Diszkrét matematika I. feladatok
Kombinatorika II.
Nyolcadik alkalom (2025.03.31-04.04.)

Bemelegítő feladatok

1. Hány részhalmaza van az $\{1, 2, .., 20\}$ halmaznak? Hány részhalmazára teljesül, hogy
   a) az 1 benne van; b) 1 és 2 is benne van; c) 1 vagy 2 benne van?

   Megoldás: Általában egy n elemű halmaz részhalmazainak száma: mindegyik elemről egyesével eldöntjük, hogy belerakjuk-e a részhalmazba vagy nem. Ez mindegyik elemnél két lehetőség, összesen n-szer döntünk, független döntések, tehát 2^n. A 20 elemű halmaznak így összesen 2^{20} részhalmaza van.

   a) Megoldása: Az 1-et mindenképp belerakjuk, csak a maradék 19 elemről kell eldöntenünk, hogy belerakjuk-e, tehát 2^{19}. (Ha az 1-ről való döntést is döntésnek vesszük, akkor az egyféle döntési lehetőség – míg a többinél kétféle döntési lehetőség van: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{19}$.)

   b) Megoldása: Az 1-et és a 2-t is mindenképp belerakjuk, csak a maradék 18 elemről kell eldöntenünk, hogy belerakjuk-e, tehát 2^{18}. (Vagyis $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{18}$.)

   c) Megoldása: Az 1 benne van: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{19}$ lehetőség. Hasonlóan akkor, ha 2 benne van: $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{19}$ lehetőség. Ezek az esetek azonban nem diszjunktak, ha összeadnánk a lehetőségek számát, akkor kétszer számolnánk azokat, amikor az 1 és 2 is benne van; ezek száma: $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{18}$ lehetőség. Az összegből ezért egyszer le kell vonni ezeknek a számát. (*Megjegyzés:* Ez a típusú gondolatmenet vezet majd el a szitaformulához.) Az összes megfelelő részhalmazok száma tehát $2^{19} + 2^{19} - 2^{18}$. Mivel $2^{19} = 2 \cdot 2^{18}$, ezért $2^{19} + 2^{19} - 2^{18} = (2 + 2 - 1) \cdot 2^{18} = 3 \cdot 2^{18}$.

   c) Másik megoldása: Esetszétválasztás diszjunkt esetekre bontással: az 1 benne van, de a 2 nincs; az 1 nincs benne, de a 2 igen; az 1 és 2 is benne van. Mindhárom esetben az 1-ről és a 2-ről nem kell döntenünk, csak a maradék 18 elemről, így a lehetőségeink száma mindhárom részesetben $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{18}$, összesen ezen diszjunkt részesetek számainak összege $2^{18} + 2^{18} + 2^{18} = 3 \cdot 2^{18}$.

   c) Harmadik megoldása: Összes-mínusz-kedvezőtlenek. Az összes részhalmazok száma 2^{20}, ebből kedvezőtlen, ha sem 1, sem 2 nincs benne. Ilyen részhalmazból, mivel csak a maradék 18 elemről kell döntenünk, 2^{18} van. Tehát a kedvező részhalmazok száma $2^{20} - 2^{18} = 2^2 \cdot 2^{18} - 2^{18} = (4 - 1) \cdot 2^{18} = 3 \cdot 2^{18}$.

2. Hányféleképpen lehet a MISSISSIPPI szó betűit leírni (*természetesen közvetenül egymás után, minden karaktert pontosan annyiszor használva, ahányszor szerepel a szóban: azaz anagrammaként*) úgy, hogy **a négy S betű ne kerüljön egymás mellé**?

   Megoldás: Csak azokat az anagrammákat *nem* akarjuk megszámolni, amikor mind a négy S betű közvetlenül egymás mögött egy SSSS négybetűs karaktersorozatot alkot. (Azaz pl. maga a ,,MISSISSIPPI” szó nem tilalmas, azt meg akarjuk számolni, sőt: még a ,,MISSSISIPPI” is megfelelő.) A módszerünk: Összes-mínusz-kedvezőtlenek (ahol a kedvezőtlen esetek azok, amikor a négy S betű egy SSSS négybetűs blokkot alkot).

Összes eset: ismétléses sorba rakás, 11 betű, ebből 4 db S, 4 db I, 2 db P. A 11 karaktert sorba rakjuk, mintha különbözőek lennének, majd a tehénszabály értelmében az egyformák egymás közti sorrendjeinek számával leosztunk, így a lehetséges sorrendek száma $\frac{11!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}$.
(*Másképpen:* A 11 pozícióból kiválasztjuk azt a 4-et, ahová S-et írunk, utána a maradék 7 pozícióból kiválasztjuk azt a 4-et, ahová I-t írunk, utána a maradék 3 pozícióból kiválasztjuk azt a 2-t, ahová P-t írunk. $\binom{11}{4}\cdot\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{2}=\frac{11!}{4!\cdot 7!}\cdot\frac{7!}{4!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!}=\frac{11!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}$ az összes esetek száma.)

