Capítulo 02

Zeros de Funções Reais

2.1 Introdução

Em muitas áreas das ciências exatas ocorrem situações que envolvem a resolução de equações do tipo $f(x)=0$. Com isso, neste capítulo são estudados métodos numéricos para resolver equações deste tipo.

Um número real ε é uma *raiz (zero)* da equação $f(x)=0$ se $f(\varepsilon)=0$. Considerando que existem equações polinomiais com raízes reais ou complexas, neste capítulo são abordadas somente as raízes reais de $f(x)$, denotadas por ε.

<u>Graficamente</u>:

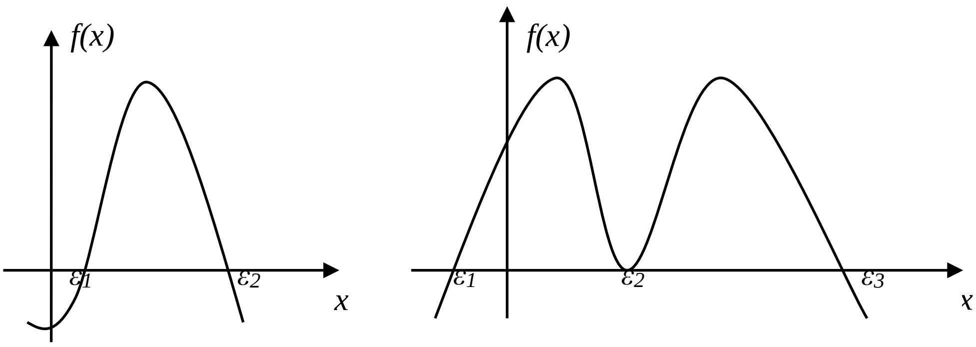


Figura 2.1: Exemplos de zero de funções.

Como obter raízes reais de uma equação qualquer?

Nos casos de funções complicadas é praticamente impossível encontrar as raízes de maneira exata. Os métodos numéricos abordados neste capítulo permitem encontrar boas aproximações para essas raízes.

A ideia destes métodos é partir de uma aproximação inicial para a raiz e em seguida "refinar" essa aproximação por meio de um *processo iterativo*.

O que é processo iterativo?
É um conjunto finito de procedimentos que podem se repetir infinitamente.

Estes métodos se constituem de duas fases:
<u>Fase I</u>: localização ou isolamento das raízes. Consiste em obter um intervalo que contém a raiz ε.
<u>Fase II</u>: melhorar o valor da raiz aproximada, isto é, refiná-la até o grau de exatidão requerido.

2.2 Fase I: Isolamento das Raízes

Nesta seção é abordado um importante teorema para isolamento de raízes.

Teorema 2.1: Seja *f(x)* uma função contínua num intervalo *[a,b]*.

Se *f(a)*f(b)<0* então existe pelo menos um ponto $x = \varepsilon$ entre *a* e *b* que é zero (raiz) de *f(x)*.

Graficamente:

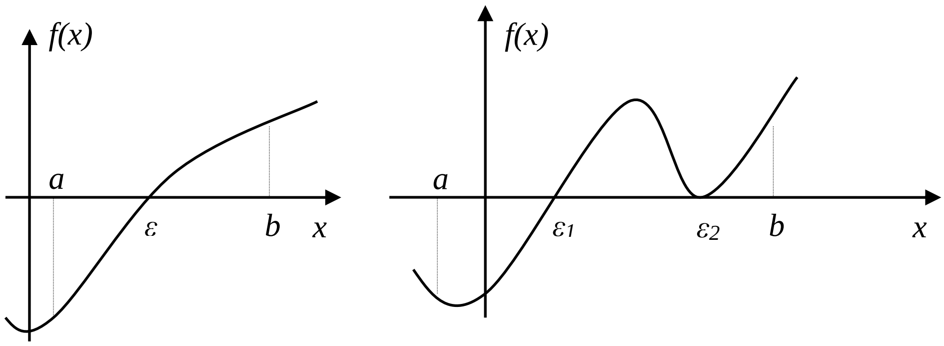
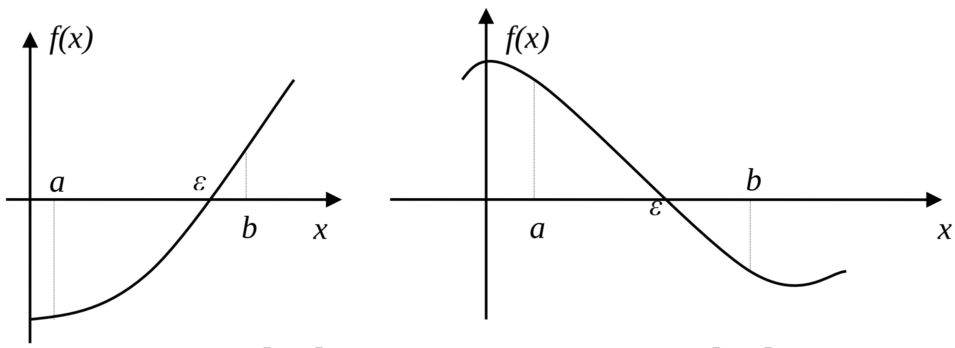


Figura 2.2: Isolamento de raízes.

Obs: Se, sob as hipóteses do teorema anterior existir *f´(x)* e preservar o sinal em [*a*,*b*], então este intervalo contém uma única raiz.

Graficamente:



$f'(x) > 0,\ \forall x \in [a,b]$ $\qquad$ $f'(x) < 0,\ \forall x \in [a,b]$

Figura 2.3: Exemplo de existência de raiz única.

Uma forma de se isolar as raízes de *f(x)* usando os resultados anteriores é tabelar *f(x)* para vários valores de *x* e analisar as mudanças de sinal de *f(x)* e o sinal da derivada nos intervalos em que *f(x)* mudam de sinal.

Exemplo 2.1:

a) $f(x) = x^3 - 9x + 3$

x	$-\infty$	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+
				*			*		*			

***** lugares onde existem raízes.

Sabendo que *f(x)* é contínua para qualquer *x* real e observando as variações de sinal, pode-se concluir que cada um dos intervalos $I_1=[-5,-3]$, $I_2=[0,1]$ e $I_3=[2,3]$ contém pelo menos um zero de *f(x)*.

Como *f(x)* é um polinômio de grau 3, pode-se afirmar que cada intervalo contém uma única raiz de *f(x)*.

b) $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$

x	...	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-	-	-	-	-	+	+	+
					*			

* possui pelo menos uma raiz.

Analisando a tabela anterior, verifica-se que *f(x)* admite pelo menos um zero no intervalo (1,2).

Para saber se esta raiz é única basta analisar o sinal de *f'(x)*.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x} > 0, \quad \forall x > 0$$

Assim, pode-se concluir que *f(x)* admite uma única raiz, que está entre (1,2).

Obs: Se *f(a)*f(b)>0* pode-se ter várias situações em *[a,b]*.

Graficamente:

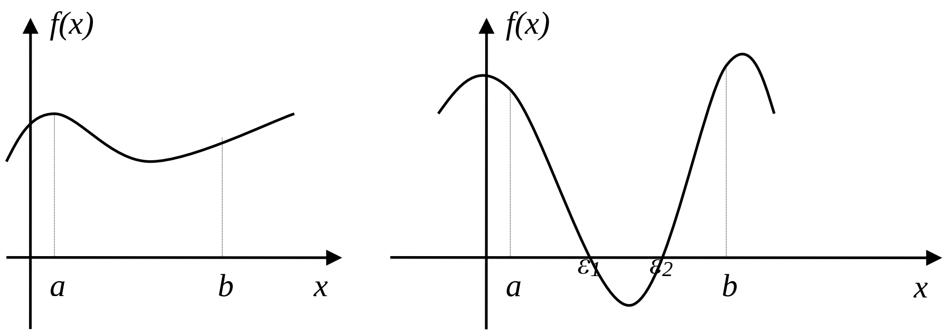


Figura 2.4: Exemplo de existência de raiz única.

