Vektorit

Juulia Lahdenperä ja Lotta Oinonen

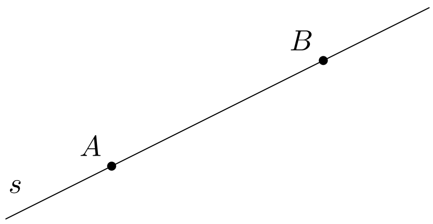
25. marraskuuta 2015

Sisältö

1 Suora ja taso

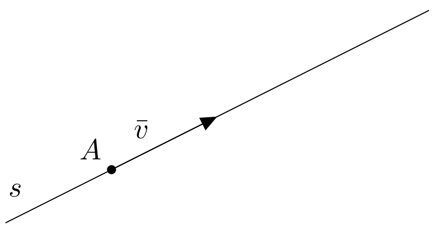
1.1 Suora

Tutkitaan seuraavaksi suoria. Kuvassa 1.1 olevien pisteiden A ja B kautta on mahdollista piirtää ainoastaan yksi suora − pisteet A ja B määrittävät suoran s kokonaan. Suoran määrittämiseen riittää siis kaksi pistettä.



Kuva 1.1: Pisteiden A ja B määrittämä suora s.

Suoran määrittämisessä voidaan käyttää hyväksi myös vektoreita. Tällöin tarvitaan suoran yksi piste sekä yksi suoran suuntainen vektori. Tarkastellaan kuvaa 1.2. Suoran piste A määrittää jonkin pisteen, jonka kautta suora kulkee. Yhden pisteen kautta voi kuitenkin kulkea äärettömän monta suoraa. Tästä syystä tarvitaan vielä vektori $\bar{v}$, joka kertoo, mihin suuntaan suora kulkee. Tätä vektoria kutsutaan suoran **suuntavektoriksi**.



Kuva 1.2: Pisteen A ja suuntavektorin $\bar{v}$ määrittämä suora s.

Jos pisteet A ja B ovat suoralla s, suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori $\overline{AB}$ tai vektori $\overline{BA}$. Nyt suora voidaan määrittää kumman tahansa pisteen ja kumman tahansa suuntavektorin avulla.

Tehtävä 1.1.1. Tutki pisteitä $A = (-2, 1)$ ja $B = (4, -2)$.

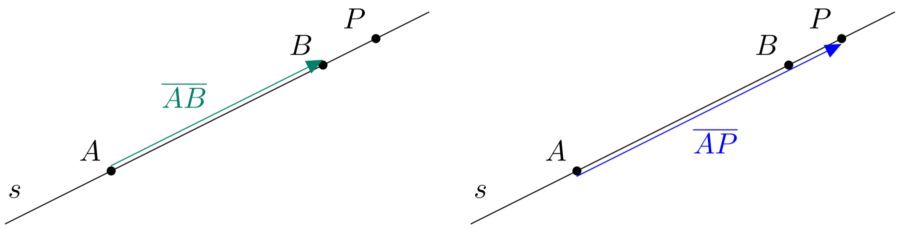
(a) Piirrä pisteet A ja B koordinaatistoon.

(b) Piirrä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora ja merkitse sitä kirjaimella s.

(c) Merkitse kuvaan vektori $\overline{AB}$ ja ilmoita se vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(d) Suoran s voi nyt määrittää esimerkiksi pisteen A ja vektorin $\overline{AB}$ avulla. Keksi jokin toinen tapa määrittää sama suora.

Suoralla olevia muita pisteitä voidaan tutkia yhdensuuntaisuuden avulla. Esimerkiksi kuvan 1.3 piste P on pisteiden A ja B kautta kulkevalla suoralla s, koska vektori $\overline{AB}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overline{AP}$ kanssa.



Kuva 1.3: Piste P on suoralla s.

Piste suoralla

Määritelmä 1.1.2. Piste P on pisteiden A ja B kautta kulkevalla suoralla s, jos ja vain jos vektori $\overline{AB}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overline{AP}$ kanssa eli $\overline{AP} = t\overline{AB}$ jollakin reaaliluvulla t.

Tehtävä 1.1.3. Tutki pisteitä $A = (-2, -1)$ ja $B = (1, 3)$.