Kedvezőtlen esetek: összeragasztjuk a 4 db S betűt, így egyetlen ,,karaktert" fognak képezni. Most már csak 8 ,,karaktert" kell sorba raknunk, melyekből 4 db I és 2 db P és 1 db SSSS és 1 db M. Az előző számoláshoz hasonlóan a lehetséges sorrendek száma $\frac{8!}{4!\cdot 2!}$.
(*Másképpen:* $\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}=\frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{2!}{1!\cdot 1!}=\frac{8!}{4!\cdot 2!}$ a kedvezőtlen esetek száma.)

A kedvező sorrendek száma tehát összes sorrendek száma mínusz kedvezőtlenek száma:

$$\frac{11!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}-\frac{8!}{4!\cdot 2!}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}-\frac{4!\cdot 8!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}=\frac{8!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}\cdot(11\cdot 10\cdot 9-4!)$$

Egy tipikus HIBÁS megoldás: Szeparáljuk az S betűket a többi karakterrel. Vagy úgy, hogy letesszük a négy S betűt, és közéjük mindenképpen teszünk további karaktereket. Vagy úgy, hogy letesszük a többi 7 karaktert, és az előttük, közöttük, utánuk lévő összesen 8 helyre pakolunk egy-egy S-betűt.

Miért ROSSZ ez a gondolatmenet? Mert túl sok olyan anagrammát kizár, amit meg akarnánk számolni (amit nem zár ki a szöveg): amikor csak két S betű kerül közvetlenül egymás mellé, már azokat a szavakat sem kaphatjuk meg így. Vagyis magát a MISSISSIPPI szót sem számoljuk, ha így számolunk. ***Ez a fajta gondolatmenet akkor lenne helyes, ha a feladat szövege úgy szólna, hogy:***

2. b) Hányféleképpen lehet a MISSISSIPPI szó betűit leírni úgy, hogy a négy S betű **közül semelyik kettő** ne kerüljön egymás mellé?

Megoldás <u>erre az alternatív feladatra</u>: A négy S betű között van 3 hely, ezekre mindenképpen akarunk legalább egy-egy karaktert írni a másik 7 közül, és még marad 4 karakterhely, amit szabadon eloszthatunk. Vagyis az első S betű elé $a_0 \geq 0$ darab, az első és második S betű közé $a_1+1 \geq 1$ darab, a második és harmadik S betű közé $a_2+1 \geq 1$ darab, a harmadik és negyedik S betű közé $a_3+1 \geq 1$ darab, a negyedik S betű után $a_4 \geq 0$ darab karaktert írhatunk. $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 4$. Más szóval az S-ek előtti/utáni/közötti öt helyből választunk 4-et ,,visszatevéssel" (egy helyre több karakter is kerülhet). Tehát $\binom{5+4-1}{4}=\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!\cdot 4!}$ féleképpen kerülhetnek karakterHELYEK az S-ek közé/elé/mögé úgy, hogy az S-ek biztosan ,,szeparálva" legyenek.

Ezt követően ezt a 7 üres karakterhelyet kell kitölteni 4 darab I, 2 darab P, és egy darab M betűvel. Erre van $\dfrac{7!}{4!\cdot 2!\cdot 1!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{2}$ féle lehetőség. A két egymás utáni döntés (hogy hová fogjuk a többi karaktert írni, majd, hogy konkrétan hogyan töltjük fel ezeket a karakterhelyeket) független, így szorozni kell: $\dfrac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{2} = = \dfrac{8!}{4!\cdot 4!\cdot 2}\cdot(7\cdot 6\cdot 5)$.

Összehasonlítva az eredeti feladat $\dfrac{8!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}\cdot(11\cdot 10\cdot 9 - 4!)$ megoldásával:

$$33810 = \frac{8!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}\cdot(11\cdot 10\cdot 9 - 4!) \gg \frac{8!}{4!\cdot 4!\cdot 2}\cdot(7\cdot 6\cdot 5) = 7035$$

Ez a várakozásunknak megfelelő eltérés, hiszen az alternatív feladatban sokkal többféleképpen lehet ,,rossz" egy karaktersorozat.

Alternatív megoldás az alternatív feladatra: Először $\dfrac{7!}{4!\cdot 2!\cdot 1!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{2}$ féleképpen sorbarendezzük a 4 darab I, 2 darab P, és egy darab M betűt. Ennek a 7 karakternek van 6 köze, és még egy hely előttük és egy mögöttük, ez összesen 8 hely, ahová az S betűket írhatjuk, de mivel két S nem kerülhet egymás mellé, így ezen 8 hely közül pontosan 4 különbözőt kellválasztanunk az S-ek számára. Erre $\dbinom{8}{4}$ féle lehetőségünk van. Két egymás utáni független döntést hoztunk, ezek szorzata adja a lehetődégek számát: $\dfrac{7!}{4!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot\dbinom{8}{4}$, ami ugyanaz mint az alternatív feladat előző megoldásának eredménye.

Tehát az egyik kombinatorikafeladat *hibás* megoldása lehet, hogy egy *másik* feladatnak tökéletesen *helyes* megoldása! De éppen ezért az sem garancia a feladat megoldásának helyességére, ha egy másik gondolatmenettel is ugyanarra a megoldásra jutottunk: hiszen mindkét gondolatmenet lehet *másik* fedatnak a helyes megoldása, és *nem a megoldandó* feladaté.

