

## Mecânica Orbital, 2023/24

## Trabalho Para Casa #3 (TPC-3)

Data limite de entrega: 30/Out/2023, 23:59

**Instruções para o TPC.** Leia atentamente e preencha correctamente o solicitado abaixo. **Após preenchida, esta folha deve ser entregue em conjunto com as resoluções e respostas solicitadas no trabalho. A classificação só será atribuída se todos os campos estiverem correctamente preenchidos.**

**Grupo.** Indique o número de grupo de TPC, de acordo com o fenix:

Grupo #: 6

**Compromisso de honra.** Ao entregar este trabalho de casa com a sua identificação incluída, os alunos estão automaticamente a declarar que realizaram o trabalho nas condições do compromisso de honra seguinte:

Declaro por minha honra que a prova foi resolvida recorrendo apenas aos elementos de consulta autorizados, de forma autónoma e sem trocar qualquer informação, por qualquer meio, com qualquer pessoa fora do grupo e cumprindo todas as regras indicadas da disciplina. Em particular, não foram utilizados quaisquer elementos realizados por outrem com resoluções adaptadas a esta prova.

**Identificação e participação.** Preencham de modo legível os (i) número de aluno, (ii) nome completo, e (iii) a percentagem de participação de cada aluno no trabalho, de acordo com o indicado mais abaixo

Número	Nome	%
103354	Lorenzo Gouveia Faria	4
102439	Mariama F. Alves C. Pinos	4
103285	Tiago Cruz clamote	4

A percentagem de participação de cada aluno no trabalho deve ser um número inteiro de 0 a 4, em que 4 é 100% do trabalho devido de cada aluno, 3 é 75% do trabalho devido, etc., até 0, caso o aluno não tenha participado. Este valor deve ser consensual entre alunos. A classificação de cada aluno é a classificação do trabalho multiplicada pela percentagem de participação. Em caso de divergência, o grupo deve apelar o mais depressa possível ao professor responsável pela disciplina. **O preenchimento do campo % é obrigatório, sob pena de anulação da classificação.**

**Parâmetro adimensional.** No enunciado de alguns problemas será usado um parâmetro adimensional  $\chi$  obtido a partir dos números de alunos dos membros do grupo. Para um grupo constituído por  $N$  alunos, seja  $n_i$  o número que se obtém a partir do número do aluno  $i$  mantendo apenas os três últimos algarismos. Seja

$$p = \prod_{i=1}^N n_i.$$

Seja  $q$  o número constituído pelos 3 últimos algarismos de  $p$ . Então,  $\chi = \frac{q}{1000}$ .

Exemplo. Um grupo é constituído por 3 alunos:

$$\left. \begin{array}{l} A, \text{ com número } 100123 \Rightarrow n_A = 123 \\ B, \text{ com número } 101412 \Rightarrow n_B = 421 \\ C, \text{ com número } 90321 \Rightarrow n_C = 321 \end{array} \right\} \Rightarrow p = n_A \times n_B \times n_C = 16622343 \Rightarrow q = 343 \Rightarrow \chi = \frac{q}{1000} = 0.343$$

**$\chi$  do grupo.** Calcule o  $\chi$  do grupo de acordo com a fórmula e exemplo acima e indique-o na caixa:

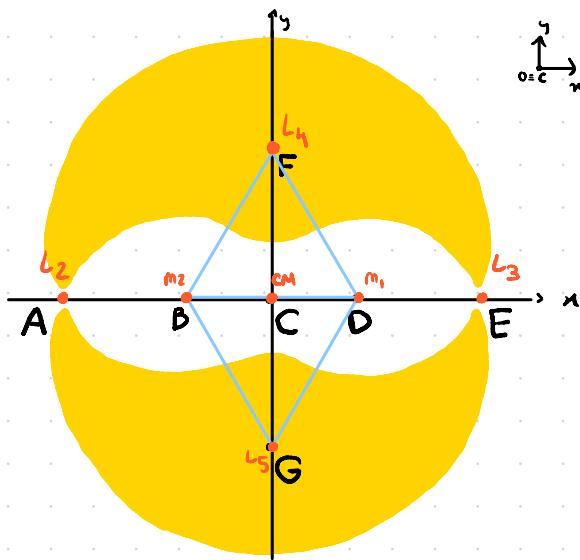
 $\chi$  do grupo = 0,710

1

Para o valor de  $X = 0.710$  temos o seguinte valor para a constante de Jacobi:

$$C = (0.710/10) - 1.7277 = -1.6567$$

a)



- i) Observando a figura, temos que esta é simétrica segundo os eixos  $x$  e  $y$ , logo o centro de massa da mesma situa-se na origem do referencial, isto é, coincide com o ponto **C**.
- ii) Novamente, como a figura é simétrica segundo  $x$  e  $y$ , e considerando que os primários se encontram alinhados com o centro de massa, no eixo  $x$ , temos que o primário 1 coincide com o ponto **D** (com abscissa positiva) e o primário 2 coincide com **B** (abscissa negativa).
- iii) Os pontos triângulos de Lagrange são denominados de  $L_4$  e  $L_5$ . Cada um dos pontos triângulos forma um triângulo equilátero com os primários, como representado a azul claro na figura. Desta modo, em conformidade com o referencial definido, temos que o ponto triângulo  $L_4$  coincide com **F** (encontra-se no semi-eixo positivo de  $y$ ) e o ponto triângulo  $L_5$  coincide com **G** (encontra-se no semi-eixo negativo de  $y$ ).
- iv) Os pontos colineares de Lagrange são denominados por  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ . Estes encontram-se no mesmo eixo que os primários e que o centro de massa. Desta modo, considerando  $L_1$  como o ponto colinear entre os primários 1 e 2 temos que este coincide com o centro de massa, isto é, com o ponto **C**. O ponto colinear  $L_2$  situa-se além do primário de menor massa, enquanto que  $L_3$  se situa além do primário de maior massa. Como, neste caso, os primários têm massas iguais (vista a figura ser simétrica relativamente a ambos os eixos  $x$  e  $y$ ) podemos ter  $L_2 \equiv A$  e  $L_3 \equiv E$  a coincidir com **A** e **E**, respetivamente, tanto como o simétrico  $L_2$  a coincidir com **E** e  $L_3$  a coincidir com **A**. Para este trabalho iremos assumir a convenção de  $L_2 \equiv A$  e  $L_3 \equiv E$ .

b) Para o valor de  $X = 0.710$  temos o seguinte valor para a massa total do sistema:

$$m = (2 + 0.710) \times m_0 = 2.710 \times 1.9885 \times 10^{30} \text{ kg} = 5.388835 \times 10^{30} \text{ kg}$$

i) De acordo com os parâmetros de adimensionalização temos as seguintes definições para as massas dos primários, notando que " $\mu$ " corresponde à massa adimensional de  $m_2$  (não é a constante gravitacional utilizada nos trabalhos anteriores):

$$(1) \quad m_1 + m_2 = 1 \quad (\text{adimensionalização das massas})$$

$$(2) \quad m_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \mu$$

$$(3) \quad m_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 1 - \mu$$

Como as massas dos primários são iguais, podemos determinar  $\mu$  da seguinte forma:

$$m_1 = m_2 \Leftrightarrow 1 - \mu = \mu \Rightarrow 1 = 2\mu \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \Rightarrow m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$$

ii) Como se viu anteriormente na alínea a), os primários têm massas iguais, deste modo, as suas massas são dadas por:

$$\begin{aligned} m_{\text{primário}} @ &= m_{\text{primário}} @ = \frac{m_{\text{total}}}{2} = \frac{5.388835 \times 10^{30} \text{ kg}}{2} = 2.6944175 \times 10^{30} \text{ kg} \\ \Rightarrow m_{\text{primário}} @ &= m_{\text{primário}} @ = 2.6944 \times 10^{30} \text{ kg} \end{aligned}$$

c) De acordo com o problema dos 3 corpos, os pontos de Lagrange colineares são sempre instáveis, neste modo,  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  são considerados instáveis, independentemente do valor de  $\mu$  (a massa adimensional do primário 2).

Relativamente aos pontos de Lagrange triângulares ( $L_4$  e  $L_5$ ) estes podem ser tanto estáveis como instáveis. Sendo há estabilidade caso as massas dos primários sejam suficientemente diferentes (a massa de um tem de ser inferior a aproximadamente 4% da massa do outro). Perante uma perturbação temos a seguinte equação característica que descreve um problema de vetores próprios para  $\vec{A}$ :

$$(4) \quad \vec{\delta}_r = \vec{A} \cdot e^{2t}$$

Desenvolvendo o problema temos a sua simplificação para a seguinte equação quadrática, relativamente a  $\lambda^2$ :

$$(5) \quad (\lambda^2)^2 + \lambda^2 - \frac{27}{4}\mu(\mu-1) = 0$$

Da sua solução temos:

$$(6) \quad \lambda^2 = \frac{1}{2} \left( -1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)} \right)$$

Da expressão (4), concluimos que, para haver estabilidade, temos que garantir que os expoentes  $\lambda$  têm de ter parte real negativa ou sejam imaginários puros. Se estas condições não se verificarem a parte real de  $\lambda$  seria positiva e consequentemente o r ínicio crescer de forma indefinida, afastando-se do ponto de Lagrange. Assim:

$$\text{Limite de estabilidade: } 1 - 27\mu(1-\mu) = 0 \iff 1 - 27\mu + 27\mu^2 = 0 \Rightarrow \mu_{\text{estável}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18} =$$

$$(|\mu| < 1) \Rightarrow \mu_{\text{estável}} = 0.0385209 ; \mu_{\text{instável}} = 0.961479$$

Com base nestes valores e substituindo-os na equação (6) concluimos que os pontos triângulares são estáveis para  $\mu < 0.0385209$  ou  $\mu > 0.961479$ . Como  $\mu = \frac{1}{2}$ , considerando o problema de 3 corpos perfeitos, vemos que este não pertence à gama de valores de  $\mu$  para os quais  $L_4$  e  $L_5$  são estáveis.

Assim, podemos concluir que, neste caso, os pontos de Lagrange triângulares  $L_4$  e  $L_5$  não são estáveis. Em suma, para esta figura todos os pontos de Lagrange são instáveis.

d)

i) Estando a sonda, inicialmente, num ponto exterior à zona proibida representada na imagem, é possível atingir os prismáticos, uma vez que existe uma trajetória possível (passando pela pequena abertura em E ou em A) através da qual a sonda os atinge evitando zonas proibidas.

ii) De acordo com a imagem, não existe nenhuma trajetória alternativa para a sonda que não passe por zonas proibidas, uma vez que o ponto triângular  $L_4$  se encontra numa densa região destas. Deste modo, a sonda não poderá atingir o ponto  $L_4$ .

e) O centro de massa tem coordenadas  $(x, y) = (0, 0)$ , coincidindo este com o ponto C.

Para as distâncias do primeiro prismático e do segundo prismático ao centro de massa, temos  $\vec{r}_{\text{cm-prismático}} = (1-\mu, 0, 0)$  e  $\vec{r}_{\text{cm-prismático}} = (\mu, 0, 0)$ , de acordo com a convenção. Deste modo, recorrendo às seguintes fórmulas da fórmula<sup>②</sup>, podemos obter os valores de  $r_1$  e  $r_2$ , os quais vamos precisar para obter a velocidade pretendida. Considerando  $\mu = \frac{1}{2}$  da alínea b) temos:

$$(7) \quad r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2} \quad \stackrel{(\mu=\frac{1}{2})}{\Rightarrow} \quad r_1 = \sqrt{(0-\frac{1}{2})^2 + 0^2 + 0^2} = \frac{1}{2}$$

$$(8) \quad r_2 = \sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2} \quad \Rightarrow \quad r_2 = \sqrt{(0+1-\frac{1}{2})^2 + 0^2 + 0^2} = \frac{1}{2}$$

Do formulário temos a seguinte expressão para o integral de Jacobi em função da velocidade medida no referencial em rotação:

$$(9) \quad C = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

Substituindo pelos valores anteriormente obtidos e pela constante C do enunciado, obtemos o valor para o módulo da velocidade da sonda, quando esta passa num determinado instante pelo centro de massa:

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = r_2 = \frac{1}{2} \\ C = -1.6567 \\ CM(x,y) = (0,0) \end{array} \right\} -1.6567 = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} (\cancel{x^2 + y^2}) - \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \quad (=)$$

$$(-) -1.6567 = \frac{v^2}{2} - 2 \quad (=) \quad v = 0.828613299 \Rightarrow \underline{v_{\text{onda}}} = 0.82861$$

- ② De acordo com os dados do enunciado podemos concluir que estamos perante um problema de viagem interplanetária, a qual está dividida em 3 partes.

Se uma sonda estiver suficientemente próxima de um planeta, a força exercida na mesma pelo planeta contribuirá muito mais que a força exercida pelo Sol (a qual pode ser desprezada). Tratando-se o problema, deste modo, como um problema de 2 corpos (planeta + sonda). A zona onde estas características se verificam é designada de zona de influência. Esta aproximação é frequentemente utilizada em viagens interplanetárias (como neste nosso caso), visto que pretende-se que a sonda se aproxime ou escape de um determinado planeta, isto é, o tempo de passagem desta pelo planeta muitas vezes é menor do que o tempo da viagem, levando a que o erro induzido por este aproximação seja muito pequeno.

