Vektorit

Juulia Lahdenperä ja Lotta Oinonen

10. lokakuuta 2015

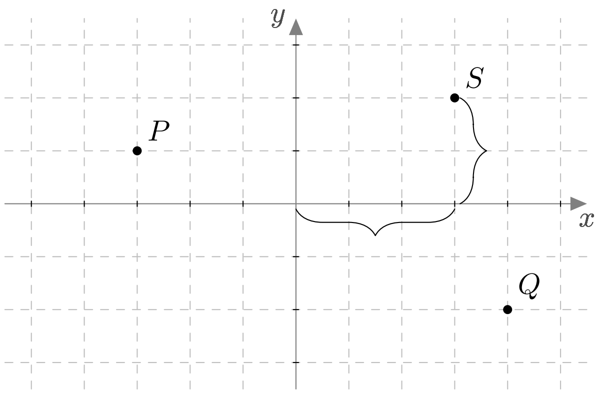
Sisältö

1 Vektori

1.1 xy-koordinaatisto

KOODRINAATTIAKSELIEN SUUNNAT?

Tehtävä 1.1.1. Tutki alla olevaa kuvaa 1.1.



Kuva 1.1:

(a) Kuinka monta askelta siirrytään x-akselin suuntaan, jotta päästään pisteeseen P?

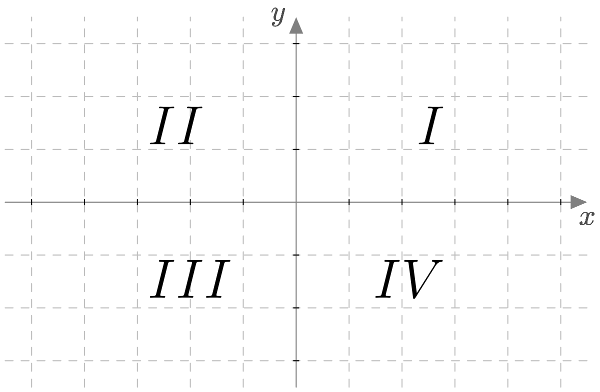
(b) Kuinka monta askelta siirrytään y-akselin suuntaan, jotta päästään pisteeseen P?

(c) Kuinka monta askelta siirrytään x-akselin suuntaan, jotta päästään pisteeseen Q?

(d) Kuinka monta askelta siirrytään y-akselin suuntaan, jotta päästään pisteeseen Q?

Tason piste ilmoitetaan lukuparina (x, y), missä ensimmäinen luku x ilmoittaa x-akselin suuntaisten ja toinen luku y y-akselin suuntaisten askelten lukumäärän. Näitä lukuja kutsutaan **pisteen koordinaateiksi**. Kuvan 1.1 piste S sijaitsee siinä tason pisteessä, missä $x = 3$ ja $y = 2$. Näin ollen pistettä S merkitään $S = (3, 2)$. Koordinaattien avulla kaikki tason pisteet voidaan määrittää yksikäsitteisesti.

Koordinaattiakselit jakavat tason neljään osaan. Osat nimetään yleensä järjestysnumeroilla I, II, III ja IV alla olevan kuvan 1.2 mukaisesti. Koordinaattiakselien leikkauskohtaa kutsutaan **origoksi**. Origoa merkitään yleensä kirjaimella O, ja sen koordinaatit ovat $O = (0, 0)$.



Kuva 1.2: Koordinaatiston neljännekset.

Tehtävä 1.1.2. Valitse kuvasta 1.2 jokaiselta koordinaatiston neljänneksellä jokin piste ja ilmoita sen koordinaatit. Miten eri neljännekset vaikuttavat koordinaattien etumerkkeihin?

Tehtävä 1.1.3. ...

(a) Piirrä koordinaatistoon pisteet $(0, 2)$, $(0, -4)$ ja $(0, 3)$.

(b) Piirrä koordinaatistoon kolme uutta pistettä, jotka ovat muotoa $(0, y)$.

(c) Piirrä kuva kaikista sellaisista tason pisteistä, jotka ovat muotoa $(0, y)$ jollakin kokonaisluvulla y.