---

3. Hány különböző karaktersorozatot lehet az ABRAKADABRA betűiből alkotni?

   Megoldás: Ismétléses sorba rakás, 11 betű, ebből 5 db A, 2 db B, 2 db R. Sorba rakjuk a 11 karaktert, mintha különbözőek lennének, majd a tehénszabály értelmében az egyformák egymás közti sorrendjeinek számával leosztunk, így a lehetséges sorrendek száma $\dfrac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!}$.

   Másik megoldás: A 11 pozíció közül $\dbinom{11}{5}$ féleképpen kiválasztjuk az A-betűk helyét, utána a maradék 6 pozícióközül $\dbinom{6}{2}$ féleképpen a B-betűk helyét, utána a maradék 4 pozíció közül $\dbinom{4}{2}$ féleképpen az R-betű helyét, és maradt még két pozíció két különböző betűre, ezeket

$2! = 2$ féleképpen tehetjük ebbe a két pozícióba (vagy az eddigi sémát folytatva $\binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 2$ féleképpen). Egymás utáni független döntések miatt szorzunk:

$$\binom{11}{5} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 = \frac{11!}{5! \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 2! = \frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!}$$

Gyakorló feladatok

4. 10 cukorkát osztunk szét 3 gyermek között. Hányféleképpen tudjuk ezt megtenni, ha a cukorkák mind különbözőek, ill. mind egyformák?

   a) Megoldása: Ha különbözőek a cukorkák: egyesével osztjuk ki a cukorkákat. Mindegyik cukorkánál 3 választási lehetőségünk van, hogy melyik gyerek kapja; 10 alkalommal döntünk, ezek független döntések; összesen 3^{10} lehetőség.

   b) Megoldása: Ha egyformák a cukorkák: azt kell eldöntenünk, hogy melyik gyerek hány darab cukorkát kap. Az előadáson látott módszerrel (ismétléses kombináció): a 10 db cukorkát feleltessük meg 10 db 1-esnek. Az 1-esek közé beírunk $3 - 1 = 2$ db 0-át (szeparátor elemet): ahány 1-es van az első 0 előtt, annyi cukorkát kap az 1. gyerek; ahány 1-es van az első és a második 0 között, annyi cukorkát kap a 2. gyerek; ahány 1-es van a második 0 után, annyi cukorkát kap a 3. gyerek. Az így létrehozható karaktersorozatok és a kiosztások között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, azaz bijekció van (mindegyik kiosztás megfelel egy karaktersorozatnak és viszont), tehát elegendő a karaktersorozatokat megszámolnunk. Ezt lehet ismétléses sorba rakással: 10 db 1-es és 2 db 0 lehetséges sorrendjeinek száma $\frac{12!}{10! \cdot 2!}$, vagy kiválasztással: el kell döntenünk, hogy a 12 hely közül melyik két helyre írjunk 0-t (vagy melyik 10 helyre 1-et): $\binom{12}{2} = \binom{12}{10} = \frac{12!}{10! \cdot 2!}$.

   b) Másik megoldása: Az ismétléses kombináció képletével közvetlenül. Továbbra is azt kell eldöntenünk, hogy melyik gyerek hány darab cukorkát kap: 3 gyerek közül választunk „visszatevéssel” összesen 10-et (tízszer), egy gyereket nyilván többször is választhatunk, de az nem számít, hogy az egyes gyerekeket milyen sorredben választjuk ki, csak az, hogy *kit hányszor*: ahányszor választottuk, annyi cukorkát kap. Tehát 3 közül visszatevéssel összesen 10-et, nem számít a sorrend: $\binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10}$.

5. Egy bárban 10-féle röviditalt kínálnak. Hányféleképpen rendelhetünk 12-t azokból?

   Megoldás: Az italok sorrendje nem számít, csak az, hogy melyik fajtából hány darabot rendeltünk. Az előadáson látott módszerrel (ismétléses kombináció): a 12 db pohár italt feleltessük meg 12 db 1-esnek. Az 1-esek közé beírunk $10 - 1 = 9$ db 0-át (szeparátor elemet): ahány 1-es van az első 0 előtt, annyi db poharat rendelünk az 1. fajta italból; ahány 1-es van az első és a második 0 között, annyi db poharat rendelünk a 2. fajta italból; és így tovább; végül ahány 1-es van a kilencedik 0 után, annyi db poharat rendelünk az 10. fajta italból. Az így létrehozható karaktersorozatok és a rendelések között bijekció van (mindegyik kiosztás megfelel egy karaktersorozatnak és viszont), tehát elegendő a karaktersorozatokat megszámolnunk. Ezt lehet ismétléses sorba rakással: 12 db 1-es és 9 db 0 lehetséges sorrendjeinek száma $\frac{21!}{12! \cdot 9!}$, vagy kiválasztással: el kell döntenünk, hogy a 21 hely közül melyik 9 helyre írjunk 0-t (melyik 12-re 1-et): $\binom{21}{9} = \binom{21}{12} = \frac{21!}{12! \cdot 9!}$.

