Act. 1

Définition

Exemple 1

Anna achète pour 1,50 € de bonbons à la boulangerie.
Chaque bonbon coute 0,15 €.

*prix à payer = nombre de bonbons achetés × **0,15***

Le prix à payer est proportionnel au nombre de bonbons achetés, avec 0,15 pour coefficient de proportionnalité.
Avec 1,50 €, Anna peut acheter 10 bonbons :

1,50 = 10 × 0,15.

Exemple 2

À la boulangerie, Isham lit :

> Prix d'une baguette : 0,85 €
> Pour 3 baguettes achetées, la 4^e est offerte.

Le prix de 3 baguettes est le même que le prix de 4 baguettes.
Le prix à payer n'est pas proportionnel au nombre de baguettes achetées.

1. Lundi, au marché, Alvin a acheté 1 kg de tomates pour 2,65 €. Mercredi, il achète 3 kg de ces mêmes tomates pour 7,95 €.
Le prix à payer est-il proportionnel à la masse de tomates achetées ?

2. Chloé, qui adore les fruits exotiques, se laisse tenter par des mangues. Elle peut lire : « 2,80 € la mangue et 5 € les 2 ».
Le prix est-il proportionnel au nombre de mangues achetées ?

Solution

1. 1 × 2,65 = 2,65 et 3 × 2,65 = 7,95.
Dans les deux cas, le prix à payer est égal à la masse de tomates achetées multipliée par 2,65.
Le prix à payer est donc proportionnel à la masse de tomates achetées.

2. Une mangue coute 2,80 €. Si le prix était proportionnel au nombre de mangues achetées, deux mangues couteraient 2 x 2,80 € soit 5,60 €.
Le prix à payer n'est donc pas proportionnel au nombre de mangues achetées.

Définition

Méthode

Exemple 1

On a relevé dans le tableau ci-dessous la consommation, en fonction du temps, d'un robinet mal fermé.

Temps écoulé (en jours)	1	7	365
Quantité d'eau (en L)	0,432	3,024	157,68

× 0,432

On calcule les quotients : $\frac{0{,}432}{1} = 0{,}432$; $\frac{3{,}024}{7} = 0{,}432$; $\frac{157{,}68}{365} = 0{,}432$

Tous les quotients sont égaux à 0,432 : le tableau est donc un tableau de proportionnalité.
La quantité d'eau est proportionnelle au temps écoulé, avec 0,432 pour coefficient de proportionnalité.

Exemple 2

Angèle et Clara achètent respectivement un pack de 6 litres de jus d'orange à 9,12 € et un pack de 4 litres à 6,48 €. On récapitule ces résultats dans un tableau ci-contre.

Quantité de jus (en L)	6	4
Prix à payer (en €)	9,12	6,48

On calcule les quotients : $\frac{9{,}12}{6} = 1{,}52$; $\frac{6{,}48}{4} = 1{,}62$

Les quotients ne sont pas égaux, ce tableau n'est donc pas un tableau de proportionnalité.

Mila s'entraine en vue d'un semi-marathon. Voici ses derniers résultats :

Distance (en km)	9,6	12,4	16,5	21,1
Temps (en min)	54	69,75	95	124,65

- Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Si oui, avec quel coefficient de proportionnalité ?

Solution

On calcule les quotients :

$$\frac{54}{9{,}6} = 5{,}625 \ ; \ \frac{69{,}75}{12{,}4} = 5{,}625 \ ; \ \frac{95}{16{,}5} \approx 5{,}76$$

Tous les quotients ne sont pas égaux, ce n'est donc pas un tableau de proportionnalité : la distance et le temps ne sont pas des grandeurs proportionnelles.

Il n'y a pas de coefficient de proportionnalité.

Alizée a découvert un site qui développe des photos en format Polaroid et affiche les tarifs suivants.

Nombre de photos	1	10	50	250
Prix à payer (en €)	0,07	0,70	3,50	17,50

- Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Si oui, avec quel coefficient de proportionnalité ?

