数理逻辑期末复习资料

2025 年 6 月 7 日

楼雅潇

第一章：习题类型分类

- 判断某串是否为命题公式；
- 证明某类集合等于 PF（命题公式集合)；
- 归纳法证明性质（如空串不属于 PF)；
- 唯一可读性定理相关：公式结构拆解或结构唯一性；
- 子公式（subformula）识别；
- 使用公式归纳法证明集合恒包含 PF；
- 构造满足性质的集合。

题型一：判断一个字符串是否是命题公式

题目示例（例 1.1.6)：判断字符串

$$(\neg((p_1 \vee (\neg p_2)) \wedge ((\neg p_1) \vee ((\neg p_2) \to (\neg(\neg p_3))))))$$

是否为命题公式。

SOP（步骤)：

1. 识别原子命题，如 p_1, p_2 等；
2. 从内向外进行组合判断：
    - 如果 $A \in PF$，则 $\neg A \in PF$；
    - 如果 $A, B \in PF$，则 $(A \vee B), (A \wedge B), (A \to B) \in PF$；
3. 递归判断每一步是否满足定义 (F1)-(F3)。

题型二：使用公式归纳法证明集合恒包含 PF

题目示例（定理 1.2.1）：设 X 满足 PF 定义的 F1-F3，证明 $X = PF$。

SOP：

1. 写出 PF 是满足 F1-F3 的最小集合；
2. 令 $\mathcal{S}$ 为所有满足 F1-F3 的集合；
3. $PF = \min \mathcal{S} = \bigcap \mathcal{S}$；
4. 若 X 满足 F1-F3，则 $PF \subseteq X$；
5. 故 $X = PF$。

题型三：用归纳法证明“空串不是 PF 元素”（引理 1.2.2）

SOP：

1. 定义 $X = PF \setminus \{\emptyset\}$；
2. 检查 X 是否满足 F1–F3：
   - F1：原子式不是空串，OK；
   - F2, F3：加上逻辑符号和括号后长度一定不为 0；
3. 由归纳法一得 $X = PF$，即 $\emptyset \notin PF$。

题型四：唯一可读性定理相关

题目目标: 证明 PF 中每个公式都只能按一种方式解析为基本结构（如 $\neg A$、$(A \wedge B)$ 等）。

SOP：

1. 使用“公式归纳法二”或“最小原子前缀”结构分析；
2. 对比公式结构的首尾括号结构，逐层剥离；
3. 用最小原子符号 / 括号匹配法拆解子式；
4. 检查是否能有多个结构方式，构造反证唯一性。

题型五：支集（support）识别

题目示例：求公式 $((p_1 \wedge (\neg p_2)) \rightarrow p_3)$ 的支集。
SOP：

1. 从最外层括号开始解析；
2. 找出所有出现的原子命题符号；
3. 去重后写出集合形式。

题型六：构造满足性质的集合（用于归纳证明）

题目示例：构造集合 $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid PF_n \subseteq X\}$，以便用普通归纳法证明 $PF \subseteq X$。
SOP：

1. 定义 PF_n = 所有长度不超过 n 的公式；
2. 设 $Y = \{n \mid PF_n \subseteq X\}$；
3. 用数学归纳法证明 $Y = \mathbb{N}$；
4. 最后推出 $X = PF$。

习题 1.6.1 解答（命题逻辑讲义第 1 章）

题目内容

判断以下有穷串哪些是公式，哪些不是公式：

1. $(p_3 \wedge \neg p_4)$
2. $((\neg(p_1 \wedge p_2)) \rightarrow ((\neg p_1) \vee (\neg p_2)))$
3. $p_1 \rightarrow (\neg p_2)$
4. $(p_3 \vee (p_1 \rightarrow (\neg p_2)))$
5. p_1
6. $p_1 p_2$
7. $(\neg\neg p_1)$
8. $(\neg(\neg p_1))$

解题 SOP（判断命题公式）

- 核查是否符合命题公式 PF 的定义规则（F1–F3）：
  - F1：单个原子命题 p_i 是公式；
  - F2：若 A 是公式，则 $(\neg A)$ 是公式；
  - F3：若 A, B 是公式，则 $(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \to B)$ 是公式。
- 检查括号是否匹配，联结词是否合理出现；
- 判断是否为有效嵌套结构（例如 $(\neg(\neg p_1))$ 是合法的）。

解答说明

- (1) $(p_3 \wedge \neg p_4)$：对合取式，p_3 与 $\neg p_4$ 均为合法子公式。
- (2) $((\neg(p_1 \wedge p_2)) \to ((\neg p_1) \vee (\neg p_2)))$：对多层嵌套结构，每一步都合法。
- (3) $p_1 \to (\neg p_2)$：错缺少外层括号，不符合 $(A \to B)$ 的形式。
- (4) $(p_3 \vee (p_1 \to (\neg p_2)))$：对构造合法，外层析取，内层蕴含。
- (5) p_1：对原子命题，满足 F1。
- (6) $p_1 p_2$：错两个命题变元无联结词，不符合 PF 构造规则。
- (7) $(\neg\neg p_1)$：错括号不匹配，应写作 $((\neg(\neg p_1)))$。
- (8) $(\neg(\neg p_1))$：对符合 F2 的嵌套否定式。

总结表格

习题 1.6.2 解答（命题逻辑讲义第 1 章）

题目内容

验证以下集合是否等于命题公式集合 PF，并说明理由：

(1) 所有不包含括号的符号串；

(2) 所有括号数等于联结词数的符号串；

序号	有穷串	是否为公式	理由
1	$(p_3 \wedge \neg p_4)$	是	合取式
2	$((\neg(p_1 \wedge p_2)) \to ((\neg p_1) \vee (\neg p_2)))$	对是	嵌套合法
3	$p_1 \to (\neg p_2)$	否	缺少括号
4	$(p_3 \vee (p_1 \to (\neg p_2)))$	是	构造合法
5	p_1	是	原子公式
6	$p_1 p_2$	否	非法连接
7	$(\neg\neg p_1)$	否	缺失外括号
8	$(\neg(\neg p_1))$	是	双否定结构合法

(3) 所有满足支集有限的公式；

(4) 所有能由有限步应用定义 1.1.4（F1–F3）构造出的符号串；

(5) 所有满足唯一可读性的符号串。

解题 SOP（集合是否等于 PF）

- 明确 PF 的定义：
  - PF 是最小满足 F1–F3 的集合；
  - 可由归纳构造定义生成；
  - 支集为有限集合；
  - 每个公式满足唯一可读性。
- 对每个集合判断其是否包含 PF 所有元素，或包含不属于 PF 的串。

解答分析

(1) 所有不包含括号的符号串：
不等于 PF。仅包含原子公式 p_i，不包含任何复合公式（如 $(p_1 \to p_2)$），显然小于 PF。

(2) 所有括号数等于联结词数的符号串：
不等于 PF。反例：$(\neg(\neg p_1))$ 中括号数为 4，联结词数为 2；否定式每层增加两括号，不增加联结词，故该集合不包含所有 PF 中公式。

(3) 所有满足支集有限的公式：
等于 PF。PF 中每个公式支集均有限，反之若符号串支集有限且满足 F1–F3，则属于 PF。

(4) 所有能由有限步应用 F1–F3 构造出的符号串：
等于 PF。这是 PF 的定义本身，等价于归纳定义。

(5) 所有满足唯一可读性的符号串：
等于 PF。由唯一可读性定理知，PF 中每个公式具有唯一解析方式，反向也成立。

总结表格

条目	集合描述	是否等于 PF	理由
1	不含括号的符号串	否	仅含原子公式，缺少复合公式
2	括号数 = 联结词数的符号串	否	否定式不满足该条件
3	支集有限的公式	是	PF 中所有公式支集有限
4	满足 F1–F3 构造的符号串	是	定义等价于 PF
5	满足唯一可读性的符号串	是	PF 的基本性质

习题 1.6.3 解答

题目内容

设集合

$$X = \{A \in PF \mid \text{A 中每个原子命题符仅出现一次}\}$$

请判断：是否存在公式 $A \in PF$，使得某个子公式 B 满足 $B \notin X$？

解题 SOP（判断集合是否封闭）

目标：验证是否存在公式 $A \in PF$，其子公式 $B \notin X$。

步骤一：理解集合 X 的定义

集合 X 包含所有原子命题符不重复的公式。例如：

- $p_1 \in X$；

- $(p_1 \wedge p_2) \in X$；
- $(p_1 \wedge p_1) \notin X$。

步骤二：构造一个反例公式 A

目标是找到：

$$A \in PF, \quad B \text{ 是} A \text{ 的子公式}, \quad B \notin X$$

设：

$$A = ((p_1 \wedge p_1) \to p_2)$$

分析如下：

- $A \in PF$，合法命题公式；
- A 中 p_1 出现两次，故 $A \notin X$；
- $B = (p_1 \wedge p_1)$ 是 A 的子公式；
- B 中 p_1 出现两次，故 $B \notin X$；

但该例不满足 $A \in X$，我们需要的是 $A \in X$ 而 $B \notin X$。
修正目标：找到 $A \in PF$ 且 $A \in X$，但存在 B 是其子公式，$B \notin X$。
考虑以下构造：

$$A = ((p_1 \wedge p_2) \to (p_1 \vee p_3))$$

分析：

- p_1 出现两次　$A \notin X$；
- $B = (p_1 \wedge p_2)$ 是子公式，p_1 出现一次　$B \in X$；
- 不满足条件，需换构造。

最终反例构造如下：

$$A = ((p_1 \wedge p_1) \to p_2)$$

验证三条件：

1. $A \in PF$；
2. 子公式 $B = (p_1 \wedge p_1)$；
3. $B \notin X$（因 p_1 重复）；

满足要求。

结论

确实存在命题公式 $A \in PF$，其某个子公式 B 不属于 X。

例子：

$$A = ((p_1 \wedge p_1) \to p_2), \quad B = (p_1 \wedge p_1)$$

通用解题模板 SOP

1. 明确集合定义，判断其封闭性；
2. 使用反例构造法，设计“整体合法但局部非法”的公式；
3. 检查原子符号重复性；
4. 验证三条件：
   - $A \in PF$;
   - B 是 A 的子公式；
   - $B \notin X$。

1 习题 1.6.4

题目内容：用公式归纳法证明：每个命题公式 A 都满足以下两条中的一条但不同时满足：

A 是原子式；

A 的第一个符号是左括号 (。

解题目标简化

我们要证明：

$\forall A \in PF$，A 要么是原子式，要么第一个符号是 (；

且不能同时是原子式且首符号是 (（这点显然，因为原子式的形式是 pi，不含括号)；

方法要求是公式归纳法（即根据 PF 的归纳定义 F1–F3 来做结构归纳）。

解题 SOP（使用公式归纳法进行结构判断）

Step 1：引入公式归纳法的目标集合

令集合

X = A ∈ PF : A 是原子式，或 A 的首符号为 (，但不同时满足这两条

我们的目标是用公式归纳法证明：X = PF。

Step 2：验证 X 是否满足 F1–F3：
(F1)：原子式 p_i ∈ PF，显然满足“是原子式”，且不是以 (开头 ∈ ∈ X；
(F2)：若 A ∈ X，则 $(\neg A)$ 是公式；
$(\neg A)$ 首符号是 (→ 满足条件 2；
$(\neg A)$ 不是原子式 → 满足互斥性；
所以 $(\neg A)$ ∈ X；
(F3)：若 A, B ∈ X，则 (A ∧ B)、(A ∨ B)、(A → B) 均是公式；
开头是 (，不是原子式 → 满足条件 2；
所以它们也在 X 中。
所以 X 满足公式定义的三条构造规则 (F1–F3)；
PF 是满足 F1–F3 的最小集合 → PF ⊂ X → X = PF。

结论：

每一个 A ∈ PF：
要么是原子式；
要么首符号为 (；
且不会同时满足这两条。
SOP 总结：结构类归纳命题通用模板（适用于所有“公式结构”判断）：
设集合 X 为满足目标性质的公式集合；
验证 X 是否满足公式定义 F1–F3：
原子式是否满足目标；
由旧公式构造出的新公式是否仍满足目标；
若满足，则 X = PF（由归纳法一）；
可加以辅助反证法说明互斥性/唯一性。

第二章核心内容与题型整理

第二章核心内容框架

- **2.1**：赋值（valuation）与真值函数 $\hat{v}$ 定义
- **2.2**：真值表与公式重言式/矛盾式/可满足性判定
- **2.3**：公式中的代入（substitution）
- **2.4**：语义后承（semantic consequence）
- **2.5**：习题（共 7 题）

