Séquence 1 : Nombres entiers

I] Déterminer les diviseurs d'un nombre entier

Définition

Un **entier naturel** est un nombre entier positif ou nul.

Propriété **Définition**

a et b désignent deux entiers naturels ($b \neq 0$).

Effectuer la division **euclidienne de a par b**, c'est déterminer les deux entiers naturels q et r tels que :

$$a = b \times q + r \text{ avec } r < b$$

a s'appelle le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

Exemple

Division euclidienne de 25 par 3 :

$$\begin{array}{r|l} 25 & 3 \\ \hline -24 & 8 \\ 1 & \end{array}$$

dividende : 25 ; diviseur : 3 ; quotient : 8 ; reste : 1

On ne peut jamais diviser par 0 !

On a bien : $25 = 3 \times 8 + 1$, avec $1 < 3$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de 187 par 15.

2. Quelle égalité peut-on alors écrire ?

Solution

1.

$$\begin{array}{r|l} 187 & 15 \\ \hline -15 & 12 \\ 37 & \\ -30 & \\ 7 & \end{array}$$

Tu n'es pas obligé de poser les soustractions. Tu peux faire les calculs de tête et poser :

$$\begin{array}{r|l} 187 & 15 \\ \hline 37 & 12 \\ 7 & \end{array}$$

Le quotient est 12, le reste est 7.

2. On peut alors écrire l'égalité $187 = 15 \times 12 + 7$.

⚔️Entraine-toi avec *Division euclidienne* ⚔️

🌍*Running the numbers* 🌍

Définitions

a et b désignent deux entiers naturels ($b \neq 0$).

Lorsque la division euclidienne de a par b donne un reste nul, on a $a = b \times q$ où q est un entier naturel.

On dit que :

- a est un **multiple** de b
- b est un **diviseur** de a
- a est **divisible** par b

Exemple

On a : $85 = 5 \times 17$.

- 85 est un multiple de 17 et de 5.
- 5 et 17 sont des diviseurs de 85.
- 85 est divisible par 17 et par 5.

$$\begin{array}{r|l} 85 & 5 \\ \hline -5 & 17 \\ 35 & \\ -35 & \\ 0 & \end{array}$$

Tout entier naturel non nul est divisible par 1 et par lui-même.

Donner tous les diviseurs de 40.

Solution

On utilise les tables de multiplications et/ou les critères de divisibilité.

$40 = 1 \times 40 \quad 40 = 2 \times 20 \quad 40 = 4 \times 10 \quad 40 = 5 \times 8$

40 a donc 8 diviseurs : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 20 et 40.

Propriétés

Critères de divisibilité

- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, 2, 4, 6 ou 8, alors il est divisible par 2.
- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3, alors ce nombre est divisible par 3.
- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5, alors il est divisible par 5.
- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9, alors ce nombre est divisible par 9.
- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, alors il est divisible par 10.

Le nombre 2 781 est-il divisible par 2 ? Est-il divisible par 3 ?

Solution

Le chiffre des unités de 2 781 est 1 donc 2 781 n'est pas divisible par 2.

$2 + 7 + 8 + 1 = 18$ ◀ On additionne tous les chiffres de 2 781.

18 est divisible par 3 donc 2 781 est divisible par 3.

⚔️Entraine-toi avec *Critère de divisibilité* ⚔️

II] Reconnaître un nombre premier

Act. 2

Définition

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple

- 6 n'est pas un nombre premier car il est divisible par 2.
- 7 est un nombre premier : il n'est divisible que par 1 et par 7.

Remarques

- 0 n'est pas premier car il possède une infinité de diviseurs.
- 1 n'est pas premier car il possède un seul diviseur : lui-même.
- 2 est le seul nombre premier pair car tous les nombres pairs sont divisibles par 2.

Le nombre 567 est-il premier ?

Solution

On cherche si 567 admet d'autres diviseurs que 1 et lui-même. On utilise d'abord les critères de divisibilité.

- 567 est impair donc il n'est pas divisible par 2.
- 567 ne se termine pas par 0 ou 5 donc il n'est pas divisible par 5.
- On cherche si 567 est divisible par 3. Pour cela, on calcule la somme de ses chiffres :
$5 + 6 + 7 = 18$.

La somme des chiffres de 567 est divisible par 3 donc 567 est divisible par 3.
On peut conclure que 567 n'est pas un nombre premier.

Justifier que 119 n'est pas un nombre premier.

Solution

- 119 est impair donc il n'est pas divisible par 2. Il n'est donc divisible par aucun nombre pair. ◀ Si 119 était divisible par un nombre pair, alors 119 serait un multiple de 2 et serait divisible par 2.
- 119 ne se termine ni par 0 ni par 5, donc il n'est pas divisible par 5.
- $1 + 1 + 9 = 11$; 11 n'est divisible ni par 3, ni par 9 donc 119 non plus.
- On effectue la division euclidienne de 119 par 7.
Le reste est nul, donc 119 est divisible par 7.
119 n'est pas un nombre premier car il est divisible par 7.

Propriété

Les 10 nombres premiers inférieurs à 30 sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29.

⚔️Entraine-toi avec *Le crible d'Eratosthène* ⚔️

Propriété

Il existe une infinité de nombres premiers.

III] Décomposer un entier en produit de facteurs premiers

Act. 3

Propriété

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de facteurs premiers.

Exemples

- $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$
- $728 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 13$

Propriété

Pour un entier donné, il n'existe qu'une seule décomposition en produit de facteurs premiers (si l'on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs).

Méthode

Pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers :
– on écrit ce nombre comme un produit de deux facteurs (différents de 1) ;
– on recommence avec les facteurs qui ne sont pas des nombres premiers, jusqu'à n'avoir que des nombres premiers.

Exemple

$60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers.

$A = 126$ $B = 450$

Solution

$A = 126 = 2 \times 63 = 2 \times 3 \times 21 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

La décomposition de 126 en produit facteurs premiers est :

$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$.

$B = 450 = 45 \times 10 = 5 \times 9 \times 5 \times 2 = 5 \times 3 \times 3 \times 5 \times 2$

La décomposition de 450 en produit de facteurs premiers est :

$450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$.

⚔️Entraine-toi avec *Décomposition en produit de facteurs premiers* ⚔️

Séquence 2 : Grandeurs et proportionnalité

I] Reconnaître une situation de proportionnalité

Définition

Deux grandeurs sont **proportionnelles** si les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre appelé **coefficient de proportionnalité**.

Exemple 1

Anna achète pour 1,50 € de bonbons à la boulangerie.
Chaque bonbon coute 0,15 €.

prix à payer =
nombre de bonbons achetés × **0,15**

Le prix à payer est proportionnel au nombre de bonbons achetés, avec 0,15 pour coefficient de proportionnalité.
Avec 1,50 €, Anna peut acheter 10 bonbons :
1,50 = 10 × 0,15.

Exemple 2

À la boulangerie, Isham lit :

Prix d'une baguette : 0,85 €
Pour 3 baguettes achetées, la 4^e est offerte.

Le prix de 3 baguettes est le même que le prix de 4 baguettes.
Le prix à payer n'est pas proportionnel au nombre de baguettes achetées.

1. Lundi, au marché, Alvin a acheté 1 kg de tomates pour 2,65 €. Mercredi, il achète 3 kg de ces mêmes tomates pour 7,95 €.
Le prix à payer est-il proportionnel à la masse de tomates achetées ?

2. Chloé, qui adore les fruits exotiques, se laisse tenter par des mangues. Elle peut lire : « 2,80 € la mangue et 5 € les 2 ».
Le prix est-il proportionnel au nombre de mangues achetées ?

Solution

1. 1 × 2,65 = 2,65 et 3 × 2,65 = 7,95.
Dans les deux cas, le prix à payer est égal à la masse de tomates achetées multipliée par 2,65.
Le prix à payer est donc proportionnel à la masse de tomates achetées.

2. Une mangue coute 2,80 €. Si le prix était proportionnel au nombre de mangues achetées, deux mangues couteraient 2 x 2,80 € soit 5,60 €.
Le prix à payer n'est donc pas proportionnel au nombre de mangues achetées.

Définition

Dans un tableau représentant deux grandeurs, si les valeurs de la première grandeur sont proportionnelles aux valeurs de la seconde, ce tableau est appelé **tableau de proportionnalité**.

Méthode

Pour déterminer si deux grandeurs représentées dans un tableau sont proportionnelles, on peut calculer les quotients des valeurs correspondantes de ces grandeurs.

Exemple 1

On a relevé dans le tableau ci-dessous la consommation, en fonction du temps, d'un robinet mal fermé.

Temps écoulé (en jours)	1	7	365
Quantité d'eau (en L)	0,432	3,024	157,68

× 0,432

On calcule les quotients : $\frac{0,432}{1} = 0,432$; $\frac{3,024}{7} = 0,432$; $\frac{157,68}{365} = 0,432$

Tous les quotients sont égaux à 0,432 : le tableau est donc un tableau de proportionnalité.
La quantité d'eau est proportionnelle au temps écoulé, avec 0,432 pour coefficient de proportionnalité.

Exemple 2

Angèle et Clara achètent respectivement un pack de 6 litres de jus d'orange à 9,12 € et un pack de 4 litres à 6,48 €. On récapitule ces résultats dans un tableau ci-contre.

Quantité de jus (en L)	6	4
Prix à payer (en €)	9,12	6,48

On calcule les quotients : $\frac{9,12}{6} = 1,52$; $\frac{6,48}{4} = 1,62$

Les quotients ne sont pas égaux, ce tableau n'est donc pas un tableau de proportionnalité.
Le prix à payer n'est pas proportionnel à la quantité de jus d'orange achetée ; il n'y a pas de coefficient de proportionnalité.

Mila s'entraine en vue d'un semi-marathon. Voici ses derniers résultats :

Distance (en km)	9,6	12,4	16,5	21,1
Temps (en min)	54	69,75	95	124,65

• Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Si oui, avec quel coefficient de proportionnalité ?

Solution

On calcule les quotients :

$$\frac{54}{9{,}6} = 5{,}625 \;;\; \frac{69{,}75}{12{,}4} = 5{,}625 \;;\; \frac{95}{16{,}5} \approx 5{,}76$$

Tous les quotients ne sont pas égaux, ce n'est donc pas un tableau de proportionnalité : la distance et le temps ne sont pas des grandeurs proportionnelles.

