# Séquence 2 : Grandeurs et proportionnalité

## I] Reconnaître une situation de proportionnalité

#### Définition

Deux grandeurs sont proportionnelles si les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre appelé coefficient de proportionnalité.

#### Exemple 1

Anna achète pour 1,50 € de bonbons à la boulangerie.

Chaque bonbon coute 0,15 €.

prix à payer =

nombre de bonbons achetés × 0,15

Le prix à payer est proportionnel au nombre de bonbons achetés, avec 0,15 pour coefficient de proportionnalité.

Avec 1,50 €, Anna peut acheter 10 bonbons :

 $1,50 = 10 \times 0,15$ .

### ▶Exemple 2

À la boulangerie, Isham lit:

Prix d'une baquette : 0,85 €

Pour 3 baguettes achetées, la 4º est offerte.

Le prix de 3 baguettes est le même que le prix de 4 baguettes.

Le prix à payer n'est pas proportionnel au nombre de baguettes achetées.

1. Lundi, au marché, Alvin a acheté 1 kg de tomates pour 2,65 €. Mercredi, il achète 3 kg de ces mêmes tomates pour 7,95 €.

Le prix à payer est-il proportionnel à la masse de tomates achetées ?

 Chloé, qui adore les fruits exotiques, se laisse tenter par des mangues. Elle peut lire: « 2,80 € la mangue et 5 € les 2 »

Le prix est-il proportionnel au nombre de mangues achetées ?

#### Solution

1.  $1 \times 2,65 = 2,65$  et  $3 \times 2,65 = 7,95$ .

Dans les deux cas, le prix à payer est égal à la masse de tomates achetées multipliée par 2,65.

Le prix à payer est donc proportionnel à la masse de tomates achetées.

2. Une mangue coute 2,80 €. Si le prix était proportionnel au nombre de mangues achetées, deux mangues couteraient 2 x 2,80 € soit 5,60 €. Le prix à payer n'est donc pas proportionnel au nombre de mangues achetées.

### Définition

Dans un tableau représentant deux grandeurs, si les valeurs de la première grandeur sont proportionnelles aux valeurs de la seconde, ce tableau est appelé tableau de proportionnalité.

#### Méthode

Pour déterminer si deux grandeurs représentées dans un tableau sont proportionnelles, on peut calculer les quotients des valeurs correspondantes de ces grandeurs.

#### Exemple \*

On a relevé dans le tableau ci-dessous la consommation, en fonction du temps, d'un robinet mal fermé.

	Temps écoulé (en jours)	1	7	365	1	×0,432
I	Quantité d'eau (en L)	0,432	3,024	157,68	~	X 0,432

On calcule les quotients : 
$$\frac{0,432}{1} = 0,432$$
 ;  $\frac{3,024}{7} = 0,432$  ;  $\frac{157,68}{365} = 0,432$ 

Tous les quotients sont égaux à 0,432 : le tableau est donc un tableau de proportionnalité. La quantité d'eau est proportionnelle au temps écoulé, avec 0,432 pour coefficient de proportionnalité.

#### ▶ Exemple 2

Angèle et Clara achètent respectivement un pack de 6 litres de jus d'orange à 9,12 € et un pack de 4 litres à 6,48 €. On récapitule ces résultats dans un tableau ci-contre.

Quantité de jus (en L)	6	4	
Prix à payer (en €)	9,12	6,48	

On calcule les quotients : 
$$\frac{9,12}{6} = 1,52$$
;  $\frac{6,48}{4} = 1,62$ 

Les quotients ne sont pas égaux ce table à un ést donc pas un talle au de proportionnalité. Le prix à payer n'est pas pro retionnel à la quantité de las d'orange achetée ; il n'y a pas de coefficient de proportionnalité.

Mila s'entraine en vue d'un semi-marathon. Voici ses derniers résultats :

Distance (en km)	9,6	12,4	16,5	21,1
Temps (en min)	54	69,75	95	124,65

• Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Si oui, avec quel coefficient de proportionnalité ?

#### Solution

On calcule les quotients :

$$\frac{54}{9.6} = \frac{5,625}{12,4} = \frac{69,75}{12,4} = \frac{5,625}{16,5} \approx 5,76$$

Tous les quotients ne sont pas égaux, ce n'est donc pas un tableau de proportionnalité : la distance et le temps ne sont pas des grandeurs proportionnelles.

Il n'y a pas de coefficient de proportionnalité.

Alizée a découvert un site qui développe des photos en format Polaroid et affiche les tarifs suivants.

 Nombre de photos
 1
 10
 50
 250

 Prix à payer (en €)
 0,07
 0,70
 3,50
 17,50

• Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Si oui, avec quel coefficient de proportionnalité ?