题型分类与通用 SOP

类型一：真值表构造与逻辑性质判定

对应题目：2.5.1、2.5.2、2.5.6
考察目标：判定公式是：

- 重言式（tautology）：在所有赋值下真；
- 矛盾式（contradiction）：在所有赋值下假；
- 可满足式（satisfiable）：存在某个赋值下为真。

SOP：

1. 写出公式中出现的所有原子命题符；
2. 构造 2^n 个赋值行的真值表；
3. 利用递归定义计算 $\hat{v}(A)$；
4. 判断 $\hat{v}(A)$ 是否在所有行恒为 1 / 恒为 0 / 至少存在一行为 1。

类型二：公式代入

对应题目：2.5.3
考察目标：使用定义 2.3.2 中的替代规则，形式替换原子命题符。
SOP：

1. 写出被替换符号及其目标公式；
2. 按照公式结构进行自上而下的替代；
3. 保持每个替换的位置符合原公式嵌套结构；
4. 最终检查新公式语法是否合法。

类型三：引理证明（赋值、语义局部性、语义后承）

对应题目：2.5.4、2.5.5
考察目标：

- 使用公式归纳法；
- 分析否定式、合取式、蕴含式等逻辑形式；

- 引入赋值函数与支集限制；

SOP：

1. 使用归纳法：设集合 X 为满足性质的公式；
2. 检查是否满足构造规则 F1–F3；
3. 若需逻辑等价，逐项使用赋值定义、支集限制等；
4. 可适当构造反赋值或极端赋值进行反证或对照。

类型四：判断公式间的语义蕴涵关系

对应题目：2.5.7（复杂应用场景的语义分析）
考察目标：

- 判断 $\Gamma \models A$ 是否成立；
- 识别不可满足集合的蕴涵“爆炸”性质；
- 分析多个公式之间的语义矛盾与推导结构。

SOP：

1. 将自然语言翻译为命题公式；
2. 构造全部可能模型或构造一个反模型（使前件为真而结论为假）；
3. 应用以下基本原则：
   - 若 Γ 不可满足，则 $\Gamma \models A$ 恒成立；
   - 若 $A \in \Gamma$，则 $\Gamma \models A$；
   - 若 $\Gamma \models A$ 且 $\Gamma \models B$，则 $\Gamma \models A \wedge B$。

命题逻辑第二章习题详解

第二章：命题逻辑的语义

习题 2.5.1

写出以下公式的真值表：

$$((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to p_3))$$

构造真值表如下：

p_1	p_2	p_3	$p_2 \to p_3$	$p_1 \to (p_2 \to p_3)$	$p_1 \to p_2$	$(p_1 \to p_2) \to p_3$	全式
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

结论：该公式为可满足式，但不是重言式。

习题 2.5.2

证明公式 $((p_1 \vee \neg p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_2))$ 是重言式。
说明：因为对任意命题变元 p，命题 $p \vee \neg p$ 恒为真（排中律），所以其合取也恒为真 是重言式。

习题 2.5.3

设 A = $((p_1 \wedge p_2) \to p_3)$，设替换为：

$$p_1 \mapsto (p_3 \to p_1), \quad p_2 \mapsto \neg p_2, \quad p_3 \mapsto p_1$$

代入结果为：

$$(((p_3 \to p_1) \wedge \neg p_2) \to p_1)$$

习题 2.5.4

设 A = $(B \to C)$，若对任意赋值 v 有 $\hat{v}(B) = \hat{v}(C)$，证明 $\hat{v}(A) = 1$。
说明：唯一使 $\hat{v}(B \to C) = 0$ 的情况是 $\hat{v}(B) = 1, \hat{v}(C) = 0$，但 $\hat{v}(B) = \hat{v}(C)$ 不会出现此种情形 恒为真。

习题 2.5.5

设 A = $((B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$，说明此为重言式。
解释：这正是“假言三段论”的逻辑展开形式，是经典逻辑有效推理形式之一 是重言式。

习题 2.5.6

公式 $((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2))$ 是否为重言式?
展开分析发现该式等价于 p_1，即：$p_1 \wedge (p_2 \vee \neg p_2)$ 由于析取项恒真，故整个式子等价于 p_1，为可满足式但不是重言式。

习题 2.5.7

设 $\Gamma = \{p, \neg p\}$，判断 $\Gamma \models A$ 是否成立?
说明：由于 Γ 中包含自相矛盾公式 Γ 不可满足 根据“爆炸律”，$\Gamma \models A$ 对任意 A 都成立。

总览

本手册整理自《命题逻辑讲义》第二章“命题逻辑的语义”章节，内容完全依照课本与课堂定义（赋值、真值函数、PF 公式结构、语义后承等）所提供的方法，系统总结每道课后习题的标准解题步骤（SOP）。

习题 2.5.1：构造真值表并判断性质

题型：判断公式是重言式 / 矛盾式 / 可满足式。
SOP：

1. 写出公式涉及的所有原子命题符；
2. 构造 2^n 个赋值 $v : At \to \{0, 1\}$；
3. 使用课本定义递归计算 $\hat{v}(A)$：

$$\hat{v}(\neg A) = 1 - \hat{v}(A), \quad \hat{v}(A \wedge B) = \min\{\hat{v}(A), \hat{v}(B)\}$$

$$\hat{v}(A \vee B) = \max\{\hat{v}(A), \hat{v}(B)\}, \quad \hat{v}(A \to B) = \max\{1 - \hat{v}(A), \hat{v}(B)\}$$

4. 检查 $\hat{v}(A)$ 在所有赋值下的取值：
   - 恒为 1：重言式；
   - 存在 1：可满足式；
   - 恒为 0：矛盾式。

习题 2.5.2：验证重言式

SOP：

1. 利用恒等律：$p \vee \neg p$ 恒真；
2. 合取两个恒真公式仍为恒真；
3. 推出该式为重言式，无需构造真值表。

习题 2.5.3：公式的代入

SOP：

1. 写清原公式结构；
2. 使用定义 2.3.2 按结构递归替换原子命题；
3. 对于公式 $A = (A_1 \to A_2)$，有：

$$A[p_i/B_i] = (A_1[p_i/B_i] \to A_2[p_i/B_i])$$

4. 按顺序完成全部替换后验证结构合法性。

习题 2.5.4：根据假设恒等推出恒真

SOP：

1. 假设对任意 v 有 $\hat{v}(B) = \hat{v}(C)$；
2. 回忆 $\hat{v}(B \to C)$ 唯一为 0 的情况为：

$$\hat{v}(B) = 1 \text{ 且} \hat{v}(C) = 0$$

3. 由于两者恒等，不可能出现该情形；
4. 所以 $\hat{v}(B \to C) = 1$ 恒成立。

习题 2.5.5：结构恒真公式

SOP：

1. 分析结构，识别其为经典推理形式（如假言三段论）；

2. 可选两种方法：
   - 构造真值表验证 8 个赋值；
   - 结构推演：按定义拆分并判断每一层都为 1。

习题 2.5.6：公式简化判断逻辑性质

SOP：

1. 使用合取/析取分配律化简公式结构：

$$(p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) = p_1 \wedge (p_2 \vee \neg p_2)$$

2. 根据排中律化简为 p_1；
3. 判断 p_1 不是重言式　该式为可满足式。

习题 2.5.7：不可满足前提集蕴涵任意公式

SOP：

1. 根据定义，$\Gamma \models A \iff$ 所有满足 Γ 的赋值都满足 A；
2. 若 $\Gamma = \{p, \neg p\}$，无赋值能同时满足两者　不可满足；
3. 根据课本“语义爆炸律”定理：

$$\text{若}\Gamma\ \text{不可满足，则对任意}A\text{，}\Gamma \models A$$

第三章题型与解题步骤（SOP）

类型一：构造等价的析取范式或合取范式（3.6.1，3.6.2）

目标：找出一个析取/合取范式 B，使得 $\mathrm{Mod}(A) = \mathrm{Mod}(B)$。
SOP：

1. 写出公式 A 的支集 $\mathrm{suppt}(A)$，确定变量数 n；
2. 构造真值表，找出所有满足 A 的赋值集合 S；
3. 对于每个满足赋值 v，构造一个极小项（minterm）：

$$L_i^v = \begin{cases} p_i, & \text{若} v(p_i) = 1 \\ \neg p_i, & \text{若} v(p_i) = 0 \end{cases}$$

4. 构造 $\delta_v = \bigwedge_{i=1}^n L_i^v$；
5. 析取范式：$B = \bigvee_{v \in S} \delta_v$；
6. 可引用讲义第 3.3 节布尔展开式定理作为理论支持。

类型二：集合表示与公式构造（3.6.3–3.6.5）

目标：将模型集合表达为集合运算（差、交、并、补），构造等价公式。
SOP：

1. 写出目标集合 $S \subseteq \{0,1\}^n$；
2. 找出属于 S 的赋值（或排除不属于 S 的）；
3. 使用集合逻辑等价规则：

$$\begin{aligned} A \wedge B &= \mathrm{Mod}(A) \cap \mathrm{Mod}(B) \\ A \vee B &= \mathrm{Mod}(A) \cup \mathrm{Mod}(B) \\ \neg A &= \overline{\mathrm{Mod}(A)} \\ A \to B &= \overline{\mathrm{Mod}(A)} \cup \mathrm{Mod}(B) \end{aligned}$$

4. 用极小项或极大项表示所需模型；
5. 验证 $\mathrm{Mod}(A) = S$。

类型三：判断集合是否可由特定语言构造（3.6.6–3.6.8）

目标：判断是否存在公式 A，仅用 $\{\wedge, \vee, \to\}$ 构造，使 $\mathrm{Mod}(A) = S$。
SOP：

1. 明确该语言中 **不允许使用否定符号** $\neg$；
2. 若 S 不是"否定封闭"的集合（如缺少一个赋值），则可能无法构造；
3. 对每个赋值 $v \notin S$，构造排除它的析取项 δ_v；
4. 用 $\vee$ 和 $\wedge$ 组合这些项，得到 A；
5. 验证 $\mathrm{Mod}(A) = S$；
6. 若构造失败，说明该集合不能在该语言中定义。

类型四：NP-完全问题的逻辑编码（3.6.9–3.6.11）

目标：将组合问题（如 Vertex Cover / Set Packing）转化为 SAT 问题。
SOP（以 Vertex Cover 为例）：

1. 给定图 $G = (V, E)$，设顶点编号为 $1, 2, \ldots, n$；
2. 定义命题变量 p_i 表示“点 i 被选入顶点覆盖”；
3. 对每条边 (i, j)，构造约束公式：
$$p_i \vee p_j$$
表示“至少一个端点被选中”；
4. 加入大小限制（如 $\leq k$），构造“至多 k 个为真”的合取表达；
5. 全部公式取合取得到 A；
6. 若 A 可满足　原图存在顶点覆盖。

类型五：范式的简化与等价判定（附加练习）

目标：判断两个范式是否等价，是否可进一步化简。
SOP：

1. 写出两个范式对应的真值表或极小项集合；
2. 判断其模型集合是否一致；
3. 若某一极小项被其他项蕴涵，则可尝试删去；
4. 使用讲义例 3.4.1 中的标准形式作为简化模板：
$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \equiv q$$

第三章习题解答整理

习题 3.6.1

题目：设 $X = ((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to p_3))$，找一个析取范式 B，使得 $\mathrm{Mod}(X) = \mathrm{Mod}(B)$。

解答思路：

1. 构造公式 X 的真值表；
2. 找出所有使得 $\hat{v}(X) = 1$ 的赋值；
3. 对每一个满足赋值 v_i，构造极小项 m_{v_i}；
4. 将所有极小项析取，得析取范式。

示例：
若某赋值满足 $p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 0$，对应极小项为：$\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$。
最终析取范式形如：

$$B = (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee \cdots \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$$

（具体项根据真值表中成立的赋值展开）

习题 3.6.2

题目：找一个合取范式 C，使得 $\mathrm{Mod}(X) = \mathrm{Mod}(C)$，其中 X 同上。
解答思路：

1. 找出所有不满足 X 的赋值（即 $\hat{v}(X) = 0$）；
2. 对每个不满足赋值 v_i，构造其否定极大项（析取式）；
3. 所有这些式子合取，构成合取范式。

范式结构：

$$C = (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge \cdots \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)$$

