# Vektorit

Juulia Lahdenperä ja Lotta Oinonen

27. lokakuuta 2015

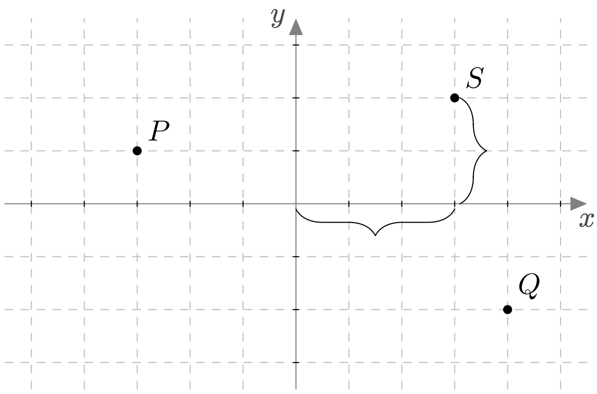
# Sisältö

# 1 Vektori

## 1.1 xy-koordinaatisto

Kuvassa 1.1 on koordinaatisto, johon on piirretty x- ja y-akselit.

**Tehtävä 1.1.1.** Tutki alla olevaa kuvaa 1.1.




Kuva 1.1:

(a) Kuinka monta askelta siirrytään x-akselin suunnassa, jotta päästään pisteeseen $P$?

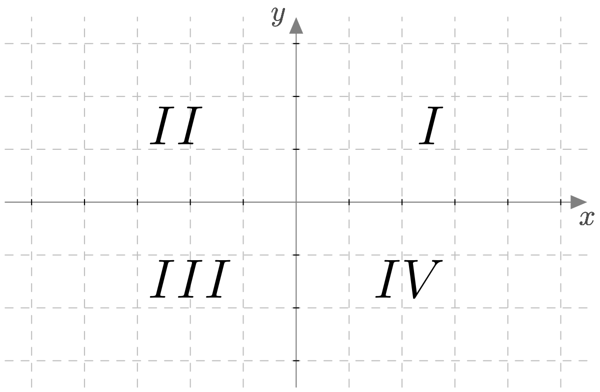
(b) Kuinka monta askelta siirrytään y-akselin suunnassa, jotta päästään pisteeseen $P$?

(c) Kuinka monta askelta siirrytään x-akselin suunnassa, jotta päästään pisteeseen $Q$?

(d) Kuinka monta askelta siirrytään y-akselin suunnassa, jotta päästään pisteeseen $Q$?

Tason piste ilmoitetaan lukuparina $(x, y)$, missä ensimmäinen luku $x$ ilmoittaa x-akselin suuntaisten ja toinen luku $y$ y-akselin suuntaisten askelten lukumäärän. Näitä lukuja kutsutaan **pisteen koordinaateiksi**. Kuvan 1.1 piste $S$ sijaitsee siinä tason pisteessä, missä $x = 3$ ja $y = 2$. Näin ollen pistettä $S$ merkitään $S = (3, 2)$. Koordinaattien avulla kaikki tason pisteet voidaan määrittää yksikäsitteisesti.

Koordinaattiakselit jakavat tason neljään osaan. Osat nimetään yleensä järjestysnumeroilla I, II, III ja IV alla olevan kuvan 1.2 mukaisesti. Koordinaattiakselien leikkauskohtaa kutsutaan **origoksi**. Origoa merkitään yleensä kirjaimella $O$, ja sen koordinaatit ovat $O = (0, 0)$.




Kuva 1.2: Koordinaatiston neljännekset.

**Tehtävä 1.1.2.** Valitse kuvasta 1.2 jokaiselta koordinaatiston neljänneksellä jokin piste ja ilmoita sen koordinaatit. Miten eri neljännekset vaikuttavat x- ja y-koordinaattien koordinaattien etumerkkeihin?

**Tehtävä 1.1.3.** ...

(a) Piirrä koordinaatistoon pisteet $(0, 2)$, $(0, -4)$ ja $(0, 3)$.

(b) Piirrä koordinaatistoon kolme uutta pistettä, jotka ovat muotoa $(0, y)$ jollakin kokonaisluvulla $y$.

(c) Piirrä kuva kaikista sellaisista tason pisteistä, jotka ovat muotoa $(0, y)$ jollakin kokonaisluvulla $y$.

**Tehtävä 1.1.4.** ...

(a) Piirrä koordinaatistoon pisteet $(2, 2)$, $(3, 3)$ ja $(-2, -2)$.