Tehtävä 1.1.4. ...

(a) Piirrä koordinaatistoon pisteet $(2, 2)$, $(3, 3)$ ja $(-2, -2)$.

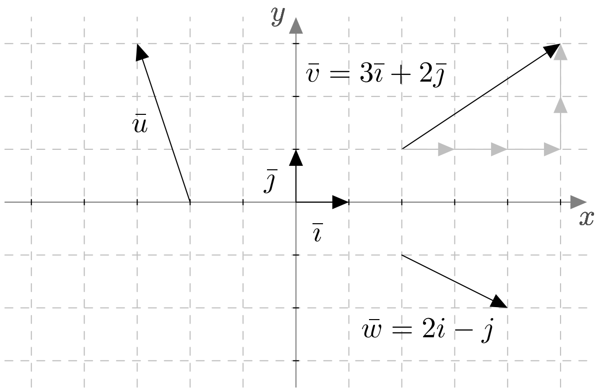
(b) Piirrä koordinaatistoon kolme uutta pistettä, jotka ovat muotoa (x, x) jollakin kokonaisluvulla x.

(c) Piirrä kuva kaikista sellaisista tason pisteistä, jotka ovat muotoa (x, x) jollakin kokonaisluvulla x.

Tehtävä 1.1.5. Piirrä kuva kaikista sellaisista tason pisteistä, jotka ovat muotoa $(x, 2)$ jollakin kokonaisluvulla x.

1.2 Vektorin muodostaminen

Tarkastellaan seuraavaa kuvaa 1.3. Kuvassa on nuolet $\bar{u}, \bar{v}$ ja $\bar{w}$, yhden x-akselin suuntaisen askeleen pituinen nuoli $\bar{\imath}$, sekä yhden y-akselin suuntaisen askeleen pituinen nuoli $\bar{\jmath}$.



Kuva 1.3: Esimerkkikuva

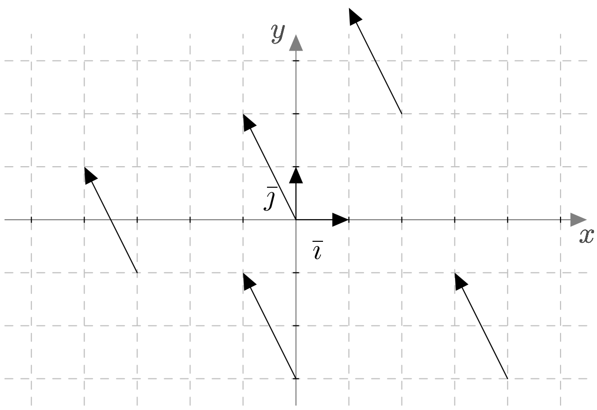
Huomataan, että nuolen $\bar{v}$ päästä on sen kärkeen kolme x-akselin suuntaista askelta positiiviseen suuntaan ja kaksi y-akselin suuntaista askelta positiiviseen suuntaan. Tällainen nuoli $\bar{v}$ voidaan ilmoittaa nuolien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla muodossa $\bar{v} = 3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$.

Koordinaatistossa olevia nuolia kutsutaan **vektoreiksi**. Edellisen kuvan nuoli $\bar{v}$ on siis vektori $\bar{v}$, joka voidaan ilmaista vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Vektoreita $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ sanotaan komponenttivektoreiksi, ja summattavia $3\bar{\imath}$ ja $2\bar{\jmath}$ vektorin $\bar{v}$ **komponenteiksi**. Vektorin komponenttiesityksellä tarkoitetaan vektorin esittämistä vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Vektorit $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ ovat käteviä, sillä niiden avulla voidaan ilmaista kaikki mahdolliset xy-koordinaatiston vektorit.

Määritelmä 1.2.1. Vektorin ilmaisemista komponenttivektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla sanotaan vektorin **komponenttiesitykseksi**.

Vektorin komponenttiesitys

Tehtävä 1.2.2. Tarkastellaan seuraavaa kuvaa 1.4.



