罗素悖论与模态集合论

楼雅潇 [1]，常凯尧 [2,3]，易佳萱 [3]

摘 要： 本综述旨在深入探讨罗素悖论及其早期的解悖论。罗素悖论是一项重要的发现，揭示了自指和逻辑矛盾的困境。综述首先介绍了罗素悖论的定义和表述，包括自指集合和逻辑矛盾的解释。接下来讨论了罗素悖论的多个版本和变体，以及它对数学基础和形式化逻辑的挑战。

在早期的解决方法中涉及对陈述功能的扩展和限制的研究。研究者们通过引入模态逻辑、可信度概念和非经典逻辑等方法，试图改进逻辑系统和语言，以更好地处理自指和逻辑矛盾的问题。这些努力为解决罗素悖论提供了新的思路和工具。本综述重点选取两篇相关文献进行深入分析。

本综述强调了罗素悖论对逻辑学、语义学、计算机科学等多个学科的影响。它促使人们在处理自指和逻辑矛盾时寻求更强大和健壮的解决方案，涉及到自指和逻辑矛盾的处理、知识表示和推理的挑战，以及对证明和验证的需求。

最后，综述总结了罗素悖论的重要性和影响，以及对逻辑学、数学哲学、知识论和语义学的影响。它提示了人类思维和语言的局限性，并促使之后的研究重新评估传统的逻辑系统和语言，以更好地应对自指和逻辑矛盾的挑战。

关键词： 罗素悖论；素朴集合论；ZFC 集合论；模态逻辑系统

Russell's Paradox and Modal Set Theory

Ya-Xiao Lou[1], Kai-Yao Chang[2,3], Jia-Xuan Yi[3]

Abstract： This review aims to delve into Russell's paradox and its early resolution methods. Russell's paradox is a significant discovery that reveals the dilemma of self-reference and logical contradictions. The review first introduces the definition and expression of Russell's paradox, including interpretations of self-referential sets and logical contradictions. Subsequently, various versions and variations of Russell's paradox are discussed, along with its challenges to the foundations of mathematics and formal logic.

Early resolution methods involve the study of extending and restricting assertive functions. Researchers have attempted to improve logical systems and languages by introducing modal logic, concepts of credibility, and non-classical logic, to better address the issues of self-reference and logical contradictions. These efforts provide new perspectives and tools for resolving Russell's paradox. The review focuses on in-depth analysis of two relevant literature selections.

The review emphasizes the impact of Russell's paradox on various disciplines, such as logic, semantics, and computer science. It prompts individuals to seek more powerful and robust solutions when dealing with self-reference and logical contradictions, addressing challenges in the handling of self-reference, knowledge representation, and reasoning, as well as the demands for proof and validation.

In conclusion, the review summarizes the significance and influence of Russell's paradox on logic, philosophy of mathematics, epistemology, and semantics. It highlights the limitations of human thinking and language, encouraging subsequent research to reevaluate traditional logical systems and languages for better coping with the challenges of self-reference and logical contradictions.

Key words: Russell's Paradox; Naive Set Theory; ZFC Set Theory; Modal Logic Systems

1　罗素悖论的背景和重要性

罗素悖论是 20 世纪数学和哲学领域最具影响力的悖论之一。它由英国哲学家和数学家伯特兰 · 罗素于 1901 年提出，对逻辑学、数学基础和哲学思考产生了深远的影响。罗素悖论的背景可以追溯到当时对数学基础的探索和形式化逻辑的发展。

在 19 世纪末和 20 世纪初，数学家和哲学家们致力于建立数学的坚实基础。他们试图通过形式化逻辑和集合论来建立数学的公理化体系。然而，正是在这个时期，罗素悖论浮现出来，挑战了当时的基础数学理论。

罗素悖论最早出现在罗素试图解决数学中的一个基本问题：集合的自我归类。罗素思考了一个集合，这个集合包含了所有不包含自身的集合。这个集合是否包含自身呢？如果包含自身，那么根据定义，它不应该包含自身；如果不包含自身，那么根据定义，它应该包含自身。[9] 这种自指的矛盾导致了罗素悖论的出现。

罗素悖论的重要性在于它揭示了形式化逻辑和集合论的局限性。它提醒我们，在构建一个完备的数学体系时，我们需要更加谨慎地处理自指和无限的概念。罗素悖论还引发了对数学基础和逻辑基础的深入思考，推动了逻辑学、数学哲学和认知科学的发展。

