Séquence 3 : Calculs et nombres rationnels

I] Calculer avec des nombres relatifs

Act. 1
Act. 2

Définition

- Si deux nombres relatifs ont le même signe, alors leur somme a :
  – le même signe que ces deux nombres ;
  – pour distance à zéro, la somme de leurs distances à zéro.
- Si deux nombres relatifs sont de signes contraires, alors leur somme a :
  – le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro ;
  – pour distance à zéro, la différence de leurs distances à zéro.

Propriété

Pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son opposé.

Exemples

On veut calculer $-3{,}2 + (-5{,}9)$.
$-3{,}2$ et $-5{,}9$ sont deux nombres **négatifs** :
- leur somme est **négative**
- on **ajoute** leurs distances à zéro

$-3{,}2 + (-5{,}9) = -(3{,}2 + 5{,}9) = -9{,}1$

On veut calculer $A = 5{,}6 - (-3{,}2)$.
Pour soustraire $-3{,}2$, on ajoute son opposé $3{,}2$.
$A = 5{,}6 - (-3{,}2)$
$A = 5{,}6 + 3{,}2$
$A = 8{,}8$

Pour éviter que deux signes se suivent, on utilise des parenthèses.

Calculer les expressions suivantes.
$A = -14 + (-17)$ $B = 13{,}7 + (-6{,}9)$ $C = -25 - 13$ $D = -21{,}3 - (-4{,}8)$

Solution

$A = -14 + (-17)$
$A = -(14 + 17)$
$A = -31$

-14 et -17 sont deux nombres négatifs :
- leur somme est négative ;
- on ajoute leurs distances à zéro.

$B = 13{,}7 + (-6{,}9)$
$B = 13{,}7 - 6{,}9$
$B = 6{,}8$

$13{,}7$ et $-6{,}9$ sont de signes contraires :
- leur somme est positive (car $13{,}7 > 6{,}9$) ;
- on soustrait leurs distances à zéro.

$C = -25 - 13$
$C = -25 + (-13)$
$C = -38$

Pour soustraire 13, on ajoute son opposé -13.

$D = -21{,}3 - (-4{,}8)$
$D = -21{,}3 + 4{,}8$
$D = -16{,}5$

Pour soustraire $-4{,}8$, on ajoute son opposé $4{,}8$.

Définition **Propriété**

Pour calculer le produit (ou le quotient) de deux nombres relatifs, on détermine son signe, puis on multiplie (ou on divise) les distances à zéro.

- Le produit (ou le quotient) de deux nombres relatifs de même signe est positif.
- Le produit (ou le quotient) de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif.

Exemples

$2 \times 7 = 14$ $\frac{5}{-4} = -1{,}25$

$\frac{-3}{-5} = 0{,}6$ $3 \times (-5{,}5) = -16{,}5$

Attention, le produit (ou le quotient) de deux nombres **négatifs** est **positif** !

⚔️ Entraîne-toi avec *Triangles semblables (1 à 3)* ⚔️

Calculer les expressions suivantes.
$A = -4 \times 12$ $B = -3 \times (-4{,}2)$ $C = \frac{-15}{-3}$ $D = \frac{25}{-2{,}5}$

Solution

$A = -4 \times 12$
$A = -48$

-4 et 12 sont de signes contraires, donc le produit est négatif.
On multiplie les distances à zéro : $4 \times 12 = 48$.

$B = -3 \times (-4{,}2)$
$B = 12{,}6$

-3 et $-4{,}2$ sont de même signe, donc le produit est positif.
On multiplie les distances à zéro : $3 \times 4{,}2 = 12{,}6$.

$C = \frac{-15}{-3}$
$C = 5$

-15 et -3 sont de même signe, donc le quotient est positif.
On divise les distances à zéro : $15 \div 3 = 5$.

$D = \frac{25}{-2{,}5}$
$D = -10$

25 et $-2{,}5$ sont de signes contraires, donc le quotient est négatif.
On divise les distances à zéro : $25 \div 2{,}5 = 10$.

