alpha_m,$$

más szóval

$$\beta_m = \frac{m!}{(m+r)!} \cdot \frac{1}{T(\lambda)} \cdot \alpha_m,$$

és így tovább.

xiv) Az eddigiekben a közönséges differenciálegyenletekre nyert eredmények esetenként sikerrel alkalmazhatók a parciális differenciálegyenletek megoldása során is. Példaként tekintsük a 7.6. iv) megjegyzésben már említett, a rezgő húr mozgását modellező, a $q > 0$ paraméterrel megadott

$$\partial_{22} u = q \cdot \partial_{11} u$$

egyenletet. Emlékeztetünk arra, hogy itt (valamilyen, a húr hosszát megadó) pozitív l szám mellett a keresett

$$u : [0, l] \times [0, +\infty) \to \mathbf{R}$$

függvény kétszer folytonosan differenciálható, amelyre az alábbi perem-, ill. kezdeti feltételek teljesülnek:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad (t \in \mathbf{R}), \ u(x,0) = f(x), \ \partial_2 u(x,0) = g(x) \quad (x \in [0,l])$$

(adott $f, g \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényekkel). Euler, Lagrange, D'Alembert, D. Bernoulli és Fourier munkássága nyomán kristályosodott ki (a más feladatokra is alkalmazható) alábbi módszer. Ennek az alapötlete a következő: keressük az u megoldást

$$u(x,t) = F(x) \cdot G(t) \qquad \big(x \in [0,l], t \in [0,+\infty)\big)$$

alakban, ahol $F, G \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kétszer folytonosan differenciálható (alkalmas) függvények. Ekkor

$$\partial_{22}u(x,t) = G''(t)F(x), \; \partial_{11}u(x,t) = F''(x)G(t) \qquad \big(x \in [0,l], t \in [0,+\infty)\big),$$

azaz a $\partial_{22}u = q \cdot \partial_{11}u$ egyenlőség miatt teljesülnie kell a

$$G''(t)F(x) = q \cdot F''(x)G(t) \qquad \big(x \in [0,l], t \in [0,+\infty)\big)$$

egyenlőségnek. Világos, hogy ez csak úgy lehetséges, ha egy megfelelő $\lambda \in \mathbf{R}$ konstanssal

$$G''(t) = \lambda G(t) \quad \big(t \in [0,+\infty)\big), \; F''(x) = \frac{\lambda}{q}F(x) \quad \big(x \in [0,l]\big).$$

Mindez nem más, mint (két) homogén lineáris állandó együtthatós másodrendű differenciálegyenlet.

Ha itt $\lambda = 0$, akkor (ld. 7.9.) valamilyen $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$ együtthatókkal

$$G(t) = c_1 + c_2 t \quad (t \in \mathbf{R}), \; F(x) = c_3 + c_4 x \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Következésképpen

$$u(x,t) = (c_1 + c_2 t)(c_3 + c_4 x) \quad (x \in [0,l], \, t \geq 0).$$

Mivel $u(0,t) = c_3(c_1 + c_2 t) = 0 \;\; (t \geq 0)$, ezért $c_3 = 0$, vagy $c_1 + c_2 t = 0 \;\; (t \geq 0)$, azaz $c_1 = c_2 = 0$. Az utóbbi esetben $u \equiv 0$. Ha $|c_1| + |c_2| > 0$, akkor tehát $c_3 = 0$, és

$$u(l,t) = c_4 l(c_1 + c_2 t) = 0 \qquad (t \geq 0),$$

amiből $c_4 = 0$ következik. Így ismét csak $u \equiv 0$.

Tegyük most fel, hogy $\lambda > 0$. Ekkor a magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletek megoldásáról mondottak alapján (ld. 7.9.)

$$G(t) = \alpha \cdot e^{t\sqrt{\lambda}} + \beta \cdot e^{-t\sqrt{\lambda}} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

és

$$F(x) = \gamma \cdot e^{x\sqrt{\lambda/q}} + \delta \cdot e^{-x\sqrt{\lambda/q}} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

(ahol $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ alkalmas együtthatók). Ismét figyelembe véve a peremfeltételeket

$$u(0,t) = (\gamma+\delta)\cdot\left(\alpha\cdot e^{t\sqrt{\lambda}} + \beta\cdot e^{-t\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \qquad (t \geq 0),$$

ezért $\alpha\cdot e^{t\sqrt{\lambda}} + \beta\cdot e^{-t\sqrt{\lambda}} = 0 \quad (t \geq 0)$, vagy $\gamma+\delta = 0$. Az első eset (könnyen beláthatóan) csak az $\alpha = \beta = 0$ együtthatókkal állhat fenn, ekkor $u \equiv 0$. Ha tehát $|\alpha| + |\beta| > 0$, akkor $\gamma + \delta = 0$. Továbbá

$$u(l,t) = \left(\gamma\cdot e^{l\sqrt{\lambda/q}} + \delta\cdot e^{-l\sqrt{\lambda/q}}\right)\left(\alpha\cdot e^{t\sqrt{\lambda}} + \beta\cdot e^{-t\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \qquad (t \geq 0),$$

amiből

$$\gamma\cdot e^{l\sqrt{\lambda/q}} + \delta\cdot e^{-l\sqrt{\lambda/q}} = \gamma\cdot\left(e^{l\sqrt{\lambda/q}} - e^{-l\sqrt{\lambda/q}}\right) = 0$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy vagy $\gamma = 0$, azaz egyúttal $\delta = 0$, vagy

$$e^{l\sqrt{\lambda/q}} - e^{-l\sqrt{\lambda/q}} = 0.$$

Az utóbbi egyenlőség azt jelentené, hogy $e^{2l\sqrt{\lambda/q}} = 1$, ami csak $\lambda = 0$ esetén állhatna fenn. Mivel most $\lambda > 0$, ezért $\gamma = \delta = 0$, más szóval ismét $u \equiv 0$.

