数学分析小论文:度量空间

楼翰诚

2022 年 12 月 23 日

摘要

根据《陶哲轩实分析》第12章度量空间, 摘取部分定义和定理/引理/命题, 并补充了证明部分.

关键词： 度量空间, 开的, 闭的, 收敛, Cauchy 序列, 完备性, 紧致性

目录

1 引入和定义

在实数系中两点之间的距离为

$$d_1 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$$

在二维平面中两点之间的距离为

$$d_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

在三维空间中两点之间的距离为

$$d_3 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

在这些我们已经习以为常的距离定义(也叫作欧几里得距离)之外,还有其他几种常见的距离,比如曼哈顿距离

$$d_{l^1} = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

比如切比雪夫距离

$$d_{l^\infty} = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

这些距离满足一些共同的性质,比如三角不等式

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

另一方面,数列的收敛可以写成如下形式:

引理 1.1. *设 $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ 是实数序列, 并设 x 是实数, 那么 $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛到 x 当且仅当 $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$*

如果 $\{x_n\}$ 是定义在其他域上的数列, 如何定义收敛呢? 事实上,我们可以在度量空间上定义收敛概念.

定义 1.2. *度量空间 (X,d) 是一个集合 X, 其中的元素叫做点, 连同一个距离函数或度量 $d: X\times X\to[0,+\infty)$, 它把 X 中的每一对点 x,y 指派到一个非负的实数 $d(x,y)\geq 0$, 而且度量必须满足下属四条公理:*
(a) 对于任意的 $x\in X$, 有 $d(x,x)=0$.
(b) (正性) 对于不同的 $x,y\in X$, 有 $d(x,y)>0$
(c) (对称性) 对于 $x,y\in X$, 有 $d(x,y)=d(y,x)$
(d) (三角形不等式) 对于 $x,y,z\in X$, 有 $d(x,z)\leq d(x,z)+d(z,y)$

容易验证,前面提到的几种距离都符合四条公理.

例 1.3. *设 X 是任意的集合, 定义离散度量 d_{disc} 如下:*

$$d_{disc}(x,y):=0, 若x=y$$

$$d_{dics}(x,y):=1, 若x\neq y$$

如上所说,可以在度量空间上定义收敛概念.

定义 1.4. *我们说 $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ 依度量 d 收敛到 x, 当且仅当 $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$.*

2 一些其他的相关概念

定义 2.1. *设 (X,d) 是度量空间, x_0 是 X 的点, 并设 $r>0$. 定义 X 依度量 d 的以 x_0 为中心、r 为半径的球为集合*

$$B_{(X,d)}(x_0,r):=\{x\in X: d(x,x_0)<r\}.$$

使用度量球的概念, 在度量空间 X 中选取一个集合 E, 可以把 X 的点分成三种类型

定义 2.2. *(a) (内点) 若 $\exists r>0: B(x_0,r)\in E$, 则称 x_0 是 E 的内点, 所有内点构成的集合为 $int(E)$.*

(b) (外点) 若 $\exists r>0: B(x_0,r)\cap E=\varnothing$, 则称 x_0 是 E 的外点, 所有外点构成的集合为 $ext(E)$.
(c) (边界点) 若 x_0 既不是内点也不是外点, 则称 x_0 是 E 的边界点, 边界点的集合记作 ∂E.

显然, x_0 不可能既是内点又是外点, 因为 $int(E)\in E, ext(E)\in X\backslash E$

定义 2.3. *若 $\forall r>0: B(x_0,r)\cap E\neq\varnothing$, 则称 x_0 是 E 的附着点, 所有附着点构成的集合称为 E 的闭包, 记作 $\overline{E}$*

事实上, 附着点相当于内点或边界点.

