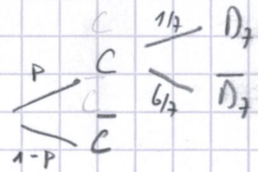
EX1 (a) VRAI (b) FAUX : il se peut que $A \cup B \notin \mathcal{T}$ (c) FAUX : si $A = B$ et $\mathbb{P}(A) = 1/2$ alors $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$ mais $A \neq B^c$ (d) FAUX : A et B indépendants $\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$. Ainsi $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$. Mais rien ne dit que $\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) = 0$. NB. Deux événements A et B sont incompatibles si $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$; ils sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$. Deux événements disjoints sont incompatibles. La réciproque n'est pas vraie : il se peut que deux événements soient incompatibles sans être disjoints. (e) VRAI. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. Si $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ alors $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ et A et B sont incompatibles. (f) VRAI (g) FAUX : on lance une pièce deux fois de suite. A_1 = pile au premier lancer, A_2 = face au second lancer, A_3 = la même chose aux deux lancers.
$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 1/4 = \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_2)$; $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = 1/4 = \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_3)$
$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = 1/4 = \mathbb{P}(A_2).\mathbb{P}(A_3)$. Donc A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants. Mais $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_2).\mathbb{P}(A_3) = 1/8$. Donc A_1, A_2, A_3 ne sont pas mutuellement indépendants

EX2 1) $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|L_a)\,\mathbb{P}(L_a) + \mathbb{P}(D|M_a)\,\mathbb{P}(M_a) + \mathbb{P}(D|M_e).\mathbb{P}(M_e) + \mathbb{P}(D|J_e).\mathbb{P}(J_e) + \mathbb{P}(D|V_e).\mathbb{P}(V_e) = 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}18$.

2) $\mathbb{P}(J_e|D) = \mathbb{P}(D|J_e).\mathbb{P}(J_e)/\mathbb{P}(D) = 0{,}2 \times 0{,}2/0{,}18 = 0{,}22$

EX3 On veut que la richesse soit équitablement répartie entre les hommes et les femmes, autrement dit, que la proportion de riches soit la même parmi les hommes et les femmes :
$\mathbb{P}(R|H) = \mathbb{P}(R|F)$; $\mathbb{P}(R \cap H)/\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(R \cap F)/\mathbb{P}(F)$;
$\mathbb{P}(H|R).\mathbb{P}(R)/\mathbb{P}(H) = [\mathbb{P}(R) - \mathbb{P}(H \cap R)]/[1 - \mathbb{P}(H)]$;
$\mathbb{P}(H|R).\mathbb{P}(R)/\mathbb{P}(H) = [\mathbb{P}(R) - \mathbb{P}(H|R).\mathbb{P}(R)]/[1 - \mathbb{P}(H)]$;
$0{,}6.q/p = [q - 0{,}6q]/[1-p]$; $0{,}6q(1-p) = 0{,}4q.p$; $p = 0{,}6$.
Ainsi pour que la richesse soit équitablement répartie entre les hommes et les femmes, la population doit comporter 60 % d'hommes.

EX4 Le document peut être en dehors du classeur $(\bar{C})$, dans le classeur et en dehors du dossier 7 $(C \cap \bar{D}_7)$ ou dans le classeur et dans le dossier 7 $(C \cap D_7)$.



on cherche $\mathbb{P}(C\cap D_7 \mid (C\cap D_7)\cup \bar{C}) = \mathbb{P}(C\cap D_7) / \mathbb{P}((C\cap D_7)\cup \bar{C})$

$= (p/7) / [p/7 + 1-p] = p/(7-6p)$.

Ex 5 X = nbre d'essais pour trouver la bonne clef.

(i). S'il ne se rappelle plus les clefs déjà testées, Arth peut tester une clef qui vient d'être testée. A chaque essai, il teste la bonne clef avec probabilité $1/n$ ou une autre clef avec probabilité $(n-1)/n$.

Pour $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$: $\mathbb{P}(X=k) = [(n-1)/n]^{k-1} \times (1/n)$

(ii). Arth écarte à chaque essai la clef qui vient d'être testée, mais une clef testée peut être à nouveau testée après l'essai suivant. $\mathbb{P}(X=k) = \frac{n-1}{n} \times \underbrace{\frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-2}{n-1}}_{k-2 \text{ fois}} \times \frac{1}{n-1}$ si $k\geq 2$.

et $\mathbb{P}(X=1) = 1/n$

(iii) Une clef testée est mise de côté et ne peut pas être testée à nouveau. $\mathbb{P}(X=k) = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1} = 1/n$.

Ex 6 1i] $\bigcap_{k=5}^{\infty} A_k$: Pile tombe systématiquement à partir du lancer 5.

1ii] $\left(\bigcap_{k=1}^{4} A_k^c\right) \cap \left(\bigcap_{k=5}^{\infty} A_k\right)$: on obtient Face aux quatre premiers lancers puis, systématiquement Pile.

1iii] $\bigcup_{k=5}^{\infty} A_k$: on obtient Pile au moins une fois à partir du lancer 5.

2i] $\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ 2ii] $\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$ 2iii] $\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{+\infty} A_n$

Ex 7 1] Rappel. Les lois de De Morgan affirment que pour deux ensembles A_1 et A_2 : $(A_1\cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c$ et $(A_1\cup A_2)^c = A_1^c\cap A_2^c$. Ces deux lois se généralisent à une intersection dénombrable et à une réunion dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles, alors : $\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^c$ et $\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^c$.

Dans Ex 7, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements d'une tribu $\mathcal{T}$.