Para este problema temos as seguintes 3 fases da viagem interplanetária:

#### → Partida da Terra:

De acordo com a definição considera-se que tudo o que acontece nesta fase acontece no ponto de partida, segundo a perspectiva de Sol. Também temos que a sonda chega a infinito quando foge do planeta, isto é, a velocidade da sonda no ponto de partida relativamente ao planeta é dada por  $v_{\infty}$ .

#### → Transférência heliocêntrica:

Neste caso corresponde a uma transferência de Hohmann entre 2 pontos, onde se encontram os planetas de partida (Terra) e de chegada (Marte). As órbitas dos planetas são considerados como sendo circulares, o que resulta nos mesmos ângulos heliocéntricos e igual geometria de transferência.

#### → Chegada a Marte:

Considerando-se que a sonda vem de infinito com velocidade  $v_{\infty}$  relativamente ao planeta em que se encontra, sobre a assimetria da hipérbole, exatamente como visto na partida.

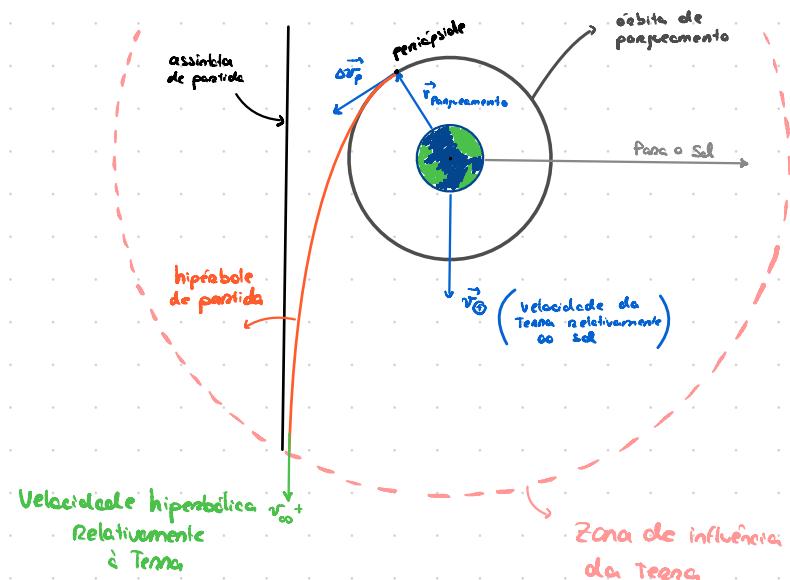


IMAGEM PARTIDA

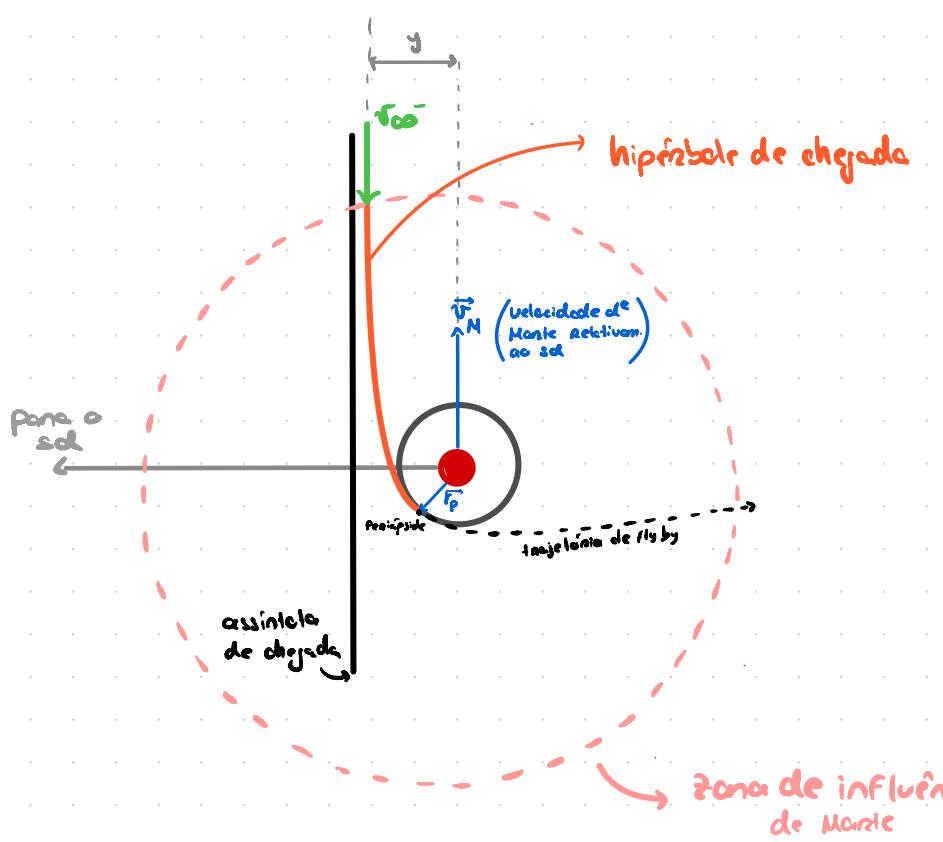
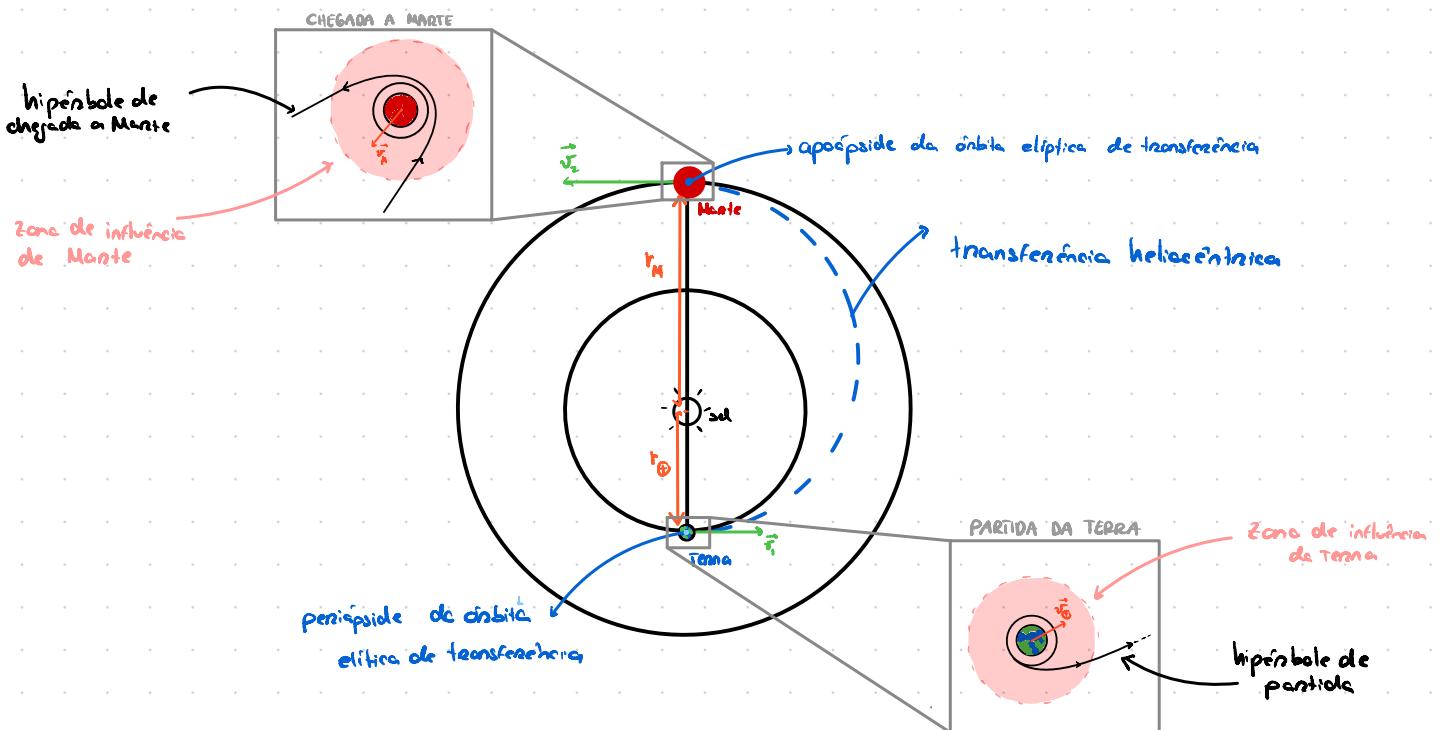
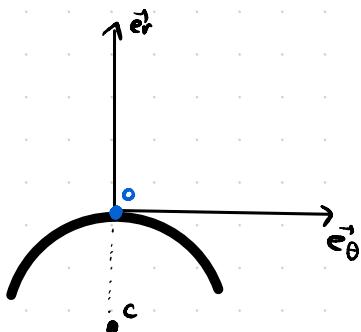


IMAGEM CHEGADA

De acordo com os dados do enunciado, podemos representar o problema da seguinte forma:



Neste problema, vamos utilizar o referencial  $\vec{e}_r$  e  $\vec{e}_\theta$ . Em cada ponto,  $\vec{e}_\theta$ , tem direção tangente à circunferência e  $\vec{e}_r$  será perpendicular a  $\vec{e}_\theta$  como demonstrado-sejuntamente:



a) Tal como para o caso da Terra, a órbita de Marte é aproximadamente circular. Desta modo, podemos concluir que o parâmetro do semi-eixo maior e o raio de Marte são iguais, logo  $a_{\text{Mart}} = r_{\text{Mart}} = 1.52 \text{ u.a}$  (unidades astronómicas). Para calcular o período orbital de Marte vamos necessitar da seguinte fórmula do formulário (usando a notação de "M" como se refere ao Marte):

$$(10) \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot a^{3/2}$$

$$\Rightarrow T_{\text{Mart}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_0}} \cdot (r_{\text{M}})^{3/2} = \frac{2\pi \times (1.52 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km})^{3/2}}{\sqrt{1.327 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2}} = 59143521.44 \text{ s} = 0$$

$$\Rightarrow T_{\text{Mart}} = 5.9144 \times 10^7 \text{ s} = 684.53 \text{ dias solares médios}$$

Considerando também a segunda lei de Newton e a fórmula da gravitação universal:

(11)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

2<sup>a</sup> LEI DE NEWTON

(12)

$$\vec{F}(r) = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G}{r^2} \vec{e}_r$$

FÓRMULA DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

Ao igualarmos (11) a (12) e substituindo a aceleração pela expressão da aceleração centrípeta  $a_c = \frac{v^2}{r}$ , podemos obter uma equação que nos permite obter a velocidade para órbitas circulares onde o parâmetro gravitacional é dado por  $\mu = m \cdot G$ :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (13) \quad m_2 \cdot \vec{a} = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad r \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G}{r^2} \quad (1)$$

$$(1) \quad v = \sqrt{\frac{m_1 \cdot G}{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

(13) VELOCIDADE  
ÓRBITA CIRCULAR

Deste modo, a velocidade de Marte medida no referencial fixo com o sol é dada por:

$$v_M = \sqrt{\frac{\mu_0}{r_M}} = \sqrt{\frac{1.327 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2}{1.52 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km}}} = 24.15727097 \text{ km/s} = \underline{\underline{v_N = 24.157 \text{ km/s}}}$$

↑ direção e sentido de  $\vec{r}$   
Relativ. ao sol

b) Pretende-se utilizar uma órbita heliocêntrica que minimize o gasto de propulsão. Como verificado no primeiro projeto, a transferência mais eficiente para este caso é a transferência de Hohmann, como já se encontra explícito na imagem da transferência interplanetária em si.

i) De acordo com as fórmulas da energia podemos, recorrendo a um balanço de energia, obter a equação vis-viva, que vai ser útil neste problema.

$$(14) \quad T(r) = \frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{2r}$$

ENERGIA CINÉTICA

$$(15) \quad V(r) = -\frac{\mu}{r}$$

ENERGIA POTENCIAL

$$(16) \quad E = T(r) + V(r) = -\frac{\mu}{2a}$$

$$E = T(r) + V(r) = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

$$\Rightarrow v^2 = 2\mu \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2\mu \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)} \quad (17)$$

EQUAÇÃO VIS-VIVA

Utilizando a equação vis-viva (17) podemos calcular a velocidade da sonda na órbita de transferência heliocêntrica na partida, relativamente ao sol ( $v_{N,\text{partida}}$ ). Para isso é necessário também calcular o semi-eixo maior,  $a$ , da órbita de transferência, sendo que este é dado pela seguinte expressão, visto que se trata de uma transferência de Hohmann:

$$(18) \quad a_H = \frac{r_\oplus + r_N}{2} = \frac{(1 + 1.52) \times 1.496 \times 10^8 \text{ km}}{2} = 188496000 \text{ km}$$