Il n'y a pas de coefficient de proportionnalité.

Alizée a découvert un site qui développe des photos en format Polaroid et affiche les tarifs suivants.

Nombre de photos	1	10	50	250
Prix à payer (en €)	0,07	0,70	3,50	17,50

• Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Si oui, avec quel coefficient de proportionnalité ?

Solution

On calcule les quotients :

$$\frac{0{,}07}{1} = 0{,}07 \;;\; \frac{0{,}70}{10} = 0{,}07 \;;\; \frac{3{,}50}{50} = 0{,}07 \;;\; \frac{17{,}50}{250} = 0{,}07$$

Tous les quotients sont égaux, c'est donc un tableau de proportionnalité : le prix à payer est proportionnel au nombre de photos, avec pour coefficient de proportionnalité 0,07.

⚔Entraine-toi avec *Reconnaître une situation de proportionnalité* ⚔ Act. 2

II] Calculer une quatrième proportionnelle

Propriété

Dans un tableau de proportionnalité à quatre cases, lorsque l'on ne connait que trois valeurs, on peut calculer la quatrième valeur, appelée **quatrième proportionnelle**.

Méthode 1

À l'aide du coefficient de proportionnalité

Pour compléter un tableau de proportionnalité, on peut utiliser un coefficient de proportionnalité pour passer d'une ligne à l'autre.

Exemple

Marie voudrait mettre 5,5 L d'essence dans son scooter. La station-service affiche un prix de l'essence à 1,22 € le litre. Combien devrait-elle payer ?

Marie n'a que 5 €. Quelle quantité d'essence peut-elle acheter ?

On représente cette situation par un tableau de proportionnalité :

Quantité d'essence achetée (en L)	1	5,5	?
Prix à payer (en €)	1,22	?	5

÷ 1,22 × 1,22

Le prix à payer est proportionnel à la quantité d'essence achetée avec pour coefficient de proportionnalité 1,22. Marie devrait donc payer 5,5 × 1,22 € soit 6,71 €.

Avec 5 €, Marie peut acheter 5 L ÷ 1,22 soit environ 4,1 L.

Un vendeur ambulant propose des marrons chauds à 25 € le kg.

1. Combien coute une portion de 150 g de marrons chauds ?
2. Quelle quantité de marrons chauds peut-on acheter pour 10 € ?

Solution

Quantité de marrons achetés (en kg)	1	0,15	?
Prix à payer (en €)	25	?	10

÷ 25 × 25

1. Il s'agit d'une situation de proportionnalité.
150 g = 0,15 kg
0,15 × 25 = 3,75
Une portion de 150 g de marrons coute 3,75 €.
2. 10 ÷ 25 = 0,4. Avec 10 €, on peut acheter 0,4 kg, soit 400 g de marrons.

⚔Entraine-toi avec *Calculer une quatrième proportionnelle* ⚔

Méthode 2

Liens entre les colonnes

Pour obtenir les nombres d'une colonne dans un tableau de proportionnalité, on peut :
– **multiplier ou diviser** les nombres d'une autre colonne par un même nombre ;
– **ajouter ou soustraire** les nombres de deux autres colonnes.

Exemple

Une recette de pâte à crêpes indique qu'il faut 300 g de farine pour cuisiner 12 crêpes. Quelle masse de farine faut-il pour cuisiner 4 crêpes ? 16 crêpes ?

La masse de farine à utiliser est proportionnelle au nombre de crêpes à cuisiner, on peut donc faire un tableau de proportionnalité.

÷ 3

Nombre de crêpes	12	4	16
Masse de farine (en g)	300	?	?

Pour faire 4 crêpes, il faut utiliser :
300 g ÷ 3 soit 100 g de farine

Pour faire 16 crêpes, il faut utiliser :
300 g + 100 g soit 400 g de farine

Voici les ingrédients de la recette d'un gâteau au yaourt pour 4 personnes :
500 g de farine ; 250 g de sucre ; 2 œufs ; 1 yaourt nature ; 5 g de levure en poudre ; 20 cL d'huile.

- Quelle quantité de chaque ingrédient doit-on utiliser pour faire un gâteau au yaourt pour 10 personnes ?

Solution

× 2,5

Nombre de personnes	4	10
Masse de farine (g)	500	1 250

Pour chaque ingrédient, la quantité est proportionnelle au nombre de personnes. Pour passer de 4 à 10 personnes, il faut multiplier la quantité par 2,5 (car $\frac{10}{4} = 2{,}5$). Il faut donc 2,5 × 500 g de farine, soit 1 250 g (ou 1,25 kg) de farine.

De la même façon, on multiplie la quantité de chaque ingrédient par 2,5, ce qui donne 625 g de sucre, 5 œufs, 2,5 yaourts nature, 12,5 g de levure en poudre et 50 cL d'huile.

Méthode 3

Passage par l'unité

Pour traiter une situation de proportionnalité, il est parfois plus judicieux de revenir à l'unité.

Exemple

Lucile a acheté 3 cahiers pour 4,05 €.
Emma a besoin de 7 cahiers. Combien devra-t-elle payer ?

Nombre de cahiers	3	7
Prix (en €)	4,05	?

3 cahiers coutent 4,05 €, donc 1 cahier coute $\frac{4{,}05\,€}{3} = 1{,}35$ €.

Donc 7 cahiers coutent 7 × 1,35 € = 9,45 €.

Lionel a trouvé un petit job d'été. Il est payé à la journée. En travaillant 5 jours, il a gagné 325 €.

1. Combien gagnera-t-il en travaillant pendant 9 jours ?
2. Combien de jours devra-t-il travailler pour obtenir les 1 000 € qu'il convoite ?

Solution

Nombre de jours de travail	5	9	?
Salaire (€)	325	?	1 000

1. $\frac{325}{5} = 65$ donc 1 jour de travail est payé 65 €.
65 € × 9 = 585 €. Lionel sera payé 585 € pour 9 jours.
2. $\frac{1\,000}{65} \approx 15{,}4$ donc Lionel devra travailler 16 jours pour gagner au moins 1 000 €.

Bilan environnemental de nos assiettes

Entraine-toi avec Calculer une quatrième proportionnelle

III] Utiliser un pourcentage ou une échelle

Propriété

p désigne un nombre positif.
Calculer *p* % d'une quantité revient à multiplier cette quantité par $\frac{p}{100}$.

Exemple

Dans un pot de crème fraiche de 20 cL, il y a 12 % de matière grasse.

12 % de 20 = $\frac{12}{100} \times 20 = 2{,}4$. La quantité de matière grasse dans le pot est égale à 2,4 g.

Remarque

Un pourcentage exprime une proportion par rapport à 100. Il peut s'écrire sous plusieurs formes :

15 %	=	$\frac{15}{100}$	=	0,15
pourcentage		**écriture fractionnaire**		**écriture décimale**

Méthode

Pour **calculer un pourcentage**, on peut exprimer une proportion de dénominateur 100 ou utiliser un tableau de proportionnalité.

Exemples

- **À l'aide d'une proportion de dénominateur 100**

4 personnes sur 5 trient leurs déchets. Quel pourcentage cela représente-t-il ?

On peut exprimer $\frac{4}{5}$ comme une proportion de dénominateur 100 : $\frac{4}{5} = \frac{80}{100} = 80\ \%$.

80 % des personnes trient leurs déchets.

- **À l'aide d'un tableau de proportionnalité**

Dans une classe de 23 élèves de 3^e^, 15 élèves connaissent leur orientation scolaire pour l'année suivante. Quel pourcentage cela représente-t-il ?

On peut représenter cette situation par un tableau de proportionnalité :

Nombre d'élèves connaissant leur orientation	15	?
Nombre d'élèves dans la classe	23	100

$\div \frac{23}{15}$; $\times \frac{23}{15}$

$\boxed{?} = 100 \div \frac{23}{15} \approx 65{,}2$. La proportion d'élèves connaissant leur orientation est d'environ 65,2 %.

En 2019, on comptait 228 femmes et 349 hommes à l'Assemblée nationale.

- Quel était le pourcentage de femmes députées ?

Solution

Le nombre total de députés est 228 + 349 = 577.

Le coefficient de proportionnalité qui permet de calculer le nombre de femmes députées est $\frac{228}{577}$.

Nombre de femmes députées	228	?
Nombre total de députés	577	100

$\times \frac{228}{577}$

Le pourcentage de femmes députées était donc $100 \times \frac{228}{577} \approx 40\ \%$.

En 2003, on a utilisé en France 15 milliards de sacs plastique. En 2010, cette consommation avait diminué de 95 %.

- Combien de sacs plastique a-t-on utilisé en 2010 ?

Solution

$\frac{95}{100} \times 15\,000\,000\,000 = 14\,250\,000\,000$

Le nombre de sacs plastique utilisés a diminué de 14 250 000 000.

$15\,000\,000\,000 - 14\,250\,000\,000 = 750\,000\,000$

On a utilisé 750 millions de sacs plastique en 2010.

⚔️Entraine-toi avec *Pourcentages*⚔️

🌿 *Economie circulaire : Aluminium* 🌿

Définition

On dit qu'un plan est **à l'échelle** si les distances sur le plan sont proportionnelles aux distances réelles. Le coefficient de proportionnalité égal au rapport $\frac{\text{distances sur le plan}}{\text{distances réelles}}$, où les deux distances sont exprimées dans la même unité, est appelé **échelle** du plan.

Remarque

Dire qu'un plan est à l'échelle $\frac{1}{1\,000}$ signifie que 1 cm sur le plan représente 1 000 cm en réalité.

Exemple

La distance à vol d'oiseau entre Bordeaux et Pau sur une carte à l'échelle $\frac{1}{250\,000}$ est de 86 cm.

Distances sur le plan (en cm)	1	86
Distances réelles (en cm)	250 000	?

$\times 86$

$\boxed{?} = 250\,000 \times 86 = 21\,500\,000$.

La distance entre Bordeaux et Pau est donc de 21 500 000 cm, soit 215 km.

La distance à vol d'oiseau entre deux villes est 75 km. Sur une carte, on mesure 5 cm entre ces villes.

