TP1: Résolution des problèmes de contrôle optimal Méthode de tir simple

GERGAUD Joseph

1 Introduction

Nous allons dans ce TP voir une méthode de résolution numérique d'un problème simple de contrôle optimal utilisant la condition nécessaire de solution, c'est-à-dire le principe du maximum de Pontriaguine.

Considérons le problème simple de contrôle optimal suivant :

$$(\mathcal{P}_0)\left\{\begin{array}{l} Min \int_0^2 u^2(t)dt \\ \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ |u(t)| \leq 1 \\ x(0) = x^0 = 0; \\ x(2) = x^f = 0.5; \end{array}\right.$$

2 Problème aux deux bouts

La condition nécessaire de solution (principe du maximum de Pontriaguine) nous conduit à un système différentiel à deux équations et à une condition initiale et une condition terminale ; en d'autre terme à un problème aux deux bouts (Two Points Boundary Value Problem)

$$(TPBVP_0)\left\{\begin{array}{l} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ \dot{p}(t) = p(t) \\ u(t) = h(p(t)) \\ x(0) = x^0 = 0; \\ x(2) = x^f = 0.5; \end{array}\right.$$

où $u(t) = h(p(t))$ est donné par la minimisation de l'Hamiltonien :

$$\left\{\begin{array}{l} Min \quad H(t, x(t), w, p(t)) = w^2 + (-x(t) + w)p(t) \\ \mid w \mid \leq 1 \end{array}\right.$$

Nous obtenons immédiatement ici
- $u(t) = -\dfrac{p(t)}{2}$ si $\mid p(t) \mid \leq 2$
- $u(t) = -sign(p(t))$ sinon

3 Méthode de tir

Posons $y(t) = (x(t), p(t))$. Résoudre le problème $(TPBVP_0)$ est alors équivalent à rechercher un zéro de l'équation $S_0(z) = 0$ où la fonction S_0, qui sera appelée la fonction de tir associée à notre problème est définie par

$$\begin{array}{rcl} S_0 : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ z & \longmapsto & S_0(z) = y_1(2, 0, z) - 0.5 \end{array}$$

avec $y(., 0, z)$ est la solution du système à valeur initial (Initial Value Problem) suivant (cf. la figure 1).

$$(IVP_0) \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1(t) = -y_1(t) + u(t) \\ \dot{y}_2(t) = y_2(t) \\ u(t) = h(y_2(t)) \\ y_1(0) = 0; \\ y_2(0) = z. \end{array} \right.$$

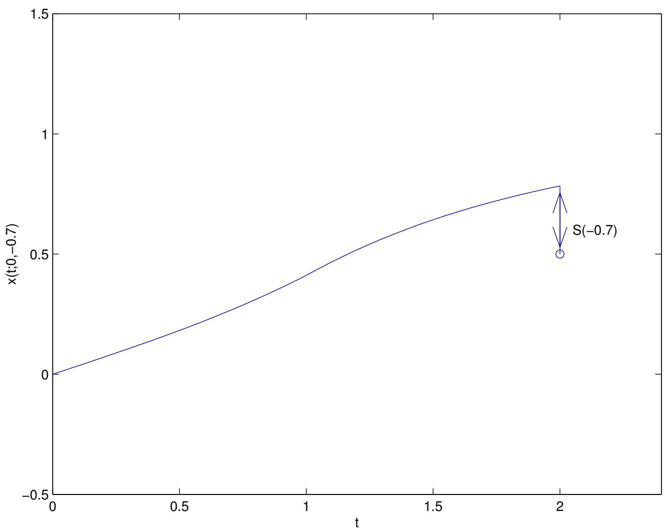

FIGURE 1 – *Valeur de la fonction de tir pour $z = -0.7$.*

L'algorithme de résolution numérique de ce problème sera alors complètement défini si on se donne :

1. l'algorithme de résolution de $S_0(z) = 0$;
2. l'algorithme d'intégration d'un système différentiel à valeur initial pour calculer la fonction de tir S_0.

4 Cas général

4.1 Problème $\mathcal{P}$

Considérons le problème de contrôle optimal à instants fixés suivant :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} Min \quad g(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t))dt \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ u(t) \in U \subset \mathbf{R}^m \\ h_0(x(t_0)) = 0 \in \mathbf{R}^{n_0} \\ h_f(x(t_f)) = 0 \in \mathbf{R}^{n_1} \end{array} \right.$$

4.2 Problème aux deux bouts

La condition nécessaire de solution (principe du maximum de Pontriaguine) nous conduit à un système différentiel à $2n$ équations avec n_0+n_1 paramètres (μ_0 et μ_1) et à $2n + n_0 + n_1$ conditions initiales et terminales :

$$(Q) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ \dot{p}(t) = -{}^t f_x(t, x(t), u(t))p(t) - l_x(t, x(t), u(t)) \\ u(t) = h(p(t)) \\ h_0(x(t_0)) = 0 \\ h_1(x(t_f)) = 0 \\ p(t_0) = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x_0}(x(t_0), x(t_f), \mu_0, \mu_1)) \\ p(t_f) = \dfrac{\partial \phi}{\partial x_f}(x(t_0), x(t_f), \mu_0, \mu_1)) \end{array} \right.$$

où $u(t) = h(p(t))$ est donné par la minimisation de l'Hamiltonien :

En posant $y(t)$ le couple état, état adjoint ($y(t) = (x(t), p(t))$) et en éliminant les paramètres μ_0 et μ_1, nous sommes conduits à un problème aux deux bouts (Two Points Boundary Value Problem)

$$(TPBVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = \varphi(t, y(t)) \\ b_0(y(t_0)) = 0 \\ b_f(y(t_f)) = 0 \end{array} \right.$$

Nous allons maintenant définir la méthode de tir pour résoudre ce problème aux deux bouts.

