

Nombres premiers

Exercice corrigé

Rends la fraction $\frac{280}{448}$ irréductible.

Correction

On commence par décomposer 280 et 448 en produits de facteurs premiers.

$$280 = 2^3 \times 7 \times 5 \text{ et } 448 = 2^6 \times 7$$

$$\frac{280}{448} = \frac{2^3 \times 5 \times 7}{2^6 \times 7} = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8} \text{ qui est irréductible car 5 et 8 n'ont que 1 comme diviseur commun.}$$

1 Les décompositions suivantes sont non abouties. Termine-les.

a. $2^2 \times 13 \times 25 = 2^2 \times 5^2 \times 13$

b. $3 \times 15 \times 66 = 3 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 11 = 2 \times 3^3 \times 5 \times 11$

c. $7 \times 3^2 \times 9 \times 21 = 7 \times 3^2 \times 3^2 \times 3 \times 7 = 3^5 \times 7^2$

d. $23 \times 49 \times 61 = 7^2 \times 23 \times 61$

2 Décompose les nombres suivants en produit de facteurs premiers.

306 : $2 \times 3^2 \times 17$

124 : $2^2 \times 31$

540 : $2^2 \times 3^3 \times 5$

2 220 : $2^2 \times 3 \times 5 \times 37$

3 On donne $a = 3^4 \times 7$ et $b = 2 \times 3^5 \times 7^2$. Donne le plus grand diviseur commun à a et b .

$\text{PGCD}(a ; b) = 3^4 \times 7 = a$

4 Détermine le premier nombre entier impair qui possède trois facteurs premiers différents.

$105 = 3 \times 5 \times 7$

5 Entoure les fractions simplifiables.

$\frac{4}{6}$

$\frac{3}{19}$

$\frac{15}{30}$

$\frac{1}{82}$

$\frac{42}{39}$

6 Simplifie chaque fraction en utilisant les critères de divisibilité.

a. $\frac{66}{30} = \frac{2 \times 3 \times 11}{2 \times 3 \times 5} = \frac{11}{5}$

b. $\frac{385}{165} = \frac{5 \times 7 \times 11}{3 \times 5 \times 11} = \frac{7}{3}$

c. $\frac{153}{189} = \frac{3 \times 3 \times 17}{3 \times 3 \times 3 \times 7} = \frac{17}{21}$

d. $\frac{120}{90} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 5} = \frac{4}{3}$

7 Prouve que la fraction $\frac{74}{547}$ est irréductible.

547 est un nombre premier donc 74 et 547 sont nécessairement premiers entre-eux.

8 Simplifie pour obtenir une fraction irréductible.

a. $\frac{4 \times 15 \times 14}{21 \times 10 \times 22} = \frac{2^3 \times 3 \times 5 \times 7}{3 \times 7 \times 2^2 \times 5 \times 11} = \frac{2}{11}$

b. $\frac{2^2 \times 3 \times 5^3}{2 \times 3^3 \times 5^2} = \frac{2 \times 5}{3^2} = \frac{10}{9}$

9 En décomposant

a. Écris 504 et 540 sous forme de produits de facteurs premiers.

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ et $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

b. Rends alors la fraction $\frac{504}{540}$ irréductible.

$\frac{2^3 \times 3^2 \times 7}{2^2 \times 3^3 \times 5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$

10 Rends la fraction $\frac{1\,204}{258}$ irréductible en effectuant une seule simplification et en détaillant les calculs.

$1\,204 = 2^2 \times 7 \times 43$ et $258 = 2 \times 3 \times 43$

$\text{PGCD}(1\,204 ; 258) = 2 \times 43 = 86$

$\frac{1\,204}{258} = \frac{86 \times 14}{86 \times 3} = \frac{14}{3}$

11 La fraction $\frac{231}{712}$ est-elle irréductible ? Justifie.

$231 = 3 \times 7 \times 11$ et $712 = 2^3 \times 89$ donc 231 et 712 n'ont pas de diviseur commun, ils sont donc premiers entre eux. La fraction est donc irréductible.