习题 3.6.3

题目：证明：对任意公式 A，都存在 $B \in PF(\neg, \vee)$，$C \in PF(\neg, \rightarrow)$，使得

$$\mathrm{Mod}(A) = \mathrm{Mod}(B) = \mathrm{Mod}(C)$$

解答：
根据 3.2.3 定理，使用公式归纳法证明 PF 中每个公式都可以重写为仅使用 $\neg, \vee$ 或 $\neg, \rightarrow$ 的等价公式。

示例替换规则：

$$A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \quad \text{或} \quad A \wedge B \equiv \neg(A \to \neg B)$$

因此，通过归纳替代法可构造所需 B 和 C。

习题 3.6.4

题目：定义 $PF(\oplus)$，其中 $\hat{v}(A \oplus B) = 1 \iff \hat{v}(A) \neq \hat{v}(B)$。证明：若 v_0 是在所有命题符上取 0 的赋值，则对所有 $A \in PF(\oplus)$ 有 $\hat{v}_0(A) = 0$。

解答：

使用归纳法：

- **基础情况**：若 A 是原子命题 p_i，则 $\hat{v}_0(p_i) = 0$；
- **归纳步骤**：若 $\hat{v}_0(A) = \hat{v}_0(B) = 0$，则

$$\hat{v}_0(A \oplus B) = 0$$

因为 $\oplus$ 在输入相等时输出 0，故任意 $PF(\oplus)$ 中的公式在全 0 赋值下取值为 0。

习题 3.6.5

题目：找出公式

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge \neg p_3)$$

的所有素蕴含项。

解答思路：

1. 将公式写为析取范式；
2. 每个合取项尝试去除冗余文字；
3. 合取项若不能再缩减，且仍为整式赋值模型　即为素蕴含项。

结果：

素蕴含项包括：

- $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$
- $p_2 \wedge \neg p_3$

习题 3.6.6

题目：给定 $v \in \mathrm{Mod}_4$，其中

$$v(p_0) = v(p_1) = 1, \quad v(p_2) = v(p_3) = 0$$

构造 $A \in PF_4(\wedge, \vee, \to)$，使得 $\mathrm{Mod}_4(A) = \mathrm{Mod}_4 - \{v\}$。

解法：

1. 找出使 v 成立的文字集合：$p_0, p_1, \neg p_2, \neg p_3$；
2. 构造极小项：
$$M_v = (p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$$
3. 构造其补集对应的公式 $\neg M_v$；
4. 转换为 $\{\wedge, \vee, \to\}$ 语言下的等价表达：
$$A = (p_0 \to (p_2 \vee p_3)) \vee \neg p_0 \vee \neg p_1$$
或通过标准替代规则进行形式化重写。

习题 3.6.7

题目：设 $v \in \mathrm{Mod}_n$ 且 $v \neq 1_n$，证明存在 $A \in PF_n(\wedge, \vee, \to)$，使得 $\mathrm{Mod}_n(A) = \mathrm{Mod}_n - \{v\}$。

解法：

- 类似 3.6.6 构造唯一"拒绝" v 的公式；
- 利用 $\neg p_i \equiv (p_i \to \perp)$ 表示否定；
- 极小项合取构造 M_v；
- 构造 $A = \neg M_v$，转换为 $\wedge, \vee, \to$ 表达；
- 因 $v \neq 1_n$，总存在至少一个 $\neg p_i$，故替换可行。

习题 3.6.8

题目：若 $A \in PF_n$ 且 $1_n \models A$，则存在 $B \in PF_n(\wedge, \vee, \to)$，使得 $\mathrm{Mod}_n(B) = \mathrm{Mod}_n(A)$。

解法：

- 由 $1_n \models A$ A 在全真赋值下成立；
- 此类公式等价范式可只含正文字；
- 构造真值表，取所有使 A 成立的赋值；
- 去除其中出现的否定文字，写成析取范式；
- 所得公式 B 仅含 $\wedge, \vee, \to$，等价于 A。

习题 3.6.9（顶点覆盖编码）

题目：将图 $G = (V, E)$ 和自然数 k 转化为公式 $A \in PF$，使得

$$A \text{ 可满足} \Leftrightarrow G \text{ 有大小} \leq k \text{ 的顶点覆盖}$$

解法：

1. 为每个顶点 $v_i \in V$ 定义变量 p_i；
2. 对每条边 $(v_i, v_j) \in E$，加入公式：
$$p_i \vee p_j$$
3. 所有边的条件合取得：
$$A_1 = \bigwedge_{(v_i, v_j) \in E} (p_i \vee p_j)$$
4. 限制选中点数 $\leq k$：
   - 方法一：穷举所有 $\leq k$ 个变量为真的赋值集合，构造析取；
   - 方法二：引入辅助变量，构造计数限制（复杂度更高）。
5. 最终公式 $A = A_1 \wedge A_2$。

习题 3.6.10

题目：估算 3.6.9 中构造的公式 A 的长度，用顶点数 n 和 k 表示。
解法：

- 每条边产生一个子式，若边数为 m，则：

$$O(m)$$

- 限制至多 k 个变量为真 构造：

$$\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{i}$$

  项，每项长度为 $O(i)$；

- 故总长度为：

$$O(m)+O\left(\sum_{i=1}^{k} i\cdot\binom{n}{i}\right)=O(m+n^k)$$

习题 3.6.11

题目：将集合打包问题（set packing）转化为逻辑公式的可满足性问题。
解法：

1. 每个集合 $S_i\subseteq U$ 对应布尔变量 p_i：表示"是否选中 S_i"；
2. 对于任意两个 S_i, S_j，若 $S_i\cap S_j\neq\emptyset$，加入约束：

$$\neg(p_i\wedge p_j)\equiv\neg p_i\vee\neg p_j$$

3. 所有此类冲突项取合取：

$$A_1=\bigwedge_{\text{不合法对}}(\neg p_i\vee\neg p_j)$$

4. 限制选中至少 t 个集合：
   - 构造所有大小为 $\geq t$ 的真值模式对应的析取表达；
   - 或辅助变量实现大小限制。
5. 最终公式：

$$A=A_1\wedge A_2$$

第四章《紧致性定理》习题类型与解题步骤（SOP）

类型一：证明紧致性定理（Compactness）

关键词：有限可满足 $\Rightarrow$ 可满足；构造赋值 v
典型题目：给定 Γ 有穷可满足，证明其整体可满足。
SOP：

1. **构造公式序列**：令 $\Gamma = \{A_0, A_1, \dots\}$，定义 $B_n = A_0 \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$；
2. **构造二叉树** T：
   - 节点为有限 01 串 σ；
   - 若存在赋值 v 使得 $v \models B_n$ 且 $v(p_i) = \sigma_i$，则 $\sigma \in T$；
3. **应用弱柯尼希引理（WKL）**：若 T 为无限二叉树　存在一条无限路径　得赋值 v；
4. **定义赋值** v：令 $v(p_i) =$ 路径第i 位，可证其满足所有 A_i。

类型二：用紧致性定理反推弱柯尼希引理 / 聚点定理

关键词：PF 公式集合构造；极限结构提取
SOP（聚点定理方向）：

1. 给出实数序列 $\{x_n\} \subseteq [0, 1]$，写出其二进制展开；
2. 将前缀编码为命题公式，构造公式集合 $\Gamma = \{A_n\}$，每个 A_n 表示“某前缀在某个 x_n 中出现”；
3. 每个有限子集 Γ' 可满足　Γ 有穷可满足；
4. 由紧致性定理　整体 Γ 可满足；
5. 利用赋值 v 重构实数 x，可证其为原序列的聚点。

类型三：四色定理与图染色（推导 N-染色）

关键词：图染色问题的可满足性表示；无限图构造
SOP：

1. 给定图 $G = (V, E)$，令每个点 v_i 用 4 个命题符表示颜色：

$$p_{4i}，p_{4i+1}，p_{4i+2}，p_{4i+3}$$

   表示染为 0–3；

2. 构造公式集合 Γ：
   - 每个点染一种颜色：
   $$p_{4i} \vee p_{4i+1} \vee p_{4i+2} \vee p_{4i+3}$$
   - 每个点不可染两种颜色：
   $$p_{4i+k} \to \neg p_{4i+l}, \quad k \neq l$$
   - 相邻点不能同色：
   $$p_{4i+k} \to \neg p_{4j+k}, \quad \{v_i, v_j\} \in E$$

3. 若任意有限子图 G' 可 4-染色　每个有限子集 Γ' 可满足；

4. 应用紧致性定理　整体 Γ 可满足　得到无限图染色函数。

类型四：扩张引理的证明（Lindenbaum 引理简化版）

关键词：对任意公式 A，集合 $\Gamma \cup \{A\}$ 与 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 至少一个有穷可满足。
SOP：

1. 假设 Γ 有穷可满足；

2. 对任意公式 A：
   - 若 $\Gamma \cup \{A\}$ 不有穷可满足；
   - 则 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 必须有穷可满足（否则违反紧致性定理）；

3. 使用此引理可构造极大一致集 Λ，满足对任意 A，有 $A \in \Lambda$ 或 $\neg A \in \Lambda$。

SOP 总结

- 紧致性定理：从有穷可满足出发，构造赋值 v 或应用 WKL 得到路径。
- 聚点定理：将实数集合编码为公式集合 Γ，构造收敛点。
- 四色定理与图染色：建立颜色命题符、有限染色约束，构造 Γ。
- 扩张引理：任意公式 A，$\Gamma \cup \{A\}$ 与 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 至少一有穷可满足。
- 有限蕴涵性：若 $\Gamma \vDash A$，则存在有限 $\Delta \subseteq \Gamma$ 使 $\Delta \vDash A$。

习题详解

习题 4.5.1

证明极大有穷可满足集合的三个等价定义。

解答：

1. $(1) \Rightarrow (2)$：若 $A, \neg A \notin \Lambda$，可扩张 Λ，矛盾；
2. $(2) \Rightarrow (3)$：$A \in \Lambda \Rightarrow \Lambda \nvdash \neg A$；
3. $(3) \Rightarrow (1)$：若 $\Theta \supset \Lambda$ 有穷可满足，取 $A \in \Theta \setminus \Lambda$ 得 $\Lambda \vdash \neg A$，矛盾。

习题 4.5.2

设 Λ 是极大有穷可满足集合，证明：

- 若 $\Lambda \vDash A$，则 $A \in \Lambda$；
- $A \wedge B \in \Lambda \Leftrightarrow A \in \Lambda$ 且 $B \in \Lambda$；
- $A \vee B \in \Lambda \Leftrightarrow A \in \Lambda$ 或 $B \in \Lambda$；
- $A \to B \in \Lambda \Leftrightarrow \neg A \in \Lambda$ 或 $B \in \Lambda$。

习题 4.5.3

构造递归赋值 u 满足 Γ：

1. 对每 n 取 $v_n \models A_0 \wedge \cdots \wedge A_n$；
2. 若 $\{v_n\}$ 有限　取常值即可；

3. 定义 $V_0 = \{v_n\}$；
4. 递归定义 $u(p_n) = \min\{i : \text{在}V_n \text{ 中无限多}v(p_n) = i\}$；
5. 每步保留使得当前分量值固定的子集。

习题 4.5.4

若 $\Gamma \vDash A$，则存在有限子集 $\Delta \subseteq \Gamma$ 使 $\Delta \vDash A$。
解答：

1. 反设不存在这样的 Δ；
2. 则 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 有穷可满足 可满足；
3. 得到赋值 $v \models \Gamma$ 且 $v \models \neg A$；
4. 矛盾于 $\Gamma \vDash A$，故命题成立。

习题 4.5.5

图 G 有穷 4-可染色，证明其 4-可染色：
构造步骤：

- $p_{4n}, p_{4n+1}, p_{4n+2}, p_{4n+3}$ 表示点 v_n 染成颜色 0–3；
- 每点染色唯一性：$p_{4n} \vee p_{4n+1} \vee p_{4n+2} \vee p_{4n+3}$；
- 不可重染：$p_{4n+i} \to \neg p_{4n+j}$，$i \neq j$；
- 相邻点不同色：$p_{4m+i} \to \neg p_{4n+i}$。

若有限子图可染 Γ 有穷可满足 紧致性定理 G 可 4-染色。

习题 4.5.6

设 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 连续且 $f(0) \leq 0 \leq f(1)$，用逻辑方法证明存在 x 使 $f(x) = 0$。
解答：

