

# Vektorit

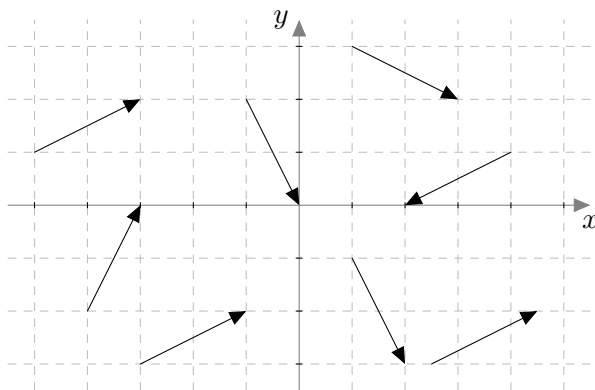
Juulia Lahdenperä ja Lotta Oinonen

11. helmikuuta 2016

# Sisältö

## Tehtäviä 1

**Tehtävä 0.1.** Tarkastele alla olevan kuvan vektoreita. Mitkä niistä ovat vektorin  $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$  kanssa samat vektorit?



**Tehtävä 0.2.** Määritä sellaiset reaalityyppiset luvut  $r$  ja  $s$ , että vektorit  $\vec{v} = -r\vec{i} + 8\vec{j}$  ja  $\vec{w} = 5\vec{i} - 12s\vec{j}$  ovat samat.

**Tehtävä 0.3.** Tutki vektoria  $\vec{AB} = -9\vec{i} + 5\vec{j}$ . Määritä pisteen  $B$  paikkavektori, kun

- (a) piste  $A = (11, 2)$
- (b) piste  $A = (-8, -7)$ .

**Tehtävä 0.4.** Määritä vektori  $\vec{AB}$ , kun

- (a)  $A = (-5, 2)$  ja  $B = (3, 1)$
- (b)  $A = (3, -7)$  ja  $B = (-4, 8)$ .

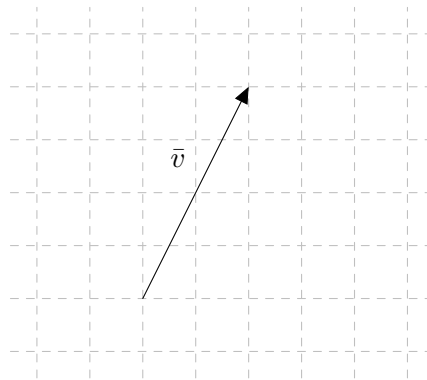
**Tehtävä 0.5.** Tarkastele pisteitä  $A = (-2, 4)$ ,  $B = (3, 1)$  ja  $C = (5, -3)$ . Määritä piste  $D$ , kun

- (a)  $\vec{CD} = \vec{AB}$
- (b)  $\vec{DC} = \vec{AB}$
- (c)  $\vec{AD} = -\vec{AC}$
- (d)  $\vec{BC} = -\vec{AD}$ .

## Tehtäviä 1

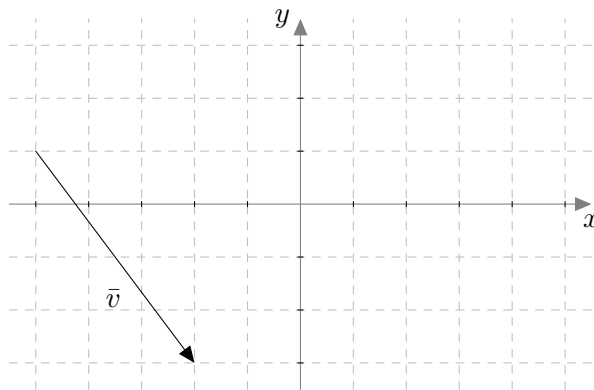
**Tehtävä 0.6.** Tarkastele alla olevassa kuvassa olevaa vektoria  $\vec{v}$ . Piirrä koordinaatisto ja siihen kaksi vektoria, jotka ovat vektorin  $\vec{v}$

- (a) kanssa yhdensuuntaisia
- (b) kanssa samansuuntaisia
- (c) kanssa samat vektorit
- (d) vastavektoreita.



