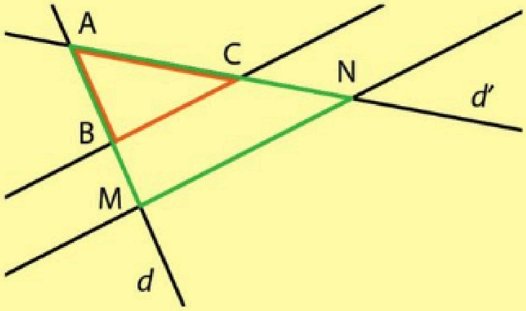
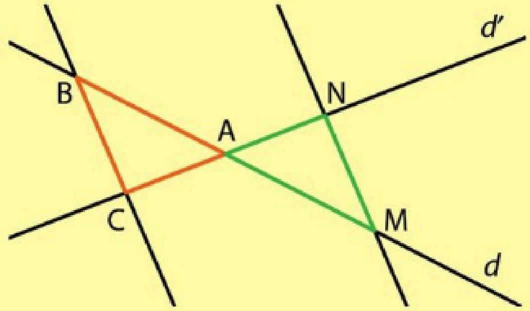
Act. 1
Act. 2

Théorème



Configuration classique



Configuration « en papillon »

Remarques

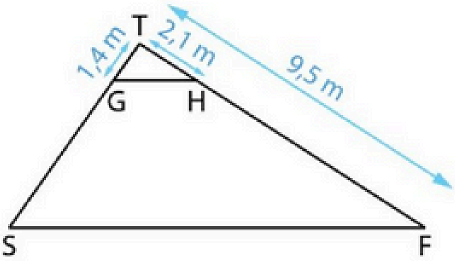
- On a également $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$.
- Les longueurs des côtés correspondants du triangle ABC et AMN sont proportionnelles.
- Le triangle ABC est un agrandissement ou une réduction du triangle AMN.

Longueurs des côtés de AMN	AM	AN	MN
Longueurs des côtés correspondants de ABC	AB	AC	BC

$\times \frac{AB}{AM}$

Exemple 1

Dans la figure ci-dessous, les droites (SG) et (FH) se coupent en T et (GH) et (SF) sont parallèles. On veut calculer la longueur TS.



Les points T, G, S et T, H, F sont alignés et les droites (GH) et (SF) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{TG}{TS} = \frac{TH}{TF} = \frac{GH}{SF}.$$

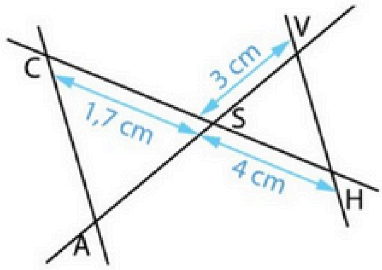
En utilisant l'égalité des deux premiers rapports et en remplaçant les longueurs connues par leurs valeurs, on a donc $\frac{1,4}{TS} = \frac{2,1}{9,5}$.

On utilise les produits en croix et on trouve

$$TS = \frac{1,4 \times 9,5}{2,1} \approx 6,3 \text{ m}.$$

Exemple 2

Dans la figure ci-contre, les droites (VA) et (CH) se coupent en S et (VH) et (CA) sont parallèles. On veut calculer la longueur SA.



Les points V, S, A et H, S, C sont alignés et les droites (VH) et (CA) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a

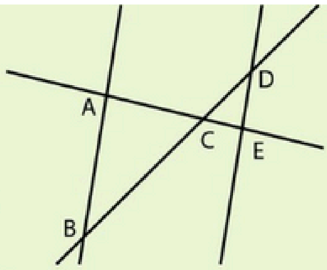
$$\frac{SV}{SA} = \frac{SH}{SC} = \frac{VH}{CA}.$$

En utilisant l'égalité des deux premiers rapports et en remplaçant les longueurs connues par leurs valeurs, on a donc $\frac{3}{SA} = \frac{4}{1,7}$.