Como analisar?

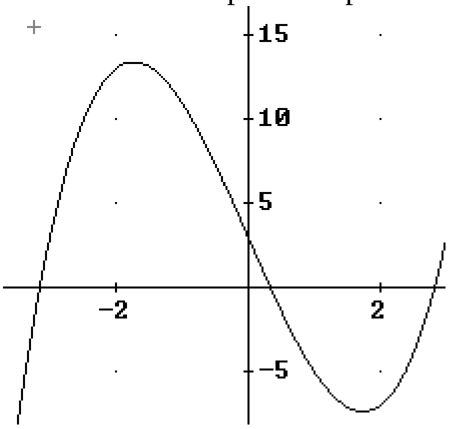
Dada a equação *f(x)=0*, determinar $f_1(x)$ e $f_2(x)$ tal que:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x)$$

Exemplo 2.2:

a) Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3$.

Usando o primeiro processo:



$f(x) = x^3 - 9x + 3$

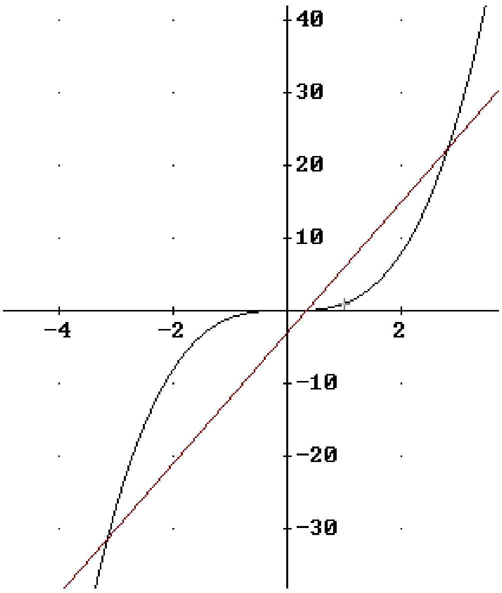
$f'(x) = 3x^2 - 9$

x	$f(x)$	
-4	-25	$\varepsilon_1 \in [-4,-3]$
-3	3	
$-\sqrt{3}$	13.3923	
-1	11	$\varepsilon_2 \in [0,1]$
0	3	
1	-5	
2	-7	$\varepsilon_3 \in [2,3]$
3	3	

Usando o último processo:

fazendo: $x^3 - 9x + 3 = 0 \Rightarrow x^3 = 9x - 3$

$f_1(x) = x^3 \qquad f_2(x) = 9x - 3$



$\varepsilon_1 \in [-4,-3]$

$\varepsilon_2 \in [0,1]$

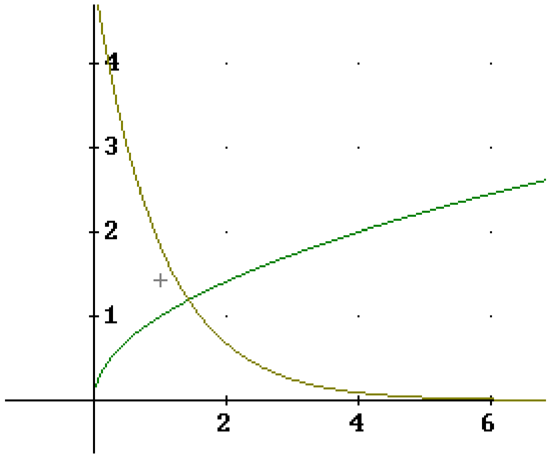
$\varepsilon_3 \in [2,3]$

b) Seja $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$.

$$\sqrt{x} - 5e^{-x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 5e^{-x}$$

$f_1(x) = \sqrt{x}$

$f_2(x) = 5e^{-x}$

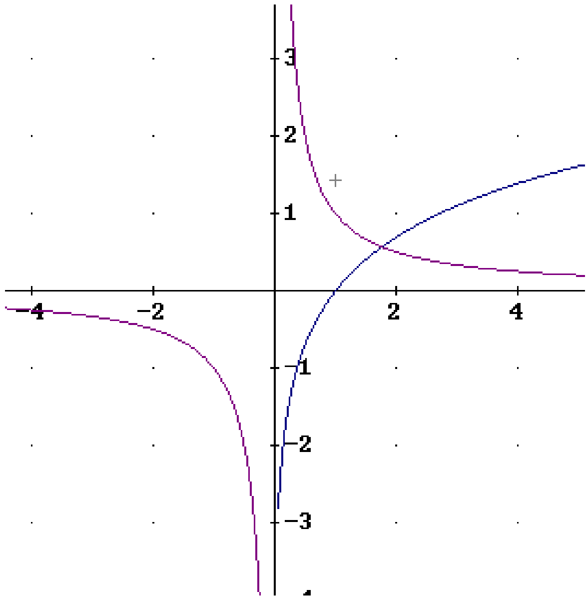


c) Seja $f(x) = x \log x - 1$.

$$x \log x - 1 = 0 \Rightarrow x \log x = 1 \Rightarrow \log x = \frac{1}{x}$$

$f_1(x) = \log(x)$

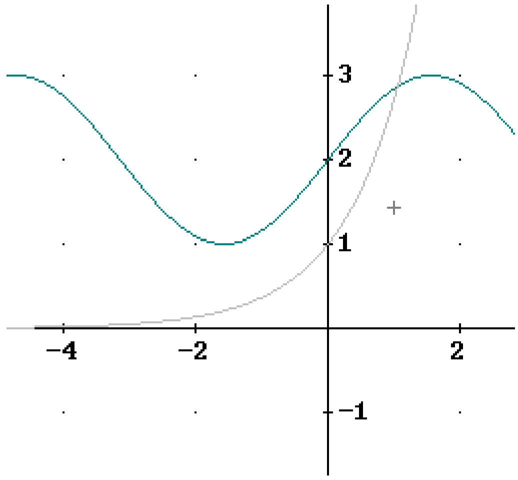
$f_2(x) = \dfrac{1}{x}$



d) Seja $f(x) = e^x - \text{sen}(x) - 2$.

$$e^x - \text{sen}(x) - 2 = 0 \Rightarrow e^x = \text{sen}(x) + 2$$

$f_1(x) = e^x$
$f_2(x) = \text{sen}(x) + 2$



2.3 Fase II: Refinamento

Nesta seção são apresentados vários métodos numéricos de refinamento de raiz. A forma como se efetua é que o diferencia, sendo que todos pertencem à classe dos métodos iterativos.

Um *método iterativo* consiste em uma seqüência de instruções que são executadas passo a passo, algumas das quais são repetidas em ciclos.

A execução de um ciclo é denominado de *iteração*. Cada iteração utiliza resultados das iterações anteriores e efetua determinados testes que permitem verificar se foi atingido um resultado próximo o suficiente do resultado esperado.

Observa-se que os métodos iterativos para obter zeros de funções fornecem apenas uma aproximação para a solução exata.

2.3.1 Critérios de Parada

Os métodos iterativos para obter zeros de funções efetuam um teste do tipo:

x_k está suficientemente próximo da raiz exata?

Que tipo de teste efetuar para se verificar se x_k está suficientemente próximo da raiz exata? Para isto é preciso entender o significado de raiz aproximada.