综上所述，罗素悖论作为一个重要的哲学和数学难题，对我们理解数学基础、逻辑推理和认知过程产生了深远的影响。通过探索罗素悖论的背景和重要性，我们可以更好地理解这一悖论的意义，并在解决悖论和推动相关领域的研究中发挥作用。

2　罗素悖论的介绍

2.1　罗素悖论的定义和表述

罗素悖论是由伯特兰 · 罗素提出的一个经典悖论，涉及集合论和自指的概念。它最早出现在罗素试图解决一个关于集合的基本问题时。

罗素悖论的最著名表述是通过一个自指的集合来展示的。考虑一个集合，该集合包含了所有不包含自身的集合。我们将这个集合称为 “R”。现在，我们问自己一个问题：R 是否包含自身？如果 R 包含自身，那么根据定义，它不应该包含自身；但如果 R 不包含自身，

那么根据定义，它应该包含自身。这就形成了自指的矛盾，导致了罗素悖论的出现。

罗素悖论的核心在于自指的概念。[9] 自指是指一个概念或语句引用或描述了自身。在罗素悖论中，集合 R 自指，因为它描述了包含所有不包含自身的集合。这种自指的悖论导致了逻辑矛盾，挑战了当时的数学基础和形式化逻辑。

罗素悖论的定义和表述并不仅限于上述的自指集合。实际上，罗素提出了多个版本和变体的悖论，每个版本都涉及到自指和集合的概念 [10]。例如，罗素的悖论还包括类似的自指集合，如包含所有不包含自身的集合的集合。这些不同版本的罗素悖论都指向了自指概念的困境和逻辑矛盾。

罗素悖论的定义和表述揭示了一个重要的观点：自指的概念在形式化逻辑和集合论中是具有挑战性的。它揭示了我们在处理自指时需要更加谨慎和精确的方式。罗素悖论的出现引发了对数学基础和逻辑基础的深入思考，推动了逻辑学、数学哲学和认知科学的发展。

总之，罗素悖论的定义和表述通过自指的集合展示了逻辑矛盾的存在，挑战了数学基础和形式化逻辑。这一悖论的出现引发了对自指和逻辑矛盾的深入研究，对我们理解数学基础、逻辑推理和认知过程产生了深远的影响。

2.2 悖论的重要性和影响

罗素悖论作为一个经典的逻辑悖论，具有重要的哲学和数学意义，对我们理解数学基础和逻辑推理产生了深远的影响。

首先，罗素悖论揭示了形式化逻辑和集合论的局限性 [9]。它表明，当我们处理自指和无限概念时，我们必须小心谨慎，以避免逻辑矛盾的出现。这促使哲学家和数学家重新审视数学基础的公理化体系，提出了更为严格和精确的形式化方法，如克里普基的层次类型理论。

其次，罗素悖论对哲学和认知科学产生了影响。它引发了对知识的本质、真理的定义以及语义和语言的研究。悖论的存在挑战了我们对现实世界的认知和描述方式，促使哲学家和认知科学家重新思考知识的可靠性和一致性。

罗素悖论还对计算机科学和人工智能产生了重要影响。在计算机科学中，悖论的思考启示了我们对自指和逻辑矛盾的处理方式。它对计算机程序的设计和验证提出了挑战，并

促使我们开发更健壮和可靠的计算系统。悖论的研究也对人工智能领域的知识表示和推理产生了影响，帮助我们解决悖论和不一致性的问题。

罗素悖论的重要性不仅限于数学、逻辑和计算机科学领域，它还对哲学和科学方法论产生了深远影响。它促使我们反思知识的可靠性和一致性，以及我们对现实世界的描述方式。罗素悖论激发了对语义、语言和概念的研究，推动了哲学和认知科学的发展。

此外，罗素悖论的研究也对数学基础和形式化逻辑的发展产生了重要影响。它引发了对陈述功能和集合论的扩展和限制的思考，推动了数学基础理论的发展。通过解决悖论和处理逻辑矛盾，数学家们不断改进和完善数学的公理体系和推理方法。

总结来说，罗素悖论作为一个经典的逻辑悖论，对我们理解数学基础、逻辑推理和认知过程产生了深远的影响。它揭示了形式化逻辑和集合论的局限性。

2.3 罗素悖论的不同版本和变体

罗素悖论存在许多不同的版本和变体，每个版本都涉及到自指和集合的概念，进一步揭示了自指概念的困境和逻辑矛盾。

罗素最初提出的悖论是通过自指的集合来展示的，即包含所有不包含自身的集合 [9]。然而，这只是罗素悖论的最简单版本之一。

罗素还提出了其他自指集合的变体，如包含所有包含自身的集合的集合 [10]。这个变体也导致了逻辑矛盾，因为如果这个集合包含自身，那么根据定义，它不应该包含自身；反之，如果它不包含自身，那么根据定义，它应该包含自身。

