Kvantemekanisk harmonisk svingning og hæve-/sænkeoperatorer

af

Louis Clément

Hillerød Tekniske Gymnasium

U/NORD

SOP fag
Matematik A, Fysik A
SOP vejledere
Mikkel Oglesby
Jacob Skytte Salgaard Bendtsen

6. december 2020

Indhold

1 Gennemgang af matematiske metoder

1.1 Vektorrum

Definition 1.1. Et linært vektorrum $\mathbb{V}$ er defineret over et felt $\mathbb{F}$ (hvor vi stort set kun vil beskæftige os med $\mathbb{C}$). En *vektor* $|X\rangle$ er da et element af $\mathbb{V}$. Disse elementer har følgende egenskaber

- En regel for $|V\rangle + |W\rangle$
- En regel for $a\,|V\rangle\,, \forall a \in \mathbb{F}$
- Distributiv skalarmultiplikation for vektorelementer
  $a(|V\rangle + |W\rangle) = a\,|V\rangle + a\,|W\rangle)$
- Distributiv skalarmultiplikation for skalarelementer
  $(a + b)\,|V\rangle = a\,|V\rangle + b\,|V\rangle$
- Associativ skalarmultiplikation
  $a(b\,|V\rangle) = ab\,|V\rangle$
- Abelsk addition
  $|V\rangle + |W\rangle = |W\rangle + |V\rangle$
- Associativ addition
  $|V\rangle + (|W\rangle + |Z\rangle) = (|V\rangle + |W\rangle) + |Z\rangle$
- Nulvektor, $|V\rangle + |0\rangle = |V\rangle$ samt et inverst element der kan fremstille en nulvektor ved addition $|V\rangle + |-V\rangle = |0\rangle$

Definition 1.2. Indre produktrum er et vektorrum $\mathbb{V}$ med et såkaldt indre produkt. Det indre produkt mellem to vektorer V og W betegnes $\langle V|W\rangle$ og overholder

- Symmetri $\langle V|W\rangle = \langle W|V\rangle^*$ hvorledes * betegner komplekst konjugerede for $\mathbb{C}$
- $\langle V|V\rangle \geq 0$ og $\langle V|V\rangle = 0 \iff |V\rangle = |0\rangle$
- $\langle V|(a\,|W\rangle + b\,|Z\rangle)\rangle = \langle V|aW + bZ\rangle = a\,\langle V|W\rangle + b\,\langle V|Z\rangle$

Det indre produkt kan defineres mere eksplicit som

$$\begin{aligned}\langle V|W\rangle &= \sum_i \sum_j v_i^* w_j \delta_{ij} \\ &= \sum_i v_i^* w_i\end{aligned} \tag{1.1}$$

for en ortonormal basis, derfor $\delta_{ij} = \langle i|j\rangle$

1.2 Linære operatorer

Definition 1.3. En linær operator eller linær transformation T er en funktion $T : \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$ således at

$$T(cv_1 + v_2) = c(Tv_1) + Tv_2 \tag{1.2}$$

Definition 1.4. En kommutator er defineret som

$$[\Omega, \Lambda] = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega \tag{1.3}$$

Definition 1.5. Enhver operator i $\mathbb{V}^n(C)$ har n eigenværdier. Eigenværdiligningen (en omskrevet version) er

$$(\Omega - \omega\hat{I})\,|V\rangle = |0\rangle \tag{1.4}$$

Betingelsen for eigenvektorer (som aldrig er nulvektoren) er

$$\det\left(\Omega - \omega\hat{I}\right) = 0 \tag{1.5}$$

hvor $\hat{I}$ er identitetsoperatoren. Vi kan omskrive eigenværdiligningen (i Matrix-repræsentation) til

$$\sum_j (\Omega_{ij} - \omega\delta_{ij})v_j = 0 \tag{1.6}$$

Sættes determinanten til 0 får vi karakterligningen (hvor c_w er $\det(\Omega_{ij})\hat{I}\,|w\rangle$)

$$\sum_{m=0}^{n} c_w\omega^m = 0 \tag{1.7}$$

og karakterpolynomiet

$$P^n(\omega) = \sum_{m=0}^{n} c_w\omega^m \tag{1.8}$$

Eksempel 1.5.1. Rotationsoperatoren $R\left(\frac{1}{2}\pi e_x\right)$ kan repræsenteres ved en matrix således

$$R\left(\frac{1}{2}\pi e_x\right) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Da kan vi skrive karakterligningen som

$$\det\left(\Omega - \omega\hat{I}\right) = \begin{vmatrix} 1-\omega & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & -1 \\ 0 & 1 & -\omega \end{vmatrix} = 0$$

Hvor karakterpolynomiet kan skrives som $(1-\omega)(\omega^2+1) = 0$, og $\omega \in \{1, i, -i\}$.

Sætter vi $\omega = 1$ ind i (1.6) får vi

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0-1 & -1 \\ 0 & 1 & 0-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 0 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Hvorfor $x_2 = x_3 = 0$. Da $\omega = 1$ er lignende $|1\rangle$ får vi at enhver vektor af nedenstående form er acceptabel

$$x_1 \,|1\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$