



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

LICENCIATURA EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

LABORATÓRIO DE MECÂNICA APLICADA II

Movimento Giroscópico

Alunos:

Leonor Alves - 102845
Lourenço Faria - 103354
Paulo Campos - 103042
Pedro Almeida - 103027

Professor responsável:

Prof. Pedro Serrão

Resumo:

Este relatório foi desenvolvido no âmbito da cadeira Mecânica Aplicada II. O grupo de alunos aqui nomeado efetuou o trabalho laboratorial e registou os valores necessários à escrita deste relatório no dia 31/10/2022, às 11:00h, no Laboratório de Mecânica Aplicada.

Ano Letivo 2022/2023

Índice

Índice	i
Índice de figuras	i
Índice de tabelas	i
1 Objetivo	1
2 Introdução teórica	1
3 Experiência	3
3.1 Equipamentos	3
3.2 Medição da velocidade de rotação e precessão	3
3.3 Procedimento experimental	3
4 Cálculo teórico do momento polar de inércia	4
4.1 Resultados experimentais	5
5 Conclusões	6
6 Bibliografia	7

Índice de figuras

1 Giroscópio.	1
2 Esquema do rotor e do motor do giroscópio utilizado.	1
3 Giroscópio e tacômetro utilizados.	3
4 Dimensões do disco e do rotor e divisão em cilindros (mm).	4
5 Momento aplicado em função do produto das velocidades do rotor e de precessão .	6

Índice de tabelas

1 Cálculo teórico do momento polar de inércia	4
2 Posição das massas e momento aplicado	5
3 Tratamento de resultados	5

1 Objetivo

O giroscópio consiste numa aplicação direta da dinâmica de movimento de corpos axis-simétricos, trata-se de um disco com o centro de massa fixo no espaço capaz de girar em torno do seu próprio eixo. O disco ou rotor, encontra-se montado a um aro transversal (ao plano do rotor) que por sua vez é capaz de girar em torno do eixo longitudinal. Assim, o giroscópio consegue assumir qualquer orientação espacial - ver figura 1.

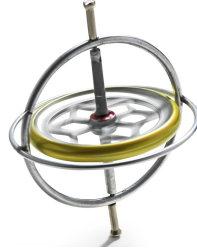


Figura 1: Giroscópio.

Esta atividade laboratorial tem como principal objetivo observar e perceber a relação entre o momento aplicado de forma perpendicular ao eixo de assimetria de um giroscópio didático e o movimento que este descreve. Isto é, pretende-se comprovar a existência de uma relação de proporcionalidade direta entre o momento aplicado (τ) e o produto da velocidade de precessão (Ω) pela velocidade de rotação (ω), e que a constante dessa relação será Momento de Inércia (J). Deste modo, também comprovaríamos que para uma velocidade de rotação constante, o momento aplicado e a velocidade de precessão seriam diretamente proporcionais, tendo como constante de proporcionalidade o momento angular.

2 Introdução teórica

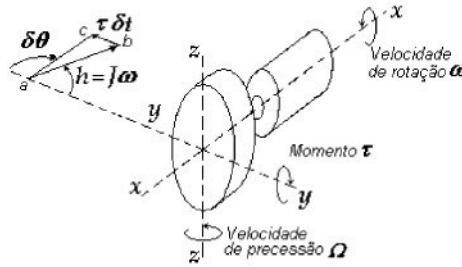


Figura 2: Esquema do rotor e do motor do giroscópio utilizado.

De forma a facilitar a demonstração das relações pretendidas e por uma questão de coerência, utilizamos o esquema da figura 2 como auxílio para descrever o movimento do giroscópio – considerando o referencial fixo XYZ e o referencial em rotação xyz. Nota ainda importante para os seguintes símbolos:

- Ω – Velocidade de precessão (em z) [rad/s];
- ω – Velocidade de rotação (em torno de x) [rad/s];
- τ – Momento aplicado [N · m];
- θ – Ângulo de precessão [rad];

- h – Momento angular [$kg \cdot m^2/s$];
- J – Momento polar de inércia (em relação a x) [$kg \cdot m^2$].

