Vektorit

Juulia Lahdenperä ja Lotta Oinonen

12. marraskuuta 2015

Sisältö

1 Vektori 1

1.1 Vektorit ja xy-koordinaatisto 1

1.2 Kahden pisteen välinen vektori 5

2 Vektorien laskutoimituksia 7

2.1 Summa 7

2.2 Vektorin kertominen reaaliluvulla 10

2.3 Erotus 15

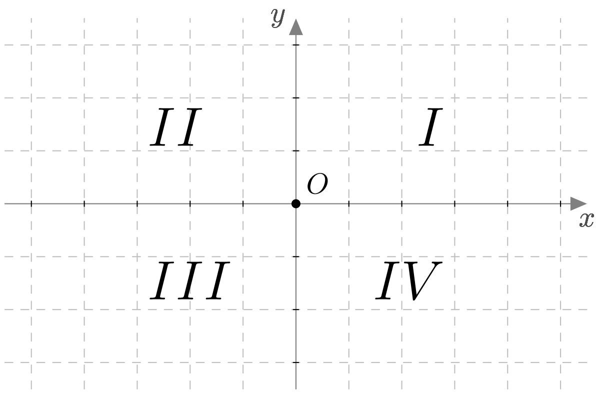
2.4 Vektorin pituus 16

2.5 Vektorien välinen kulma ja pistetulo 19

1 Vektori

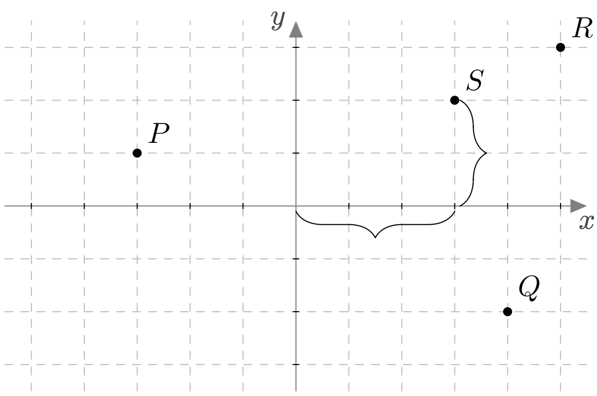
1.1 Vektorit ja xy-koordinaatisto

Kuvassa 1.1 on koordinaatisto, johon on piirretty x- ja y-akselit. Koordinaattiakselit jakavat tason neljään osaan. Osat nimetään yleensä järjestysnumeroilla I, II, III ja IV kuvan 1.1 mukaisesti. Koordinaattiakselien leikkauskohtaa kutsutaan **origoksi**. Origoa merkitään yleensä kirjaimella O.



Kuva 1.1: Koordinaatiston neljännekset.

Tehtävä 1.1.1. Tutki alla olevaa kuvaa 1.2.



Kuva 1.2: Pisteitä koordinaatistossa.

(a) Kuinka monta yhden ruudun mittaista askelta pitää siirtyä x-akselin suunnassa, jotta päästään origosta pisteeseen S?

(b) Kuinka monta yhden ruudun mittaista askelta pitää siirtyä y-akselin suunnassa, jotta päästään origosta pisteeseen S?

(c) Kuinka monta yhden ruudun mittaista askelta pitää siirtyä x-akselin suunnassa, jotta päästään origosta pisteeseen Q?

(d) Kuinka monta yhden ruudun mittaista askelta pitää siirtyä y-akselin suunnassa, jotta päästään origosta pisteeseen Q?

(e) Miten voisit merkitä sitä, että pisteen Q tapauksessa siirrytään y-akselin suunnassa alas- eikä ylöspäin, kuten pisteen S tapauksessa?

Tason piste ilmoitetaan lukuparina (x, y), missä ensimmäinen luku x ilmoittaa x-akselin suuntaisten ja toinen luku y ilmoittaa y-akselin suuntaisten askelten lukumäärän. Näitä lukuja kutsutaan **pisteen koordinaateiksi**. Kuvan 1.2 pisteeseen R päästään siirtymällä origosta viisi askelta x-akselin suuntaan ja kolme askelta y-akselin suuntaan. Näin ollen pistettä R merkitään $R = (5, 3)$. Pistettä P merkitään puolestaan $P = (-3, 1)$.

Tehtävä 1.1.2. Valitse jokaiselta koordinaatiston neljännekseltä jokin piste ja ilmoita sen koordinaatit. Miten eri neljännekset vaikuttavat x- ja y-koordinaattien koordinaattien etumerkkeihin?

Tehtävä 1.1.3. ...

(a) Piirrä koordinaatisto ja merkitse siihen pisteet $(1, 2)$, $(1, -4)$ ja $(1, 3)$.

(b) Merkitse piirtämääsi koordinaatistoon kolme uutta pistettä, jotka ovat muotoa $(1, y)$ jollakin kokonaisluvulla y.

(c) Merkitse piirtämääsi koordinaatistoon kaikki sellaiset tason pisteet, jotka ovat muotoa $(1, y)$ jollakin kokonaisluvulla y.

Tehtävä 1.1.4. ...

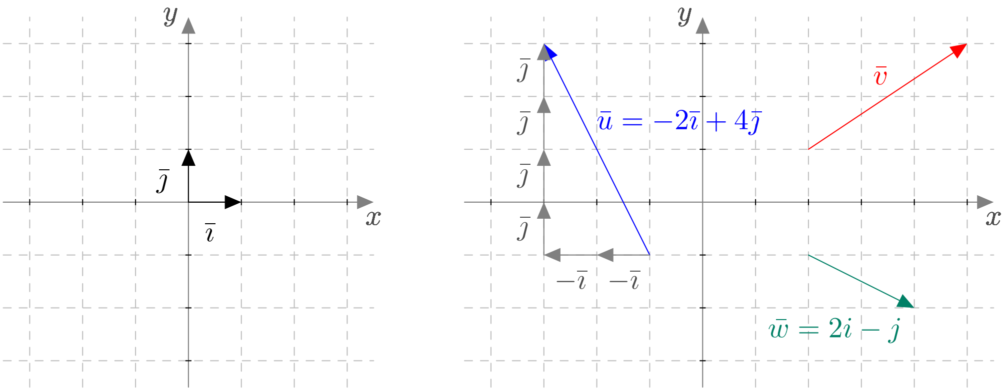
(a) Piirrä koordinaatisto ja merkitse siihen pisteet $(2, 2)$, $(3, 3)$ ja $(-2, -2)$.

(b) Merkitse piirtämääsi koordinaatistoon kolme uutta pistettä, jotka ovat muotoa (x, x) jollakin reaaliluvulla x.

(c) Merkitse piirtämääsi koordinaatistoon kaikki sellaiset tason pisteet, jotka ovat muotoa (x, x) jollakin reaaliluvulla x.

Tehtävä 1.1.5. Piirrä koordinaatisto ja merkitse siihen kaikki sellaiset tason pisteet, jotka ovat muotoa $(x, 2/3)$ jollakin reaaliluvulla x.

Tarkastellaan seuraavaksi kuvaa 1.3. Vasemmanpuoleisessa kuvassa on näkyvissä koordinaattiakselien suuntaiset yhden yksikön mittaiset vektorit $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$. Oikeanpuoleisessa kuvassa näkyvät vektorit $\bar{u}, \bar{v}$ ja $\bar{w}$.



Kuva 1.3: Vektorit $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$, sekä muita vektoreita.

Huomataan, että vektorin $\bar{u}$ alkupisteestä päästään sen kärkipisteeseen ottamalla kaksi x-akselin suuntaista askelta negatiiviseen suuntaan ja neljä y-akselin suuntaista askelta positiiviseen suuntaan. Tällainen vektori $\bar{u}$ voidaan ilmoittaa vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla muodossa $\bar{u} = -2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$.

