Numerikus módszerek 2. **1. ZÁRTHELYI** **2025. április 4.**

Programtervező informatikus Bsc szak, A szakirány

1. Írjuk táblázatba a Gersgorin körök középpontjait és sugarait ($R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$)!

a_{ii}	-3	-1	-3
R_i	2	1	1

Mivel a megadott mátrix szimmetrikus, ezért a sajátértékei valósak, így a Gersgorin köröknek csak a valós vetületét kell néznünk.

$$G_1 = [-5; -1], \quad G_2 = [-2; 0], \quad G_3 = [-4; -2]$$

Mivel a Gersgorin körök nem diszjunktak, ezért csak annyi tudunk mondani, hogy az összes sajátérték a $[-5; 0]$ intervallumban van. (3 pont)

A -1 diagonális elemhez tartozó sugarat kell csökkentenünk, ezért a $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ transzformációval ($d > 0$) keressük az alkalmas paramétert a bizonyításhoz. (1 pont)

Számítsuk ki a $\mathbf{B} := \mathbf{D^{-1}AD}$ hasonlósági transzformációt.

$$\mathbf{B} := \mathbf{D^{-1}AD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & d & 1 \\ \frac{1}{d} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{B}$ mátrixra a Gersgorin-körök középpontjai és sugarai

a_{ii}	-3	-1	-3
$\widetilde{R_i}$	$1+d$	$\frac{1}{d}$	1

Ahhoz, hogy a negatív definitséget igazolni tudjuk, szükséges, hogy a Gergorin-körök ne érjék el balról a 0-t, tehát a következő feltételeknek kell teljesülniük.

$$-3 + 1 + d < 0 \quad \to \quad d < 2$$

$$-1 + \frac{1}{d} < 0 \quad \to \quad 1 < d$$

$$-3 + 1 < 0 \quad \text{teljesül mindig}$$

Az $1 < d < 2$ feltételnek eleget tevő $d = \frac{3}{2}$ jó választás lesz. Ekkor

a_{ii}	-3	-1	-3
$\widetilde{R_i}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{3}$	1

,

$$G_1 = \left[-\frac{11}{2}; -\frac{1}{2}\right], \quad G_2 = \left[-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right], \quad G_3 = [-4; -2]$$

Mivel a Gersgorin körök nem diszjunktak, ezért csak annyi tudunk mondani, hogy az összes sajátérték a $G_1 \bigcup G_2 \bigcup G_3 = \left[-\frac{11}{2}; -\frac{1}{3}\right]$ intervallumban van. (3 pont)

Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrix hasonlók, a sajátértékeik azonosak. Mivel a sajátértékek a negatív valós félegyenesen helyezkednek el, ezért a mátrix negatív definit. (1 pont)

2. Számítsuk ki a Fagyejev-féle "trace" módszerbeli S_k -kat $k = 1, 2, 3$ -ra.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A^2} = \begin{bmatrix} 11 & -4 & -6 \\ -4 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A^3} = \begin{bmatrix} -43 & 15 & 29 \\ 15 & -6 & -7 \\ 29 & -7 & -36 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = tr(\mathbf{A}) = -3 - 1 + (-3) = -7$$

$$S_2 = tr(\mathbf{A^2}) = 11 + 2 + 10 = 23$$

$$S_3 = tr(\mathbf{A^3}) = -43 - 6 - 36 = -85$$

(3 pont)

A karakterisztikus polinom együtthatóira

$$S_1 + p_1 = 0 \quad \rightarrow \quad p_1 = -S_1 = 7$$

$$S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0 \quad \rightarrow \quad p_2 = -\frac{1}{2}(S_2 + p_1 S_1) = -\frac{1}{2}(23 - 7 \cdot (7)) = 13.$$

$$S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1 + 3p_3 = 0 \quad \rightarrow \quad p_3 = -\frac{1}{3}(S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1) = -\frac{1}{3}(-85 + 7 \cdot 23 + 13 \cdot (-7)) = 5.$$

(2 pont)

A karakterisztikus polinom: $p(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 13\lambda + 5$. (1 pont)

3. Első lépésként készítsük el az $\mathbf{x_k}$ vektorokat.

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{A}\mathbf{x_0} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_2} = \mathbf{A}\mathbf{x_1} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_3} = \mathbf{A}\mathbf{x_2} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -43 \\ 15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

(3 pont)

A maximális abszolútértékű sajátérték közelítésére a Rayleigh-hányadost számoljuk.

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \lambda_1^{(1)} = \frac{\langle \mathbf{x_1}, \mathbf{x_0} \rangle}{\langle \mathbf{x_0}, \mathbf{x_0} \rangle} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \lambda_1^{(2)} = \frac{\langle \mathbf{x_2}, \mathbf{x_1} \rangle}{\langle \mathbf{x_1}, \mathbf{x_1} \rangle} = \frac{-43}{11}$$

$$\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} -43 \\ 15 \\ 29 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \lambda_1^{(3)} = \frac{\langle \mathbf{x_3}, \mathbf{x_2} \rangle}{\langle \mathbf{x_2}, \mathbf{x_2} \rangle} = -\frac{707}{173}$$

(3 pont)

4. Írjuk fel az $\mathbf{A^{(1)}} = \mathbf{Q^T A Q}$ mátrixot, ahol $c := \cos\varphi, \quad s := \sin\varphi$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A^{(1)}} = \mathbf{Q^T A Q} &= \begin{bmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -3c - s & c & c + 3s \\ 1 & -1 & 0 \\ -3s + c & s & s - 3c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -3c^2 - sc - sc - 3s^2 & c & -3sc - s^2 + c^2 + 3sc \\ c & -1 & s \\ -3sc + c^2 - s^2 + 3sc & s & -3s^2 + sc + sc - 3c^2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -3c^2 - 2sc - 3s^2 & c & c^2 - s^2 \\ c & -1 & s \\ c^2 - s^2 & s & -3s^2 + 2sc - 3c^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(4 pont)

$$c^2 - s^2 = 0$$

$$\begin{aligned}
c := \cos\varphi &= \sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
s := \sin\varphi &= \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
c^2 &= \frac{1}{2} \\
s^2 &= \frac{1}{2} \\
sc := \sin\varphi \cdot \cos\varphi &= \frac{1}{2} \\
-3c^2 - 2sc - 3s^2 &= -\frac{3}{2} - 1 - \frac{3}{2} = -4 \\
-3s^2 + 2sc - 3c^2 &= -\frac{3}{2} + 1 - \frac{3}{2} = -2
\end{aligned}$$

(5 pont)

A kapott értékeket az $\mathbf{Q}$, $\mathbf{A}^{(\mathbf{1})}$-be behelyettesítve

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{(\mathbf{1})} = \mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -4 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

(1 pont)