命题 2.4. *下列命题是等价的:*
(a) x_0 是 E 的附着点
(b) x_0 是 E 的内点或边界点
(c) 存在 E 中的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d 收敛到 x_0

证明. (1) 证明 $(a)\Rightarrow(b)$
假设 $x_0\in \mathrm{ext}(E)$, 那么 $\exists r>0: B(x_0,r)\cap E=\varnothing$, 这与附着点的定义相矛盾.
(2) 证明 $(b)\Rightarrow(a)$
因为 x_0 是 E 的内点或边界点, 也就是说 x_0 不是 E 的外点, 即 $\forall r>0: B(x_0,r)\cap E\neq\varnothing$, 这就是附着点的定义.
(3) 证明 $(a)\Rightarrow(c)$
由于 x_0 是附着点, 那么 $\forall r>0: B(x_0,r)\cap E\neq\varnothing$. 也就是说, $\exists x_n\in E: x_n\in B(x_0,\frac{1}{n})$. 由此构造出 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0
(4) 证明 $(c)\Rightarrow(a)$
由于存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0, 也就是说 $\forall r>0, \exists N(r), \forall n\geq N(r): d(x_0,x_n)<r$, 即 $x_n\in B(x_0,r)$. 也就是说, $\forall r>0, x_{N(r)}\in E\cap B(x_0,r)$, 即 $E\cap B(x_0,r)\neq\varnothing$, 即 x_0 是附着点. □

也就是说, $\overline{E} = int(E) \cup \partial E = X \backslash ext(E)$

定义 2.5. 如果 $\partial E \subseteq E$, 则称 E 是闭的.
如果 $\partial E \cap E = \varnothing$, 则称 E 是开的.

事实上, 开和闭并不是相对的概念.

注 2.6. 如果 $\partial E = \varnothing$, 则 E 既是开的又是闭的.

E 是否是开集与是否是闭集没有直接的联系.

3 Cauchy 序列及完备度量空间

类比实数的五条基本定理, 可以在度量空间上得到类似的结论.例如, 类比"单调有界数列必收敛", 可以得到以下定理.

引理 3.1. $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于极限 x_0 的充分必要条件是该序列的每个子序列都收敛到 x_0

证明. (1) 充分性
平凡的, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 即为本身的子序列.
(2) 必要性
设子序列 $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0', 那么

$$\forall r > 0, \exists N(r), \forall i \geq N(r) : d(x_{n_i}, x_0) < \frac{r}{2}, d(x_{n_i}, x_0') < \frac{r}{2}$$

由三角不等式得

$$\forall r > 0 : d(x_0, x_0') \leq d(x_0, x_{n_i}) + d(x_0', x_{n_i}) < r$$

即 $d(x_0, x_0') = 0$, $x_0 = x_0'$

□

类比数列的极限点, 可以写出度量空间上序列的极限点.

定义 3.2. 若 $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ 存在子序列收敛于 x_0, 则称 x_0 是序列的极限点.

命题 3.3. 上述定义等价于 $\forall N \geq m, \forall \varepsilon > 0, \exists n \geq N : d(x_n, x_0) < \varepsilon$

证明. (1) 充分性
设函数 $f(N, \varepsilon)$

$$\forall N \geq m, \forall \varepsilon > 0, \exists n = f(N, \varepsilon) \geq N + 1 \geq N : d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

构造子序列

$$x_{n_i} = \begin{cases} x_m & i = 1 \\ x_{f(n_{i-1}, \frac{1}{n})} & i \geq 2 \end{cases}$$

是收敛于 x_0 的.
(2) 必要性
设存在子序列 $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall i \geq N(\varepsilon) : d(x_0, x_{n_i}) < \varepsilon$$

因此

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \geq m, \exists n = \max\{N, N(\varepsilon)\} : d(x_0, x_n) < \varepsilon$$

□

同样, 可以定义度量空间上的 Cauchy 序列, 并且 Cauchy 收敛原理的一边也是成立的.

定义 3.4. 序列 $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ 是 *Cauchy* 序列当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq m, \forall i, j \geq N : d(x_i, x_j) < \varepsilon$

引理 3.5. 收敛序列都是 *Cauchy* 序列

证明. 设 $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 x_0

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n \geq N : d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

那么由三角形不等式

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N = N(\frac{\varepsilon}{2}), \forall n_1, n_2 \geq N : d(x_{n_1}, x_{n_2}) \leq d(x_{n_1}, x_0) + d(x_0, x_{n_2}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此是 Cauchy 序列.

