Fall 2022 MATH1607H Homework 5

Lou Hancheng   louhancheng@sjtu.edu.cn

2022 年 10 月 23 日

第 4 章第 2 节

1.(3) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{-h}=2f'(x_0)$

4. 椭圆上半部分可以改写为 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, 则它在 (x_0,y_0) 处的切线为 $y=(tan\theta_0)x+\sqrt{a^2(\tan\theta_0)^2+b^2}(\tan\theta_0=y'(x_0)=-\frac{bx_0}{a\sqrt{a^2-x^2}})$. 设 (x_0,y_0) 与左焦点的连线与 x 轴的夹角为 θ_1, 那么 $\tan\theta_1=\frac{y_0}{x_0+c}=\frac{b\sqrt{a^2-x_0^2}}{a(x_0+c)}$. 同理, 对于 (x_0,y_0) 与右焦点连线与 x 轴的夹角为 θ_2, $\tan\theta_2=\frac{y_0}{x_0-c}=\frac{b\sqrt{a^2-x_0^2}}{a(x_0-c)}$. $\tan 2\theta_0=\frac{2\tan\theta_0}{1-\tan^2\theta_0}=\frac{2abx_0\sqrt{a^2-x_0^2}}{(a^2+b^2)x_0^2-a^4}$, 而 $\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{2abx_0\sqrt{a^2-x_0^2}}{(a^2+b^2)x_0^2-a^4}$. 显然 $\tan 2\theta_0=\tan\theta_1+\tan\theta_2$,$2\theta_0-(\theta_1+\theta_2)=k\pi$, 得证.

5. $y=\frac{a^2}{x}$,$y'(x)=-\frac{a^2}{x^2}$, 则其在 (x_0,y_0) 处的切线为 $y=-\frac{a^2}{x_0^2}x+2\frac{a^2}{x_0}$, 它在 x 轴和 y 轴的截距分别为 $2x_0$,$2\frac{a^2}{x_0}$, 则 $S_\Delta=2a^2$

6.(2) $y'_-(2k\pi)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos(2k\pi+\Delta x)}-\sqrt{1-\cos 2k\pi}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos(2k\pi+\Delta x)}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}|\sin(k\pi+\frac{\Delta x}{2})|}{\Delta x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 同理,$y'_+(2k\pi)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.(4) $y'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}=-1$, 同理 $y'_+(0)=1$

7.(3) $y'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta xe^{\Delta x}}{\Delta x}=1$, $y'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{a\Delta x^2}{\Delta x}=0$, 因此在 $x=0$ 不可导.

7.(4) $y'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{e^{\frac{a}{\Delta x^2}}}{\Delta x}$. 若 $a>0$, 显然左导数不存在. 若 $x=0$,$y'_-(0)=y'_+(\Delta)=0$, 因此在 $x=0$ 处可导. 若 $x<0$,$y'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{e^{\frac{a}{\Delta x^2}}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}e^{\frac{a}{\Delta x^2}-\Delta x+1}=0$, 同理 $y'_+(0)=0$. 综上, 当 $a\leq 0$ 时 y(x) 可导.

8. 若 $f(0)=0$, 则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|f(\Delta x)|}{\Delta x}$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|f(\Delta x)|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{|f(\Delta x)|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{|f(\Delta x)|}{\Delta x}=0$, 即当且仅当 $f'(x)=0$ 时 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处可导. 若 $f(0)\neq 0$, 那么存在一个邻域使得 $\forall x\in B_\delta(0)\backslash\{0\},sgn(f(x))=sgn(f(0))$, 则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|f(\Delta x)|-|f(0)|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|f(\Delta x)-f(0)|}{\Delta x}=|f'(0)|$, 此时 |f(x)| 在 $x=0$ 处可导.

9. 不妨设 $f'_+(a)>0,f'_-(b)>0,\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_+(a)>0$, 因此 $\exists x_1:\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0$, 即 $f(x_1)>0$, 同理 $\exists x_1:f(x_1)<0$, 由零点存在定理得,$f(x)$ 在 (a,b) 至少存在一个零点.

10.(1) 不一定.$f(x)=\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}$,$a=0$, 显然 $f(x)\to\infty(x\to 0^+)$, 但是 $f'(x)(x\to 0^+)$ 显然极限不存在.

10.(2) 不一定.$f(x)=\sqrt{x}$,$a=0$,$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

11. 充分性: $f(x)=xg(x),\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta xg(\Delta x)}{\Delta x}=g(0)$, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 上可导且 $f'(0)=g(0)$

必要性: 设 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, x\neq 0\\ f'(x), x=0\end{cases}$, $\lim\limits_{\Delta x}$, 那么 $f(x)=xg(x)$ 且 $g(0)=f'(0)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=f'(0)=g(0)$, 因此 g 在 $x=0$ 连续.

