

Definition 1

Une **équation récurrente** est une égalité reliant les termes successifs d'une suite.

Exemples

- $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ est une équation récurrente **non-linéaire d'ordre 1**.
- $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 3$ est une équation récurrente **linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, non-homogène**.

Si on enlève le terme -3 , on obtient l'équation **homogène associée** :
 $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

Les exemples précédents portent sur de suites définies dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} : ce sont des **équations scalaires**.

Équations récurrentes

Si on considère des suites de \mathbb{R}^k ou \mathbb{C}^k , on obtient des **systèmes d'équations récurrentes vectorielles**.

Exemple

$$U_{n+1} = AU_n + B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

remarque

une équation scalaire linéaire d'ordre k peut toujours s'écrire comme un système vectoriel d'ordre 1.

en posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ réécrire l'équation $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 3$ dans ce sens.

Résolution des Équations récurrentes linéaires

Définition 2

Résoudre une équation récurrente (ou un système d'équations récurrentes) c'est déterminer toutes les suites vérifiant cette équation.

La donnée des k premiers termes, pour une équation d'ordre k , mène à une solution unique.

Théorème 1

Du fait de la linéarité, on obtient toutes les solutions en ajoutant à l'une d'elles toutes les solutions de l'équation homogène.

Résolution de l'équation homogène

- Il est clair que l'**ensemble des solutions** de l'équation homogène est stable par combinaison linéaire et qu'il est non vide. Donc il forme un **espace vectoriel**.
- On peut donc montrer que **la dimension de cet e.v** est égale à l'ordre de l'équation.
On est donc amené à chercher k solutions indépendantes.
- **Si l'équation est à coefficients constants** il est facile de déterminer s'il existe des solutions du type (r^n) .

Exemple

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Théorème 2

- *Plus généralement, si l'équation caractéristique d'un problème d'ordre k possède k solutions distinctes r_1, r_2, \dots, r_k alors les (r_i^n) sont des solutions indépendantes formant une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.*
- *Dans le cas des racines multiples à l'équation caractéristique, par exemple si r est une solution d'ordre m , on peut montrer que $(r^n), (nr^n), \dots, (n^{m-1}r^n)$ forme une famille libre de solutions qui, associée aux autres, donne une base.*

Recherche d'une solution particulière

Pas de méthode générale. Il faut deviner, en s'inspirant de l'allure du second membre.

Exemples

① $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 3$

② $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 3 \cdot 2^n$

Plus généralement si le second membre est du type $P(n)r^n$ où $P(n)$ est un polynôme et r est une valeur quelconque, il faut chercher une solution du type $Q(n)r^n$ où $Q(n)$ est un polynôme de degré égal à celui de P si r n'est pas solution de l'équation caractéristique, et augmenté de l'ordre de multiplicité de r s'il est solution de l'équation caractéristique.

Exercice

Résoudre $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Definition 3

La **fonction génératrice** de la suite (u_n) réelle ou complexe est la fonction

$$G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n.$$

Elle est définie sur un disque $\{|z| < R\}$, R étant le **rayon de convergence** de la série entière.

Outre les équations linéaires cela permet de résoudre les équations comportant des **produits de convolution**.

Remarque

En traitement du signal, la coutume est plutôt l'usage de la **transformée en z** définie sur $\{|z| > \frac{1}{R}\}$:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^{-n}.$$

Exemple

Soit $u_n = a^n$, $a \neq 0$.

Donner sa fonction génératrice puis sa transformée en z .

Theorem 4

- Ces transformations sont **linéaires** :

Si $(u_n) \mapsto U$ et $(v_n) \mapsto V$

alors $(\alpha u_n + \beta v_n) \mapsto \alpha U + \beta V$.

- L'effet d'une **translation** est facile à exprimer :

Si $(u_n) \mapsto U(z) = \sum u_n z^n$ alors $(u_{n+1}) \mapsto \sum u_{n+1} z^n = \dots$

- Le **produit par n** aussi :

Si $U = \sum u_n z^n$ alors $U' = \sum n u_n z^{n-1}$

donc $zU' = \sum n u_n z^n$.

- Le **produit de convolution** de deux suites est transformé en produit (simple) de leurs transformées :

*Si $(u_n) \mapsto U(z)$ et $(v_n) \mapsto V(z)$ alors $(u_n * v_n) \mapsto U(z)V(z)$.*

Remarque

Les formules sont analogues pour la transformation en z , en remplaçant z par $\frac{1}{z}$.

Exemple

Résoudre par **fonction génératrice** puis **transformée en z** :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + 3$$