Úgy is mondhattuk volna, hogy leteszünk 12 darab (egyforma) poharat egymás mellé, és közéjük $10-1=9$ darab egyforma hurkapálcát („szeparátorelemet"), az első hurkapálca előtti poharakba az első fajta italt töltjük, az első és második hurkapálca közöttiekbe a második fajtát, és így tovább, végül a kilencedik hurkapálca utáni poharakba a tizedik fajta italt. Ez pontosan ugyanaz, mint nullákkal és egyesekkel (a „szeparátor" nullák a „szeprarátor" hurkapálcák megfelelői).

Közvetlenül a képlettel: 10 italfajtából választunk összesen 12-t, egy fajtából lehet többet is, a sorrend nem számít: $\binom{10+12-1}{12} = \binom{21}{12}$.

6. Adott a síkon két párhuzamos egyenes, az egyiken p darab, a másikon q darab pont. Hány olyan háromszög van, melynek csúcsai az adott pontok közül valók?

Megoldás: Egy (nem elfajuló, vagyis „szokásos") háromszög két csúcsa egy egyenesre esik, a harmadik pedig nem eshet arra az egyenesre. Így két csúcsot az egyik egyenesről, a harmadikat a másikról választjuk. Esetszétválasztás aszerint, hogy melyik egyenesről választunk két csúcsot. Ha a p darab pontot tartalmazóról, azt $\binom{p}{2}$ féleképpen tehetjük meg, a harmadik csúcsot a másik egyenes q pontja közül q féleképpen választhatjuk, a két egyenesről történő választás független, így szorzunk: $\binom{p}{2} \cdot q$. Ha a q darab pontot tartalmazó egyenesről választunk két pontot, azt $\binom{q}{2}$ féleképpen tehetjük meg, a harmadik csúcsot a másik egyenes p pontja közül p féleképpen választhatjuk, a két egyenesről történő választás független, így szorzunk: $\binom{p}{2} \cdot q$. A lehetőségek száma a diszjunkt esetekben megszámolt lehetőségek számának összege: $\binom{p}{2} \cdot q + \binom{q}{2} \cdot p = \frac{p \cdot (p-1)}{2} \cdot q + \frac{q \cdot (q-1)}{2} \cdot p = \frac{p \cdot q \cdot (p+q-2)}{2}$.

Ha elfajuló háromszögeket is megengedünk (a háromszög mindhárom csúcsa eshet ugyanarra az egyenesre), akkor az összes pont közül tetszőlegesen választhatunk három csúcsot, tehát ekkor a lehetőségek száma $\binom{p+q}{3}$.

Másik megoldás: Összes mínusz rosszak, vagyis összes mínusz elfajulók. Elfajulók azok, amikor mindhárom pontot az egyik egyenesről, illetve amikor mindhármat a másik egyenesről választjuk: $\binom{p+q}{3} - \binom{p}{3} - \binom{q}{3} =$

$$= \frac{(p+q)\cdot(p+q-1)\cdot(p+q-2)}{3!} - \frac{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)}{3!} - \frac{q\cdot(q-1)\cdot(q-2)}{3!} =$$
$$= \frac{(p+q)^3 - 3(p+q)^2 + 2(p+q)}{3!} - \frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{3!} - \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{3!} =$$
$$= \frac{p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 - 3p^2 - 6pq - 3q^2 + 2p + 2q}{3!} - \frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{3!} - \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{3!} =$$
$$= \frac{3p^2q + 3pq^2 - 6pq}{3!} = \frac{p^2q + pq^2 - 2pq}{2!} = \frac{p\cdot q\cdot(p+q-2)}{2}$$

7. 40 könyvet szeretnénk 4 dobozba csomagolni 10-esével. Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha a) a dobozok számozva vannak, b) a dobozon nincsenek számozva?

Megoldás: Nyilván 40 *különböző* könyvről van szó. Ezt onnan sejthetjük, hogy ha 40 *egyforma* könyvről lenne szó, akkor összesen csak egyféleképpen lehetne elcsomagoni őket tizessével négy dobozba (akkor is, ha a dobozok különbözők, akkor is, ha egyformák). Ha pedig lennének egyforma könyvek is, de nem mind egyforma, azt a szöveg külön közölné.

Azt feltételezzük, hogy egy dobozon belül a könyvek sorredje nem szmít, csak az, hogy melyik könyv melyik dobozba kerül.

a) Megoldása: Az első dobozba kerülő 10 könyvet $\binom{40}{10}$ féleképpen választhatjuk ki. A második dobozba kerülő 10 könyvet a maradék 30 könyvből $\binom{30}{10}$ féleképpen, a harmadik dobozba kerülő 10 könyvet a maradék 20 könyvből $\binom{20}{10}$ féleképpen, az utolsó dobozba kerülő könyvcsomag már egyértelmű. A választások függetlenek, így a lehetőségek száma összeszorzódik: $\binom{40}{10}\cdot\binom{30}{10}\cdot\binom{20}{10} = \frac{40!}{10!\cdot 30!}\cdot\frac{30!}{10!\cdot 20!}\cdot\frac{20!}{10!\cdot 10!} = \frac{40!}{10!\cdot 10!\cdot 10!\cdot 10!} = \frac{40!}{(10!)^4}$.

