Séquence 1 : Nombres entiers

I] Déterminer les diviseurs d'un nombre entier

Définition

Un entier naturel est un nombre entier positif ou nul.

Définitions

a et b sont deux entiers naturels $(b \neq 0)$. Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est déterminer les deux entiers naturels q et r tels que :

$$a = b \times q + r \text{ avec } r < b$$

Les nombres q et r sont appelés respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b. a et b s'appellent le dividende et le diviseur de cette division.

Exemple

Division euclidienne de 25 par 3 :

On a bien : $25 = 3 \times 8 + 1$, avec $1 < 3$.

$$\begin{array}{r|l} \text{dividende} \; 25 & 3 \; \text{diviseur} \\ \hline -24 & 8 \\ \hline \text{reste} \; 1 & \text{quotient} \end{array}$$

Définitions

a et b sont deux entiers naturels $(b \neq 0)$.

Lorsque la division euclidienne de a par b donne un reste nul, on a $a = b \times q$. On dit que :

- a est un multiple de b
- b est un diviseur de a
- a est divisible par b

Exemple

On a : $85 = 5 \times 17$.

On dit que :

- 85 est un multiple de 17 et de 5.
- 5 et 17 sont des diviseurs de 85.
- 85 est divisible par 17 et par 5.

$$\begin{array}{r|l} 85 & 5 \\ \hline -5 & 17 \\ \hline 35 & \\ -35 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$85 = 5 \times 17 + 0$

Remarques

- On ne peut jamais diviser par 0.
- Tout entier naturel non nul est divisible par 1 et par lui-même.

Propriétés

Critères de divisibilité

- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, 2, 4, 6 ou 8, alors il est divisible par 2.
- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3, alors ce nombre est divisible par 3.

Ces propriétés sont démontrées dans le problème 94 p.39.

- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5, alors il est divisible par 5.
- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9, alors ce nombre est divisible par 9.
- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, alors il est divisible par 10.

1 290 est-il divisible par : a. 2 ? b. 3 ? c. 5 ? d. 7 ? e. 9 ?

Solution

On peut utiliser les critères de divisibilité ou la division euclidienne.

a. 1 290 est un nombre pair, il est donc divisible par 2.
b. La somme des chiffres de 1 290 est égale à 12, qui est divisible par 3, donc 1 290 est divisible par 3.
c. Le chiffre des unités de 1 290 est 0 donc 1 290 est divisible par 5.
d. Pour 7, on peut utiliser la calculatrice :

1290⊢7 Q=184 R=2

Le reste de la division euclidienne de 1 290 par 7 est égal à 2. Ce reste est différent de 0, donc 1 290 n'est pas divisible par 7.
e. La somme des chiffres de 1 290 est égale à 12, qui n'est pas divisible par 9. Donc 1 290 n'est pas divisible par 9.

Act. 2

Déterminer tous les diviseurs de 102.

Solution

$\sqrt{102} \approx 10{,}1$

On teste la divisibilité de 102 par 1, 2, 3 jusqu'à 10 et dès que l'on trouve un diviseur, il en existe forcément un autre (parfois identique).

- **Pour 1 :** $102 = 1 \times 102$ donc **1** et **102** sont des diviseurs de 102.
- **Pour 2 :** $102 = 2 \times 51$ donc **2** et **51** sont des diviseurs de 102.

Pour 2, 3 et 5, 9 et 10 on peut utiliser les critères de divisibilités ou la calculatrice !

- **Pour 3 :** La somme des chiffres de 102 est divisible par 3 donc 102 est divisible par 3. $102 \div 3 = 34$ donc $102 = 3 \times 34$ donc **3** et **34** sont des diviseurs de 102.
- **Pour 4 :** On utilise la calculatrice :

102⊢4 Q=25 R=2

Le reste n'est pas 0. 102 n'est pas divisible par 4.

- **Pour 5 :** 102 a pour chiffre des unités 2 (ni 0, ni 5) ; il n'est donc pas divisible par 5.
- **Pour 6 :** On utilise la calculatrice :

102⊢6 Q=17 R=0

Le reste est nul, $102 = 6 \times 17$ donc **6** et **17** sont des diviseurs de 102.

