Équations récurrentes

Definition 1

Une **équation récurrente** est une égalité reliant les termes successifs d'une suite.

Exemples

- $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ est une équation récurrente **non-linéaire d'ordre 1**.
- $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 3$ est une équation récurrente **linéaire d'ordre 2**, à **coefficients constants**, **non-homogène**.
  Si on enlève le terme -3, on obtient l'équation **homogène associée** : $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

Les exemples précédents portent sur de suites définies dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: ce sont des **équations scalaires**.

Équations récurrentes

Si on considère des suites de $\mathbb{R}^k$ ou $\mathbb{C}^k$, on obtient des **systèmes d'équations récurrentes vectorielles**.

Exemple

$U_{n+1} = AU_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

remarque

une équation scalaire linéaire d'ordre k peut toujours s'écrire comme un système vectoriel d'ordre 1.
en posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ réécrire l'équation $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 3$ dans ce sens.

Résolution des Équations récurrentes linéaires

Definition 2

Résoudre une équation récurrente (ou un système d'équations récurrentes) c'est déterminer toutes les suites vérifiant cette équation.
La donnée des k premiers termes, pour une équation d'ordre k, mène à une solution unique.

Théorème 1

Du fait de la linéarité, on obtient toutes les solutions en ajoutant à l'une d'elles toutes les solutions de l'équation homogène.

Résolution de l'équation homogène

- Il est clair que l'**ensemble des solutions** de l'équation homogène est stable par combinaison linéaire et qu'il est non vide. Donc il forme un **espace vectoriel**.
- On peut donc montrer que **la dimension de cet e.v** est égale à l'ordre de l'équation.
  On est donc amené à chercher k solutions indépendantes.
- **Si l'équation est à coefficients constants** il est facile de déterminer s'il existe des solutions du type (r^n).

Exemple

$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

Résolution de l'équation homogène

Théorème 2

- *Plus généralement, si l'équation caractéristique d'un problème d'ordre k possède k solutions distinctes $r_1, r_2, \ldots r_k$ alors les (r_i^n) sont des solutions indépendantes formant une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.*
- *Dans le cas des racines multiples à l'équation caractéristique, par exemple si r est une solution d'ordre m, on peut montrer que (r^n), (nr^n), $\ldots$, $(n^{m-1}r^n)$ forme une famille libre de solutions qui, associée aux autres, donne une base.*

Recherche d'une solution particulière

Pas de méthode générale. Il faut deviner, en s'inspirant de l'allure du second membre.

Exemples

1. $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 3$
2. $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 3.2^n$

Plus généralement si le second membre est du type $P(n)r^n$ où $P(n)$ est un polynôme et r est une valeur quelconque, il faut chercher une solution du type $Q(n)r^n$ où $Q(n)$ est un polynôme de degré égal à celui de P si r n'est pas solution de l'équation caractéristique, et augmenté de l'ordre de multiplicité de r s'il est solution de l'équation caractéristique.

Exercice

Résoudre $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fonctions génératrices

Definition 3

La **fonction génératrice** de la suite (u_n) réelle ou complexe est la fonction

$$G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n.$$

Elle est définie sur un disque $\{|z| < R\}$, R étant le **rayon de convergence** de la série entière.

Outre les équations linéaires cela permet de résoudre les équations comportant des **produits de convolution**.

Fonctions génératrices

Remarque

En traitement du signal, la coutume est plutôt l'usage de la **transformée en z** définie sur $\{|z| > \frac{1}{R}\}$:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^{-n}.$$

Exemple

Soit $u_n = a^n$, $a \neq 0$.
Donner sa fonction génératrice puis sa transformée en z.

Fonctions génératrices

Theorem 4

- *Ces transformations sont* ***linéaires*** *:*
  Si $(u_n) \mapsto U$ et $(v_n) \mapsto V$
  alors $(\alpha u_n + \beta v_n) \mapsto \alpha U + \beta V$.
- *L'effet d'une* ***translation*** *est facile à exprimer :*
  Si $(u_n) \mapsto U(z) = \sum u_n z^n$ alors $(u_{n+1}) \mapsto \sum u_{n+1} z^n = \ldots$
- *Le* ***produit par n*** *aussi :*
  Si $U = \sum u_n z^n$ alors $U' = \sum n u_n z^{n-1}$
  donc $zU' = \sum n u_n z^n$.
- *Le* ***produit de convolution*** *de deux suites est transformé en produit (simple) de leurs transformées :*

$$\text{Si } (u_n) \mapsto U(z) \text{ et } (v_n) \mapsto V(z) \text{ alors } (u_n * v_n) \mapsto U(z)V(z).$$

Remarque

Les formules sont analogues pour la transformation en z, en remplaçant z par $\frac{1}{z}$.

Exemple

Résoudre par **fonction génératrice** puis **transformée en** z :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + 3$$