TD Convolution et Transformation de Fourier

LSI 1

2013 - 2014

1 En TD

1. Soit H la fonction d'Heaviside, et soit f une fonction causale continue sur $\mathbb{R}$.
   (a) Que reprnte $H * f$? Interprr dans le langage "signaux-systs".
   (b) À titre d'exemple calculer $H * H$ et $H * f$ lorsque $f(t) = e^t H(t)$, puis lorsque $f(t) = t^2 H(t)$.
   (c) L'intateur est-il stable au sens BIBO ?

2. On consid les deux fonctions dnies par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \ g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

   (a) On consid $f * f, g * g, f * g$. Justifier sans calcul l'existence de ces produits de convolution et donner leurs propris lorsque le cours permet de conclure : sont-ils bornur $\mathbb{R}$? intables sur $\mathbb{R}$? continus sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? plus rliers ?
   (b) On consid le syst dont la rnse impulsionnelle est g. Est-il stable (au sens BIBO) ? Calculer la *rnse indicielle* de ce syst (c'est, par dnition, la rnse elon unitHeaviside). Qu'en conclure ?
   (c) Donner un exemple simple de syst risable mais non stable au sens BIBO.

3. Soit $a > 0$ et $f = \mathbf{1}_{[-a,a]}$.
   (a) Calculer $f * f, \ \mathcal{F}f, \ \mathcal{F}(f * f)$.
   (b) Calculer par deux modes

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

   (c) Calculer

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x \sin^2 x}{x^2} dx$$

   (d) Calculer

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$$

4. Soit $a > 0$. Calculer la T.F. de $e^{-|t|}$, et en dire la T.F. de $e^{-a|t|}$, de $t^2e^{-a|t|}$, de $\cos t e^{-|t|}$, de $(t-2)e^{-|t-1|}$, de $\frac{1}{a^2+t^2}$.

5. Comme on vous l'a montr cours, entraz vous trouver, sans consulter vos documents, les hypoths et la formule concernant la dve la T.F.
Dntrer votre rltat. Quel th obtient-on si on peut itr le proc ?

6. Soit $a > 0$ et soit la gaussienne dnie par $f_a(t) = e^{-at^2}$.
   (a) Drminer une ation diffntielle dont $\mathcal{F}f_a$ est solution. En dire $\mathcal{F}f_a$.
   (b) Calculer $f_a * f_b$.

7. Rudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'ation intale

$$f(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)e^{-|x|}dx = e^{-|t|} \tag{1}$$

8. Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux supposntables sur $\mathbb{R}$. On appelle *fonction d'inter-corrtion* de x et de y la fonction dnie, si cela a un sens, par

$$\Phi_{x,y}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)}y(t+\theta)dt$$

Naturellement, si $x = y$, $\Phi_{x,x}$ est la *fonction d'autocorrtion* de x.
En vous inspirant fortement de la dnstration d'un th du cours, justifier l'existence et l'intabilit $\Phi_{x,y}$, et calculer sa T.F. en fonction de celles des signaux x et y. En dire le th de Wiener-Khinchine, *i.e.*
La T.F. de la fonction d'autocorrtion du signal $x(t)$ est la densitectrale d'rgie de $x(t)$.

2 Pour s'entrar

1. Aprvoir justifin existence, calculer le produit de convolution des fonctions $f(t) = H(t)e^{-t}$ et $g(t) = t\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$

2. Soit $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}H(t)$. Calculer $f * f$.

3. Dans l'exercice prdent, $f \in L^1_{loc}$ et est causale, mais $f \notin \mathcal{C}^0_m$. Pourtant $f * f$ existe. Dntrer qu'effectivement, si f et g sont deux fonctions localement intables et causales, alors $f * f$ existe et est causale (on pourra s'inspirer des raisonnements du paragraphe sur la convolution des fonctions causales, et du paragraphe sur la convolution des fonctions intables ; on pensera au th de Fubini).

4. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ en utilisant un rltat vu en TD.

5. (a) Retrouver, avec un minimum de calculs, la T.F. du signal $t^2e^{-t}H(t)$.
   (b) En dire la valeur des intales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\sqrt{2}x}}{(1+ix)^3}dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

6. Donner la T.F. de la fonction f dnie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right], & f(x) = x \\ \forall x \notin \left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right], & f(x) = 0 \end{cases}$$

   En dire la valeur de l'intale suivante :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{(t\cos t - \sin t)^2}{t^4}\, dt$$

7. Soit $a > 0$. On dnit la fonction

$$f_a(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$$

   Calculer $f_a * f_b$.

8. Entraz-vous trouver formules et hypoths pour les ths donnant la T.F. de la dv la T.F. du produit de convolution, et la dvu produit de convolution. Dntrer ces rltats, sans regarder votre cours.