Vizsgáljuk végül a $\lambda < 0$ esetet. A magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletek valós megoldásaira vonatkozó ismereteink szerint (ld. 7.9.)

$$G(t) = a\cdot\cos\left(t\sqrt{|\lambda|}\right) + b\cdot\sin\left(t\sqrt{|\lambda|}\right) \qquad (t \geq 0),$$

$$F(x) = c\cdot\cos\left(x\sqrt{|\lambda|/q}\right) + d\cdot\sin\left(x\sqrt{|\lambda|/q}\right) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

(valamilyen $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ együtthatókkal). Az

$$u(0,t) = c\cdot\left(a\cdot\cos\left(t\sqrt{|\lambda|}\right) + b\cdot\sin\left(t\sqrt{|\lambda|}\right)\right) = 0 \qquad (t \geq 0)$$

feltételből az előbbiekkel analóg módon kapjuk az $a = b = 0$ egyenlőséget, amikor is $u \equiv 0$, vagy $|a| + |b| > 0$ és $c = 0$, következésképpen

$$u(l,t) = d\cdot\sin\left(l\sqrt{|\lambda|/q}\right)\cdot\left(a\cdot\cos\left(t\sqrt{|\lambda|}\right) + b\cdot\sin\left(t\sqrt{|\lambda|}\right)\right) = 0 \qquad (t \geq 0).$$

Innen vagy $d = 0$, azaz ismét $u \equiv 0$ következik, vagy

$$\sin\left(l\sqrt{|\lambda|/q}\right) = 0.$$

Az utóbbi egyenlőség viszont azzal ekvivalens, hogy valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ számmal

$$\sqrt{|\lambda|} = \frac{\sqrt{q}\pi}{l}\cdot n.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ és $a_n, b_n, d_n \in \mathbf{R}$ paraméterekkel az

$$u_n(x,t) :=$$

$$d_n \cdot \sin(\pi n x/l) \cdot \Big(a_n \cdot \cos(\pi\sqrt{q}nt/l) + b_n \cdot \sin(\pi\sqrt{q}nt/l)\Big) \quad (x \in [0,l], t \geq 0)$$

függvények megoldások. A részletek mellőzésével (ld. 6.3.) jegyezzük meg, hogy alkalmas feltételek mellett az

$$u(x,t) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \qquad (x \in [0,l], t \geq 0)$$

(függvénysor-)összegfüggvény létezik, szintén megoldás, és a kezdeti feltételek a következő alakúak:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n d_n \cdot \sin(\pi n x/l) = f(x) \qquad (x \in [0,l]),$$

$$\partial_2 u(x,0) = \frac{\pi\sqrt{q}}{l} \sum_{n=0}^{\infty} b_n d_n \cdot n \cdot \sin(\pi n x/l) = g(x) \qquad (x \in [0,l]).$$

(Ezek az egyenlőségek tehát az f, ill. a g függvény Fourier-sorba (speciálisan szinuszsorba) fejtését (ld. 6.5.) jelentik.)

xv) Hasonlóan kezelhető az ún. *Dirichlet-probléma* is: keressük meg mindazokat a kétszer differenciálható $f \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvényeket, amelyekre

$$\partial_{11} f(x,y) + \partial_{22} f(x,y) = 0 \qquad \Big((x,y) \in K_1(0,0)\Big)$$

(azaz az origó középpontú nyílt egységkörlemezen az f kielégíti a (síkbeli) *Laplace-egyenletet*), és tetszőleges $\phi \in [0,2\pi]$ esetén létezik a

$$\lim_{r \to 1-0} f(r\cos\phi, r\sin\phi) = G(\phi)$$

(bal oldali) határérték, ahol $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ adott 2π szerint periodikus függvény. Legyen

$$F(r,\phi) := f(r \cdot \cos\phi, r \cdot \sin\phi) \qquad (0 \leq r < 1, 0 \leq \phi < 2\pi),$$

ekkor könnyen láthatóan (a $* := r \cdot \cos\phi, r \cdot \sin\phi$ rövidítéssel)

$$\partial_r F(r,\phi) = \partial_1 f(*) \cdot \cos\phi + \partial_2 f(*) \cdot \sin\phi,$$

$$\partial_{rr} F(r,\phi) = \partial_{11} f(*) \cdot \cos^2\phi + \partial_{12} f(*) \cdot \sin(2\phi) + \partial_{22} f(*) \cdot \sin^2\phi,$$

$$\partial_\phi F(r,\phi) = -\partial_1 f(*) r \cdot \sin\phi + \partial_2 f(*) r \cdot \cos\phi,$$

$$\partial_{\phi\phi}F(r,\phi) = -\partial_1 f(*)r\cdot\cos\phi - \partial_2 f(*)r\cdot\sin\phi + \partial_{11}f(*)r^2\cdot\sin^2\phi -$$
$$\partial_{12}f(*)r^2\cdot\sin(2\phi) + \partial_{22}f(*)r^2\cdot\cos^2\phi.$$

