

Instruções para o TPC. Leia atentamente e preencha correctamente o solicitado abaixo. **Após preenchida, esta folha deve ser entregue em conjunto com as resoluções e respostas solicitadas no trabalho. A classificação só será atribuída se todos os campos estiverem correctamente preenchidos.**

Grupo. Indique o número de grupo de TPC, de acordo com o fenix:

Grupo #: 6

Compromisso de honra. Ao entregar este trabalho de casa com a sua identificação incluída, os alunos estão automaticamente a declarar que realizaram o trabalho nas condições do compromisso de honra seguinte:

Declaro por minha honra que a prova foi resolvida recorrendo apenas aos elementos de consulta autorizados, de forma autónoma e sem trocar qualquer informação, por qualquer meio, com qualquer pessoa fora do grupo e cumprindo todas as regras indicadas da disciplina. Em particular, não foram utilizados quaisquer elementos realizados por outrem com resoluções adaptadas a esta prova.

Identificação e participação. Preencham de modo legível os (i) número de aluno, (ii) nome completo, e (iii) a percentagem de participação de cada aluno no trabalho, de acordo com o indicado mais abaixo

Número	Nome	%
103354	Lanenso Gouveia Faria	4
102939	Mariama Pines	4
103285	Tiago Cruz Clamote	4

A percentagem de participação de cada aluno no trabalho deve ser um número inteiro de 0 a 4, em que 4 é 100% do trabalho devido de cada aluno, 3 é 75% do trabalho devido, etc., até 0, caso o aluno não tenha participado. Este valor deve ser consensual entre alunos. A classificação de cada aluno é a classificação do trabalho multiplicada pela percentagem de participação. Em caso de divergência, o grupo deve apelar o mais depressa possível ao professor responsável pela disciplina. **O preenchimento do campo % é obrigatório, sob pena de anulação da classificação.**

Parâmetro adimensional. No enunciado de alguns problemas será usado um parâmetro adimensional χ obtido a partir dos números de alunos dos membros do grupo. Para um grupo constituído por N alunos, seja n_i o número que se obtém a partir do número do aluno i mantendo apenas os três últimos algarismos. Seja

$$p = \prod_{i=1}^N n_i.$$

Seja q o número constituído pelos 3 últimos algarismos de p . Então, $\chi = \frac{q}{1000}$.

Exemplo. Um grupo é constituído por 3 alunos:

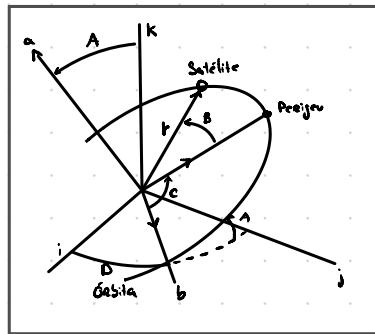
$$\left. \begin{array}{l} A, \text{ com número } 100123 \Rightarrow n_A = 123 \\ B, \text{ com número } 101412 \Rightarrow n_B = 421 \\ C, \text{ com número } 90321 \Rightarrow n_C = 321 \end{array} \right\} \Rightarrow p = n_A \times n_B \times n_C = 16622343 \Rightarrow q = 343 \Rightarrow \chi = \frac{q}{1000} = 0.343$$

$$\left. \begin{array}{l} p = 354 \times 931 \times 285 = 94935710 \Rightarrow q = 710 \Rightarrow \chi = \frac{710}{1000} = 0.710, \end{array} \right.$$

χ do grupo. Calcule o χ do grupo de acordo com a fórmula e exemplo acima e indique-o na caixa:

χ do grupo = 0,710

1



a)

- A: i , a inclinação da órbita;
 C: ω , o argumento do perigeu;
 D: Ω , a ascensão reta do nodo ascendente.

b) Os elementos clássicos de órbita (ECO), especificam o movimento dos corpos através da determinação da órbita e sua orientação no espaço. Na figura, apenas encontram-se representados os que especificam a orientação de órbita no espaço, {i, Ω , ω }. Desta modo os ECO's que não se encontram representados são os relacionados com o tipo de órbita e localização do satélite nela, {a, e, T}:

- a: o semi-eixo maior da seção cônica que constitui a órbita;
 e: a excentricidade da seção cônica que constitui a órbita;
 T: o tempo de passagem no perigeu.

c) Na figura a letra "a" representa o vetor \vec{h} , isto é, o momento angular e a respetiva direção.

Por outro lado, a letra "b" representa o nodo ascendente.

d) A anomalia verdadeira encontram-se representada, na figura, através da letra "B", enquanto que a direção da palma da mão de aimes encontram-se representada por " \vec{i} ".

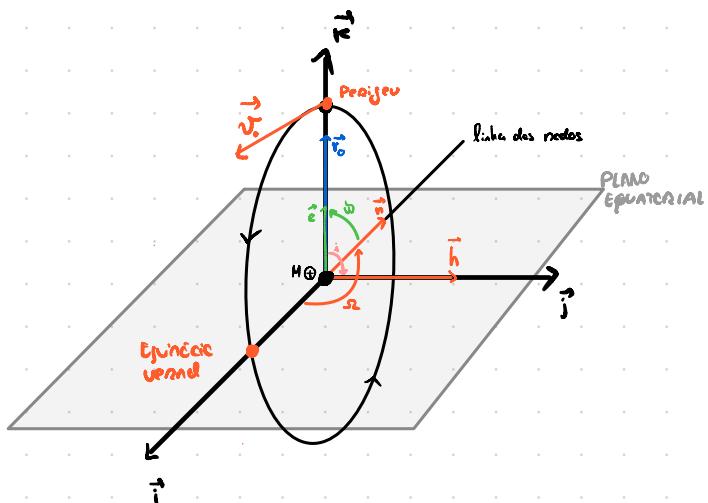
Para o valor de $X = 0.710$ temos os seguintes valores:

$$\begin{aligned} h &= (400 + 100 \times 0.710) \text{ km} = 471 \text{ km} \\ e &= (10 + 0.710)/20 = 0.5355 \end{aligned}$$

Como o satélite encontra-se a passar no perigeu, entre a altitude é a referente ao perigeu, $h_p = 471 \text{ km}$. Portanto calculamos os elementos clássicos da órbita, isto é:

$$\{i, \Omega, \omega, a, e, T_0\}$$

De acordo com a descrição do enunciado temos a seguinte representação da órbita:



O momento angular é dado por $\vec{h} = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0$, logo \vec{h} terá a direção positiva do eixo j , o que leva à conclusão de $i = \frac{\pi}{2}$.

Recomendo ao enunciado, concluímos que a linha dos nodos coincide com o eixo i , sendo o sentido de n negativo relativamente a esse mesmo eixo. Desta maneira temos que $\Omega = \pi$.

O vetor excentricidade, \vec{e} aponta sempre para o perigeu, logo, tendo a direção de n podemos observar que $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Do enunciado temos que $T_0 = 12 \text{ h } 00$ de hoje e temos também o valor da excentricidade, calculado através de X do gráfico, $e = 0.5355$.

Pela equação de órbita podemos obter o valor para o semi-eixo maior, ou:

$$(1) \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \Rightarrow a = \frac{r(1+e\cos\theta)}{(1-e^2)} = \frac{r(1+e)}{(1+e)(1-e)} = \frac{h_p + R_\oplus}{1-e} =$$

$\theta = 0^\circ$, uma vez que o satélite se encontra no perigeu.

$$= \frac{471 \text{ km} + 6378 \text{ km}}{1 - 0.5355} = 14744.88698 \text{ km} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 14745 \text{ km}$$

3

Para o valor de $X = 0.910$ temos os seguintes valores:

$$\begin{aligned} r_1 &= (6600 + 100 \times 0.910) = 6691 \text{ km} = r_A \\ r_2 &= (11500 + 500 \times 0.910) = 11855 \text{ km} = r_B \\ \mu &= (3.25 + 0.2 \times 0.910) \times 10^5 = 3.392 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \end{aligned}$$

a)

De acordo com as transferências de Hohmann, o semi-eixo maior, a_H , é dado por:

$$(2) \quad 2a_H = r_A + r_B \Rightarrow a_H = \frac{6691 \text{ km} + 11855 \text{ km}}{2} = 9263.0 \text{ km} = a_H$$

Recorrendo à fórmula da energia total, presente no formulário, temos:

$$(3) \quad E = -\frac{\mu}{2a} \Rightarrow E = -\frac{3.392 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{2 \times 9263.0 \text{ km}} = -18.309403 \text{ km}^2/\text{s}^2 \Rightarrow E = -18.309 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

Por último, recorrendo às seguintes expressões do formulário podemos obter o valor para a excentricidade:

$$\left. \begin{array}{l} (4) \quad r = \frac{P}{1+e \cos \theta} \\ (5) \quad P = a(1-e^2) = \frac{h^2}{\mu} \end{array} \right\} \quad (6) \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$$

Novamente como, para o ponto A, a manobra se realiza na perigíspide, $\theta = 0^\circ$, temos:

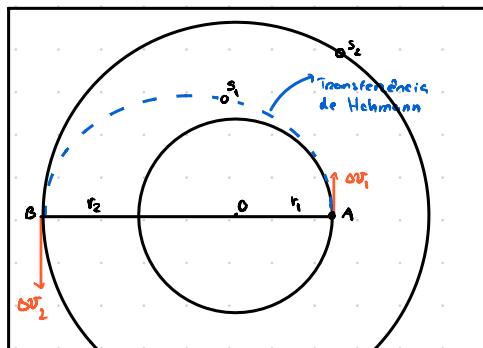
$$r_p = r_1 = \frac{a_H(1-e^2)}{1+e \cos 0^\circ} = a_H(1-e) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e = 1 - \frac{r_1}{a_H} = 1 - \frac{6691 \text{ km}}{9263.0 \text{ km}} = 0.299822951 \Rightarrow e = 0.29982$$

b)

ii) As transferências de Hohmann permitem a transferência de um veículo espacial entre duas órbitas circulares arbitrárias, como é o caso desta pergunta. Nestas são necessários 2 impulsos para que a transferência possa ser efetuada - nesta pergunta, o 1º impulso no ponto A e o 2º no ponto B.

As manobras necessárias podem só ser realizadas na apérfísis e na períferísis da órbita de transferência, sendo que as velocidades que precedem e sucedem cada impulso são colineares. Para este problema é de acordo com as regras das transferências de Hohmann temos o seguinte desenho:



De acordo com as fórmulas da energia temos:

(7)

$$T(r) = \frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{2r}$$

ENERGIA CINÉTICA

(8)

$$V(r) = -\frac{\mu}{r}$$

ENERGIA POTENCIAL

Através do balanço de energia e da fórmula (3) podemos obter a seguinte expressão para a velocidade:

BALANÇO DE ENERGIA

$$E = T(r) + V(r) = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2r} \Rightarrow v^2 = 2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right) \Rightarrow v = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)}$$

EQUAÇÃO VIS-VIVA

Para órbitas circulares temos a seguinte fórmula para a aceleração:

(10)

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Onde v é a velocidade orbital e r a distância ao corpo central.

