Vektorit

Juulia Lahdenperä ja Lotta Oinonen

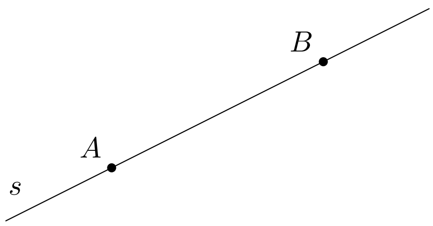
28. tammikuuta 2016

Sisältö

1 Suora ja taso

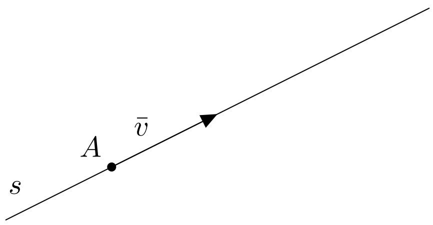
1.1 Suora

Tutkitaan seuraavaksi suoria. Kuvassa 1.1 olevien pisteiden A ja B kautta on mahdollista piirtää ainoastaan yksi suora – pisteet A ja B määrittävät suoran s kokonaan. Suoran määrittämiseen riittää siis kaksi pistettä. Yksi piste ei pelkästään riitä, sillä yhden pisteen kautta voi kulkea äärettömän monta eri suoraa.



Kuva 1.1: Pisteiden A ja B määrittämä suora s.

Suoran määrittämisessä voidaan käyttää hyväksi myös vektoreita. Tällöin tarvitaan suoran yksi piste sekä yksi suoran suuntainen vektori. Tarkastellaan kuvaa 1.2. Suoran piste A määrittää jonkin pisteen, jonka kautta suora kulkee. Yhden pisteen kautta voi kuitenkin kulkea äärettömän monta suoraa. Tästä syystä tarvitaan vielä vektori $\bar{v}$, joka kertoo, mihin suuntaan suora kulkee. Tätä vektoria kutsutaan **suoran suuntavektoriksi**.



Kuva 1.2: Pisteen A ja suuntavektorin $\bar{v}$ määrittämä suora s.

Jos pisteet A ja B ovat suoralla s, suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori $\overline{AB}$ tai vektori $\overline{BA}$. Nyt suora voidaan määrittää kumman tahansa pisteen ja kumman tahansa suuntavektorin avulla.

Tehtävä 1.1. Tutki pisteitä $A = (-2, 1)$ ja $B = (4, -2)$.

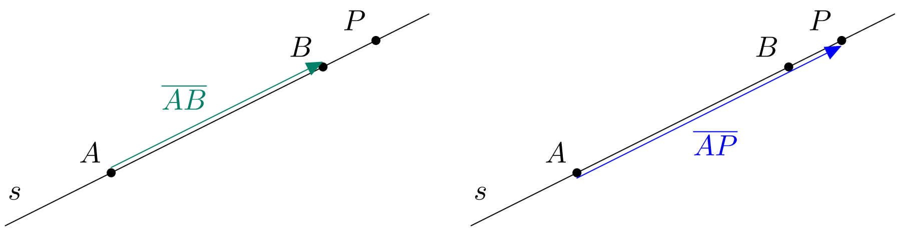
(a) Piirrä pisteet A ja B koordinaatistoon.

(b) Piirrä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora ja merkitse sitä kirjaimella s.

(c) Merkitse kuvaan vektori $\overline{AB}$ ja ilmoita se vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(d) Suoran s voi nyt määrittää esimerkiksi pisteen A ja vektorin $\overline{AB}$ avulla. Keksi jokin toinen tapa määrittää sama suora.

Suoralla olevia muita pisteitä voidaan tutkia yhdensuuntaisuuden avulla. Esimerkiksi kuvan 1.3 piste P on pisteiden A ja B kautta kulkevalla suoralla s, koska vektori $\overline{AB}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overline{AP}$ kanssa. Toisin sanoen vektori $\overline{AP}$ on suuntavektorin $\overline{AB}$ monikerta, eli $\overline{AP} = t\overline{AB}$ jollakin reaaliluvulla t.