a) Másik megoldása: Tehén szabállyal. A 40 könyvet 40! féle sorrendben sorbarendezzük, az első 10 kerül az első dobozba, a következő 10 a második dobozba, és így tovább. De az egyes dobozokon belül 10! féle sorrendben keveredhetnek a könyvek, azzal nem kapunk új eseteket, ezért a négy dobozon belüli sorrendek $10!\cdot 10!\cdot 10!\cdot 10!$ számával le kell osztani (minden dobozon belül függetlenül keveredhetnek, ezek független döntések): $\frac{40!}{(10!)^4}$.

b) Megoldása: Az **a)** részfeladatban leírt módon 4 kupacot hozunk létre a könyvekből. Azonban most a kupacok sorrendje nem számít, így minden szétosztást annyiszor számoltunk, ahányféleképpen a 4 kupacot sorba lehet rakni, azaz 4!-szor. A tehénszabály értelmében ezzel leosztjuk a szétosztások számát, így a lehetőségek száma $\frac{\binom{40}{10}\cdot\binom{30}{10}\cdot\binom{20}{10}}{4!} = \frac{40!}{(10!)^4\cdot 4!}$.

8. Egy 25-fős osztályban küldöttséget választanak, mely 6 főből áll, majd ezen hat emberből egy-egy igazgatót és titkárt választanak. Hányféleképpen történhet ez, ha egy ember csak egy tisztséget viselhet?

Megoldás: A 25 diákból 6 embert $\binom{25}{6}$ féleképpen választhatnak. Az így kiválasztott 6 ember közül igazgatót hatféleképpen, a maradék 5 ember közül titkárt ötféleképpen választhatnak. A választások függetlenek, így a lehetőségek száma $\binom{25}{6} \cdot 6 \cdot 5 = \frac{25!}{6! \cdot 19!} \cdot 6 \cdot 5 =$

$$= \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 6 \cdot 5 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 25 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20$$

Másik megoldás: A 25 diák közül igazgatót 25 féleképpen, maradék 24 diák közül titkárt 24 féleképpen választhatnak. A küldöttség további 4 tagját a maradék 23 ember közül $\binom{23}{4}$ féleképpen választhatják ki. A választások függetlenek, így a lehetőségek száma:

$$25 \cdot 24 \cdot \binom{23}{4} = 25 \cdot 24 \cdot \frac{23!}{4! \cdot 19!} = 25 \cdot 24 \cdot \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 25 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20$$

Harmadik megoldás: Lehetne úgy is, hogy először igazgatót, aztán további öt tagot és azok közül egy titkárt, és úgy is ugyanez jönne ki. (De ez nem lényegileg új megoldás.)

Másfajta gondolatmenettel: Hat *különböző* pozícióra $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20$ féleképpen választhatjuk ki az embereket. De valójában a hat pozíció közül a négy „mezei tagé” teljesen egyforma, így tehénszabállyal az ezek közötti permutációk $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ számával le kell osztani. Így közvetlenül is kijön a fenti $25 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20$ eredmény.

Érdekes feladatok

9. Egy 2×12-es sakktábla hányféleképpen fedhető le 2×1-es dominókkal (melyeket vízszintesen vagy függőlegesen tehetünk le)?

   Megoldás: Megfigyelés: Ha lerakunk egy vízszintes dominót bárhová a felső sorba, akkor közvetlenül alá is kénytelenek vagyunk vízszintes dominót rakni ugyananak a két oszlopnak az alsó mezőibe, tehát kettesével rakunk vízszintes dominókat. Esetszétválasztás a vízszintes dominópárok száma szerint. Minden esetben kiszámoljuk, hány függőleges dominó szükséges, ezután megszámoljuk a dominók, illetve dominópárok lehetséges sorrendjeit (kiválasztással vagy ismétléses sorba rakással). **Ha nincs vízszintes dominó**, akkor a 12 oszlopot 12 függőleges dominóval tudjuk lefedni, ez 1 eset. Úgy is mondhatjuk, hogy a 12 helyből nulla darabot választunk vízszintes pár számára: $\binom{12}{0} = 1$. **Egy vízszintes dominópár** lerakása két függőleges oszlopot fed le, vagyis a szükséges függőleges dominók száma kettővel csökken. Tehát 1 vízszintes dominópár esetén 10 függőleges dominó kell, vagyis 11 „egységet” kell sorba raknunk, ezek sorrendjeinek száma: $\binom{11}{1} = 11$, mivel a 11 helyből kiválasztjuk, melyikre kerüljön a vízszintes pár. **Két vízszintes dominópár** esetén 8 függőleges dominó kell, vagyis 10 „egységet” kell sorba raknunk, és csak azt kell eldöntenünk, hogy a 10 helyből melyik kettőre kerüljön vízszintes pár: $\binom{10}{2}$. **És így tovább**, minden újabb vízszintes dominópár kettővel csökkenti a függőleges dominók számát. Összesen legfeljebb 6 vízszintes dominópárt tudunk lerakni. Végül az egyes esetekben kapott lehetőségek számát összeadjuk:

$$\binom{12}{0}+\binom{11}{1}+\binom{10}{2}+\binom{9}{3}+\binom{8}{4}+\binom{7}{5}+\binom{6}{6}=1+11+45+84+70+21+1=233$$

Ugyanez általános alakban: k vízszintes dominópár esetén $12-2k$ függőleges dominó kell, vagyis $k+(12-2k)=12-k$,,egységet" kell sorba raknunk, ezek sorrendjeinek száma (a $12-k$ helyből kiválasztjuk, melyekre kerüljenek a vízszintesek): $\binom{12-k}{k}$; $0\le k\le 6$. A lehetőségek száma összesen: $\sum_{k=0}^{6}\binom{12-k}{k}=233$.