A most kapott azonosságokból (és az f-re vonatkozó $\partial_{11}f(*) + \partial_{22}f(*) = 0$ Laplace-egyenletből) adódik, hogy bármely $0 < r < 1$ esetén

$$\partial_{rr}F(r,\phi) + \frac{1}{r^2}\cdot\partial_{\phi\phi}F(r,\phi) = -\frac{1}{r}\cdot(\partial_1 f(*)\cdot\cos\phi + \partial_2 f(*)\cdot\sin\phi) = -\frac{1}{r}\cdot\partial_r F(r,\phi),$$

azaz (a Laplace-egyenlet „polárkoordinátás alakja")

$$\partial_{rr}F(r,\phi) + \frac{1}{r^2}\cdot\partial_{\phi\phi}F(r,\phi) + \frac{1}{r}\cdot\partial_r F(r,\phi) = 0 \qquad (0 < r < 1, 0 \le \phi < 2\pi).$$

Világos, hogy

$$F(r,\phi+2\pi) = F(r,\phi)\ ,\ \lim_{r\to 1-0} F(r,\phi) = G(\phi) \qquad (0 < r < 1, 0 \le \phi < 2\pi).$$

Keressük az F függvényt

$$F(r,\phi) = R(r)H(\phi) \qquad (0 \le r < 1, 0 \le \phi \le 2\pi)$$

alakban (alkalmas kétszer differenciálható $R, H \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényekkel, ahol H periodikus 2π szerint). Ekkor

$$R''(r)H(\phi) + \frac{1}{r^2}\cdot R(r)H''(\phi) + \frac{1}{r}\cdot R'(r)H(\phi) = 0 \qquad (0 < r < 1, 0 \le \phi < 2\pi),$$

azaz

$$H(\phi)\cdot\left(r^2R''(r) + rR'(r)\right) = -R(r)H''(\phi) \qquad (0 < r < 1, 0 \le \phi < 2\pi).$$

Innen (az $R(r) \ne 0, H(\phi) \ne 0$ feltétel mellett)

$$\frac{1}{R(r)}\cdot\left(r^2R''(r) + rR'(r)\right) = -\frac{1}{H(\phi)}H''(\phi)$$

adódik. Más szóval alkalmas $c \in \mathbf{R}$ állandóval

$$H''(\phi) + cH(\phi) = 0 \qquad (0 \le \phi < 2\pi),$$

és

$$r^2R''(r) + rR'(r) - cR(r) = 0 \qquad (0 < r < 1).$$

Az első egyenletből a xiv)-beli F meghatározásával analóg módon (a H függvény periodikusságát is szem előtt tartva) $c = n^2 \quad (n \in \mathbf{Z})$, ill. valamilyen $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ együtthatókkal

$$H(\phi) = \alpha\cdot\cos(n\phi) + \beta\cdot\sin(n\phi) \qquad (0 \le \phi < 2\pi)$$

következik. Az R-re vonatkozó (ún. *Euler-típusú*) egyenlet megoldásához tekintsük a

$$g(x) := R(e^x) \qquad (x < 0)$$

függvényt. Egyszerű számolással azt kapjuk, hogy

$$g''(x) - n^2 \cdot g(x) = 0 \qquad (x < 0).$$

„Látszik", hogy itt $n = 0$ nem lehet, különben $g(x) = a + bx \ \ (x < 0)$ alakú alkalmas $a, b \in \mathbf{R}$ együtthatókkal. Így

$$R(r) = g(\ln r) = a + b \cdot \ln r \qquad (0 < r < 1)$$

lenne, ami nem lehet, hiszen ez az R függvény nem lenne folytonos a 0-ban. Következésképpen $n \neq 0$, és (a g-t meghatározó másodrendű differenciálegyenlet „megoldóképlete" (ld. 7.9.) szerint) $\gamma, \delta \in \mathbf{R}$ konstansokkal

$$g(x) = \gamma \cdot e^{nx} + \delta \cdot e^{-nx} \qquad (x < 0).$$

Így

$$R(r) = g(\ln r) = \gamma \cdot r^n + \delta \cdot r^{-n} \qquad (0 < r < 1).$$

Az R függvény 0-beli folytonossága miatt itt csak $\delta = 0$ jöhet szóba, tehát

$$R(r) = \gamma \cdot r^n \qquad (0 < r < 1).$$

Azt kaptuk, hogy

$$F(r, \phi) = \gamma \cdot r^n \cdot \Big(\alpha \cdot \cos(n\phi) + \beta \cdot \sin(n\phi)\Big) \qquad (0 \leq r < 1, 0 \leq \phi < 2\pi),$$

ill. alkalmas feltételek mellett $\alpha_n, \beta_n \in \mathbf{R} \ \ (n \in \mathbf{N})$ együtthatókkal

$$F(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot \Big(\alpha_n \cdot \cos(n\phi) + \beta_n \cdot \sin(n\phi)\Big) \qquad (0 \leq r < 1, 0 \leq \phi < 2\pi).$$

