数学分析作业

第2章第2节

8.(2)

$\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\le\frac{1}{n}\cdot n=1, \frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\ge\frac{n}{n+\sqrt{n}}$
$\lim_{n\to\infty}1=1, \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=1$
由夹逼定理$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}})=1$

8.(4)

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\ge 0$$
$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\le\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$$
$$(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n})^2\le\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$$
$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\le\sqrt{\frac{1}{2n+1}}\to 0(n\to\infty)$$
$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}=0$$

第2章第2节

9.(5)

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$
$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{1}{2}$$

9.(8)

$$\prod_{i=2}^{n}(1-\frac{1}{i^2})=\prod_{i=2}^{n}(1-\frac{1}{i})(1+\frac{1}{i})=(\prod_{i=2}^{n}\frac{i-1}{i})(\prod_{i=2}^{n}\frac{i+1}{i})=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}$$
$$\therefore\lim_{n\to\infty}\prod_{i=2}^{n}(1-\frac{1}{i^2})=\frac{1}{2}$$

9.(10)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{2^i}=3-\frac{2n+3}{2^n}$$
$$\forall n\ge 5:2^n\ge n^2$$
$$0<\frac{2n+3}{2^n}\le\frac{2n+3}{n^2}$$
$$\text{由夹逼定理}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2^n}=0$$
$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{2^i}=3$$

第2章第2节

11.

$$设b_1=a_1,b_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}(n\geq 2),\lim_{n\to\infty}b_n=a,即证\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_1b_2b_3\cdots b_n}=a$$
$$只需证\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{b_1b_2b_3\cdots b_n}=\ln a$$
$$即证\lim_{n\to\infty}\frac{\ln b_1+\ln b_2+\cdots+\ln b_n}{n}=\ln a$$
$$由Stolz定理，只需证\lim_{n\to\infty}\frac{\ln b_n}{1}=\ln a，显然成立.$$
$$得证.$$

第2章第2节

13.

$$令x_n=a_n-a,y_n=b_n-b，\lim_{i=1}^{n}x_n=\lim_{i=1}^{n}y_n=0$$
$$\frac{a_1b_n+\cdots+a_nb_1}{n}=ab+\frac{x_1y_n+\cdots+x_ny_1}{n}+a\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}+b\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}=\lim_{n\to\infty}y_n=0$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n=0$$
$$因为\{x_n\}收敛,所以有界,设\forall n\in\mathbb{N}_+:0\leq|x_n|\leq M$$
$$0\leq|\frac{x_1y_n+\cdots+x_ny_1}{n}|\leq\frac{|x_1y_n|+\cdots+|x_ny_1|}{n}\leq M\frac{|y_1|+\cdots+|y_n|}{n}\to 0(n\to\infty)$$
$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+\cdots+x_ny_1}{n}=0$$

第2章第3节

1.(4)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+i}}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2n}}=\sqrt{\frac{n}{2}}$$
$$\forall G>0,取N=[2G^2],\forall n>N,成立\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+i}}\geq\sqrt{\frac{n}{2}}\geq G$$
$$因此\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+i}}\}是无穷大量.$$

第2章第3节

3.(1)

$$因为\{x_n\}是无穷大量,\forall G_1>0,\exists N_1(G_1)\in\mathbb{N}_+,\forall n>N_1(G_1):|x_n|\geq G_1$$
$$\therefore\forall G>0,取N=N_1(\frac{G}{\delta}),\forall n>N:|x_ny_n|\geq\delta|x_n|\geq G$$
$$\therefore\{x_ny_n\}是无穷大量.$$

3.(2)

$$因为\{x_n\}是无穷大量,\forall G_1>0,\exists N_1(G_1)\in\mathbb{N}_+,\forall n>N_1(G_1):|x_n|\geq G_1$$
$$令N_2\in\mathbb{N}_+满足\forall n>N_2:|y_n|\in(\frac{1}{2}|b|,\frac{3}{2}|b|)$$
$$\therefore\forall G>0,取N=N_1(\frac{2G}{|b|}),\forall n>N:|x_ny_n|\geq|\frac{1}{2}bx_n|\geq G$$
$$\forall G>0,取N=N_1(\frac{3|b|G}{2}),\forall n>N:|\frac{x_n}{y_n}|\geq|\frac{2}{3b}x_n|\geq G$$
$$\therefore\{x_ny_n\}和\{\frac{x_n}{y_n}\}都是无穷大量.$$

第2章第3节

4.(1)

由Stolz定理,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sum_{i=1}^{n}(2i+1)^2}{n^3} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{n^3-(n-1)^3}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1}{3n^2-3n+1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}\\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

4.(2)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2-\frac{4}{3}n^3}{n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2+\frac{4}{3}(n-1)^3-\frac{4}{3}n^3}{n^2-(n-1)^2}\\
&= \frac{8n-\frac{1}{3}}{2n-1}\\
&= 4
\end{aligned}
$$

第2章第3节

6.(1)

能.

