1 Konvergencia

1.1 Definíció

Legyen $(X,\ \rho)$ metrikus tér és $x := (x_n) : \mathbb{N} \to X$ sorozat. Ekkor x sorozat **konvergens** ha

$$(*) \qquad \exists\, \alpha \in X : \forall\, \varepsilon > 0 : \underline{\exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n > N} : \rho(x_n,\ \alpha) < \varepsilon$$

Az aláhúzott részt sokszor "majdnem minden $n \in \mathbb{N}$" - nek, vagy röviden "$\mathrm{m.m}\ n \in \mathbb{N}$" - nek fogjuk csúfolni.

$(*)$ ekvivalens azzal, hogy $\forall\ K(\alpha) : x_n \in K(\alpha)$

$(*)$ ekvivalens azzal is, hogy $\lim \rho(x_n,\ \alpha) = 0$

Ekvivalens metrikák esetén a konvergencia ugyanaz (Ha $\rho \sim \tilde{\rho}$ akkor (X, ρ) konvergens $\iff$ $(X, \tilde{\rho})$ konvergens).

1.2 Határérték egyértelműsége

Ha $(*)$ igaz akkor α egyértelműen létezik

Bizonyítás

Indirekt módon t.f.h $\beta \in X$ is olyan, hogy

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > M : \rho(x_n,\ \beta) < \varepsilon$$

Ekkor

$$0 \le \rho(\alpha,\ \beta) \le \rho(\alpha,\ x_n) + \rho(x_n,\ \beta) < 2\varepsilon \implies \\ \rho(\alpha,\ \beta) = 0 \implies \alpha = \beta$$

1.3 Halmazok zártságának jellemzése konvergens sorozatokkal

Legyen $\emptyset \neq A \subset X$. Ekkor $A \in \mathcal{C}_\rho \iff$ minden $(x_n) : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozatra igaz, hogy $\lim x_n \in A$

Bizonyítás

$\implies$ Legyen $A \in \mathcal{C}_\rho$ és $(x_n) : \mathbb{N} \to A$ konvergens. Indirekt tegyük fel, hogy

$$\alpha = \lim{x_n} \not \in A \implies \alpha \in X \setminus A \in \mathcal{T}_\rho.$$

Ekkor $\exists\ K(\alpha) : K(\alpha) \subset X \setminus A$ tehát $K(\alpha) \cap A = \emptyset$, ami pedig ellentmond annak, hogy $x_n \in K(\alpha)$ (m.m. $n \in \mathbb{N}$) mivel x_n A - ba képez.

$\Longleftarrow$ Indirekt tegyük fel, hogy $A \notin \mathcal{C}_\rho \implies X \setminus A \notin \mathcal{T}_\rho$ azaz $\exists \alpha \in X \setminus A,\ \forall K(\alpha) : K(\alpha) \not\subset X \setminus A$ azaz $\exists x \in K(\alpha) : x \in A$

Speciel $\exists x_n \in K_{\frac{1}{n}}(\alpha) \cap A \quad (n \in \mathbb{N}^+)$

Legyen $(x_n) : \mathbb{N}^+ \to A$ az előbbi tagokból képzett sorozat.

Ekkor $\rho(x_n,\ \alpha) < \frac{1}{n} \to 0$ ha $n \to \infty \implies \lim(\rho(x_n,\ \alpha)) = 0$ tehát (x_n) konergens és $\lim(x_n) = \alpha \implies \alpha \in A$.

2 Vektorsorozatok

Legyen $(X,\ \rho) \coloneqq (\mathbb{K}^s,\ \rho_p) \quad (s \in \mathbb{N}^+,\ 1 \le p \le \infty),\ x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^s$.

Ha $x_n = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_s}) \in \mathbb{K}^s$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, akkor legyen $i = 1, \dots, s$ és $x_n^{(i)} : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ ahol $x_n^{(i)} \coloneqq x_{n_i}$ (az i-edik **koordinátasorozat**).

