Séquence 1 : Nombres entiers

I] Déterminer les diviseurs d'un nombre entier

Définition

Un **entier naturel** est un nombre entier positif ou nul.

Propriété **Définition**

a et b désignent deux entiers naturels ($b \neq 0$).
Effectuer la division **euclidienne de a par b**, c'est déterminer les deux entiers naturels q et r tels que :

$$a = b \times q + r \text{ avec } r < b$$

a s'appelle le dividende, b le diviseur, q le **quotient** et r le **reste**.

Exemple

Division euclidienne de 25 par 3 :

dividende → 25 ; diviseur → 3 ; quotient → 8 ; reste → 1

$$\begin{array}{r|l} 25 & 3 \\ \cline{2-2} -24 & 8 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

On ne peut jamais diviser par 0 !

On a bien : $25 = 3 \times 8 + 1$, avec $1 < 3$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de 187 par 15.
2. Quelle égalité peut-on alors écrire ?

Solution

1.

$$\begin{array}{r|l} 187 & 15 \\ \cline{2-2} -15 & 12 \\ \cline{1-1} 37 & \\ -30 & \\ \cline{1-1} 7 & \end{array}$$

Tu n'es pas obligé de poser les soustractions. Tu peux faire les calculs de tête et poser :

$$\begin{array}{r|l} 187 & 15 \\ \cline{2-2} 37 & 12 \\ 7 & \end{array}$$

Le quotient est 12, le reste est 7.
2. On peut alors écrire l'égalité $187 = 15 \times 12 + 7$.

⚔️Entraine-toi avec *Division euclidienne* ⚔️
🌍*Running the numbers* 🌍

Définitions

a et b désignent deux entiers naturels ($b \neq 0$).

Lorsque la division euclidienne de a par b donne un reste nul, on a $a = b \times q$ où q est un entier naturel.
On dit que :

- a est un **multiple** de b
- b est un **diviseur** de a
- a est **divisible** par b

Exemple

On a : $85 = 5 \times 17$.

- 85 est un multiple de 17 et de 5.
- 5 et 17 sont des diviseurs de 85.
- 85 est divisible par 17 et par 5.

$$\begin{array}{r|l} 85 & 5 \\ \cline{2-2} -5 & 17 \\ \cline{1-1} 35 & \\ -35 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Tout entier naturel non nul est divisible par 1 et par lui-même.

Donner tous les diviseurs de 40.

Solution

On utilise les tables de multiplications et/ou les critères de divisibilité.

$40 = 1 \times 40 \quad 40 = 2 \times 20 \quad 40 = 4 \times 10 \quad 40 = 5 \times 8$

40 a donc 8 diviseurs : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 20 et 40.

Propriétés

Critères de divisibilité

- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, 2, 4, 6 ou 8, alors il est divisible par 2.
- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3, alors ce nombre est divisible par 3.
- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5, alors il est divisible par 5.
- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9, alors ce nombre est divisible par 9.
- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, alors il est divisible par 10.

Le nombre 2 781 est-il divisible par 2 ? Est-il divisible par 3 ?

Solution

Le chiffre des unités de 2 781 est 1 donc 2 781 n'est pas divisible par 2.

$2 + 7 + 8 + 1 = 18$ ◀ On additionne tous les chiffres de 2 781.

18 est divisible par 3 donc 2 781 est divisible par 3.

⚔️Entraine-toi avec *Critère de divisibilité* ⚔️

Act. 2

II] Reconnaître un nombre premier

Définition

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple

- 6 n'est pas un nombre premier car il est divisible par 2.
- 7 est un nombre premier : il n'est divisible que par 1 et par 7.

Remarques

- 0 n'est pas premier car il possède une infinité de diviseurs.
- 1 n'est pas premier car il possède un seul diviseur : lui-même.
- 2 est le seul nombre premier pair car tous les nombres pairs sont divisibles par 2.

Le nombre 567 est-il premier ?

Solution

On cherche si 567 admet d'autres diviseurs que 1 et lui-même. On utilise d'abord les critères de divisibilité.

- 567 est impair donc il n'est pas divisible par 2.
- 567 ne se termine pas par 0 ou 5 donc il n'est pas divisible par 5.
- On cherche si 567 est divisible par 3. Pour cela, on calcule la somme de ses chiffres :
$5 + 6 + 7 = 18$.

La somme des chiffres de 567 est divisible par 3 donc 567 est divisible par 3.
On peut conclure que 567 n'est pas un nombre premier.

Justifier que 119 n'est pas un nombre premier.

Solution

- 119 est impair donc il n'est pas divisible par 2. Il n'est donc divisible par aucun nombre pair. ◀ Si 119 était divisible par un nombre pair, alors 119 serait un multiple de 2 et serait divisible par 2.
- 119 ne se termine ni par 0 ni par 5, donc il n'est pas divisible par 5.
- $1 + 1 + 9 = 11$; 11 n'est divisible ni par 3, ni par 9 donc 119 non plus.
- On effectue la division euclidienne de 119 par 7.
Le reste est nul, donc 119 est divisible par 7.
119 n'est pas un nombre premier car il est divisible par 7.

Propriété

Les 10 nombres premiers inférieurs à 30 sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29.

⚔️Entraine-toi avec *Le crible d'Eratosthène* ⚔️

Propriété

Il existe une infinité de nombres premiers.

III] Décomposer un entier en produit de facteurs premiers

Act. 3

Propriété

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de facteurs premiers.

Exemples

- $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$
- $728 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 13$

Propriété

Pour un entier donné, il n'existe qu'une seule décomposition en produit de facteurs premiers (si l'on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs).

Méthode

Pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers :
– on écrit ce nombre comme un produit de deux facteurs (différents de 1) ;
– on recommence avec les facteurs qui ne sont pas des nombres premiers, jusqu'à n'avoir que des nombres premiers.

Exemple

$60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers.

$A = 126 \quad B = 450$

Solution

$A = 126 = 2 \times 63 = 2 \times 3 \times 21 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

La décomposition de 126 en produit facteurs premiers est :
$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$.

$B = 450 = 45 \times 10 = 5 \times 9 \times 5 \times 2 = 5 \times 3 \times 3 \times 5 \times 2$

La décomposition de 450 en produit de facteurs premiers est :
$450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$.

⚔️Entraine-toi avec *Décomposition en produit de facteurs premiers* ⚔️