(a) Piirrä pisteet A ja B koordinaatistoon.

(b) Piirrä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora ja merkitse sitä kirjaimella s.

(c) Katso kuvasta, onko piste $P = (8, 3)$ suoralla s.

(d) Merkitse kuvaan vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AP}$, ja ilmoita ne vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(e) Tutki yhtälöä $\overline{AP} = t\overline{AB}$. Löydätkö jonkin reaaliluvun t, joka toteuttaa yhtälön? Toisin sanoen ovatko vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AP}$ yhdensuuntaiset?

Tarkastellaan suoraa s, joka kulkee pisteiden $A = (-3, 1)$ ja $B = (2, 6)$ kautta. Tutkitaan, onko piste $P = (-1, 3)$ kyseisellä suoralla. Muodostetaan tätä varten vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AP}$. Vektori

$$\overline{AB} = (2 - (-3))\bar{\imath} + (6 - 1)\bar{\jmath} = 5\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}$$

ja vektori

$$\overline{AP} = ((-1) - (-3))\bar{\imath} + (3 - 1)\bar{\jmath} = 2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}.$$

Tutkitaan yhtälöä $\overline{AP} = t\overline{AB}$. Sijoitetaan vektorit yhtälöön, jolloin saadaan

$$2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} = t(5\bar{\imath} + 5\bar{\jmath})$$

ja edelleen

$$2(\bar{\imath} + \bar{\jmath}) = 5t(\bar{\imath} + \bar{\jmath}).$$

Huomataan, että yhtälö on tosi silloin, kun $2 = 5t$, eli kun $t = 2/5$. Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AP}$ ovat siis yhdensuuntaiset. Näin ollen piste P on suoralla s.

Tarkastellaan edelleen samaa suoraa s. Tutkitaan, onko piste $Q = (2, 4)$ kyseisellä suoralla. Huomataan, että vektori $\overline{AB} = 5\bar{\imath}+5\bar{\jmath}$ ja vektori $\overline{AQ} = 5\bar{\imath}+3\bar{\jmath}$. Sijoitetaan nämä yhtälöön $\overline{AP} = t\overline{AB}$, jolloin saadaan

$$5\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} = t(5\bar{\imath} + 5\bar{\jmath})$$

ja edelleen

$$5\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} = 5t\bar{\imath} + 5t\bar{\jmath}.$$

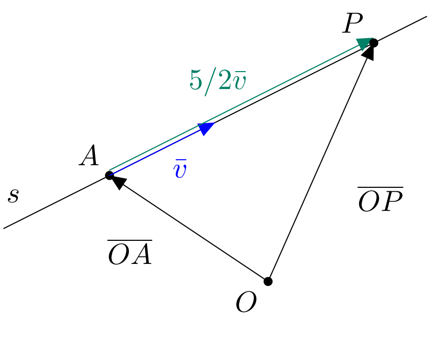
Yhtälö on tosi silloin, kun $5\bar{\imath} = 5t\bar{\imath}$ ja $3\bar{\jmath} = 5t\bar{\jmath}$. Ensimmäisen yhtälön perusteella $t = 1$, mutta tämä ei totetuta toista yhtälöä. Yhtälö $5\bar{\imath}+3\bar{\jmath} = 5t\bar{\imath}+5t\bar{\jmath}$ ei siis toteudu millään reaaliluvulla t, joten vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AQ}$ eivät ole yhdensuuntaiset. Näin ollen piste Q ei ole suoralla s.

Tehtävä 1.1.4. Tutki pisteiden $A = ()$ ja $B = ()$ määrittämää suoraa s.

(a) Onko piste $P = ()$ suoralla s?

(b) Onko piste $Q = ()$ suoralla s?

Suoralla olevia muita pisteitä voidaan tutkia myös paikkavektorien ja vektorien yhteenlaskun avulla. Tarkastellaan kuvassa 1.4 olevaa suoraa s, joka on määritelty pisteen A ja suuntavektorin $\bar{v}$ avulla. Myös piste P on suoralla s, sillä vektori $\overline{OP} = \overline{OA} + 5/2\bar{v}$.



Kuva 1.4: Suoran s vektoriyhtälö.

