4. gyakorlat

Megjegyzés

Hatványmódszer: Az abszolút értékben legnagyobb (domináns) sajátértéket és sajátvektort közelíti a következő iteráció:

$$x^{(0)} \neq 0 \quad (\in \mathbb{R}^n) \quad \text{kezdővektor}$$
$$x^{(k+1)} := Ax^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Célszerű néhány lépés után vagy lépésenként normálni a vektorokat, hogy az alul- illetve túlcsordulást elkerüljük.

Tétel: Tétel a hatványmódszerről

- Legyen A normális, vagyis létezzen sajátvektorokból álló ortonormált bázisa: $(v_1, \dots, v_n)$.
- A sajátértékeire $|\lambda_n| > |\lambda_{n-1}| \geq \dots \geq |\lambda_1|$.
- Az $x^{(0)} = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ kezdővektorra $c_n = \langle x^{(0)}, v_n \rangle \neq 0$. ($c_n$ az $x^{(0)}$-nak a v_n irányú komponense.)

Ekkor

- $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^k} x^{(k)} = c_n v_n$.
- $\lim_{k\to\infty} \frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}} = \lambda_n$, ahol $|x_i^{(k)}| = \|x^{(k)}\|_\infty$.
- Ha $A = A^*$, akkor $\lim_{k\to\infty} \frac{\langle x^{(k+1)}, x^{(k)} \rangle}{\langle x^{(k)}, x^{(k)} \rangle} = \lambda_n$.

Megjegyzés

Inverz iteráció: Az A^{-1}-re alkalmazott hatványmódszer, csak invertálható mátrixra alkalmazható. Az abszolút értékben legkisebb sajátértéket és sajátvektort közelíti a következő iteráció:

$$x^{(0)} \neq 0 \quad (\in \mathbb{R}^n) \quad \text{kezdővektor}$$
$$x^{(k+1)} := A^{-1}x^{(k)} \quad \text{helyett az} \quad Ax^{(k+1)} = x^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

(Csak gyakorlaton számolunk kézzel mátrix inverzzel)

Tétel: Tétel az inverz iterációról

- Legyen A normális, vagyis létezzen sajátvektorokból álló ortonormált bázisa: $(v_1, \ldots, v_n)$.
- A sajátértékeire $|\lambda_1| < |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_n|$.
- Az $x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ kezdővektorra $c_1 = \langle x^{(0)}, v_1 \rangle \neq 0$. ($c_1$ az $x^{(0)}$-nak a v_1 irányú komponense.)

Ekkor

- $\lim_{k\to\infty} \lambda_1^k x^{(k)} = c_1 v_1$.
- $\lim_{k\to\infty} \frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}} = \frac{1}{\lambda_1}$, ahol $|x_i^{(k)}| = \|x^{(k)}\|_\infty$.
- Ha $A = A^*$, akkor $\lim_{k\to\infty} \frac{\langle x^{(k+1)}, x^{(k)} \rangle}{\langle x^{(k)}, x^{(k)} \rangle} = \frac{1}{\lambda_1}$.

1. feladat

Közelítsük az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix domináns sajátértékét és sajátvektorát hatványmódszerrel az $x_0 = [1, 1, 1]^T$ kezdővektorból indulva!

2. feladat

Közelítsük az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix domináns sajátértékét és sajátvektorát hatványmódszerrel az $x_0 = e_1$ kezdővektorból indulva! Hasonlítsuk össze a hagyományos közelítést a Rayleigh-hányadossal kapottal!

3. feladat

Közelítsük az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix legkisebb abszolút értékű sajátértékét és sajátvektorát inverz iterációval az $x_0 = e_1$ kezdővektorból indulva!

4. feladat

Közelítsük az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix legkisebb abszolút értékű sajátértékét és sajátvektort inverz iterációval az alábbi kezdővektorokból indulva:

a) $x_0 = e_1$

b) $x_0 = [1, 1, 1]^T$

c) $x_0 = e_2$

5. feladat

Otthoni gyakorló feladat Alkalmazzuk az 1. feladat b) mátrixára és eredményével a Hotelling-féle rangszámcsökkentést, majd a kapott mátrixra újra a hatványmódszert!

6. feladat

Otthoni gyakorló feladat Alkalmazzuk az 1. feladat b) mátrixra és eredményével *Householder* transzformációval a rangszámcsökkentést, majd a kapott mátrixra újra a hatványmódszert! Adjuk meg a kapott sajátvektorokból A sajátvektorait! (A *Householder* transzformáció a P_{12} permutáció mátrix lesz.)

7. feladat

Készítsük el a programot a hatványmódszerre (*normálással*), mely mindkét sajátérték közelítést tudja!

