Numerikus módszerek 2.

6. előadás: Csebisev polinomok

Krebsz Anna

ELTE IK

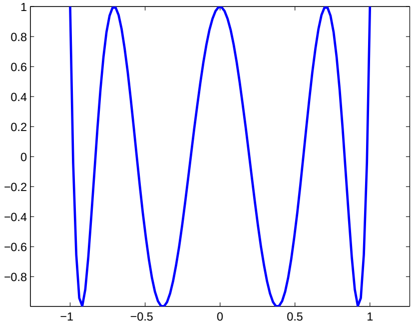
Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék

Definíció: Csebisev-polinom

A $T_n(x) := \cos(n \cdot \arccos(x))$, $x \in [-1; 1]$ függvényt n-edfokú (elsőfajú) Csebisev-polinomnak nevezzük.

A 8-adfokú Csebisev-polinom:



1. Tétel: Rekurzió

$$T_0(x) := 1, \quad T_1(x) := x,$$
$$T_{n+1}(x) := 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Biz.: Vezessük be az $\alpha = \arccos(x)$ jelölést ($x = \cos(\alpha)$):

$$2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) = 2\cos(\alpha)\cos(n\alpha) - \cos((n-1)\alpha) =$$
$$= 2\cos(\alpha)\cos(n\alpha) - [\cos(n\alpha)\cos(\alpha) + \sin(n\alpha)\sin(\alpha)] =$$
$$= \cos(n\alpha)\cos(\alpha) - \sin(n\alpha)\sin(\alpha) = \cos((n+1)\alpha) = T_{n+1}(x).$$

2. Tétel:

$T_n \in P_n$ és főegyütthatója: 2^{n-1} ($n \geq 1$)-re.

Definíció:

$$\widetilde{T}_n := \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

az 1 főegyütthatós Csebisev-polinom. $\widetilde{T}_n \in P_n^{(1)}$, ahol
$P_n^{(1)}$: az 1 főegyütthatós n-edfokú polinomok halmaza.

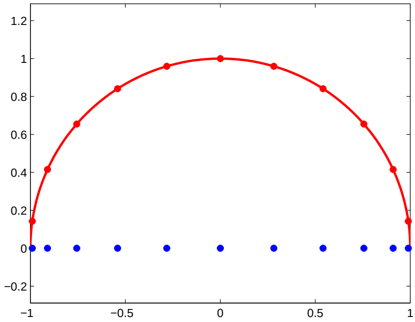
3. Tétel:

- T_n-nek n db különböző valós gyöke van $[-1; 1]$-en.
- A gyökök a 0-ra szimmetrikusan helyezkednek el.
- Ha n páros, akkor T_n páros függvény,
  ha n páratlan, akkor T_n páratlan függvény.

Biz.: $\cos(n \arccos(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in Z)$

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

A 11-edfokú Csebisev-polinom gyökei:



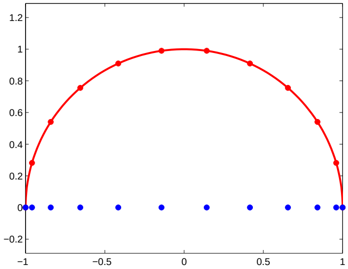
4. Tétel:

T_n-nek $n+1$ db szélsőérték helye van $[-1;1]$-en.

Biz.: $\cos(n\arccos(x)) = (-1)^k \iff n\arccos(\xi_k) = k\pi, \ (k \in Z)$

$$\xi_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \ (k = 0, 1, \ldots, n)$$

A 11-edfokú Csebisev-polinom szélsőértékhelyei:



5. Tétel: $(T_n, n \in \mathbb{N})$ ortogonális polinomrendszer

A Csebisev-polinomok ortogonális rendszert alkotnak $[-1; 1]$-en a $w(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ súlyfüggvénnyel, azaz

$$\langle T_n, T_k \rangle_w = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) \cdot T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 0 \quad n \neq k.$$

Biz.: Hf. Helyettesítéses integrállal $y := \arccos(x)$ változó bevezetésével.