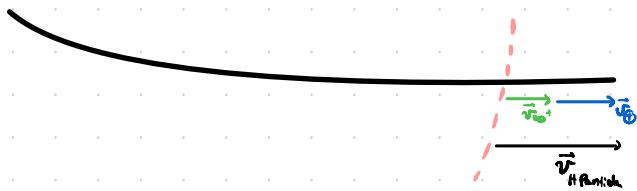
Assim:

$$v_{\text{Hipartida}} = \sqrt{2 \mu_0 \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{2a_H} \right)} = \sqrt{2 \times 1.327 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2 \left( \frac{1}{1.496 \times 10^8 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 186496000 \text{ km}} \right)} = \\ = 32.71193135 \text{ km/s}$$

A velocidade da Terra, relativamente ao Sol, representada por  $v_{\oplus}$  é dada pela fórmula da velocidade para órbitas circulares (13):

$$v_{\oplus} = \sqrt{\frac{\mu_0}{r_0}} = \sqrt{\frac{1.327 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2}{1 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km}}} = 29.78308388 \text{ km/s}$$

Quando a sonda sai da zona de influência da Terra, considera-se que este já está em infinito relativamente à Terra, com velocidade  $v_{\infty}$ . Assim, a velocidade da sonda na hipérbole de escape, calculada anteriormente para a partida da Terra, resulta da soma da velocidade  $v_{\infty}$  com a velocidade da Terra em relação ao Sol:



Deste modo, a velocidade da sonda, relativamente à Terra, com que este tem de sair da zona de influência é dada por (Nota: O índice superior "+" no referir-se de segui em diante à órbita de partida):

$$v_{\text{Hipartida}} = v_{\infty+} + v_{\oplus} \Rightarrow v_{\infty+} = v_{\text{Hipartida}} - v_{\oplus} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_{\infty+} = 32.71193135 \text{ km/s} - 29.78308388 \text{ km/s} = 2.92849467 \text{ km/s} \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{v_{\infty+} = 2.9288 \text{ km/s}}$$

→ No que toca à direção e ao sentido, este tem a mesma direção e sentido que a velocidade da Terra, como exemplificado na IMAGEM DA PARTIDA e na imagem anterior com a representação das 3 velocidades.

ii) Caso Marte não se encontrasse no ponto da órbita pretendida no final da viagem da sonda, esta, para se resolver o problema, teria de entrar na mesma órbita heliocéntrica que Marte, na qual a sua velocidade seria igual à velocidade de Marte em relação ao Sol. Para isto é necessário um determinado  $\Delta v$  que permita a sonda obter esta velocidade:

$$v_N = v_{\text{Hchegada}} + \Delta v \longrightarrow \text{variação da velocidade necessária}$$

↓

velocidade de Marte  
em relação ao Sol

↳ velocidade heliocéntrica  
da sonda na chegada

Poderemos obter a velocidade heliocéntrica da Sonda na chegada a Marte,  $v_{\text{Hchegada}}$ , Recorrendo novamente à equação Vis-Viva (17) :

$$v_{\text{Hchegada}} = \sqrt{2 \mu_0 \left( \frac{1}{r_H} - \frac{1}{2a_H} \right)} = \sqrt{2 \times 1.327 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2 \left( \frac{1}{1.52 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 188496000 \text{ km}} \right)} = \\ = 21.52100746 \text{ km/s}$$

Com este valor e com a velocidade de Marte em relação ao Sol, calculada na alínea a), podemos finalmente obter o valor da variação de velocidade necessária:

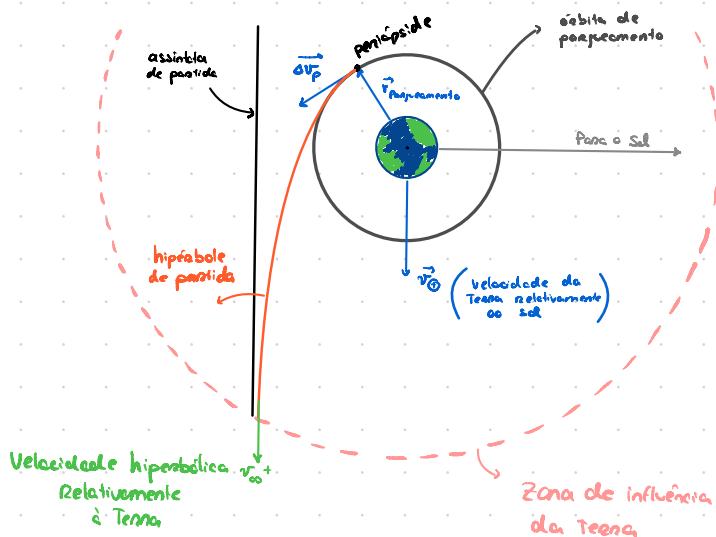
$$\Delta v = v_N - v_{\text{Hchegada}} = 24.15727097 \text{ km/s} - 21.52100746 \text{ km/s} = 2.636263506 \text{ km/s} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta v = 2.6363 \text{ km/s}}$$

c) Para o valendo  $X = 0.910$ , temos o seguinte valores para o raio da órbita de pousoamento :

$$r_p = (1.1 + 0.910) R_\oplus = (1.1 + 0.910) \times 6378 \text{ km} = 11544.18 \text{ km}$$

i) Recorrendo novamente à imagem de partida referente à fase da partida :



Em condições ideais, a velocidade da hipérbole de partida, relativamente à Terra, teria a mesma direção e sentido que a velocidade da Terra em relação ao sol.

Admitindo que a sonda parte de órbita circular de perigeu de raio  $r_p = 11544.18 \text{ km}$ , a sua velocidade nessa órbita,  $v_c^+$ , é dada por (13):

$$v_c^+ = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_p}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{11544.18 \text{ km}}} = 5.896071915 \text{ km/s}$$

A necessária para a sonda escapar da zona de influência da Terra, calculada em b) i), corresponde à velocidade da órbita hiperbólica de partida para  $r \rightarrow \infty$ , obtida através da equação vis-viva. Recorrendo a esta, podemos calcular o valor do semi-eixo maior,  $a^+$ , da órbita hiperbólica de partida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} v^+(r \rightarrow \infty) &= \sqrt{2\mu_{\oplus} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a^+} \right)} \Rightarrow v_{\infty}^+ = \sqrt{\frac{-\mu_{\oplus}}{a^+}} \quad \text{com } a^+ = \frac{-\mu_{\oplus}}{(v_{\infty}^+)^2} = \frac{-\mu_{\oplus}}{(2.928847467 \text{ km/s})^2} \\ &= -\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{(2.928847467 \text{ km/s})^2} \Rightarrow a^+ = -46466.90917 \text{ km} \end{aligned}$$

Nesta transferência, a sonda parte da periépside da órbita hiperbólica. Deste modo, a velocidade da sonda nesse ponto,  $v_h^+$ , é dada pela equação vis-viva.

$$\begin{aligned} v_h^+ &= \sqrt{2\mu_{\oplus} \left( \frac{1}{r_p} - \frac{1}{2a^+} \right)} = \sqrt{2 \times 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \times \left( \frac{1}{11544.18 \text{ km}} - \frac{1}{2(-46466.90917 \text{ km})} \right)} \\ &\Rightarrow v_h^+ = 8.811049301 \text{ km/s} \end{aligned}$$

Deste modo, a variação necessária  $\Delta V$  que a sonda deve fornecer para esta entrar numa órbita hiperbólica que a leva ao destino, nestas condições, resulta da subtração entre a velocidade da órbita hiperbólica pretendida com a velocidade

Assim, a variação de velocidade necessária  $\Delta V$  somada ao módulo da velocidade da sonda na ponta de partida (na órbita de perigeu) resulta no valor da velocidade da sonda na órbita hiperbólica que a leva ao destino pretendido. Com isto, calculamos  $\Delta V$  da seguinte forma:

$$v_h^+ = v_c^+ + \Delta V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta V = v_h^+ - v_c^+ = 8.811049301 \text{ km/s} - 5.896071915 \text{ km/s} = 2.91497386 \text{ km/s}$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta V = 2.9150 \text{ km/s}}$$

 direção e sentido de acordo com  $\vec{v}_{rp}$  representado na imagem.

ii) Da elínea anterior obtemos o parâmetro  $a^+$ , que corresponde ao semi-eixo maior da órbita hiperbólica em estudo:

$$a^+ = -46467 \text{ km}$$

Na pericíope da mesma, temos que a anomalia verdadeira é  $\theta = 0^\circ$ .

Reconhecendo ao formulário, podemos obter a excentricidade pedida,  $e^+$ , através da equação de órbita para estes valores:

$$(19) \quad r = \frac{P}{1 + e \cos \theta}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (21)$$

$$(20) \quad P = a(1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu}$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

EQUAÇÃO  
DE ÓRBITA

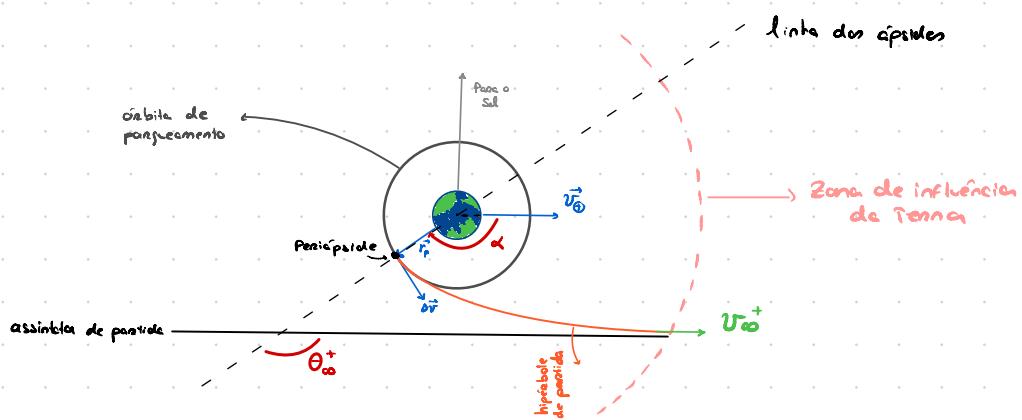
(21)

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow r_p = \frac{a^+ (1 - e^{+2})}{1 + e^+ \cos 0^\circ} = a^+ (1 - e^+) \Leftarrow$$

$$\therefore e^+ = 1 - \frac{r_p}{a^+} = 1 - \frac{11544.18 \text{ km}}{-46466.90917 \text{ km}} = 1.248438732 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^+ = 1.2484 > 1, \text{ de acordo com os valores para a excentricidade de órbitas hiperbólicas}$$

iii) Pretendemos calcular o ângulo entre a direção da velocidade da Terra relativamente ao Sol,  $\vec{v}_\oplus$ , e a linha que une o centro da Terra ao ponto onde se deu o impulso  $\Delta v$ , linha esta que corresponde à linha das órbitas, visto que o impulso deu-se na pericíope, como demonstrado no seguinte desenho:



Neste, o ângulo que pretendemos calcular é igual ao ângulo  $\theta_{\infty}^+$  que, por sua vez, corresponde ao ângulo entre a assintota de partícula e a linha das órbitas. Desta forma, para obtermos o valor de  $\alpha$  basta calcularmos o valor de  $\theta_{\infty}^+$ .

Para o cálculo de  $\Theta_{\infty}^+$ , consideramos a sonda com uma distância a tender para infinito,  $r \rightarrow \infty$ . Assim, reconsidere a equação de órbita (21) e com esta consideração podemos obter os valores do ângulo da seguinte maneira:

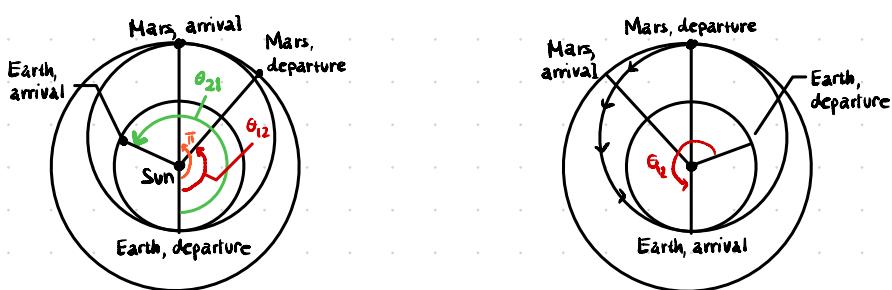
$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} \Rightarrow \cos \theta = \frac{a(1-e^2) - \frac{1}{e}}{er} = 0 \Rightarrow \theta = \arccos \left( \frac{a(1-e^2) - \frac{1}{e}}{re} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \Theta_{\infty}^+ = \arccos \left( \frac{\cancel{a^2(1-e^{+2})} - \frac{1}{e^+}}{r_{(\infty)} \cdot e^+} \right) = \arccos \left( \frac{-1}{e^+} \right) = \arccos \left( \frac{-1}{1.248438932} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \Theta_{\infty}^+ = 143.2253458^\circ = 2.499960838 \text{ rad}$$

$$\Rightarrow \alpha = 143.23^\circ = 2.4998 \text{ rad}$$

d) Nesta questão, vamos reconhecer à seguinte imagem das aulas técnicas, como auxílio à resolução do problema:



i) Vamos admitir que a sonda parte de um certo ponto da Terra num determinado instante e que no fim da sua desaceleração, através da transferência de Hohmann, esta chega em Marte após um tempo de viagem,  $t_V$ , avançando um ângulo heliocêntrico  $\Pi$  rad.

