Vektorit

Juulia Lahdenperä ja Lotta Oinonen

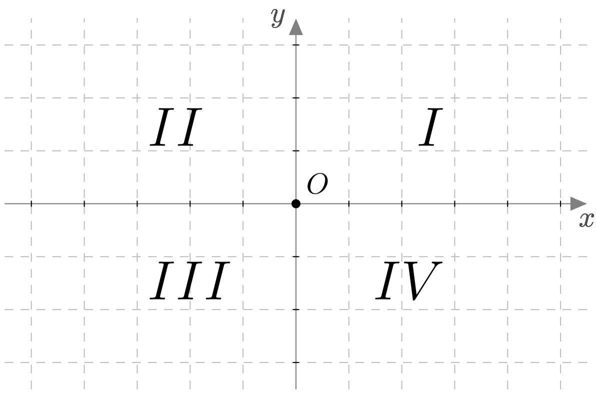
30. lokakuuta 2015

Sisältö

1 Vektori

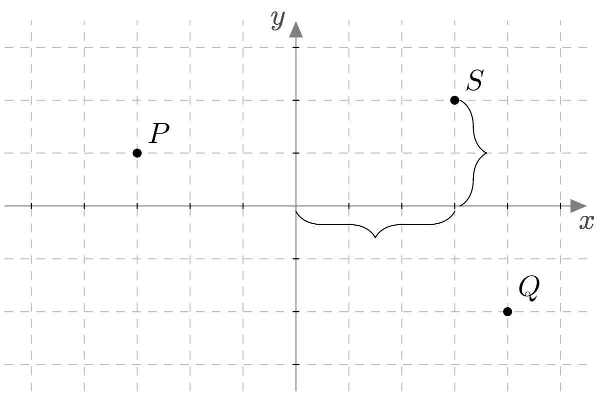
1.1 xy-koordinaatisto

Kuvassa 1.1 on koordinaatisto, johon on piirretty x- ja y-akselit. Koordinaattiakselit jakavat tason neljään osaan. Osat nimetään yleensä järjestysnumeroilla I, II, III ja IV kuvan 1.1 mukaisesti. Koordinaattiakselien leikkauskohtaa kutsutaan **origoksi**. Origoa merkitään yleensä kirjaimella O.



Kuva 1.1: Koordinaatiston neljännekset.

Tehtävä 1.1.1. Tutki alla olevaa kuvaa 1.2.



Kuva 1.2:

(a) Kuinka monta askelta pitää siirtyä x-akselin suunnassa, jotta päästään origosta pisteeseen P?

(b) Kuinka monta askelta pitää siirtyä y-akselin suunnassa, jotta päästään origosta pisteeseen P?

(c) Kuinka monta askelta pitää siirtyä x-akselin suunnassa, jotta päästään origosta pisteeseen Q?

(d) Kuinka monta askelta pitää siirtyä y-akselin suunnassa, jotta päästään origosta pisteeseen Q?

Tason piste ilmoitetaan lukuparina (x, y), missä ensimmäinen luku x ilmoittaa x-akselin suuntaisten ja toinen luku y ilmoittaa y-akselin suuntaisten askelten lukumäärän. Näitä lukuja kutsutaan **pisteen koordinaateiksi**. Kuvan 1.2 pisteeseen S päästään siirtymällä origosta kolme askelta x-akselin suuntaan ja kaksi askelta y-akselin suuntaan. Näin ollen pistettä S merkitään $S = (3, 2)$. Koordinaattien avulla kaikki tason pisteet voidaan määrittää yksikäsitteisesti.

Tehtävä 1.1.2. Valitse jokaiselta koordinaatiston neljänneksellä jokin piste ja ilmoita sen koordinaatit. Miten eri neljännekset vaikuttavat x- ja y-koordinaattien koordinaattien etumerkkeihin?

Tehtävä 1.1.3. ...

(a) Piirrä koordinaatisto ja merkitse siihen pisteet $(1, 2)$, $(1, -4)$ ja $(1, 3)$.

(b) Merkitse piirtämääsi koordinaatistoon kolme uutta pistettä, jotka ovat muotoa $(1, y)$ jollakin kokonaisluvulla y.

(c) Merkitse piirtämääsi koordinaatistoon kaikki sellaiset tason pisteet, jotka ovat muotoa $(1, y)$ jollakin kokonaisluvulla y.

Tehtävä 1.1.4. ...

(a) Piirrä koordinaatisto ja merkitse siihen pisteet $(2, 2)$, $(3, 3)$ ja $(-2, -2)$.