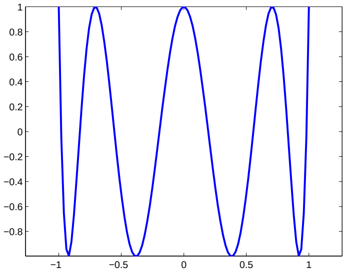
6. Tétel: Csebisev-tétel

A $(T_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer extremális tulajdonsága:

$$\min_{\widetilde{Q} \in P_n^{(1)}} \|\widetilde{Q}\|_\infty = \|\widetilde{T}_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}},$$

ahol $\|\widetilde{Q}\|_\infty := \|\widetilde{Q}\|_{C[-1;1]}$.

A T_8 Csebisev polinom előjelváltásai



Biz.: Tegyük fel indirekt, hogy $\exists\, \widetilde{Q}_n \in P_n^{(1)}$, melyre

$$\|\widetilde{Q}_n\|_\infty < \|\widetilde{T}_n\|_\infty .$$

Legyen $R := \widetilde{Q}_n - \widetilde{T}_n \in P_{n-1}$ és vizsgáljuk az értékeit a $\widetilde{T}_n$ szélsőértékhelyein

$$\widetilde{T}_n(\xi_k) = (-1)^k \frac{1}{2^{n-1}} \quad (k = 0 \dots, n)$$

$$|\widetilde{Q}_n(\xi_k)| < \frac{1}{2^{n-1}} = \|\widetilde{T}_n\|_\infty$$

miatt ξ_k-ban $(k = 0 \dots, n)$ az R polinomnak váltakozó az előjele. Tehát a ξ_k-k $(k = 0 \dots, n)$ között, azaz n db intervallumban előjelet vált R, így n db gyöke van a legfeljebb $n-1$-edfokú polinomnak, mellyel $R \equiv 0$. Ezzel ellentmondásra jutottunk. $\square$

Megjegyzés:

Vegyük észre, hogy az interpolációs hibabecslés jobb oldala két tényezőtől függ:

1. az f függvény $(n+1)$-ik deriváltjától,
2. az $x_0, \ldots, x_n$ alappontok helyétől, azaz ω_n-től.

Következmény:

Adott f-re a hibabecslés akkor a legpontosabb, ha $\|\omega_n\|_\infty$ minimális.

A $[-1;1]$-en vett interpoláció során $\|\omega_n\|_\infty$ akkor lesz minimális, ha az alappontoknak az $(n+1)$-edfokú Csebisev-polinomok gyökeit választjuk. Ekkor $\omega_n(x) \equiv \widetilde{T}_{n+1}(x)$ és $\|\omega_n\|_\infty = \|\widetilde{T}_{n+1}\|_\infty = \frac{1}{2^n}$.

6. Tétel: Az interpoláció hibája $[-1;1]$-en

A $[-1;1]$-en vett interpoláció és $f \in C^{(n+1)}[-1;1]$ függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok a Csebisev-polinom gyökei. Ekkor

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \|\widetilde{T}_{n+1}\|_\infty = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Biz.: Lásd a Csebisev-tételt és a következményét.

1. Az interpolációs hibaformulában az $\omega_n(x) \in \mathcal{P}_{n+1}^{(1)}$.
2. A Csebisev-tételt alkalmazva $\|\omega_n\|_\infty$ pontosan akkor minimális, ha $\omega_n(x) \equiv \widetilde{T}_{n+1}(x)$.
3. Ez $\omega_n(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$ miatt akkor teljesül, ha az x_j alappontok éppen az $\widetilde{T}_{n+1}$ gyökei.

7. Tétel: Az interpoláció hibája $[a; b]$-n

Az $[a; b]$-n vett interpoláció és $f \in C^{(n+1)}[a; b]$ függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok az $[a; b]$-be transzformált Csebisev gyökök. Ekkor

$$\|f - L_n\|_\infty \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot \|\widetilde{T}_{n+1}\|_\infty = \\ = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}.$$

Biz.: Lásd a Csebisev-tételt és a $\varphi : [-1; 1] \to [a; b]$ lineáris transzformációt:

$$\varphi(x) := \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}, \quad x \in [-1; 1].$$

Az interpolációs polinomok konvergenciája

Az $(x_k^{(n)} : k = 0, 1 \ldots, n)$ alappontsorozat esetén jelöljük (L_n)-nel az alappontokhoz tartozó interpolációs polinom sorozatot.

$$\begin{array}{ll}
\left(x_0^{(0)}\right) & \to L_0 \\
\left(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}\right) & \to L_1 \\
\left(x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) & \to L_2 \\
\vdots & \vdots \\
\left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\right) & \to L_n
\end{array}$$

Kérdések:

1. (L_n) egyenletesen konvergál-e f-hez?