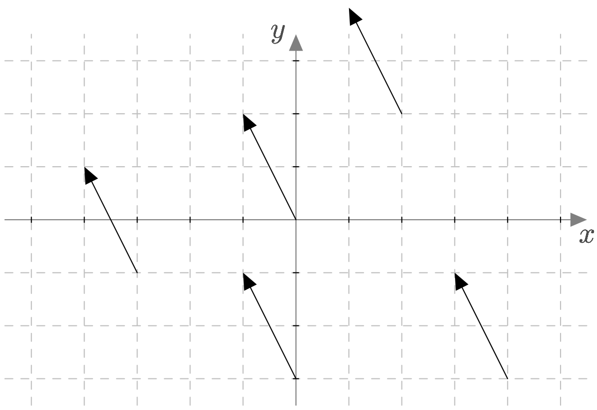
Tehtävä 1.1.6. Ilmoita kuvassa 1.3 oleva vektori $\bar{v}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

Koordinaatistossa olevia nuolia kutsutaan siis **vektoreiksi**. Vektorit $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ ovat erityisiä, sillä ne ovat koordinaattiakselien suuntaisia ja yhden askeleen pituisia. Niiden avulla voidaan ilmaista kaikki mahdolliset xy-koordinaatiston vektorit.

Tehtävä 1.1.7. Tarkastele seuraavaa kuvaa 1.4.

(a) Ilmoita kaikki kuvassa olevat vektorit vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(b) Mitä huomaat?



Kuva 1.4: Vektoreita.

Samat vektorit

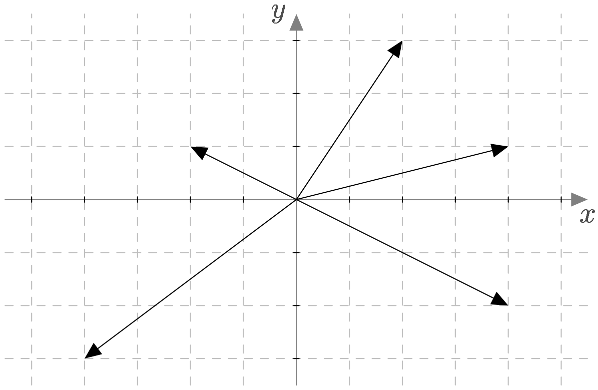
Määritelmä 1.1.8. Kaksi vektoria ovat samat, jos ne voidaan esittää samalla tavalla vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

Vektorien samuus tarkoittaa siis sitä, että ne ovat saman pituisia ja osoittavat samaan suuntaan − niiden paikalla koordinaatistossa ei ole merkitystä.

Tehtävä 1.1.9. Tarkastele seuraavaa kuvaa 1.5.

(a) Ilmoita kaikki kuvan vektorit vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(b) Vertaa a-kohdan tuloksia vektoreiden kärkipisteiden koordinaatteihin. Mitä huomaat?

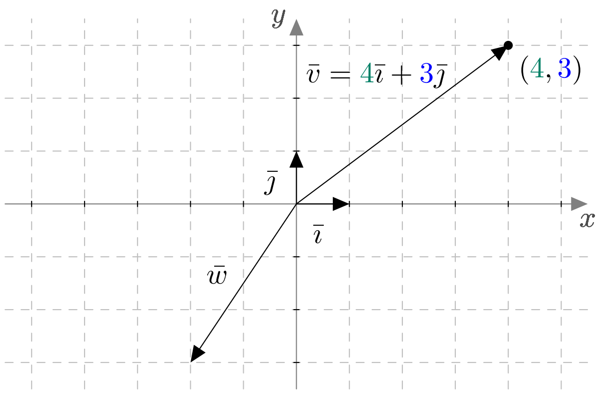


Kuva 1.5: Origosta lähteviä vektoreita.

Paikkavektori

Määritelmä 1.1.10. Vektori, joka lähtee origosta ja jonka kärki on pisteessä P, on pisteen P paikkavektori.

Kuvassa 1.6 oleva vektori $\bar{v} = 4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ on siis pisteen $(4, 3)$ paikkavektori.



Kuva 1.6: Pisteen $(4, 3)$ paikkavektori $\bar{v}$.

Tehtävä 1.1.11. Tarkastelen edelleen kuvaa 1.6.

(a) Ilmoita vektori $\bar{w}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Minkä pisteen paikkavektori se on?

(b) Ilmoita vektorit $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Minkä pisteiden paikkavektoreita ne ovat?

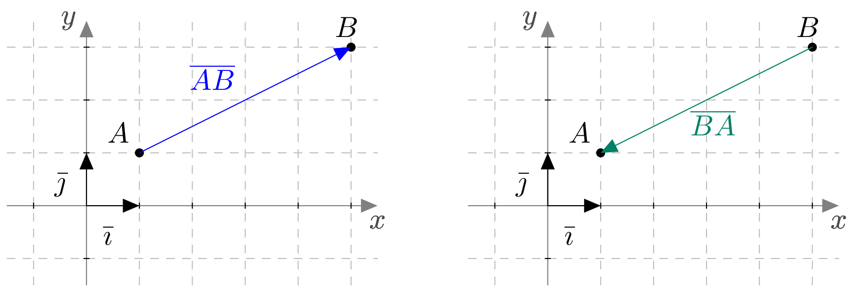
Tarkastellaan sitten vektoria $0\bar{\imath} + 0\bar{\jmath} = \bar{0}$. Tätä vektoria sanotaan nollavektoriksi.

Määritelmä 1.1.12. Vektoria $0\bar{\imath} + 0\bar{\jmath} = \bar{0}$ sanotaan nollavektoriksi. **Nollavektori**

Nollavektori on siis vektori, jonka alkupiste ja kärkipiste ovat samat. Nollavektori on myös origon eli pisteen $(0, 0)$ paikkavektori.

1.2 Kahden pisteen välinen vektori

Vektoria pisteestä A pisteeseen B kulkevaa vektoria merkitään $\overline{AB}$. Vektoria pisteestä B pisteeseen A kulkevaa vektoria merkitään $\overline{BA}$.



Kuva 1.7: Kahden pisteen väliset vektorit.

Tehtävä 1.2.1. ...

(a) Piirrä koordinaatisto ja valitse sen ensimmäiseltä neljännekseltä kaksi pistettä. Merkitse näitä pisteitä kirjaimilla P ja Q. Merkitse myös pisteiden koordinaatit näkyviin.

(b) Piirrä vektori $\overline{PQ}$.

(c) Ilmoita vektori $\overline{PQ}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

Tehtävä 1.2.2. ...

(a) Piirrä koordinaatisto ja valitse sen toiselta, kolmannelta tai neljänneksel- tä neljännekseltä kaksi pistettä. Merkitse näitä pisteitä kirjaimilla R ja S. Merkitse myös pisteiden koordinaatit näkyviin.

(b) Piirrä vektori $\overline{RS}$.

(c) Ilmoita vektori $\overline{RS}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

Tehtävä 1.2.3. ...

(a) Piirrä koordinaatistoon jotkin pisteet A ja B. Merkitse niiden koordinaatit.

(b) Ilmoita vektori $\overline{AB}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(c) Ilmoita vektori $\overline{BA}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(d) Vertaa b- ja c-kohdan tuloksia. Mitä huomaat?

Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{BA}$ ovat eri vektorit, sillä niitä ei voida esittää samalla tavalla vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Vektorin suunnalla on siis merkitystä. Vektorien suuntiin palataan kappaleessa 2.2.

Tehtäviä

Tehtävä 1.2.4. ...

(a)

(b)

Tehtävä 1.2.5. ...