**Tehtävä 0.7.** Tarkastele alla olevan kuvan vektoria  $\vec{v}$ .

- (a) Piirrä eri paikkaan koordinaatistoon vektori  $\vec{w}$ , jolle pätee  $\vec{w} = \vec{v}$ .
- (b) Piirrä vektorin  $\vec{v}$  vastavektori  $-\vec{v}$ .
- (c) Piirrä vektori  $\vec{u}$ , joka on samansuuntainen vektorin  $\vec{v}$  kanssa ja jonka pituus on  $1/4$  vektorin  $\vec{v}$  pituudesta.



**Tehtävä 0.8.** Määritä reaaliluku  $r$  siten, että vektorit  $\vec{v} = (2 + 3r)\vec{i} - 4\vec{j}$  ja  $\vec{w} = 5\vec{i} + (r - 5)\vec{j}$  ovat

- (a) samansuuntaiset
- (b) samat.

**Tehtävä 0.9.** Olkoon  $\bar{v}, \bar{w} \neq \bar{0}$ . Ovatko vektorit  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  yhdensuuntaiset, kun

- (a)  $\bar{v} = 6\bar{w}$
- (b)  $2\bar{v} + 2\bar{w} = 14\bar{w} - \bar{v}$

**Tehtävä 0.10.** Ovatko vektorit  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  yhdensuuntaiset, kun

- (a)  $\bar{a} = 1/4\bar{i} + 3\bar{j}$  ja  $\bar{b} = \bar{i} - 12\bar{j}$
- (b)  $\bar{a} = -10\bar{i} + 2/5\bar{j}$  ja  $\bar{b} = 4/5\bar{i} + 2\bar{j}$

**Tehtävä 0.11.** Olkoon  $A = (-5, 2)$ ,  $B = (-1, -1)$  ja  $C = (2, 1)$ . Tiedetään, että vektorit  $\overline{AB}$  ja  $\overline{CD}$  ovat yhtä pitkät. Määritä piste  $D$ , kun vektorit  $\overline{AB}$  ja  $\overline{CD}$  ovat

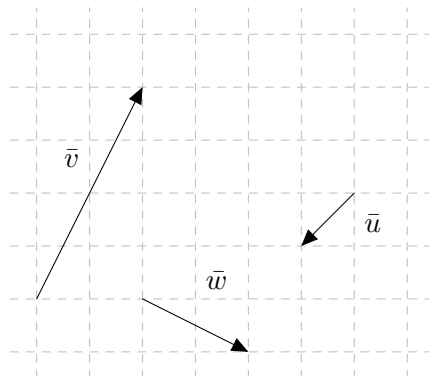
- (a) samansuuntaiset
- (b) vastakkaissuuntaiset.

**Tehtävä 0.12.** Tarkastele pisteen  $A$  paikkavektoria  $\overline{OA} = 2\bar{i} + 4\bar{j}$ .

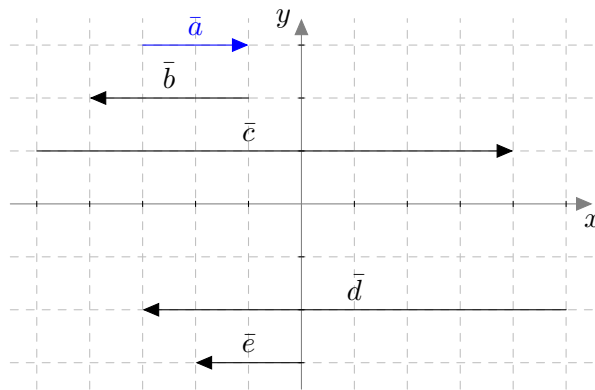
- (a) Vektori  $\overline{BC}$  on samansuuntainen ja kaksi kertaa pidempi kuin vektori  $\overline{OA}$ . Määritä piste  $C$ , kun piste  $B = (-2, -5)$ .
- (b) Vektori  $\overline{DE}$  on yhdensuuntainen puolet lyhyempi kuin vektori  $\overline{OA}$ . Määritä piste  $E$ , kun piste  $D = (2, -1)$ .

**Tehtävä 0.13.** Tarkastele alla olevaa kuvaa. Piirrä vektorien  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  ja  $\bar{u}$  avulla vektorit

- (a)  $\bar{a} = \bar{v} + \bar{w}$
- (b)  $\bar{b} = \bar{v} - \bar{w} - \bar{u}$
- (c)  $\bar{c} = \bar{v} - \bar{w} + \bar{u}$
- (d)  $\bar{d} = \bar{w} - \bar{v}$ .