Existem duas interpretações para raiz aproximada que nem sempre levam ao mesmo resultado:

$\tilde{x} = x_n$ é uma *raiz aproximada* com precisão δ se:

(I) $\quad |f(x_n)| \le \delta$

(II) $\quad |x_n - x_{n-1}| \le \delta$

Há também o critério de parada correspondente ao erro relativo.

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} \le \delta$$

Obs: Além do teste de parada deve-se usar um número máximo de iterações para que o programa não entre em "loop".

2.3.2 Métodos Iterativos para se obter raízes de funções

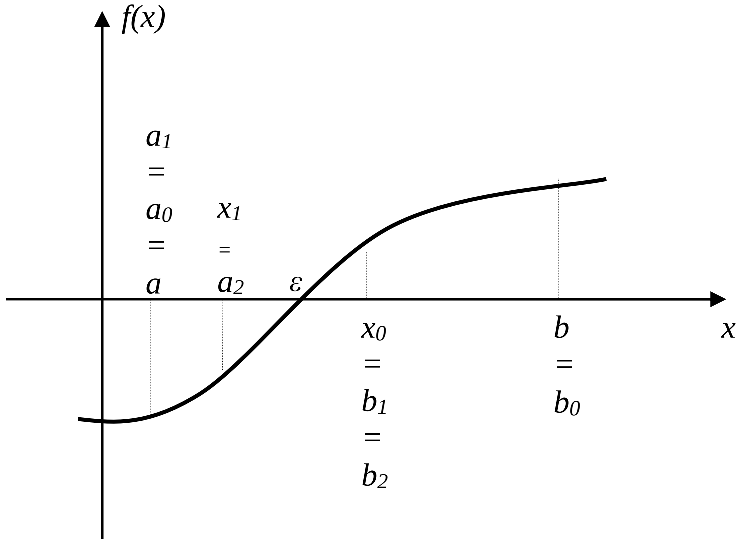
Nesta seção são apresentados alguns métodos iterativos para encontrar os zeros (raízes) de funções.

(I) Método da Bissecção

Seja *f(x)* uma função contínua no intervalo *[a, b]*, tal que *f(a)*f(b)<0*.

Supõe-se, para simplificar, que o intervalo *[a, b]* contém uma única raiz da equação. Logo, o objetivo deste método é reduzir o tamanho do intervalo que contém a raiz da equação *f(x)=0* até se atingir a precisão requerida: $|b-a|<\delta$, para isto, usa-se sucessivas divisões de *[a, b]* ao meio.

Graficamente:



As iterações ocorrem da seguinte forma:
Sendo $a = a_0$ e $b = b_0$.

1) $$x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} \quad \begin{cases} f(a_0)<0 \\ f(b_0)>0 \\ f(x_0)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon \in [a_0, x_0] \\ \therefore a_1 = a_0 \\ \quad b_1 = x_0 \end{cases}$$

2) $$x_1 = \frac{a_1+b_1}{2} \quad \begin{cases} f(a_1)<0 \\ f(b_1)>0 \\ f(x_1)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon \in [x_1, b_1] \\ \therefore a_2 = x_1 \\ \quad b_2 = b_1 \end{cases}$$

3) $$x_2 = \frac{a_2+b_2}{2} \quad \begin{cases} f(a_2)<0 \\ f(b_2)>0 \\ f(x_2)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon \in [x_2, b_2] \\ \therefore a_3 = x_2 \\ \quad b_3 = b_2 \end{cases}$$

$$\vdots$$

Exemplo 2.3: Encontrar a raiz da função *f(x)=xlogx-1*.

Sabe-se que a raiz está no intervalo [2,3], sendo $\delta = 10^{-1}$.

<u>Solução:</u>

1ª Iteração:

$$x_0 = \frac{2+3}{2} = 2{,}5 \begin{cases} f(2) = -0{,}3979 < 0 \\ f(3) = 0{,}4314 > 0 \\ f(2{,}5) = -5{,}15*10^{-3} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon \in [2{,}5;3] \\ \therefore a_1 = x_0 = 2{,}5 \\ b_1 = b_0 = 3 \end{cases}$$

$$|b_1 - a_1| = 0{,}5 > 10^{-1}$$

2ª Iteração:

$$x_1 = \frac{2{,}5+3}{2} = 2{,}75 \begin{cases} f(2{,}5) < 0 \\ f(3) > 0 \\ f(2{,}75) = 0{,}2082 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon \in [2{,}5;2{,}75] \\ \therefore a_2 = a_1 = 2{,}5 \\ b_2 = x_1 = 2{,}75 \end{cases}$$

$$|b_2 - a_2| = 0{,}25 > 10^{-1}$$

3ª Iteração:

$$x_2 = \frac{2{,}5+2{,}75}{2} = 2{,}625 \begin{cases} f(2{,}5) < 0 \\ f(2{,}75) > 0 \\ f(2{,}625) = 0{,}1002 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon \in [2{,}5;2{,}625] \\ \therefore a_3 = a_2 = 2{,}5 \\ b_3 = x_2 = 2{,}625 \end{cases}$$

$$|b_3 - a_3| = 0{,}125 > 10^{-1}$$

4ª Iteração:

$$x_3 = \frac{2{,}5+2{,}625}{2} = 2{,}5625 \begin{cases} f(2{,}5) < 0 \\ f(2{,}625) > 0 \\ f(2{,}5625) = 4{,}72*10^{-2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon \in [2{,}5;2{,}5625] \\ \therefore a_4 = a_3 = 2{,}5 \\ b_4 = x_3 = 2{,}5625 \end{cases}$$

$$|b_4 - a_4| = |2{,}5625 - 2{,}5| = 0{,}625*10^{-1} < 10^{-1} = \delta$$ ➔ FIM.

$$\boxed{\therefore \varepsilon = 2{,}5625}$$

Exercício de Fixação 2.1

Calcular a raiz da equação $f(x) = x^3 - 10$ com $\delta = 0{,}1$. Sabendo-se que $\varepsilon \in [2,\ 3]$.

<u>Passos do algoritmo do método da bissecção:</u>

Seja *f(x)* contínua em *[a, b]* e tal que *f(a)*f(b)<0*

1) Ler os dados iniciais:
   a) intervalo que contém a raiz: *[a, b]*;
   b) precisão: δ;
   c) número máximo de iterações: *n*.
2) $k \leftarrow 0$
3) Se $|b-a| < \delta$, então escolha qualquer $\varepsilon \in [a,b]$ ➔ FIM (Passo 5).

4) Enquanto $\left[|b-a| > \delta \text{ e } k < n \right]$ faça:

    k ← k+1
    fínício ← f(a)
    meio ← (a+b)/2
    fmeio ← f(meio)
      se *fínício*fmeio<0* então
        b ← meio
      senão
        a ← meio
      fim (se)
  fim (enquanto)

5) Imprimir os resultados
    Escrever (raiz)
    Escrever (número de iterações)

Exercício de Fixação 2.2

Encontrar a raiz negativa de $P(x)=x^3-3x^2-6x+8=0$, com tolerância $\delta = 0{,}2$, que está no intervalo [-3,83; -0,62], utilizando o algoritmo do método da bissecção.

Estimativa do número de iterações

Dada uma precisão δ e um intervalo inicial *[a, b]* é possível saber quantas iterações serão efetuadas pelo método da bissecção até que se obtenha $|b-a| < \delta$.

No método, o tamanho de cada intervalo gerado é a metade do tamanho do intervalo anterior. Então tem-se que:

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^k}.$$

Deseja-se obter o valor de *k* tal que $b_k - a_k < \delta$, ou seja:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} < \delta \Rightarrow 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\delta} \Rightarrow k \log 2 > \log(b_0 - a_0) - \log \delta \Rightarrow k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \delta}{\log 2}$$

.