□

注意, 反过来并不一定成立. 如果反过来也成立, 那么该空间是完备的.(类比实数的完备性)

引理 3.6. *设 $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ 是 (X,d) 中的 Cauchy 序列, 若它的一个子序列在 X 中收敛到极限 x_0, 那么原始序列也收敛到 x_0*

证明. 设序列 $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ 的子序列 $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0.
那么

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq m, M \geq 1, \forall n \geq N, \exists k \geq M (n_k \geq N) : d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, d(x_n, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

由三角形不等式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq m, \forall n \geq N : d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon$$

因此 $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 x_0.

□

定义 3.7. *度量空间 (X,d) 是完备的当且仅当 (X,d) 中的每个 Cauchy 序列都在 (X,d) 中收敛.*

下面给出关于完备性的两条性质:

命题 3.8. *(a) 设 (X,d) 是度量空间, 并设 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 是 (X,d) 的子空间.如果 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 是完备的, 那么 Y 必是 X 中的闭集.*
(b) 反过来, 设 (X,d) 是完备的度量空间, 并且 Y 是 X 的闭子集合, 那么子空间 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 也是完备的.

证明. (a)
设 $x_0 \in \partial Y$, 那么 x_0 也是附着点, 由附着点定义

$$\forall r > 0 : B(x_0, r) \cap Y \neq \varnothing, \exists x(r) \in B(x_0, r) \cap Y$$

也就是说

$$\forall r > 0, \exists x(r) \in B(x_0, r) \cap Y$$

构造序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, 令 $x_n = x(\frac{1}{n})$, 则该序列收敛于 x_0. 因为 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 是完备的, $x_0 \in Y$.因此 $\partial Y \subseteq Y$, Y 是 X 中的闭集.
(b)
设 Cauchy序列 $(x_n)_{n=m}^{\infty}(\forall n \geq m : x_n \in Y)$, 因为 (X, d) 是完备的, $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ 在 (X, d) 是收敛的.即

$$\exists x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \geq m, \forall n \geq N : d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

若 $x_0 \in \mathrm{ext}(Y)$, 则

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \cap Y = \varnothing$$

那么

$$\exists \varepsilon > 0, \forall y \in Y : d(y, x_0) \geq \varepsilon$$

而 $d(x_{N(\varepsilon)}, x_0) < \varepsilon$, 矛盾! 因此 $x_0 \in X \backslash \mathrm{ext}(Y) = Y \cup \partial Y$, 而 Y 是闭集, $\partial Y \subseteq Y$, 即 $x_0 \in Y$, 所以 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 也是完备的.

□

4 紧致度量空间

在实数域上, 有界数列必有收敛子列, 在度量空间上, 这一性质称为紧致性.

定义 4.1. 称度量空间 (X, d) 是紧致的当且仅当 (X, d) 中的每个序列都至少有一个收敛的子列.
称度量空间 X 的子集合 Y 是紧致的当且仅当 $(Y, d|_{Y\times Y})$ 是紧致的.

定义 4.2. 设 (X, d) 是度量空间, 并设 Y 是 X 的子集合, 则称 Y 是有界的当且仅当在 X 中有一个球 $B(x, r)$ 包含 Y.

紧致性是一个比完备性和有界性都要强的概念.

命题 4.3. 设 (X, d) 是紧致度量空间, 那么 (X, d) 既是完备的也是有界的.

证明. (a) 完备的
设任意 Cauchy序列 $(x_n)_{n=m}^{\infty}$
由紧致性, 存在子序列 $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0, 那么 $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ 也收敛于 x_0.
(b) 有界的
反证法.假设 (X, d) 是无界的,即

$$\forall x_0 \in X, \forall r > 0, \exists x \in X : d(x, x_0) > r$$

构造序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, 使得 $x_1 = x_0$ 并且 $d(x_n, x_{n+1}) > n$, 显然这不是 Cauchy序列, 它的任意子序列也不是 Cauchy序列, 因此不存在收敛的子列, 这与紧致性的定义矛盾. □

推论 4.4. 设 (X, d) 是度量空间, 并设 Y 是 X 的紧致子集合, 那么 Y 是闭的并且是有界的.