Kuva 1.4: Vektoreita

(a) Ilmoita kaikki kuvassa olevat vektorit vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Mitä huomaat?

(b) Vertaa origosta lähtevää vektoria sen kärkipisteen koordinaatteihin. Mitä huomaat?

Paikkavektori

Määritelmä 1.2.3. Origosta lähtevän vektorin $\bar{v} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$ kärki on pisteessä (x, y). Kyseistä vektoria $\bar{v}$ kutsutaan pisteen (x, y) **paikkavektoriksi**.

Tehtävä 1.2.4. Piirrä vektorit $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ koordinaatistoon siten, että ne lähtevät origosta. Minkä pisteiden paikkavektoreita ne ovat?

1.3 Kahden pisteen välinen vektori

Tehtävä 1.3.1. ...

(a) Piirrä kaksi pistettä koordinaatiston ensimmäiselle neljännekselle. Merkitse pisteiden koordinaatit.

(b) Piirrä pisteiden väliin vektori $\bar{v}$.

(c) Ilmoita vektori $\bar{v}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(d) Yritä päätellä, miten vektorien i ja j kertoimet voitaisiin saada pisteiden x- ja y-koordinaattien avulla?

Kahden pisteen välinen vektori saadaan vähentämällä pisteiden x- ja y-koordinaatit keskenään. Esimerkiksi pisteestä $A = (4, 1)$ lähtevä ja pisteeseen $(B = -1, 3)$ päättyvä vektori $\bar{v}$ on $\bar{v} = ((-1) - 4)\bar{\imath} + (3 - 1)\bar{\jmath} = -5\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$.

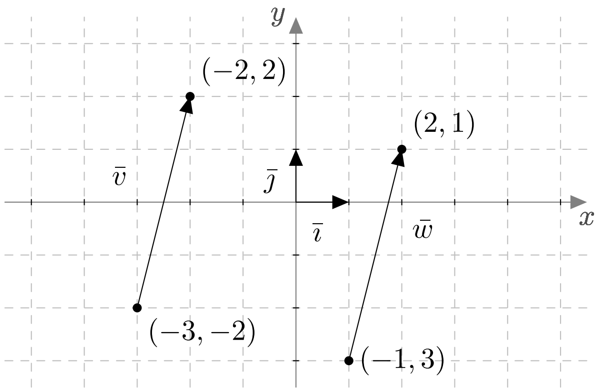
Tehtävä 1.3.2. ...

(a) Piirrä kaksi pistettä koordinaatiston toiselle, kolmannelle tai neljännelle neljännekselle. Merkitse pisteiden koordinaatit.

(b) Piirrä pisteiden väliin vektori $\bar{v}$.

(c) Ilmoita vektori $\bar{v}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Käytä hyväksesi piirtämiesi pisteiden x- ja y-koordinaatteja.

Tehtävä 1.3.3. Tarkastellaan alla olevaa kuvaa 1.5.



Kuva 1.5: Vektoreita

(a) Ilmoita vektori $\bar{v}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(b) Ilmoita vektori $\bar{w}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(c) Mitä huomaat?

Määritelmä 1.3.4. Kaksi vektoria ovat **samat**, jos ne voidaan esittää samalla tavalla vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

Samat vektorit

TÄHÄN INTUITIOON NOJAAVA SELVITYS SIITÄ, ETTÄ KOMPONENTTIESITYS ON YKSIKÄSITTEINEN.

Kahden pisteen välinen vektori voi kulkea kahteen eri suuntaan. Pisteestä A pisteeseen B kulkevaa vektoria merkitään $\overline{AB}$, ja pisteestä B pisteeseen A kulkevaa vektoria merkitään $\overline{BA}$.

Tehtävä 1.3.5. ...

(a) Piirrä koordinaatistoon pisteet A ja B. Merkitse niiden koordinaatit.

(b) Ilmoita vektori $\overline{AB}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(c) Ilmoita vektori $\overline{BA}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{BA}$ ovat eri vektorit, sillä niitä ei voida esittää samalla tavalla vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Vektorien suunnalla on siis merkitystä.