2.1 Koordináta-sorozatok szerepe

Legyen $(X, \rho) \coloneqq (\mathbb{K}^s, \rho_p) \quad (s \in \mathbb{N}^+,\ 1 \le p \le \infty)$ és $x \coloneqq (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^s$

$$(x_n) \text{ konvergens és } \lim(x_n) = \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \\ \iff \forall\ i = 1, \dots, s : x^{(i)} \text{ konvergens és } \lim x^{(i)} = \alpha_i$$

Bizonyítás

$\implies$ Tegyük fel, hogy (x_n) konvergens, és határértéke $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{K}^s$ Ekkor speciálisan ∞-re $$ \forall \varepsilon > 0\text{-ra} \quad \rho_\infin(x_n,\ \alpha) < \varepsilon $$

A metrika definíciójából $\rho_\infty(x_n,\ \alpha) = \max\limits_{1 \le k \le s} |x_{nk} - \alpha_k| = \max\limits_{1 \le k \le s} |x_n^{(k)} - \alpha| < \varepsilon$

Ebből $|x_n^{(i)} - \alpha_i| < \varepsilon$ m.m.n $\in \mathbb{N}$, azaz $\exists \lim x^{(i)} = \alpha_i$

$\Longleftarrow$ Tegyük fel, hogy $x^{(i)}$ koordináta-sorozat konvergens és $$ \forall\ i=1,\dots,s : \alpha_i \coloneqq \lim x^{(i)}. $$

Ekkor legyen $\alpha \coloneqq (\alpha_1, \dots \alpha_s) \in \mathbb{K}^s$ és $\varepsilon > 0$. Így $$ \forall\ i=1,\dots,s\ \exists\ N_i \in \mathbb{N}\text{ küszöbindex }, \mathbb{N} \ni n > N_i: |x_{n_i} - \alpha_i| < \varepsilon $

$Ekkorha$N \coloneqq \max{N_1,\dots N_s}$akkormindenn$n > N$és$i=1,\dots,s $számraigaz, hogy$|x_{n_i} - \alpha_i| < \varepsilon$ tehát

$$\rho_\infty(x_n, \alpha) = \max_{i=1,\dots,s} |x_{n_i} - \alpha_i| < \varepsilon \quad (\mathbb{N} \ni n > N).$$

Ez azt jelenti, hogy (x_n) sorozat konvergens és $\lim x_n = \alpha$.

3 Konvergencia $(C[a,\ b], \|.\|_\infty)$ térben

$(X, \rho) = (C[a,\ b], \rho_\infty)$

3.1 Pontonkénti konvergencia

Legyen $A \neq \emptyset$ és $(g_n) : \mathbb{N} \to C[a,b]$ **függvénysorozat** $(g_n : A \to \mathbb{K} \quad (n \in \mathbb{N}))$. Ekkor (g_n) **pontonként konvergens**, ha

$$\forall\ x \in A,\ \exists\ g : A \to \mathbb{K} \text{ hogy } : \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$$

Például $p = \infty$ esetén

$$\forall\ x \in A, \exists\ N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall\ \varepsilon > 0 : \max_{a \le x \le b} |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

3.2 Egyenletes konvergencia

Legyen $A \neq \emptyset$ és $(g_n) : \mathbb{N} \to C[a,b]$ függvénysorozat. Ekkor (g_n) **egyenletesen konvergens**, ha $$ \exists\ g:A\rightarrow \mathbb{K}\text{ hogy } \forall\ x \in A : \lim_{n\rightarrow\infty} {g_n(x)} = g(x) $$

Például $p = \infty$ esetén

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall\ x \in A : \max_{a \le x \le b} |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

4 Korlátosság

4.1 Definíció

(X, ρ) metrikus tér, $A \subset X$ **korlátos**, ha $\exists K(a) : A \subset K(a) \quad (*)$

$$(*) \iff \exists n \in \mathbb{N}, \exists K(a_i)\ (i = 0, 1, \dots, n) : A \subset \bigcup_{i=0}^{n} K(a_i);$$

$$(*) \iff \forall\, b \in X, \exists K(b) : A \subset K(b).$$

Korlátosság két ekvivalens metrika esetén ugyanaz.

4.2 Korlátos sorozatok

Legyen $(X,\ \rho)$ metrikus tér és $(x_n) : \mathbb{N} \to X$. Ekkor (x_n) korlátos ha $\mathcal{R}_{x_n}$ korlátos azaz $\exists\ K(a) : x_n \in K(a)$

4.2.1 Konvergencia és korlátosság

T.f.h $(x_n) : \mathbb{N} \to X$ konvergens. Ekkor (x_n) korlátos.

Bizonyítás

Legyen $\alpha := \lim(x_n) \implies$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N : x_n \in K_1(\alpha)$$

Legyen $\delta := \max\{\rho(x_0,\ \alpha), \ldots, \rho(x_N,\ \alpha)\}$ és $r := \max\{1,\ \delta\} + 1$ Ekkor $x_n \in K_r(\alpha) \quad (n \in \mathbb{N})$, azaz korlátos.