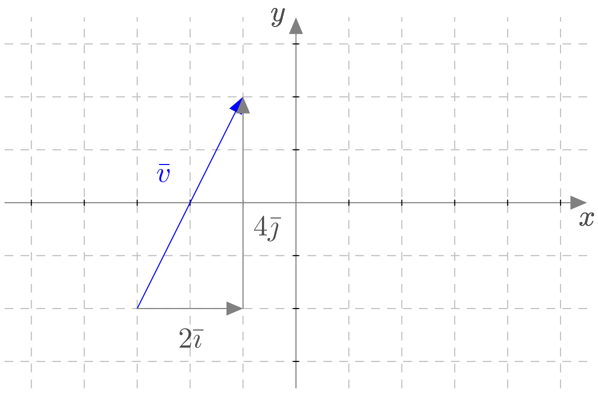
(a)

(b)

2 Vektorien laskutoimituksia

2.1 Summa

Edellisessä kappaleessa opittiin muodostamaan vektoreita x- ja y-akselien suuntaisten vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Esimerkiksi kuvan 2.1 vektori $\bar{v}$ on vektorien $2\bar{\imath}$ ja $4\bar{\jmath}$ summa.



Kuva 2.1: Vektori $\bar{v} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$.

Yhteenlaskettavia $2\bar{\imath}$ ja $4\bar{\jmath}$ sanotaan vektorin $\bar{v}$ **komponenteiksi**. Esimerkiksi vektorin $\bar{u} = -7\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}$ komponentit ovat vektorit $-7\bar{\imath}$ ja $-3\bar{\jmath}$. Myöhemmin opitaan jakamaan xy-tason vektoreita myös muihin kuin koordinaattiakselien suuntaisiin komponentteihin.

Seuraavaksi tutkitaan, miten lasketaan yhteen mitä tahansa vektoreita. Yhteenlasku tapahtuu laskemalla vektorit komponenteittain yhteen.

Määritelmä 2.1.1. Vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ summavektori $\bar{v}+\bar{w}$ saadaan laskemalla vektorit komponenteittain yhteen.

Summavektori

Esimerkiksi kuvan 2.2 vektorien $\bar{v} = \bar{\imath}+2\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = 2\bar{\imath}-3\bar{\jmath}$ summa saadaan laskemalla yhteen komponentit $\bar{\imath}$ ja $2\bar{\imath}$ sekä komponentit $2\bar{\jmath}$ ja $-3\bar{\jmath}$. Koska

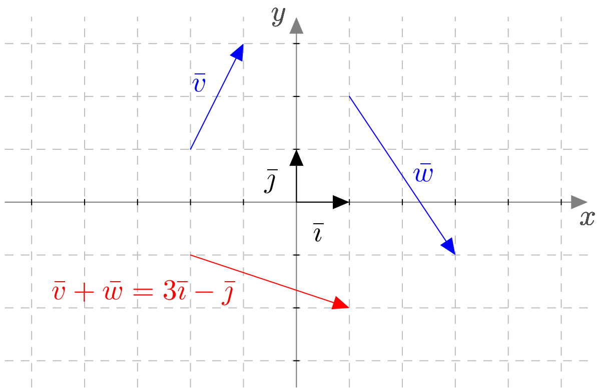
$$\bar{\imath} + 2\bar{\imath} = 3\bar{\jmath}$$

ja

$$2\bar{\jmath} + (-3\bar{\jmath}) = 2\bar{\jmath} - 3\bar{\jmath} = -\bar{\jmath},$$

niin vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ summaksi saadaan

$$\bar{v} + \bar{w} = 3\bar{\imath} - \bar{\jmath}.$$



Kuva 2.2: Vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ summa $\bar{v} + \bar{w}$.

Vektorien yhteenlaskun määritelmä voidaan ilmaista myös seuraavasti: vektorien $\bar{v} = x_1\bar{\imath} + y_1\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = x_2\bar{\imath} + y_2\bar{\jmath}$ summavektori on vektori

$$\bar{v} + \bar{w} = (x_1 + x_2)\bar{\imath} + (y_1 + y_2)\bar{\jmath}.$$

Tehtävä 2.1.2. Tutki vektoreita $\bar{v} = -3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$,$\bar{w} = 9\bar{\imath} - 5\bar{\jmath}$ ja $\bar{u} = -2\bar{\imath} + 7\bar{\jmath}$.

(a) Laske summavektori $\bar{v}+\bar{w}$, eli laske vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ komponenteittain yhteen.

(b) Laske summavektori $\bar{w}+\bar{u}$, eli laske vektorit $\bar{w}$ ja $\bar{u}$ komponenteittain yhteen.

(c) Laske summavektori $\bar{v}+\bar{u}$, eli laske vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{u}$ komponenteittain yhteen.

Tehtävä 2.1.3. Tutki vektoreita $\bar{v} = 2\imath + 2\jmath$ ja $\bar{w} = \imath + 3\jmath$.

(a) Piirrä vektori $\bar{v}$ koordinaatistoon.

(b) Piirrä vektori $\bar{w}$ koordinaatistoon siten, että se alkaa vektorin $\bar{v}$ kärkipisteestä.

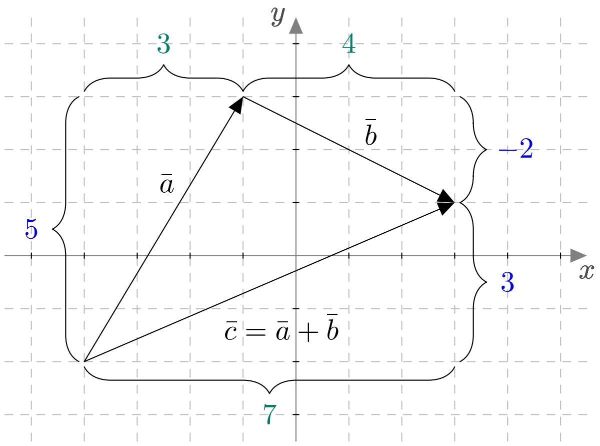
(c) Laske summavektori $\bar{v}+\bar{w}$, eli laske vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ komponenteittain yhteen.

(d) Piirrä vektori $\bar{v} + \bar{w}$ koordinaatistoon siten, että se alkaa vektorin $\bar{v}$ alkupisteestä. Mitä huomaat?

Tarkastellaan seuraavaa kuvaa 2.3. Kuvassa on vektorit $\bar{a} = 3\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}$ ja $\bar{b} = 4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ piirrettynä siten, että vektori $\bar{b}$ alkaa vektorin $\bar{a}$ kärkipisteestä. Vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ summa on komponenteittain laskettuna

$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= (3\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}) + (4\bar{\imath} - 2\bar{\jmath}) \\ &= (3 + 4)\bar{\imath} + (5 + (-2))\bar{\jmath} \\ &= 7\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}.\end{aligned}$$

Tämä vektori muodostuu vektorin $\bar{a}$ alkupisteestä vektorin $\bar{b}$ kärkipisteeseen. Se on seuraus yhteenlaskun suorittamisesta komponenteittan.Näin ollen vektori $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$.



Kuva 2.3: Vektorien $\bar{a} = 3\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}$ ja $\bar{b} = 4\bar{\imath} - 2\bar{\jmath}$ summa on vektori $\bar{c} = 7\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$.

Summavektorin $\bar{a} + \bar{b}$ voi siis määrittää joko laskemalla tai vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ avulla kuvan 2.3 mukaisesti: piirretään ensin vektori $\bar{a}$, ja piirretään sitten vektori $\bar{b}$ alkamaan vektorin $\bar{a}$ kärkipisteestä. Summavektori $\bar{a}+\bar{b}$ on nyt vektori, joka alkaa vektorin $\bar{a}$ alkupisteestä ja päättyy vektorin $\bar{b}$ kärkipisteeseen.

Tehtävä 2.1.4. Tutki vektoreita $\bar{v} = -2i + j$ ja $\bar{w} = 4i + 4j$.

