Séquence 4 : Triangles

I] Construire un triangle

Propriété

On peut construire un triangle dans les deux cas suivants :

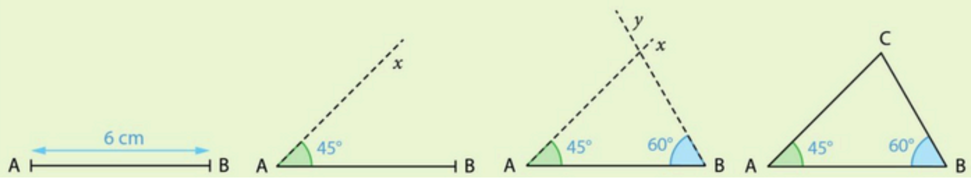
- si on connait la longueur de deux côtés et la mesure de l'angle formé par ces deux côtés ;
- si on connait la longueur d'un côté et les mesures de deux angles dont la somme est inférieure à 180°.

Construire un triangle ABC tel que AB = 6 cm, $\widehat{BAC} = 45°$ et $\widehat{CBA} = 60°$.

Solution

- On commence par tracer un segment [AB] de longueur 6 cm (étape 1).
- On utilise ensuite le rapporteur pour tracer une demi-droite [A*x*) telle que $\widehat{BAx} = 45°$ (étape 2) puis une demi-droite [A*y*) telle que $\widehat{ABy} = 60°$ (étape 3).
- Le point d'intersection des deux demi-droites est le point C. On termine la construction en traçant les segments [AC] et [BC] (étape 4).

Étape 1 Étape 2 Étape 3 Étape 4



⚔️ Entraine-toi avec *Constructions (exercice 1)* ⚔️

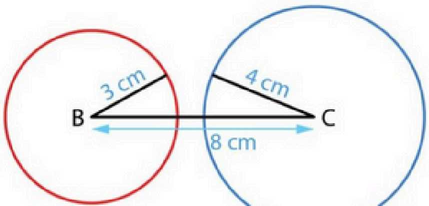
Propriété

On peut construire un triangle dont on connait les longueurs des trois côtés lorsque la longueur de son plus grand côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Exemples

- Peut-on construire un triangle ABC tel que AB = 3 cm, BC = 8 cm et AC = 4 cm ?

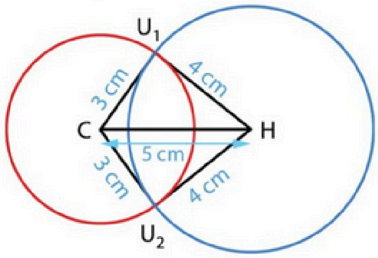
La plus grande longueur est BC, et BC > AB + AC.
Donc le triangle **n'est pas** constructible.



Si BC = 8 cm, il est impossible de construire un point A tel que AB = 3 cm et AC = 4 cm.

- Peut-on construire un triangle CHU tel que CH = 5 cm, CU = 3 cm et UH = 4 cm ?

La plus grande longueur est CH, et CH < CU + UH.
Donc le triangle CHU **est** constructible.



Il existe deux possibilités pour le point U.

Remarque

Si la plus grande longueur est égale à la somme des deux autres, alors le triangle est aplati : les trois sommets sont alignés.

1. Construire si possible un triangle dont les longueurs des côtés mesurent : 8,5 cm, 3,3 cm et 4,2 cm.
2. Construire si possible un triangle dont les longueurs des côtés mesurent : 3,1 cm, 5 cm et 5,4 cm.

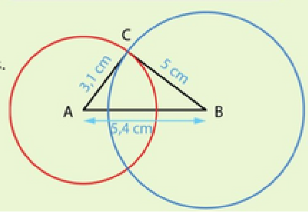
Solution

1. La plus grande longueur est 8,5 cm. La somme des deux autres longueurs est égale à 3,3 + 4,2 = 7,5 cm. Or 8,5 > 7,5 donc on ne peut pas construire un triangle avec ces trois longueurs.

On cherche la plus grande longueur et on la compare avec la somme des deux autres longueurs.

2. La plus grande longueur est 5,4 cm.
La somme des deux autres longueurs est égale à 3,1 + 5 = 8,1 cm.
5,4 < 8,1 donc on peut construire un triangle avec ces trois longueurs.

Pour tracer ce triangle :
- on commence par tracer un segment [AB] de longueur 5,4 cm ;
- on trace le cercle de centre A et de rayon 3,1 cm et le cercle de centre B et de rayon 5 cm ;
- on place un point C à l'intersection de ces deux cercles (il y a 2 possibilités).



⚔️ Entraine-toi avec *Inégalité triangulaire* et *Constructions (exercice 2)*⚔️

II] Hauteurs et médiatrices

Définition

Soit ABC un triangle.
La **hauteur** du triangle ABC issue de A est la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite (BC).

ABC est un triangle tel que AB = 9 cm, AC = 6,5 cm et BC = 4,6 cm.