1. Quelle est l'échelle de la carte ?
2. La distance sur la carte entre deux autres villes est de 3,2 cm. Quelle est la distance réelle entre ces deux villes ?

Solution

Longueur sur la carte (cm)	1	5	3,2
Longueur réelle (cm)	?	7 500 000	?

$\times 1\,500\,000$

1. 75 km = 7 500 000 cm

Chercher l'échelle de la carte revient à chercher quelle longueur 1 cm sur la carte représente dans la réalité.

Le coefficient de proportionnalité qui permet de calculer les longueurs réelles est $\frac{7\,500\,000}{5} = 1\,500\,000$.

L'échelle de la carte est donc $\frac{1}{1\,500\,000}$.

2. $3{,}2\text{ cm} \times 1\,500\,000 = 4\,800\,000\text{ cm} = 48\text{ km}$. La distance entre ces deux villes est de 48 km.

IV] Partager une quantité selon un ratio

Définition

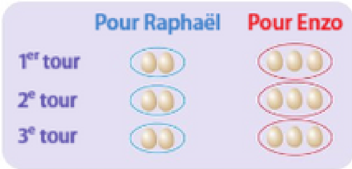
a, *b*, *i* et *j* désignent des nombres positifs.
On dit que les deux nombres a et b **sont dans le ratio** $i : j$ si $\frac{a}{i} = \frac{b}{j}$.

Exemples

- Deux nombres a et b sont dans le ratio 2 : 3 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$.

Le ratio 2 : 3 peut se lire « 2 pour 3 ».

- Partager des œufs de Pâques selon le ratio 2 : 3 entre Raphaël et Enzo signifie qu'à chaque fois qu'on donne 2 œufs à Raphaël, on en donne 3 à Enzo.
Le nombre d'œufs de Raphaël et le nombre d'œufs de Enzo sont alors dans le ratio 2 : 3.

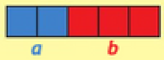


Propriétés

a et *b* désignent des nombres positifs. Si a et b sont dans le ratio 2 : 3, alors :
- le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité ;

a	b
2	3

- a est égal à $\frac{2}{5}$ du nombre $a + b$; b est égal à $\frac{3}{5}$ du nombre $a + b$.



Remarque

Cette propriété reste vraie si l'on remplace 2 et 3 par d'autres nombres positifs.

Exemple

On partage 30 œufs de Pâques selon le ratio 2 : 3 entre Raphaël et Enzo.
- Raphaël obtiendra $\frac{2}{5}$ des œufs, soit $\frac{2}{5} \times 30 = 12$ œufs.
- Enzo obtiendra $\frac{3}{5}$ des œufs, soit $\frac{3}{5} \times 30 = 18$ œufs.

Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité.

12	18
2	3

Charlotte veut faire de la peinture mauve en mélangeant du bleu et du rouge dans le ratio 3 : 2.
Elle dispose de 1,5 L de peinture bleue.
1. Quelle quantité de peinture rouge doit-elle utiliser ?
2. Combien obtiendra-t-elle de peinture mauve ?

Solution

1. Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité, avec 2 pour coefficient de proportionnalité.

1,5	
3	2

÷ 2 ; × 2

On a donc : $\frac{2}{2} = 1$. Charlotte doit utiliser 1 L de peinture rouge.

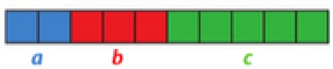
2. La quantité de peinture mauve qu'elle obtiendra sera : 1,5 L + 1 L = 2,5 L.

Définition

a, *b*, *c*, *i*, *j*, *k* désignent des nombres positifs. On dit que a, b et c sont dans le ratio $i : j : k$ si $\frac{a}{i} = \frac{b}{j} = \frac{c}{k}$.

Exemples

- Trois nombres a, b et c sont dans le ratio 2 : 3 : 5 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$.



- Dans la recette d'un gâteau pour 4 personnes, il faut 200 g de sucre, 300 g de farine et 500 g de lait. Les masses de sucre, de farine et de lait sont dans le ratio 2 : 3 : 5 puisque $\frac{200}{2} = \frac{300}{3} = \frac{500}{5} = 100$.

Le cocktail Bora-Bora se prépare avec de la grenadine, du jus de fruit de la passion et du jus d'ananas selon le ratio 1 : 6 : 13.
- Pour préparer 1 litre de ce cocktail, quelle quantité de chaque ingrédient faut-il ?

Solution

1 + 6 + 13 = 20 donc il faut :
- $\frac{1}{20} \times 100$ cL = 5 cL de grenadine ;
- $\frac{6}{20} \times 100$ cL = 30 cL de jus de fruit de la passion ;
- $\frac{13}{20} \times 100$ cL = 65 cL de jus d'ananas.

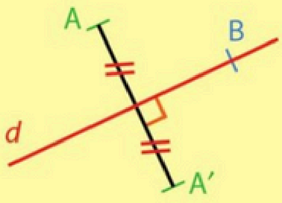
Séquence 2 : Symétries

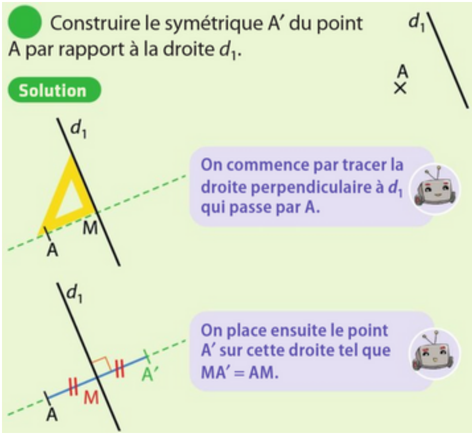
I] Rappels : symétrie axiale

Définition

Soit *d* une droite.

- **Si un point A n'appartient pas à la droite *d***, alors son **symétrique par rapport à la droite *d*** est le point A' tel que *d* est la médiatrice du segment [AA'] (c'est-à-dire la droite qui coupe le segment [AA'] perpendiculairement en son milieu).
- **Si un point B appartient à la droite *d***, alors son **symétrique par rapport à la droite *d*** est lui-même.

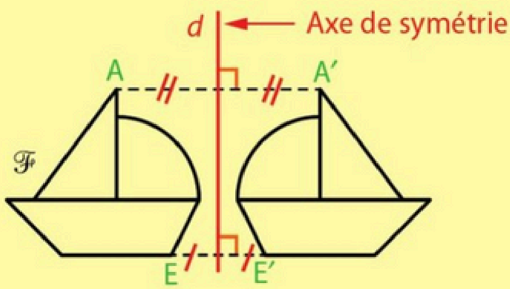


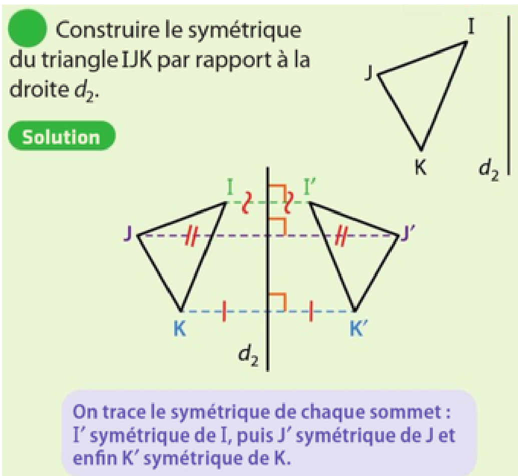


Définition

Soit $\mathscr{F}$ une figure et *d* une droite.

On appelle **symétrique de la figure $\mathscr{F}$** par rapport à la droite *d* la figure obtenue en construisant le symétrique de chaque point de la figure $\mathscr{F}$. La droite *d* est appelée **axe de symétrie**.





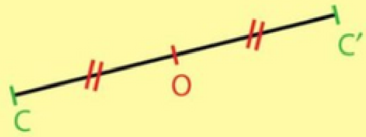
Propriété

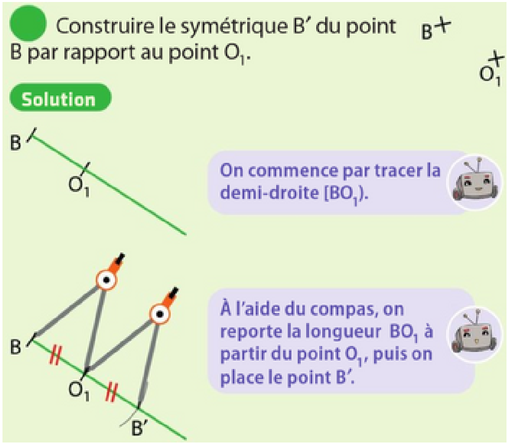
Deux figures symétriques par rapport à une droite *d* sont superposables : elles se superposent quand on « plie » le long de cette droite.

II] Symétrie centrale

Définition

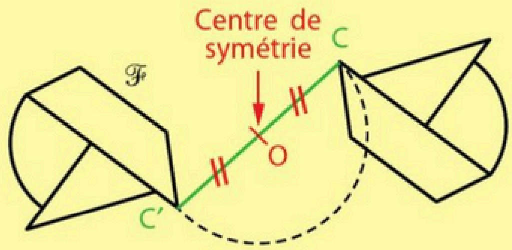
Soit O un point. Par la **symétrie de centre O** :
- le **symétrique** d'un **point C distinct de O** est le point C′ tel que O est le milieu du segment [CC′] ;
- le symétrique du **point O** est lui-même.

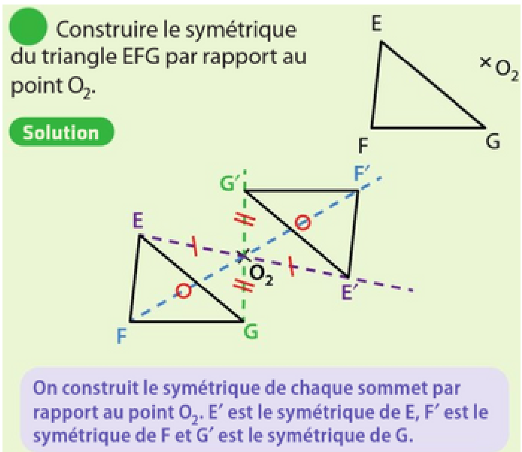




Définition

Soit $\mathscr{F}$ une figure et O un point.
On appelle **symétrique de la figure** $\mathscr{F}$ par rapport au point O la figure obtenue en construisant le symétrique de chaque point de la figure $\mathscr{F}$ par rapport à O. Le point O est appelé **centre de symétrie**.