此外，罗素悖论的思想还在其他领域产生了类似的悖论和自指问题。例如，图灵悖论是基于图灵机和停机问题的自指悖论。它涉及到一个机器试图判断另一个机器是否会停机，而这个判断本身却无法停机。这种自指的困境与罗素悖论的思想有相似之处。

总之，罗素悖论存在许多不同的版本和变体，每个版本都涉及到自指和集合的概念。这些不同的版本和变体进一步揭示了自指概念的困境和逻辑矛盾，挑战了我们对现实世界的认知和描述方式。它们推动了对自指和逻辑矛盾的研究，对哲学、数学和计算机科学产生了深远的影响。

3 早期解悖工作

3.1 罗素的自我排除原则

在早期的解悖工作中，伯特兰 · 罗素提出了自我排除原则，这是他对罗素悖论的一种回应。自我排除原则是一种逻辑原则，旨在避免自指和逻辑矛盾的出现。[10]

罗素的自我排除原则基于一个简单的思想：一个集合不能同时是自己的成员和非自己的成员。这个原则可以防止自指的悖论情况发生，例如罗素悖论中的自指集合。根据自我排除原则，如果一个集合声称自己是自己的成员，那么它就不能是自己的成员；如果一个集合声称自己不是自己的成员，那么它就必须是自己的成员。这种原则通过排除自指的情况，试图解决悖论问题。

罗素的自我排除原则对于解决罗素悖论提供了一种方法，即通过限制集合论的公理系统和推理规则，避免自指和逻辑矛盾的产生。这为后来对集合论和逻辑的修正和发展奠定了基础。

然而，罗素的自我排除原则也引发了一些讨论和争议。一些哲学家和数学家认为，自我排除原则过于严格，限制了集合论和逻辑系统的表达能力。他们认为，自指和逻辑矛盾可能是有用的概念，可以用于解决其他问题。因此，后来的研究者继续探索其他方法和技术，以处理自指和逻辑矛盾的情况，从而进一步发展了解悖工作。

尽管罗素的自我排除原则在解决罗素悖论方面并未完全成功，但它为后来对逻辑和集合论的发展提供了重要的启示。它强调了自指和逻辑矛盾的问题，并促使研究者继续探索更强大和健壮的逻辑系统和推理方法，以应对悖论的挑战。

3.2 罗素-怀特海德悖论的解决方案

罗素-怀特海德悖论是对罗素悖论的一个变体，它涉及到对描述集合的语言进行自我引用的问题。在这个悖论中，一个集合被定义为包含所有不包含自己的集合，这引发了自指和逻辑矛盾的问题。

在早期的解悖工作中，罗素和怀特海德都试图提出解决罗素-怀特海悖论的方案。

罗素的解决方案涉及到他著名的类型论。他提出了一个层次化的集合结构，将集合分

为不同的类型，每个类型的集合只能包含低于其类型的集合。[10] 通过这种方式，罗素试图避免自指和逻辑矛盾的产生。然而，罗素的类型论也引发了一些问题，例如类型无穷回归的困境，导致后来的研究者进一步改进了类型论的形式。

怀特海德提出了一个不同的解决方案，即限制自我描述的语言。[11] 他认为，悖论的根源在于使用了自我描述的语言，即语言可以引用自己。因此，怀特海建议使用一个更为限制的语言，禁止对自己进行描述。这样一来，自指和逻辑矛盾的问题就可以避免。然而，这种限制的语言可能会导致表达能力的损失，并且在实践中很难应用。

总的来说，罗素和怀特海德在解决罗素-怀特海悖论方面提出了不同的方案。罗素通过类型论的层次化结构试图解决自指和逻辑矛盾的问题，而怀特海德则提出了限制自我描述语言的方法。尽管这些解决方案都有其局限性和争议，但它们为后来对悖论的研究和发展提供了重要的思路和启示。后续的研究者在这些基础上进一步改进了解悖工作，推动了逻辑、语义学和集合论等领域的发展。

4 集合论的发展与哲学回应

在集合论的发展过程中，最初的朴素集合论引发了罗素悖论并表现出不一致性。为了克服这一问题，策梅洛-弗兰克尔公理与选择公理（ZFC）被提出，成为素朴集合论的替代理论。在 ZFC 理论中，迭代概念为我们提供了素朴集合概念的替代方案。就我们所知，它是在经典意义上一致的。但是，它是一致的这一事实并不能确凿地表明它是正确的集合概念。此外，除了它的不一致性之外，人们对于素朴集合论的概念没有得到足够的研究。毕竟，素朴集合概念是一种极其自然的集合概念。

