UPMC Paris Universitas

Paradigmes de Programmation Concurrente 51553

Cours 2 - Algèbre de processus

Carlos Agon - Romain Demangeon - Philippe Esling

22 septembre 2015

Calculus of Communicating Systems

Plan du cours

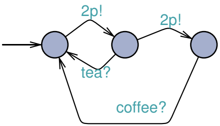
- Syntaxe et représentations graphiques
- Équivalence structurelle entre processus
- Sémantique opérationnelle entre processus
  - SOS (Structured Operational Semantic)
  - LTS (Labelled Transiction System)

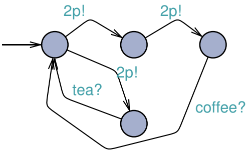
Calculus of Communicating Systems

Calculus of Communicating Systems - Robin Milner (1980)

Concepts

- Les composants d'un système sont des automates qui communiquent avec d'autres automates
- Utilisé pour la modélisation de systèmes interactifs.





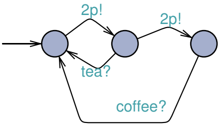
Le langage reconnu par ces automates est

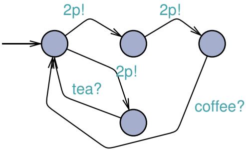
Calculus of Communicating Systems

Calculus of Communicating Systems - Robin Milner (1980)

Concepts

- Les composants d'un système sont des automates qui communiquent avec d'autres automates
- Utilisé pour la modélisation de systèmes interactifs.





Le langage reconnu par ces automates est (2p !.(tea ? + 2p.coffee ?))*
2p !.(tea ? + 2p !.coffee ?) $\neq$ 2p !.tea ? + 2p !.2p !.coffee ?

Processus séquentiels

Définition

$\mathcal{P}^{seq} ::= A\langle a_1, ..., a_n\rangle \mid \sum_{i\in I} \alpha_i.P_i$

$\alpha.P$ l'action α entraîne le processus P
Si $I = \emptyset$ alors $P = 0$
On assume que tout processus peut être défini par une équation :
$A(\vec{a}) =_{def} P_A$
avec P_A une addition et $\vec{a} = a_1, ..., a_n$ tous différents

Exemples

$A(a, b) =_{def} a.A\langle a, b\rangle + b.B\langle a, a\rangle$
$B(c, d) =_{def} c.d.0$ avec 0 la somme vide

Congruence structurelle

Si $\vec{b} = b_1, ..., b_n$ (pas forcement différents) alors A $\langle\vec{b}\rangle$ est équivalent à $\{\vec{b}/\vec{a}\}P_A$

Congruence structurelle

Définition

Soit P et $Q \in \mathcal{P}^{seq}$ $P \equiv Q$ si on peut transformer l'un dans l'autre en remplaçant les occurrences de $\mathrm{A}\langle\vec{b}\rangle$ par $\{\vec{b}/\vec{a}\}P_A$ (et vice-versa) pour un $A(\vec{a}) =_{def} P_A$

Exemple :

soit
$A(a,b) =_{def} a.A\langle a,b\rangle + b.B\langle a,a\rangle$
$B(c,d) =_{def} c.d.O$
alors
$B\langle a,a\rangle \equiv a.a.O$
$A\langle a,b\rangle \equiv a.(a.A\langle a,b\rangle + b.B\langle a,a\rangle) + b.a.a.O$

Systèmes de transition étiquettés
Labelled Transition Systems (LTS)

Actions

$\mathcal{N} = \{a,b,...\}$ et $\overline{\mathcal{N}} = \{\overline{a} | a \in \mathcal{N}\}$ avec $\mathcal{N} \cap \overline{\mathcal{N}} = \emptyset$
$\mathcal{L} = \mathcal{N} \cup \overline{\mathcal{N}} = Act$

Définition LTS

Labelled transition systems (LTS) sur $Act = (\mathcal{Q}, \mathcal{T})$ avec :

- $\mathcal{Q}$ un ensemble d'états
- $\mathcal{T}$ une relation ternaire $\mathcal{T} \subseteq (\mathcal{Q} \times Act \times \mathcal{Q})$

On note $q \xrightarrow{\alpha} q'$ si $(q, \alpha, q') \in \mathcal{T}$

LTS de processus séquentiels

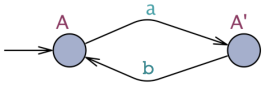
Définition

Labelled transition systems (LTS) sur *Act* avec :

- $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{seq}$
- Si $P \equiv \sum_{i \in I} \alpha_i.P_i$ alors $\forall j \in I, P \xrightarrow{\alpha_i} P_i$