Solution

On calcule les quotients :

$$\frac{0{,}07}{1} = 0{,}07 \ ; \ \frac{0{,}70}{10} = 0{,}07 \ ; \ \frac{3{,}50}{50} = 0{,}07 \ ; \ \frac{17{,}50}{250} = 0{,}07$$

Tous les quotients sont égaux, c'est donc un tableau de proportionnalité : le prix à payer est proportionnel au nombre de photos, avec pour coefficient de proportionnalité 0,07.

⚔Entraine-toi avec *Reconnaître une situation de proportionnalité* ⚔ Act. 2

Propriété

Méthode 1

À l'aide du coefficient de proportionnalité

Exemple

Marie voudrait mettre 5,5 L d'essence dans son scooter. La station-service affiche un prix de l'essence à 1,22 € le litre. Combien devrait-elle payer ?

Marie n'a que 5 €. Quelle quantité d'essence peut-elle acheter ?

On représente cette situation par un tableau de proportionnalité :

Quantité d'essence achetée (en L)	1	5,5	?
Prix à payer (en €)	1,22	?	5

$\div 1{,}22$; $\times 1{,}22$

Le prix à payer est proportionnel à la quantité d'essence achetée avec pour coefficient de proportionnalité 1,22. Marie devrait donc payer 5,5 × 1,22 € soit 6,71 €.

Avec 5 €, Marie peut acheter 5 L ÷ 1,22 soit environ 4,1 L.

Un vendeur ambulant propose des marrons chauds à 25 € le kg.

1. Combien coute une portion de 150 g de marrons chauds ?
2. Quelle quantité de marrons chauds peut-on acheter pour 10 € ?

Solution

Quantité de marrons achetés (en kg)	1	0,15	?
Prix à payer (en €)	25	?	10

$\div 25$; $\times 25$

1. Il s'agit d'une situation de proportionnalité.
150 g = 0,15 kg
0,15 × 25 = 3,75
Une portion de 150 g de marrons coute 3,75 €.
2. 10 ÷ 25 = 0,4. Avec 10 €, on peut acheter 0,4 kg, soit 400 g de marrons.

⚔Entraine-toi avec *Calculer une quatrième proportionnelle* ⚔

Méthode 2

Liens entre les colonnes

Exemple

Une recette de pâte à crêpes indique qu'il faut 300 g de farine pour cuisiner 12 crêpes. Quelle masse de farine faut-il pour cuisiner 4 crêpes ? 16 crêpes ?

La masse de farine à utiliser est proportionnelle au nombre de crêpes à cuisiner, on peut donc faire un tableau de proportionnalité.

÷ 3

Nombre de crêpes	12	4	16
Masse de farine (en g)	300	?	?

Pour faire 4 crêpes, il faut utiliser :
300 g $\div 3$ soit 100 g de farine

Pour faire 16 crêpes, il faut utiliser :
300 g $+ 100$ g soit 400 g de farine

Voici les ingrédients de la recette d'un gâteau au yaourt pour 4 personnes :
500 g de farine ; 250 g de sucre ; 2 œufs ; 1 yaourt nature ; 5 g de levure en poudre ; 20 cL d'huile.

- Quelle quantité de chaque ingrédient doit-on utiliser pour faire un gâteau au yaourt pour 10 personnes ?

Solution

× 2,5

Nombre de personnes	4	10
Masse de farine (g)	500	1 250

Pour chaque ingrédient, la quantité est proportionnelle au nombre de personnes. Pour passer de 4 à 10 personnes, il faut multiplier la quantité par 2,5 (car $\frac{10}{4} = 2{,}5$). Il faut donc $2{,}5 \times 500$ g de farine, soit 1 250 g (ou 1,25 kg) de farine.

De la même façon, on multiplie la quantité de chaque ingrédient par 2,5, ce qui donne 625 g de sucre, 5 œufs, 2,5 yaourts nature, 12,5 g de levure en poudre et 50 cL d'huile.

Méthode 3

Passage par l'unité

Exemple

Lucile a acheté 3 cahiers pour 4,05 €.
Emma a besoin de 7 cahiers. Combien devra-t-elle payer ?

Nombre de cahiers	3	7
Prix (en €)	4,05	?

3 cahiers coutent 4,05 €, donc 1 cahier coute $\frac{4{,}05\,€}{3} = 1{,}35$ €.