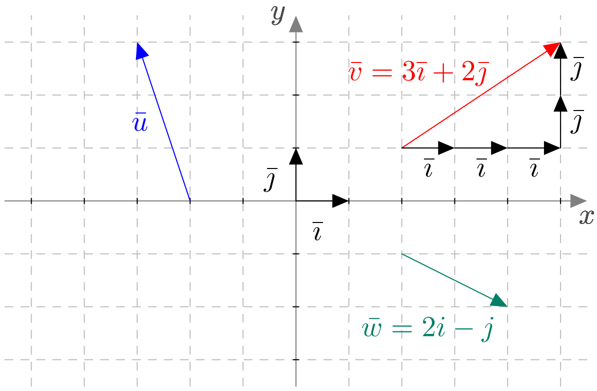
(b) Piirrä koordinaatistoon kolme uutta pistettä, jotka ovat muotoa $(x, x)$ jollakin kokonaisluvulla $x$.

(c) Piirrä kuva kaikista sellaisista tason pisteistä, jotka ovat muotoa $(x, x)$ jollakin kokonaisluvulla $x$.

**Tehtävä 1.1.5.** Piirrä kuva kaikista sellaisista tason pisteistä, jotka ovat muotoa $(x, 2)$ jollakin kokonaisluvulla $x$.

## 1.2 Vektorin muodostaminen

Tarkastellaan seuraavaksi kuvaa 1.3. Kuvassa on nuolet $\bar{u}, \bar{v}$ ja $\bar{w}$, yhden x-akselin suuntaisen askeleen pituinen nuoli $\bar{\imath}$, sekä yhden y-akselin suuntaisen askeleen pituinen nuoli $\bar{\jmath}$.




Kuva 1.3: ...

Huomataan, että nuolen $\bar{v}$ päästä on sen kärkeen kolme x-akselin suuntaista askelta positiiviseen suuntaan ja kaksi y-akselin suuntaista askelta positiiviseen suuntaan. Tällainen nuoli $\bar{v}$ voidaan ilmoittaa nuolien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla muodossa $\bar{v} = 3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$.

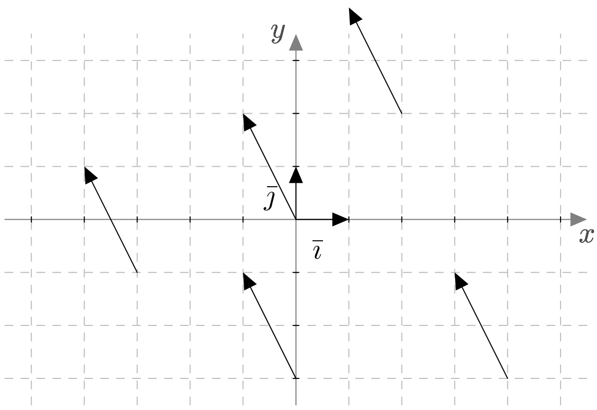
**Tehtävä 1.2.1.** Ilmoita kuvassa 1.3 oleva nuoli $\bar{u}$ nuolien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

Koordinaatistossa olevia nuolia kutsutaan **vektoreiksi**. Edellisen kuvan nuoli $\bar{v}$ on siis vektori $\bar{v}$, joka voidaan ilmaista vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Vektoreita $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ sanotaan komponenttivektoreiksi, ja summattavia $3\bar{\imath}$ ja $2\bar{\jmath}$ vektorin $\bar{v}$ **komponenteiksi**. Vektorin komponenttiesityksellä tarkoitetaan vektorin esittämistä vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Vektorit $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ ovat käteviä, sillä niiden avulla voidaan ilmaista kaikki mahdolliset xy-koordinaatiston vektorit.

**Määritelmä 1.2.2.** Vektorin ilmaisemista komponenttivektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla sanotaan vektorin **komponenttiesitykseksi**.

**Vektorin komponenttiesitys**

**Tehtävä 1.2.3.** Tarkastellaan seuraavaa kuvaa 1.4.



Kuva 1.4: Vektoreita

Ilmoita kaikki kuvassa olevat vektorit vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Mitä huomaat?

**Samat vektorit**

**Määritelmä 1.2.4.** Kaksi vektoria ovat **samat**, jos ne voidaan esittää samalla tavalla vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

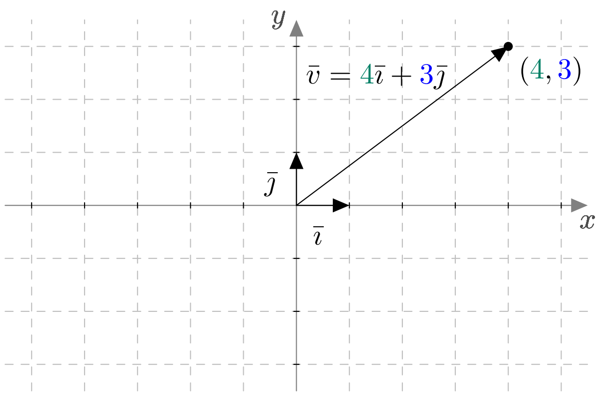
Vektorien samuus tarkoittaa siis sitä, että ne ovat saman pituisia ja osoittavat samaan suuntaan − niiden paikalla koordinaatistossa ei ole merkitystä.

**Tehtävä 1.2.5.** Tarkastellaan edelleen kuvaa 1.4. Vertaa origosta lähtevän vektorin komponenttiesitystä sen kärkipisteen koordinaatteihin. Mitä huomaat?