Considerando também a Segunda Lei de Newton e a fórmula da gravitação universal:

(11)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

2ª LEI DE NEWTON

(12)

$$\vec{F}(r) = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G}{r^2} \hat{e}_r$$

FÓRMULA DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

Ao igualarmos (11) a (12) e substituindo a aceleração por (10) podemos obter uma equação que nos permite obter a velocidade para órbitas circulares onde o parâmetro gravitacional é dado por $\mu = m \cdot G$:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (13)$$

$$m_2 \cdot \vec{a} = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_2 \cdot \frac{v^2}{r}}{r^2} = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G}{r^2} \quad (=)$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{m_1 \cdot G}{r}} \quad (12) \quad v = \sqrt{\frac{M}{r}} \quad (13) \quad \text{VELOCIDADE ORBITAL}$$

Deste modo, reconhecendo à equação (13) e à equação vis-viva (9) podemos calcular as variações de velocidade para esta transferência de Hohmann:

CIRCULAR $r_1 \rightarrow$ Elipse H:

$$\Delta v_1 = v_{\text{elipse}_H} - v_{c_{r_1}} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a_H} \right)} - \sqrt{\frac{M}{r_1}} =$$

$$= \sqrt{2 \times 3.392 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \times \left(\frac{1}{6671 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 9263 \text{ km}} \right)} - \sqrt{\frac{3.392 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{6671 \text{ km}}} =$$

$$= 0.936208774 \text{ km/s}$$

Elipse H \rightarrow CIRCULAR r_2 :

$$\Delta v_2 = v_{\text{elipse}_H} - v_{c_{r_2}} = \sqrt{\frac{M}{r_2}} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{2a_H} \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{3.392 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{11855 \text{ km}}} - \sqrt{2 \times 3.392 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \times \left(\frac{1}{11855 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 9263 \text{ km}} \right)} =$$

$$= 0.809693456 \text{ km/s}$$

ii) A variação total da velocidade é entendida como uma medida para o gasto total de propelente, logo para a calcular somam-se os módulos da variação da velocidade no 1º e no 2º impulsos, sendo que neste caso não haveria diferença, uma vez que estes valores são ambos positivos.

$$v_{\text{total}} = |\Delta v_1| + |\Delta v_2| = 0.936208774 \text{ km/s} + 0.809693456 \text{ km/s} = 1.74588223 \text{ km/s}$$

$$\Rightarrow v_{\text{total}} = 1.7459 \text{ km/s}$$

c) Pelo formulário temos a seguinte fórmula para o período, na órbita elíptica:

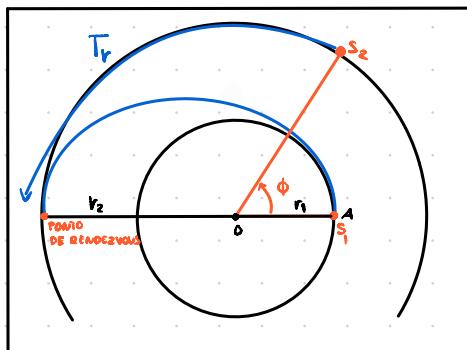
$$(14) \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot a^{3/2}$$

Numa transferência de Hohmann, a trajetória de passagem entre A e B tem o formato de metade de uma elipse. Deste modo, para calcular o tempo necessário para se realizar a manobra, podemos utilizar a fórmula (13) e aplicá-la a uma elipse, dividindo o resultado por 2:

$$T_{\text{transférência}} = \frac{T_e}{2} = \frac{1}{2} \times 2\pi \frac{a_n^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi a_n^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi \times (9263 \text{ km})^{3/2}}{\sqrt{3.392 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}} =$$

$$= 4808.94098 \text{ s} = 80.14901633 \text{ min} \Rightarrow T_{t,h} = 4808.9 \text{ s} = 80.149 \text{ min}$$

De acordo com o enunciado temos a seguinte imagem onde se representam o ângulo pedido e a posição inicial de S_1 , com a posição S_2 arbitrária:



$$Tr = \frac{T_e}{2}$$

Φ : ângulo geocêntrico entre S_1 e S_2 .

Em relação à elipse, sendo o foco o ponto O , podemos concluir que S_1 se encontra inicialmente na perigeia, visto que $OA < OB$. Assim, o ângulo inicial vai ser medido a partir da linha das órbitas.

A velocidade angular é a variação do ângulo em função do tempo, isto é, $n = \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$ (utilizando a nomenclatura de n para a velocidade angular e ϕ para o ângulo, para estarem em conformidade com a imagem anterior).

No caso da trajetória de S_2 , como este está numa órbita circular, podemos definir a sua velocidade angular através da seguinte fórmula presente no formulário, onde neste caso $a = b_2$:

$$(15) \quad n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\frac{\mu}{b_2^3}}$$

Deste modo, com estas duas fórmulas podemos obter uma expressão que relate o ângulo ϕ com o tempo da transferência de Hohmann (tempo necessário para que ocorra o Rendezvous):

$$\left. \begin{array}{l} n = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \\ n = \sqrt{\frac{\mu}{b_2^3}} \end{array} \right\} \Delta \phi = \Delta t \sqrt{\frac{\mu}{b_2^3}} \Leftrightarrow \boxed{\Delta \phi = T_{t,h} \sqrt{\frac{\mu}{b_2^3}}} \quad (16)$$

Assim temos a variação do ângulo ϕ :

$$\Delta \phi = 4808.94098 \text{ s} \times \sqrt{\frac{3.392 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{(11855 \text{ km})^3}} = 2.169826612 \text{ rad}$$

Por último, Como no rendezvous $\phi = \pi$, o ângulo planetocêntrico é dado por:

$$\text{ângulo planetocêntrico} = \pi - \Delta \phi = \pi - 2.169826612 \text{ rad} = 0.971966041 \text{ rad} = 55.67809285^\circ$$

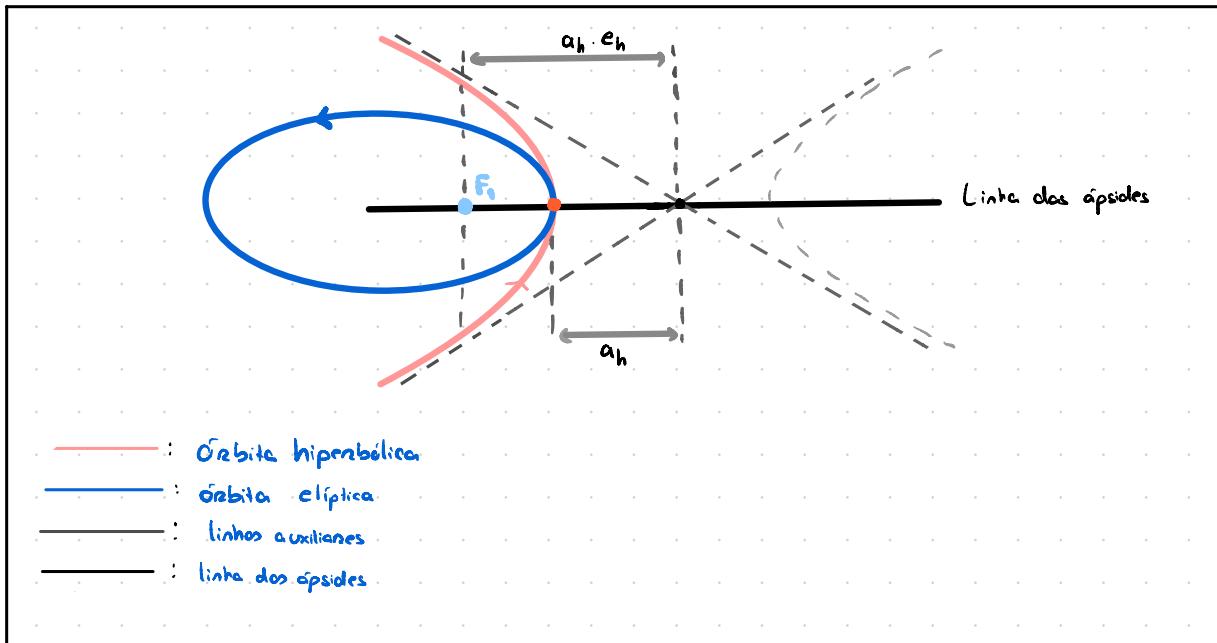
$$\Rightarrow \underline{\phi_{\text{inicial}} = 55.678^\circ}$$

4

Para o valor de $X = 0.910$ temos os seguintes valores:

$$\begin{aligned} a_1 &= (17000 + 200 \times 0.910) = 17142 \text{ km} \\ e_1 &= 1.3000 + 0.1 \times 0.910 = 1.371 \\ e_2 &= 0.35 + 0.1 \times 0.91 = 0.421 \rightarrow \text{óbita elíptica} \end{aligned}$$

De acordo com os dados do enunciado e assumindo o sentido direto obtemos a seguinte representação das órbitas:



As órbitas hiperbólicas partilham muitas características com as órbitas elípticas, sendo que nas hiperbólicas a excentricidade está restringida à condição $e > 1$. Considerando as possibilidades $a_H > 0$ ou $a_H < 0$, dependendo do referencial temos as seguintes fórmulas para p e r_p para esta órbita:

$$(17) \quad p = a(1-e^2) = \frac{h^2}{M} = (-a_1)(e^2-1) = |a_1|(e^2-1) = a_1(e^2-1) = p \quad (18)$$

↑ do formulário

(19) $r = \frac{p}{1+e_1 \cos \theta}$

(18)

$\Rightarrow r_{p_{\text{hiperb}}}$
perípside $\Rightarrow \theta = \delta$

$a > 0$

(20)

$r_{p_h} = a_1(e_1-1)$

Da qual podemos obter r_p :

$$r_p = a_1(e_1-1) = 17142 \text{ km} \times (1.371-1) = 6359.682 \text{ km}$$

Para a órbita elíptica temos as seguintes fórmulas do formulário (18) e (19):

$$\left. \begin{array}{l} p = a_2(1-e_2^2) \\ r = \frac{p}{1+e_2 \cos \theta} \end{array} \right\} R_p = \frac{a_2(1-e_2^2)}{(1+e_2)} \Rightarrow \boxed{r_p = \frac{a_2(1-e_2^2)}{1+e_2}} \quad (21)$$

$\theta = 0$ pois o ponto em estudo é a periépside

Ao igualarmos (20) a (21), visto que as duas órbitas são tangentes na periépside (e por isso $r_{p_{\text{elíptica}}} = r_{p_{\text{hiperbólica}}}$), podemos calcular o semi-eixo maior, a , da órbita elíptica:

$$a_1(e_1-1) = a_2(1-e_2) \quad (=) \quad \boxed{a_2 = \frac{-a_1(1-e_1)}{(1-e_2)}} \quad (22)$$

Logo,

$$a_2 = \frac{-a_1(1-e_1)}{(1-e_2)} = \frac{-19142(1-1.391)}{(1-0.421)} = 10983.90674 \text{ km}$$

Pela equação Vis-Viva, (9), podemos agora calcular as velocidades para ambos os órbitas:

VELOCIDADE P/ ÓRBITA ELÍPTICA $v_2 = \sqrt{2M_{\text{Vénus}} \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{2a_2} \right)} = \sqrt{2 \times 3.2486 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \times \left(\frac{1}{6359.682 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 10983.90674 \text{ km}} \right)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_2 = 8.51976192 \text{ km/s}$$

VELOCIDADE P/ ÓRBITA HIPERBÓLICA $v_1 = \sqrt{2M_{\text{Vénus}} \left(\frac{1}{r_p} + \frac{1}{2a_1} \right)}$ hiperbólica $= \sqrt{2 \times 3.2486 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \times \left(\frac{1}{6359.682 \text{ km}} + \frac{1}{2 \times 19142 \text{ km}} \right)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_1 = 11.00515584 \text{ km/s}$$

Deste modo obtemos o seguinte valor para variação de velocidade:

$$\Delta v = v_2 - v_1 = 8.51976192 \text{ km/s} - 11.00515584 \text{ km/s} = -2.485393919 \text{ km/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta v = -2.4854 \text{ km/s}} \quad <0$$

Este resultado é esperável, visto que o satélite passa de uma órbita hiperbólica, onde (de acordo com as culas teóricas) $E > 0$, para uma órbita elíptica no qual $E < 0$. Desta modo $\Delta E < 0$ o que leva à conclusão observada de que $\Delta v < 0$. Isto, por sua vez, deve-se ao facto de no ponto onde ocorre a transição temos que os parâmetros do coeficiente gravitacional, M , e r_p não se alteram e consequentemente, por (8), temos que a energia potencial permanece constante sendo por isso a variação da energia total igual à variação da energia cinética.

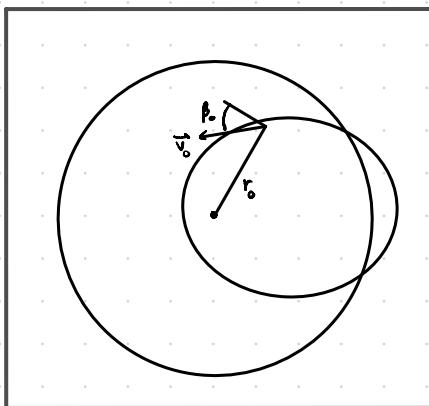
5

Para o valor de $\chi = 0.710$ temos os seguintes valores:

$$h = r_0 - R_{\oplus} = (2 + 0.1 \times 0.710) R_{\oplus} = 2.071 R_{\oplus} \text{ km}$$

$$v_0 = (0.6500 - 0.05 \chi) \sqrt{\mu_{\oplus} / R_{\oplus}} = 0.6145 \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{6378 \text{ km}}} = 4.857896715 \text{ km/s}$$

$$\beta_0 = -(35 + 4 \times 0.710)^\circ = -39.84^\circ$$



a) Começando por calcular a excentricidade, podemos recorrer à seguinte fórmula do formulário:

$$(23) \quad e^2 = \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu} - 1 \right)^2 \cos^2 \beta_0 + \sin^2 \beta_0$$

Na qual "r₀" e "v₀" são as velocidade e raio para um determinado ponto, "e" a excentricidade que pretendemos calcular e "β₀" o flight path angle.