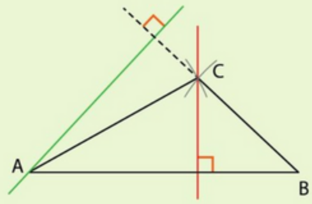
1. Tracer en rouge la hauteur du triangle ABC issue de C.

2. Tracer en vert la hauteur du triangle ABC issue de A.

Solution

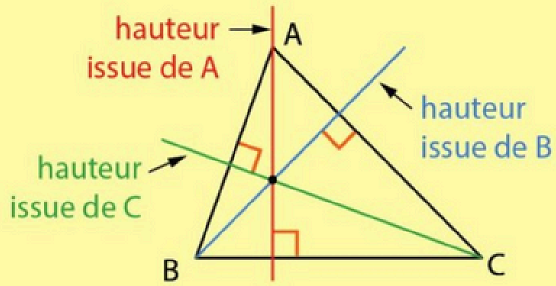
1. On construit le triangle ABC puis on trace la droite perpendiculaire à (AB) passant par C.

2. On commence par prolonger le segment [BC], puis on trace la droite perpendiculaire à (BC) passant par A. On remarque qu'ici, la hauteur issue de A est extérieure au triangle ABC.



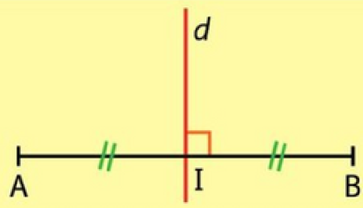
Propriété **Définition**

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes : elles passent par un même point appelé **orthocentre** du triangle.



Définition

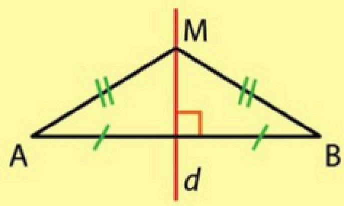
La **médiatrice** d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.



Propriétés

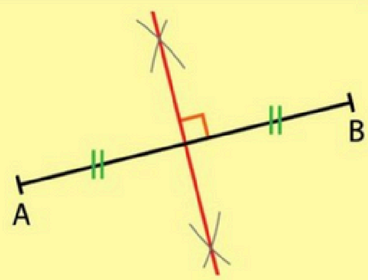
A et B désignent deux points distincts.
La médiatrice du segment [AB] est l'ensemble de tous les points situés à égale distance de A et de B.

- Si un point M appartient à la médiatrice de [AB], alors MA = MB.
- Si MA = MB, alors le point M appartient à la médiatrice de [AB].



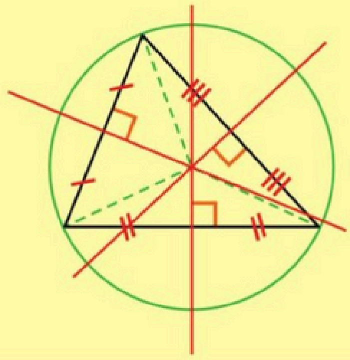
Méthode

Pour construire la médiatrice d'un segment [AB], on peut placer à l'aide d'un compas deux points à égale distance de A et de B.



Propriété **Définition**

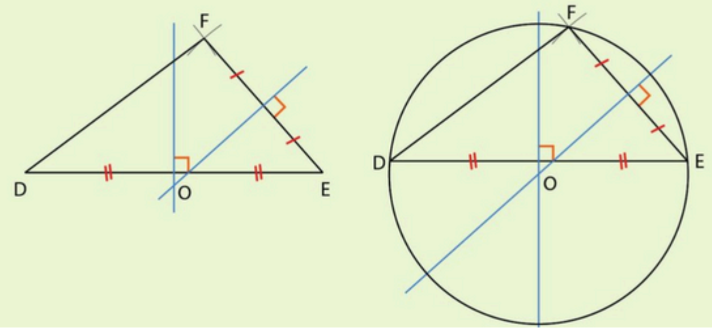
Dans un triangle, les médiatrices des trois côtés sont concourantes : elles passent par un même point qui est le centre du cercle passant par les sommets du triangle.
Ce cercle est appelé le **cercle circonscrit** au triangle.



DEF est un triangle tel que DE = 10 cm, DF = 7,5 cm et FE = 6 cm. Construire le cercle circonscrit à ce triangle.

Solution

Le centre du cercle circonscrit est le point de concours des 3 médiatrices. Il suffit donc de tracer 2 médiatrices pour obtenir le point d'intersection O (centre du cercle cherché). On trace ensuite le cercle de centre O passant par E (ou F, ou D).