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0 \ ?$$

2. Milyen f-re?
3. Milyen alappontrendszer esetén?

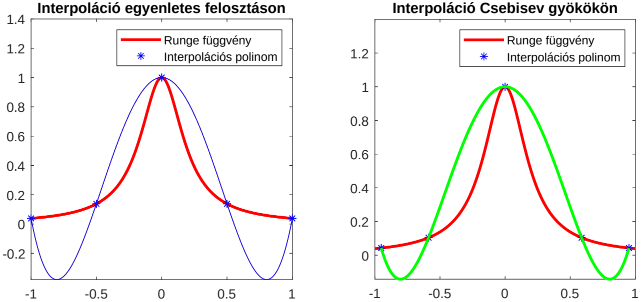
Divergencia példák egyenletes felosztásra:

1. $f(x) = |x|, \;\; x \in [-1, 1]$, $(f \in C[-1;1])$
2. Runge példája: $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \;\; x \in [-1, 1]$, $(f \in C^\infty[-1;1])$

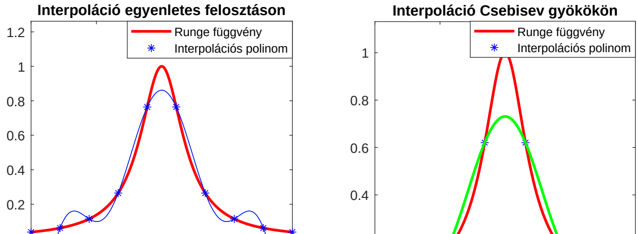
Matlab gyakorlat:

1. Növekvő számú alappont esetén egyenletes felosztásokra megnézni a példákat. Az intervallum mely részén divergál az interpolációs polinomok sorozata?
2. Csebisev alappontrendszeren mindkét függvényre igaz az egyenletes konvergencia.

A Runge-függvény interpolációja



Az $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ Runge-függvény interpolációja 5 alapponton.



Tétel:

1. Tegyük fel, hogy $f \in C^\infty[a;b]$ és
2. $\exists\, M > 0: \ \ \|f^{(n)}\|_\infty \leq M^n \ \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$.

Ekkor $\forall\, (x_k^{(n)} : k = 0, 1 \ldots, n)$ alappontrendszer sorozat esetén

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0.$$

Biz.: Felhasználva, hogy

$$\|\omega_n\|_\infty = \max_{x\in[a;b]} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leq (b-a)^{n+1}$$

Biz. folyt.: az interpolációs hibaformulából

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \|\omega_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1} \leq$$
$$\leq \frac{(M(b-a))^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Tehát

$$\|f - L_n\|_\infty = \max_{x \in [a;b]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{(M(b-a))^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

$\square$

Az interpolációs polinomok konvergenciája

Tétel: Faber

$\forall\ (x_k^{(n)} : k = 0, 1 \ldots, n)$ alappontrendszer sorozat esetén
$\exists\ f \in C[a; b]$, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty \neq 0.$$

Tétel: Marcinkiewicz

$\forall\ f \in C[a; b]$ esetén $\exists\ (x_k^{(n)} : k = 0, 1 \ldots, n)$ alappontrendszer sorozat, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0.$$

Megj.:

1. Nem létezik univerzálisan "jó" alappontrendszer sorozat.
2. Viszont minden $f \in C[a; b]$-hez létezik "jó" alappont sorozat.

Tartalomjegyzék

A Lagrange-interpoláció öröklött hibája

Kérdés: Ha az interpolációs feladatban a függvényértékeket csak közelítően ismerjük, akkor a hibás adatokból készített interpolációs polinomnak mennyi a hibája?