1. 对每 n 构造公式 B_n，代表存在区间 $[a, a + 2^{-n}]$ 上 f 有符号变化；
2. 用 B_n 构造公式集合 $\Gamma = \{B_n\}$；
3. 每个 B_n 可满足 Γ 有穷可满足；
4. 应用紧致性定理 得赋值 v；

5. 利用 v 的前缀构造实数 x；
6. 连续性推得 $f(x)=0$。

命题逻辑第四章：紧致性定理证明整理

一、引理：有穷可满足性对子集封闭

若 Γ 有穷可满足，$A\in PF$，且 $\Gamma\cup\{A\}$ 不有穷可满足，则 $\Gamma\vDash\neg A$。

二、扩张引理（简化 Lindenbaum 引理）

若 Γ 有穷可满足，则存在 $\Lambda\supseteq\Gamma$，满足：

- Λ 有穷可满足；
- 对任意 $A\in PF$，恰有 $A\in\Lambda$ 或 $\neg A\in\Lambda$。

定义序列（记 $PF=\{A_0,A_1,A_2,\dots\}$）：

$$\Lambda_0=\Gamma,\quad \Lambda_{k+1}=\begin{cases}\Lambda_k\cup\{A_k\}, & \text{若}\Lambda_k\cup\{A_k\}\text{ 有穷可满足}\\ \Lambda_k\cup\{\neg A_k\}, & \text{否则}\end{cases}$$

最终令：$\Lambda=\bigcup_k\Lambda_k$。

三、紧致性定理的三种证明方式

1. 直接构造赋值

利用扩张引理中构造的 Λ 定义赋值：

$$u(p_i)=\begin{cases}1, & p_i\in\Lambda\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

再由 $\operatorname{supp}(A)$ 一致性知：若 $A\in\Lambda$，则 $u\models A$，故 $u\models\Gamma$。

2. 弱柯尼希引理（WKL）

- 构造二叉树 T 的节点为有限 01 串 σ，若存在赋值 $v\models A_0\wedge\cdots\wedge A_n$ 且 $v(p_i)=\sigma_i$；
- T 为无穷二叉树　存在无穷路径 $s_0s_1\dots$；
- 定义赋值 $u(p_i)=s_i$；
- 由支持集一致性可推出 $u\models\Gamma$。

3. 聚点定理构造极限赋值

- 将每个 v_n 编码为 $x_n \in [0,1]$，如：

$$x_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v_n(p_i)}{2^{3i+1}}$$

- 得实数序列 $\{x_n\}$，由聚点定理取收敛子列极限 $x = 0.b_0b_1\ldots$；
- 定义 $u(p_i) = b_i$；
- 则 $u \models \Gamma$ 成立。

四、四色定理与逻辑染色表达

命题变量

每个点 v_n 对应 4 个命题变量：

$$p_{4n}, p_{4n+1}, p_{4n+2}, p_{4n+3}$$

分别表示被染成颜色 0–3。

逻辑表达的约束公式集合 Γ

- 每点必须染一种颜色：

$$p_{4n} \vee p_{4n+1} \vee p_{4n+2} \vee p_{4n+3}$$

- 每点不能染两种颜色：

$$p_{4n+i} \to \neg p_{4n+j}, \quad \text{for } 0 \leq i < j < 4$$

- 相邻点不能染同一种颜色：

$$p_{4m+i} \to \neg p_{4n+i}, \quad 若\{v_m, v_n\} \in E$$

结论

若任意有限子图可 4-染色　Γ 有穷可满足　紧致性定理　Γ 可满足　存在全图合法赋值　整体图可 4-染色。

形式系统基础与典型推演 SOP

一、基本结构与术语

命题公理（Ax1–Ax10）

- **Ax1**: $A \to (B \to A)$
- **Ax2**: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- **Ax3–Ax10**：见讲义原文，涉及合取、析取、否定、双否等操作。

形式证明 / 推演（定义）

一个形式推演是有限长度的公式序列 $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$，每个 A_i 满足以下之一：

- 是某条命题公理；
- 或存在 $j, k < i$ 使得 $A_j = A_k \to A_i$，即 A_i 可由 A_k 与 $A_k \to A_i$ 应用 MP（Modus Ponens）推出。

二、典型 SOP 分类（标准解题步骤）

类型一：形式推演的构造（无前提）

目标：找出一串公式 $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$，满足 $A_n = C$，每步为公理或 MP。
SOP：

1. 确认结论目标 C；
2. 若结构为蕴含式，优先考虑 Ax1, Ax2 套壳；
3. 构造中间目标式，分解目标；
4. 明确每步使用哪条公理或 MP；
5. 写出每步并标注推理来源。

类型二：演绎定理应用

定理：若 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$，则 $\Gamma \vdash A \to B$
SOP：

1. 识别目标形如 $A \to B$；

2. 允许 A 作为前提构造 B；
3. 使用 MP 推出 B；
4. 最后使用演绎定理封装为 $A \to B$。

类型三：典型代数推理策略

例题目标：证明 $A \to A$
SOP：

1. 构造嵌套演绎定理链：
2. 首先证明 $A \to ((A \to A) \to A)$；
3. 然后证明 $A \to (A \to A)$；
4. 最终推出 $A \to A$，使用 MP 两次。

类型四：常用推演规则汇总

编号	名称与内容
$\to$-	MP 规则：从 A 与 $A \to B$ 推出 B
$\wedge+$	合取引入：由 A 与 B 推出 $A \wedge B$
$\wedge-$	合取去除：从 $A \wedge B$ 推出 A 或 B
$\vee+$	析取引入：从 A 推出 $A \vee B$；从 B 推出 $A \vee B$
$\vee-$	析取消去：若 $A \vee B$ 且 $A \to C$ 且 $B \to C$，则推出 C
$\neg+$	间接证明：若 $A \to \bot$，则推出 $\neg A$
$\neg-$	双否去除：从 $\neg\neg A$ 推出 A
反证法	若 $A \to \bot$，则 $\neg A$

类型五：有前提的推演结构

SOP：

1. 设置 $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots\}$ 为前提集合；
2. 推演中允许直接引用前提；
3. 剩余步骤依靠公理或 MP 推出；
4. 最后一行是所要证明的结论。

类型六：构造推演例子（典型句式）

SOP：

1. 若目标为蕴含式 多层嵌套演绎；
2. 若为合取、析取 适用合取/析取引入规则；
3. 若含嵌套结构 拆解中间子式作为子结论；
4. 用 MP 将各层逻辑主干连接起来。

第五章习题解答整理

习题 5.5.1

设 $\Gamma = \{A \to B, A \to C\}$，以下是 Γ-推演（部分步骤）：

1. $B \to (C \to B \wedge C)$ (Ax3)
2. $(A \to B) \to ((A \to (B \to (C \to B \wedge C))) \to (A \to (C \to B \wedge C)))$ (Ax2)
3. $A \to B$ （前提）
4. $(A \to (B \to (C \to B \wedge C))) \to (A \to (C \to B \wedge C))$ (2,3 MP)
5. $(B \to (C \to B \wedge C)) \to (A \to (B \to (C \to B \wedge C)))$ (Ax1)
6. $A \to (B \to (C \to B \wedge C))$ (1,5 MP)
7. $A \to (C \to B \wedge C)$ (4,6 MP)
8. $(A \to C) \to ((A \to (C \to B \wedge C)) \to (A \to B \wedge C))$ (Ax2)
9. $A \to C$ （前提）
10. $(A \to (C \to B \wedge C)) \to (A \to B \wedge C)$ (8,9 MP)
11. $A \to B \wedge C$ (7,10 MP)

习题 5.5.2

目标：$\vdash \neg A \to (A \to B)$
提示：构造形式推演，仅允许使用 Ax1–Ax10 与 MP。
思路：

- 使用 Ax1 构造 $\neg A \to (A \to \neg A)$；
- 构造反证式 $(A \to \neg A) \to ((A \to B) \to B)$ 的结构；
- 利用推演规则 $\neg A \Rightarrow A \to B$。

简化写法（可视为系统内部允许的直接规则）：

$$\vdash \neg A \to (A \to B)$$

习题 5.5.3

目标：从 $A \vee B \to C$ 推出 $A \to C$
SOP（使用演绎定理）：

1. 目标是 $A \to C$；
2. 设置前提集 $\Gamma = \{A \vee B \to C,\ A\}$；
3. 构造：
   - $A \to A \vee B$ (Ax6)
   - $A \vee B \to C$ （前提）
   - C （由 MP 两次推出）
4. 所以可得 $A \to C$

习题 5.5.4

目标：从 $A \to C$ 推出 $A \wedge B \to C$
构造推演：

1. $A \wedge B \to A$ (Ax4)

2. $A \to C$ （前提）

3. $(A \land B \to A) \to ((A \to C) \to (A \land B \to C))$ (Ax2)

4. $(A \to C) \to (A \land B \to C)$ (1,3 MP)

5. $A \land B \to C$ (2,4 MP)

习题 5.5.5

目标：证明 $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$，且**不能使用演绎定理**。
思路：

- 使用 Ax9：
$$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$$
- 令 $\neg B = B \to \bot$，得到结构：
$$(A \to B) \to ((A \to (B \to \bot)) \to (A \to \bot))$$
- 由定义 $\neg A = A \to \bot$，等价于：
$$(A \to B) \to ((\neg B \to \neg A))$$

可选构造：设 $C = \neg B = B \to \bot$，再用 Ax2 嵌套推导出目标式，参考 Ax9 与 MP 组合即可。

习题 5.5.6

题目：使用演绎定理证明

$$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

思路：等价于从 $A \to B$, $\neg B$ 推出 $\neg A$，再用演绎定理封装。
推演：

1. $A \to B$ （假设）

2. $\neg B \equiv B \to \bot$ （假设）

3. A （假设）

4. B （1,3 MP）

5. $\perp$ （2,4 MP）

6. $\neg A \equiv A \to \perp$ （从 3 推出 5）

7. $\neg B \to \neg A$ （由 2 推出 6，演绎定理）

8. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ （最终封装）

习题 5.5.7

题目：证明 $\vdash A \wedge B \to B \wedge A$
推演：

1. $A \wedge B \to B$ (Ax5)

2. $A \wedge B \to A$ (Ax4)

3. $A \wedge B \to (B \wedge A)$ （用 Ax3 + MP 构造合取）

习题 5.5.8

题目：证明 $\vdash A \wedge (B \wedge C) \to (A \wedge B) \wedge C$
推演结构：

1. $A \wedge (B \wedge C) \to A$ (Ax4)

2. $A \wedge (B \wedge C) \to B \wedge C$ (Ax5)

3. $B \wedge C \to B, \quad B \wedge C \to C$ (Ax4, Ax5)

4. 构造 $A \wedge B$，再与 C 合取，最终组合为 $(A \wedge B) \wedge C$

习题 5.5.9：德摩根定律推演

(1) $\vdash \neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B$

思路：

- 假设 $A \vee B \to \bot$；
- 构造 $A \to \bot$ 与 $B \to \bot$；
- 合取为 $\neg A \wedge \neg B$。

(2) $\vdash \neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)$

思路：

- 假设 $\neg A$, $\neg B$；
- 若 $A \vee B$ 成立，使用析取消去推出矛盾；
- 得到 $A \vee B \to \bot$，即 $\neg(A \vee B)$。

(3) $\vdash \neg(A \wedge B) \to \neg A \vee \neg B$

思路：

- 假设 $A \wedge B \to \bot$；
- 使用反设：若 A, B 同时为真 导致矛盾；
- 构造 $\neg A \vee \neg B$。

(4) $\vdash \neg A \vee \neg B \to \neg(A \wedge B)$

思路：

- 假设 $A \wedge B$ 成立；
- 则 A 与 B 同时为真；
- 与 $\neg A$ 或 $\neg B$ 任一成立矛盾 得 $\neg(A \wedge B)$。

习题 5.5.10

题目：证明 $\vdash A \vee \neg A$（排中律）
构造推演：

1. $A \to A \vee \neg A$ (Ax6)
2. $\neg A \to A \vee \neg A$ (Ax7)
3. $(A \to A \vee \neg A) \to ((\neg A \to A \vee \neg A) \to (A \vee \neg A \to A \vee \neg A))$ (Ax8)
4. $A \vee \neg A \to A \vee \neg A$ （MP 逐步推出）
5. $\vdash A \vee \neg A$ （定理封装）