Számolás ismétléses sorba rakással: Először a csupa különbözőnek tekintett ,,egységeket" sorba rakjuk, majd, mivel a függőleges dominók egyformák, illetve a vízszintes dominópárok is egyformák, az ,,egységek" sorrendjeinek számát a tehénszabály értelmében el kell osztanunk az egyformák egymás közti sorrendjeinek számával:

$$\frac{12!}{12!}+\frac{11!}{10!}+\frac{10!}{2!\cdot 8!}+\frac{9!}{3!\cdot 6!}+\frac{8!}{4!\cdot 4!}+\frac{7!}{5!\cdot 2!}+\frac{6!}{6!}=\sum_{k=0}^{6}\frac{(12-k)!}{k!\cdot(12-2k)!}=\sum_{k=0}^{6}\binom{12-k}{k}=233$$

Másik megoldás rekurzióval: Esetszétválasztással csinálhatunk úgynevezett *rekurziót*, vagyis a 2×12-es esetet visszavezethetjük kisebb, $2\times n$-es esetekre. Az nyilvánvaló, hogy egy 2×1-es táblázat csak egyféleképpen fedhető le: egyetlen függőleges dominóval. A 2×2-es táblázat kétféleképpen: vagy függőlegesekkel, vagy vízszintesekkel.

Jelölje D_n azt a számot, ahányféleképpen a $2\times n$-es táblázat lefedhető 2×1-es vagy 1×2-es dominókkal. A fentiek szerint $D_1=1$, és $D_2=2$.

Ha valahonan tudjuk adott $n-1$ indexig mindegyik D_k értékét ($k\le n-1$), akkor D_n értékét próbáljuk meg ezek segítségével kifejezni!

A korábbi megfigyelésünk szerint: Ha lerakunk egy vízszintes dominót bárhová a felső sorba, akkor közvetlenül alá is kénytelenek vagyunk vízszintes dominót rakni ugyananak a két oszlopnak az alsó mezőibe. Alkalmazuk ezt a bal felső sarokra! Ezt a sarkot mindenképpen le kell fednünk, vagy egy függőleges, vagy egy vízszintes dominóval, utóbbi esetben egy vízszintes dominópárral feldjük le a balszélső 2×2 mezőt, előbbi esetben egy függőleges dominóval a balszélső oszlopot. Ez két diszjunkt esethalmazra választja szét az összes esetek halmazát.

Ha függőleges dominóval kezdünk balról, akkor a maradék $n-1$ oszlopot D_{n-1} féleképpen fedhetjük le, ha vízszintes dominópárral kezdünk balról, akkor a maradék $n-2$ oszlopot D_{n-2} féleképpen fedhetjük le. Ezek *diszjunkt esetek*, hiszen a bal felsőt különbözőképpen fedik le az egyik illetve a másik eset lefedései. Tehát az összes esetek száma ezen két részeset számainak összege: $D_n=D_{n-1}+D_{n-2}$. Ez a Fibonacci-rekurzió rekurzív képlete, csak a kiinduló elemek nem ugyanazok, mint az F_n Fiboacci-sorozatnál, ahol $F_1=F_2=1$, és $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$.

Viszont észrevehetjük, hogy $F_3=2=D_2$, és $F_2=1=D_1$, és az első két elem meghatározza a sorozatot (mivel mindeg csak az előző két elem szükséges a következő elem meghatározásához). Vagyis $D_n=F_{n+1}$.

Nekünk D_{12} kell, azaz $D_{12} = F_{13} = 233$, ha rákeresünk a Fibonacci-sorozat tizenharmadik elemére, de ki is számolhatjuk „brute force" módon: $D_1 = 1$, $D_2 = 2$, $D_3 = 1 + 2 = 3$, $D_4 = 2 + 3 = 5$, $D_5 = 3 + 5 = 8$, $D_6 = 5 + 8 = 13$, $D_7 = 8 + 13 = 21$, $D_8 = 13 + 21 = 34$, $D_9 = 21 + 34 = 55$, $D_{10} = 34 + 55 = 89$, $D_{11} = 55 + 89 = 144$,$D_{12} = 89 + 144 = 233$.

Megjegyzés: Az ilyen, úgynevezett „*másodrendű, állandó együtthatós, homogén lineáris rekurziók*" megoldására nemcsak a „brute force" módszer létezik. Akit érdekel, nézzen utána, hogy hogyan lehet másodfokú egyenlet megoldásai segítségével „zárt képletet" adni a másodrendű rekurzióval megadott sorozat általános elemére.

