



# INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

LICENCIATURA EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

## LABORATÓRIO DE MECÂNICA APLICADA II

---

### Colisões

---

*Alunos:*

Leonor Alves - 102845  
Lourenço Faria - 103354  
Paulo Campos - 103042  
Pedro Almeida - 103027

*Professor responsável:*

Prof. Pedro Serrão

**Resumo:**

Este relatório foi desenvolvido no âmbito da cadeira Mecânica Aplicada II. O grupo de alunos aqui nomeado efetuou o trabalho laboratorial e registou os valores necessários à escrita deste relatório no dia 31/10/2022, às 11:00h, no Laboratório de Mecânica Aplicada.

Ano Letivo 2022/2023



---

# Índice

Índice	i
Índice de figuras	i
Índice de tabelas	ii
<b>1 Objetivos</b>	<b>1</b>
<b>2 Introdução teórica</b>	<b>1</b>
2.1 Movimento do Centro de massa . . . . .	1
2.2 Conservação e transferência da Quantidade de Movimento Total . . . . .	2
2.3 Coeficiente de restituição . . . . .	2
2.4 Energia cinética . . . . .	2
<b>3 Atividade prática</b>	<b>3</b>
3.1 Equipamento . . . . .	3
3.2 Procedimento experimental . . . . .	3
3.2.1 Colisão elástica . . . . .	3
3.2.2 Colisão inelástica . . . . .	4
<b>4 Resultados</b>	<b>4</b>
4.1 Colisão elástica . . . . .	4
4.2 Colisão inelástica . . . . .	6
<b>5 Discussão e análise de resultados</b>	<b>8</b>
<b>6 Bibliografia</b>	<b>9</b>
<b>7 Anexos</b>	<b>10</b>
7.1 Anexo 1 . . . . .	10
7.2 Anexo 2 . . . . .	11

## Índice de figuras

1	Variação do ângulo $\theta$ ao longo do tempo . . . . .	7
---	---	---

---

## Índice de tabelas

1	Determinação da velocidade dos corpos antes e depois da colisão elástica . . . . .	4
2	Determinação da posição do centro de massa na colisão elástica . . . . .	5
3	Determinação da velocidade do centro de massa antes e depois da colisão elástica .	5
4	Cálculo das componentes das velocidades na colisão elástica . . . . .	5
5	Cálculo da quantidade de movimento na colisão elástica . . . . .	5
6	Cálculo da energia cinética na colisão elástica . . . . .	5
7	Determinação da velocidade dos corpos antes e depois da colisão inelástica . . . . .	6
8	Determinação da posição do centro de massa na colisão inelástica . . . . .	6
9	Determinação da velocidade do centro de massa antes e depois da colisão inelástica	6
10	Cálculo das componentes das velocidades na colisão inelástica . . . . .	6
11	Cálculo da quantidade de movimento na colisão inelástica . . . . .	7
12	Cálculo do momento de inércia dos corpos na colisão inelástica . . . . .	7
13	Cálculo da energia cinética na colisão inelástica . . . . .	7

---

# 1 Objetivos

O estudo da dinâmica de dois corpos após uma colisão requiere o conhecimento do movimento do corpo pré-impacto, e uma compreensão da natureza dos diferentes tipos de colisões. Em geral, uma colisão é o contacto instantâneo entre dois corpos, que por exercerem forças simétricas um no outro, levam a uma alteração da sua direção de movimento e da sua cinética.

Assim, a partir da atividade laboratorial em causa podem ser estudadas as consequências dos diferentes tipos de colisões no movimento dos corpos. Para tal, recorreu-se a uma mesa de ar e a dois cilindros, cada um com um ventilador incorporado que produz uma almofada de ar. Deste modo, é possível minimizar bastante o efeito do atrito.