习题 5.5.11

题目：
设 $\Gamma \subseteq PF$，若存在一个 $\Gamma \cup \{A\}$-推演

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle, \quad A_n = B$$

证明存在一个 Γ-推演

$$\langle B_1, B_2, \ldots, B_m \rangle, \quad B_m = A \to B$$

且 $m \leq 2n + 2$

解答

这是演绎定理的**构造复杂度界限分析**。

基本思路：

- 假设已有 $\Gamma \cup \{A\} \vdash A_1, \ldots, A_n$ 的推演，目标是从 Γ 推出 $A \to B$；
- 将每个 A_i 替换为 $A \to A_i$；
- 使用 Ax1、Ax2 及 MP 构造新的推演链；
- 最终得到 $A \to B$。

操作流程：

- 每一步 A_i：
  - 若 A_i 为公理或前提 构造 $A \to A_i$ 直接使用 Ax1；
  - 若 A_i 由 A_j，$A_j \to A_i$ 推得 先已构造 $A \to A_j$ 和 $A \to (A_j \to A_i)$，再使用 Ax2 和 MP 推出 $A \to A_i$；
- 所以每一步最多引入两行公式；
- 总行数 $\leq 2n+2$

结论：

存在一个 Γ-推演 $\langle B_1, \ldots, B_m \rangle$，满足 $B_m = A \to B$，其中：

$$m \leq 2n+2$$

习题 5.5.12

题目：
若存在：

- $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$，推演长度为 m；
- $\Gamma \cup \{B\} \vdash C$，推演长度为 n；

请构造 Γ-推演

$$\langle C_1, \ldots, C_p \rangle, \quad C_p = A \vee B \to C$$

并给出上界函数 $p \leq f(m,n)$

解答

该题要求估算“析取消去规则”（$\vee^-$）所需推演长度的最坏情形。

步骤说明：

1. 已知：
   - $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$，长 m；
   - $\Gamma \cup \{B\} \vdash C$，长 n；

2. 使用演绎定理转换为：
$$\Gamma \vdash A \to C, \quad \Gamma \vdash B \to C$$

3. 引入公理 Ax8：
$$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$$

4. 使用三次 MP 得出：
$$\Gamma \vdash A \vee B \to C$$

推演长度估算：

- 转换 $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$ 为 $\Gamma \vdash A \to C$，长度 $\leq 2m-1$（由 5.5.11）；
- 转换 $\Gamma \cup \{B\} \vdash C$ 为 $\Gamma \vdash B \to C$，长度 $\leq 2n-1$；
- 加上 Ax8 与三次 MP，总增加 ≤ 5；

结论函数：

$$f(m,n) = 2m + 2n + 5$$

即，存在长度不超过 $2m+2n+5$ 的推演，使得：

$$\Gamma \vdash A \vee B \to C$$

第六章题型与解题步骤（SOP）整理

类型一：可满足性与语义蕴含关系

目标：用模型分析或真值表判断推演是否成立。
SOP：

1. 给定公式 A, B，写出其模型集合：$\mathrm{Mod}(A)$，$\mathrm{Mod}(B)$；
2. 判断是否有包含关系：$\mathrm{Mod}(A) \subseteq \mathrm{Mod}(B)$；
3. 若是，则 $A \models B$ 成立　可用推演系统导出；
4. 否则，不满足语义蕴含。

类型二：合取范式 / 析取范式长度比较

目标：证明范式长度关系，如 $LCNF(\neg A) \leq LDNF(A)$。
SOP：

1. 给定公式 A，使用范式定理构造其合取范式 C 与析取范式 D；
2. 利用等价式：$A \leftrightarrow D$，取否得 $\neg A \leftrightarrow \neg D$；
3. 应用 De Morgan 定律与范式闭包：$\neg D$ 转为合取范式；
4. 对比文字数与子句数，得出长度关系。

类型三：推理复杂度函数估计

目标：估算如 $LCNF(B \to C) \leq f(B, C)$。
SOP：

1. 使用逻辑恒等式：$B \to C \equiv \neg B \vee C$；
2. 将 B, C 分别代入为其合取/析取范式；
3. 析取范式 $\neg B$ 转为析取或合取结构；
4. 分析合取文字增长：对每项做组合展开估计；
5. 最终构造函数 $f(B, C)$ 估算长度增长上界。

类型四：极大协调集合构造

目标：根据给定赋值构造极大协调集合 Λ。
SOP：

1. 给定赋值 $v : At \to \{0, 1\}$；
2. 构造集合：
$$\Lambda = \{A \in PF \mid v \models A\}$$
3. 验证 Λ 满足：
   - **协调性**：若 $A \in \Lambda \quad \neg A \notin \Lambda$；

- **极大性**：若 $A \notin \Lambda \quad \neg A \in \Lambda$；
- **演绎封闭**：若 $A, A \to B \in \Lambda$，则 $B \in \Lambda$。

4. 引用讲义 6.2.13 引理中的等价定义辅助证明。

类型五：完全性定理 ⇒ 紧致性定理

目标：使用完全性定理反推出紧致性定理。
SOP：

1. 假设 Γ 每一有限子集可满足；
2. 即对任意有限 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$，有 $\Gamma_0 \nvdash \bot$；
3. 若 $\Gamma \vdash \bot$ 成立　存在有限 Γ_0 推出矛盾；
4. 矛盾成立　$\Gamma \nvdash \bot$；
5. 由完全性定理，$\Gamma \models \bot$ 不成立　存在模型 v 使 $v \models \Gamma$；
6. 即 Γ 可满足。

第六章习题解答整理

习题 6.5.1

题目：证明

$$\vdash A \to B \quad \text{当且仅当} \quad \mathrm{Mod}(A) \subseteq \mathrm{Mod}(B)$$

解答：

- **方向（可靠性）**：若 $\vdash A \to B$，由可靠性定理知 $\forall v$，$v \models A \to B$，即只要 $v \models A$，就有 $v \models B$，即 $\mathrm{Mod}(A) \subseteq \mathrm{Mod}(B)$；
- **方向(完全性)**: 若 $\mathrm{Mod}(A) \subseteq \mathrm{Mod}(B)$, 则 $\forall v$ 若 $v \models A$ 则 $v \models B$, 即 $v \models A \to B$, 所以 $A \to B$ 是重言式　$\vdash A \to B$。

习题 6.5.2

题目：证明

$$\vdash A \vee B \quad \text{当且仅当} \quad \mathrm{Mod}(A \vee B) = \mathrm{Mod}(A) \cup \mathrm{Mod}(B)$$

解答：

- 由析取的语义定义：$v \models A \vee B \iff v \models A$ 或$v \models B$；
- 即 $\mathrm{Mod}(A \vee B) = \mathrm{Mod}(A) \cup \mathrm{Mod}(B)$；
- 所以 $A \vee B$ 是重言式 它在所有赋值下为真 $\mathrm{Mod}(A) \cup \mathrm{Mod}(B) = \mathrm{Mod}$；
- 由此可得 $\vdash A \vee B$。

习题 6.5.3

题目：
对公式 A，令

$$LCNF(A) = \min\{L(C) : A \vdash_a C,\ C\text{为合取范式}\}$$

$$LDNF(A) = \min\{L(D) : A \vdash_a D,\ D\text{为析取范式}\}$$

证明：

$$LCNF(\neg A) \leq LDNF(A), \quad LDNF(\neg A) \leq LCNF(A)$$

解答：

- 由范式对偶性引理（6.2.3(1)）知：

$$\neg\left(\bigvee_i \bigwedge_j L_{ij}\right) \equiv \bigwedge_i \bigvee_j \neg L_{ij}$$

- 即析取范式的否定变成合取范式；
- 设 D 为 A 的最小析取范式，$\neg D$ 即为 $\neg A$ 的合取范式；
- 所以 $LCNF(\neg A) \leq LDNF(A)$；
- 反向同理，得 $LDNF(\neg A) \leq LCNF(A)$。

习题 6.5.4

题目:
设 $B, C \in PF$，证明:

1. $LDNF(B \to C) \leq LCNF(B) + LDNF(C)$
2. $LCNF(B \to C) \leq LDNF(B) \cdot LCNF(C)$

解答:

- 由于 $B \to C \equiv \neg B \vee C$，转化目标为范式组合长度分析。
- **第 1 条**:
  - 设 B 的合取范式为 C_B，C 的析取范式为 D_C；
  - 否定 B 的合取范式　得到析取结构；
  - 取 $\neg B$ 与 C 析取合并即可；
  - 总长度 $\leq LCNF(B) + LDNF(C)$。
- **第 2 条**:
  - $\neg B$ 为析取范式，每一项为合取项；
  - 与 C 的合取范式按分配律组合；
  - 最多生成 $LDNF(B) \cdot LCNF(C)$ 个合取项；
  - 所以 $LCNF(B \to C) \leq LDNF(B) \cdot LCNF(C)$。

习题 6.5.5

题目:
证明引理 6.2.5(2)：若 $\Gamma \vdash_a A$ 且 $\Gamma \vdash_a \neg A$，则 $\Gamma \vdash_a \perp$
解答:

- 已知 $\Gamma \vdash A$，且 $\Gamma \vdash \neg A$；
- $\neg A \equiv A \to \perp$；
- 由演绎定理 + MP 可推出:

$$A,\ A \to \perp \vdash \perp$$

- 所以 $\Gamma \vdash \perp$

习题 6.5.6

题目：证明：对任一赋值 v，集合

$$\Lambda = \{A \in PF : v \models A\}$$

是极大协调的。

解答：

- **协调性**：若 $A \in \Lambda$，则 $v \models A$；

  若 $\neg A \in \Lambda$，则 $v \models \neg A$，即 $v \not\models A$，矛盾。

  故不可能 A, $\neg A \in \Lambda$。

- **极大性**：若 $A \notin \Lambda$，即 $v \not\models A$，则 $v \models \neg A$，从而 $\neg A \in \Lambda$。

  所以对任意公式 A，有 $A \in \Lambda$ 或 $\neg A \in \Lambda$。

因此 Λ 是极大协调集合。

习题 6.5.7

题目：证明引理 6.2.24：若 $A, B \in \Lambda$，则 $A \wedge B \in \Lambda$。
解答：

- 假设 $A \wedge B \notin \Lambda$；
- 由于 Λ 极大协调，得 $\neg(A \wedge B) \in \Lambda$；
- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$；
- 由引理 6.2.26 可知 $\neg A \in \Lambda$ 或 $\neg B \in \Lambda$；
- 与 $A \in \Lambda$ 或 $B \in \Lambda$ 矛盾。

故 $A \wedge B \in \Lambda$。

习题 6.5.8

题目：证明引理 6.2.25：若 $A \in \Lambda$ 且 $A \to B \in \Lambda$，则 $B \in \Lambda$。
解答：

- 假设 $B \notin \Lambda$；
- 则 $\neg B \in \Lambda$（极大性）；
- $A, \neg B \in \Lambda$，由 6.5.7 得 $A \wedge \neg B \in \Lambda$；
- $A \wedge \neg B \models \neg(A \to B)$，所以 $A \to B \notin \Lambda$，矛盾。

故 $B \in \Lambda$。

习题 6.5.9

题目：补充引理 6.2.26 的情形 (iv) 与 (v) 的证明：

(iv) 若 $A = B \vee C$，则 $v \models A \iff A \in \Lambda$；

(v) 若 $A = B \to C$，则 $v \models A \iff A \in \Lambda$。

解答：

(iv) 若 $v \models B \vee C$，则 $v \models B$ 或 $v \models C$，即 $B \in \Lambda$ 或 $C \in \Lambda$；
由极大协调性质知 $B \vee C \in \Lambda$。反向同理。

(v) 若 $v \models B \to C$，则 $v \not\models B$ 或 $v \models C$，即 $B \notin \Lambda$ 或 $C \in \Lambda$；
由引理 6.2.25 与极大性可推出 $B \to C \in \Lambda$。反向同理。

习题 6.5.10

题目：证明引理 6.3.1：若 $\Gamma \vdash A$，则存在有限子集 $\Delta \subseteq \Gamma$ 使得 $\Delta \vdash A$。
解答：

- 任意形式推演为有限公式列；
- 若 $\Gamma \vdash A$，则存在有限长度推演 $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ 证明 A；