$\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N:\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}>1$即$x_n-x_{n-1}>y_n-y_{n-1}>0$,当$n>N$时$\{x_n\}$单调递增.

只需证如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$,同$A=0$的情况.

6.(2)

不能.

反例:$x_n=(-1)^n,y_n=n$.

第2章第3节

8.

$$
\text{设}\lim_{n\to\infty}A_n=C.a_n=A_n-A_{n-1}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{a_1p_1+a_2p_2+\cdots+a_np_n}{p_n} &= \frac{A_1p_1+(A_2-A_1)p_2+\cdots+(A_n-A_{n-1})p_n}{p_n}\\
&= A_n-\frac{A_1(p_2-p_1)+A_2(p_3-p_2)+\cdots+A_{n-1}(p_n-p_{n-1})}{p_n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{A_1(p_2-p_1)+A_2(p_3-p_2)+\cdots+A_{n-1}(p_n-p_{n-1})}{p_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{A_{n-1}(p_n-p_{n-1})}{p_n-p_{n-1}}\\
&= \lim_{n\to\infty}A_{n-1}=C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_1p_1+a_2p_2+\cdots+a_np_n}{p_n} &= \lim_{n\to\infty}A_n-\lim_{n\to\infty}\frac{A_1(p_2-p_1)+A_2(p_3-p_2)+\cdots+A_{n-1}(p_n-p_{n-1})}{p_n}\\
&= C-C=0
\end{aligned}
$$

证明$\frac{0}{0}$型的Stolz定理: 设数列$\{y_n\}$严格单调递减趋于0, 数列$\{x_n\}$也收敛于0. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A$. 其中$A\in\mathbb{R}$或$A=+\infty$, 或$A=-\infty$.

当$A=0$时,$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}_+,\forall n>N(\varepsilon):|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon|y_n-y_{n-1}|$.
设$n_1>n>N(\varepsilon)$,$|x_{n_1}-x_n|\le|x_{n_1}-x_{n_1-1}|+|x_{n_1-1}-x_{n_1-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon(|y_{n_1}-y_{n_1-1}|+|y_{n_1-1}-y_{n_1-2}|+\cdots+|y_{n+1}-y_n|)=\varepsilon(y_n-y_{n_1})$.
$|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x_{n_1}}{y_n}|<\varepsilon(1-\frac{y_{n_1}}{y_n})$
$\forall\varepsilon>0,\exists N_1(n,\varepsilon)\in\mathbb{N}_+,\forall n_1>N_1(n,\varepsilon):|\frac{x_{n_1}}{y_n}|<\varepsilon$
$\forall\varepsilon>0,\exists N_2(n,\varepsilon)\in\mathbb{N}_+,\forall n_1>N_2(n,\varepsilon):|\frac{y_{n_1}}{y_n}|<\varepsilon$
$|\frac{x_n}{y_n}|<|\frac{x_{n_1}}{y_n}|+\varepsilon(1-|\frac{y_{n_1}}{y_n}|)$
$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}_+,\forall n>N(\varepsilon)$,取$n_1>\max\{n,N_1(n,\varepsilon),N_2(n,\varepsilon)\},|\frac{x_n}{y_n}|<2\varepsilon$
因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$

当$A\in\mathbb{R},A\ne0$,取$x_n'=x_n-Ay_n,y_n'=y_n$同理可证.

当$A=+\infty$($A=-\infty$ 也同理),$\exists N,\forall n>N:\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}>1$即$x_n-x_{n-1}<y_n-y_{n-1}<0$,当$n>N$时$\{x_n\}$单调递减.
只需证如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$,同$A=0$的情况.

证明$\{\sin n\}$是发散的数列.

反证法.设$\{\sin n\}$收敛于a.
对$\sin(n+1)+\sin(n-1)=2\sin n\cos 1$,两边同时取极限得$a+a=2a\cos 1$,即$\cos 1=1$不成立.
因此$\{\sin n\}$发散.

第2章第1节

2.(3)

反证法.假设C存在最大值$\frac{n}{m}$,由于$2n+1<2m$,所以$\frac{2n+1}{2m}\in C$,又因为$\frac{2n+1}{2m}>\frac{n}{m}$,矛盾.因此$C$不存在最大值.

第2章第1节
3.(1)

设m_1,m_2,M_1,M_2分别是A的下界,B的下界,A的上界,B的上界.
$\forall t\in A\cup B:t\ge\min\{m_1,m_2\},t\le\max\{M_1,M_2\}$
因此$A\cup B$是有界集.