Exemplo 2.4: Seja *f(x)=xlogx-1,* $\varepsilon \in [2,3]$ é raiz de *f(x)=0*. Sendo $\delta = 10^{-2}$, quantas iterações deve-se efetuar, no mínimo, para satisfazer o critério de parada?

Solução:

$$k > \frac{\log(3-2) - \log 10^{-2}}{\log 2} = \frac{\log 1 + 2\log 10}{\log 2} = \frac{0 + 2 * 1}{0{,}3010} \cong 6{,}64$$

$$\boxed{\therefore k = 7}$$

Comentários Finais: (Para funções contínuas em *[a, b]*).

- O método da bissecção converge sempre. Portanto, pode ser aplicado para obter a raiz de qualquer equação.
- As iterações não envolvem cálculos laboriosos.

- A convergência é muito lenta, pois se o intervalo inicial é tal que $(b_0 - a_0 >> \delta)$ e se δ for "muito pequeno" o número de iterações tende a ser muito grande, como por exemplo:

$$\left.\begin{array}{r} b_0 - a_0 = 3 \\ \delta = 10^{-7} \end{array}\right\} k > \frac{\log 3 - \log 10^{-7}}{\log 2} = \frac{\log 3 + 7\log 10}{\log 2} = \frac{7{,}477}{0{,}3010} = 24{,}8 \Rightarrow k = 25 .$$

(II) Método Iterativo Linear (MIL) ou Método do Ponto Fixo (MPF)

Este método está mais voltado aos conceitos que são introduzidos em seu estudo do que sua importância computacional.

Sejam *f(x)* uma função contínua no intervalo *[a, b]* e ε a raiz da equação *f(x)=0*, pertencente ao intervalo *[a, b]*.

Por um artifício algébrico, este método consiste em transformar *f(x)=0* em $x = \varphi(x)$ e a partir de uma aproximação inicial x_0 gerar a seqüência $\{x_k\}$ de aproximações para ε pela relação $x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k = 0, 1, 2, ...$, pois a função $\varphi(x)$ é tal que $f(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = \varphi(\varepsilon)$.

A função $\varphi(x)$ que satisfaz a condição anterior é chamada *função de iteração*.

Exemplo 2.5: Para a equação $x^2 - x - 2 = 0$ tem-se várias funções de iteração:

a) $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = x^2 - 2 \Rightarrow \varphi_1(x) = x^2 - 2$

b) $x = \pm\sqrt{2 + x} \Rightarrow \varphi_2(x) = \pm\sqrt{2 + x}$

c) $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x(x-1) - 2 = 0 \Rightarrow x - 1 = \dfrac{2}{x} \Rightarrow \varphi_3(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$

d) $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x(x-1) - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{x-1} \Rightarrow \varphi_4(x) = \dfrac{2}{x-1}$

Exemplo 2.6: Seja $f(x) = x^2 - \text{sen}(x) = 0$.

Pode-se facilmente obter duas funções de iteração:

a) Somando *x* aos dois membros:

$x = x^2 - \text{sen}\, x + x \Rightarrow \varphi_1(x) = x^2 - \text{sen}\, x + x$

b) $x^2 - \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x^2 = \text{sen}\, x \Rightarrow x = \pm\sqrt{\text{sen}\, x} \Rightarrow \varphi_2(x) = \pm\sqrt{\text{sen}\, x}$

Dada uma equação *f(x)=0* existem infinitas funções $\varphi(x)$ que são funções de iteração, com a seguinte forma:

$\varphi(x) = x + A(x) f(x)$, com a condição que em ε, ponto fixo de $\varphi(x)$, se tenha $A(\varepsilon) \neq 0$.

Teorema 2.2: Mostrar que $f(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\varepsilon) = \varepsilon$.

Prova:

$(\Rightarrow)$ Seja ε tal que $f(\varepsilon) = 0$.

$$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon + A(\varepsilon) f(\varepsilon) \underset{Hip.}{\overset{f(\varepsilon)=0}{\Rightarrow}} \varphi(\varepsilon) = \varepsilon$$

$(\Leftarrow)$ Se $\varphi(\varepsilon)=\varepsilon \Rightarrow \varepsilon + A(\varepsilon)f(\varepsilon)=\varepsilon \Rightarrow A(\varepsilon)f(\varepsilon)=0$. Como $A(\varepsilon)\neq 0 \Rightarrow f(\varepsilon)=0$.

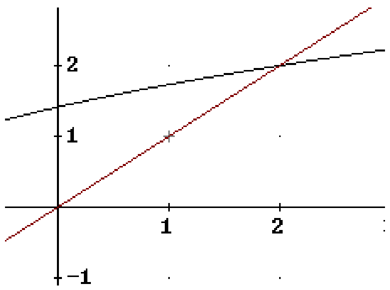
□

Graficamente, uma raiz $x=\varphi(x)$ é um número $x=\varepsilon$, para o qual a reta $y = x$ intercepta a curva $y=\varphi(x)$. Pode ocorrer que estas curvas não se interceptam e neste caso não haverá solução real.

Para que o MIL seja vantajoso, deve-se obter aproximações sucessivas x_k convergentes para a solução desejada $x=\varepsilon$.

Exemplo 2.7: Seja a equação $\varphi_2(x)=\sqrt{2+x}$, do Exemplo 2.5, e considere $x_0=0$. Então:

$$x_1=\varphi(x_0)=\sqrt{2}=1{,}414$$
$$x_2=\varphi(x_1)=\sqrt{3{,}414}=1{,}847$$
$$x_3=\varphi(x_2)=\sqrt{3{,}847}=1{,}961$$
$$x_4=\varphi(x_3)=\sqrt{3{,}961}=1{,}990$$
$$x_5=\varphi(x_4)=\sqrt{3{,}990}=1{,}9975$$



x	$y=\varphi(x)$
0	1,414
2	2
3	2,2
4	2,45

x	$y=x$
0	0
2	2
3	3
4	4

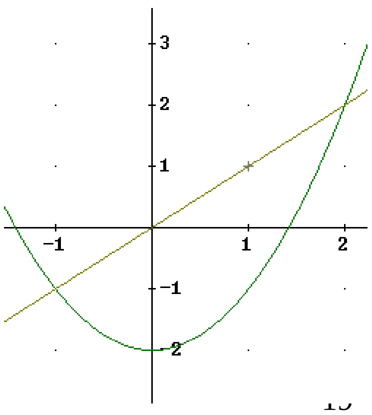
A seqüência obtida acima converge para a raiz $\varepsilon=2$. Entretanto para certos $\varphi(x)$ o processo pode gerar uma seqüência que diverge de ε.

Exemplo 2.8: Seja $f(x)=x^2-x-2$ e $\varphi_1(x)=x^2-2$.

Iniciando o processo com $x_0=3$ tem-se a seguinte seqüência:

$$x_1=\varphi(x_0)=x_0^2-2=3^2-2=7$$
$$x_2=\varphi(x_1)=x_1^2-2=7^2-2=47$$
$$x_3=\varphi(x_2)=x_2^2-2=(47)^2-2=2207$$

<u>Graficamente</u>:



É óbvio que se trata de uma sequência divergente.

Estudo da convergência do MIL

Foi visto que dada uma equação *f(x)=0*, pode existir mais de uma função $\varphi(x)$ tal que $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\varphi(x)$.

De acordo com o Exemplo 2.8 não é para qualquer escolha de $\varphi(x)$ que o processo recursivo definido por $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ gera uma seqüência que converge para ε.

O teorema a seguir fornece as condições suficientes para que o processo seja convergente.

