TP :Tir simple et dérivée

GERGAUD Joseph

1 Introduction

On considère le problème simple de contrôle optimal suivant :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon)\left\{\begin{array}{l} Min\int_0^2(|u(t)|-\varepsilon(\ln|u(t)|+\ln(1-|u(t)|)))dt \\ \dot{x}(t)=-x(t)+u(t) \\ |u(t)|<1 \\ x(0)=x^0=0 \\ x(2)=x^f=0.5 \end{array}\right.$$

On prendra dans la suite $\varepsilon = 0.01$.

1. Écrire le problème aux deux bouts associé au problème $(P)_\varepsilon$. La minimisation de l'Hamiltonien donne ici
$$u_\varepsilon(p)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{-2\varepsilon\text{sign}(p)}{\rho(p)+2\varepsilon+\sqrt{\rho^2(p)+4\varepsilon^2}} & \text{si} \quad p\neq 0, \\ \frac{\pm 2\varepsilon}{1+2\varepsilon+\sqrt{1+4\varepsilon^2}} & \text{si} \quad p=0, \end{array}\right.$$
où $\rho(p)=1-|p|$. On donne aussi pour $p\neq 0$
$$u'_\varepsilon(p)=\frac{-2\varepsilon\left(1+\frac{\rho(p)}{\sqrt{\rho^2(p)+4\varepsilon^2}}\right)}{(\rho(p)+2\varepsilon+\sqrt{\rho^2(p)+4\varepsilon^2})^2}.$$
2. Visualiser la fonction de tir $S_\varepsilon(z)$ pour $z\in[-2,2]$.
3. On prend comme point de départ $z_0=-0.38$.
   (a) Résoudre l'équation $S_\varepsilon(z)=0$. On utilisera le vecteur d'options `OPTIONS=optimset('Display','iter')` dans `fsolve` pour afficher les résultats intermédiaires lors de la résolution de $S_\varepsilon(z)=0$ (cf. `help fsolve` et `help optimset`).
   (b) On prend maintenant comme erreur local d'intégration les valeurs `Reltol=Abstol=1.e-10` (cf. `help ode45` et `help odeset`) ; résoudre $S_\varepsilon(z)=0$.

Nous allons maintenant voir que le problème vient ici du calcul de la dérivée de la fonction de tir.

2 Calcul de la dérivée

2.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires

On s'intéresse ici au problème de Cauchy suivant

$$(IVP)\left\{\begin{array}{l}\dot{y}(t)=\varphi(t,y(t))\\ y(0)=z\end{array}\right. .$$

Théorème 2.1. *Soit φ une application continue de Ω ouvert de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ et localement Lipschitzienne par rapport à y, alors pour tout $(0,z)$ dans Ω, il existe une solution unique $y(.,z)$ du problème de Cauchy (IVP) définie sur un intervalle $]\omega_-(z),\omega_+(z)[$*

Démonstration
cf. cours d'edo de deuxième année [**?**, **?**]. □

On note

$$\Omega(t_f)=\{z\in\mathbf{R}^n|(0,z)\in\Omega \ \text{ et } \ y(t_f,z) \ \text{ existe}\},$$

que l'on supposera non vide.

Théorème 2.2. *Soit φ une application continue de Ω ouvert de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ qui admet une dérivée partielle par rapport à y continue $(\partial\varphi/\partial y:\Omega\to\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n))$. Alors $\Omega(t_f)$ est un ouvert et l'application*

$$\begin{array}{rcl}y(t_f,.):\Omega(t_f) & \longrightarrow & \mathbf{R}^n\\ z & \longmapsto & y(t_f,z)\end{array}$$

est dérivable et sa dérivée est la solution du sytème de Cauchy linéaire appelé équations variationnelles suivant :

$$(EQ)\left\{\begin{array}{l}\dot{Y}(t)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}(t,y(t))Y(t)\\ Y(0)=I\end{array}\right.$$

Démonstration
Formellement on a

$$y(t_f,z)=z+\int_0^{t_f}\varphi(t,y(t,z))dt$$

Donc, si $y(t_f;.)$ est dérivable on a

$$\frac{\partial y}{\partial z}(t_f,z)=I+\int_0^{t_f}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(t,y(t,z))\frac{\partial y}{\partial z}(t_f,z)dt.$$

Ce qui signifie bien que cette dérivée est solution du problème de Cauchy (EQ). Il reste à démontrer que la dérivée existe. Pour cela voir [**?**]

□

2.2 Approximation numérique de la dérivée

2.2.1 Différences finies externes

$$\frac{\partial y}{\partial z_j}(t_f; z) \approx \frac{1}{\delta}(y(t_f; z + \delta e_j) - y(t_f; z)),$$

où $e_1, \dots, e_n$) désigne la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

2.3 Équation variationnelle

$\frac{\partial y}{\partial z_j}(t_f; z)$ est la solution $Y_j(t_f)$ du système de Cauchy

$$(EQ)_j \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = \varphi(t, y(t)) \\ \dot{Y}_j(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y(t))Y_j(t) \\ y(0) = z \\ Y_j(0) = e_j \end{array} \right.$$

2.4 Travail demandé

On prend toujours $\varepsilon = 0.01$, et les paramètres par défaut pour l'intégration numérique. Attention, ici on a $y_0 = {}^t(x_0, z)$.

1. Visualiser la dérivée de la fonction de tir calculée par :
   (a) différences finies externes avec $\delta = 10^{-4}$;
   (b) différences finies externes avec $\delta = 10^{-2}$;
   (c) les équations variationnelles.
2. Toujours pour $z_0 = -0.38$ et en utilisant le vecteur d'options de `fsolve, OPTIONS=optimset('Display','iter','Jacobian','on')`, résoudre l'équation $S_\varepsilon(z) = 0$ en calculant la dérivée par
   (a) différences finies externes avec $\delta = 10^{-2}$;
   (b) les équations variationnelles.