- Bemenő paraméterek: A (mátrix)
x_0 (kezdővektor)
N (lépésszám).
- Kimenő paraméterek: lambda (sajátérték közelítés)
v (sajátvektor közelítés).
- Kiegészítés: A programot eltolással is készítsük el, ekkor egy p eltolás paramétert is bevezetünk.

1. megoldás

Alkalmazzuk lépésenként a hatványmódszert.

$$x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 56 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = Ax_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 56 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 232 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés

A domináns sajátérték közelítése a komponensek hányadosával történik, ahol az indexet mindig az előző lépés eredményeképpen kapott közelítő vektor legnagyobb abszolút értékű komponense alapján választjuk.

Az x_0 vektornak nincs legnagyobb komponense, tehát az indexet tetszőleges megválaszthatom. Most közelítsünk mondjuk a 2. index szerint:

$$\lambda_{max} \approx \frac{12}{1} = 12$$

Az x_1 vektor legnagyobb komponense a második, így a 2. index szerint közelítünk:

$$\lambda_{max} \approx \frac{56}{12} = \frac{14}{3}$$

Az x_2 vektor legnagyobb komponense a második, így a 2. index szerint közelítünk:

$$\lambda_{max} \approx \frac{232}{56} = \frac{29}{7}$$

A sajátvektor sejtés: $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Mivel az A mátrix nem önadjungált ($A \neq A^*$), így a Rayleigh-hányadost nem alkalmazzuk.

2. megoldás

Közelítsük a domináns sajátértéket és sajátvektort hatványmódszerrel az $x_0 = e_1$ kezdővektorból indulva! Alkalmazzuk lépésenként a hatványmódszert.

$$x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = Ax_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -13 \end{bmatrix}$$

A domináns sajátérték közelítése a komponensek hányadosával történik, ahol az indexet a kapott vektor legnagyobb abszolút értékű komponens alapján választjuk.

Az x_0 vektor legnagyobb komponense az első, így az 1. index szerint közelítünk:

$$\lambda_{max} \approx \frac{2}{1} = 2$$

Az x_1 vektor legnagyobb komponense az első, így az 1. index szerint közelítünk:

$$\lambda_{max} \approx \frac{5}{2} = 2.5$$

Az x_2 vektor legnagyobb komponense az első, így az 1. index szerint közelítünk:

$$\lambda_{max} \approx \frac{14}{5} = 2.8$$

Mivel az A mátrix önadjungált, így a Rayleigh-hányados is alkalmazható.

Megjegyzés

Ha az $A = A^*$, tehát az A önadjungált, akkor minden esetben a Rayleigh-hányadost alkalmazzuk, hiszen ez igazoltan gyorsabb konvergenciát biztosít. Mivel a szimmetrikus mátrixok önadjungáltak, ezért ilyenkor mindig a Rayleigh-hányadost használjuk közelítésre. A feladat első részében csak szemléltetés céljából nem használtuk, hogy a különbség látható legyen.

Rayleigh-hányadossal:

$$\lambda_{max} = \frac{\langle x_1, x_0 \rangle}{\langle x_0, x_0 \rangle} = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lambda_{max} = \frac{\langle x_2, x_1 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle} = \frac{14}{5} = 2.8$$

$$\lambda_{max} = \frac{\langle x_3, x_2 \rangle}{\langle x_2, x_2 \rangle} = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 14 \\ -13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \right\rangle} = \frac{122}{41} \approx 2.9756$$

Sejtés: $\lambda_{max} \approx 3$, $v \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

3. megoldás

Megjegyzés

Emlékezzünk rá, hogy az A^{-1} sajátértékei az A sajátértékeinek a reciprokai, vagyis $\frac{1}{\lambda_i}$ $(i = 1, \dots, n)$. A sajátvektorok azonosak.

Alkalmazzuk az inverz iterációt arra, hogy az abszolút értékben legkisebb sajátértéket és sajátvektort közelítsük lépésenként.

Először számoljuk ki az inverzet:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés

Érdemes úgy számolni, hogy a mátrixokból és a vektorokból kiemelünk skaláris tagokat úgy, hogy azokban egész számok legyenek. Így könnyebb a mátrix szorzást elvégezni, hiszen ekkor egész számokkal kell dolgoznunk. A szorzásban szereplő skaláris tagokat pedig szimplán összeszorozzuk.

