TP: Problème de transfert d'orbite 2D

Gergaud Joseph & Épenoy Richard

1 Présentation du problème

Le système considéré est un satellite de masse fixé m libéré par une fusée dans le plan de l'équateur ; l'orbite initiale du satellite est une ellipse de forte excentricité 1. L'objectif de ce travail est de réaliser le transfert en temps minimal de cette orbite elliptique à une orbite circulaire géostationnaire.

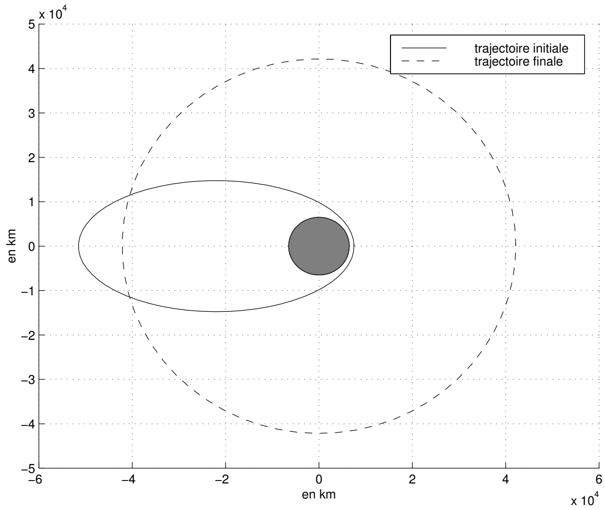

FIGURE 1 – Transfert orbital 2D

2 modélisation du problème

Le système est soumis à la force d'attraction terrestre $\overrightarrow{F_{gr}}$, toutes les autres forces de perturbation sont négligées et le contrôle du satellite se fait à l'aide d'un moteur ionique situé à l'arrière générant une accélération $\overrightarrow{u}$. On suppose la masse m du satellite constante.
Les calculs sont effectués dans le repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où la terre est représentée par le point O et le satellite par le point M. L'équation vérifiée par le système est obtenue par le principe fondamental de la dynamique. Le

critére à minimiser est le temps final t_f, on suppose que l'instant initial est $t_0 = 0$ et que la poussée générée par le moteur est bornée. Le problème de contrôle optimal obtenu est le suivant :

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } t_f \\ \ddot{\overrightarrow{r}} = \dfrac{\overrightarrow{F_{gr}}}{m} + \overrightarrow{u} \\ \psi_0(t_0) = 0 \ \text{ avec } \psi_0(t_0) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}(t_0) - \overrightarrow{r}_0 \\ \dot{\overrightarrow{r}}(t_0) - \dot{\overrightarrow{r}}_0 \end{pmatrix} \\ \psi_1(t_f) = 0 \quad avec\ \psi_1(t_f) = \begin{pmatrix} ||\overrightarrow{r}(t_f)|| - r_f \\ ||\dot{\overrightarrow{r}}(t_f)|| - \sqrt{\dfrac{\mu}{r_f}} \\ (\overrightarrow{r}(t_f)|\dot{\overrightarrow{r}}(t_f)) = 0 \end{pmatrix} \\ ||u(t)|| \leq \gamma_{max} \end{array} \right.$$

Notations

$\overrightarrow{\gamma} = \dfrac{\overrightarrow{F_{gr}}}{m} = -\mu \dfrac{\overrightarrow{r}}{\vert\vert\overrightarrow{r}\vert\vert^3}$	accélération gravitationnelle due à la terre
μ	constante gravitationnelle
$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$	vecteur terre satellite
$\overrightarrow{r_0}$	vecteur terre satellite à l'instant initial
r_f	norme vecteur terre satellite à l'instant final
$\dot{\overrightarrow{r}}$	vecteur vitesse
$\ddot{\overrightarrow{r}}$	vecteur accélération

3 Le problème à résoudre

En posant $\overrightarrow{r} = (x_1, x_2)$ et $\dot{\overrightarrow{r}} = (x_3, x_4)$, et en prenant t_f comme variable d'état, la résolution du problème précédent se ramène à celle de :

$$
(P) \left\{
\begin{array}{ll}
\text{Min } t_f(1) & \\
\dot{x_1}(s) = t_f(s)x_3(s) & s \in [0,1] \\
\dot{x_2}(s) = t_f(s)x_4(s) & s \in [0,1] \\
\dot{x_3}(s) = t_f(s)(-\dfrac{\mu.x_1(s)}{||r(s)||^3} + u_1(s)) & s \in [0,1] \\
\dot{x_4}(s) = t_f(s)(-\dfrac{\mu.x_2(s)}{||r(s)||^3} + u_2(s)) & s \in [0,1] \\
\dot{t_f}(s) = 0 & s \in [0,1] \\
x_1(0) = x_1^0 & \\
x_2(0) = x_2^0 & \\
x_3(0) = x_3^0 & \\
x_4(0) = x_4^0 & \\
x_1^2(1) + x_2^2(1) - r_f^2 = 0 & \\
x_3(1) = -\sqrt{\dfrac{\mu}{r_f^3}}x_2(1) & \\
x_4(1) = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_f^3}}x_1(1) & \\
||u(s)|| \leq \gamma_{max} & s \in [0,1] \\
\quad \text{avec } r(s) = \sqrt{x_1^2(s) + x_2^2(s)} \qquad u(s) = (u_1(s), u_2(s)) &
\end{array}
\right.
$$

Unités et valeurs des constantes constantes

Les unités choisies sont le kilomètre pour les distances et l'heure pour les temps.

$\mu = 5.165862091200000.10^{12}\ km^3.h^{-2}$
$r_f = 42165\ km$
$\gamma_{max} = 388.8\ km/h^2 (= \frac{F_{max}}{m} = \frac{60.3600^2}{2000.10^3})$ correspond à une accélération de 60N et à une masse de 2000 kg

4 Travail demandé

1. Récupérer le fichier `/home/gergaud/Public/orbite0f.m`.
2. Transformer le problème de contrôle optimal (P) en un problème aux deux bouts en utilisant le principe du maximum de Pontriaguine.

3. Écrire la fonction de tir associée au problème aux deux bouts.

4. Résoudre le problème aux deux bouts obtenu pour le point de départ suivant :
$x_1^0 = -44000\ km$ $\qquad x_2^0 = 0\ km$
$x_3^0 = 0\ km/h$ $\qquad x_4^0 = -10279\ km/h$
avec :
$z0 = (-10^{-3} \ \ -4.10^{-4} \ \ -10^{-3} \ \ -10^{-4} \ \ 4)$

5. On donne pour vérifier les calculs :

$$\varphi(t_0, y^0) = 10^4 \begin{pmatrix} 0 \\ -4.11160000000000 \\ 1.22207506216856 \\ 0.01547481838215 \\ 0. \\ 0.00000004851486 \\ -0.00000000242574 \\ 0.00000040000000 \\ 0.00000016000000 \\ -0.00010525436400 \end{pmatrix}$$

et

$$S(z^0) = 10^7 \begin{pmatrix} 8.40206662644620 \\ -0.00006829195552 \\ 0.00001424221628 \\ -0.00000090286772 \\ -0.00000020526338 \end{pmatrix}$$