**Paikkavektori**

**Määritelmä 1.2.6.** Origosta lähtevän vektorin $\bar{v} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$ kärki on pisteessä $(x, y)$. Kyseistä vektoria $\bar{v}$ kutsutaan pisteen $(x, y)$ **paikkavektoriksi**.

Kuvassa 1.5 pisteen $(4, 3)$ paikkavektori on origosta lähtevä vektori $\bar{v} = 4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$.




Kuva 1.5: Pisteen $(4, 3)$ paikkavektori $\bar{v}$.

**Tehtävä 1.2.7.** Piirrä vektorit $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ koordinaatistoon siten, että ne lähtevät origosta.

(a) Minkä pisteiden paikkavektoreita ne ovat?

(b) Mieti, miksi kaikki tason vektorit on mahdollista ilmaista vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

## 1.3 Kahden pisteen välinen vektori

**Tehtävä 1.3.1.** ...

(a) Piirrä kaksi pistettä koordinaatiston ensimmäiselle neljännekselle. Merkitse pisteiden koordinaatit.

(b) Piirrä pisteiden väliin vektori $\bar{v}$.

(c) Ilmoita vektori $\bar{v}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(d) Yritä päätellä, miten vektorien $i$ ja $j$ kertoimet voitaisiin saada pisteiden x- ja y-koordinaattien avulla?

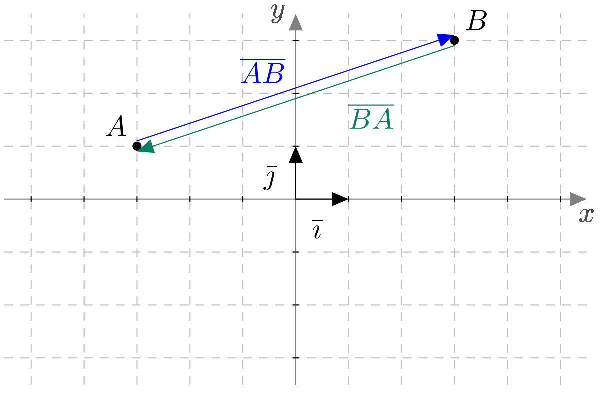
**Tehtävä 1.3.2.** ...

(a) Piirrä kaksi pistettä koordinaatiston toiselle, kolmannelle tai neljännelle neljännekselle. Merkitse pisteiden koordinaatit.

(b) Piirrä pisteiden väliin vektori $\bar{v}$.

(c) Ilmoita vektori $\bar{v}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Käytä hyväksesi piirtämiesi pisteiden x- ja y-koordinaatteja.

Vektori voi kulkea pisteiden välillä kahteen eri suuntaan. Pisteestä $A$ pisteeseen $B$ kulkevaa vektoria merkitään $\overline{AB}$, ja pisteestä $B$ pisteeseen $A$ kulkevaa vektoria merkitään $\overline{BA}$.




Kuva 1.6: Kahden pisteen väliset vektorit.

**Tehtävä 1.3.3.** ...

(a) Piirrä koordinaatistoon pisteet $A$ ja $B$. Merkitse niiden koordinaatit.

(b) Ilmoita vektori $\overline{AB}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(c) Ilmoita vektori $\overline{BA}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

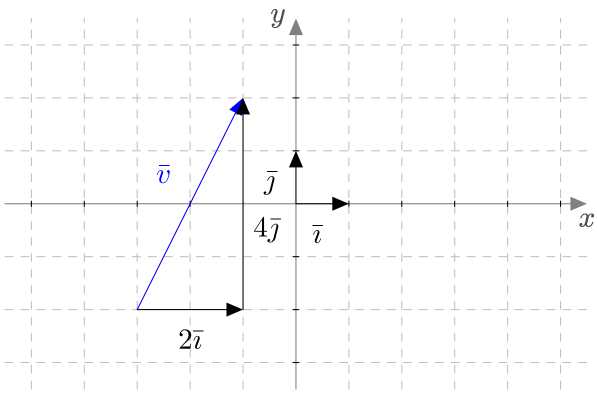
(d) Vertaa vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{BA}$ komponenttiesityksiä keskenään. Mitä huomaat?

Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{BA}$ ovat eri vektorit, sillä niitä ei voida esittää samalla tavalla vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Vektorien suunnalla on siis merkitystä. Vektorien suuntiin palataan kappaleessa 2.2.

# 2 Vektorien laskutoimituksia

## 2.1 Summa

Edellisessä kappaleessa opittiin muodostamaan vektoreita x- ja y-akselien suuntaisten yhden askeleen pituisten vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Esimerkiksi kuvan 2.1 vektori $\bar{v}$ saadaan laskemalla yhteen vektorit $2\bar{\imath}$ ja $4\bar{\jmath}$. Seuraavaksi tutkitaan, kuinka lasketaan yhteen mitä tahansa vektoreita.