A $\lim_{r \to 1-0} F(r, \phi) = G(\phi)$ feltétel azt jelenti, hogy létezik a

$$\lim_{r \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot \Big(\alpha_n \cdot \cos(n\phi) + \beta_n \cdot \sin(n\phi)\Big)$$

(véges) határérték, ami a $\sum \Big(\alpha_n \cdot \cos(n\phi) + \beta_n \cdot \sin(n\phi)\Big)$ végtelen sor ún. *Abel–Poisson-összegzését* jelenti.

xvi) Johann Bernoulli vetette fel 1696-ban az azóta (is) *brachisztochron-problémának* nevezett feladatot (*problema novum, ad cuius solutionem matematici invitantur* - íme egy új feladat, amelynek a megoldásához meghívom a matematikusokat). (A görög nyelvű elnevezést a legrövidebb idejű pálya meghatározásaként magyaríthatnánk.) A később *variációszámítás* címszó alatt meghatározott matematikai diszciplína kifejlődését (amely aztán Euler és Lagrange nevéhez fűződik) elindító feladat a következőképpen fogalmazható meg: adott két (különböző magasságban, de nem egy függőleges egyenesen lévő) pont. Tekintsük az összes olyan, a két pontot összekötő és a két pont által meghatározott függőleges síkban lévő görbéket, amelyeken a magasabban fekvő pontból valamilyen kezdősebességgel elindított (tömeg)pont eljut az alacsonyabban fekvő pontba. A kérdés most már az, hogy létezik-e az említett görbék között olyan, amelyet a csupán a nehézségi erőnek alávetett pont (a többi görbéhez képest) a legrövidebb idő alatt fut be? Ha a kérdésre a válasz „igen", akkor hogyan lehet ezt a minimális idejű görbét meghatározni?

Legyen ehhez a két pont által meghatározott síkban felvett („lefelé" irányított) derékszögű koordináta-rendszerben az egyik pont az origó, a másik pedig (valamilyen $\alpha > 0, \beta > 0$ mellett) (α, β). Az egyszerűség kedvéért csupán olyan görbéket fogunk figyelembe venni, amelyek mindegyike valamely folytonosan differenciálható $y : [0, \alpha] \to [0, +\infty)$ függvény grafikonjaként állítható elő. Világos, hogy a szóba jövő y függvényekre teljesülni kell az

$$y(0) = 0,\ y(\alpha) = \beta$$

ún. *peremfeltételnek.* Fizikai megfontolásokból azt kapjuk, hogy az előbbi y függvény által meghatározott görbe befutásához szükséges $\mathcal{T}(y)$ idő a következő:

$$\mathcal{T}(y) = \frac{1}{\sqrt{2q}} \int_0^\alpha \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{y(x) + \gamma}}\, dx,$$

ahol q a nehézségi gyorsulás, $\gamma := v^2/q$, $v\,(> 0)$ a kezdősebesség.

xvii) Hasonló jellegű a *legkisebb felszínű forgásfelület* meghatározása. Tekintsünk ui. valamilyen síkban egy ℓ egyenest, és az általa meghatározott két félsík közül az egyikben két pontot: P-t és Q-t úgy, hogy a rajtuk átmenő egyenes ne legyen merőleges az ℓ-re. A P, Q pontokat kössük össze sima görbékkel, majd utóbbiakat forgassuk meg az ℓ egyenes körül. Van-e a görbék között olyan, amelyre az ℓ körüli megforgatással előálló forgástest felszíne minimális? Ha van ilyen görbe, akkor hogyan lehet azt meghatározni?

A feladat matematikai modelljéhez legyen az említett síkban egy derékszögű koordináta-rendszer olyan, hogy az X tengelye az ℓ egyenes, $P = (0, \alpha)$, $Q = (\beta, \gamma)$, ahol $\beta > 0$, $\alpha, \gamma \geq 0$. Csak olyan görbéket veszünk figyelembe, amelyek mindegyike valamilyen kétszer folytonosan differenciálható $y : [0, \beta] \to \mathbf{R}$ függvény grafikonja. Nyilván $y(0) = \alpha$ és $y(\beta) = \gamma$. Jól ismert, hogy ekkor a $\operatorname{graf} y$ görbének az X tengely körüli megforgatásakor keletkező forgástest $\mathcal{F}(y)$ felszíne a következő:

$$\mathcal{F}(y) = 2\pi \int_0^\beta y(x) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx.$$

xviii) A most mondottakat kissé általánosabban fogalmazva meg, legyen adott a kétszer folytonosan differenciálható $f \in \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ függvény, és az $\mathbf{R}^2$ síkon rögzítsük az $(a, b), (c, d)$ pontokat, ahol $a < c$. A differenciálható $y : [a, c] \to \mathbf{R}$ függvény és az $x \in [a, c]$ pont esetén legyen továbbá

$$[y](x) := (x, y(x), y'(x)) \; (\in \mathbf{R}^3).$$

A továbbiakban *megengedett függvényosztálynak* nevezzük az

$$\mathcal{M} := \left\{ y : [a, c] \to \mathbf{R} : y \in C^2,\ y(a) = b,\ y(c) = d,\ [y](x) \in \mathcal{D}_f \ \ (x \in [a, c]) \right\}$$

halmazt. Tekintsük ezek után azt a $\Phi : \mathcal{M} \to \mathbf{R}$ *funkcionált,* amelyre

$$\Phi(y) := \int_a^c f([y](x))\, dx = \int_a^c f(x, y(x), y'(x))\, dx \qquad (y \in \mathcal{M}).$$

Hallgatólagosan feltételeztük, hogy $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Ez a helyzet pl. akkor, ha valamilyen konvex, nyílt $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbf{R}^2$ halmazzal $\mathcal{D}_f = \Omega \times \mathbf{R}$ és $(a, b), (c, d) \in \Omega$. (Ekkor ti. pl. az $y(x) := b + (d - b)(x - a)/(c - a) \ \ (x \in [a, c])$ függvényre $y \in \mathcal{M}$.) Innentől kezdve fel is tesszük, hogy a $\mathcal{D}_f$ halmaz ilyen szerkezetű.