(a) Piirrä summavektori $\bar{v} + \bar{w}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.

(b) Ilmoita vektori $\bar{v} + \bar{w}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(c) Tarkista tuloksesi laskemalla yhteen vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ komponenteittain.

Tehtävä 2.1.5. Tutki vektoreita $\bar{u} = i + 2\bar{\jmath}$, $\bar{v} = -3i + j$ ja $\bar{w} = 3i + -5j$.

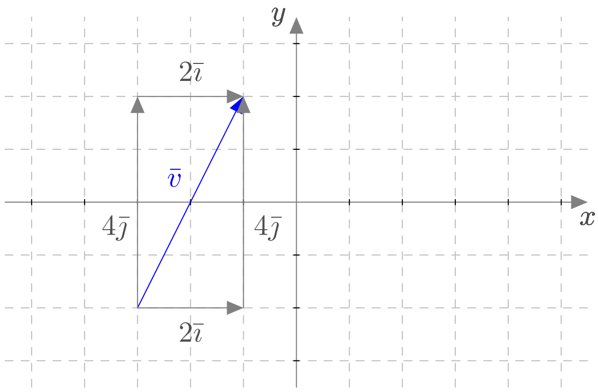
(a) Piirrä vektori $\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{u}, \bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.

(b) Piirrä vektori $\bar{v} + \bar{u} + \bar{w}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{u}, \bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.

(c) Piirrä vektori $\bar{w} + \bar{u} + \bar{v}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{u}, \bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.

(d) Mitä huomaat?

Edellisen tehtävän tulos tarkoittaa sitä, että vektorien yhteenlaskun järjestyksellä ei ole merkitystä. Vektorien yhteenlasku on siis **vaihdannainen** operaatio. Tämä näkyy selvästi kuvasta 2.4: vektori $4\bar{\jmath} + 2\bar{\imath}$ on sama kuin vektori $2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$.



Kuva 2.4: Vektori $\bar{v} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} = 4\bar{\jmath} + 2\bar{\imath}$.

Tehtävä 2.1.6. Tutki vektoreita $\bar{a} = 2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$, $\bar{b} = -3\bar{\imath} + \bar{\jmath}$ ja $\bar{c} = \bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$.

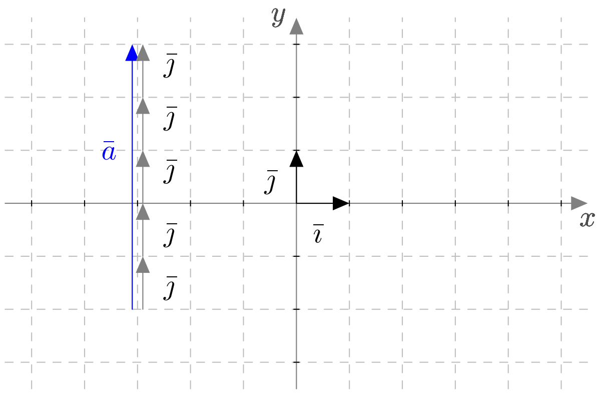
(a) Piirrä vektori $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ koordinaatistoon.

(b) Mitä huomaat?

(c) Miten voit ilmaista vektorin $\bar{c}$ vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ avulla?

2.2 Vektorin kertominen reaaliluvulla

Tarkastellaan seuraavaa kuvaa 2.5. Kuvassa oleva vektori $\bar{a}$ voidaan ilmaista vektorin $\bar{\jmath}$ avulla muodossa $5\bar{\jmath}$. Vektori $\bar{a}$ saadaan siis kertomalla vektoria $\bar{\jmath}$ luvulla 5.



Kuva 2.5: Vektori $\bar{a} = 5\bar{\jmath}$.

Tehtävä 2.2.1. ...

(a) Piirrä koordinaatistoon vektorit $\bar{a} = \bar{\imath} + \bar{\jmath}$ ja $3\bar{a}$.

(b) Ilmoita vektori $3\bar{a}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(c) Vertaa vektorien $\bar{a}$ ja $3\bar{a}$ komponenttiesityksiä toisiinsa. Mitä huomaat?

Vektorin kertominen jollakin reaaliluvulla on siis sama asia, kuin jos samalla reaaliluvulla kerrotaan vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ kertoimet.

Määritelmä 2.2.2. Vektorin $\bar{v}$ skalaarimonikerta $r\bar{v}$ saadaan kertomalla vektorin $\bar{v}$ komponentit reaaliluvulla r.

Vektorin kertominen reaaliluvulla

Esimerkiksi kuvassa 2.6 olevan vektorin $\bar{v} = -4\bar{\imath}+3\bar{\jmath}$ kertominen luvulla 2 tapahtuu kertomalla vektorin molemmat komponentit $-4\bar{\imath}$ ja $3\bar{\jmath}$ luvulla 2. Koska

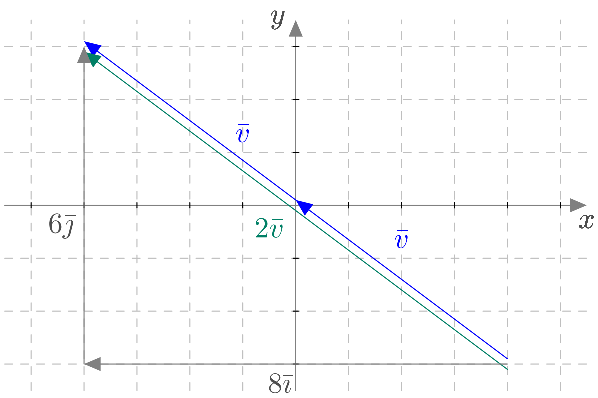
$$2 \cdot (-4\bar{\imath}) = -8\bar{\imath}$$

ja

$$2 \cdot 3\bar{\jmath} = 6\bar{\jmath},$$

niin

$$2\bar{v} = -8\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}.$$



Kuva 2.6: Vektorin $\bar{v} = -4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ kertominen luvulla 2.

Vektorin kertomisen reaaliluvulla määritelmän voi ilmaista myös seuraavasti: kun vektoria $\bar{v} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$ kerrotaan reaaliluvulla r, saadaan vektori

$$r\bar{v} = r(x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}) = (rx)\bar{\imath} + (ry)\bar{\jmath}.$$

Tehtävä 2.2.3. Tutki vektoria $\bar{a} = -\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$.

(a) Piirrä vektorit $2\bar{a}$, $3\bar{a}$ ja $5\bar{a}$ koordinaatistoon vektorin $\bar{a}$ avulla.

(b) Ilmoita vektorit $2\bar{a}$, $3\bar{a}$ ja $5\bar{a}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(c) Tarkista tuloksesi kertomalla vektoria $\bar{v}$ komponenteittain.

Tehtävä 2.2.4. ...

(a) Piirrä koordinaatistoon vektorit $\bar{a} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$ ja $\bar{b} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$.

(b) Miten voisit ilmaista vektorin $\bar{b}$ vektorin $\bar{a}$ avulla?

Tehtävä 2.2.5. Tutki vektoria $\bar{a} = -3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$.

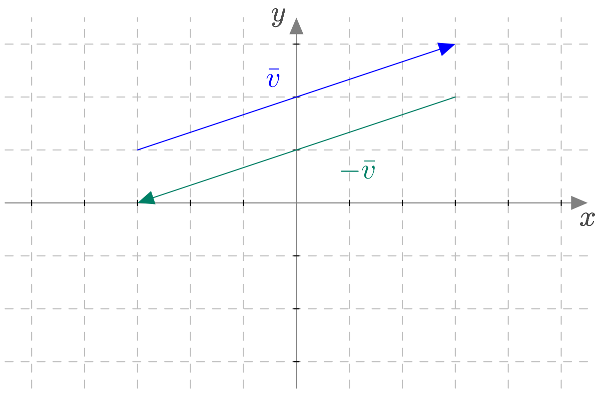
(a) Piirrä vektori $\bar{a}$ koordinaatistoon.

