

Kvantemekanisk harmonisk svingning og
hæve-/sænkeoperatorer

af

Louis Clément

Hillerød Tekniske Gymnasium

U/NORD

SOP fag

Matematik A, Fysik A

SOP vejledere

Mikkel Oglesby

Jacob Skytte Salgaard Bendtsen

6. december 2020

Indhold

1	Gennemgang af matematiske metoder	1
1.1	Vektorrum	1
1.2	Linære operatorer	2

1 Gennemgang af matematiske metoder

1.1 Vektorrum

Definition 1.1. Et lineært vektorrum \mathbb{V} er defineret over et felt \mathbb{F} (hvor vi stort set kun vil beskæftige os med \mathbb{C}). En *vektor* $|X\rangle$ er da et element af \mathbb{V} . Disse elementer har følgende egenskaber

- En regel for $|V\rangle + |W\rangle$
- En regel for $a|V\rangle, \forall a \in \mathbb{F}$
- Distributiv skalarmultiplikation for vektorelementer
$$a(|V\rangle + |W\rangle) = a|V\rangle + a|W\rangle$$
- Distributiv skalarmultiplikation for skalarelementer
$$(a + b)|V\rangle = a|V\rangle + b|V\rangle$$
- Associativ skalarmultiplikation
$$a(b|V\rangle) = ab|V\rangle$$
- Abelsk addition
$$|V\rangle + |W\rangle = |W\rangle + |V\rangle$$
- Associativ addition
$$|V\rangle + (|W\rangle + |Z\rangle) = (|V\rangle + |W\rangle) + |Z\rangle$$
- Nulvektor, $|V\rangle + |0\rangle = |V\rangle$ samt et inverst element der kan fremstille en nulvektor ved addition $|V\rangle + |-V\rangle = |0\rangle$

Definition 1.2. Indre produktrum er et vektorrum \mathbb{V} med et såkaldt indre produkt. Det indre produkt mellem to vektorer V og W betegnes $\langle V|W\rangle$ og overholder

- Symmetri $\langle V|W\rangle = \langle W|V\rangle^*$ hvorledes $*$ betegner komplekst konjugerede for \mathbb{C}
- $\langle V|V\rangle \geq 0$ og $\langle V|V\rangle = 0 \iff |V\rangle = |0\rangle$
- $\langle V|(a|W\rangle + b|Z\rangle) = \langle V|aW + bZ\rangle = a\langle V|W\rangle + b\langle V|Z\rangle$

Det indre produkt kan defineres mere eksplicit som

$$\begin{aligned}\langle V|W\rangle &= \sum_i \sum_j v_i^* w_j \delta_{ij} \\ &= \sum_i v_i^* w_i\end{aligned}\tag{1.1}$$

for en ortonormal basis, derfor $\delta_{ij} = \langle i|j\rangle$

1.2 Linære operatorer

Definition 1.3. En linær operator eller linær transformation T er en funktion $T : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ således at

$$T(cv_1 + v_2) = c(Tv_1) + Tv_2\tag{1.2}$$

Definition 1.4. En kommutator er defineret som

$$[\Omega, \Lambda] = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega\tag{1.3}$$

Definition 1.5. Eigenpolynomiet findes som

$$P^n(\omega) = \sum_{m=0}^n c_w \omega^m = 0\tag{1.4}$$

Enhver operator i $\mathbb{V}^n(C)$ har n eigenverdier. Eigenligningen er

$$\det(\Omega - \omega \hat{I}) = 0 \quad (1.5)$$

hvor \hat{I} er identitetsoperatoren.

Eksempel 1.5.1. Rotationsoperatoren $R(\frac{1}{2}\pi e_x)$ kan repræsenteres ved en matrix således

$$R\left(\frac{1}{2}\pi e_x\right) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Da kan vi skrive eigenligningen som

$$\det(\Omega - \omega \hat{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \omega & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & -1 \\ 0 & 1 & -\omega \end{vmatrix} = 0$$

Hvor eigenpolynomiet kan skrives som $(1 - \omega)(\omega^2 + 1) = 0$, og $\omega \in \{1, i, -i\}$.