Vektorit

Juulia Lahdenperä ja Lotta Oinonen

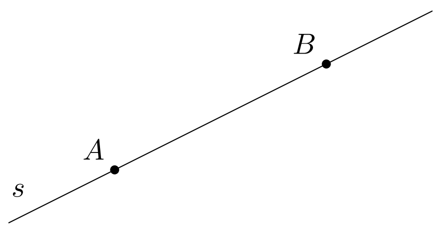
28. tammikuuta 2016

Sisältö

1 Suora ja taso

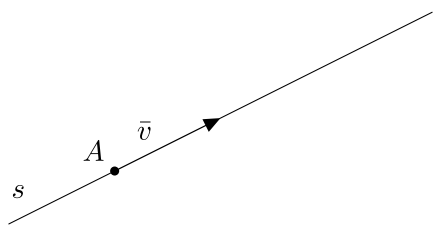
1.1 Suora

Tutkitaan seuraavaksi suoria. Kuvassa 1.1 olevien pisteiden A ja B kautta on mahdollista piirtää ainoastaan yksi suora – pisteet A ja B määrittävät suoran s kokonaan. Suoran määrittämiseen riittää siis kaksi pistettä.



Kuva 1.1: Pisteiden A ja B määrittämä suora s.

Suoran määrittämisessä voidaan käyttää hyväksi myös vektoreita. Tällöin tarvitaan suoran yksi piste sekä yksi suoran suuntainen vektori. Tarkastellaan kuvaa 1.2. Suoran piste A määrittää jonkin pisteen, jonka kautta suora kulkee. Yhden pisteen kautta voi kuitenkin kulkea äärettömän monta suoraa. Tästä syystä tarvitaan vielä vektori $\bar{v}$, joka kertoo, mihin suuntaan suora kulkee. Tätä vektoria kutsutaan suoran **suuntavektoriksi**.



Kuva 1.2: Pisteen A ja suuntavektorin $\bar{v}$ määrittämä suora s.

Jos pisteet A ja B ovat suoralla s, suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori $\overline{AB}$ tai vektori $\overline{BA}$. Nyt suora voidaan määrittää kumman tahansa pisteen ja kumman tahansa suuntavektorin avulla.

Tehtävä 1.1. Tutki pisteitä $A = (-2, 1)$ ja $B = (4, -2)$.

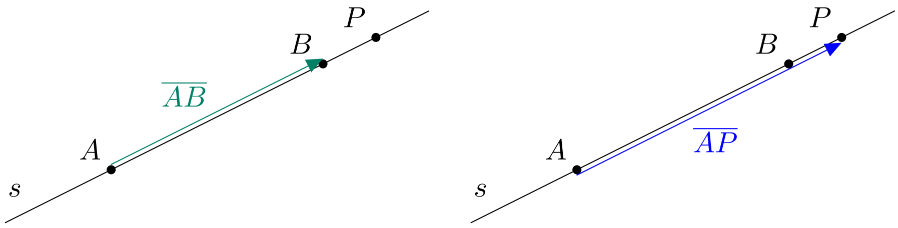
(a) Piirrä pisteet A ja B koordinaatistoon.

(b) Piirrä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora ja merkitse sitä kirjaimella s.

(c) Merkitse kuvaan vektori $\overline{AB}$ ja ilmoita se vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(d) Suoran s voi nyt määrittää esimerkiksi pisteen A ja vektorin $\overline{AB}$ avulla. Keksi jokin toinen tapa määrittää sama suora.

Suoralla olevia muita pisteitä voidaan tutkia yhdensuuntaisuuden avulla. Esimerkiksi kuvan 1.3 piste P on pisteiden A ja B kautta kulkevalla suoralla s, koska vektori $\overline{AB}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overline{AP}$ kanssa. Toisin sanoen vektori $\overline{AP}$ on suuntavektorin $\overline{AB}$ monikerta, eli $\overline{AP} = t\overline{AB}$ jollakin reaaliluvulla t.



Kuva 1.3: Piste P on suoralla s.

Mielivaltainen piste P on siis joidenkin pisteiden A ja B kautta kulkevalla suoralla s, jos ja vain jos vektori $\overline{AB}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overline{AP}$ kanssa, eli yhtälö $\overline{AP} = t\overline{AB}$ pätee jollakin reaaliluvulla t.

