Hæve-/sænkeoperatorer og hydrogenlampe

Louis Clément

Hillerød Tekniske Skole

U/NORD

SOP fag
Matematik A, Fysik A
SOP vejledere
Mikkel Oglesby
Jacob Skytte Salgaard Bendtsen

6. december 2020

Indhold

1 Gennemgang af matematiske metoder

1.1 Hilbertrum

Definition 1.1. Et Hilbertrum $\mathcal{H}$ er et komplet vektorrum over et felt $\mathbb{F}$ med associeret indre produkt. Vi beskæftiger os med rum, hvori det gælder at

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int \psi^*(x)\psi(x)\ dx < \infty$$

for $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Vi kan konstruere et ∞-dimensionelt Hilbertrum ved at overveje et kontinuert basis med elementerne $|a\rangle$ navngivet med en kontinuer variabel a, normaliseret således at

$$\langle a|\tilde{a}\rangle = \delta(a - \tilde{a}) \tag{1.1}$$

hvilket betyder vi kan skrive

$$|\psi\rangle = \int \psi(a)\,|a\rangle\ \ da \tag{1.2}$$

Definition 1.2. En *ket* vektor $|V\rangle$ betegner en vektor af et abstrakt vektorrum. I et endeligdimensionelt vektorrum kan en ket vektor repræsenteres som

$$|V\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Definition 1.3. En *bra* vektor $\langle V|$ betegner en et element af dual vektorrum (dualrum). Den kan repræsenteres som det transponerede konjugat af den ket vektor den er dual på

$$|V\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1^* & v_2^* & \cdots & v_n^* \end{bmatrix} \leftrightarrow \langle V| \tag{1.4}$$

Dualrum $\mathcal{H}^*$ består af linære afbildninger $\mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$, defineret med det indre produkt for $\langle \phi, \cdot \rangle \in \mathcal{H}$ som $\langle \phi, \cdot \rangle : \psi \mapsto \langle \phi | \psi \rangle$.

1.2 Linære operatorer

Definition 1.4. En linær operator eller linær transformation T er en funktion $T : \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$ således at

$$T(cv_1 + v_2) = c(Tv_1) + Tv_2 \tag{1.5}$$

Igennem denne tekst vil de kun repræsenteres som matricer M, således at $T(x) = Mx$. En linær operator kan i øvrigt repræsenteres som $|\psi\rangle \langle\phi| \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$.

Definition 1.5. En kommutator er defineret som

$$[\Omega, \Lambda] = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega \tag{1.6}$$

hvor $\Omega, \Lambda \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$. Hviss. $[\Omega, \Lambda] = 0$ kommuterer operatorerne.

Definition 1.6. Enhver operator i $\mathbb{V}^n(C)$ har n eigenværdier. Eigenværdiligningen (en omskrevet version) er

$$(\Omega - \omega\hat{I}) |V\rangle = |0\rangle \tag{1.7}$$

Betingelsen for eigenvektoren er

$$\det\Big(\Omega - \omega\hat{I}\Big) = 0 \tag{1.8}$$

hvor $\hat{I}$ er identitetsoperatoren. Vi kan omskrive eigenværdiligningen (ved at projicere den på en basis $\langle i|$) til

$$\begin{aligned} \langle i| \, \Omega - \omega\hat{I} \, |V\rangle &= 0 \\ \sum_j (\Omega_{ij} - \omega\delta_{ij}) v_j &= 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Sættes determinanten til 0 får vi karakterligningen

$$\sum_{m=0}^{n} c_w \omega^m = 0 \tag{1.10}$$

og karakterpolynomiet

$$P^n(\omega) = \sum_{m=0}^{n} c_w \omega^m \tag{1.11}$$

2 Kvantemekanisk harmonisk svingning

Tilstanden af et partikel er beskrevet med en tilstandsvektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

2.1 Schrödinger-ligningen

Vi kan skrive den tidsuafhængige Schrödinger-ligning (TISE) som

$$\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle \tag{2.1}$$

Hvor $\hat{H}$ er Hamiltonoperatoren. Fra den klassiske formidling af energi, får vi at $\hat{H}$ kan repræsenteres som

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

Hvilket giver vi kan skrive SE som

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x)$$