Donc 7 cahiers coutent $7 \times 1{,}35\,€ = 9{,}45$ €.

Lionel a trouvé un petit job d'été. Il est payé à la journée. En travaillant 5 jours, il a gagné 325 €.

1. Combien gagnera-t-il en travaillant pendant 9 jours ?
2. Combien de jours devra-t-il travailler pour obtenir les 1 000 € qu'il convoite ?

Solution

Nombre de jours de travail	5	9	?
Salaire (€)	325	?	1 000

1. $\frac{325}{5} = 65$ donc 1 jour de travail est payé 65 €.
$65\,€ \times 9 = 585$ €. Lionel sera payé 585 € pour 9 jours.
2. $\frac{1\,000}{65} \approx 15{,}4$ donc Lionel devra travailler 16 jours pour gagner au moins 1 000 €.

Bilan environnemental de nos assiettes

Propriété

Exemple

Dans un pot de crème fraiche de 20 cL, il y a 12 % de matière grasse.

12 % de 20 = $\frac{12}{100} \times 20 = 2{,}4$. La quantité de matière grasse dans le pot est égale à 2,4 g.

Remarque

Un pourcentage exprime une proportion par rapport à 100. Il peut s'écrire sous plusieurs formes :

15 %	=	$\frac{15}{100}$	=	0,15
pourcentage		**écriture fractionnaire**		**écriture décimale**

Entraine-toi avec Calculer une quatrième proportionnelle

Méthode

Exemples

- **À l'aide d'une proportion de dénominateur 100**

4 personnes sur 5 trient leurs déchets. Quel pourcentage cela représente-t-il ?

On peut exprimer $\frac{4}{5}$ comme une proportion de dénominateur 100 : $\frac{4}{5} = \frac{80}{100} = 80\ \%$.

80 % des personnes trient leurs déchets.

- **À l'aide d'un tableau de proportionnalité**

Dans une classe de 23 élèves de 3ᵉ, 15 élèves connaissent leur orientation scolaire pour l'année suivante. Quel pourcentage cela représente-t-il ?

On peut représenter cette situation par un tableau de proportionnalité :

Nombre d'élèves connaissant leur orientation	15	?
Nombre d'élèves dans la classe	23	100

$\div \frac{23}{15}$; $\times \frac{23}{15}$

$\boxed{?} = 100 \div \frac{23}{15} \approx 65{,}2$. La proportion d'élèves connaissant leur orientation est d'environ 65,2 %.

En 2019, on comptait 228 femmes et 349 hommes à l'Assemblée nationale.

- Quel était le pourcentage de femmes députées ?

Solution

Le nombre total de députés est 228 + 349 = 577.

Le coefficient de proportionnalité qui permet de calculer le nombre de femmes députées est $\frac{228}{577}$.

Le pourcentage de femmes députées était donc $100 \times \frac{228}{577} \approx 40\ \%$.

Nombre de femmes députées	228	?
Nombre total de députés	577	100

$\times \frac{228}{577}$

En 2003, on a utilisé en France 15 milliards de sacs plastique. En 2010, cette consommation avait diminué de 95 %.

- Combien de sacs plastique a-t-on utilisé en 2010 ?

Solution

$\frac{95}{100} \times 15\,000\,000\,000 = 14\,250\,000\,000$

Le nombre de sacs plastique utilisés a diminué de 14 250 000 000.

$15\,000\,000\,000 - 14\,250\,000\,000 = 750\,000\,000$

On a utilisé 750 millions de sacs plastique en 2010.

⚔️Entraine-toi avec *Pourcentages*⚔️

🌿 *Economie circulaire : Aluminium* 🌿

Définition

Remarque

Dire qu'un plan est à l'échelle $\frac{1}{1\,000}$ signifie que 1 cm sur le plan représente 1 000 cm en réalité.

Exemple

La distance à vol d'oiseau entre Bordeaux et Pau sur une carte à l'échelle $\frac{1}{250\,000}$ est de 86 cm.

Distances sur le plan (en cm)	1	86
Distances réelles (en cm)	250 000	?

$\times 86$

$\boxed{?} = 250\,000 \times 86 = 21\,500\,000$.

