Mikor mondjuk azt, hogy egy függvény n-szer (2 ≤ n ∈ N) differenciálható egy

pontban? TFH $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} D_f$ és egy $n = 2, 3, ...$-re $\exists$ az $f^{(n-1)}$ deriválható az $a \in \operatorname{int} D_f$ pontban (jelölése: $f \in D^{n\{a\}}$), ha
- $\exists r > 0 : f \in D^{n-1}\left(K_{r(a)}\right)$, és
- az $f^{(n-1)}$ függvény deriválható a-ban, azaz $f^{(n-1)} \in D\{a\}$.

Legyen ekkor

$$f^{(n)}(a) := \left(f^{(n-1)}\right)'(a)$$

az f függvény a-beli n-edik deriváltja.

Írja le a $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabályt!

Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$ és $f, g \in D(a, b)$.
TFH
- $$\exists \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0$$
  ,
- $g(x) \neq 0 \quad \text{és} \quad g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in (a, b)$
  ,
- $$\exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$$
  .

Ekkor

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Írja le a $+\frac{\infty}{+}\infty$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabályt!

Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$ és $f, g \in D(a, b)$.
TFH
- $$\exists \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = +\infty$$
- $g(x) \neq 0 \quad \text{és} \quad g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in (a, b)$
- $$\exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Ekkor

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Mi a kapcsolat a hatványsor összegfüggvénye és a hatványsor együtthatói között?

TFH a $\sum_{k=0} \alpha^k_{k(x-a)}$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor R konvergencisugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét. Ekkor minden $x \in K_{R(a)}$ pontban $f \in D^{\infty}\{x\}$, és bármely $n \in N^{+}$ esetén

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)...(k-n+1)\alpha_k(x-a)^{k-n}$$

Ha $x = a$, akkor

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Hogyan definiálja egy függvény Taylor-sorát?

Ha a $f \in D^{\infty}\{a\}$, akkor a

$$T_a f(x) \coloneqq \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsort az f függvény $a \in \text{int } D_f$ ponthoz tartozó Taylor-sorának, a sor n-edik részletösszegét, azaz a

$$T_{a,n} f(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomot az f függvény $a \in \text{int } D_f$ ponthoz tartozó n-edik Taylor-polinomjának nevezzük.
Az f függvény $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát f Maclauring-sorának is nevezzük.

Fogalmazza meg a Taylor-formula Lagrange maradéktaggal néven tanult tételt!

Legyen $n \in \mathbb{N}$
TFH $f \in D^{n+1}(K(a))$
Ekkor $\forall x \in K(a)$ ponthoz $\exists$ olyan a és x közé eső ξ szám, hogy

$$f(x) - T_{a,n} f(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Milyen elégséges feltételt ismer a Taylor-sornak a generáló függvényhez való konvergenciájával kapcsolatosan?

Legyen $f \in D^{\infty}(K(a))$
TFH

$$\exists M > 0 : \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M(\forall x \in K(a), \forall n \in \mathbb{N})$$

Ekkor f-nek az a ponthoz tartozó Taylor-sora a $K(a)$ halmazon előállítja az f függvényt, vagyik fennáll az

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (x \in K(a))$$

egyenlőség

Írja fel az $f(x) = \frac{1}{1+x} \qquad (x \in \mathbb{R}, |x| < 1)$ függvény Taylor-sorát!

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ...$$

Írja fel az $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}, |x| < 1)$ függvény Taylor-sorát!

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - ...$$