Propriété

Deux figures symétriques par rapport à un point O se superposent lorsqu'on effectue un demi-tour autour du point O.

⚔️Entraine-toi avec *Constructions* ⚔️

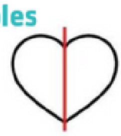
🏠 *Ping et Pong* 🏠

III] Reconnaître un axe ou un centre de symétrie

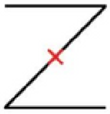
Définitions

- On dit qu'une droite *d* est un **axe de symétrie** d'une figure si le symétrique de cette figure par rapport à la droite *d* est la figure elle-même.
- On dit qu'un point O est le **centre de symétrie** d'une figure si le symétrique de cette figure par rapport au point O est la figure elle-même.

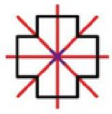
Exemples



1 axe de symétrie
0 centre de symétrie

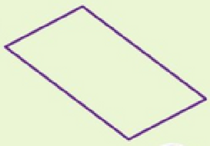


0 axe de symétrie
1 centre de symétrie

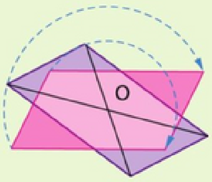


4 axes de symétrie
1 centre de symétrie

Le parallélogramme ci-contre a-t-il un centre de symétrie ?



Solution



On cherche le centre de symétrie éventuel dans la partie centrale de la figure. On peut essayer avec le point O intersection des diagonales. On fait tourner la figure d'un demi-tour autour de O : elle se superpose à elle-même. Donc O est le centre de symétrie.

Le centre de symétrie est le point O qui est l'intersection des deux diagonales.

⚔️Entraine-toi avec *Reconnaître une symétrie* ⚔️

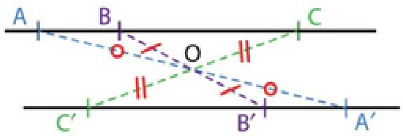
IV] Utiliser les propriétés de la symétrie centrale

Propriétés

- Le symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite : on dit que **la symétrie centrale conserve les alignements**.
- Si deux droites sont symétriques par rapport à un point, alors elles sont parallèles.

Exemple

- Les points A, B et C sont alignés, donc leurs symétriques A', B' et C' sont aussi alignés.
- La droite (AB) est parallèle à la droite (A'B').



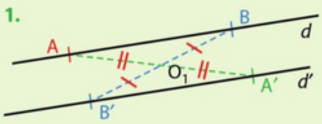
Remarque

Dans le cas d'une symétrie axiale, deux droites symétriques ne sont pas parallèles, sauf cas particulier.

1. Construire la droite *d'* symétrique de la droite *d* par rapport au point O_1.
2. Que peut-on dire des droites *d* et *d'* ? Justifier.

Solution

1.



On place un point A sur la droite *d* et on construit le symétrique A' de A par rapport à O_1.
Puis on recommence avec un point B.
On finit par tracer la droite *d'* qui passe par les points A' et B'.

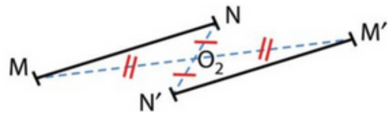
2. Les droites *d* et *d'* sont symétriques par rapport à O_1, donc elles sont parallèles.

Propriété

Le symétrique d'un segment par rapport à un point est un segment de même longueur : on dit que **la symétrie centrale conserve les longueurs**.

Exemple

[MN] et [M'N'] sont symétriques par rapport à O_2.
Donc MN = M'N'.



Propriété

Deux figures symétriques par rapport à un point ont la même forme. On dit que **la symétrie centrale conserve les mesures des angles, les périmètres et les aires**.

Propriété

Comme la symétrie centrale, la symétrie axiale conserve également les alignements, les mesures des angles, les longueurs et les aires.

⚔️Entraine-toi avec *Propriétés de la symétrie* ⚔️

Séquence 4 : Triangles

I] Construire un triangle

Propriété

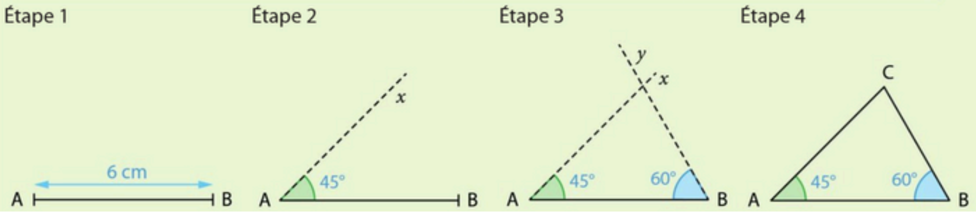
On peut construire un triangle dans les deux cas suivants :

- si on connait la longueur de deux côtés et la mesure de l'angle formé par ces deux côtés ;
- si on connait la longueur d'un côté et les mesures de deux angles dont la somme est inférieure à 180°.

Construire un triangle ABC tel que AB = 6 cm, $\widehat{BAC} = 45°$ et $\widehat{CBA} = 60°$.

Solution

- On commence par tracer un segment [AB] de longueur 6 cm (étape 1).
- On utilise ensuite le rapporteur pour tracer une demi-droite [Ax) telle que $\widehat{BAx} = 45°$ (étape 2) puis une demi-droite [Ay) telle que $\widehat{ABy} = 60°$ (étape 3).
- Le point d'intersection des deux demi-droites est le point C. On termine la construction en traçant les segments [AC] et [BC] (étape 4).



⚔️ Entraine-toi avec *Constructions (exercice 1)* ⚔️

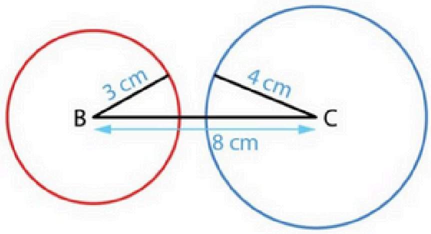
Propriété

On peut construire un triangle dont on connait les longueurs des trois côtés lorsque la longueur de son plus grand côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Exemples

- Peut-on construire un triangle ABC tel que AB = 3 cm, BC = 8 cm et AC = 4 cm ?

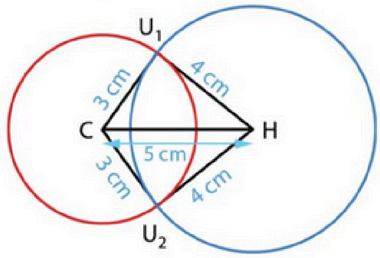
La plus grande longueur est BC, et BC > AB + AC.
Donc le triangle **n'est pas** constructible.



Si BC = 8 cm, il est impossible de construire un point A tel que AB = 3 cm et AC = 4 cm.

- Peut-on construire un triangle CHU tel que CH = 5 cm, CU = 3 cm et UH = 4 cm ?

La plus grande longueur est CH, et CH < CU + UH.
Donc le triangle CHU **est** constructible.



Il existe deux possibilités pour le point U.

Remarque

Si la plus grande longueur est égale à la somme des deux autres, alors le triangle est aplati : les trois sommets sont alignés.

1. Construire si possible un triangle dont les longueurs des côtés mesurent : 8,5 cm, 3,3 cm et 4,2 cm.
2. Construire si possible un triangle dont les longueurs des côtés mesurent : 3,1 cm, 5 cm et 5,4 cm.

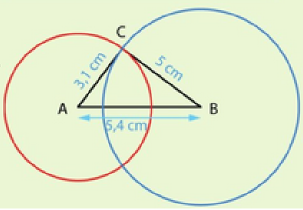
Solution

On cherche la plus grande longueur et on la compare avec la somme des deux autres longueurs.

1. La plus grande longueur est 8,5 cm. La somme des deux autres longueurs est égale à 3,3 + 4,2 = 7,5 cm. Or 8,5 > 7,5 donc on ne peut pas construire un triangle avec ces trois longueurs.

2. La plus grande longueur est 5,4 cm.
La somme des deux autres longueurs est égale à 3,1 + 5 = 8,1 cm.
5,4 < 8,1 donc on peut construire un triangle avec ces trois longueurs.

Pour tracer ce triangle :
- on commence par tracer un segment [AB] de longueur 5,4 cm ;
- on trace le cercle de centre A et de rayon 3,1 cm et le cercle de centre B et de rayon 5 cm ;
- on place un point C à l'intersection de ces deux cercles (il y a 2 possibilités).



⚔️ Entraine-toi avec *Inégalité triangulaire* et *Constructions (exercice 2)*⚔️

II] Hauteurs et médiatrices

Définition

Soit ABC un triangle.
La **hauteur** du triangle ABC issue de A est la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite (BC).

ABC est un triangle tel que AB = 9 cm, AC = 6,5 cm et BC = 4,6 cm.

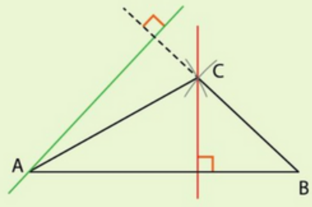
1. Tracer en rouge la hauteur du triangle ABC issue de C.

2. Tracer en vert la hauteur du triangle ABC issue de A.

Solution

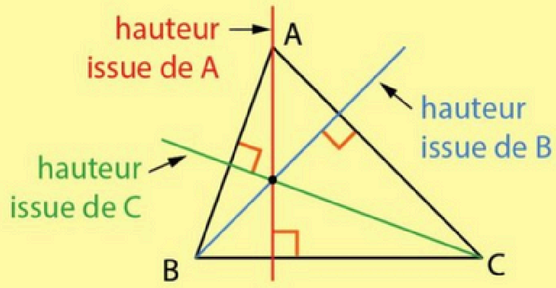
1. On construit le triangle ABC puis on trace la droite perpendiculaire à (AB) passant par C.

2. On commence par prolonger le segment [BC], puis on trace la droite perpendiculaire à (BC) passant par A. On remarque qu'ici, la hauteur issue de A est extérieure au triangle ABC.