第 4 章第 3 节

2.(3) $(\arccos x)'=\frac{1}{\cos'(\arccos x)}=-\frac{1}{\sin(\arccos x)}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.(6) $(th^{-1}x)'=\frac{1}{th'(th^{-1}x)}=\frac{1}{1-th^2(th^{-1}x)}=\frac{1}{1-x^2}$, $(cth^{-1}x)'=\frac{1}{cth'(cth^{-1}x)}=\frac{1}{1-cth^2(cth^{-1}x)}=\frac{1}{1-x^2}$

3.(2) $f'(x)=\cos x-x\sin x+2x$

3.(6) $f'(x)=\frac{(2\cos x+1-2^x\ln x)x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}(2\sin x+x-2^x)x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}$

3.(9) $f'(x)=\frac{(3x^2-\csc^2 x)\ln x-x^2-\frac{\cot x}{x}}{\ln^2 x}$

3.(11) $f'(x)=(e^x+\frac{1}{x\ln 3})\arcsin x+(e^x+\log_3 x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3.(14) $f'(x)=\frac{(1+\cos x)\arctan x-\frac{x+\sin x}{1+x^2}}{\arctan^2 x}$

5. 设相切于 $P(x_0,y_0)$, 由于 P 在直线 $y=x$ 上和曲线 $y=\log_a x$ 上, 因此 $\begin{cases}y_0=x_0\\ y_0=\log_a x_0\end{cases}$ 由于直线 $y=x$ 上和曲线 $y=\log_a x$ 在 P 上相切, 因此在 P 点导数相等, 即 $1=\frac{1}{x_0\ln a}$. 解得 $\begin{cases}x_0=e\\ y_0=e\\ a=e^{\frac{1}{e}}\end{cases}$, 切点为 (e,e).

8.(1) 反证法. 假设 $c_1f(x)+c_2g(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 又因为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 那么 $g(x)=\frac{(c_1f(x)+c_2g(x))-c_1f(x)}{c_2}$ 在 $x=x_0$ 处可导, 与 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导矛盾, 因此 $c_1f(x)+c_2g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导.

8.(2) 不能. 如果 $f(x)=g(x)=|x|$, 则 $f+g$ 在 $x=x_0$ 处不可导,$f-g$ 在 $x=x_0$ 处可导.

9. $f(x)=x$,$g(x)=|x|$ 时 $f(x)g(x)$ 在 $x=0$ 处可导,$f(x)=1$,$g(x)=|x|$ 时 $f(x)g(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. $f(x)=g(x)=|x|$ 时 $f(x)g(x)$ 在 $x=0$ 处可导,$f(x)=|x|+|x+1|$, $g(x)=|x|$ 时 $f(x)g(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

10. QAQ

第 4 章第 4 节

1.(4) $y'=\frac{1-\ln x}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{\ln x}}$

1.(8) $y'=-\frac{2xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}$

1.(9) $y'=(2x+\frac{2}{x^3})\frac{1}{x^2-\frac{1}{x^2}}=\frac{2x^4+2}{x^5-x}$

1.(12) $y'=\frac{1+\csc x^2+x^2\cot x^2\csc x^2}{(1+\csc x^2)^{\frac{3}{2}}}$

1.(14) $y'=(\cos x)(-2\sin x)e^{-\sin^2 x}=-2\sin x\cos xe^{-\sin^2 x}$

2.(4) $y'=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

2.(5) $y'=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-a^2}}-\frac{a^2}{2}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}})\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\sqrt{x^2-a^2}$

3.(5) $[f(f(e^{x^2}))]'=2xe^{x^2}f'(e^{x^2})f'(f(e^{x^2}))$

3.(7) $[f(\frac{1}{f(x)})]'=f'(x)(-\frac{1}{f^2(x)})f'(\frac{1}{f(x)})=-\frac{f'(x)f'(\frac{1}{f(x)})}{f^2(x)}$

3.(8) $[\frac{1}{f(f(x))}]' = f'(x)f'(f(x))(-\frac{1}{f^2(f(x))}) = -\frac{f'(x)f'(f(x))}{f^2(f(x))}$

4.(3) $\ln y = x\ln\cos x$, 两边求导得,$\frac{y'}{y} = \ln\cos x - x\tan x$,$y' = (\ln\cos x - x\tan x)\cos^x x$

4.(5) $\ln y = \ln x + \ln(1-x^2) + \ln(1+x^3)$, 两边求导得,$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{-2x}{1-x^2} + \frac{3x^2}{1+x^3}$, $y' = (1 - \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1+x^3})\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^3}}$

4.(7) $\ln\arcsin y = \sqrt{x}\ln x$, 两边求导得,$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}\arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, $y' = \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}x^{\sqrt{x}}\cos x^{\sqrt{x}}$

6.(1) 设 f 是偶函数,$f(x) = f(-x)$.$f'(-x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x} = -\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+(-\Delta x))-f(x)}{(-\Delta x)} = -f'(x)$, 因此 f' 是奇函数. 设 g 是奇函数, 同理可得 g' 是偶函数.