- 推演中引用的前提有限，令这些前提构成集合 Δ；
- 则 $\Delta \subseteq \Gamma$ 且 $\Delta \vdash A$。

因此演绎闭包是有限生成的。

习题 6.5.11

题目：

设 $A, B \in PF$，且 $\mathrm{suppt}(A) \cap \mathrm{suppt}(B) = \varnothing$（即 A 与 B 无公共原子命题符），A 不是矛盾式，B 不是重言式。证明：

$$A \nvdash B$$

解答：

- 若 $A \vdash B$，根据可靠性定理，$\mathrm{Mod}(A) \subseteq \mathrm{Mod}(B)$；
- 然而 A 与 B 使用的命题符集合 disjoint，可构造如下赋值 v：
  - $v(p_i) = 1$ 若 $p_i \in \mathrm{suppt}(A)$；
  - $v(p_j) = 0$ 若 $p_j \in \mathrm{suppt}(B)$。
- 因 A 非矛盾式　存在 $v \models A$；
- 又 B 非重言式　存在 $v \not\models B$；
- 故存在 $v \models A \wedge \neg B$；

即 $\mathrm{Mod}(A) \not\subseteq \mathrm{Mod}(B)$　$A \nvdash B$。

习题 6.5.12

题目：

设 $\Gamma \subseteq PF$ 是有限集合，证明存在 $\Delta \subseteq \Gamma$，使得：

- $\Delta \vdash \Gamma$
- Δ 是独立的：任意 $\Delta' \subsetneq \Delta$ 都不推出 Γ

解答：

- 设 $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$；

- 构造方法：
  1. 初始设 $\Delta := \emptyset$；
  2. 对每个 $A_i \in \Gamma$，若 $\Delta \nvdash A_i$，则将 A_i 加入 Δ；
- 最终构造的 $\Delta \subseteq \Gamma$ 满足：
  - $\Delta \vdash \Gamma$（因每一步构造中逐步包含推演所需前提）；
  - Δ 独立：任意 $A_i \in \Delta$，$\Delta \setminus \{A_i\} \nvdash A_i$。

习题 6.5.13

题目：
证明存在一个（无限）集合 $\Gamma \subseteq PF$，使得任意子集 $\Delta \subseteq \Gamma$：

- 要么 $\Delta \nvdash \Gamma$；
- 要么 Δ 不独立。

解答（构造反例）：

- 定义 $\Gamma = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$，其中 $A_n = p_n \to p_0$；
- 显然：$\Gamma \vdash p_0$；
- 任意有限子集 $\Delta \subset \Gamma$ 仅含有限个 A_n，不能推出所有 A_n；
- 若 Δ 包含无限多项　存在某 A_k 被其余 A_i 推出（如 $p_k \to p_0$ 可由 p_0 反向得出）；
- 故所有 Δ：
  - 若弱　不足以推出 Γ；
  - 若强　含有可被推出的冗余公式　不独立。

习题 6.5.14

题目:
对任意 $\Gamma \subseteq PF$,存在 $\Delta \subseteq PF$,满足:

- $\Gamma \vdash \Delta$;
- $\Delta \vdash \Gamma$;
- Δ 是独立的。

解答:

- 取 $\Delta \subseteq \vdash(\Gamma)$ 为 Γ 的形式闭包中的极小生成集;
- 构造方法:
  1. 枚举 $\vdash(\Gamma)$ 中的可推导公式;
  2. 逐步选择那些不能被当前集合推出的公式,添加至 Δ;
- 得到 Δ 满足:
  - $\Delta \subseteq \vdash(\Gamma) \quad \Gamma \vdash \Delta$;
  - Δ 可推出 Γ 中全部元素 $\quad \Delta \vdash \Gamma$;
  - Δ 独立:对任意 $A \in \Delta$,有 $\Delta \setminus \{A\} \nvdash A$。

2025 年 5 月 7 日 · 第五章习题推演笔记

5.5.2 证明 $\vdash \neg A \to (A \to B)$

1. $\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg A)$ (Ax1)
2. $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ (Ax3)

$\Rightarrow$ 演绎链构造得:

$$(\neg A \to \neg B) \to (A \to B)$$

5.5.1 合取引入

- $B \to (C \to B \wedge C)$

中间笔记 · 判断合法公式举例

- $\langle((P_0)P_3)\rangle$
- $\langle(((P_0 \to P_1) \to (\neg P_0)))\rangle$
- $\langle P_0 \vee P_1\rangle$
- $\langle(P_1 \wedge (\neg P_5) \to (P_3 \vee P_4)))\rangle$
- $\langle P_0 \to (P_1 \to P_2)\rangle$

真值表构造题示例

构造公式：

$$(P_0 \to P_1) \wedge (P_1 \wedge \neg P_2) \to P_0$$

的：

- 所有子式与支集；
- 真值表；
- 析取范式（DNF）；
- 合取范式（CNF）。

2025 年 5 月 14 日 · 合取与析取的等值推理

证明：$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

构造路径如下：

1. $A \to B$ （前提）
2. $\neg B$
3. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ (Ax9)
4. $(A \to \neg B) \to \neg A$ (1,3 MP)
5. $\neg B \to (A \to \neg B)$ (Ax1)
6. $A \to \neg B$ (2,5 MP)
7. $\neg A$ (4,6 MP)

证明：$\vdash \neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B$

利用：

$$\neg(A \vee B) \to \neg A, \quad \neg(A \vee B) \to \neg B \Rightarrow \text{合取得} \quad \neg A \wedge \neg B$$

证明：$\vdash A \vee \neg A$（排中律）

- 假设 $\neg(A \vee \neg A)$
- 推导出 $\neg A \wedge \neg\neg A$ 矛盾
- 故 $A \vee \neg A$ 成立

Lindenbaum 引理构造

设 Γ 协调，构造极大协调集合 Λ 满足：

- $\Gamma \subseteq \Lambda$
- $\forall A \in PF,\ A \in \Lambda$ 或 $\neg A \in \Lambda$

使用递归构造：令 $PF = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$，定义

$$\Lambda_{k+1} = \begin{cases} \Lambda_k \cup \{A_k\}, & \text{若}\Lambda_k \cup \{A_k\}\text{协调} \\ \Lambda_k \cup \{\neg A_k\}, & \text{否则} \end{cases}$$

2025 年 5 月 21 日 · 范式等价与长度引理证明

范式等价公式推导

证明：

$$\neg(P_1 \wedge P_2) \to P_1 \vee \neg P_2$$

通过对 $\neg(P_1 \wedge P_2)$ 展开，结合 DNF 与 CNF 写出：

- DNF: $(P_1 \vee \neg P_1 \vee \neg P_2)$
- CNF: $(P_2 \vee \neg P_1 \vee \neg P_2)$

说明：De Morgan 与化简规则使得公式可改写为等价范式。

证明长度引理：

$$LCNF(\neg A) \leq LDNF(A), \quad LDNF(\neg A) \leq LCNF(A)$$

说明：

- 由 ¬(DNF) 应用 De Morgan 转化为 CNF；
- 层层结构在否定后不增加公式长度。

Craig 插值定理引导

若 $A \vdash B$，则存在插值公式 C，满足：

- $\text{supp}(C) \subseteq \text{supp}(A) \cap \text{supp}(B)$；
- $A \vdash C, \quad C \vdash B$

构造思路包括：

- 公式支持集提取；
- 模型构造法（通过 $A \wedge \neg B$ 不可满足性）；
- 最终抽出中介命题符构成的公式 C。

类型一：可靠性定理（Soundness Theorem）

定理表述：若 $\Gamma \vdash A$，则 $\Gamma \models A$。
SOP（标准证明结构）：

1. 假设存在 Γ-推演：
$$\langle A_0, A_1, \ldots, A_n \rangle, \quad A_n = A$$
2. 对每个 $i \leq n$，使用归纳法证明 $v \models A_i$：
   (i) 若 $A_i \in \Gamma$，则 $v \models A_i$；
   (ii) 若 A_i 是命题公理，则 $v \models A_i$（由逻辑公理的真值定义）；
   (iii) 若 A_i 是由 A_j，$A_j \to A_i$ 经 MP 得出，且 $v \models A_j$，$v \models A_j \to A_i$，则 $v \models A_i$。
3. 归纳完成，得 $v \models A$，即 $\Gamma \models A$。

类型二：演绎定理的可靠性版本

定理表述：若 $\Gamma \vdash A \to B$，则对任意赋值 v，若 $v \models \Gamma \cup \{A\}$，则 $v \models B$。
SOP：

1. 假设 $\Gamma \vdash A \to B$；
2. 则 $v \models A \to B$（由可靠性定理）；
3. 若 $v \models A$，则由 $v \models A \to B$ 得 $v \models B$。

类型三：形式定理是重言式

命题：若 $\vdash A$，则 A 是重言式，即 $\forall v$，$v \models A$。
SOP：

1. $\vdash A \iff \emptyset \vdash A$;
2. $\forall v$，$v \models \emptyset$;
3. 由可靠性定理 $v \models A$;
4. 即 A 为重言式。

类型四：反证推不出式子 存在反例赋值

命题：若 $\Gamma \nvdash A$，则存在赋值 v，使得 $v \models \Gamma$ 且 $v \not\models A$。
SOP：

1. 假设 $\Gamma \models A$;
2. 若 $\Gamma \nvdash A$ 与 $\Gamma \models A$ 同时成立，矛盾于完全性定理；
3. 故 $\Gamma \not\models A$，即存在 v 满足 Γ 且不满足 A。

类型五：可靠性定理的应用（不可推出）

例：证明 $p_1 \nvdash p_2$
SOP：

1. 若 $p_1 \vdash p_2$，由可靠性定理应有 $p_1 \models p_2$；
2. 取赋值 v：$v(p_1) = 1$，$v(p_2) = 0$；
3. 则 $v \models p_1$，但 $v \not\models p_2$ 不满足 $p_1 \models p_2$；
4. 故 $p_1 \nvdash p_2$。

类型六：形式证明的语义解释

SOP：

1. 所有公理（Ax1–Ax10）都是语义有效的，即为重言式；
2. MP（Modus Ponens）在真值语义下是保持“真”的推理；
3. 故形式证明中每一项都在任意模型下成立；
4. 结论：任意形式推演系统所导出结论都是语义上有效的（可靠性）。

习题 7.4.1

设 $\Gamma \vdash A$，证明：对任意赋值 v，若 $v \models \Gamma$，则 $v \models A$。
解答：利用归纳法对推演中每一项 A_i 证明 $v \models A_i$ 成立：

- 若 $A_i \in \Gamma$，由假设知 $v \models A_i$；
- 若 A_i 是命题公理，命题公理为重言式 $v \models A_i$；
- 若 A_i 由 MP 得出，即 $A_j, A_j \to A_i$ $v \models A_j$ 且 $v \models A_j \to A_i$ $v \models A_i$。

最终得 $v \models A$ 成立。

习题 7.4.2

证明：若 $\vdash A$，则 A 是重言式。

解答：由 $\vdash A$ 即 $\emptyset \vdash A$，所有赋值 v 满足 $\emptyset$，由习题 7.4.1 得 $v \models A$ 对任意 v 成立，即 A 在所有赋值下为真 重言式。

习题 7.4.3

证明：$p_1 \nvdash p_2$

解答：若 $p_1 \vdash p_2$，则应有 $p_1 \models p_2$；但令 $v(p_1) = 1$，$v(p_2) = 0$，得 $v \models p_1$ 但 $v \not\models p_2$，故 $p_1 \not\models p_2$，即 $p_1 \nvdash p_2$。

习题 7.4.4

证明：若 $\Gamma \nvdash A$，则存在 v 使得 $v \models \Gamma$ 且 $v \not\models A$。

解答：反设不存在这样的 v，即 $\Gamma \models A$ 成立，由可靠性定理逆否　应有 $\Gamma \vdash A$，但与 $\Gamma \nvdash A$ 矛盾　结论成立。

习题 7.4.5

形式系统是否能推出所有真值有效的推理?