#### Solution

On calcule les quotients :

$$\frac{0.07}{1} = 0.07$$
;  $\frac{0.70}{10} = 0.07$ ;  $\frac{3.50}{50} = 0.07$ ;  $\frac{17.50}{250} = 0.07$ 

Tous les quotients sont égaux, c'est donc un tableau de proportionnalité: le prix à payer est proportionnel au nombre de photos, avec pour coefficient de proportionnalité 0,07.

## II] Calculer une quatrième proportionnelle

#### Propriété

Dans un tableau de proportionnalité à quatre cases, lorsque l'on ne connait que trois valeurs, on peut calculer la quatrième valeur, appelée quatrième proportionnelle.

#### Méthode 1

### À l'aide du coefficient de proportionnalité

Pour compléter un tableau de proportionnalité, on peut utiliser un coefficient de proportionnalité pour passer d'une ligne à l'autre.

#### **▶** Exemple

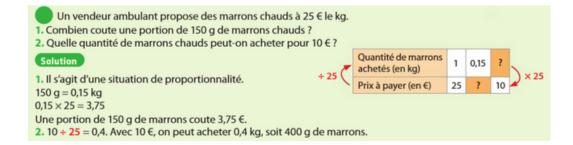
Marie voudrait mettre 5,5 L d'essence dans son scooter. La station-service affiche un prix de l'essence à 1,22 € le litre. Combien devrait-elle payer ?

Marie n'a que 5 €. Quelle quantité d'essence peut-elle acheter ?

On représente cette situation par un tableau de proportionnalité :

Le prix à payer est proportionnel à la quantité d'essence achetée avec pour coefficient de proportionnalité 1,22. Marie devrait donc payer  $5,5 \times 1,22 \in \text{soit } 6,71 \in .$ 

Avec 5 €, Marie peut acheter 5 L ÷ 1,22 soit environ 4,1 L.



#### Méthode 2

#### Liens entre les colonnes

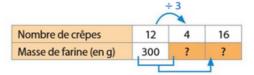
Pour obtenir les nombres d'une colonne dans un tableau de proportionnalité, on peut :

- multiplier ou diviser les nombres d'une autre colonne par un même nombre ;
- ajouter ou soustraire les nombres de deux autres colonnes.

#### Exemple

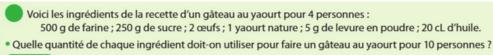
Une recette de pâte à crêpes indique qu'il faut 300 g de farine pour cuisiner 12 crêpes. Quelle masse de farine faut-il pour cuisiner 4 crêpes ? 16 crêpes ?

La masse de farine à utiliser est proportionnelle au nombre de crêpes à cuisiner, on peut donc faire un tableau de proportionnalité.



Pour faire 4 crêpes, il faut utiliser :  $300 g \div 3$  soit 100 g de farine

Pour faire 16 crêpes, il faut utiliser : 300 g + 100 g soit 400 g de farine



Solution

Pour chaque ingrédient, la quantité est proportionnelle au nombre Nombre de personnes de personnes. Pour passer de 4 à 10 personnes, il faut multiplier la Masse de farine (g) quantité par 2,5 (car  $\frac{10}{4}$  = 2,5). Il faut donc 2,5 × 500 g de farine, soit 1 250 g (ou 1,25 kg) de farine.

10 1 250

De la même façon, on multiplie la quantité de chaque ingrédient par 2,5, ce qui donne 625 g de sucre, 5 œufs, 2,5 yaourts nature, 12,5 g de levure en poudre et 50 cL d'huile.

#### Méthode 3

#### Passage par l'unité

Pour traiter une situation de proportionnalité, il est parfois plus judicieux de revenir à l'unité.

### **▶**Exemple

Lucile a acheté 3 cahiers pour 4,05 €.

Emma a besoin de 7 cahiers. Combien devra-t-elle payer? Prix (en €)

7 Nombre de cahiers 3 4,05

3 cahiers coutent 4,05 €, donc 1 cahier coute  $\frac{4,05€}{3}$  = 1,35 €.

Donc 7 cahiers coutent  $7 \times 1,35 \in = 9,45 \in$ 

	Lionel a trouvé un petit job d'été. Il est payé à la journée. En travaillant 5 jours, il a gagné 32	5 €.
1	Combien gagnera-t-il en travaillant pendant 9 jours ?	

2. Combien de jours devra-t-il travailler pour obtenir les 1 000 € qu'il convoite ?

#### Solution

1.  $\frac{325}{5}$  = 65 donc 1 jour de travail est payé 65  $\in$ .

Nombre de jours de travail Salaire (€) 325 1 000

65 € × 9 = 585 €. Lionel sera payé 585 € pour 9 jours.