Nesta imagem temos que no momento da partida temos que a Terra e Marte fazem um ângulo heliocêntrico que corresponde a  $\theta_{12}$ , onde:

$$(22) \quad \Pi - \theta_{12} = n_M \cdot t_V$$

Nesta expressão temos presente  $n_M$ , que corresponde à frequência de revolução de Marte em torno do Sol:

$$(23) \quad n_M = \frac{2\pi}{T_M}$$

Estas considerações são importantes pois, para Marte se encontrar no apogeu da órbita elíptica heliocêntrica de transferência no fim do tempo de viagem da sonda, este tem de avançar um determinado ângulo dado pela subtração  $\Pi - \theta_{12}$ . Semelhante a este, a Terra também avança um ângulo  $\theta_{21}$  desde a partida até a sonda chegar a Marte; ângulos estes que temos de ter em conta neste problema.

De acordo com o formulário, temos a seguinte fórmula que nos permite calcular a frequência de revolução de Marte à volta do Sol:

$$(24) \quad n = \sqrt{\frac{M}{a^3}} \quad \rightarrow \text{a órbita heliocêntrica de Marte é circular, logo, na expressão, } a_H = r_N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_N = \sqrt{\frac{M_O}{r_N^3}} = \sqrt{\frac{1.327 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2}{(1.52 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km})^3}} = 1.062362395 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$$

Como a órbita heliocêntrica da viagem interestelar é uma transferência de Hohmann, então o período do mesmo é dado por (10):

$$\text{apenas se percorre meia elipse} \quad \text{calculado em b)}$$

$$T_V = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{M_O}} \quad a_H^{3/2} = \frac{\pi}{\sqrt{M_O}} \cdot a_H^{3/2} = \frac{\pi \times (188476000 \text{ km})^{3/2}}{\sqrt{1.327 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2}} = \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_V = 22318634.46 \text{ s}$$

Com estes valores podemos finalmente obter o valor do ângulo heliocêntrico pretendido,  $\Theta_{12}$ :

$$\pi - \Theta_{12} = n_H \cdot t_V \Rightarrow \Theta_{12} = \pi - n_H \cdot t_V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Theta_{12} = \pi - 1.062362395 \times 10^{-3} \text{ rad/s} \times (22318634.46 \text{ s}) = 0.990544858 \text{ rad} = 44.14896233^\circ$$

$$\Rightarrow \underline{\Theta_{12} = 0.99054 \text{ rad} = 44.149^\circ}$$

ii) Para lançar, novamente, a sonda da Terra, basta que o ângulo heliocêntrico se repita, logo, o intervalo de tempo necessário para o novo lançamento corresponde ao período sincódico entre a Terra e Marte.

Calculando as frequências angulares da Terra e Marte em torno do Sol, temos, por (24):

$$n_\oplus = \sqrt{\frac{M_O}{r_\oplus^3}} = \sqrt{\frac{1.327 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2}{(1 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km})^3}} = 1.990847853 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$$

$$n = 1.062362395 \times 10^{-3} \text{ rad/s} \quad (\text{obtida em ii})$$

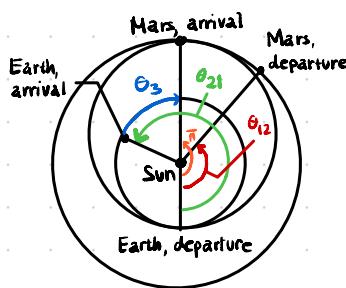
Sendo o período sincódico dado por  $T_{\text{sícodico}} = \frac{2\pi}{n_s}$ , onde  $n_s$  corresponde à diferença entre  $n_\oplus$  e  $n_N$ , obtemos:

$$T_{\text{sinódico}} = \frac{2\pi}{n_{\oplus} - n_M} = \frac{2\pi}{1.990847853 \times 10^3 \text{ rad/s} - 1.062362315 \times 10^3 \text{ rad/s}} =$$

$$\Rightarrow T_{\text{sinódico}} = 67691339.78 \text{ s} = 783.2330761 \text{ dias solares médios}$$

$$\Rightarrow T_{\text{sinódico}} = 6.7691 \times 10^7 \text{ s} = 783.23 \text{ dias solares médios}$$

iii) Como vimos anteriormente, após a sonda dar inicio à sua viagem a Terra vai percorrer um determinado ângulo, representado por  $\theta_{21}$ , até a sonda atingir Marte. No fim da viagem, tem-se que a sonda avançou um ângulo de  $T_{\text{red}}$ . Desta forma, podemos ver que o ângulo heliocêntrico entre a Terra e Marte, quando a sonda chega a Marte é designado de  $\theta_3$  e dado por:



De acordo com o sentido dos ângulos na imagem:

$$\theta_3 = \theta_M (\text{à chegada}) - \theta_{\oplus} (\text{à chegada}) \rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_3 = \pi - \theta_{21} \quad (25)$$

Pano obtido o valor do ângulo  $\theta_{21}$  que a Terra percorreu, vamos recorrer à mesma fórmula utilizada para Marte na alínea i). Semelhante a (22), o ângulo que a Terra avançou durante o tempo da viagem é dado por:

$$(26) \quad \theta_{21} = n_{\oplus} \cdot t_v$$

Recomendo os seguintes valores, calculados em alíneas anteriores, obtém-se:

$$n_{\oplus} = 1.990847853 \times 10^3 \text{ rad/s} \rightarrow \text{alínea ii)}$$

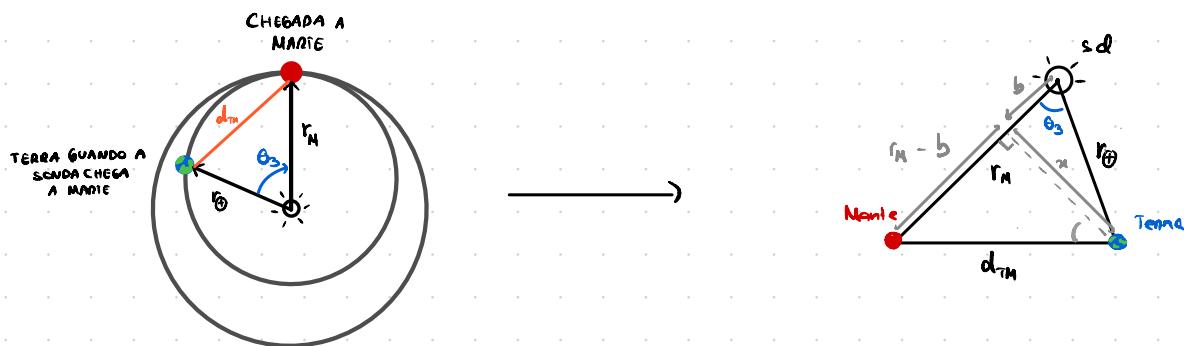
$$t_v = 22318634.46 \text{ s} \rightarrow \text{alínea i)}$$

$$\theta_{21} = n_{\oplus} \cdot t_v = 1.990847853 \times 10^3 \text{ rad/s} \times 22318634.46 \text{ s} = 4.44330055 \text{ rad.}$$

Com este, podemos calcular o ângulo entre Terra e Marte à chegada:

$$\theta_3 = \pi - \theta_{21} = \pi - 4.44330055 \text{ rad} = -1.301712846 \text{ rad}$$

Na chegada da Sonda a Marte temos então que a Terra e Marte fazem um ângulo heliocêntrico,  $\theta_3$ , e as distâncias entre estes e o Sol podem ser representadas da seguinte forma:



Deste modo, temos tudo o que precisamos para calcular a distância de Terra a Marte na chegada da sonda,  $d_{TM}$ :

→ valor em módulo

$$x = r_{\oplus} \times \operatorname{sen} \theta_3 = 1 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km} \times \operatorname{sen} (1.301712846 \text{ rad}) = 144216637.4 \text{ km}$$

$$b = r_{\oplus} \cdot \cos \theta_3 = 1 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km} \times \cos (1.301712846 \text{ rad}) = 39770862.33 \text{ km}$$

$$(d_{TM})^2 = x^2 + (r_M - b)^2 \Rightarrow d_{TM} = \sqrt{x^2 + (r_M - b)^2} = b$$

$$\Rightarrow d_{TM} = \sqrt{(144216637.4 \text{ km})^2 + (1.52 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km} - 39770862.33 \text{ km})^2} = 236643465.6 \text{ km}$$

Por fim, para calcularmos o tempo que os comunicados da Terra demoram a chegar à sonda quando esta chega a Marte, basta recorrermos à velocidade da luz, cujo valor vamos considerar,  $C = 299792458 \text{ m/s}$ :

$$C = \frac{d_{TM}}{\Delta t_{\text{comunicação}}} \Leftrightarrow \Delta t_{\text{comunicação}} = \frac{d_{TM}}{C} = \frac{236643465.6 \times 10^3 \text{ m}}{299792458 \text{ m/s}} = 789.3576348 \text{ s} = 13.15596056 \text{ min}$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta t_{\text{comunicação}} = 789.36 \text{ s} = 13.156 \text{ min}}$$

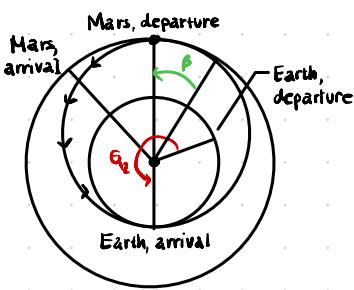
(tempo que os comunicados da Terra demoram a chegar à sonda quando esta chega a Marte)

ii) Primeiramente, o tempo que a tripulação demora desde a partida da Terra até chegar a Marte corresponde ao tempo da respectiva transferência de Hohmann, já calculada em i):

$$T_{H} = 22318634.46 \text{ s} = 258.3175285 \text{ dias solares médios}$$

$$\underline{T_H = 2.2319 \times 10^5 \text{ s} = 258.32 \text{ dias solares médios}}$$

Pretende-se que a sonda regresse à Terra numa órbita idêntica à de ida a Marte e com o mesmo tempo de viagem,  $T_{tr}$ . Para isto é necessário que a Terra esteja num ângulo  $\theta_{21}$  para trás do ponto de chegada:



Durante o tempo de espera, te, Mané percebe um determinado ângulo  $\beta$ , definido por  $\beta = n_M \cdot te$ , ao mesmo tempo que a Terra percebe um ângulo  $\gamma$ , para ambos se posicionarem para a partida da sonda. A Terra precisa de se encontrar a um ângulo  $\theta_1$  antes da posição "Earth, arrived". Assim, durante o tempo de espera a terra tem de avançar o seguinte ângulo:

$$2\pi - 2(G_{z_1} - \pi) + \beta = 4\pi - 2G_{z_1} + n_M \cdot \text{te} = n_{\oplus} \cdot \text{te} \quad (27)$$

Assim, o tempo de espera é, que corresponde ao tempo mínimo para que se possa realizar a viagem novamente perante estas condições e órbitas de transferência é:

$$(28) \quad t_c = \frac{4\pi - 2\theta_{c1}}{n_{\oplus} - n_M}$$

$$t_e \text{ (minimo)} = \frac{4\pi - 2\theta_{e1}}{n_{\oplus} - n_{\odot}} = \frac{4\pi - 2 \times 4.44330055 \text{ rad.}}{1.990843253 \times 10^3 \text{ rad/s} - 1.062362395 \times 10^3 \text{ rad/s}} =$$

$$\Rightarrow T_e \text{ (min)} = 39631957.43 \text{ s} = 458.703211 \text{ days s.m.}$$

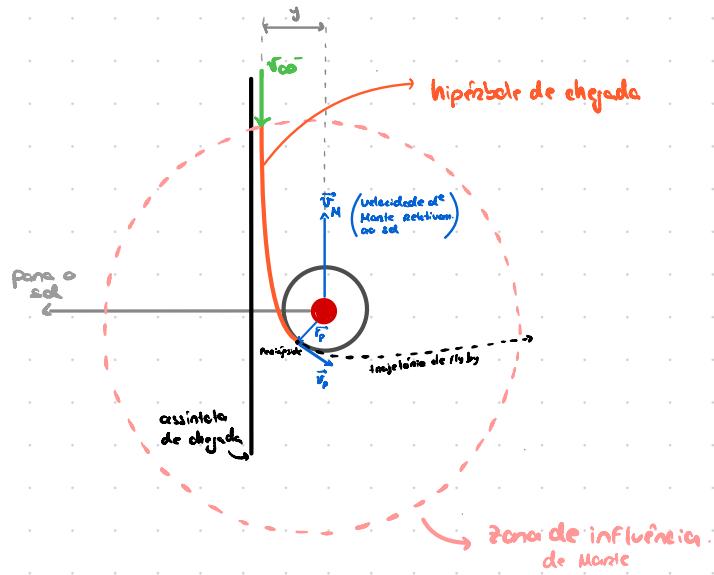
$$\Rightarrow t_e(\text{min.}) = 3.9632 \times 10^7 \text{ s} = 458.70 \text{ dias s\ddot{o}ndes m\ddot{o}dios}$$

