12. gyakorlat

Definíció: Numerikus integrálás ötlete

Tekintsük az $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$ felosztást és az általánosabb tárgyalásmódhoz a $w(x) \ge 0$ súlyfüggvényt. Feltesszük, hogy $\int_a^b w(x)\,dx < \infty$. Közelítsük az $f(x)$ függvényt az interpolációs polinomjának Lagrange-alakjával, $L_n(x)$-el.

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)w(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k)\ell_k(x)w(x)\,dx =$$
$$= \sum_{k=0}^n f(x_k) \underbrace{\int_a^b \ell_k(x)w(x)\,dx}_{=:A_k} = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

Definíció: Interpolációs kvadratúra formulák

1. A $\sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ formulát *kvadratúra formulának* nevezzük.

2. A kvadratúra formula *interpolációs típusú*, ha

$$A_k = \int_a^b \ell_k(x)w(x)\,dx \quad (k = 0, \ldots, n).$$

Tétel: Pontossági tétel

$$\forall\, f \in P_n\text{-re} \quad \int_a^b f(x)w(x)\,dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$
$$\Leftrightarrow \quad A_k = \int_a^b \ell_k(x)w(x)\,dx \quad (k = 0, \ldots, n)$$

Tétel: Érintő formula

$$\int_a^b f \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) =: E(f)$$

Hibaformula:

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - E(f) = \frac{(b-a)^3}{24} \cdot f''(\eta).$$

Tétel: Trapéz formula

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)) =: T(f)$$

Hibaformula:

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\eta).$$

Tétel: Simpson formula

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) =: S(f)$$

Hibaformula:

Ha $f \in C^4[a;b]$, ekkor $\exists \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - S(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

Tétel: Trapéz összetett formula

$[a;b]$-t m egyenlő részre osztjuk és minden részintervallumon trapéz formulát ($T(f)$) alkalmazunk.

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2m} \cdot \left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_k) + f(b)\right) =: T_m(f)$$

Hibaformula:

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - T_m(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot f''(\eta).$$

Megjegyzés

A megjegyzendő együttható sorozat: $1, 2, 2, \ldots, 2, 2, 1$.

Tétel: Simpson összetett formula

Legyen m páros és $[a;b]$-t m egyenlő részre osztjuk, majd az $I_k := [x_{2k-2}, x_{2k}]$, $(k = 1, \dots, \frac{m}{2})$ részintervallumokra Simpson formulát ($S(f)$) alkalmazunk. Vagyis a belső felezőpontokat is megszámoztuk, így $\frac{m}{2}$ Simpson formulát használunk.

$$S_m(f) := \frac{b-a}{3m} \cdot \left(f(a) + 4 \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2k}) + f(b) \right)$$

$$\int_a^b f \approx S_m(f)$$

Hibaformula:

Ha $f \in C^4[a;b]$, ekkor $\exists \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

Megjegyzés

A megjegyzendő együttható sorozat: $1, 4, 2, 4, \dots, 4, 2, 4, 1$.

1. feladat

Interpolációs típusúak-e a következő kvadratúra formulák? (két megoldás) Milyen fokszámú polinomokra pontosak? (a tétel alapján és a valóságban)

a)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \left(f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

b)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \left(f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

2. feladat

Az $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ értékét közelítsük az

a) érintő,

b) trapéz és

c) Simpson formulával!

3. feladat

Vegyük az $\int_1^2 \frac{1}{x} = \ln 2$ értékét.

a) Közelítsük érintő, trapzéz és Simpson formulával!

b) Becsüljük a közelítések hibáját a hibaformulákkal!

c) Hány trapéz illetve Simpson formulát kell használnunk, ha $\ln(2)$ értékét 10^{-4} pontossággal szeretnénk közelíteni?

1. megoldás

Az egyszerűség kedvéért legyen a súlyfüggvény minden esetben az konstans 1 függvény ($w \equiv 1$).

Kétféle módszer is van:

1. módszer: Definíció szerint igazoljuk.

2. módszer: Pontossági tétellel: $\forall f \in P_n$-re pontos-e? Ellenőrizzük!

a) **1. módszer szerint:**

Ebben az esetben az alappontjaink $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Határozzuk meg a hozzájuk tartozó Lagrange alappolinomokat:

$$l_0(x) = \frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1 - \sqrt{2}x}{2}$$
$$l_1(x) = \frac{x + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}x + 1}{2}$$

Ezt felhasználva ellenőrizzük azt, hogy interpolációs-e:

$$A_0 = 1 \stackrel{?}{=} \int_{-1}^{1} \frac{1 - \sqrt{2}x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 1 \quad \checkmark$$
$$A_1 = 1 \stackrel{?}{=} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}x + 1}{2} dx = \left[\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = 1 \quad \checkmark$$

Azaz valóban interpolációs típusú a kvadratúra formula.