4.3 Vektorsorozatok korlátossága

$(X, \rho) := (\mathbb{K}^s, \rho_p) \quad (s \in \mathbb{N}^+, 1 \leq p \leq \infty),\ x := (x_n) : \mathbb{N} \to X$

x korlátos $\iff \forall i = 1, \ldots, s : x^{(i)}$ korlátos $\quad (\triangle)$

Ugyanis $p = \infty$ estén feltehető:

$\implies$

$$\exists r > 0,\ ||x_n||_\infty < r \quad (n \in \mathbb{N})$$
$$||x_n||_\infty = \max_{1 \leq i \leq s} |x_n^{(i)}| < r \implies \forall i = 1, \ldots, s : |x_n^{(i)}| < r$$

$\impliedby \forall\ i = 1, \ldots, s$ - re $\exists r_i > 0 : |x_n^{(i)}| < r_i$ tehát $||x_n||_\infty \leq \max\limits_{1 \leq i \leq s} |r_i| =: r$

4.4 Bolzano-Weierstrass-kiválasztási tétel

$(\triangle) \implies \forall i = 1, \ldots, s$-re $x^{(i)}$-nek van konvergens részsorozata.

Bizonyítás

Feltevésünk szerint a korlátos vektorsorozatnak minden koordinátasorozata korlátos. A számsorozatokra ismert Bolzano-Weierstrass tétel miatt $\exists \nu^{(1)}$ indexsorozat, hogy $x^{(1)} \circ \nu^{(1)}$ részsorozat konvergens.

Továbbá $x^{(2)} \circ \nu^{(1)}$ is korlátos. Ezért $\exists \nu^{(2)}: \quad x^{(2)} \circ \nu^{(1)} \circ \nu^{(2)}$ konvergens.

Ezt folytatva kapunk egy olyan $\nu := \nu^{(1)} \circ \dots \circ \nu^{(s)}$ indexsorozatot amire minden koordinátasorozat konvergens, tehát $x \circ \nu$ részsorozat is konvergens.

Teljesség

(X, ρ) metrikus térben $(x_n): \mathbb{N} \to X$ **Cauchy-sorozat**, ha

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ n, m > N : \rho(x_n,\ x_m) < \varepsilon$$

(x_n) konvergens $\implies$ (x_n) Cauchy-sorozat (fordítva nem mindig működik)

(X, ρ) teljes, ha $\forall (x_n): \mathbb{N} \to X$ Cauchy-sorozatra (x_n) konvergens.

Teljesség két ekvivalens metrika esetén ugyanaz.

$(X,\ \rho) \equiv (X,\ ||.||)$ teljes normált tér $\implies$ $(X,\ ||.||)$ **Banach-tér**

$(X,\ \rho) \equiv (X,\ <.>)$ teljes euklideszi tér $\implies$ $(X,\ <.>)$ **Hilbert-tér**

$(C[a,\ b],\ ||.||_\infty)$ teljes

Bizonyítás

$1^\circ \quad (f_n): \mathbb{N} \to C[a,\ b]$ Cauchy-sorozat, azaz

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ n, m > N,\ \forall x \in [a,\ b] : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

$2^\circ \quad \forall x \in [a,\ b]: \quad (f_n(x)): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat $\implies$ $\mathbb{R}$ teljes, ezért "Cauchy-sorozat $\iff$ konvergens"

Legyen $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Ekkor

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > N,\ \forall x \in [a,\ b] : |f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

$3^\circ \quad f \in C[a,\ b]$ ugyanis $\forall x, z \in [a,\ b] : \forall n \in \mathbb{N},\ n > N : |f(x) - f(z)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(z)| + |f_n(z) - f(z)| \leq 2\varepsilon + |f_n(x) - f_n(z)|$

DE $f_n \in C[a,\ b] \implies \exists\delta > 0,\ \forall z \in [a,\ b],\ |x - z| < \delta : |f_n(x) - f_n(z)| < \varepsilon \implies f \in C\{x\}$

4° Tehét $\rho_\infty(f_n,\ f) \leq \varepsilon \quad (2^\circ\ miatt) \implies \rho_\infty(f_n,\ f) \to 0 \quad (n \to \infty)$

Megjegyzés

(f_n) egyenletesen konvergál az f-hez

Egyenletes konvergencia esetén $\int_a^b \lim(f_n) = \lim(\int_a^b f_n)$