(b) Laske vektorin $-1 \cdot \bar{a}$ komponenttiesitys ja piirrä se koordinaatistoon.

(c) Vertaa piirtämiäsi vektoreita sekä niiden komponenttiesityksiä keskenään. Mitä huomaat?

Vastavektorit

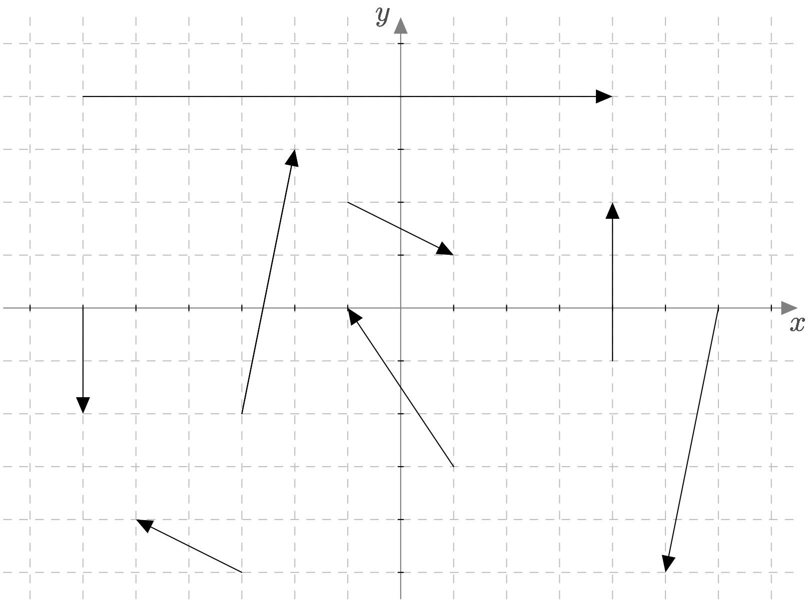
Määritelmä 2.2.6. Vektori $-1 \cdot \bar{v}$ on vektorin $\bar{v}$ vastavektori. Sitä merkitään $-\bar{v}$.



Kuva 2.7: Vektori $\bar{v}$ ja sen vastavektori $-\bar{v}$.

Esimerkiksi pisteiden A ja B välillä vastakkaisiin suuntiin kulkevat vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{BA}$ ovat toistensa vastavektorerita. Tällöin voidaan merkitä $\overline{BA} = -\overline{AB}$ tai $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

Tehtävä 2.2.7. Tarkastele alla olevaa kuvaa 2.8.



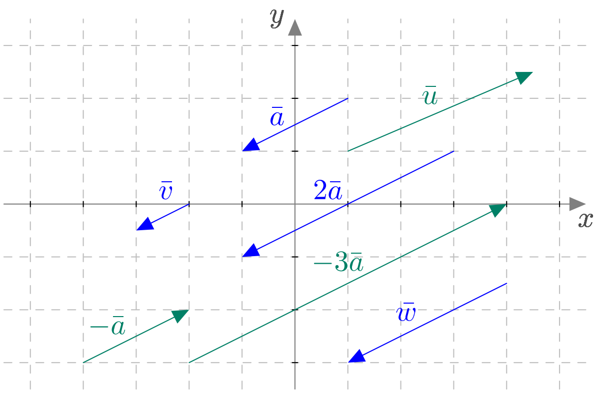
Kuva 2.8: Erilaisia vektoreita.

(a) Nimeä kaikki kuvan vektorit, eli merkitse niitä jollakin kirjaimella (esim. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ jne.)

(b) Ilmoita nimeämäsi vektorit vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(c) Mitkä vektoreista ovat toistensa vastavektoreita?

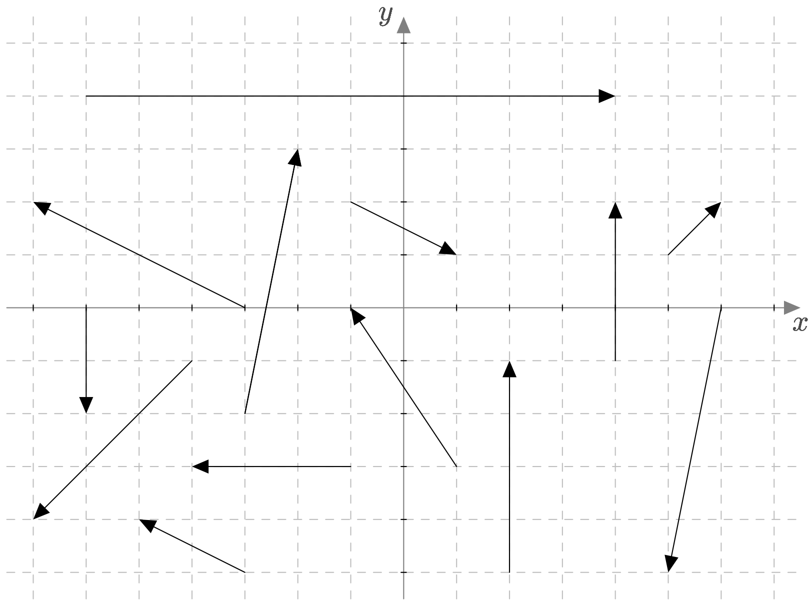
Tutkitaan seuraavaksi vektorien suuntia. Esimerkiksi kuvasta 2.9 huomataan, että vektori $2\bar{a}$ kulkee samaan suuntaan vektorin $\bar{a}$ kanssa. Nämä vektorit ovat siis **samansuuntaisia**. Lisäksi huomataan, että vektori $-\bar{a}$ kulkee vastakkaiseen suuntaan kuin vektori $\bar{a}$. Tällaisia vektoreita kutsutaan **vastakkaissuuntaisiksi** vektoreiksi.



Kuva 2.9: Saman- ja vastakkaisuuntaisia vektoreita.

Vektoreita, jotka ovat joko saman- tai vastakkaisuuntaisia, sanotaan **yhdensuuntaisiksi** vektoreiksi.

Tehtävä 2.2.8. Tarkastele alla olevaa kuvaa 2.10



Kuva 2.10: Erilaisia vektoreita.

(a) Nimeä kaikki kuvan vektorit.

(b) Mitkä vektorit ovat samansuuntaisia?

(c) Mitkä vektorit ovat vastakkaissuuntaisia?

(d) Mitkä vektorit eivät ole yhdensuuntaisia minkään muun kuvan vektorin kanssa?

Tehtävä 2.2.9. ...

(a) Millaisella luvulla vektoria tulee kertoa, jotta sen suunta muuttuu vastakkaiseksi?

(b) Millaisella luvulla kertominen säilyttää vektorin suunnan?

Yhdensuuntaisuus voidaan määritellä seuraavasti:

Yhdensuuntaisuus

Määritelmä 2.2.10. Vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat yhdensuuntaiset, jos $\bar{v} = r\bar{w}$ jollakin reaaliluvulla r.

Esimerkiksi vektorit $\bar{v} = -2\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = 4\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}$ ovat yhdensuuntaisia, sillä

$$\begin{aligned} \bar{w} &= 4\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} \\ &= -2(-2\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}) \\ &= -2\bar{v}. \end{aligned}$$

Tehtävä 2.2.11. Tarkastele vektoria $\bar{v} = -5\bar{\imath} - 5\bar{\jmath}$.

(a) Muodosta kaksi uutta vektoria, jotka ovat vektorin $\bar{v}$ kanssa samansuuntaisia.

(b) Onko vektori $\bar{w} = \bar{\imath} + \bar{\jmath}$ yhdensuuntainen vektorin $\bar{v}$ kanssa?