**Tehtävä 0.14.** Tarkastele alla olevaan kuvaa. Ilmaise vektorit  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  ja  $\vec{e}$  vektorin  $\vec{a}$  avulla.



**Tehtävä 0.15.** Tarkastele vektoreita  $\vec{v} = -2\vec{i} + 7\vec{j}$ ,  $\vec{w} = 6\vec{i} - 10\vec{j}$  ja  $\vec{u} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$ . Sievennä seuraavat lausekkeet:

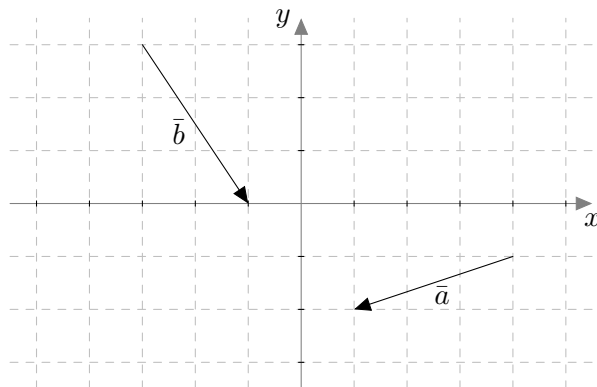
- (a)  $(\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{w} + \vec{u})$
- (b)  $(\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{v} - \vec{u}) - (\vec{w} + \vec{u})$ .

**Tehtävä 0.16.** Vedät pulkkaa  $150\text{ N}$  voimalla. Voima jaetaan kahteen vektoreiden  $\vec{i}$  ja  $\vec{j}$  suuntaiseen komponenttiin.

- (a) Toinen komponentti on  $90\text{ N}$ . Mikä on toisen komponentin suuruus?
- (b) Kuinka suuret komponentit ovat, jos ne ovat yhtä suuret?

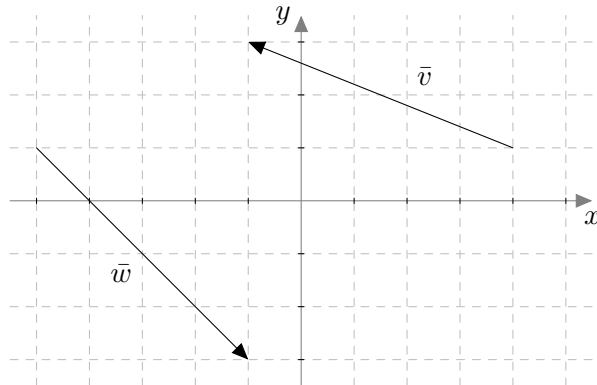
**Tehtävä 0.17.** Tarkastele alla olevaa kuvaa. Mihin pisteeseen päädyt, kun lähdet pisteestä  $(2, 3)$  ja kuljet ensin

- (a) vektorin  $\vec{a}$
- (b) ensin vektorin  $\vec{a}$  ja sitten vektorin  $\vec{b}$
- (c) vektorin  $-\vec{b}$
- (d) ensin vektorin  $-\vec{a}$  ja sitten vektorin  $\vec{b}$ .



**Tehtävä 0.18.** Tarkastele alla olevaa kuvaa.

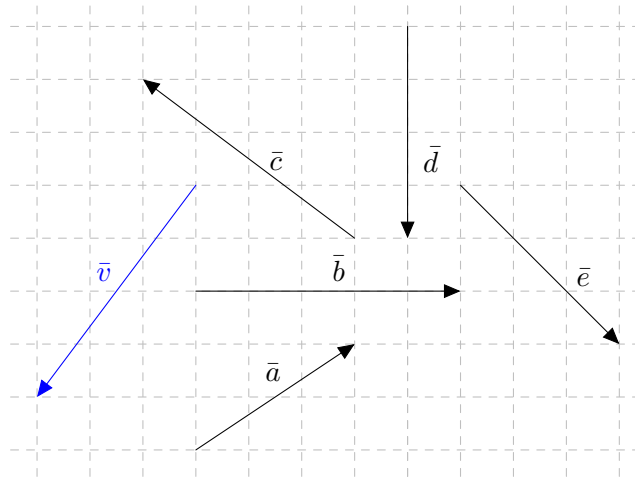
- (a) Ilmoita vektorit  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  vektoreiden  $\bar{i}$  ja  $\bar{j}$  avulla.
- (b) Laske vektoreiden  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  pituudet.
- (c) Muodosta vektori  $3\bar{v} - 4\bar{w}$ , ilmaise se vektorien  $\bar{i}$  ja  $\bar{j}$  avulla ja laske sen pituus.