Propriétés

a et b désignent des nombres relatifs ($b \neq 0$).

- Le produit d'un nombre relatif par –1 est égal à son opposé : $a \times (-1) = -a$
- $\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$

Exemples

- $-7{,}2 \times (-1) = -(-7{,}2) = 7{,}2$. L'opposé de –7,2 est 7,2.
- $\dfrac{-2}{13} = \dfrac{2}{-13} = -\dfrac{2}{13}$: les trois quotients sont **négatifs**.

Recopier les fractions suivantes puis encadrer en vert celles égales à $-\dfrac{3}{7}$ et en bleu celles égales à $\dfrac{3}{7}$.

$$\frac{-3}{7} \qquad \frac{7}{3} \qquad \frac{-3}{-7} \qquad \frac{3}{-7}$$

Solution

$$\overset{\text{vert}}{\boxed{\frac{-3}{7}}} \qquad \frac{7}{3} \qquad \overset{\text{bleu}}{\boxed{\frac{-3}{-7}}} \qquad \overset{\text{vert}}{\boxed{\frac{3}{-7}}}$$

II] Calculer avec des puissances

Définition

a désigne un nombre relatif et n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2.

Le produit de n facteurs égaux à a se note a^n et se lit « a exposant n ».

On dit que ce produit est une **puissance de a**.

Le **nombre a^{-n}** désigne l'inverse du nombre a^n (avec $a \neq 0$).

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Remarque

Cas particuliers : on convient que $a^1 = a$ et que, si $a \neq 0$, $a^0 = 1$.

Exemples

$$(-3)^4 = \underbrace{(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)}_{4 \text{ facteurs}} = 81 \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8} \qquad 4^0 = 1$$

Calculer : $A = -3^2 + 5 \times 2^{-3}$ $\qquad B = (-3)^2 + (5 \times 2)^3$

Solution

$A = -3^2 + 5 \times 2^{-3}$
$A = -9 + 5 \times 0{,}125$
$A = -9 + 0{,}625$
$A = -8{,}375$

On commence par les puissances puis la multiplication et enfin l'addition.

$B = (-3)^2 + (5 \times 2)^3$
$B = (-3)^2 + 10^3$
$B = 9 + 1\,000$
$B = 1\,009$

Les parenthèses modifient les priorités de calculs.

Convention

Dans une expression sans parenthèses comportant des puissances, on effectue d'abord les puissances, puis les multiplications et les divisions, et enfin les additions et les soustractions.

Exemples

$A = 1 + 3 \times 2^3 = 1 + 3 \times 8 = 1 + 24 = 25$

$B = 1 + (3 \times 2)^3 = 1 + 6^3 = 1 + 216 = 217$

Propriété

n désigne un nombre entier strictement positif.

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ zéros}} \qquad 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}}} = \underbrace{0{,}0\ldots0}_{n \text{ zéros}}1$$

Exemples

$10^9 = 1\underbrace{000\,000\,000}_{9 \text{ zéros}}$ (1 milliard)

$10^{-6} = \underbrace{0{,}000\,00}_{6 \text{ zéros}}1$ (1 millionième)

Donner l'écriture décimale des nombres suivants.

a. 10^5 **b.** 10^{-4}

Solution

a. $10^5 = 1\underbrace{00\,000}_{5 \text{ zéros}}$ **b.** $10^{-4} = \underbrace{0{,}000}_{4 \text{ zéros}}1$

Écrire les nombres suivants sous forme d'une puissance de 10.

a. 10 000 000 **b.** 0,000 000 1

Solution

a. $1\underbrace{0\,000\,000}_{7 \text{ zéros}} = 10^7$ **b.** $\underbrace{0{,}000\,000}_{7 \text{ zéros}}1 = 10^{-7}$

Définition

L'**écriture scientifique** d'un nombre décimal positif est l'écriture de la forme $a \times 10^n$ où :

- a est un nombre décimal tel que $1 \leqslant a < 10$;
- n est un nombre entier relatif.