Substituindo os valores do enunciado em (22) obtemos o seguinte valor para e:

$$e = \sqrt{\left(\frac{(h + R_{\oplus}) v_0^2}{\mu} - 1 \right)^2 \cos^2 \beta_0 + \sin^2 \beta_0} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2.071 + 1) \times 6378 \text{ km} \times (4.857896715 \text{ km/s})^2 - 1}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}} \times \cos^2(-39.84^\circ) + \sin^2(-39.84^\circ) =$$

$$= 0.626279284 \Rightarrow \underline{e = 0.62628}$$

Pelo formulário temos a seguinte expressão que permite calcular o valor do semi-eixo maior, a, da elipse:

$$(24) \quad \frac{a}{r_0} = \frac{1}{2 - \frac{v_0 v_0^2}{\mu}}$$

Substituindo os valores do enunciado na expressão (24), obtemos o valor de "a" onde, novamente, $r_0 = h + R_{\oplus}$:

$$a = \frac{h + R_{\oplus}}{2 - \frac{r_0 \cdot v^2}{\mu}} = \frac{(2.071 + 1) \times 6398 \text{ km}}{2 - \frac{(2.071 + 1) \times 6398 \text{ km} \times (4.857896715 \text{ km/s})^2}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}} = \\ = 23307.70513 \text{ km} \Rightarrow a = 23307.8 \text{ km}$$

Com este parâmetro podemos obter os valores para o periélio e para o apogeu considerando $\theta_p = 0 \text{ rad}$, $\theta_a = \pi \text{ rad}$ e recorrendo às fórmulas (17) e (19):

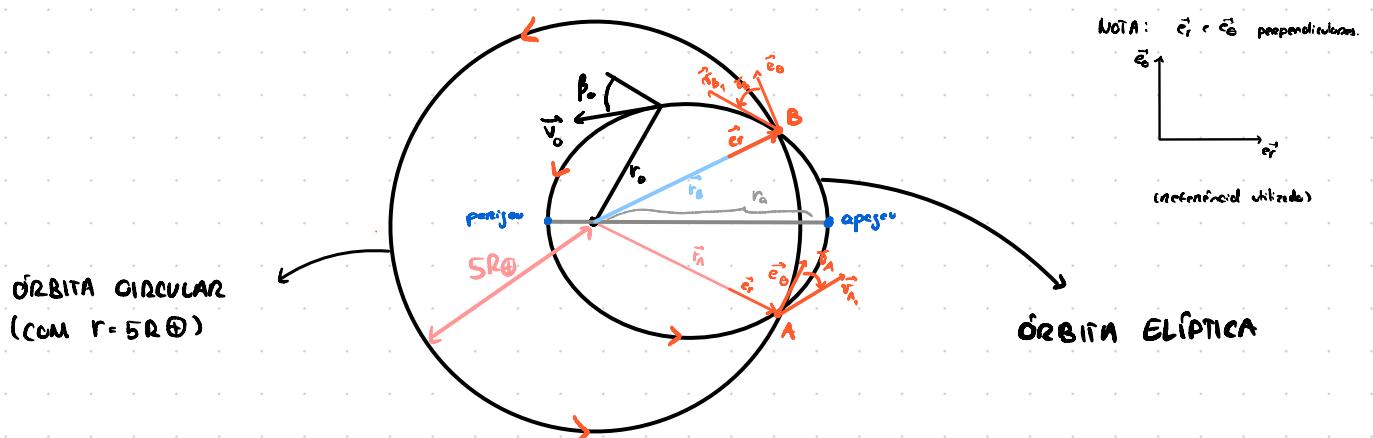
$$r_p = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} = \frac{a(1-e^2)}{1+e} = a(1-e) = 23307.70513 \text{ km} \times (1 - 0.626279284) = \\ = 8710.592264 \text{ km} \Rightarrow r_p = 8710.6 \text{ km}$$

$$r_a = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} = \frac{a(1-e^2)}{1-e} = a(1-e) = 23307.70513 \text{ km} \times (1 + 0.626279284) = \\ = 37904.83808 \text{ km} \Rightarrow r_a = 37905 \text{ km}$$

Por último, apenas nos falta calcular a energia da órbita de transferência, cujo valor podemos obter através da fórmula (3):

$$E = -\frac{\mu_{\oplus}}{2a} = -\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{2 \times 23307.70513 \text{ km}} = 8.550820364 \text{ km}^2/\text{s}^2 \Rightarrow E = -8.5508 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

b) De acordo com o enunciado e considerando o sentido direto para ambas as órbitas, obtemos o seguinte esquema das órbitas, velocidades, alturas grandes e representações das duas possibilidades para esta transição ocorrer (impulso em A ou impulso em B, partes onde as órbitas se intersectam):



Nesta imagem temos representado, em cada ponto, \vec{e}_θ , cuja direção é tangente à circunferência, e também o vetor posição \vec{r} , que por sua vez é perpendicular a \vec{e}_θ .

Como as transições no ponto A e B ocorrem para a mesma órbita circular, temos que $|\vec{r}_A| = |\vec{r}_B| = 5R_\oplus$. Assim, recorrendo à expressão (13) para velocidades de órbitas circulares, podemos concluir que ambas as velocidades em A e em B têm o mesmo módulo (velocidades finais). Analogamente, sendo as órbitas iniciais a mesma e não havendo alteração de parâmetros a, r e μ temos que as velocidades iniciais nestes pontos são iguais em módulo, pela expressão (9):

$$\begin{array}{l} \text{VELOCIDADES} \\ \text{INICIAIS} \end{array} \quad \vec{v}_{A_1} = \vec{v}_{B_1} = \stackrel{(9)}{=} \sqrt{\mu_\oplus \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{2 \times 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \times \left(\frac{1}{5 \times 6378 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 23307.30517 \text{ km}} \right)} = 2.610123019 \text{ km/s}$$

$$\begin{array}{l} \text{VELOCIDADES} \\ \text{FINAL} \end{array} \quad \vec{v}_{A_2} = \vec{v}_{B_2} = \stackrel{(13)}{=} \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{r_c}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{5 \times 6378 \text{ km}}} = 3.535423038 \text{ km/s}$$

De acordo com a imagem apresentada no início da aula, temos a seguinte representação vetorial destas velocidades em A e em B:

$$\begin{array}{l} \text{VELOCIDADES} \\ \text{EM} \\ \text{(A)} \end{array} \quad \begin{cases} \vec{v}_{A_1} = (v_{A_1} \cdot \sin \vartheta_A) \vec{e}_r + (v_{A_1} \cdot \cos \vartheta_A) \vec{e}_\theta \\ \vec{v}_{A_2} = v_{A_2} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{VELOCIDADES} \\ \text{EM} \\ \text{(B)} \end{array} \quad \begin{cases} \vec{v}_{B_1} = (-v_{B_1} \cdot \sin \vartheta_B) \vec{e}_r + (v_{B_1} \cdot \cos \vartheta_B) \vec{e}_\theta \\ \vec{v}_{B_2} = v_{B_2} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Como $|v_{A_1}| = |v_{B_1}|$ e $|v_{A_2}| = |v_{B_2}|$, a partir destas expressões podemos concluir que os componentes dos velocidades iniciais \vec{e}_θ são iguais. Por simetria também podemos observar que o módulo das componentes \vec{e}_r destas velocidades também são iguais. Deste modo, igualando os módulos temos $\vartheta_A = \vartheta_B$:

$$\begin{aligned} |v_{A_1} \cdot \sin \vartheta_A| &= |v_{B_1} \cdot \sin \vartheta_B| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow v_{A_1} \cdot \sin \vartheta_A &= v_{B_1} \cdot \sin \vartheta_B \Rightarrow \underline{\vartheta_A = \vartheta_B} \end{aligned}$$

Para calcular os estes ângulos necessitamos primeiramente de calcular o momento angular h , através da fórmula (17):

$$p = a(1-e^2) = \frac{h^2}{\mu} \Rightarrow h = \sqrt{a \mu (1-e^2)} \quad (25)$$

Como mencionado no início do projeto também temos $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$, o que neste caso se traduz em:

$$\vec{h} = (r \vec{e}_r) \times (v \sin \theta \vec{e}_r + v \cos \theta \vec{e}_\theta) = r v \cos \theta \vec{e}_\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = r v \cos \theta \quad (26)$$

Igualando estas duas expressões para o momento angular podemos finalmente obter a velas para $\theta_A = \theta_B$:

$$\left. \begin{array}{l} h = \sqrt{\alpha \mu (1-e^2)} \\ h = r v \cos \theta \end{array} \right\} r v \cos(\theta) = \sqrt{\alpha \mu (1-e^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{\sqrt{\alpha \mu (1-e^2)}}{r \cdot v} \right) \Rightarrow \overset{\text{inicial}}{\theta_{A_1} = \theta_{B_1}} = \frac{\sqrt{\alpha \mu (1-e^2)}}{r_c \cdot v_{A_1}} =$$

$$= \arccos \left(\frac{\sqrt{23307.70519 \text{ km} \times 3.986 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2 \times (1 - 0.626279284^2)}}{5 \times 6378 \text{ km} \times 2.810123019 \text{ km/s}} \right) = 0.576248234 \text{ rad} = 33.01659181^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_{A_1} = \theta_{B_1} = 33.01659181^\circ$$

Finalmente, com este valor é nos possível obter o valor concreto dos módulos da variação das velocidades em A e em B:

VELOCIDADES EM A:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{A_1} &= (v_{A_1} \cdot \sin \theta_{A_1}) \vec{e}_r + (v_{A_1} \cos \theta_{A_1}) \vec{e}_\theta = \\ &= (2.810123019 \text{ km/s} \times \sin(33.01659181^\circ)) \vec{e}_r + (2.810123019 \text{ km/s} \times \cos(33.01659181^\circ)) \vec{e}_\theta = \\ &= 1.531185102 \vec{e}_r + 2.356324164 \vec{e}_\theta \quad (\text{km/s}) \end{aligned}$$

$$\vec{v}_{A_2} = v_{A_2} \vec{e}_\theta = 3.535423038 \vec{e}_\theta \quad (\text{km/s})$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v}_A &= \vec{v}_{A_2} - \vec{v}_{A_1} = 3.535423038 \vec{e}_\theta - (1.531185102 \vec{e}_r + 2.356324164 \vec{e}_\theta) = \\ &= -1.531185102 \vec{e}_r + 1.179018874 \vec{e}_\theta \quad (\text{km/s}) \Rightarrow \Delta \vec{v}_A = -1.531185102 \vec{e}_r + 1.179018874 \vec{e}_\theta \quad (\text{km/s}) \end{aligned}$$

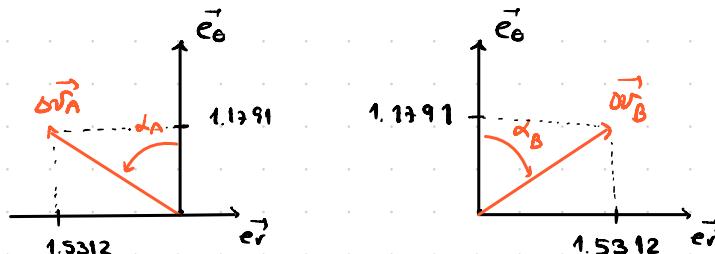
$$\Rightarrow |\Delta \vec{v}_A| = 1.9326 \text{ km/s} \quad (\text{módulo})$$

VELOCIDADES EM B:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{B_1} &= (-v_{B_1} \cdot \sin \theta_{B_1}) \vec{e}_r + (v_{B_1} \cos \theta_{B_1}) \vec{e}_\theta = \\ &= (-2.810123019 \text{ km/s} \times \sin(33.01659181^\circ)) \vec{e}_r + (2.810123019 \text{ km/s} \times \cos(33.01659181^\circ)) \vec{e}_\theta = \\ &= -1.531185102 \vec{e}_r + 2.356324164 \vec{e}_\theta \quad (\text{km/s}) \end{aligned}$$

$$\vec{v}_{B_2} = v_{B_2} \vec{e}_\theta = 3.535423038 \vec{e}_\theta \text{ (km/s)}$$

$$\begin{aligned}\Delta \vec{v}_B &= \vec{v}_{B_2} - \vec{v}_{B_1} = 3.535423038 \vec{e}_\theta - (-1.531185102 \vec{e}_r + 2.356324164 \vec{e}_\theta) = \\ &= 1.531185102 \vec{e}_r + 1.17918874 \vec{e}_\theta \text{ (km/s)} \Rightarrow \underline{\Delta \vec{v}_B = 1.5312 \vec{e}_r + 1.1791 \vec{e}_\theta \text{ (km/s)}} \\ \Rightarrow |\Delta \vec{v}_B| &= 1.9326 \text{ km/s (módulo)}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\alpha_B = \alpha_A &= \arctan\left(\frac{1.5312}{1.1791}\right) = \\ &= 52.40194358^\circ \\ \Rightarrow \alpha_B = \alpha_A &= 52.402^\circ\end{aligned}$$

Deste modo, segundo o referencial escalar, os vetores $\Delta \vec{v}_A$ e $\Delta \vec{v}_B$ fazem um ângulo de 52.402° com o eixo \vec{e}_θ , têm sentido positivo em relação a \vec{e}_θ e sentido negativo e positivo em relação a \vec{e}_r , respectivamente; como demonstrado na figura.

c) Como visto anteriormente, a velocidade inicial do satélite quando este se encontra na órbita circular de raio $r_c = 5R_\oplus$ é dada pela expressão (13) em módulo e direção relativamente a \vec{e}_θ :

$$(13) \quad \vec{v}_i = \sqrt{\frac{\mu_0}{r_c}} \vec{e}_\theta$$

Recorrendo à equação vis-viva (9) e considerando $a \rightarrow \infty$, podemos obter a seguinte expressão para a velocidade de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \quad (27)$$

Deste modo a variação da velocidade mínima necessária para o satélite escapar da atmosfera terrestre é dada por:

$$\begin{aligned}|\Delta \vec{v}_{min}| &= v_e - v_i = \sqrt{\frac{2\mu_0}{r_c}} - \sqrt{\frac{\mu_0}{r_c}} = (\sqrt{2} - 1) \times \sqrt{\frac{3.986 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2}{5 \times 6398 \text{ km}}} = \\ &= 1.4644 \text{ km/s} = |\Delta \vec{v}_{min}|\end{aligned}$$

Sendo que $|\Delta \vec{v}|$ é mínima quando v_e e v_i têm a mesma direção.