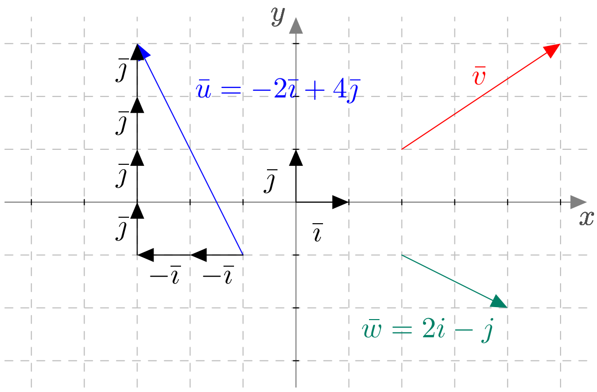
(b) Merkitse piirtämääsi koordinaatistoon kolme uutta pistettä, jotka ovat muotoa (x, x) jollakin reaaliluvulla x.

(c) Merkitse piirtämääsi koordinaatistoon kaikki sellaiset tason pisteet, jotka ovat muotoa (x, x) jollakin reaaliluvulla x.

Tehtävä 1.1.5. Piirrä koordinaatisto ja merkitse siihen kaikki sellaiset tason pisteet, jotka ovat muotoa $(x, 2/3)$ jollakin raaliluvulla x.

1.2 Vektorin muodostaminen

Tarkastellaan seuraavaksi kuvaa 1.3. Kuvassa on nuolet $\bar{u}, \bar{v}$ ja $\bar{w}$, yhden x-akselin suuntaisen askeleen pituinen nuoli $\bar{\imath}$, sekä yhden y-akselin suuntaisen askeleen pituinen nuoli $\bar{\jmath}$.



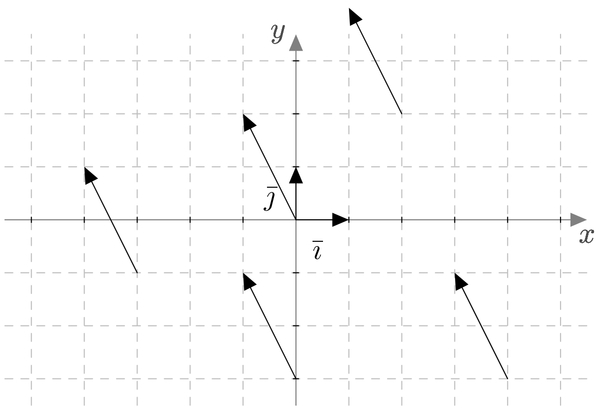
Kuva 1.3: ...

Huomataan, että nuolen $\bar{u}$ päästä on sen kärkeen kaksi x-akselin suuntaista askelta negatiiviseen suuntaan ja neljä y-akselin suuntaista askelta positiiviseen suuntaan. Tällainen nuoli $\bar{u}$ voidaan ilmoittaa nuolien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla muodossa $\bar{u} = -2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$.

Tehtävä 1.2.1. Ilmoita kuvassa 1.3 oleva nuoli $\bar{v}$ nuolien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

Koordinaatistossa olevia nuolia kutsutaan **vektoreiksi**. Edellisen kuvan nuoli $\bar{v}$ on siis vektori $\bar{v}$, joka voidaan ilmaista vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Vektorit $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ ovat erityisiä, sillä ne ovat koordinaattiakselien suuntaisia ja yhden askeleen pituisia.

Tehtävä 1.2.2. Tarkastellaan seuraavaa kuvaa 1.4.



Kuva 1.4: Vektoreita

Ilmoita kaikki kuvassa olevat vektorit vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Mitä huomaat?

Määritelmä 1.2.3. Kaksi vektoria ovat **samat**, jos ne voidaan esittää samalla tavalla vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

Samat vektorit

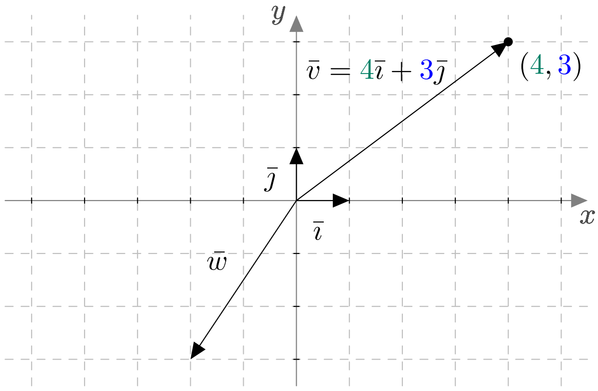
Vektorien samuus tarkoittaa siis sitä, että ne ovat saman pituisia ja osoittavat samaan suuntaan − niiden paikalla koordinaatistossa ei ole merkitystä.

Tehtävä 1.2.4. Tarkastellaan edelleen kuvaa 1.4. Vertaa origosta lähtevän vektorin komponenttiesitystä sen kärkipisteen koordinaatteihin. Mitä huomaat?

Paikkavektori

Määritelmä 1.2.5. Vektori, joka lähtee origosta ja jonka kärki on pisteessä P, on pisteen P paikkavektori.