Desta forma, na atividade experimental realizada, fez-se colidir dois corpos cilíndricos, elástica e inelasticamente, de forma a podermos verificar as seguintes ocorrências:

- Uma vez que não existem forças exteriores a atuar no sistema, será de esperar que se verifique o princípio da conservação da quantidade de movimento do sistema, ou seja, a velocidade do centro de gravidade do sistema deverá manter-se constante;
- Durante uma colisão elástica, ao contrário da inelástica, existe conservação da energia cinética total do sistema;
- Após o contacto de duas partículas, sucede-se uma alteração dos seus movimentos e uma transferência da quantidade de movimento;
- Quando o sistema de partículas é constituído por partículas de diferentes massas que se encontram a diferentes velocidades relativamente a um mesmo referencial inercial, a quantidade de movimento do sistema é igual à soma da quantidade de movimento de cada partícula, como se considerássemos que a massa total está toda no centro de gravidade do sistema. Deste modo, podemos reduzir o movimento linear do sistema apenas ao movimento linear do seu centro de massa.

## 2 Introdução teórica

### 2.1 Movimento do Centro de massa

A quantidade de movimento de um sistema de partículas é dada por

$$\vec{P} = M\vec{v}_G \quad (1)$$

onde  $M$  é a massa total do sistema e  $v_G$  a velocidade do centro de massa do sistema, definida pela igualdade:

$$\vec{v}_G = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M} \quad (2)$$

Destas duas igualdades resulta:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i, \quad (3)$$

para

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \quad (4)$$

---

Se as forças exteriores que atuam no sistema forem nulas podemos concluir que  $\vec{P}$  é constante através do princípio da conservação da quantidade de movimento. Assim, o centro de massa de um sistema isolado, de massa não nula e constante, move-se a uma velocidade constante.

## 2.2 Conservação e transferência da Quantidade de Movimento Total

No caso particular da atividade experimental realizada, a utilização da mesa de ar em conjunto com a presença dos ventiladores nos corpos cilíndricos permitiu desprezar a atuação de todas as forças exteriores ao sistema. Deste modo, só temos em conta as forças interiores ao sistema, que obedecem ao princípio da conservação da quantidade de movimento total, que pode ser descrito pela seguinte equação:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \quad (5)$$

Nesta, o (') descreve as grandezas após a colisão dos corpos.

Ao mesmo tempo, a colisão dos corpos leva a que haja uma transferência da quantidade de movimento. Assim, é ainda possível retirar da expressão acima que a razão entre as massas das partículas é inversamente proporcional à variação das suas velocidades através das seguintes expressões:

$$m_2|\Delta\vec{v}_2| = m_1|\Delta\vec{v}_1| \quad (6)$$

$$\frac{|\Delta\vec{v}_2|}{|\Delta\vec{v}_1|} = \frac{m_1}{m_2} \quad (7)$$

## 2.3 Coeficiente de restituição

O coeficiente de restituição corresponde ao quociente entre a magnitude dos impulsos existentes durante o período de restituição e os existentes no período de deformação, ou seja,

$$e = \frac{\int R dt}{\int P dt} \quad (8)$$

A partir da elaboração da fórmula apresentada anteriormente, é possível relacionar as componentes normais das velocidades relativas antes e depois do choque através do coeficiente de restituição, obtendo-se a seguinte expressão:

$$e = \frac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (v_B)_n} \quad (9)$$

Este valor encontra-se compreendido entre 0 e 1. Assim, estamos perante uma colisão inelástica no caso deste coeficiente ser 0 e perfeitamente elástica quando o seu valor é 1.

## 2.4 Energia cinética

Uma vez que a energia cinética de uma partícula de massa  $m_i$  é definida por

$$T_i = \frac{1}{2}m_i|\vec{v}_i|^2 \quad (10)$$

---

Então, a energia total de um sistema de partículas é dada por

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2 \quad (11)$$

No caso de corpos rígidos, é necessário ter ainda em conta o momento de inércia baricêntrico e a velocidade angular de rotação do corpo, sendo por isso a energia cinética igual a

$$T = \frac{1}{2} M |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (12)$$

Durante a colisão elástica existe conservação da energia mecânica do sistema. Uma vez que o movimento se dá num plano horizontal e a única força potencial a atuar é a força gravítica, a energia potencial mantém-se constante. Ao mesmo tempo, dá-se a conservação da energia cinética do sistema pelo que, no caso de não terem movimento de rotação, pode ser traduzida por:

$$T = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1'|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2'|^2 = T' \quad (13)$$

Por outro lado, no caso da experiência da colisão inelástica, um dos corpos encontra-se em repouso, ou seja, tem uma energia cinética nula, e o outro tem um movimento de translação.