Teorema 2.3: Seja ε uma raiz da equação *f(x)=0*, isolada num intervalo *[a, b]* e centrado em ε. Seja $\varphi(x)$ uma função iteração para a equação *f(x)=0*, se:

(I) $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em *[a, b]*

(II) $|\varphi'(x)| \le M < 1, \ \forall x \in [a,b]$

(III) $x_0 \in [a, b]$

então a seqüência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ converge para ε.

Exemplo 2.9: Seja $f(x)=x^2+x-6=0$. Verifique se $\varphi(x)=6-x^2$ satisfaz as hipóteses do teorema anterior para o intervalo (0,2).

<u>Solução</u>:

(I) $\varphi(x)=6-x^2 \quad \varphi'(x)=-2x$

$\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em $\Re$.

(II) $|\varphi'(x)|<1 \Rightarrow |2x|<1 \Rightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

Como o intervalo considerado é (0,2), então existe um $x \in [a,b]$ tal que $|\varphi'(x)| \not< 1$. Logo $\varphi(x)=6-x^2$ não converge.

Isto pode ser verificado numericamente para $x_0=1{,}5$.

$$x_1=\varphi(x_0)=6-(1{,}5)^2=3{,}75$$
$$x_2=\varphi(x_1)=6-(3{,}75)^2=-8{,}0625$$
$$x_3=\varphi(x_2)=6-(-8{,}0625)^2=-59{,}003906$$
$$x_4=\varphi(x_3)=6-(-59{,}003906)^2=-3457{,}4609$$

Analisando os resultados anteriores verifica-se que $\{x_k\}$ não está convergindo para ε=2.

<u>Critérios de parada</u>: No algoritmo MIL escolhe-se x_k como raiz aproximada de ε se:

$$|x_k-x_{k-1}|=|\varphi(x_{k-1})-x_{k-1}|<\delta \ \text{ ou se } \ |f(x_k)|<\delta.$$

Passos do algoritmo do método MIL:

Sejam a equação $f(x) = 0$ e a equação equivalente $x = \varphi(x)$, supõe-se que as hipóteses do Teorema 2.3 são satisfeitas.

1) Dados iniciais
   a) x_0 : aproximação inicial
   b) δ : precisão
   c) *it*: número máximo de iterações
2) Se $|f(x_0)| < \delta$ então faça $\varepsilon \leftarrow x_0$ ➔ FIM
3) $k \leftarrow 1$
4) $x_1 \leftarrow \varphi(x_0)$
5) Se $|f(x_1)| < \delta$ ou $|x_1 - x_0| < \delta$ ou $k > it$ então faça
   $\varepsilon \leftarrow x_1$ ➔ FIM
6) $x_0 \leftarrow x_1$
7) $k \leftarrow k+1$

Volte ao Passo 4

Exemplo 2.10: Encontrar a raiz de $f(x) = x^3 - 9x + 3$ pelo método MIL. Considere $\varphi(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{1}{3}$; $x_0 = 0{,}5$, $\delta = 5*10^{-4}$ $\varepsilon \in [0{,}1]$. Verifique também se $\frac{x^3}{9} + \frac{1}{3}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 2.3 para o intervalo (0,1).

Solução:

Condições do teorema:

(I) $\varphi(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{1}{3}$ $\quad \varphi'(x) = \frac{3x^2}{9} = \frac{x^2}{3}$

$\therefore \varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em [0,1]

(II) $|\varphi'(x)| < 1 \Rightarrow \left|\frac{x^2}{3}\right| < 1 \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

(III) $x_0 \in I \Rightarrow 0{,}5 \in [0,1]$

$x_0 = 0{,}5$

Passos do Algoritmo:

1) Inicialização
   Dados iniciais x_0 e δ.

2) $|f(x_0)| > \delta$

3) $k \leftarrow 1$ (1ª iteração)

4) $x_1 \leftarrow \varphi(x_0) = \frac{(0{,}5)^3}{9} + \frac{1}{3} = 0{,}347222222$

5) $|f(x_1)| = 0{,}83137751*10^{-1} > 0{,}0005$ e $|x_1 - x_0| > 0{,}0005$

6) $x_0 \leftarrow 0{,}347222222$

7) $k \leftarrow 2$ (2ª iteração)

4) $x_1 \leftarrow \varphi(x_0) = \dfrac{(0{,}347222222)^3}{9} + \dfrac{1}{3} = 0{,}337984694$

5) $|f(x_1)| = 0{,}3253019 * 10^{-2} > 0{,}0005$ e $|x_1 - x_0| > 0{,}0005$

6) $x_0 \leftarrow 0{,}337984694$

7) $k \leftarrow 3$ (3ª iteração)

4) $x_1 \leftarrow \varphi(x_0) = \dfrac{(0{,}337984694)^3}{9} + \dfrac{1}{3} = 0{,}337618004$

5) $|f(x_1)| = 0{,}78338 * 10^{-4} > 0{,}0005$ ou $|x_1 - x_0| = 0{,}36669 * 10^{-4} < 0{,}0005$

$\boxed{\therefore \varepsilon = 0{,}337618004} \rightarrow$ FIM.

Exercício de Fixação 2.3

Considere a função $f(x) = x^3 - x - 1$. Resolva-a pelo MIL com a função de iteração $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$ e $\delta = 0{,}001$. Justifique seus resultados.

Obs: A convergência do MIL será tanto mais rápida quanto menor for o valor de $\varphi'(x)$.

Comentários Finais: (Para funções contínuas em *[a, b]*).

- O método MIL é voltado a conceitos matemáticos.
- Converge somente se para a função de iteração for satisfeito o Teorema 2.3.
- As iterações não envolvem cálculos laboriosos

(III) Método de Newton (Newton – Raphson)

Sabe-se que uma das condições de convergência do método MIL é que $|\varphi'(x)| < M < 1, \forall x \in [a,b]$ um intervalo fechado centrado na raiz. Sabe-se também que a convergência do MIL será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(\varepsilon)|$.

O *método de Newton* tenta garantir e acelerar a convergência do MIL, para isto ele escolhe uma função de iteração $\varphi(x)$ de modo que $\varphi'(\varepsilon) = 0$.

Então, dada a equação $f(x) = 0$ e partindo da forma geral $\varphi(x)$, obtêm-se *A(x)* tal que $\varphi'(\varepsilon) = 0$.

$\varphi(x) = x + A(x) f(x)$ derivando $\varphi(x)$

$\varphi'(x) = 1 + A'(x) f(x) + A(x) f'(x)$

$\varphi'(\varepsilon) = 1 + A'(\varepsilon) f(\varepsilon) + A(\varepsilon) f'(\varepsilon)$, como $f(\varepsilon) = 0$ tem-se:

$\varphi'(\varepsilon) = 1 + A(\varepsilon) f'(\varepsilon)$, fazendo $\varphi'(\varepsilon) = 0$ temos

$$1 + A(\varepsilon) f'(\varepsilon) = 0 \Rightarrow A(\varepsilon) = -\frac{1}{f'(\varepsilon)}$$

Toma-se então $A(x) = -\dfrac{1}{f'(x)}$

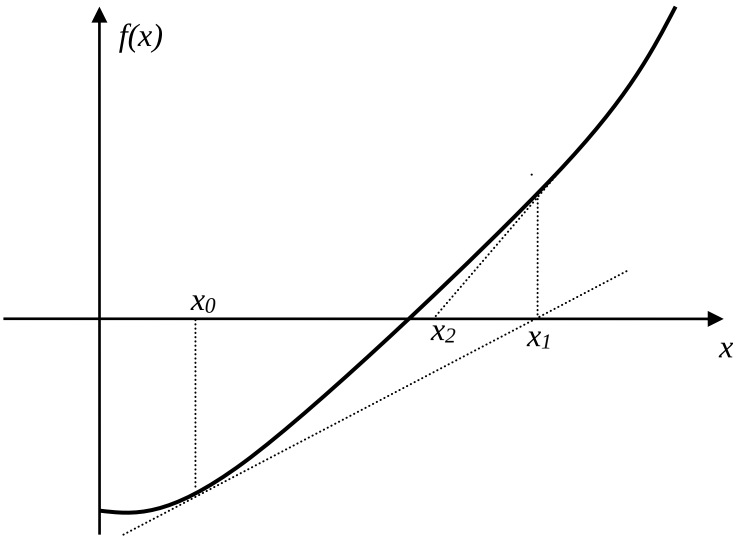
$$\boxed{\text{Assim: } \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

Logo, o processo iterativo chamado *Método de Newton (Newton-Raphson)* é definido por: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, *k = 0, 1, 2, ...*

Este processo converge sempre que $|x_0 - \varepsilon|$ for suficientemente pequeno.