A kérdés a következő: van-e olyan $y \in \mathcal{M}$, amire

$$\Phi(y) \leq \Phi(h) \qquad (h \in \mathcal{M})$$

igaz? Más szóval: van-e a Φ funkcionálnak minimuma? Ha igen (az $y \in \mathcal{M}$ függvényre), akkor nyilván $\operatorname{graf} y \subset \Omega$. Nem nehéz meggondolni, hogy a $\operatorname{graf} y$ halmaz kompaktsága miatt van olyan $\varepsilon > 0$ szám, amellyel a

$$h : [a, c] \to \mathbf{R},\ h \in C^2,\ h(a) = b,\ h(c) = d,\ \|h - y\|_\infty < \varepsilon$$

feltételnek eleget tevő h függvényekre $h \in \mathcal{M}$. Ha tehát

$$\eta : [a, c] \to \mathbf{R},\ \eta \in C^2,\ \eta(a) = \eta(c) = 0,$$

és a $\delta \in \mathbf{R}$ számra $|\delta| \cdot \|\eta\|_\infty < \varepsilon$ teljesül, akkor $y + \delta \cdot \eta \in \mathcal{M}$. (Feltesszük, hogy az η nem az azonosan nulla függvény.) Ez azt jelenti, hogy a

$$\varphi(\delta) := \int_a^c f([y + \delta\eta](x))\, dx \qquad \left(-\frac{\varepsilon}{\|\eta\|_\infty} < \delta < \frac{\varepsilon}{\|\eta\|_\infty} \right)$$

függvénynek a $\delta = 0$-ban minimuma van. A paraméteres integrállal kapcsolatban tanultak (ld. 4.5.6.) szerint a φ függvény differenciálható, következésképpen $\varphi'(0) = 0$, ahol minden $\delta \in \mathbf{R}$, $|\delta| < \varepsilon/\|\eta\|_\infty$ helyen

$$\varphi'(\delta) = \int_a^c \Big(\partial_2 f([y+\delta\eta](x))\cdot \eta(x) + \partial_3 f([y+\delta\eta](x))\cdot \eta'(x)\Big)\, dx.$$

Parciálisan integrálva azt mondhatjuk, hogy az

$$f_\delta(x) := \partial_3 f([y+\delta\eta](x)) \qquad (x \in [a,c])$$

jelöléssel

$$\varphi'(\delta) = \int_a^c \Big(\partial_2 f([y+\delta\eta](x)) - f'_\delta(x)\Big)\cdot \eta(x)\, dx \qquad (|\delta| < \varepsilon/\|\eta\|_\infty).$$

Tehát

$$0 = \varphi'(0) = \int_a^c \Big(\partial_2 f([y](x)) - f'_0(x)\Big)\cdot \eta(x)\, dx.$$

Könnyű belátni, hogy az utóbbi egyenlőség minden itt említett η függvényre csak úgy teljesülhet, ha

$$\partial_2 f([y](x)) - f'_0(x) = 0 \qquad (x \in [a,c])$$

(*Euler–Lagrange-egyenlet*). Jegyezzük meg, hogy

$$f'_0(x) = \partial_{31} f([y](x)) + \partial_{32} f([y](x))\cdot y'(x) + \partial_{33} f([y](x))\cdot y''(x) \qquad (x \in [a,c]),$$

ezért az Euler–Lagrange-egyenlet az $x \in [a,c]$ helyeken a következő:

$$\partial_2 f([y](x)) = \partial_{31} f([y](x)) + \partial_{32} f([y](x))\cdot y'(x) + \partial_{33} f([y](x))\cdot y''(x).$$

Speciálisan, ha $\partial_1 f \equiv 0$, akkor

$$\partial_{31} f([y](x)) = \partial_3(\partial_1 f([y](x))) = 0 \qquad (x \in [a,c])$$

miatt

$$(*) \qquad \partial_2 f([y](x)) = \partial_{32} f([y](x))\cdot y'(x) + \partial_{33} f([y](x))\cdot y''(x).$$

Legyen ekkor

$$\Psi(x) := f([y](x)) - \partial_3 f([y](x))\cdot y'(x) \qquad (x \in [a,c]).$$

A tett feltételek alapján a Ψ függvény differenciálható és tetszőleges $x \in [a,c]$ helyen ($\partial_1 f \equiv 0$ és a $(*)$ miatt)

$$\Psi'(x) = \partial_2 f([y](x))\cdot y'(x) - y'(x)\cdot \Big(\partial_{32} f([y](x))\cdot y'(x) + \partial_{33} f([y](x))\cdot y''(x)\Big) =$$

$$= y'(x)\cdot \Big(\partial_2 f([y](x)) - \partial_{32} f([y](x))\cdot y'(x) - \partial_{33} f([y](x))\cdot y''(x)\Big) = 0.$$