Tehtävä 1.2. Tutki pisteitä $A = (-2, -1)$ ja $B = (1, 3)$.

(a) Piirrä pisteet A ja B koordinaatistoon.

(b) Piirrä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora ja merkitse sitä kirjaimella s.

(c) Katso kuvasta, onko piste $P = (8, 3)$ suoralla s.

(d) Merkitse kuvaan vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AP}$, ja ilmoita ne vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(e) Tutki yhtälöä $\overline{AP} = t\overline{AB}$. Löydätkö jonkin reaaliluvun t, joka toteuttaa yhtälön? Toisin sanoen ovatko vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AP}$ yhdensuuntaiset?

Tarkastellaan sitten suoraa s, joka kulkee pisteiden $A = (-3, 1)$ ja $B = (2, 6)$ kautta. Tutkitaan, onko piste $P = (-1, 3)$ kyseisellä suoralla. Muodostetaan tätä varten vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AP}$. Vektori

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (2 - (-3))\bar{\imath} + (6 - 1)\bar{\jmath} \\ &= 5\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}\end{aligned}$$

ja vektori

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= ((-1) - (-3))\bar{\imath} + (3 - 1)\bar{\jmath} \\ &= 2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}.\end{aligned}$$

Sijoitetaan nämä vektorit yhtälöön $\overline{AP} = t\overline{AB}$, jolloin saadaan

$$2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} = t(5\bar{\imath} + 5\bar{\jmath})$$

ja edelleen

$$2(\bar{\imath} + \bar{\jmath}) = 5t(\bar{\imath} + \bar{\jmath}).$$

Huomataan, että yhtälö on tosi silloin, kun $2 = 5t$, eli kun $t = 2/5$. Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AP}$ ovat siis yhdensuuntaiset. Näin ollen piste P on suoralla s.

Tarkastellaan edelleen samaa suoraa s. Tutkitaan, onko piste $Q = (2, 4)$ kyseisellä suoralla. Huomataan, että vektori

$$\overline{AB} = 5\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}$$

ja vektori

$$\overline{AQ} = 5\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}.$$

Sijoitetaan nämä vektorit yhtälöön $\overline{AP} = t\overline{AB}$, jolloin saadaan

$$5\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} = t(5\bar{\imath} + 5\bar{\jmath})$$

ja edelleen

$$5\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} = 5t\bar{\imath} + 5t\bar{\jmath}.$$

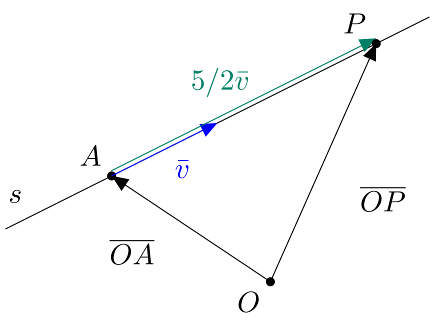
Yhtälö on tosi silloin, kun vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ kertoimet ovat samat, eli kun $5 = 5t$ ja $3 = 5t$. Ensimmäisen yhtälön perusteella $t = 1$, mutta tämä ei totetuta toista yhtälöä. Yhtälö $5\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} = 5t\bar{\imath} + 5t\bar{\jmath}$ ei siis toteudu millään reaaliluvulla t. Näin ollen vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AQ}$ eivät ole yhdensuuntaiset, eikä piste Q ole suoralla s.

Tehtävä 1.3. Tutki pisteiden $A = (-1, -3)$ ja $B = (1, 3)$ määrittämää suoraa s.

(a) Onko piste $P = (3, 9)$ suoralla s?

(b) Onko piste $Q = (2, 7)$ suoralla s?

Suoralla olevia muita pisteitä voidaan tutkia myös paikkavektorien ja vektorien yhteenlaskun avulla. Tarkastellaan kuvassa 1.4 olevaa suoraa s, joka on määritelty pisteen A ja suuntavektorin $\bar{v}$ avulla. Myös piste P on suoralla s, sillä vektori $\overline{OP} = \overline{OA} + 5/2\bar{v}$.



Kuva 1.4: Suoran s vektoriyhtälö.

Suoran vektoriyhtälö

Määritelmä 1.4. Oletetaan, että piste A on suoralla s, jonka suuntavektori on vektori $\bar{v}$. Yhtälöä $\overline{OP} = \overline{OA} + t\bar{v}$, missä t on jokin reaaliluku, sanotaan suoran s vektoriyhtälöksi.