Considerando a definição de momento angular temos que:

$$\vec{h} = J\vec{\omega} = a\vec{b} \quad (1)$$

Ao aplicar o momento $\vec{\tau}$ em relação a y, ocorrerá um movimento do eixo, correspondente a $d\theta$. Este movimento é denominado de precessão e ocorre devido à aplicação do momento $\vec{\tau}$ durante um determinado período de tempo. Desta forma e segundo a definição, temos que:

$$\Delta\vec{h} = \vec{\tau}dt = b\vec{c} \quad (2)$$

Considerando a seguinte definição para a velocidade de precessão (Ω):

$$\Omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad (3)$$

e através das relações entre as equações 1 e 2 (soma vetorial de $a\vec{b}$ e $b\vec{c}$) obtemos que:

$$\tau dt = J\omega d\theta \Leftrightarrow J\omega \frac{d\theta}{dt} = J\omega\Omega = h\Omega \quad (4)$$

Sendo $\vec{\tau}$ todo o momento externo aplicado ao sistema e através das equações lecionadas para o movimento 3D de corpos rígidos, é possível afirmar que:

$$\vec{\tau} = \sum \vec{M}_G = \frac{d\vec{h}}{dt} \quad (5)$$

Ainda importante notar que é necessário fazer a transformação do referencial xyz em rotação para o referencial fixo XYZ:

$$\frac{d\vec{h}}{dt}_{XYZ} = \frac{d\vec{h}}{dt}_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{h} \quad (6)$$

No caso particular da rotação do rotor (ω) ser constante temos:

$$\frac{d\vec{h}}{dt}_{xyz} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt}_{xyz} = 0 \quad (7)$$

Deste modo, e notando que $\Omega = \Omega\vec{e}_z$ e $\vec{h} = J\vec{\omega} = J\omega\vec{e}_x$ podemos reescrever a equação 6:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{h}}{dt}_{XYZ} &= 0 + \vec{\Omega} \times \vec{h} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \vec{\tau} &= \Omega\vec{e}_z \times J\omega\vec{e}_x = \Omega J\omega\vec{e}_y = h\Omega\vec{e}_y \end{aligned} \quad (8)$$

Logo, para uma velocidade do disco constante, o momento aplicado e velocidade de precessão são diretamente proporcionais. Além disso a constante de proporcionalidade direta corresponde a uma função de J , $h = J\omega$.

3 Experiência

3.1 Equipamentos

Na atividade experimental, foi utilizado o seguinte material:

- Giroscópio elétrico Cussons P5377 (A - Figura 3);
- Tacômetro ótico Cussons P4740 (B - Figura 3);
- Cronômetro digital com incerteza de $\pm 0,01s$;
- Massa de 90g para calibração e equilíbrio do giroscópio;
- 3 massas de 150g para aplicação do momento.

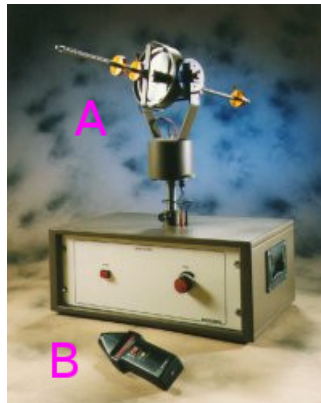


Figura 3: Giroscópio e tacômetro utilizados.

3.2 Medição da velocidade de rotação e precessão

A medição da velocidade do rotor é feita através do tacômetro ótico, ao colocar uma fita não refletora a cobrir uma parte do disco (que tem uma superfície refletora), a reflexão do feixe de infravermelhos emitidos pelo tacômetro é interrompida uma vez por cada rotação. O tacômetro registra os raios refletidos e calcula automaticamente a velocidade do rotor.

Já a velocidade de precessão é medida de forma indireta, medindo apenas o tempo de um ou meio período com o cronômetro.

3.3 Procedimento experimental

- Garantir que o giroscópio se encontra equilibrado, com o eixo rotativo na horizontal;
- Efetuar as medições:
 1. Prender um dos braços de extensão e colocar a massa de 150g;
 2. Medir a distância ao dentro de massa com o auxílio das marcas nos braços;
 3. Medir a velocidade de rotação do disco (de rotação própria);
 4. Libertar o braço e medir o (meio) período de precessão;
 5. Repetir os processos 1 - 4 com mais 2 distâncias;
 6. Repetir os processos 1 - 5 com a segunda e a terceira massa.

4 Cálculo teórico do momento polar de inércia

O conjunto do rotor é constituído pelo disco e por um anel (ver figura 4), feitos de latão ($\rho = 8410 \text{ kg/m}^3$). Na realidade, dada a complexidade geométrica do rotor, será necessário subdividir o disco e o anel em corpos mais simples de forma a facilitar o cálculo do momento de inércia em relação ao eixo x. Assim sendo, é possível visualizar o anel como um cilindro oco (cilindro 4 – cor de laranja da figura 4) e separar o disco em 3 cilindros ocos distintos (cilindro 1 – vermelho, cilindro 2 – verde e cilindro 3 – amarelo da figura 4).