Após a colisão do corpo em movimento com o corpo em repouso, os corpos permanecem juntos e, por isso, terão a mesma velocidade angular. Assim, a energia cinética inicial e final são dadas pelas seguintes fórmulas respetivamente:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \quad (14)$$

$$T' = \frac{1}{2} m_1 (v_1')^2 + \frac{1}{2} \bar{I}_1 (\omega')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2 + \frac{1}{2} \bar{I}_2 (\omega')^2 \quad (15)$$

Podemos ainda calcular a energia cinética final considerando a massa total do sistema e o momento de inércia centroidal do sistema, obtendo equação 12.

Uma vez que a colisão é inelástica, não existe conservação da energia cinética e, por isso,  $T'$  inferior a  $T$ . Deste modo podemos calcular a energia dissipada através da seguinte expressão:

$$E_{dissipada} = T - T' \quad (16)$$

## 3 Atividade prática

### 3.1 Equipamento

Para a realização desta atividade experimental foi necessário utilizar uma mesa de ar com tampo de vidro limitada por elásticos de borracha, 2 corpos cilíndricos, massas adicionais, papel de registo, anel inelástico no caso da colisão inelástica e anel elástico no caso da colisão elástica.

### 3.2 Procedimento experimental

#### 3.2.1 Colisão elástica

1. Instalámos o anel elástico em ambos os corpos cilíndricos e a massa adicional em apenas um dos cilindros. Seguidamente, confirmámos que a frequência de registo selecionada era de 50 Hz (intervalo de tempo de registo 0.02 s).

2. Ligámos a alimentação elétrica aos corpos cilíndricos e os seus respetivos ventiladores. Durante a nossa atividade laboratorial não realizamos o registo dos movimentos dos corpos, mas para tal seria necessário fechar o interruptor.
3. Colocámos os corpos cilíndricos em cantos opostos do topo inferior da mesa.
4. Impulsionámos os corpos de forma a colidirem no centro da mesa e dirigirem-se, nas direções diagonais, para os cantos opostos no topo superior, chegando ainda a colidir com os elásticos limitadores.
5. Retirámos os corpos da mesa e desligámos os seus ventiladores.

### 3.2.2 Colisão inelástica

1. Em cada corpo cilíndrico, instalámos a massa adicional e o anel inelástico e confirmámos que a frequência de registo selecionada era de 50 Hz (intervalo de tempo de registo 0.02 s).
2. Ligámos a alimentação elétrica aos corpos cilíndricos e o ventilador de ambos os cilindros. Durante a nossa atividade laboratorial não realizamos o registo dos movimentos dos corpos, mas para tal seria necessário fechar o interruptor.
3. Colocámos os corpos cilíndricos, um num canto do topo inferior da mesa e o outro, aproximadamente, a um terço do eixo vertical que passa pelo centro da mesa, a partir do topo inferior.
4. Impulsionámos o corpo que se encontrava no canto, de forma a colidir com o outro tangencialmente e prosseguirem juntos.
5. Retirámos os corpos da mesa e desligámos os ventiladores.

## 4 Resultados

### 4.1 Colisão elástica

Os cilindros utilizados têm uma frequência de 50 Hz, pelo que marcam um ponto a cada 0.02 s. Para calcular o módulo da velocidade instantânea de cada corpo antes e depois da colisão, medimos a distância percorrida pelo corpo de 5 em 5 pontos, o que corresponde a um intervalo de tempo de 0.1 s, tal como pode ser verificado no anexo 1.

