5. gyakorlat anyaga a switchup miatt

1/1

$$\arcsin\frac{1}{2} = ?$$

megbeszeltuk hogy sin periodikus ezert nem invertalhato ezert le kell szukiteni egy intervallumra

$$\arcsin := \left(\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$$
$$\arcsin x = y \Longleftrightarrow \sin y = x \qquad \left(x \in [-1,1],\ y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

Tehat

$$\arcsin\frac{1}{2} = y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \Longleftrightarrow \sin y = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow (y = 30°)\ y = \frac{\pi}{6}$$

tudom hogy y milyen inyervallumon van

k helyett azt a k-t kell kivalasztani ami benne van az intervallumban

1/4

$$\arctan 1 = y$$

tg sem invertalhato, ezt is szukiteni kell

$$\arctan x = \left(\operatorname{tg}_{|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$$
$$\arctan x = y \Longleftrightarrow \operatorname{tg} y = x$$
$$\arctan x = 1 \Longleftrightarrow \operatorname{tg} 1 = x \Longleftrightarrow (y = 45°)\ y = \frac{\pi}{4}$$

most jon a lenyeg

fuggveny diszkusszio

3. teljes fuggvenyvizsgalat

$$f(x) := \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

1. ertelmezesi tartomany

$$D_f = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$$

- tengelymetyszesi pontokat vizsgaljunk, hol metszi a tengelyeket

$$\left.\begin{array}{l} y \text{ tengelyt ott ahol } \ x = 0,\ \text{ami } f(0) = 1 \\ x \text{ tengelyt a zerushelyeinel, olyanok nincsenek mert a szamlalo mindig pozitiv} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{a fv atmegy a (0,1) ponton}$$

1/a. paros vagy paratlan a fuggveny?

kiszamolom az $f(-x)$-et es ha egyenlo az eredetivel akkor paros, ha -1-szerese akkor paratlan, ha egyik se akkor egyik se

ha egyik sem akkor meg sem emlitjuk, mint most

1/b. periodicitas

trigonometrikus fuggvenyeknel k, itt fel sem merul

2. f' es elojele (monotonitas es lokalis szelsoertek)

$$\forall x \in R \setminus \{-1\} \implies f \in D\{a\} \text{ es}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)^2 - (x^2+1) \cdot 2 \cdot (x+1)^1 \cdot 1}{(x+1)^4}$$

trukk ha nevezoben hatvany nagyobb mint 1, a derivalas soran az elso tagban megmarad a negyzet, kovetkezo lepesnel eggyel csokken, a nevezo negyediken lesz. ki tudunk emelni es egyszerusiteni es mindig ajanlott tenni ha ilyen van

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)^1 - (x^2+1) \cdot 2 \cdot 1}{(x+1)^3} = \frac{2(x^2 + x - x^2 - 1)}{(x+1)^3} = \frac{2(x-1)}{(x+1)^3} \quad \forall x \in R \setminus \{-1\}$$

derivalt elojele

kitol fugg? szamlaloja linearis, nevezo kob. Eleg az elojelet vegyem mert paratlan kitevo ugyeskedes: tort elojele mitol fugg?

$$\text{sign } \frac{a}{b} = \text{sign } a \cdot b \quad \text{ha } b \neq 0$$

$$\text{igy egyszerubb mert igy parabola lesz}$$

$$\text{sign } f'(x) = \text{sign } ((x-1)(x+1)) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} = \text{sign } \left(x^2 - 1\right)$$

3. f" es elojele (konvxitas es inflexiok)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : f \in D^2\{x\} \text{ es } f''(x) = 2 \cdot \frac{1(x+1)^2 - (x-1) \cdot 3(x+1)^2 \cdot 1}{(x+1)^6}$$

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{x + 1 - 3x + 3}{(x+1)^4} = 4 \cdot \frac{2 - x}{(x+1)^4}$$

elojele?

ranezesre a nevezo pozitiv minden -1-tol kulonbozo x-re tehat

$$+ : \forall x \in D_f \implies \text{sign } f''(x) = \text{sign } (2 - x)$$

4. hatarertek, aszimptota

egyenesek kozul megkeressuk ha van ugynevezett aszimptota

olyan egyenes akinek vegtelenben vett limesze a fuggvenytol valo elteresben nulla harom tipus van (ezen a targyon):

- vizsszintes (ha vegtelenben veges hatarerteke van)
- fuggoleges (ha vegesben vegtelen hatarerteke van)
- "ferde" (lehetseges ha nem letezik a feletti ketto)

azert is intervallumosan irtuk fel az elejen a D_f-et mert jobban latszik hol kell szamolni hatarerteket

