

Instituto Superior Técnico

**Aerodinâmica I**

2023/2024

## **Relatório do laboratório: Bomba de injetor**

### **Grupo 14**

ist1103354 - lourenco.gouveia.faria@tecnico.ulisboa.pt  
ist1102939 - mariana.alves.pires@tecnico.ulisboa.pt  
ist1103042 - paulo.alexis.s.campos@tecnico.ulisboa.pt  
ist1103285 - tiago.clamote@tecnico.ulisboa.pt

Professora Ana Sofia Oliveira Henriques Moita  
Professor José Manuel Da Silva Chaves Ribeiro Pereira  
Professor Miguel Abreu de Almeida Mendes

**29 de outubro de 2023**

---

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Objetivo</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Introdução Teórica</b>	<b>3</b>
3.1	Viscosidade . . . . .	3
3.2	Compressibilidade . . . . .	3
3.3	Escoamento . . . . .	3
3.4	Camada Limite . . . . .	4
3.5	Tensões de Corte . . . . .	4
3.6	Número de Reynolds . . . . .	4
3.7	Pressão . . . . .	4
3.8	Tubo Piezométrico . . . . .	4
3.9	Tubo De Pitot . . . . .	5
3.10	Navier-Stokes . . . . .	5
3.11	Equação da Continuidade . . . . .	7
3.12	Transporte de Reynolds . . . . .	7
3.12.1	Caudal mássico . . . . .	7
3.12.2	Caudal volúmico . . . . .	7
3.12.3	Quantidade de movimento . . . . .	8
3.12.4	Energia cinética . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Ensaio experimental</b>	<b>9</b>
4.1	Material e procedimento experimental . . . . .	9
4.2	Cálculos e procedimentos iniciais . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Apresentação e interpretação de resultados</b>	<b>10</b>
5.1	Pressão Estática . . . . .	10
5.2	Pressão dinâmica e Perfis de velocidade . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Análise e Tratamento de resultados</b>	<b>13</b>
6.1	Balanço do caudal mássico . . . . .	13
6.2	Balanço do caudal volúmico . . . . .	14
6.3	Balanço de quantidade de movimento . . . . .	15
6.4	Balanço de energia cinética . . . . .	15
6.5	Tensões de corte . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>18</b>

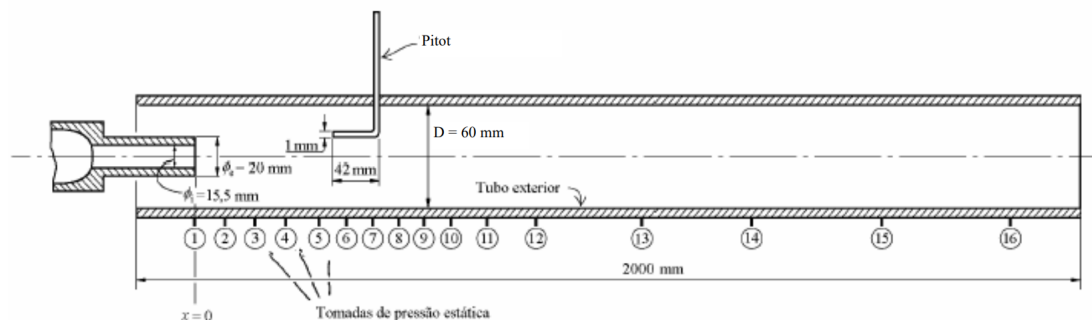
# 1 Introdução

Este laboratório foi realizado no âmbito da unidade curricular Aerodinâmica I, no curso LEAer, no primeiro quarter de 2023. A componente experimental foi realizada no dia 29 de setembro de 2023, às 11:00h (UTC+1), no pavilhão de Mecânica IV, na qual se analisou o escoamento do ar num tubo com um determinado diâmetro, provocado por uma bomba injetora.

## 2 Objetivo

O principal objetivo deste relatório é analisar o escoamento de ar dentro de um tubo com 60 mm de diâmetro (Fig. 1). Recorre-se a uma bomba injetora para introduzir o ar dentro do tubo, que causará um escoamento no interior. Para uma análise detalhada do fluxo de ar, três tubos de Pitot foram colocados em secções transversais distintas do tubo. Para cobrir toda uma secção, a altura a que os tubos de Pitot permitiam uma análise da pressão dinâmica naquela região variava ao longo do tempo, através do uso de um motor Servo controlado por um sistema Arduino. Adicionalmente, ao longo do tubo onde se encontra o escoamento de ar, estavam outros tubos conectados perpendicularmente e ligados a um multimanómetro para leitura de pressões estáticas. É esperada uma análise detalhada do fluxo de ar deste tubo com base nos diferentes dados obtidos experimentalmente, através das ferramentas mencionadas acima.

Assim de forma a atingir o principal objetivo deste trabalho, será necessário cobrir os seguintes pontos: obtenção de uma distribuição longitudinal da pressão ao longo do tubo (secção 5.1); obtenção de perfis de velocidades das secções transversais (secção 5.2); tratamento de dados de forma a obter balanços de massa, quantidade de movimento e energia cinética e análise dos dados e dos valores dos balanços (secção 6), de forma a não só tirar conclusões, como também identificar possíveis erros, limitações e consequências das aproximações realizadas.



**Figura 1:** Esquema representativo da montagem utilizada para analisar o escoamento

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x/D	0	1	2	3	4	5	6	7	8
[mm]	0	62	124	186	248	310	372	434	496

Nº	10	11	12	13	14	15	16	17
x/D	9	10	12	14	16	20	24	28
[mm]	558	620	744	868	992	1240	1488	1736

**Tabela 1:** Coordenadas longitudinais das tomadas de pressão estática

### 3 Introdução Teórica

Nesta secção serão resumidos e clarificados alguns conceitos teóricos abordados ao longo do relatório, considerados como fundamentais à compreensão e análise da atividade.

#### 3.1 Viscosidade

A viscosidade de um fluido define-se pela resistência que este apresenta relativamente ao escoamento, ou seja, a resistência do fluido face à deformação. Existem dois tipos de viscosidade: a *viscosidade dinâmica* ( $\mu$ ), a qual mede a força necessária para mover uma unidade de área, de um determinado fluido, a uma unidade de distância; e a *viscosidade cinemática* ( $\nu$ ), dada pela razão entre a viscosidade dinâmica e a densidade do fluido:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1)$$

#### 3.2 Compressibilidade

A compressibilidade de um fluido caracteriza a alteração do volume de uma determinada massa, quando este está sujeito a uma variação de pressão. Um fluido é incompressível se, perante uma variação de pressão, não ocorre variação de volume, mantendo-se o valor da densidade do mesmo. Nesta experiência laboratorial assume-se que estamos perante um fluido incompressível, para se poder usufruir do fator da densidade permanecer constante ao longo do tubo.

#### 3.3 Escoamento

O movimento das moléculas de um fluido é designado por escoamento. Este pode ser laminar ou turbulento.

O escoamento laminar caracteriza-se por um deslocamento regular das partículas de um fluido, segundo trajetórias bem definidas que, quando representadas, formam lâminas de corrente, ou camadas, cada uma delas preservando a sua característica no meio. Não ocorre transferência de informação (entre as lâminas de fluido) lateralmente, numa secção do fluido. Deste modo, num tubo como o da experiência laboratorial, a direção da velocidade será paralela ao mesmo, daí ser necessário apenas uma componente da velocidade para caracterizar completamente o escoamento, o que irá facilitar significativamente os cálculos.

No escoamento turbulento, o movimento das partículas do fluido é aleatório, descrevendo trajetórias irregulares. Isto leva a que ocorra uma transferência de quantidade de movimento entre regiões de massa líquida, logo, apenas faz sentido falar no valor médio de grandezas, visto que a velocidade das partículas varia irregularmente entre cada instante. O diagrama de velocidades caracteriza-se por um elevado gradiente perto das paredes do tubo e uma pequena variação no centro do tubo. No regime turbulento, há uma maior uniformidade no diagrama de velocidades, resultante de uma menor variação da velocidade na secção transversal, pois as partículas variam de posição, podendo passar, por exemplo, de uma posição perto da parede do tubo para outra no centro do tubo. Deste modo, a variação da pressão piezométrica numa secção transversal pode ser desprezada.