La distance entre Bordeaux et Pau est donc de 21 500 000 cm, soit 215 km.

La distance à vol d'oiseau entre deux villes est 75 km. Sur une carte, on mesure 5 cm entre ces villes.

1. Quelle est l'échelle de la carte ?
2. La distance sur la carte entre deux autres villes est de 3,2 cm. Quelle est la distance réelle entre ces deux villes ?

Solution

Longueur sur la carte (cm)	1	5	3,2
Longueur réelle (cm)	?	7 500 000	?

$\times 1\,500\,000$

1. 75 km = 7 500 000 cm
Chercher l'échelle de la carte revient à chercher quelle longueur 1 cm sur la carte représente dans la réalité.
Le coefficient de proportionnalité qui permet de calculer les longueurs réelles est $\frac{7\,500\,000}{5} = 1\,500\,000$.
L'échelle de la carte est donc $\frac{1}{1500\,000}$.
2. $3{,}2\text{ cm} \times 1\,500\,000 = 4\,800\,000\text{ cm} = 48\text{ km}$. La distance entre ces deux villes est de 48 km.

Définition

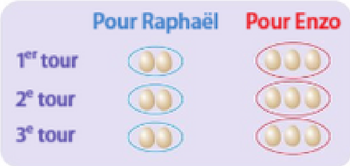
Exemples

- Deux nombres a et b sont dans le ratio 2 : 3 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$.

Le ratio 2 : 3 peut se lire « 2 pour 3 ».

- Partager des œufs de Pâques selon le ratio 2 : 3 entre Raphaël et Enzo signifie qu'à chaque fois qu'on donne 2 œufs à Raphaël, on en donne 3 à Enzo.

Le nombre d'œufs de Raphaël et le nombre d'œufs de Enzo sont alors dans le ratio 2 : 3.



Propriétés

Remarque

Cette propriété reste vraie si l'on remplace 2 et 3 par d'autres nombres positifs.

Exemple

On partage 30 œufs de Pâques selon le ratio 2 : 3 entre Raphaël et Enzo.

- Raphaël obtiendra $\frac{2}{5}$ des œufs, soit $\frac{2}{5} \times 30 = 12$ œufs.
- Enzo obtiendra $\frac{3}{5}$ des œufs, soit $\frac{3}{5} \times 30 = 18$ œufs.

Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité.

12	18
2	3

Charlotte veut faire de la peinture mauve en mélangeant du bleu et du rouge dans le ratio 3 : 2. Elle dispose de 1,5 L de peinture bleue.

1. Quelle quantité de peinture rouge doit-elle utiliser ?
2. Combien obtiendra-t-elle de peinture mauve ?

Solution

1. Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité, avec 2 pour coefficient de proportionnalité.

1,5	
3	2

$\div 2$; $\times 2$

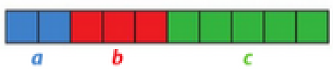
On a donc : $\frac{2}{2} = 1$. Charlotte doit utiliser 1 L de peinture rouge.

2. La quantité de peinture mauve qu'elle obtiendra sera : 1,5 L + 1 L = 2,5 L.

Définition

Exemples

- Trois nombres a, b et c sont dans le ratio 2 : 3 : 5 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$.



- Dans la recette d'un gâteau pour 4 personnes, il faut 200 g de sucre, 300 g de farine et 500 g de lait. Les masses de sucre, de farine et de lait sont dans le ratio 2 : 3 : 5 puisque $\frac{200}{2} = \frac{300}{3} = \frac{500}{5} = 100$.

Le cocktail Bora-Bora se prépare avec de la grenadine, du jus de fruit de la passion et du jus d'ananas selon le ratio 1 : 6 : 13.

- Pour préparer 1 litre de ce cocktail, quelle quantité de chaque ingrédient faut-il ?

Solution

1 + 6 + 13 = 20 donc il faut :

- $\frac{1}{20} \times 100$ cL = 5 cL de grenadine ;
- $\frac{6}{20} \times 100$ cL = 30 cL de jus de fruit de la passion ;
- $\frac{13}{20} \times 100$ cL = 65 cL de jus d'ananas.