Interpretação Geométrica

Dado x_k, o ponto x_{k+1} é obtido traçando-se a tangente a curva $f(x)$ e pegando o ponto onde esta tangente corta o eixo $\overrightarrow{0x}$.



Obs: A ordem de convergência do método de Newton é quadrática, isto é, a diferença entre x_{k+1} e x_k, é, em ordem de grandeza, igual ao quadrado da diferença entre x_k e x_{k-1}. Por exemplo, se tivermos as seguintes diferenças:

entre x_k e x_{k-1}.	entre x_{k+1} e x_k
0,1	0,01
0,01	0,0001

Exemplo 2.11: Considere $f(x) = x^2 + x - 6, \varepsilon_2 = 2$ e $x_0 = 1{,}5$.

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 + x - 6}{2x+1} = \frac{x(2x+1) - x^2 - x + 6}{2x+1} = \frac{2x^2 + x - x^2 - x + 6}{2x+1} = \frac{x^2+6}{2x+1}$$

Logo:

$$x_1 = \varphi(x_0) = \frac{(1{,}5)^2 + 6}{2(1{,}5)+1} = 2{,}0625$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = \frac{(2{,}062)^2 + 6}{2(2{,}0625)+1} = 2{,}00076$$
$$x_3 = \varphi(x_2) = \frac{(2{,}00076)^2 + 6}{2(2{,}00076)+1} = 2{,}0000$$

Assim, trabalhando com cinco casas decimais, $x_3 = \varepsilon$. Observe que se este exemplo fosse resolvido aplicando o MIL com $\varphi(x) = \sqrt{6-x}$, se obteria $x_5 = 2{,}00048$ com cinco casas decimais.

Exemplo 2.12: Sejam *f(x) = x*^{3} *– 9x + 3;* $x_0 = 0{,}5$; $\delta = 0{,}01$ e $\varepsilon \in [0{,}1]$.
Aplicar o método de Newton.

<u>Solução:</u>

Simplificando a função $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = x - \frac{x^3 - 9x + 3}{3x^2 - 9} = \frac{x(3x^2 - 9) - x^3 + 9x - 3}{3x^2 - 9} = \frac{3x^3 - 9x - x^3 + 9x - 3}{3x^2 - 9} = \frac{2x^3 - 3}{3x^2 - 9}$$

$|f(x_0)| = 1{,}375 > \delta$

1ª iteração:

$$x_1 \leftarrow \varphi(x_0) = \frac{2(0{,}5)^3 - 3}{3(0{,}5)^2 - 9} = 0{,}33333\ldots$$
$$|f(x_1)| = 0{,}037037039 > \delta$$
$$|x_1 - x_0| = |0{,}5 - 0{,}3333| > \delta$$

2ª iteração:

$$x_2 \leftarrow \varphi(x_1) = \frac{2(0{,}33\ldots)^3 - 3}{3(0{,}33\ldots)^2 - 9} = 0{,}337606837$$
$$|x_2 - x_1| = 0{,}004273504 < \delta$$
$$\boxed{\therefore \varepsilon = 0{,}337606837}$$

<u>Passos do algoritmo do método de Newton:</u>

1) Entrada dos dados iniciais
   a) ler aproximação: x_0
   b) ler precisão: δ
   c) fornecer o número máximo de iterações: *it*
2) Calcular $fx \leftarrow f(x_0)$

   Se $|fx| > \delta$ então:

   $k \leftarrow 1$
   $fxlinha \leftarrow f'(x_0)$
   $x_1 \leftarrow x_0 - (fx/fxlinha)$
   $fx \leftarrow f(x_1)$

Enquanto $\left(|fx| > \delta \text{ e } |x_1 - x_0| > \delta \text{ e } k \le it \right)$ faça

$k \leftarrow k + 1$;

$x_0 \leftarrow x_1$

fxlinha $\leftarrow f'(x_0)$

$x_1 \leftarrow x_0 - (fx/fxlinha)$

$fx \leftarrow f(x_1)$

fim (enquanto)

raiz $\leftarrow x_1$

senão

raiz $\leftarrow x_0$

fim (se)

3) Impressão dos resultados
   - raiz
   - número de iterações

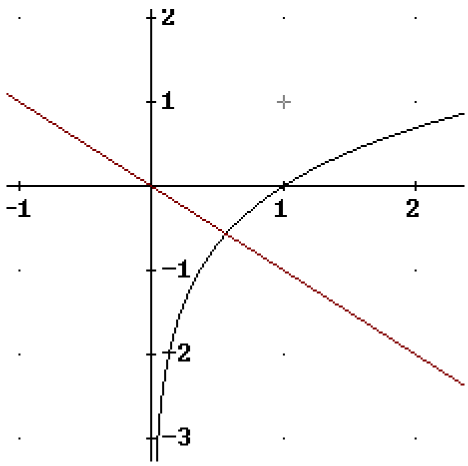
Exemplo 2.13: Determinar, usando o algoritmo do método de Newton, a menor raiz positiva da equação $f(x) = x + \ln x = 0$, com erro relativo $\delta = 0{,}1$ (adote $x_0 = 0{,}5$).

Solução:

Fazendo $f(x) = 0$

$$x + \ln x = 0 \Rightarrow -x = \ln x \Rightarrow f_1(x) = -x;\ f_2(x) = \ln x$$

assim, obtem-se:



Aplicando o método:

1) Tomando $x_0 = 0{,}5,\ \delta = 0{,}1$

2) $f_x \leftarrow 0{,}5 + \ln 0{,}5 = -0{,}193$ $\quad |f_x| > \delta$

$k \leftarrow 1$

$$fxlinha \leftarrow 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{0{,}5} = 3$$

$x_1 \leftarrow 0{,}5 - (-0{,}193/3) = 0{,}5644$

$f_x \leftarrow 0{,}5644 + \ln 0{,}5644 = -0{,}0076$

$$\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = \frac{|0{,}564 - 0{,}5|}{0{,}5644} = 0{,}11 > \delta$$

$k \leftarrow 2$
$x_0 \leftarrow 0{,}5644$
$fxlinha \leftarrow 1 + \dfrac{1}{x_0} = 1 + \dfrac{1}{0{,}5644} = 2{,}772$
$x_1 \leftarrow 0{,}5644 - (-0{,}0076/2{,}772) = 0{,}5672$
$f_x \leftarrow 0{,}5672 - \ln(0{,}5672) = 0{,}00015$
$\dfrac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = \dfrac{|0{,}5672 - 0{,}5644|}{0{,}5672} = 0{,}0049 < 0{,}1 = \delta$

Então a menor raiz positiva com erro relativo $\delta = 0{,}1$ é $\varepsilon = 0{,}5672$.