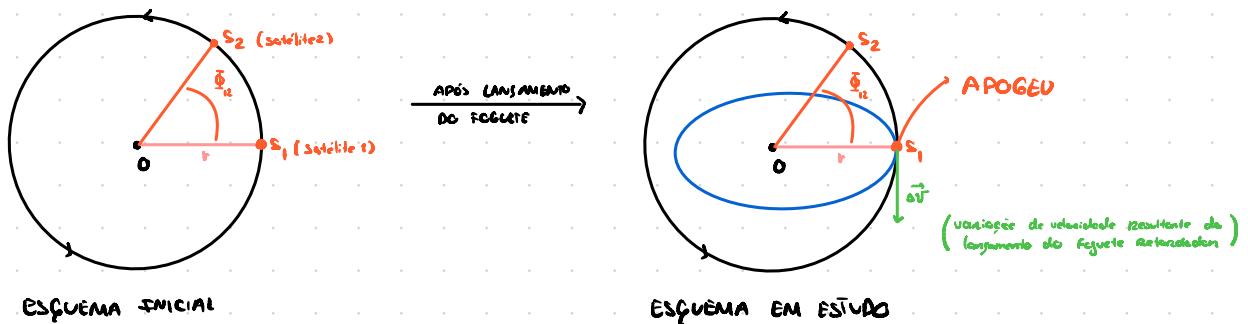
(6)

Para o valor de $\chi = 0.910$ temos os seguintes valores:

$$r = (650 + 10 \times 0.910) = 721 \text{ km}$$

$$\Phi_{12} = (10 + 10 \times 0.910)^\circ = 17.1^\circ$$

De acordo com as informações fornecidas pelo enunciado, e considerando o sentido direto, temos a seguinte imagem para o problema:



Neste problema pretendemos saber o valor de $1\Delta v$ de modo a que os dois satélites se intersetem ao fim de dia satélite S_1 ter completado uma revolução à sua órbita sub-circular. Para isto, é necessário calcular a velocidade de S_1 na nova órbita elíptica, sendo o seu período dado por:

$$(28) \quad T_e = T_c - \frac{\Phi_{12}}{360^\circ} T_c$$

Onde T_e é o período de S_1 , na órbita elíptica e T_c o período de S_2 na órbita circular.

Para órbitas circulares $r=a$, logo, substituindo T_c e T_e pela expressão (14) podemos obter uma expressão que nos permita calcular o semi-eixo maior, a , para a órbita elíptica:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu_\oplus}} \cdot a^{3/2} = \left(1 - \frac{\Phi_{12}}{360^\circ}\right) \times \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_\oplus}} \cdot r^{3/2} \Leftrightarrow a = \left[\frac{\sqrt{\mu_\oplus}}{2\pi} \left(1 - \frac{\Phi_{12}}{360^\circ}\right) \times \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_\oplus}} \cdot r^{3/2} \right]^{2/3} = 0$$

$$\Rightarrow a = \left(1 - \frac{\Phi_{12}}{360^\circ}\right)^{2/3} \cdot r \quad (29) \quad = \left(1 - \frac{17.1^\circ}{360^\circ}\right)^{2/3} \times (721 \text{ km} + 6378 \text{ km}) = \\ \Rightarrow a = 6872.380007 \text{ km}$$

Para obtermos uma expressão para a velocidade no apogeu podemos manipular a fórmula (24) da seguinte maneira:

$$\frac{a}{r_0} = \frac{1}{2 - \frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu}} \Leftrightarrow \frac{r_0}{a} = 2 - \frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0} \left(2 - \frac{r_0}{a}\right)} \quad (30)$$

Substituindo pelos valores respetivos:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_c} \left(2 - \frac{r_a}{a} \right)} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{(721 + 6378) \text{ km}}} \left(2 - \frac{(721 + 6378) \text{ km}}{6872.380007 \text{ km}} \right) = 7.368664842 \text{ km/s}$$

Desse modo, o Δv associado à mudança do satélite S, da órbita circular para a órbita sub-circular é dado por:

$$\Delta v = v_0 - v_c = v_0 - \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_c}} = 7.368664842 \text{ km/s} - \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{(721 + 6378) \text{ km}}} = \\ = -0.390919596 \text{ km/s} \Rightarrow \underline{\Delta v = -0.124582341}$$

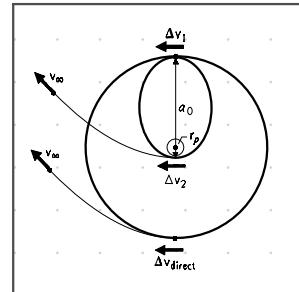
(7)

Para o valor de $X = 0.910$ temos os seguintes valores:

$$a_0 = (4 + 2 \times 0.910) 6378 \text{ km} = 34568.96 \text{ km}$$

$$v_{\infty} = (3 + 0.910) = 3.71 \text{ km/s}$$

$$r_p = 6378 \text{ km} + (400 + 100 \times 0.910) \text{ km} = 6849 \text{ km}$$



a) No primeiro método a sonda encontra-se apenas numa órbita circular de raio $r = a_0$. Desse modo a sua velocidade inicial antes da variação Δv direct é dada por (13):

$$v_i = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{a_0}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{34568.96 \text{ km}}} = 3.39567992 \text{ km/s}$$

Por outro lado, após esta variação Δv direct, podemos calcular a velocidade da sonda no instante imediatamente após ocorrer a variação Δv direct através de um balanço de energia entre as energias desse ponto e de um ponto para v_{∞} . Desse modo, recorrendo às expressões (7) e (8) para as energias cinética e potencial (tendo em conta que no infinito a energia potencial é nula) temos:

$$E_{\infty} = E_f \quad (\text{instante imediatamente depois da variação}) \Rightarrow T(r_{\infty}) + V(r_{\infty}) = T(r_f) + V(r_f) \Leftrightarrow \frac{v_{\infty}^2}{2} = \frac{v_f^2}{2} - \frac{\mu}{r} \Rightarrow v_f = \sqrt{v_{\infty}^2 + \frac{2\mu}{r}} \quad (31)$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{v_{\infty}^2 + \frac{2\mu_{\oplus}}{a_0}} = \sqrt{(3.71 \text{ km/s})^2 + \frac{2 \times 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{34568.96 \text{ km}}} = 6.068392228 \text{ km/s}$$

Com estes valores podemos finalmente obter o valor para Δv_{direct} :

$$\begin{aligned}\Delta v_{\text{direct}} &= v_f - v_i = 6.068392228 \text{ km/s} - 3.39567992 \text{ km/s} = \\ &= 2.672712308 \text{ km/s} \Rightarrow \Delta v_{\text{direct}} = 2.6727 \text{ km/s}\end{aligned}$$

b) De acordo com o enunciado podemos concluir que, para a elipse representada, o raio da apofése é $r_a = a_0$ e o raio do perigeu dado pelo valor anteriormente calculado.

Para esta aílnea vamos usar a seguinte nomenclatura:

v_{1i} : Velocidade imediatamente antes da variação Δv_1 ;

v_{1f} : Velocidade imediatamente após da variação Δv_1 ;

v_{2i} : Velocidade imediatamente antes da variação Δv_2 ;

v_{2f} : Velocidade imediatamente após da variação Δv_2 ;

Para o primeiro impulso podemos calcular v_{1i} e v_{1f} recorrendo à expressão para a velocidade em órbitas circulares (13) e à velocidade de acordo com a equação vis-viva (9), respectivamente:

$$v_{1i} = \sqrt{\frac{M_{\oplus}}{a_0}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{34568.96 \text{ km}}} = 3.39567992 \text{ km/s}$$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{a_0 + r_p}{2} = \frac{34568.96 \text{ km} + 6849 \text{ km}}{2} = 20708.88 \text{ km} \quad \boxed{\text{CÁLCULO SEM-EIXO MAIOR DA ELIPSE}}$$

$$\begin{aligned}v_{1f} &= \sqrt{2 M_{\oplus} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{2 \times 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \left(\frac{1}{34568.96 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 20708.88 \text{ km}} \right)} = \\ &= 1.952819143 \text{ km/s}\end{aligned}$$

Deste modo podemos, finalmente, calcular Δv_1 :

$$\begin{aligned}\Delta v_1 &= v_{1f} - v_{1i} = 1.952819143 \text{ km/s} - 3.39567992 \text{ km/s} = -1.442860777 \text{ km/s} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta v_1 = -1.4429 \text{ km/s}\end{aligned}$$

Para o segundo impulso podemos calcular v_{2i} e v_{2f} , recorrendo, novamente, à expressão (9) e a um balanço de energia como na aílnea a), respectivamente:

$$\begin{aligned}v_{2i} &= \sqrt{2 M_{\oplus} \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{2 \times 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \left(\frac{1}{6849 \text{ km}} - \frac{1}{2 \times 20708.88 \text{ km}} \right)} = \\ &= 9.856407693 \text{ km/s}\end{aligned}$$

instante imediatamente

$$G_{\infty} = G_{2f} \Leftrightarrow T(r_{\infty}) + \frac{1}{2} v_{\infty}^2 = T(r_f) + V(r_f) \Leftrightarrow \frac{v_{\infty}^2}{2} = \frac{V_{2f}^2}{2} - \frac{H_{\oplus}}{r_p} \Rightarrow V_{2f} = \sqrt{V_{\infty}^2 + \frac{2H_{\oplus}}{r_p}} = 0$$

$$\Rightarrow V_{2f} = \sqrt{V_{\infty}^2 + \frac{2H_{\oplus}}{r_p}} = \sqrt{(3.71 \text{ km/s})^2 + \frac{2 \times 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{6849 \text{ km}}} = 11.40879923 \text{ km/s}$$

Deste modo temos ΔV_2 :

$$\Delta V_2 = V_{2f} - V_{2i} = 11.40879923 \text{ km/s} - 9.856407693 \text{ km/s} = 1.552389537 \text{ km/s} = 0$$

$$\Delta V_2 = 1.5524 \text{ km/s}$$

8

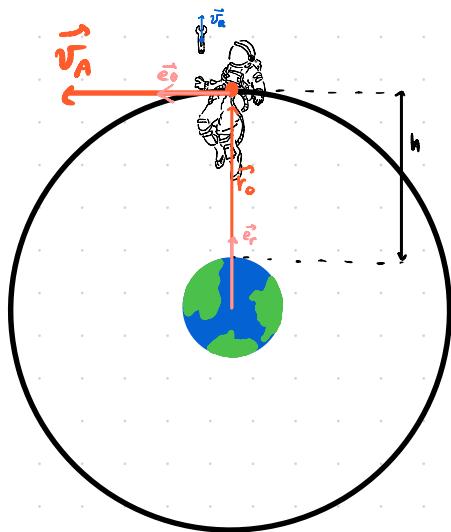
Para o valendo $X = 0.710$ temos:

$$h = (400 + 30 \times 0.710) = 421.3 \text{ km}$$

$$V_{n_a} = (1.8 + 0.4 \times 0.710) = 2.084 \text{ km/s}$$

$$V_{n_b} = (3.5 + 0.710) = 4.21 \text{ km/s}$$

a) De acordo com os dados do enunciado temos a seguinte representação do exercício, onde h é a altitude a que o astronauta se encontra, \vec{v}_A a velocidade do astronauta e \vec{v}_R a velocidade relativa da ferramenta lançada para cima:

