Mathématiques pour l'informatique
Évaluation intermédiaire

Durée : 1 heure.

5 mai 2010

Exercice 1 :
Soit H la fonction d'Heaviside, et soit f une fonction causale continue sur $\mathbb{R}$.

1. Que représente $H * f$? Interpréter dans le langage "signaux-systèmes".
2. À titre d'exemple calculer $H * H$ et $H * f$ lorsque $f(t) = e^t H(t)$.
3. L'intégrateur est-il stable au sens BIBO ?

Exercice 2 :
Soit $a > 0$ et $f = \mathbf{1}_{[-a,a]}$.

1. Calculer $f * f$, $\mathcal{F}f$, $\mathcal{F}(f * f)$.
2. Calculer par deux méthodes
$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$
3. Calculer
$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x \sin^2 x}{x^2} dx$$
4. Calculer
$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$$

Exercice 3 :
Soit $a > 0$ et soit la gaussienne définie par $f_a(t) = e^{-at^2}$.

1. Déterminer une équation différentielle dont $\mathcal{F}f_a$ est solution. En déduire $\mathcal{F}f_a$.
2. Calculer $f_a * f_b$.

Exercice 4 :

1. Soit $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} H(t)$. Calculer $f * f$.
2. Dans la question précédente, $f \in L^1_{loc}$ et est causale, mais $f \notin \mathcal{C}^0_m$. Pourtant $f * f$ existe. Démontrer qu'effectivement, si f et g sont deux fonctions localement intégrables et causales, alors $f * f$ existe et est causale (on pourra s'inspirer des raisonnements du paragraphe sur la convolution des fonctions causales, et du paragraphe sur la convolution des fonctions intégrables ; on pensera au théorème de Fubini).