解答：若某推理在语义上有效，即 $\Gamma \models A$，由完全性定理知 $\Gamma \vdash A$ 成立，因此，形式系统可以推出所有真值有效的推理。

补充习题 SOP 汇总

第一部分：集合论

习题 1.1（Knaster-Tarski 定理）

SOP：

- 若 $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ 单调递增，则

$$X = \bigcap\{Y \subseteq A : F(Y) \subseteq Y\}$$

  是最小不动点（$F(X) = X$）；

- 若 F 单调递减，则

$$X = \bigcup\{Y \subseteq A : Y \subseteq F(Y)\}$$

  是最大不动点。

第二部分：数学归纳法

习题 2.1

命题：递推 $a_0 = 1$，$a_{n+1} = \frac{6a_n+5}{a_n+2}$，用归纳法证明 $0 < a_n < 5$
SOP：

1. 验证 $a_0 = 1 \in (0,5)$；
2. 假设对 n 成立，即 $0 < a_n < 5$；
3. 推导：
$$a_{n+1} = \frac{6a_n + 5}{a_n + 2}$$
4. 用不等式变换或函数单调性分析得出结论。

习题 2.2

(1) **斐波那契积公式**：

$$a_{m+n+1} = a_{m-1}a_n + a_m a_{n+1}$$

SOP：

- 固定 m，对 n 归纳；
- 递推代入公式；
- 展开等式逐项验证。

(2) **整除性命题**：$a_m \mid a_{mn}$
SOP：

- 用归纳法证明 $a_m \mid a_{km}$；
- 利用斐波那契的积恒等式。

习题 2.3（局部归纳法）

SOP：

- 反设存在 $n \notin X$，令其为最小反例；
- 推导出矛盾　所有 n 均在 X。

第三部分：命题公式结构

习题 3.1

SOP：

- 定义 $F(X) = X \cup \{\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \to B \mid A, B \in X\}$；
- F 单调递增；
- 命题公式集合 PF 是 F 的最小不动点（由 Knaster–Tarski 定理）。

习题 3.2

命题：对任意公式 A 有 $p(A) = 2c(A)$
SOP：

- 用结构归纳法证明；
- 每引入一个联结词，增加两个括号；
- 原子命题无括号，计数为 0。

习题 3.3

命题：公式深度 $d(A)$ 满足 $|A| \geq 3d(A)$
SOP：

- 归纳定义公式长度与深度；
- 每层嵌套至少引入三个符号；
- 故整体长度 ≥ 3 倍深度。

习题 3.4–3.5

- 设计非法公式如括号不闭合、二元联结词单边缺失等；
- 用归纳分析公式构造唯一性（结构唯一性引理）。

第四部分：语义

习题 5.1（Quine-McCluskey）

SOP：

1. 明确极小项构造；
2. 合并规则：仅一个变量不同时可合并；
3. 验证合并与最小覆盖是否满足题设 (a)–(d) 条件；
4. 用真值表验证结果正确性。

习题 5.2–5.5（SAT 建模题）

提示： 需要命题编码、布尔化建模、约束构造，不在此展开。

习题 5.6（Horn 公式闭包）

SOP：

- Horn 合取子句为 $\neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n \vee B$；
- 用最小赋值 v（即 $v(p) = 0$ 尽可能多）验证；
- 对每一子句：若前件全真，则推出后件必须为真 保持封闭。

第六部分：紧致性定理

习题 6.1

命题：集合 $\{A \in PF \mid v \models A\}$ 是极大有穷可满足的
SOP：

- 有穷可满足性：支持集有限的子集在赋值 v 下均可满足；
- 极大性：若 $A \notin \Lambda \quad v \not\models A \quad v \models \neg A \quad \neg A \in \Lambda$；
- 故满足极大协调性定义。

第七部分：推演保结构性与替代封闭性

习题 7.1–7.2

SOP：

- 使用结构归纳法；
- 替代时保持形式一致性；
- 推演规则（如 MP）对替代封闭 替代后仍合法。

习题 7.3

目标：形式推演支集包含于 $\mathrm{suppt}(\Gamma) \cup \mathrm{suppt}(A)$
SOP：

- 构造推演时控制变量使用；
- 合取/蕴含公式支集具有单调性；
- 故结论支集不增，保持结构封闭性。

习题 7.4（等值定理）

SOP：

- 明确目标公式结构；
- 每步使用 Ax1–Ax10 与 MP；
- 特别注意等价式的形式包装方式；
- 编写推演序列时注明所用公理与推理规则。

第八章：完全性与可分性

习题 8.1–8.2

SOP：

- Ramsey 理论在逻辑中的使用；
- 对公式的排列组合与支持集划分；
- 归纳构造嵌套公式 建立等价结构。

习题 8.3（协调性推出可矛盾）

SOP：

- 若 $\Gamma \cup \Lambda$ 不协调；
- 则存在有限子集 $\{B_1, \ldots, B_k\} \subseteq \Lambda$，使得

$$\Gamma \vdash \neg(B_1 \wedge \cdots \wedge B_k)$$

- 即 Γ 推出矛盾公式。

习题 8.4（Craig 中介定理引导题）

SOP：

- 设 Γ_0, Γ_1 协调，但 $\Gamma_0 \cap \Gamma_1$ 不协调；
- 构造反设：某中介变元 C 无法调和两者；
- 得到 $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \vdash \bot$，与各自协调矛盾；
- 存在 C 使 $\Gamma_0 \vdash C$，$C \vdash \Gamma_1$。

习题 1.1（Knaster-Tarski 定理）

(a) 若 $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ 是单调递增，存在最小不动点

解法：

- 定义集合：
$$X := \bigcap\{Y \subseteq A : F(Y) \subseteq Y\}$$
此集合包含所有“F-前不动点”的交集。
- 对任意 Y 满足 $F(Y) \subseteq Y$，由单调性有：

$$F(X) \subseteq F(Y) \subseteq Y \Rightarrow F(X) \subseteq X$$

- 又因 X 是所有 F-前不动点的交集 $F(X) \supseteq X$
- 故 $F(X) = X$，X 为最小不动点。

(b) 若 F 单调递减，存在最大不动点

定义：

$$X := \bigcup \{Y \subseteq A : Y \subseteq F(Y)\}$$

与上述思路类似，$F(X) = X$ 且 X 为所有 F-后不动点中的最大元。

习题 2.1

命题：设 $a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{6a_n+5}{a_n+2}$，证明：

$$0 < a_n < 5, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

证明（归纳法）：

- 基础步：$n = 0$ 时，$a_0 = 1 \in (0, 5)$，成立；
- 归纳假设：设对某 k 有 $0 < a_k < 5$；
- 归纳步：

$$a_{k+1} = \frac{6a_k + 5}{a_k + 2}$$

  - 分析上界：若 $a_k < 5$，则 $6a_k + 5 < 35$，$a_k + 2 > 2$

$$a_{k+1} < \frac{35}{2} = 17.5$$

    （仍需更紧不等式，讲义中可构造逼近序列或用图像分析）
  - 分析下界：$a_k > 0 \quad a_{k+1} > \frac{5}{2} > 0$

习题 2.2(a)

命题（斐波那契恒等式）：

$$a_{m+n+1} = a_{m-1}a_n + a_m a_{n+1}$$

其中 $\{a_n\}$ 为斐波那契数列，$a_0 = a_1 = 1$，$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$。

证明（对 n 归纳）：

- **基础步**：$n = 0$，

$$\text{左边：} a_{m+1}, \quad \text{右边：} a_{m-1} + a_m = a_{m+1}$$

  成立；

- **归纳假设**：对某 n 成立；
- **归纳步**：对 $n+1$ 有

$$a_{m+n+2} = a_{m+n+1} + a_{m+n}$$
$$= (a_{m-1}a_n + a_m a_{n+1}) + (a_{m-1}a_{n-1} + a_m a_n)$$
$$= a_{m-1}(a_n + a_{n-1}) + a_m(a_{n+1} + a_n) = a_{m-1}a_{n+1} + a_m a_{n+2}$$

习题 2.2(b)

命题：$a_m \mid a_{mn}$，即 a_m 整除 a_{mn}，对任意 $m, n \in \mathbb{N}$。
证明（归纳法）：

- **基础**：$n = 1$ 时显然 $a_m \mid a_m$；
- **归纳假设**：$a_m \mid a_{mk}$ 成立；
- **归纳步**：$a_{m(k+1)} = a_{mk+m}$

  使用乘法恒等式：

$$a_{mk+m} = a_{mk-1}a_m + a_{mk}a_{m+1}$$

  由归纳假设 $a_m \mid a_{mk}$，a_{mk-1}，得 $a_m \mid a_{mk+m}$

习题 2.3（局部归纳法等价）

命题：
局部归纳法：

$$X \subseteq \{0, \ldots, n\}, \quad 0 \in X, \quad k < n,\ k \in X \Rightarrow k+1 \in X \Rightarrow n \in X$$

证明：

- 反设：$n \notin X$；
- 令 $Y := \{0, \ldots, n\} \setminus X$ 非空；
- 取 Y 中最小元 m，则 $m > 0$，$m - 1 \in X$；
- 由定义应有 $m \in X$，矛盾；
- 故 $n \in X$。

习题 2.4

命题：设 $n \in \mathbb{N}$，$A_0, A_1, \ldots, A_n$ 是有限集合，证明：

$$\left|\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{0 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

解法（容斥原理）：

- 用归纳法对 n 证明。
- **基础步**：$n = 1$，有

  $$|A_0 \cup A_1| = |A_0| + |A_1| - |A_0 \cap A_1|$$

  成立；
- **归纳假设**：对 n 成立；
- **归纳步**：设 $S := A_0 \cup \cdots \cup A_n$，则

  $$|S \cup A_{n+1}| = |S| + |A_{n+1}| - |S \cap A_{n+1}|$$

- 使用归纳式展开 $|S|$ 与 $|S \cap A_{n+1}|$，将交集项并入组合求和中，可得 $n + 1$ 项公式成立。

习题 3.1

命题：用 Knaster–Tarski 定理证明命题公式集合 PF 是最小满足递推规则的集合。
解答：

- 设操作函数 F：

  $$F(X) = X \cup \{\neg A,\ (A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \rightarrow B) \mid A, B \in X\}$$

- 显然 F 单调递增；
- 由 Knaster–Tarski 定理，F 存在最小不动点；
- 此最小不动点即为 PF。

习题 3.2

命题：对任意 $A \in PF$，有 $p(A) = 2c(A)$

定义说明：

- $p(A)$：括号总数（左右括号合计）；
- $c(A)$：联结词数量（$\neg$, , , $\to$）。

解答（结构归纳法）：

- **原子式**：$A = p$，则 $p(A) = 0 = 2 \cdot 0$；
- **一元联结词**：$A = \neg B$，则

$$p(A) = p(B) + 2, \quad c(A) = c(B) + 1 \Rightarrow p(A) = 2c(A)$$

- **二元联结词**：$A = (B * C)$，$* \in \{\wedge, \vee, \to\}$，则

$$p(A) = p(B) + p(C) + 2, \quad c(A) = c(B) + c(C) + 1 \Rightarrow p(A) = 2c(A)$$

习题 3.3

命题：若 $d(A)$ 为公式深度，证明

$$|A| \geq 3d(A)$$

定义：

- $d(p) = 0$；
- $d(\neg A) = d(A) + 1$；
- $d(A * B) = \max\{d(A), d(B)\} + 1$，其中 $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$。

证明（结构归纳法）：

- **原子式**：$|p| = 1$，$d(p) = 0 \quad$ 成立；
- **一元式**：$A = \neg B$，

$$|A| = |B| + 3, \quad d(A) = d(B) + 1 \Rightarrow |A| \geq 3d(A)$$

- **二元式**：$A = (B * C)$，

$$|A| = |B| + |C| + 3, \quad d(A) = \max(d(B), d(C)) + 1$$

$$\Rightarrow |A| \geq 3 \cdot \max(d(B), d(C)) + 3 \geq 3d(A)$$

习题 3.4

题目：判断以下符号串是否合法公式：

- $\langle(p_0)\rangle$： ，多余括号，p_0 本身已合法；
- $\langle(\rightarrow\rangle + \sigma + \langle)\rangle$： ，首符为联结词，非法；
- $A + \langle\rightarrow\rangle + B$： ，缺乏必要的括号结构；
- $\langle(\rangle + A + B + \langle)\rangle$： ，无连接词，非法构造；

依据：《讲义》中 PF 定义：

- $p_i \in PF$；
- 若 $A \in PF$，则 $\neg A \in PF$；
- 若 $A, B \in PF$，则 $(A * B) \in PF$，其中 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$。

习题 3.5：公式唯一可读性

命题：设 $A, B \in PF$，若 $A + B = C + D$ 且 $C, D \in PF$，则 $A = C$，$B = D$。
解答（唯一可读性证明）：

- 根据《命题逻辑讲义》第 1.2 节的构造规则：
  - 合法公式的合成方式在结构上是唯一的；
  - 例如公式 $(A * B)$ 的括号与联结词唯一标识出 A 与 B 的边界。
- 若 $A + B = C + D$ 表示两个构造序列的连接完全一致：
  - 则从配对括号位置唯一确定 A 与 B；
  - 对应地，C 与 D 也有同样结构；
  - 因此有 $A = C$，$B = D$。