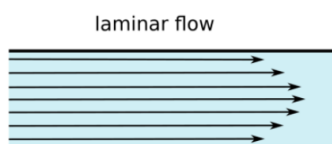


Figura 2: Escoamento laminar

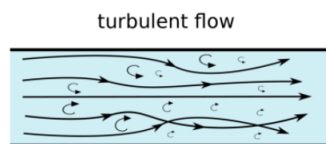


Figura 3: Escoamento turbulento

---

### 3.4 Camada Limite

A camada limite corresponde à região do escoamento onde as tensões de corte são mais importantes. Fora desta, as tensões de corte são praticamente desprezáveis, podendo em geral tratar o fluido como invíscido e, portanto utilizar a equação de Bernoulli. É ainda importante referir que, de uma forma geral, maiores números de Reynolds correspondem a uma camada limite mais delgada.

### 3.5 Tensões de Corte

A tensão de corte ( $\tau$ ) é a componente tangencial das tensões aplicadas num determinado corpo. Esta relaciona-se com a variação da velocidade do fluido paralela às paredes do tubo ( $u$ ) em função da distância e com a viscosidade dinâmica ( $\mu$ ) da seguinte forma:

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy} \quad (2)$$

### 3.6 Número de Reynolds

O número de Reynolds é a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas de um fluido, perante um determinado escoamento, isto é, a razão entre a pressão dinâmica e a tensão de corte ( $\tau$ ). Este depende da velocidade média, da viscosidade do fluido e do diâmetro do tubo onde ocorre o escoamento, como demonstra a seguinte expressão que permite calcular o número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu} \quad (3)$$

O número “crítico” de Reynolds permite prever um grupo de valores para os quais o escoamento do fluido transita de laminar para turbulento.

### 3.7 Pressão

Neste trabalho é importante mencionar e definir as seguintes pressões:

- A **pressão estática/piezométrica** é medida perpendicularmente em relação ao escoamento;
- A **pressão dinâmica** é a pressão associada à velocidade de um determinado escoamento.
- A **pressão de estagnação/total** resulta da soma da pressão estática com a pressão dinâmica:

$$p_{total} = p_{estática} + p_{dinâmica} \quad (4)$$

### 3.8 Tubo Piezométrico

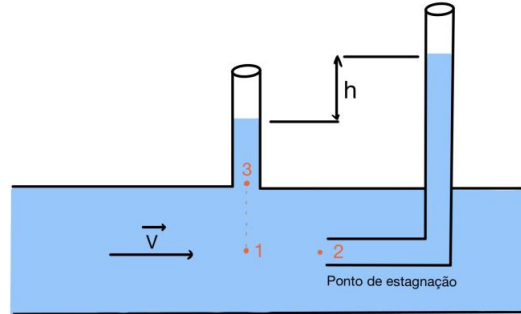
O tubo piezométrico é utilizado para medir pressões estáticas num determinado ponto. Ao ser inserido numa determinada tubagem ou recipiente, o fluido irá subir uma altura,  $h$ , correspondente à pressão estática através da seguinte relação:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g h \quad (5)$$

Neste laboratório foram utilizados 16 tubos piezométricos para medir a pressão estática ao longo do tubo, onde circulava o fluido de acordo com a Fig. 1.

### 3.9 Tubo De Pitot

O tubo de Pitot apresenta a forma de um "L" e está posicionado paralelamente à linha de corrente, de modo a que a carga à entrada do mesmo seja igual à carga do ponto da linha de corrente sob o qual este foi instalado. Este é colocado de modo a ficar direcionado contra o escoamento, de modo a medindo a pressão total no ponto de estagnação.



**Figura 4:** Montagem de um tubo de Pitot de um tubo piezométrico para medir as pressões total e estática de um fluido perante um escoamento

O funcionamento do tubo de Pitot, baseia-se na equação de Bernoulli. O Teorema de Bernoulli traduz o princípio da conservação de energia, descrevendo o comportamento de um fluido, para um escoamento laminar, da seguinte forma:

$$p_2 + \frac{1}{2}v_2^2\rho + gz_2\rho = p_1 + \frac{1}{2}v_1^2\rho + gz_1\rho \quad (6)$$

Neste laboratório, usar-se-ão os pontos de referência da Fig. 4. Como estes se encontram à mesma altura, as componentes gravíticas da equação de Bernoulli podem ser ignoradas. O ponto 2 é um ponto de estagnação, logo tem-se  $v_2 = 0$ . Considerando a Eq. 4, onde  $p_1$  é a pressão estática e  $p_2$  a pressão total, pode-se simplificar a equação de Bernoulli (Eq. 6) e obter uma expressão para a velocidade em 1:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}v_1^2\rho \Leftrightarrow \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{2p_{dinamica}}{\rho}} \quad (7)$$

Deste modo, o tubo de Pitot irá permitir, indiretamente, a medição das velocidades do fluido numa determinada secção transversal do tubo onde ocorre o escoamento.

### 3.10 Navier-Stokes

Para regime incompressível, a equação vetorial de Navier-Stokes é dada por:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \frac{\delta\vec{V}}{\delta t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{V} + \vec{g} \quad (8)$$

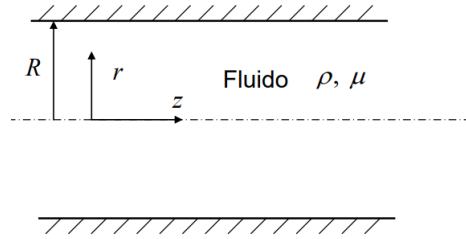
E em coordenadas cilíndricas temos:

$$r : \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + g_r \quad (9)$$

$$\theta : \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + g_\theta \quad (10)$$

$$z : \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + g_z \quad (11)$$

Como estamos perante o escoamento de um fluido incompressível através de um tubo de secção transversal circular constante e sendo o ar um fluido newtoniano, podemos considerá-lo como um escoamento de Hagen-Poiseuille.



**Figura 5:** Escoamento de Hagen-Poiseuille

Tendo em conta as seguintes considerações:

- O fluido não tem rotação:  $v_\theta = 0$ ;
- Pela equação da continuidade e tendo em conta que a velocidade na parede é nula, tem-se que a velocidade radial do fluido é nula:  $v_r = 0$ ;
- Estamos perante um regime estacionário:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ;
- Pela simetria axial do escoamento:  $\frac{D\vec{V}}{D\theta} = 0$  e  $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$ ;
- Considerando que estamos perante uma zona onde o escoamento está completamente desenvolvido:  $\frac{D\vec{V}}{dz} = 0$ ;

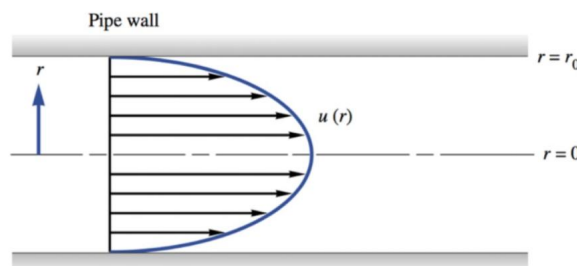
Como foi visto,  $v_\theta = v_r = 0$ , pelo que podemos ter apenas em conta a velocidade longitudinal do fluido, segundo o eixo  $z$ . Com base nas considerações anteriormente apresentadas, podemos obter a seguinte simplificação para a equação de Navier-Stokes segundo o eixo  $z$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (12)$$

Por último, integrando em  $r$  e através das condições de fronteira  $v_z(r = R) = 0$  obtemos a seguinte expressão para a velocidade longitudinal do fluido, ao longo do tubo:

$$v_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2) \quad (13)$$

A partir da equação obtida (eq. 13), podemos prever o perfil de velocidades para um escoamento totalmente desenvolvido ao longo do tubo, para determinados valores de  $r$  e  $\frac{dp}{dz}$ , representado pela seguinte imagem:



