Mathématiques pour l'informatique
Évaluation intermédiaire

LSI 1

10 - 03 - 2008

Documents et calculatrice interdits. Durée : 1heure.

1 Ordre de grandeur

Ordre de grandeur asymptotique, puis équivalent, de

$$f(n) = n^2|\sin n| + 2n^{5/2}\ln n + n\ln(8e^{3n}) + 4 + 17n^2\sqrt{n}$$

(1,5 *pt*).

2 Procédé de Gram-Schmidt

Le procédé de Gram-Schmidt est un algorithme (d'algèbre linéaire) permettant de construire à partir d'une famille libre $\{\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_m}\}$ de m vecteurs de $\mathbb{R}^n$, où $m \leq n$ bien sûr (car la famille est libre...), une famille **orthonormée** $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_m}\}$ telle que pour chaque $k \in \{1, \ldots, m\}$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_k}\}$ est le même que celui engendré par $\{\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_k}\}$.

On suppose déjà écrite (c'est très simple) une fonction qui calcule le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, c'est-à dire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$. Voici l'algorithme de Gram-Schmidt en pseudo-code évolué :

Procedure GramSchmidt ;
  Entrée : n, m **entiers**, $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_m}$ **vecteurs de** $\mathbb{R}^n$;
  Sortie : $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_m}$ **vecteurs de** $\mathbb{R}^n$;
  Variables : k **entier**, $\overrightarrow{v}$ **vecteur de** $\mathbb{R}^n$;
  Précondition $1 \leq m \leq n$;
  Début
    $\overrightarrow{e_1} := \frac{1}{\sqrt{(\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_1})}}\overrightarrow{u_1}$;
    Pour $k = 2$ **à** m **faire**   **Co** On ne rentre pas dans la boucle si $m = 1$ **Fco**
      $\overrightarrow{v} := \overrightarrow{u_k} - \sum_{j=1}^{k-1}(\overrightarrow{u_k}.\overrightarrow{e_j})\overrightarrow{e_j}$;
      $\overrightarrow{e_k} := \frac{1}{\sqrt{(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v})}}\overrightarrow{v}$;
    FinPour ;
  Fin

1. Justifier que le programme fait bien ce qu'on attend de lui. Commencez par étudier le cas $m = n = 2$, où un simple dessin permet de comprendre le principe de l'algorithme ; puis traitez le cas général en vérifiant que le vecteur $\overrightarrow{v}$ de la boucle **Pour** est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_{k-1}}$ déjà construits ; cela permet de conclure (3,5 *pts*).
2. On considère que la multiplication de deux réels est l'opération significative de l'algorithme (on pourrait tenir compte des extractions de racines carrées, des additions et des soustractions, cela ne changerait pas l'ordre de grandeur de la complexité). Déterminer en fonction de n et de m le nombre de multiplications de réels. En déduire une estimation en $\mathcal{O}$ de la complexité de l'algorithme de Gram-Schmidt en fonction de la taille des données d'entrée (3 *pts*).

3 Convolution

Soit la fonction f définie par $f(t) = H(t) \ln t$ et la fonction g définie par $g(t) = tH(t)$. Justifier l'existence du produit de convolution $f * g$, puis calculer $(f * g)(t)$ (2 *pts*).