在欧几里得空间, 反过来也是成立的.

定理 4.5. *(Heine-Boral 定理)* 设 $(\mathbb{R}^n, d_{l^k})$ 是欧几里得空间, 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集合, 那么 E 是紧致集合当且仅当它是闭的并且是有界的.

证明. (1) 必要性
同命题4.3.
(2) 充分性
设 $x_i = (x_i(1), x_i(2), ..., x_i(n))$, $E_j = \{x(j) | \forall x \in E\}$ 显然 $(E_i, d)(d(x, y) = |x - y|)$ 也是闭且有界的.

对于 E_i, 因为有界数列必有收敛子列, 而由极限的保号性, 所有收敛点都在 E_i 中, 因此 E_i 是紧致的.
于是, E 也是紧致的.

□

实数域的有限覆盖定理, 事实上是紧致度量空间的性质 (也可以说是定义)

定理 4.6. 设 (X, d) 是度量空间, 并设 Y 是 X 的紧致的子集合, 设 $(V_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 X 的一族开集, 并设

$$Y \subseteq \cup_{\alpha\in I} V_\alpha$$

那么存在 I 的有限子集 F 使得

$$Y \subseteq \cup_{\alpha\in F} V_\alpha$$

证明. 对于 $y \in Y$, 设 $r(y) = \sup\{r > 0 | \exists \alpha \in I : B(y, r) \subseteq V_\alpha\}$
假设 $\inf\{r(y)|y \in Y\} = 0$, 则存在 Y 上的序列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 满足 $r(x_n) < \frac{1}{n}$, $(r(x_n))_{n=1}^\infty$ 收敛于 0 由于 Y 是紧致的, 存在收敛子序列 $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ 收敛于 x_0.
设 $B(x_0, r(x_0)) \subseteq V_\alpha$, 而 $\exists N \geq 1, \forall k \geq N : d(x_{n_k}, x_0) < \frac{r(x_0)}{2}$, $B(x_{n_k}, \frac{r(x_0)}{2}) \subseteq V_\alpha, r(x_{n_k}) \geq \frac{r(x_0)}{2}$, 这与 $(r(x_n))_{n=1}^\infty$ 收敛于 0 矛盾.
因此 $\inf\{r(y)|y \in Y\} = r_0 > 0$, 而 $\forall y \in Y, \exists \alpha \in Y : B(y, \frac{r_0}{2}) \subseteq V_\alpha$
归纳构造 Y 上的序列 $(x_n)_{n=1}^\infty$, 取 x_1 是 Y 上任意一点.
当 $n = m$ 时, 如果 $Y \subseteq \cup_{k\in[m]} B(x_k, \frac{r_0}{2})$, 那么找到有限子集 F 使得 $Y \subseteq \cup_{\alpha\in F} V_\alpha$, 不再继续构造.
否则, 令 $x_{m+1} = Y \setminus \cup_{k\in[m]} B(x_k, \frac{r_0}{2})$. 这样构造出来的序列满足 $\forall i > j \geq 1 : d(x_i, x_j) > \frac{r_0}{2}$, 因此它的任意子列都不是 $Cauchy$ 序列, 即任意子列都不收敛, 这与紧致性的定义矛盾, 也就是说, 构造不会无限进行下去.

□

推论 4.7. 设 (X,d) 是度量空间, 并设 $K_1, K_2, K_3, ...$ 是 X 的非空紧致子集合的一个序列, 满足

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \cdots$$

那么交集 $\cap_{n=1}^{\infty} K_n$ 不空.

证明. 构造序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, 令 $x_n \in K_n$.
由于 K_1 是紧致的, 则存在收敛子列 $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0.
$\forall n \geq 1, \exists m(n_k \geq n) : (x_{n_k})_{k=m}^{\infty}$收敛于 $x_0, x_0 \in K_n$
因此 $x_0 \in \cap_{n=1}^{\infty} K_n$

□

参考文献

[1] Terence Tao. *Analysis II*[M]. Springer Science+Business Media Singapore 2016 and Hindustan Book Agency 2015.

[2] https://christangdt.home.blog/analysis/analysis-tenrece-tao-3rd-ed/