Mathématiques pour l'informatique

LSI 1 - Examen final

20 - 04 - 09

Deux heures. Documents et calculatrice interdits.

1 Équations récurrentes et complexité

1. Résoudre l'équation récurrente
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n - 3u_{n-1} = \ln n \tag{1}$$
(1 *pt*).
2. Résoudre l'équation récurrente
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+2)(n+1)u_{n+2} - 3(n+1)u_{n+1} + 2u_n = 0 \text{ avec } u_0 = 0,\ u_1 = -1 \tag{2}$$
(3 *pts*)
3. On considère un programme récursif prenant en entrée une donnée de taille $n \in \mathbb{N}$. Voici les caractéristiques de ce programme.
   - Son execution nécessite un certain nombre d'opérations, dites élémentaires.
   - Le nombre d'opérations élémentaires effectuées ne dépend que de la taille n de la donnée d'entrée, et non de la donnée d'entrée elle même.
   - Si $n \leq 2$, il rend immédiatement le résultat, sans effectuer d'opération élémentaire.
   - Pour $n \geq 3$, son execution nécessite trois appels récursifs sur des données de taille $n-2$, deux appels récursifs sur des données de taille $n-3$, et 2^n opérations élémentaires en plus de celles effectuées lors des appels récursifs.

   Déterminer, en fonction de n, le nombre c_n d'opérations élémentaires effectuées pour une donnée de taille n. Commenter le résultat (4 *pts*).

2 Mathématiques du signal

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction f_a définie par
$$f_a(t) = e^{-at}H(t)$$
où H désigne la fonction d'Heaviside.

1. Soit a et b des réels. Après avoir justifié son existence, calculer le produit de convolution $f_a * f_b$ (2 *pts*).
2. On suppose que $a > 0$. Montrer l'existence de la T.F. de f_a. Calculer $\mathcal{F}f_a$ (1,5 *pt*).
3. En déduire la T.F. du signal $g(t) = t^2e^{-t}H(t)$ (1 *pt*).
4. En déduire la valeur des intégrales
$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{(1+ix)^3}dx \ , \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(1+ix)^3}dx \quad \text{et} \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$
(2 *pts*).
5. Pour $a > 0$, $b > 0$, $b \neq a$, retrouver le produit de convolution $f_a * f_b$ par transformation de Fourier (1,5 *pts*).

3 Arithmétique

Le but du problème est la démonstration du résultat suivant :

Théorème de Wilson.

Soit $p \geq 2$ un entier naturel. Alors : p **est premier ssi** p **divise** $(p-1)!+1$.

1. Soit $p \geq 2$ un entier naturel. Supposons que p divise $(p-1)!+1$. Démontrer que p est le plus petit diviseur ≥ 2 de $(p-1)!+1$, et en déduire que p est premier (1 *pt*).

   Il faut maintenant démontrer la réciproque. Vous êtes guidé pas à pas.

2. Soit p un nombre premier (donc $p \geq 2$).

   (a) Justifier que tout entier entre 1 et $p-1$ est inversible modulo p. En déduire que l'anneau $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ (où $+$ et $\times$ désignent l'addition et de la multiplication modulo p) est un corps, donc que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\setminus\{0\},\times)$ est un groupe. On notera dans la suite $\mathbb{Z}_p^*$ ce groupe multiplicatif (1 *pt*).

   On remarque que $\mathbb{Z}_p^*$ comporte $p-1$ éléments. Nous admettons que ce groupe est cyclique. Cela signifie qu'il existe un élément $a \in \mathbb{Z}_p^*$ tel que

   $$\mathbb{Z}_p^* = \{a^k\,;\,0 \leq k \leq p-2\}$$

   (b) Que vaut a^{p-1} (justifier) ? Pourquoi dit-on de ce groupe qu'il est « cyclique » ? (1 *pt*).

   (c) On considère l'application ψ définie sur $\mathbb{Z}_p^*$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, qui à l'élément a^k (avec $0 \leq k \leq p-2$) associe $\psi(a^k) = \overline{k}$ (où $\overline{k}$ désigne la classe de k modulo $p-1$).
   Démontrer que ψ est bijective et vérifie

   $$\forall (k,k') \in \{0,\dots,p-2\}\times\{0,\dots,p-2\} \qquad \psi(a^k a^{k'}) = \overline{k} + \overline{k'}$$

   Autrement dit, ψ est un isomorphisme du groupe multiplicatif $\mathbb{Z}_p^*$ sur le groupe additif $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ (2 *pts*).

   Il est maintenant possible de démontrer la réciproque voulue, en démontrant que $(p-1)! \equiv -1 \;\; [p]$. On appelle b la classe de $(p-1)!$ modulo p.

   (d) Justifier que b est un élément de $\mathbb{Z}_p^*$ (0,5 *pt*).

   (e) Démontrer que

   $$\psi(b) = \overline{\frac{p(p-1)}{2}}$$

   i.e. l'image de b par l'isomorphisme ψ est la classe de $\frac{p(p-1)}{2}$ modulo $p-1$ (2 *pts*).

   (f) On note que la réciproque voulue est triviale pour $p=2$. On suppose donc que $p \geq 3$, de sorte que $p-1$ est pair. En déduire que $\psi(b) = \overline{\frac{p-1}{2}}$ (0,5 *pt*).

   (g) En déduire que $b^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}_p^*$. Dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, cela implique que $b = \pm 1$ (admis). En déduire que $b = -1$ et conclure (1 *pt*).