Exemples

L'écriture scientifique de 1 785 000 000 est $1{,}785 \times 10^9$ (1 milliard 785 millions).

L'écriture scientifique de 0,000 028 est $2{,}8 \times 10^{-5}$.

Donner l'écriture décimale des nombres suivants.

$A = 3{,}5 \times 10^3$ $B = 450 \times 10^{-5}$

Solution

$A = 3{,}5 \times 10^3$

$A = 3{,}5 \times 1\,000$

$A = 3\,500$

$B = 450 \times 10^{-5}$

$B = \dfrac{450}{100\,000}$

$B = 0{,}004\,5$

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants.

$A = 365\,000\,000$ $B = 0{,}000\,027\,6$

Solution

$A = 365\,000\,000$

$A = 3{,}65 \times 100\,000\,000$

$A = 3{,}65 \times 10^8$

$B = 0{,}000\,027\,6$

$B = \dfrac{2{,}76}{100\,000}$

$B = 2{,}76 \times 10^{-5}$

III] Forme irréductible d'une fraction

Définition

Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire comme une fraction, c'est-à-dire sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs ($q \neq 0$).

Remarques

- Les nombres entiers, les nombres décimaux et les fractions sont des nombres rationnels.
- Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels, par exemple : π et $\sqrt{2}$, qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fraction.

Propriétés

- Un quotient ne change pas si l'on multiplie ou si l'on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

a, b et k désignent trois nombres ($b \neq 0$ et $k \neq 0$). $\quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{a \times k}{b \times k}$ et $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \div k}{b \div k}$

- a, b, c et d désignent des nombres relatifs ($b \neq 0$ et $d \neq 0$).

Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, alors $ad = bc$. $\quad$ Si $ad = bc$, alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

Exemples

- $\dfrac{3{,}1}{7} = \dfrac{3{,}1 \times 10}{7 \times 10} = \dfrac{31}{70}$
- $\dfrac{18}{30} = \dfrac{18 \div 6}{30 \div 6} = \dfrac{3}{5}$

- On veut savoir si les fractions $\dfrac{20}{37}$ et $\dfrac{220}{407}$ sont égales.

On calcule les « produits en croix » :

$$20 \times 407 = 8\,140 \text{ et } 220 \times 37 = 8\,140.$$

Les produits en croix sont égaux, donc les fractions sont égales :

$$\frac{20}{37} = \frac{220}{407}$$

Les fractions suivantes sont-elles égales ?

a. $\dfrac{48}{42}$ et $\dfrac{8}{7}$ $\quad$ **b.** $\dfrac{4}{3}$ et $\dfrac{32}{21}$ $\quad$ **c.** $\dfrac{168}{42}$ et $\dfrac{60}{15}$ $\quad$ **d.** $\dfrac{48}{5}$ et $\dfrac{31}{3}$

Solution

a. $\dfrac{48}{42} = \dfrac{48 \div 6}{42 \div 6} = \dfrac{8}{7}$ donc $\dfrac{48}{42} = \dfrac{8}{7}$.

b. $\dfrac{4}{3} = \dfrac{4 \times 7}{3 \times 7} = \dfrac{28}{21}$; $28 \neq 32$ donc $\dfrac{4}{3} \neq \dfrac{32}{21}$.

Pour savoir si deux fractions sont égales, on peut chercher si le numérateur et le dénominateur ont été multipliés (ou divisés) par un même nombre.

c. $168 \times 15 = 2\,520$ et $60 \times 42 = 2\,520$ donc $\dfrac{168}{42} = \dfrac{60}{15}$.

d. $48 \times 3 = 144$ et $5 \times 31 = 153$ donc $\dfrac{48}{5} \neq \dfrac{31}{3}$.

On peut également calculer les « produits en croix » et regarder s'ils sont égaux ou non.

Définition

a et b désignent deux entiers relatifs ($b \neq 0$).

On dit que la fraction $\dfrac{a}{b}$ est **irréductible** si le seul diviseur positif commun à a et b est égal à 1.