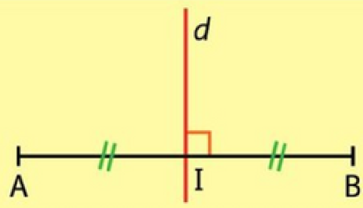
Propriété **Définition**

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes : elles passent par un même point appelé **orthocentre** du triangle.



Définition

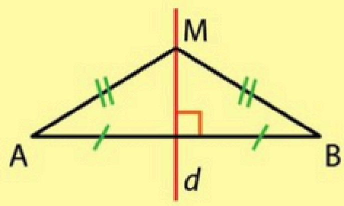
La **médiatrice** d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.



Propriétés

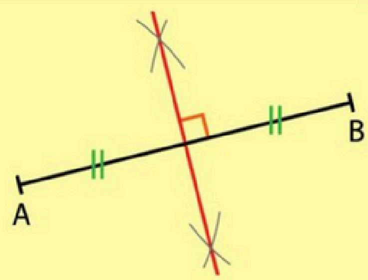
A et B désignent deux points distincts.
La médiatrice du segment [AB] est l'ensemble de tous les points situés à égale distance de A et de B.

- Si un point M appartient à la médiatrice de [AB], alors MA = MB.
- Si MA = MB, alors le point M appartient à la médiatrice de [AB].



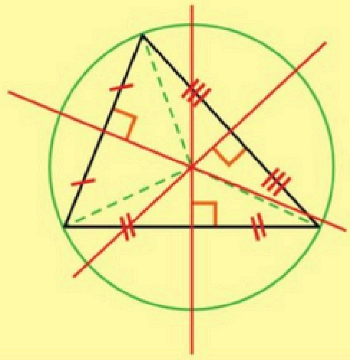
Méthode

Pour construire la médiatrice d'un segment [AB], on peut placer à l'aide d'un compas deux points à égale distance de A et de B.



Propriété **Définition**

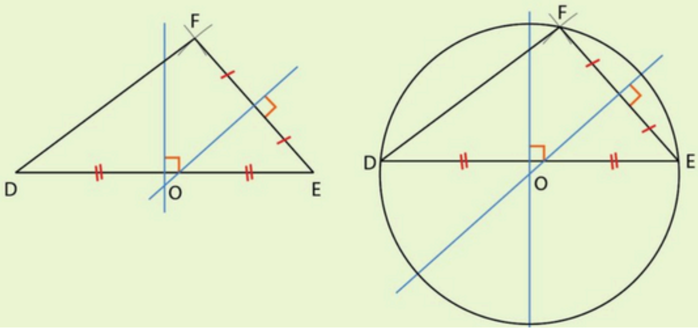
Dans un triangle, les médiatrices des trois côtés sont concourantes : elles passent par un même point qui est le centre du cercle passant par les sommets du triangle.
Ce cercle est appelé le **cercle circonscrit** au triangle.



DEF est un triangle tel que DE = 10 cm, DF = 7,5 cm et FE = 6 cm. Construire le cercle circonscrit à ce triangle.

Solution

Le centre du cercle circonscrit est le point de concours des 3 médiatrices. Il suffit donc de tracer 2 médiatrices pour obtenir le point d'intersection O (centre du cercle cherché). On trace ensuite le cercle de centre O passant par E (ou F, ou D).



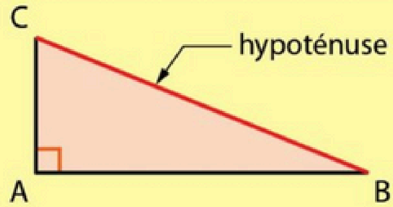
⚔️ Entraine-toi avec *Médiatrices et hauteurs (sauf exercice 5)*⚔️

III] Triangles particuliers

Définitions

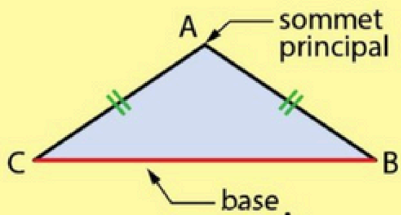
Triangle rectangle

- Un triangle **rectangle** est un triangle qui possède un angle droit.
- Le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'**hypoténuse**.



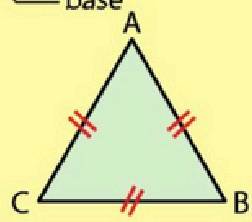
Triangle isocèle

- Un triangle **isocèle** est un triangle qui a deux côtés de même longueur.
- On appelle :
  – **sommet principal** : le point commun à deux côtés de même longueur ;
  – **base** : le côté opposé à un sommet principal.



Triangle équilatéral

Un triangle **équilatéral** est un triangle dont les trois côtés ont même longueur.

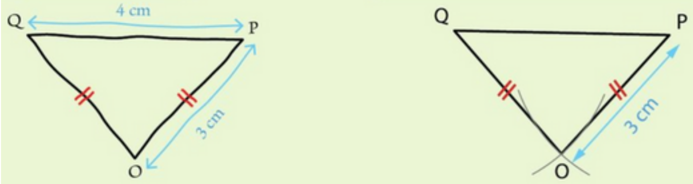


Construire un triangle OPQ isocèle en O tel que OP = 3 cm et QP = 4 cm.

Solution

On trace d'abord une figure à main levée.

On commence par exemple par tracer la base [QP] de longueur 4 cm puis, avec le compas, on trace deux arcs de cercle de centres Q et P et de rayon 3 cm ; ils se coupent en O. Pour finir, on trace les segments [PO] et [QO].

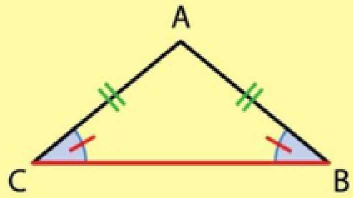


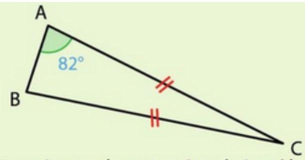
⚔️ Entraine-toi avec *Médiatrices et hauteurs (exercice 5)*⚔️

Propriétés

Soit ABC un triangle.

- Si ABC est isocèle en A, alors $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.
- Si $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, alors ABC est isocèle en A.





On donne la figure ci-contre.

1. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$?

2. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$?

Solution

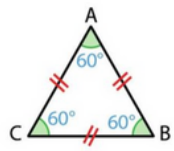
1. Les longueurs CA et CB sont égales, donc ABC est un triangle isocèle en C. On sait que dans un triangle isocèle, les angles à la base ont la même mesure. La base est le côté [AB], on a donc $\widehat{ABC} = \widehat{BAC}$. Donc $\widehat{ABC} = 82°$.

2. On sait que la somme des mesures des trois angles d'un triangle est égale à 180°.

Donc $\widehat{ACB} = 180° - 2 \times 82° = 16°$.

On verra ça plus tard !

Remarques

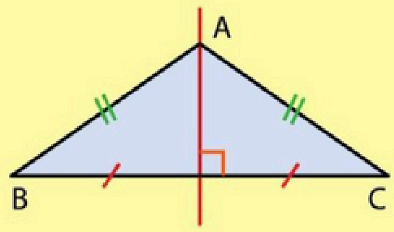


- Si un triangle ABC est équilatéral, alors il est isocèle en A, en B et en C. Ce sont donc les mesures de ses trois angles qui sont égales.
Comme la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°, alors ces trois angles ont pour mesure 60°.
- Réciproquement, si les trois angles d'un triangle ABC ont même mesure, alors il est isocèle en A, en B et en C : il est donc équilatéral.

Propriétés

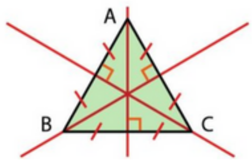
Soit ABC un triangle.

- Si ABC est isocèle en A, alors la hauteur issue de A et la médiatrice de [BC] sont confondues : elles constituent un axe de symétrie du triangle ABC.
- Si la hauteur issue de A et la médiatrice de [BC] sont confondues, alors ABC est isocèle en A.

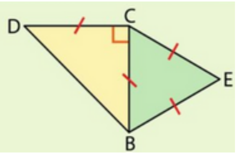


Remarque

Si un triangle ABC est équilatéral, alors les hauteurs et les médiatrices des côtés sont confondues deux à deux et constituent chacune un axe de symétrie du triangle.



Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{DCE}$? Justifier.



Solution

Le triangle ECB est équilatéral car tous ses côtés ont même longueur.
Tous ses angles mesurent donc 60°. Ainsi $\widehat{DCE} = 90° + 60° = 150°$.

On verra ça plus tard !

⚔️ Entraine-toi avec *Nature d'un triangle* ⚔️

Séquence : Calcul numérique et littéral

I] Enchainer des opérations

Convention - Calcul sans parenthèses
- Dans une expression ne comportant que des additions et des soustractions, ou que des multiplications et des divisions, on effectue les calculs de gauche à droite.
- On effectue d'abord les multiplications et les divisions, puis les additions et les soustractions. On dit que la multiplication et la division sont prioritaires par rapport à l'addition et la soustraction.

Exemples

$A = 12 - 5 + 8$
$A = 7 + 8$
$A = 15$

$B = 40 \div 8 \times 10$
$B = 5 \times 10$
$B = 50$

$C = 23 + 6 \times 4$
$C = 23 + 24$
$C = 47$

Entraine-toi avec *Calculs sans parenthèses*

Convention - Calcul avec parenthèses
- Dans une expression avec des parenthèses, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses.
- Quand il y a plusieurs niveaux de parenthèses, on commence par les plus intérieures.
- À l'intérieur des parenthèses, on applique les priorités de calcul.
- Une expression qui figure au numérateur ou au dénominateur d'un quotient est considérée comme une expression entre parenthèses.