Exemple

A $=_{def}$ a.A'   A' $=_{def}$ b. A

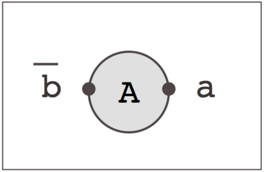


Processus concurrents

- Comment un ou plusieurs processus interagissent ?
- Distinction entre actions internes et externes

Flowgraphs

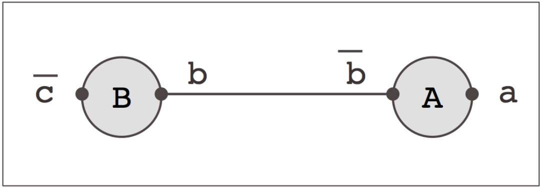
$$A =_{def} a.A' \qquad\qquad A' =_{def} \bar{b}.\ A$$



Interaction

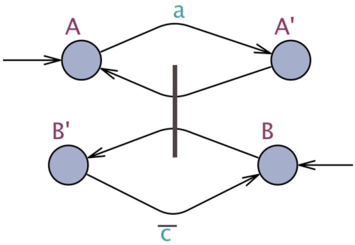
- Une paire complémentaire de ports $(a, \bar{a})$ est un moyen d'interaction entre deux processus

$$A =_{def} a.A' \qquad A' =_{def} \bar{b}.\ A$$
$$B =_{def} b.\ B' \qquad B' =_{def} \bar{c}.\ B$$



Actions internes

$$A =_{def} a.A' \qquad A' =_{def} \bar{b}.\ A$$
$$B =_{def} b.\ B' \qquad B' =_{def} \bar{c}.\ B$$

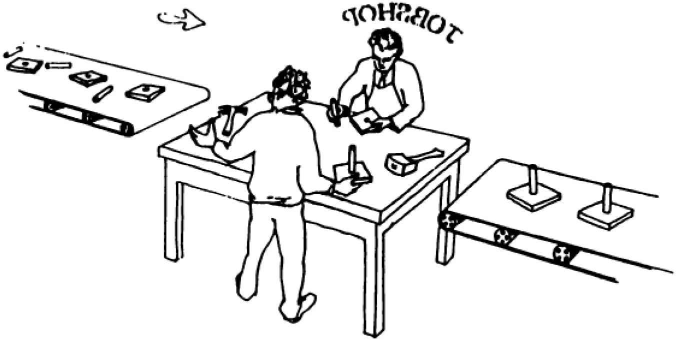


- l'action a se produit et induit les processus A' | B
- l'action partagée se produit et induit A | B'
- a et $\bar{c}$ dans n'importe quel ordre induisent A' | B

L'action partagée (interne, reaction) est notée τ et Act $=_{def} \mathcal{L} \cup \tau$

Exemple

The jobshop



Calculus of Communicating Systems (CCS)

Définition

$\mathcal{P} ::= A\langle a_1, ..., a_n\rangle \mid \sum_{i\in I} \alpha_i.P_i \mid \quad P_1|P_2 \quad \mid \textit{new } a \ P \mid 0$

Notation

On écrit $a.b$ à la place de $a.b.0$ et
$\nu a.P$ à la place de *new a P*

Réaction

Soit $P \equiv \bar{b}.A|b.B'$ alors $P \rightarrow A|B'$

Restriction

Si P $= (\nu a)a.b$ alors a est lié dans P.
$(\nu a)a.b \equiv (\nu a')a'.b$

Réactions alternatives

Attention : $\nu a P|Q \equiv (\nu a P)|Q$ et non $\nu a(P|Q)$

Réaction

Soit $P = \nu a((a.Q_1 + b.Q_2)|\overline{a}.0)|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2)$ alors

$P \rightarrow \nu a(Q_1|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2)$ et
$P \rightarrow \nu a(Q_2|\overline{a})|R_1$ mais
$P \nrightarrow \nu a(Q_1|\overline{a})|R_2$

Renommage

$P \equiv \nu a'((a'.Q_1' + b.Q_2')|\overline{a'}.0)|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2)$
comme Q_1 et Q_2 peuvent avoir des a alors on doit les remplacer par :
$Q_1' = \{a'/a\}Q_1$ et $Q_2' = \{a'/a\}Q_2$

CCS Syntaxe

Syntaxe

Soit $\mathcal{N}$ ={a,b,c..} on définit Act $= \{a, \overline{a}, b, \overline{b}, c...\} \cup \{\tau\}$
On définit l'ensemble de processus du CCS par :

- $D(\overrightarrow{x}) ::= P$
- $P ::= 0 \quad | \quad \alpha.P \quad | \quad D\langle\overrightarrow{v}\rangle \quad | \quad P + P \quad | \quad P|P \quad | \quad \nu aP$
- $\alpha ::= a|\overline{b}|\tau$