4.3 Méthode de tir

Posons $y(., y_0)$ la solution du système à valeur initial (Initial Value Problem) suivant.

$$(IVP) \begin{cases} \dot{y}(t) = \varphi(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0; \end{cases}$$

Trouver une solution au problème $(TPBVP)$ est alors équivalent à trouver un zéro de l'équation $S(y_0) = 0$ où S appelée fonction de tir est définie par :

$$\begin{array}{rcl} S_0 : \mathbf{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{2n} \\ y_0 & \longmapsto & S(y_0) = \begin{pmatrix} b_0(y_0) \\ b_f(y(t_f, y_0)) \end{pmatrix}. \end{array}$$

L'algorithme de résolution numérique de ce problème sera alors complètement défini si on se donne :

1. l'algorithme de résolution de $S(z) = 0$;
2. l'algorithme d'intégration d'un système différentiel à valeur initial pour calculer la fonction de tir S.

5 Travail demandé

En utilisant MATLAB

1. (a) Visualiser $y(.; 0, z)$ pour $z = 0$ et -0.7.
   (b) Quelle est la valeur de $S(0)$?
   (c) Vérifier que $S(-0.7) = 0.2833$. On utilisera le programme Ode45 de MATLAB pour intégrer un système différentiel.
2. Visualizer la fonction de tir S_0 pour $z \in [-3; 3]$ (*cf.*la figure 2).
3. Résoudre l'équation $S_0(z) = 0$. On utilisera le programme `fsolve` de MATLAB pour résoudre une équation et on prendra comme point de départ $z^0 = -0.5$ (la solution est $z^* = -0.2759$) et $\mathrm{z}^0 = 2$.

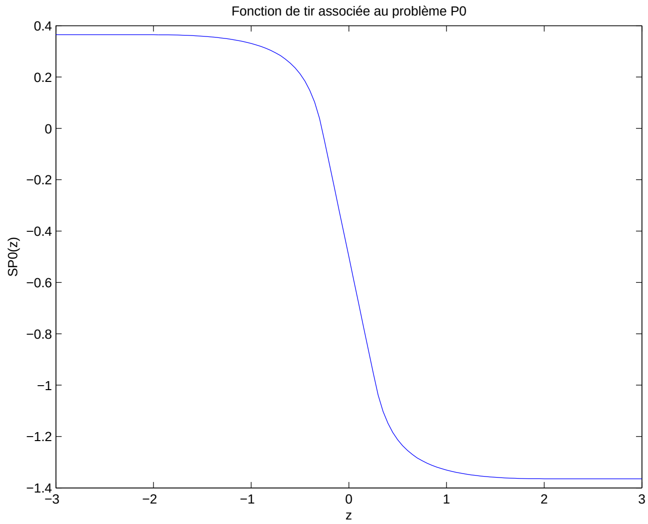

Figure 2 – *Fonction de tir $S(z)$.*

4. Résoudre le problème suivant :

$$(P_1)\begin{cases} Min \int_0^2 u^2(t)dt \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x_2}(t) = u(t) \\ |u(t)| \leq 1 \\ x_1(0) = 0; x_2(0) = 0 \\ x_1(2) = 0.5; x_2(2) = 0. \end{cases}$$

La solution est $z^* = \begin{pmatrix} -3/2 & -3/2 \end{pmatrix}$ et les états, états adjoints et contrôle sont donnés ‡ la figure 3.

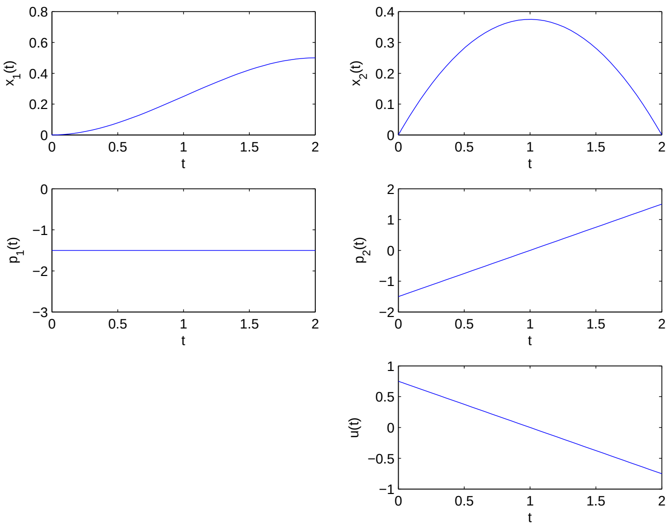

FIGURE 3 – *Solution du problème* (P_1).