Kuva 1.3: Piste P on suoralla s.

Mielivaltainen piste P on siis joidenkin pisteiden A ja B kautta kulkevalla suoralla s, jos ja vain jos vektori $\overline{AB}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overline{AP}$ kanssa, eli yhtälö $\overline{AP} = t\overline{AB}$ pätee jollakin reaaliluvulla t.

Tehtävä 1.2. Tutki pisteitä $A = (-2, -1)$ ja $B = (1, 3)$.

(a) Piirrä pisteet A ja B koordinaatistoon.

(b) Piirrä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora ja merkitse sitä kirjaimella s.

(c) Katso kuvasta, onko piste $P = (8, 3)$ suoralla s.

(d) Merkitse kuvaan vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AP}$, ja ilmoita ne vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(e) Tutki yhtälöä $\overline{AP} = t\overline{AB}$. Löydätkö jonkin reaaliluvun t, joka toteuttaa yhtälön? Toisin sanoen ovatko vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AP}$ yhdensuuntaiset?

Tarkastellaan sitten suoraa s, joka kulkee pisteiden $A = (-3, 1)$ ja $B = (2, 6)$ kautta. Tutkitaan, onko piste $P = (-1, 3)$ kyseisellä suoralla. Muodostetaan tätä varten vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AP}$. Vektori

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (2 - (-3))\bar{\imath} + (6 - 1)\bar{\jmath} \\ &= 5\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}\end{aligned}$$

ja vektori

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= ((-1) - (-3))\bar{\imath} + (3 - 1)\bar{\jmath} \\ &= 2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}.\end{aligned}$$

Sijoitetaan nämä vektorit yhtälöön $\overline{AP} = t\overline{AB}$, jolloin saadaan

$$2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} = t(5\bar{\imath} + 5\bar{\jmath})$$

ja edelleen

$$2(\bar{\imath} + \bar{\jmath}) = 5t(\bar{\imath} + \bar{\jmath}).$$

Huomataan, että yhtälö on tosi silloin, kun $2 = 5t$, eli kun $t = 2/5$. Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AP}$ ovat siis yhdensuuntaiset. Näin ollen piste P on suoralla s.

Tarkastellaan edelleen samaa suoraa s. Tutkitaan, onko piste $Q = (2, 4)$ kyseisellä suoralla. Huomataan, että vektori

$$\overline{AB} = 5\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}$$

ja vektori

$$\overline{AQ} = 5\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}.$$

Sijoitetaan nämä vektorit yhtälöön $\overline{AP} = t\overline{AB}$, jolloin saadaan

$$5\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} = t(5\bar{\imath} + 5\bar{\jmath})$$

ja edelleen

$$5\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} = 5t\bar{\imath} + 5t\bar{\jmath}.$$

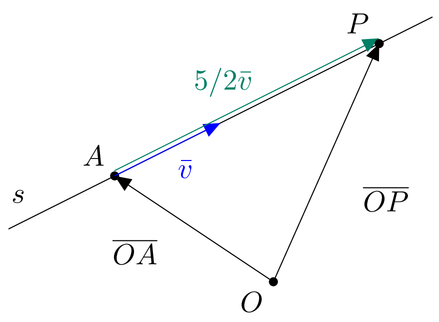
Yhtälö on tosi silloin, kun vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ kertoimet ovat samat, eli kun $5 = 5t$ ja $3 = 5t$. Ensimmäisen yhtälön perusteella $t = 1$, mutta tämä ei totetuta toista yhtälöä. Yhtälö $5\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} = 5t\bar{\imath} + 5t\bar{\jmath}$ ei siis toteudu millään reaaliluvulla t. Näin ollen vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AQ}$ eivät ole yhdensuuntaiset, eikä piste Q ole suoralla s.

Tehtävä 1.3. Tutki pisteiden $A = (-1, -3)$ ja $B = (1, 3)$ määrittämää suoraa s.

