数学分析 I 习题课一

2022 年 10 月 19 日

问题 1. 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sin(\sin(\cdots(\sin x)))$ (n 次复合函数).

问题 2. 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，求证：

(1) $|f(x)|\in C[a,b]$ （反过来是否成立?）；

(2) $\max\{f(x),g(x)\}\in C[a,b]$;

(3) $\min\{f(x),g(x)\}\in C[a,b]$.

问题 3. 指出函数 $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$ $(x>0)$ 的间断点，并说明他们属于哪一类。

问题 4. 设对每个自然数 n，数集 $A_n\subset[0,1]$ 是有限集，而且 $A_i\cap A_j=\emptyset,\forall i,j\in\mathbb{N}_+,i\neq j$。定义函数

$$f(x)=\begin{cases}1/n, & \text{若}x\in A_n;\\ 0, & \text{若}x\in[0,1]\text{但不在任何}A_n\text{中}.\end{cases}$$

对每个 $a\in[0,1]$，求 $\lim_{x\to a}f(x)$。
提示：回忆 Riemann 函数。

问题 5. 设函数 f 在 $x=0$ 处连续，且对一切 x,y 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$。证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且 $f(x)=f(1)x$.

问题 6. 设 $f\in C[a,b]$，且对于每一个 $x\in[a,b]$ 存在 $y\in[a,b]$，使得 $|f(y)|\leq\frac{1}{2}|f(x)|$. 证明：$f$ 在 $[a,b]$ 中存在零点.

问题 7. (1) 设 $f(x)$ 在 x_0 的一个开邻域内有定义, 称

$$\omega_f(x_0,r)\equiv\sup\{|f(x_1)-f(x_2)|\,\big|\,x_1,x_2\in O_r(x_0)\}\ (r>0)$$

为 f 在区间 (x_0-r,x_0+r) 上的振幅. 显然 $\omega_f(x_0,r)$ 关于 $r\to0^+$ 单调递减, 因此

$$\omega_f(x_0)\equiv\lim_{r\to0^+}\omega_f(x_0,r)$$

存在 (不一定有限), 称为 f 在 x_0 处的振幅. 证明: $f(x)$ 在 x_0 处连续当且仅当 $\omega_f(x_0)=0$.

(2) 设 f 定义在区间 I 中, $r>0$, 定义

$$\omega_f(r)\equiv\sup\{|f(x_1)-f(x_2)|\,\big|\forall x_1,x_2\in I,\,|x_1-x_2|<r\},$$

则 $\omega_f(r)$ 关于 $r\to 0^+$ 单调递减. 证明: f 在 I 中一致连续当且仅当 $\lim\limits_{r\to 0^+}\omega_f(r)=0$.

问题 8. 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(f(x))=\infty$. 求证: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

问题 9. 设 $f(x)\in C(a,b)$, $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$. 求证: $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k).$$

问题 10. 设 $f\in C[0,1]$, $f(0)=f(1)$. 证明: $\forall n\in\mathbb{N}_+$, $\exists\xi\in[0,1]$, 使得 $f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi)$.