Quelques formules

- $a.b.A + B$
- $(\nu b)(a.0 + \overline{a}.0)$
- $(\nu\tau)A + B$

Noms libres

- FN $(0) = \emptyset$
- FN $(\alpha) = \emptyset$ si $\alpha = \tau$ ou a si $\alpha \in \{\overline{a}, a\}$
- FN $(\alpha.P) =$ FN $(\alpha) \cup$ FN (P)
- FN $(P|Q) =$ FN $(P) \cup$ FN (Q)
- FN $(P + Q) =$ FN $(P) \cup$ FN (Q)
- FN $(\nu aP) =$ FN $(P) \setminus \{a\}$
- FN $(P\{a/b\}) =$ FN$(P)\{a/b\}$
- FN $(D\langle v_1, ..., v_n \rangle) = \{v_1, ..., v_n\}$ sans répétitions

Substitution

Soient $a_1, ..., a_n, b_1, .., b_n$ des noms pas liés dans P,
$P\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\}$ dénote la substitution simultanée des b_i par des a_i dans P.

- $\tau\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\} = \tau$
- $b\{..., a/b, ...\} = \mathrm{a}$
- $c\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\} = \mathrm{c}$ si $c \notin \{b_1, .., b_n\}$
- $\alpha.P\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\} = \alpha\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\}.P\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\}$
- $(P + Q)\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\} = P\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\} + Q\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\}$
- $(P|Q)\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\} = P\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\}|Q\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\}$
- $(\nu c)P\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\} = (\nu c)P\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\}$ et $c \notin \{a_1, ..., a_n, b_1, .., b_n\}$
- $D\langle v_1, .., v_m\rangle\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\} = D\langle v_1\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\}, ..., v_m\{a_1/b_1, ..., a_n/b_n\}\rangle$

Congruence structurelle

Définition context

Un contexte de processus $\mathcal{C}$ est une expression avec un trou [ ].
$\mathcal{C} ::= [\,] \mid \alpha.\mathcal{C} + \mathcal{M} \mid$ new a$\mathcal{C} \mid \mathcal{C}|P \mid P|\mathcal{C}$
Les contextes élémentaires sont :
$\alpha.[\,] + \mathcal{M}$, new a [ ], [ ] | P et P | [ ]
$\mathcal{C}[Q]$ dénote le fait de remplir le contexte $\mathcal{C}$ avec le processus Q.

Définition Congruence de processus

Soit $\cong$ une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}$ alors $\cong$ est une congruence de processus si elle est preservée par tous les contextes élémentaires,
c-à-d si P $\cong$ Q alors :

$$\alpha.P + M \cong \alpha.Q + M$$

new a P $\cong$ new a Q

P | R $\cong$ Q | R

R | Q $\cong$ R | Q

$\cong$ est une congruence structurelle ssi $\forall \mathcal{C}\ P \cong Q \Rightarrow \mathcal{C}[P] \cong \mathcal{C}[Q]$

Congruence structurelle

Définition congruence structurelle

Un congruence structurelle ($\equiv$) est une congruence de processus sur $\mathcal{P}$ determinée par les équations suivantes :

1. α-conversion
2. Permutation de termes dans une somme
   $P + Q \equiv Q + P$; $P + 0 \equiv P$; $P + (Q + R) \equiv (P + Q) + R$
3. Permutation de termes dans un produit
   $P|Q \equiv Q|P$; $P|0 \equiv P$; $P|(Q|R) \equiv (P|Q)|R$
4. $(\nu a)\alpha.P \equiv \alpha.(\nu a)P$ si $\alpha \neq a$
5. $(\nu a)(\nu b)P \equiv (\nu b)(\nu a)P$
6. $\nu a(P|Q) \equiv P|\nu a Q$ si a $\notin$ FN(P)
7. $\nu a(P + Q) \equiv P + \nu a Q$ si a $\notin$ FN(P)
8. $\nu a 0 \equiv 0$
9. $A\langle\vec{b}\rangle \equiv \{\vec{b}/\vec{a}\}P_A$ si A$(\vec{a}) =_{def} P_A$

Règles de réaction

Règles de reaction

1. TAU : $\dfrac{}{\tau.P + M \to P}$

2. REACT : $\dfrac{}{(a.P + M)|(\overline{a}.Q + N) \to P|Q}$

3. PAR : $\dfrac{P \to P'}{P|Q \to P'|Q}$

4. RES : $\dfrac{P \to P'}{\nu aP \to \nu aP'}$

5. STRUCT : $\dfrac{P \to P'}{Q \to Q'}$ if $P \equiv Q$ et $P' \equiv Q'$

Déduction

Soit $P = \nu a((a.Q_1 + b.Q_2)|\overline{a})|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2)$
On veut prouver que à partir de P on peut déduire $\nu a Q_1|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2)$