**Figura 6:** Perfil da velocidade no escoamento de Hagen-Poiseuille com simetria axial e sem rotação

### 3.11 Equação da Continuidade

O escoamento em estudo ocorre dentro de um tubo rígido, pelo que as paredes do mesmo obrigam a que o caudal mássico seja constante ao longo das várias secções do mesmo. Pela conservação da massa, tem-se que a diferença entre a massa que sai e que entra no volume de controlo, por unidade de tempo, é igual à variação da massa dentro do volume em estudo, por unidade de tempo :

$$\dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (14)$$

Admite-se que a densidade do fluido permanecerá constante ao longo do tubo, uma vez que se considera o fluido como incompressível. Deste modo, como o tubo é indeformável, tem-se  $\Delta m = 0$ . Sabendo que a massa que entra/sai do volume de controlo, por unidade de tempo é dada por  $\dot{m} = \rho Q$ , onde  $Q$  representa o caudal volúmico e como  $\rho = const$ , então, substituindo na Eq. 14 obtém-se a equação da continuidade aplicada a um fluido incompressível:

$$Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (15)$$

Como a área da secção transversal do tubo em estudo é constante ( $A_1 = A_2$ ), espera-se que a velocidade média do fluido seja constante ao longo do mesmo.

### 3.12 Transporte de Reynolds

O teorema do transporte de Reynolds permite estudar a variação de certas propriedades do sistema, tais como: caudal mássico, caudal volúmico, quantidade de movimento e energia cinética, ao longo do escoamento no tubo. A equação de Reynolds descreve a variação temporal de uma propriedade extensiva  $B$  do sistema ao longo do tempo:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \beta \rho dV + \int_{CS} \beta \rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA, \quad \text{onde } \beta = \frac{dB}{dm} \quad (16)$$

#### 3.12.1 Caudal mássico

O caudal mássico é a quantidade de massa do fluido que atravessa uma determinada área por unidade tempo, o qual pode ser obtido substituindo  $B = m \Rightarrow \frac{dB}{dt} = \dot{m}$  e  $\beta = 1$  na eq. 16:

$$\dot{m} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA \quad (17)$$

Para volumes de controlo fixos em relação ao referencial em análise, a equação pode ser reescrita como:

$$\dot{m} = \int_{CV} \frac{d}{dt} \rho dV + \int_{CS} \rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA$$

Dado que a densidade do ar permanece constante ao longo da secção transversal, pois considera-se o fluido como sendo incompressível, o integral no controlo de volume pode ser ignorado, ficando o balanço de massa descrito como:

$$\dot{m} = \int_{CS} \rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA \quad (18)$$

O caudal mássico depende apenas da velocidade e da densidade. Sendo a densidade constante (fluido incompressível) e a velocidade média constante, como explicado pela equação da continuidade (eq.15), espera-se que o balanço de caudal mássico também seja constante.

#### 3.12.2 Caudal volúmico

O caudal volúmico ( $Q$ ) é a quantidade de volume que um fluido atravessa, numa determinada área, por unidade de tempo. Este pode ser obtido ao dividir a eq.17 pela massa volúmica:

$$Q = \int_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (19)$$



### 3.12.3 Quantidade de movimento

Fazendo um raciocínio semelhante, para  $B = mv$  e  $\beta = v$ , e tendo em conta que as características do fluido não se alteram ao longo do tempo, visto que se assume regime estacionário, tem-se a seguinte equação para a quantidade do movimento:

$$\int_{SC} \rho v (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA \quad (20)$$

Através do processo de difusão radial da quantidade de movimento, o jato central cede quantidade de movimento ao fluido periférico. Deste modo, será expectável um aumento da quantidade de movimento no fluido periférico e uma diminuição na do fluido central.

O caudal da quantidade de movimento depende do quadrado da velocidade, logo a uniformização das velocidades, causada pelos efeitos viscosos, vai fazer diminuir o caudal da quantidade de movimento no fluido. Inicialmente, como as velocidades na zona central são elevadas, o integral do quadrado da velocidade também será elevado e, conseqüentemente, também será maior o caudal da quantidade de movimento. Importa referir que o caudal da quantidade de movimento vai estabilizar quando o escoamento ficar desenvolvido. Isto acontece devido à difusão transversal da quantidade de movimento, causada pelas tensões de corte e pelo efeito de mistura do fluido, típico do escoamento turbulento. A difusão é tanto mais intensa quanto maior for o gradiente de velocidades, pelo que ao longo do tubo esta vai diminuir, ocorrendo uma uniformização do perfil da velocidade do fluido, quando o escoamento fica desenvolvido.

### 3.12.4 Energia cinética

A energia total do sistema é dada por  $E = \int \rho e dV$ , logo  $\beta = e$ . Substituindo na equação de Reynolds, obtém-se:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho e dV + \int_{CS} \rho e (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA \quad (21)$$

Sabendo que a energia  $e$  resulta da soma da energia interna, cinética e potencial obtemos:

$$e = u + \frac{1}{2} V^2 + gz \quad (22)$$

Substituindo a eq.22 na eq. 21, obtemos:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho (u + \frac{1}{2} V^2 + gz) dV + \int_{CS} \rho (u + \frac{1}{2} V^2 + gz) (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA \quad (23)$$

Considerando regime estacionário  $\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho (u + \frac{1}{2} V^2 + gz) dV = 0$ , logo:

$$\frac{dE}{dt} = \int_{CS} \rho (u + \frac{1}{2} V^2 + gz) (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA \quad (24)$$

De onde se retira que o caudal de energia cinética é:

$$\int_{CS} \frac{1}{2} \rho V^2 (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA \quad (25)$$

Como é possível verificar através da fórmula do caudal da energia cinética (eq. 25), o integral depende do quadrado da velocidade. Deste modo, o caudal da energia cinética irá diminuir ao longo do escoamento, resultante da uniformização das velocidades.

## 4 Ensaio experimental

### 4.1 Material e procedimento experimental

Quer o material, quer o procedimento utilizado tiveram por base o documento "Guia de laboratório: Bomba injetora" [7], escrito pela professora Ana Moita e disponibilizado na página da unidade curricular Aerodinâmica I.

### 4.2 Cálculos e procedimentos iniciais

Antes de ligar a bomba injetora, algumas medições atmosféricas foram feitas. Estes valores são usados para calibrar os algoritmos pré-programados que foram compilados em *Matlab* e para cálculos posteriores, como a pressão estática:

- pressão atmosférica -  $767 \pm 0.5 \text{ mm/Hg}$
- temperatura seca ( $T_{do}$ ) -  $27.6 \pm 0.5^\circ\text{C}$
- humidade relativa do ar - 55.2%

A pressão atmosférica foi obtida usando um barómetro, a temperatura seca através de um termómetro digital e a humidade relativa do ar com um higrómetro. Os valores da temperatura seca e da humidade relativa permitem estimar a temperatura húmida do ar com base num diagrama psicométrico. Estima-se então um valor de temperatura húmida ( $T_{wo}$ ) de  $20.5^\circ\text{C}$ .