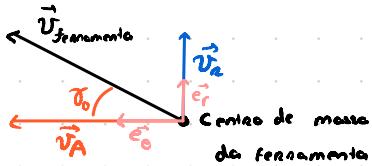


Como o astronauta encontra-se com uma velocidade para uma órbita circular, podemos calcular da seguinte maneira necessitando novamente a (13):

$$V_A = \sqrt{\frac{H_{\oplus}}{r_o}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{(421.3 + 6398) \text{ km}}} = 7.656610337 \text{ km/s}$$

$r_o = h + R_{\oplus}$

Neste caso, a nova velocidade do farramento encontrase representada vetorialmente da seguinte maneira:



De onde temos:

$$\vec{v}_f = v_A \hat{e}_A + v_r \hat{e}_r \text{ (km/s)}$$

$$|v_f| = \sqrt{v_A^2 + v_r^2} = \sqrt{(7.656610337 \text{ km/s})^2 + (2.084 \text{ km/s})^2} = 7.935158338 \text{ km/s}$$

Por este esquema podemos definir θ e calculá-lo da seguinte forma:

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{v_r}{v_A}\right) = \arctan\left(\frac{2.084 \text{ km/s}}{7.656610337 \text{ km/s}}\right) = 0.265745487 \text{ rad} = 15.22609487^\circ$$

1)

Para calcularmos a excentricidade desta nova órbita podemos recorrer à seguinte fórmula do formulário (23):

$$e = \sqrt{\left(\frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu} - 1\right)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0} = \sqrt{\left(\frac{(h + r_0 \theta_0) \cdot v_f^2}{\mu} - 1\right)^2 \cos^2(15.22609487^\circ) + \sin^2(15.22609487^\circ)} = \\ = \sqrt{\left(\frac{(421.3 + 6378) \text{ km} \times 7.935158338^2 \text{ km/s}^2}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2} - 1\right)^2 \times \cos^2(15.22609487^\circ) + \sin^2(15.22609487^\circ)} = \\ = 0.272183108 \Rightarrow \underline{e = 0.27218}$$

Para o cálculo da anomalia verdadeira (θ) vamos recorrer à seguinte fórmula do formulário:

$$(32) \quad \tan \theta_0 = \frac{\left(\frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu}\right) \sin(\theta_0) \cdot \cos(\theta_0)}{\left(\frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu}\right) \cos^2(\theta_0) - 1}$$

Substituindo pelos valores respetivos obtemos:

$$\theta = \arctan \left(\frac{\left[\frac{(421.3 + 6378) \text{ km} \times (7.935158338 \text{ km/s})^2}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2} \right] \sin(15.22609487^\circ) \times \cos(15.22609487^\circ)}{\left[\frac{(421.3 + 6378) \text{ km} \times (7.935158338 \text{ km/s})^2}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2} \right] \cos^2(15.22609487^\circ) - 1} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = 10^\circ \quad \text{e} \quad \Theta = 270^\circ$$

Como $\dot{\theta}_0 > 0$, então a anomalia pertence ao 1º quadrante ou ao 2º quadrante, o que leva a:

$$\underline{\theta = 90^\circ}$$

Para calcularmos os restantes valores do semi-eixo maior (a), energia (E) e período (T), podemos recorrer às expressões (22), (3) e (14), respetivamente:

$$a = \frac{r_0}{2 - \frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu}} = \frac{(421.3 + 6398) \text{ km}}{2 - \frac{(421.3 + 6398) \text{ km} \times (7.935158338 \text{ km/s})^2}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}} =$$

$$= 7343.3199 \text{ km} \Rightarrow \underline{a = 7343.3 \text{ km}}$$

$$E = -\frac{\mu}{2a} = \frac{-3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{2 \times (7343.3199 \text{ km})} = -27.14031293 \text{ km}^2/\text{s}^2 \Rightarrow \underline{E = -27.140 \text{ km}^2/\text{s}^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot a^{3/2} = \frac{2\pi \times (7343.3199 \text{ km})^{3/2}}{\sqrt{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}} = 6262.531064 \text{ s} = 104.3355197 \text{ min}$$

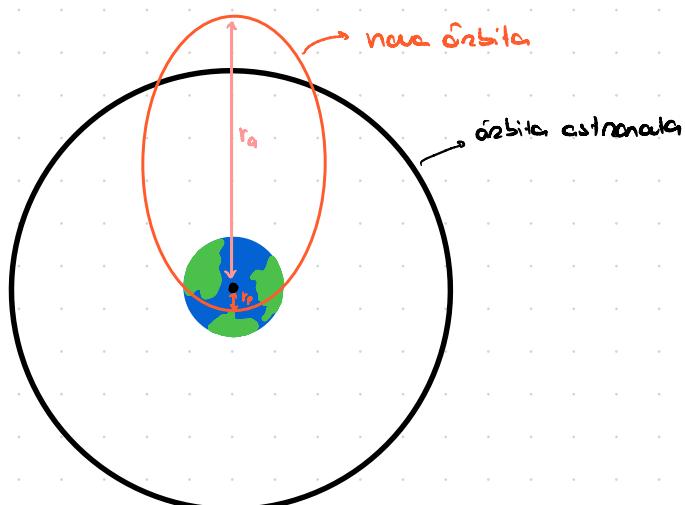
$$\Rightarrow \underline{T = 104.38 \text{ min}}$$

ii) Podemos determinar o tipo de órbita ao analisar o valor da excentricidade. Como $e < 1$, podemos concluir que a nova órbita é uma órbita elíptica. Com isto temos o seguinte raio do perigeu (onde $\theta = 0^\circ$):

$$(1): r_p = a(1 - e) = 7343.3199 \text{ km} (1 - 0.272183108) = 5344.592267 \Rightarrow$$

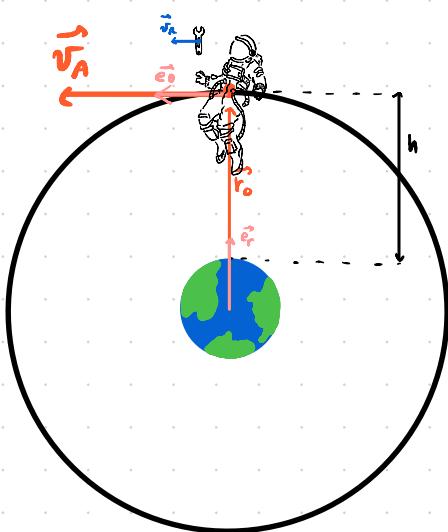
$$\Rightarrow \underline{r_p = 5344.6 \text{ km}}$$

Com estes resultados temos o seguinte esquema da nova órbita:



Deste modo, como o raio do perigeu é inferior a R_{\oplus} , a ferramenta vai colidir com a Terra, visto que a trajetória da órbita em que se encontra intensifica a Terra. Assim, a nova órbita não existirá muito tempo (definitivamente inferior a metade do período, isto é, 3131.265532 s).

b) De acordo com os dados do enunciado temos a seguinte representação do exencto, onde h é a altitude a que o astronauta se encontra, \vec{v}_A a velocidade do astronauta e \vec{v}_R a velocidade relativa da ferramenta lançada para cima:



Nesta alínea, a velocidade da ferramenta pode ser calculada pela soma da velocidade relativa da ferramenta e da velocidade do astronauta (já calculada na alínea a)):

$$\vec{v}_f = v_{r_b} \vec{e}_0 + v_A \vec{e}_0 = (v_{r_b} + v_A) \vec{e}_0 \text{ (km/s)}$$

$$|v_f| = v_A + v_{r_b} = 7.656610337 \text{ km/s} + 4.21 \text{ km/s} = 11.86661034 \text{ km/s}$$

a)

i)

Para calcularmos a excentricidade desta nova órbita podemos recorrer à seguinte fórmula do formulário (23), na qual $\gamma_0=0$ pois os vetores velocidade do astronauta e da ferramenta são colineares:

$$e = \sqrt{\left(\frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu} - 1\right)^2 \cdot \cos^2 \gamma_0 + \sin^2 \gamma_0} = \sqrt{\left(\frac{(h+R_{\oplus}) \cdot v_f^2}{\mu} - 1\right)^2 \cdot \cos^2 \gamma_0 + \sin^2 \gamma_0} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{(421.3 + 6398) \text{ km} \times 11.86661034 \text{ km/s}^2}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2} - 1\right)^2 \times \underbrace{\cos^2(0)}_1 + \underbrace{\sin^2(0)}_1} = 1.402040207 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e = \underline{1.4020}$$

Para calcularmos a energia necessária novamente a (22) e a (3):

$$a = \frac{r_0}{2 - \frac{r_0 \cdot v_0^2}{\mu}} = \frac{(421.3 + 6378) \text{ km}}{2 - \frac{(421.3 + 6378) \text{ km} \times (11.80661034 \text{ km/s})^2}{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}} = \\ = -16911.99004 \text{ km} \Rightarrow \underline{\underline{a = -16912 \text{ km}}}$$

$$E = -\frac{\mu}{2a} = \frac{-3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{2 \times (-16911.99004 \text{ km})} = 11.78453863 \text{ km}^2/\text{s}^2 \Rightarrow \underline{\underline{E = 11.785 \text{ km}^2/\text{s}^2}}$$

Como $e > 1$ e $E > 0$ podemos concluir que a nova órbita é de tipo hiperbólica.

ii)

Dado que a nova órbita é uma órbita hiperbólica, a ferramenta não irá descrever uma trajetória fechada, logo não faz sentido calcular o período da mesma.

No que toca à anomalia verdadeira, esta pode ser calculada através da equação de órbita (1):

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \theta} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} \Rightarrow r(1+e \cos \theta) = a(1-e^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = -1 + \frac{a(1-e^2)}{r} \Rightarrow \theta = \arccos \left[-\frac{1}{e} + \frac{a(1-e^2)}{er} \right] = \\ = \arccos \left[\frac{-1}{1.402040207} + \frac{(-16911.99004 \text{ km}) \times (1 - 1.402040207^2)}{1.402040207 \times (421.3 + 6378) \text{ km}} \right] =$$

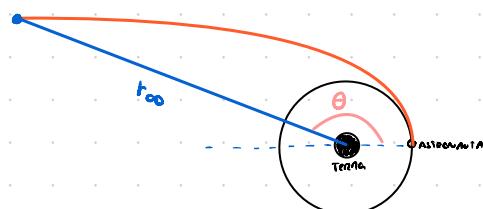
$$= 0.9999999994 \text{ rad} = 57.29577917^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\theta = 57.296^\circ}}$$

quando $t \rightarrow \infty$, o objeto afasta-se do foco (Terra) infinitamente, logo $r \rightarrow \infty$. Assim, pela expressão anterior temos:

$$\frac{a(1-e^2)}{r \cdot e} \rightarrow 0 \Rightarrow \theta_\infty = \arccos \left(-\frac{1}{e} \right) = \arccos \left(\frac{-1}{1.402040207} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = 135.4996614^\circ \text{ V } \theta = 315.4996614^\circ$$

Esgualtando isto temos:

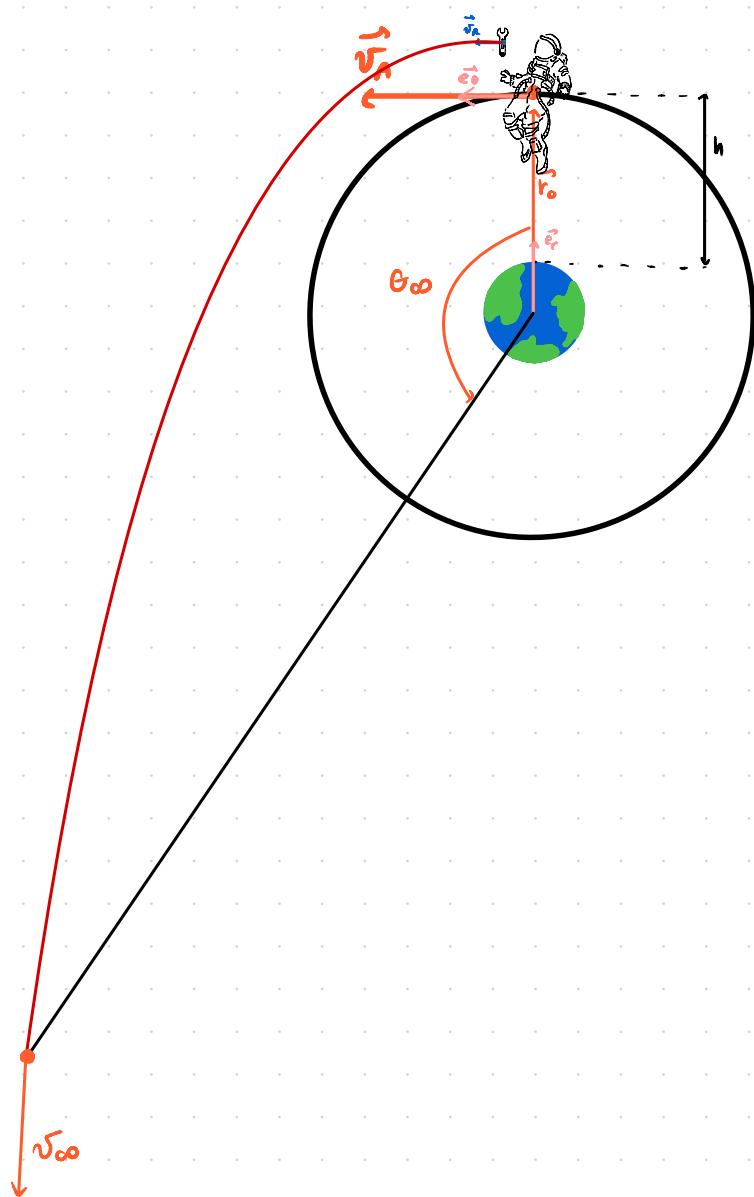


Deste modo temos $\theta \in [0, \pi]$: $\theta = 135.50^\circ$

Relativamente à velocidade, podemos calcular-a pela equação vis-viva (9) :

$$v = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} v_\infty = \sqrt{2\mu_\oplus \left(-\frac{1}{2a} \right)} =$$
$$= \sqrt{2 \times 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2 \times \left(-\frac{1}{2 \times 16911.99004 \text{ km}} \right)} = 4.854779405 \text{ km/s} \Rightarrow$$
$$\therefore v_\infty = 4.8548 \text{ km/s}$$

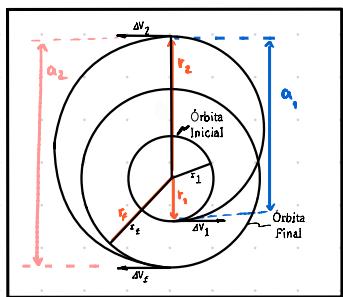
iii)



9

a) A velocidade de uma órbita circular é dada por (13) enquanto que a para uma órbita elíptica é dada pela equação vis-viva (9).