---

10. a) Hány út vezet a 3×10-es sakktábla bal alsó sarkából a jobb felsőbe, ha csak fel vagy jobbra léphetünk? b) És ha fel, jobbra, vagy jobbra-fel átlósan léphetünk?

a) Megoldása: 2 felfelé és 9 jobbra lépés van, összesen 11 lépés. *Kiválasztással:* eldöntjük, melyik 2 legyen a felfelé: $\binom{11}{2} = \dfrac{11!}{2! \cdot 9!} = 55$ lehetőség. *Ismétléses sorba rakással:* 11 lépést rakunk sorba, ebből 2 egyforma (felfelé) és 9 egyforma (jobbra), ez tehát $\dfrac{11!}{2! \cdot 9!} = 55$ lehetőség.

b) Megoldása: Esetszétválasztás az átlós lépések száma szerint, ez lehet 0, 1 vagy 2. **Ha nincs átlós lépés**, akkor **a)** rész értelmében $\binom{11}{2} = 55$. **Ha egy átlós lépés** van, akkor lesz még egy felfelé és 8 jobbra lépés, összesen 10 lépés. *Kiválasztással:* eldöntjük, melyik legyen az átlós, majd a maradék 9 lépés közül melyik legyen a felfelé: $\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{1} = 10 \cdot 9 = 90$ lehetőség. (*Ismétléses sorba rakással:* 10 lépést rakunk sorba, ebből 8 egyforma (jobbra), egy-egy különböző (fel és átlósan), ez tehát $\dfrac{10!}{8! \cdot 1 \cdot 1} = 10 \cdot 9 = 90$ lehetőség.) **Ha kettő átlós lépés** van, akkor lesz még 7 jobbra lépés, és nincs függőlegesen felfelé lépés, ez összesen 9 lépés. *Kiválasztással:* eldöntjük, melyik legyen a 2 átlós: $\binom{9}{2} = \dfrac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$ lehetőség. (*Ismétléses sorba rakással:* 9 lépést rakunk sorba, ebből 2 egyforma (átlósan) és 7 egyforma (jobbra), ez tehát $\dfrac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$ lehetőség.) Mivel diszjunkt esetekre bontottuk, a lehetőségek száma összeadódik: $\binom{11}{2} + \binom{10}{1} \cdot \binom{9}{1} + \binom{9}{2} = 55 + 90 + 36 = 181$.

Beadandó házi feladatok

11. Legyen $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Hány olyan reláció van az X halmazon, ami

a) szimmetrikus és irreflexív;

b) szimmetrikus és reflexív;

c) szimmetrikus?

Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat). (**részenként 1/3 pont**)

12. a) Egy bonbonos dobozban 12 darab, csupa különböző ízű bonbon van. Hányféleképpen tudunk közülük négyet kivenni, ha a bonbonok sorrendje nem számít?

b) Hányféleképpen tudunk egy asztalon sorba állítani 6 karamellás, 2 kávés és 4 pisztáciás bonbont?

Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat). (**részenként 1/2 pont**)

13. a) A Mikulás tízféle szaloncukorból szeretne összesen harminc darabot rakni a csizmámba úgy, hogy mindegyik fajtából kapjak legalább egyet. Hányféleképpen alakulhat a csizmám tartalma?

b) Végül mindegyik fajtából három-három darabot kaptam. Ezt a harminc édességet szeretném négy különböző kosárba betenni úgy, hogy minden egyes kosárban csupa különböző fajta legyen, és egyik kosár se maradjon üresen. Hányféleképpen tehetem ezt meg? (A kosarakon belül nincsenek sorba rendezve a szaloncukrok, egy kosárban akárhány szaloncukor elfér.)

Megoldást itt nem közlünk (mert beadandó feladat). (**részenként 1/2 pont**)

További gyakorló feladatok

14. Hány olyan akárhány jegyű szám van összesen, melyben a számjegyek balról jobbra olvasva a) szigorúan monoton növekedve; b) szigorúan monoton csökkenve követik egymást?

Megoldás: Mivel a számjegyek szigorúan monoton követik egymást, ezért mindegyik számjegy legfeljebb egyszer szerepelhet; illetve ha eldöntöttük, melyik jegyek szerepeljenek, akkor a sorrendjük már egyértelmű, vagyis egy számjegyhalmazból csak egy számot tudunk létrehozni. Így elegendő a szóba jövő részhalmazokat megszámolnunk. Először a b) részt oldjuk meg.

b) Megoldása: A számjegyek egy 10 elemű halmazt alkotnak, e halmaz részhalmazainak száma 2^{10}, azonban az üres halmaz nem ad jó megoldást, így a megfelelő számok száma a tízelemű halmaz nemüres részhalmazainak a száma: $2^{10} - 1 = 1023$.

a) Megoldása: Most a 0 számjegy csak egyetlen számban, a 0-ban szerepelhet, több jegyű számok nem kezdődhetnek 0-val. Így ennek az egy esetnek a kivételével az $1, 2, \dots, 9$ számjegyek közül válogathatunk. Ez egy 9 elemű halmaz, e halmaz részhalmazainak száma 2^9, az üres halmaz most sem ad megoldást, így a megfelelő számok száma $1 + 2^9 - 1 = 2^9 = 512$.