6.(2) 设 h 是周期为 T 的周期函数,$h(x+T) = h(x)$.$h'(x+T) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+T+\Delta x)-h(x+T)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = h'(x)$. 因此 h' 是周期函数.

12.(1) $g(x) = x^2, f(u) = |u|, x_0 = u_0 = 0$

12.(2) $g(x) = |x|, f(u) = u^2, x_0 = u_0 = 0$

12.(3) $g(x) = |x|, f(u) = \begin{cases} x^2, x \geq 0 \\ x, x < 0 \end{cases}, x_0 = u_0 = 0$

13.(1) $d[f(u)g(u)h(u)] = (f'(u)g(u)h(u) + f(u)g'(u)h(u) + f(u)g(u)h'(u))du = (f'(u)g(u)h(u) + f(u)g'(u)h(u) + f(u)g(u)h'(u)\varphi'(x)dx$

13.(4) $d[\log_{h(u)} g(u)] = \frac{g'(u)h(u)\ln h(u) - h'(u)g(u)\ln g(u)}{g(u)h(u)\ln^2 h(u)}du = \frac{g'(u)h(u)\ln h(u) - h'(u)g(u)\ln g(u)}{g(u)h(u)\ln^2 h(u)}\varphi'(x)dx$

13.(6) $d[\frac{1}{\sqrt{f^2(u)+h^2(u)}}] = -\frac{f(u)f'(u)+h(u)h'(u)}{(f^2(u)+h^2(u))^{\frac{3}{2}}}du = -\frac{f(u)f'(u)+h(u)h'(u)}{(f^2(u)+h^2(u))^{\frac{3}{2}}}\varphi'(x)dx$

第 4 章第 4 节

5.(6) $\tan(x+y) - xy = 0$, $\frac{1+y'}{\cos^2(x+y)} - y - xy' = 0$, $y' = \frac{1-y\cos^2(x+y)}{x\cos^2(x+y)-1}$

5.(8) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $3x^2 + 3y^2y' - 3ay - 3axy' = 0$, $y' = \frac{3x^2-3ay}{3ax-3y^2}$.

7. $xy + \ln y = 1$, $y + xy' + \frac{y'}{y} = 0$, $y' = -\frac{y^2}{xy+1} = -\frac{1}{2}$, 因此切线为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, 法线为 $y = 2x - 1$

9. $\frac{dx}{dt} = \frac{(2+2t)(1+t^3)-3t^2(2t+t^2)}{(1+t^3)^2}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{(2-2t)(1+t^3)-3t^2(2t-t^2)}{(1+t^3)^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{(2-2t)(1+t^3)-3t^2(2t-t^2)}{(2+2t)(1+t^3)-3t^2(2t+t^2)} = 3$, 切线 $y = 3x - 4$, 法线 $y = -\frac{x}{3} + 1$

11. $\frac{dx}{dt} = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t$, $\frac{dy}{dt} = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t$, $\frac{dy}{dx} = \tan t$, 在 $t = t_0$ 处法线为 $y = (-\cot t_0)x + a\cot t_0(\cos t_0 + t_0\sin t_0) + a(\sin t_0 - t_0\cos t_0)$ 它到原点的距离为 $|\frac{a\cot t_0(\cos t_0+t_0\sin t_0)+a(\sin t_0-t_0\cos t_0)}{\sqrt{\cot^2 t_0+1}}| = |\frac{\frac{a}{\sin t_0}}{\frac{1}{\sin t_0}}| = a$

第 4 章第 5 节

1.(4) $y' = \frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$, $y'' = \frac{-\frac{2}{x}x^3-3x^2(1-2\ln x)}{x^6} = \frac{6\ln x-5}{x^4}$

1.(9) $y^{(80)} = x^3(\cos 2x)^{(80)} + 80x^2(\cos 2x)^{(79)} + 3160x(\cos 2x)^{(78)} + 82160(\cos 2x)^{(77)} = 2^{80}x^3\cos 2x + 80\cdot 2^{79}x^2\sin 2x - 3160\cdot 2^{78}x\cos 2x - 82160\cdot 2^{77}\sin 2x$