Kuvassa 1.5 oleva vektori $\bar{v} = 4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ on siis pisteen $(4, 3)$ paikkavektori.



Kuva 1.5: Pisteen $(4, 3)$ paikkavektori $\bar{v}$.

Tehtävä 1.2.6. Ilmoita kuvan 1.5 vektori $\bar{w}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Minkä pisteen paikkavektori se on?

Tehtävä 1.2.7. Piirrä vektorit $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ koordinaatistoon siten, että ne lähtevät origosta.

(a) Minkä pisteiden paikkavektoreita ne ovat?

(b) Mieti, miksi kaikki tason vektorit on mahdollista ilmaista vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

1.3 Kahden pisteen välinen vektori

Tehtävä 1.3.1. ...

(a) Piirrä kaksi pistettä koordinaatiston ensimmäiselle neljännekselle. Merkitse pisteiden koordinaatit.

(b) Piirrä pisteiden väliin vektori $\bar{v}$.

(c) Ilmoita vektori $\bar{v}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

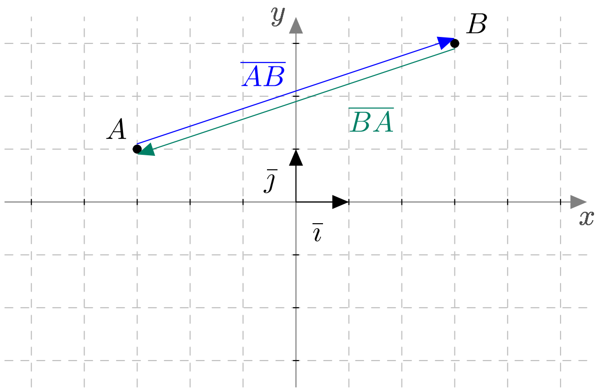
Tehtävä 1.3.2. ...

(a) Piirrä kaksi pistettä koordinaatiston toiselle, kolmannelle tai neljännelle neljännekselle. Merkitse pisteiden koordinaatit.

(b) Piirrä pisteiden väliin vektori $\bar{v}$.

(c) Ilmoita vektori $\bar{v}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

Vektoria pisteestä A pisteeseen B kulkevaa vektoria merkitään $\overline{AB}$, ja pisteestä B pisteeseen A kulkevaa vektoria merkitään $\overline{BA}$.



Kuva 1.6: Kahden pisteen väliset vektorit.

Tehtävä 1.3.3. ...

(a) Piirrä koordinaatistoon pisteet A ja B. Merkitse niiden koordinaatit.

(b) Ilmoita vektori $\overline{AB}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(c) Ilmoita vektori $\overline{BA}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

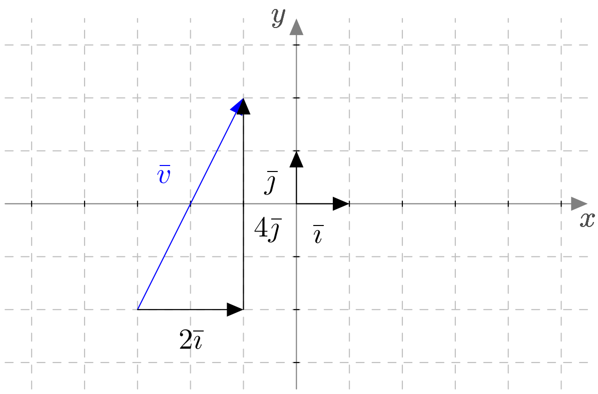
(d) Vertaa b- ja c-kohdan tuloksia. Mitä huomaat?

Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{BA}$ ovat eri vektorit, sillä niitä ei voida esittää samalla tavalla vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Vektorien suunnalla on siis merkitystä. Vektorien suuntiin palataan kappaleessa 2.2.

2 Vektorien laskutoimituksia

2.1 Summa

Edellisessä kappaleessa opittiin muodostamaan vektoreita x- ja y-akselien suuntaisten yhden askeleen pituisten vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla. Esimerkiksi kuvan 2.1 vektori $\bar{v}$ saadaan laskemalla yhteen vektorit $2\bar{\imath}$ ja $4\bar{\jmath}$. Seuraavaksi tutkitaan, kuinka lasketaan yhteen mitä tahansa vektoreita.



Kuva 2.1: Vektori $\bar{v} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$.

Tehtävä 2.1.1. Tutkitaan vektoreita $\bar{v} = 2i + 2j$ ja $\bar{w} = i + 3j$.

(a) Piirrä vektori $\bar{v}$ koordinaatistoon.