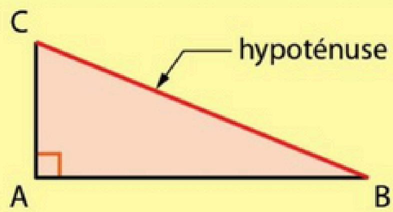
⚔️ Entraine-toi avec *Médiatrices et hauteurs (sauf exercice 5)*⚔️

III] Triangles particuliers

Définitions

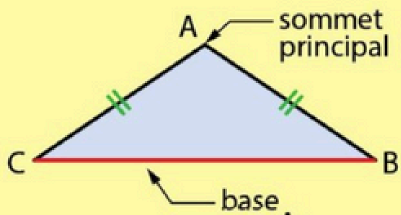
Triangle rectangle

- Un triangle **rectangle** est un triangle qui possède un angle droit.
- Le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'**hypoténuse**.



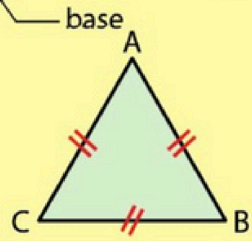
Triangle isocèle

- Un triangle **isocèle** est un triangle qui a deux côtés de même longueur.
- On appelle :
  - **sommet principal** : le point commun à deux côtés de même longueur ;
  - **base** : le côté opposé à un sommet principal.



Triangle équilatéral

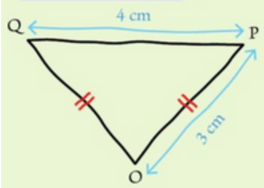
Un triangle **équilatéral** est un triangle dont les trois côtés ont même longueur.



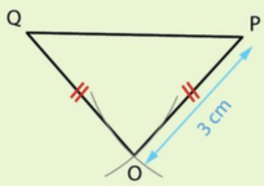
Construire un triangle OPQ isocèle en O tel que OP = 3 cm et QP = 4 cm.

Solution

On trace d'abord une figure à main levée.



On commence par exemple par tracer la base [QP] de longueur 4 cm puis, avec le compas, on trace deux arcs de cercle de centres Q et P et de rayon 3 cm ; ils se coupent en O. Pour finir, on trace les segments [PO] et [QO].

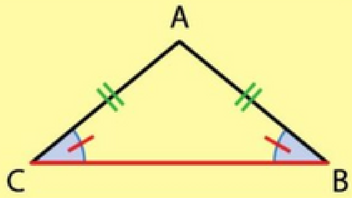


⚔️ Entraine-toi avec *Médiatrices et hauteurs (exercice 5)*⚔️

Propriétés

Soit ABC un triangle.

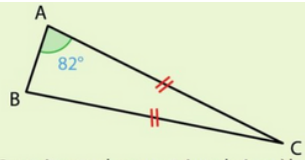
- Si ABC est isocèle en A, alors $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.
- Si $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, alors ABC est isocèle en A.



On donne la figure ci-contre.

1. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$?

2. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$?



Solution

1. Les longueurs CA et CB sont égales, donc ABC est un triangle isocèle en C. On sait que dans un triangle isocèle, les angles à la base ont la même mesure. La base est le côté [AB], on a donc $\widehat{ABC} = \widehat{BAC}$. Donc $\widehat{ABC} = 82°$.

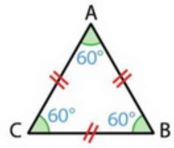
2. On sait que la somme des mesures des trois angles d'un triangle est égale à 180°.

Donc $\widehat{ACB} = 180° - 2 \times 82° = 16°$.

On verra ça plus tard !

Remarques

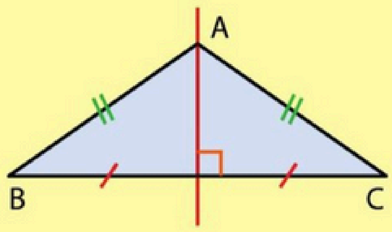
- Si un triangle ABC est équilatéral, alors il est isocèle en A, en B et en C. Ce sont donc les mesures de ses trois angles qui sont égales.
Comme la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°, alors ces trois angles ont pour mesure 60°.
- Réciproquement, si les trois angles d'un triangle ABC ont même mesure, alors il est isocèle en A, en B et en C : il est donc équilatéral.



Propriétés

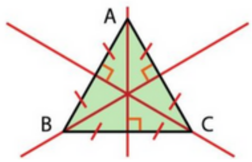
Soit ABC un triangle.

- Si ABC est isocèle en A, alors la hauteur issue de A et la médiatrice de [BC] sont confondues : elles constituent un axe de symétrie du triangle ABC.
- Si la hauteur issue de A et la médiatrice de [BC] sont confondues, alors ABC est isocèle en A.

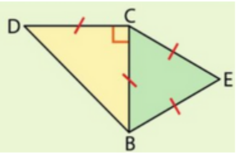


Remarque

Si un triangle ABC est équilatéral, alors les hauteurs et les médiatrices des côtés sont confondues deux à deux et constituent chacune un axe de symétrie du triangle.



Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{DCE}$? Justifier.



Solution

Le triangle ECB est équilatéral car tous ses côtés ont même longueur.

Tous ses angles mesurent donc 60°. Ainsi $\widehat{DCE} = 90° + 60° = 150°$.

On verra ça plus tard !

⚔️ Entraine-toi avec *Nature d'un triangle* ⚔️