(c) Onko vektori $\bar{u} = 3\bar{\imath} + 7\bar{\jmath}$ yhdensuuntainen vektorin $\bar{v}$ kanssa?

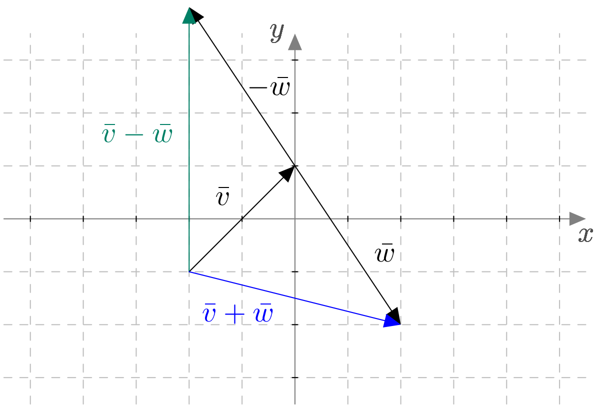
2.3 Erotus

Tehtävä 2.3.1. Tutki vektoreita $\bar{v} = -2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = 2\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}$.

(a) Määritä summavektori $\bar{v} + \bar{w}$ laskemalla yhteen vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ komponenteittain.

(b) Piirrä vektori $\bar{v} + \bar{w}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.

Edellisen tehtävän vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat toistensa vastavektoreita. Näin ollen voidaan merkitä $\bar{w} = -\bar{v}$, ja summavektori $\bar{v}+\bar{w}$ saadaan muotoon $\bar{v}+\bar{w} = \bar{v}+(-\bar{v}) = \bar{v}-\bar{v} = \bar{0}$. Tämä pätee kaikille vektoreille: vektori $\bar{v}+(-\bar{w}) = \bar{v}-\bar{w}$. Vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ erotusvektori $\bar{v} - \bar{w}$ saadaan siis lisäämällä vektoriin $\bar{v}$ vektorin $\bar{w}$ vastavektori. Vektoreiden erotusta havainnollistetaan kuvassa 2.11.



Kuva 2.11: Vektorit $\bar{v} + \bar{w}$ ja $\bar{v} - \bar{w}$.

Määritelmä 2.3.2. Vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ erotusvektori $\bar{v} - \bar{w}$ saadaan lisäämällä vektoriin $\bar{v}$ vektorin $\bar{w}$ vastavektori $-\bar{w}$, eli $\bar{v} - \bar{w} = \bar{v} + (-\bar{w})$.

Erotusvektor

Vektorien $\bar{v} = x_1\bar{\imath} + y_1\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = x_2\bar{\imath} + y_2\bar{\jmath}$ erotusvektori on siis vektori

$$\bar{v} - \bar{w} = (x_1 - x_2)\bar{\imath} + (y_1 - y_2)\bar{\jmath}.$$

Tehtävä 2.3.3. Tutki vektoreita $\bar{a} = -3\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$ ja $\bar{b} = 5\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$.

(a) Määritä vektorin $\bar{b}$ vastavektori $-\bar{b}$.

(b) Piirrä vektori $\bar{a} - \bar{b}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{a}$ ja $-\bar{b}$ avulla.

(c) Ilmoita vektori $\bar{a} - \bar{b}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(d) Tarkista tuloksesi laskemalla yhteen vektorit $\bar{a}$ ja $-\bar{b}$ komponenteittain.

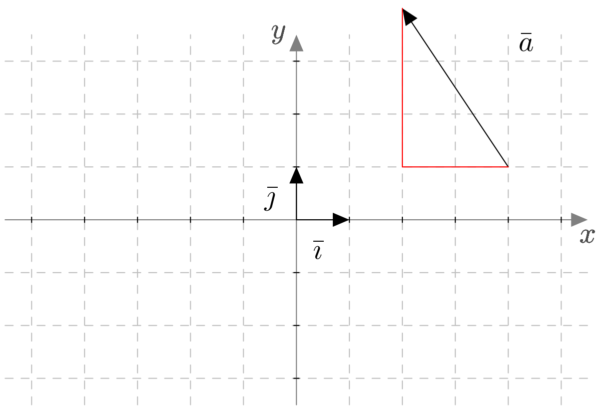
2.4 Vektorin pituus

Vektorin pituus saadaan laskettua Pythagoraan lauseen avulla. Esimerkiksi kuvan 2.12 vektorin $\bar{a} = -2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ pituus saadaan yhtälöstä

$$|\bar{a}|^2 = 2^2 + 3^2.$$

Vektorin $\bar{a}$ pituudeksi saadaan siis

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$



Kuva 2.12: Vektori $\bar{a}$.

Tehtävä 2.4.1. Tutki vektoria $\bar{b} = 3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$.

(a) Piirrä vektori $\bar{b}$ koordinaatistoon.

(b) Laske vektorin $\bar{b}$ pituus $|\bar{b}|$.

(c) Kuinka moneen osaan vektori $\bar{b}$ pitäisi jakaa, jotta yhden osan pituus olisi 1?

Vektorin pituus

> **Määritelmä 2.4.2.** Vektorin $\bar{v} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$ pituus $|\bar{a}|$ saadaan yhtälöstä
> $$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Huomaa, että merkintä $|\bar{a}|$ tarkoittaa vektorin $\bar{a}$ pituutta, kun taas merkinnällä $|x|$ tarkoitetaan luvun x itseisarvoa.

Tehtävä 2.4.3. Tutki vektoria $\bar{v} = 6\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$.

(a) Muodosta vektorit $5\bar{v}$, $-2\bar{v}$ ja $1/3\bar{v}$.

(b) Laske vektorien $\bar{v}$, $5\bar{v}$, $-2\bar{v}$ ja $1/3\bar{v}$ pituudet.

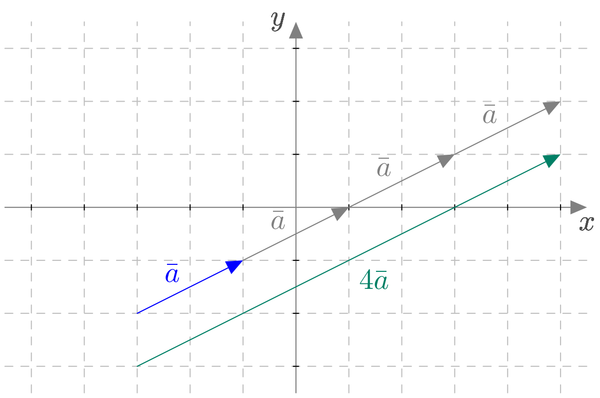
(c) Vertaa vektorien $\bar{v}$ ja $5\bar{v}$ pituuksia toisiinsa. Mitä huomaat?

Tarkastellaan kuvassa 2.13 olevien vektorien $\bar{a} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath}$ ja $4\bar{a} = 4(2\bar{\imath} + \bar{\jmath}) = 8\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$ pituuksia. Huomataan, että vektorin $\bar{a}$ pituus on

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

ja vektorin $4\bar{a}$ pituus on

$$|4\bar{a}| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5} = 4 \cdot |\bar{a}|.$$



Kuva 2.13: Vektorit $\bar{a}$ ja $4\bar{a}$.

Tämä pätee kaikille vektoreille. Vektorin $t\bar{v}$ pituus $|t\bar{v}|$ saadaan siis kertomalla vektorin $\bar{v}$ pituutta luvulla t. Näin ollen $|t\bar{v}| = t \cdot |\bar{v}|$.

Tehtävä 2.4.4. Millaisella luvulla vektoria tulee kertoa, jotta sen pituus kasvaa? Entä lyhenee?

Tehtävä 2.4.5. Laske vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ pituudet.