Määritelmä 1.1.5. Piste P on pisteen A ja suuntavektorin $\bar{v}$ määrittämällä suoralla s, jos ja vain jos $\overline{OP} = \overline{OA} + t\bar{v}$ jollakin reaaliluvulla t. Yhtälöä $\overline{OP} = \overline{OA} + t\bar{v}$ sanotaan suoran vektoriyhtälöksi.

Suoran vektoriyhtälö

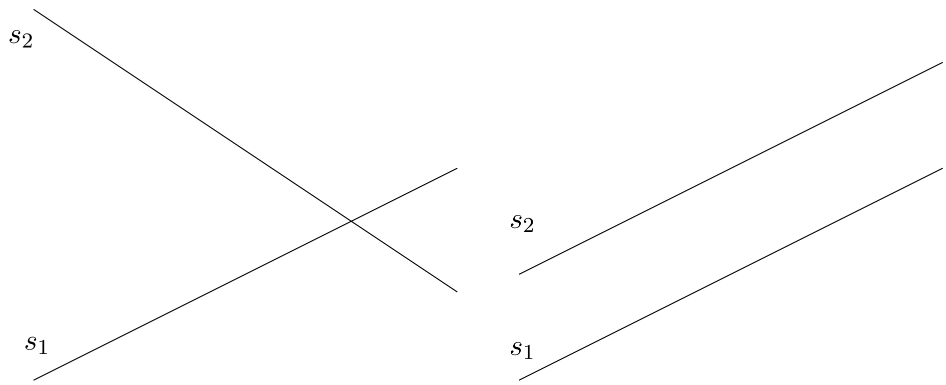
Suoran vektoriyhtälö antaa suoran kaikkien pisteiden paikkavektorit, kun kerroin t käy läpi kaikki reaaliluvut.

Tehtävä 1.1.6. Tutki pisteen $A = (-1, 6)$ ja suuntavektorin $\bar{v} = 2\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}$ määrittämää suoraa s.

(a) Onko piste $P = (5, -3)$ suoralla s?

(b) Onko piste $Q = (4, 1)$ suoralla s?

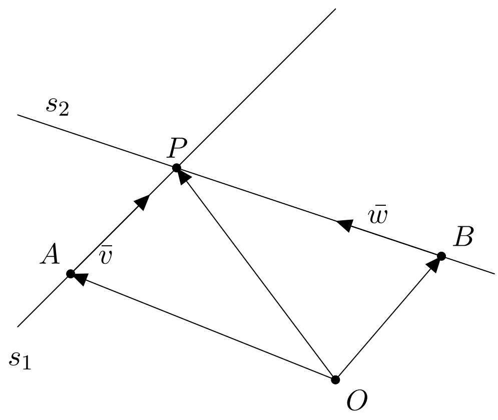
Tutkitaan sitten suorien mahdollisia leikkauspisteitä. Tasossa kaksi suoraa joko leikkaavat toisensa tai ne ovat yhdensuuntaiset.



Kuva 1.5: Tason kaksi suoraa s_1 ja s_2 joko leikkaavat toisensa tai ovat yhdensuuntaisia.

Suorilla on leikkauspiste, jos niillä on yksi yhteinen piste, eli on olemassa piste, joka kuuluu molemmille suorille. Leikkauspiste voidaan löytää esimerkiksi suorien vektoriyhtälöiden avulla. Tarkastellaan kuvaa 1.6. Suorat s_1 ja s_2 leikkaavat toisensa pisteessä P. Suoran s_1 vektoriyhtälön perusteella vektori $\overline{OP} = \overline{OA} + t\bar{v}$ ja suoran s_2 vektoriyhtälön perusteella $\overline{OP} = \overline{OB} + r\bar{w}$ joillakin reaaliluvuilla t ja r. Yhdistämällä nämä kaksi tietoa saadaan yhtälö

$$\overline{OA} + t\bar{v} = \overline{OB} + r\bar{w}.$$



Kuva 1.6: Suorien s_1 ja s_2 leikkauspiste P.

- - - - - - - - - -

Tutkitaan suoraa $y = -2x + 1$. Suora voidaan ilmoittaa muodossa $-2x - y + 1 = 0$. Tällaista muotoa kutsutaan **suoran normaalimuotoiseksi yhtälöksi**. Normaalimuotoinen yhtälö on aina muotoa $ax + by + c = 0$.

