Séquence : Equations

I] Résoudre une équation du premier degré

Définitions

- Une **équation** est une égalité qui comporte au moins un nombre de valeur inconnue, généralement désigné par une lettre. Cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue et fausse pour d'autres.
- Une **solution** d'une équation est une valeur de l'inconnu pour laquelle l'égalité est vraie.
- **Résoudre** une équation, c'est en trouver toutes les solutions.

Exemple
On considère l'équation $2 + x = 8$.
Pour $x = 6$, l'égalité est vérifiée, donc 6 est une solution de cette équation.
Pour $x = 9$, l'égalité n'est pas vérifiée, donc 9 n'est pas une solution de l'équation.

Mon exemple :

Propriété

Une égalité reste vraie lorsqu'on ajoute (ou soustrait) un même nombre à chacun de ses membres.

Exemple
On veut résoudre l'équation \(x - 7 = 2\).
On ajoute 7 à chacun de ses membres :
\(x - 7 + 7 = 2 + 7\)
\(x = 9\)
Donc 9 est la solution de cette équation.

Mon exemple :

Propriété

Une égalité reste vraie lorsqu'on multiplie (ou divise) chacun de ses membres par un même nombre non nul.

Exemple 1
On veut résoudre l'équation $\frac{x}{2} = 5$.
On multiplie par 2 chacun de ses membres :
$\frac{x}{2} \times 2 = 5 \times 2$
$x = 10$
Donc 10 est la solution de cette équation.

Exemple 2
On veut résoudre l'équation $3x = -1$.

On divise par 3 chacun de ses membres :
$\frac{3x}{3} = \frac{-1}{3}$
$x = -\frac{1}{3}$
Donc $-\frac{1}{3}$ est la solution de cette équation.

Mon exemple :

II] Résoudre une équation produit

Propriété
On considère un produit de deux facteurs :
- si au moins l'un des facteurs est nul, alors ce produit est nul ;
- si ce produit est nul, alors au moins l'un de ses facteurs est nul.

Exemple
On veut résoudre l'équation $(3x+4)(2x-3) = 0$.
On veut résoudre cette équation, écrite sous la forme d'un produit égal à 0, peut se traduire par :
$3x+4=0$ ou $2x-3=0$
$3x=-4$ ou $2x=3$
$x=-\frac{4}{3}$ ou $x=\frac{3}{2}$
Les solutions de l'équation $(3x+4)(2x-3)=0$ sont $-\frac{4}{3}$ et $\frac{3}{2}$.

Mon exemple :

Remarque
Ce type d'équation, écrite sous la forme d'un produit égal à 0, est appelée une **équation produit**.

Méthode
Pour se ramener à une équation produit, il est parfois nécessaire de factoriser une expression.

Exemple
On veut résoudre l'équation $x^2+7x=0$.
En factorisant le membre de gauche, on obtient $x(x+7)=0$ qui est une équation produit.
On résout cette équation :
$x=0$ ou $x+7=0$
$x=0$ ou $x=-7$
Les solutions de l'équation $x^2+7x=0$ sont 0 et -7.

Mon exemple :

III] Résoudre une équation du type $x^2 = a$

Propriété
a désigne un nombre.
- Si $a > 0$, alors les solutions de l'équation $x^2 = a$ sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, alors la solution de l'équation $x^2 = a$ est 0.
- Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'a aucune solution.

Exemples
- L'équation $x^2 = 9$ a deux solutions : $\sqrt{9} = 3$ et $-\sqrt{9} = -3$.
- L'équation $x^2 = 7$ a deux solutions : $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.
- L'équation $x^2 = 0$ a pour unique solution : 0.
- L'équation $x^2 = -4$ n'a aucune solution.

Mon exemple :

IV] Modéliser une situation

Méthode
Pour modéliser une situation à l'aide d'une équation, on suit les étapes suivantes.
1. Choix de l'inconnue
On choisit l'inconnue, généralement notée x, en fonction de ce que l'on cherche.
2. Mise en équation
On traduit les données de l'énoncé du problème par une équation.
3. Résolution de l'équation
On résout l'équation en utilisant les propriétés du cours.
4. Conclusion
On interprète le résultat en rédigeant une phrase.

Exemple
Agnès a 3 ans de moins que Soukayna, et Xander a le double de l'âge d'Agnès. À eux trois, ils ont 107 ans. Quel est l'âge d'Agnès ?

1. Choix de l'inconnue
   On choisit l'inconnue : on note x l'âge d'Agnès.
2. Mise en équation
   Agnès a 3 ans de moins que Soukayna, donc Soukayna a 3 ans de plus qu'Agnès.
   L'âge de Soukayna est égal à $x + 3$.
   Xander a le double de l'âge d'Agnès, donc l'âge de Xander est égal à $2x$.

La somme de leurs âges est donc égale à $x+x+3+2x$.
Mais on sait également, qu'à eux trois, ils ont 107 ans.
On peut donc écrire l'équation : $x+x+3+2x=107$.

3. Résolution de l'équation

$x+x+3+2x=107$
$4x+3=107$
$4x=104$
$x=26$

4. Conclusion

Agnès a donc 26 ans.

Mon exemple :