On utilise les produits en croix et on trouve

$$SA = \frac{3 \times 1,7}{4} = 1,275 \text{ cm}.$$

On considère la figure ci-contre, où les droites (AE) et (BD) se coupent en C et les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
AB = 7,4 cm ; AC = 3,9 cm ; BC = 8,5 cm ; DC = 2,4 cm.
- Calculer une valeur approchée au mm près des longueurs CE et ED.



Solution

1re étape : vérification des conditions
Les points A, C, E d'une part et B, C, D d'autre part sont alignés.
Les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

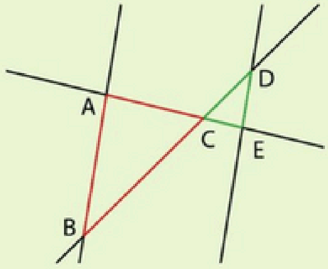
On vérifie d'abord si les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont bien respectées.

2e étape : écriture de l'égalité des rapports
D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD} = \frac{AB}{ED}$$

← Côtés du triangle ABC
← Côtés du triangle CDE

Le point C, sommet commun des deux triangles, se retrouve 4 fois.



3e étape : calcul des longueurs cherchées

$$\frac{3,9}{CE} = \frac{8,5}{2,4} = \frac{7,4}{ED}$$

On remplace les longueurs connues par leurs valeurs, puis on utilise le quotient connu et celui où se trouve la longueur cherchée.

- **Calcul de CE :**

On a : $\frac{3,9}{CE} = \frac{8,5}{2,4}$; on utilise le produit en croix qui donne :

$CE = \frac{3,9 \times 2,4}{8,5} \approx 1,1$ cm.

- **Calcul de ED :**

On a : $\frac{8,5}{2,4} = \frac{7,4}{ED}$; on utilise le produit en croix qui donne :

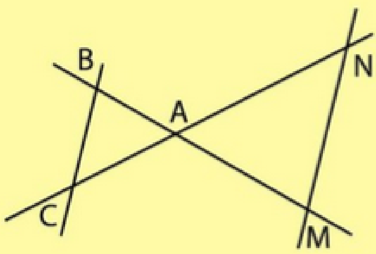
$ED = \frac{2,4 \times 7,4}{8,5} \approx 2,1$ cm.

On vérifie la cohérence des résultats en vérifiant l'ordre de grandeur.
Ici, les longueurs des côtés du triangle CDE doivent être 3 à 4 fois plus petites que celles du triangle ABC.

⚔️Entraine-toi avec *Calculer une longueur* ⚔️
🌿 *Calcul astucieux !* 🌿

Act. 3

Théorème



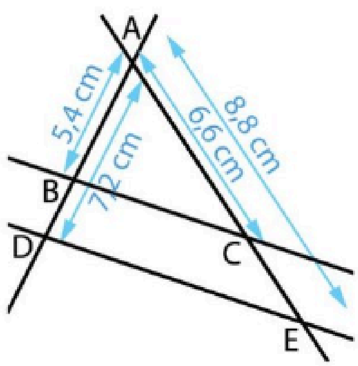
Méthode

▸ Exemple 1

Les points A, B, D d'une part et A, C, E d'autre part sont alignés dans le même ordre.

$\frac{AB}{AD} = \frac{5,4}{7,2} = 0,75$ et $\frac{AC}{AE} = \frac{6,6}{8,8} = 0,75$

Pour vérifier l'égalité des deux rapports, on peut aussi utiliser les produits en croix : $5,4 \times 8,8 = 47,52$ et $7,2 \times 6,6 = 47,52$



$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$: l'égalité de Thalès est vérifiée.

Donc les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

On peut aussi en conclure que $\frac{BC}{DE} = 0,75$.

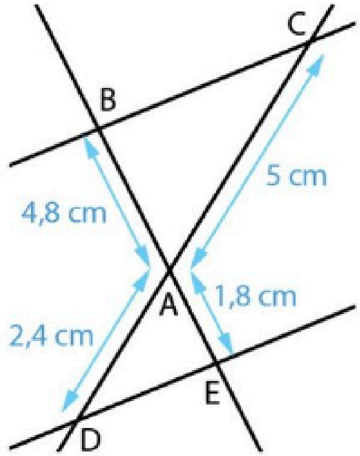
▸ Exemple 2

Les points B, A, E d'une part et C, A, D d'autre part sont alignés dans le même ordre.