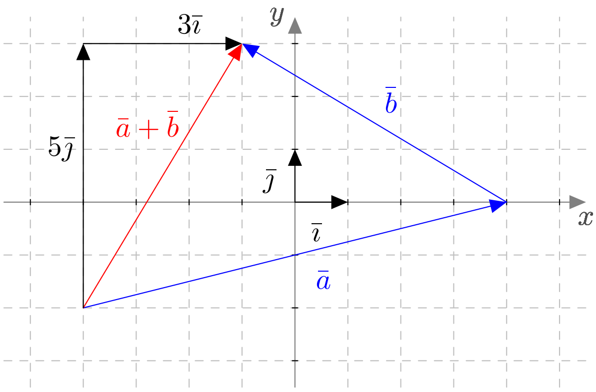
(b) Piirrä vektori $\bar{w}$ koordinaatistoon siten, että se alkaa vektorin $\bar{v}$ kärkipisteestä.

(c) Piirrä vektori, joka alkaa vektorin $\bar{v}$ alkupisteestä ja päättyy vektorin $\bar{w}$ kärkipisteeseen. Merkitse tätä vektoria $\bar{v} + \bar{w}$.

(d) Ilmoita vektori $\bar{v} + \bar{w}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(e) Miten vektorin $\bar{v} + \bar{w}$ komponentit voitaisiin muodostaa vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ komponenttien avulla?

Tarkastellaan seuraavaa kuvaa 2.2.



Kuva 2.2: Vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ summa.

Summavektori $\bar{a}+\bar{b}$ lähtee vektorin $\bar{a}$ kanssa samasta pisteestä ja päättyy vektorin $\bar{b}$ kärkeen. Summavektori $\bar{a}+\bar{b}$ saadaan suoraan laskemalla vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ yhteen komponenteittain:

$$\begin{aligned}\bar{a}+\bar{b} &= (8\bar{\imath}+2\bar{\jmath}) + (-5\bar{\imath}+3\bar{\jmath}) \\ &= 8\bar{\imath}+2\bar{\jmath}-5\bar{\imath}+3\bar{\jmath} \\ &= 8\bar{\imath}-5\bar{\imath}+2\bar{\jmath}+3\bar{\jmath} \\ &= 3\bar{\imath}+5\bar{\jmath}.\end{aligned}$$

Määritelmä 2.1.2. Vektorien $\bar{v} = x_1\bar{\imath}+y_1\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = x_2\bar{\imath}+y_2\bar{\jmath}$ **summavektori** on vektori $\bar{v}+\bar{w} = (x_1+x_2)\bar{\imath}+(y_1+y_2)\bar{\jmath}$.

Summavektori

Tehtävä 2.1.3. Tutkitaan vektoreita $\bar{v} = -2i + j$ ja $\bar{w} = 4i + 4j$.

(a) Piirrä summavektori $\bar{v}+\bar{w}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.

(b) Ilmoita vektori $\bar{v}+\bar{w}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(c) Tarkista tuloksesi laskemalla yhteen vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ komponenteittain.

Tehtävä 2.1.4. Tutkitaan vektoreita $\bar{u} = i + 2\bar{\jmath}$, $\bar{v} = -3i + j$ ja $\bar{w} = 3i + -5j$.

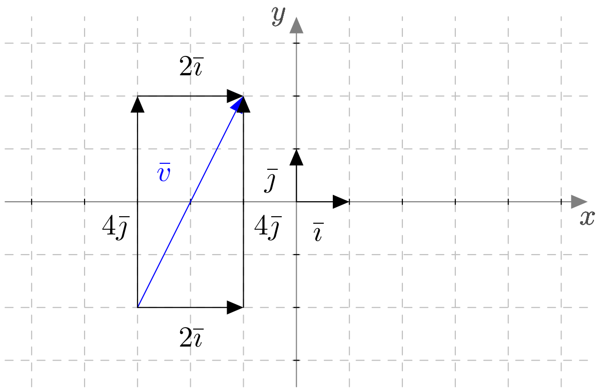
(a) Piirrä vektori $\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{u}, \bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.

(b) Piirrä vektori $\bar{v}+\bar{u}+\bar{w}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{u}, \bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.

(c) Piirrä vektori $\bar{w}+\bar{u}+\bar{v}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{u}, \bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.

(d) Mitä huomaat?

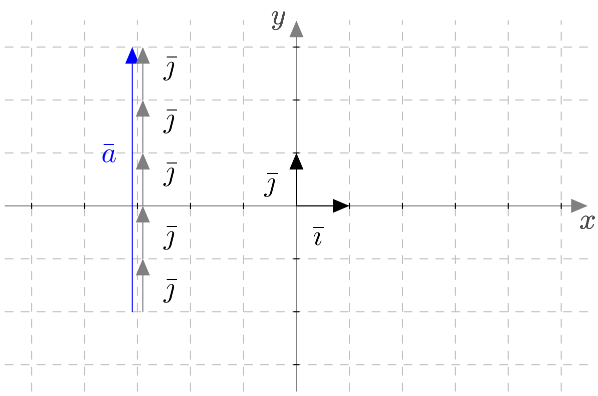
Edellisen tehtävän tulos tarkoittaa sitä, että vektorien yhteenlaskun järjestyksellä ei ole merkitystä. Vektorien yhteenlasku on siis **vaihdannainen** operaatio. Tämä näkyy selvästi kuvasta 2.3: vektori $4\bar{\jmath} + 2\bar{\imath}$ on sama kuin vektori $2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$.