Kuva 2.1: Vektori $\bar{v} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$.

**Tehtävä 2.1.1.** Tutkitaan vektoreita $\bar{v} = 2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = \bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$.

(a) Piirrä vektori $\bar{v}$ koordinaatistoon.

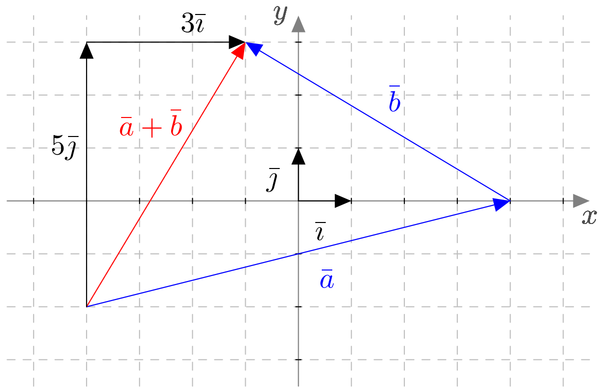
(b) Piirrä vektori $\bar{w}$ koordinaatistoon siten, että se alkaa vektorin $\bar{v}$ kärkipisteestä.

(c) Piirrä vektori, joka alkaa vektorin $\bar{v}$ alkupisteestä ja päättyy vektorin $\bar{w}$ kärkipisteeseen. Merkitse tätä vektoria $\bar{v} + \bar{w}$.

(d) Ilmoita vektori $\bar{v} + \bar{w}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(e) Miten vektorin $\bar{v} + \bar{w}$ komponentit voitaisiin muodostaa vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ komponenttien avulla?

Tarkastellaan seuraavaa kuvaa 2.2.




Kuva 2.2: Vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ summa.

Summavektori $\bar{a}+\bar{b}$ lähtee vektorin $\bar{a}$ kanssa samasta pisteestä ja päättyy vektorin $\bar{b}$ kärkeen. Summavektori $\bar{a}+\bar{b}$ saadaan suoraan laskemalla vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ yhteen komponenteittain:

$$\begin{aligned}
\bar{a} + \bar{b} &= (8\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}) + (-5\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}) \\
&= 8\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - 5\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} \\
&= 8\bar{\imath} - 5\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + 3\bar{\jmath} \\
&= 3\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}.
\end{aligned}$$

**Summavektori**

**Määritelmä 2.1.2.** Vektorien $\bar{v} = x_1\bar{\imath} + y_1\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = x_2\bar{\imath} + y_2\bar{\jmath}$ **summavektori** on vektori $\bar{v} + \bar{w} = (x_1 + x_2)\bar{\imath} + (y_1 + y_2)\bar{\jmath}$.

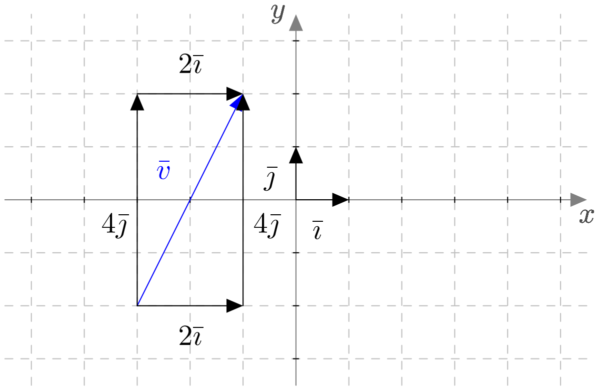
**Tehtävä 2.1.3.** Tutkitaan vektoreita $\bar{v} = -2\imath + \jmath$ ja $\bar{w} = 4\imath + 4\jmath$.

(a) Piirrä summavektori $\bar{v} + \bar{w}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.
(b) Ilmoita vektori $\bar{v} + \bar{w}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.
(c) Tarkista tuloksesi laskemalla yhteen vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ komponenteittain.

**Tehtävä 2.1.4.** Tutkitaan vektoreita $\bar{u} = \imath + 2\bar{\jmath}$, $\bar{v} = -3\imath + \jmath$ ja $\bar{w} = 3\imath + -5\jmath$.

(a) Piirrä vektori $\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{u}, \bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.
(b) Piirrä vektori $\bar{v} + \bar{u} + \bar{w}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{u}, \bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.
(c) Piirrä vektori $\bar{w} + \bar{u} + \bar{v}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{u}, \bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.
(d) Mitä huomaat?