对于罗素悖论的另一种回应是捍卫集合的朴素概念，并且在避免三段论的同时接受矛盾，Richard Routley 和 Graham Priest 等人选择了这种方法，他们指出，与迭代法相比，素朴集合论捕捉到了更广泛、更包容的集合概念 [7], emphasis in the original。遗憾的是，这种尝试的结果或者是由于素朴集合论的不一致性导致每一个合式公式都为真，或者是将无限制的概括原则与并行相容性逻辑结合起来，而这种逻辑是这是一种不能验证变性的逻辑。

而第三种方法则涉及对存在的无为主义解释，这一解释允许对存在和不存在的对象进

行量化，并旨在在避免矛盾的同时保持经典逻辑的解释 [8]. Wigglesworth 认为这种方法可以用来解决朴素集理论的悖论，它保留了经典逻辑的使用，但又避免了矛盾。此外，这种方法可以被看作是对 Routley（1980）和 Priest（2005）都赞同的另一种观点的解释：非存在主义。

4.1 非存在主义的模态集合论

非存在主义是一种关于存在的观点，这种观点根植于迈农（其在哲学上以提出对象论而闻名)。根据非存在论，一些物体（如具体的物体）存在。其他对象也许是抽象的对象，或仅仅是可能的对象、不可能的对象并不存在。重要的是人们可以对不存在的对象进行量化。在这方面，非存在主义背离了经典的奎因谓词主义观点，根据这种观点，存在的事物才是我们可以量化的事物。而在非存在主义的尝试中，量词的范围包括存在的对象和不存在的对象。为了在形式语言中捕捉存在的非存在方法，存在量词不涉及任何存在承诺。一个对象的存在性是通过一个存在性谓词来给出的。为了避免混淆，存在量词的无存在主义解读将 $\exists x\Phi$ 解释为“存在某个 x，Φ 成立”，而不是“存在一个 x 使得 Φ 成立”。后者的陈述是存在性承诺的，可以用公式 $\exists x(Ex \wedge \Phi)$ 表示。

也就是说，Wigglesworth 探讨了在使用模态逻辑工具的形式语言中表示不存在主义对存在的替代方式。与引入存在性谓词不同，他将存在量词 $\exists x\Phi$ 视为存在性承诺，正如传统奎因主义中所采用的那样。在形式语言中，非存在被表示为‘可能’存在，采用模态逻辑中的标准可能性运算符，即 $\diamond\exists x\Phi$。当然，根据可能性的标准解释，非存在应该意味着比可能存在更多，因为可能存在允许实际存在。由于这篇文章的目的，菱形运算符应该被解释为包括非实际条件。事实上，在下文呈现的朴素集合论的语境中可以发现，在避免矛盾的情况下，它必须包括非实际条件。从语义上来说则可以将 $\diamond\exists x\Phi$ 解读为‘在某个可达点 w 上，存在一个非实际的 x，使得 Φ 成立’。

在进一步的研究中，Wigglesworth 提出了一种模态逻辑方法来解释朴素集合论，并使用存在量词来明确存在的性质。这一理论中的非存在被表示为可能存在，使用可能性运算符进行形式化，但也必须包含非实际的条件以避免矛盾。模态解释在这些条件下可以应用于素朴集合论，具体方式是使用模态无限制的概括公理模式来表示集合的潜在存在。该文章

引入了双模态无限制的概括公理模式，以维持经典逻辑系统性质的同时在逻辑系统中加入不存在对象相关观念 [12]

Parsons 提出了对模态逻辑的另一种形式解释 [12]，其中涉及经典模态逻辑中不常见的语法。在他的理论中，作用域公式使得模态集合论的语义变得复杂。Parsons 需要的不仅仅是他的理解公理 SUC，以确保他的模态理论的强度。该理论可以证明，如果一个集合 x 存在于某个点，那么就有一个点，它的后继点存在。但该理论并不能证明所有的后继者都曾一度同时存在。为了做到这一点，Persons 必须援引一个反射原则，允许由整个点系统实现的任何情况都在一个特定的点上实现。