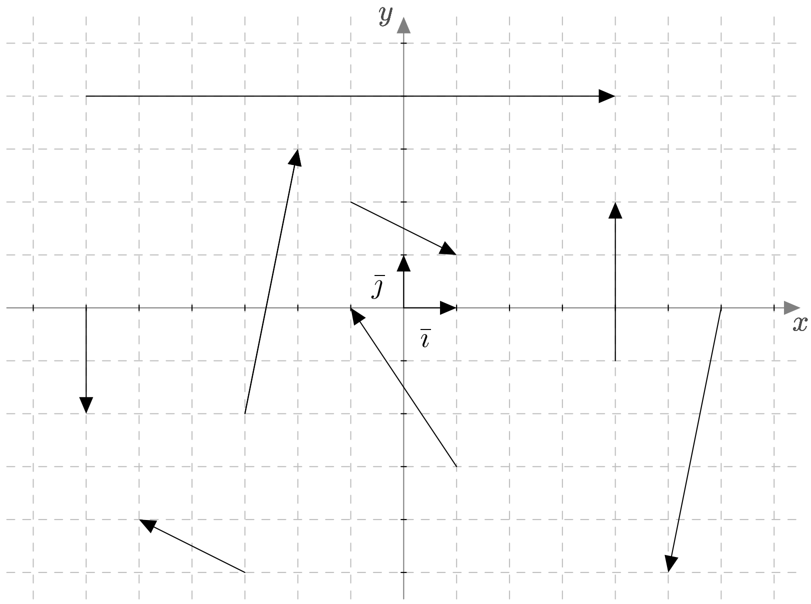
Määritelmä 1.3.6. Kahden pisteen välillä eri suuntiin kulkevat vektorit ovat toistensa **vastavektoreita.** Vektorin $\bar{v}$ vastavektoria merkitään $-\bar{v}$.

Vastavektorit

Edellisen tehtävän vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{BA}$ ovat siis toistensa vastavektoreita, ja $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

Huomaa, että vektorin ja sen vastavektorin ei tarvitse olla samassa paikassa koordinaatistossa.

Tehtävä 1.3.7. Tarkastellaan alla olevaa kuvaa 1.6.



Kuva 1.6: Vektoreita

(a) Ilmoita kaikki kuvan vektorit vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(b) Mitkä vektoreista ovat toistensa vastavektoreita?

(c) Mitä huomaat vastavektorien komponenttiesityksistä?

2 Vektorien laskutoimituksia

2.1 Summa

Edellisessä kappaleessa opittiin muodostamaan vektoreita x- ja y-akselien suuntaisten yhden askeleen pituisten vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Kahden vektorin yhteenlasku toimii samalla tavalla.

Tehtävä 2.1.1. Tutkitaan vektoreita $\bar{v} = 2i + 2j$ ja $\bar{w} = i + 3j$.

(a) Piirrä vektori $\bar{v}$ koordinaatistoon.

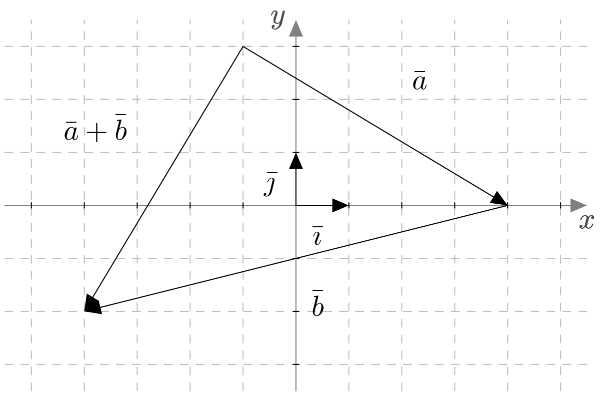
(b) Piirrä vektori $\bar{w}$ koordinaatistoon siten, että se alkaa vektorin $\bar{v}$ kärjestä.