2.(5) $y^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i\beta^{n-i}e^{ax}\cos(\beta x + \frac{i}{2}\pi)$

3. $f'(x) = \begin{cases} 2x, x \geq 0 \\ -2x, x < 0 \end{cases}$, $f''(x) = \begin{cases} 2, x > 0 \\ doesn't\ exist, x = 0 \\ -2, x < 0 \end{cases}$, $\forall n \geq 3, f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, x > 0\ or\ x < 0 \\ doesn't\ exist, x = 0 \end{cases}$

4.(5) $[f(e^{-x})]''' = [-e^{-x}f'(e^{-x})]'' = [e^{-2x}f''(e^{-x}) + e^{-x}f'(e^{-x})]' = -3e^{-2x}f''(e^{-x}) - e^{-3x}f'''(e^{-x}) - e^{-x}f'(e^{-x})$

5.(1) $y' = \frac{1}{x^2+1}$, $(x^2+1)y' = 1$, 两边求 $n-1$ 阶导得 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(x^2+1)^{(n-1-i)}(y')^{(i)} = 0$, 因

此 $y^{(n)}(0) = -2\binom{n-1}{2}y^{(n-2)}(0) = -(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0).y'' = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $y''(0) = 0$. So $y^{(n)} = \begin{cases} 0, n = 2k \\ (-1)^{k-1}(n-1)!, n = 2k-1 \end{cases}$.

6.(2) $\frac{1+y'}{\cos^2(x+y)} - y - xy' = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y\cos^2(x+y)-1}{1-x\cos^2(x+y)}$, $\frac{y''+2(1+y')^2\tan(x+y)}{\cos^2 x} - 2y' - xy'' = 0$, $y'' = \frac{2(1+y')^2\tan(x+y)-2y'\cos^2 x}{x\cos^2 x-1}$

7.(3) $\frac{dx}{dt} = 1 - \sin t - t\cos t$, $\frac{dy}{dt} = \cos t - t\sin t$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - t\sin t}{1-\sin t - t\cos t}$,
$\frac{d^2y}{dxdt} = \frac{(-2\sin t - t\cos t)(1-\sin t - t\cos t)-(\cos t - t\sin t)(-2\cos t + t\sin t)}{(1-\sin t - t\cos t)^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{t^2+2-2\sin t - t\cos t}{(1-\sin t - t\cos t)^3}$

8.(2) $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d(\frac{dx}{dy})}{dx} = \frac{-\frac{1}{y'(x)}y''(x)}{(y'(y^{-1}(y)))^2} = -\frac{y''}{(y')^3}$, $\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{d(\frac{d^2x}{dy^2})}{dy} = -\frac{1}{y'}\cdot\frac{y'''(y')^3-3(y''y')^2}{(y')^6} = \frac{3(y'')^2-y'''y'}{(y')^5}$

12. 当 $n = 0$, 左 $= x^{-1}e$, 右 $= \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} =$ 左.
设当 $n \le k$ 时,$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$.
当 $n = k+1$ 时,$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = (x^k e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)} = k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} - (x^{k-2}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} = k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} - (\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}e^{\frac{1}{x}})' = k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} - k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} = 0$.
因此 $(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$.

第 5 章第 1 节

1. $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$, 因此 $\exists\delta_1 > 0, \forall x \in (x_0, x_0+\delta_1) : f(x) > f(x_0)$. 同理,$\exists\delta_2 > 0, \forall x \in (x_0-\delta_2, x_0) : f(x) > f(x_0)$, 因此 x_0 是 f 的极小值点

4. $\psi(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x + \frac{af(b)-bf(a)}{a-b} - f(x))$.
$\psi(a) = \psi(b) = 0$, 设 M, m 分别为 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值. 如果 $m = M$, 那么 ψ 为常值函数,$\forall x \in (a,b) : \psi'(x) = 0$. 若 $M \ne m$, 则 M 与 m 至少有一个不为 0, 其为 ψ 的极值. 因为存在极值点, 由 Fermat 引理,$\exists x \in (a,b) : \psi'(x) = 0$
综上,$\exists x \in (a,b) : \psi'(x) = 0$, 即 $\exists x \in (a,b) : (a-b)(\frac{f(a)-f(b)}{a-b} - f'(x)) = 0$, $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(x)$. 得证.
ψ 的几何含义为 $f(x)$ 到端点连线的垂直距离的 $(b-a)$ 倍 (在上方为正, 在下方为负),
即 $(a, f(a)), (b, f(b)), (x, f(x))$ 三点构成的三角形面积的两倍 ($(x, f(x))$ 在 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 连线上方值为正, 否则为负).