

数学分析 I 习题课一

2022 年 10 月 12 日

问题 1. 已知 $y_n = x_n + 2x_{n+1}$. 请证明:

- (1) 若 $\{y_n\}$ 有界, 则 $\{x_n\}$ 有界;
- (2) 若 $\{y_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 也收敛.

问题 2. 已知函数极限的定义为:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in O_\delta(a) - \{a\} : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

此处 $O_\delta(a) - \{a\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$. 问如下陈述可否作为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 的定义:

- (1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in O_\delta(a) - \{a\} : |f(x) - A| \leq \varepsilon$;
- (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in O_\delta(a) - \{a\} : |f(x) - A| < k\varepsilon$ (k 为常数);
- (3) $\forall n \in \mathbb{N}_+, \exists \delta > 0, \forall x \in O_\delta(a) - \{a\} : |f(x) - A| < 1/n$;
- (4) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}_+, \forall x \in O_{\frac{1}{n}}(a) - \{a\} : |f(x) - A| < \varepsilon$;
- (5) $\exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in O_\delta(a) - \{a\} : |f(x) - A| \leq \varepsilon$.

问题 3. 用 $\varepsilon - \delta$ 语言陈述:

- 1. $f(x)$ 在点 a 不收敛于 A ;
- 2. $f(x)$ 在点 a 处没有极限.

问题 4. 对多项式 $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, 用 $\varepsilon - \delta$ 语言证明 $\lim_{x \rightarrow a} p_n(x) = p_n(a)$.

问题 5. 求下列极限:。

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} \quad (a > 1, k > 0)$
- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} \quad (a > 0)$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{a} - 1)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

问题 6. 设 f, g 为两个周期函数 (周期不必一样), 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$, 则 $f = g$.