De acordo com a seguinte imagem temos:



$$v_c = \frac{2\sqrt{\mu}}{r} \text{ km/s} \quad (\text{elipse menor})$$

$$v_e = \frac{2\sqrt{\mu}}{r} \text{ km/s} \quad (\text{elipse maior})$$

Para esta questão vamos usar a seguinte nomenclatura:

v_{c_1} : Velocidade orbital para a órbita circular de raio r_1 ;

v_{e_1} : Velocidade orbital para a órbita elíptica de semi-eixo maior a_1 , imediatamente após de Δv_1 ;

$v_{e_{2A}}$: Velocidade orbital para a órbita elíptica de semi-eixo maior a_1 , imediatamente antes de Δv_2 ;

$v_{e_{2P}}$: Velocidade orbital para a órbita elíptica de semi-eixo maior a_1 , imediatamente após de Δv_2 ;

v_{e_f} : Velocidade orbital para a órbita elíptica de semi-eixo maior a_1 , imediatamente antes de Δv_2 ;

v_{cf} : Velocidade orbital para a órbita circular de raio r_2 ;

Deste modo para os quatro termos pedidos temos:

$$\Delta v_1 = v_{e_1} - v_{c_1} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$$

$$\frac{\Delta v_1}{v_{c_1}} = \frac{\sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}}{\sqrt{\mu / r_1}} = \sqrt{2r_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} - 1 = \\ = \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{r_2}{r_1}} \right)} - 1 = \sqrt{2 \left(\frac{r_1 + r_2 - 1}{r_1 + r_2} \right)} - 1 = \sqrt{\frac{2(r_2/r_1)}{1 + (r_2/r_1)}} - 1 \quad \text{C.g.m}$$

$$\Delta v_2 = v_{e_{2P}} - v_{e_{2A}} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_f + r_2} \right)} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} =$$

$$\frac{\Delta v_2}{v_{c_1}} = \frac{\sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_f + r_2} \right)} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)}}{\sqrt{\mu / r_1}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2r_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_f+r_2} \right)} - \sqrt{2r_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1+r_2} \right)} = \\
&= \sqrt{2 \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_1}{r_f+r_2} \right)} - \sqrt{2 \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_1}{r_1+r_2} \right)} = \\
&= \sqrt{2 \left(\frac{1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} - \frac{1}{\frac{r_f+r_2}{r_1}} \right)} - \sqrt{2 \left(\frac{(r_1+r_2)r_1 - r_1r_2}{r_2(r_1+r_2)} \right)} = \\
&= \sqrt{2 \left(\frac{1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right) \left(1 - \frac{1}{\frac{r_f+r_2}{r_1} + 1} \right)} - \sqrt{2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \frac{r_1}{r_1+r_2}} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1)} \left(1 - \frac{r_2}{r_f+r_2} \right)} - \sqrt{2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \left[\frac{1}{\left(\frac{r_f+r_2}{r_1}\right)} \right]} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1)} \left(\frac{r_f+r_2 - r_2}{r_f+r_2} \right)} - \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1)} \times \frac{1}{1 + (r_2/r_1)}} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1)} \left(\frac{r_f}{r_f+r_2} \right)} - \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1)} \left[\frac{1}{1 + (r_2/r_1)} \right]} \quad \text{c.g.m.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta V_3 &= V_{cf} - V_{ef} = \sqrt{\frac{M}{r_f}} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_2+r_f} \right)} \\
\frac{\Delta V_3}{V_{ci}} &= \frac{\sqrt{\frac{M}{r_f}} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_2+r_f} \right)}}{\sqrt{\mu/r_1}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_f}} - \sqrt{2r_1 \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_2+r_f} \right)} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} - \sqrt{2 \left(\frac{r_1}{r_f} - \frac{r_1}{r_2+r_f} \right)} = \sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} - \sqrt{2 \left(\frac{1}{(r_f/r_1)} - \frac{1}{\frac{r_f}{r_1} + \frac{r_2}{r_1}} \right)} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} - \sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)} \left(1 - \frac{1}{\frac{r_2}{r_1} + 1} \right)} = \sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} - \sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)} \left(1 - \frac{r_f}{r_f+r_2} \right)} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} - \sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)} \left(\frac{r_f+r_2 - r_f}{r_2+r_f} \right)} = \sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} - \sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)} \cdot \frac{\left(\frac{r_2}{r_1} \right)}{\left(\frac{r_f}{r_1} \right) + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}}
\end{aligned}$$

No entanto, analisando o esquema representado do problema, verificamos que a representação de $\frac{\Delta V_3}{V_{C_1}}$ não se encontra no sentido direto, logo o resultado obtido até agora corresponde ao simétrico da verdadeira expressão para $\frac{\Delta V_3}{V_{C_1}}$. Logo temos, com o sentido correto de ΔV_3 :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V_3}{V_{C_1}} &= - \left[\sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} - \sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)} \cdot \frac{(r_2/r_1)}{\left(\frac{r_f}{r_1}\right) + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)}} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)} \cdot \frac{(r_2/r_1)}{\left(\frac{r_f}{r_1}\right) + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)}} - \sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} \quad \text{c.g.m}\end{aligned}$$

b) Para $r_2 \rightarrow \infty$, para o caso de uma transferência bi-elíptica infinita, temos as seguintes modificações nas expressões obtidas na alínea anterior:

$$\begin{aligned}\lim_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta V_2}{V_{C_1}} &= \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1)} \left(\frac{r_f/r_1}{(r_f/r_1) + (r_2/r_1)} \right)} - \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1) [1 + (r_2/r_1)]}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\infty} \left(\frac{r_f/r_1}{(r_f/r_1) + \infty} \right)} - \sqrt{\frac{2}{\infty (1 + \infty)}} = 0 - 0 = 0 \\ \Rightarrow (\Delta V_2)_\infty &= 0 \quad \text{c.g.m}\end{aligned}$$

Deste modo quando $r_2 \rightarrow \infty$ para uma transferência bi-elíptica infinita, temos $\Delta V_2 \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta V_1}{V_{C_1}} &= \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{2(r_2/r_1)}{1 + (r_2/r_1)}} - 1 \right] \stackrel{(\infty/\infty) \text{ indeterminação}}{=} \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{2/r_1}{1/r_2 + 1/r_1}} - 1 \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{r_1}} - 1 = \sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\Delta V_1)_\infty = (\sqrt{2} - 1) V_{C_1}$$

$$\begin{aligned}\lim_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{\Delta V_3}{V_{C_1}} &= \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)} \cdot \frac{(r_2/r_1)}{\left(\frac{r_f}{r_1}\right) + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)}} - \sqrt{\frac{1}{(r_f/r_1)}} \right] = \\ &= \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{2}{r_f/r_1}} \cdot \frac{1}{\frac{r_f}{r_1} + 1} - \sqrt{\frac{r_1}{r_f}} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2r_1}{r_f}} - \sqrt{\frac{r_1}{r_f}} = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{r_1}{r_f}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\Delta V_3)_\infty = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{r_1}{r_f}} \cdot V_{C_1}$$

Relativamente a cada órbita temos os seguintes problemas: elevada complexidade nos cálculos da trajetória, na definição dos parâmetros de órbita que podem causar erros significativos no resultado pretendido; satélite também fortemente sujeito a perturbações externas que, como a órbita é infinita, podem causar alterações na trajetória significativas; e o tempo da manobra é muito elevado.

No que toca a soluções temos: utilização de algoritmos avançados que tenham em conta as várias variáveis passíveis, de modo a minimizar os erros e a existência de sistemas de controlo que, face a perturbações externas, consiga corrigir a trajetória do satélite de volta à órbita pretendida.

c)

i) No caso de transferência bi-elíptica infinita, com $r_f = 14r_i$, podemos usar as expressões obtidas na aínea anterior, para obter Δv_{tot} em função de v_{c_1} :

$$\Delta v_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^3 \|\Delta v_i\| = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v_{\text{tot}}}{v_{c_1}} = (\sqrt{2} - 1) + 0 + (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{r_i}{r_f}} = (\sqrt{2} - 1) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{r_i}{r_f}} \right)$$

Sendo $r_f = 14r_i$ obtemos finalmente:

$$\frac{\Delta v_{\text{tot}}}{v_{c_1}} = (\sqrt{2} - 1) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{r_i}{14r_i}} \right) = (\sqrt{2} - 1) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{1}{14}} \right) = 0.524916393$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v_{\text{tot}}}{v_{c_1}} = 0.52492$$

ii) No caso de transferência bi-elíptica infinita, com $r_f = 14r_i$ e $r_2 = 20r_i$, podemos usar as expressões obtidas na aínea anterior, para obter Δv_{tot} em função de v_{c_1} :

$$\frac{\Delta v_1}{v_{c_1}} = \sqrt{\frac{2(r_2/r_1)}{1 + (r_2/r_1)}} - 1 = \sqrt{\frac{2 \times \frac{20r_i}{r_i}}{1 + \frac{20r_i}{r_i}}} - 1 = \sqrt{\frac{40}{1+20}} - 1 = 0.380131118$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_2}{v_{c_1}} &= \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1)} \left(\frac{r_f/r_1}{(r_f/r_1) + (r_2/r_1)} \right)} - \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1) [1 + (r_2/r_1)]}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{(20r_i/r_i)} \left(\frac{(14r_i/r_i)}{(14r_i/r_i) + (20r_i/r_i)} \right)} - \sqrt{\frac{2}{(20r_i/r_i) (1 + 20r_i/r_i)}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{20} \left(\frac{14}{14+20} \right)} - \sqrt{\frac{2}{20 (1+20)}} = 0.133913306 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V_3}{V_{C_1}} &= \left[\sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)}} - \frac{(r_2/r_1)}{\left(\frac{r_f}{r_1}\right) + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)} - \sqrt{\frac{r_1}{r_f}} \right] = \\ &= \left[\sqrt{\frac{2}{\left(\frac{14r_1}{r_1}\right)}} - \frac{(20r_1/r_1)}{\left(\frac{14r_1}{r_1}\right) + \left(\frac{20r_1}{r_1}\right)} - \sqrt{\frac{r_f}{14r_1}} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{14}} \cdot \frac{20}{(14+20)} - \sqrt{\frac{1}{14}} = 0.022624295\end{aligned}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V_{tot}}{V_{C_1}} &= \frac{\Delta V_1}{V_{C_1}} + \frac{\Delta V_2}{V_{C_1}} + \frac{\Delta V_3}{V_{C_1}} = 0.380131118 + 0.133913306 + 0.22624295 = \\ &= 0.536668699\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V_{tot}}{V_{C_1}} = 0.53667$$

iii) No caso de transferência bi-elíptica infinita, com $r_f = 14r_1$ e $r_2 = 40r_1$, podemos usar as expressões obtidas na alínea anterior, para obter ΔV_{tot} em função de V_{C_1} :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V_1}{V_{C_1}} &= \sqrt{\frac{2(r_2/r_1)}{1 + (r_2/r_1)}} - 1 = \sqrt{\frac{2 \times \frac{40r_1}{r_1}}{1 + \frac{40r_1}{r_1}}} - 1 = \sqrt{\frac{80}{1+40}} - 1 = 0.316860591 \\ \frac{\Delta V_2}{V_{C_1}} &= \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1)} \left(\frac{r_f/r_1}{(r_f/r_1) + (r_2/r_1)} \right)} - \sqrt{\frac{2}{(r_2/r_1) [1 + (r_2/r_1)]}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{(40r_1/r_1)} \left(\frac{(14r_1/r_1)}{(14r_1/r_1) + (40r_1/r_1)} \right)} - \sqrt{\frac{2}{(40r_1/r_1)(1+40r_1/r_1)}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{40} \left(\frac{14}{14+40} \right)} - \sqrt{\frac{2}{40(1+40)}} = 0.078933493\end{aligned}$$