Entraine-toi avec *Calculs avec parenthèses*

Exemples

$D = 9 \times (7 + 4)$
$D = 9 \times 11$
$D = 99$

$E = 2{,}5 \times [7 - (5 - 3)]$
$E = 2{,}5 \times [7 - 2]$
$E = 2{,}5 \times 5$
$E = 12{,}5$

$F = \dfrac{9 + 5}{7}$
F peut aussi s'écrire $(9 + 5) \div 7$
$F = \dfrac{14}{7}$
$F = 2$

Définitions
- Le résultat d'une addition est une **somme**. Les nombres additionnés sont les **termes**.
- Le résultat d'une soustraction est une **différence**. Les nombres qui interviennent dans la soustraction sont les **termes**.
- Le résultat d'une multiplication est un **produit**. Les nombres multipliés sont les **facteurs**.
- Le résultat d'une division est un **quotient**.
- La **nature** d'une expression comportant plusieurs opérations est déterminée par l'opération à effectuer en dernier.

Exemples

$\underbrace{25 + 3{,}5}_{\text{termes}} = \underbrace{28{,}5}_{\text{somme}}$

$\underbrace{38{,}7 - 12{,}4}_{\text{termes}} = \underbrace{26{,}3}_{\text{différence}}$

$\underbrace{7{,}3 \times 5}_{\text{facteurs}} = \underbrace{36{,}5}_{\text{produit}}$

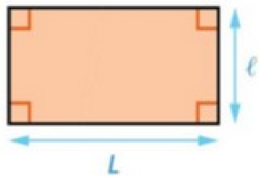
$27 \div 6 = \dfrac{27}{6} = \underbrace{4{,}5}_{\text{quotient}}$

II] Ecrire et utiliser une expression littérale

Définition
Une **expression littérale** est une expression mathématique qui comporte une ou plusieurs lettres. Ces lettres désignent des nombres.

Exemple 1

L'aire $\mathcal{A}$ d'un rectangle de longueur L et de largeur ℓ est donnée par l'expression littérale :



$$\mathcal{A} = L \times \ell$$

On appelle aussi cela une **formule**.

Exemple 2

Un site internet vend des clés USB à 4 € l'unité et facture la livraison 3 €.
Le prix à payer dépend du nombre n de clés USB achetées.
On exprime ce prix P par l'expression littérale :

$$P = 4 \times n + 3$$

On dit que l'**on exprime le prix P en fonction de n**.

Entraine-toi avec *Donner du sens*

III] Simplifier une expression littérale

Convention
Dans une expression littérale, on peut supprimer le signe × lorsqu'il est placé :
- devant ou derrière une lettre ;
- devant ou derrière une parenthèse.

Exemples
$4 \times a = 4a$
$a4 = 4a$ et non $a4$
$b \times c = bc$
$5 \times (x + 4) = 5(x + 4)$
Cela se lit **5 facteur de x + 4**.

Remarques
- On ne peut pas supprimer le signe × entre deux nombres : $4 \times 5 \neq 45$.
- On écrit $1 \times a = a$ plutôt que $1a$.
- On écrit $0 \times a = 0$ plutôt que $0a$.

Entraine-toi avec *Simplifier l'écriture (1)*

Définition
a désigne un nombre. On note :
- $a \times a = a^2$ (on lit « **a au carré** »)
- $a \times a \times a = a^3$ (on lit « **a au cube** »)

Exemples
$5 \times 5 = 5^2$
$7 \times 7 \times 7 = 7^3$

Entraine-toi avec *Simplifier l'écriture (8)*

Propriété
a, b et x désignent trois nombres.
- Pour simplifier une somme, on peut utiliser l'égalité : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.
- Pour simplifier une différence, on peut utiliser l'égalité : $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$.

• Pour simplifier un produit de plusieurs facteurs, on peut modifier l'ordre des facteurs.

Exemples $B = 0,3x$
$A = 3x + 2x$
$A = (3 + 2)x$
$A = 5x$

$B = 2,4x - 2,1x$
$B = (2,4 - 2,1)x$
$B = 0,3x$

$C = 2 \times x \times 7$
$C = 2 \times 7 \times x$
$C = 14x$

Entraine-toi

Méthode
On peut utiliser les règles de simplification des expressions littérales pour démontrer certaines propriétés.

Exemple
On veut démontrer la propriété suivante : « La somme de deux nombres entiers consécutifs est impaire ». On note n un entier quelconque.
Le nombre entier qui suit s'obtient en lui ajoutant 1 : il est donc écrit $n + 1$.
La somme de deux entiers consécutifs est $S = n + n + 1 = 2n + 1$.
Or $2n$ désigne un multiple de 2 dans cette expression, c'est-à-dire un nombre pair. Donc $2n + 1$ désigne un nombre impair.
La propriété est donc **démontrée** pour tous les couples de nombres entiers consécutifs.

Entraine-toi *en calculant la somme des n premiers entiers*

III] Tester une égalité

Méthode
Pour utiliser une expression littérale avec certaines valeurs, on remplace dans l'expression littérale toutes les lettres par leurs valeurs.

Exemple 1

On veut calculer l'aire d'un rectangle de longueur 6 cm et de largeur 4 cm.
On remplace L par 6 et ℓ par 4 dans la formule $\mathcal{A} = L \times \ell$:

$$\mathcal{A} = L \times \ell$$
$$\mathcal{A} = 6 \times 4$$
$$\mathcal{A} = 24$$

L'aire d'un rectangle de longueur 6 cm et de largeur 4 cm est donc de 24 cm^2.

Exemple 2

On veut calculer le prix à payer si l'on achète 5 clés USB.
On remplace n par 5 dans l'expression littérale $P = 4 \times n + 3$.

$$P = 4 \times n + 3$$
$$P = 4 \times 5 + 3$$
$$P = 20 + 3$$
$$P = 23$$

Ainsi, pour acheter 5 clés USB, il faudra payer 23 €.

Entraine-toi avec *Substituer et calculer*

Définition
- Une **égalité** est constituée de deux membres séparés par un signe =.
- Une égalité est **vraie** quand les deux membres ont la même valeur.

Exemple

$$\underbrace{3\times 7}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{15+6}_{\text{membre de droite}}$$

Cette égalité est vraie car les deux membres ont la même valeur : 21.

Propriété
Une égalité où interviennent des expressions littérales peut être vraie pour certaines valeurs attribuées aux lettres et fausse pour d'autres.

Exemple

On considère l'égalité $x + 2 = 8$.

- Si $x = 6$, cette égalité est vraie car $6 + 2 = 8$.
- Si $x = 9$, cette égalité est fausse car $9 + 2 = 11$ et $11 \neq 8$.

Méthode
Pour tester si une égalité est vraie pour des valeurs affectées aux lettres :
• on calcule le membre de gauche en remplaçant chaque lettre par le nombre donné ;
• on calcule le membre de droite en remplaçant chaque lettre par le nombre donné ;
• on observe si les deux membres sont égaux ou non ;
• on conclut.

Exemples

On veut tester l'égalité $x + 2 = 2 \times x - 3$ pour $x = 8$:
– membre de gauche :
$$x + 2 = 8 + 2 = 10$$
– membre de droite :
$$2 \times x - 3 = 2 \times 8 - 3 = 16 - 3 = 13$$
Comme $10 \neq 13$, les deux membres n'ont pas la même valeur donc l'égalité est fausse pour $x = 8$.

On veut tester l'égalité $x + 2 = 2 \times x - 3$ pour $x = 5$:
– membre de gauche :
$$x + 2 = 5 + 2 = 7$$
– membre de droite :
$$2 \times x - 3 = 2 \times 5 - 3 = 10 - 3 = 7$$
Les deux membres ont la même valeur donc l'égalité est vraie pour $x = 5$.

Entraine-toi avec *Tester une égalité*

Séquence : Fractions (définition), écriture fractionnaire

activité Jeux de briques

I] Notion de fraction

Définition
a et b désignent deux nombres (b ≠ 0)
Le quotient de a par b est le nombre qui, multiplié par b, donne a.
On le note $\frac{a}{b}$ ou $a : b$ ou $a \div b$.
Si a et b sont des entiers, on dit que $\frac{a}{b}$ est une fraction.

Exemple

- Le quotient de 5 par 4 est $\frac{5}{4}$. C'est le nombre qui, multiplié par 4, donne 5 : $\frac{5}{4} \times 4 = 5$
- $\frac{2}{7}$ est une fraction.
- $\frac{2,5}{4}$ n'est pas écrit sous forme de fraction car 2,5 n'est pas un nombre entier.

Remarque
On ne peut jamais diviser par 0.
L'écriture $\frac{a}{b}$ d'un nombre est appelée écriture fractionnaire.

Différentes écritures (sauf 2, 4)

Définition
a et b désignent deux nombres (b ≠ 0)
Lorsque a est un entier et b est égal à 10, 100, 1 000..., on dit que $\frac{a}{b}$ est une fraction décimale.
Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

Exemples

- $\frac{139}{100}$ est une fraction décimale car son dénominateur est 100.
- 1,39 est un nombre décimal car $1,39 = \frac{139}{100}$ donc 1,39 peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

Remarque
Un quotient n'est pas toujours un nombre décimal.

Exemple

$\frac{2}{3}$ n'est pas un nombre décimal. On a : $\frac{2}{3} = 0,666...$.

⚔ Différentes écritures (2, 4) ⚔

II] Reconnaître des fractions égales

Propriété

a, b et k désignent trois nombres (b ≠ 0, k ≠ 0)

Un quotient ne change pas si l'on multiplie ou si l'on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ et $\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$

Exemples

- $\frac{2,5}{3} = \frac{2,5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$
- $\frac{24}{30} = \frac{24 \div 3}{30 \div 3} = \frac{8}{10}$

Méthode

Simplifier une fraction consiste à écrire une fraction qui lui est égale avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

Pour cela, on cherche un diviseur commun au numérateur et au dénominateur.

Exemple 1

On veut simplifier la fraction $\frac{2}{4}$.

2 et 4 sont divisibles par 2.

On peut donc écrire : $\frac{2}{4} = \frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$.

Exemple 2

On veut simplifier la fraction $\frac{36}{15}$.

- 36 est **divisible par 3** car la somme de ses chiffres est égale à 9 et le nombre 9 est divisible par 3.
- 15 est **divisible par 3** car la somme de ses chiffres est égale à 6 et le nombre 6 est divisible par 3.
- On peut donc écrire $\frac{36}{15} = \frac{36 \div 3}{15 \div 3} = \frac{12}{5}$.

III] Diviser par un nombre décimal

Méthode
Pour diviser par un nombre décimal, on peut multiplier le dividende et le diviseur par 10, 100, 1000… pour rendre le diviseur entier.

