Projet
"Simulation numérique"

Mars 2014

Résumé

Ce projet numérique nous permet d'analyser les propriétés de l'opérateur biharmonique en deux dimensions. Nous analysons en premier lieu comment discrétiser cet opérateur par la méthode des différences finies et envisageons deux façons de formuler le système linéaire associé. Enfin, dans une seconde partie, nous formulons et résolvons un problème aux valeurs propres basé sur l'opérateur biharmonique et étudions les premiers vecteurs propres associés. Ce problème intervient notamment dans la détermination de modes propres de vibration de structures en acoustique ou en mécanique des structures. Ce projet est en lien avec les cours sur les équations aux dérivées partielles, l'algèbre linéaire creuse et fait appel à Matlab pour les expérimentations numériques.

1 Partie théorique

Cette partie se comporte de deux parties distinctes notées A et B.

1.1 A. Positionnement du problème A

Nous nous proposons d'obtenir par la méthode des différences finies une approximation de la solution d'un problème dit biharmonique en deux dimensions muni de conditions aux limites spécifiques. Soit $\Omega =]-1,1[\times]-1,1[\subset \mathbb{R}^2$ et $\partial\Omega$ sa frontière. Etant donné f sur Ω et f_1, f_2 définies sur la frontière, le problème revient à déterminer u solution de :

$$\Delta\Delta u(x,y) = f(x,y) \text{ sur } \Omega, \tag{1}$$

muni des conditions limites suivantes :

$$\begin{cases} u(x,y) = f_1(x,y) \text{ sur } \partial\Omega, \\ \Delta u(x,y) = f_2(x,y) \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

mettant en jeu l'opérateur Laplacien noté Δ :

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

et l'opérateur biharmonique noté $\Delta\Delta$:

$$\Delta\Delta u(x,y) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}.$$

Nous nous proposons de résoudre le problème elliptique du quatrième ordre (1) en le discrétisant par la méthode des différences finies avec un schéma précis à l'ordre deux. Soit h le pas de discrétisation supposé uniforme. Nous obtenons ainsi après discrétisation un système linéaire d'équations noté :

$$A_h u_h = b_h, \tag{3}$$

avec $A_h \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $u_h \in \mathbb{R}^n$. Nous cherchons ensuite à résoudre de manière efficace ce système linéaire grâce à des méthodes de factorisation directe creuse ou des méthodes itératives.

1.2 A. Discrétisation de l'opérateur biharmonique et traitement des conditions limites

Rappel : La molécule de discrétisation de l'opposé de l'opérateur Laplacien discret $(-\Delta_h)$ pour un schéma différences finies d'ordre deux en deux dimensions peut s'écrire ainsi :

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & \mathit{4} & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}_h .$$

Cette représentation permet aisément en un point donné du maillage (dont le coefficient associé est signalé en italique) de connaître la forme de l'opérateur discrétisé.

• Montrer que la molécule de discrétisation associée à l'opérateur biharmonique $(\Delta_h\Delta_h)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{1}{h^4}\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & \mathit{20} & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix}_h .$$

La molécule de discrétisation comporte donc au plus 13 points. En terme matriciel, au sein de la matrice associée au système linéaire notée A_h, une ligne comportera donc au plus 13 éléments non-nuls.

• Il nous faut analyser ensuite le traitement des conditions limites. Deux relations sont disponibles sur la frontière d'après le système de conditions limites (2). La condition $u = f_1(x, y)$ sera imposée en premier lieu en tout point de la frontière discrète. Il reste à traiter les zones se trouvant proches des frontières. A titre illustratif, nous considérons la zone proche de la frontière correspondant à $x = -1$, où la molécule de discrétisation associée à l'opérateur biharmonique $(\Delta_h\Delta_h)$ s'écrit sous la forme suivante pour les points du maillage définis par $x = h$ et loin des coins :

$$\frac{1}{h^4}\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ \mathbf{1} & -8 & \mathit{20} & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix}_h$$

où le terme en gras fait référence à un point fictif situé en dehors du domaine discret Ω_h. Il nous faut donc utiliser une équation supplémentaire associée à cette inconnue fictive. Pour cela, écrire la condition limite $\Delta u(x, y) = f_2(x, y)$ sur la frontière pour déduire une relation liant inconnue fictive et inconnue située à l'intérieur du domaine. Le traitement près des autres frontières du domaine est similaire. A ce stade, la matrice correspondant à la discrétisation de l'opérateur biharmonique A_h peut donc être connue entièrement. Le système linéaire rassemblera donc les équations liées aux points intérieurs (notés I), aux points situés sur la frontière (notés F) et les points fictifs (notés G). Le partitionnement suivant de la matrice A_h pourra donc être obtenu au final :

$$\begin{bmatrix} A_{II} & A_{IG} & A_{IF} \\ A_{GI} & A_{GG} & A_{GF} \\ A_{FI} & A_{FG} & A_{FF} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_I \\ u_G \\ u_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_I \\ b_G \\ b_F \end{bmatrix}$$

La construction du second membre b_h est quant à elle similaire.

