Diszkrét matematika 1

Komplex számok

Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2025 tavasz

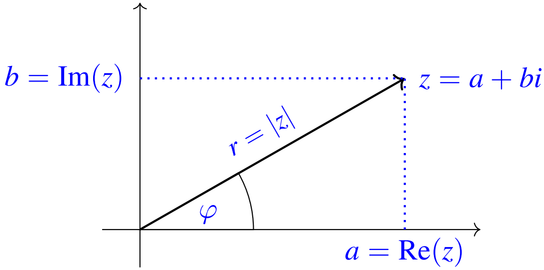
Komplex számok

$$(\cos t + i \cdot \sin t)^n = \cos(n \cdot t) + i \cdot \sin(n \cdot t)$$

Komplex számok trigonometrikus alakja

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Az $r = |z|$ az $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vektor hossza.
- A $\varphi = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ az (a, b) vektor irányszöge, a z argumentuma.
- Ekkor $a = r\cos\varphi$ és $b = r\sin\varphi$, így
  $$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$



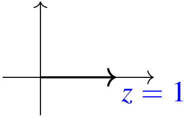
Definíció

Az $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám trigonometrikus alakja:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$ ahol $a = \mathrm{Re}(z) = r\cos\varphi$ és $b = \mathrm{Im}(z) = r\sin\varphi$

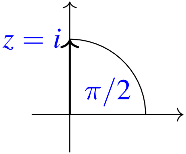
Komplex számok trigonometrikus alakja, példák

Példa



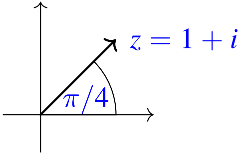
$z = 1$: $|z| = 1$, $\arg(z) = 0$

$\Longrightarrow z = 1(\cos 0 + i \sin 0)$



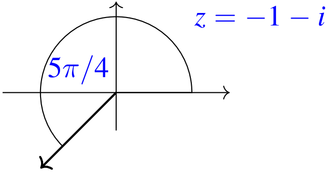
$z = i$: $|z| = 1$, $\arg(z) = \pi/2$

$\Longrightarrow z = 1(\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2))$



$z = 1 + i$: $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \pi/4$

$\Longrightarrow z = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$



$z = -1 - i$: $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = 5\pi/4$

$\Longrightarrow z = \sqrt{2}(\cos(5\pi/4) + i \sin(5\pi/4))$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

A szorzatuk:

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) \end{aligned}$$

Addíciós képletek:

$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \qquad \sin(\varphi + \psi) = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi$

Így

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Tétel (Biz: Id fent)

Legyenek $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Ekkor $zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$.

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat argumentuma:
  - ha $0 \leq \arg z + \arg w < 2\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
  - ha $2\pi \leq \arg z + \arg w \leq 4\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi$.

A $\sin, \cos$ függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásnál redukálni kell az argumentumok összegét.

Példa

- $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
- $(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$
- $(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = -4$

Általában,

- $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$
- Így $(1+i)^4 = \sqrt{2}^4(\cos(4 \cdot \pi/4) + i \sin(4 \cdot \pi/4)) = 4(\cos \pi + i \sin \pi) = -4$

Moivre-azonosságok

Tétel (Biz: HF)

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- $zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$
- $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

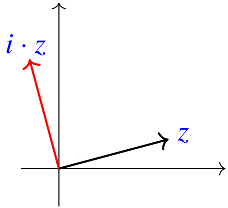
- A szögek rendre összeadódnak, kivonódnak, szorzódnak.
- Az argumentumot ezek után redukcióval kapjuk!

