Algèbre Linéaire Creuse : méthodes de Krylov préconditionnées

Dans tous les exercices, on s'intéressera au coût mémoire et au temps de calcul associé aux choix algorithmiques retenus pour la résolution d'un système linéaire

$$Ax^* = b.$$

1 Préambule

Pour la résolution de systèmes linéaires creux de très grande taille, les méthodes itératives constituent une alternative aux méthodes directes (factorisation) dans le cas où la taille des facteurs devient trop importante (au regard de la mémoire disponible sur l'ordinateur cible), ou lorsque les temps de factorisation deviennent trop élevés ou encore lorsque la contrainte de précision numérique peut être relâchée (schéma non-linéaire, imprécision sur les données).

Dans ce contexte, les méthodes de Krylov constituent une alternative souvent retenue dans les grands codes de simulation. Ces méthodes (Gradient Conjugué dans le cas symétrique défini positif, GMRES non-symétrique général, ...) convergent d'autant plus vite que la matrice du système à résoudre est ≪proche≫ de la matrice identité.

Ceci est illustré en particulier par la borne suivante qui peut être établie pour la vitesse de convergence du gradient conjugué (voir cours) :

$$\|x_k - x^*\|_A \leq 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{\kappa(A)} - 1}{\sqrt{\kappa(A)} + 1} \right)^k \|x_0 - x^*\|_A.$$

où $\kappa(A) = \dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ et $\|x\|_A^2 = x^T Ax$.

Afin de satisfaire à cette contrainte, des techniques de préconditionnement sont utilisées. Celles-ci consistent à résoudre un système linéaire équivalent :

$$MAx = Mb$$

où la matrice M est appelée préconditionneur. Les idées qui gouvernent sa construction sont :

1. M doit être facile à construire,
2. M doit être facile à appliquer,
3. M doit être peu coûteuse en mémoire,
4. M doit être la meilleure approximation possible de A^{-1}.

Parmi les préconditionneurs algébriques classiques, on compte les factorisations incomplètes de type Cholesky (`cholinc`) et LU (`luinc`).

2 Résolution d'un système linéaire associé à une matrice issue de la discrétisation d'une EDP

On cherche à résoudre le système linéaire : $Ax = b$ où A est la matrice issue de la discrétisation par éléments finis d'une EDP de type elliptique.

1. En utilisant la méthode du gradient conjugué (`pcg`), étudier :
   (a) La vitesse de convergence, la taille du système linéaire lorsque le maillage est raffiné. On tracera en particulier, l'historique de convergence de la quantité
   $$\frac{\|r_k\|}{\|b\|}$$
   où r_k est le résidu associé à l'itéré de la k^{ieme} itération,
   (b) Même question lorsque l'on utilise un préconditionneur diagonal,
   (c) Même question lorsque l'on utilise $IC('0')$ comme préconditionneur (factorisation incomplète de Cholesky sans remplissage). Afficher la structure de A et celle du facteur de Cholesky,
   (d) Mêmes questions en utilisant une factorisation incomplète avec ≪threshold≫ (threshold = $1.e^{-3}$, $5e^{-4}$ et $1e^{-4}$ par exemple).
2. Même question si on utilise la méthode de GMRES (`gmres`) et un préconditionnement de type ILU (Incomplete LU).

3 Fournitures

1. les fichiers `tubeG.m, tubeB.m, tubeF.m` et `heter.m` de définition de l'EDP. On pourra essayer d'identifier quelle est la nature de l'EDP résolue.
2. le fichier `tp.m` canevas à compléter.