1.3 A. Discrétisation alternative de l'opérateur biharmonique

Le problème continu (1) peut être reformulé sous la forme d'un système couplé de deux équations aux dérivées partielles écrit ainsi :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta v(x,y) &=& f(x,y) & \text{sur } \Omega, \\ v(x,y) &=& f_2(x,y) & \text{sur } \partial\Omega, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcll} \Delta u(x,y) &=& v(x,y) & \text{sur } \Omega, \\ u(x,y) &=& f_1(x,y) & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{4}$$

L'avantage de cette formulation est de recourir uniquement à l'opérateur Laplacien Δ grâce à l'introduction d'une variable intermédiaire notée v.

• Ecrire le système discret d'équations et expliciter la structure du système linéaire associé. Détailler notamment le traitement des conditions limites.

• Quelle(s) méthode(s) numérique(s) suggérez-vous d'employer pour résoudre ce système linéaire ? Discuter des avantages et éventuels inconvénients par rapport à l'approche développée précédemment en section 1.2.

1.4 B. Positionnement du problème B

Le but de cette partie revient à résoudre un problème aux valeurs propres défini à partir de l'opérateur biharmonique et muni de conditions limites spécifiques sur le domaine $\Omega =]-1,1[\times]-1,1[\subset \mathbb{R}^2$. Le problème ainsi proposé intervient fréquemment en mécanique vibratoire pour la détermination de modes propres de structures ou en acoustique musicale. Nous souhaitons donc résoudre le problème aux valeurs propres défini au niveau continu ainsi :

$$\Delta\Delta u(x,y) \quad = \quad \lambda\ u \text{ sur } \Omega, \tag{5}$$

muni des conditions limites suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcr} u(x,y) &=& 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} &=& 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_x = \{x = \pm 1, y \in]-1,1[\}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} &=& 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_y = \{x \in]-1,1[, y = \pm 1\}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &=& 0 \qquad \text{aux coins} \quad (x = \pm 1, y = \pm 1). \end{array}\right. \tag{6}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est nommé valeur propre de l'opérateur biharmonique avec u le vecteur propre (mode propre) associé à la valeur propre λ. Nous notons que la principale différence avec la partie A réside dans le choix des conditions limites.

• Formuler le problème discret associé au problème aux valeurs propres (5, 6) grâce à la discrétisation de type différences finies d'ordre deux vue en section 1.2. Un traitement des conditions limites similaire à celui proposé en section 1.2 sera également adopté. Le problème aux valeurs propres sera noté par la suite :

$$B_h u_h = \lambda u_h, \quad u_h \in \Omega_h,$$

où u_h dénote le mode propre discret (associé à la valeur propre λ) *défini à l'intérieur du domaine.* Nous notons que la matrice B_h est creuse et que cette caractéristique est à exploiter dans le choix de l'algorithme lors de la recherche des valeurs propres et vecteurs propres.

2 Partie numérique

Les expérimentations numériques seront réalisées sous Matlab. L'implantation de la discrétisation de l'opérateur biharmonique et des différentes méthodes de résolution est notamment à votre charge.

Est fourni un programme Matlab "Laplace.m" qui construit l'opposé de l'opérateur Laplacien ($-\Delta_h$) en utilisant un formalisme similaire à celui de l'opérateur biharmonique (définition de l'opérateur sur les points intérieurs (I), sur les points de frontière (F) et sur les points fictifs (G) situés en dehors du domaine discret Ω_h). Ce programme sera à adapter pour construire aisément l'opérateur biharmonique à utiliser dans les parties A et B.

2.1 Expérimentations numériques relatives à la partie A

• Construction du système linéaire $A_h u_h = b_h$ vu en section 1.2 et validation de l'implantation. La validation pourra être réalisée en choisissant une solution continue vérifiant les conditions limites et en déduisant le second membre $f(x, y)$ correspondant.

• Construction du système linéaire couplé vu en section 1.3 et validation de la phase de résolution. La validation de cette formulation peut être réalisée par comparaison avec la première approche précédemment développée.

• *Bonus* : Analyse du conditionnement des matrices obtenues pour ces deux approches.

2.2 Expérimentations numériques relatives à la partie B

• Construction du problème au valeur propre $B_h u_h = \lambda u_h$ avec $u_h \in \Omega_h$.

• Recherche des valeurs propres du système par un algorithme approprié (seule une partie du spectre est demandée).

• Donner dans un tableau récapitulatif les dix valeurs propres les plus faibles en module en fonction de N le nombre de points utilisé sur une ligne horizontale (comprenant les points frontières et fantômes) ($N = 50, 100, 150$).

• Tracé des valeurs propres dans le plan complexe pour les dix valeurs propres les plus faibles en module pour plusieurs valeurs de N. Que remarquez-vous ? Comment pouvez-vous l'expliquer ?

3 Rédaction du compte rendu

Il vous est notamment demandé de :
- rédiger un compte-rendu détaillant les réponses aux questions (précédées d'un • dans le texte).
- proposer une analyse des résultats de vos expérimentations numériques,
- rendre une archive rassemblant l'ensemble de vos fichiers Matlab. Ces fichiers correspondent aux développements demandés ainsi qu'un fichier README pour spécifier comment utiliser ces programmes.

Date limite : 25/04/2014. L'archive est à envoyer à l'adresse vasseur@cerfacs.fr. Le compte-rendu peut être soit manuscrit (à rendre au sécrétariat de département auprès de Madame De Guibert), soit électronique (à envoyer à l'adresse vasseur@cerfacs.fr). Le travail en binôme pour ce projet est autorisé.