Kuva 2.3: Vektori $\bar{v} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} = 4\bar{\jmath} + 2\bar{\imath}$.

2.2 Vektorin kertominen reaaliluvulla

Tarkastellaan seuraavaa kuvaa 2.4. Kuvassa oleva vektori $\bar{a}$ voidaan ilmaista vektorin $\bar{\jmath}$ avulla muodossa $5\bar{\jmath}$. Vektori $\bar{a}$ saadaan siis kertomalla vektoria $\bar{\jmath}$ luvulla 5.



Kuva 2.4: Vektori $\bar{a} = 5\bar{\jmath}$.

Tehtävä 2.2.1. Tutkitaan vektoria $\bar{a} = -\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$.

(a) Piirrä vektori $\bar{a}$ koordinaatistoon.

(b) Piirrä koordinaatistoon myös vektorit $2\bar{a}$, $3\bar{a}$ ja $5\bar{a}$.

Tehtävä 2.2.2. ...

(a) Piirrä koordinaatistoon vektorit $\bar{a} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$ ja $\bar{b} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$.

(b) Miten voisit ilmaista vektorin $\bar{b}$ vektorin $\bar{a}$ avulla?

Tehtävä 2.2.3. ...

(a) Piirrä koordinaatistoon vektorit $\bar{a} = \bar{\imath} + \bar{\jmath}$ ja $3\bar{a}$.

(b) Ilmoita vektori $3\bar{a}$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

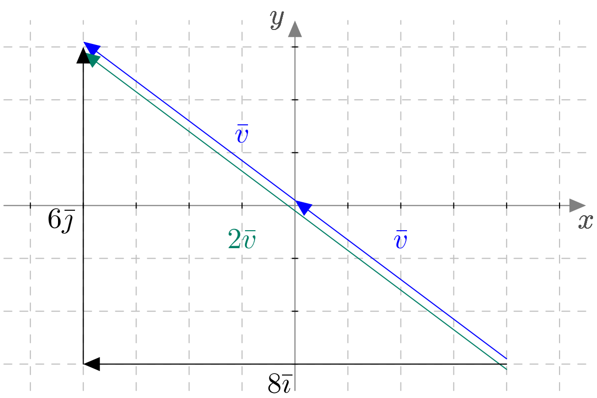
(c) Vertaa vektorien $\bar{a}$ ja $3\bar{a}$ komponenttiesityksiä toisiinsa. Mitä huomaat?

Määritelmä 2.2.4. Kun vektoria $\bar{v} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$ kerrotaan reaaliluvulla r, saadaan vektori $r\bar{v} = r(x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}) = (rx)\bar{\imath} + (ry)\bar{\jmath}$.

Vektorin kertominen reaaliluvulla

Kun siis esimerkiksi vektoria $\bar{v} = -4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ kerrotaan luvulla 2, saadaan vektori

$$2\bar{v} = 2 \cdot (-4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}) = 2 \cdot (-4)\bar{\imath} + 2 \cdot 3\bar{\jmath} = -8\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}.$$



Kuva 2.5: Vektorin $\bar{v} = -4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ kertominen luvulla 2.

Tehtävä 2.2.5. Tutkitaan vektoria $\bar{a} = -3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$.

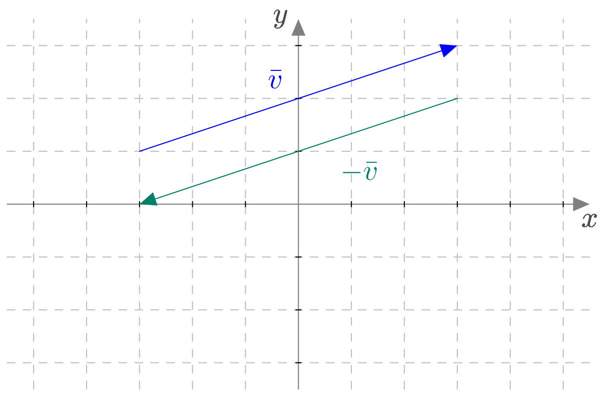
(a) Piirrä vektori $\bar{a}$ koordinaatistoon.

(b) Laske vektori $-1 \cdot \bar{a}$ ja piirrä se koordinaatistoon.

(c) Vertaa piirtämiäsi vektoreita sekä niiden komponenttiesityksiä keskenään. Mitä huomaat?