**Tehtävä 0.19.** Mihin pisteeseen päädyt, kun siirryt pisteestä

- (a)  $A = (3, -16)$  kuusi pituusyksikköä vektorin  $\bar{v} = -5\bar{i} + 9\bar{j}$  suuntaan
- (b)  $B = (7, 3)$  viisi pituusyksikköä vektorin  $\bar{v} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$  suuntaan?

**Tehtävä 0.20.** Tarkastele alla olevaa kuvaa. Mitkä kuvan vektoreista ovat samanpituisia vektorin  $\bar{v}$  kanssa?



**Tehtävä 0.21.** Kuumailmapallo nousee ylöspäin nopeudella  $3 \text{ m/s}$ . Tuuli puhaltaa idästä  $4 \text{ m/s}$ .

- (a) Kuinka korkealla kuumailmapallo on kahden minuutin kuluttua lähdöstä?
- (b) Mikä on kuumailmapallon etäisyys lähtöpaikasta kahden minuutin kuluttua?

**Tehtävä 0.22.** Vektorin  $\bar{v}$  pituus on 24. Määritä vektorien

- (a)  $-6\bar{a}$
- (b)  $1/8\bar{a}$

pituus ja vertaa niiden suuntaa vektorin  $\bar{v}$  suuntaan.

**Tehtävä 0.23.** Vektorien  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  ovat yksikkövektoreita eli niiden pituus on 1. Määritä vektorin  $4\bar{v} + 11\bar{w}$  pituus, kun vektorit  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  ovat

- (a) samansuuntaiset
- (b) vastakkaissuuntaiset
- (c) kohtisuorassa toisiaan vastaan.

**Tehtävä 0.24.** Muodosta vektorin  $\bar{v} = -5\bar{i} + 9\bar{j}$  kanssa

- (a) samansuuntainen yksikkövektori
- (b) samansuuntainen vektori, jonka pituus on 4.

**Tehtävä 0.25.** Määritä vektorin  $\bar{v}$  kanssa samansuuntainen yksikkövektori ja vektori, jonka pituus on  $1/4$  vektorin  $\bar{v}$  pituudesta, kun vektorin  $\bar{v}$  pituus on

- (a) 4



(b)  $3/4$

(c)  $\sqrt{5}$ .

**Tehtävä 0.26.** Laiva kulkee suoraan tasaisella nopeudella. Eräällä hetkellä laiva on pisteessä  $A = (-7, 10)$  ja tuntia myöhemmin pisteessä  $B = (6, -5)$ .

(a) Missä pisteessä laiva oli kaksi tuntia ennen saapumistaan pisteeseen  $A$ ?

(b) Missä pisteessä laiva on 40 minuuttia sen jälkeen, kun se jätti pisteen  $B$ ?

**Tehtävä 0.27.** Laske vektorien  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  pistetulo, kun

(a)  $\bar{a} = 1/2\bar{i} - 3\bar{j}$  ja  $\bar{b} = 10\bar{i} + 7\bar{j}$

(b)  $\bar{a} = 9\bar{i} + 11\bar{j}$  ja  $\bar{b} = 2/3\bar{i} - 2\bar{j}$

**Tehtävä 0.28.** Kolmion kärjet ovat  $A = (-4, 3)$ ,  $B = (5, 2)$  ja  $C = (1, -2)$ .

(a) Muodosta vektorit  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  ja  $\overline{CA}$ .

(b) Osoita edellisen kohdan vektorien avulla, että kolmio on suorakulmainen.

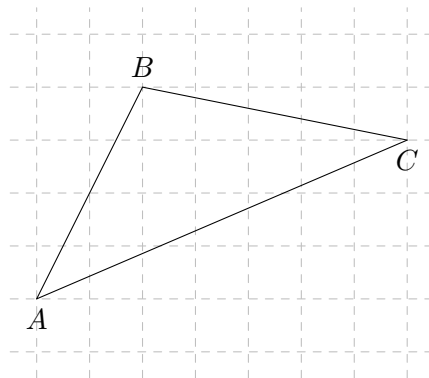
**Tehtävä 0.29.** Tarkastele alla olevan kuvan kolmiota. Määritä kulmat

(a)  $\angle(\overline{AB}, \overline{AC})$

(b)  $\angle(\overline{AB}, \overline{CB})$

(c)  $\angle(\overline{CA}, \overline{CB})$

asteen tarkkuudella.