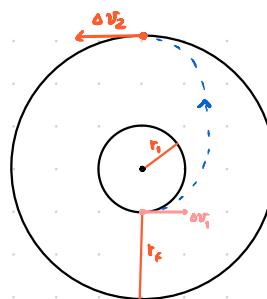
$$\begin{aligned}\frac{\Delta V_3}{V_{C_1}} &= \left[\sqrt{\frac{2}{(r_f/r_1)}} - \frac{(r_2/r_1)}{\left(\frac{r_f}{r_1}\right) + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)} - \sqrt{\frac{r_1}{r_f}} \right] = \\ &= \left[\sqrt{\frac{2}{\left(\frac{14r_1}{r_1}\right)}} - \frac{(40r_1/r_1)}{\left(\frac{14r_1}{r_1}\right) + \left(\frac{40r_1}{r_1}\right)} - \sqrt{\frac{r_f}{14r_1}} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{14}} \cdot \frac{40}{(14+40)} - \sqrt{\frac{1}{14}} = 0.058038382\end{aligned}$$

Assim temos:

$$\frac{\Delta V_{\text{tot}}}{V_{C_1}} = \frac{\Delta V_1}{V_{C_1}} + \frac{\Delta V_2}{V_{C_1}} + \frac{\Delta V_3}{V_{C_1}} = 0.316860591 + 0.038933493 + 0.058038782 = \\ = 0.533832866$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V_{\text{tot}}}{V_{C_1}} = 0.53383$$

iv) Considerando agora que, em vez de uma transferência bi-elíptica de 3 impulsos, estamos presente uma transferência de Heimann de 2 impulsos, sendo o 1º entre a órbita circular de raio r_i e a órbita de transferência elíptica, e o 2º entre essa órbita elíptica de transferência e a órbita circular de raio r_f , temos a seguinte imagem:



(considerando o sentido direto)

Para esta alínea vamos usar a seguinte nomenclatura.

- V_{C_1} : Velocidade orbital para a órbita circular de raio r_i ;
- V_{e_1} : Velocidade para órbita elíptica imediatamente após 1º impulso;
- V_{e_2} : Velocidade para órbita elíptica imediatamente antes 2º impulso;
- V_{C_f} : Velocidade orbital para a órbita circular de raio r_f ;

A velocidade de uma órbita circular é dada por (13) enquanto que a para uma órbita elíptica é dada pela equação vis-viva (9), sendo que o semi-eixo maior da órbita elíptica de transferência é dado por $a = \frac{r_i + r_f}{2}$.

Calculando estas velocidades em função de V_{C_1} temos:

$$V_{C_1} = \sqrt{\frac{M}{r_i}}$$

$$V_{C_f} = \sqrt{\frac{M}{r_f}} = \sqrt{\frac{M}{r_i} \cdot \frac{r_i}{r_f}} = V_{C_1} \sqrt{\frac{r_i}{r_f}}$$

$$V_{e_1} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i + r_f} \right)} = \sqrt{\frac{M}{r_i} \cdot 2 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{r_f}{r_i}} \right)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= v_{c_1} \sqrt{2 \left(\frac{r_f + r_i - 1}{1 + \frac{r_f}{r_i}} \right)} = v_{c_1} \sqrt{\frac{2 (r_f / r_i)}{1 + (r_f / r_i)}} \\
 v_{c_2} &= \sqrt{2 \mu \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{2 \mu \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_f + r_i} \right)} = \sqrt{2 \mu \left(\frac{r_f + r_i - r_f}{r_f (r_i + r_f)} \right)} = \\
 &= \sqrt{2 \mu \cdot \frac{r_i}{r_f (r_i + r_f)}} = \sqrt{\frac{2 \mu}{r_i} \cdot \frac{r_i^2}{r_f (r_i + r_f)}} = v_{c_1} \sqrt{\frac{2 r_i^2}{r_f (r_i + r_f)}} \\
 &= v_{c_1} \sqrt{\frac{2 r_i}{(r_f / r_i) (r_i + r_f)}} = v_{c_1} \sqrt{\frac{2}{(r_f / r_i) (1 + r_f / r_i)}}
 \end{aligned}$$

Deste modo, a variação de velocidade no 1º impulso é dada por:

$$\begin{aligned}
 \Delta v_1 &= v_{c_1} - v_{c_1} = v_{c_1} \sqrt{\frac{2 (r_f / r_i)}{1 + (r_f / r_i)}} - v_{c_1} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{\Delta v_1}{v_{c_1}} &= \sqrt{\frac{2 (r_f / r_i)}{1 + (r_f / r_i)}} - 1 = \sqrt{\frac{2 (14r_i / r_i)}{1 + (14r_i / r_i)}} - 1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 14}{15}} - 1 \Rightarrow \\
 &\quad \downarrow r_f = 14r_i \\
 \Rightarrow \frac{\Delta v_1}{v_{c_1}} &= 0.366260102
 \end{aligned}$$

A velocidade para o segundo impulso é dada por:

$$\begin{aligned}
 \Delta v_2 &= v_{c_f} - v_{c_2} = v_{c_1} \sqrt{\frac{r_i}{r_f}} - v_{c_1} \sqrt{\frac{2}{(r_f / r_i) (1 + r_f / r_i)}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{\Delta v_2}{v_{c_1}} &= \sqrt{\frac{r_i}{r_f}} - \sqrt{\frac{2}{(r_f / r_i) (1 + r_f / r_i)}} = \sqrt{\frac{r_i}{14r_i}} - \sqrt{\frac{2}{(14r_i / r_i) (1 + 14r_i / r_i)}} = \sqrt{\frac{1}{14}} - \sqrt{\frac{2}{14 \cdot 15}} \Rightarrow \\
 &\quad \downarrow r_f = 14r_i \\
 \Rightarrow \frac{\Delta v_2}{v_{c_1}} &= 0.169671234
 \end{aligned}$$

Por fim, a variação de velocidade total é dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta v_{\text{tot.}}}{v_{c_1}} &= \frac{\Delta v_1}{v_{c_1}} + \frac{\Delta v_2}{v_{c_1}} = 0.366260102 + 0.169671234 = 0.535931336 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{\Delta v_{\text{tot.}}}{v_{c_1}} &= 0.53593
 \end{aligned}$$

v) Organizando os resultados obtidos temos a seguinte tabela:

TRANSFERÊNCIA	$\frac{\Delta U_{\text{tot}}}{U_{C_1}}$
bi-elíptica infinita, $r_2 \rightarrow \infty$	0.52492
bi-elíptica, $r_2 = 20r_1$	0.53667
bi-elíptica, $r_2 = 40r_1$	0.53383
Hohmann, sentido direto	0.53593

Pela observação dos resultados obtidos podemos concluir que, em termos de eficiência relativamente ao consumo de ΔU , a transferência bi-elíptica infinita é a melhor opção, pois tem o menor valor para $\frac{\Delta U_{\text{tot}}}{U_{C_1}}$.

Por outro lado, não é possível estabelecer uma relação de eficiência entre as transferências bi-elíptica e Hohmann diretamente sem ter em conta a relação de $\frac{r_2}{r_1}$. Analisando a tabela conclui-se que a transferência de Hohmann é a mais eficiente, em termos de $\Delta U_{\text{tot}}/U_{C_1}$, do que a transferência bi-elíptica para $\frac{r_2}{r_1} = 20$ e menos eficiente para $\frac{r_2}{r_1} = 40$.

Através desta análise podemos concluir que existe um valor de $\frac{r_2}{r_1}$ para o qual $\left(\frac{\Delta U_{\text{tot}}}{U_{C_1}}\right)_{\text{bi-elíptica}} = \left(\frac{\Delta U_{\text{tot}}}{U_{C_1}}\right)_{\text{transf. Hohmann}}$, sendo a transferência de Hohmann mais (menos) eficiente do que a bi-elíptica para valores inferiores (superiores) de $\frac{r_2}{r_1}$.

d) O período de uma órbita é dado pela equação (14). Para determinar o tempo total das manobras de transferência, em função do período de órbita circular de raio r_1 (T_{C_1}), vamos calcular T_{C_1} dado por:

$$T_{C_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot r_1^{3/2} =$$

O tempo que uma transferência bi-elíptica demora a ser realizada é igual à soma de metade dos períodos dos 2 órbitas elípticas envolvidas na transferência, sendo o semi-eixo maior associados a cada uma destas:

- $2a = r_1 + r_2$, para uma das órbitas elípticas;
- $2a = r_f + r_2$, para a outra.

Assim,

$$\Delta t_{\text{bi-elíptica}} = \frac{T_{12}}{2} + \frac{T_{2f}}{2}$$

Assim, o tempo necessário para ocorrer a transferência é dado por:

$$\Delta t_{\text{bi-eliptica}} = \frac{T_{12}}{2} + \frac{T_{2f}}{2}$$

Período de órbita caracterizada por $2a = r_1 + r_2$, em função de T_{C_1} :

$$(14) \quad T_{12} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} (r_1)^{3/2} \left(\frac{1 + r_2/r_1}{2} \right)^{3/2} = T_{C_1} \left(\frac{1 + (r_2/r_1)}{2} \right)^{3/2}$$

Período de órbita caracterizada por $2a = r_1 + r_2$, em função de T_{C_1} :

$$(14) \quad T_{2f} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{r_2 + r_f}{2} \right)^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot (r_1)^{3/2} \cdot \left(\frac{r_2 + r_f}{2r_1} \right)^{3/2} = T_{C_1} \left(\frac{r_2 + r_f}{2r_1} \right)^{3/2}$$

Tempo total necessário para ocorrer a transferência:

$$\frac{\Delta t_{\text{total}}}{T_{C_1}} = \frac{T_{12}}{2T_{C_1}} + \frac{T_{2f}}{2T_{C_1}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + (r_2/r_1)}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{r_2 + r_f}{2r_1} \right)^{3/2} \right] =$$

Associando os valores
da questão
anterior

i) Para a transferência bi-elíptica infinita ($r_2 \rightarrow \infty$) temos:

$$\frac{\Delta t_{\text{total}}}{T_{C_1}} = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + \frac{\infty}{r_1}}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{\infty + r_f}{2r_1} \right)^{3/2} \right] \right) = \infty + \infty = \infty$$

Este resultado faz sentido fisicamente, visto que o tempo necessário para percorrer uma órbita infinita deve ser também infinito.

ii) Para a transferência bi-elíptica com $r_2 = 20r_1$ e $r_f = 14r_1$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t_{\text{total}}}{T_{C_1}} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + (r_2/r_1)}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{r_2 + r_f}{2r_1} \right)^{3/2} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + (\frac{20r_1}{r_1})}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{20r_1 + 14r_1}{2r_1} \right)^{3/2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1+20}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{20+14}{2} \right)^{3/2} \right] = 52.05834215 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t_{\text{tot}}}{T_{C_1}} = 52.058$$

iii) Para a transferência bi-elíptica com $r_2 = 40r_1$ e $r_f = 14r_1$ temos:

$$\frac{\Delta t_{\text{total}}}{T_{C_1}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + (r_2/r_1)}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{r_2 + r_f}{2r_1} \right)^{3/2} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + (\frac{40r_1}{r_1})}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{40r_1 + 14r_1}{2r_1} \right)^{3/2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1+40}{2} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{10+14}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] = 116.5569065$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t_{tot}}{T_{C_1}} = 116.56$$

iv) O tempo necessário para que ocorra a transferência de Hohmann é igual a metade do período de uma órbita elíptica caracterizada pelo seu eixo maior, $2a = r_i + r_f$. Desta forma o tempo que esta demora a ocorrer é:

$$\Delta t_{Hohmann} = \frac{T_{1f}}{2}$$

Período da órbita elíptica caracterizada por $2a = r_i + r_f$, em função de T_{C_1} :

$$T_{1f} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{r_i + r_f}{2} \right)^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot r_i^{3/2} \left(\frac{1 + r_f/r_i}{2} \right)^{3/2} = T_{C_1} \left(\frac{1 + r_f/r_i}{2} \right)^{3/2}$$

Logo,

$$\frac{\Delta t_{Hohmann}}{T_{C_1}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + (r_f/r_i)}{2} \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + (14r_i/r_i)}{2} \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+14}{2} \right)^{\frac{3}{2}} = 10.26979995$$

$r_f = 14r_i$, pelo enunciado

$$\Rightarrow \frac{\Delta t_{Hohmann}}{T_{C_1}} = 10.270$$

v) Desta forma podemos organizar estes valores na seguinte tabela:

TRANSFERÊNCIA	$\frac{\Delta t_{tot}}{T_{C_1}}$
bi-elíptica infinita, $r_2 \rightarrow \infty$	∞
bi-elíptica, $r_2 = 20r_i$	52.058
bi-elíptica, $r_2 = 40r_i$	116.56
Hohmann, sentido direto	10.270

Analisando a tabela, concluímos que a manobra de Hohmann é a mais rápida de ser executada, visto que esta apresenta o menor valor para $\frac{\Delta t_{tot}}{T_{C_1}}$.