A duração total da missão nestas condições ideais e com tempo mínimo de espera é dada pela soma do tempo dos voagens (que é igual) com te:

$$\Delta t_{\text{virgem told}} = 2t_v + t_e = 2 \times 22318634.46 \text{ s} + 39631957.43 \text{ s} = 84269226.35 \text{ s} = 995.3382679 \text{ d.s.m}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{\text{último total}} = 8.4269 \times 10^3 \text{ s} = 935.34 \text{ dias solares médios}$$

e) Recomendo notadamente à mypm referente à fase da chegada:



i) Podemos observar que a velocidade do sonda relativamente ao planeta, na assimetria hiperbólica de chegada,  $\vec{v}_{\text{H chegada}}$  (calculada anteriormente), resulta da soma vetorial entre a velocidade heliocéntrica de sonda à chegada,  $\vec{v}_{\infty}$ , com a velocidade de Marte (valores estes já calculados). Assim, temos:

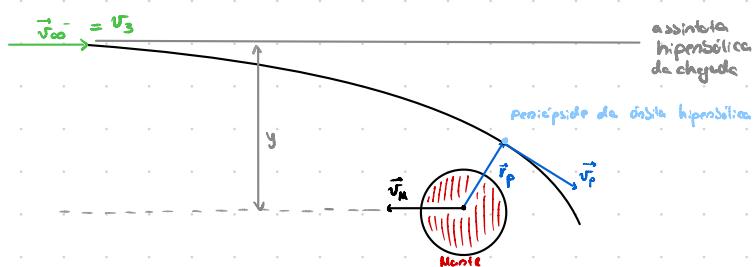
$$(29) \quad \vec{v}_{\text{H chegada}} = \vec{v}_{\infty} + \vec{v}_M$$

Assim:

$$\vec{v}_{\infty} = \vec{v}_{\text{H chegada}} - \vec{v}_M = 21.52100746 \text{ km/s} \stackrel{b)}{-} \stackrel{a)}{=} 24.15723097 \text{ km/s} = -2.63626351 \text{ km/s}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_{\infty}| = 2.6363 \text{ km/s} \rightarrow \text{com sentido e direção de } \vec{v}_M$$

ii) Para  $X = 0.71$  temos:  $y = (9000 + 1000 \times 0.71) = 9710 \text{ km}$ .



Da conservação do momento angular  $\vec{h}$ ,  $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ , temos que o momento angular da sonda, imediatamente antes de entrar na zona de influência de Marte (pela uma distância  $y$ ), é igual ao momento angular da sonda no perigeu da órbita hiperbólica de chegada. Como, para ambos os casos, as velociades são perpendiculares, temos:

$$\underbrace{y \cdot \vec{v}_{\infty}}_{\text{conservação momento angular}} = \vec{r}_p \cdot \vec{v}_p \Rightarrow \vec{r}_p = \frac{y \cdot \vec{v}_{\infty}}{\vec{v}_p} \quad (30)$$

Com esta expressão, verificamos que  $y$  determina o rácio do perigeu da órbita. Para determinar os valores de  $r_p$ , precisamos de uma expressão para  $v_p^0$ , logo vamos fazer um balanço energético entre o ponto imediatamente antes antes de sonda entrar na zona de influência de Marte, para  $v_{\infty}^-$ , (onde consideramos infinito = 0  $U(r) = 0$ ) e o ponto do perigeu, com (14) e (15):

$$T(r \rightarrow \infty) + U(r \rightarrow \infty) = T(r_p) + U(r_p) \Rightarrow \frac{v_{\infty}^-}{2} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu_M}{r_p} \quad (31)$$

Substituindo (30) em (31) temos:

$$\begin{aligned} \frac{v_{\infty}^-}{2} &= \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu_M}{r_p} \Leftrightarrow \frac{v_{\infty}^-}{2} - \frac{v_p^2}{2} + \frac{\mu_M \cdot v_p}{y \cdot v_{\infty}^-} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow v_p^2 - v_p \cdot \frac{2 \cdot \mu_M}{y \cdot v_{\infty}^-} - (v_{\infty}^-)^2 &= 0 \Leftrightarrow v_p = \frac{\mu_M}{y \cdot v_{\infty}^-} \pm \sqrt{\left(\frac{-\mu_M}{y \cdot v_{\infty}^-}\right)^2 + (v_{\infty}^-)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_p &= \frac{9.28284 \times 10^4 \text{ km}^3/\text{s}^2}{9710 \text{ km} \times (2.63626351 \text{ km/s})} \pm \sqrt{\left(\frac{9.28284 \times 10^4 \text{ km}^3/\text{s}^2}{9710 \text{ km} \times (2.63626351 \text{ km/s})}\right)^2 + (2.63626351 \text{ km/s})^2} = \\ \Rightarrow v_{p(1)} &= 4.795473969 \text{ km/s} \quad \vee \quad v_{p(2)} = -3.122366623 \text{ km/s} \end{aligned}$$

Precisamos de obter os valores de  $v_p$  para averiguar qual o valor verdadeiro para ambos:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{p(2)} = -3.122366623 \text{ km/s} \\ r_{p(2)} = \frac{y \cdot v_{\infty}^-}{v_{p(2)}} = \frac{9710 \text{ km} \times (2.63626351 \text{ km/s})}{(-3.122366623 \text{ km/s})} < 0 \text{ impossível, logo } v_p \text{ é:} \end{array} \right.$$

$$v_p = 4.795473969 \text{ km/s}$$

$$r_p = \frac{y \cdot v_{\infty}^-}{v_p} = \frac{9710 \text{ km} \times (2.63626351 \text{ km/s})}{(4.795473969 \text{ km/s})} = 5337.994692 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \underline{r_p = 5338.0 \text{ km}}$$

Recorrendo à seguinte Fórmula do formulário, podemos com  $r_p$  e  $v_p$  calcular o parâmetro pedido, a; o semi-eixo maior, para a órbita hiperbólica na fase de chegada:

$$(32) \quad a = \frac{r_0}{2 - \frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu}}$$

$$\Rightarrow a^- = \frac{r_p}{2 - \frac{r_p \cdot v_p^2}{\mu_M}} = \frac{5337.994692 \text{ km}}{2 - \frac{(5337.994692 \text{ km}) \times (2.63620351 \text{ km/s})^2}{4.795473969 \text{ km/s}}} = -3684.195802 \text{ km}$$

$$\Rightarrow a^- = -3684.2 \text{ km}$$

Recomendo à equação de órbita, podemos obter o valor para a excentricidade,  $e^-$ :

Perífeu:  $\theta=0^\circ$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} \Rightarrow r_p = \frac{a^- (1-e^-)^2}{1+e^-} = a^- (1-e^-) \Rightarrow$$

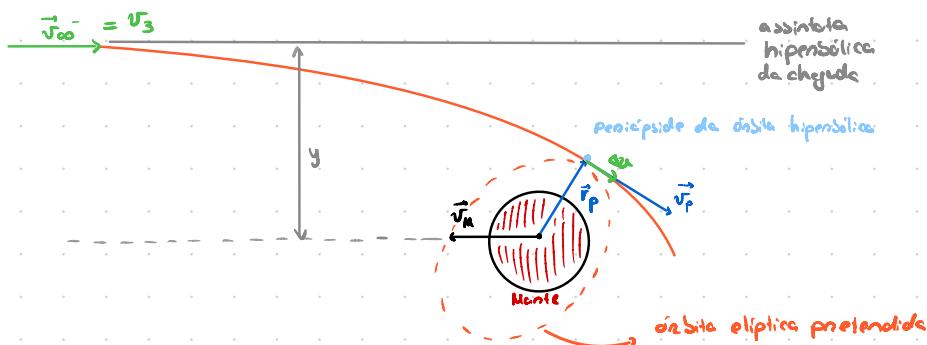
$$\Rightarrow e^- = 1 - \frac{r_p}{a^-} = 1 - \frac{5337.994692 \text{ km}}{-3684.195802 \text{ km}} = 2.448884636 > 1 \text{ como esperado}$$

vista a órbita ser hiperbólica.

$$\Rightarrow e^- = 2.4489$$

$$\text{iii) Para } X = 0.71 \text{ temos: } T_e = (80000 + 10000 \times 0.71) = 87100 \text{ s}$$

Nesta alínea temos que a sonda safre um impulso, ou seja, na periépside da nova órbita elíptica, em torno de Marte, de período  $T_e$ , no qual se pretende colocar a sonda:



Com os valores do período de órbita e recomendando à equação (10), podemos obter os valores para o seu semi-eixo maior:

$$T_e = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_M}} \cdot a^{3/2} \Leftrightarrow a = \left( \frac{T_e \cdot \sqrt{\mu_M}}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}} = \left( \frac{87100 \text{ s} \sqrt{4.28284 \times 10^4 \text{ km}^3/\text{s}^2}}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow a = 13401.02372 \text{ km}$$

Antes da sonda passar a orbitar em torno de Marte segundo este órbita elíptica, esta encontrava-se numa órbita hiperbólica, sendo que no perífeu destas, a velocidade da sonda é  $v_p = 4.795473969 \text{ km/s}$  (calculado em ii)).

Como podemos observar pela figura, ambos os órbitas hiperbólica e elíptica partilham do mesmo valores para o raio do perífeu,  $r_{\text{periépside,elíptica}} = r_p = 5337.994692 \text{ km}$  (também calculado em ii)). Consequentemente, ambas as velocidades da sonda no perífeu destas órbitas terão a mesma direção (só colineares), por isso temos a seguinte expressão para o impulso necessário para esta passagem da órbita hiperbólica para a circular:

$$(33) \quad v_p + \Delta v = v_{\text{perijove, eliptica}}$$

Obtendo os valores de  $v_{\text{perijove, eliptica}}$  de acordo com a equação vis-viva, temos:

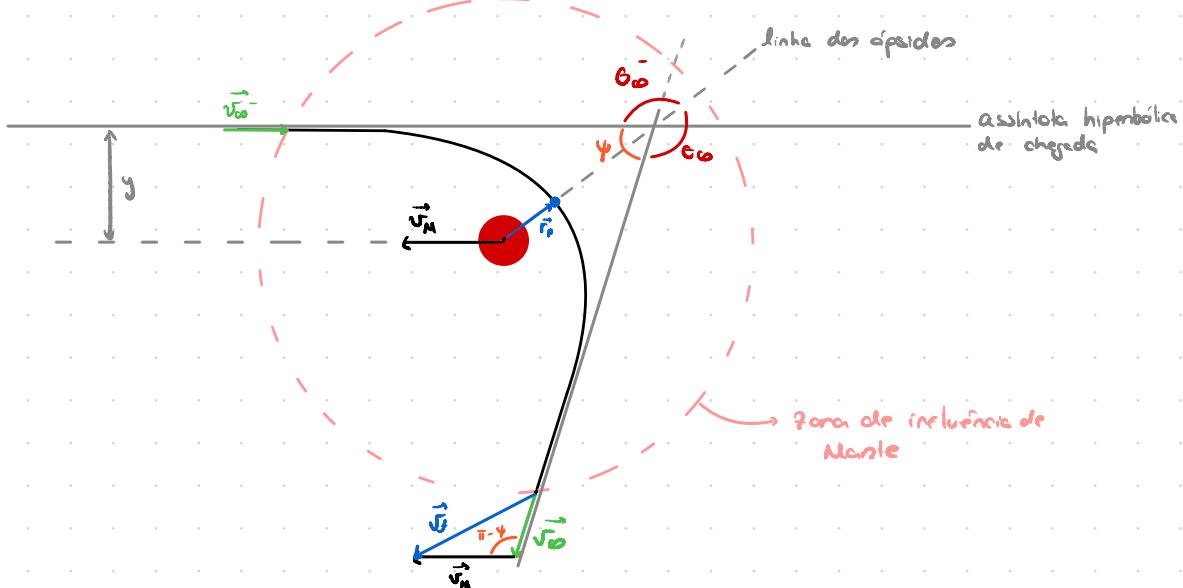
$$\begin{aligned} v_{\text{perijove, eliptica}} &= \sqrt{2\mu_H \times \left( \frac{1}{r_p} - \frac{1}{2a} \right)} \\ &= \sqrt{2 \times 4.28284 \times 10^4 \text{ km}^3/\text{s}^2 \times \left( \frac{1}{5337.974692 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 13401.02332 \text{ km}} \right)} = \\ &= 3.584798488 \text{ km/s} \end{aligned}$$

Assim,

$$\Rightarrow \Delta v = v_{\text{perijove, eliptica}} - v_p = 3.584798488 \text{ km/s} - 4.795473969 \text{ km/s} = -1.210695481 \text{ km/s}$$

$$\Rightarrow |\Delta v| = 1.2107 \text{ km/s} \rightarrow \text{com direção de } \vec{v}_p \text{ e sentido contrário a este}$$

f) Neste problema, como a sonda não vai conseguir usufruir do impulso em iii) de modo a passar para uma órbita elíptica em torno de Marte, como visto na aulas anteriores, a sonda vai, então, realizar a manobra de fly-by:



No diagrama temos  $v_O^-$  que representa a velocidade hipbólica da sonda quando está sói da zona de influência de Marte. Analogamente temos que  $v_O^- = v_O = 2.63626351 \text{ km/s}$ , visto sendo ambos o valor da velocidade hipbólica imediatamente após (antes) de sonda escapar (entra) da zona de influência de Marte, varia-se, assim, apenas a direção de  $v_O^-$  em relação a  $v_O^+$ .