(a) Onko piste $P = (3, 9)$ suoralla s?

(b) Onko piste $Q = (2, 7)$ suoralla s?

Suoralla olevia muita pisteitä voidaan tutkia myös paikkavektorien ja vektorien yhteenlaskun avulla. Tarkastellaan kuvassa 1.4 olevaa suoraa s, joka on määritelty pisteen A ja suuntavektorin $\bar{v}$ avulla. Myös piste P on suoralla s, sillä vektori $\overline{OP} = \overline{OA} + 5/2\bar{v}$.



Kuva 1.4: Suoran s vektoriyhtälö.

Suoran vektoriyhtälö

Määritelmä 1.4. Oletetaan, että piste A on suoralla s, jonka suuntavektori on vektori $\bar{v}$. Yhtälöä $\overline{OP} = \overline{OA} + t\bar{v}$, missä t on jokin reaaliluku, sanotaan suoran s vektoriyhtälöksi.

Suoran vektoriyhtälö antaa kaikkien suoran pisteiden P paikkavektorit $\overline{OP}$, kun kerroin t käy läpi kaikki reaaliluvut.

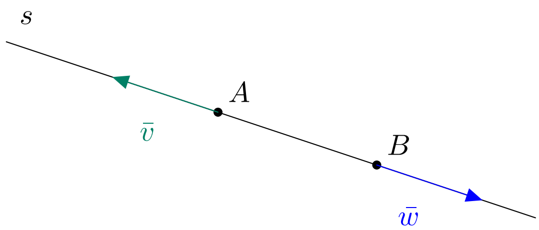
Tehtävä 1.5. Tutki pisteen $A = (-1, 6)$ ja suuntavektorin $\bar{v} = 2\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}$ määrittämää suoraa s.

(a) Onko piste $P = (5, -3)$ suoralla s?

(b) Onko piste $Q = (4, 1)$ suoralla s?

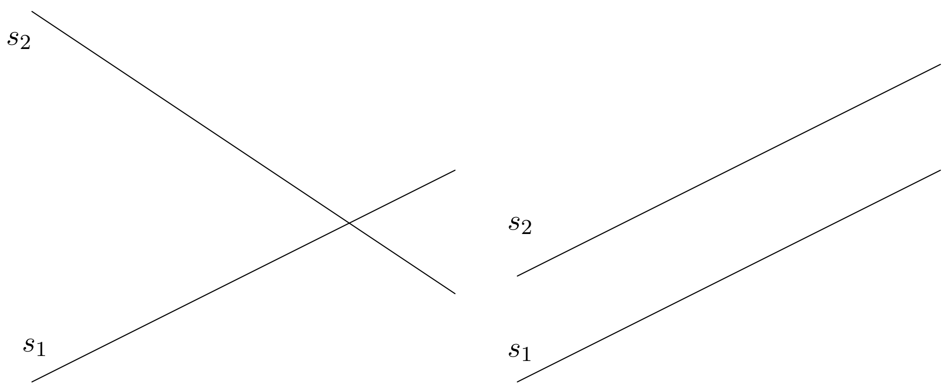
Tehtävä 1.6. Tutki pisteen $A = (4, 0)$ ja suuntavektorin $\bar{v} = -5\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$ määrittämää suoraa s. Määritä kolme suoran s pistettä.

Joskus käy niin, että kahden pisteen ja kahden suuntavektorin määrittämät suorat ovatkin täsmälleen samat. Esimerkiksi kuvan 1.5 suora s voidaan määrittää esimerkiksi pisteen A ja suuntavektorin $\bar{v}$ tai pisteen B ja suuntavektorin $\bar{w}$ avulla.



Kuva 1.5: Suora s voidaan määrittää usealla eri tavalla.

Tutkitaan sitten suorien mahdollisia leikkauspisteitä. Tasossa kaksi **eri** suoraa joko leikkaavat toisensa tai ne ovat yhdensuuntaiset.