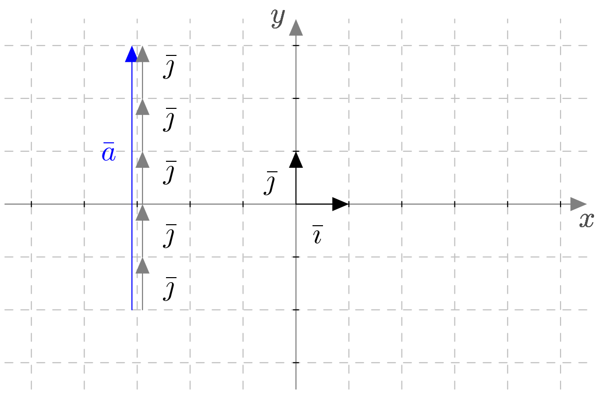
Edellisen tehtävän tulos tarkoittaa sitä, että vektorien yhteenlaskun järjestyksellä ei ole merkitystä. Vektorien yhteenlasku on siis **vaihdannainen** operaatio. Tämä näkyy selvästi kuvasta 2.3: vektori $4\bar{\jmath} + 2\bar{\imath}$ on sama kuin vektori $2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$.




Kuva 2.3: Vektori $\bar{v} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} = 4\bar{\jmath} + 2\bar{\imath}$.

## 2.2 Vektorin kertominen reaaliluvulla

Tarkastellaan seuraavaa kuvaa 2.4. Kuvassa oleva vektori $\bar{a}$ voidaan ilmaista vektorin $\bar{\jmath}$ avulla muodossa $5\bar{\jmath}$. Vektori $\bar{a}$ saadaan siis kertomalla vektoria $\bar{\jmath}$ luvulla 5.




Kuva 2.4: Vektori $\bar{a} = 5\bar{\jmath}$.

**Tehtävä 2.2.1.** Tutkitaan vektoria $\bar{a} = -\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$.

(a) Piirrä vektori $\bar{a}$ koordinaatistoon.

(b) Piirrä koordinaatistoon myös vektorit $2\bar{a}$, $3\bar{a}$ ja $5\bar{a}$.

**Tehtävä 2.2.2.** ...

(a) Piirrä koordinaatistoon vektorit $\bar{a} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$ ja $\bar{b} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$.

(b) Miten voisit ilmaista vektorin $\bar{b}$ vektorin $\bar{a}$ avulla?

**Tehtävä 2.2.3.** ...

(a) Piirrä koordinaatistoon vektorit $\bar{a} = \bar{\imath} + \bar{\jmath}$ ja $3\bar{a}$.

(b) Ilmoita vektori $3\bar{a}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

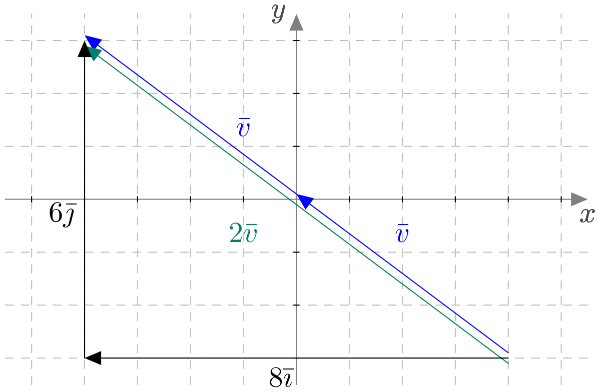
(c) Vertaa vektorien $\bar{a}$ ja $3\bar{a}$ komponenttiesityksiä toisiinsa. Mitä huomaat?

**Vektorin kertominen reaaliluvulla**

**Määritelmä 2.2.4.** Kun vektoria $\bar{v} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$ kerrotaan reaaliluvulla $r$, saadaan vektori $r\bar{v} = r(x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}) = (rx)\bar{\imath} + (ry)\bar{\jmath}$.

Kun siis esimerkiksi vektoria $\bar{v} = -4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ kerrotaan luvulla 2, saadaan vektori

$$2\bar{v} = 2 \cdot (-4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}) = 2 \cdot (-4)\bar{\imath} + 2 \cdot 3\bar{\jmath} = -8\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}.$$




Kuva 2.5: Vektorin $\bar{v} = -4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ kertominen luvulla 2.

**Tehtävä 2.2.5.** Tutkitaan vektoria $\bar{a} = -3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$.

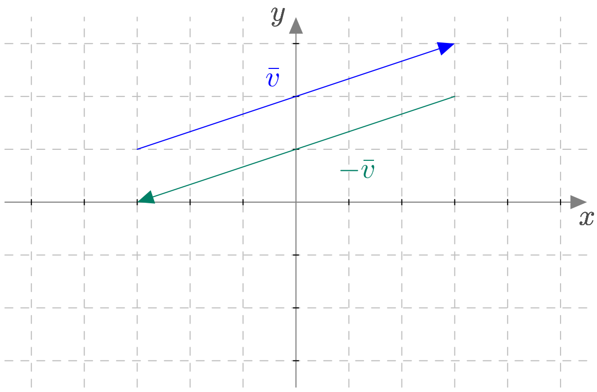
(a) Piirrä vektori $\bar{a}$ koordinaatistoon.

(b) Laske vektori $-1 \cdot \bar{a}$ ja piirrä se koordinaatistoon.

(c) Vertaa piirtämiäsi vektoreita sekä niiden komponenttiesityksiä keskenään. Mitä huomaat?