3.(2)

$\forall t\in S:t=x+y\ge m_1+m_2,t=x+y\le M_1+M_2$
因此S是有界集.

4.

设S上界为M,$\forall x\in S:t\le M$,则$-x\ge-M$,所以T有下界.
由定义可知:

$$1.\forall x\in S:x\le\sup S$$
$$2.\forall\varepsilon>0,\exists x\in S:x>\sup S-\varepsilon$$

因此

$$
\begin{aligned}
&1.\forall x \in S: -x \le -\sup S \\
&2.\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S: -x < -\sup S + \varepsilon
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&1.\forall x \in T: x \le -\sup S \\
&2.\forall \varepsilon > 0, \exists x \in T: x < -\sup S + \varepsilon
\end{aligned}
$$

因此$-\sup S = \inf T$,即$\sup S = -\inf T$

5.

反证法.假设S有两个不同的上确界M_1, M_2,不妨设$M_1 < M_2$.
由定义可知,任何小于上确界的数不是S的上界,因此M_1不是S的上界,自然不可能是S的上确界,矛盾.
因此S只有一个上确界.
同理可证S的下确界唯一.

6.

设$\sup S = \inf S = \alpha$.
由定义可知$\forall x \in S: \alpha \le x \le \alpha$,因此$x = \alpha$。
因此S是只有一个元素的数集.

证明有理数的十进制表示一定是有限小数或无限循环小数.
设$x \in \mathbb{Q}, x = \frac{n}{m}$.
根据抽屉原理,$\exists a, b \in \mathbb{N}_+, a < b: 10^a \equiv 10^b \pmod m$
因此$x \cdot 10^a, x \cdot 10^b, x \cdot 10^{2b-a}, \cdots, x \cdot 10^{(n+1)b-na}, \cdots$中所有的数小数部分相同,因此$x$存在长度为$b-a$的循环节.(有限小数可以看成存在长度为1的循环(0))

第2章第1节：7. 请利用实数系的十进制构造仿照上确界的证明跑一遍，不要直接利用$\inf S = -\sup(-S)$.

设实数集$S, S_0, S_1, \cdots, S \supset S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots, S_0 = \{x \in S | \forall y \in S: [x] \le [y]\}, S_n = \{x \in S_{n-1} | \forall y \in S_{n-1}: [x \cdot 10^n] \le [y \cdot 10^n]\}$.设$S_0$中的数整数部分都是$a_0$,$S_n$中第$n$位小数都是$a_n$,$a = a_0 + 0.a_1a_2a_3...$,显然$\forall x \in S: x \ge a \cdots (1)$.
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+: 10^{-n_0(\varepsilon)} < \varepsilon$.
$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S_{n_0(\varepsilon)}: a + \varepsilon > a + 10^{-n_0(\varepsilon)} > x \cdots (2)$.
由$(1)(2)$,S存在下确界a.

第2章第4节
2.(5)

因为$1 - x_n \in (0,1)$,所以$1 - x_n < \sqrt{1 - x_n}$,即$x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n} < x_n$, 所以$\{x_n\}$单调减少.
若$x_n \in (0,1)$,则$x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n} \in (0,1)$,归纳可得$x_n > 0$.
因此$\{x_n\}$必收敛.
对$x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$两边求极限.$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 - \sqrt{1 - \lim_{n\to\infty} x_n}$解得$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$或1,因为$x_n \le x_1 < 1$,所以$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

2.(6)

若$x_n \in (0,1)$,则$x_{n+1}=x_n(2-x_n)\in(0,1)$,归纳可得$x_n\in(0,1)$.
$x_n - x_n^2 > 0$,因此$x_{n+1}=x_n(2-x_n)>x_n$.
因此$\{x_n\}$必收敛.
设$\lim_{n\to\infty} x_n = t$.对$x_{n+1}=x_n(2-x_n)$两边求极限.$t=t(2-t)$,解得$t=0$或$1$,因为$x_n\geq x_1>0$所以$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

第2章第4节
3.(2)

$\forall n \geq [a] : \frac{a^n}{n!} > \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$,即$\{\frac{a^n}{n!}\}$从第$[a]$项开始单调递减.又因为$\frac{a^n}{n!}>0$,所以$\{\frac{a^n}{n!}\}$必有界.
设$N=[a]+1, C=\frac{a^N}{N!}, \frac{a^n}{n!}=C\frac{a^{n-N}}{n!/N!}<C\frac{a^{n-N}}{(a+1)^{n-N}}=C(\frac{a}{a+1})^{n-N}$
$0<\frac{a^n}{n!}<C(\frac{a}{a+1})^{n-N}$
由夹逼定理得$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$