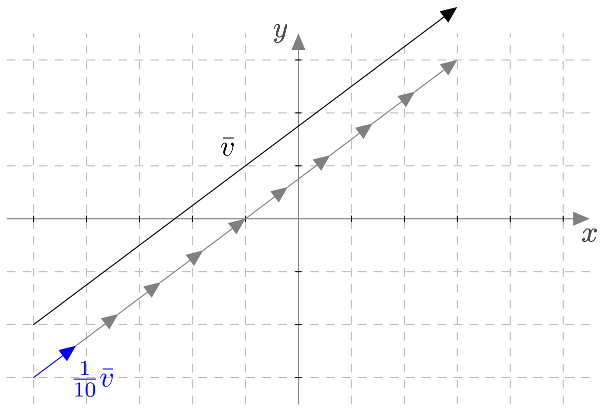
Yksikkövektori

Määritelmä 2.4.6. Vektoria, jonka pituus on 1, sanotaan yksikkövektoriksi.

Komponenttivektorit $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ ovat siis yksikkövektoreita.

Tarkastellaan sitten kuvassa 2.14 olevaa vektoria $\bar{v} = 8\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}$. Sen pituudeksi saadaan $|\bar{v}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$. Vektorin $\bar{v}$ kanssa samansuuntainen yksikkövektori saadaan ottamalla siitä kymmenesosa, eli

$$\frac{1}{10}\bar{v} = \frac{1}{10}(8\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}) = 0{,}8\bar{\imath} + 0{,}6\bar{\jmath}$$



Kuva 2.14: Vektorin $\bar{v}$ ja sen kanssa samansuuntainen yksikkövektori.

Tehtävä 2.4.7. Jatkoa tehtävään 2.4.1. Tutki edelleen vektoria $\bar{b} = 3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$.

(a) Määritä vektorin $\bar{b}$ kanssa samansuuntainen yksikkövektori eli vektori, joka pituus on 1. Piirrä se koordinaatistoon.

(b) Määritä vektorin $\bar{b}$ kanssa samansuuntainen vektori, jonka pituus on 10. Piirrä se koordinaatistoon.

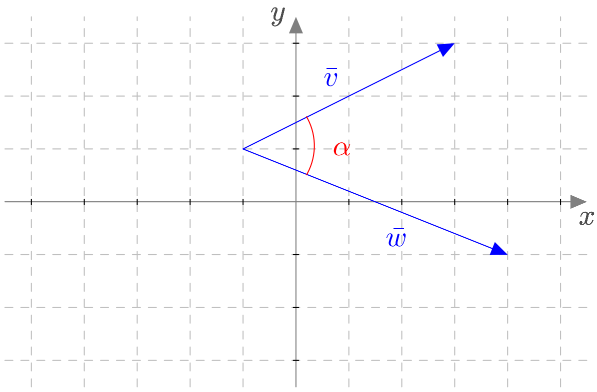
(c) Määritä vektorin $\bar{b}$ kanssa vastakkaissuuntainen yksikkövektori. Piirrä se koordinaatistoon.

Teoreema 2.4.8. *Kaksi vektoria ovat samat, jos ne ovat samansuuntaiset ja yhtä pitkät.*

Todistus. Määritelmän 1.1.8 mukaan vektorit ovat samat, jos ne voidaan esittää samalla tavalla vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Jos vektorit voidaan esittää samalla tavalla vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla, ne ovat välttämättä samansuuntaiset ja yhtä pitkät. Jos vektorit ovat samansuuntaiset ja yhtä pitkät, ne voidaan ilmaista samalla tavalla vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla, jolloin ne määritelmän mukaan ovat samat vektorit.

2.5 Vektorien välinen kulma ja pistetulo

Vektorien välisiä kulmia voidaan tarkastella, kun vektorien alkupisteet ovat samat. Vektorien välisellä kulmalla tarkoitetaan muodostuvista kulmista pienempää. Esimerkiksi kuvan 2.15 vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välisellä kulmalla tarkoitetaan kulmaa α.



Kuva 2.15: Vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma α.

Tehtävä 2.5.1. ...

(a) Kuinka suuri on vektorien $\bar{v}$ ja $3\bar{v}$ välinen kulma?

(b) Päteekö a-kohdan tulos kaikille samansuuntaisille vektoreille?

(c) Kuinka suuri on vektorien $\bar{v}$ ja $-\bar{v}$ välinen kulma?

(d) Päteekö c-kohdan tulos kaikille vastakkaissuuntaisille vektoreille?

Tarkastellaan seuraavaksi vektorien **pistetuloa**. Pistetuloa voidaan hyödyntää vektorien välisiä kulmia laskettaessa.

Määritelmä 2.5.2. Vektorien $\bar{v} = x_1\bar{\imath} + y_1\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = x_2\bar{\imath} + y_2\bar{\jmath}$ pistetulo on $\bar{v} \cdot \bar{w} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Pistetulo

Esimerkiksi vektorien $\bar{v} = -2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = 3\bar{\imath} - \bar{\jmath}$ pistetulo on

$$\begin{aligned} \bar{v} \cdot \bar{w} &= (-2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}) \cdot (3\bar{\imath} - \bar{\jmath}) \\ &= (-2) \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \\ &= -6 - 4 \\ &= -10. \end{aligned}$$

Huomaa, että merkintä $\bar{v} \cdot \bar{w}$ tarkoittaa vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ pistetuloa, kun taas merkintä $3 \cdot 5$ tarkoittaa lukujen 3 ja 5 tuloa. Vektorien pistetulo on aina reaaliluku, joten sitä kutsutaan joskus myös **skalaarituloksi**.

Tehtävä 2.5.3. Tarkaste vektoreita $\bar{a} = 7\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$, $\bar{b} = 3\bar{\imath} - 5\bar{\jmath}$ ja $\bar{c} = -4\bar{\imath} - 6\bar{\jmath}$.

(a) Laske pistetulo $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

(b) Laske pistetulo $\bar{a} \cdot \bar{c}$.

(c) Laske pistetulo $\bar{b} \cdot \bar{c}$.

Tehtävä 2.5.4. Tarkastele vektoreita $\bar{a} = -11\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}$, $\bar{b} = -4\bar{\imath} - 7\bar{\jmath}$ ja $\bar{c} = 3\bar{\imath} - 9\bar{\jmath}$, sekä reaalilukua $t = 3$.

(a) Laske pistetulo $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

(b) Laske pistetulo $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c})$.

(c) Laske pistetulo $t(\bar{a} \cdot \bar{b})$.

Edellisen tehtävän kaltaisissa tilanteissa on hyödyllistä tuntea pistetulon ominaisuuksia. Pistetulolla voidaan laskea tavallisten laskusääntöjen mukaan. Näitä on koottu teoreemaan 2.5.5.

Teoreema 2.5.5. *Olkoot $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ vektoreita, ja t jokin reaaliluku. Nyt pistetulolla on seuraavat ominaisuudet:*

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= \bar{b} \cdot \bar{a} \\ \bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) &= (\bar{a} \cdot \bar{b}) + (\bar{a} \cdot \bar{c}) \\ t(\bar{a} \cdot \bar{b}) &= (t\bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (t\bar{b}) \end{aligned}$$

Todistus. –

Pistetulolla on myös seuraava ominaisuus:

Teoreema 2.5.6. *Olkoon $\bar{a}$ jokin vektori. Nyt pistetulolle pätee, että*

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2.$$

Todistus. Merkitään $\bar{a} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$. Vektorin $\bar{a}$ pituus on

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

joten sen pituuden neliö on

$$|\bar{a}|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2.$$

Tutkitaan sitten vektorin $\bar{a}$ pistetuloa itsensä kanssa. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot \bar{a} &= (x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}) \cdot (x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}) \\ &= x \cdot x + y \cdot y \\ &= x^2 + y^2.\end{aligned}$$

Näin ollen vektorin $\bar{a}$ pistetulo itsensä kanssa on sama kuin sen pituuden neliö, eli

