Mathématiques pour l'informatique

LSI 1

14 - 06 - 2005

Deux heures ; calculatrice interdite ; documents interdits.

Vous rédigerez les exercices 1,2,3,4 sur une copie et les exercices 5 et 6 sur une autre copie.

1 Question de cours

Retrouver par un petit calcul la formule donnant la Transformée de Fourier de $f'(t)$ (dérivée de $f(t)$) en fonction de celle de $f(t)$, et retrouver ainsi les hypothèses permettant d'appliquer cette formule (2.5 *points*).

2 Test de Fermat

Par un calcul simple (mais pénible), il est possible de montrer que

$$3^{340} \equiv 56 \mod 341$$

Qu'en déduisez-vous (justifier en quelques mots) (1 *point*) ?
De plus, on a

$$2^{340} \equiv 1 \mod 341$$

Est-ce contradictoire avec le résultat précédent (justifier) (1 *point*) ?

3 Une équation récurrente extraite des TD

On considère l'équation récurrente

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + 3\sum_{k=0}^{n} u_k \\ u_0 = 2 \end{cases} \tag{1}$$

On va résoudre cette équation par deux méthodes.

1. Donner une équation récurrente satisfaite par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

   pour $n \geq 0$. En déduire S_n, puis u_n (2.5 *points*).
2. Résoudre (1) en utilisant une autre méthode (2 *points*).

4 Équation récurrente linéaire à coefficients constants

Dans cet exercice, le fait de devoir raisonner "à l'envers" est un avantage : les calculs sont moins lourds que pour la résolution de l'équation récurrente.

Déterminer une équation récurrente linéaire à coefficients constants dont la solution générale est

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n + \gamma n 2^n + n(-1)^n$$

où α, β, γ sont des constantes arbitraires (3 *points*).

5 Exercice traité en TD : T.F. d'une gaussienne

Soit $a > 0$. On considère la fonction f_a définie par

$$f_a(t) = e^{-at^2}$$

1. Déterminer une équation différentielle satisfaite par $F_a = \mathcal{F} f_a$. En déduire $F_a(\omega)$ (3 *points*).
   On rappelle que
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$
2. Soit $a > 0$ et $b > 0$. Déterminer le produit de convolution des gaussiennes f_a et f_b (2 *points*).

6 Complexité

1. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Rappeler la formule donnant $\det A$ en fonction de déterminants d'ordre inférieur à n (développement de $\det A$ suivant la première ligne,par exemple) (0.5 *point*).
2. On suppose écrite une fonction $enleverligneetcolonne(A, i, j)$ qui a pour entrée une matrice A carrée d'ordre n et deux entiers naturels i et j de $\{1, \ldots, n\}$, et pour sortie la matrice d'ordre $n-1$ déduite de A en enlevant la i-ème ligne et la j-ème colonne.
   Dans un langage de description suffisamment évolué pour comprendre des expressions contenant le signe $\sum$, écrire une fonction récursive $determinant(A)$ qui prend en entrée une matrice carrée A et qui calcule son déterminant (1 *point*).
3. On appelle c_n le nombre d'opérations algébriques (additions, soustractions, multiplications) nécessaires au calcul d'un déterminant d'ordre n lorsqu'on utilise la fonction *determinant* précédente (cela ne dépend que de n, pas des coefficients de la matrice considérée).
   (a) Justifier que $c_1 = 0$ (0.5 *point*).
   (b) Déterminer une équation récurrente satisfaite par la suite (c_n) (1 *point*).
   (c) En déduire c_n (1.5 *point*).
4. On rappelle les formules de Cramer, donnant la solution $X^T = (x_1, \ldots, x_n)$ d'un système de n équations à n inconnues de la forme $AX = B$ lorsque $\det A \neq 0$:
   $$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}$$
   où Δ_i est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la i-ème colonne par le vecteur colonne B.
   Déduire de la question précédente le nombre d'opérations algébriques nécessaires à la résolution d'un système de Cramer de n équations à n inconnues lorsqu'on utilise la fonction récursive *determinant* et ces formules de Cramer. Qu'en concluez-vous (1.5 *point*) ?