	Antes		Depois	
	A	B	A	B
$\Delta x$ [cm]	2.7	1.6	1.7	3.1
	2.8	1.7	1.6	3.1
	2.5	1.5		
$\overline{\Delta x}$ [cm]	2.67	1.6	1.65	3.1
$v$ [m/s]	0.27	0.16	0.165	0.31

Tabela 1: Determinação da velocidade dos corpos antes e depois da colisão elástica

$$m_A = 0.950 + 0.500 + 0.061 = 1.511kg$$

$$m_B = 0.950 + 0.061 = 1.011kg$$

De seguida, pretende-se calcular o módulo da velocidade do centro de massa, começando por determinar a sua posição através da seguinte equação:



$$\frac{\overline{BG}}{\overline{AG}} = \frac{m_A}{m_B} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AG} + \overline{BG}}{\overline{AG}} = 1 + \frac{m_A}{m_B} \Rightarrow \overline{AG} = \frac{\overline{AB}}{2.49456}$$

	$A_n B_n$ [cm]	$A_n G_n$ [cm]
Antes	20.1	8.06
	17.8	7.14
	15.5	6.21
	13.5	5.41
Depois	14.3	5.73
	16.5	6.61
	18.7	7.50

Tabela 2: Determinação da posição do centro de massa na colisão elástica

	$\Delta x_G$ [cm]	$v_G$ [m/s]	$\bar{v}_G$ [m/s]
Antes	2.1	0.21	0.207
	2.1	0.21	
	2.0	0.20	
Depois	1.9	0.19	0.200
	2.1	0.21	
	2.0	0.20	

Tabela 3: Determinação da velocidade do centro de massa antes e depois da colisão elástica

Calcularam-se as componentes da velocidade linear e da quantidade de movimento no referencial representado no anexo 1. Verifica-se uma diferença entre a quantidade de movimento do centro de massa antes e após a colisão de 3.7 %.

	Antes [m/s]	Depois [m/s]
A	$0.267\vec{e}_x$	$0.126\vec{e}_x - 0.106\vec{e}_y$
B	$0.087\vec{e}_x - 0.134\vec{e}_y$	$0.309\vec{e}_x - 0.016\vec{e}_y$
CM	$0.199\vec{e}_x - 0.057\vec{e}_y$	$0.191\vec{e}_x - 0.058\vec{e}_y$

Tabela 4: Cálculo das componentes das velocidades na colisão elástica

	Antes [ $kg \cdot m/s$ ]	Depois [ $kg \cdot m/s$ ]
A	$0.405\vec{e}_x$	$0.190\vec{e}_x - 0.160\vec{e}_y$
B	$0.088\vec{e}_x - 0.135\vec{e}_y$	$0.312\vec{e}_x + 0.016\vec{e}_y$
A + B	$0.491\vec{e}_x - 0.135\vec{e}_y$	$0.502\vec{e}_x - 0.144\vec{e}_y$
CM	$0.502\vec{e}_x - 0.144\vec{e}_y$	$0.482\vec{e}_x - 0.146\vec{e}_y$

Tabela 5: Cálculo da quantidade de movimento na colisão elástica

Calculou-se a energia cinética antes e depois da colisão, de modo a mostrar-se que a energia cinética do sistema é constante durante toda a colisão, obtendo-se um erro de 3.6 %. Note-se que a velocidade angular dos corpos é desprezável.

	Antes [J]	Depois [J]
A	0.0538	0.0206
B	0.0129	0.0486
A + B	0.0667	0.0692

Tabela 6: Cálculo da energia cinética na colisão elástica

Através da equação 7, podemos também confirmar a transferência de quantidade de movimento durante a colisão, verificando-se um erro de 1.6 %.

$$\frac{|\Delta \vec{v}_2|}{|\Delta \vec{v}_1|} = \frac{m_1}{m_2} \Leftrightarrow \frac{0.15}{0.102} = \frac{1.511}{1.011} \Leftrightarrow 1.4706 = 1.4946$$

## 4.2 Colisão inelástica

Para a colisão inelástica, representada no anexo 2, repetimos os procedimentos da colisão inelástica, determinando a velocidade dos corpos e do centro de massa.