Suoran vektoriyhtälö antaa kaikkien suoran pisteiden P paikkavektorit $\overline{OP}$, kun kerroin t käy läpi kaikki reaaliluvut.

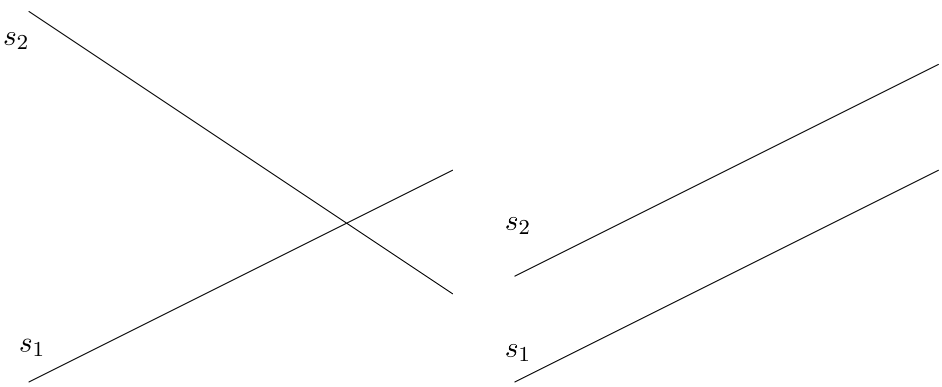
Tehtävä 1.5. Tutki pisteen $A = (-1, 6)$ ja suuntavektorin $\bar{v} = 2\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}$ määrittämää suoraa s.

(a) Onko piste $P = (5, -3)$ suoralla s?

(b) Onko piste $Q = (4, 1)$ suoralla s?

Tehtävä 1.6. Tutki pisteen $A = (4, 0)$ ja suuntavektorin $\bar{v} = -5\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$ määrittämää suoraa s. Määritä kolme suoran s pistettä.

Tutkitaan sitten suorien mahdollisia leikkauspisteitä. Tasossa kaksi suoraa joko leikkaavat toisensa tai ne ovat yhdensuuntaiset.



Kuva 1.5: Tason kaksi eri suoraa s_1 ja s_2 joko leikkaavat toisensa tai ovat yhdensuuntaisia.

Suorilla on leikkauspiste, jos niillä on yksi yhteinen piste, eli on olemassa piste, joka kuuluu molemmille suorille. Tarkastellaan kuvaa 1.6. Suorat s_1 ja s_2 leikkaavat toisensa pisteessä P. Suoran s_1 vektoriyhtälön perusteella vektori

$$\overline{OP} = \overline{OA} + t\bar{v}$$

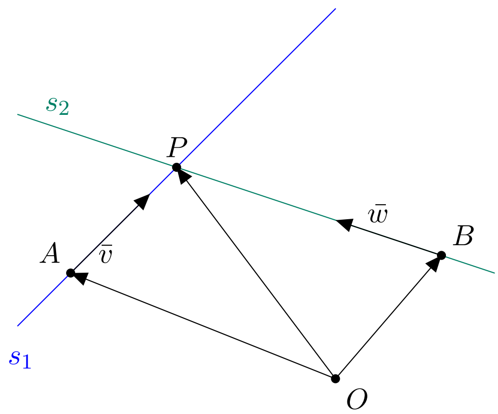
jollakin reaaliluvulla t, ja suoran s_2 vektoriyhtälön perusteella

$$\overline{OP} = \overline{OB} + r\bar{w}$$

jollakin reaaliluvulla r. Yhdistämällä nämä kaksi tietoa saadaan yhtälö

$$\overline{OA} + t\bar{v} = \overline{OB} + r\bar{w}.$$

Koska suorat s_1 ja s_2 leikkaavat toisensa, on olemassa reaaliluvut t ja r, jotka toteuttavat kyseisen yhtälön. Suorien leikkauspiste voidaan siis löytää suorien vektoriyhtälöiden avulla.



Kuva 1.6: Suorien s_1 ja s_2 leikkauspiste P.