Kuva 1.6: Tason kaksi eri suoraa s_1 ja s_2 joko leikkaavat toisensa tai ovat yhdensuuntaisia.

Suorilla on leikkauspiste, jos niillä on yksi yhteinen piste, eli on olemassa piste, joka kuuluu molemmille suorille. Tarkastellaan kuvaa 1.7. Suorat s_1 ja s_2 leikkaavat toisensa pisteessä P. Suoran s_1 vektoriyhtälön perusteella vektori

$$\overline{OP} = \overline{OA} + t\bar{v}$$

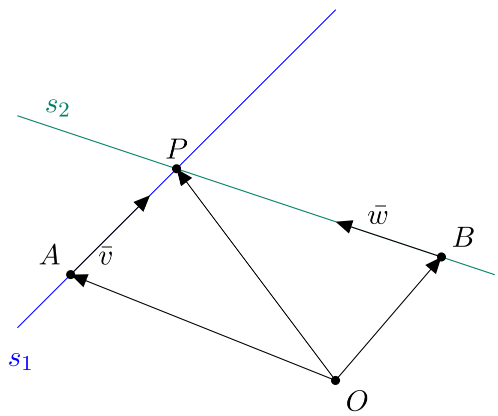
jollakin reaaliluvulla t, ja suoran s_2 vektoriyhtälön perusteella

$$\overline{OP} = \overline{OB} + r\bar{w}$$

jollakin reaaliluvulla r. Yhdistämällä nämä kaksi tietoa saadaan yhtälö

$$\overline{OA} + t\bar{v} = \overline{OB} + r\bar{w}.$$

Koska suorat s_1 ja s_2 leikkaavat toisensa, on olemassa reaaliluvut t ja r, jotka toteuttavat kyseisen yhtälön. Suorien leikkauspiste voidaan siis löytää suorien vektoriyhtälöiden avulla.



Kuva 1.7: Suorien s_1 ja s_2 leikkauspiste P.

Tarkastellaan asiaa vielä esimerkin avulla. Tutkitaan pisteen $A = (7, 2)$ ja suuntavektorin $\bar{v} = -3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$ määrittämää suoraa s_1, ja pisteen $B = (-5, 6)$ ja suuntavektorin $\bar{w} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath}$ määrittämää suoraa s_2. Tutkitaan, leikkaavatko suorat toisensa. Merkitään suorien mahdollista leikkauspistettä kirjaimella P. Jos suorat leikkaavat toisensa, niin on olemassa sellaiset reaaliluvut t ja r, jotka totteutavat yhtälön

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OA} + t\bar{v} \\ &= \overline{OB} + r\bar{w}.\end{aligned}$$

Sijoitetaan pisteet ja suuntavektorit yhtälöön $\overline{OA} + t\bar{v} = \overline{OB} + r\bar{w}$, jolloin saadaan

$$(7\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}) + t(-3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}) = (-5\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}) + r(2\bar{\imath} + \bar{\jmath}).$$

Yhtälön vasen puoli sievenee muotoon

$$(7\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}) + t(-3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}) = (3t + 7)\bar{\imath} + (4t + 2)\bar{\jmath},$$

ja oikea puoli muotoon

$$(-5\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}) + r(2\bar{\imath} + \bar{\jmath}) = (2r - 5)\bar{\imath} + (r + 6)\bar{\jmath}.$$

Jotta yhtälön vasen ja oikea puoli olisivat samat, pitää vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ kertoimien olla samat. Näin ollen saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3t + 7 = 2r - 5 \\ 4t + 2 = r + 6. \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmän alempi yhtälö muuttujan r suhteen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} r &= 4t + 2 - 6 \\ &= 4t - 4. \end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöryhmän ensimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} 3t + 7 &= 2r - 5 \\ \Rightarrow 3t + 7 &= 2(4t - 4) - 5 \\ \Rightarrow 3t + 7 &= 8t - 13 \\ \Rightarrow 5t &= 20 \\ \Rightarrow t &= 4. \end{aligned}$$