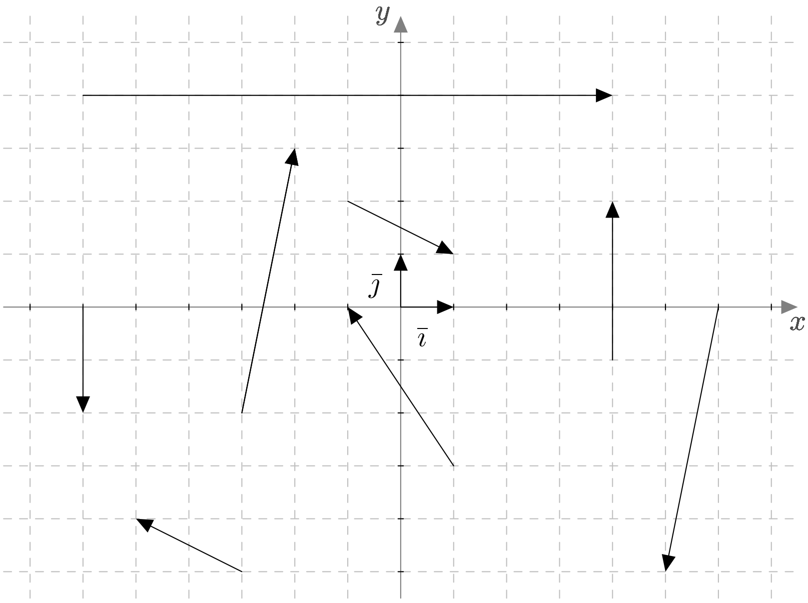
**Vastavektorit**

**Määritelmä 2.2.6.** Vektori $-1 \cdot \bar{v}$ on vektorin $\bar{v}$ vastavektori, ja sitä merkitään $-\bar{v}$.




Kuva 2.6: Vektori $\bar{v}$ ja sen vastavektori $-\bar{v}$.

**Tehtävä 2.2.7.** Tarkastellaan alla olevaa kuvaa 2.7.




Kuva 2.7: Vektoreita

(a) Ilmoita kaikki kuvan vektorit vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(b) Mitkä vektoreista ovat toistensa vastavektoreita?

Tutkitaan seuraavaksi vektorien suuntia. Esimerkiksi kuvasta 2.5 huomataan, että vektori $2\bar{v}$ kulkee samaan suuntaan vektorin $\bar{v}$ kanssa. Nämä vektorit ovat siis **samansuuntaisia**. Lisäksi kuvasta 2.6 huomataan, että vektori $-\bar{a}$ kulkee vastakkaiseen suuntaan kuin vektori $\bar{a}$. Tällaisia vektoreita kutsutaan **vastakkaissuuntaisiksi** vektoreiksi.

**Tehtävä 2.2.8.** ...

(a) Millaisella luvulla vektoria tulee kertoa, jotta sen suunta muuttuu vastakkaiseksi?

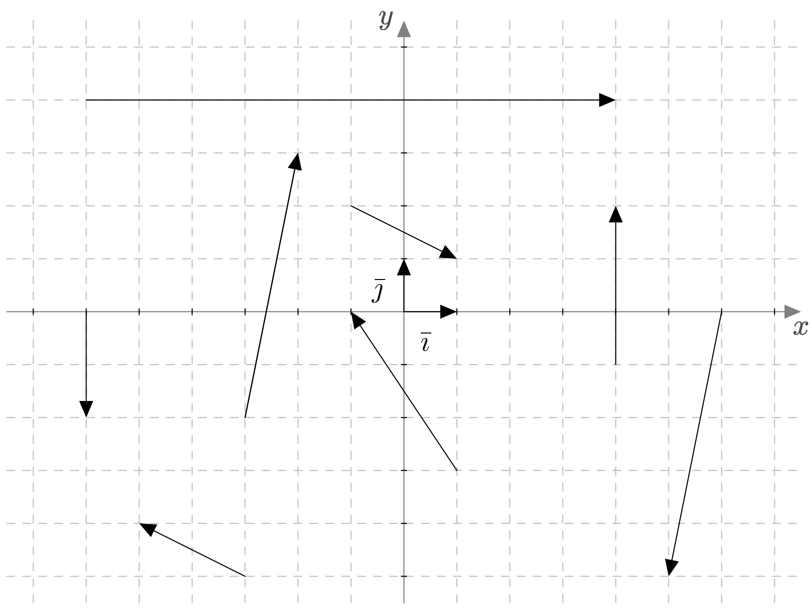
(b) Millaisella luvulla kertominen säilyttää vektorin suunnan?

**Yhdensuuntaisuus**

**Määritelmä 2.2.9.** Vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat **yhdensuuntaiset**, jos $\bar{v} = r\bar{w}$ jollakin reaaliluvulla $r$.

Toisin sanoen vektorit ovat yhdensuuntaiset, jos ne ovat joko saman- tai vastakkaisuuntaiset.