Na imagem tem-se representado  $\theta_{\infty}$ , que consiste no ângulo entre a assimetria hiperbólica e a linha dos ópulos. Como visto para  $\theta_{\infty}$ , anteriormente, considerando é efetuado de órbita temos:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \Rightarrow 1 + e\cos\theta_{\infty} = 0 \Rightarrow \theta_{\infty} = \arccos\left(\frac{-1}{e}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{2.448884636}\right) =$$

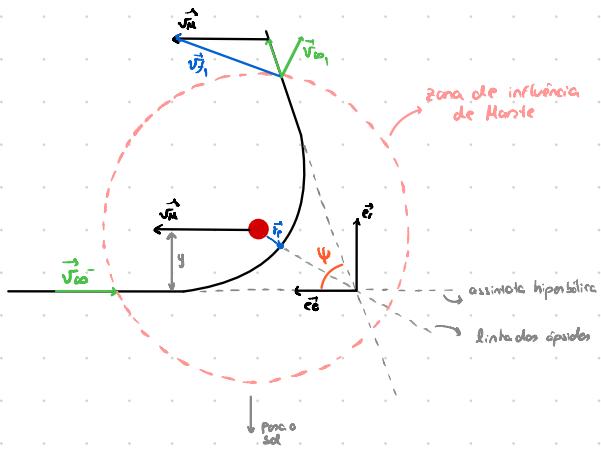
$(r \rightarrow \infty)$

$$\Rightarrow \theta_{\infty} = 1.991441169 \text{ rad} = 114.1011741^\circ$$

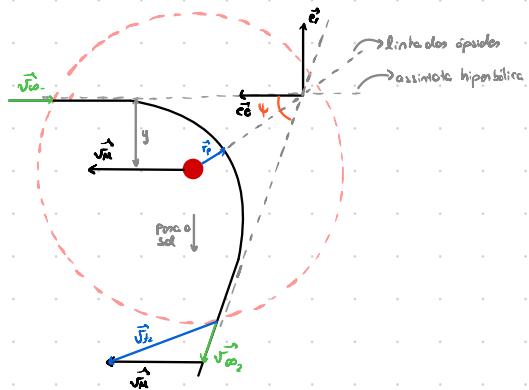
Analizando a direção de  $\vec{v}_{\infty}$ , observamos que este for um ângulo  $\psi$  com  $\vec{v}_{\infty}$  dado por:

$$\psi = 2\pi - 2\theta_{\infty} = 2\pi - 2 \times 1.991441169 \text{ rad} = 2.300302969 \text{ rad} = 131.7936517^\circ$$

A manobra de fly-by tem 2 casos distintos, para 2 órbitas hiperbólicas simétricas como demonstram os seguintes figurinos:



Caso 1: sonda afasta-se do Sol



Caso 2: sonda aproxima-se do Sol

Assim, os dois valores possíveis para  $\vec{v}_{\infty}$  são descritos da seguinte forma, considerando o referencial  $\vec{e}_r, \vec{e}_{\theta}$  e  $|v_{\infty}| = |v_{\infty_2}| = v_{\infty}$ :

$$\vec{v}_{\infty_1} = (v_{\infty} \cdot \sin\psi) \vec{e}_r + (v_{\infty} \cdot \cos\psi) \vec{e}_{\theta} \quad (\text{km/s})$$

$$\vec{v}_{\infty_2} = -(v_{\infty} \cdot \sin\psi) \vec{e}_r + (v_{\infty} \cdot \cos\psi) \vec{e}_{\theta} \quad (\text{km/s})$$

Como representado nas imagens, para a manobra de fly by, a velocidade final é dada pela soma vetorial da respectiva velocidade hiperbólica, imediatamente após a saída da zona de influência de Marte, com a velocidade de Marte:

$$(34) \quad \vec{v}_f = \vec{v}_{\infty} + \vec{v}_M$$

Recomendo os valores da Velocidade de Marte (calculada em a)) e os valores de  $v_{00}$  mencionado no inicio destes últimos termos:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{f_1} &= (v_{00} \cdot \sin \psi) \vec{e}_r + (v_{00} \cdot \cos \psi) \vec{e}_\theta + v_N \vec{e}_\phi = \\ &= v_{00} (\sin \psi \vec{e}_r + \cos \psi \vec{e}_\theta) + v_N \vec{e}_\phi = \\ &= 2.63626351 \text{ km/s} (\sin(2.300302969 \text{ rad}) \vec{e}_r + \cos(2.300302969 \text{ rad}) \vec{e}_\theta) + 24.15727097 \vec{e}_\phi \text{ km/s} = \\ &= 1.965343184 \vec{e}_r + 22.40019629 \vec{e}_\theta \text{ (km/s)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_{f_2} &= -(v_{00} \cdot \sin \psi) \vec{e}_r + (v_{00} \cdot \cos \psi) \vec{e}_\theta + v_N \vec{e}_\phi = \\ &= -v_{00} (\sin \psi \vec{e}_r + \cos \psi \vec{e}_\theta) + v_N \vec{e}_\phi = \\ &= 2.63626351 \text{ km/s} (-\sin(2.300302969 \text{ rad}) \vec{e}_r + \cos(2.300302969 \text{ rad}) \vec{e}_\theta) + 24.15727097 \vec{e}_\phi \text{ km/s} = \\ &= -1.965343184 \vec{e}_r + 22.40019629 \vec{e}_\theta \text{ (km/s)}\end{aligned}$$

$$|\vec{v}_{f_1}| = |\vec{v}_{f_2}| = \sqrt{(1.965343184)^2 + (22.40019629)^2} = 22.48624841 \text{ km/s}$$

Assim, podemos definir a velocidade final da seguinte forma:

$$\begin{cases} \vec{v}_f = \pm 1.9653 \vec{e}_r + 22.400 \vec{e}_\theta \text{ (km/s)} \\ |\vec{v}_f| = 22.486 \text{ km/s} \end{cases}$$

(3)

a) Os ângulos de Euler descrevem 3 rotacões sucessivas, em torno dos mesmos eixos coordenados instantâneos, que transformam o referencial de inércia (ex.: XYZ), no referencial que roda (ex.: xyz). Estes permitem-nos, então, saber a orientação do referencial em rotacões, isto é, a orientação do corpo. Os ângulos de Euler são:

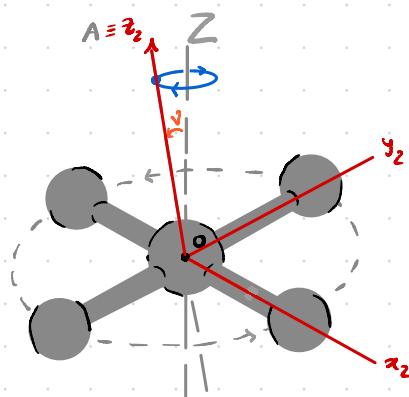
$\psi$ : ângulo de precessão

$\nu$ : ângulo de nutação

$\sigma$ : ângulo de rotação própria

As respetivas frequências de Euler representam-se por:  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\nu}$  e  $\dot{\sigma}$ .

i) De acordo com os dados do enunciado temos a seguinte imagem que descreve o problema:



No enunciado já nos foi fornecida a valor da frequência de Euler  $\dot{\sigma} = (3 + 0.710) = 3.710 \text{ rev/min}$ . Também nos foi dito que o ângulo de nutação,  $\psi$ , é muito pequeno, logo, podemos aproximar o cosseno deste ângulo a 1 (não precisamos disto para calcular  $\dot{\psi}$ ).

Como a estrutura espacial é assimétrica (como se pode observar pela figura), temos que  $\nu = \text{constante}$ . Desta forma já temos os valores para as seguintes frequências de Euler:

$$\dot{\sigma} = 3.710 \text{ rev/min} = \frac{3.710 \cdot 2\pi}{60} = 0.388510291 \text{ rad/s} \Rightarrow \dot{\sigma} = 0.38851 \text{ rad/s}$$

$$\text{estrutura assimétrica} \Rightarrow \nu = \text{constante} \Rightarrow \dot{\nu} = 0 \text{ rad/s}$$

Reconhecendo as formulações, temos a seguinte fórmula para calcular a frequência de precessão:

$$(34) \quad \dot{\psi} = \frac{I_{||}}{(I_{\perp} - I_{||}) \cos \nu} \cdot \dot{\sigma}$$

Como visto anteriormente  $\cos \nu \approx 1$ . Para além disto, visto que o momento de inércia da estrutura em relação ao seu eixo de simetria A-A é o dobro do momento de inércia em relação a qualquer eixo normal a A-A, temos  $I_{||} = 2I_{\perp}$ , logo, por (34):

$$\dot{\psi} = \frac{I_{||}}{(I_{\perp} - I_{||}) \cancel{\cos \nu}} \cdot \dot{\sigma} = \frac{2I_{\perp}}{-I_{\perp}} \cdot 0.388510291 \text{ rad/s} = -0.777020582 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \dot{\psi} = -0.77702 \text{ rad/s}$$

$$\therefore (\dot{\psi}, \dot{\nu}, \dot{\sigma}) = (-0.77702 \text{ rad/s}, 0, 0.38851 \text{ rad/s})$$

ii) O ângulo de nutação encontra-se representado na figura, i.e., é o ângulo entre o eixo Z com o de rotação A-A. O ângulo está representado a laranja.

iii) A precessão é direta ( $\dot{\psi} > 0$ ) e  $\dot{\sigma} > 0$  têm o mesmo sinal, e retrograda ( $\dot{\psi} < 0$ ) e  $\dot{\sigma} > 0$  têm sinais opostos. Como, neste caso, a precessão e a rotação próprias têm sinais opostos ( $\dot{\psi} < 0$ ,  $\dot{\sigma} > 0$  pela alínea anterior) então podemos concluir que a precessão é retrograda.

b) Para  $X = 0.71$  temos: ângulo de nutação,  $\nu = (2 + 0.710)^{\circ} = 2.710^{\circ}$

Para corpos assimétricos (como neste caso), pode-se elinhar o momento angular  $\vec{H}_c$  com o eixo Z. Assim a velocidade angular é dada por:

$$\vec{\omega} = \vec{\psi} + \vec{\nu} + \vec{\sigma} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\sigma}}$$

Como o fôrma de nutação já não é muito pesado, temos de calcular a frequência de precessão através de (34) para os novos valores de  $\psi$ :

$$\dot{\psi} = \frac{I_{11}}{(I_1 - I_{11}) \cos \nu} \cdot \dot{\sigma} \xrightarrow{\text{mantém-se o valor da precessão}} = \frac{2 I_1 \times 0.388510291 \text{ rad/s}}{-I_1 \times \cos(2.710)} = -0.777890545 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \vec{\psi} = -0.777890545 \vec{e}_z$$

Como  $\vec{\sigma} = 0.38851 \vec{e}_{z_2}$  e como pretendemos somá-la a  $\vec{\psi}$ , precisamos, primeiramente, de decompor  $\vec{e}_z$  em alguma base nos permita calcular ambos sobre o mesmo referencial  $(x_2, y_2, z_2)$ :

$$\vec{e}_z = (\cos \nu) \vec{e}_{z_2} + (\sin \nu) \vec{e}_{y_2} = \cos(2.710^\circ) \vec{e}_{z_2} + \sin(2.710^\circ) \vec{e}_{y_2}$$

$$\text{Logo: } \vec{\psi} = -0.777890545 \vec{e}_z = -0.777890545 (\cos(2.710^\circ) \vec{e}_{z_2} + \sin(2.710^\circ) \vec{e}_{y_2}) = \\ = -0.036779278 \vec{e}_y - 0.777020581 \vec{e}_{z_2} \text{ (rad/s)}$$

Podemos, assim, calcular finalmente o vetor velocidade angular  $\vec{\omega}$ :

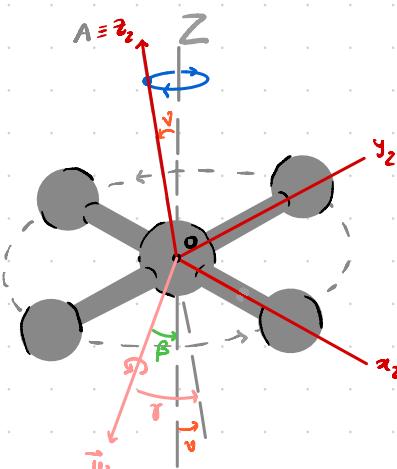
$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \vec{\psi} + \vec{\sigma} = \psi \sin \nu \vec{e}_{y_2} + (\psi \cos \nu + \sigma) \vec{e}_{z_2} = \\ &= -0.036779278 \vec{e}_y - 0.777020581 \vec{e}_{z_2} \text{ (rad/s)} + 0.388510291 \vec{e}_{z_2} = \\ &= -0.036779278 \vec{e}_{y_2} - 0.388510291 \vec{e}_{z_2} \text{ (rad/s)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{\omega} = -0.036779 \vec{e}_{y_2} - 0.38851 \vec{e}_{z_2} \text{ (rad/s)}}$$