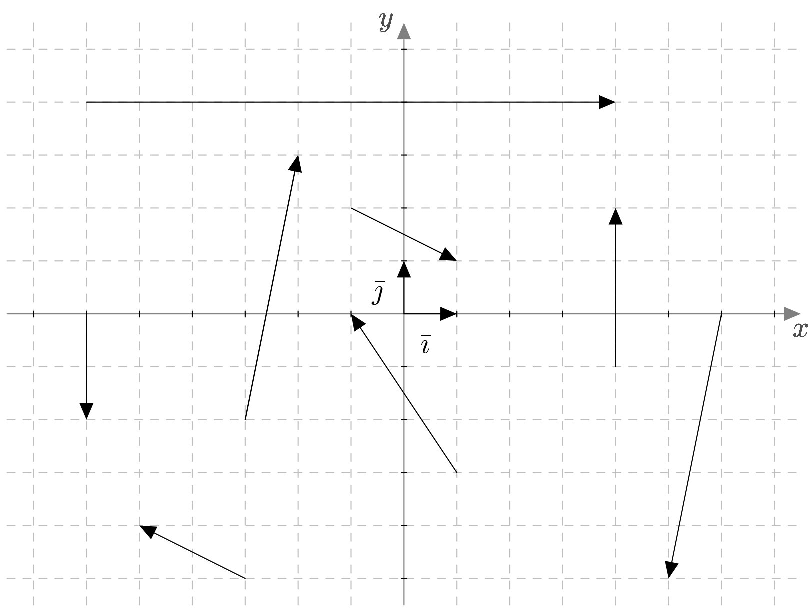
Määritelmä 2.2.6. Vektori $-1 \cdot \bar{v}$ on vektorin $\bar{v}$ vastavektori, ja sitä merkitään $-\bar{v}$.

Vastavektorit



Kuva 2.6: Vektori $\bar{v}$ ja sen vastavektori $-\bar{v}$.

Tehtävä 2.2.7. Tarkastellaan alla olevaa kuvaa 2.7.



Kuva 2.7: Vektoreita

(a) Ilmoita kaikki kuvan vektorit vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

(b) Mitkä vektoreista ovat toistensa vastavektoreita?

Tutkitaan seuraavaksi vektorien suuntia. Esimerkiksi kuvasta 2.5 huomataan, että vektori $2\bar{v}$ kulkee samaan suuntaan vektorin $\bar{v}$ kanssa. Nämä vektorit ovat siis **samansuuntaisia**. Lisäksi kuvasta 2.6 huomataan, että vektori $-\bar{a}$ kulkee vastakkaiseen suuntaan kuin vektori $\bar{a}$. Tällaisia vektoreita kutsutaan **vastakkaissuuntaisiksi** vektoreiksi.

Tehtävä 2.2.8. ...

(a) Millaisella luvulla vektoria tulee kertoa, jotta sen suunta muuttuu vastakkaiseksi?

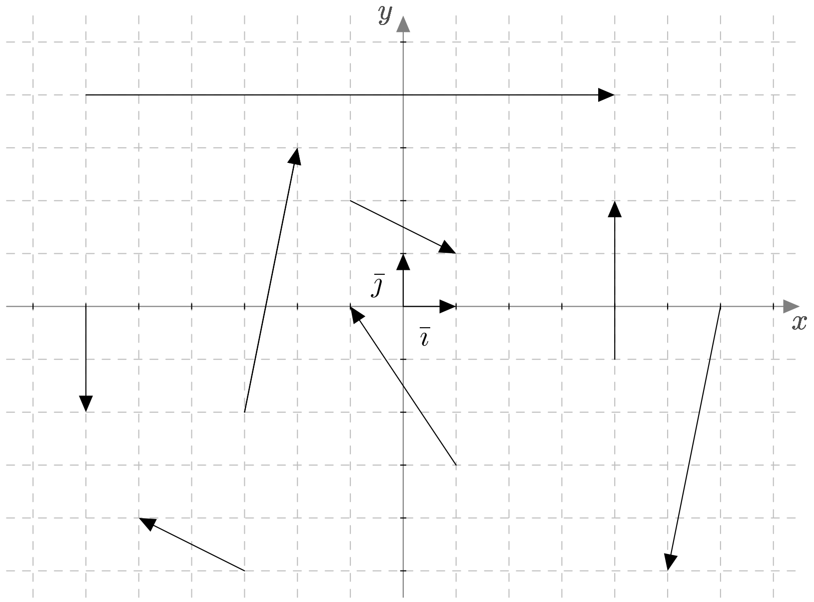
(b) Millaisella luvulla kertominen säilyttää vektorin suunnan?

Yhdensuuntaisuus

Määritelmä 2.2.9. Vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat **yhdensuuntaiset**, jos $\bar{v} = r\bar{w}$ jollakin reaaliluvulla r.