$\frac{AE}{AB} = \frac{1,8}{4,8} = 0,375$ et $\frac{AD}{AC} = \frac{2,4}{5} = 0,48$.

$\frac{AE}{AB} \neq \frac{AD}{AC}$: l'égalité de Thalès n'est pas vérifiée.

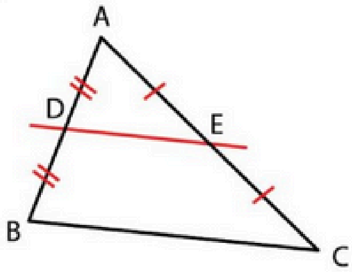
Donc les droites (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.



Remarques

- Dans l'exemple 1, on a utilisé la réciproque du théorème de Thalès, puis le théorème de Thalès pour obtenir l'égalité avec le troisième rapport. Dans l'exemple 2, c'est le théorème de Thalès qui est utilisé. En effet, si les droites (BC) et (DE) étaient parallèles, alors d'après le théorème de Thalès, l'égalité de Thalès serait vérifiée. Comme ce n'est pas le cas, les droites (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.

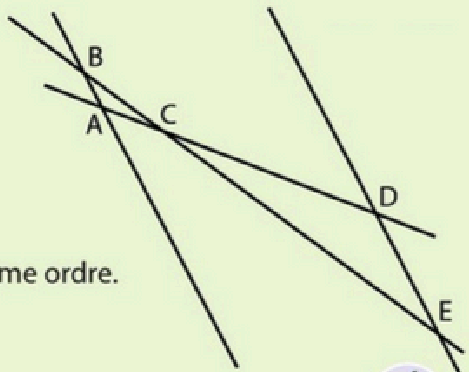
- Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté : cette propriété est un cas particulier de la réciproque du théorème de Thalès (c'est le cas où les rapports sont égaux à $\frac{1}{2}$).



On considère la figure ci-contre, où les droites (BE) et (AD) se coupent en C.

On a : CD = 7 cm ; AC = 2 cm ; CE = 10,5 cm ; BC = 3 cm.

- Les droites (BA) et (DE) sont-elles parallèles ?



Solution

1^re^ étape : on vérifie l'alignement des points

Les points A, C, D d'une part et B, C, E d'autre part sont alignés dans le même ordre.

2^e^ étape : on cherche si l'égalité de Thalès est vérifiée ou non

$\frac{CA}{CD} = \frac{2}{7}$ et $\frac{CB}{CE} = \frac{3}{10,5}$. $2 \times 10,5 = 3 \times 7$, donc $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$.

3^e^ étape : on conclut

L'égalité de Thalès est vérifiée, donc les droites (BA) et (DE) sont parallèles.

Pour prouver l'égalité de deux quotients, on doit calculer les valeurs **exactes** de ces quotients ou des produits en croix, et non des valeurs approchées.

⚔️Entraine-toi avec *Droites parallèles ?*⚔️

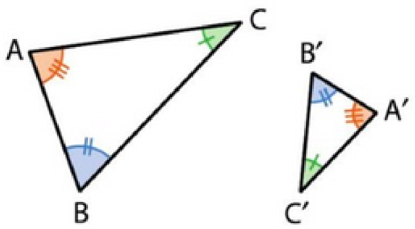
🌿 Retour en arrière : *Mesurer un arbre* 🌿

Définition

Exemple

$\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.



Remarque

Si deux triangles sont égaux, alors ils sont semblables.
Par contre, deux triangles semblables ne sont pas forcément égaux.

Méthode

Exemple

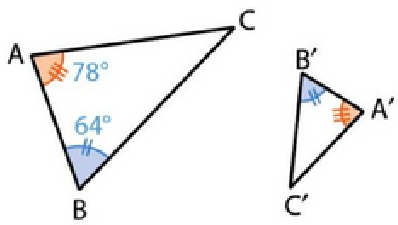
Soient ABC et A'B'C' deux triangles tels que :

$\widehat{A} = \widehat{A'} = 78°$ et $\widehat{B} = \widehat{B'} = 64°$.

Donc ABC et A'B'C' sont semblables.