Következéséppen a Ψ függvény konstans, azaz alkalmas $\mathbf{R} \ni K$-val

$$(**) \qquad f(x, y(x), y'(x)) - \partial_3 f(x, y(x), y'(x))\cdot y'(x) = K \qquad (x \in [a, c]).$$

Világos, hogy ha az y függvény eleget tesz a $(**)$-nak, és az $\{x \in [a, c] : y'(x) = 0\}$ halmaz legfeljebb véges, akkor az y eleget tesz a $(*)$-nak is.

xix) Tekintsük most a xvi) megjegyzésben említett brachisztochron-problémát (az ottani jelölésekkel):

$$f(x, z, w) := \frac{1}{\sqrt{2q}}\cdot \sqrt{\frac{1 + w^2}{\gamma + z}} \qquad (x, w \in \mathbf{R}, z > -\gamma).$$

Nyilván igaz, hogy $\partial_1 f \equiv 0$ és a $(**)$ formula most a következő:

$$\sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{\gamma + y(x)}} - \frac{(y'(x))^2}{\sqrt{\Big(\gamma + y(x)\Big)\Big(1 + (y'(x))^2\Big)}} = K\cdot \sqrt{2q} \qquad (x \in [0, \alpha]),$$

azaz

$$\frac{1}{\sqrt{\Big(\gamma + y(x)\Big)\Big(1 + (y'(x))^2\Big)}} = K\cdot \sqrt{2q} \qquad (x \in [0, \alpha]).$$

(Belátható, hogy a feladat szempontjából szóba jövő y-ra $\{x \in [0, \alpha] : y'(x) = 0\}$ legfeljebb 1 elemű.) Tehát (a $\nu := 1/(4qK^2)$ jelöléssel) az y függvényre

$$\gamma + y = \frac{2\nu}{1 + (y')^2}$$

adódik, amiből

$$y' = -\frac{4\nu\cdot y'y''}{\Big(1 + (y')^2\Big)^2}, \; y'' = -\frac{\Big(1 + (y')^2\Big)^2}{4\nu}.$$

Látszik, hogy $y'' < 0$, ezért az y' deriváltfüggvény szigorúan monoton fogyó. Legyen $\varphi := 2\,\mathrm{arcctg} \circ y'$, ekkor a φ szigorúan monoton csökken, és

$$\gamma + y(x) = \frac{2\nu}{1 + \mathrm{ctg}^2(\varphi(x)/2)} = \nu\cdot \Big(1 - \cos(\varphi(x))\Big) \qquad (x \in [0, \alpha]),$$

tehát

$$\gamma + y(\varphi^{-1}(t)) = \nu\cdot (1 - \cos t) \qquad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}).$$

Az utóbbi egyenlőséget „deriválva" azt kapjuk, hogy

$$y'(\varphi^{-1}(t))\Big(\varphi^{-1}\Big)'(t) = \nu\cdot \sin t \qquad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}),$$

ill. $y'(\varphi^{-1}(t)) = \mathrm{ctg}(t/2)$ miatt

$$\Big(\varphi^{-1}\Big)'(t) = \nu\cdot \frac{\sin t}{\mathrm{ctg}(t/2)} = 2\nu\cdot \sin^2(t/2) = \nu\cdot (1-\cos t) \qquad (t \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}).$$

Alkalmas $\delta \in \mathbf{R}$ konstanssal tehát

$$\varphi^{-1}(t) + \delta = \nu\cdot (t - \sin t).$$

Következésképpen az $x = \varphi^{-1}(t)$ jelöléssel az y függvény grafikonját az alábbi egyenletrendszer írja le:

$$x = \nu\cdot (t-\sin t) - \delta$$
$$y(x) = \nu\cdot (1-\cos t) - \gamma,$$

ami egy *ciklois*-ív. (Utóbbit az $y = -\alpha$ egyenletű egyenesen gördített q sugarú kör egy pontja írja le.)

xx) A xvii) megjegyzésbeli legkisebb felszínű forgásfelület vizsgálatakor (az ottani jelölésekkel)

$$f(x,u,w) := 2\pi u\cdot \sqrt{1+w^2} \qquad (x,u,w \in \mathbf{R}).$$

Nyilván igaz, hogy $\partial_1 f \equiv 0$, ezért a fenti $(**)$ egyenlőség most a következő:

$$2\pi y(x)\cdot \sqrt{1+\Big(y'(x)\Big)^2} - 2\pi\cdot \frac{y(x)\cdot \Big(y'(x)\Big)^2}{\sqrt{1+\Big(y'(x)\Big)^2}} = K \qquad (x \in [0,\beta]),$$

tehát

$$\frac{y(x)}{\sqrt{1+\Big(y'(x)\Big)^2}} = \frac{K}{2\pi} =: \delta \qquad (x \in [0,\beta]).$$

Innen $y^2 = \delta^2\cdot \Big(1+(y')^2\Big)$, ill. (deriválással) $yy' = \delta^2\cdot y'y''$ következik. Most is meggondolható, hogy az y' deriváltfüggvény legfeljebb egy pontban lehet nulla. Így $y = \delta^2\cdot y''$, ami egy homogén lineáris másodrendű differenciálegyenlet (ld. 7.9.). A „megoldóképlet" szerint

$$y(x) = c_1\cdot e^{x/\delta} + c_2\cdot e^{-x/\delta} \qquad (x \in [0,\beta])$$