Exemples

On veut effectuer la division de 8 par 1,25.

$$8 \div 1{,}25 = \frac{8}{1{,}25} = \frac{8 \times 100}{1{,}25 \times 100} = \frac{800}{125}$$

On peut ensuite poser la division :

$$\begin{array}{r|l} 800 & 125 \\ \cline{2-2} 500 & 6{,}4 \\ 0 & \end{array}$$

On obtient $8 \div 1{,}25 = 6{,}4$.

On veut effectuer la division de 0,36 par 1,2.

$$0{,}36 \div 1{,}2 = \frac{0{,}36}{1{,}2} = \frac{0{,}36 \times 10}{1{,}2 \times 10} = \frac{3{,}6}{12}$$

On peut ensuite poser la division :

$$\begin{array}{r|l} 3{,}6 & 12 \\ \cline{2-2} 36 & 0{,}3 \\ 0 & \end{array}$$

On obtient $0{,}36 \div 1{,}2 = 0{,}3$.

IV] Exprimer une proportion

Définition
Une proportion est un rapport entre deux grandeurs.

Exemple

Dans une classe de 5^{e}, il y a 18 filles sur un total de 30 élèves.
On dit que la proportion de filles dans cette classe est égale à : $\dfrac{\text{nombre de filles}}{\text{nombre total d'élèves}} = \dfrac{18}{30}$.

Remarque
Une proportion peut s’exprimer avec une écriture fractionnaire, une écriture décimale ou avec un pourcentage.

Exemple

La proportion de filles dans une classe est égale à $\frac{18}{30}$.

On peut exprimer cette proportion sous différentes formes :

- $\frac{18}{30} = 0{,}6$ donc cette proportion est aussi égale à 0,6 ;
- $0{,}6 = \frac{60}{100}$ donc cette proportion est aussi égale à $\frac{60}{100}$ ou 60 % ;
- $\frac{18}{30} = \frac{18 \div 6}{30 \div 6} = \frac{3}{5}$ donc cette proportion est aussi égale à $\frac{3}{5}$.

On peut dire que dans cette classe, « 3 élèves sur 5 sont des filles ».

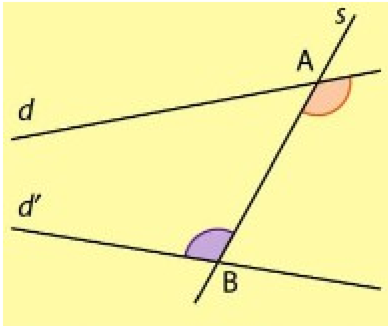
I] Utiliser des angles alternes-internes

Définition

d et d' sont deux droites coupées par une droite s en deux points distincts A et B.

Deux angles sont alternes-internes si :

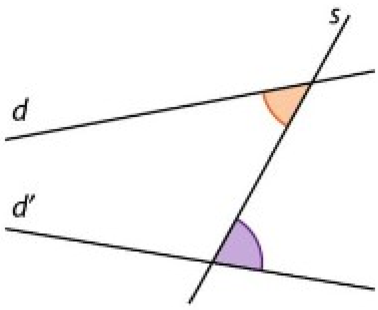
- ils ont pour sommets A et B ;
- ils sont situés de part et d'autre de la droite s ;
- ils sont entre les droites d et d'.



Remarque

Ces trois droites définissent également une deuxième paire d'angles alternes-internes.

Alternes : de part et d'autre de la droite s.
Internes : entre les deux droites d et d'.

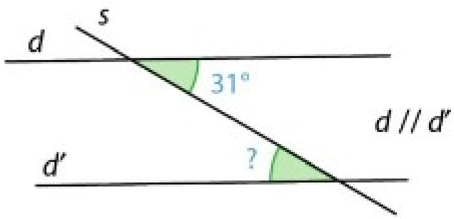


Propriété

d et d' sont deux droites coupées par une droite s en deux points distincts.
Si d et d' sont parallèles, alors les angles alternes-internes qu'elles forment avec la droite s sont de même mesure.

Exemple

Dans la figure ci-contre, les droites d et d' sont coupées par la droite s, formant ainsi deux angles alternes-internes colorés.
Comme on sait que d et d' sont parallèles, on peut en conclure que ces deux angles ont même mesure, soit 31°.

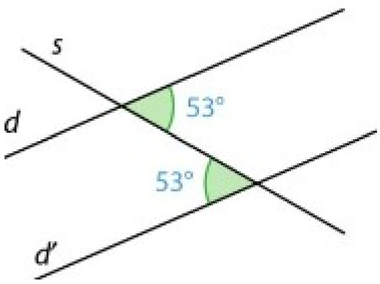


Propriété (réciproque)

d et d' sont deux droites coupées par une droite s en deux points distincts.
Si d et d' forment avec la droite s deux angles alternes-internes de même mesure, alors d et d' sont parallèles.

Exemple

Dans la figure ci-contre, les droites d et d' sont coupées par la droite s, formant ainsi deux angles alternes-internes colorés.
Comme on sait que ces deux angles ont la même mesure, on peut conclure que les droites d et d' sont parallèles.

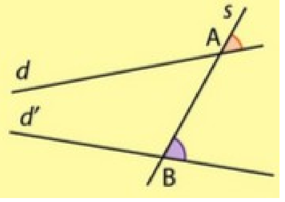


II] Utiliser des angles correspondants

Définition

d et d' sont deux droites coupées par une sécante s en deux points distincts A et B.
Deux angles sont correspondants si :

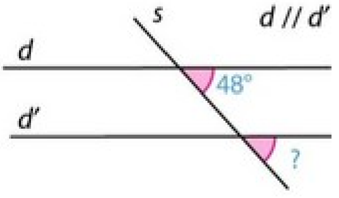
- ils ont pour sommets A et B ;
- ils sont situés du même côté de la droite ss ;
- l’un est entre les droites d et d', l’autre non.



Propriété

d et d' sont deux droites coupées par une droite s en deux points distincts.
Si d et d′ sont parallèles, alors les angles correspondants qu’elles forment avec la droite s sont de même mesure.

Exemple

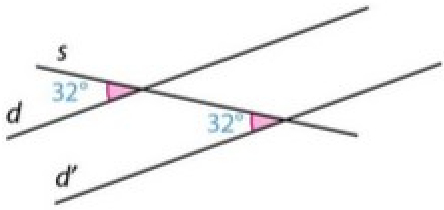


Dans la figure ci-dessus, les droites d et d' sont coupées par la droite s, formant ainsi deux angles correspondants représentés en rouge.
Comme on sait que d et d' sont parallèles, on peut en conclure que ces deux angles ont même mesure, soit 48°.

Propriété (réciproque)

d et d' sont deux droites coupées par une droite s en deux points distincts.
Si d et d' forment avec la droite s deux angles correspondants de même mesure, alors d et d' sont parallèles.

Exemple

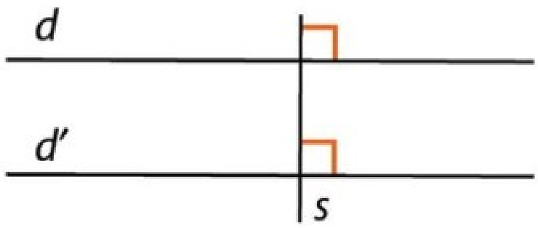


Dans la figure ci-dessus, les droites d et d' sont coupées par la droite s, formant ainsi deux angles correspondants représentés en rouge.
Comme on sait que ces deux angles ont même mesure, on peut en conclure que les droites d et d' sont parallèles.

Remarque

Dans le cas où des angles correspondants ont pour mesure 90°, on retrouve la propriété suivante :

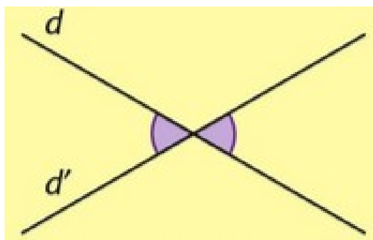
Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.



$d \perp s$ et $d' \perp s$ donc $d \,//\, d'$

III] Utiliser des angles opposés par le sommet

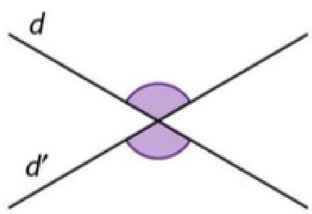
Définition



d et d' sont deux droites sécantes.
Deux angles sont opposés par le sommet lorsque :

- ils ont le même sommet ;
- leurs côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre.

Remarque



Ces deux droites définissent également une deuxième paire d'angles opposés par le sommet.

Propriété

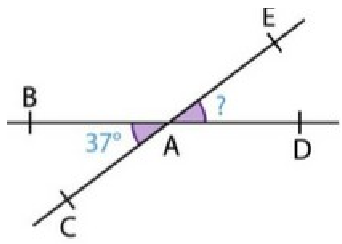
Deux angles opposés par le sommet ont même mesure.

Exemple

Dans la figure ci-contre, on sait que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAE}$ sont opposés par le sommet. Ils ont donc même mesure.
$\widehat{BAC}=37°$ donc $\widehat{DAE}=37$.

IV] Déterminer la mesure d'un angle dans un triangle

Propriété
La somme des mesures des trois angles d’un triangle est égale à 180°.



Exemple
Dans le triangle ci-contre, on a :
$\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=180°$

Remarque
Quand on connaît les mesures de deux angles d’un triangle, cette propriété permet de calculer la mesure du troisième angle.

Séquence : Fractions opérations

I] Additionner et soustraire des fractions

Propriété
a, b et c désignent trois nombres ($c \neq 0$).
Pour additionner (ou soustraire) deux fractions qui ont le même dénominateur :

- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs ;
- on garde le dénominateur commun.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$
$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Exemples

Méthode
Pour additionner ou soustraire deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur, on doit d'abord les écrire avec le même dénominateur.

Exemples

II] Utiliser une proportion

Propriété
Pour multiplier une fraction par un nombre :
- on multiplie le numérateur par ce nombre
- on garde le dénominateur

Exemple

Méthode
On peut utiliser cette propriété pour calculer une fraction d'une grandeur.