(c) Piirrä vektori, joka alkaa vektorin $\bar{v}$ alkupisteestä ja päättyy vektorin $\bar{w}$ kärkeen. Merkitse tätä vektoria $\bar{v} + \bar{w}$.

(d) Ilmoita vektori $\bar{v} + \bar{w}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(e) Miten vektorin $\bar{v} + \bar{w}$ komponentit voitaisiin muodostaa vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ komponenttien avulla?

Tarkastellaan seuraavaa kuvaa 2.1.



Kuva 2.1: Vektorien $\bar{a}$ ja vb summa.

Summavektori $\bar{a}+\bar{b}$ lähtee vektorin $\bar{a}$ kanssa samasta pisteestä ja päättyy vektorin $\bar{b}$ kärkeen. Summavektori $\bar{a} + \bar{b}$ voidaan laskea suoraan vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ avulla seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\bar{a} + \bar{b} &= (5\bar{\imath} + (-3)\bar{\jmath}) + (-8\bar{\imath} + (-2)\bar{\jmath}) \\
&= (5\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}) + (-8\bar{\imath} - 2\bar{\jmath}) \\
&= 5\bar{\imath} - 3\bar{\jmath} - 8\bar{\imath} - 2\bar{\jmath} \\
&= 5\bar{\imath} - 8\bar{\imath} - 3\bar{\jmath} - 2\bar{\jmath} \\
&= -3\bar{\imath} - 5\bar{\jmath}.
\end{aligned}
$$

Summavektori

Määritelmä 2.1.2. Vektorien $\bar{v} = x_1\bar{\imath} + y_1\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = x_2\bar{\imath} + y_2\bar{\jmath}$ **summavektori** on vektori $\bar{v} + \bar{w} = (x_1 + x_2)\bar{\imath} + (y_1 + y_2)\bar{\jmath}$.

Tehtävä 2.1.3. Tutkitaan vektoreita $\bar{v} =$ ja $\bar{w} =$

(a) Laske summavektori $\bar{v} + \bar{w}$.

(b) Piirrä vektori $\bar{v} + \bar{w}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.

2.2 Erotus

Tehtävä 2.2.1. Tutkitaan vektoreita $\bar{v} = -2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = 2\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}$.

(a) Laske summavektori $\bar{v} + \bar{w}$.

(b) Piirrä vektori $\bar{v} + \bar{w}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.

Edellisen tehtävän vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat toistensa vastavektoreita. Näin ollen voidaan merkitä $\bar{w} = -\bar{v}$, ja summavektori $\bar{v}+\bar{w}$ saadaan muotoon $\bar{v}+\bar{w} = \bar{v}+(-\bar{v}) = \bar{v} - \bar{v} = 0$.

Tehtävä 2.2.2. Tutkitaan vektoreita $\bar{v} =$ ja $\bar{w} =$

(a) Piirrä vektori $\bar{v}$ koordinaatistoon.

(b) Muodosta vektorin $\bar{w}$ vastavektori $-\bar{w}$.

(c) Piirrä vektori $-\bar{w}$ koordinaatistoon siten, että että se alkaa vektorin $\bar{v}$ kärjestä.

(d) Piirrä vektori, joka alkaa vektorin $\bar{v}$ alkupisteestä ja päättyy vektorin $-\bar{w}$ kärkeen. Merkitse tätä vektoria $\bar{v} + (-\bar{w})$.

(e) Ilmoita vektori $\bar{v} + (-\bar{w})$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

Vektori $\bar{v} + (-\bar{w}) = \bar{v} - \bar{w}$. Se on siis vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ erotusvektori.

rotusvektori

Määritelmä 2.2.3. Vektorien $\bar{v} = x_1\bar{\imath} + y_1\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = x_2\bar{\imath} + y_2\bar{\jmath}$ **erotusvektori** on vektori $\bar{v} - \bar{w} = (x_1 - x_2)\bar{\imath} + (y_1 - y_2)\bar{\jmath}$.

Tehtävä 2.2.4. Tutkitaan vektoreita $\bar{a}$ ja $\bar{b}$.

(a) Määritä vektorin $\bar{b}$ vastavektori $-\bar{b}$.