相比之下，基于素朴模态集合论的双模态理论在概念上更易理解，并在证明论上具有优势。这是因为 BMUC 在假设模态逻辑 S5（$5\Diamond p \to \Diamond p$ $(wRv \wedge wRu) \to \vee Ru$）的情况下是一致的，而且其在证明论的角度上具有一些有趣的定理。在这里，BMUC 是指 Bi-Modal Unrestricted Comprehension (BMUC).（$\Diamond\exists y\forall x[x \in y \leftrightarrow \Phi]$.）素朴模态集合论的提出能够进一步对无限集合的可能存在或不存在进行证明，并在理论上优于 Parsons 提出的模态集合论。BMUC 的一致性证明揭示了一个仅有一个对象的模型所生成的无限集合的存在是一个非良基点。对于 ZFC 一致性的影响方面，如果 BMUC 可以证明对所有 ZFC 公理的模态解释，那么可能会产生一些有趣的结论。

模态逻辑在集合论中的应用得到了广泛的关注。素朴模态集合论中的 BMUC 公理模式在证明存在无限集合方面具有概念上的优势，无需诉诸其他原则。素朴模态集合论中涉及的模态性质可以通过对存在的非存在主义方法的解释，其中非存在可以被理解为仅仅是可能的存在。而双模态朴素集理论提供了一个自然的集合理论，它既在证明理论上是有趣的又保持了系统的一致性。

4.2 限制概括原则和集合给定条件的集合论

在另一篇研究中，作者 Peter Fritz 指出，素朴集合论的概括原则允许一个集合包含所有满足给定条件的集合。然而，罗素悖论表明这个原则在经典逻辑中是不一致的。一种应对方法是通过排除问题实例来限制素朴集合论中的概括原则，但这篇文章提出了一种不同的方法。Fritz 建议通过限制集合满足给定条件的方式将其形式化为一个未解释的一元命题

运算符，从而得到一种有趣的集合理论。

研究中引入了一个名为“确定性”的运算符，用于在集合论中区分无悖的主张和悖论主张。概括原则可以被限制为只包括那些确定性地满足条件的集合，通过这一方式即有可能阻止罗素悖论的发生。模态逻辑被用来研究这一新引入的原则的一致性，但在大多数情况下被发现引入模态逻辑的逻辑系统过于弱或不一致。在这一研究中，对概括原则的一种虚构主义解释被探讨，在其中它被理解为关于数学对象存在的一种选择性虚构。

这篇文献研究了模态化的集合论中概括原则的一致性。它引入并证明了在弱模态逻辑中的一致原则（Comp）和（Comp）(在一阶逻辑中，这可以表述为以下原理原理，其中 可以是 y 不能自由发生的任何公式：$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \Phi)$（Comp）；$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \Phi)$ (Comp)）。研究将这些原则置于现有文献中，并追溯它们的起源到 1966 年 Fitch 的工作 [4]。文章研究了不同的模态化集合概括原则及其在各种逻辑中的一致性。作者使用了命题模态逻辑的语言和基于二元关系符号的一阶语言。在证明过程中使用的公理计算包括经典的一阶逻辑，但该文献未证明 Barcan 公式及其逆命题。

作者认为 Krajícek 提出的原则可能是最有前途的剩余模态概括原则。这涉及到由 [5] 提出的以下概括原则:

$$\exists y \forall x((\Diamond x \in y \leftrightarrow \Diamond \phi) \wedge (\Diamond \neg x \in y \leftrightarrow \Diamond \neg \phi)).$$

Krajícek 证明了这个原则在 S5 中是不一致的，目前在相对较弱的模态逻辑 KT 中是否一致仍然是一个未解的问题 [6]。事实上，对于本文的结果，一个合理的反应可能是以更多的精力研究（MCA）。一旦这里考虑的原则被证明不太可能产生有趣的集合论时，（MCA）可能被认为是最有前途的剩余模态概括原则。这一原则使用 Q 允许等值替代规则（$\phi \leftrightarrow \forall x \phi$, provided x is not free in ϕ)，这在以往研究的推导中没有得到明确记录。

在研究的证明过程中，Kripke 框架和模型被用于定义 L0-公式和 L1($\in$)-公式的有效性。在这里，L0- 是一个命题模态逻辑的语言，基于一个可数无穷的命题字母集合，其中使用布尔运算符 $\neg$ 和 $\wedge$ 以及一元模态运算符来构造公式。在这种语言中，如果一个公式集包含所有命题永真式和分配律公理 (K) = $(p \to q) \to (p \to q)$，并且在摩德斯 · 波能斯、统一替代和必要性规则下是封闭的，则它是一个正常模态逻辑。由公式 $A_1, \ldots, A_n$ 公设的正常模态逻