Nyt $r = 4t - 4 = 4 \cdot 4 - 4 = 16 - 4 = 12$. Löydettiin siis reaaliluvut $t = 4$ ja $r = 12$, jotka toteuttavat yhtälön. Näin ollen suorat s_1 ja s_2 leikkaavat toisensa, ja leikkauspisteen paikkavektori on

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OA} + 4\bar{v} \\ &= (7\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}) + 4(-3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}) \\ &= 5\bar{\imath} - 14\bar{\jmath}. \end{aligned}$$

Suorat s_1 ja s_2 leikkaavat siis pisteessä $P = (5, -14)$.

Tehtävä 1.7. Tutki pisteen $A = (0, -2)$ ja suuntavektorin $\bar{v} = 4\bar{\imath} - 5\bar{\jmath}$ määrittämää suoraa s_1, ja pisteen $B = (0, 5)$ ja suuntavektorin $\bar{w} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath}$ määrittämää suoraa s_2.

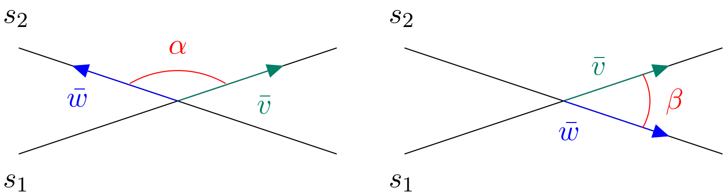
(a) Onko piste $P = (-2, 1)$ suorien s_1 ja s_2 leikkauspiste?

(b) Missä pisteessä suorat leikkaavat toisensa?

Kappaleessa **??** opittiin määrittämään vektorien välisiä kulmia. Teoreeman **??** mukaan vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma saadaan kaavasta

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$$

Kahden suoran välistä kulmaa voidaan tutkia suorien suuntavektoreiden avulla. Tässä on kuitenkin oltava tarkkana. Suorien välisellä kulmalla tarkoitetaan kulmista pienempää. Joskus suorien suuntavektorien valinnasta johtuen vektorien väliseksi kulmaksi saadaan suorien välisistä kulmista suurempi. Tilannetta havainnollistetaan kuvassa 1.8. Jos siis saat suorien väliseksi kulmaksi yli 90 astetta, vähennä se 180 asteesta, jolloin saat oikean suorien välisen kulman.



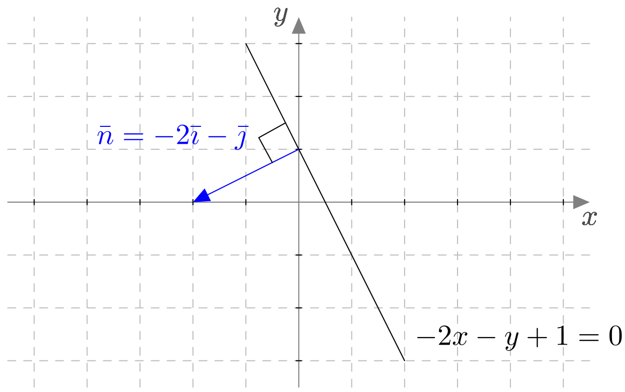
Kuva 1.8: Suorien s_1 ja s_2 suuntavektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välisellä kulmalla tarkoitetaan kulmaa β.

Joskus on hyödyllistä tutkia ainoastaan suoraa vasten kohtisuorassa olevia vektoreita. Tarkastellaan tätä varten suoraa $y = -2x + 1$. Kyseinen suora voidaan ilmoittaa myös muodossa $-2x - y + 1 = 0$. Tällaista muotoa kutsutaan **suoran normaalimuotoiseksi yhtälöksi**. Normaalimuotoinen yhtälö on aina muotoa $ax + by + c = 0$ joillakin kertoimilla a, b ja c.

Määritelmä 1.8. Suoran normaalimuotoinen yhtälö on muotoa $ax + by + c = 0$ joillakin reaaliluvuilla a, b ja c.