Exercício de Fixação 2.4

Considerando $\delta \le 10^{-2}$, $x_0 = 2$ e *it=100*, aplique os passos do algoritmo de Newton para encontrar uma raiz aproximada para $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$.

Comentários Finais:

- O Método de Newton converge rápido.
- As iterações não envolvem cálculos laboriosos, porém, precisa do cálculo da derivada da função *f(x)*.

IV Método da secante

A desvantagem do método de Newton é a necessidade de calcular o valor de $f'(x)$ a cada iteração, com isso o *método da secante* consiste em aproximar a derivada $f'(x_k)$ pelo quociente das diferenças da seguinte forma:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

tal que : x_k e x_{k-1} são duas aproximações para a raiz.

Logo, a fórmula de Newton torna-se:

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

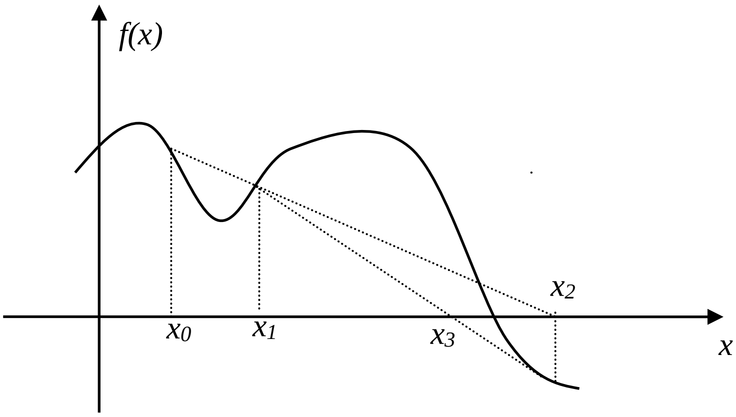
Então o processo iterativo do método da secante é definido por:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

Obs: São necessárias duas aproximações para inicializar o método.

Interpretação geométrica

A partir de duas aproximações x_{k-1} e x_k, o ponto x_{k+1} é obtido pela intersecção do eixo $\overrightarrow{Ox}$ e da reta secante que passa pelos pontos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$.



Obs: Este método só converge se as aproximações iniciais x_0 e x_1 forem escolhidas bem próximas de ε .

Exemplo 2.14: Encontrar a raiz de $f(x) = x^2+x-6$ utilizando os pontos $x_0=1,5$ e $x_1=1,7$. Considere δ = 0,003.

Solução:

Verificação inicial do critério de parada $|f(x_0)| > \delta$, $|f(x_1)| > \delta$ *e* $|x_1 - x_0| > \delta$

1ª iteração:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 1{,}7 - \frac{(-1{,}41)(0{,}2)}{-1{,}41-(-2{,}25)} = 1{,}7 + \frac{0{,}282}{0{,}84} = 2{,}03571$$

$$|f(x_2)| = 0{,}17982 > \delta$$

$$|x_2 - x_1| = 0{,}33571 > \delta$$

2ª iteração:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 2{,}03571 - \frac{(0{,}17982)(2{,}03571 - 1{,}7)}{(0{,}17982) + 1{,}41} = 1{,}99774$$

$$|x_3 - x_2| = 0{,}03797 > \delta$$

$$|f(x_3)| = 0{,}01129 > \delta$$

3ª iteração:

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = 1{,}99774 - \frac{(-0{,}01129)(-0{,}03797)}{-0{,}01129 - 0{,}17983} = 1{,}99998$$

$$|x_4 - x_3| = 0{,}0022 < \delta$$

$$|f(x_4)| = 0{,}00009999 < \delta$$

$$\boxed{\therefore \varepsilon = 1{,}99998}$$

Passos do algoritmo do método da secante:

Seja a equação $f(x)=0$.

1) Dados iniciais
   a) x_0 e x_1: aproximações iniciais
   b) δ :precisão

c) *it*: número máximo de iterações

2) Se $|f(x_0)| < \delta$ então faça $\varepsilon \leftarrow x_0$ ➔ FIM

3) Se $|f(x_1)| < \delta$ ou se $|x_1 - x_0| < \delta$ então:

$\varepsilon \leftarrow x_1$ ➔ FIM

4) $k \leftarrow 1$

5) $x_2 \leftarrow x_1 - \dfrac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$

6) Se $|f(x_2)| < \delta$ ou $|x_2 - x_1| < \delta$ ou $k>it$ então

$\varepsilon \leftarrow x_2$ ➔ FIM

7) $x_0 \leftarrow x_1$ e $x_1 \leftarrow x_2$

8) $k \leftarrow k + 1$

Volte ao Passo 5.

Exercício de Fixação 2.5

Considerando $x_0=0$, $x_1=1$, δ=0,01 e it=100, encontre uma raiz aproximada para a equação $x^3 - 1/2 = 0$ aplicando os passos do algoritmo do método da secante.

Comentários Finais:

- As iterações não envolvem cálculos laboriosos.
- Convergem se as aproximações iniciais de x_0 e x_1 estiverem relativamente próximos de ε.

V Método da Regula Falsi (ou falsa posição)

Este método é uma variação do método da secante, porém são tomadas duas aproximações x_0 e x_1, tal que, $f(x_0)* f(x_1)<0$.

A aproximação seguinte é calculada por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Assim, dado um intervalo [a,b] tal que $f(a)*f(b)<0$, a função de iteração do método da *Regula Falsi* é dada por:

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

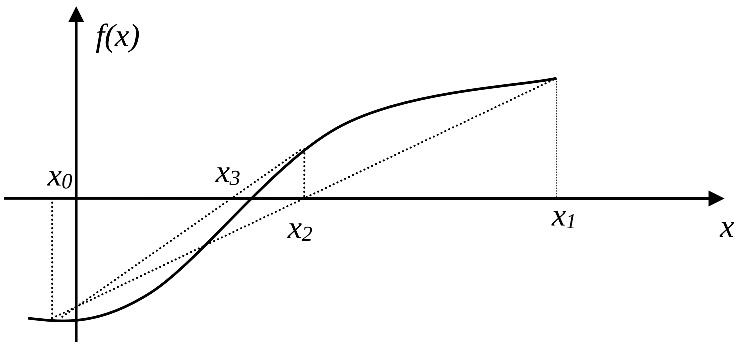
O método termina quando:

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \delta \text{ ou } \frac{|x_{k+1} - x_{k-1}|}{|x_{k+1}|} < \delta \text{ ou } k>it \text{ (número máximo de iterações)}$$

e neste caso x_{k+1} é raiz.

Caso contrário, escolhe-se entre x_k e x_{k-1} o ponto no qual $f(x)$ tenha sinal oposto ao de $f(x_{k+1})$. Com x_{k+1} e o ponto escolhido calcula-se x_{k+2} pelo mesmo processo e isso se repete até a convergência.

Interpretação Geométrica



Exemplo 2.15: Seja $f(x) = x \log x - 1$. Considere $[a_0, b_0] = [2,3]$. Encontre uma raiz aproximada para $f(x)$ pelo método da *Regula Falsi*.