习题 5.1（Quine–McCluskey 算法正确性）

设 A 是析取范式，支集为 $\{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$。

(a) 不可再合并　为素蕴含项

若 $B \in QM_j(A)$ 且无法与其他相邻项合并：

- B 是 A 的极小蕴含项；
- 没有比 B 更短的项可蕴含 A；
- 故 B 是素蕴含项。

(b) 非素蕴含项　长度为 $n - j$

- 在 QM_j 阶段，已合并 j 次；
- 每次合并消除一个文字　剩下 $n - j$ 个文字；
- 若非素项　有其它项可蕴含它。

(c) 若 B 是 $n - j$ 个文字的蕴含项　$B \in QM_j(A)$

- 由于算法机制，所有 $n - j$ 文字项在第 j 阶段构造；
- 若 B 是 A 的蕴含项，则一定在此阶段生成；
- 故 $B \in QM_j(A)$。

(d) 最终 QM_k 为素蕴含项全集

- k 为最大合并步数；
- 此时无项可再合并；
- 所有极小、不可合并且满足 A 的项均保留　为素项全集。

习题 5.2：用 SAT 求解数独

建模思路：

- 设 $X_{i,j,k}$ 表示第 i 行第 j 列填数字 k；
- 变量范围：$1 \leq i, j, k \leq 9$，共 $9^3 = 729$ 变量；
- **约束**：

- 每格正好一个数字；
- 每行、每列、每宫中每个数恰出现一次；

- 将所有约束写为合取范式（CNF），输入至 SAT 求解器。

习题 5.3：逻辑推理题（Q 与 K）

方法：

- 假设有 4 张牌位置 1–4；
- 每张牌有字母变量 Q_i/K_i 与花色变量；
- 将线索转换为命题表达，例如：
  - “一张 K 的右边是 K”：
$$\bigvee_{i=1}^{3}(K_i \land K_{i+1})$$
  - “一张 K 在 Q 的左边”：
$$\bigvee_{i=1}^{3}(K_i \land Q_{i+1})$$
- 所有线索合取为公式，输入至 SAT 系统求解唯一解。

习题 5.4：门后有谁（SAT 问题）

建模方法：

- 每个房间 i 建立变量：
$$T_i : \text{歹徒}, \quad S_i : \text{线人}, \quad E_i : \text{空房}, \quad L_i : \text{门 } i \text{ 的告示为真}$$
- **约束逻辑**：
  - 唯一占用：$T_i \oplus S_i \oplus E_i$
  - 告示与房间内容一致性；
  - 若 S_i 成立 L_i 成立；

  - 若 T_i 成立　L_i 为假。

- 告示如 “2 是歹徒，4 是空的”：

$$L_1 \rightarrow (T_2 \wedge E_4)$$

- 汇总全部约束成合取范式，送入 SAT 解算器。

习题 5.5：剧院座位逻辑推理（SAT 建模）

题意摘要：

- 三排（A, B, C），每排 4 个座位，共 12 人（6 男 6 女）；
- 每排 2 男 2 女；
- 给出 7 条线索，推理每人的座位安排。

建模方法：

- 定义变量：

$$P_{x,r,s}\text{：表示人}x\text{ 在排}r\text{ 座位}s$$

- 性别变量 G_x 可由输入给定；
- **硬约束**：
  - 每人恰好占一个位子；
  - 每个座位只能分配给一个人；
  - 每排有 2 男 2 女；
- **线索转化**（示例）：
  - “彼得坐在安吉拉后面”：若彼得在 $B10$，则安吉拉应在 $A10$；
  - “玛克辛在罗伯特右边第二位”：可在同一排上建位置偏移限制。
- 将上述所有逻辑翻译为合取范式，输入 SAT/CSP 求解器。

习题 5.6：Horn 公式闭合性

命题：若 A 是 Horn 公式，且 $u_0, u_1 \in \mathrm{Mod}(A)$，定义

$$v(p) = \min(u_0(p), u_1(p))$$

则 $v \in \mathrm{Mod}(A)$。

证明思路：

- Horn 子句结构：$\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_k \vee q$
- 若 q 不存在 子句为纯负形式；
- 若 u_0，$u_1 \models A$，则对每子句 C 有 $u_0 \models C$ 且 $u_1 \models C$；
- min 操作对每一 p 取更“假的”值 若 C 在 u_0, u_1 中为真，则 $v \models C$；
- 分三类逐条讨论所有 Horn 子句即可得证。

习题 6.1：极大有穷可满足集合

命题：集合

$$\Lambda = \{A \in PF : v \models A\}$$

是极大有穷可满足集合。

证明结构：

1. **有穷可满足性**：
   - 任取有限子集 $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Lambda$；
   - $v \models A_i$ 对所有 i；
   - 故 $v \models A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ 有穷可满足。
2. **极大性**：
   - 若 $A \notin \Lambda$ $v \not\models A$；
   - 则 $v \models \neg A$ $\neg A \in \Lambda$；
   - 即 $\forall A \in PF$，有 $A \in \Lambda$ 或 $\neg A \in \Lambda$。

习题 7.1：公理替代封闭性

命题：若 A 为命题公理，$p_0, \ldots, p_{k-1} \in At$，$B_0, \ldots, B_{k-1} \in PF$，则

$$A[p_0/B_0, \ldots, p_{k-1}/B_{k-1}]$$

也是命题公理。

证明方法：

- 对每一条公理（Ax1–Ax10）检查其结构；
- 替代等价于变量形式替换；
- 例：Ax1 为 $A \to (B \to A)$ 替代后为：

$$B_i \to (B_j \to B_i)$$

- 替代后结构仍满足原公理模式 仍为公理。

习题 7.2：推演替代封闭性

命题：若 $\langle A_0, \ldots, A_n \rangle$ 为形式推演序列，将其中所有 p_i 替换为 B_i，则

$$\langle A_0[p_i/B_i], \ldots, A_n[p_i/B_i] \rangle$$

仍为形式推演。

证明结构：

- 每步推演合法性由两类构成：
  - 公理 替代后仍为公理（由 7.1）；
  - Modus Ponens：

$$\text{若} A_j = A_k \to A_i, \quad A_j[p_i/B_i] = A_k[p_i/B_i] \to A_i[p_i/B_i]$$

  - 因此 MP 推理仍成立，替代后的 $A_i[p_i/B_i]$ 可由前两项推出。
- 故整体推演仍成立。

习题 7.3

命题：若 $\Gamma \vdash B$，则存在 Γ-推演 $\langle A_0, \ldots, A_n \rangle$ 满足：

1. $A_n = B$；
2. $\bigcup_{i=0}^{n} \mathrm{suppt}(A_i) \subseteq \mathrm{suppt}(\Gamma) \cup \mathrm{suppt}(B)$

解法：

- 使用结构归纳法构造推演；
- 所用命题符仅允许来自 $\mathrm{suppt}(\Gamma)$ 与 $\mathrm{suppt}(B)$；
- 公理可做通项模板，替代时控制替换入合法变量；
- MP 不引入新原子命题符；
- 故整个推演变量集被控制在指定集合中。

习题 7.4

题目摘要：给出以下推导目标：

1. $\vdash A \to A \wedge A$ （Ax3）
2. $\vdash A \vee A \to A$ （Ax6 + Ax7 + Ax8）
3. $\vdash \neg B \to (A \to \neg(A \to B))$ （Ax9）
4. $\vdash (A \to B \vee C) \to ((A \wedge C \to B) \to (A \to B))$
5. $\vdash \bigwedge_{i=0}^{2}(A_{i0} \vee A_{i1}) \to \bigvee_{i<j\leq 2}((A_{i0} \wedge A_{j0}) \vee (A_{i1} \wedge A_{j1}))$

结构说明：

- 结合演绎定理、合取/析取公理、双重蕴含结构，分层包装；
- 推演中引用 Ax1–Ax10，适时构造中间式后应用 MP。

习题 8.1

命题：

$$\vdash \bigwedge_{i\leq n}\bigvee_{k<n} A_{ik} \to \bigvee_{i<j\leq n}\bigvee_{k<n}(A_{ik}\wedge A_{jk})$$

结构解释（pigeonhole 原理的布尔版）：

- 前件：每行 i 至少选择一列 k；
- 总行数 $n+1$，列数 n pigeonhole；
- 逻辑等价于：存在 $i<j$，在某列 k 有 $A_{ik}\wedge A_{jk}$；
- 对 k 取析取，再对 $i<j$ 取析取。

习题 8.2

命题：

$$\vdash \bigwedge_{i<2n}\bigvee_{k<n} A_{ik} \to \bigvee_{i<j<2n}\bigwedge_{k<n}((A_{ik}\to A_{jk})\wedge(A_{jk}\to A_{ik}))$$

解释：

- 每行选择一 n 位布尔向量；
- 共有 $2n$ 行，但 $2^n<2n$ 时 pigeonhole；
- 故必有 $i<j$，使得 $\forall k$，$A_{ik}\leftrightarrow A_{jk}$；
- 拆写为：

$$\bigwedge_{k<n}((A_{ik}\to A_{jk})\wedge(A_{jk}\to A_{ik}))$$

习题 8.3

命题：若 Γ，Λ 均协调，但 $\Gamma\cup\Lambda$ 不协调，则存在有限子集 $\{B_1,...,B_k\}\subseteq\Lambda$ 满足：

$$\Gamma\vdash\neg(B_1\wedge\cdots\wedge B_k)$$

证明结构（完全性定理）：

- $\Gamma\cup\Lambda$ 不协调 不可满足 演绎上推出 $\perp$；

- 即存在推演：

$$\Gamma \cup \Lambda \vdash \bot \Rightarrow \Gamma \vdash \neg(B_1 \wedge \cdots \wedge B_k)$$

- 推演只使用有限个前提　存在有限子集 $\{B_1, \ldots, B_k\} \subseteq \Lambda$；
- 故该形式表达成立。

习题 8.4 解答

题目背景

定义支集（support）：

$$\mathrm{suppt}(\Delta) = \bigcup_{A \in \Delta} \mathrm{suppt}(A)$$

设：

- $S_0, S_1 \subseteq At$，交集 $S = S_0 \cap S_1 \neq \emptyset$；
- $\Gamma = \Gamma_0 \cap \Gamma_1$，其中 Γ_i 是协调集合，满足：
  (1) Γ，Γ_0，Γ_1 均协调；
  (2) $\mathrm{suppt}(\Gamma) = S, \quad \mathrm{suppt}(\Gamma_i) = S_i$；
  (3) 任意公式 A 若 $\mathrm{suppt}(A) \subseteq S$，则 $A \in \Gamma$ 或 $\neg A \in \Gamma$。

第 1 问：证明 $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ 协调

证明：

- 反设 $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ 不协调　存在有限子集 $\Delta \subseteq \Gamma_0 \cup \Gamma_1$，使得

$$\Delta \vdash \bot$$

- 写作 $\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_1$，其中 $\Delta_i \subseteq \Gamma_i$；
- 由完全性定理：不可满足　不存在赋值 v 使 $v \models \Delta$；
- 构造赋值 v：
  - 若 $p \in S_0 \setminus S_1$，取值由 Γ_0 中决定；
  - 若 $p \in S_1 \setminus S_0$，取值由 Γ_1 中决定；

- 若 $p \in S = S_0 \cap S_1$，则由条件 (3)：$A \in PF$ 且 $\text{suppt}(A) \subseteq S$ $A \in \Gamma$ 或 $\neg A \in \Gamma$；
- 所以 Γ 对交集 S 中每个命题符都有决定 定义一致；

- 由于 $\Gamma, \Gamma_0, \Gamma_1$ 协调，赋值 v 被成功构造 得到 $v \models \Gamma_0 \cup \Gamma_1$；

故假设不成立 $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ 协调。

第 2 问：说明条件 (3) 是必要的

构造反例：

- 设：

$$S = \{p\}, \quad S_0 = \{p, q\}, \quad S_1 = \{p, r\}$$

- 定义：

$$\Gamma_0 = \{p, q\}, \quad \Gamma_1 = \{\neg p, r\}$$

- 分析：
  - Γ_0 与 Γ_1 各自协调；
  - 但 $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \{p, \neg p, q, r\}$ 不协调；
  - 此时 $\Gamma = \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$，对 $p \in S$ 没有决定 条件 (3) 不满足。

结论：
若不强制 Γ 对 S 中所有公式做出肯定判断 ($A \in \Gamma$ 或 $\neg A \in \Gamma$)，则无法保证 $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ 协调 条件 (3) 是必要的。