Déduction

Soit $P = \nu a((a.Q_1 + b.Q_2)|\overline{a})|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2)$
On veut prouver que à partir de P on peut déduire $\nu a Q_1|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(a.Q_1 + b.Q_2)|\overline{a} \to Q_1 \mid \mathbf{0}}\text{(REACT)}}{(a.Q_1 + b.Q_2)|\overline{a} \to Q_1}\text{(STRUCT)}}{\nu a((a.Q_1 + b.Q_2)|\overline{a}) \to \nu a.Q_1}\text{(RES)}}{\nu a((a.Q_1 + b.Q_2)|\overline{a})|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2) \to \nu a Q_1|(\overline{b}.R_1 + \overline{a}.R_2)}\text{(PAR)}$$

LTS et CCS

Définition LTS pour un processus P

Le LTS associé à un processus P = <Q,T> avec :

- Q = {P' | P $\xrightarrow{*}$ P' est possible}
- T = {P' $\xrightarrow{\alpha}$ P'' | P' $\xrightarrow{\alpha}$ P'' est possible $\wedge$ P', P'' $\in$ Q }

Transitions et chemins

- Une transition P' $\xrightarrow{\alpha}$ P'' est possible si on peut l'inférer à partir de règles de transition.
- Un chemin $P_0 \xrightarrow{+} P_n$ est possible s'il existe $P_1, ..., P_{n-1}, \alpha_1, ..., \alpha_n$ t.q. $P_0 \xrightarrow{\alpha_1} P_1$; $P_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} P_{i+1}$; $P_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} P_n$ sont toutes possibles.
- Un chemin P' $\xrightarrow{*}$ P'' est possible si P' $\equiv$ P'' ou P' $\xrightarrow{+}$ P''

Règles de transition

$$\frac{}{\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P}\ (\text{act}) \qquad \frac{P \xrightarrow{\overline{a}} P' \qquad Q \xrightarrow{a} Q'}{P|Q \xrightarrow{\tau} P'|Q'}\ (\text{sync})$$

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P'|Q}\ (\text{par}) \qquad \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P + Q \xrightarrow{\alpha} P'}\ (\text{sum})$$

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha} P' \qquad \alpha \notin \{\overline{a}, a\}}{\nu a P \xrightarrow{\alpha} \nu a P'}\ (\text{res}) \qquad \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{\text{P[a/b]} \xrightarrow{\alpha[a/b]} \text{P' [a/b]}}\ (\text{ren})$$

$$\frac{P\{v_1/x_1, ..., v_n/x_n\} \xrightarrow{\alpha} P' \qquad \text{avec } D(x_1, .., x_n) = P}{D\langle v_1, .., v_n\rangle \xrightarrow{\alpha} P'}\ (\text{call})$$

$$\frac{P \equiv P' \qquad P \xrightarrow{\alpha} Q \qquad Q \equiv Q'}{P' \xrightarrow{\alpha} Q'}\ (\text{struct})$$

Déduction

Soients :

A $=_{def}$ $a.A'$ A' $=_{def}$ $\overline{b}.A$

B $=_{def}$ $b.B'$ B' $=_{def}$ $\overline{c}.B$

On veut prouver $\nu b(A'|B) \xrightarrow{\tau} \nu b(A|B')$

Déduction

Soient :

A $=_{def}$ $a.A'$ A' $=_{def}$ $\overline{b}.A$

B $=_{def}$ $b.B'$ B' $=_{def}$ $\overline{c}.B$

On veut prouver $\nu b(A'|B) \xrightarrow{\tau} \nu b(A|B')$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\overline{b}.A \xrightarrow{\overline{b}} A}\ (\text{act})}{\text{A'} \xrightarrow{\overline{b}} \text{A}}\ (\text{call}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\text{b.B'} \xrightarrow{b} \text{B'}}\ (\text{act})}{\text{B} \xrightarrow{b} \text{B'}}\ (\text{call})}{A'|B \xrightarrow{\tau} A|B'}\ (\text{sync})}{\nu b(A'|B) \xrightarrow{\tau} \nu b(A|B')}\ (\text{res})
$$

Réplication

CCS avec réception répliquée est donné par la syntaxe suivante :
$P ::= O \mid P|P \mid \sum_i \alpha_i.P_i \mid (\nu a)P \mid !a.P$

avec la règle : $(\overline{a}.Q \mid !a.P) \rightarrow (Q \mid P \mid !a.P)$

$!a.(\overline{b} \mid \overline{b} \mid \overline{c}) \mid !b.(\overline{c} \mid \overline{c}) \mid \overline{a} \mid \overline{a} \mid \overline{b} \mid c$

Traduction de CCS en Petri Nets

Références

Robin Milner
“Communicating and mobile systems : the π-calculus”