辑，记作 $KA_1 \dots A_n$，是包含 $A_1, \dots, A_n$ 的最小正常模态逻辑。

L1(∈)-则是一个一阶语言，基于一个可数无穷的个体变量集合，其中使用两个二元关系符号 $=$ 和 $\in$ 来形成原子谓词，使用布尔运算符 $\neg$ 和 $\wedge$ 以及全称量词 $\forall x$ 来构造复杂的公式。让 $L1(\in)$ 是通过一元命题运算符扩展的 $L1(\in)$。

其他常见的符号，如 $\vee$、$\rightarrow$、$\neg$、$\perp$、$\exists$、$=$ 和 $\notin$ 将按照通常的方式被用作元语言的缩写，而 Ex 将被用作 $\exists y(y = x)$ 的缩写。同时，QS5 + (Comp) 的非模态片段被表征为由 (F) 和 (CF) 所公设的一阶理论。其中 (Comp) 在 S5 中。

回顾基本的模态概括原则：首先考虑在强模态逻辑 S5 中的 (Comp)，这是由以下两个公理公设的正常模态逻辑：

$$(T) \quad \Diamond p \rightarrow p,$$

$$(5) \quad \Box p \rightarrow \Diamond \Box p.$$

可以证明 QS5 + (Comp) 是一致的。实际上，这将得出一个在多个方面更强的定理。首先，该定理将准确刻画 QS5 + (Comp) 的非模态片段，作为以下两个公理概念化的一阶理论：

$$(F) \quad \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \bigvee_{i \leq n} x = z_i),$$

$$(CF) \quad \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \bigwedge_{i \leq n} x = z_i).$$

非模态片段在添加任何进一步的非模态假设时被保留，这对于所有包含 KD 的 S5 中的所有正常模态逻辑都成立。

进一步地，这篇文献还呈现了一个涉及逻辑等价性的 KD 定理，同时该定理的逆方向是通过 Kripke 模型构建来证明的。作者用引理证明了该模型并验证了 (Comp) 和 (CF)。这篇文献构建出将可能世界限制为具有有限支持的置换的模型，并且说明了在可数多个世界中足以证明结论。弱概括原则 (Comp) 在非模态片段中由 (F) + (CF) 表达。文章还指出，向 (Comp) 添加模态公理以获得更强的集合论可能需要超越 (F) + (CF) 的原则。

在这里，判断集合成员的严格性导致将它们添加到 (Comp) 时出现矛盾。而 (Comp) 的严格双条件版本在模态逻辑 KT 中是不一致的。这篇文献中的证明或推导的组成部分与集合概括和模态逻辑的概念相关。证明显示了逻辑系统 $Q\Lambda + \text{Comp}^2$ 的不一致性。这意味着

在这个系统中无法推导出有效的结论。

论文中的证明涉及多个步骤，包括使用 Scroggs 定理。文本中的方程和符号用于表示逻辑陈述和变量之间的关系。例如，陈述（7）涉及一系列条件的合取，这些条件暗示着某个变量 y_{m+1} 不是其自身的成员。符号"∧" 表示逻辑合取，而"↔" 表示逻辑等价。符号"¬" 表示逻辑否定。陈述（8）是一个适用于所有变量 y_0 到 y_{m+1} 的全称陈述，涉及一系列条件，表明 y_{m+1} 不是其自身的成员。符号"∀" 表示全称量化。陈述（9）是另一个适用于所有变量 y_0 到 y_{m+1} 的全称陈述，涉及一系列条件，表明变量 y_0 到 y_{m+1} 都不满足某个特定属性。符号"∃" 表示存在量化。

论文中的 KDDc 是一种 Normal 模态逻辑，其力度与 S5 不可比较。这里的 KDDc 是转向一种在强度上与 S5 不可比较的正常模态逻辑：KDDc 是由公理 (D) 和 (D) 的逆公设构成的正常模态逻辑：

$$(KD) \wedge_{i \leq n} (\Diamond p_i \leftrightarrow p_i) \rightarrow \bigvee_{i \leq n} p_i \leftrightarrow \bigvee_{i \leq n} p_i$$