2.  $\frac{1\,000}{65} \approx 15,4$  donc Lionel devra travailler 16 jours pour gagner au moins 1 000  $\in$ .

## III] Utiliser un pourcentage ou une échelle

#### Propriété

p désigne un nombre positif.

Calculer p % d'une quantité revient à multiplier cette quantité par  $\frac{p}{100}$ .

#### **▶**Exemple

Dans un pot de crème fraiche de 20 cL, il y a 12 % de matière grasse.

12 % de 20 =  $\frac{12}{100}$  × 20 = 2,4. La quantité de matière grasse dans le pot est égale à 2,4 g.

#### Remarque

Un pourcentage exprime une proportion par rapport à 100. Il peut s'écrire sous plusieurs formes :

$$15\% = \frac{15}{100} = 0,15$$

écriture fractionnaire écriture décimale pourcentage

Méthode

Pour calculer un pourcentage, on peut exprimer une proportion de dénominateur 100 ou utiliser un tableau de proportionnalité.

### **▶**Exemples

#### À l'aide d'une proportion de dénominateur 100

4 personnes sur 5 trient leurs déchets. Quel pourcentage cela représente-t-il?

On peut exprimer  $\frac{4}{5}$  comme une proportion de dénominateur 100 :  $\frac{4}{5} = \frac{80}{100} = 80$  %.

80 % des personnes trient leurs déchets.

#### À l'aide d'un tableau de proportionnalité

Dans une classe de 23 élèves de 3<sup>e</sup>, 15 élèves connaissent leur orientation scolaire pour l'année suivante. Quel pourcentage cela représente-t-il?

On peut représenter cette situation par un tableau de proportionnalité :

23	-	Nombre d'élèves connaissant leur orientation	15	?		× 23
÷ 15	/	Nombre d'élèves dans la classe	23	100	~	^ 15

? =  $100 \div \frac{23}{15} \approx 65,2$ . La proportion d'élèves connaissant leur orientation est d'environ 65,2 %.

En 2019, on comptait 228 femmes et 349 hommes à l'Assemblée nationale.

Quel était le pourcentage de femmes députées ?

Le nombre total de députés est 228 + 349 = 577. Le coefficient de proportionnalité qui permet de calculer le nombre de femmes députées est  $\frac{228}{577}$ .

Nombre de femmes députées Nombre total de députés

Le pourcentage de femmes députées était donc  $100 \times \frac{228}{577}$ 

En 2003, on a utilisé en France 15 milliards de sacs plastique. En 2010, cette consommation avait diminué de 95 %.

Combien de sacs plastique a-t-on utilisé en 2010 ?

#### Solution

 $\frac{33}{100}$  × 15 000 000 000 = 14 250 000 000

Le nombre de sacs plastique utilisés a diminué de 14 250 000 000.

15 000 000 000 - 14 250 000 000 = 750 000 000 On a utilisé 750 millions de sacs plastique en 2010.

#### Définition

On dit qu'un plan est à l'échelle si les distances sur le plan sont proportionnelles aux distances réelles. distances sur le plan Le coefficient de proportionnalité égal au rapport , où les deux distances sont distances réelles exprimées dans la même unité, est appelé échelle du plan.

Dire qu'un plan est à l'échelle  $\frac{1}{1000}$  signifie que 1 cm sur le plan représente 1 000 cm en réalité.

#### **▶** Exemple

La distance à vol d'oiseau entre Bordeaux et Pau sur une carte à l'échelle  $\frac{1}{250\ 000}$  est de 86 cm.

Distances sur le plan (en cm) 86 250 000 Distances réelles (en cm)

 $? = 250\,000 \times 86 = 21\,500\,000.$ 

La distance entre Bordeaux et Pau est donc de 21 500 000 cm, soit 215 km.

La distance à vol d'oiseau entre deux villes est 75 km. Sur une carte, on mesure 5 cm entre ces villes.

1. Quelle est l'échelle de la carte ?

2. La distance sur la carte entre deux autres villes est de 3,2 cm. Quelle est la distance réelle entre ces deux villes ?

#### Solution

1. 75 km = 7 500 000 cm Chercher l'échelle de la carte revient à Longueur sur la carte (cm) Longueur réelle (cm)

chercher quelle longueur 1 cm sur la carte représente dans la réalité. Le coefficient de proportionnalité qui permet de calculer les longueurs réelles est  $\frac{7500000}{5} = 1500000$ .

L'échelle de la carte est donc 1500 000

2. 3,2 cm  $\times$  1 500 000 = 4 800 000 cm = 48 km. La distance entre ces deux villes est de 48 km.