Recorrendo às seguintes expressões podemos obter estimativas para os valores da pressão de vapor saturado ( $p_e$ ) à temperatura  $T_{wo}$  e da pressão parcial de vapor ( $p_p$ ), utilizando o valor das temperaturas  $T_{wo}$  e  $T_{do}$  em graus Celsius:

$$p_e = 3.25T_{do}^2 + 18.6T_{wo} + 692 \quad (26)$$

$$\Rightarrow p_e = 3000118.181 \text{ Pa}$$

$$p_p = p_e - p_{atm} \left( \frac{T_{do} - T_{wo}}{1500} \right) \quad (27)$$

$$\Rightarrow p_p = 1420.55939 \text{ Pa}$$

Para converter  $\text{mm/Hg}$  para  $\text{Pa}$  basta multiplicar por uma constante  $K = 133.322368$ , obtendo-se  $p_{atm} = 102258.27[\text{Pa}]$  para a pressão atmosférica local. Assim, é possível calcular a densidade do ar usando a seguinte equação, onde  $R$  é a constante dos gases perfeitos, com  $R = 287.1 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ :

$$\rho_{ar} = \frac{p_{atm} - 0.378p_p}{R(T_{do} + 273.15)} \quad (28)$$

$$\rho_{ar} = 1.178075345 \text{ kg/m}^3$$

A última medida realizada foi a inclinação  $\beta$  do multimanómetro em relação ao solo. A cada compartimento do manómetro está conectado um tubo ligado a uma secção do tubo principal. Deste modo, e através na análise da relação de alturas ar/líquido, é possível obter dados de pressão estática para 16 secções do escoamento. Sendo, portanto, possível estudar a variação longitudinal da pressão estática ao longo do tubo principal. O valor do ângulo registado pelo inclinómetro digital foi de  $(15.7 \pm 0.1)^\circ$ .

## 5 Apresentação e interpretação de resultados

### 5.1 Pressão Estática

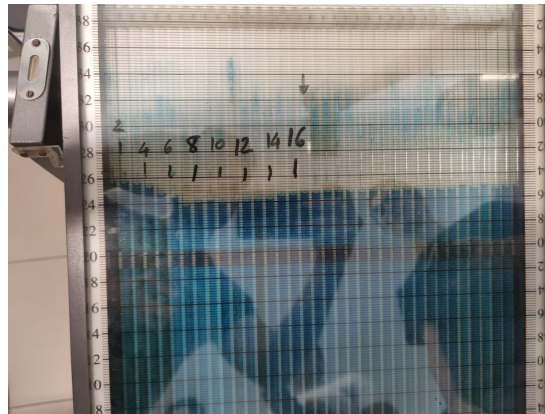
Nesta secção, pretendemos obter os dados relativos às medições do manómetro, como forma de estudar a distribuição ao longo do tubo.

Como verificado na secção anterior, o multimanómetro encontra-se inclinado para facilitar a leitura dos valores, sendo portanto necessário fazer uma simples relação trigonométrica para obter a altura real (apenas a componente vertical):

$$h = l \sin \beta \quad (29)$$

Após a determinação destes valores, a pressão relativa à atmosfera pode ser obtida através da equação 5, onde a densidade, neste caso, será a densidade do líquido azul da Fig. 7

$$\Delta p = \rho_{fm}gh \quad (30)$$



**Figura 7:** Efeito da pressão estática do escoamento no multimanómetro inclinado

Em primeiro lugar, será importante apontar que os líquidos presentes nos últimos compartimentos do multimanómetro não estão diretamente conectados à tubagem da experiência, ou seja, a altura dos tubos é afetada pela pressão do ar - maior altura de líquido implica menor pressão. Este processo também impõe que a altura relativa esteja diretamente associada à pressão atmosférica local.

Com base nesta informação, é notória a presença de pressões inferiores à atmosférica no início da tubagem onde escorre o ar que está a ser alvo de estudo. Isto acontece porque a bomba injetora encontra-se posicionada consideravelmente no interior da tubagem principal. O escoamento de ar causado pelo jato direciona-se para a direita (Fig. 1) e vai ceder quantidade de movimento ao fluido periférico, através de difusão radial, aumentando-lhe a velocidade. Consequentemente, esse jato central inicial que origina da bomba injetora vai perder quantidade de movimento. De modo a assegurar a continuidade, irá gerar-se uma zona de baixas pressões à entrada do tubo exterior, impulsionando ar exterior para o interior.

Para formular uma análise quantitativa, organizaram-se os dados desta imagem na tabela 2:

$x/D$	0	1	2	3	4	5	6	7
$l [cm]$	25.60	25.50	25.40	25.15	24.60	24.30	23.65	23.85

$x/D$	8	9	10	12	14	16	20	24
$l [cm]$	24.00	23.75	23.80	23.90	23.95	24.00	24.30	24.35

**Tabela 2:** Valores da altura de líquido medida em função das coordenadas longitudinais das tomadas de pressão estática ( $x/D$ )

As equações 29 e 30 podem então depois ser aplicadas, assumindo  $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$  e com  $\rho_{fm} = 825 \text{ kg m}^{-3}$  para se construir a tabela 3.

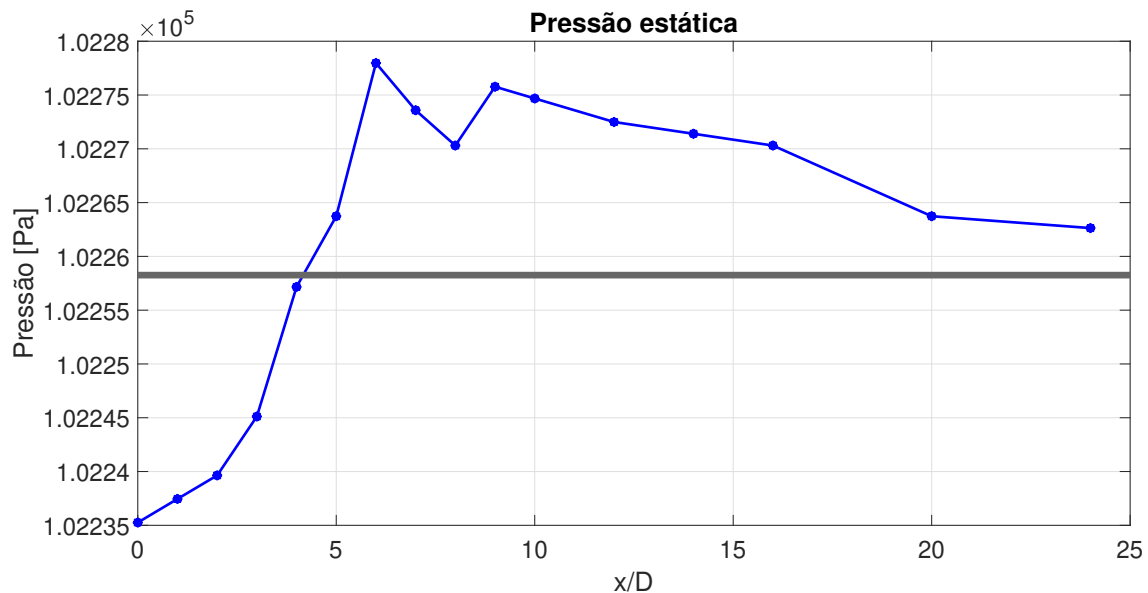
$x/D$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta l [cm]$	1.0500	0.9500	0.8500	0.6000	0.0500	-0.2500	-0.9000	-0.7000
$h [cm]$	0.0028	0.0026	0.0023	0.0016	0.0001	-0.0007	-0.0024	-0.0019
$\Delta p [Pa]$	-22.9954	-20.8054	-18.6153	-13.1402	-1.0950	5.4751	19.7103	15.3303

$x/D$	8	9	10	12	14	16	20	24
$\Delta l [cm]$	-0.5500	-0.8000	-0.7500	-0.6500	-0.6000	-0.5500	-0.2500	-0.2000
$h [cm]$	-0.0015	-0.0022	-0.0020	-0.0018	-0.0016	-0.0015	-0.0007	-0.0005
$\Delta p [Pa]$	12.0452	17.5203	16.4253	14.2352	13.1402	12.0452	5.4751	4.3801

**Tabela 3:** Pressão relativa em função das coordenadas longitudinais das tomadas de pressão estática

De notar que é assumida pressão estática aproximadamente constante transversalmente, esta assunção é válida pois consideramos que a mistura de ar é relativamente homogénea, que a diferença de alturas dentro do tubo exterior é pouco significativa e que desprezamos a componente da velocidade perpendicular ao escoamento. Para melhor visualizar as variações de pressão estática, construiu-se o gráfico 8. A linha horizontal representa a pressão atmosférica obtida nos procedimentos iniciais (secção 4.2). Pode-se então notar que nas primeiras secções transversais a pressão estática do tubo de escoamento é inferior à pressão atmosférica local. É nesta região do tubo onde ocorre a depressão mencionada na análise qualitativa. Assim verificamos que existe um aumento até ao tubo 7, atingindo um máximo superior à pressão atmosférica local. De seguida, o escoamento que já se encontra desenvolvido, decresce e tende para a pressão atmosférica. Uma vez estabilizada a quantidade de movimento e a impulsão do fluido (para o exterior) vencer o atrito nas paredes (tensões de corte) temos um gradiente longitudinal de pressão constante. Este fenómeno implica que este decréscimo final ocorra de forma aproximadamente linear.

