Mathématiques pour l'informatique
Examen intermédiaire

LSI 1

02 - 03 - 2009

Durée : une heure ; sans document ni calculatrice.

1 Ordres de grandeur

1. Déterminer un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de C_n^k, où k est un entier naturel **fixé** (1 *pt*).
2. On considère la suite (c_n) définie par

$$c_n = 6 + \ln\left(n^2\, 3^n\right) + 5n^{\frac{4}{3}}\ln(\ln n) + \left|n\sin\left(e^n\right)\right| + (n^2 - n + 9)^{\frac{2}{3}}$$

   En utilisant des estimations successives en $\mathcal{O}$ et en $\circ$, déterminer un équivalent simple de c_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   Que pensez-vous de la rapidité d'exécution d'un algorithme dont la complexité dans le pire des cas est égale à c_n lorsque la donnée d'entrée a une taille égale à n ? Cet algorithme est-il polynomial ?
   (2 *pts*).

2 Algorithme

Soit $a > 0$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \quad \text{avec} \quad u_0 > 0 \tag{1}$$

La question 3 utilise le résultat démontré dans la question 2. Ce résultat est fourni et vous pouvez donc faire intégralement la question 3 sans avoir réussi les questions 1 et 2.

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

   On déterminera les asymptotes et on construira la courbe d'équation $y = f(x)$, en faisant figurer également la droite d'équation $y = x$ (2 *pts*).

2. En déduire que si $u_0 > \sqrt{a}$, la suite (u_n) est strictement décroissante et converge vers $\sqrt{a}$

   Indication et remarque. Il est conseillé de s'aider du schéma de la question 1 pour raisonner, et on constatera d'ailleurs géométriquement que la convergence vers $\sqrt{a}$ semble rapide.

   En fait, (u_n) converge vers $\sqrt{a}$ même si $0 < u_0 \leq \sqrt{a}$. Pourquoi ?

   (2 *pts*).

3. À titre d'application, on considère l'algorithme suivant.

   Fonction CalculeQuelqueChose(a : réel > 0, p : entier naturel) : réel
   Variables $U0, U, V$: réels
   Début
       Lire $U0$;   **Co** *Choix par l'utilisateur d'une valeur initiale* **Fco**
       $U := U0$;
       $V := 0.5 * (U + a/U)$;
       Tant que $|V - U| > 10^{-p}$ **Faire**
           $U := V$;
           $V := 0.5 * (U + a/U)$;
       FinTantque
       Renvoyer V ;
   Fin

   (a) Que fait cet algorithme ? Comment interpréter la condition d'arrêt (1,5 *pt*) ?

   (b) Quels sont les paramètres à choisir ici pour représenter la taille des données d'entrée (réfléchir notamment à ce que représente p dans ce contexte) (1 *pt*) ?

   (c) Quelle(s) opération(s) élémentaire(s) doit-on considérer ici (0,5 *pt*) ?

   (d) Soit $n(a, p)$ le nombre d'itérations de l'algorithme lorsque les données d'entrée sont a et p. Donner le coût de l'algorithme sur les données a et p en fonction de $n(a, p)$ (1 *pt*).