**Tehtävä 0.30.** Tarkastele kolmiota  $ABC$ . Vektorin  $\overline{AB}$  pituus on 4 ja vektorin  $\overline{AC}$  pituus on 6. Kuinka pitkä on kolmion sivuvektori  $\overline{BC}$ , kun

(a)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 5$

(b)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -5$ ?

**Tehtävä 0.31.** Tarkastele vektoria  $\bar{a}$ , jonka pituus on 4 ja vektoria  $\bar{b}$ , jonka pituus on 7. Vektorien  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  välinen kulma on  $72^\circ$ . Laske

- (a) vektorin  $\bar{a} + \bar{b}$  pituus
- (b) vektorin  $\bar{a} - \bar{b}$  pituus

yhden desimaalin tarkkuudella.

**Tehtävä 0.32.** Kerro sanallisesti, miten vektorille  $\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j}$  löydetään yhtä pitkä vektoria  $\bar{v}$  vasten kohtisuoraan suuntaan osoittava vektori  $\bar{w}$ .

## Tehtäviä 2

**Tehtävä 0.33.** Tarkastele vektoreita  $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$ . Tiedetään, että

$$\bar{b} - 3\bar{a} = 5(\bar{a} - \bar{b}).$$

- (a) Osoita, että vektorit  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  ovat yhdensuuntaiset.
- (b) Ovatko vektorit  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  saman- vai vastakkaissuuntaiset?

**Tehtävä 0.34.** Tarkastele vektoreita  $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$ . Oletetaan, että vektorit eivät ole yhdensuuntaiset. Osoita, että vektori  $3\bar{a} + \bar{b}$  ei ole yhdensuuntainen vektorin  $\bar{a}$  kanssa.

**Tehtävä 0.35.** Tarkastele vektoreita  $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$ ,  $\bar{a} \nparallel \bar{b}$ . Osoita, että vektori  $-2\bar{a} + 15\bar{b}$  ei ole nollavektori.

**Tehtävä 0.36.** Mitä tiedät vektorien  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  suunnasta ja pituudesta, kun

$$2(2\bar{a} - 3\bar{b}) - 5\bar{a} - (3\bar{a} - 4\bar{b}) = \bar{0}.$$

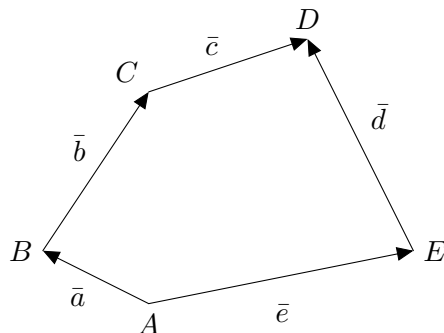
**Tehtävä 0.37.** Jaa voima, jonka suuruus on  $84 \text{ N}$ , vektorien  $\bar{i}$  ja  $\bar{j}$  suuntaisiin komponentteihin. Laske vektorin  $\bar{j}$  suuntaisen komponentin suuruus, kun vektorin  $\bar{i}$  suuntaisen komponentin suuruus on  $60,2 \text{ N}$ .

**Tehtävä 0.38.** Lentokone lentää länteen tasaisella vauhdilla. Tyynessä säässä lentokone liikkuisi länttä kohti  $210 \text{ km/h}$ . Tuuli puhaltaa pohjoisesta  $25 \text{ m/s} = 90 \text{ km/h}$ .

- (a) Mihin suuntaan lentokone lentää?
- (b) Mikä on lentokoneen vauhti maan suhteen?

**Tehtävä 0.39.** Tarkastele alla olevaa kuvaa. Esitä vektori

- (a)  $\overline{AC}$  vektorien  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  avulla
- (b)  $\overline{BE}$  vektorien  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  ja  $\bar{d}$  avulla
- (c)  $\overline{EC}$  kahdella eri tavalla.



**Tehtävä 0.40.** Vektorin  $\bar{a}$  pituus on 6 ja vektorin  $\bar{b}$  pituus on 3. Laske vektorin  $\bar{a} + \bar{b}$  pituus, kun

- (a) vektorit  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  ovat samansuuntaiset
- (b) vektorit  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  ovat vastakkaissuuntaiset
- (c) vektoreiden  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  ovat kohtisuorassa toisiaan vasten.