- $A = \bigcap_{n=0}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$ où $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $B_n\in\mathcal{T}$ donc $B_n^c\in\mathcal{T}$ et $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n^c \in\mathcal{T}$. Or d'après le rappel $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n^c = \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right)^c$. Donc $\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right)^c\in\mathcal{T}$ et $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \in\mathcal{T}$.

- $B = \bigcup_{n=0}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ où $B_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $B_n = \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c\right)^c$. Or, $\forall k\geq n$ $A_k^c\in\mathcal{T}$ donc $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c \in\mathcal{T}$ et $B_n\in\mathcal{T}$. Ainsi $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\in\mathcal{T}$.

- $C = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_n\cap A_{n+1})\right)^c$. Or $\forall n\in\mathbb{N}$: $A_n\cap A_{n+1}\in\mathcal{T}$. Donc $\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\cap A_{n+1}\right)\in\mathcal{T}$ et $\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\cap A_{n+1}\right)^c\in\mathcal{T}$.

2] La suite $\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît pour l'inclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right)\subset\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$. Donc (limite monotone) :

$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$. Or $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)\leq\sum_{k=n}^{\infty}\mathbb{P}(A_k)$ et $\sum_{k=n}^{\infty}\mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=n}^{\infty}(1/2)^k = (1/2)^n/(1-1/2) = 1/2^{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\mathbb{P}(A)=0$.

EX 8 1) $A = \bigcap_{k=2}^{+\infty} A_k$.

2a) $P(A_n) = (1/2)(2/3)(3/4) \times \ldots \times (n-1)/n = 1/n$.

2b) La suite d'événements $(A_k)_{k\geq 2}$ est décroissante pour l'inclusion : $\forall k \geq 2 : A_{k+1} \subset A_k$. Donc (limite monotone) : $P(A) = \lim_{k\to+\infty} P(A_k) = 0$.

3a) $P(A_n) = \frac{4-1}{4} \times \frac{9-1}{9} \times \frac{16-1}{16} \times \ldots \times \frac{n^2-1}{n^2} = \prod_{k=2}^{n} (k^2-1)/k^2 \overset{(*)}{=} (n+1)/(2n)$

Justification de (*) : • Au rang $n=2$: $\prod_{k=2}^{2} (k^2-1)/k^2 = 3/4 = (2+1)/(2\times 2)$.

. Supposons $\prod_{k=2}^{n} (k^2-1)/k = (n+1)/(2n)$ pour un certain $n \geq 2$. Alors

$\prod_{k=2}^{n+1} (k^2-1)/k = \left[\prod_{k=2}^{n} (k^2-1)/k\right] \times ((n+1)^2-1)/(n+1) = \frac{n+1}{2n} \times \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

3b) $P(A) = \lim_{k\to+\infty} P(A_k) = \lim_{k\to+\infty} (k+1)/2k = 1/2$.

EX 9. $Y_n = 1$ si le signal n'est pas altéré par le composant n.

$Y_n = 0$ si le signal est altéré par le composant n.

$X_n = 1$ si le signal n'est pas altéré entre les composants 1 à n

$X_n = 0$ si le signal est altéré entre l'entrée en 1 et la sortie de n.

1) $p_{n+1} = P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1, Y_{n+1} = 1) + P(X_n = 0, Y_{n+1} = 0)$

$\overset{ind.}{=} P(X_n = 1).P(Y_{n+1} = 1) + P(X_n = 0).P(Y_{n+1} = 0)$

$= p_n(1-p) + (1-p_n).p = (1-2p).p_n + p$

2) La suite (p_n) est arithmético géométrique. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$p_n = 1/2 + (1-2p)^n.(p_0 - 1/2)$.

3) $p \in]0;1[\Rightarrow 1-2p \in]-1;1[$ et $\lim_{n\to+\infty} (1-2p)^n = 0$

donc $\lim_{+\infty} p_n = 1/2$.

5/6

EX 10 1) Après $2n$ balles $(n \geq 1)$, nbre de points de Jules : j et nbre de points de Paul : p. Ainsi, $j + p = 2n$.

Supposons $p > j$. Alors $p = n+k$ avec $k \geq 1$ et $j = n-k$. La différence entre les points de Paul et de Jules est $p - j = 2k \geq 2$. Comme l'écart entre le nombre de points des deux joueurs est supérieur ou égal à 2, Paul devrait avoir gagné et la partie devrait être terminée. De même, si l'on suppose $j > p$, la partie devrait être terminée par victoire de Jules. Ainsi, par contraposition, puisque la partie n'est pas terminée : $j = p$.

2a) A_n : égalité après $2n$ balles $(n \in \mathbb{N})$; J_n : Jules gagne la balle n ; P_n : Paul gagne la balle n.

$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n, J_{2n+1}, P_{2n+2}) + P(A_n, P_{2n+1}, J_{2n+2})$

$\overset{ind}{=} P(A_n).P(J_{2n+1})P(P_{2n+2}) + P(A_n)P(P_{2n+1}).P(J_{2n+2})$

$= p_n \times (1/2) \times (1/2) + p_n \times (1/2) \times (1/2) = p_n/2$

2b) La suite (p_n) est géométrique de raison $1/2$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = (1/2)^n . p_0$.

3) Jules gagne la partie $= \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \cap J_{2k+1} \cap J_{2k+2})$

$P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \cap J_{2k+1} \cap J_{2k+2})\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k \cap J_{2k+1} \cap J_{2k+2})$

$= \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k).P(J_{2k+1}).P(J_{2k+2}) = \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k p_0 \times (1/2) \times (1/2)$

$= \frac{1}{4} p_0 \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k = \frac{1}{4} p_0 \times \frac{1}{1-1/2} = p_0/2 = 1/2$.