**Tehtävä 2.2.10.** Tarkastellaan alla olevaa kuvaa 2.8




Kuva 2.8: Vektoreita.

(a) Mitkä kuvan vektoreista ovat samansuuntaisia?

(b) Mitkä kuvan vektoreista ovat vastakkaissuuntaisia?

(c) Mitkä kuvan vektoreista ei ole yhdensuuntainen minkään muun kuvan vektorin kanssa?

**Tehtävä 2.2.11.** Tutkitaan vektoreita $\bar{a} = 2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$, $\bar{b} = -3\bar{\imath} + \bar{\jmath}$ ja $\bar{c} = \bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$.

(a) Piirrä koordinaatistoon vektori $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$.

(b) Mitä huomaat?

Vektoria, joka alkaa ja päättyy samaan pisteeseen, sanotaan **nollavektoriksi**. Sen komponenttiesitys on muotoa $0 \cdot \bar{\imath} + 0 \cdot \bar{\jmath}$. Jos mitä tahansa vektoria $\bar{v} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$ kerrotaan luvulla nolla, saadaan nollavektori, sillä

$$0 \cdot \bar{v} = 0 \cdot (x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}) = (0 \cdot x)\bar{\imath} + (0 \cdot y)\bar{\jmath} = 0 \cdot \bar{\imath} + 0 \cdot \bar{\jmath} = 0.$$

**Määritelmä 2.2.12.** Vektoria $0 \cdot \bar{\imath} + 0 \cdot \bar{\jmath} = 0$ sanotaan **nollavektoriksi**.

**Nollavektori**

## 2.3 Erotus

**Tehtävä 2.3.1.** Tutkitaan vektoreita $\bar{v} = -2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = 2\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}$.

(a) Määritä summavektori $\bar{v} + \bar{w}$ laskemalla yhteen vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ komponenteittain.

(b) Piirrä vektori $\bar{v} + \bar{w}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.

Edellisen tehtävän vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat toistensa vastavektoreita. Näin ollen voidaan merkitä $\bar{w} = -\bar{v}$, ja summavektori $\bar{v}+\bar{w}$ saadaan muotoon $\bar{v}+\bar{w} = \bar{v}+(-\bar{v}) = \bar{v} - \bar{v} = 0$.

**Tehtävä 2.3.2.** Tutkitaan vektoreita $\bar{v} =$ ja $\bar{w} =$

(a) Piirrä vektori $\bar{v}$ koordinaatistoon.

(b) Muodosta vektorin $\bar{w}$ vastavektori $-\bar{w}$.

(c) Piirrä vektori $-\bar{w}$ koordinaatistoon siten, että että se alkaa vektorin $\bar{v}$ kärjestä.

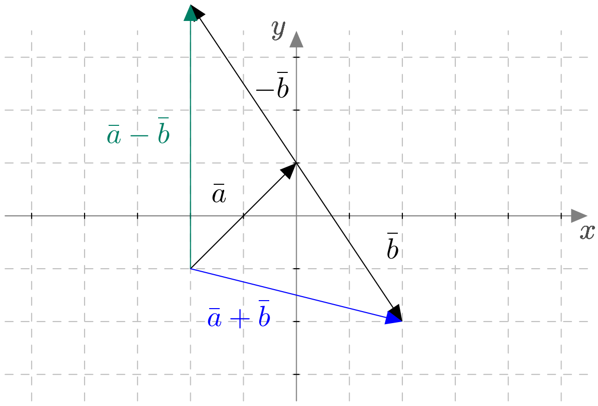
(d) Piirrä vektori, joka alkaa vektorin $\bar{v}$ alkupisteestä ja päättyy vektorin $-\bar{w}$ kärkeen. Merkitse tätä vektoria $\bar{v} + (-\bar{w})$.

(e) Ilmoita vektori $\bar{v} + (-\bar{w})$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

Vektori $\bar{v} + (-\bar{w}) = \bar{v} - \bar{w}$. Se on siis vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ erotusvektori.

**Määritelmä 2.3.3.** Vektorien $\bar{v} = x_1\bar{\imath} + y_1\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = x_2\bar{\imath} + y_2\bar{\jmath}$ **erotusvektori** on vektori $\bar{v} - \bar{w} = (x_1 - x_2)\bar{\imath} + (y_1 - y_2)\bar{\jmath}$.

**Erotusvektori**



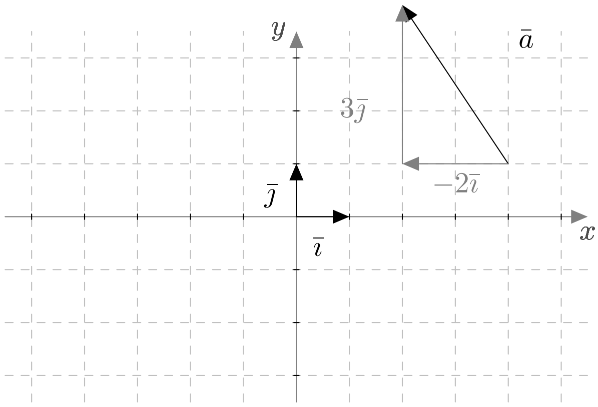

Kuva 2.9: Vektorit $\bar{a}+\bar{b}$ ja $\bar{a}-\bar{b}$.

