Fall 2022 MATH1607H Homework 5

Lou Hancheng   louhancheng@sjtu.edu.cn

2022 年 12 月 13 日

第 7 章第 5 节

4.

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^{2\pi} \rho z \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\rho b \sqrt{a^2 + b^2}) t \, dt \\
&= 2\pi^2 \rho b \sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

7.

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{-r}^{r} \frac{1}{2}\omega^2 (r^2 - x^2) \cdot 2\pi\rho\sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + (y')^2}\, dx \\
&= \pi\rho\omega^2 \int_0^{\pi} (r^2 - x^2) r \, dx \\
&= \frac{4\pi}{3}\rho\omega^2 r^4
\end{aligned}
$$

9.

$$
\begin{aligned}
W &= -\int_1^T kv^3 \, dt \\
&= -k \int_1^T (9t^2 - 1)^3 \, dt \\
&= k(-\frac{729}{7}T^7 + \frac{243}{5}T^5 - 9T^3 + T + \frac{2224}{35})
\end{aligned}
$$

10.

$$
\begin{aligned}
dh &= \frac{(0.01)^2 \pi v \, dt}{1^2 \pi} \\
&= \frac{3}{5} \times 10^{-4} \sqrt{2gh}\, dt
\end{aligned}
$$

$$
t = \frac{1}{3 \times 10^{-5}} \sqrt{\frac{H}{2g}} \approx 10541
$$

14.

$$dp = k(p_{\max} - p(t))dt, p(t_0) = p_0$$

解得

$$p(t) = p_{\max} - (p_{\max} - p_0)e^{-k(t-t_0)}$$

第 8 章第 1 节

1.

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{q}\int_x^{+\infty} F\,dr \\ &= k\int_x^{+\infty} \frac{1}{r^2}\,dr \\ &= \frac{k}{x}\end{aligned}$$

3.(1)

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin 5x\,dx = (-\frac{2}{29}\sin 5x - \frac{10}{29}\cos 5x)e^{-2x}|_0^{+\infty} = -\frac{10}{29}$$

3.(3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x+x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

3.(6)

当 $p > 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^p x}\,dx = -\frac{1}{(p-1)\ln^{p-1} x}|_2^{+\infty} = \frac{1}{(p-1)\ln^{p-1} 2}$$

当 $p < 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^p x}\,dx = -\frac{1}{(p-1)\ln^{p-1} x}|_2^{+\infty}$$

是发散的. 当 $p = 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln(\ln x)|_2^{+\infty}$$

是发散的.

3.(10)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

4.(2)

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx = \arcsin \ln x|_1^e = \frac{\pi}{2}$$

4.(5)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{x^2}|_{-1}^1 = 0$$

4.(6)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

5.

$$\ln \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\ln \frac{i}{n}}{n} = \int_0^1 \ln x\,dx = x(\ln x - 1)|_0^1 = -1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

6.(2)

$$\int_0^\pi x \ln\sin x\,dx = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\sin x\,dx = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$$

6.(5)

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^\pi x\ln\sin x\,dx = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$$

7.(3)

$$(\text{cpv})\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x\ln x}\,dx=\int_{1}^{2}(\frac{1}{x\ln x}-\frac{1}{x\ln x})\,dx=0$$

9.(1)

$$\begin{aligned}f(x)\le g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx\Rightarrow\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx\le\lim_{b\to+\infty}\int_a^b g(x)\,dx\\ \Rightarrow\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\le\int_a^{+\infty} g(x)\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx\Rightarrow\lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\lim_{c\to+\infty}\int_b^c f(x)\,dx\\ \Rightarrow\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^{+\infty} f(x)\,dx\end{aligned}$$

9.(2)

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2$$

$$\int_0^1\frac{1}{x}\,dx\text{是发散的.}$$

11.

不妨设 $A\ge 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\Rightarrow\exists X>a,\forall x>X:f(x)>\frac{A}{2}\\ \Rightarrow\int_a^{+\infty}f(x)\,dx=\int_a^X f(x)\,dx+\int_X^{+\infty}f(x)\,dx>\int_a^X f(x)\,dx+\int_X^{+\infty}\frac{A}{2}\,dx\end{aligned}$$

若 $A>0$, 显然是发散的. 因此若 $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ 是收敛的, $A=0$

12.

$$\int_a^{+\infty}f'(x)\,dx=\lim_{x\to+\infty}f(x)-f(a)$$

由于 $\int_a^{+\infty}f'(x)\,dx$ 收敛, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$. 由 11. 的结论, $\int_a^{+\infty}f'(x)\,dx=A=0$.