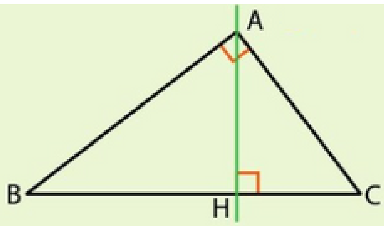
On peut facilement calculer le troisième angle :

$\widehat{C} = \widehat{C'} = 180° - 78° - 64° = 38°$.



Les triangles ABC et ABH sont respectivement rectangles en A et en H.

- Justifier que les triangles ABC et ABH sont des triangles semblables.



Solution

On cherche des angles de même mesure dans les deux triangles.

ABC et ABH sont des triangles rectangles, donc $\widehat{BAC} = \widehat{AHB} = 90°$.

De plus, $\widehat{ABC} = \widehat{ABH}$ car cet angle est commun aux deux triangles.

Comme les triangles ont deux paires d'angles de même mesure, alors on peut conclure que ce sont deux triangles semblables.

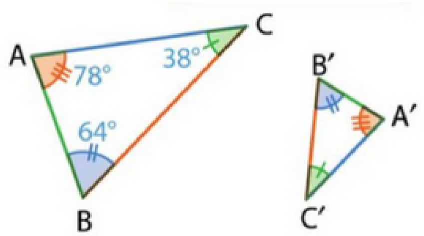
⚔️Entraine-toi avec *Triangles semblables (1 à 3)*⚔️

Act. 4

Propriété

Exemple

Les deux triangles ABC et A′B′C′ sont semblables car :
$\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$.
Donc le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.



Longueurs du triangle ABC	AB	AC	BC
Longueurs du triangle A′B′C′	A′B′	A′C′	B′C′

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

ABC est un agrandissement de A′B′C′.

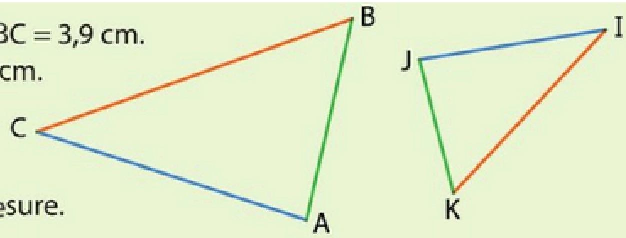
Propriété

Remarque

Dans les deux configurations du Théorème de Thalès, les triangles ABC et AMN sont semblables.

ABC est un triangle tel que : AB = 2,4 cm, AC = 3,3 cm et BC = 3,9 cm.
IJK est un triangle tel que : IJ = 2,2 cm, IK = 2,6 cm et JK = 1,6 cm.

1. Justifier que ABC et IJK sont des triangles semblables.
2. Quel est le rapport d'agrandissement de IJK à ABC ?
3. Citer les angles de ces deux triangles qui sont de même mesure.



Solution

1.

Longueurs des côtés du triangle IJK (en cm)	JK = 1,6	IJ = 2,2	IK = 2,6
Longueurs des côtés du triangle ABC (en cm)	AB = 2,4	AC = 3,3	BC = 3,9

On cherche à savoir si les longueurs des côtés des triangles sont proportionnelles.
Pour cela, on réalise un tableau avec les longueurs des côtés, de la plus petite à la plus grande.

$\frac{2{,}4}{1{,}6} = \frac{3{,}3}{2{,}2} = \frac{3{,}9}{2{,}6} = 1{,}5$

Les rapports de longueurs sont égaux, donc c'est un tableau de proportionnalité. On en conclut que les triangles ABC et IJK sont des triangles semblables.

2. On passe des côtés de IJK aux côtés de ABC en multipliant par 1,5.
Le triangle ABC est donc un agrandissement du triangle IJK de rapport 1,5.

3. On a : $\hat{I} = \hat{C}$, $\hat{K} = \hat{B}$ et $\hat{J} = \hat{A}$.

Pour trouver les paires d'angles de même mesure, on regarde les côtés correspondants dans le tableau de proportionnalité et on prend leurs angles opposés.

⚔️Entraine-toi avec *Triangles semblables (à partir de 4)* ⚔️