Toisin sanoen vektorit ovat yhdensuuntaiset, jos ne ovat joko saman- tai vastakkaisuuntaiset.

Tehtävä 2.2.10. Tarkastellaan alla olevaa kuvaa 2.8



Kuva 2.8: Vektoreita.

(a) Mitkä kuvan vektoreista ovat samansuuntaisia?

(b) Mitkä kuvan vektoreista ovat vastakkaissuuntaisia?

(c) Mitkä kuvan vektoreista ei ole yhdensuuntainen minkään muun kuvan vektorin kanssa?

Tehtävä 2.2.11. Tutkitaan vektoreita $\bar{a} = 2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$, $\bar{b} = -3\bar{\imath} + \bar{\jmath}$ ja $\bar{c} = \bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$.

(a) Piirrä koordinaatistoon vektori $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$.

(b) Mitä huomaat?

Vektoria, joka alkaa ja päättyy samaan pisteeseen, sanotaan **nollavektoriksi**. Sen komponenttiesitys on muotoa $0 \cdot \bar{\imath} + 0 \cdot \bar{\jmath}$. Jos mitä tahansa vektoria $\bar{v} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$ kerrotaan luvulla nolla, saadaan nollavektori, sillä

$$0 \cdot \bar{v} = 0 \cdot (x\bar{\imath} + y\bar{\jmath}) = (0 \cdot x)\bar{\imath} + (0 \cdot y)\bar{\jmath} = 0 \cdot \bar{\imath} + 0 \cdot \bar{\jmath} = 0.$$

Nollavektori

Määritelmä 2.2.12. Vektoria $0 \cdot \bar{\imath} + 0 \cdot \bar{\jmath} = 0$ sanotaan **nollavektoriksi**.

2.3 Erotus

Tehtävä 2.3.1. Tutkitaan vektoreita $\bar{v} = -2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = 2\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}$.

(a) Määritä summavektori $\bar{v} + \bar{w}$ laskemalla yhteen vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ komponenteittain.

(b) Piirrä vektori $\bar{v} + \bar{w}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ avulla.

Edellisen tehtävän vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat toistensa vastavektoreita. Näin ollen voidaan merkitä $\bar{w} = -\bar{v}$, ja summavektori $\bar{v}+\bar{w}$ saadaan muotoon $\bar{v}+\bar{w} = \bar{v}+(-\bar{v}) = \bar{v} - \bar{v} = 0$.

Tehtävä 2.3.2. Tutkitaan vektoreita $\bar{v} =$ ja $\bar{w} =$

(a) Piirrä vektori $\bar{v}$ koordinaatistoon.

(b) Muodosta vektorin $\bar{w}$ vastavektori $-\bar{w}$.

(c) Piirrä vektori $-\bar{w}$ koordinaatistoon siten, että että se alkaa vektorin $\bar{v}$ kärjestä.

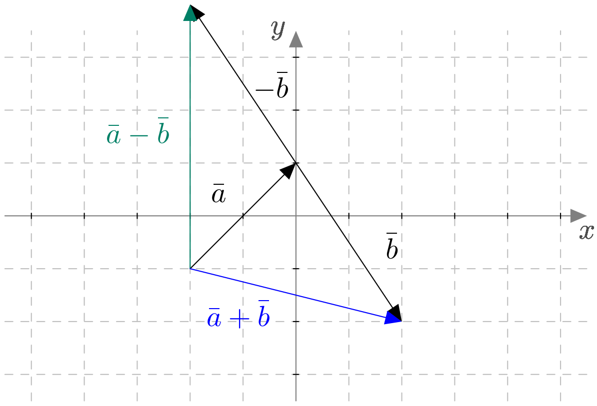
(d) Piirrä vektori, joka alkaa vektorin $\bar{v}$ alkupisteestä ja päättyy vektorin $-\bar{w}$ kärkeen. Merkitse tätä vektoria $\bar{v} + (-\bar{w})$.

(e) Ilmoita vektori $\bar{v} + (-\bar{w})$ vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ avulla.

Vektori $\bar{v} + (-\bar{w}) = \bar{v} - \bar{w}$. Se on siis vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ erotusvektori.

Erotusvektori

Määritelmä 2.3.3. Vektorien $\bar{v} = x_1\bar{\imath} + y_1\bar{\jmath}$ ja $\bar{w} = x_2\bar{\imath} + y_2\bar{\jmath}$ **erotusvektori** on vektori $\bar{v} - \bar{w} = (x_1 - x_2)\bar{\imath} + (y_1 - y_2)\bar{\jmath}$.



Kuva 2.9: Vektorit $\bar{a}+\bar{b}$ ja $\bar{a}-\bar{b}$.

Tehtävä 2.3.4. Tutkitaan vektoreita $\bar{a}$ ja $\bar{b}$.