Exemple
Pour calculer ce que représentent les deux tiers d'une bouteille de 75cL, on fait :

Séquence : Nombres relatifs (définition)

I] Connaître les nombres relatifs

Définitions
- Un nombre positif est un nombre supérieur ou égal à 0. On le note avec un signe + ou sans signe.
- Un nombre négatif est un nombre inférieur ou égal à 0. On le note avec un signe -.
- Les nombres positifs et les nombres négatifs forment l'ensemble des nombres relatifs.

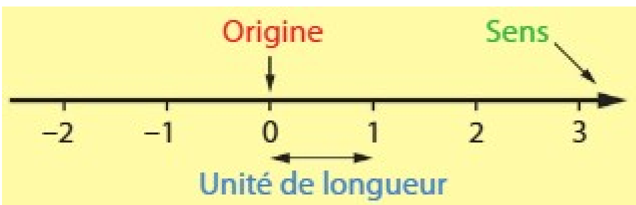
Exemples :

Remarques
1. Grâce aux nombres négatifs, on pourra effectuer des soustractions qui étaient jusqu'alors impossibles. Par exemple, 8 - 10 = -2.
2. Dans cette égalité, il ne faut pas confondre le symbole moins de la soustraction entre deux nombres, et le signe - de -2, qui indique que -2 est négatif.

II] Repérer un point sur une droite graduée

Définitions :
Une droite graduée est une droite sur laquelle on a choisi :
- une origine ;
- un sens ;
- une unité de longueur, que l'on reporte régulièrement de part et d'autre de l'origine.

Définitions
Sur une droite graduée, chaque point est repéré par un nombre relatif, que l'on appelle abscisse du point.
La distance à zéro d'un nombre a est la longueur du segment [OA], où A est le point d'abscisse a et O est l'origine de la droite graduée.



Exemples

III] Comparer des nombres relatifs

Définitions

Deux nombres relatifs distincts sont rangés dans l'ordre croissant ou dans le sens de la flèche, le plus petit des deux nombres a et b est celui que l'on rencontre en premier.

- On dit que a est inférieur à b et on note a < b.
- On dit aussi que b est supérieur à a et on note b > a.

Exemple

Propriétés

• Un nombre positif est toujours supérieur ou égal à un nombre négatif.

• Si deux nombres sont positifs, le plus grand est celui qui a la plus grande distance à zéro.

• Si deux nombres sont négatifs, le plus grand est celui qui a la plus petite distance à zéro.

IV] Repérer un point du plan

Définitions

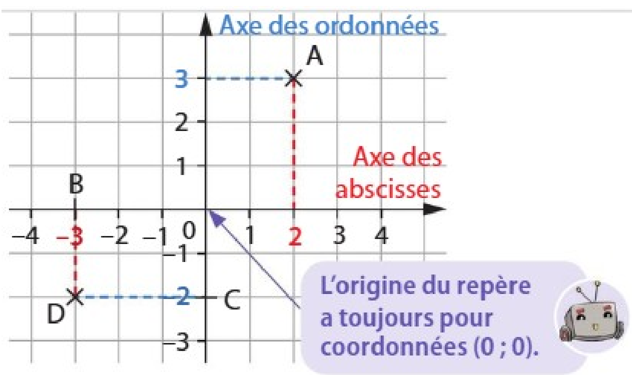
- Un repère du plan est formé par deux droites graduées distinctes de même origine. L'une est appelée l'axe des abscisses et l'autre l'axe des ordonnées. Le point d'intersection des axes est appelé origine du repère.
- Quand les deux droites sont perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal.

Définitions

Dans un repère du plan, chaque point est repéré par deux nombres relatifs : ses coordonnées.

Le premier est l'abscisse, le second l'ordonnée. On les note (abscisse ; ordonnée).

Exemples



Leçon : Parallélogramme

I] Idéalement

A) C’est quoi ?

Définition : Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

Remarque : Un parallélogramme possède un centre de symétrie, le point d’intersection de ses diagonales.

B) Propriétés caractéristiques

Propriété : Un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur si et seulement si c’est un parallélogramme.

Remarque : Que veut dire « si et seulement si » en mathématiques ? Ça signifie que ce qui se trouve avant est équivalent à ce qu’on trouve après.

Propriété : Un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu si et seulement si c’est un parallélogramme.

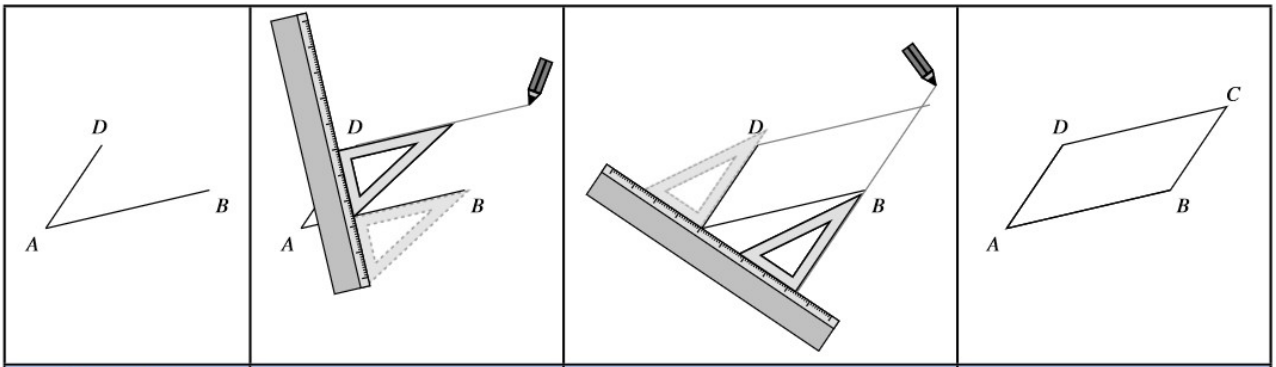
Propriété : Un quadrilatère a ses angles opposés de même mesure si et seulement si c’est un parallélogramme.

II] Tracer un parallélogramme

A) En connaissant la longueur des côtés

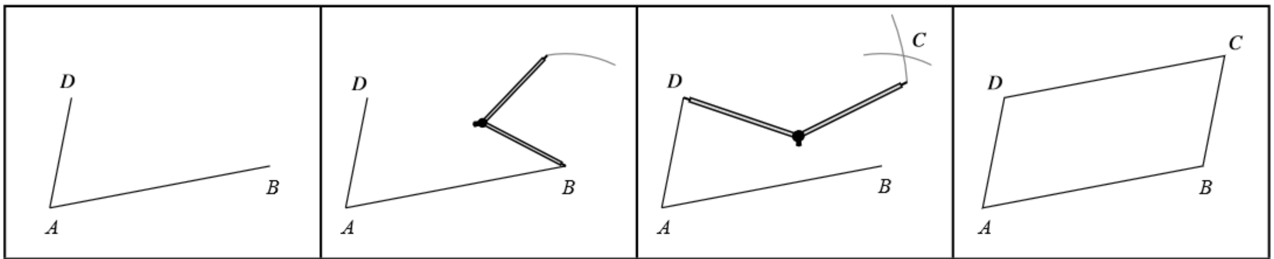
Tracer le parallélogramme ABCD sachant que AB = 5 cm et AD = 3 cm.

Méthode : Avec une règle et une équerre



On trace un segment $[AB]$ de 5 cm et un segment $[AD]$ de 3 cm formant un angle quelconque.	On trace la parallèle à (AB) passant par D.	On trace la parallèle à (AD) passant par B.	Les deux droites se coupent en C et $ABCD$ est un parallélogramme.

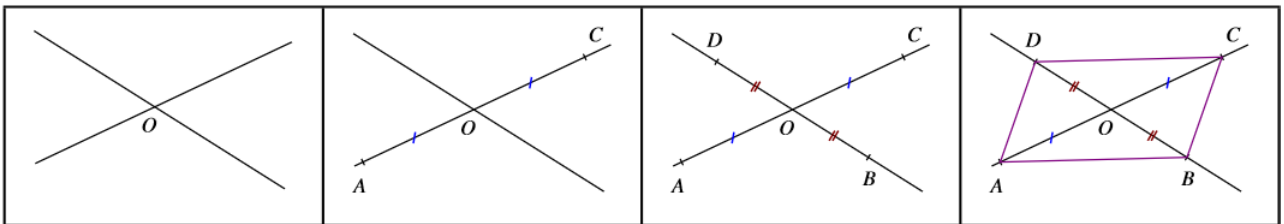
Méthode : Avec un compas



On trace un segment $[AB]$ de 5 cm et un segment $[AD]$ de 3 cm formant un angle quelconque.	On trace un arc de cercle centré en B pour reporter la longueur AD.	On trace un arc de cercle centré en D pour reporter la longueur AB : les deux arcs se coupent en C.	$ABCD$ est un parallélogramme.

B) En connaissant les diagonales

Méthode :



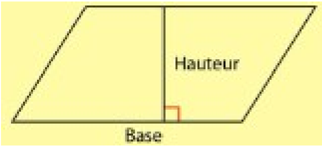
Tracer deux droites sécantes en un point O.	Placer A et C tels que $AO = OC = 3$ cm.	Placer B et D tels que $BO = OD = 2$ cm.	Tracer $[AB]$, $[AD]$, $[BC]$ et $[DC]$.

Remarque : Ici, on peut penser n'utiliser qu'une règle graduée, mais il peut être plus économique (en temps) d'utiliser le compas pour reporter les longueurs.

III] Calculer l'aire d'un parallélogramme

Définition

Dans un parallélogramme, on appelle **hauteur** relative à un côté un segment perpendiculaire à ce côté dont une extrémité est sur ce côté et l'autre est sur le côté opposé.



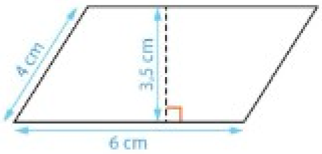
Propriété

L'aire d'un parallélogramme est égale au produit des longueurs d'un côté et de la hauteur relative à ce côté :

$\mathrm{A} = \text{base} \times \text{hauteur}$

Exemple

L'aire du parallélogramme ci-contre se calcule ainsi :



$A = 6 \times 3,5$

$A = 21 \text{ cm}^2$