(**)

$x+1\le e^x$, 因此

$$(1-x^2)^n\le e^{-nx^2}\le\frac{1}{(x^2+1)^n}$$

两边求定积分

$$\int_0^1(1-x^2)^n\,dx\le\int_0^1 e^{-nx^2}\,dx\le\int_0^1\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{n}(1-x^2)^n\,dx \le \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx \le \int_0^1 \frac{\sqrt{n}}{(x^2+1)^n}\,dx$$

即

$$\sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx \le \sqrt{n}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}$$

即

$$\sqrt{\frac{n}{2n+1}}\sqrt{(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2\frac{1}{2n+1}} \le \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx \le \sqrt{\frac{n}{2n-1}}\sqrt{\frac{1}{(\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!})^2\frac{1}{2n-1}}}\frac{\pi}{2}$$

对 n 求极限得

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

第 8 章第 2 节

3.(4)

$$\frac{x^q}{1+x^p} \sim x^{q-p}$$

因此当 $q-p<-1$ 时收敛，当 $q-p \ge -1$ 时发散.

4.

显然若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛, (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 也收敛. 若 (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛,

$$(\text{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty}(f(x)+f(-x))\,dx$$

也是收敛的. 由柯西收敛原理,

$$\forall\varepsilon>0, \exists A\ge 0, \forall x_1 \ge x_2 \ge A : |\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(-x)\,dx| \le \varepsilon$$

由于 $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \ge 0$, $\int_{x_1}^{x_2} f(-x)\,dx \ge 0$.

$$|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx| \le \varepsilon$$

因此 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 是收敛的. 同理 $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ 也是收敛的. 因此 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 是收敛的.

5.(3)

当 $p>1$ 时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x \arctan x|}{x^p}\,dx \le \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x^p}\,dx$$

因此是绝对收敛的.
当 $0<p\le 1$ 时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x \arctan x|}{x^p}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\arctan x\,dx \ge \frac{\pi}{4}\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}$$

是发散的.

$F(A) = \int_1^A \sin x \, dx$ 上有界, $\frac{1}{x^p}$ 单调且 $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$. 由 Dirichlet 判别法得

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} \, dx$$

是收敛的. 又因为 $\arctan x$ 单调有界, 由 Abel 判别法得

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \arctan x}{x^p} \, dx$$

是收敛的. 因此是条件收敛的.

5.(4)

$$\int_0^A \sin(x^2) \, dx = \int_0^{\sqrt{A}} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} \, dx$$

因为 $F(A) = \int_0^A \sin x \, dx$ 有界且 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 单调且 $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} \, dx$$

收敛.

因此

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) \, dx = \lim_{A \to \infty} \int_0^A \sin(x^2) \, dx = \lim_{A \to \infty} \int_0^{\sqrt{A}} \frac{\sin(x)}{2\sqrt{x}} \, dx$$

是收敛的.

显然

$$\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| \, dx$$

发散.

因此

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) \, dx$$

条件收敛.

6. 8.2.3'

(1)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A, A' \in (b - \delta, b):$$

$$|\int_A^{A'} f(x) \, dx| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} |\int_A^{A'} f(x)g(x) \, dx| &= |g(A) \int_A^{\xi} f(x) \, dx + g(A') \int_{\xi}^{A'} f(x) \, dx| \\ &\leq |g(A) \int_A^{\xi} f(x) \, dx| + |g(A') \int_{\xi}^{A'} f(x) \, dx| \\ &\leq 2M\varepsilon \end{aligned}$$

因此

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

是收敛的.

(2)

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in(b-\delta,b):$

$$|g(x)|<\varepsilon$$

$$\begin{aligned}|\int_A^{A'} f(x)g(x)\,dx| &= |g(A)\int_A^{\xi} f(x)\,dx + g(A')\int_{\xi}^{A'} f(x)\,dx| \\ &\le |g(A)\int_A^{\xi} f(x)\,dx| + |g(A')\int_{\xi}^{A'} f(x)\,dx| \\ &\le 4G\varepsilon\end{aligned}$$

因此

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

是收敛的.