Tarkastellaan asiaa vielä esimerkin avulla. Tutkitaan pisteen $A = (7, 2)$ ja suuntavektorin $\bar{v} = -3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$ määrittämää suoraa s_1, ja pisteen $B = (-5, 6)$ ja suuntavektorin $\bar{w} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath}$ määrittämää suoraa s_2. Tutkitaan, leikkaavatko suorat toisensa. Merkitään suorien mahdollista leikkauspistettä kirjaimella P. Jos suorat leikkaavat toisensa, niin on olemassa sellaiset reaaliluvut t ja r, jotka totteutavat yhtälön

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OA} + t\bar{v} \\ &= \overline{OB} + r\bar{w}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan pisteet ja suuntavektorit yhtälöön $\overline{OA} + t\bar{v} = \overline{OB} + r\bar{w}$, jolloin saadaan

$$(7\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}) + t(-3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}) = (-5\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}) + r(2\bar{\imath} + \bar{\jmath}).$$

Yhtälön vasen puoli sievenee muotoon

$$(7\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}) + t(-3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}) = (3t + 7)\bar{\imath} + (4t + 2)\bar{\jmath},$$

ja oikea puoli muotoon

$$(-5\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}) + r(2\bar{\imath} + \bar{\jmath}) = (2r - 5)\bar{\imath} + (r + 6)\bar{\jmath}.$$

Jotta yhtälön vasen ja oikea puoli olisivat samat, pitää vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ kertoimien olla samat. Näin ollen saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3t + 7 = 2r - 5 \\ 4t + 2 = r + 6. \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmän alempi yhtälö muuttujan r suhteen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} r &= 4t + 2 - 6 \\ &= 4t - 4. \end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöryhmän ensimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} 3t + 7 &= 2r - 5 \\ \Rightarrow 3t + 7 &= 2(4t - 4) - 5 \\ \Rightarrow 3t + 7 &= 8t - 13 \\ \Rightarrow 5t &= 20 \\ \Rightarrow t &= 4. \end{aligned}$$

Nyt $r = 4t - 4 = 4 \cdot 4 - 4 = 16 - 4 = 12$. Löydettiin siis reaaliluvut $t = 4$ ja $r = 12$, jotka toteuttavat yhtälön. Näin ollen suorat s_1 ja s_2 leikkaavat toisensa, ja leikkauspisteen paikkavektori on

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OA} + 4\bar{v} \\ &= (7\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}) + 4(-3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}) \\ &= 5\bar{\imath} - 14\bar{\jmath}. \end{aligned}$$

Suorat s_1 ja s_2 leikkaavat siis pisteessä $P = (5, -14)$.

Tehtävä 1.7. Tutki pisteen $A = (0, -2)$ ja suuntavektorin $\bar{v} = 4\bar{\imath} - 5\bar{\jmath}$ määrittämää suoraa s_1, ja pisteen $B = (0, 5)$ ja suuntavektorin $\bar{w} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath}$ määrittämää suoraa s_2.

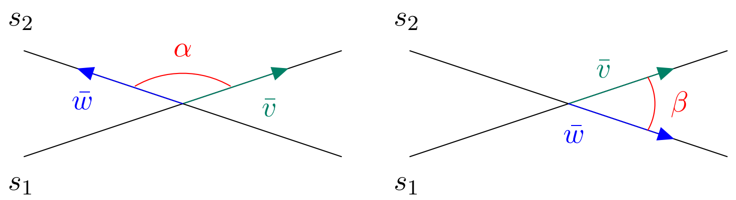
(a) Onko piste $P = (-2, 1)$ suorien s_1 ja s_2 leikkauspiste?

(b) Missä pisteessä suorat leikkaavat toisensa?

Kappaleessa **??** opittiin määrittämään vektorien välisiä kulmia. Teoreeman **??** mukaan vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma saadaan kaavasta

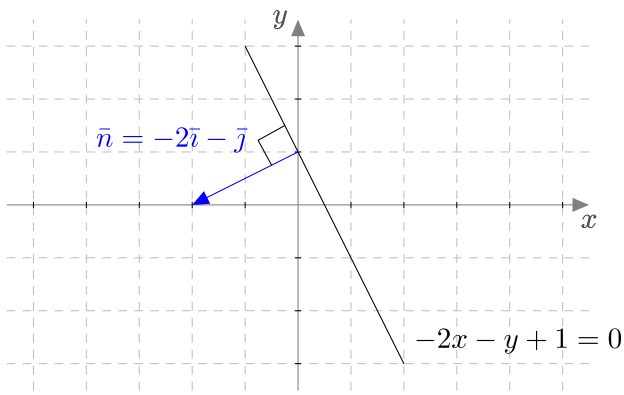
$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$$