**Tehtävä 2.3.4.** Tutkitaan vektoreita $\bar{a}$ ja $\bar{b}$.

(a) Määritä vektorin $\bar{b}$ vastavektori $-\bar{b}$.
(b) Piirrä vektori $\bar{a}-\bar{b}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{a}$ ja $-\bar{b}$ avulla.
(c) Määritä koordinaatistosta vektorin $\bar{a}-\bar{b}$ komponenttiesitys.
(d) Tarkista vastauksesi määrittämällä vektori $\bar{a}-\bar{b}$ suoraan vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ komponenttiesitysten avulla.

## 2.4 Vektorin pituus

Vektorin pituus saadaan laskettua Pythagoraan lauseen avulla.




Kuva 2.10: Vektorin $\bar{a}$ pituus.

Esimerkiksi vektorin $\bar{a}=-2\bar{\imath}+3\bar{\jmath}$ pituus saadaan yhtälöstä

$$|\bar{a}|^2 = 2^2 + 3^2.$$

Vektorin $\bar{a}$ pituudeksi saadaan $|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

**Tehtävä 2.4.1.** Tutkitaan vektoria $\bar{b} = 3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$.

(a) Piirrä vektori $\bar{b}$ koordinaatistoon.

(b) Laske vektorin $\bar{b}$ pituus $|\bar{b}|$ Pythagoraan lauseen avulla.

(c) Kuinka moneen osaan vektori $\bar{b}$ pitäisi jakaa, jotta yhden osan pituus olisi 1?

**Tehtävä 2.4.2.** Millaisella luvulla vektoria tulee kertoa, jotta sen pituus kasvaa? Entä lyhenee?

**Tehtävä 2.4.3.** Laske vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ pituudet.

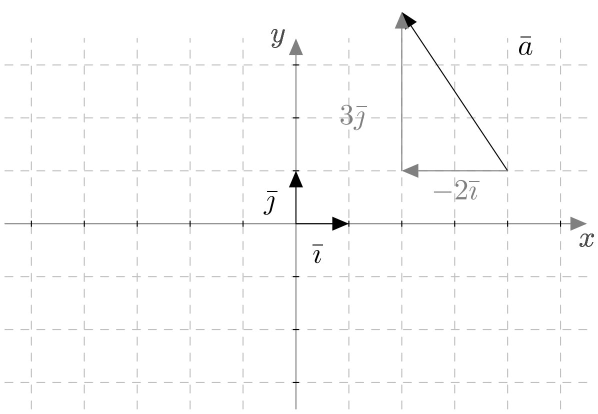
**Määritelmä 2.4.4.** Vektoria, jonka pituus on 1, sanotaan **yksikkövektoriksi**.

**Yksikkövektori**

Komponenttivektorit $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ ovat siis yksikkövektoreita.

Vektorin $\bar{v} = 8\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}$ pituudeksi saadaan $|\bar{v}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$. Sen kanssa samansuuntainen yksikkövektori saadaan ottamalla vektorista $\bar{v}$ kymmenesosa eli

$$\frac{1}{10}\bar{v} = \frac{1}{10}(8\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}) = 0{,}8\bar{\imath} + 0{,}6\bar{\jmath}$$




Kuva 2.11: Vektorin $\bar{v}$ pituus. VÄÄRÄ KUVA

**Tehtävä 2.4.5.** Jatkoa tehtävään 2.4.1. Tutkitaan edelleen vektoria $\bar{b} = 3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$.

(a) Määritä vektorin $\bar{b}$ kanssa samansuuntainen yksikkövektori eli vektori, joka pituus on 1. Piirrä se koordinaatistoon.

(b) Määritä vektorin $\bar{b}$ kanssa samansuuntainen vektori, jonka pituus on 10. Piirrä se koordinaatistoon.

(c) Määritä vektorin $\bar{b}$ kanssa vastakkaissuuntainen yksikkövektori. Piirrä se koordinaatistoon.

**Samat vektorit (toinen määritelmä)**

**Määritelmä 2.4.6.** Kaksi vektoria ovat samat, jos ne ovat saman suuntaiset ja yhtä pitkät.

## 2.5 Vektorien välinen kulma

pienempi kulma

cosinilauseen kertaus

pistetulo

pistetulon graafinen tulkinta

**Tehtävä 2.5.1.** Tutkitaan vektoreita ...

(a) Laske pistetulot ...

(b) Mitkä vektoreista ovat kohtisuorassa toisiaan vasten?

(c) Tarkista edellisen kohdan vastauksesi piirtämällä vektorit koordinaatistoon.