	Antes		Depois	
	A	B	A	B
$\Delta x$ [cm]	5.0	0.0	3.3	1.9
	5.0	0.0	3.1	2.0
			3.2	1.9
$\Delta x$ [cm]	5.0	0.0	3.2	1.93
$v$ [m/s]	0.50	0.0	0.32	0.193

Tabela 7: Determinação da velocidade dos corpos antes e depois da colisão inelástica

$$m_A = m_B = 0.950 + 0.500 + 0.060 = 1.510 kg$$

	$A_n B_n$ [cm]	$A_n G_n$ [cm]
Antes	21.3	10.65
	16.6	8.30
	12.2	6.10
Depois	12.03	6.15
	12.0	6.00
	12.2	6.10
	12.3	6.15

Tabela 8: Determinação da posição do centro de massa na colisão inelástica

$\Delta x_G$ [cm]	$v_G$ [m/s]	$\bar{v}_G$ [m/s]
2.3	0.23	0.243
2.5	0.25	
2.5	0.25	
2.5	0.25	0.245
2.4	0.24	

Tabela 9: Determinação da velocidade do centro de massa antes e depois da colisão inelástica

Calculamos as componentes da velocidade e da quantidade de movimento no referencial representado no anexo 2. Verificamos uma diferença de 0.8 % entre a quantidade de movimento do centro de massa antes e após a colisão.

	Antes [m/s]	Depois [m/s]
A	$0.500\vec{e}_y$	$0.056\vec{e}_x + 0.315\vec{e}_y$
B	0	$-0.053\vec{e}_x + 0.186\vec{e}_y$
CM	$0.245\vec{e}_y$	$0.243\vec{e}_y$

Tabela 10: Cálculo das componentes das velocidades na colisão inelástica

	Antes [ $kg \cdot m/s$ ]	Depois [ $kg \cdot m/s$ ]
A	$0.755\vec{e}_y$	$0.085\vec{e}_x - 0.476\vec{e}_y$
B	0	$-0.080\vec{e}_x + 0.281\vec{e}_y$
A + B	$0.755\vec{e}_y$	$0.005\vec{e}_x + 1.213\vec{e}_y$
CM	$0.370\vec{e}_y$	$0.367\vec{e}_y$

Tabela 11: Cálculo da quantidade de movimento na colisão inelástica

No caso da colisão inelástica, a velocidade angular do sistema após a colisão não é desprezável, tendo de ser determinada. O gráfico seguinte representa a variação do ângulo teta (representado no anexo 2) ao longo do tempo. O declive da reta de regressão linear dá-nos a velocidade angular.

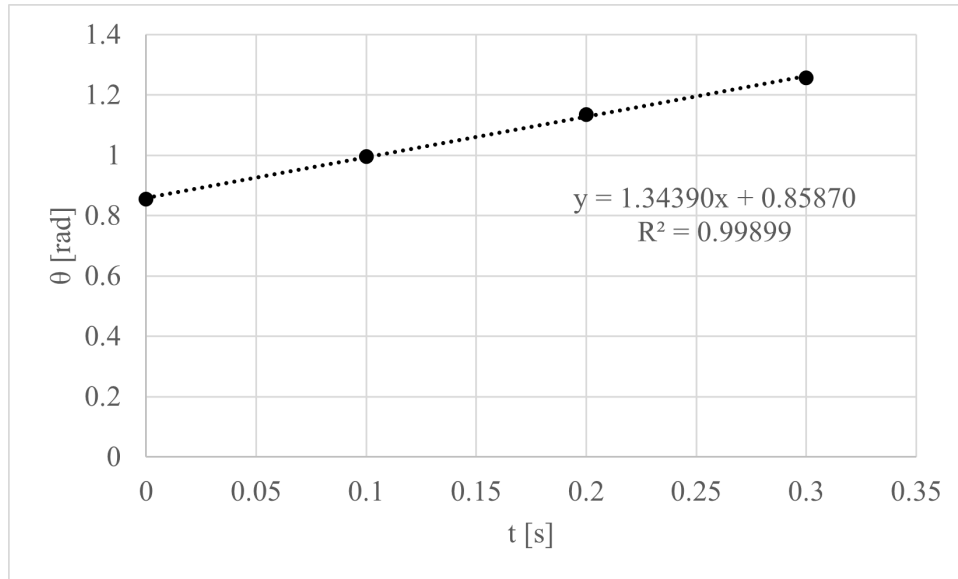


Figura 1: Variação do ângulo  $\theta$  ao longo do tempo

Para calcular a energia cinética, necessitamos também de determinar o momento de inércia de cada corpo.