Suoran normaalimuotoinen yhtälö

Vektoria $\bar{n}$, joka on kohtisuorassa suoraa s vasten, sanotaan suoran s **normaalivektoriksi**. Suoran normaalivektorit nähdään suoraan sen normaalimuotoisesta yhtälöstä. Suoran $ax + by + c = 0$ normaalivektorit ovat vektorin $a\bar{\imath} + b\bar{\jmath}$ monikertoja, eli muotoa $t(a\bar{\imath} + b\bar{\jmath})$ jollakin reaaliluvulla t. Suoran $-2x - y + 1 = 0$ eräs normaalivektori on siis $\bar{n} = -2\bar{\imath} - \bar{\jmath}$.



Kuva 1.9: Suora $-2x - y + 1 = 0$ ja sen eräs normaalivektori $\bar{n} = -2\bar{\imath} - \bar{\jmath}$.

Tehtävä 1.9. Tutki suoraa $s = -6x + 3y + 9 = 0$.

(a) Etsi jokin suoran s suuntavektori.

(b) Esitä suora s normaalimuodossa ja määritä sille jokin normaalivektori.

(c) Osoita vektorien pistetulon avulla, että a- ja b-kohtien vektorit ovat toisiaan vasten kohtisuorassa.

Tehtävä 1.10. Tutki pisteen $A = (3, -2)$ ja suuntavektorin $\bar{v} = \bar{\imath} + \bar{\jmath}$ määrittämää suoraa s.

(a) Ilmoita suora s normaalimuodossa.

(b) Määritä kolme suoraa s vasten kohtisuorassa olevaa vektoria.

1.2 Suora avaruudessa

Edellisen kappaleen tulokset pätevät myös kolmiulotteisessa avaruudessa. Kolmiulotteisessa koordinaatistossa suoran tuntemiseen riittää edelleen joko kaksi suoran pistettä tai yksi piste ja sen suuntavektori. Pisteet ja vektori ovat nyt kuitenkin kolmiulotteisen avaruuden pisteitä ja vektoreita, joten niillä on kolme komponenttia.

Huomaa, että avaruuden suorien leikkauspisteen selvittämiseksi tarvii osata ratkaista yhtälöryhmiä.

Tutkitaan seuraavaksi suoran muita esitystapoja. Tähän mennessä tunnemme jo suoran vektorimuotoisen yhtälön.

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OA} + t\bar{v} \\ &= x_0\bar{\imath} + y_o\bar{\jmath} + t(v_i\bar{\imath} + v_j\bar{\jmath}) \end{aligned}$$

Määritelmä 1.11. Oletetaan, että suora s kulkee pisteen $A = (x_0, y_0)$ kautta ja sen suuntavektori on vektori $\bar{v} = v_i\bar{\imath} + v_j\bar{\jmath}$. Tällöin suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_i \\ y = y_0 + tv_j. \end{cases}$$

Suoran parametrimuotoinen yhtälö

Ratkaistaan suoran parametriesityksen x- ja y-komponentit muuttujan t suhteen. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tv_i \\ \Rightarrow x - x_0 &= tv_i \\ \Rightarrow t &= \frac{x - x_0}{v_i} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} y &= y_0 + tv_j \\ \Rightarrow y - y_0 &= tv_j \\ \Rightarrow t &= \frac{y - y_0}{v_j}. \end{aligned}$$

Yhdistämällä nämä kaksi tietoa saadaan yhtälö

$$t = \frac{x - x_0}{v_i} = \frac{y - y_0}{v_j}.$$

Jälkimmäinen yhtäsuuruus määrittää saman suoran s. Tätä esitysmuotoa sanotaan suoran s koordinaattimuotoiseksi yhtälöksi.