15. Hányféleképpen lehet n darab egyforintos érmét k ember között szétosztani? És ha mindenki kap biztosan legalább egy forintot?

a) Megoldása: Az egyforintosok egyformák, csak az számít, hogy ki hány darab érmét kap. Az előadáson látott módszerrel (ismétléses kombináció): az n db egyforintost n db 1-es karakter jelképezi. Az 1-esek között $k-1$ darab 0 karaktert (szeparáló karaktert) helyezünk el. Az első 0 előtt lévő 1-esek száma jelzi, hogy az 1. ember hány darab egyforintost kapott, az első és második 0 között lévő 1-esek száma jelzi, hogy a 2. ember hány darab egyforintost kapott stb., a $k-1$. szeparáló 0 után lévő 1-esek jelzik az utolsó, k. ember egyforintosait. Így minden lehetséges kiosztásnak megfeleltetünk egy $n+k-1$ hosszúságú 0/1 karaktersorozatot. A karaktersorozatok és a kiosztások között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van (biz. előadáson), így elegendő a lehetséges karaktersorozatokat megszámolnunk. Ezt megtehetjük ismétléses sorbarakással: $\frac{(n+k-1)!}{n!\cdot(k-1)!}$ vagy kiválasztással (az összes hely közül melyekre tesszük az 1-eseket): $\binom{k+n-1}{n}$.

Megjegyzés: Itt most k közül választunk n-et, visszatevéssel: felcserélődött a két betű szokásos szerepe. Érdemes vigyázni, hogy a feladat szövege ne vezessen félre a betanult képletekben használt betűkkel!

b) Megoldása: Ha mindenki kap legalább egyet: mivel az egyforintosok egyformák, megtehetjük, hogy mindenkinek kiosztunk előre egyet. A maradék $n-k$ darab egyforintost az előző módszerrel osztjuk szét ($n-k$ darab 1-es, $k-1$ darab 0): $\frac{(n-k+k-1)!}{(n-k)!\cdot(k-1)!}=$
$\frac{(n-1)!}{(n-k)!\cdot(k-1)!}=\binom{n-1}{n-k}=\binom{n-1}{k-1}$.

b) Másik megoldása: Úgy is gondolkodhatnk, hogy a szeparáló karakterek nem kerülhetnek sem egymás mellé, sem a sorozat elejére, sem a végére. Azaz az n darab 1-es közötti összesen $n-1$ hely közül kell választanunk $k-1$ darab különböző helyet a szeparáló 0-k számára. Így is kijön az $\binom{n-1}{k-1}$ eredmény.

16. Hányféleképpen lehet sorba rendezni n nullát és k egyest úgy, hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?

    Megoldás: A fenti feladat b) részének második megoldásához hasonlóan (csak a 0-k és 1-k szerepének felcserélésével), de nem teljesen azonosan, mert a sorozat legelejére és legvégére kerülhet 1-es, és az egyesek száma sem $k-1$, hanem k:

    Az n darab nulla között $n-1$ hely van, előttük és utánuk még egy-egy, ez összesen $n+1$ pozíció az egyesek számára. Ezen pozíciók közül kell kiválasztani azt a k különbözőt, ahová egyest írunk: $\binom{n+1}{k}$ féleképpen tehetjük ezt meg.

17. 18 teljesen egyforma tojást szeretnénk megfesteni. Hányféleképpen tehetjük meg ezt, ha ötféle festékünk van, és egy tojáshoz csak egyféle festéket használunk?

    Megoldás: Mivel színezés előtt teljesen egyformák a tojások, csak az számít, hogy melyik színből összesen hányat színezünk meg. Azaz az 5 szín közül „visszatevéssel” választunk összesen 18-at: $\binom{5+18-1}{18}=\binom{22}{18}=\binom{22}{4}=\frac{22!}{18!\cdot 4!}$.

    Másik megoldás: Letesszük a 18 egyforma tojást egymás mellé, és még $5-1=4$ hurkapálcát („szeparálóelemet”). Az első pálca előtti tojások kapják az első színt, az első és második közöttiek a második színt, és így tovább, a negyedik pálca utániak az ötödik színt. $18+4=22$ elemet kell sorbarendeznünk, amik között 18 egyik fajta, és 4 másik fajta: $\frac{22!}{18!\cdot 4!}$.

18. Egy bolha ugrál a számegyenes egész pontjain jobbra-balra, másodpercenként egyet. Hányféleképpen ugrálhatott, ha az origóból indult, és pontosan egy perc elteltével a +24 pontban van?

    Megoldás: Jelölje j a jobbra ugrások, b a balra ugrások számát. Mivel pontosan egy percig ugrál, $j + b = 60$, és mivel ekkor a +24 pontban van, ezért $j = b + 24$. A második egyenletből j kifejezését behelyettesítve az első egyenletbe $2b + 24 = 60$, amiből $b = 18$, ezt visszahelyettesítve $j = 42$ adódik. Az, hogy a 60 ugrásból melyik 18 lesz az, amikor balra ugrik, $\binom{60}{18}$ féle lehet, tehát ennyiféleképpen ugrálhatott a bolha.