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{(-0.036779278)^2 + (-0.388510291)^2} = 0.390249307 \text{ rad/s} \Rightarrow$$

$$\underline{|\vec{\omega}| = 0.39025 \text{ rad/s}}$$

No que toca ao ângulo que a velocidade angular faz com o eixo  $\vec{z}$  temos:



Como visto nos cálculos técnicos, estando  $\vec{\omega}$  no plano  $y_2z_2$  neste caso do corpo assimétrico, temos que a velocidade de ângulos faz um determinado ângulo,  $\gamma$ , com o eixo de simetria do corpo, A-A, sendo que  $\gamma$  é dado pela seguinte expressão:

$$(35) \quad \tan \gamma = \frac{\omega_{y_2}}{\omega_{z_2}} = \frac{\dot{\psi} \sin \nu}{\dot{\psi} \cos \nu + \sigma}$$

$$\Rightarrow \gamma = \arctan \left( \frac{\omega_y}{\omega_z} \right) = \arctan \left( \frac{-0.036779278 \text{ rad/s}}{-0.38851029 \text{ rad/s}} \right) = 0.094386158 \text{ rad} = 5.407928552^\circ$$

Através da figura podemos observar que o ângulo que o vetor velocidade de ângulos faz com o eixo  $\vec{z}$  é dado por:

$$(36) \quad \beta = \gamma - \nu$$

Substituindo os respectivos valores obtemos:

$$\beta = \gamma - \nu = 0.094386158 \text{ rad} - \frac{2.710 \times \pi}{180} \text{ rad} = 0.043087735 \text{ rad/s} = 2.697928498^\circ$$

$$\Rightarrow \underline{\beta = 0.043088 \text{ rad} = 2.6979^\circ}$$

c) O momento de ângulos,  $\vec{H}$ , é dado por:

$$\vec{H} = \vec{I} \cdot \vec{\omega} \Rightarrow \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Neste caso, o referencial em estudo é um referencial principal de inflexão. Logo os produtos de inflexão são zero e, consequentemente a rotação em torno dos eixos de inflexão está equilibrada.

Relembrando que a estação é assimétrica e que  $I_{II} = 2I_1 = I_{AA}$  temos:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{\perp} = \frac{I_{AA}}{2} \quad I_{zz} = I_{II} = 2I_{\perp} = I_{AA}$$

Substituindo na matriz:

$$\vec{H}_0 = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \frac{I_{AA}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{H}_0 = I_{AA} \begin{bmatrix} \omega_x/2 \\ \omega_y/2 \\ \omega_z \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{H}_0 = I_{AA} \left( \frac{\omega_{x_2}}{2}, \frac{\omega_{y_2}}{2}, \omega_{z_2} \right) \Rightarrow$$

↓

Com os eixos ordenados  
( $x_2 y_2 z_2$ )

$$= \vec{H}_0 = I_{AA} \left( \frac{0}{z}, \frac{-0.036779276}{2}, -0.38851029 \right) = I_{AA} \left( 0, -0.018389639, 0.38851029 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{H}_0 = I_{AA} (0, -0.018390, -0.38851) \text{ (kg.m}^2/\text{s)}$$


---

Temos que, relembrando a):

$$\dot{\psi} = \frac{I_{II}}{(I_L - I_{II}) \cos \vartheta} \cdot \dot{\sigma} = \frac{2 I_A}{-I_1 \cos \vartheta} \cdot \dot{\sigma} \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{-2 \dot{\sigma}}{\cos \vartheta} = 0 \quad \dot{\sigma} = \frac{\dot{\psi} \cdot \cos \vartheta}{-2}$$

Freq. precessão

Freq. rotacão do eixo

Assim, como visto em b), temos  $\vec{\omega}$ :

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \vec{\psi} + \vec{\sigma} = \dot{\psi} \sin \vartheta \vec{e}_{y_2} + (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\sigma}) \vec{e}_{z_2} = \\ &= \dot{\psi} \sin \vartheta \vec{e}_{y_2} + (\dot{\psi} \cos \vartheta - \frac{\dot{\psi} \cos \vartheta}{2}) \vec{e}_{z_2} = \\ &= \dot{\psi} \left( \sin \vartheta \vec{e}_{y_2} + \frac{\cos \vartheta}{2} \vec{e}_{z_2} \right) \text{ (rad/s)} \end{aligned}$$

Substituindo  $\dot{\sigma}$  pela expressão

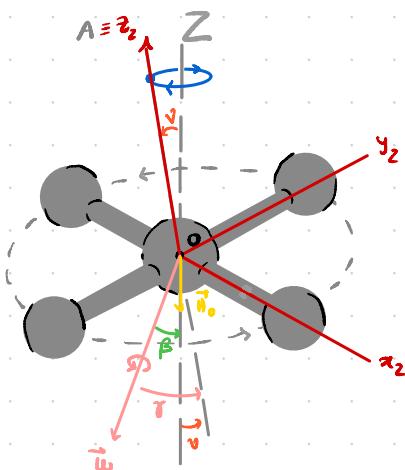
O momento angular, como visto, apenas tem componentes não nulas em  $\vec{e}_{y_2}$  e  $\vec{e}_{z_2}$ , pra isso, este pode ser descrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \vec{H}_0 &= \boxed{H_y \vec{e}_{y_2} + H_z \vec{e}_{z_2}} = \frac{\omega_{yz}}{2} \vec{e}_{y_2} + \omega_{zz} \vec{e}_{z_2} = \\ &= \frac{\dot{\psi} \sin \vartheta}{2} \vec{e}_{y_2} + \frac{\dot{\psi} \cos \vartheta}{2} \vec{e}_{z_2} = \\ &= \frac{\dot{\psi}}{2} \left( \sin \vartheta \vec{e}_{y_2} + \cos \vartheta \vec{e}_{z_2} \right) \text{ (kg.m}^2/\text{s}) \end{aligned}$$

Como  $\vec{e}_2 = (\sin \vartheta) \vec{e}_{y_2} + (\cos \vartheta) \vec{e}_{z_2}$ , então podemos modificar a expressão do momento angular da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \vec{H}_0 &= \frac{\dot{\psi}}{2} \left( \sin \vartheta \vec{e}_{y_2} + \cos \vartheta \vec{e}_{z_2} \right) = \frac{\dot{\psi}}{2} \vec{e}_2 = -\frac{0.777890545}{2} \vec{e}_2 = -0.388945272 \vec{e}_2 \text{ (kg.m}^2/\text{s)} \\ \Rightarrow \vec{H}_0 &= -0.38895 \vec{e}_2 \text{ kg.m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

Assim, obtemos a seguinte representação do momento angular na imagem (a amarelo):



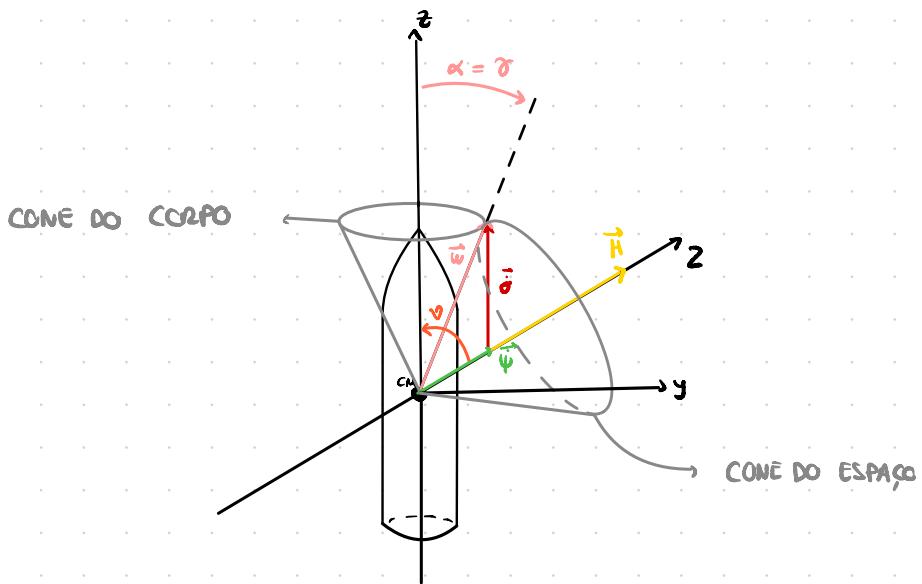
Para a variação do momento angular ao longo do tempo:

$$\frac{d \vec{H}_0}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -0.38895 \vec{e}_z \right) = -\text{cte} \times \frac{d \vec{e}_z}{dt} = 0$$

Assim concluimos que  $\vec{H}_0$  não varia ao longo do tempo do ponto de vista do centro de massa.

(4) Para  $X=0.710$  temos:  $\alpha = (3+0.710)^\circ = 3.71^\circ$

a) O foguete é um corpo alongado, desse modo  $\psi$  e  $\dot{\sigma}$  têm o mesmo sinal (precessão direta). Como o foguete é assimétrico, então como visto anteriormente  $\vec{\omega} = \dot{\sigma} + \vec{\psi}$ ,  $\dot{\psi} = 0$ . Naé fazendo a imagem à exaés de nosso ângulo  $\alpha$ , para uma melhores observações.



b) Sendo  $X = 0.710$  obtemos:

$$\dot{\sigma} = (1+0.710) = 1.710 \text{ rad/s} = 10.74424688 \text{ rad/s}$$

$$\text{Raiz dos momentos} = 8 + 4 \times 0.710 = 10.84 > 1$$

principais de inércia

Como o foguete é um corpo alongado, então  $I_1 > I_{11}$ , logo a raiz dos momentos de inércia é  $\frac{I_1}{I_{11}} = 10.84$  (do enunciado), isto pois o valor da  $\dot{\sigma}$  é superior a 1 e  $\frac{I_{11}}{I_1} < 1$ .

i) Sendo o foguete um corpo livre assimétrico temos  $\dot{\psi} = 0$ , pois  $\psi = \text{const.}$  Logo podemos obter os valores do ângulo de nutação, através de  $\sigma$  ao recorrermos à seguinte expressão de formulário:

$$(36) \quad \tan \sigma = \frac{I_1}{I_{11}} \tan \psi$$

$$\tan \vartheta = \frac{I_2}{I_{II}} \tan \sigma \Rightarrow \vartheta = \arctan \left( 10.84 \times \tan(3.91^\circ) \right) = 0.612663749 \text{ rad} = 35.1030431^\circ$$

Deste modo, através destes valores e da equação (34), temos o valor da precessão:

$$\dot{\psi} = \frac{I_{II}}{(I_1 - I_{II}) \cos \vartheta} \cdot \dot{\sigma} = \frac{I_{II} \times 10.74424688 \text{ rad/s}}{(10.84 - 1) I_{II} \cos(0.612663749 \text{ rad})} = 1.334640592 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \dot{\psi} = 1.3346 \text{ rad/s} = 76.469^\circ$$

ii) Como calculado na alínea anteriores:  $\vartheta = 0.61266 \text{ rad} = 35.103^\circ$

iii) Para esta alínea temos que o momento angular no centro de massa é dado por:

$$\vec{H}_c = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}$$

Como visto, a velocidade angular  $\vec{\omega}$  é dada por:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{e}_2 + \dot{\sigma} \vec{e}_2$$

Como  $\vec{e}_2 = (\sin \vartheta) \vec{e}_y + (\cos \vartheta) \vec{e}_z$  obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\psi} (\sin \vartheta \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z) + \dot{\sigma} \vec{e}_2 = \\ &= 1.334640592 (\sin(0.612663749 \text{ rad}) \vec{e}_y + \cos(0.612663749 \text{ rad}) \vec{e}_z) + 10.74424688 \vec{e}_2 = \\ &= 0.767483419 \vec{e}_y + 11.83614189 \vec{e}_z \text{ (rad/s)} \end{aligned}$$

Logo, podemos calcular  $\vec{H}_c$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \vec{H}_c &= I_1 \cdot w_x \vec{e}_x + I_1 \cdot w_y \vec{e}_y + I_{II} \cdot w_z \vec{e}_z = \leftarrow \text{Como visto em cima } w_x = 0 \\ &= 10.84 I_{II} \times \dot{\psi} \sin \vartheta \vec{e}_y + I_{II} \times (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\sigma}) \vec{e}_z = \\ &= 10.84 I_{II} \times \dot{\psi} \sin \vartheta \vec{e}_y + I_{II} \times \dot{\psi} (\cos \vartheta + 9.84 \cos \vartheta) \vec{e}_z = \\ &= 10.84 \times I_{II} \times \dot{\psi} (\sin \vartheta \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z) = \\ &= 10.84 \times 1.334640592 \text{ rad/s} \times I_{II} \vec{e}_2 = \\ &= 14.46750402 \cdot I_{II} \vec{e}_2 \text{ (kg m}^2\text{/s)} \end{aligned}$$

C.A.

$$\dot{\psi} = \frac{I_{II} \cdot \dot{\sigma}}{(I_1 - I_{II}) \cos \vartheta}$$

$$\Rightarrow \dot{\psi} = \frac{\dot{\sigma}}{9.84 \cos \vartheta}$$

$$\Rightarrow \dot{\psi} \cdot 9.84 \cos \vartheta = \dot{\sigma}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_c = 14.46750402 I_{II} \vec{e}_2 \text{ (kg m}^2\text{/s)}$$

iv) A variação do vetor momento angular  $\vec{H}$  em função do tempo é dada por:

$$\frac{d \vec{H}_c}{dt} = \frac{d (14.46750402 \times I_{II} \vec{e}_2)}{dt} = 14.46750402 \times I_{II} \times \frac{d \vec{e}_2}{dt} = 0$$

v) Como calculado anteriormente, temos que  $\Psi = 1.334640592 \text{ rad/s}$  e  $\dot{\delta} = 10.74424688 \text{ rad/s}$ , assim, como têm ambos os mesmos sinais podemos concluir que a precessão é direta.