2. módszer szerint:

$$\mathbb{1} : \int_{-1}^{1} 1 = 2 \stackrel{?}{=} 1 + 1 \checkmark$$
$$id : \int_{-1}^{1} x dx = 0 \stackrel{?}{=} -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \checkmark$$
$$id^2 : \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \neq \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \Rightarrow x^2\text{-re nem pontos!}$$

Tehát a közelítés interpolációs típusú és elsőfokú polinomra pontos.

b) **1. módszer szerint:**

Ebben az esetben az alappontjaink $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Határozzuk meg a hozzájuk tartozó Lagrange alappolinomokat:

$$l_0(x) = \frac{x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1 - \sqrt{3}x}{2}$$
$$l_1(x) = \frac{x + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}x + 1}{2}$$

Ezt felhasználva ellenőrizzük azt, hogy interpolációs-e:

$$A_0 = 1 \stackrel{?}{=} \int_{-1}^{1} \frac{1-\sqrt{3}x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 1 \quad \checkmark$$

$$A_1 = 1 \stackrel{?}{=} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}x+1}{2} dx = \left[\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} = 1 \quad \checkmark$$

Azaz valóban interpolációs típusú a kvadratúra formula.

2. módszer szerint:

$$\mathbb{1} : \int_{-1}^{1} 1 = 2 \stackrel{?}{=} 1 + 1 \checkmark$$

$$id : \int_{-1}^{1} x dx = 0 \stackrel{?}{=} -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \checkmark$$

$$id^2 : \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \stackrel{?}{=} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \checkmark$$

$$id^3 : \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \stackrel{?}{=} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \checkmark$$

$\forall f \in P_3$-ra pontos $\Rightarrow$ Gauss-típusú (és interpolációs egyben)

Mivel mindkét formula két alappontra épül, az interpolációs kvadratúra formula legfeljebb a lineáris polinomokra lesz pontos. Lásd az első példát.

A második példában az alappontok speciálisak (lásd Legendre-Gauss típusú formulák), ezért magas a pontossági fokszám.

2. megoldás

A vizsgált érték:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Érintő formulával:

$$E(f) = (1-0) f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0.25$$

Trapéz formulával:

$$T(f) = \frac{1-0}{2}(f(0) + f(1)) = \frac{1}{2}(0^2 + 1^2) = \frac{1}{2} = 0.5$$

Simpson formulával:

$$S(f) = \frac{1-0}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right) = \frac{1}{6}\left(0^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \text{pontos!}$$

3. megoldás

A vizsgált érték:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2$$

a) Közelítsük az értéket érintő formulával:

$$E(f) = (2-1)f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$$

Trapéz formulával:

$$T(f) = \frac{2-1}{2}(f(1) + f(2)) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Simpson formulával:

$$S(f) = \frac{2-1}{6}\left(f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right) = \frac{1}{6}\left(1 + 4\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{6} = \frac{25}{36} \approx 0.6944$$

b) Hibabecslések:

$$|\ln 2 - E(f)| \leq \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

$$|\ln 2 - T(f)| \leq \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$|\ln 2 - S(f)| \leq \frac{4!}{4! \cdot 5!} = \frac{1}{120}$$

c)

$$|\ln 2 - T_m(f)| \leq \frac{2}{12m^2}(2-1)^3 = \frac{1}{6m^2} \leq 10^{-4}$$

$$\frac{10^4}{6} \leq m^2$$

$$\Rightarrow 41 \leq m$$

41 db $T(f)$-re van szükségünk.

$$|\ln 2 - S_m(f)| \leq \frac{2}{15m^4} \leq 10^{-4}$$

$$m^4 \geq \frac{2 \cdot 10^4}{15} = 1333.\overline{3}$$

$$m \geq (1333.\overline{3})^{1/4} \approx 6.04$$

Mivel m egész, ezért $m \geq 7$. Simpson-formula alkalmazásához m páros kell, így a legkisebb megfelelő $m = 8$, tehát $\frac{m}{2} = 4$ db Simpson-formula szükséges.