A ligeira desfasagem entre linearidade esperada no fim do tubo e o gráfico obtido pode de ser explicada quer por fatores, fenómenos e forças não contabilizadas no balanço, por simplicidade da experiência, como forças de viscosidade, assumir fluido desenvolvido ou mesmo fenómenos de turbulência; quer por erros no método quer nos aparelhos de medida, que é o caso do ponto da secção transversal 8, que se desvia do esperado devido mal-funcionamento do tubo que efetuava a leitura.



**Figura 8:** Variação da pressão estática ao longo do escoamento longitudinal

Caso o tubo onde escorre o ar em análise tivesse comprimento infinito, a pressão interior tenderia a ser a pressão atmosférica. Ademais, o jato de saída vai estar aproximadamente alinhado com as paredes do tubo uma vez que a ausência de altas pressões internas não provocam uma dispersão anular. Isto foi observado ao colocar a mão na zona de saída do ar.

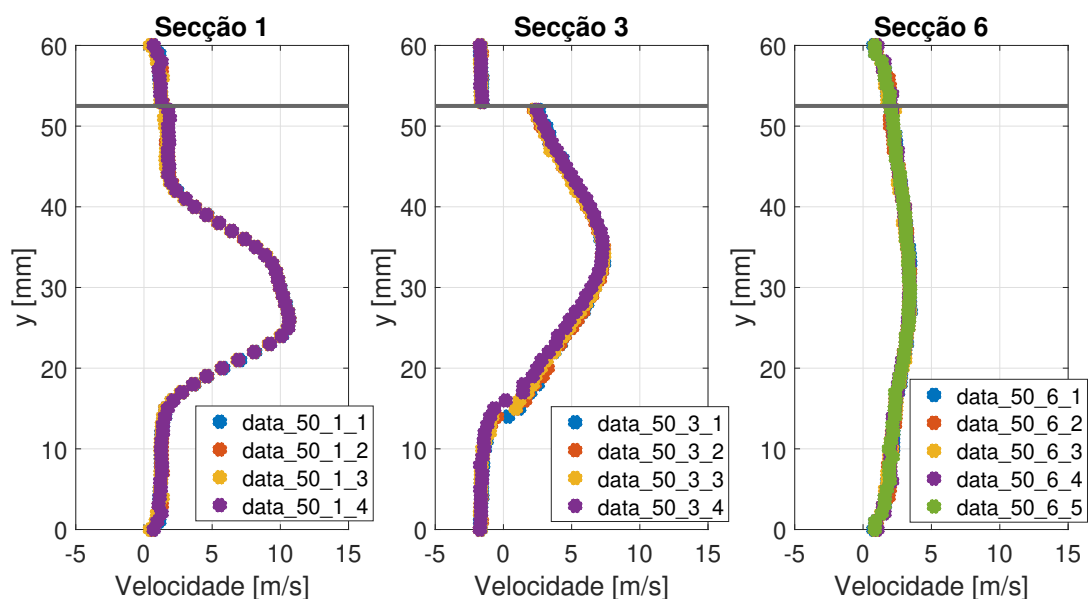
## 5.2 Pressão dinâmica e Perfis de velocidade

Nesta experiência, a principal ferramenta para análise do escoamento dentro da tubagem principal são os tubos de Pitot que se encontram nas coordenadas  $x/D = 1, 3$  e  $6$ . Um motor Servo está conectado a cada um, permitindo um movimento de amplitude de  $52\text{mm}$ , a começar na parede inferior do tubo. Como o tubo principal tem  $60\text{mm}$  de diâmetro, isto implica que os  $8\text{mm}$  superiores ficam sem dados para análise do escoamento.

Das três frequências do rotor da bomba de injeção possíveis ( $35, 40$  e  $50\text{Hz}$ ), o nosso grupo laboratorial ficou com  $50\text{Hz}$ . Tal como explicado na Introdução Teórica, o tubo de Pitot lê a pressão dinâmica e esta é convertida em velocidade no código *Matlab* do laboratório. Dada a ausência dos dados nos  $8\text{mm}$  da parede superior do tubo, tornou-se necessário ajustar o método de cálculo da velocidade de forma a impedir propagação de erros e a podermos continuar a considerar os balanços realizados na secção 6 válidos. Na realidade, seria de esperar que o escoamento fosse axissimétrico em relação ao eixo do tubo exterior, contudo, como comprovado pelos perfis de velocidade, isto não se verifica, pelo menos na totalidade.

Assim, e de forma a resolver este problema, averiguaram-se dois métodos possíveis: consideram-se leituras apenas da metade inferior do tudo  $[0; 30]\text{mm}$ , assumindo axissimetria na sua totalidade; consideram-se as leituras obtidas no intervalo  $[0; 52]\text{mm}$  e "espelham-se" os primeiros  $8\text{mm}$  de modo a preencher o intervalo  $[53; 60]\text{mm}$  (aproximação justificada pelo argumento da axissimetria).

Após análise dos dois métodos, optamos pelo segundo pelas seguintes razões: mantém uma maior quantidade de dados obtidos na experiência; minimiza o problema de não verificar axissimetria total; e finalmente, usando como critério a manutenção do caudal mássico nas secções estudadas ( $1, 3$  e  $6$ ), os resultados mostraram-se mais coerentes com o esperado (caudal mássico constante). De notar, que apesar da descontinuidade causada, essencialmente na secção 3, esta não afeta significativamente os resultados.



**Figura 9:** Perfis transversais de velocidade nas secções  $x/D = 1, 3$  e  $6$ . A linha cinzenta corresponde à descontinuidade referida, nos  $52\text{mm}$ .

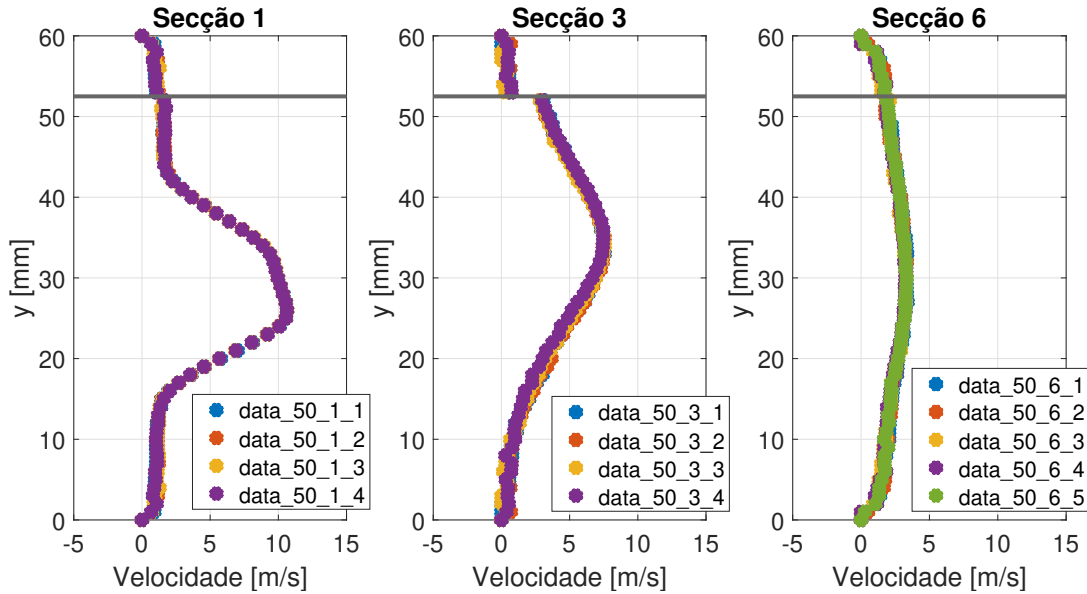
Através da análise da figura 9, é facilmente perceptível que as velocidades não são nulas junto à fronteira com a paredes (como seria de esperar pelo princípio do não escorregamento), sendo positivas na secção 1 e 6, e consideravelmente negativas na secção 3 (velocidades para esquerda não fariam sentido dado o escoamento apresentado). De modo a solucionar esta questão (causada por má calibração do aparelho), será ajustado o offset dos valores da pressão dinâmica a partir da qual se obtiveram os valores de velocidade.