Määritelmä 1.12. Oletetaan, että suora s kulkee pisteen $A = (x_0, y_0)$ kautta ja sen suuntavektori on vektori $\bar{v} = v_i\bar{\imath} + v_j\bar{\jmath}$. Tällöin suoran koordinaattimuotoinen yhtälö on

$$\frac{x - x_0}{v_i} = \frac{y - y_0}{v_j}.$$

Suoran koordinaattimuotoinen yhtälö

KOORDINAATTIESITYKSESTÄ NÄHDÄÄN HETI SUORAN SUUNTAVEKTORI JA PISTE, JONKA KAUTTA SUORA KULKEE.

Tehtävä 1.13. Piste $A = ()$ ja suuntavektori $\bar{v} =$ määrittävät suoran s.

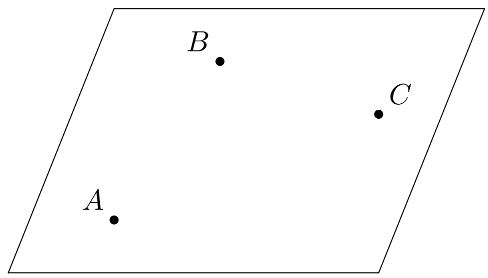
(a) Määritä suoran vektoriyhtälö.
(b) Määritä suoran parametrimuotoinen yhtälö.
(c) Määritä suoran koordinaattimuotoinen yhtälö.

Tehtävä 1.14. Koordinaattiesitys (tähän koordinaattiesitys) määrittää suoran s.

(a) Tarkastele koordinaattiesitystä. Ilmoita yksi piste, jonka kautta suora s kulkee.
(b) Tarkastele koordinaattiesitystä. Ilmoita suoran s suuntavektori.
(c) Muodosta a- ja b-kohtien avulla suoran vektoriyhtälö.

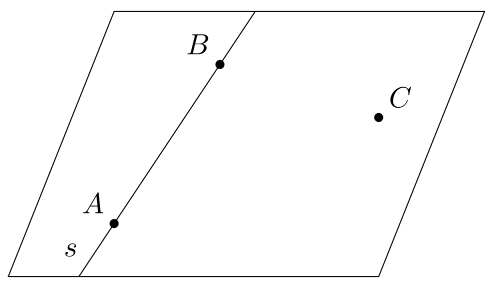
1.3 Taso

Kolmiulotteisessa avaruudessa on kaksiulotteisia tasoja. Taso voidaan määrittää monella eri tavalla. Alla olevan kuvan mukaisesti tason määrittämiseen riittää esimerkiksi kolme tason pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla. Tilanne on vastaava kuin kaksiulotteisessa tapauksessa: kolmiulotteisessa avaruudessa kahden pisteen läpi voi kulkea äärettömän monta tasoa. Tästä syystä tason tuntemiseen tarvitaan vielä kolmas piste.



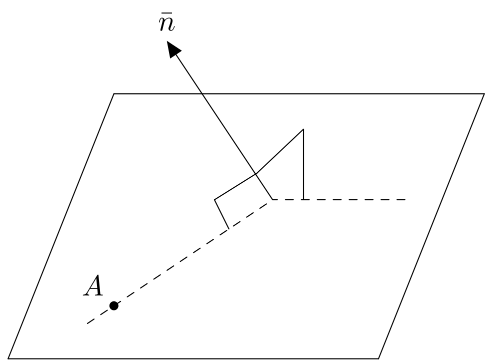
Kuva 1.10: Pisteiden A, B ja C määrittämä taso.

Tason määrittämiseen riittää myös jokin tason suora s ja jokin tason piste A, joka ei ole suoralla s. Tätä havainnollistetaan alla olevassa kuvassa.



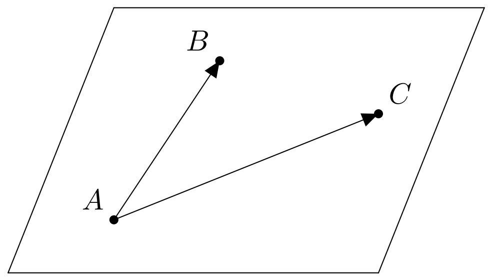
Kuva 1.11: Tason pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran s ja pisteen C määrittämä taso.