$$(Dc) \Diamond p \rightarrow \Box p.$$

KDDc 系统是允许在所有布尔运算符上进行分配的非典型系统：例如，在该系统中，$\neg\phi$ 等同于 $\neg\phi$，而 $(\phi \vee \psi)$ 等同于 $\phi \vee \psi$。这使得该理论在作为一种虚构主义理论时尤为有趣：尽管并非虚构中的每件事都是真实的，但从观点来看，虚构是完备的。$\Diamond\phi \vee \Diamond\neg\phi$ 是一个定理模式。如果我们添加 (BF) 和 (CBF)，这种移动的特性也扩展到了量词：现在利用这一进一步的性质，再加上一次必要性的应用，可以从 (Comp) 的每个实例推导出相应的 (Comp) 的实例该系统允许在所有布尔运算符上分布，使其作为一种虚构主义理论变得有趣。通过构建一系列 Kripke 模型，作者演示了 QKDDc + (Comp) + (BF) + (CBF) 的一致性。引理 5.4 显示了在 CRQKA1...An 中可推导出模架构 (KA1...An) 的每个实例。而 QKDDc 是一种变种演算，其中除了 (D) 和必要性之外的所有公理在上述模型的所有世界中都是有效的。(Comp) 在这些模型的所有世界中都是有效的。而 (D) 的替代实例在（Mn, 0）中可能无效，但在所有其他世界中都是有效的。虽然 QKDDc + (Comp) 是一致的，但它不能用于证明集合在布尔运算（如并集、交集和补集）下封闭的自然原理。并且 QKDDc+(Comp) 无法用于证明 (Union)、(Con)、(Neg) 以及它们的否定。对于以 (Comp) 为线索的模态性质的研究本身并未产生有趣

的集合论，它需要进一步的集合论公理，很可能是模态的集合论公理，才能产生某种有趣的集合论。文章建议探索模态化集合概括的替代方式，并解决由此产生的模态集合论的一致性问题。总的来说，这篇文献讨论了使用模态性来解决朴素集合论的局限性的具体方案。作者通过将朴素集合概括原则限制在特殊条件下的方法，提出了解决罗素悖论的一般性方法。文章运用了一阶逻辑和命题演算来进行定义和证明命题。文章指出了使用模态性来解决朴素集合论的局限性，并讨论了各种集合论，如策梅洛-弗兰克尔集合论和奎恩的新基础集合论，如何被理解为这对罗素悖论的一般性回应的实例。然而，除了提出解决朴素集合论局限性的方法之外，文章并未提供具体的结论。

5 罗素悖论的后续发展

5.1 克里普基的层次类型理论

在罗素悖论的后续发展中，数学家和逻辑学家赫尔曼 · 克里普基提出了层次类型理论，作为对罗素悖论的解决方案之一 [?]。克里普基的理论旨在解决集合论和逻辑中的自指和逻辑矛盾问题。

克里普基的层次类型理论基于一个重要的观察: 语言中的表达式可以分为不同的类型，每个类型对应着不同的语义解释。他将语言的表达式分为简单类型和复合类型，通过限制表达式的使用方式，避免了自指和逻辑矛盾的产生。

在克里普基的层次类型理论中，简单类型被视为不可自引用的基本元素，例如个体、命题或函数。复合类型则通过将简单类型的表达式组合起来形成，例如将命题作为参数的函数或函数的函数。

克里普基的层次类型理论具有一些重要的特点。首先，它通过限制表达式的类型，避免了自指和逻辑矛盾的问题。其次，它提供了一种形式化的方法来处理逻辑和语义的困境，为数学和逻辑的基础提供了坚实的基础。此外，层次类型理论也为计算机科学领域的类型系统提供了重要的启示，促进了编程语言和形式化验证的发展。

尽管克里普基的层次类型理论在解决罗素悖论方面取得了重要的进展，但它也引发了一些争议和挑战。一些研究者认为，层次类型理论过于复杂，限制了表达能力和推理的效

率。因此，后来的研究者继续探索其他方法和技术，以处理自指和逻辑矛盾的情况，并进一步完善了解悖工作。

总的来说，克里普基的层次类型理论为解决罗素悖论和自指问题提供了一种有力的方法。它通过限制表达式的类型，避免了自指和逻辑矛盾的产生，同时为逻辑、语义学和计算机科学等领域的发展提供了重要的启示。

5.2 陈述功能的扩展和限制

在罗素悖论的后续发展中，研究者们试图扩展和限制陈述的功能，以解决自指和逻辑矛盾的问题。这些努力旨在改进逻辑系统和语言，使其能够更好地处理悖论情况。

一种扩展陈述功能的方法是引入模态逻辑 [2]。模态逻辑是一种扩展了传统命题逻辑的形式系统，它允许对命题的真值进行更多的陈述，如可能性、必然性和不可能性。通过引入模态操作符，例如" 可能" 和" 必然"，研究者们能够更准确地描述自指和悖论情况，并探索可能的解决方案。