5 A estabilidade de um corpo é difícil de ser estudada a partir das 2 equações de Euler, pois estes são difíceis de resolver para este caso.

Reescrevendo as equações da energia cinética de um corpo rígido:

$$E_c^{\text{rot}} = T = \frac{1}{2} (A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2)$$

No forma das equações de um elipsóide, temos:

$$\frac{\omega_x^2}{2(I_A)} + \frac{\omega_y^2}{2(I_A)} + \frac{\omega_z^2}{2(I_A)} = 1$$

O elipsóide obtido é o elipsóide de Peinsel e significa que a extremidade do vetor velocidade cíngulos está sempre sobre ele, de modo a verificar a equação.

Considerando o corpo livre de momentos ( $\sum M_c = 0$ ), e realizando o produto interno de  $\vec{H}_c$  com a equação de Euler, resulta que  $H = \text{cte}$ . No referencial principal de inércia:

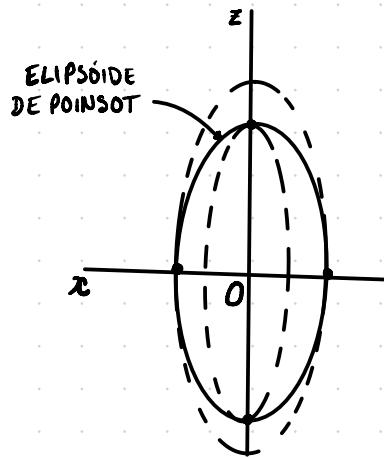
$$H^2 = A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega_x^2}{(H/A)^2} + \frac{\omega_y^2}{(H/A)^2} + \frac{\omega_z^2}{(H/C)^2} = 1$$

Obtem-se o elipsóide do momento cíngulos. A velocidade cíngulos também tem de verificar esta equação do elipsóide.

Assim, de forma a verificar ambas as equações do elipsóide de Peinsel e do elipsóide do momento cíngulos, a ponta do vetor velocidade cíngulos tem de estar sobre a intersecção dos dois elipsóides. Deste modo, (intensificando os dois elipsóides) obtemos as trajetórias possíveis para a velocidade cíngular e podemos estudar a estabilidade da rotação de um corpo.

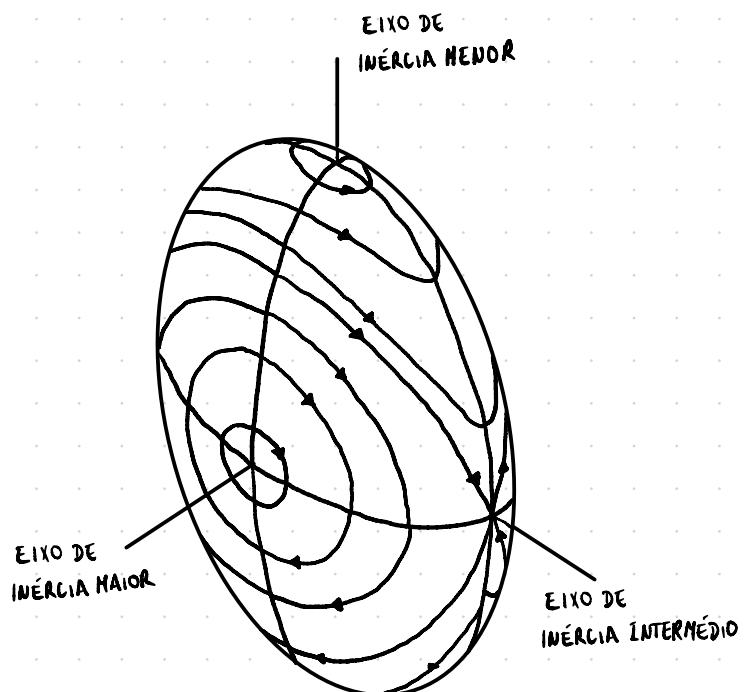
Analisando os semi-eixos dos elipsóides de Peinsel e do momento cíngulos concluímos que o de Peinsel é mais arredondado e o de momento cíngulos é mais afiado. Nos casos limite, o elipsóide do momento cíngulos estaria completamente no interior ou no exterior do elipsóide de Peinsel. Consequentemente, iremos ter dois casos de intersecção, um no maior semi-eixo dos elipsóides e outro no menor semi-eixo, correspondendo aos semi-eixos de um menor e maior momento de principal de inércia, respectivamente.



a) Um corpo livre que esteja a redor em torno de um eixo principal de inércia, irá continuar a redor em torno desse eixo, pois a inércia da rotação está equilibrada pela diminuição do eixo principal de inércia.

No entanto, para analisarmos o caso em que o eixo de rotação de um satélite está em torno do seu eixo principal de inércia, não coincidindo com o mesmo, é preciso analisar as linhas que descrevem as trajetórias possíveis para  $\vec{\omega}$  nas imediações dos eixos.

Para os casos dos eixos principais de menor e maior inércia, respectivamente o menor e o maior semi-eixo da elipse que caracteriza o elipsóide, é possível concluir, por observação da imagem, que a trajetória circunda o ponto de equilíbrio, não se afastando desta posição, pelo que a rotação é estável. Para o eixo de inércia intermédio, podemos ver que um pequeno desvio do eixo de rotação coloca  $\vec{\omega}$  numa trajetória que o afastará do eixo, levando o corpo a "fazer pinelos", pelo que a rotação é instável.

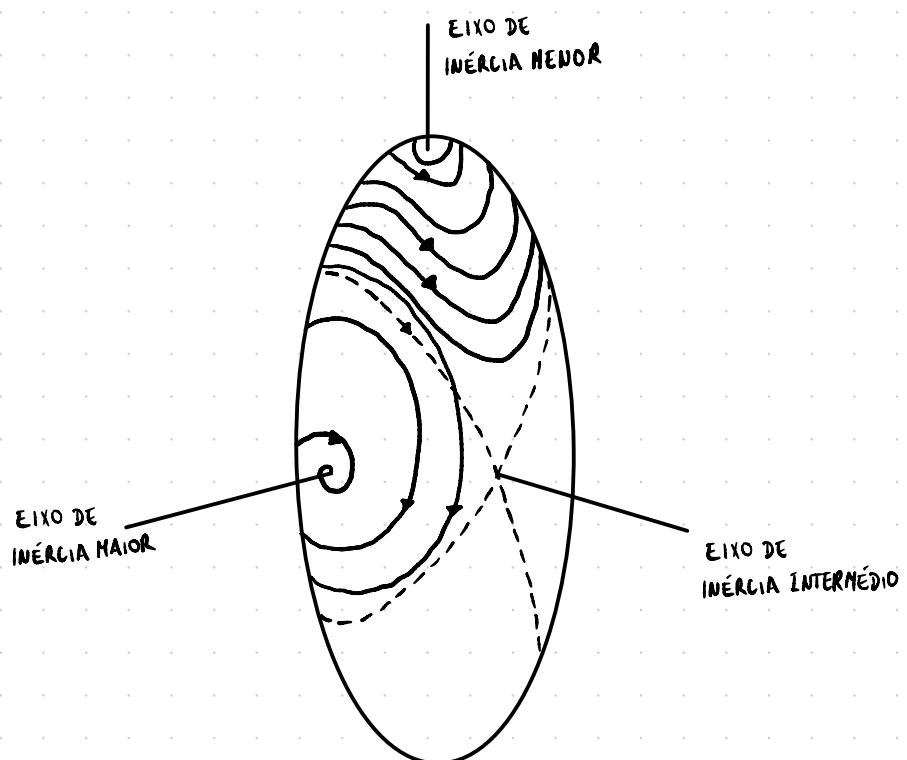


b) Neste tipo de exercícios é comum aproximar-se o satélite a um corpo rígido, contudo, os satélites são construídos por elementos pouco rígidos (ex.: antenas e painéis solares) que vibram com a rotação do corpo, provocando dissipação de energia cinética, uma vez que as variações não são completamente elásticas.

Como resultado, iremos ter uma diminuição dos semi-eixos do elipsóide de Poincaré ( $\sqrt{\frac{2T}{I_i}}$ ) ao longo do tempo, pois estes dependem diretamente da energia. Esta diminuição acaba sempre no caso limite em que o elipsóide de Poincaré fica completamente no interior do elipsóide de momento angular, sendo que o ponto de contacto corresponde ao eixo de maior inércia.

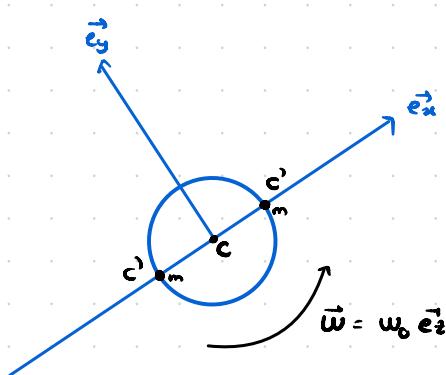
Deste modo, iremos ter uma variação das trajetórias possíveis de  $\vec{\omega}$ , pelas intersecções dos elipsóides iniciais. A velocidade angular acaba por passar por todos estes estados intermediários, sendo a sua trajetória resultante a representada na figura.

Por isto, e como é observável na imagem, quando há dissipação da  $E_c$ , o único eixo estável passa a ser o eixo de maior inércia, passando o eixo de menor de inércia a ser instável. Deste modo, os satélites devem ser estabilizados de forma a que o seu eixo de rotação seja coincidente com o eixo de máxima inércia, pelo caso contrário não ocorrerá precessão e rotação; e o satélite acabará a rolar em torno de um eixo não desejado.



(6)

- a) Assumindo os beams como massas pontuais não havendo grifos tipo de massa na periferia da singularidade, o que implica  $I_{C_1}^{\text{beam}} \approx 0$  onde  $C_1$  é o ponto de massa pontual.



Pelo Teorema dos círcos paralelos, apresentado-sejuntamente, podemos obter o tensor de inércia do beam em  $C$ :

$$I_{zz, C}^{\text{beam}} = \cancel{I_{zz, C'}^{\text{beam}}}^0 + m(x'^2 + y'^2) = m(x^2 + y^2)$$

Sendo o momento angular  $\vec{H}$  dado por  $\vec{H} = \vec{I} \circ \vec{\omega}$  e sendo o momento angular do no centro de massa dado pela soma dos momentos angulares dos beams e do corpo centralizado podemos obter  $\vec{H}_c$ :

$$\begin{aligned} \vec{H}_c &= \vec{H}_c (\text{corpo centralizado}) + 2 \vec{H}_{C'}^{\text{beam}} = I_{zz} \circ \vec{\omega} + 2 \vec{I}_c^{\text{beam}} \circ \vec{\omega}_{\text{beam}} = \\ &= (I_{zz} + 2 I_{zz}^{\text{beam}}) \vec{\omega}_0 \vec{e}_z = (A + 2m(x^2 + y^2)) \vec{\omega}_0 \vec{e}_z \\ \Rightarrow \vec{H}_c &= (A + 2m(x^2 + y^2)) \vec{\omega}_0 \vec{e}_z \end{aligned}$$

- b) Quando os massas se encontram à distância  $x$  arbitrária, sendo  $b^2 = x^2 + y^2$ , temos:

$$b^2 = x'^2 + y'^2 = x^2 \quad \xrightarrow{\text{referencial fixo em relação ao objeto}}$$

Assim, temos que o momento angular é dado por:

$$\vec{H}_c' = (A + 2m x^2) \vec{\omega} \vec{e}_z$$

Pela conservação do momento angular:

$$\vec{H}_c' = \vec{H}_c \Rightarrow \vec{\omega}' = \frac{A + 2m(x^2 + y^2) \cdot \vec{\omega}_0}{A + 2m x^2}$$