## Fogalmazza meg a primitív függvényekkel kapcsolatos második helyettesítési szabályt!

TFH $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok,
$f : I \to \mathbb{R}, g : J \to I$ bijekció,
$g \in D(J)$,

$g'(x) \neq 0 \ (\forall x \in J)$

és az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvényeknek van primitív függvénye.
Ekkor az $f$ függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \underset{x=g(t)}{=} \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t_{|\ t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I)$$

## Fogalmazza meg a primitív függvény létezésére vonatkozó szükséges feltételt!

Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és a $f : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek van primitív függvénye, akkor $f$ Darboux-tulajdonságú az $I$ intervallumon.

## Fogalmazza meg a primitív függvény létezésére vonatkozó elégséges feltételt!

Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és a $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor $f$-nek van primitív függvénye.

## Definiálja intervallum egy felosztását!

Az $[a, b]$ intervallum egy felosztásán a

$$\tau := \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

halmazt értjük, ahol $n \in \mathbb{N}^+$.

## Mit jelent egy felosztás finomítása?

Ha $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a, b]$ és $\tau_1 \subset \tau_2$, akkor AMH $\tau_2$ egy finomítása $\tau_1$-nek.

## Mi az alsó közelítő összeg definíciója?

Legyen $f \in K[a, b], \tau \in \mathcal{F}[a, b]$, továbbá

$$m_i := \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

minden $i = 1, 2, \dots, n$ indexre. A

$$s(f, \tau) := \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}),$$

számot az $f$ függvény $\tau$ felosztásához tartozó alsó közelítő összegének nevezzük.

## Mi a felső közelítő összeg definíciója?

Legyen $f \in K[a, b], \tau \in \mathcal{F}[a, b]$, továbbá

$$M_i := \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

minden $i = 1, 2, ..., n$ indexre. A

$$S(f, \tau) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

számot az $f$ függvény $\tau$ felosztásához tartozó felső közelítő összegének nevezzük.

## Mi történik egy alsó közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk ?

Legyen $f \in K[a, b]$, és TFH $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a, b]$. Ekkor ha $\tau_2$ finomabb $\tau_1$-nél (azaz $\tau_1 \subset \tau_2$), akkor

$$s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau_2) \quad \text{és} \quad S(f, \tau_1) \geq S(f, \tau_2)$$

azaz egy felosztás finomításakor az alsó közelítő összeg nem csökkenhet.

## Mi történik egy felső közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk ?

Legyen $f \in K[a, b]$, és TFH $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a, b]$. Ekkor ha $\tau_2$ finomabb $\tau_1$-nél (azaz $\tau_1 \subset \tau_2$), akkor

$$s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau_2) \quad \text{és} \quad S(f, \tau_1) \geq S(f, \tau_2)$$

azaz egy felosztás finomításakor a felső közelítő összeg nem nőhet.