Szorzás, példák

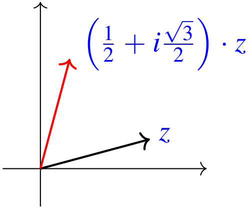
Példa

$$i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) \Longrightarrow$$
$$i \cdot z = |z| \cdot (\cos(\varphi + \pi/2) + i\sin(\varphi + \pi/2))$$

(algebrai alakban: $i \cdot (a + bi) = -b + ia$)



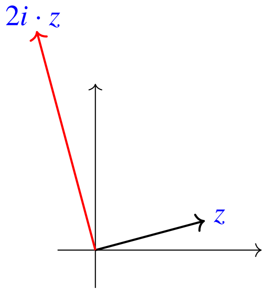
$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) \Longrightarrow$$
$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot z = |z| \cdot (\cos(\varphi + \pi/3) + i\sin(\varphi + \pi/3))$$



Szorzás, példák

Példa

$2i = 2\,(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) \Longrightarrow$
$2i \cdot z = 2|z| \cdot (\cos(\varphi + \pi/2) + i\sin(\varphi + \pi/2))$



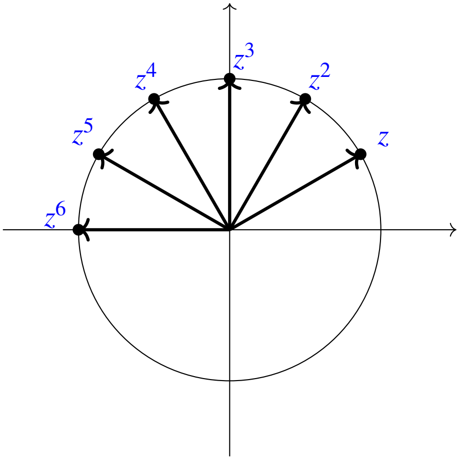
Geometriai jelentés:
Egy $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex számmal való szorzás: nyújtva-forgatás

- $|w|$-szeres nyújtás
- $\arg(w)$ szöggel való forgatás.

Komplex számok hatványa

Példa

Legyen $z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$. Ekkor z hatványai:



- $z^2 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6)$
- $z^3 = \cos(3\pi/6) + i\sin(3\pi/6) = i$
- $z^4 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6)$
- $z^5 = \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)$
- $z^6 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1$
- $\dots$
- $z^9 = \cos(9\pi/6) + i\sin(9\pi/6) = -i$
- $\dots$
- $z^{12} = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6) = 1 = z^0$

Komplex számok hatványai, példa

Példa

Számoljuk ki $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8$ hatványt.

- Az alap trigonometrikus alakja: $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- Így a hatvány:
$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^8 = \cos\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$$

De sok olyan z komplex szám van, melyre $z^8 = 1$:

- $1^8 = 1$, $(-1)^8 = 1$, $i^8 = 1$, $(-i)^8 = 1$
- $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1$, $\left((-1)\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1$
- Sőt $\left(\pm i\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1$

Gyökvonás

Legyen $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Ekkor

$$z = w \iff |z| = |w| \text{ és } \varphi = \psi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Adott $w \in \mathbb{C}$ számra keressük a $z^n = w$ egyenlet megoldásait. Ekkor

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) = w$$

Így

$$|z| = |w|^{1/n} \quad \text{és} \quad n\varphi = \psi + 2k\pi \quad \left(\Longrightarrow \quad \varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

Hány lényegesen különböző megoldás van:

$$\frac{\psi}{n},\ \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n},\ \frac{\psi}{n} + \frac{4\pi}{n},\ \ldots,\ \frac{\psi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

De $\sin\left(\frac{\psi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2n\pi}{n}\right)$ és $\cos\left(\frac{\psi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2n\pi}{n}\right)$,

így pontosan n különböző megoldás lesz: $\frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Komplex számok gyökei

Tétel (Biz.: ld. fönt)

Legyen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ trigonometrikus alakkal. Ekkor a $z^n = w$, $z \in \mathbb{C}$ egyenlet megoldásai

$$z_k = |w|^{1/n}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k) : \quad \varphi_k = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Példa

- Mi lesz $z^2 = 1$ egyenlet megoldása (spoiler: ± 1).
  - $w = 1 = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)$.
  - $|z| = 1$
  - $z^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos 0 + i\sin 0 = 1$
  - $2\varphi = 0 + 2k\pi \implies \varphi = 0 + k\pi$ $(k = 0, 1)$.
  - $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, \quad z_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$