(b) Piirrä vektori $\bar{a} - \bar{b}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{a}$ ja $-\bar{b}$ avulla.

(c) Määritä koordinaatistosta vektorin $\bar{a} - \bar{b}$ komponenttiesitys.

(d) Tarkista vastauksesi määrittämällä vektori $\bar{a} - \bar{b}$ suoraan vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ komponenttiesitysten avulla.

2.3 Vektorin kertominen reaaliluvulla

Vektori $\bar{\imath}$ ja vektori $3\bar{\imath}$.

Tehtävä, jossa piirretään vektori v ja vektoreita rv, $r \in \mathbb{R}$

Määritelmä 2.3.1. Vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat **yhdensuuntaiset**, jos $\bar{v} = r\bar{w}$ jollakin reaaliluvulla r.

Yhdensuuntaisuus

Määritelmä 2.3.2. Vektorit ovat **samansuuntaiset**, jos ne kulkevat samaan suuntaan. Vektorit ovat **vastakkaissuuntaiset**, jos ne kulkevat vastakkaisiin suuntiin. Vektoreita kutsutaan joskus myös **yhdensuuntaisiksi**, jos ne ovat joko saman- tai vastakkaissuuntaiset.

Vektorien suunta

Tehtävä 2.3.3. Tarkastellaan alla olevaa kuvaa (paljon erilaisia vektoreita, joista osa kulkee samaan ja osa vastakkaissuuntiin)

(a) Mitkä kuvan vektoreista ovat samansuuntaisia?

(b) Mitkä kuvan vektoreista ovat vastakkaissuuntaisia?

(c) Mikä kuvan vektoreista ei ole yhdensuuntainen minkään muun kuvan vektorin kanssa?

nollavektori ja kertominen luvulla 1

2.4 Vektorin pituus

Vektorin pituus saadaan laskettua Pythagoraan lauseen avulla. (KUVA) Esimerkiksi vektorin $\bar{a} = -2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ pituus saadaan yhtälöstä

$$|\bar{a}|^2 = 2^2 + 3^2.$$

Vektorin $\bar{a}$ pituudeksi saadaan $|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2}?\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

Tehtävä 2.4.1. Tutkitaan vektoria $\bar{b} = 3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$.

(a) Piirrä vektori $\bar{b}$ koordinaatistoon.

(b) Laske vektorin $\bar{b}$ pituus $|\bar{b}|$ Pythagoraan lauseen avulla.

(c) Kuinka moneen osaan vektori $\bar{b}$ pitäisi jakaa, jotta yhden osan pituus olisi 1?

TÄHÄN VÄLIIN LASKETAAN VEKTORIEN I JA J PITUUDET.

Yksikkövektori

Määritelmä 2.4.2. Vektoria, jonka pituus on 1, sanotaan **yksikkövektoriksi**.

Esimerkiksi vektorin $\bar{v} = 8\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}$ pituudeksi saadaan $|\bar{v}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$. Sen kanssa samansuuntainen yksikkövektori saadaan ottamalla vektorista $\bar{v}$ kymmenesosa eli

$$\frac{1}{10}\bar{v} = \frac{1}{10}(8\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}) = 0{,}8\bar{\imath} + 0{,}6\bar{\jmath}$$

(KUVA)

Tehtävä 2.4.3. Jatkoa tehtävään 2.4.1. Tutkitaan edelleen vektoria $\bar{b} = 3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$.

(a) Määritä vektorin $\bar{b}$ kanssa samansuuntainen yksikkövektori eli vektori, joka pituus on 1. Piirrä se koordinaatistoon.

(b) Määritä vektorin $\bar{b}$ kanssa samansuuntainen vektori, jonka pituus on 10. Piirrä se koordinaatistoon.

(c) Määritä vektorin $\bar{b}$ kanssa vastakkaissuuntainen yksikkövektori. Piirrä se koordinaatistoon.

Nollavektori

Määritelmä 2.4.4. Vektoria, jonka pituus on nolla, sanotaan **nollavektoriksi**.