(alkalmas $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ együtthatókkal). Világos, hogy

$$\Big(y'(x)\Big)^2 = \frac{c_1^2}{\delta^2}\cdot e^{2x/\delta} + \frac{c_2^2}{\delta^2}\cdot e^{-2x/\delta} - \frac{2c_1c_2}{\delta^2} \qquad (x \in [0,\beta]),$$

ezért a fenti $y^2 = \delta^2 \cdot \Big(1 + (y')^2\Big)$ egyenlőségből

$$c_1^2 \cdot e^{2x/\delta} + c_2^2 \cdot e^{-2x/\delta} + 2c_1c_2 = \delta^2 + c_1^2 \cdot e^{2x/\delta} + c_2^2 \cdot e^{-2x/\delta} - 2c_1c_2 \qquad (x \in [0, \beta]),$$

azaz $4c_1c_2 = \delta^2$ következik szükséges feltételként. Ez azt jelenti, hogy

$$y(x) = c_1 \cdot e^{x/\delta} + \frac{\delta^2}{4c_1} \cdot e^{-x/\delta} \qquad (x \in [0, \beta]),$$

ahol $0 \neq c_1 \in \mathbf{R}$. Nem nehéz belátni, hogy alkalmas $\mathbf{R} \ni q$-val

$$y(x) = \delta \cdot \operatorname{ch}(x/\delta + q) \qquad (x \in [0, \beta]).$$

(Emlékeztetünk a *koszinuszhiperbolikusz-függvényre*:

$$\operatorname{ch}(t) := \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad (t \in \mathbf{R}).)$$

Megjegyezzük, hogy az $y(0) = \alpha$, $y(\beta) = \gamma$ feltételeknek, tehát a

$$\delta \cdot \operatorname{ch} q = \alpha, \ \delta \cdot \operatorname{ch}(\beta/\delta + q) = \gamma$$

egyenlőségeknek is teljesülniük kell. Könnyen ellenőrizhető azonban, hogy adott α, β, γ mellett ez utóbbi (a δ-ra és a q-ra vonatkozó) egyenletrendszer nem mindig, ill. nem mindig egyértelműen oldható meg.

Arcképcsarnok

A jegyzetben az alábbi matematikusok név szerint is említésre kerültek:

- Niels Henrik **Abel**
  (Frindöe, 1802. VIII. 5. – Froland, 1829. IV. 6.)
- Jean Le Rond **d'Alembert**
  (Párizs, 1717. XI. 17. – Párizs, 1783. X. 29.)
- Cesare **Arzelà**
  (St. Stef. di Magra, 1847. III. 6. – St. Stef. di Magra, 1912. III. 15.)
- Stefan **Banach**
  (Krakkó, 1892. III. 30. – Lvov, 1945. VIII. 31.)
- Daniel **Bernoulli**
  (Groningen, 1700. II. 8. – Bázel, 1782. III. 17.)
- Jacob (Jaques) **Bernoulli**
  (Bázel, 1654. XII. 27. – Bázel, 1705. VIII. 16.)
- Johann **Bernoulli**
  (Bázel, 1667. VII. 27. – Bázel, 1748. I. 1.)
- Friedrich Wilhelm **Bessel**
  (Minden, 1784. VII. 22. – Königsberg, 1846. III. 17.)
- Bernard Placidus Johann Nepomuk **Bolzano**
  (Prága, 1781. X. 5. – Prága, 1848. XII. 18.)
- Félix Edouard Justin Émile **Borel**
  (Aveyron, 1871. I. 7. – Párizs, 1956. II. 3.)
- Luitzen Egbertus Jan **Brouwer**
  (Overschie, 1881. II. 27. – Blaricum, 1966. XII. 2.)

- Viktor Jakovlevics **Bunyakovszkij**
  (Bar, 1804. XII. 16. – Szentpétervár, 1889. XII. 12.)
- Renato **Cacciopoli**
  (Nápoly, 1904. I. 20. – Nápoly, 1959. V. 8.)
- Georg Ferdinand Ludwig Philipp **Cantor**
  (Szentpétervár, 1845. III. 3. – Halle, 1918. I. 6.)
- Lennart Axel Edvard **Carleson**
  (Stockholm, 1928. III. 18. –)
- Augustin Louis **Cauchy**
  (Párizs, 1789. VIII. 21. – Sceaux, 1857. V. 23.)
- Arthur **Cayley**
  (Richmond, 1821. VIII. 16. – Cambridge, 1895. I. 26.)
- Benoit Paul Émile **Clapeyron**
  (Párizs, 1799. II. 26. – Párizs, 1864. I. 28.)
- Gabriel **Cramer**
  (Genf, 1704. VII. 31. – Bagnols-sur-Ceze, 1752. I. 4)
- Jean Gaston **Darboux**
  (Nimes, 1842. VIII. 14. – Párizs, 1917. II. 23.)
- Ulisse **Dini**
  (Pisa, 1845. XI. 14. – Pisa, 1918. X. 28.)
- Johann Peter Gustav Lejeune **Dirichlet**
  (Düren, 1805. II. 13. – Göttingen, 1859. V. 5.)
- Leonhard **Euler**
  (Bázel, 1707. IV. 15. – Bázel, 1783. IX. 18.)
- **Fejér** Lipót
  (Pécs, 1880. II. 9. – Budapest, 1959. X. 15.)