	m [kg]	R [m]	r [m]	$\bar{I}$ [ $kg \cdot m^2$ ]
Cilindro	0.950	0.0495	0	$1.164 \times 10^{-3}$
Anel de Massa	0.500	0.060	0.0515	$1.563 \times 10^{-3}$
Anel inelástico	0.060	0.050	0.050	$1.500 \times 10^{-4}$
Total				$2.877 \times 10^{-3}$

Tabela 12: Cálculo do momento de inércia dos corpos na colisão inelástica

A energia cinética pode ser calculada através da equação  $T = \frac{1}{2}M|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ . Verificamos que houve uma diminuição da energia cinética do sistema após a colisão inelástica, tal como esperado.

	Antes [J]	Depois [J]
A	0.189	0.083
B	0	0.031
A + B	0.189	0.114

Tabela 13: Cálculo da energia cinética na colisão inelástica

---

Através da equação 7, verificamos que houve um erro de 6.7 % na transferência de quantidade de movimento durante a colisão.

$$\frac{|\Delta \vec{v}_2|}{|\Delta \vec{v}_1|} = \frac{m_1}{m_2} \Leftrightarrow \frac{0.193}{0.180} = \frac{1.51}{1.51} \Leftrightarrow 1.072 = 1$$

## 5 Discussão e análise de resultados

A atividade experimental efetuada consistiu na realização de dois ensaios, sendo que com o primeiro pretendíamos simular uma colisão perfeitamente elástica e com o segundo uma inelástica. A partir da análise realizada no tratamento de dados, verificamos que os valores obtidos para os erros percentuais foram relativamente baixos. Isto permite validar os ensaios efetuados e consequentemente verificar as premissas teóricas realizadas (cf. Objetivos).

Em particular, no primeiro caso confirmou-se, de um modo geral, as leis da conservação, nomeadamente a conservação da energia cinética e o princípio da conservação da quantidade de movimento de um sistema. Ao mesmo tempo, na segunda colisão, tal como esperado, ocorreu conservação da quantidade de movimento e diminuição da energia cinética. Apesar de erros reduzidos, é possível identificar alguns fatores e aproximações que poderão ter efeitos não desejados na experiência:

- Tendo em conta que a natureza e frequência dos impulsos elétricos (50 Hz), as marcas que estes produzem não são pontuais, o que dificulta a interpretação da trajetória, o que resultará em erros no cálculo, por exemplo, das velocidades e dos ângulos;
- É desprezada a existência de velocidade angular no momento de lançamento, isto é, considera-se que o movimento é uma translação pura até à colisão. Isto resulta numa aproximação dos cálculos futuros;
- Assume-se que a massa dos cilindros se encontra homogeneamente distribuída e fazem-se aproximações da geometria dos corpos em causa. Isto terá consequências no cálculo dos centros de massa e momentos de inércia do sistema;
- A atuação de forças não conservativas não consideradas nos cálculos, como a resistência do ar e a força de atrito (apesar de minimizada pelos ventiladores);
- Finalmente, as colisões ocorridas não são perfeitamente elásticas ou inelásticas, devido a limitações práticas, como as molas não serem ideais, haver dissipação no momento do choque, o choque não ser instantâneo, entre outros.

Para concluir e de forma a minimizar os erros ao longo do procedimento, gostaríamos de sugerir algumas alterações. De facto, a utilização de um sistema de delineamento da trajetória mais eficaz, o recurso a um mecanismo que liberte os discos sem velocidade angular inicial e o melhoramento dos métodos de redução das forças não conservativas (ventilador, lubrificação...).