O momento polar de inércia de um cilindro oco segundo eixo em causa pode ser calculado através das equações abaixo, com R – raio exterior, r – raio interior, L – espessura e V – volume. O momento polar de inércia do conjunto irá corresponder à soma dos momentos polares dos 4 cilindros (ver tabela 1).

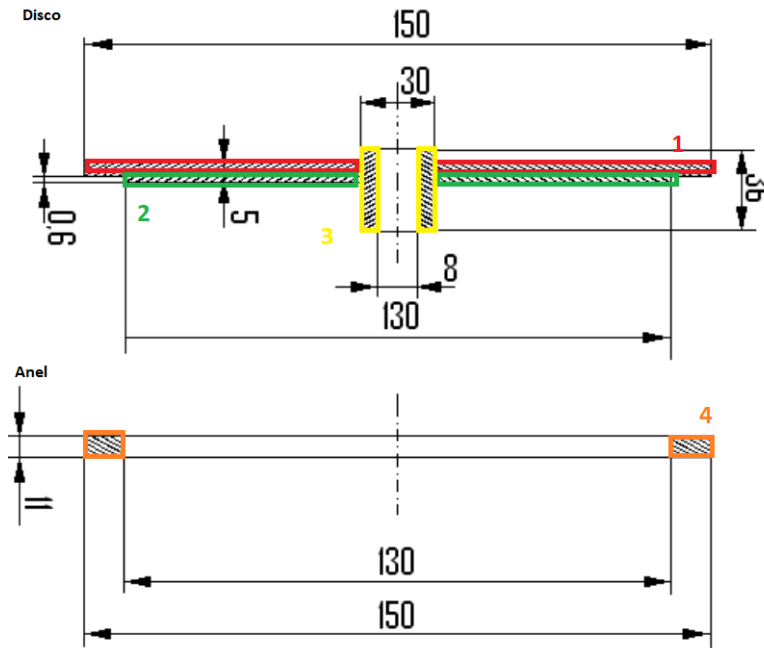


Figura 4: Dimensões do disco e do rotor e divisão em cilindros (mm).

$$J = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2) = \frac{1}{2}pV(R^2 + r^2) = \frac{1}{2}pL\pi(R^4 - r^4)$$

$$V = L\pi(R^2 - r^2)$$

$$p = 8410 \text{ kg/m}^3$$

	R [m]	r [m]	L [m]	J [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]
1	0.075	0.015	0.0044	1.836×10^{-3}
2	0.065	0.015	0.0006	1.411×10^{-4}
3	0.015	0.004	0.036	2.395×10^{-5}
4	0.075	0.065	0.011	2.004×10^{-3}
Total				4.005×10^{-3}

Tabela 1: Cálculo teórico do momento polar de inércia

4.1 Resultados experimentais

De forma a calcularmos o momento aplicado pelas massas adicionadas, utilizamos as equações:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau_i = r_i F_i = r m g$$

x1	x2	x3	τ_1	τ_2	τ_3	τ
0.21			0.309015			0.309015
0.25			0.367875			0.367875
0.27			0.397305			0.367875
0.3			0.44145			0.44145
0.21	0.25		0.309015	0.367875		0.67689
0.21	0.29		0.309015	0.426735		0.73575
0.25	0.29		0.367875	0.426735		0.79461
0.2	0.23	0.26	0.2943	0.338445	0.38259	1.015335
0.2	0.24	0.28	0.2943	0.35316	0.41202	1.05948
0.28	0.3	0.32	0.41202	0.44145	0.47088	1.32435

Tabela 2: Posição das massas e momento aplicado

Para analisar os dados obtidos, falta-nos saber a velocidade do rotor (determinada experimentalmente) e a velocidade de precessão ($\Omega = \frac{2\pi}{T}$).

$\tau [N \cdot m]$	$\omega [rad/s]$	$\Omega [rad/s]$	$\omega \cdot \Omega [(rad/s)^2]$
0.309	380.342	0.191	72.461
0.368	383.274	0.231	88.536
0.397	384.426	0.242	92.901
0.441	382.960	0.269	103.182
0.677	386.102	0.406	156.918
0.736	384.007	0.442	169.795
0.795	387.254	0.489	189.206
1.015	386.939	0.623	240.953
1.059	386.730	0.655	253.378
1.324	386.311	0.813	314.006

Tabela 3: Tratamento de resultados

A partir da tabela anterior, construímos o gráfico do momento aplicado em função do produto das velocidades do rotor e de precessão. O declive da reta de regressão linear dá-nos o momento polar de inércia.