Como última observação dos dados experimentais com espelhamento na fronteira superior, no eixo do tubo não se observa simetria de velocidades. No caso da secção 1, a velocidade do fluido atinge valores ligeiramente superiores às velocidades imediatamente acima do suposto eixo de axissimetria. Na secção 3, acontece o oposto, ou seja, as velocidades imediatamente acima dos  $30\text{mm}$  são superi-

ores às abaixo do mesmo. Em oposição a estas duas, a secção 6 tem um aspeto visual apelativo de continuidade e simetria.

Para corrigir o offset mencionado acima, forçou-se a que a pressão dinâmica corrigida fosse igual à não corrigida na fronteira de contacto com o tubo. Assim, ajusta-se o offset aos restantes valores de pressão dinâmica obtidos para diferentes alturas no tubo de escoamento.

Depois de obter todos os valores necessários e aplicar as correções necessárias, pode-se então construir a figura 10.



**Figura 10:** Perfis transversais de velocidade com offset corrigido nas secções  $x/D = 1, 3$  e  $6$

Algo de notar após a correção do offset é que o perfil das velocidades na secção 3 ficou mais suave, em especial na região onde  $y \approx 16$ .

## 6 Análise e Tratamento de resultados

### 6.1 Balanço do caudal mássico

Aplica-se a equação 18 para fazer uma análise dos caudais de massa ao longo das três secções transversais estudadas.

Considera-se um cilindro com volume infinitesimal. A velocidade de escoamento tem tendência a ser paralela ao eixo longitudinal do tubo, o que implica que o produto interno da velocidade de escoamento com a normal à superfície transversal é a própria velocidade, isto é,  $\vec{V}_r \cdot \vec{n} = \vec{v}$ . A velocidade relativa  $V_r$  é a velocidade do fluido em relação à parede do tubo, que varia em função do raio. Com isto, obtemos a equação 31 que permite fazer um balanço de massa nas secções transversais.

$$\dot{m} = \int_{SC} \rho v(r) dA \quad (31)$$

A equação pode ser estendida para:

$$\dot{m} = \int_{SC} \rho v(r) dA = \rho \iint_{xy} v(r) dx dy$$

Porém, a integração em coordenadas cartesianas acaba por ser dispendiosa. Para simplificar os cálculos, opta-se por se utilizar coordenadas polares, ficando com a seguinte expressão:

$$\dot{m} = \rho \iint_{xy} v(r) dx dy = \rho \iint_{r\theta} v(r) |r| dr d\theta = \rho \int_0^\pi \int_{-R}^R v(r) |r| dr d\theta = \pi \rho \int_{-R}^R v(r) |r| dr$$

Aqui, o raio  $r$  tem de ser apresentado em módulo uma vez que a massa escoo numa única direção. Sendo  $R = 30\text{ mm}$ , integram-se as curvas da figura 9 e 10, multiplicadas pelo respetivo módulo do raio a que corresponde cada velocidade, utilizando o método dos trapézios (função *trapz* no *Matlab*).

Obtemos os seguintes valores para os três perfis de velocidade, diferentes grupos de laboratório e dados com e sem ajuste do offset, colocando-os nas tabelas 4, 5 e 6.

Perfil	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>
Caudal mássico não corrigido [ $g\text{ m s}^{-1}$ ]	6.46	6.45	6.29	6.51
Caudal mássico corrigido [ $g\text{ m s}^{-1}$ ]	6.79	6.89	6.86	6.77

**Tabela 4:** Caudal mássico do perfil transversal 1 para valores corrigidos & não corrigidos

Perfil	3 <sub>1</sub>	3 <sub>2</sub>	3 <sub>3</sub>	3 <sub>4</sub>
Caudal mássico não corrigido [ $g\text{ s}^{-1}$ ]	3.68	3.47	3.36	3.21
Caudal mássico corrigido [ $g\text{ s}^{-1}$ ]	7.04	7.25	6.64	7.06

**Tabela 5:** Caudal mássico do perfil transversal 3 para valores corrigidos & não corrigidos

Perfil	6 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	6 <sub>3</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>5</sub>
Caudal mássico não corrigido [ $g\text{ s}^{-1}$ ]	5.73	5.68	5.63	5.71	5.65
Caudal mássico corrigido [ $g\text{ s}^{-1}$ ]	6.27	6.16	5.67	5.75	6.04

**Tabela 6:** Caudal mássico do perfil transversal 6 para valores corrigidos & não corrigidos

Estes dados indicam-nos que, na secção transversal 1, há aproximadamente  $[6.77, 6.89]\text{ g s}^{-1}$  de massa a circular. Na secção 3, cerca de  $[6.64, 7.25]\text{ g s}^{-1}$  e na secção 6  $[5.67, 6.27]\text{ g s}^{-1}$ . Os valores do caudal mássico possíveis da secção 1 encontram-se dentro dos da secção 3. Porém, o mesmo não pode ser dito em relação à secção 6. Dada a tendência para a distribuição da velocidade se uniformizar, assumir que a diferença de pressões junto à fronteira é nula pode induzir algum erro visto que haverá um gradiente de velocidades superior ao da secção 1. Outra possível justificação para valores de caudal mássico inferior na secção 6 pode ser uma fuga na tubagem de escoamento.

Através das médias dos grupos de cada uma das tabelas, obtiveram-se os seguintes erros percentuais em relação à média das três secções, para as tabelas 4, 5 e 6, respetivamente: 3.43% , 6.01% e 9.44% . Estes erros percentuais são relativamente elevados, porém são aceitáveis, dado as várias considerações e aproximações feitas.

## 6.2 Balanço do caudal volúmico

Para o balanço do caudal volúmico, recorreremos à fórmula 19. Novamente, aplicando as propriedades de escoamento apresentadas na secção anterior 6.1, nomeadamente a perpendicularidade entre a velocidade relativa e a secção transversal, ficamos com a expressão 32.

$$\int_{SC} \vec{V}_r \cdot \vec{n} dA = \int_{SC} v(r) dA \quad (32)$$

Usando coordenadas polares, obtém-se:

$$\dot{m} = \iint_{xy} v(r) dx dy = \iint_{r\theta} v(r) |r| dr d\theta = \int_0^\pi \int_{-R}^R v(r) |r| dr d\theta = \pi \int_{-R}^R v(r) |r| dr$$

Perfil	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>
Caudal volúmico não corrigido [ $\text{m}^3\text{ s}^{-1}$ ]	5.49	5.48	5.35	5.54
Caudal volúmico corrigido [ $\text{m}^3\text{ s}^{-1}$ ]	5.77	5.86	5.83	5.75

**Tabela 7:** Caudal volúmico do perfil transversal 1 para valores corrigidos & não corrigidos

Perfil	3 <sub>1</sub>	3 <sub>2</sub>	3 <sub>3</sub>	3 <sub>4</sub>
Caudal volúmico não corrigido [ $m^3 s^{-1}$ ]	3.13	2.95	2.86	2.73
Caudal volúmico corrigido [ $m^3 s^{-1}$ ]	5.99	6.17	5.65	6.00

**Tabela 8:** Caudal volúmico do perfil transversal 3 para valores corrigidos & não corrigidos

Perfil	6 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	6 <sub>3</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>5</sub>
Caudal volúmico não corrigido [ $m^3 s^{-1}$ ]	4.86	4.82	4.78	4.85	4.80
Caudal volúmico corrigido [ $m^3 s^{-1}$ ]	5.32	5.23	4.81	4.89	5.13

**Tabela 9:** Caudal volúmico do perfil transversal 6 para valores corrigidos & não corrigidos

Visto que o balanço volúmico é diretamente proporcional ao mássico, as conclusões tiradas na secção 6.1 podem ser igualmente aplicadas.