Exemple

$\dfrac{5}{8}$ est une fraction irréductible car le seul diviseur positif commun à 5 et 8 est 1.

Méthode

a et b désignent deux entiers relatifs ($b \neq 0$). Pour rendre la fraction $\dfrac{a}{b}$ irréductible, on peut, au choix :

- simplifier la fraction $\dfrac{a}{b}$ en plusieurs étapes, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus la simplifier ;
- décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers puis simplifier.

Exemple

On cherche la forme irréductible de $\dfrac{24}{36}$.

$$\frac{24}{36} = \frac{24 \div 2}{36 \div 2} = \frac{12}{18} = \frac{12 \div 2}{18 \div 2} = \frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{24}{36} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3}$$

Donner la forme irréductible des fractions suivantes.

a. $\dfrac{-615}{45}$ **b.** $\dfrac{126}{72}$ **c.** $-\dfrac{525}{405}$ **d.** $\dfrac{-720}{-3\,150}$

Solution

a. $\dfrac{-615}{45} = -\dfrac{615 \div 3}{45 \div 3} = -\dfrac{205}{15} = -\dfrac{205 \div 5}{15 \div 5} = -\dfrac{41}{3}$

b. $\dfrac{126}{72} = \dfrac{126 \div 2}{72 \div 2} = \dfrac{63}{36} = \dfrac{63 \div 9}{36 \div 9} = \dfrac{7}{4}$

On simplifie la fraction par étapes, par divisions successives du numérateur et du dénominateur, en s'aidant par exemple des critères de divisibilité.

c. $-\dfrac{525}{405} = -\dfrac{3 \times 5 \times 5 \times 7}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5} = -\dfrac{5 \times 7}{3 \times 3 \times 3} = -\dfrac{35}{27}$

d. $\dfrac{-720}{-3\,150} = \dfrac{2^4 \times 3^2 \times 5}{2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7} = \dfrac{2^3}{5 \times 7} = \dfrac{8}{35}$

On décompose le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers.

IV] Calculer avec des fractions

Propriété

Pour **additionner (ou soustraire) deux fractions** :

- si elles n'ont pas le même dénominateur, on doit d'abord les écrire avec le même dénominateur.

Puis :

- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs ;
- on garde le dénominateur commun.

a, *b* et *c* désignent trois nombres relatifs ($c \neq 0$).

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Exemple 1

$$\frac{5}{2} + \frac{3}{7} = \frac{5 \times 7}{2 \times 7} + \frac{3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{35}{14} + \frac{6}{14} = \frac{41}{14}$$

Exemple 2

$$\frac{3}{4} - \frac{11}{6} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{11 \times 2}{6 \times 2} = \frac{9}{12} - \frac{22}{12} = \frac{-13}{12}$$

Propriété

Pour **multiplier deux fractions** :

- on multiplie les numérateurs entre eux ;
- on multiplie les dénominateurs entre eux.

a, *b*, *c* et *d* désignent quatre nombres ($b \neq 0$ et $d \neq 0$).

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemple 1

$$\frac{3}{8} \times \frac{-1}{4} = \frac{3 \times (-1)}{8 \times 4} = \frac{-3}{32}$$

Exemple 2

$$\frac{24}{28} \times \frac{56}{18} = \frac{24 \times 56}{28 \times 18} = \frac{6 \times 4 \times 8 \times 7}{4 \times 7 \times 3 \times 6} = \frac{8}{3}$$

Calculer et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$A = \dfrac{7}{10} - \dfrac{3}{5} + \dfrac{-2}{25}$ $\qquad B = \dfrac{-15}{36} \times \dfrac{9}{-35} \times \dfrac{-24}{21}$

Solution

$A = \dfrac{7 \times 5}{10 \times 5} - \dfrac{3 \times 10}{5 \times 10} + \dfrac{-2 \times 2}{25 \times 2}$

$A = \dfrac{35}{50} - \dfrac{30}{50} + \dfrac{-4}{50}$

$A = \dfrac{35 - 30 - 4}{50}$

$A = \dfrac{1}{50}$

On cherche un multiple commun à 10, 5 et 25, par exemple 50.