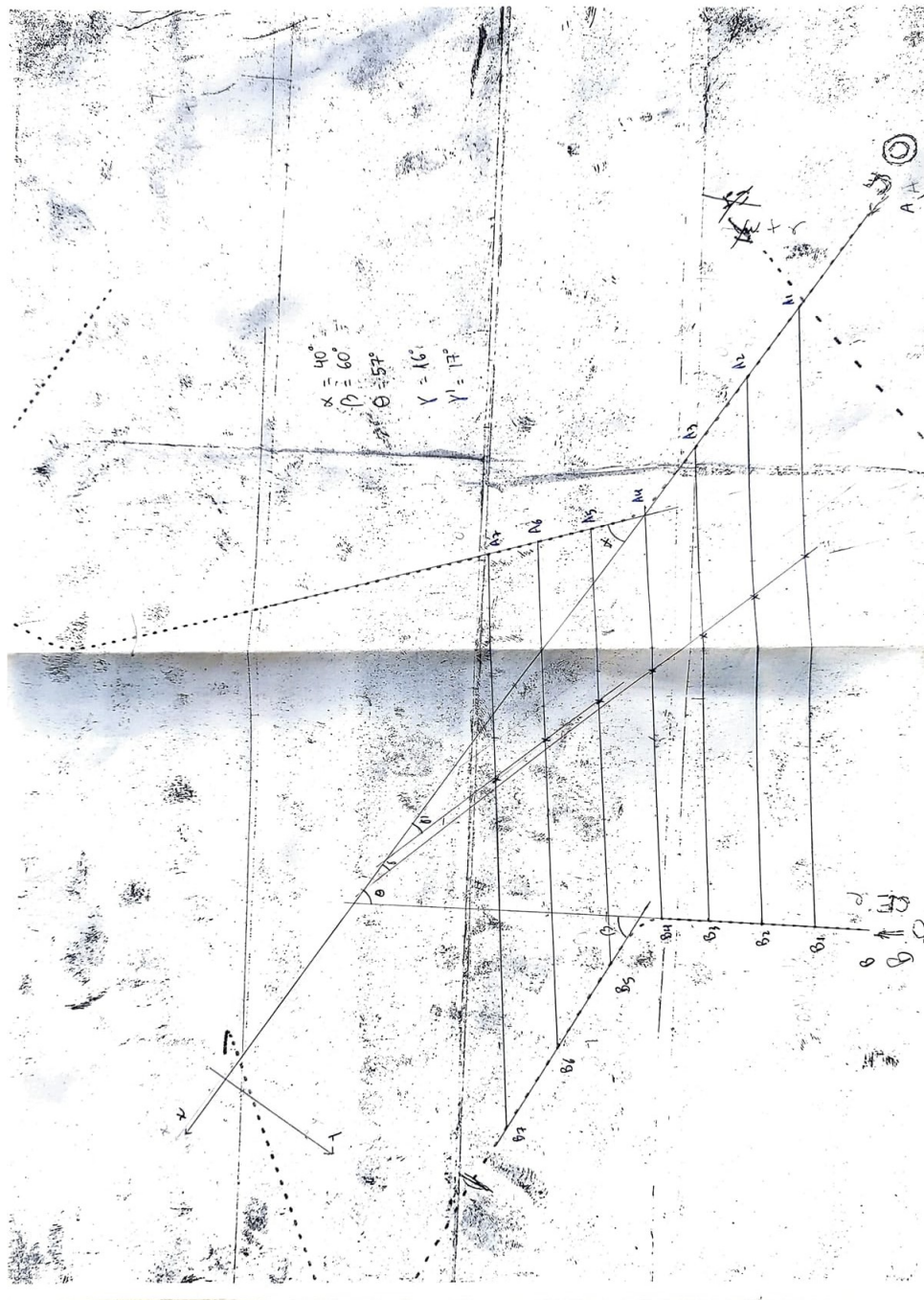
---

## 6 Bibliografia

- [1] VF.P. Beer, E.R. Johnston Jr., D. Mazurek, P.J. Cornwell, *Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics*: 2019 McGraw-Hill Education
- [2] E.J.L. Meriam, L.G. Kraige, J.N. Bolton, *Engineering Mechanics: Dynamics*: 2018 Wiley  
A.N. Other & S.O.M. Ebody 2004
- [3] ER.C. Hibbeler, *Engineering Mechanics: Statics & Dynamics*: 2016 Pearson

## 7 Anexos

### 7.1 Anexo 1



Colisão elástica

## 7.2 Anexo 2



Colisão inelástica