Lisäksi taso voidaan alla olevan kuvan mukaisesti määrittää jonkin tason pisteen A ja jonkin tason normaalivektorin $\bar{n}$ avulla. Kyseistä normaalivektoria vasten kohtisuorassa olevia tasoja on äärettömän monta, joten tason määrittämiseen tarvitaan vielä jokin tason piste A.



Kuva 1.12: Pisteen A ja normaalivektori $\bar{n}$ määrittämä taso.

Taso voidaan määrittää myös vektorien avulla. Tason suuntaisia vektoreita sanotaan **tason suuntavektoreiksi**. Pisteiden A, B ja C määrittämän tason suuntavektoreita ovat esimerkiksi vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$. Taso voidaan siis määrittää myös yhden pisteen ja kahden tason suuntavektorin avulla, jotka eivät ole yhdensuuntaisia.



Kuva 1.13: Pisteen A ja suuntavektoreiden $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ määrittämä taso.

Avaruuden piste $P = (x, y, z)$ on kolmen pisteen määrittämässä tasossa ABC, jos ja vain jos $\overline{AP} = s\overline{AB} + r\overline{AC}$ joillakin reaaliluvuilla s ja r. Tätä yhtälöä sanotaan tason vektoriyhtälöksi.

Määritelmä 1.15. Jos piste A on tasossa ja jos $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat erisuuntaiset tason suuntavektorit, niin tason vektoriyhtälö on $\overline{OP} = \overline{OA} + s\overline{AB} + t\overline{AC}$.

Tason vektoriyhtälö

Tehtävä 1.16. Tarkastele pisteiden $A = ()$, $B = ()$ ja $C = ()$ määrittämää tasoa ABC.

(a) Muodosta tason ABC vektoriyhtälö.

(b) Osoita, että piste $P = ()$ kuuluu tasoon ABC.

Tehtävä 1.17. Tarkastele pisteen $A = ()$ ja suoran $s =$ määrittämää tasoa.

(a) Muodosta tason ABC vektoriyhtälö.

(b) Kuuluuko piste P tasoon ABC?

Tason normaalimuotoinen yhtälö

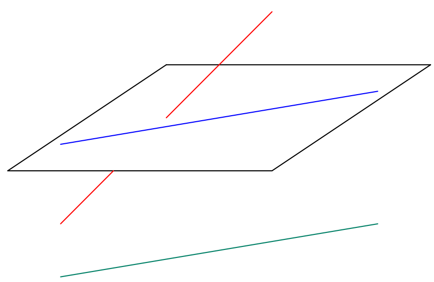
Määritelmä 1.18. $ax + by + cz + d = 0$.

Tason normaalivektori

Määritelmä 1.19. Vektoria, joka on kohtisuorassa kaikkia tason vektoreita vasten, sanotaan tason normaalivektoriksi.

1.4 Suoran ja tason leikkauspiste

Alla olevassa kuvassa esitellään kaikki kolme mahdollisuutta suoran ja tason leikkauspisteille. Suoralla ja tasolla voi olla joko nolla, yksi tai ääretön määrä leikkauspisteitä. Jos suora on tasossa, kaikki suoran pisteet, joita on ääretön määrä, ovat leikkauspisteitä (sininen suora). Jos suora ei ole tasossa, mutta on sen kanssa yhdensuuntainen, leikkauspisteitä ei ole (vihreä suora). Muissa tapauksissa suoralla ja tasolla on täsmälleen yksi leikkauspiste (punainen suora).



Kuva 1.14: Suoran ja tason mahdolliset leikkauspisteet.

Esimerkki suoran ja tason leikkauspisteen löytämisestä.

Tehtävä 1.20.

(a)

(b)

1.5 Suoran ja tason välinen kulma

Suoran ja tason välisen kulman selvittämiseksi suora projisoidaan ensin tasoon. Nyt haluttu kulma lasketaan suoran ja projektiosuoran suuntavektoreiden avulla.