1. Az $f(x_0), \dots, f(x_n)$ értékekhez elkészítjük az L_n interpolációs polinomot.
2. Az $\widetilde{f}(x_0), \dots, \widetilde{f}(x_n)$ értékekhez elkészítjük az $\widetilde{L}_n$ interpolációs polinomot.
3. Milyen becslést adhatunk $|L_n(x) - \widetilde{L}_n(x)|$-re?

Definíció: Lebesgue-függvény

Legyen $x_0, \ldots, x_n \in [a; b]$, az

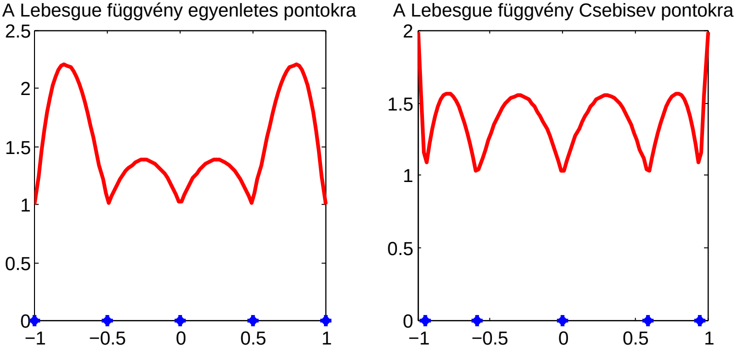
$$Ł_n(x) := \sum_{k=0}^{n} |\ell_k(x)|, \;\; x \in [a; b].$$

függvényt Lebesque-függvénynek nevezzük.

Definíció: Lebesgue-állandó

A Legesque-állandó a Lebesgue-függvény ∞ normája:

$$\Lambda_n := \max_{x \in [a;b]} Ł_n(x) = \|Ł_n\|_\infty.$$



A Lebesgue-függvény 5 alaponton.

Tétel: A Lebesque-állandó becslése

$$\Lambda_n \geq \frac{2}{\pi}\ln(n+1)+c, \quad (n \in \mathbb{N})$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ állandó.

Nem biz.

Tétel: Az interpoláció öröklött hibája

$$|L_n(x) - \widetilde{L}_n(x)| \leq \varepsilon \cdot \Lambda_n, \ \ (x \in [a;b])$$

ahol $\varepsilon := \max_{i=0}^{n} |f(x_i) - \widetilde{f}(x_i)|$.

Biz.: Mivel $|f(x_i) - \widetilde{f}(x_i)| \leq \varepsilon$ a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva $x \in [a; b]$-re

$$
\begin{aligned}
|L_n(x) - \widetilde{L}_n(x)| &= \left| \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x) - \sum_{i=0}^{n} \widetilde{f}(x_i)\ell_i(x) \right| = \\
&= \left| \sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - \widetilde{f}(x_i)) \cdot \ell_i(x) \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - \widetilde{f}(x_i)| \cdot |\ell_i(x)| \leq \\
&\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)| \leq \varepsilon \cdot \Lambda_n.
\end{aligned}
$$

$\square$

Tartalomjegyzék

Az interpoláció alkalmazása $f(x) = 0$ típusú egyenletek megoldására, az x^* gyök közelítésére.

1. Az $x_0, \dots, x_n \in [a; b]$ alappontokra és $f(x_0), \dots, f(x_n)$ függvényértékekre felírjuk az $L_n(x)$ interpolációs polinomot.

   $$L_n(x^*) = 0 \text{ megoldjuk} \quad \to \quad x_{k+1} := x^*$$

   Ezt alkalmaztuk a szelő-módszer és a Newton-módszer esetén is. $n > 2$-re problémás a gyökkeresés, nem általánosítható.

2. Tegyük fel, hogy f invertálható $[a; b]$-n, ekkor az f függvény helyett az inverzét közelítjük.

   $$f(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^* = f^{-1}(0) \text{ helyettesítés}$$

   Az $f(x_0), \dots, f(x_n)$ alappontokra és $x_0, \dots, x_n \in [a; b]$ függvényértékekre felírjuk az $Q_n(y)$ interpolációs polinomot.

   $$Q_n(y) \approx f^{-1}(y), \quad \to \quad x_{k+1} := Q_n(0)$$

Köszönöm a figyelmet!