$B = \dfrac{-15}{36} \times \dfrac{9}{-35} \times \dfrac{-24}{21}$

$B = -\dfrac{3 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 3 \times 7}$

$B = -\dfrac{3 \times 2}{7 \times 7}$

$B = -\dfrac{6}{49}$

On cherche le signe du résultat, puis on décompose en produit de facteurs premiers pour simplifier avant de calculer.

Définition **Propriété**

a et *b* désignent des nombres relatifs non nuls.

- Deux nombres relatifs non nuls sont **inverses** l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.
- L'**inverse** du nombre *a* est le nombre $\dfrac{1}{a}$; l'**inverse** du nombre $\dfrac{a}{b}$ est le nombre $\dfrac{b}{a}$.

Exemple

L'inverse de -3 est $\dfrac{1}{-3}$, c'est-à-dire $\dfrac{-1}{3}$ ou $-\dfrac{1}{3}$.

Propriété

Diviser par un nombre relatif non nul revient à multiplier par son inverse.

a, *b*, *c* et *d* désignent des nombres relatifs ($b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$) :

$$a \div b = a \times \frac{1}{b} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemples

- $\dfrac{2}{9} \div \dfrac{-3}{7} = \dfrac{2}{9} \times \dfrac{7}{-3} = \dfrac{2 \times 7}{9 \times (-3)} = \dfrac{14}{-27} = -\dfrac{14}{27}$
- $\dfrac{\frac{7}{3}}{\frac{-4}{5}} = \dfrac{7}{3} \div \dfrac{-4}{5} = \dfrac{7}{3} \times \dfrac{5}{-4} = -\dfrac{35}{12}$

1. Déterminer les inverses des nombres suivants.

a. 0,1 **b.** $\dfrac{1}{4}$ **c.** $\dfrac{-3}{8}$

2. Calculer et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$A = \dfrac{-11}{9} \div \dfrac{-8}{5}$ $B = \dfrac{\frac{-5}{7}}{8}$ $C = \dfrac{-5}{\frac{7}{8}}$ $D = \dfrac{\frac{-14}{25}}{\frac{-21}{15}}$

Solution

1. a. $0{,}1 \times 10 = 1$ donc l'inverse de 0,1 est 10.

b. $\dfrac{1}{4} \times 4 = 1$ donc l'inverse de $\dfrac{1}{4}$ est 4. **c.** $\dfrac{-3}{8} \times \dfrac{8}{-3} = 1$ donc l'inverse de $\dfrac{-3}{8}$ est $\dfrac{8}{-3}$ ou $\dfrac{-3}{8}$.

2.

$A = \dfrac{-11}{9} \div \dfrac{-8}{5}$

$A = \dfrac{-11}{9} \times \dfrac{5}{-8}$

$A = \dfrac{-11 \times 5}{9 \times (-8)}$

$A = \dfrac{55}{72}$

$B = \dfrac{\frac{-5}{7}}{8}$

$B = \dfrac{-5}{7} \div 8$

$B = \dfrac{-5}{7} \times \dfrac{1}{8}$

$B = \dfrac{-5 \times 1}{7 \times 8}$

$B = \dfrac{-5}{56}$

$C = \dfrac{-5}{\frac{7}{8}}$

$C = -5 \div \dfrac{7}{8}$

$C = -5 \times \dfrac{8}{7}$

$C = \dfrac{-5 \times 8}{7}$

$C = \dfrac{-40}{7}$

$D = \dfrac{\frac{-14}{25}}{\frac{-21}{15}}$

$D = \dfrac{-14}{25} \div \dfrac{-21}{15}$

$D = \dfrac{-14}{25} \times \dfrac{15}{-21}$

$D = \dfrac{2 \times 7 \times 3 \times 5}{5 \times 5 \times 3 \times 7}$

$D = \dfrac{2}{5}$

On transforme la division en une multiplication en remplaçant la deuxième fraction par son inverse.

On peut remplacer le trait principal de fraction par une division.