(a) Määritä vektorin $\bar{b}$ vastavektori $-\bar{b}$.

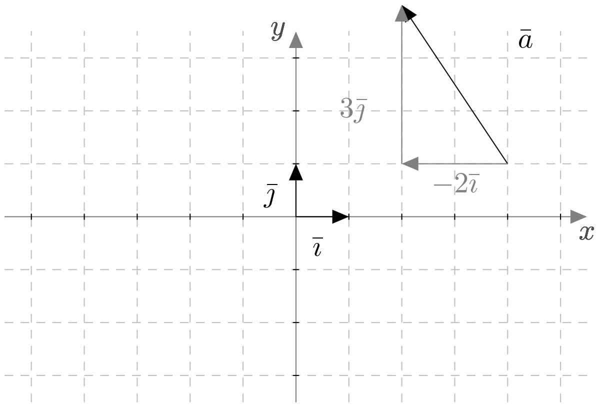
(b) Piirrä vektori $\bar{a}-\bar{b}$ koordinaatistoon vektorien $\bar{a}$ ja $-\bar{b}$ avulla.

(c) Määritä koordinaatistosta vektorin $\bar{a}-\bar{b}$ komponenttiesitys.

(d) Tarkista vastauksesi määrittämällä vektori $\bar{a}-\bar{b}$ suoraan vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ komponenttiesitysten avulla.

2.4 Vektorin pituus

Vektorin pituus saadaan laskettua Pythagoraan lauseen avulla.



Kuva 2.10: Vektorin $\bar{a}$ pituus.

Esimerkiksi vektorin $\bar{a}=-2\bar{i}+3\bar{j}$ pituus saadaan yhtälöstä

$$|\bar{a}|^2 = 2^2 + 3^2.$$

Vektorin $\bar{a}$ pituudeksi saadaan $|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

Tehtävä 2.4.1. Tutkitaan vektoria $\bar{b} = 3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$.

(a) Piirrä vektori $\bar{b}$ koordinaatistoon.

(b) Laske vektorin $\bar{b}$ pituus $|\bar{b}|$ Pythagoraan lauseen avulla.

(c) Kuinka moneen osaan vektori $\bar{b}$ pitäisi jakaa, jotta yhden osan pituus olisi 1?

Tehtävä 2.4.2. Millaisella luvulla vektoria tulee kertoa, jotta sen pituus kasvaa? Entä lyhenee?

Tehtävä 2.4.3. Laske vektorien $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ pituudet.

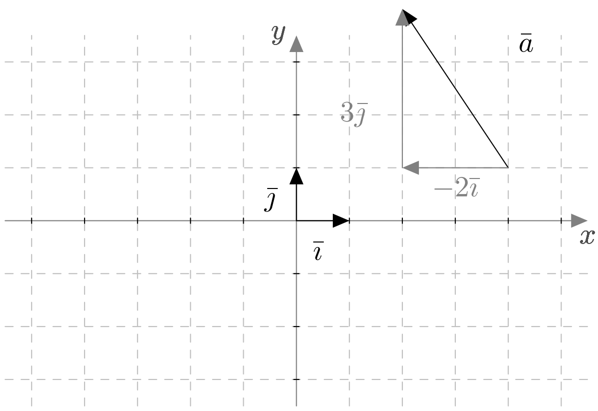
Yksikkövektori

Määritelmä 2.4.4. Vektoria, jonka pituus on 1, sanotaan **yksikkövektoriksi**.

Komponenttivektorit $\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ ovat siis yksikkövektoreita.

Vektorin $\bar{v} = 8\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}$ pituudeksi saadaan $|\bar{v}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$. Sen kanssa samansuuntainen yksikkövektori saadaan ottamalla vektorista $\bar{v}$ kymmenesosa eli

$$\frac{1}{10}\bar{v} = \frac{1}{10}(8\bar{\imath} + 6\bar{\jmath}) = 0{,}8\bar{\imath} + 0{,}6\bar{\jmath}$$



Kuva 2.11: Vektorin $\bar{v}$ pituus. VÄÄRÄ KUVA

Tehtävä 2.4.5. Jatkoa tehtävään 2.4.1. Tutkitaan edelleen vektoria $\bar{b} = 3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$.

(a) Määritä vektorin $\bar{b}$ kanssa samansuuntainen yksikkövektori eli vektori, joka pituus on 1. Piirrä se koordinaatistoon.

(b) Määritä vektorin $\bar{b}$ kanssa samansuuntainen vektori, jonka pituus on 10. Piirrä se koordinaatistoon.

(c) Määritä vektorin $\bar{b}$ kanssa vastakkaissuuntainen yksikkövektori. Piirrä se koordinaatistoon.

Määritelmä 2.4.6. Kaksi vektoria ovat samat, jos ne ovat saman suuntaiset ja yhtä pitkät.

Samat vektorit (toinen määritelmä)