**Tehtävä 0.41.** Tarkastele vektoreita  $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$ . Vektorit  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  eivät ole yhdensuuntaisia. Osoita, että vektori  $2\bar{a} + \bar{b}$  ei ole yhdensuuntainen vektorin  $\bar{a}$  kanssa.

**Tehtävä 0.42.** Osoita seuraava väite joko todeksi tai epätodeksi: Jos  $\bar{a} \neq \bar{0}$  ja  $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{c}$ , niin  $\bar{b} = \bar{c}$ .

**Tehtävä 0.43.** Vektorin pistetulo itsensä kanssa on sama kuin vektorin pituuden neliö, eli  $(\bar{v} + \bar{w}) \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = |\bar{v} + \bar{w}|^2$ .

Sievennä lauseke käyttämällä pistetulon ominaisuuksia.

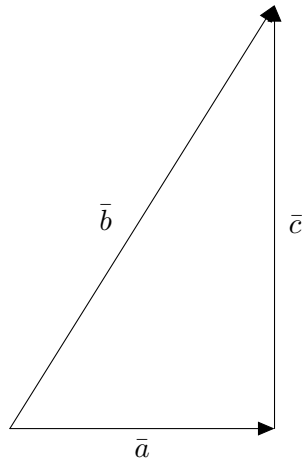
Sievennä lauseke  $|\bar{v} - \bar{w}|^2$ .

Kuinka pitkiä vektorit  $\bar{v} + \bar{w}$  ja  $\bar{v} - \bar{w}$  ovat, kun  $|\bar{v}| = 7, |\bar{w}| = 5$  ja  $\bar{v} \cdot \bar{w} = 1$ ?

**Tehtävä 0.44.** Tarkastele alla olevaa kuvaa.

- (a) Laske vektorien  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  ja  $\bar{c}$  pituudet.
- (b) Laske kulma  $\angle(\bar{a}, \bar{b})$ .

(c) Laske kulma  $\angle(\bar{b}, \bar{c})$ .



**Tehtävä 0.45.** Vektorit  $\overline{OA} = \bar{a} (\neq \bar{0})$  ja  $\overline{OB} = \bar{b}$  toteuttavat ehdon  $\bar{a} \cdot \bar{a} = 2\bar{a} \cdot \bar{b}$ . Osoita, että kolmio  $OAB$  on tasakylkinen. [S2008, 11]

**Tehtävä 0.46.** Tarkastele kolmiota, jonka eräästä kärjestä alkavat sivuvektorit ovat

- (a)  $\bar{a} = 3\bar{i} + \bar{j}$  ja  $\bar{b} = 2\bar{i} + 6\bar{j}$
- (b)  $\bar{a} = -4\bar{i} - 3\bar{j}$  ja  $\bar{b} = -2\bar{i} - 4\bar{j}$ .

Onko kolmio suorakulmainen?

**Tehtävä 0.47.** Kolmiossa  $ABC$  vektori  $\overline{AB} = 2, 2\bar{i} + 7, 3\bar{j}$  ja vektori  $\overline{AC} = 5, 9\bar{i} - 2, 1\bar{j}$ .

- (a) Määritä kolmion kolmas sivuvektori  $\overline{BC}$ .
- (b) Osoita, että  $\overline{BC}$  on kolmion pisin sivu.
- (c) Määritä kulman  $BAC$  suuruus pistetulon avulla 0,1 asteen tarkkuudella. [S2007, 3]

**Tehtävä 0.48.** Origosta alkavan vektorin  $\bar{a} = 2\bar{i} + 7\bar{j}$  päätepisteestä  $P$  alkava ja  $x$ -akselin pisteeseen  $Q$  päättyvä vektori  $\bar{b}$  on kohtisuorassa vektoria  $\bar{a}$  vasten.

- (a) Määritä pisteet  $P$  ja  $Q$ .
- (b) Määritä vektori  $\bar{b}$ . [lyhyt K1989, 6a]

**Tehtävä 0.49.** Tarkastele tason vektoria  $\overline{OA} = 7\bar{i} + 9\bar{j}$ . Määritä kaikki sellaiset vektorit  $\overline{OB}$ , että kulma  $OAB$  on suora ja vektorin  $\overline{AB}$  pituus on puolet vektorin  $\overline{OA}$  pituudesta. [K2005, 4]