Também podemos concluir que o tempo necessário para realizar a manobra bi-elíptica aumenta numa relação de proporcionalidade direta com r_2 . (fonte é

manobra bi-elíptica infinita ($v_2 \rightarrow \infty$), observamos que o tempo que esta transferência demora a ser executada é também infinito, o que a torna impraticável na realidade.

e)

- Tendo em consideração que o combustível do satélite é importante para maximizar o seu tempo útil de vida e sabendo que a missão não é urgente, a manobra escolhida para a transferência do satélite entre órbitas deve priorizar a eficiência em detrimento do tempo necessário para a realização da manobra. A manobra mais eficiente é a bi-elíptica infinita, embora, como referido anteriormente, esta manobra é um caso extremo impraticável. Deste modo, a manobra escolhida seria a manobra bi-elíptica com $r_2 = 40/r_1$, isto pelo que apresenta menor Δv_{tot} , consequentemente tornando-a mais eficiente o que, por sua vez, permite parar uma maior quantidade de combustível.
- Tendo em conta que a missão é muito urgente e crucial para o sucesso da operação, o fator decisivo e de maior importância é a rapidez com que a manobra pode ser executada. Assim, a manobra que deve ser realizada neste caso é a manobra de Hohmann, visto ser a manobra com menor Δv_{tot} , isto é, que demora menos tempo a ser executada. Isto vai permitir uma atração rápida com uma menor despesa em combustível.

10

Para o valor de $X = 0.710$ temos:

$$T = (95 + 10 \times 0.710) = 102.1 \text{ min} = 102.1 \times 60 \text{ s} = 6126 \text{ s}$$

$$|\dot{\alpha}| = (2.5 + 0.710) = 3.21^\circ/\text{dia solar médio}$$

Como o nodo ascendente se move para este, então temos $\dot{\alpha} > 0$, logo:

$$\dot{\alpha} = \frac{3.21 \cdot (\pi/180) \text{ rad}}{24 \times 3600 \text{ s dia solar médio}} = 6.484382985 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$$

Sendo a órbita uma órbita circular de raio r_c ($a = r_c$), também se conclui que a excentricidade é nula, $e = 0$.

O raio, r_c , desta órbita pode ser calculado através da manipulação da expressão (14):

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot a^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_\oplus}} \cdot r_c^{3/2} \Rightarrow r_c = \left(\frac{T \sqrt{\mu_\oplus}}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{6126 \text{ s} \times \sqrt{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}} = 7236.199208 \text{ km} = r_c$$

Pelo formulário temos (15):

$$n = \sqrt{\frac{M}{a^3}} = \sqrt{\frac{M_\oplus}{r_c^3}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}{(7236.199208 \text{ km})^3}} = 1.025658718 \times 10^{-3} / \text{s}$$

Considerando a seguinte fórmula do formulário podemos finalmente calcular o valor da inclinação, i :

$$(33) \quad \sin i = - \frac{3n J_2 R_{\oplus}^2}{2a^2 (1-e^2)^2} \cdot \cos i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos i = \frac{\sin i}{- \frac{3n J_2 R_{\oplus}^2}{2a^2 (1-e^2)^2}} = \frac{\sin i}{\frac{-2r_c^2 (1-e^2)^2}{3n J_2 R_{\oplus}^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = \arccos \left(\frac{-2r_c^2 (1-e^2)^2}{3n J_2 R_{\oplus}^2} \right) = i \in [0^\circ, 180^\circ]$$

$$= \arccos \left(\frac{-2 \times 6.484382985 \times 10^{-3} \text{ rad/s} \times (7236.199208 \text{ km})^2}{3 \times 1.025658718 \times 10^{-3} / \text{s} \times 0.00108263 \times (6378 \text{ km})^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = 120.0744875^\circ$$

$$\Rightarrow i = \underline{120.07^\circ}$$

11

i) As órbitas Molniya são usadas por países que se encontram em latitudes altas, nos quais os satélites geostacionários não são muito eficazes, pois sofrem uma irradiação significante causada pelas irregularidades do terreno, por exemplo.

Assim, os satélites Molniya são satélites não geostacionários com uma órbita de elevada excentricidade, de modo a maximizar o tempo da cobertura. De forma a que o satélite passe a maior parte do tempo sobre a zona de interesse é necessário evitar a variação do argumento do perigeu ($\dot{\omega}$), resultado este que pode ser conseguido para determinadas inclinações de modo a este ser nulo ($\dot{\omega} = 0$).

Pedimos determinar essas inclinações (i) recorrendo à seguinte fórmula do formulário:

$$(34) \quad \dot{\omega} = \frac{3n J_2 R_{\oplus}^2}{2a^2 (1-e^2)^2} \left(z - \frac{5}{z} \sin^2 i \right)$$

$$\dot{\omega} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{3n J_2 R_{\oplus}^2}{2a^2 (1-e^2)^2} \left(z - \frac{5}{z} \sin^2 i \right) \Rightarrow i \in [0^\circ, 180^\circ]$$

$$\Rightarrow z = \frac{5}{2} \sin^2 i \Leftrightarrow i = \arcsen \left(\pm \sqrt{\frac{4}{5}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = 63.43494882^\circ \vee i = 116.5650512^\circ$$

Deste modo, as inclinações possíveis para uma órbita Molniya são:

$$\rightarrow i = 63.435^\circ$$

$$\rightarrow i = 116.57^\circ$$

ii) Para uma órbita Sun-Synchronous é importante que os satélites mantenham o mesmo ângulo de incidência. Para que o pleno enfileiro mantenha este ângulo, é necessário que este realize 2π revoluções ($\Delta\Omega = 2\pi \text{ rad}$) ao fim de uma revolução completa da Terra em torno do Sol (1 ano sideral). Para isso temos:

$$\Omega = \frac{2\pi}{1 \text{ ano sideral}} = \frac{2\pi}{365.26 \times 24 \times 3600 \text{ s}} = 1.990966768 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$$

É importante referir que a Terra dá uma revolução completa em torno do sol no sentido direto, pelo que só temer de ser positivo ($\Omega > 0$). Por conseguinte, tendo em conta a equação (33), temos:

$$\Omega = \frac{-3n^2 R_{\oplus}^2}{2a^2(1-e^2)^2} \cdot \cos i > 0 \Rightarrow \cos i < 0 \Rightarrow i \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

\uparrow
 $(e < 1)$

\uparrow
 $i \in [0, \pi]$

↓
j = 116.57°

[dos satélites orbitando em i]

pois a órbita é elíptica

Deste modo, como $\Omega > 0$ estamos perante uma órbita retrógrada de inclinação $i = 116.57^\circ$.

$$\text{De acordo com o enunciado temos: } T = \frac{1 \text{ dia sideral}}{2} = \frac{86104.09 \text{ s}}{2} = 43082.045 \text{ s}$$

Rearanjando a expressão (14) podemos obter o valor do semi-eixo maior desta órbita elíptica:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \cdot a^{3/2} \Rightarrow a = \left[\frac{T \cdot \sqrt{\mu}}{2\pi} \right]^{\frac{2}{3}} = \left[\frac{43082.045 \text{ s} \sqrt{3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2}}{2\pi} \right]^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 26561.75251 \text{ km}$$

A velocidade de revolução é dada por (15):

$$h = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{43082.045 \text{ s}} = 1.45842318 \times 10^4 \text{ rad/s}$$

A excentricidade é dada pela equação da variação média da ascensão reta do nodo ascendente (33):

$$r^2 = \frac{-3n J_2 R_{\oplus}^2}{2a^2 (1-e^2)^2} \cdot \cos i \Rightarrow (1-e^2)^2 = \frac{-3n J_2 R_{\oplus}^2}{2a^2 \cdot r^2} \cdot \cos i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-e^2 = \sqrt{\frac{-3n J_2 R_{\oplus}^2 \cos i}{2a^2 r^2}} \Leftrightarrow e^2 = 1 - \sqrt{\frac{-3n J_2 R_{\oplus}^2 \cos i}{2a^2 r^2}} \Rightarrow$$

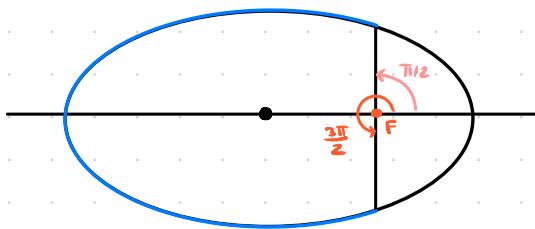
$$\Rightarrow e = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{-3n J_2 R_{\oplus}^2 \cos i}{2a^2 r^2}}} = D$$

↓
numa órbita elíptica
 $e \in]0, 1[$

$$\Rightarrow e = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{-3 \times 1.45842318 \times 10^{-4} \text{ rad/s} \times 0.00108263 \times (6378 \text{ km})^2 \times \cos(116.5650512^\circ)}{2 \times (26561.35251 \text{ km})^2 \times 1.990966768 \times 10^{-3} \text{ rad/s}}} = D$$

$$\Rightarrow e = 0.908219062 \Rightarrow \underline{e = 0.90822}$$

iii) De acordo com o enunciado temos a seguinte representação da órbita:



O período orbital que o satélite demora a percorrer a parte da órbita, representada a azul, entre os valores $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ da anomalia verdadeira corresponde à diferença entre o período da órbita total e o devido ao tempo que o satélite demora desde a periépside até $\theta = \frac{\pi}{2}$, isto é:

$$T_{(\theta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2})} = T - T_{(\theta=\frac{\pi}{2})}$$

Onde $T_{(\theta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2})}$ é o período orbital que o satélite demora a percorrer a órbita entre $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$ e $T_{(\theta=\frac{\pi}{2})}$ o período orbital desde a periépside até $\theta = \frac{\pi}{2}$.

O período orbital desde a periépside até $\theta = \frac{\pi}{2}$ pode ser calculado pela eq. de Kepler, presente na formulário:

$$(35) \quad M = n(t - t_0) = E - e \sin E$$

Podemos calcular a anomalia excentrica pela seguinte formula da formulario:

$$(36) \quad \tan E = \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \sin \theta}{e + e \cos \theta} = \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \overbrace{\sin(\pi/2)}^1}{e + e \cos(\pi/2)} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} = 0$$

($\theta = \frac{\pi}{2}$)

$$\Rightarrow E = \arctan \left(\frac{\sqrt{1 - (0.908219062)^2}}{0.908219062} \right)$$

$$\Rightarrow E = 24.73961226^\circ \quad V \quad E = 204.7396123^\circ \Rightarrow (E = \frac{\pi}{2}, \text{ logo } E \in 1^{\text{º}} \text{ quadrante})$$

$$\Rightarrow E = 24.73961226^\circ = 0.431787689 \text{ rad}$$

Com a velocidade de rotacao (15), temos $n = 2\pi/T$.

Agora recorrendo a (35) podemos finalmente determinar a veloz planetaria:

$$n(t-t_0) = E - e \sin E \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} (t-t_0) = E - e \cdot \sin E \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t-t_0 = \frac{(E - e \cdot \sin E)}{2\pi} \cdot T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{\theta=\frac{\pi}{2}} = t - t_0 = \left(\frac{E - e \sin E}{2\pi} \right) \cdot T$$

Assim temos finalmente:

$$T_{\theta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2}} = T - 2T_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left[1 - \frac{2(E - e \sin E)}{2\pi} \right] T$$

Sabendo que a percentagem total pedida é dada por $\frac{T_{\theta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2}}}{T}$, obtemos:

$$\frac{T_{\theta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2}}}{T} = \left[1 - \frac{2(E - e \sin E)}{2\pi} \right] =$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi} \times [0.431787689 \text{ rad} - 0.908219062 \times \sin(0.431787689 \text{ rad})] =$$

$$= 0.98354259 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{T_{\theta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2}}}{T} = 0.98354 = 98.354\%$$