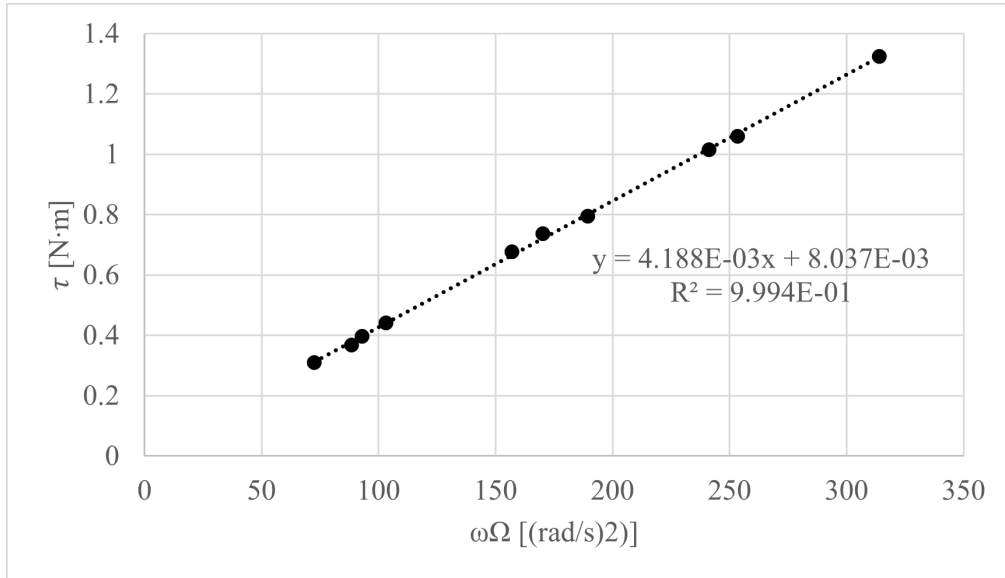


Figura 5: Momento aplicado em função do produto das velocidades do rotor e de precessão

Analisando o valor obtido, verificamos que foi possível determinar o valor do momento polar de inércia com um erro de 4.6 %.

5 Conclusões

Tendo por base a análise feita no tratamento de resultados, através do cálculo do erro percentual entre o valor teórico e o experimental do momento polar de inércia (relativamente baixo: 4,6%) e a relativa proximidade dos valores da velocidade de rotação do motor (aproximadamente constante), acreditamos que foi possível corroborar as previsões feitas anteriormente.

De facto, através do tratamento dos resultados consegue-se verificar a existência de uma relação de proporcionalidade direta entre o momento aplicado e o produto das velocidades do rotor e de precessão, sendo a constante de proporcionalidade direta o momento polar de inércia. Isto é equivalente a afirmar que o momento aplicado e velocidade de precessão do disco são diretamente proporcionais, quando a velocidade do rotor é constante, sendo o momento angular a constante de proporcionalidade.

Além disso, também foi possível verificar que a ordenada na origem ($8,037\text{E-}3$) está próxima de zero, tal como esperado quando o produto das velocidades em questão é nulo. Apesar do erro reduzido, é possível identificar alguns fatores que poderão ter efeitos indesejados na experiência:

1. Movimentos de oscilação vertical indesejados, principalmente no momento após serem colocados novos pesos. Estes movimentos levam a uma diminuição da energia relativa à precessão e consequentemente a que velocidade de precessão seja inferior;
2. O recurso a um cronómetro manual pode levar a uma incorreta medição do período de precessão;
3. O posicionamento incorreto do tacómetro, causado pela instabilidade do suporte, ou o facto de o instrumento não estar a apontar devidamente para o local da fita adesiva, pode levar a uma medição pouco precisa do número de rotações por minuto.

Ao mesmo tempo, foi ainda possível confirmar que, devido ao elevado momento angular que o disco do giroscópio apresenta, este instrumento possui uma elevada resistência à mudança de direção, quando sujeito a perturbações pontuais exteriores. Desta forma, este demonstra ser bastante eficaz em equipamentos que necessitem seguir uma trajetória bem definida.

6 Bibliografia

- [1] VF.P. Beer, E.R. Johnston Jr., D. Mazurek, P.J. Cornwell, *Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics*: 2019 McGraw-Hill Education
- [2] E.J.L. Meriam, L.G. Kraige, J.N. Bolton, *Engineering Mechanics: Dynamics*: 2018 Wiley
A.N. Other & S.O.M. Ebody 2004
- [3] ER.C. Hibbeler, *Engineering Mechanics: Statics & Dynamics*: 2016 Pearson