Kahden suoran välistä kulmaa voidaan tutkia suorien suuntavektoreiden avulla. Tässä on kuitenkin oltava tarkkana. Suorien välisellä kulmalla tarkoitetaan kulmista pienempää. Joskus suorien suuntavektorien valinnasta johtuen vektorien väliseksi kulmaksi saadaan suorien välisistä kulmista suurempi. Tilannetta havainnollistetaan kuvassa 1.7. Jos siis saat suorien väliseksi kulmaksi yli 90 astetta, vähennä se 180 asteesta, jolloin saat oikean suorien välisen kulman.



Kuva 1.7: Suorien s_1 ja s_2 suuntavektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välisellä kulmalla tarkoitetaan kulmaa β.

Joskus on hyödyllistä tutkia ainoastaan suoraa vasten kohtisuorassa olevia vektoreita. Tarkastellaan tätä varten suoraa $y = -2x + 1$. Kyseinen suora voidaan ilmoittaa myös muodossa $-2x - y + 1 = 0$. Tällaista muotoa kutsutaan **suoran normaalimuotoiseksi yhtälöksi**. Normaalimuotoinen yhtälö on aina muotoa $ax + by + c = 0$ joillakin kertoimilla a, b ja c. Vektoria $\bar{n}$, joka on kohtisuorassa suoraa s vasten, sanotaan suoran s **normaalivektoriksi**. Suoran normaalivektorit nähdään suoraan sen normaalimuotoisesta yhtälöstä. Suoran $ax + by + c = 0$ normaalivektorit ovat vektorin $a\bar{\imath} + b\bar{\jmath}$ monikertoja, eli muotoa $t(a\bar{\imath} + b\bar{\jmath})$ jollakin reaaliluvulla t. Suoran $-2x - y + 1 = 0$ eräs normaalivektori on siis $\bar{n} = -2\bar{\imath} - \bar{\jmath}$.



Kuva 1.8: Suora $-2x - y + 1 = 0$ ja sen eräs normaalivektori $\bar{n} = -2\bar{\imath} - \bar{\jmath}$.

Tehtävä 1.8. Tutki suoraa $s = -6x + 3y + 9 = 0$.

(a) Etsi jokin suoran s suuntavektori.

(b) Esitä suora s normaalimuodossa ja määritä sille jokin normaalivektori.

(c) Osoita vektorien pistetulon avulla, että a- ja b-kohtien vektorit ovat toisiaan vasten kohtisuorassa.

Tehtävä 1.9. Tutki pisteen $A = (3, -2)$ ja suuntavektorin $\bar{v} = \bar{\imath} + \bar{\jmath}$ määrittämää suoraa s.

(a) Ilmoita suora s normaalimuodossa.

(b) Määritä kolme suoraa s vasten kohtisuorassa olevaa vektoria.

1.2 Suora avaruudessa

Kolmiulotteisessa koordinaatistossa suoran tntemiseen riittää edelleen joko kaksi suoran pistettä tai yksi piste ja sen suuntavektori. Pisteet ja vektori ovat nyt kuitenkin kolmiulotteisen avaruuden pisteitä ja vektoreita, joten niillä on kolme komponenttia.

Samat asiat pätee kuin kaksiulotteisessa avaruudessa.

Huomaa, että avaruuden suorien leikkauspisteen selvittämiseksi tarvii osata ratkaista yhtälöryhmiä.

Haastavampia tehtäviä.

Tehtävä 1.10.

(a)

(b)

Tehtävä 1.11.

(a)

(b)

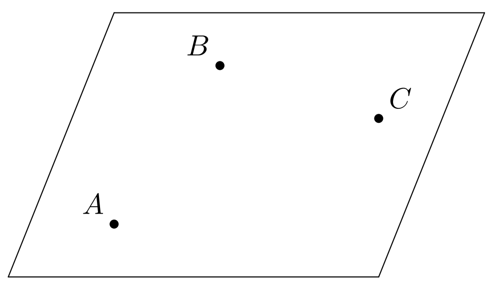
1.3 Taso

Kolmiulotteisessa avaruudessa on tasoja. Tason voi määrittää monella eri tavalla

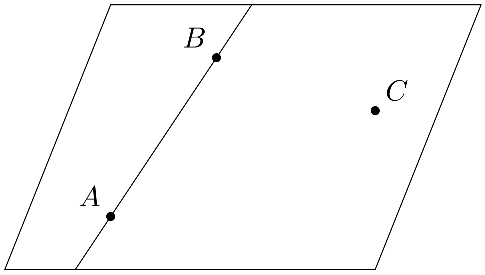
Kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla

Suora s ja piste A, joka ei ole suoralla s

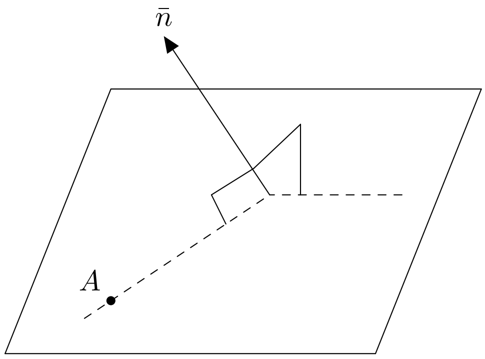
piste A ja tason normaalivektori n



Kuva 1.9: Pisteiden A, B ja C määrittämä taso.

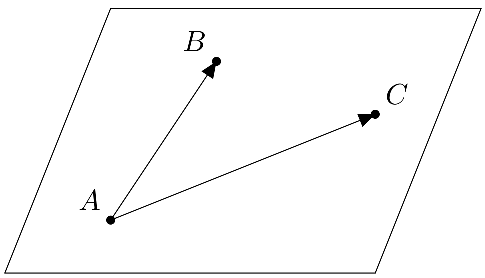


Kuva 1.10: Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran ja pisteen C määrittämä taso.



Kuva 1.11: Pisteen A ja normaalivektori $\bar{n}$ määrittämä taso.

Tason suuntaisia vektoreita sanotaan tason suuntavektoreiksi. Esimerkiksi pisteiden A, B ja C määrittämän tason suuntavektoreita ovat vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$.



Kuva 1.12: Pisteen A ja suuntavektoreiden $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ määrittämä taso.

Tason voi siis määrittää myös yhden pisteen ja kahden tason suuntavektorin avulla.

Tähän tarvitaan selitys siitä, miksi kahden erisuuntaisen vektorin avulla päästään tason joka pisteeseen. (Vektorin komponenttiesitys muilla kuin i:llä ja j:llä.)

Avaruuden piste $P = (x, y, z)$ on tasossa ABC, jos ja vain jos $AP = sAB + rAC$ joillakin reaaliluvuilla s ja r. Tätä yhtälöä sanotaan tason vektoriyhtälöksi.

Tason vektoriyhtälö

Määritelmä 1.12. Jos piste A on tasossa ja jos $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat erisuuntaiset tason suuntavektorit, niin tason vektoriyhtälö on $\overline{OP} = \overline{OA} + s\overline{AB} + t\overline{AC}$.

Tehtävä 1.13. Tarkastele pisteiden $A = ()$, $B = ()$ ja $C = ()$ määrittämää tasoa ABC.

(a) Muodosta tason ABC vektoriyhtälö.

(b) Osoita, että piste $P = ()$ kuuluu tasoon ABC.

Tehtävä 1.14. Tarkastele pisteen $A = ()$ ja suoran $s =$ määrittämää tasoa.

(a) Muodosta tason ABC vektoriyhtälö.

(b)

Tason normaalimuotoinen yhtälö

Määritelmä 1.15. $ax + by + cz + d = 0.$

Tason normaalivektori

Määritelmä 1.16. Vektoria, joka on kohtisuorassa kaikkia tason vektoreita vasten, sanotaan tason normaalivektoriksi.

1.4 Suoran ja tason leikkauspiste

Suoralla ja tasolla voi olla joko nolla, yksi tai ääretön määrä leikkauspisteitä. Jos suora on tasossa, kaikki suoran pisteet, joita on ääretön määrä, ovat leikkauspisteitä. Jos suora ei ole tasossa, mutta on sen kanssa yhdensuuntainen, leikkauspisteitä ei ole. Muissa tapauksissa suoralla ja tasolla on täsmälleen yksi leikkauspiste.

1.5 Suoran ja tason välinen kulma

Suoran ja tason välisen kulman selvittämiseksi suora projisoidaan ensin tasoon. Nyt haluttu kulma lasketaan suoran ja projektiosuoran suuntavektoreiden avulla.