Séquence 4 : Théorème de Pythagore

Définition

La **racine carrée** d'un nombre positif a est le nombre positif dont le carré est égal à a.
Elle est notée $\sqrt{a}$ et se lit « racine carrée de a ».

Exemples

- $\sqrt{36} = 6$ car $6^2 = 36$
- $\sqrt{12} \approx 3{,}464$

I] Le théorème

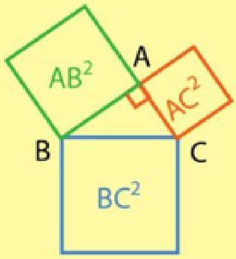
Théorème

Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Autrement dit, si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Cette égalité est appelée « **égalité de Pythagore** ».

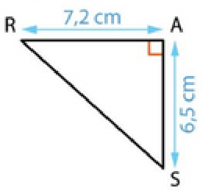


Exemples

- **Calculer la longueur de l'hypoténuse**

Le triangle ARS est rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore :

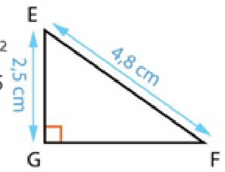
$RS^2 = RA^2 + AS^2$
$RS^2 = 7{,}2^2 + 6{,}5^2$
$RS^2 = 51{,}84 + 42{,}25$
$RS^2 = 94{,}09$
$RS = \sqrt{94{,}09}$
$RS = 9{,}7$ cm



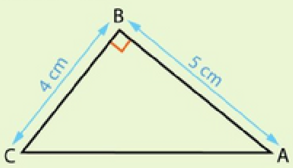
- **Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit**

Le triangle EFG est rectangle en G.
D'après le théorème de Pythagore :

$EF^2 = EG^2 + GF^2$
$4{,}8^2 = 2{,}5^2 + GF^2$
$23{,}04 = 6{,}25 + GF^2$
$GF^2 = 23{,}04 - 6{,}25$
$GF^2 = 16{,}79$
$GF = \sqrt{16{,}79}$
$GF \approx 4{,}1$ cm



Le triangle ABC est rectangle en B tel que AB = 5 cm et BC = 4 cm.



- Calculer la longueur AC.

Solution

On indique le triangle rectangle dans lequel on se place ainsi que le théorème utilisé.

Le triangle ABC est rectangle en B.
D'après le théorème de Pythagore :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$AC^2 = 5^2 + 4^2$
$AC^2 = 25 + 16$
$AC^2 = 41$
$AC = \sqrt{41}$ ◀ $\sqrt{41}$ est la valeur exacte de AC.
$AC \approx 6{,}4$ cm

À l'aide d'une calculatrice, on cherche le nombre positif dont le carré est égal à 41 :

On peut vérifier que la plus grande des trois longueurs est bien celle de l'hypoténuse.

⚔️Entraine-toi avec *Calculer une longueur avec Pythagore* ⚔️
🌿Groupe : *Le martin pêcheur et le train le plus rapide du monde* 🌿

II] Sa réciproque

Théorème

Réciproque du théorème de Pythagore

Dans un triangle, si le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

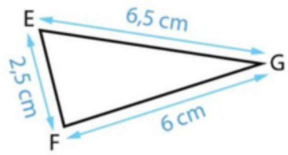
Méthode

Soit ABC un triangle dont le plus grand côté est [BC].

- Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.
- Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle.

Exemple

Le triangle EFG ci-contre est-il rectangle ?



[EG] est le plus grand côté.

- $EG^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$
- $EF^2 + FG^2 = 2{,}5^2 + 6^2 = 6{,}25 + 36 = 42{,}25$

Donc $EG^2 = EF^2 + FG^2$.

L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc le triangle EFG est rectangle en F.

On considère le triangle ABC tel que AB = 2 dm, BC = 1,2 dm et AC = 1,6 dm.

- Ce triangle est-il rectangle ?

Solution

On cherche si l'égalité de Pythagore est vraie dans ce triangle. Pour cela, on repère le plus grand côté, puis on calcule séparément :
- le carré du plus grand côté ;
- la somme des carrés des deux autres côtés.

[AB] est le plus grand côté.

- $AB^2 = 2^2 = 4$
- $BC^2 + AC^2 = 1{,}2^2 + 1{,}6^2 = 1{,}44 + 2{,}56 = 4$

Donc $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc le triangle ABC est rectangle en C.

On considère le triangle IJK tel que IJ = 4,4 m, JK = 6 m et IK = 7,6 m.

- Ce triangle est-il rectangle ?

Solution

[IK] est le plus grand côté.

- $IK^2 = 7{,}6^2 = 57{,}76$
- $IJ^2 + JK^2 = 4{,}4^2 + 6^2 = 19{,}36 + 36 = 55{,}36$

Donc $IK^2 \neq IJ^2 + JK^2$.

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, donc le triangle IJK n'est pas rectangle.

⚔️Entraine-toi avec *Déterminer si un triangle est rectangle avec Pythagore* ⚔️