- **Pour 7 et pour 8 :** La calculatrice montre de même que 102 n'est divisible ni par 7 ni par 8.
- **Pour 9 :** La somme des chiffres de 102 n'est pas un multiple de 9 donc 102 n'est pas divisible par 9.
- **Pour 10 :** 102 a pour chiffre des unités 2 donc 102 n'est pas divisible par 10.
- **La recherche s'arrête.**

Les 8 diviseurs de 102 sont donc :
1 2 3 6 17 34 51 102

⚔️Entraine-toi avec *Utiliser des multiples et des diviseurs* ⚔️
🌍Et dans la vraie vie ? *Parc éolien* 🌍
🏠 Optimiser le transport de colis pour ne pas transporter… du vide ! 🏠

II] Reconnaître un nombre premier

Act. 3

Définition

Un **nombre premier** est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples

- 6 n'est pas un nombre premier : il admet 2 et 3 comme diviseurs.
- 7 est un nombre premier : il n'est divisible que par 1 et par 7.

Remarques

- 0 n'est pas premier car il possède une infinité de diviseurs.
- 1 n'est pas premier car il possède un seul diviseur : lui-même.
- 2 est le seul nombre premier pair car tous les autres nombres pairs sont divisibles par 2.

1. 147 est-il un nombre premier ? 2. 223 est-il un nombre premier ?

Solution

On cherche à savoir si 147 et 223 admettent des diviseurs autres que 1 et eux-mêmes.
1. $1 + 4 + 7 = 12$ La somme des chiffres de 147 est un multiple de 3. 147 est donc divisible par 3. Ce n'est donc pas un nombre premier.
2. $\sqrt{223} \approx 14{,}9$

On teste la divisibilité de 223 par tous les nombres entiers compris entre 2 et 14, en utilisant les critères de divisibilité ou la calculatrice.

- Les critères de divisibilité montrent que 223 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 9 et 10.
- L'utilisation de la calculatrice permet de conclure que 223 n'est pas divisible par 4, par 6, par 7, par 8, par 11, par 12, par 13, par 14.

Donc 223 n'est divisible par aucun nombre entier compris entre 2 et 14, il a donc seulement 2 diviseurs : 1 et 223.
Donc 223 est un nombre premier.

⚔️Entraine-toi avec *Le crible d'Eratosthène* ⚔️

Propriété

Les 25 nombres premiers inférieurs à 100 sont :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ;
43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97

Propriété

Il existe une infinité de nombres premiers.

Act. 5

II] Décomposer un entier en produit de facteurs premiers

Propriété **Définition**

n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

n peut s'écrire comme un produit de nombres premiers, c'est-à-dire sous la forme : $n = p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times \ldots$

où p_1, p_2, … sont des nombres premiers et k_1, k_2, … sont des entiers naturels.

Cette écriture est appelée **décomposition en facteurs premiers** de *n*.

Exemples

- $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
- $220 = 2^2 \times 5 \times 11$

Propriété

Pour un entier donné, il n'existe qu'une seule décomposition en produit de facteurs premiers (si l'on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs).

Décomposer 2 088 en produits de facteurs premiers.

Solution

2 088	2	2 divise 2 088, le quotient est 1 044. On a $2\,088 = 2 \times 1\,044$.
1 044	2	2 divise 1 044, le quotient est 522. On a $2\,088 = 2 \times 2 \times 522$.
522	2	2 divise 522, le quotient est 261. On a $2\,088 = 2 \times 2 \times 2 \times 261$.
261	3	2 ne divise pas 261, mais 3 divise 261 et le quotient est 87. On a $2\,088 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 87$.
87	3	3 divise 87 et le quotient est 29. On a $2\,088 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 29$.
29	29	29 est un nombre premier.
1		

Pour décomposer 2 088 en produit de facteurs premiers, on cherche le plus petit nombre premier qui divise 2 088 : c'est 2. On divise ensuite 2 088 par 2. Le quotient obtenu est 1 044. Comme il est différent de 1, on recommence… jusqu'à obtenir pour quotient 1.

La décomposition en produit de facteurs premiers de 2 088 est $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 29$ ou $2^3 \times 3^2 \times 29$.

Remarques

- On peut obtenir une décomposition en facteurs premiers avec une calculatrice.
- La décomposition en produit de facteurs premiers peut être utilisée pour simplifier une fraction :

$$\frac{360}{220} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3^2 \times 5}{2 \times 2 \times 5 \times 11} = \frac{2 \times 3^2}{11} = \frac{18}{11}$$

On a divisé le numérateur et le dénominateur par $2 \times 2 \times 5$.

Entraine-toi avec *Nombres premiers*