Vektoria $\bar{n}$, joka on kohtisuorassa suoraa s vasten, sanotaan suoran s **normaalivektoriksi**.

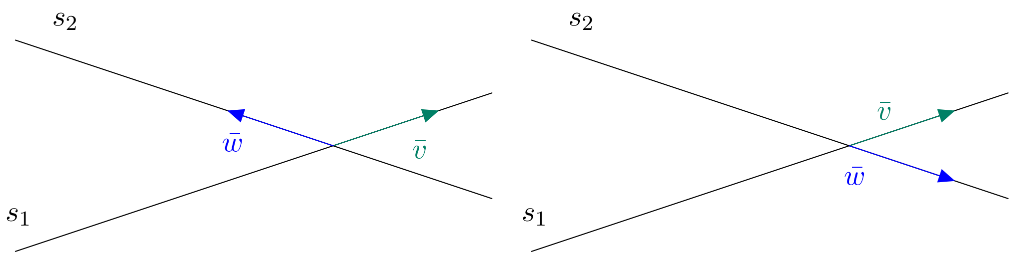
Suoran normaalivektorit nähdään suoraan sen normaalimuotoisesta yhtälöstä. Suoran $ax + by + c = 0$ normaalivektorit ovat vektorin $a\bar{\imath} + b\bar{\jmath}$ monikertoja eli muotoa $t(a\bar{\imath} + b\bar{\jmath})$ jollakin reaaliluvulla t.

- - - - - - - - - -

Kappaleessa **??** opittiin määrittämään vektorien välisiä kulmia. Teoreeman **??** mukaan vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ välinen kulma saadaan kaavasta

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$$

Kahden suoran välistä kulmaa voidaan tutkia suorien suuntavektoreiden avulla. Tässä on kuitenkin oltava tarkkana. Suorien välisellä kulmalla tarkoitetaan kulmista pienempää. Joskus suorien suuntavektorien valinnasta johtuen vektorien väliseksi kulmaksi saadaan suorien välisistä kulmista suurempi. Tilannetta havainnollistetaan kuvassa 1.7. Jos siis saat suorien väliseksi kulmaksi yli 90 astetta, vähennä se 180 asteesta, jolloin saat oikean suorien välisen kulman.



Kuva 1.7: Suorien s_1 ja s_2 suuntavektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma.

1.2 Suora avaruudessa

Kolmiulotteisessa koordinaatistossa suoralle ei voida laskea kulmakerrointa samaan tapaan kuin kaksiulotteisessa koordinaatistossa. Tästä syystä avaruuden suoria tutkitaan ainoastaan vektorien avulla.

Avaruussuoran vektoriyhtälö

Määritelmä 1.2.1. $\overline{OP} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k} = \overline{OA} + t\bar{v}$

Avaruussuoran parametriesitys

Määritelmä 1.2.2. $\begin{cases} x = x_0 + t\bar{v}_x \\ y = y_0 + t\bar{v}_y \\ z = z_0 + t\bar{v}_z \end{cases}$

Avaruussuoran koordinaattiesitys

Määritelmä 1.2.3.

$$\frac{x - x_0}{\bar{v}_x} = \frac{y - y_0}{\bar{v}_y} = \frac{z - z_0}{\bar{v}_z}, \bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z \neq 0.$$

1.3 Taso

Tason vektoriyhtälö

Määritelmä 1.3.1. Jos piste A on tasossa ja jos $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat erisuuntaiset tason suuntavektorit, niin tason vektoriyhtälö on $\overline{OP} = \overline{OA} + s\overline{AB} + t\overline{AC}$.

Tason parametrimuotoinen yhtälö

Määritelmä 1.3.2.

Määritelmä 1.3.3. $ax + by + cz + d = 0.$

Tason normaalimuotoinen yhtälö

Määritelmä 1.3.4. $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$

Tason koordinaattiyhtälö

Määritelmä 1.3.5. Vektoria, joka on kohtisuorassa kaikkia tason vektoreita vasten, sanotaan tason normaalivektoriksi.

Tason normaalivektori

1.4 Suoran ja tason leikkauspiste

1.5 Suoran ja tason välinen kulma