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2.$$

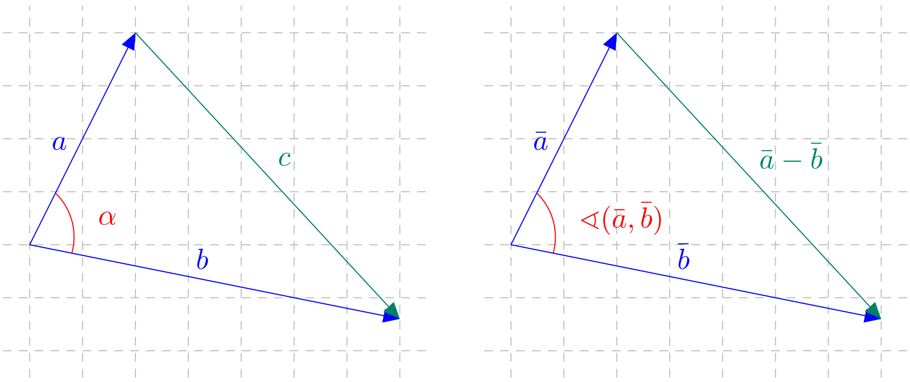
Tehtävä 2.5.7. Laske pistetulo $(2\bar{a}+\bar{b})\cdot(7\bar{a}-3\bar{b})$, kun $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 6$ ja $\bar{a}\cdot\bar{b} = -4$. Käytä hyväksesi teoreemoissa 2.5.5 ja 2.5.6 mainittuja pistetulon ominaisuuksia.

Tutkitaan seuraavaksi vektorien välisen kulman ja pistetulon yhteyttä. Vektorien välinen kulma voidaan laskea Geometria−kurssista tutun **kosinilauseen** avulla. Kosinilause on Pythagoraan lauseen yleistys. Pythagoraan lause pätee ainoastaan suorakulmaisille kolmioille, mutta kosinilausetta voi käyttää kaikille kolmioille. Tarkastellaan kuvaa 2.16. Kosinilauseen mukaan

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

Vektorien pituuksia hyödyntämällä kosinilause saadaan muotoon

$$|\bar{a} - \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}).$$



Kuva 2.16: Kosinilause.

Vektorien välisen kulman ja niiden pistetulon välinen yhteys todistetaan täsmällisesti seuraavassa teoreemassa 2.5.8.

Teoreema 2.5.8. *Vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ pistetulo on* $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a}, \bar{b})$.

Todistus. Tutkitaan ensin sivun $\bar{a} - \bar{b}$ pituuden neliötä. Käyttäen hyväksi pistetulon ominaisuuksia sen yhtälö saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
|\bar{a} - \bar{b}|^2 &= (\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b}) \\
&= \bar{a} \cdot (\bar{a} - \bar{b}) - \bar{b} \cdot (\bar{a} - \bar{b}) \\
&= (\bar{a} \cdot \bar{a} - \bar{a} \cdot \bar{b}) - (\bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{b}) \\
&= \bar{a} \cdot \bar{a} - \bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{b} \\
&= |\bar{a}|^2 - 2(\bar{a} \cdot \bar{b}) + |\bar{b}|^2 \\
&= |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2(\bar{a} \cdot \bar{b}).
\end{aligned}$$

Toisaalta kosinilauseen mukaan sivun $\bar{a} - \bar{b}$ pituuden neliölle pätee

$$|\bar{a} - \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b}).$$

Yhdistämällä edelliset tulokset tiedetään, että

$$\begin{aligned}
|\bar{a} - \bar{b}|^2 &= |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2(\bar{a} \cdot \bar{b}) \\
&= |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b}).
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b}).$$

Tehtävä 2.5.9. Vektorin $\bar{a}$ pituus on 3 ja vektorin $\bar{b}$ pituus on 7. Hyödynnä teoreeman 2.5.8 tulosta ja laske vektoreiden välinen pistetulo $\bar{a} \cdot \bar{b}$, kun

(a) vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat samansuuntaiset.

(b) vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset.

(c) vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma on 43°.

Tehtävä 2.5.10. Tarkastele vektoreita $\bar{a} = -2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ ja $\bar{b} = 6\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$.

(a) Laske pistetulo $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

(b) Piirrä vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ koordinaatistoon siten, että niillä on sama alkupiste.

(c) Mitä huomaat vektorien välisestä kulmasta?

Edellisessä tehtävässä tehty havainto pitää aina paikkansa: aina, kun vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, niiden välinen pistetulo on nolla. Toisaalta jos tiedetään, että vektorien välinen pistetulo on nolla, ne ovat välttämättä kohtisuorassa toisiaan vasten. Tämä osoitetaan täsmällisesti seuraavassa teoreemassa 2.5.11.

Teoreema 2.5.11. *Vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, jos ja vain jos $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, eli $\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = 90°$. Nyt

$$\begin{aligned}
\bar{a} \cdot \bar{b} &= |\bar{a}||\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b}) \\
&= |\bar{a}||\bar{b}| \cos 90° \\
&= |\bar{a}||\bar{b}| \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Näin ollen jos vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, niin $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

Oletetaan sitten, että vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen pistetulo on nolla, eli $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$. Tällöin tiedetään, että

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b}) = 0.$$

Tällöin

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = 0,$$

joka pätee ainoastaan silloin, kun

$$\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = 90°.$$

Siispä jos $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, niin vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vasten.

Tehtävä 2.5.12. Tutki vektoreita $\bar{a} = -6\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$, $\bar{b} = \bar{\imath} - 3\bar{\jmath}$ ja $\bar{c} = -2\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}$.

(a) Laske pistetulot $\bar{a} \cdot \bar{b}$, $\bar{a} \cdot \bar{c}$ ja $\bar{b} \cdot \bar{c}$.

(b) Mitkä vektoreista ovat kohtisuorassa toisiaan vasten?

(c) Tarkista edellisen kohdan vastauksesi tarkastelemalla vektorien välisiä kulmia koordinaatistossa.

Tehtävä 2.5.13. Tutki vektoreita $\bar{a} = -2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ ja $\bar{b} = t\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$, missä t on jokin reaaliluku.

(a) Muodosta vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välisen pistetulon $\bar{a} \cdot \bar{b}$ yhtälö.

(b) Millä muuttujan t arvolla vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vasten?

Teoreemasta 2.5.8 saadaan johdettua kaava myös vektorien väliselle kulmalle. Kun yhtälön

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b})$$

molemmat puolet jaetaan termillä $|\bar{a}||\bar{b}|$, saadaan seuraava tulos:

Teoreema 2.5.14. *Jatkoa teoreemaan 2.5.8. Vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma saadaan kaavasta*

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$$

Tehtävä 2.5.15. Tarkaste kolmiota ABC, missä $\overline{AB} = 5\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$ ja $\overline{AC} = 9\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$. Laske kolmion kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.

Tehtävä 2.5.16. Kolmion ABC kärjet ovat pisteissä $A = (-7, 1)$, $B = (4, 9)$ ja $C = (-3, -5)$. Laske kolmion kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.

Tehtäviä

Tehtävä 2.5.17. Tarkastele vektoreita $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$. Tiedetään, että

$$\bar{b} - 3\bar{a} = 5(\bar{a} - \bar{b}).$$

(a) Osoita, että vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaiset.

(b) Ovatko vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ saman- vai vastakkaissuuntaiset?

Tehtävä 2.5.18. Tarkastele vektoreita $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$. Oletetaan, että vektorit eivät ole yhdensuuntaiset. Osoita, että vektori $3\bar{a} + \bar{b}$ ei ole yhdensuuntainen vektorin $\bar{a}$ kanssa.

Tehtävä 2.5.19. ...

(a)

(b)

Tehtävä 2.5.20. ...

(a)

(b)