另一种限制陈述功能的方法是引入可信度和可靠性的概念 [3]。在处理自指和逻辑矛盾的情况时，研究者们开始关注陈述的可信度和可靠性。他们认识到，不同陈述的真实性和可靠性可能存在差异，需要进行更加精确的判断和评估。通过引入概率论、证据论和可信度理论等工具，研究者们尝试在不同陈述之间建立更准确的关系，并解决悖论问题。

此外，还有一些其他方法被提出来扩展和限制陈述功能，如非经典逻辑、模糊逻辑和多值逻辑等。这些方法试图超越传统的二值逻辑，引入更灵活和适应性更强的逻辑系统，以更好地处理自指和逻辑矛盾的情况。

尽管在扩展和限制陈述功能方面取得了一些进展，但解决自指和逻辑矛盾的问题仍然是一个具有挑战性的课题。研究者们在不同领域进行着深入的探索，包括逻辑学、语义学、认知科学和计算机科学等 [1]。他们致力于发展更强大、更灵活的逻辑系统和语言，以更好地理解和解决罗素悖论及其相关问题。

总的来说，通过扩展和限制陈述功能，研究者们在解决罗素悖论和自指问题方面取得了一些进展。引入模态逻辑、可信度概念和其他非经典逻辑方法，为处理自指和逻辑矛盾提供了新的思路和工具。然而，这个领域仍然面临着挑战，需要进一步的研究和探索，以

推动解悖工作的发展。

6 结论

罗素悖论是数学和哲学领域中一项重要的发现，它揭示了自指和逻辑矛盾的困境。通过自指集合的悖论，罗素成功地挑战了当时广泛接受的集合论和逻辑系统。这一悖论引发了对数学基础和形式化逻辑的深入思考，并催生了解悖工作的广泛研究。

在早期的解悖工作中，罗素提出了自我排除原则，试图通过限制集合的自指和逻辑矛盾来解决罗素悖论。此外，怀特海和数学家克里普基也提出了各自的解决方案，如限制自我描述语言和层次类型理论。这些努力为解决罗素悖论提供了重要的思路和启示。

罗素悖论的后续发展涉及到对陈述功能的扩展和限制。研究者们引入了模态逻辑、可信度概念和非经典逻辑等方法，以改进逻辑系统和语言，更好地处理自指和逻辑矛盾的问题。这些努力为逻辑学、语义学和计算机科学等领域的发展提供了重要的思路和工具。

罗素悖论的研究不仅对数学和哲学领域具有重要意义，还对计算机科学和人工智能产生了深远影响。自指和逻辑矛盾的处理、知识表示和推理的挑战，以及对证明和验证的需求，都促使人们在计算机科学领域寻求更强大和健壮的解决方案。

罗素悖论的解决仍然是一个活跃的研究领域，它为我们认识和理解逻辑、语义和知识提供了深刻的见解。

参考文献

[1] Peter Aczel. Frege structures and the notions of proposition, truth and set. *The Journal of Symbolic Logic*, 45(3):473–482, 1980.

[2] Rudolf Carnap. *Meaning and Necessity: A Study in Semantics and Modal Logic*. University of Chicago Press, 1956.

[3] Solomon Feferman. Systems of predicative analysis. *The Journal of Symbolic Logic*, 29(1):1–30, 1964.

[4] Frederic B Fitch. A consistent modal set theory (abstract). *The Journal of Symbolic Logic*, 31:701, 1966.

[5] Jan Krajíček. A possible modal formulation of comprehension scheme. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 33:461–480, 1987.

[6] Jan Krajíček. Some results and problems in the modal set theory mst. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 34:123–134, 1988.

[7] Graham Priest and Richard Routley. The philosophical significance and inevitability of paraconsistency. In Graham Priest, Richard Routley, and Jean Norman, editors, *Paraconsistent Logic*. Philosophia Verlag, Munich, 1989.

[8] Graham Priest, Richard Routley, and Jean Norman, editors. *Paraconsistent Logic*. Philosophia Verlag, Munich, 1989.

[9] Bertrand Russell. *The Principles of Mathematics*. Cambridge University Press, 1903.

[10] Bertrand Russell. Mathematical logic as based on the theory of types. *American Journal of Mathematics*, 30(3):222–262, 1908.

[11] Alfred North Whitehead and Bertrand Russell. *Principia Mathematica*. Cambridge University Press, 1910.

[12] John Wigglesworth. A modal logic approach to naive set theory. *Australasian Journal of Logic*, 15(2):Article no. 2.6, 2018.