### 6.3 Balanço de quantidade de movimento

Para a quantidade de movimento, recorre-se ao uso da equação 20.  $V_r$  é perpendicular ao plano transversal, igualando o termo  $(\vec{V} \cdot \vec{n})$  a  $v(r)$ . Fica-se então com:

$$\int_{SC} \rho v(\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA = \int_{SC} \rho v^2(r) dA = \rho \iint_{xy} v^2(r) dx dy = \pi \rho \int_{-R}^R v^2(r) |r| dr$$

Construíram-se as tabelas 10, 11 e 12.

Perfil	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>
Q. de movimento não corrigida [ $g m s^{-2}$ ]	30.85	30.63	30.11	30.88
Q. de movimento corrigida [ $g m s^{-2}$ ]	30.47	30.56	30.43	30.31

**Tabela 10:** Quantidade de movimento do perfil transversal 1 para valores corrigidos & não corrigidos

Perfil	3 <sub>1</sub>	3 <sub>2</sub>	3 <sub>3</sub>	3 <sub>4</sub>
Q. de movimento não corrigida [ $g m s^{-2}$ ]	28.48	27.59	27.17	27.80
Q. de movimento corrigida [ $g m s^{-2}$ ]	30.72	30.18	29.00	30.01

**Tabela 11:** Quantidade de movimento do perfil transversal 3 para valores corrigidos & não corrigidos

Perfil	6 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	6 <sub>3</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>5</sub>
Q. de movimento não corrigida [ $g m s^{-2}$ ]	13.79	13.47	13.32	13.58	13.41
Q. de movimento corrigida [ $g m s^{-2}$ ]	13.70	13.14	11.85	11.99	12.89

**Tabela 12:** Quantidade de movimento do perfil transversal 6 para valores corrigidos & não corrigidos

Neste caso, para a primeira secção, temos valores de quantidade de movimento de  $[30.31, 30.56] g m^{-1} s^{-2}$  para a terceira secção de  $[29.00, 30.72] g m^{-1} s^{-2}$  e para a sexta secção de  $[11.85, 13.70] g m^{-1} s^{-2}$ . Entre a secção 1 e 3 não parece haver muita perda de quantidade de movimento, mas na secção 6 é observável um elevado decréscimo. Aqui, como dito anteriormente, o escoamento encontra-se bem desenvolvido, havendo uma distribuição mais uniforme ao longo da secção transversal do que nas secções 1 e 3, que têm picos de velocidade do eixo do tubo. Assim verifica-se que o movimento é "travado", essencialmente, no início pelas tensões de corte e pela difusão; já no final pela diminuição do gradiente de pressões, como vimos na secção 6.3.

### 6.4 Balanço de energia cinética

Resta o balanço de energia cinética, que pode ser efetuado através da equação 25. Aplicando as mesmas condições apresentadas para o balanço de massa e quantidade de movimento, obtém-se:



$$\int_{SC} \frac{1}{2} \rho v^2(r) (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA = \frac{1}{2} \rho \iint_{xy} v^3(r) dx dy = \pi \frac{1}{2} \rho \int_{-R}^R v^3(r) |r| dr$$

Perfil	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>
B. energia cinética não corrigido [ $J s^{-1}$ ]	112.28	110.88	109.98	111.50
B. energia cinética corrigido [ $J s^{-1}$ ]	110.67	109.73	109.59	109.56

**Tabela 13:** Balanço de energia cinética do perfil transversal 1 para valores corrigidos & não corrigidos

Perfil	3 <sub>1</sub>	3 <sub>2</sub>	3 <sub>3</sub>	3 <sub>4</sub>
B. energia cinética não corrigido [ $J s^{-1}$ ]	66.36	63.35	62.18	64.69
B. energia cinética corrigido [ $J s^{-1}$ ]	81.53	79.09	76.82	80.24

**Tabela 14:** Balanço de energia cinética do perfil transversal 3 para valores corrigidos & não corrigidos

Perfil	6 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	6 <sub>3</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>5</sub>
B. energia cinética não corrigido [ $J s^{-1}$ ]	17.53	16.85	16.66	17.00	16.78
B. energia cinética corrigido [ $J s^{-1}$ ]	16.18	15.13	13.54	13.56	14.86

**Tabela 15:** Balanço de energia cinética do perfil transversal 6 para valores corrigidos & não corrigidos

Na secção 1, o balanço de energia cinética ronda os  $[109.56, 110.67] g s^{-3}$ , na secção 3 os  $[76.82, 81.53] g s^{-3}$  e na secção 6  $[13.54, 16.18] g s^{-3}$ . Ou seja, ao longo do tubo há uma tendência para a energia cinética do fluido diminuir. Um dos principais fatores para esta ocorrência é a transformação da energia cinética em interna, em pressão estática e o aumento da entropia, devido ao regime turbulento e à difusão. Dado o pouco movimento (quase zero) junto à parede as de tensões corte não realizam trabalho e portanto pouco afetam o balanço de energia (na parte final do tubo).

## 6.5 Tensões de corte

A tensão de corte pode ser estimada através da equação 2. Como a variação de  $u$  com  $y$  é a mesma que com  $r$ , podemos usar esta equação:

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dr}$$

Para isso, é necessário estipular um valor para a viscosidade dinâmica do ar à temperatura seca do ar local de  $T = 27.6^\circ C$ . Um exemplo para esta estipulação pode ser feito através da equação 33.

$$\mu = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{T_0 + S}{T + S} \right) \quad (33)$$

Os valores de referencia para o ar são  $S_{air} = 120[K]$ ,  $T_{0air} = 291.15[K]$  e  $\mu_{0air} = 18.27[\mu Pa s^{-1}]$ . Fica-se então com  $\mu = 1.87434 \times 10^{-5} N s m^{-2}$ .

Para determinar o termo  $\frac{du}{dr}$  calculam-se os declives dos pontos consecutivos da figura 10 junto à fronteira inferior, que serão iguais à fronteira superior por simetria - de forma garantir uma certa "estabilidade" decidimos realizar a média das derivadas nos primeiros três pontos a contar da parede, isto é, próximo o suficiente da parede, mas não apenas a primeira derivada, visto que esta é esperada ser elevada devido ao princípio de não escorregamento. Os resultados são apresentados na tabela 16.

Perfil	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>
Tensão de corte corrigida [mPa]	6.37	7.25	6.16	5.03

**Tabela 16:** Tensões de corte do perfil transversal 1 para valores corrigidos

Perfil	3 <sub>1</sub>	3 <sub>2</sub>	3 <sub>3</sub>	3 <sub>4</sub>
Tensão de corte corrigida [mPa]	2.44	2.70	0	2.82

**Tabela 17:** Tensões de corte do perfil transversal 3 para valores corrigidos

Perfil	6 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	6 <sub>3</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>5</sub>
Tensão de corte corrigida [mPa]	8.73	8.19	6.73	6.35	8.23

**Tabela 18:** Tensões de corte do perfil transversal 6 para valores corrigidos

Estas tensões são aplicadas no sentido oposto ao escoamento. Como tinha sido observado anteriormente em análises de outros dados, a secção 3 não é a mais confiável tendo em conta uma certa fraca qualidade dos dados, mesmo com as correções aplicadas. Um dos valores da tensão de corte é nulo dada elevada instabilidade da velocidade do fluido junto à parede do tubo. Se considerarmos apenas as secções 1 e 6, é observável um crescimento da tensão de corte. Na primeira secção, os valores rondam os  $[5.03, 7.25]mPa$  e na sexta os  $[6.35, 8.73]mPa$ . Devido a uma difusão radial de velocidades, as linhas de corrente não são totalmente paralelas ao eixo do tubo, e aproximar-se-ão da parede. Consequentemente, a pressão estática [Fig. 8] e as tensões de corte aumentam.