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \frac{+\infty}{+\infty} = L'H = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{2(x+1) \cdot 1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{1}\right) = 1$$

mit jelent az hogy a hatarertek vegtelenben 1? van neki egy vizsintes aszimptotaja

valahanyszor vegtelenben veges eredmenyt kapsz azt jelenti hogy $y = 1$ egyenletu egyenes vizszintes aszimptota mindket iranyba $\pm\infty$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(\pm 0)^2} = \frac{2}{+0} = +\infty$$

veges helyen vegtelen hatarertek $\Longrightarrow$ fuggoleges aszimptota $\Longrightarrow$ $x = -1$ egyenes fuggveny aszimptota

5. tablazat

x	$-\infty < x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\uparrow$		$\downarrow$	lok.min $\frac{1}{2}$	$\uparrow$	inflexio $\frac{5}{9}$	$\uparrow$
$f''(x)$	$\cup$		$\cup$		$\cap$	0	$\cap$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

abrazolasnal megnezem mekkora legyen a grafikon a tablazat alapjan. eloszor az aszimptotakat nezem, itt van egy fuggoleges es vizszintes, ezeket szaggatottal erdemes rajzolni. erdemes rairni a vonalakra melyik melyik

tudom hogy 1-tol vegtelenbe megy konvex modon azt csak egyfelekeppen lehet

tudom hogy 1-nel $\frac{1}{2}$-et vesz fel, latom hogy 1-ben 0 a derivalt, rajzolok egy kis vizszintes erintot. tudom hogy egynel metszi az y-t es ezt a harom dolgot osszevonva tudom ez is hogy nez ki kettoig

kettonel tudni kell mit vesz fel. az $\frac{5}{9}$-t.

kettonel gorbuletet valt es konkav modon tart az aszimptotahoz

a vegen azert irjuk ra a nevet, jeloljuk hogy van inflexio es jeloljuk a globalis es lokalis helyeket

zarasnak ertekkeszlet lehet meg erdekes, itt $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

4.

$$f(x) := x \cdot \ln^2 x \qquad (x > 0)$$

1.

$$D_f \in (0, +\infty),\ \nexists f(0);\ 0 \notin D_f;\ f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

$(0, 1)$ pont rajta van a grafikonon

csomo mindenrol szo sincs amiatt hogy x-ben ertelmes de $-x$-ben nem. Ezek paritas, pariodikussag, stb

2.

$$f'(x) = 1 \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln^2 + 2 \ln x = \ln x(\ln x + 2) \qquad (\forall x > 0);$$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 0 \vee \ln x = -2 \Longleftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = e^{-2} = \frac{1}{e^2};$$

$$\text{opcionalis: ha } a = \ln x \Longrightarrow a(a+2) = y(a) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \ln x < -2 \vee \ln x > 0 \ \text{ ez azt jelenti hogy}$$

$$\exp(\ln x) < \exp(-2) \vee \exp(\ln x) > \exp(0) \Longleftrightarrow x < e^2 = \frac{1}{e^2} \vee x > 1 \Longleftrightarrow f'(x) > 0$$

tudom hol 0, tudom hol $+$, ezert a maradek helyen $-$, igy ezzel nem kell foglalkozni

3.

$$f''(x) = \left(\ln^2 x + 2\ln x\right)' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2(\ln x + 1)}{x} \qquad (\forall x \in (0, +\infty))$$

elojel: a nevezo itt is mindig pozitiv, ezert

$$\text{sign } f''(x) = \text{sign}(\ln x + 1) \qquad (\forall x > 0)$$

Tehat

$$\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -1 \iff x \in e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1 \iff \text{exp szig mon miatt } \iff \exp(\ln x) > \exp(-1) \iff x > e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\ln x + 1 < 0 \iff 0 < x < \frac{1}{e}$$

4. hatarertek, aszimptotak

hol kell szamolnunk limeszt? 0 es $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} (x \ln^2 x) = +\infty \cdot (+\infty)^2 \implies \text{vegtelenben vegtelen nincs vizszintes aszimptota}$$

$$\text{kerdes hogy van-e ferde aszimptota}$$

$$\text{(nincs olyan vizsintes egyenes amihez tartana, de ekkor lehet ferde, ketto egyszerre lehetelen)}$$

hogyan keresunk ferdet?

$$a := \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln^2 x}{x} = \lim_{x \to +\infty} (\ln^2 x) = +\infty \notin \mathbb{R} \implies \text{nincs ferde aszimptota sem. a kereses leall}$$

lehet azert van parabolikus aszimptotaja de azt mi nem keressuk itt

$$\lim_{x \to 0+} (x \ln^2 x) = 0 \cdot (+\infty) = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = L'H = \lim_{x \to 0+} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2 \lim_{x \to 0+} \frac{+\infty}{+\infty} = 2 \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 2 \lim_{x \to 0+} x = 0$$

x	0		$\frac{1}{e^2}$		$\frac{1}{e}$		1	$+\infty$
$f'(x)$	x	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	x	fel	$\frac{4}{e^2}$	le	le	le	0	fel
$f''(x)$	x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
konv	x	$\cap$	$\cap$	$\cap$	∞	$\cup$	$\cup$	$\cup$

hf: elmelet tovabb
1, 2, 3, 4