7.(5)

$$\forall t\in(0,1):\lim_{x\to0^+}|\ln x|^p x^t=0$$

因此

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |\ln x|^p\,dx$$

是收敛的.

$$|\ln x|^p \sim (1-x)^p (x\to 1^+)$$

因此当 $p>-1$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |\ln x|^p\,dx$$

是收敛的.

当 $p\le -1$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |\ln x|^p\,dx$$

是发散的.

综上, 当 $p>-1$

$$\int_0^1 |\ln x|^p\,dx$$

是收敛的.

当 $p\le -1$

$$\int_0^1 |\ln x|^p\,dx$$

是发散的.

7.(6)

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1}(x \to 0)$$

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{q-1}(x \to 1)$$

因此当且仅当 $p > 0, q > 0$ 时收敛, 其他情况发散.

8.(8)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} x^p = 0$$

因此若 $p \geq 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x}\, dx$$

收敛.

当 $p < 1$ 时

$$\exists X \forall x > X : \frac{1}{x^p \ln^q x} > \frac{1}{x}$$

因此发散.

9.(3)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p}\, dx = \int_0^1 \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p}$$

由于

$$\frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} \sim \frac{1}{x^p}(x \to 0^+)$$

因此当 $p < 1$ 时收敛, 当 $p \geq 1$ 时发散.

当 $p \leq 0$ 时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p}\, dx$$

显然发散. 当 $0 < p < 1$ 时,

$$F(A) = \int_1^A e^{\sin x} \cos x\, dx$$

有界,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

因此

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p}\, dx$$

收敛.

综上, 当 $0 < p < 1$ 时

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p}\, dx$$

收敛, 其余情况发散.

9.(6)

当 $p>1$ 时

$$\frac{|\sin(x+\frac{1}{x})|}{x^p} \le \frac{1}{x^p}$$

因此收敛.
当 $0<p\le 1$ 时

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}\cos x + \cos\frac{1}{x}\sin x}{x^p}\,dx$$

其中当 $x\to+\infty$, $\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}$ 和 $\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^p}$ 都单调趋于 0
因此收敛.

12.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx \text{ 收敛} &\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x_0\in(0,\delta): |\int_{\frac{x_0}{2}}^{x_0} f(x)\,dx| < \varepsilon\\ &\Rightarrow \frac{x_0}{2}|f(\xi)| < \varepsilon\\ &\Rightarrow \xi|f(\xi)| < 4\varepsilon\\ &\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} xf(x) = 0\end{aligned}$$

13.

当 $x\to+\infty$ 时, $xf(x)$ 单调减少趋于 0, 于是有 $xf(x)\le 0$

$$0 \le \frac{1}{2}x(\ln x)f(x) \le \int_{\sqrt{x}}^{x} tf(t)\frac{1}{t}\,dt = \int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)\,dt$$

因为 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛, 由 Cauchy 收敛原理, $\lim_{x\to+\infty}\int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)\,dt$, 因此

$$\lim_{x\to+\infty} x(\ln x)f(x) = 0$$

15.

(1)

$$\int_a^{+\infty} f^2(x)\,dx \text{ 收敛无法推出} \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ 收敛}$$

反例:

$$f(x) = \frac{1}{x}, a = 1$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ 收敛无法推出} \int_a^{+\infty} f^2(x)\,dx \text{ 收敛}$$

反例:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, a = 1$$

(2)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2^{n-1}}-x+n}},x\in(n,n+\dfrac{1}{2^n}),n=1,2,...\\0,\text{其他}\end{cases}$$

$f(x)$ 是绝对收敛的, 但不是平方可积的.

$$f(x)=\frac{1}{x^{0.6}},a=1$$

$f(x)$ 是平方可积的, 但不是绝对收敛的.

(3)

$|f(x)|\le\frac{1}{2}(1+f^2(x))$, 因此平方可积必定绝对收敛.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},a=0,b=1$$

$f(x)$ 是绝对收敛的, 但不是平方可积的.