Az $x_0 = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ kezdővektorból indulva:

$$x_1 = A^{-1} x_0 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = A^{-1} x_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = A^{-1}x_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\left(\frac{1}{9}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{27}\begin{bmatrix}14\\13\end{bmatrix}$$

Mivel A (és így A^{-1} is) önadjungált, a Rayleigh-hányados jobb közelítést ad A^{-1} domináns sajátértékére (ami A legkisebb abszolút értékű sajátértéke). Jelöljük μ-vel A^{-1} sajátértékeit.

$$\mu_{max} \approx \frac{\langle x_1, x_0\rangle}{\langle x_0, x_0\rangle} = \frac{\langle \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\rangle}{\langle \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\rangle} = \frac{2/3}{1} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \lambda_{min} \approx \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\mu_{max} \approx \frac{\langle x_2, x_1\rangle}{\langle x_1, x_1\rangle} = \frac{\langle \frac{1}{9}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\rangle}{\langle \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\rangle} = \frac{14/27}{5/9} = \frac{14}{15} \quad \rightarrow \quad \lambda_{min} \approx \frac{15}{14} \approx 1.0714$$

$$\mu_{max} \approx \frac{\langle x_3, x_2\rangle}{\langle x_2, x_2\rangle} = \frac{\langle \frac{1}{27}\begin{bmatrix}14\\13\end{bmatrix}, \frac{1}{9}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}\rangle}{\langle \frac{1}{9}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}, \frac{1}{9}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}\rangle} = \frac{122/243}{41/81} = \frac{122}{123} \quad \rightarrow \quad \lambda_{min} \approx \frac{123}{122} \approx 1.0082$$

Sejtés: $\lambda_{min} \approx 1$, $v \approx \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. megoldás

Alkalmazzuk az inverz iterációt arra, hogy az abszolút értékben legkisebb sajátértéket és sajátvektort közelítsük lépésenként. Először számoljuk ki az inverzet:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1/4 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

a) Induljunk az $x_0 = e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ kezdővektorból.

$$x_1 = A^{-1}x_0 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1/4 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$x_2 = A^{-1}x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5/4 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = A^{-1}x_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ -21/4 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A domináns sajátérték közelítése A^{-1}-re:

Az x_0 vektor legnagyobb komponense az első (és a második), így az 1. index szerint közelítünk:

$$\mu_{max} \approx \frac{1}{1} = 1 \implies \lambda_{min} \approx 1$$

Az x_1 vektor legnagyobb komponense a második, így a 2. index szerint közelítünk:

$$\mu_{max} \approx \frac{-5/4}{-1} = \frac{5}{4} \implies \lambda_{min} \approx \frac{4}{5}$$

Az x_2 vektor legnagyobb komponense a második, így a 2. index szerint közelítünk:

$$\mu_{max} \approx \frac{-21/16}{-5/4} = \frac{21}{20} \implies \lambda_{min} \approx \frac{20}{21}$$

Sejtés: $\lambda_{min} \approx 1$, $v \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -4/3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

b) Induljunk az $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ kezdővektorból.

$$x_1 = A^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7/4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = A^{-1}x_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ -39/4 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16 \\ -39 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = A^{-1}x_2 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ -39 \\ 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16 \\ -167/4 \\ 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 64 \\ -167 \\ 64 \end{bmatrix}$$

A domináns sajátérték közelítése A^{-1}-re:

Az x_0 vektornak nincs legnagyobb komponense, így mondjuk például a 2. index szerint közelítünk:

$$\mu_{max} \approx \frac{-7/4}{1} = -1.75 \implies \lambda_{min} \approx -4/7 \approx -0.5714$$

Az x_1 vektor legnagyobb komponense a második, így a 2. index szerint közelítünk:

$$\mu_{max} \approx \frac{-39/16}{-7/4} = \frac{39}{28} \approx 1.3928 \implies \lambda_{min} \approx 28/39 \approx 0.7179$$

Az x_2 vektor legnagyobb komponense a második, így a 2. index szerint közelítünk:

$$\mu_{max} \approx \frac{-167/64}{-39/16} = \frac{167}{156} \approx 1.0705 \implies \lambda_{min} \approx 156/167 \approx 0.9341$$

c) Induljunk az $x_0 = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ kezdővektorból.

$$x_1 = A^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = A^{-1}x_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = A^{-1}x_2 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A domináns sajátérték közelítése A^{-1}-re:

Az x_0 vektor legnagyobb komponense a második, így a 2. index szerint közelítünk:

$$\mu_{max} \approx \frac{1/4}{1} = 0.25 \implies \lambda_{min} \approx 4$$

Az x_1 vektor legnagyobb komponense a második, így a 2. index szerint közelítünk:

$$\mu_{max} \approx \frac{1/16}{1/4} = 0.25 \implies \lambda_{min} \approx 4$$

Az x_2 vektor legnagyobb komponense a második, így a 2. index szerint közelítünk:

$$\mu_{max} \approx \frac{1/64}{1/16} = 0.25 \implies \lambda_{min} \approx 4$$

Mivel itt az x_0 kezdővektor a második komponensnél egy, így az inverz iteráció nem ad közelítést a legkisebb abszolút értékű sajátértékre.

Gondoljuk végig, hogy mi okozhatja a problémát, hogy másik sajátértékre közelítünk, mint amit várunk.

5. megoldás

Otthoni gyakorló feladat.

6. megoldás

Otthoni gyakorló feladat.

7. megoldás

Órai gyakorló feladat.