- Jean Baptiste Joseph **Fourier**
  (Auxerre, 1768. III. 21. – Párizs, 1830. V. 16.)
- Maurice René **Fréchet**
  (Maligny, 1878. IX. 2. – Párizs, 1973. VI. 4.)
- Guido **Fubini**
  (Venice, 1879. I. 19. – New York, 1943. VI. 6.)
- Johann Carl Friedrich **Gauss**
  (Brunswick, 1777. IV. 30. – Göttingen, 1855. II. 23.)
- Paul **Guldin**
  (Sankt Gallen, 1577. VI. 12. – Graz, 1643. XI. 3.)
- Jacques Salomon **Hadamard**
  (Versailles, 1865. XII. 8. – Párizs, 1963. X. 17.)
- Sir William Rowan **Hamilton**
  (Dublin, 1805. VIII. 4. – Dublin, 1865. IX. 2.)
- Heinrich Eduard **Heine**
  (Berlin, 1821. III. 16. – Halle, 1881. X. 21.)
- Hermann Ludwig Ferdinand von **Helmholtz**
  (Potsdam, 1821. VIII. 31. – Berlin, 1894. IX. 8.)
- David **Hilbert**
  (Königsberg, 1862. I. 23. – Göttingen, 1943. II. 14.)
- Ludwig Otto **Hölder**
  (Stuttgart, 1859. XII. 22. – Leipzig, 1937. VIII. 29.)
- Carl Gustav Jacob **Jacobi**
  (Potsdam, 1804. XII. 10. – Berlin, 1851. II. 18.)
- Marie Ennemond Camille **Jordan**
  (Lyon, 1838. I. 5. – Párizs, 1922. I. 22.)

- Joseph-Louis **Lagrange**
  (Turin, 1736. I. 25. – Párizs, 1813. IV. 10.)
- Pierre-Simon **Laplace**
  (Beaumont-en-Auge, 1749. III. 23. – Párizs, 1827. III. 5.)
- Henri Léon **Lebesgue**
  (Beauvais, 1875. VI. 28. – Párizs, 1941. VII. 26.)
- Gottfried Wilhelm von **Leibniz**
  (Lipcse, 1646. VII. 1. – Hannover, 1716. XI. 14.)
- Ernst Leonard **Lindelöf**
  (Helsingfors, 1870. III. 7. – Helsinki, 1946. VI. 4.)
- Rudolf Otto Sigismund **Lipschitz**
  (Königsberg, 1832. V. 14. – Bonn, 1903. X. 7.)
- Guillaume Francois Antoine Marquis de **L'Hospital**
  (Párizs, 1661. ? – Párizs, 1704. II. 2.)
- Gaspard **Monge**
  (Beaune, 1746. V. 9. – Párizs, 1818. VII. 28.)
- Augustus De **Morgan**
  (Madura, 1806. VI. 27. – London, 1871. III. 18.)
- Sir Isaac **Newton**
  (Woolsthorpe, 1643. I. 4. – London, 1727. III. 31.)
- Raymond Edward Alan Christopher **Paley**
  (Bournemouth, 1907. I. 7. – Banff, 1933. IV. 7.)
- Marc-Antoine **Parseval** des Chênes
  (Rosieres-aux-Salines, 1755. IV. 27. – Párizs, 1836. VIII. 16.)
- Giuseppe **Peano**
  (Cuneo, 1858. VIII. 27. – Turin, 1932. IV. 20.)

- Charles Émile **Picard**
  (Párizs, 1856. VII. 24. – Párizs, 1941. XII. 11.)
- Siméon Denis **Poisson**
  (Pithiviers, 1781. VI. 21. – Sceaux, 1840. IV. 25.)
- Hans **Rademacher**
  (Wandsbeck, 1892. IV. 3. – Haverford, 1969. II. 7.)
- Paul David Gustav du **Bois-Reymond**
  (Berlin, 1831. XII. 2. – Freiburg, 1889. IV. 7.)
- Georg Friedrich Bernhard **Riemann**
  (Breselenz, 1826. IX. 17. – Selasca, 1866. VII. 20.)
- Arthur **Sard**
  (New York City, 1909. VII. 28. – Bázel, 1980. VIII. 31.)
- James Joseph **Sylvester**
  (London, 1814. IX. 3. – London, 1897. III. 15.)
- Brook **Taylor**
  (Edmonton, 1685. VIII. 18. – Somerset House, 1731. XII. 29.)
- Andrei Nyikolajevics **Tyihonov**
  (Gzhatska, 1906. X. 30. – Moszkva, 1993. X. 7.)
- Joseph Leonard **Walsh**
  (Washington, 1895. IX. 21. – College Park, 1973. XII. 6.)
- Karl Theodor Wilhelm **Weierstrass**
  (Ostenfelde, 1815. X. 31. – Berlin, 1897. II. 19.)
- Josef-Maria Hoëné de **Wronski**
  (Wolsztyn, 1778. VIII. 23. – Neuilly-sur-Seine, 1853. VIII. 8.)
- William Henry **Young**
  (London, 1863. X. 20. – Lausanne, 1942. VII. 7.)

Tárgymutató