Outra forma de estimar as tensões de corte é através das variações de quantidade de movimento, uma vez que representa a variação de momento linear do escoamento. Assim, a tensão de corte média entre as secções 1 e 3, e a secção 3 e 6 será:

$$\Delta P = Quant_{mov}(i+1) - Quant_{mov}(i) \quad (34)$$

Utilizam-se os valores médios das quantidades de movimento da tabela 12 para obter os valores seguintes:

$$\Delta P_{1-3} = 29.98 - 30.44 = -0.46mN$$

$$\Delta P_{3-6} = 12.71 - 29.98 = -17.27mN$$

Agora, para se estimar a variação média das tensões de corte, resta dividir estas variações de força pela área de superfície de contacto com o tubo entre cada secção.

$$A_{1-3} = \pi D l = \pi \times 0.060 \times \frac{(186 - 62)}{1000} = 0.02337m^2$$

$$A_{3-6} = \pi D l = \pi \times 0.060 \times \frac{(372 - 186)}{1000} = 0.03770m^2$$

A tensão de corte na secção 3 será então a soma da tensão de corte na secção 1 com  $\frac{|\Delta P_{1-3}|}{A_{1-3}} = 19.68mPa$  e na secção 6 somando ainda  $\frac{|\Delta P_{3-6}|}{A_{3-6}} = 458.09mPa$ .

Porém, estes valores são muito diferentes dos observados na tabela 16, onde há apenas uma variação de cerca de  $2mPa$  entre a secção 1 e 6, contrariamente aos  $477.77mPa$  aqui estimados. Isto pode significar que as tensões de corte não são o único obstáculo ao escoamento do fluido (como visto na secção 6.3), ou até mesmo que o método usado para obter a tabela 16 não é o mais correto, sendo a derivada instantânea na fronteira muito superior à obtida.

---

## 7 Conclusões

Antes de concluir é ainda importante responder algumas perguntas colocadas no guia:

- **”Tendo em conta a evolução da pressão ao longo do tubo, o escoamento na bomba de injetor seria análogo se o tubo não estivesse na horizontal?”**

Para um tubo colocado horizontalmente, como é o caso estudado neste relatório, pode-se simplificar a equação de Bernoulli (eq. 6) ao desprezar os efeitos da variação da gravidade, visto que os pontos se encontram à mesma altura (eq. 7). Caso o tubo estivesse colocado numa outra posição, esta aproximação não seria mais válida, visto ser necessária a consideração das diferenças das alturas (influência gravítica).

- **”Se o jato produzido pelo injetor fosse de água, numa atmosfera de ar, o eixo do jato continuaria retilíneo e alinhado com o eixo do tubo?”**

Caso a bomba injetasse água no tubo, perante uma atmosfera de ar, o eixo do jato não permaneceria nem retilíneo nem alinhado com o tubo. Neste caso, verificar-se-ia uma curvatura no jato mais acentuada, visto que  $\nu_{\text{água}} \gg \nu_{\text{ar}}$  e  $\rho_{\text{água}} \gg \rho_{\text{ar}}$ , havendo, por isso uma curvatura para baixo na trajetória do jato, semelhante a um lançamento horizontal. Quanto à análise da pressão ao longo do tubo, esta é bastante semelhante ao caso do ar, excetuando o final onde, aquando da descida, a pressão imediatamente acima do jato é superior à abaixo deste.

Assim, ao longo deste relatório foi não só possível dar resposta aos objetivos propostos como também compreender melhor o escoamento de um fluido e ainda tirar algumas conclusões sobre o mesmo. Achamos importante reiterar alguns pontos relevantes. Na verdade, ao analisarmos o mecanismo de transporte transversal e longitudinal, pudemos comprovar a difusão da quantidade de movimento, constatando que a sua intensidade aumenta proporcionalmente ao gradiente de velocidade, embora não linearmente como em escoamentos laminares. Observamos ainda que, inicialmente, o caudal de energia cinética diminui longitudinalmente, refletindo alguma da dissipação de energia cinética em pressão - a pressão aumenta nesta região. Quando o escoamento se encontra desenvolvido, a pressão diminui longitudinalmente, e qualquer dissipação ocorre quase exclusivamente devido ao gradiente de pressões.

Ao longo do relatório verificaram-se alguns desfasamentos entre o esperado teoricamente e os resultados obtidos. Na realidade, estes desfasamentos podem dever-se quer aos erros já referidos, como a outros: humanos (paralaxe, métodos aplicados para correção dos dados, modelos e aproximações assumidos,...) ou dos sensores. Contudo, consideramos que mesmo assim as conclusões obtidas são válidas, uma vez que estas foram sempre analisadas em função dos possíveis erros.

Finalmente, este relatório permitiu-nos não só compreender a teoria aplicada como expandi-la à prática. Além disso dado o carácter de grupo do trabalho, este permitiu-nos desenvolver e melhorar soft-skills como a dinâmica, entreaajuda e cooperação entre os elementos do grupo e aprimorar as habilidades interpessoais e capacidade de espírito crítico.

---

## Referências

- [1] Air Movement e Control Association International. «Laboratory method of testing fans for aerodynamic performance rating.». Em: (2004).
- [2] Maria Madalena V. Moreira Vasconcelos. «"HIDRÁULICA GERAL, APONTAMENTOS DAS AULAS TEÓRICAS"». Em: (2004). URL: <https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/5997/3/Apontamentos%20de%20HG.pdf>.
- [3] Maria Madalena V. Moreira Vasconcelos. «"HIDRÁULICA GERAL I"». Em: (2005). URL: [https://rdpc.uevora.pt/bitstream/10174/6013/5/ApontamentosHG1\\_rep.pdf](https://rdpc.uevora.pt/bitstream/10174/6013/5/ApontamentosHG1_rep.pdf).
- [4] Ronald L. Panton. *"Incompressible Flow"*. en. Wiley, 2013. ISBN: 9781118013434.
- [5] Andouglas Gonçalves da Silva Júnior. «"Cinemática dos Fluidos"». Em: (2016). URL: <https://docente.ifrn.edu.br/andouglassilva/disciplinas/mecanica-dos-fluidos/aula-4-cinematica-dos-fluidos>.
- [6] F. M. White. *"Fluid Mechanics"*. McGraw-Hill, 2016. ISBN: 0073398276.
- [7] Ana Moita. «Guia de Laboratório: BOMBA DE INJECTOR». Em: (2023).
- [8] «"Fluidos viscosos"». Em: (). URL: <https://fenix.isa.ulisboa.pt/downloadFile/844497944577369/Viscosidade.pdf>.
- [9] «"Tubo de Pitot"». Em: (). URL: [https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5746728/mod\\_resource/content/2/Lab1\\_Tubo\\_de\\_Pitot.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5746728/mod_resource/content/2/Lab1_Tubo_de_Pitot.pdf).
- [10] João Victor. *Número de Reynolds: entenda tudo!* URL: <https://www.guiadaengenharia.com/numero-reynolds-entenda/>. (accessed: 28.10.2023).

## Anexos

Dados	1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>4</sub>	3 <sub>1</sub>	3 <sub>2</sub>	3 <sub>3</sub>	3 <sub>4</sub>	6 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	6 <sub>3</sub>	6 <sub>4</sub>	6 <sub>5</sub>
Grupo	5	9	11	14	31	34	39	42	2	4	8	12	13

**Tabela 19:** Associação dos dados de ficheiro usados aos números de identificação de cada grupo

Repositório para acesso ao processamento de dados: Injection-Pump.