Solução:

$F(a_0) = -0,3979 < 0$
$F(b_0) = 0,4314>0$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{2(0,4314) - 3(-0,3979)}{0,4314 - (-0,3979)} = \frac{2,0565}{0,8293} = 2,4798$$

$f(x_0)$ = -0,0219 <0. Como $f(a_0)$ e $f(x_0)$ têm o mesmo sinal,

$$\begin{cases} a_1 = x_0 = 2,4798 & f(a_1) < 0 \\ b_1 = 3 & f(b_1) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2,4798(0,4314) - 3(-0,0219)}{0,4314 - (-0,0219)} = 2,5049$$

$f(x_1) = -0,0011$

$$\begin{cases} a_2 = x_1 = 2,5049 \\ b_2 = b_1 = 3 \end{cases}$$

$\vdots$

Passos do algoritmo do método da *regula falsi*:

Seja $f(x)$ contínua em $[a,b]$ tal que $f(a)*f(b)<0$.

1) Dados iniciais
   a) intervalo inicial $[a,b]$
   b) precisões δ_1 e δ_2
   c) *it*: número máximo de iterações
2) Se $|b-a| < \delta_1$, então escolha para ε qualquer $x \in [a,b]$ ➔ FIM
   se $|f(a)| < \delta_2$ ou $|f(b)| < \delta_2$ então escolha *a* ou *b* como ε ➔ FIM
3) $k \leftarrow 1$
4) $M \leftarrow f(a)$
5) $x \leftarrow \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$
6) Se $|f(x)| < \delta_2$ ou $k>it$ então

$\varepsilon \leftarrow x$ ➔ FIM

7) Se $M*f(x)>0$, faça $a \leftarrow x$. Vá para o Passo 9.

8) $b \leftarrow x$

9) Se $|b-a|< \delta_1$, então escolha para ε qualquer $x \in [a,b]$ ➔ FIM

10) $k \leftarrow k+1$. Volte ao Passo 4.

Exemplo 2.16: Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3$, $[a,b] = [0,1]$, $\delta = 0{,}0005$ e $it=100$. Aplicando os passos do algoritmo do método da r*egula falsi* foram obtidos os seguintes resultados:

Iteração	x	$f(x)$	$\|b-a\|$
1	0,375	-0,322265625	1
2	0,338624339	$-8{,}79019964 * 10^{-3}$	0,375
3	0,337635046	$-2{,}25883909 * 10^{-4}$	0,328624339

$\boxed{\varepsilon = 0{,}337635046}$

Exercício de Fixação 2.6

Aplique os passos do algoritmo do método da *regula falsi* para determinar a menor raiz positiva da equação $x-\cos(x)=0$ com erro inferior a 10^{-3} e número máximo de iterações igual a 100. Destaca-se que a raiz está no intervalo [0,7 0,8].

Comentários Finais:

- Junção dos métodos da bissecção e secante.
- Boa convergência, perdendo apenas para o método de Newton.

2.4 Observações finais sobre os métodos

Bissecção

Não exige o conhecimento das derivadas, mas tem uma convergência lenta. Deve ser usado para diminuir o intervalo que contém a raiz.

Iterativo Linear

Sua maior dificuldade está em encontrar uma função de iteração que satisfaça as condições de convergência.

Newton

Requer o conhecimento da forma analítica de $f'(x)$, mas sua convergência é extraordinária.

Secante

Exige dois pontos iniciais.

Regula Falsi

Além de não exigir o conhecimento do sinal das derivadas, tem uma convergência só superada pelo método de Newton. Porém, necessita isolar a raiz em um intervalo [a,b].

2.5 Exercícios

2.5.1 Obrigatórios

1) Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3$.
   Aplique o método da Secante para obter uma raiz aproximada para a função $f(x)$ ($x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e $\delta = 5.10^{-4}$).

2) Seja $f(x) = e^{-x^2} - \cos x$, $\varepsilon \in [1, 2]$, $\delta = 10^{-2}$ e *it=100*.
   Considerando $\frac{\partial}{\partial x} e^{-x^2} - \cos x = sen(x) - 2xe^{-x^2}$
   Aplique os seguintes métodos:
   a) Bissecção, considerando [1,2].
   b) MIL (sendo $\varphi = \cos x - e^{-x^2} + x$ e $x_0 = 1.5$).
   c) Newton, $x_0 = 1.5$.
   d) Secante $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.
   e) Regula Falsi $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.

3) Encontre a raiz da função $f(x) = x^2 - 5$ pelo método da bissecção. Sabe-se que o intervalo [2,3] contém a raiz, usar $\delta = 0{,}01$.

4) Encontre algumas funções iterações para a função $f(x) = x^2 + 0{,}96x - 2{,}08$.

5) Dadas as funções:
   a) $f(x) = \mathrm{cosec}(x) - \mathrm{tg}(x)$.
   b) $f(x) = e^{-x} - \ln x$.
   c) $f(x) = x - 2{,}7\ln x$.
   Pesquisar a existência de raízes das funções acima e isolá-las em intervalos.

6) Considere a função $f(x) = x^3 - x - 1$. Resolva-a pelo MIL com a função de iteração $\phi(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ e $x_0 = 1$. Justifique seus resultados.

7) A equação $f(x) = x^2 + x - 1/4$ possui uma raiz real isolada no intervalo [-0,5;0,5]. A seqüência produzida por $X_{n+1} = \phi(X_n) = -x_n^2 + 1/4$ será convergente para essa raiz?

2.5.2 Opcionais

8) Determine uma raiz de $f(x) = x^2 - 0{,}9$, resolvendo por $x = x^2 + x - 0{,}9$ pelo método MIL com $x_0 = -1$ e $\delta = 10^{-1}$.

9) Aplique o método de Newton à equação: $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$ com $x_0 = 1{,}9$. Justifique o que acontece.

10) Seja $f(x) = e^x - 4x^2$ e ε sua raiz no intervalo (0,1). Tomando $x_0 = 0{,}5$, encontre ε com $\delta = 10^{-4}$ e *it=100*, usando:

a) O MIL com $\phi(x) = \frac{1}{2} e^{x/2}$.

b) O método de Newton.

Compare a rapidez de convergência.

11) Encontre uma raiz de cada equação abaixo com $\delta \leq 0.01$ pelo método da bissecção.

a) $f(x) = e^{2x} - 2x^3 - 5 = 0$, onde $\varepsilon \in [0,2]$.

b) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 3 = 0$, onde $\varepsilon \in [-1,0]$.

12) Encontrar pelo menos uma raiz positiva de cada equação abaixo, utilizando o método de Newton (em todos os exercícios considerar *it=100*):

a) $f(x) = 4x^3 + x + \cos(x) - 10 = 0$, considerando $\delta \leq 10^{-5}$ e $x_0 = 2$.

b) $f(x) = x^2 - 2 = 0$, considerando $\delta \leq 10^{-5}$ e $x_0 = 1$ (trata-se do cálculo de $\sqrt{2}$)

c) $f(x) = \ln(x) + x + 4 = 0$, considerando $\delta \leq 10^{-3}$ e $x_0 = 1{,}5$

13) Determinar pelo menos uma raiz de cada equação abaixo pelo método da regula falsi e utilizando $\delta \leq 10^{-2}$:

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 10x + 20 = 0$, sendo $\varepsilon \in [3,4]$.

b) $f(x) = 2^x + \cos(x)x^2 = 0$, sendo $\varepsilon \in [-2,0]$.

14) Utilizando os métodos bissecção, secante, regula falsi e Newton, encontre uma raiz para as seguintes equações:

a) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 8x - 10 = 0$, sendo $\varepsilon \in [0,2]$ e considerando $\delta \leq 10^{-2}$.

b) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - \text{sen}(x) - 30 = 0$, sendo $\varepsilon \in [1,4]$ e considerando $\delta \leq 10^{-2}$.

15) Determinar a raiz de $f(x) = 2x^3 - \cos(x+1) - 3 = 0$ pelos passos do algoritmo método da secante. Considere $\delta \leq 10^{-3}$, *x_0=-1*, *x_1=2* e *it=100*.